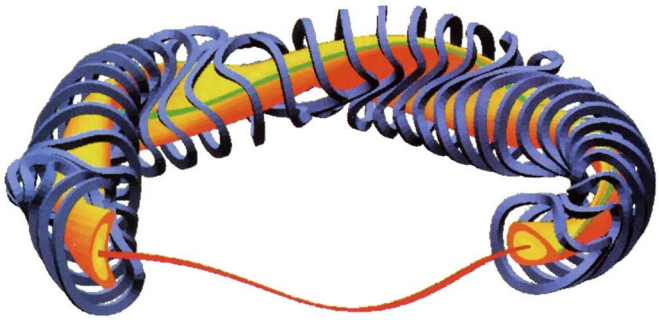
Plasmaphysik und Fusionsforschung II

Gerd Fußmann

Vorlesung
an der

Humboldt-Universität zu Berlin

Winter-Semester 2002/2003



Inhalt

8 DAS ENERGIEPROBLEM 4

8.1 ENERGIEBEDARF 4
8.2 CO_2-BEDINGTE KLIMAVERÄNDERUNGEN 5
8.3 DIE ENERGIERESSOURCEN 6
8.4 LANGFRISTIGE ENERGIEVERSORGUNG 7
8.4.1 Alternative Energien 7
8.4.2 Energie durch Kernspaltung 9
8.4.3 Energie durch Kernfusion 10

9 KERNFUSIONSPROZESSE IN STERNEN UND LABORPLASMEN 11

9.1 FUSIONSPROZESSE IN DEN STERNEN 12
9.2 WICHTIGE FUSIONSREAKTIONEN IN LABORPLASMEN 15
9.3 THERMONUKLEARE FUSIONSRATEN 17
9.4 MYONISCH KATALYSIERTE FUSION 20

10 KERNVERSCHMELZUNG DURCH TRÄGHEITSEINSCHLUSS 22

10.1 ELEMENTARE BETRACHTUNGEN UND FUSIONSKRITERIEN 22
10.2 DAS KONZEPT DER ZENTRALEN ZÜNDUNG 24
10.3 STAND DER LASERFUSION 26
10.4 FAST-IGNITION-EXPERIMENTE MIT ULTRA-KURZZEIT-LASERN 28
10.5 ZUSAMMENFASSUNG 29

11 MAGNETISCHER EINSCHLUSS 30

11.1 SPIEGEL- UND CUSP-MASCHINEN 31
11.2 TOROIDALE KONFIGURATIONEN 34
11.2.1 Tokamaks und Stellaratoren allgemein 34
11.2.2 Der Tokamak 36
11.2.3 Der Stellarator 42
11.3 TOROIDALE EFFEKTE UND PLASMAEFFEKTE 55
11.3.1 Plasmaeffekte und Gleichgewicht in zylindrischer Näherung 55
11.3.2 Magnetfeld-Ergodisierung im Torus 56
11.4 MODULARE STELLARATOREN 57

12 ZÜND- UND REAKTORKRITERIEN 59

12.1 DAS LAWSON-KRITERIUM 60
12.2 ZÜNDBEDINGUNG FÜR DAS D-T-PLASMA 61
12.3 BREAK-EVEN-BEDINGUNGEN 63
12.4 EINFLUß VON VERUNREINIGUNGEN 65
12.4.1 Verdünnungseffekte 65
12.4.2 Strahlungseffekte 66

13 PLASMASTRAHLUNG 68

13.1 KONTINUUMSSTRAHLUNG 69
13.1.1 Plasmabremsstrahlung 69
13.1.2 Rekombinationsstrahlung 76
13.1.3 Rekombinationswahrscheinlichkeit 80
13.2 LINIENSTRAHLUNG 81
13.3 DIELEKTRONISCHE 84
13.3 REKOMBINATION UND CHARAKTERISTISCHE RÖNTGENSTRAHLUNG 84
13.4 STOßIONISATION UND CORONAGLEICHGEWICHT 88
13.4.1 Elektronenstoßionisation 88
13.4.2 Coronagleichgewichte 89

14 GLEICHGEWICHT UND PFIRSCH-SCHLÜTER-TRANSPORT IM TOKAMAK 91

14.1 TOKAMAKGLEICHGEWICHT 91
14.1.1 Näherungslösungen bei großem Aspektverhältnis 93
14.1.2 Beziehungen zwischen Flüssen und Strömen 94

14.1.3 Toroidale und poloidale Stromdichten *95*
14.1.4 Gleichgewichtslösungen für eine Klasse von Profilen *100*
14.2 QUALITATIVE BETRACHTUNGEN 106
14.3 PFIRSCH-SCHLÜTER-STRÖME UND TRANSPORT IM TORUS 107

15 LITERATUR 110

8 DAS ENERGIEPROBLEM

Im Kapitel 1 haben wir bereits einen Überblick über die verschiedenen Forschungs- und Anwendungsbereiche der Plasmaphysik gegeben. Ein erheblicher Teil der anwendungsorientierten Forschung befaßt sich mit der Energiegewinnung aus kontrollierter Kernfusion. Die hiermit verbundenen physikalischen Fragen und Untersuchungen sollen in den folgenden Kapiteln näher beleuchtet werden. In diesem Abschnitt wollen wir jedoch zunächst die Gründe diskutieren, die die Aufwendungen für diese Forschungen (in der BRD zur Zeit 160 Mill. Euro pro Jahr) gerechtfertigt erscheinen lassen.

8.1 Energiebedarf

Die Abb. 8-1 zeigt die Entwicklung des weltweiten Energieverbrauchs von 1870 bis 1989. Insgesamt ergibt sich eine rasch ansteigende Kurve, die nur einige krisenbedingte Einbrüche aufweist. In den Jahren 1975 bis 1983 wurde als Folge der Ölkrise eine Stagnation des Verbrauchs festgestellt, die weitgehend durch einen sparsameren Umgang mit Energie erklärt werden kann. Diese Erscheinung hat große Hoffnungen geweckt, und vielerorts ist man auch heute noch der Auffasssung, daß sich die gesamte Energieproblematik durch Sparmaßnahmen bewältigen lasse. Ein Blick auf Abb. 8.1 zeigt aber, daß bereits seit 1983 der Energieverbrauch wieder stark zugenommen hat. Sicherlich ist dieser Anstieg auch ein Zeichen für eine nicht konsequente Fortführung der Energieeinsparungen. Man darf andererseits jedoch nicht verkennen, daß der stetige Anstieg des Energiebedarfs auf zwei gewichtigen Antriebsfaktoren beruht:

- der raschen Zunahme der Weltbevölkerung (derzeit 1 Milliarde je 10 Jahre)
- dem Nachholbedarf in den Entwicklungsländern

Nach Schätzungen der UNO wird die Weltbevölkerung von zur Zeit 5 auf etwa 12 Milliarden in der Mitte des 21. Jahrhunderts angestiegen sein. Der zweite Punkt betrifft die enormen regionalen Unterschiede im Energieverbrauch. Während der mittlere Energieverbrauch pro Kopf bei etwa 2 kW liegt, beträgt er in den hochentwickelten Industrieländern 10 kW, in den unterentwickelten Ländern dagegen nur 0,1 kW. Diese Verhältnisse sind in der Abb. 8-2 wiedergegeben, in der als Abszisse die Bevölkerungszahl aufgetragen ist. Eine Umverteilung des Verbrauchs auf den derzeitigen Mittelwert würde bei den USA eine Einsparung um den Faktor 11/2 = 5,5 erforderlich machen. Auch in Westeuropa und Japan liefe es auf mehr als eine Halbierung des Energiekonsums hinaus.

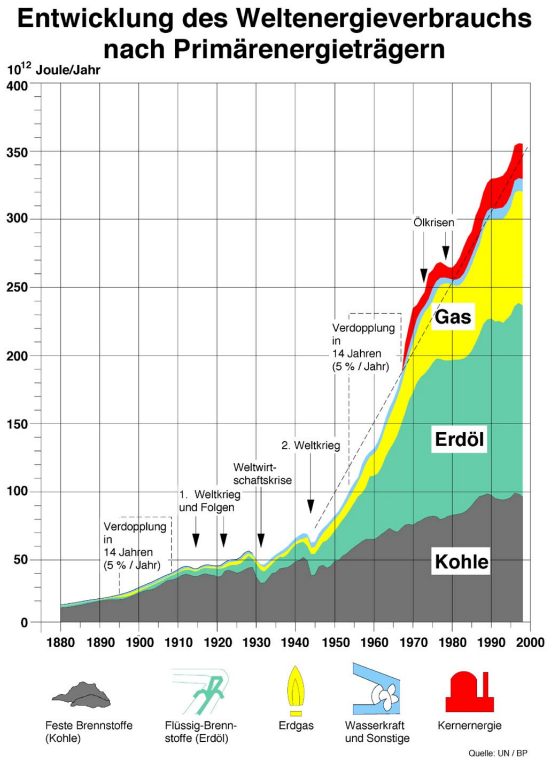


Abb. 8-1: Der Weltenergieverbrauch über der Jahreszahl. Man beachte den starken Anteil,der auf die drei Hauptenergieträger Kohle, Öl und Erdgas entfällt. Wasserkraft und Energie aus Kernspaltung tragen je weniger als 5% bei.

Es steht außer Frage, daß der angestrebte Anschluß der unterentwickelten Länder an die Hoch-Industrienationen mit einem weiteren Anstieg des Energiebedarfs in diesen Ländern verbunden ist. Neuere Studien belegen außerdem eine starke Antikorrelation zwischen Energieverbrauch und Bevölkerungszuwachs. Hierfür mögen folgende Gründe von Belang sein: 1) Die modernen Industrienationen bieten ihren Bürgern auch ohne eigene Kinder soziale Absicherungen. 2) Es bieten sich zahlreiche

Möglichkeiten der persönlichen Entfaltung in Beruf und Freizeit (Reisen), bei der Kinder eher hinderlich sind.

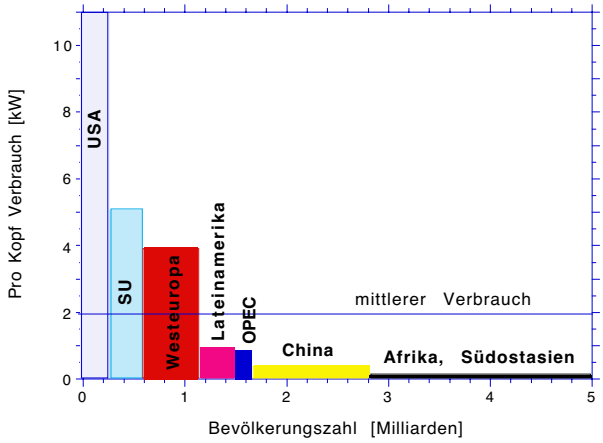


Abb. 8-2: Der Energieverbrauch pro Kopf in den verschiedenen Ländern (Stand 1989).

Auf diesem Hintergrund kommt man zu einer eher ernüchternden Beurteilung, allein durch Energieeinsparung den künftigen Energiebedarf decken zu können. Selbst wenn man davon ausgehen könnte, daß alle Nationen – die hochentwickelten durch Sparmaßnahmen – einem um 25% gesenkten europäischen Lebensstandard zustrebten, würde der Energieverbrauch in den nächsten Jahrzehnten weiterhin stark ansteigen und erst etwa in der Mitte des nächsten Jahrhunderts auf einem fünf- bis zehnfach höheren Niveau als heute ($3{,}5 \cdot 10^{20}$ J/a = $11 \cdot 10^{12}$ W) zum Stillstand kommen. Hierbei wurde vorausgesetzt, daß die Weltbevölkerung nicht über die extrapolierte Zahl von 12 Milliarden Menschen anwächst.

8.2 CO_2-bedingte Klimaveränderungen

In der Abb. 8-1 ist zudem der Energieverbrauch nach den Quellen aufgeschlüsselt. Besonders Erdöl und Erdgas weisen eine starke Zunahme auf, dagegen ist der Beitrag der Kernenergie und der Wasserkraft mit zusammen weniger als 10% auch heute noch sehr gering. Dieser geringe Anteil der nicht-fossilen Energieträger ist insbesondere unter dem Aspekt der CO_2-Belastung der Atmosphäre zu sehen. Der Verbrauch der fossilen Energie in Form von Kohle, Erdöl und Erdgas als Hauptenergieträger führt zu einer gefährlichen Anreicherung der Atmosphäre an Kohlendioxid, die über den bekannten Treibhauseffekt eine drastische Klimaveränderung herbeiführen kann. Daß diese Befürchtungen nicht zu Unrecht bestehen, belegt die Tabelle 8.1, in der die gespeicherten C-Mengen zusammengestellt sind. Eine Verbrennung des gesamten Kohlenstoffs in den fossilen Energieträgern würde danach im Vergleich zum C-Gehalt der Atmosphäre etwa die vierfache Menge an CO_2 freisetzen.

Atmosphäre	Biomasse	Humus	Fossilien	Ozeane
0,7 (0,6 vorindustriell)	0,7	≈ 2	≈ 2,5	38

Tabelle 8.1: Gespeicherte Kohlenstoffmengen in 10^{15} kg

Der stetige Anstieg des CO_2-Gehalts in der Luft wird durch Messungen in industriefernen Gebieten (z.B. auf Hawai) belegt. So stieg im Zeitraum 1960 - 1980 die Konzentration von 310 auf 345 ppmv (parts per million in volume) an. Zwar ist der größte Prozentsatz der Kohlendioxidmengen in den Tiefen der Weltmeere gespeichert, doch ist der Austausch über die Oberfläche sehr langsam, so daß diese großen Mengen in der Kurzzeitbilanz über einige Jahrzehnte keine große Rolle spielen.

Eine zusätzliche Verstärkung erfährt der Treibhauseffekt durch die antropogene Freisetzung von CH_4, NO_2 und Fluorkohlenwasserstoffen (FCKW), die die verbleibenden Transmissionslücken im Infraroten schließen und somit zu einem weiteren Temperaturanstieg auf der Erdoberfläche beitragen.

8.3 Die Energieressourcen

Um eine Vorstellung zu erhalten, wie lange die bekannten Vorräte noch reichen, sind die Schätzwerte für die wichtigsten Energiequellen in der Tabelle 8.2 in Joule angegeben[1]. Teilen wir diese Werte durch den derzeitigen Verbrauch von $3{,}5\cdot10^{20}$ J/a, so erhalten wir eine "Versorgungszeit". Diese Zeitspanne hat insofern einen hypothetischen Charakter, als sie einerseits wegen der Nichtberücksichtigung des Anstiegs eine Überschätzung darstellt, andererseits aber auch eine Unterschätzung sein mag, da noch weitere Ressourcen gefunden werden können. Auch ist anzunehmen, daß bei zunehmender Verknappung der Vorräte solche Energiequellen, die heute aus Kostengründen für nicht abbauwürdig gehalten werden, attraktiv werden.

Ressourcen	**Energievorrat** (J)	**"Versorgungszeit"** (Jahre)
Öl	$1\cdot10^{22}$	30
Teersand, Schieferöl	$1\cdot10^{22}$	30
Erdgas	$0{,}7\cdot10^{22}$	20
Kohle	$5\cdot10^{22}$	140
Leichtwasserreaktor (^{235}U)	$0{,}5\cdot10^{22}$	14
Schneller Brüter (^{238}U)	$5\cdot10^{23}$ (Land) $3\cdot10^{25}$ (Meer)	1 400 85 000
Kernfusion (Li)	$2\cdot10^{24}$ (Land) $5\cdot10^{27}$ (Meer)	8 600 10 000 000

Tabelle 8.2: Energievorräte und voraussichtliche Versorgungszeiten auf der Basis des derzeitigen Verbrauchs.

Wir entnehmen der Tabelle 8.2, daß die fossilen Vorräte an Öl und Erdgas relativ gering sind, so daß es hier schon in den nächsten 20 Jahren zu einer erheblichen Verknappung kommen wird. Die Kohlevorräte dagegen sind etwa fünfmal größer und könnten die Versorgung über einige Jahrzehnte bis etwa 150 Jahre sichern.

Auch bei der Kernenergieversorgung durch die derzeit fast allein genutzten Leichtwasserreaktoren kommt es zu einer schnellen Erschöpfung der Vorräte des Uranisotops 235. Eine wesentliche Streckung der Uranvorräte ist nur unter Verwendung der *Schnellen Brüter* zu erreichen. Bei Extraktion der im Meerwasser gelösten Uranmengen (oder auch Thorium) reichen die Vorräte für viele Jahrtausende. Noch günstiger liegen die Verhältnisse bei der *kontrollierten Kernfusion*. Hier ist Lithium das kritische Element, das zum "Brüten" des Tritiums benötigt wird. Die im Meer vorkommenden Mengen sind jedoch so groß, daß hiermit ein gleichsam unerschöpfliches Energiereservoir vorhanden ist.

Beschränkt man sich allein auf den Verbrauch der fossilen Vorräte, so werden diese spätestens in der Mitte des nächsten Jahrtausends erschöpft sein. Die Abb. 8-3 gibt den Verlauf des Verbrauchs als Funktion der Jahreszahl wieder, wobei die Kurve über 2000 hinaus natürlich hypothetisch ist. Etwa im Jahr 2500 sind danach diese Vorräte aufgebraucht und der Verbrauch geht auf null zurück. Die Fläche unter Kurve stellt den gesamten – in der fernen Vergangenheit angelegten – fossilen Energievorrat dar, der erst mit Beginn des 19. Jahrhunderts nennenswert abgebaut wird[2]. Bereits im Jahr 2000 war hiervon schon ein beachtlicher Teil verbraucht (schraffierter Bereich unter der Kurve).

[1] Häufig benutzt man die Energieeinheit 1 Q = 10^{22} J = 30 TWa = $3\cdot10^{10}$ t Steinkohleeinheiten (SKE)

[2] Man schätzt, daß zur Zeit die in einem Jahr verbrauchten Vorräte innerhalb von einer Millionen Jahre durch Umwandlung von Sonnenenergie entstanden sind.

Nach der Erschöpfung der fossilen Vorräte wird die Menschheit zwangsläufig auf eine oder mehrere der verbleibenden Alternativen zurückgreifen müssen. Aus heutiger Sicht kommen dafür in erster Linie Sonnen-, Wind-, Kernspaltungs- oder Kernfusionsenergie in Frage. In gewissem Umfang mag auch *Erdwärme* und *Wasserkraft* genutzt werden, doch sind hier die Möglichkeiten durch die naturgegebenen Quellstärken sehr begrenzt. So beträgt der insgesamt aus dem Erdinnern an die Oberfläche dringende Wärmestrom 10^{21} J/a; er ist damit nur etwa dreimal größer als der heutige Energiebedarf. Im Vergleich dazu ist die von der Sonne empfangene Strahlungsleistung von $5{,}4 \cdot 10^{24}$*J/a mehr als das 5000fache*.

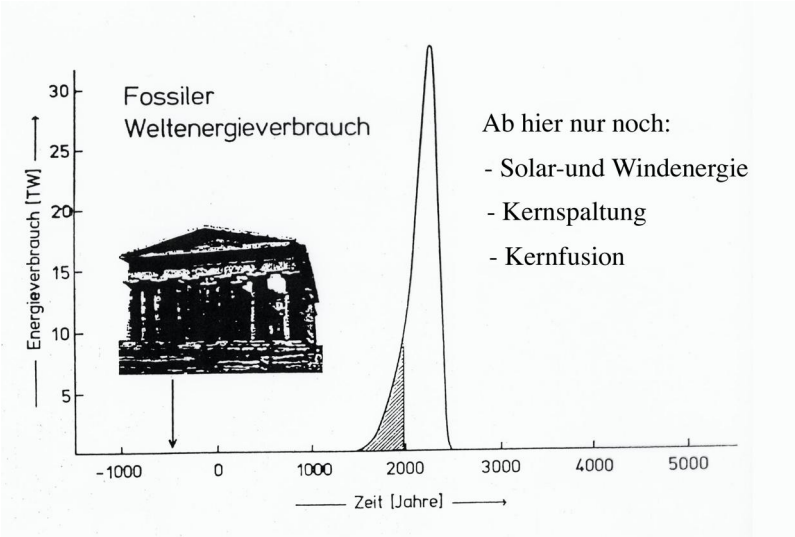


Abb. 8-3: Der Verbrauch der fossilen Energievorräte in der Vergangenheit und Zukunft (extrapoliert). Bei ungeänderten Verhältnissen werden die Vorräte etwa in der Mitte des nächsten Jahrtausends verbraucht sein.

8.4 Langfristige Energieversorgung

In Anbetracht der Begrenztheit der fossilen Vorräte und der mit ihrer Nutzung verbundenen Klimastörungen ist es höchste Zeit, die sich bietenden Alternativen genauer auszuloten und ihre Entwicklung zu fördern.

Ohne auf die schwierige Aufgabe der Bewertung der verschiedenen Verfahren im Detail einzugehen, sollen im folgenden doch einige wichtige Gesichtspunkte aufgeführt werden, die im Zusammenhang mit der großökonomischen Nutzung von Bedeutung sind. Grundsätzlich ist bei diesen in die Zukunft weisenden Energiegewinnungsverfahren eine alleinige Beurteilung nach den Kosten pro Kilowattstunde nicht angebracht, da man zweifellos bereit sein wird, auch höhere Preise hierfür zu zahlen, wenn die billigen Energiequellen nicht mehr zur Verfügung stehen. Unabhängig von den Kosten gibt es jedoch auch eine rein energetische Betrachtungweise auf der Basis der folgenden drei Begriffe:

τ_l = *Lebensdauer* einer energieerzeugenden Anlage

τ_R = *Energierückgewinnungszeit* (energy pay back time)

H = *Energieerntefaktor* (harvest factor)

Großtechnisch kann eine Anlage nur dann sinnvoll sein, wenn die Zeitspanne (τ_R), in der die zu ihrer Herstellung aufgewendete Energiemenge zurückgewonnen wird, kürzer als ihre Lebensdauer ist. Mit anderen Worten: Die Anlage muß mehr als die für ihre Errichtung aufgebrachte Energie wieder einbringen. Der Energieerntefaktor (H = Erzeugte Energie pro Lebensdauer / Energie für Herstellung) drückt dies in einer einzigen Zahl aus. Sinnvoll sind nur Anlagen mit $H > 1$.

Im folgenden wollen wir noch einige kurze Anmerkungen zu den vier Hauptlinien Solarenergie, Windenergie, Kernspaltungsenergie und Fusionsenergie machen.

8.4.1 ALTERNATIVE ENERGIEN

Obwohl die der Erde zugesandte Leistung von $5{,}4 \cdot 10^{24}$ J im Jahr riesig groß ist, ergibt sich für die zeitlich und örtlich gemittelte Energiedichte, die Solarkonstante, der relativ niedrige

Wert von 1,353 kW/m^2. Bis zur Erdoberfläche gelangen allerdings im Jahresmittel nur 340 W/m^2 (in der BRD 110 W/m^2). Aus dieser niedrigen Energiedichte resultiert das Hauptproblem der großtechnischen Nutzung der Sonnenenergie. Solaranlagen werden daher immer große Flächen beanspruchen. Ein Kraftwerk mit einer typischen Ausgangsleistung von 1 GW benötigte in der BRD eine Fläche von etwa 100 km^2, wenn wir einen Wirkungsgrad von 10% bei der Umwandlung von Strahlung in elektrische Energie (Photovoltaik) zugrunde legen. Allein die Aufständerung und Wartung der hierfür benötigten Solarzellen stellt einen erheblichen technischen Aufwand und Kostenfaktor dar, so daß man z.Z. auf eine Kostenschätzung von 1 bis 6 DM/kWh kommt, was mindestens das Zehnfache der derzeitigen Kosten für Energieerzeugung aus Kohle oder Kernkraft darstellt.

Photovoltaik

Bei (dicken) Si-Solarzellen wird derzeit ein maximaler Wirkungsgrad von 15% erreicht. Damit liegen die Realkosten bei etwa 2 - 3 DM/kWh. Günstiger sind die Verhältnisse in Bezug auf Lebensdauer (20 Jahre) und Energie-Rückgewinnungszeit (1 Jahr), die einen Energie-Erntefaktor von H = 20 ergeben. Große Hoffnungen werden derzeit auf die wesentlich preisgünstigeren Dünnschicht-Kollektoren (≈100 nm dick) gesetzt. Allerdings ist der Wirkungsgrad hierbei mit 8% wesentlich schlechter und nimmt zudem – aus noch nicht geklärten Gründen – innerhalb weniger Jahre erheblich weiter ab.

Als weiterer Nachteil kommt die täglich und jahreszeitlich bedingte Schwankung der Sonneneinstrahlung hinzu. Gerade im Winter, wenn der Energiebedarf besonders hoch ist, ist die Sonneneinstrahlung minimal. Es ergibt sich daher die Notwendigkeit der langfristigen Energiespeicherung, für die noch kein brauchbares Konzept existiert. Eine konventionelle Batterietechnik, bei der Schwerelemente wie Blei und Cadmium unabdingbar sind, erscheint schon aus Gründen der Umweltbelastung untragbar. Die Erzeugung von Wasserstoff durch Elektrolyse von Wasser, der später bei Energiebedarf vor Ort wieder zu Wasser verbrannt wird, wird zur Zeit favorisiert. Auch hierbei ergeben sich große technische Probleme, die u.a. auf der hohen Explosionsgefahr von flüssigem oder gasförmigen Wasserstoff beruhen. Dabei sind die zur Diskussion stehenden Mengen enorm. So läßt sich abschätzen, daß für die gesamte Energieversorgung der EU-Staaten mit flüssigem Wasserstoff – der beispielsweise in der Sahara erzeugt würde – täglich 400 Großtanker in den europäischen Häfen gelöscht werden müßten. Außerdem ist bei der Elektrolyse ein weiterer Energieverlust von etwa 50% in Kauf zu nehmen. Man kommt so zur Zeit auf einen geschätzten Energiepreis von 3,50 DM/kWh. Dies gilt unter der günstigen Voraussetzung, daß die mit großem Energieaufwand verbundene Herstellung der Platinelektroden und aller sonstiger Komponenten mit "Billigstrom" nach heutigen Maßstäben erfolgt. Bei einer konsistenten Betrachtung, bei der alle Erzeugnisse aus Solarstrom hergestellt werden, kommt man nochmals zu einer erheblichen Verteuerung des Strompreises (ca. 6,50 DM/kWh). Die Photovoltaik ist damit insgesamt noch relativ weit von einer großwirtschaftlichen Anwendung entfernt.

Solarthermik

Wesentlich günstiger liegen die Verhältnisse bei der Nutzung von Wärmekollektoren mit einem Wirkungsgrad von bis zu etwa 50%. Diese können sinnvollerweise zur Warmwasserbereitung oder Heizung von Gebäuden eingesetzt werden. Für den industriellen Bedarf sind sie jedoch weniger bedeutsam, da man im Produktionsbereich auf elektrische Energie nicht verzichten kann.

Windenergie

In den letzten Jahren hat die Weiterentwicklung der Windgenreratoren erhebliche Fortschritte gezeitigt. Zum einen konnte die Wirtschaftlichkeit der Anlagen verbessert werden, zum anderen wurde die Leistung der Anlagen gesteigert, so daß nunmehr Windgeneratoren mit Leistungen bis zu 2 MW bereits verfügbar sind und solche mit 5 MW in einigen Jahren zur Verfügung stehen werden. Die ins Netz eingespeiste Energie wird dabei mit 8,5 EuroCent/kW vergütet (garantiert nach dem Erneuerbare Energie Gesetz (EEG) bis zum Jahr 2015). Das ist zwar noch deutlich höher im Vergleich zu den Energieerzeugungspreisen von 2 Cent/kW bei der Kernenergie bzw. 4 Cent/kW bei der Importkohle, aber nicht mehr in einem aussichtslos unwirtschaftlichen Bereich.

Insgesamt werden nach Erwartungen des BMWi im Jahr 2002 in Deutschland mit Hilfe der Windenergie 10,7 TWh erzeugt, was bezogen auf die Gesamtstromproduktion von 570 TWh einen Anteil von knapp 2% ausmacht. Da die elektrische Energie aber nur etwa 20% des Primärenergiebedarfs ausmacht, hat die Windenergie hieran den eher bescheidenen Anteil von 0,4%.

Dem zügigen Ausbau der Windenergie stehen einige Probleme entgegen: 1) Mangelnde Akzeptanz in der Bevölkerung wegen der Verschandelung des Landschaftsbildes, 2) Mangel an weiteren günstigen Wind-Standorten, 3) Probleme bei der Einspeisung größerer schwankender Energiemengen ins Netz und schließlich 4) die Erhöhung des Strompreises (z. Z. Zusatzkosten von etwa 1 Mrd. Euro/Jahr). Den Punkten 1) und 2) versucht der entsprechende Industriezweig durch Errichtung von Off-shore-Projekten zu begegnen. Geplant ist zunächst die Einrichtung eines Windparks in der Nordsee (45 km nördlich von Borkum). Hier sollen 220 Windräder eine Gesamtleistung von 800-1000 MW erbringen. Eine deutliche Erhöhung der Leistung verbunden mit einer verminderten Schwankung der Stromstärke ergibt sich sowohl aus der Stärke als aus der Stetigkeit des Windes über See. Allerdings sind die Einrichtungs- und Wartungskosten erheblich höher als an Land, so daß noch nicht feststeht, ob sich unter dem Strich eine Verringerung des Strompreises ergibt.

Generell spielen bislang die erneuerbaren Energien (aus Solar-, Wind-, Erd- und Gezeitenkraftwerken) eine untergeordnete Rolle. Dies gilt auch für Deutschland, wo sie eine überdurchschnittlich große Förderung erfahren. Die Abb. 8-4, die den Primärenergieverbrauch der BRD für 2001 wiedergibt, verdeutlicht dies noch einmal.

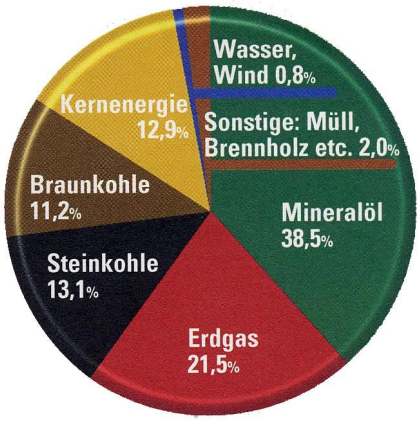


Abb. 8-4: Primärenergieverbrauch in der BRD für das Jahr 2001.

Danach wird es vermutlich noch viele Jahrzehnte dauern, bis man – zusätzlich zur Kernenergie – auf die fossilen Brennstoffe verzichten kann.

Insgesamt sollte aus dem Vorausgehenden keinesfalls der Schluß gezogen werden, daß die alternativen Energien keine Perspektive besitzen. Vielmehr ist auch hier noch viel Forschungs- und Entwicklungsarbeit zu leisten. Das Bundesforschungsministerium, die Länder und die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) tragen diesem Umstand auch Rechnung, indem sie diesen Forschungszweig mit jährlich mehr als 400 Millionen Euro fördert. Hinzu kommen steuerliche Begünstigungen im privaten und kommunalen Bereich sowie industrielle Subventionen durch das Bundeswirtschaftsministerium (z. B. 100 000 Dächer Programm).

8.4.2 ENERGIE DURCH KERNSPALTUNG

Die mit der Kernspaltung verbundenen Probleme

- Gefahr der Freisetzung großer Mengen radioaktiven Materials bei außer Kontrolle laufenden Kettenreaktionen im Reaktorkern
- Endlagerung der radioaktiven Zerfallsprodukte

sind hinreichend bekannt. Diese Negativposten werden besonders brisant, wenn man bedenkt, daß eine vollständige Versorgung der Menschheit mit Kernkraft auf dem heutigen Niveau von 11 TW bereits den Bau von mehr als 5000 Kernkraftwerken (je 2 GW elektrisch) bedingen würde. Auf der positiven Seite stehen dagegen die niedrige Emission (kein CO_2), die hohe Verfügbarkeit (95% des Jahres) und der niedrige Energiepreis bei den Kernspaltungsreaktoren. Die Energierückgewinnungszeit ist mit drei Monaten ebenfalls außerordentlich niedrig. Bei einer Betriebsdauer von 20 Jahren kommt man damit bereits auf einen Erntefaktor von H = 80.

Wie bereits diskutiert, kommen als langfristige Lösung nur schnelle Brüter in Betracht, die infolge ihrer größeren Kompaktheit (höherer Neutronenfluß) ein größeres Risiko darstellen. Außerdem wird eine chemische Aufbereitung der bereits benutzten Brennstäbe erforderlich, um die entstandenen Mengen an Plutonium wiederverwerten zu können. Aus diesen Gründen

hat man bisher das Schnelle-Brüter-Konzept nur in Frankreich und Japan mit einiger Konsequenz verfolgt.

8.4.3 ENERGIE DURCH KERNFUSION

Diese dritte, langfristige Option konnte bisher noch nicht realisiert werden. Es existieren zwar Modelle für Kernfusionsreaktoren, doch sind bis zum Bau eines Demonstrationsreaktors noch eine Reihe von physikalischen und technischen Problemen zu überwinden, die wir später genauer erörtern wollen. Die Attraktivität eines Fusionsreaktors beruht auf folgenden Aspekten:

- Inhärente Sicherheit gegenüber unkontrollierter Leistungszunahme (keine Kettenreaktion)
- Langfristige Energiesicherung aufgrund reichlicher Vorkommen der Brennmaterialien und der sonstigen benötigten Materialien
- Keine radioaktiven Verbrennungsrückstände
- Keine CO_2-Emmissionen

Als nachteilig müssen insbesondere der Bedarf an radioaktivem Tritium (ein weicher β-Strahler mit einer Halbwertzeit von 12,3 Jahren) und die Aktivierung der Strukturmaterialien (erste Wand) aufgrund der produzierten Neutronen angesehen werden. Im Vergleich zum Spaltungsreaktor, der unabdingbar zahlreiche langlebige Isotope und Transurane produziert, hat man beim Fusionsreaktor jedoch die Möglichkeit, durch Wahl der Wandmaterialien die Aktivierung erheblich zu reduzieren. Die Abb. 8.4 demonstriert insbesondere die in dieser Hinsicht günstige Eigenschaft von Vanadiumstählen. Das Bild zeigt das radioaktive Abklingen der Materialien nach Abschalten von Kohlekraftwerken mit Spalt- bzw. Fusionsreaktoren gleicher Leistung. Alle drei Reaktortypen mit einer elektrischen Leistung von 1 GW waren 25 Jahre in Betrieb. Nach 100 Jahren ist die spezifische Aktivität des Vanadiumstahls des Fusionsreaktors auf die der entstandenen Kohleasche (diese sehr langlebige Aktivität ist hier zu 1 normiert) abgeklungen. Bei Verwendung von normalen Stählen (mittlere Kurve) ist die Aktivierung etwa zehnmal so hoch. Die Zerfallsprodukte und Transurane des Spaltungsreaktors (obere Kurve) sind dagegen nur sehr schwach abgeklungen und liegen nochmals um etwa einen Faktor 5000 darüber.

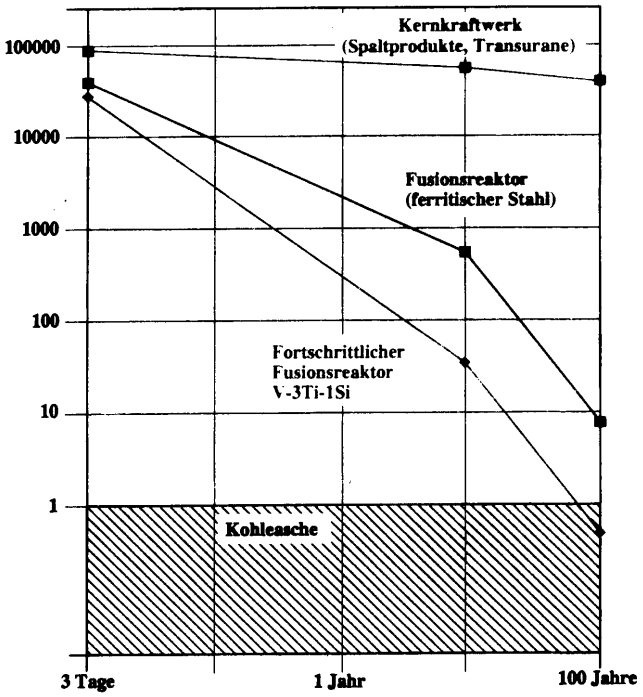


Abb. 8-5: Relatives Gefährdungspotential von Fusions- und Spaltungs-Reaktoren nach Abschalten im Vergleich zur Aktivität der entstandenen Asche eines Kohlekraftwerks.

9 KERNFUSIONSPROZESSE IN STERNEN UND LABORPLASMEN

Ebenso wie man aus Molekülen und Atomen Energie durch chemische Reaktionen gewinnen kann, ergibt sich die Möglichkeit, aus den Atomkernen Energie durch *Kernumwandlung* zu erhalten. Bei den chemischen Prozessen wird elektrische Energie freigesetzt, indem aus ungebundenen Atomen oder verhältnismäßig lose gebundenen Molekülen (z.B. $O_2 + 2\ H_2$) fester gebundene Moleküle ($2\ H_2O$) entstehen. Die freiwerdende, negative Bindungsenergie liegt bei den chemischen Prozessen im Bereich von einigen eV pro Molekül.

Ganz analog ergibt sich eine Energiefreisetzung, wenn man aus lose gebundenen Kernen stabilere mit höherer Bindungskraft aufbaut. Wie bereits im Kapitel 1.4 dargelegt, bietet sich hierfür sowohl die *Kernspaltung* wie auch die *Kernfusion* an, da die stabilsten Kerne solche mit mittlerer Kernladungszahl (maximale Bindungsenergie hat das Isotop ^{56}Fe) sind. Da die an der Bindung der Atomkerne beteiligten *Kernkräfte* (starke Wechselwirkung) etwa einmillionenmal stärker sind als die in der Atomhülle auftretenden elektromagnetischen Kräfte, ist die pro Elementarprozeß freiwerdende Energie etwa um den gleichen Faktor erhöht und beträgt typischerweise einige MeV.

Bereits 1923 äußerte der berühmte *E. Rutherford* die Vermutung, daß die in der Sonne produzierten, ungeheuren Energiemengen aus Kernverschmelzungsprozessen stammen müßten, da alle bekannten chemischen Energiequellen sich viel zu schnell erschöpfen würden. Mit der bereits von *A. Einstein* im Jahre 1905 angegebenen wichtigen Äquivalenzbeziehung zwischen Masse und Energie

$$E = mc^2 \quad bzw. \quad \Delta E = \Delta m c^2 \tag{9.1}$$

und den bereits näherungsweise bekannten Massen von He und H konnte man den Energiegewinn bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium entsprechend $\Delta m = 4\ m_H - m_{He} \approx 0{,}028\ m_H \approx 4{,}77 \cdot 10^{-29}$ kg zu ungefähr 26 MeV pro gebildetem Heliumkern abschätzen. Diese Massendifferenz entspricht der höheren Bindungsenergie im ^4He-Kern. Die Rutherfordsche Vermutung sollte sich im Laufe der Jahre bestätigen, doch standen der Akzeptanz dieser plausiblen These zunächst zwei gewichtige Unklarheiten entgegen:

Wie können sich die Protonen gegen die Coulombabstoßung soweit annähern, daß die kurzreichweitigen Kernkräfte (bekannt aus Rutherfordschem Streuversuch mit α-Teilchen) wirksam werden?

Wie vollzieht sich der Verschmelzungsprozeß? Nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit ist es nahezu ausgeschlossen, daß sich gleichzeitig vier Protonen hinreichend nahe kommen.

Der erste Punkt stellte in der Tat ein schwerwiegendes Problem dar, da der englische Astrophysiker *Sir A. Eddington* 1926 die Temperatur im Sonneninnern zu lediglich $40 \cdot 10^6$ K abgeschätzt hatte – ein Wert, der vom aktuellen Wert $15 \cdot 10^6$ K nicht sehr stark abweicht. Diese Temperatur erschien aber erheblich zu niedrig, da man etwa 10^{10} K fordern mußte, sollten die Protonen hinreichend hohe Energie besitzen, um die Coloumbabstoßung zu überwinden und sich bis auf den Kernabstand von ca. 10^{-15} m nähern können. Aus dieser Klemme half die Entdeckung des quantenmechanischen **Tunneleffekts** durch *G. Gamow* im Jahre 1928. Durch Umkehrung dieses von Gamow für die Erklärung des α-Teilchenzerfalls herangezogenen Effektes konnten *R. E. Atkinson* und *F. G. Houtermans* 1929 zeigen, daß Fusionseffekte schon bei wesentlich größeren Stoßparametern ablaufen, mithin einen deutlich höheren Wirkungsquerschnitt besitzen, als man nach der klassischen Mechanik berechnet hatte. Die Wahrscheinlichkeit, die Coloumbbarriere zu durchtunneln, ergibt sich nach Gamow zu

$$G \approx e^{-\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\varepsilon_0 h u}} \tag{9.2}$$

worin u die Relativgeschwindigkeit der beiden Kerne und Z_1 und Z_2 ihre Ladungszahlen sind. Hieraus erklären sich zwei wesentliche Eigenschaften der Fusionsreaktionen:

- Fusionsreaktionen zeigen eine sehr steile Energie- bzw. Temperaturabhängigkeit
- Fusionsreaktionen sind auf niedrig geladene Kerne beschränkt

Wie in der Abb. 9.1 skizziert, kommt zu der Erleichterung durch den Tunneleffekt bei einigen Fusionsprozessen noch ein weiterer Effekt, indem der gebundene Kern Anregungszustände besitzt, die zu *resonantem Einfang* mit besonders großen Fusionsquerschnitten führen.

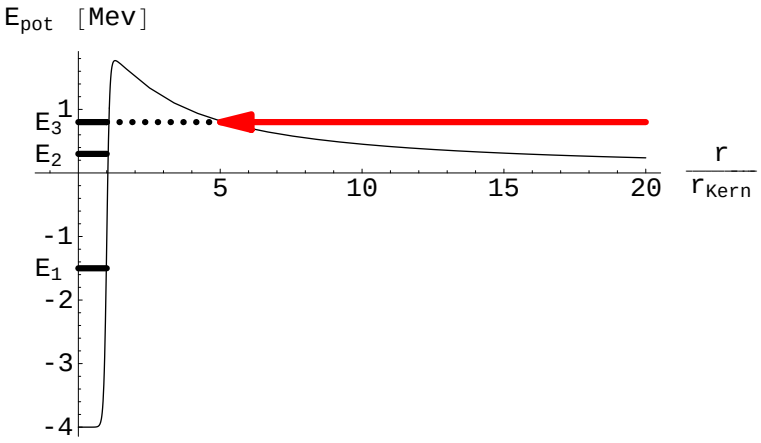


Abb. 9.1: Schematik der Kernfusion: Der einfallende Kern (Pfeil) wird durch die Coloumbabstoßung stark abgebremst. Aufgrund des quantenmechanischen Tunneleffekts kann er aber das anziehende Kernpotential des einfangenden Kerns erreichen, auch wenn dies aus energetischen Gründen nach der klassischen Physik nicht möglich ist. Liegt die Energie in der Nähe eines gebundenen Energiezustandes des Compoundkerns (E_3), so wird der Fusionsprozeß hierdurch nochmals stark begünstigt.

Die zweite Frage, wie die Kernfusionsprozesse in der Sonne und den Sternen tatsächlich ablaufen, konnte erst wesentlich später, nämlich im Jahr 1938, aufgeklärt werden. Wir gehen auf diese Prozesse und auf die für die kontrollierte Kernfusion besonders bedeutsamen Fusionsreaktionen in den folgenden Kapiteln näher ein.

9.1 Fusionsprozesse in den Sternen

Im Jahr 1967 erhielt der in den USA lebende Physiker *Hans Bethe* den Nobelpreis für seine bereits im Jahre 1938 gemachte Entdeckung des CNO-Zyklus. Dieser in den schweren Sternen ablaufende Fusionsprozeß war gleichzeitig und unabhängig von *Carl Friedrich von Weizsäcker* gefunden worden. Bethe hatte darüber hinaus aber auch die Fusionsreaktion gefunden, die in der Sonne und in den Sternen von etwa gleicher oder leichterer Masse die Energieproduktion bestimmen. Wir gehen auf diesen sogenannten **Proton-Proton-Prozeß**, bei dem Wasserstoff in Helium umgewandelt wird, zunächst ein. Die Prozeßfolge läßt sich wie folgt darstellen:

$$
{}^1H(p,e^+\nu)\,{}^2D(p,\gamma)\,{}^3He\begin{cases} {}^3He({}^3He,2p)\,{}^4He \Rightarrow PPI(26.23MeV) \\ {}^3He(\alpha,\gamma)\,{}^7Be\begin{cases} {}^7Be(e^-,\nu)\,{}^7Li(p,\alpha)\,{}^4He \Rightarrow PPII(25.67MeV) \\ {}^7Be(p,\gamma)\,{}^8B(e^+\nu)\,{}^8Be(2\alpha) \Rightarrow PPIII(19.28MeV) \end{cases} \end{cases}
$$

Der vollständige pp-Kettenprozeß

Es wird zunächst aus zwei Protonen unter Abgabe eines Positrons und eines Neutrinos Deuterium und danach unter weiterer Aufnahme eines Protons bei freiwerdender γ-Strahlung ^{3}He gebildet. Hierauf setzt eine Verzweigung ein: Bei niedrigen Temperaturen läuft der obere, als PPI-Zweig bezeichnete Prozeß bevorzugt ab, wobei je zwei ^{3}He-Isotope miteinander fusionieren und unter Aussendung von zwei Protonen den Endkern ^{4}He bilden. Dieser Prozeß ist in der Abb. 9.2 plastisch illustriert. Mit zunehmender Temperatur wird die untere Reaktion wichtiger, bei der ^{3}He unter Aufnahme eines ^{4}He-Kerns (α-Teilchen) zunächst in das leicht instabile Berylliumisotop ^{7}Be ($T_{1/2}$ = 54 d) umgewandelt wird. Hiernach setzt eine weitere Verzweigung ein, bei der entweder ^{7}Li (PPII-Zweig) oder ^{8}B (PPIII-Zweig) als Zwischenkerne gebildet werden. Der Kern ^{8}B ist radioaktiv und zerfällt als Positroniumstrahler mit einer Halbwertzeit von 0,78 s in das höchst instabile ^{8}Be ($T_{1/2}$ = 1,4·10^{-16} s), das sich praktisch sofort in zwei ^{4}He-Kerne zersetzt. Insgesamt werden nach dem pp-

Prozeß im Sonnenzentrum bei Temperaturen um $15 \cdot 10^6$ K = 1.3 keV pro Sekunde 600 Millionen Tonnen Wasserstoff zu 595,7 Millionen Tonnen Helium verschmolzen. Die Differenz von 4,3 Millionen Tonnen wird in die ungeheure Energiemenge von $3{,}85 \cdot 10^{26}$ J umgewandelt.

Bei der gesamten Reaktion ist die erste Stufe, die Bildung von Deuterium aus Wasserstoff, die langsamste. Dies erklärt sich aus dem Umstand, daß es sich hierbei um einen Prozeß der *schwachen Wechselwirkung* handelt, was an den freiwerdenden Positronen (e^+) und *Neutrinos* (ν) erkennbar ist. Die hierbei gebildeten Neutrinos besitzen eine kontinuierliche Energieverteilung mit einer oberen Grenzenergie von 0,42 MeV. Sie können in dem zur Zeit im Gran Sasso-Gebirge in Italien durchgeführten, aber noch nicht abgeschlossenen Experiment GALLEX quantitativ nachgewiesen werden und geben so Auskunft über die im Sonneninnern ablaufenden Kernprozesse. Hierbei erfolgt der Nachweis über die Reaktion $^{71}Ga(\nu, e^-)\,^{71}Ge$ mit einer Schwellenergie von 0,23 MeV. Das gebildete ^{71}Ge zerfällt mit $T_{1/2}$ = 11,4 d wieder zurück in ^{71}Ga, wobei die Aussendung von *Augerelektronen* als Nachweis dient. Bei früheren Messungen, die in ähnlicher Weise auf der Reaktion $^{37}Cl(\nu, e^-)\,^{37}Ar$ mit einer Schwellenergie von 0,81 MeV beruhten, hatte man nur die beim e^+ -Zerfall des ^8B gebildeten Neutrinos des selteneren PPIII-Zweiges mit einer oberen Grenzenergie von 12 MeV erfaßt. Dabei konnte nur etwa 1/3 der vorhergesagten Neutrinos nachgewiesen werden. Die inzwischen vorliegenden GALLEX-Ergebnisse stimmen zwar besser mit den theoretischen Werten überein, doch konnten auch hier nur bis zu 60% der erwarteten Teilchenströme gefunden werden. Zur Zeit werden vor allem *Neutrino-Oszillationen* als Erklärung für diese Diskrepanz zwischen Messung und theoretischer Erwartung diskutiert. Danach können sich die Neutrinos der drei Elementarteilchen-Familien – auf Grund sehr kleiner, aber endlicher Masse – ineinander umwandeln. Aus den in der Sonne gebildeten Elektronen-Neutrinos entstehen danach während des Fluges zur Erde mit einer Wahrscheinlichkiet von annähernd 50% μ–Neutrinos, die sich des Nachweises im GALLEX-Experiment entziehen.

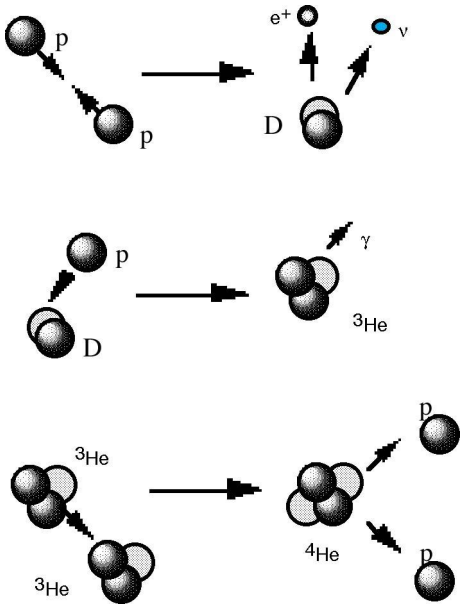


Abb. 9.2: Illustration des PPI-Zweiges des pp-Kettenprozesses. Die Kette wird von oben nach unten fortschreitend durchlaufen.

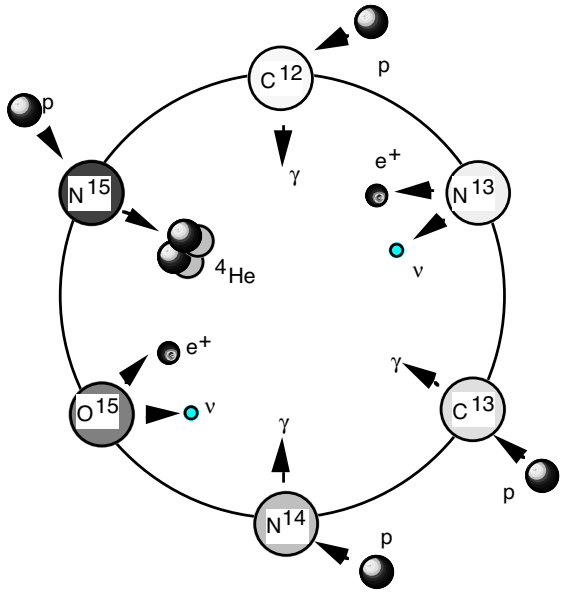


Abb. 9.3: Veranschaulichung des Hauptzyklus des CNO-Kreisprozesses. Der Prozeß wird im Uhrzeigersinn durchlaufen.

Bei Temperaturen oberhalb von $18 \cdot 10^6$ K wird der erwähnte **CNO-Zyklus** wichtiger. Es handelt sich hierbei eigentlich um einen Tri-Zyklus. In dem in Abb. 9.3 veranschaulichten *Hauptzyklus* wird ^4He beim Durchlaufen eines Kreisprozesses erzeugt. Ausgangselement ist hierbei das Kohlenstoffatom ^{12}C, das eine *Katalysatorwirkung* hat und weder verbraucht noch vermehrt wird. Auch die übrigen Kerne ^{13}N bis ^{15}N sind nur Zwischenprodukte und werden nicht angereichert. Insgesamt werden auch bei diesem Prozeß – abgesehen von den Positronen und Neutrinos – nur He-Kerne produziert.

Ausgehend von dem Zwischenkern ^{15}N, können bei höheren Temperaturen noch zwei *Nebenzyklen* bedeutsam werden, die über (p,γ)-Prozesse auf ähnliche Weise Helium erzeugen und als schwersten Zwischenkern ^{18}F bilden. Der gesamte Reaktionszyklus ist in der Abb. 9.4 dargestellt. In dieser Darstellung ist die für Isotopenkarten typische Auftragungsweise gewählt mit der Protonen- und Neutronenzahl als Ordinate bzw. Abszisse.

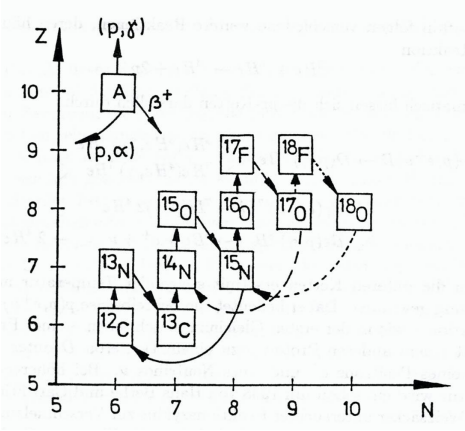


Abb. 9.4: Der CNO-Zyklus mit Hauptzyklus (dicke Pfeile) und Nebenzyklus (gestrichelte Pfeile).

Die Fusionsraten der beiden Prozesse sind in der Abb. 9.5 als Funktion der Temperatur dargestellt. Die Abbildung verdeutlicht die hohe Effizienz des CNO-Zyklus bei hohen Temperaturen. Wegen dieser enormen Zunahme der Fusionsgeschwindigkeit mit der Temperatur verbrauchen schwere Sterne wie etwa *Spica* mit 10-Sonnenmassen und einer zentralen Temperatur von $28 \cdot 10^6$ K den im Zentrum verfügbaren Wasserstoff in wesentlich kürzerer Zeit (etwa 10^8 anstatt 10^{10} Jahre) als die Sonne und strahlen erheblich mehr Leistung ab.

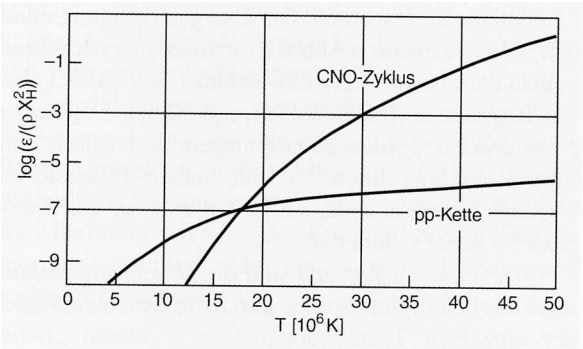


Abb. 9.5: Die normierte Energie-produktion beim pp-Prozeß und beim CNO-Zyklus als Funktion der Temperatur für die Element-mischungsverhältnisse in Population I-Sternen (Sonne). Die Produktionsrate ε (W/kg) wurde durch die Dichte ρ (kg m^{-3}) und die relative Massenhäufigkeit des Wasser-stoffs x_H dividiert. Im Sonneninnern gelten die Werte: $x_H = 0{,}36$; $\rho = 1{,}6 \cdot 10^5$ kg \| m^3; $T = 15 \cdot 10^6$ K; und damit $\varepsilon = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ W kg^{-1}.

Ist etwa 60% der Wasserstoffmasse zu Helium[3] umgewandelt, wird ein neuer Energieerzeugungsprozeß benötigt, der in der Lage ist, den extrem hohen Druck (in der Größenordnung von 10^{10} bar) aufrecht zu erhalten, um die von der Gravitationskraft bewirkte Kontraktion aufzuhalten. Ohne diese Energieerzeugung im Sternzentrum kommt es zwangsläufig zu einem gravitativen Kollaps, der zu den *weißen Zwergen* bzw. *Neutronensternen* oder *schwarzen Löchern* führt. Der sich bei etwa $100 \cdot 10^6$K an die He-Produktion anschließende "3α-Prozeß" ist das *Kohlenstoffbrennen*. Gemäß der Reaktion

$$^4He + ^4He + 95keV \Leftrightarrow {}^8Be + \gamma$$
$$^8Be + ^4He \Leftrightarrow {}^{12}C^* \Rightarrow {}^{12}C + \gamma \ (7{,}28MeV)$$

wird hier zunächst das höchst instabile ^8Be in winziger Konzentration aufgebaut, an das sich vor dem Zerfall nochmals ein He-Kern anlagert, um so das stabile ^{12}C zu bilden.

Vom Kohlenstoff ausgehend, können bei noch höheren Temperaturen durch weitere Anlagerungen von α-Teilchen die Kerne ^{16}O, ^{20}Ne, ^{24}Mg, ^{28}Si fusioniert werden. Neben diesen (α, γ)-Prozessen gibt es zahlreiche andere, wie beispielsweise $^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{24}Ne + \alpha$ oder $^{22}Ne + \alpha \rightarrow {}^{25}Mg + n$. Bei der zuletzt angegebenen Reaktion entstehen *Neutronen*. Durch Einfang dieser Neutronen können in den Spätstadien der Sterne auch schwere Elemente jenseits des Eisens entstehen, die durch Fusionsprozesse wegen der hohen Kernladungen nicht mehr aufgebaut werden können.

[3] Das Ausgangsmassenverhältnis He/H liegt bei etwa 25%. Dieses ^4He wurde bereits im Urknall gebildet. Alle anderen Elemente müssen jedoch nach heutiger Auffassung in (schweren) Sternen entstanden sein.

Uran, Thorium und Aktinium sind in der Natur vorkommende α-Strahler, die charakteristische Zerfallsreihen aufweisen. Da in diesen Zerfallsreihen auch sehr kurzlebige Elemente vorkommen, die durch α–Strahlung zerfallen, können sie nur in einer Umgebung mit extrem hohem Neutronenfluß entstanden sein. Das gleiche trifft auf natürliche Kerne zu, die einen sehr hohen Neutronenüberschuß (z.B. ^{124}Sn) aufweisen. Derartige hohe Neutronenflüsse treten bei **Supernova-Explosionen**[4] auf, die überhaupt nach heutiger Auffassung bei der **Nukleosynthese** der Elemente eine herausragende Rolle spielen. Mit der Explosion dieser schweren und deshalb kurzlebigen Sterne (einige Millionen Jahre) werden die neugebildeten Elemente an das interstellare Gas abgegeben und später bei der Neubildung von Sternen (durch gravitative Anhäufung = Akkretion) in diese eingebaut. Es kommt so zu einer allmählichen Anhäufung von schweren Elementen. Man schätzt, daß für den Aufbau der in unserem Sonnensystem gefundende Häufigkeitsverteilung der Elemente etwa 15 - 20 Zyklen dieser Art benötigt wurden.

9.2 Wichtige Fusionsreaktionen in Laborplasmen

Von den etwa 80 Fusionsreaktionen sind die folgenden sieben

$$
\begin{array}{llll}
1a: & D+D & \rightarrow & {}^{3}He(0,817) \quad + \; n(2,450) \\
1b: & D+D & \rightarrow & T(1,008) \quad + \; p(3,024) \\
2: & D+{}^{3}He & \rightarrow & {}^{4}He(3,670) \quad + \; p(14,681) \\
3: & D+T & \rightarrow & {}^{4}He(3,517) \quad + \; n(14,069) \\
4: & T+T & \rightarrow & {}^{4}He(1,259) \quad + \; 2n(2\cdot 5,034) \\
5: & p+{}^{11}B & \rightarrow & 3\,{}^{4}He(3\cdot 2,888) \\
6: & p+{}^{6}Li & \rightarrow & {}^{3}He(2,210) \quad + \; {}^{4}He\,(1,660)
\end{array}
$$

Tabelle 9-1: Einige wichtige Fusionsreaktionen

für die Fusionsforschung von größerem Interesse, da sie sich entweder durch relativ hohe Wirkungsquerschnitte oder andere Besonderheiten auszeichnen. In Klammern sind jeweils die kinetischen Energien der Fusionsprodukte in MeV angegeben. Die Verhältnisse dieser Energien in jeder Reaktion sind durch Impuls- und Energiesatz festgelegt.

Die Fusionsreaktionen des Deuteriums mit sich selbst (1a und 1b) laufen ziemlich genau mit gleicher Wahrscheinlichkeit ab. Es entstehen hierbei in gleicher Zahl hochenergetische Protonen und Neutronen sowie Tritonen und ^{3}He-Kerne. Bei der Reaktion 2 zwischen Deuteronen und ^{3}He-Kernen entstehen keine Neutronen, sondern nur α-Teilchen und Protonen. Es tritt daher bei diesem Prozeß praktisch keine Aktivierung der Umgebungsmaterialien auf, da diese fast ausschließlich durch Neutroneneinfang erfolgt. Man spricht deshalb auch von einer "sauberen" Fusionsreaktion. Hierzu zählen auch die Reaktionen 5 und 6, die ebenfalls neutronenfrei sind.

Von herausragender Bedeutung ist die D-T-Reaktion (3), da sie nach Ausweis der Abb. 9.6 mit Abstand den höchsten Wirkungsquerschnitt aufweist. Ursächlich für diese Besonderheit ist – wie eingangs erwähnt – ein resonanter Zustand im ^{5}He-Compoundkern. Bezogen auf den Grundzustand dieses Kerns, liegt das Massenäquivalent von (D + T) bei einer Energie von 16,70 MeV, während dasjenige von (^{4}He + n) bei - 0,89 MeV liegt. Im Einklang mit Tabelle 9.1 ergibt sich für die D-T-Kernfusion eine Gesamtenergie von 16,70 MeV + 0,89 MeV = 17,59 MeV. Wie man der Abb. 9.7 entnimmt, gibt es im kurzlebigen Compoundkern von ^{5}He u.a. einen diskreten Energiezustand bei 16,764 MeV. Besitzen nun die D- und T-Kerne eine Relativgeschwindigkeit u, so daß die im Schwerpunktsystem verfügbare kinetische Energie $W_{rel} = m_{DT}\, u^2/2$ der Überschußenergie von (16,764 - 16,70) MeV= 64 keV entspricht, so liegt *Resonanz* vor. Wir erkennen diese Resonanz an der Form der Wirkungsquerschnittfunktion, die bei 64 keV ein Maximum aufweist (Abb. 9.6).

[4] Im Bereich unserer Milchstraße entsteht etwa eine Supernova pro Jahrhundert. Die letzte wurde 1987 beobachtet.

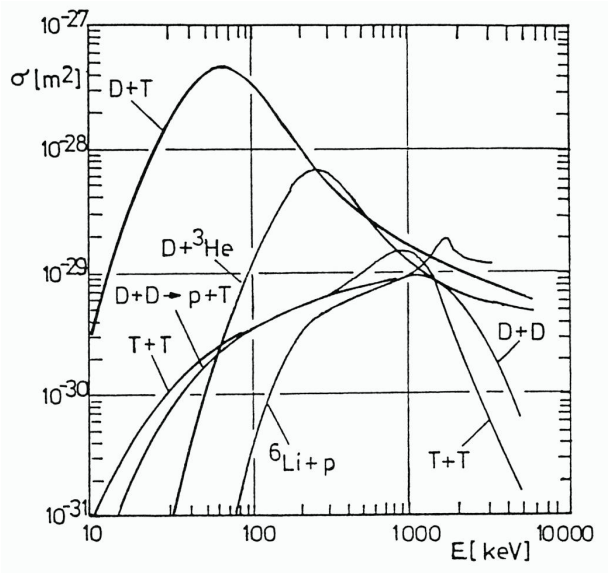


Abb. 9.6: Die Wirkungsquer-schnitte für Fusion als Funktion der Relativenergie ($E = W_{rel} = m_{12}\, u^2/2$) für einige wichtige Reaktionen.

Wir erinnern in diesem Zusam-menhang nochmals an die in Kap. 4 angegebenen Beziehungen für die Relationen im Labor- und Schwerpunktsystem. Insbeson-dere läßt sich die Gesamtenergie von zwei stoßenden Teilchen als Summe von Schwerpunkts- und Relativenergie schreiben

$$W = \frac{m_1 + m_2}{2} V^2 + \frac{m_{12}}{2} u^2 \quad (9.3)$$

worin $m_{12} = m_1\, m_2 /(m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse und $\mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ sowie $\mathbf{V} = (m_1\, \mathbf{v}_1 + m_2\, \mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2)$ die Relativ- und Schwerpunktgeschwindigkeit sind. Da **V** beim Stoß konstant bleibt, steht nur die Relativenergie $W_{rel} = m_{12}\, u^2/2$ zur Disposition. Bei der D-T-Reaktion mit $m_{DT} = 6/5\, m_H$ und $W_{rel} = 64$ keV können wir zwei Spezialfälle unterscheiden: 1) Man schießt Deuteronen auf ruhende Tritonen oder umgekehrt 2) Tritonen auf ruhende Deuteronen. Im ersten Fall haben wir $W_D/W_{rel} = 5/3$, so daß der maximale Wirkungsquerschnitt für $W_D = 107$ keV erreicht wird, während er im zweiten Fall bei $W_T = 5/2\, W_{rel} = 160$ keV liegt.

Ähnliche Verhältnisse wie bei der D+T-Reaktion (mit 3n + 2p) ergeben sich auch bei der D+ ^{3}He-Fusion (Pos. 3 in Tabelle 9.1), die gewissermaßen die "Spiegelreaktion" (3p + 2n) zur ersten ist. Hier liegt ein Niveau bei einer Energie von 16,66 MeV im ebenfalls sehr instabilen ^{5}Li-Kern vor, das mit einer Relativenergie von 270 keV resonant angeregt werden kann. In beiden Fällen kommt es mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit auch zur Aussendung einer monoenergetischen γ–Strahlung, die u.U. zu diagnostischen Zwecken verwendet werden kann.

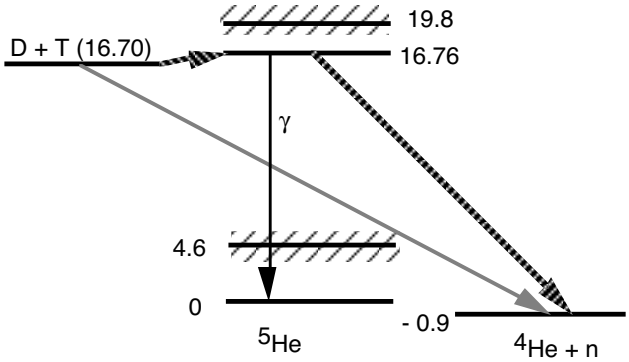


Abb. 9.7: Resonanter Fusionsprozeß bei der D + T-Reaktion. Bei $W_{rel} \approx 64$ keV verläuft der Prozeß fast ausschließlich über den angeregten Kernzustand im kurzlebigen ^{5}He. Lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $7 \cdot 10^{-5}$ zerfällt das 16,76 MeV-Niveau durch Aussendung von γ-Strahlung. Im Energiebereich um 4,6 und 19,8 MeV liegen weitere Anregungs-niveaus.

Abschließend seien hier noch zwei Kernreaktionen aufgeführt, die zwar keine Fusions-reaktionen sind, aber im Zusammenhang mit der D-T-Fusion von größter Bedeutung sind. Es sind dies die Reaktionen

$$^7Li + n \rightarrow {}^4He + T + n - 2{,}47\,MeV$$

$$^6Li + n \rightarrow {}^4He + T + 4{,}78\,MeV$$

die beide die Erbrütung von Tritium aus Lithium ermöglichen. In der Natur kommt das Isotop ^{7}Li zu 92,6% vor, der Rest entfällt auf ^{6}Li. Die endotherme, erste Reaktion hat eine Schwellenergie von 3 MeV; sie kann insbesondere mit den bei der D-T-

Fusion erzeugten 14 MeV Neutronen ablaufen. Die hierbei entstehenden langsamen Neutronen tragen auch zum zweiten, exothermen Prozeß bei und erhöhen somit die Brutrate.

Abschließend sei noch eine empirische Näherungsformel für die Berechnung der Fusionwirkungsquerschnitte angegeben. Sie basiert auf der Gamovbeziehung Gl. (9.2), die mit einer rationalen Funktion multipliziert wird und hat die Gestalt

$$\sigma_{fus}(E_r) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{E_r}}}}{E_r} \frac{a_1 + (E_r + a_2(E_r + a_3(E_r + a_3(E_r + a_4(E_r + a_5))))}{1 + (E_r + b_2(E_r + b_3(E_r + b_4(E_r + b_5))))} 10^{-31}\left[m^{-2}\right], \quad (9.4)$$

wobei E_r in keV einzusetzen ist. Die Polynome vom 5. Grade im Zähler und Nenner sind zur Erhöhung der Rechengeschwindigkeit nach dem *Horner-Schema* geordnet. Für vier der in Tabelle 9-1 angegebenen Reaktionen sind die entsprechenden Koeffizienten in der Tabelle 9-2 zusammengestellt.

	(3): D(t,n)a	(2):D(^{3}He,p)a	(1b):D(d,p)T	(1a):D(d,n)^{3}He
γ	34.3827	68.7508	31.3970	31.3970
a_1	6.93 10^4	5.75 10^6	5.56 10^4	5.37 10^4
a_2	7.45 10^8	2.52 10^3	2.11 10^2	3.30 10^2
a_3	2.05 10^6	45.6	-3.26 10^-2	-0.1271
a_4	5.20 10^4	0	1.50 10^-6	2.93 10^-5
a_5	0	0	1.82 10^-10	-2.52 10^-9
b_2	63.8	-3.20 10^-3	0	0
b_3	-0.995	-8.55 10^-6	0	0
b_4	6.98 10^-5	5.90 10^-8	0	0
b_5	1.73 10^-4	0	0	0
gültig	0.5-550 keV	0.3-900 keV	0.5-5000	0.5-5000

Tabelle 9-2: Parameter zur Berechnung der Fusionsquerschnitte als Funktion der Relativenergie für die in der obersten Zeile angebenen Reaktionen. In der letzten Zeile ist der Gültigkeits-bereich angegeben. (Nach H.-S. Bosch, Nucl. Fus. 32 (1992))

9.3 Thermonukleare Fusionsraten

Bei den meisten Anwendungen hat man es nicht mit monoenergetischen Teilchenstrahlen zu tun, sondern mit thermischen Geschwindigkeitsverteilungen. Ein wichtiger Grund hierfür ist die Kleinheit der Fusionswirkungsquerschnitte, die mit $\sigma_{fus} < 10^{-27}$ m^2 immer weit unter den Coulombwirkungsquerschnitten[5] liegen. Will man daher Teilchen fusionieren, so müssen sie zwangsläufig sehr häufig miteinander stoßen, wodurch sich Maxwellverteilungen mit gleicher Temperatur ausbilden. In jedem Fall werden die Teilchen stark gestreut, so daß beispielsweise mit zwei sich kreuzenden Strahlen keine nennenswerten Fusionsausbeuten zu erreichen sind.

Es ist daher von großer praktischer Bedeutung, die pro Sekunde und m^{-3} sich ergebende *Fusionsrate* R_{ab} als Funktion der Temperatur aus den bekannten Wirkungsquerschnitten zu berechnen. Haben wir im Volumen V die unterschiedlichen Teilchensorten „a“ und „b“ mit den absoluten Zahlen N_a und N_b, bzw. den Teilchendichten $n_a = N_a/V$ und $n_b = N_b/V$, so können wir zunächst die Wahrscheinlichkeit $w(a_i, b_k)$ für eine Fusionsreaktion des i-ten Teilchens vom Typ a mit dem k-ten Teilchen vom Typ b innerhalb des Zeitintervalls Δt angeben. Sie ist durch das Verhältnis $\Delta V/V$ gegeben, wobei $\Delta V = \sigma\ u\ \Delta t$ das Wirkungsvolumen des Teilchens a_i mit Bezug auf das Teilchen b_k darstellt (s. Abb. 9-1). Hierbei ist u der Betrag der Relativgeschwindigkeit. Anschaulich ist $\Delta V/V$ damit die

[5] Im Anschluß zu Gl. (4.17) haben wir hierfür gefunden $\sigma_{Coul} = 4\pi\, s_{90}^2 \ln\Lambda = e^2/(16\,\pi\,\varepsilon_{90}^2)\,(Z_1 Z_2)^2\,(e/m\,u^2/2)^2 \ln\Lambda = 6{,}5\cdot 10^{-24}\,(W_r/\text{keV})^{-2}\,(Z_1 Z_2)^2\,\ln\Lambda\,(\text{m}^{-2})$. Also z.B. für D-T-Stöße bei $W_r = 100$ keV ergibt sich $\sigma_{coul} \approx 10^{-16}$ m^2 im Vergleich zu $\sigma_{DT} = 4\cdot 10^{-28}$ m^2.

Wahrscheinlichkeit, daß das b_k-Teilchen sich im Wirkungungsvolumen des Teilchens a_i aufhält.

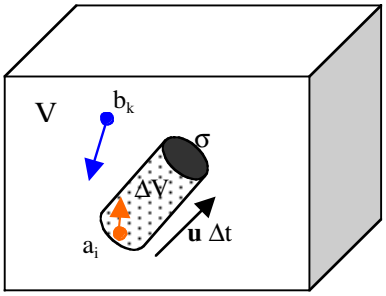


Abb. 9-1: Zur Berechnung der Fusionswahrscheinlichkeit. Dem Teilchen a_i ist in Bezug auf das Teilchen b_k ein Reaktionsvolumen in Form eines kleinen Zylinders zugeordnet.

Damit ergibt sich für die Fusionsrate pro Volumeneinheit

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{1}{V}\sum_{i,k}\frac{w(a_i,b_k)}{\Delta t} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N_a}\sum_{k=1}^{N_b}\frac{|\mathbf{v}_{ai}-\mathbf{v}_{bk}|\sigma_{fus}(W_{ik}^{rel})}{V} \\ &= \frac{N_a N_b}{V^2}\left\langle u\ \sigma_{fus}\left(W^{rel}\right)\right\rangle = n_a n_b\left\langle u\ \sigma_{fus}\left(\frac{m_{ab}}{2}u^2\right)\right\rangle, \end{aligned} \tag{9.5}$$

wobei auf der rechten Seite über den Betrag der Relativgeschwindigkeit $u = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b]$ zu mitteln ist. Gibt es dagegen nur eine Teilchensorte, wie bei der DD-Fusion, so muß man beachten, daß der Stoß zwischen den Teilchen i und k diesmal der gleiche ist wie derjenige zwischen k und i. Man hat also mit $N_a >> 1$ und der reduzierten Masse $m_{aa} = m_a/2$

$$R_{aa} = \sum_{i=k+1}^{N_a}\sum_{k=1}^{N_a}\frac{|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_k|\sigma_{fus}(W_{ik}^{rel})}{V^2} = \frac{(N_a^2-N_a)/2}{V^2}\left\langle u\ \sigma_{fus}\left(\frac{m_a}{4}u^2\right)\right\rangle \approx \frac{n_a^2}{2}\left\langle u\ \sigma_{fus}\left(\frac{m_a}{4}u^2\right)\right\rangle \tag{9.6}$$

Mit Hilfe des Kroneckersymbols kann man beide Fälle in der Gleichung

$$R_{ab} = \frac{n_a n_b}{1+\delta_{ab}}\left\langle u\sigma_{fus}\right\rangle \tag{9.7}$$

zusammenfassen.

Die Berechnung des Mittelwertes erfordert eine Integration über die Geschwindigkeitsräume beider Teilchensorten, was auf ein Sechfachintegral hinausläuft. Unter Verwendung der Verteilungsfunktionen für beide Teilchensorten hat man ganz allgemein

$$\boxed{R_{ab} = \frac{1}{1+\delta_{ab}}\iint f_a(\boldsymbol{v})f_b(\boldsymbol{w})\,|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|\sigma_{fus}\left(|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|\right)dv^3\,dw^3}, \tag{9.8}$$

wobei wir uns diesmal den Wirkungsquerschnitt als Funktion der Relativgeschwindigkeit gegeben denken. Bei thermodynamischem Gleichgewicht liegen isotrope Maxwell-Verteilungsfunktionen der Form

$$f_a(v_x,v_y,v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z = \frac{n_a}{\pi^{3/2}v_a^3}e^{-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{v_a^2}}dv_x\,dv_y\,dv_z; \quad v_a = \sqrt{2k_BT_a/m_a} \tag{9.9}$$

vor. In diesem Fall hängt die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen der Spezies „a“ bei einer bestimmten Geschwindigkeit zu finden, nur von dem Betrag seiner Geschwindigkeit (bzw. von v^2) und der Temperatur (bzw. der thermischen Geschwindigkeit $v_a = (2\ k_B\ T_a/m_a)^{1/2}$) ab. Es tritt somit in Gl. (9.8) ein Term der Art

$$\exp\left(-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{v_a^2}\right)\exp\left(-\frac{w_x^2+w_y^2+w_z^2}{v_b^2}\right)=\exp\left[-\left(\frac{v^2}{v_a^2}+\frac{w^2}{v_b^2}\right)\right] \qquad (9.10)$$

in Erscheinung. Durch Übergang zu Schwerpunkt- und Relativgeschwindigkeiten vermöge

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\frac{m_b}{m_a+m_b}\boldsymbol{u}; \quad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{V}-\frac{m_a}{m_a+m_b}\boldsymbol{u} \qquad (9.11)$$

erhalten wir zunächst für gleiche Temperaturen $T_a = T_b = T$

$$\frac{v^2}{v_a^2}+\frac{w^2}{v_b^2}=\frac{m_a+m_b}{2k_BT}V^2+\frac{m_am_b}{(m_a+m_b)}\frac{u^2}{2k_BT}. \qquad (9.12)$$

Um das Integral (9.8) in den neuen Koordinaten **V** und **u** berechnen zu können, benötigen wir die Funktionaldeterminate[6] det(J), die die Beziehung zwischen den 6-dimensionalen Volumenelementen herstellt:

$$dv_x dv_y dv_z dw_x dw_y dw_z = |\det(J)|\ dV_x dV_y dV_z du_x du_y du_z. \qquad (9.13)$$

Zweckmäßigerweise führen wir zunächst die Vektoren $\mathbf{x} = (v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z)$ und $\mathbf{q} = (V_x, V_y, V_z, u_x, u_y, u_z)$ ein, die es erlauben, die Matrixelemente von J in der Form

$$J_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \qquad (9.14)$$

anzugeben. Es ergibt sich det(J) = -1. Damit lautet nun Gl. (9.8)

$$R_{ab}=\frac{n_an_b}{1+\delta_{ab}}\frac{1}{\pi^3v_a^3v_b^3}\int e^{-\frac{m_a+m_b}{2k_BT}V^2}dV^3\ \int e^{-\frac{m_{ab}}{2}\frac{u^2}{k_BT}}u\sigma_{fus}(u)\,du^3. \qquad (9.15)$$

Das Sechsfachintegral ist somit als Produkt von zwei Dreifachintegralen darstellbar. Durch Übergang zu Kugelkoordinaten in beiden Fällen erhält man

$$R_{ab}=\frac{n_an_b}{1+\delta_{ab}}\frac{1}{\pi^3v_a^3v_b^3}(4\pi)^2\int_0^\infty e^{-\frac{m_a+m_b}{2k_BT}V^2}V^2dV\ \int_0^\infty e^{-\frac{m_{ab}}{2}\frac{u^2}{k_BT}}u^3\,\sigma_{fus}(u)\,du. \qquad (9.16)$$

Die erste Integration über die Schwerpunktgeschwindigkeit läßt sich direkt durchführen. Die zweite Integration transformiert man günstigerweise auf die Relativenergie $W_r = m_{ab}\,u^2/2$. Das endgültige Ergebnis ergibt sich dann aus

$$\boxed{R_{ab}=\frac{n_an_b}{1+\delta_{ab}}\frac{4}{\sqrt{2\pi m_{ab}}(k_BT)^{3/2}}\int_0^\infty e^{\frac{-W_r}{k_BT}}\sigma_{fus}(W_r)W_r\,dW_r} \qquad (9.17)$$

durch numerische Integration. Ergebnisse sind der Abb. 9.8 zu entnehmen.

---

[6] Auch als Jacobische Determinante (engl. Jacobian) bezeichnet.

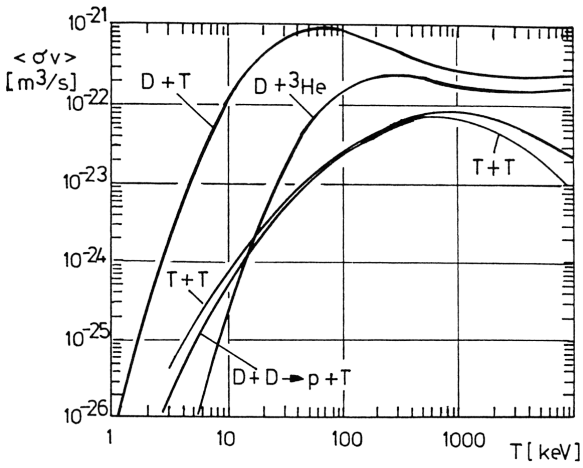


Abb. 9.8: Fusionsraten für einige Fusionsprozesse als Funktion der Temperatur.

Man beachte, daß diese Mittelwerte für eine bestimmte Temperatur (etwa T = 10 keV) erheblich über dem ungemittelten Wert $\sigma(E_r)(2E_r/m_{ab})^{1/2}$ für gleiche Relativenergie (E_r = 10 keV) liegen. Der Grund liegt in dem Beitrag der Schwänze der Verteilungsfunktionen, da für diese Teilchen die Fusionswahrscheinlichkeit erheblich größer als für diejenigen bei thermischen Geschwindigkeiten ist.

9.4 Myonisch katalysierte Fusion

Bereits im Jahre 1948 hatte der russische Physiker Andrej Sacharow (der spätere Bürgerrechtler in der Sowjetunion) die Idee, die Kernfusionsprozesse nicht bei sehr hohen Temperaturen, sondern durch Verwendung von Myonen unter gewöhnlichen Bedingungen als "**kalte Fusion**" [7] ablaufen zu lassen. Der Grundgedanke ist dabei, das Elektron in einem D- oder T-Atom durch ein negatives Myon zu ersetzen. Da diese Myonen etwa 207mal schwerer als Elektronen sind, schrumpft ein derartiges exotisches Atom um den gleichen Faktor, so daß der entsprechende Bohrsche Radius nunmehr $2{,}5 \cdot 10^{-13}$ m beträgt. Bei der Bildung von Molekülionen der Art $(DT)_\mu^+$ kommt es dann im Vergleich zu den gewöhnlichen $(DT)_e^+$-Ionen zu einer wesentlich größeren Annäherung der beiden Kerne, wodurch die Tunnelwahrscheinlichkeit im Fusionsprozeß dramatisch erhöht wird.

Myonen entstehen, wenn beispielsweise ein hochenergetischer Protonenstrahl auf eine Kohlenstoffprobe auftrifft. Hierbei bilden sich zunächst positive und negative Pionen, die unter Aussendung von myonischen Neutrinos in Myonen zerfallen. Die gewünschten negativen Myonen entstehen also durch den Prozeß

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu .$$

Leider zerfällt das so gewonnene Myon innerhalb einer Halbwertszeit von $\tau_\mu = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s wieder in ein Elektron und zwei unterschiedliche Neutrinos

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e .$$

Bedenkt man außerdem, daß zur Bildung eines Myons zur Zeit etwa ein energetischer Aufwand von 3 GeV notwendig ist, so ist zunächst nicht einsichtig, wie sich überhaupt eine positive Energiebilanz ergeben kann, da ja bei einem DT-Fusionsprozeß nur 17,5 MeV gewonnen werden. Der entscheidende Gesichtspunkt ist jedoch die katalytische Verwendung der Myonen: Sie sollen bei der Fusion nicht verbraucht werden, sondern nach Ablauf einer solchen Reaktion für den nächsten Prozeß wieder zur Verfügung stehen.

Im Verlauf der letzten Jahrzehnte konnten zahlreiche Erkenntnisse gesammelt werden, wonach sich in groben Zügen folgendes Bild ergibt: Leitet man ein hochenergetisches μ^--Teilchen in eine mit einem D_2-T_2-Gasgemisch gefüllte Reaktionskammer, so wird dieses Myon durch Stöße mit den Elektronen der Moleküle zunächst stark abgebremst. Dabei

[7] Diese myonen-katalysierte kalte Fusion ist zu unterscheiden von der im Jahre 1990 von Ponds und Fleischman propagierten kalten Fusion in Festkörpern (z. B Einbettung von Wasserstoff in Titan), bei der keine derartigen Elementarteilchen benutzt wurden. Letztere wurde durch übereilte Erfolgsmeldungen in der Presse sehr hochgespielt. Inzwischen ist man durch zahlreiche Kontrollversuche allenthalben zu der Auffassung gekommen, daß sich auf diesem Wege wohl kaum das Ziel der kontrollierten Kernfusion verwirklichen läßt, da im Festkörper der Abstand der eingelagerten H-Ionen viel zu groß ist.

werden die Elektronen aus den Molekülorbitalen herausgeschlagen. Bei hinreichend kleiner Energie wird das Myon schließlich von einem D- oder T-Kern eingefangen, und es bildet sich ein myonisches D_μ– oder T_μ-Atom. Wegen der höheren Bindungsenergie des T_μ-Atoms (ΔE = 48 eV) werden durch Umladungsprozesse in sehr kurzer Zeit (< 10^{-9} s) alle ursprünglich gebildeten D_μ-Atome in T_μ-Atome umgewandelt. Diese können wegen ihrer Kleinheit sehr leicht in andere Moleküle eindringen und mit einem der Kerne ein myonisches Molekülion (z.B. $(DT)_\mu^+$) innerhalb desselben bilden. Es wird also beispielsweise in einem D_2-Molekül einer der beiden vorhandenen D^+-Kerne durch das $(DT)_\mu^+$-Ion ersetzt, und es entsteht insgesamt ein Molekülgebilde, das man durch die Formel $[(DT)_\mu\ D]_{ee}$ beschreiben könnte. Hierbei setzt sich das Myon – wie ansonsten im H_2^+-Ion das Elektron – anschaulich zwischen die D-T-Kerne und bewirkt so die starke Absenkung der Coulombbarriere. Ist dies geschehen, kommt es innerhalb von 10^{-12} s mit 99,4%iger Wahrscheinlichkeit zu der Fusionreaktion

$$D\mu T \rightarrow {}^4He + n + \mu$$

bei der das Myon wieder frei wird. Gäbe es keinen konkurrierenden Prozeß, so könnte jedes Myon während seiner Lebensdauer von 2,2 µs ungefähr 10^6 Fusionsreaktionen katalysieren, und wir hätten einen Energiegewinn von $10^6 \cdot 17{,}5$ MeV = 17 500 GeV – mithin weit mehr als die zur Erzeugung eines Myons notwendigen 3 GeV. Leider kann sich aber das Myon nach der Fusion mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,6% an das entstehende α-Teilchen entsprechend

$$D\mu T \rightarrow {}^4He\,\mu + n$$

anlagern und steht dann für weitere Katalysen nicht mehr zur Verfügung. Die Zahl der katalytischen Prozesse pro Myon verringert sich damit auf etwa 1/0,006 ≈ 170, was auf einen eher bescheidenen Energiegewinn von 2,9 GeV führt. Es liegt somit in erster Linie an der ^{4}He- Myon-Bindung, daß die kalte Fusion – rechnet man die hohen Verluste bei der Energieumwandlung hinzu – noch weit von einer positiven Energiebilanz entfernt ist. In der Abb. 9.9 sind die verschiedenen Stationen der myon-katalysierten Fusion nochmals graphisch dargestellt.

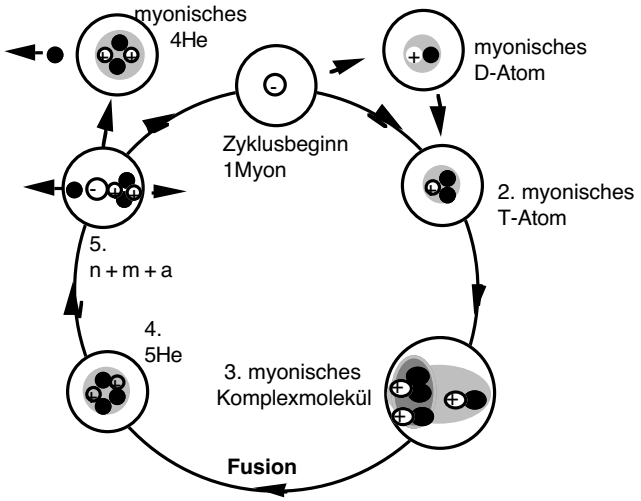


Abb. 9.9: Der Zyklus der myonisch katalysierten Fusion. Neutronen sind durch Vollkreise, Protonen und negative Myonen durch + bzw. - gekennzeichnet.

Es bleibt noch ein Punkt nachzutragen, den wir bisher bei der myonischen Molekülbildung unterschlagen haben. Bei der Bildung der Moleküle vom Typ $[(DT)_\mu\ D]_{ee}$ müssen Impuls- und Energiesatz erfüllt werden. Hierbei stellen die freiwerdenden Bindungsenergien von etwa 135 eV wegen ihrer Höhe ein Problem dar. Die ursprünglichen Überlegungen gingen davon aus, daß diese Energie den entstehenden freien Elektronen (Auger-Elektronen) übertragen werden müßten, was zu ziemlich langsamen Bildungsraten führte, die mit den experimentellen Beobachtungen nicht im Einklang standen. Nach Überlegungen von *Vesman* (1967) tritt aber im oben angegebenen Molekülkomplex ein Resonanzeffekt auf, der die Bildungsrate entscheidend erhöht und zu den extrem kurzen Reaktionszeiten von 10^{-12} s führt. Bei dieser Resonanz wird Energie vom $(DT)_\mu^+$-Ion in (gequantelte) Schwingungsenergie des gesamten Komplexes umgewandelt. Aufgrund dieses Resonanzeffektes beobachtet man auch eine Temperaturabhängigkeit der Fusionsausbeute, die etwa bei 900°C ein Maximum aufweist.

10 KERNVERSCHMELZUNG DURCH TRÄGHEITSEINSCHLUSS

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß die D-T-Fusion am leichtesten auf der Erde zu realisieren sein wird. Daher konzentrieren sich die derzeitigen Anstrengungen darauf, dieses Ziel in Form der *kontrollierten Kernfusion* zu erreichen. Aber auch bei diesem günstigen Fusionsprozeß müssen Temperaturen von mindestens T = 5 keV erreicht werden, und zudem sind die Wirkungsquerschnitte für Fusion auch hier noch wesentlich kleiner als für Coulombstreuung (s. Fußnote 5), so daß man den Teilchen Gelegenheit geben muß, oft miteinander zu stoßen. Man spricht daher vom Einschluß der Teilchen. Dieser Begriff ist beim sogenannten *magnetischen Einschluß*, den wir später behandeln wollen, sehr zutreffend, da man hier das Plasma in der Tat in einen "magnetischen Käfig" einsperrt.

Bei dem im folgenden zu besprechenden Verfahren, dem *Trägheits- oder Inertial-Einschluß*, ist die Bezeichnung dagegen nicht so einleuchtend. Man unternimmt nämlich nichts, um das Plasma beisammen zu halten, sondern verläßt sich allein auf die mit seiner Masse verbundene Trägheit. Die Idee hierbei ist, die Energie – wie bei einem Benzinmotor – in zahlreichen kleinen Explosionen freizusetzen. Die Betonung liegt dabei auf *klein*, denn die große, unkontrollierte Freisetzung in Form der Wasserstoffbombe gibt es ja bereits seit langem. In der Praxis versucht man dies mit kleinen, gefrorenen Kügelchen aus Wasserstoff (Pellets), die pulsartig durch einen Laser oder Ionenstrahl aufgeheizt werden. Man spricht daher auch oft von der *Laserfusion*. Dabei muß die Zeitspanne des Aufheizens so kurz sein, daß bereits ein erheblicher Teil der Fusionsenergie freigesetzt wurde, bevor das Pellet auseinander geflogen ist. Diese Zeitspanne beträgt nur wenige 10^{-9} s. Es liegt auf der Hand, daß auch die Energiezufuhr möglichst gut kugelsymmetrisch erfolgen sollte, um eine Beschleunigung und Deformation des Pellets zu vermeiden. Eine genauere Analyse ergibt, daß diese Symmetriebedingung sogar äußerst stringent ist und die Asymmetrien bei der Aufheizung nicht größer als 1% sein sollten.

Bevor wir auf die technischen Probleme und den gegenwärtigen Stand der Forschung eingehen, wollen wir einige grundsätzliche Fragen beleuchten.

10.1 Elementare Betrachtungen und Fusionskriterien

Wir betrachten ein Plasmapellet vom Radius R, das durchgehend eine Temperatur T aufweist. Bei ungehinderter Expansion zerfließt dieses Pellet nach Kapitel 3.1 mit der Ionenschallgeschwindigkeit $c_s = (k_B (T_e + 3T_i)/m_i)^{1/2}$. Als charakteristische "Einschlußzeit" können wir damit für $T_i = T_e = T$ die Größe

$$\tau_E \equiv \frac{R}{c_s} \approx \frac{R}{\sqrt{4T / m_i}} \tag{10.1}$$

definieren, wobei wir, wie schon früher, die Temperaturen in eV angeben wollen. Diese Zeitspanne müssen wir vergleichen mit der "Fusionszeit". Darunter soll diejenige Zeit verstanden werden, nach der die Hälfte des Materials fusioniert ist (Abbrandrate: $\phi = 1/2$). Zur Vereinfachung rechnen wir bei der D-T-Fusion mit mittleren Teilchen der Relativmasse $m_i = (2+3)/2 = 2{,}5$ und Dichte n (also $n_D = n_T = n/2$). Die Fusionsrate beträgt dann $n^2 \langle\sigma_{fus} u\rangle/4$. Entsprechend ist die Fusionsfrequenz $\nu_{fus} = R_{DT}/(n/2) = n/2 \langle\sigma_{fus} u\rangle$. Damit ergibt sich für die Fusionszeit

$$\tau_{fus} \equiv \frac{1}{2\nu_{fus}} = \frac{1}{n\langle\sigma_{fus}\, u\rangle} \tag{10.2}$$

Ein Fusionskriterium erhalten wir aus der Forderung $\tau_E > \tau_{fus}$ bzw. $\tau_E/\tau_{fus} > 1$. Letzteres lautet ausführlich $\tau_E/\tau_{fus} = R\, n \langle\sigma_{fus} u\rangle (m_i/4T)^{1/2} = R\, \rho \langle\sigma_{fus} u\rangle /(4\, m_i T)^{1/2} > 1$. Mit $\rho = m_i\, n$ haben wir hier die Massendichte eingeführt. Da der Ausdruck $\langle\sigma_{fus} u\rangle /(4\, m_i T)^{1/2}$ eine reine Temperaturfunktion ist, T aber wegen der Fusionsbedingung einen Minimalwert von $T \approx 5$ keV nicht unterschreiten kann, ist das Fusionskriterium letztlich eine Bedingung für das

Produkt von Radius und Dichte. Für eine realistische Temperatur von T = 12 keV ergibt sich mit $\langle\sigma_{fus}\, u\rangle = 1{,}75\cdot 10^{-22}\ m^3/s$ die Relation

$$\boxed{\rho R \;>\; \frac{\sqrt{4 m_i T}}{\langle \sigma_{fus} u \rangle} \approx 30 \frac{kg}{m^2}}. \qquad (10.3)$$

Eine genauere Analyse des Problems führt auf das sogenannte *Abbrandkriterium*

$$\Phi = \frac{\rho R}{H_0 + \rho R} \qquad (10.4)$$

mit $H_0 = 8\ m_i / (\langle\sigma_{fus}\, u\rangle\ (2\ T/m_i)/1/2) \approx 70\ kg\ m^{-2}$. Eine Abbrandrate von $\phi = 1/3$ führt danach zu einer Forderung $\rho\ R = 35\ kg/m^2$, was mit unserer obigen Beziehung näherungsweise übereinstimmt.

Die Bedingung (10.3) hat starke Auswirkungen auf die Anforderungen bei der Trägheitsfusion. Legen wir nämlich ein gefrorenes Deuterium-Tritium-Gemisch mit einer Dichte von $\rho = 200\ Kg\ m^{-3}$ zugrunde, so erhalten wir einen Radius von R = 15 cm. Abgesehen davon, daß die Herstellung eines solch großen Pellets enorme Schwierigkeiten bereiten würde, kommen nun zwei weitere Probleme hinzu: 1) Woher nimmt man die riesige Energie, um ein solches Pellet aufzuheizen? 2) Wie verarbeitet man die nochmals größere Fusionsenergie ?

Wir überzeugen uns von dieser Problematik noch durch die folgende Abschätzung:

Die Gesamtzahl der Ionen beträgt $N = 4\pi/3\ R^3\ \rho/m_i = 6{,}8\cdot 10^{26}$. Aufheizen auf T = 12 keV erfordert einen Mindestenergiebedarf von $W_{Laser} = 2\cdot 3/2\ N\ T = 3.9\cdot 10^{12}$ J (Faktor 2 für Elektronen). Dies ist zu vergleichen mit den stärksten Lasern, die z. Z. etwa 10^5 J produzieren[8] Für die freigesetzte Energie erhalten wir schließlich unter Zugrundelegung einer Abbrandrate von $\phi = 50\%$ $W_{fus} = 1/2\ N/2\ 17{,}5\ MeV = 4{,}8\cdot 10^{14}$ J. Das ist bereits die Energie einer riesigen Bombe von über 50 000 t des Sprengstoffs TNT.

Das Verhältnis von aufzuwendender zu erhaltener Energie $Q = W_{fus}/W_{Laser} = 4{,}8\cdot 10^{14}\ J/3.9\cdot 10^{12}\ J = 120$ bezeichnet man als *Energieverstärkung*. Für die D-T-Fusion hat man allgemein die Beziehung

$$Q = \frac{\Phi}{6} \frac{17{,}5 MeV}{k_B T}. \qquad (10.5)$$

Der berechnete Wert von 120 ist im übrigen nicht ausreichend, um bei der Laserfusion zu einer positiven Energiebilanz zu gelangen, da mindestens drei Verlustmechanismen zu berücksichtigen sind: 1. Die Umwandlung der gewonnenen Energie in elektrische Energie (mit Wirkungsgrad $\eta_{El} \approx 30\%$). 2. Die Verluste bei der Umwandlung elektrischer Energie in Laser- oder Strahlenergie (Wirkungsgrad η_{Strahl}) und 3. Die Verluste bei der Umwandlung der eingestrahlten Leistung in innere Energie, die durch den Transferwirkungsgrad η_{trans} beschrieben werden. Bei der Laserfusion mit sichtbarem oder Infrarot-Licht sind die beiden letzten Wirkungsgrade günstigenfalls $\eta_{Strahl} < 10\%$ und $\eta_{trans} = 5\%$. Man benötigt somit mindestens eine Energieverstärkung von

$$Q_{min} = \frac{1}{\eta_{El}\, \eta_{Strahl}\, \eta_{trans}} \qquad (10.6)$$

[8] In dem voraussichtlich 2005 in Betrieb gehenden NIF-Experiment (National Ignition Facility, Livermore, USA) rechnet man mit einer Gesamtenergie von etwa 1 MJ.

was im Fall der Laserfusion auf $Q \approx 700$ hinausläuft. Unter Berücksichtigung aller Verluste kommt man zu dem Schluß, daß Q mindestens 1000, besser aber 10 000 betragen sollte. Günstiger sind die Verhältnisse bei der Fusion durch Ionenstrahlen. Hier erscheinen η_{Strahl} und η_{trans} in der Größenordnung von 70% und mehr möglich.

10.2 Das Konzept der zentralen Zündung

Die Ausführungen im vorangehenden Abschnitt lassen die Aussichten für die Trägheitsfusion zunächst völlig hoffnungslos erscheinen. Daß man jedoch nicht zu früh aufgeben sollte, mögen die folgenden Überlegungen bekräftigen.

Zunächst gilt es, die Pellets zu verkleinern. Das bedeutet eine *Kompression*, die in gewisser Stärke ohnehin bei der raschen Energiezufuhr erfolgt. Wenn wir eine starke Kompression um den Faktor $\kappa = \rho_{vorher}/\rho_{nachher} = 1000$ annehmen, kann der Pelletradius nach Kriterium (10.3) um den gleichen Faktor abnehmen, und wir erhalten anstelle von R = 15 cm einen Radius von nur noch R = 0,15 mm. Die Gesamtteilchenzahl verringert sich wegen $N = 4\pi/3\ (R\ \rho)\ R^2/m_i \sim R^2$ um den Faktor $1/\kappa^2 = 10^{-6}$. Um den gleichen Faktor verringern sich Laser und Fusionsleistung und gelangen mit 10^6 J bzw. 10^8J in realistische Größenordnungen. Das Problem der geringen Energieverstärkung ist damit allerdings noch nicht beseitigt, da ja sowohl W_{Laser} als auch W_{fus} proportional zu N sind, so daß Q nach wie vor bei dem viel zu niedrigen Wert von ca. 100 läge.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma hat 1972 *J. Nuckolls* aufgezeigt. Der Trick liegt darin, nicht das gesamte Pellet aufzuheizen, sondern nur seinen Kern zu zünden. Wird hier in einem Bereich von $r < R_Z \approx R/10$ die Zündtemperatur erreicht, so erfolgt die weitere Aufheizung des Pellets durch die freiwerdende Energie in den α-Teilchen. Unter Verwendung der Beziehung (4.48) für dW/dt (die sogenannte "stopping power") läßt sich die Reichweite dieser Teilchen mit einer Anfangsenergie von 3,5 MeV abschätzen. Die α-Teilchen werden absorbiert, falls die Bedingung

$$\rho R_z > 8{,}5 \cdot 10^{-2} T_e^{3/2} \qquad (10.7)$$

erfüllt ist. Für $T_e = 10$ keV liegt damit diese Forderung mit $\rho\ R_Z > 3$ Kg/m^2 deutlich unterhalb derjenigen für das Gesamtpellet (10.3). Es sollte sich demnach eine Brennfront vom Pelletkern nach außen hin ausbreiten, die schließlich einen erheblichen Teil der Gesamtteilchenzahl zur Fusion bringt.

Die Kompression der Pellets erfolgt im übrigen nur zu einem sehr geringen Teil durch den Strahlungsdruck des Lasers. Wichtiger ist der Rückstoß des abströmenden Plasmas. Das Prinzip der Kernzündung bei komprimierten Pellets ist in der Abbildung Abb. 10-1 skizziert.

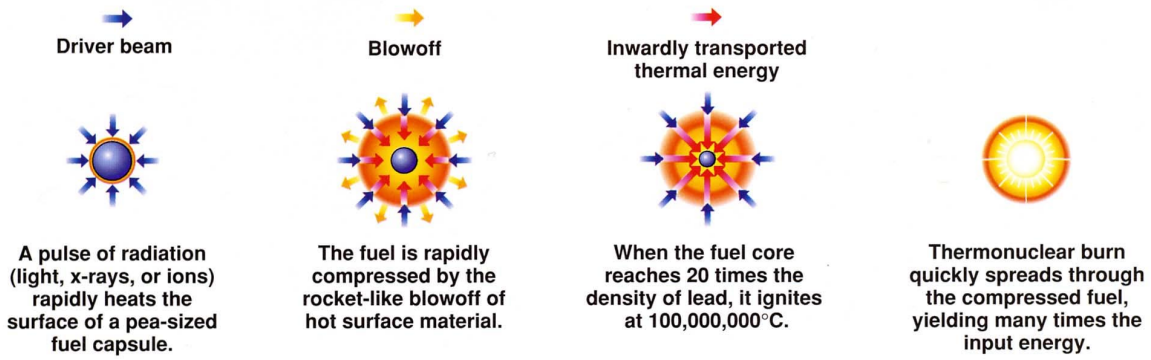


Abb. 10-1: Die vier Schritte der Trägheitsfusion

Analytische und vor allem numerische Simulationen ergeben folgende Befunde: Beaufschlagt man das Pellet mit einem extrem kurzen Laserpuls (δ-Funktion), so durchläuft das Pellet eine Stoßfront, die im günstigsten Fall eine zentrale Dichteerhöhung um den Faktor $\kappa(0) = 30$ bewirkt. Höhere Kompressionen ergeben sich, wenn man im geeigneten zeitlichen Abstand

einen zweiten, stärkeren Puls folgen läßt, der das vom ersten Puls vorkomprimierte Plasma weiter verdichtet. Auf den zweiten Puls kann man einen dritten folgen lassen usw.; schließlich ist es auch nicht erforderlich, diskrete Pulse zu verwenden, sondern man erzielt eine ähnliche Wirkung durch eine geeignete kontinuierliche Pulsform. Maximale Verstärkungen von bis zu $\kappa(0) = 10^4$ ergeben sich bei *optimaler Pulsform*. Hierbei muß die Laserleistung über eine Zeitspanne von etwa 1,5 ns stetig ansteigen. Bei diesen extremen Verdichtungen (10 000 gegenüber der gewöhnlichen Festkörperdichte mit $n_{fest} \approx 4{,}5 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$) verläßt das Plasma den idealen Bereich und wird zu einem *quantenmechanisch entarteten Plasma*. Wie im Kapitel 1 ausgeführt, verliert unter diesen, dem Sonneninnern ähnlichen Verhältnissen die ideale Gasgleichung ihre Gültigkeit und der Druck wird nur noch eine Funktion der Elektronendichte. Die Zustandsgleichung nimmt im völlig entarteten Fall – der bei der Trägheitsfusion jedoch noch nicht erreicht wird – die Form

$$p = \frac{1}{5m_e}\left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} \tag{10.8}$$

an. Die Unabhängigkeit von der Temperatur ist in diesem Zusammenhang sehr günstig, da somit die zugeführte Energie nicht in eine Temperaturerhöhung, d.h. Entropievermehrung, sondern voll in Kompressionsarbeit umgesetzt wird.

Zur Ableitung der Gl. (10.8) knüpfen wir an die Beziehungen von Kap. (1.5) und (2.4) an. Zunächst sind Druck p und Teilchenimpuls – den wir hier zur Unterscheidung durch $\mathbf{p}$ kennzeichnen – im isotropen Fall durch die Beziehungen $p = \langle p_x v_x \rangle n_e$ verbunden, wobei die Klammern < > eine Mittelung über die Geschwindigkeiten bzw. Impulse bedeutet (vgl. Gl. 6.45). Im *nicht-relativistischen Fall* haben wir mit $v_x = p_x / m_e$ und $p_x^2 = p^2/3$ für den Druck $p = 2/3\ n_e \langle \mathbf{p}^2 \rangle/(2m_e) = 2/3\ n_e \langle E \rangle$, wobei $\langle E \rangle$ die mittlere Energie der Elektronen ist. Es gilt also noch wie beim idealen Gas die Relation

$$w = n_e \langle E \rangle = \frac{3}{2} p \tag{10.9}$$

zwischen Energiedichte w und Druck p. Die mittlere Energie der Teilchen berechnen wir mit Hilfe von Gl. (2.17) zu

$$\langle E \rangle = \int_0^{E_F} E\ g(E)dE = \int_0^{E_F} E^{3/2}dE \Big/ \int_0^{E_F} E^{1/2}dE = \frac{3}{5}E_F\,. \tag{10.10}$$

Einsetzen der Fermie-Energie nach Gl. (2.19) $E_F = h^2/(8m_e)\ (3\ n_e/\pi)^{2/3}$ liefert mit Gl. (10.9), das Ergebnis (10.8).

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die Ergebnisse für den *hochrelativistischen Fall* ($v \approx c$) bzw. $E = p\ c$ angegeben. Die Beziehung (10.9) geht dann über in $w = 3p$, und die Zustandsgleichung ergibt sich zu

$$p = \frac{c}{4}\left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}. \tag{10.11}$$

Der kleinere Dichteexponent (4/3 anstelle von 5/3) bedeutet eine geringe Kompressibilität des Plasmas. Wie *S. Chandrasekhar* bereits 1931 aufzeigte, hat dieser geringe Unterschied bei schweren Sternen (mehr als 1,44 Sonnenmassen) eine dramatische Konsequenz: In der Endphase, wenn die Energieproduktion über Kernfusion erlischt, kommt es innerhalb weniger Sekunden zu einem gewaltigen Gravitationskollaps (Supernova), der mit einem Neutronenstern oder einem "schwarzen Loch" endet.

10.3 Stand der Laserfusion

Die in den Experimenten verwendeten Pellets sind im einzelnen nicht genau bekannt, da dieser Teil der Forschung noch weitgehend der Geheimhaltung unterliegt[9] Man weiß jedoch, daß mindestens drei Konzepte verfolgt wurden und wohl nach wie vor immer noch aktuell sind:

- Mit D-T-Gas *gefüllte Glaspellets*. (Abb. 10-2) So wurden von den Japanern am GEKKO-Laser extrem dünnwandige Glaskügelchen von 0,62 mm Durchmesser (Radius/Wanddicke = 470) eingesetzt, die im Inneren mit einem D-T-Gemisch unter 6,2 bar gefüllt waren. Während der Implosionsphase schrumpft nach etwa 2 ns der Radius auf etwa 100 µm (Abb. 10-3). Der zentrale Druck beträgt dann p = 2,6 Gbar. Das sogenannte Fusionsprodukt erreicht Rekordwerte von $T \cdot n \cdot \tau_E = 1 \cdot 10^{20}$ keV s/m^3, was allerdings noch um den Faktor 50 unter dem für D-T notwendigen Wert von $5 \cdot 10^{21}$ keV s/m^3 (s. Kap. 11) liegt. Pro Puls wurden 10^{13} Neutronen nachgewiesen. Als Diagnostiktechniken werden unter anderem zahlreiche Beobachtungen im weichen Röntgengebiet vorgenommen. Die Kompression der Pellets läßt sich recht gut durch *Röntgenschmier-Photos* nachweisen, bei denen das Pellet mit Hilfe einer Lochkamera über einen nachgeschalteten rasch rotierenden Spiegel (bei weichem Röntgenlicht unter streifendem Einfall) auf einen photographischen Film abgebildet wird. Die Ergebnisse der Abb. 10-3 wurden auf diesem Wege gewonnen.
- *Hoch-Z-Pellets*
  Anstelle der Glaspellets werden hier Ummantelungen aus Schwermetall verwendet. Diese Materialien dienen als "Treiber" (pusher), um eine höhere Kompression zu erreichen. Bisher sind mindestens Kompressionsverhältnisse von 100 erreicht worden.

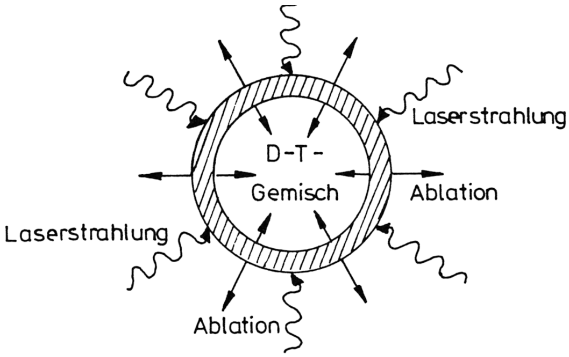


Abb. 10-2: Kompression eines dünnwandigen Glaspellets durch Laserbestrahlung (aus U. Schumacher: Fusionsforschung).

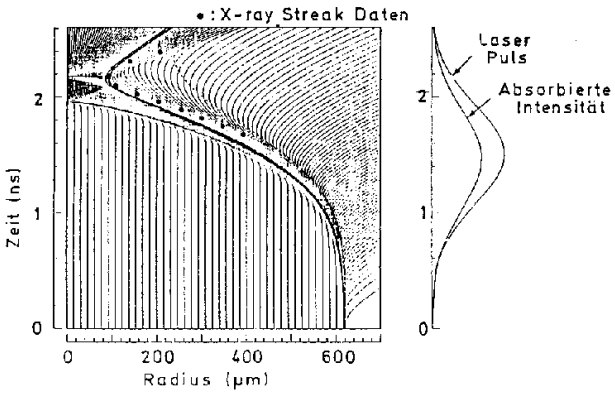


Abb. 10-3: Röntgenschmieraufnahme eines implodierenden Pellets (Punkte) mit 0,62 mm Anfangsradius und 1,3 µm Wandstärke. Die berechneten Linien zeigen die Bahnkurven der Massenelemente. Rechts der Intensitätsverlauf der Laserstrahlung (GEKKO) und der absorbierten Leistung (n. C. Yamanaka et al., Proc. 11th Int. Conf. Plasma Phys. and Contr. Fusion, Kyoto 1986).

- *Hohlraum-Pellets*
  Wie bereits eingangs erwähnt, ist bei der Kompression eine möglichst kugelsymmetrische Aufheizung wichtig. Eine unsymmetrische Kompression führt zur Anfachung der später zu besprechenden *Rayleigh-Taylor-Instabilität,* die eine Zerfaserung des Pellets zur Folge hat. Man arbeitet daher gewöhnlich mit 10 bis 12 Laserstrahlen, die, aus verschiedenen

[9] Einige Untersuchungen stehen vermutlich im Zusammenhang mit dem bei Kernwaffenexplosionen ausgelösten Elektro Magnetic Pulse (EMP).

Richtungen kommend, gleichzeitig auf der Pelletoberfläche eintreffen müssen. Dieser Schwierigkeit kann man entgehen, wenn man das Pellet in eine Hohlkugel setzt, die durch zwei kleine Öffnungen vom Laser aufgeheizt wird, wie in der Abb. 10-4 dargestellt. Die Laserstrahlung wird zwischen Pellet und Schwermetalloberfläche (Gold) vielfach reflektiert. Es bildet sich somit eine homogene und isotrope *Hohlraumstrahlung* aus, die durch eine Kirchhoff-Planck-Funktion mit einer Strahlungstemperatur von etwa 10^6K beschrieben wird. Diese Methode der Pelletkompression wurde am Max-Planck-Institut für Quantenoptik in Garching entwickelt und wird inzwischen sowohl in USA als auch Japan erprobt.

- *Laser*

Aufwendige Hochleistungslaser stehen insbesondere in den USA und Japan zur Verfügung. Eine Vorstellung von der Größe des derzeitigen Rekordhalters, des *DIVA-Lasers* im Lawrence Livermore Laboratorium (Kalifornien), vermittelt die Abb. 10-5. Es handelt sich hierbei um einen *100 kJ-Neodym-Laser* (1,053 µm), der mit Frequenzverdopplung (η =70 %)$\rightarrow$ λ= 0,527 nm oder Frequenzverdreifachung (η =50 %)$\rightarrow$ λ= 0,35 nm betrieben wird. Die Abb. 10-6 skizziert den Strahlengang mit den verschiedenen Verstärkerstufen und sonstigen optischen Komponenten. Die Abb. 10-7 gestattet uns einen Blick in die Pelletkammer, wo die zehn Laserstrahlen auf das winzige Pellet im Zentrum fokussiert werden müssen. Die Pellets werden gewöhnlich an sehr dünnen Quarzfäden aufgehängt.

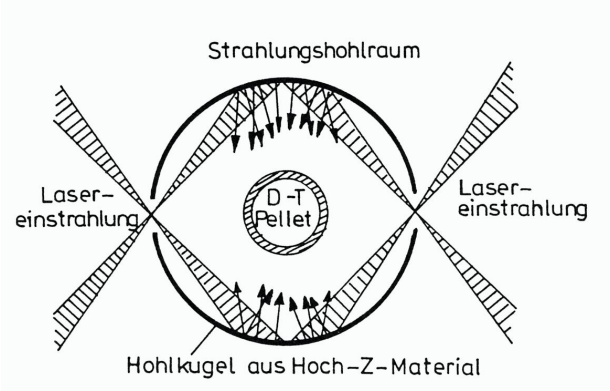


Abb. 10-4: Pelletkompression unter Verwendung von Hohlraumstrahlung. (aus U. Schumacher: Fusionsforschung)

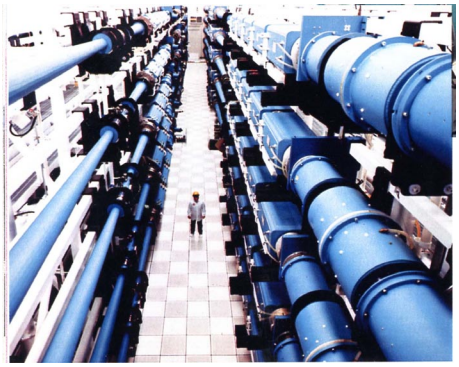


Abb. 10-5: Blick in die Verstärkerhalle des DIVA-Lasers. Durch die übereinander liegenden Rohre geht jeweils einer der 10 Strahlen.

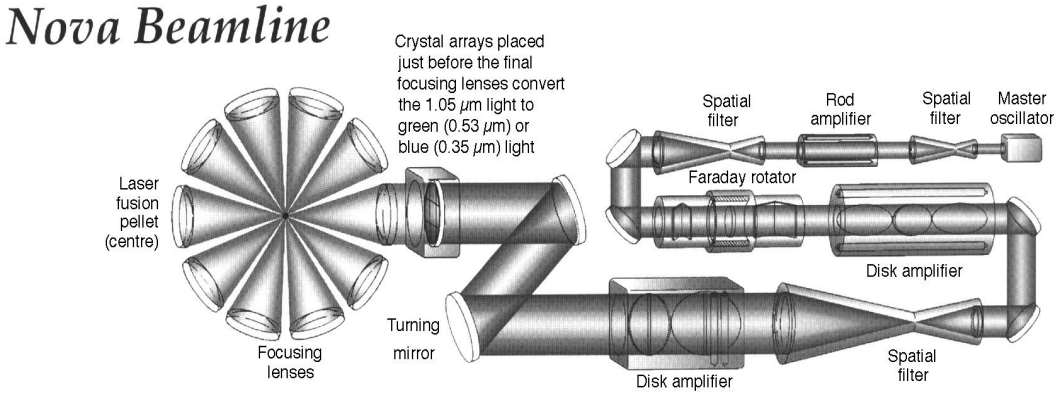


Abb. 10-6: Strahlengang im NOVA Laser.

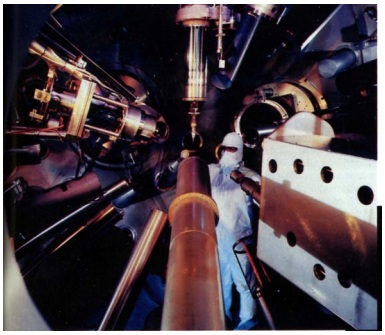


Abb. 10-7: Ein Photo vom Inneren der kugelförmigen Pelletkammer des NOVA-Lasers. Im Zentrum sieht man eine Person im "Cleanroom"-Anzug mit Justierarbeiten beschäftigt.

10.4 Fast-Ignition-Experimente mit Ultra-Kurzzeit-Lasern

Seit etwa 10 Jahren stehen Hochleistungslaser zur Verfügung, die in Zeiten von 1 ps $=10^{-15}$ – und mittlerweile darunter bis zu etwa 100 fs – eine Energie von 1-10 J abgeben. Sie besitzen damit eine Leistung im Bereich von 1-100 TW.

Diese kurzen Höchstleistungspulse werden durch *Puls-chirping* Verstärkung (chirped pulse amplification = CPA) erzeugt. Hierbei wird ein extrem kurzer Puls (100 fs, 1 nJ) zunächst durch ein Gitter in seine Frequenzanteile zerlegt. Diese Frequenzzerlegung wird durch ein zweites Gitter, das schräg zum ersten steht, wieder rückgängig gemacht, jedoch so, daß der rot-frequente Anteil eine kürzere Strecke durchläuft als der blaue. Man erhält so einen gedehnten Puls (Faktor 10^4) dessen Kopf die Rotanteile und dessen Schwanz die Blauanteile des Primärpulses enthält (s. Abb. 10-8). Das beschriebene Gitterpaar wird insgesamt als *Pulsdehner* bezeichnet. Mit der Pulsverlängerung geht auch eine Reduktion der Pulsleistung (Faktor 10^4) einher. Jetzt durchläuft der Puls ein breitbandig-laseraktives Medium (z.B. optisch gepumptes Ti-Saphir oder Neodym-Glas), das seine Leistung bis zur maximal möglichen Leistungsdichte (einige GW/cm^2, begrenzt durch Selbstfokussierung und damit einhergehender Zerstörung des Materials) verstärkt. Nach der Verstärkung folgt ein zweites Gitterpaar, das die anfängliche Pulsdehnung wieder rückgängig macht. Es wird als Pulskompressor bezeichnet. Diesmal sind die beiden Gitter nämlich so angeordnet, daß die roten Frequenzen eine kürzen Weg zu durchlaufen haben als die blauen. Dadurch schrumpft die Pulslänge um den Faktor 10^4 und die Leistung steigt um den gleichen Faktor. Von nun an kann der Strahl nur durch Vakuum geleitet werden. In Luft kommt es auf Grund der hohen elektrischen Feldstärke im Strahl zur Ionisation und Anregung der Moleküle (starke Leuchterscheinungen), die den Strahl stark abschwächen.

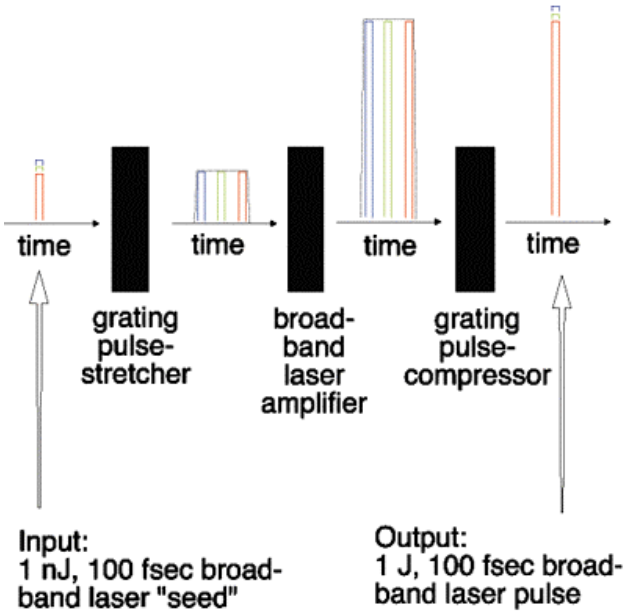
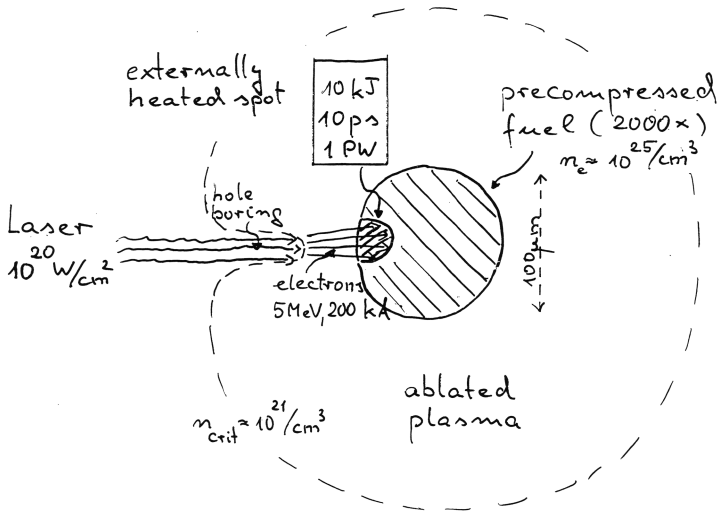


Abb. 10-8: Prinzip des Puls-Chirpings zur Erzeugung ultra-kurzer Laserpulse.

Durch Fokussierung dieser Laserstrahlung (nach Frequenzverdoppplung des Neodym-lasers λ = 0.527 µm) mit Hilfe spezieller Metallreflektoren kann man in Gebieten von 10 µm Durchmesser Leistungsdichten von bis zu etwa 10^{20} Wcm^{-2} erreichen. Bei derartig Leistungsdichten werden die Elektronen in einer dünnen Plastikfolie



(meist durch einen vorangehenden Puls vorionisiert) auf relativistische Energien

Abb. 10-9: Prinzipielles zur Fast Ignition (n. J. Meyer-ter-Vehn, EPS Fusion, Berchtesgarden 1997)

beschleunigt und es treten eine Reihe von interessanten physikalischen Effekten auf. So erhalten die Elektronen – anders als bei nicht-relativistischen Laserleistungen – kaum Senkrechtenergie, sondern werden vornehmlich in Laserrichtung beschleunigt und erhalten Energien von etwa 5 MeV. Diese Elektronen bohren sich gewissermassen in das sich ausdehende Pellet hinein; sie bilden dabei einen Kanal von etwa 10 µm Durchmesser (s. Abb. 10-9). Während im äußeren Pelletbereich typische Dichten von $n_e \geq 10^{26}$ m^{-3} vorliegen hat man in einem Kernbereich von etwa 100 µm Ausdehnung ein extrem komprimiertes Plasma mit etwa 10^5 höherer Dichte, d. h. etwa 100-1000-fache der Festkörperdichte. Die beschleunigten Elektronen geben sowohl zur Röntgenstrahlung Anlaß erzeugen aber auch einen starken elektrischer Strom (200 kA). Letzter erzeugt extrem starke Magnetfelder ($B \approx 10^4$ T), wie sie sonst nur in kosmischen Objekten (Pulsare) beobachtet werden.

10.5 Zusammenfassung

Die Trägheitsfusion ist grundsätzlich auf eine starke Kompression der D-T-Pellets angewiesen. Auf diesem Wege sind in den vergangenen Jahrzehnten auch große Fortschritte erzielt worden. Bei den Lasern sind die Verluste bei der Energieumwandlung und infolge der Reflexion an der Pelletoberfläche jedoch so hoch, daß zusätzlich ein sehr hoher Energieverstärkungsfaktor ($Q >> 100$) erreicht werden muß. Hierzu bietet sich das Konzept der zentralen Zündung an, das allerdings einen exakt geformten Laserpuls verlangt. Zusätzlich bereitet die notwendige homogene Aufheizung Probleme.

Bei der Verwendung von Teilchenstrahlen sind die Energieverluste deutlich geringer. Wegen ihrer leichten Masse kommen Elekronenstrahlen jedoch nicht in Betracht, da diese bei den benötigten Leistungen zu stark divergieren. Hochenergetische Ionenstrahlen – wie sie beispielsweise bei der GSI in Darmstadt erzeugt werden – sind aus dieser Sicht günstiger $\eta_{Strahl} \approx 25$ %). Der technische Aufwand bei der Herstellung solcher Strahlen erscheint aber dem der Laserfusion mindestens vergleichbar.

Ein großer Nachteil der Trägheitsfusion ist in jedem Fall der Kurzzeitcharakter der Energiefreisetzung (ns-Zeitskala). Insbesondere die bei der Fusion entstehenden α-Teilchen bombardieren die umgebende Gefäßwand (und ebenso alle vom Zentrum aus sichtbaren Komponenten) und können sehr leicht Verdampfungen hervorrufen, da auf der kurzen Zeitskala die Energie nicht durch Wärmeleitung abgeführt werden kann. Vorteilhaft im Vergleich zu den im folgenden zu besprechenden magnetischen Einschlußkonzepten ist die Einsparung der mit dem Magnetfeld verbundenen Kosten und technischen Probleme.

Zur Zeit ist noch nicht abzusehen, ob die modernen Ultra-Kurzzeitlaser der Trägheitsfusion günstigere Möglichkeiten erschließen. In jedem Falle sind die in diesem Zusammenhang durchgeführten Experimente von großem wissenschaftlichen Interesse. Sie eröffnen den Vorstoß in bislang unzugängliche Zustände der Materie und damit in neue Gebiete der physikalischen Forschung.

11 MAGNETISCHER EINSCHLUSS

Die Möglichkeit, ein vollständig ionisiertes Plasma mit Hilfe von Magnetfeldern einzuschließen, ergibt sich aus der Ladungseigenschaft der Plasmateilchen, der Elektronen und Ionen. Wie wir in Kap. 5 gesehen haben, folgen die geladenen Teilchen weitgehend den magnetischen Feldlinien. Ihre Bewegung senkrecht dazu ist dagegen durch die erzwungene Gyration stark eingeschränkt. Bei den magnetischen Konfigurationen, die man zum Zwecke des Einschlusses ersonnen hat, lassen sich nun zwei Klassen unterscheiden: gerade Anordnungen (auch als lineare oder offene Konfigurationen bezeichnet) und toroidal geschlossene Konfigurationen. Zur generellen Orientierung sei auf das untere Schema in Abb. 11-1 verwiesen.

$$\text{Lineare Anordnungen}\begin{cases}\text{Z-pinch}\\ \text{Theta pinch}\\ \text{Spiegelmaschinen}\\ \text{Cusp}\end{cases}$$

$$\text{Toroidale Anordnungen}\begin{cases}\text{Axialsymmetrisch}\begin{cases}\text{Tokamak}\\ \text{Reversed Field Pinch}\\ \text{Screw pinch}\\ \text{Spheromak}\end{cases}\\ \text{Nicht-axialsymmetrisch}\begin{cases}\text{Stellarator}\begin{cases}\text{Helias}\\ \text{advanced stellarator}\end{cases}\\ \text{Torsatron}\\ \text{Heliotron}\\ \text{M+S-Torus}\\ \text{Bumpy Torus}\end{cases}\end{cases}$$

Abb. 11-1: Übersicht zum magnetischen Einschluß

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß man allenfalls im zweiten Fall mit einem vollständigen magnetischen Einschluß rechnen kann, da bei den geraden Anordnungen das Plasma an den Enden in Magnetfeldrichtung ausströmen kann. Trotzdem haben lineare Konfigurationen in der Vergangenheit eine große Rolle gespielt – nicht zuletzt, weil sie aus technischer Sicht wesentlich einfacher sind. Erste Versuche wurden mit dem *Z-Pinch* in den 50er und 60er Jahren durchgeführt (s. Kap. 6.3). Hier fließt in einer zylindrischen Anordnung ein axialer Strom (z-Richtung), der ein poloidales Magnetfeld aufbaut. Diese Entladungen waren gepulst, zerfielen aber noch schneller (nach wenigen μs) durch Instabilitäten. Viele Experimente wurden mit den *θ-Pinchen* (Abb. 11-2) durchgeführt, in denen der Strom in poloidaler Richtung (Winkel θ) fließt. Aufgrund der vom ansteigenden Magnetfeld erzwungenen

Plasmakompression kommt es zu einer raschen Aufheizung (Erhaltung des magnetischen Momentes $\mu = W_\perp/B$) mit Temperaturen bis zu etwa T = 1 keV. Letztlich sind jedoch hier die Nicht-Stationarität der Entladungen und die hohen Endverluste von zu großem Nachteil.

Bei den linearen Anordnungen spielen die *magnetischen Spiegel* eine gewichtige Rolle. Zahlreiche Laboraufbauten verwenden diesen einfachen Einschlußtyp, um Plasmen für technische Anwendungen oder Grundlagenuntersuchungen bereitzustellen. Von besonderem Interesse war bis vor kurzem der Tandemspiegel, da vieles dafür sprach, daß in dieser Konfiguration die Endverluste durch elektrische Felder vermieden werden könnten. Da das vorgeschlagene Tandem-Konzept – auch wenn es letztlich nicht erfolgreich war – vom physikalischen Ansatz her instruktiv ist, gehen wir hierauf zunächst ein. Danach wollen wir uns in den folgenden Abschnitten mit den toroidalen Konfigurationen befassen und vor allem den Tokamak genauer analysieren. Eingebettet in diesen Problemkreis ist eine generelle Betrachtung über Reaktorkriterien, die uns auch mit einigen Grundfragen der Plasmastrahlung in Berührung bringt.

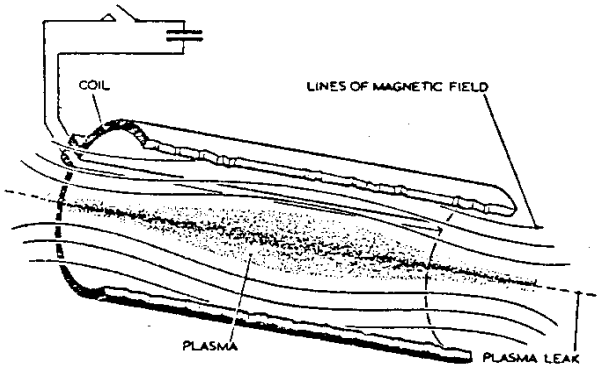


Abb. 11-2: Theta-pinch

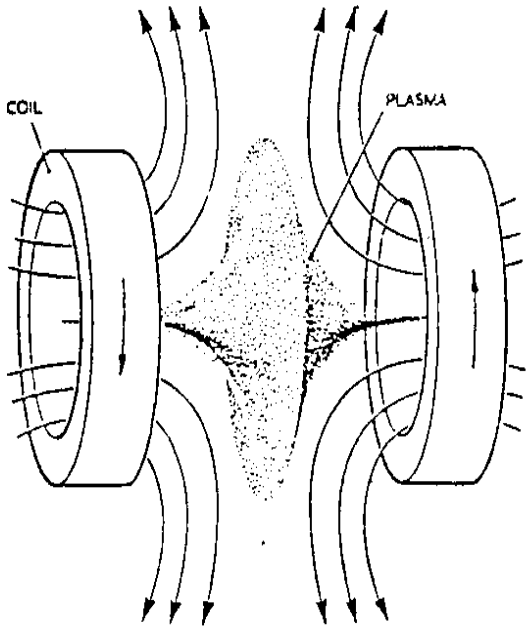


Abb. 11-3: Cusp-Feld-Anordnung

11.1 Spiegel- und Cusp-Maschinen

Die *gewöhnliche Spiegelanordnung* (Abb. 11-4) haben wir bereits im Kap. 5 kennengelernt. Sie leidet an zwei Problemen: die bereits angesprochenen *Endverluste* und *Instabilitäten* (Flute-Type), die mit der Abnahme des B-Feldes in radialer Richtung zusammenhängen. Wie wir später noch genauer erfahren werden, führen letztere zu einer poloidalen Zerfaserung des Plasmas und damit auch zu einem raschen radialen Verlust. Aber auch ohne diese Instabilitäten sind die Endverluste allein bereits erheblich.

Im Abschnitt 5.3.4 hatten wir gesehen, daß aufgrund der höheren Stoßrate der Elektronen diese im Spiegel zunächst schneller verloren gehen, wodurch sich das Plasma positiv auflädt, bis schließlich ein ambipolarer Teilchenstrom einsetzt. Ist dieser Zustand erreicht, gehen beide Teilchensorten auf der langsamsten Stoßzeitskala, d.h. Ionen-Ionen-Stoßzeit, verloren. Mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung kann man die Verluste berechnen. Sie ergeben sich durch die Diffusion der Ionen in den Verlustkegel des Geschwindigkeitsraumes. Die aufwendige analytische Rechnung (s. Miyamoto, Kap. 5) liefert das Resultat

$$\tau = 0{,}78\,\tau_{ii}\ln \mathbf{R}, \qquad (11.1)$$

wobei R = B_{max} /B_0 das *Spiegelverhältnis* , also der Quotient des axialen Magnetfelds zwischen Ende und Mitte des Spiegels ist. Bemerkenswert an der obigen Beziehung ist vor allem, daß die Einschlußzeit unabhängig von der Stärke des Magnetfelds ist. Auch das Spiegelverhälnis geht nur sehr schwach über den Logarithmus ein. Einsetzen von typischen Fusionsdaten T = 10 keV, n = 10^{20} m^{-3} in die Beziehung Gl. (4.58) liefert für Deuteronen τ_{ii} $=1/\nu_{ii}$ = 15 ms und damit, wenn wir R = 3 wählen, für das *Fusions-Produkt* T n $\tau \approx 1.5\cdot 10^{19}$ Kev m^{-3} s, was rund um den Faktor 300 zu klein für die DT-Fusion ist.Bei der *Cusp-Anordnung* (Abb. 11-3) sind die Verhältnisse anders. Hier gibt es keine Verlustkegel wie beim Spiegel, vielmehr strömt das Plasma in der Mittelebene (B = 0) und an den Enden frei aus. Die entsprechenden Flußdichten sind nach Gl. (3.15) $\Gamma_i = n\,\bar{v}_i/4$. Die Ausströmflächen an den Enden und in der Mittelebene sind näherungsweise durch den Ionengyroradius ρ_i bestimmt. Eine quantitative Abschätzung führt auf eine Einschlußzeit der Größenordnung

$$\tau \approx \frac{L}{\bar{v}_i}\left(\ln\frac{2L}{\rho_i}+1\right), \qquad (11.2)$$

wobei 2L der Spulenabstand ist. Für L = 10 m, T_i = 10 keV, und B = 10 T ergeben sich für Deuteronen bescheidene τ = 0,1 ms, was also nochmals um den Faktor 100 schlechter als beim Spiegel ist.

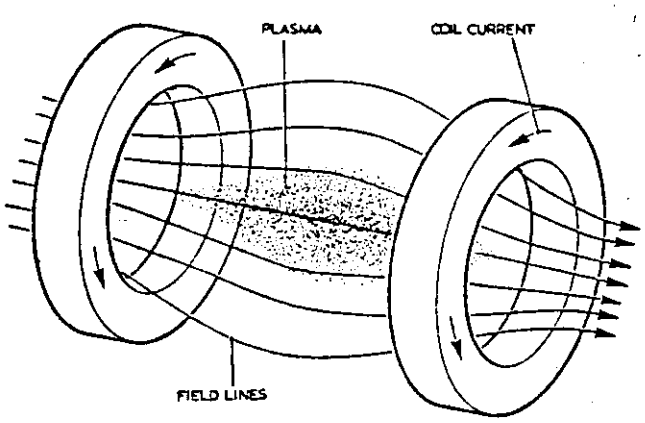


Abb. 11-4: Einfache Spiegelanordnung

Bei den obigen Abschätzungen haben wir die zusätzlichen Verluste durch Flute-Instabilitäten beim gewöhnlichen Spiegel nicht betrachtet. Diese können aber mit wachsendem Spiegelverhältnis u. U. erheblich werden und bei niedrigen Dichten (n < 10^{10} m^{-3}) die Endverluste noch übertreffen. Entscheidend hierfür ist die Krümmung der Magnetfeldlinien. Ist diese, von der Plasmaachse aus gesehen, konvex, wie beim Spiegel, so können diese Instabilitäten anwachsen, während sie im konkaven Fall (Cusp) gedämpft werden. Wie *M. S. Ioffe* erkannte, können die Flute-Instabilitäten mit Hilfe einer zusätzlichen Spule auch beim Spiegel unterdrückt werden. Die von Ioffe und Mitarbeitern erfolgreich eingesetzte Spule umschließt mäanderförmig den ganzen Spiegel. Bei relativ kleinen Dichten um 10^{10} m^{-3} wurden so Ionentemperaturen bis 4 keV erreicht. Eine Reduktion der Endverluste läßt sich – auch bei höheren Dichten – mit sogenannten *Ying-Yang-Spulen* (auch Baseball oder Minimum-B-Spulen genannt) erreichen, die lediglich an den Enden angebracht werden. Diese merkwürdig geformten Spulen sind in der Abb. 11-5 dargestellt. Bei diesen Spulen nimmt das Magnetfeld, von der Achse ausgehend, immer zu. Es bildet sich somit auf der magnetischen Achse eine "*magnetische Mulde*" aus. Die mit den Endspulen versehene Spiegelanordnung wird als *Tandem-Spiegel* bezeichnet. Sie ist in der Abb. 11-6 dargestellt.

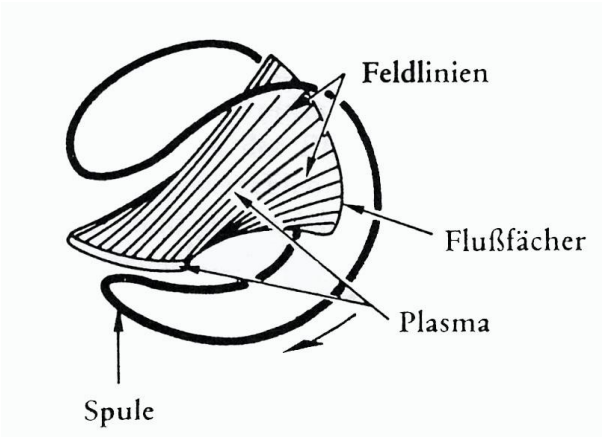


Abb. 11-5: "Baseballspule" zur Unterdrückung der Flute-Insta-bilitäten und zur Verringerung der Endverluste

Schießt man nun in den Bereich der Ying-Yang-Spulen einen atomaren Heizstrahl mit hoher Teilchenenergie ein (Neutral-injektion), so kann man – wie in der *Abb. 11-7* gezeigt – im Bereich der magnetischen Mulde ein lokales Maximum der Teilchendichte erzielen. Mit dieser Dichteerhöhung ist die Ausbildung eines positiven Potentialwalls verbunden, wobei wir die Potentialerhöhung Φ_c über die Boltzmann-Relation $n_p = n_c \exp(e\Phi_c/k_B T_e)$ berechnen können. Im Einklang mit *Abb. 11-7* bezeichnen n_c und n_p die Elektronendichten im Zentralbereich und im Spulenbereich. Die Ying-Yang-Spulen wirken, wie wir sogleich sehen werden, wie elektrostatische Stopfen (plug, daher Index p). Auflösen der Boltzmann-Relation nach der Potentialerhöhung liefert

$$\Phi_c = \frac{T_e}{e} \ln \frac{n_p}{n_c}. \qquad (11.3)$$

Dieser Potentialwall reflektiert an seiner inneren Flanke die Ionen zurück in den Zentralbereich und erhöht nach außen hin die Ionenverluste. Die Erhöhung der Ionenverluste sowie die Erniedrigung der Elektronenverluste haben wir bereits als notwendige Bedingung für die Einstellung der Ambipolarität erkannt. Der Potentialwall führt damit zu den Veränderungen der Verteilungsfunktionen bei den Elektronen und Ionen, wie sie schon in der Abb. 28 (Teil I) dargestellt wurden. Die Verlustkegel verändern sich, je nach Ladung q, entsprechend zu

$$\left(\frac{v_\perp}{v}\right)^2 < \frac{1}{\mathbf{R}}\left(1 - \frac{q\phi_c}{mv^2/2}\right). \qquad (11.4)$$

Mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung kann man nun wieder die Teilchenverluste berechnen, die, wie beim einfachen Spiegel, durch Ionen-Ionenstöße dominiert sind. *V. P. Pastukhov* hat das folgende Ergebnis für die Teilcheneinschlußzeit abgeleitet

$$\tau = \tau_{ii} \; g(\mathbf{R}) \left(\frac{e\Phi_c}{T_{ic}}\right) \exp\left(\frac{e\Phi_c}{T_{ic}}\right); \quad g(\mathbf{R}) = \frac{\sqrt{\pi}(2\mathbf{R}+1)}{4\mathbf{R}} \ln(4\mathbf{R}+2). \qquad (11.5)$$

Angenommen, man erreicht ein Verhältnis $e\phi_c/T_{ic} = 3$, so erhält man für ein Spiegelverhältnis von R = 5 eine Einschlußzeit $\tau = 180\ \tau_{ii}$, was gegenüber Gl. (11.1) eine ganz erhebliche Verbesserung darstellt, so daß man in der Tat von einer V e r s t o p f u n g d e r E n d e n sprechen kann.

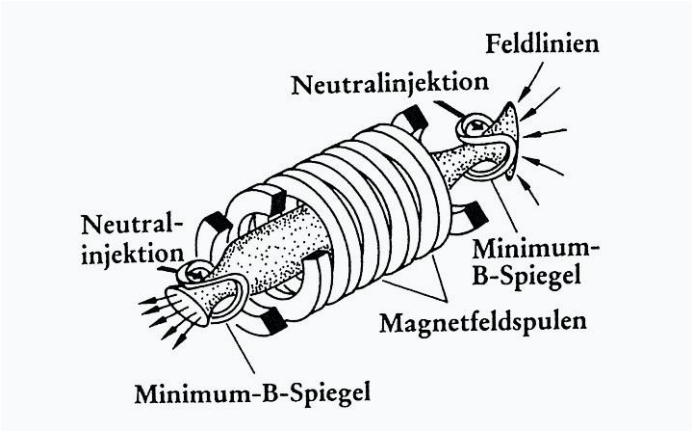


Abb. 11-6: Tandem-Spiegelanordnung mit verbessertem Endabschluß als Fusions-Reaktorkonzept.

Blicken wir zurück auf Gl. (11.3), so sehen wir, daß die Höhe des Potentialwalls nicht nur von dem sich einstellenden Dichteverhältnis, sondern ganz entscheidend auch von der Elektronentemperatur im Stopfenbereich abhängt. Man wird bemüht sein, hier eine möglichst hohe Elektronentemperatur zu erreichen. Dies kann einerseits durch lokale Elektronenheizung erfolgen, andererseits ist eine thermische Trennung zwischen Stopfen- und Zentralbereich günstig. Letzteres kann prinzipiell durch ein zusätzliches Spulenpaar (90° gedrehte Ying-Yang-Spulen) geschehen, die eine dem Potentialwall nach innen hin vorgelagerte Potentialmulde aufbauen.

In der Praxis sind jedoch keine zufriedenstellenden Resultate erzielt worden – $T_e < 100$ eV waren typische Endtemperaturen. Zur Aufrechterhaltung des Potentialwalls sind unter diesen Bedingungen beträchtliche Leistungen für die Neutralinjektion erforderlich, die im Hinblick auf eine positive Energiebilanz bei der D-T-Fusion nicht mehr tolerierbar erschienen. Das zunächst erfolgversprechende Großexperiment TMX (bzw. TMX-U mit der Potentialmulde) in Livermore ist Ende der 80er Jahre aufgegeben worden.

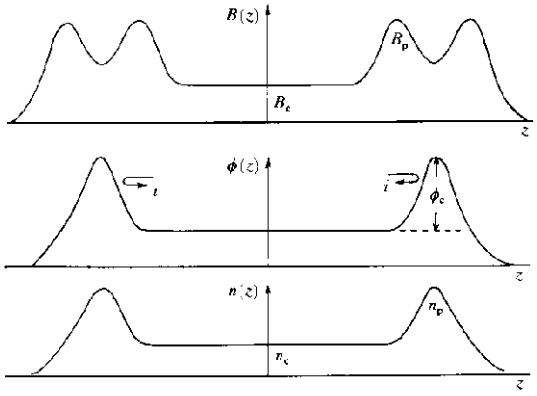


Abb. 11-7: Axialer Verlauf der Magnetfeldstärke B, des Plasmapotentials Φ und der Protonendichte n_p im Tandemspiegel.

11.2 Toroidale Konfigurationen

11.2.1 TOKAMAKS UND STELLARATOREN ALLGEMEIN

Zahlreiche Experimente mit linearen Magnetfeldanordnungen wie Z- und θ-Pinche oder Spiegelmaschinen haben immer wieder bestätigt, daß die Endverluste in solchen Anlagen zu hoch sind. Als scheinbar einfacher Ausweg bietet sich an, von der geraden Zylindergeometrie zu einer kreisförmig geschlossenen Toruskonfiguration überzugehen. Die hierbei auftretende Krümmung wirft jedoch neue Probleme auf, die mit der nun unabänderlichen Inhomogenität des toroidalen Magnetfelds ($B \sim R^{-1}$) zusammenhängt. Wie wir bereits im Kap. 5.2.3 gesehen haben, erfahren die Teilchen im inhomogenen Feld eine vertikale Drift, die zu elektrischen Feldern führt und in der Folge das Plasma sehr rasch an die Außenseite des Torus treibt.

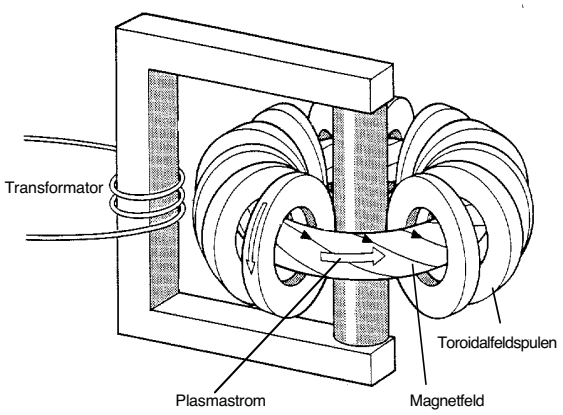


Abb. 11-8: Das Prinzip des Tokamaks

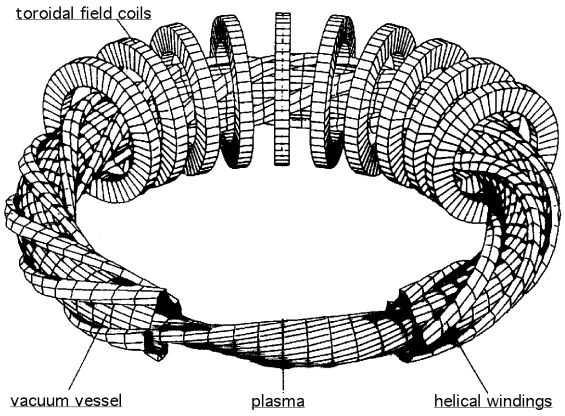


Abb. 11-9: Stellarator W 7A mit L = 2-Windungen

Um die angesprochene Drift der Teilchen zu kompensieren, benötigt man ein zusätzliches Magnetfeld B_θ in poloidaler Richtung von etwa 10% der toroidalen Feldstärke B_φ ($B_\theta \approx 0{,}1\ B_\varphi$), das eine Verschraubung der magnetischen Feldlinien um die Torusseele bewirkt. Diese Verwindung der magnetischen Feldlinien wird durch den sogenannten *Sicherheitsfaktor*

$$q := \frac{rB_\varphi}{RB_\theta} \tag{11.6}$$

beschrieben[10]. Folgen die Teilchen den Feldlinien, so vollführen sie nach q toroidalen Umläufen um die Torusachse einen poloidalen Umlauf um die Torusseele. Die hierdurch aufgeprägte poloidale Geschwindigkeit ist (zumindest im zeitlichen Mittel) wesentlich größer als die vertikale Drift. Während eines poloidalen Umlaufs wirken sich nun die vertikalen Driften in der oberen und unteren Hälfte unterschiedlich aus und führen einmal zu einer Vergrößerung des Abstands zur Seele (r), die jedoch in der zweiten Hälfte durch eine entsprechende Verkleinerung wieder aufgehoben wird.

Das poloidale Magnetfeld läßt sich sowohl durch einen im Plasma fließenden toroidalen Strom wie auch — als Effekt zweiter Ordnung — durch äußere helikale Ströme erzeugen. Ersteres führt zum Tokamak (Abb. 11-8), während die zweite Möglichkeit beim Stellarator angewandt wird. Aufgrund der hohen elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas läßt sich im Tokamak leicht ein toroidaler Strom über einen Transformator induzieren. Das Plasma bildet dabei eine einwindige Sekundärspule. Durch einen primärseitig ständig ansteigenden oder abfallenden Strom wird über den Plasmaquerschnitt eine räumlich konstante Umfangsspannung von nur etwa $U \approx 0{,}1$ - 1 V induziert. Wenngleich diese Spannungen klein sind, so verhindert die Notwendigkeit ihrer Induktion doch den kontinuierlichen Betrieb eines Tokamakreaktors. Nach Ausschöpfen des durch die Konstruktion festgelegten Flußhubs ($\Phi \approx$ 100 Vs) müßte man den Reaktor (U = 0,1 V) nach etwa 1000 s zumindest kurzzeitig abschalten. Dieser intermittierende Betrieb ist mit einer Wechselbelastung der Materialien verbunden, die u.U. eine kritische Verkürzung der Lebensdauer der Reaktoranlage zur Folge hat.

Die angeführten Probleme treten beim Stellarator nicht auf, so daß er grundsätzlich den erheblichen Vorteil des kontinuierlichen Betriebs bietet. Als nachteilig wird dagegen die Komplexität der Spulenkonfiguration (Abb. 11-9) angesehen, die u.a. ein großes *Aspektverhältnis* von $A = R_O/a > 10$ bedingt. Stellaratorreaktoren würden daher relativ groß ausfallen ($R_O > 30$ m).

10 Aus Gründen der Vereinfachung beschränken wir uns im folgenden bei allen mathematischen Beziehungen auf ein Plasma mit kreisförmigem Querschnitt.

11.2.2 DER TOKAMAK

Das Wort Tokamak ist ein russisches Kunstwort, was etwa *Toroidale Kammer mit Magnetfeldspule* bedeutet. Tokamaks wurden in den 50er Jahren in Rußland entworfen und erprobt; sie sind heute die am weitesten fortentwickelten Experimentieranlagen des magnetischen Einschlusses.

Das Tokamakplasma ist durch zwei Kennzahlen in seiner Geometrie bestimmt: großer Radius $R = R_o$ und kleiner Radius $r = a$ (Abb. 11-10). Die in Z-Richtung weisende *Torusachse* ist die Symmetrieachse.

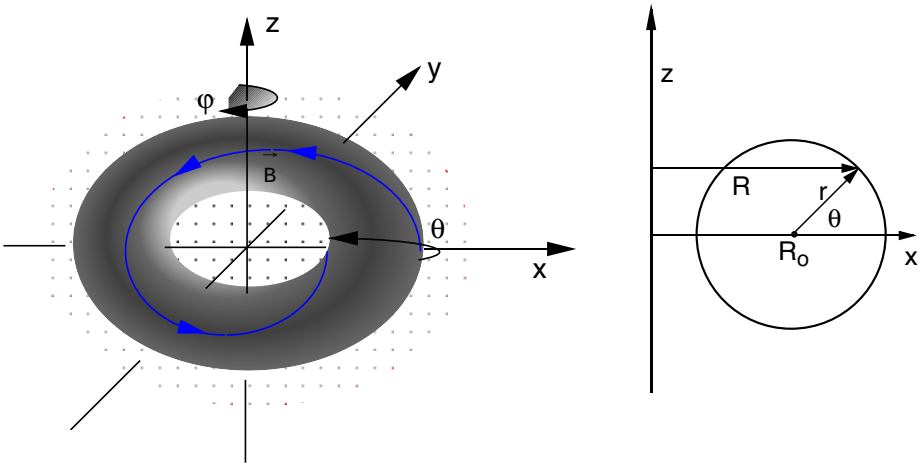


Abb. 11-10: Torusgeometrie und Koordinatensysteme: Den Winkeln φund θ ist die toroidale und poloidale Richtung zugewiesen; (r, θ, φ) bilden ein Rechtssystem. Links ist eine magnetische Feldlinie für den Fall q = 2 eingezeichnet.

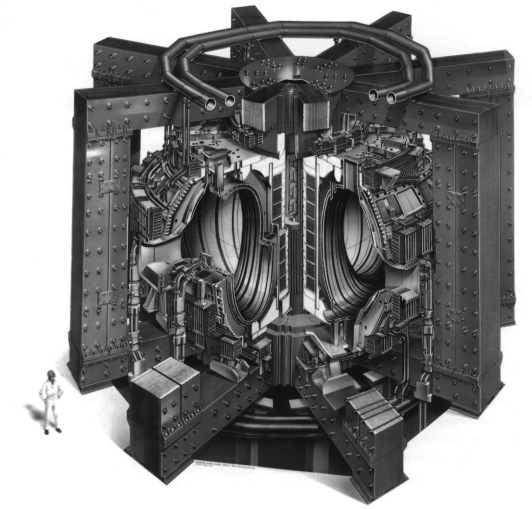


*Abb. 11-11: Der von der europäischen Gemeinschaft betriebene **JET**-Tokamak in Culham bei Oxford.*

Der im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching mit großem Erfolg bis 1990 eingesetze Tokamak ASDEX hatte die Kennzahlen: $R_o = 1.65$ m, $a = 0.4$ m. Sein Aspektverhältnis $A = R_0/a$ lag damit nahe bei 4. Die inverse, dimensionslose Größe $\varepsilon = r/R_0 < 1$ dient häufig als *Kleinheitsparameter* für mathematische Entwicklungen. Moderne Tokamaks haben statt eines kreisförmigen einen elliptischen oder D-förmigen oder auch indentierten "bohnenförmigen"-Querschnitt[11]. So besitzen ASDEX-Upgrade (das Nachfolgeexperiment von ASDEX) und JET einen elongierten, näherungsweise elliptischen Querschnitt. Die Radien von JET, dem z.Z. größten Tokamak der Welt (s. Abb. 11-11), betragen: $R_o = 3$m, $a = 1.2$ m, $b = 2$ m.

Magnetfelder im Tokamak

Der Tokamak ist im wesentlichen aus zwei orthogonalen Magnetfeldern aufgebaut: dem toroidalen Feld und dem poloidalen Feld. Die Feldrichtungen sind in der Abb. 11-10 eingetragen. Das toroidale Feld $B_\varphi$wird durch im Kreis angeordnete Spulen gebildet, das poloidale Feld B_θ wird vom Plasmastrom erzeugt. Das Toroidalfeld beträgt typisch etwa 2 - 4 T, einige "Hochfeldtokamaks" arbeiten mit Feldern bis zu 10 T. Der Plasmastrom ist, je nach Größe, einige 100 kA bis zu einigen MA. JET arbeitet bei den höchsten Strömen bis zu 7 MA. Bei einem Plasmastrom von $I_P = 0.4$ MA bei ASDEX betrug das Poloidalfeld 0.16 T an der Plasmaoberfläche.

---

11 Hier ist die „zylindrische Näherung“ von q mit $R = R_0$ und $B_\theta = B_{\theta Zyl}$ angegeben. Der reziproke Ausdruck $\iota = 2\pi/q$ wird als Rotationstransformation bezeichnet.

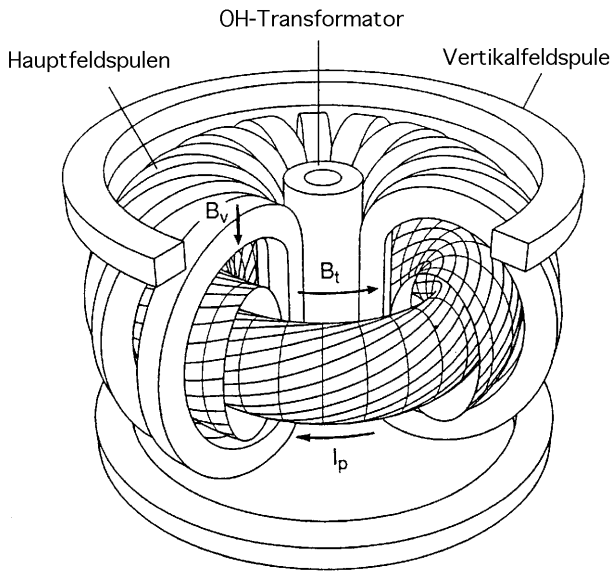


Abb. 11-12: Tokamak ohne Eisenkern und mit D-förmigen Spulen für die Erzeugung des toroidalen Magnetfeldes. Die zur Aufrechterhaltung des Plasmagleichgewichtes erforderlichen Vertikalfeldspulen sind ebenfalls eingezeichnet.

Toroidales und poloidales Magnetfeld und die toroidale Stromdichte $j_\varphi(r)$ sind nicht konstant auf den magnetischen Flußflächen (s. Kap. 5.3.2). Wegen der kreisförmigen Anordnung der Magnetfeldspulen nimmt B_φ nach außen hin ab. Unter Verwendung des inversen Aspektverhältnisses $\varepsilon = r/R_0$ erhält man:

$$\begin{aligned} B_\varphi(r,\theta) &= \mu_o \Sigma I_{sp} \,/\, 2\pi R = R_o B_{\varphi^o} \,/\, R = R_o\, B_{\varphi^o} \,/\, (R_o + r\cos\theta) \\ &= B_{\varphi^o} \,/\, (1+\varepsilon\cos\theta) \approx B_{\varphi^o}(1-\varepsilon\cos\theta) \end{aligned} \qquad (11.7)$$

Das Toroidalfeld hat damit einen Feldgradienten $\nabla B_\varphi = -B_\varphi/R\ \mathbf{e}_R$, der die Teilchenbewegung und damit die Transporteigenschaften im Tokamak mitbestimmt.

Der Plasmastrom und damit das poloidale Feld werden induktiv nach dem Prinzip eines Transformators gebildet. Der Transformator induziert einen Plasmastrom, dessen Profil sich entsprechend der räumlichen Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit im Plasma einstellt. In Abb. 11-8 ist ein Eisenkern-Transformator abgebildet, wie er in den älteren Tokamaks verwendet wurde. Moderne Anlagen benutzen einen Luft-Transformator, der den Vorteil hat, daß keine Sättigungsprobleme im Eisen und die damit verbundenen Magnetfeldstörungen auftreten. Die Überlagerung der beiden Felder - toroidales und poloidales - ergeben schraubenförmige Magnetfeldlinien, die sich um das Plasma winden (s. Abb. 11-8, Abb. 11-11).

Das Poloidalfeld im Plasma berechnet sich aus der Stromverteilung im Plasma und ist in zylindrischer Näherung durch das folgende Integral gegeben:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p(r)}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{r}\frac{1}{a^2}\int_0^r j(r')r'\,dr'\,. \qquad (11.8)$$

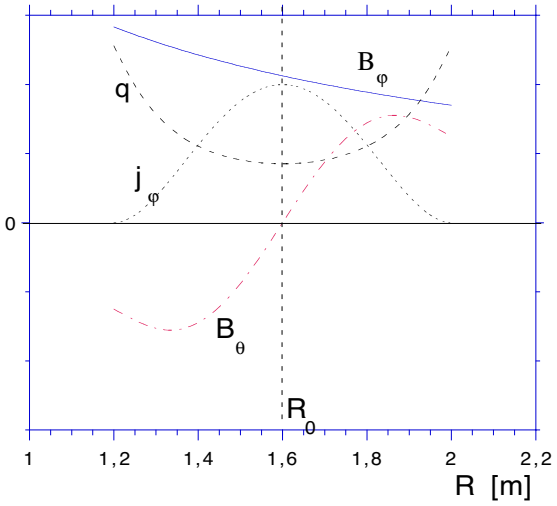


Abb. 11-13: Tokamakprofile der toroidalen und poloidalen Magnetfelder sowie der Stromdichte (j_φ) und des Sicherheitsfaktors (q). Alle Größen schematisch und in willkürlichen Einheiten als Funktion von R für z = 0. Zum besseren Verständnis des poloidalen Flusses $\psi(R, z = 0) = \int_0^R B_z\, 2\pi R\, dR$ ist hier die z-Komponente des Poloidalfelds $B_z = B_\theta \cos\theta$ aufgetragen, die für $R < R_0$ negativ wird, während B_θ selbst immer positiv bleibt.

In toroidaler Geometrie kommen Korrekturfaktoren hinzu, deren Ursache wir später im Zusammenhang mit der Betrachtung des Plasmagleichgewichtes genauer diskutieren werden. Hier sei schon angemerkt, daß das poloidale Feld an der Oberfläche durch Momente der Druck- und Stromverteilung im Plasma gegeben ist und sich wie folgt darstellt:

$$B_\theta(a,\theta) \approx \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}\left[1 + \frac{a}{R_0}\left(\beta_\theta + \frac{l_i}{2} - 1\right)\cos\theta\right]. \qquad (11.9)$$

B_θ setzt sich zusammen aus Anteilen eines geraden Leiters ($\mu_0 I_p/2\pi a$), mit der Korrektur durch die ringförmige Anordnung ($1 + a/R_0\ (1 - \cos\Theta)$). Dazu kommen zwei weitere Korrekturen, da Strom und Druck nicht symmetrisch zur Seele $R = R_0$ sind. β_θ ist das "*poloidale Beta*" des Plasmas, l_i ist die *innere Induktivität* (bezogen auf die toroidale Längeneinheit). Allgemein ist das wie folgt definierte "*Plasma-Beta*"

$$\beta \equiv \frac{\langle p \rangle}{p_{mag}} = \frac{\langle p \rangle}{B^2/2\mu_0} \qquad (11.10)$$

als Verhältnis von kinetischem zu magnetischem Druck für die Fusionsforschung von großer Bedeutung. β bestimmt maßgeblich die Wirtschaftlichkeit eines solchen Reaktors und sollte auch bei Verwendung von supraleitenden Spulen mindestens etwa 5% betragen.

Das oben auftauchende poloidale Beta ist analog definiert

$$\beta_\theta \equiv \frac{\langle p \rangle}{B_\theta^2(a)/2\mu_0}. \qquad (11.11)$$

Hier steht im Nenner der durch das poloidale Magnetfeld am Plasmarand ausgeübte Druck. Im Gegensatz zu β, das immmer kleiner als 1 ist, kann β_θ Werte zwischen null und etwa dem halben Aspektverhätlnis annehmen.

Die innere Induktivität[12] ist gegeben durch die radiale Verteilung des Stromes bzw. des Poloidalfeldes:

$$l_i \equiv \frac{\langle B_\theta^2 \rangle}{B_\theta^2(a)}. \tag{11.12}$$

Die Magnetfeldlinien haben - entsprechend der Geometrie und dem Verhältnis Poloidal- zu Toroidalfeld - eine geringe Steigung (typisch sind etwa 5° am Plasmarand). Für das Magnetfeld im Torus mit Rotationstransformation gilt:

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_\theta \vec{e}_\theta . \tag{11.13}$$

Aus der Gleichung einer Magnetfeldlinie in Zylindergeometrie folgt die bereits früher angegebene Relation für den Sicherheitsfaktor[13] bzw. für die Rotationstransformation ι

$$\frac{Rd\varphi}{rd\theta} = \frac{B_\varphi}{B_\theta} \;\Rightarrow\; \frac{d\varphi}{d\theta} = q(r) = \frac{2\pi}{\iota} = \frac{rB_\varphi}{RB_\theta}. \tag{11.14}$$

Die historisch eingeführte Bezeichnung *Sicherheitsfaktor* erklärt sich aus dem Umstand, daß nur Plasmen mit $q > 1$ stabil sind. Plasmastrom I_P und toroidales Magnetfeld B_φ dürfen daher nicht beliebig gewählt werden. Der radiale Verlauf des Sicherheitsfaktors q(r) ist für viele Fragen von Bedeutung. Im Tokamak ist zunächst nur der Wert am Rand (r = a) durch den Plasmastrom festgelegt; typische Werte sind q(a) = 2,2 - 5. Innere Instabilitäten (Sägezähne) begrenzen aber auch die Stromdichte auf der Torusseele, so daß generell q(0) ≈ 0,7 - 1 angenommen werden kann.

Mit dem von außen erzeugten toroidalen Feld und dem durch den Plasmastrom hervorgerufenen poloidalen Feld ist ein magnetischer Einschluß immer noch nicht erreicht. Für $(\beta_\theta + l_i/2) < 1$ ist das poloidale Magnetfeld an der Torusinnenseite erhöht und übt daher einen Druck aus, der das Plasma gegen die äußere Toruswand drückt. Man kann diese Kraft jedoch verhältnismäßig leicht kompensieren, indem man ein zusätzliches *Vertikalfeld* überlagert, das betragsmäßig nur etwa 10% des Poloidalfeldes zu sein braucht, jedoch nach Maßgabe des Plasmadrucks geregelt werden muß. Genaueres hierzu werden wir im Kap. 13 erfahren. In der Abb. 11-12 sind die Spulen eingezeichnet, die dieses Feld erzeugen.

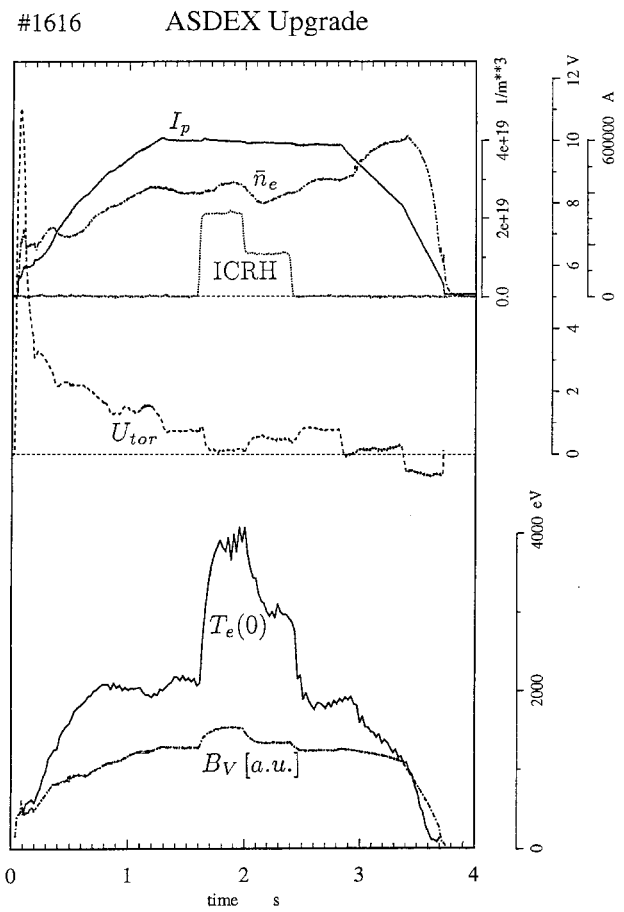
Ablauf einer Entladung

In der *Abb. 11-14* ist der Ablauf einer Tokamakentladung von ASDEX-Upgrade (R0 = 1,65m, a ≈ 0,5 m) gezeigt. Während der gesamten Entladungsdauer von 3,5 s ist das Toroidalfeld konstant bei etwa 2,5 T. Zum Zeitpunkt t = 0 erfolgt eine rasche Änderung im Primärkreisstrom, der eine Umfangsspannung induziert. Diese Spannung von etwa 8 V ist groß genug, um das kurz vorher eingelassene Wasserstoffgas zu ionisieren. Der Plasmastrom wird kontrolliert und geregelt aufgebaut. Die Variation des Stromes im Primärkreis sorgt für den Stromaufbau. Durch äußeren Gaseinlaß wird auch die Plasmadichte aufgebaut. In der Plateauphase von Strom und Dichte werden die eigentlichen Plasmauntersuchungen durchgeführt. In der gezeigten Entladung mit einem Strom von Ip = 0,6MA wird zusätzlich

---

12 li ist eine dimensionslose Größe. Für ein flaches Stromdichteprofil ergibt sich li = 1/2. Für sehr spitze Stromprofile steigt li bis auf etwa 2 an.

13 Eine weitere Berechnungsmöglichkeit für q, die besonders für nicht-kreisförmige Plasmen von Vorteil ist, bietet die Relation als Ableitung des toroidalen magnetischen Flusses nach dem poloidalen Fuß: $q = d\phi/d\psi$.



zur ohmschen Heizung ($P_{OH} = I_P\ U_{tor}$ = 0,5 MW) eine Hochfrequenzheizung mit einer Leistung von 2 MW eingekoppelt.

Abb. 11-14: Zeitlicher Ablauf einer Entladung im Tokamak ASDEX-Upgrade. Im oberen Bild sind der toroidale Plasmastrom und die mittlere Elektronendichte (gemessen mit HCN-Laser-Interferometer) wiedergegeben. Zum Zeitpunkt t = 1,5 s wird zusätzlich zur ohmschen Heizung eine Ionen-Zyklotron-Resonanz-Heizung (ICRH) für 1 s stufenweise zugeschaltet. Der Einfluß dieser Heizung macht sich besonders in der – mittels Elektronen-Zyklotron-Strahlung gemessenen – zentralen Elektronentemperatur ($T_e(0)$, unteres Bild) bemerkbar, die auf Werte bis zu 4 keV ansteigt. Als Folge der Temperaturerhöhung sinkt die Umfangspannung U_{tor} unterhalb von 1 V. Der hohe Wert während der Stromanstiegsphase ergibt sich aus dem Energiebedarf für den Aufbau des poloidalen Magnetfelds. Ein Teil dieser Energie wird während der Stromabfallphase an den Primärkreis des Transformators zurückgeliefert, was zu negativen Umfangsspannungen führt. Im unteren Teil ist auch das mit einem Feed-Back-System geregelte Vertikalfeld dargestellt. Aus der Erhöhung während der ICRH-Phase läßt sich der Druckanstieg im Plasma berechnen.

Energie-Exhaust: Limiter und Divertoren

Der magnetische Einschluß eines Plasmas ist nicht ideal. Er dürfte es im übrigen auch nicht sein, da das ja bedeuten würde, daß aus einem einmal erzeugten Plasma weder Teilchen noch Energie entweichen würde. Infolge der Heizung würde damit der Energieinhalt stetig ansteigen, was natürlich nicht ad infinitum möglich ist. In Wirklichkeit stellt sich nach einer bestimmten Zeit (den später zu betrachtenden Energie- und Teilchen-Einschlußzeiten) Stationarität ein, so daß dann die im gesamten Plasmavolumen erzeugten Leistungen und Teilchen über den Rand abfließen. Über die physikalischen Mechanismen dieser Transporterscheinungen quer zum Magnetfeld werden wir später mehr erfahren. Hier wollen wir nur nochmals deutlich machen, daß die Bedeutung des (nicht-idealen) magnetischen Einschlusses darauf beruht, mit der eingekoppelten Leistung eine möglichst hohe Energiedichte im Plasmazentrum zu erzeugen. Das Plasma soll also senkrecht zu den magnetischen Flächen eine möglichst hohe thermische Isolationsfähigkeit besitzen (in der Tat ist diese etwa mit derjenigen von Styropor vergleichbar), so daß sich ein hoher Mitte-Rand-Kontrast in der Temperatur einstellt.

Am Rand selbst, wo der Kontakt mit materiellen Wänden unausweichlich ist, muß natürlich eine mit den gewählten Materialien verträgliche Temperatur (d.h. höchstens etwa 2000° C) eingehalten werden. Dies wurde bei früheren Tokamakanlagen – und zum Teil auch heute noch – durch Einbau eines sogenanten *Limiters* bewerkstelligt. Es handelte sich hierbei gewöhnlich um einen poloidal begrenzenden Ring, der an einer bestimmten toroidalen Stelle den Leistungsfluß aufnimmt. Da der Limiter hoch belastet wird, wurde er ursprünglich aus

Molybdän oder Wolfram gefertigt. Später ging man zur Verwendung von mehreren Graphitlimitern oder auch Pilzlimitern wie in *Abb. 11-15* gezeigt über.

Grundsätzlich sind die aus dem Plasma austretenden Energieflüsse problematisch. Sie sollten möglichst so abgeführt werden, daß sie keinen Schaden anrichten und möglichst wenig Verunreinigungen freisetzen. Da bei gegebener Heizleistung und Oberfläche die mittlere Energieflußdichte (in W/m^2) festliegt, kann man nur noch auf die Art des Energieflusses Einfluß nehmen. Günstig ist zunächst ein möglichst gleichmäßiger Abfluß über die Oberfläche, um lokale Erhitzungen zu vermeiden. Ferner ist die Art des Energieflusses von großer Bedeutung. So sind beispielsweise Strahlungsflüsse aus dem Plasmarand sehr willkommen, da die Photonen den Wandmaterialien nur sehr geringe Strahlenschäden zufügen. Dagegen sind Ionen- oder Atom-Teilchenflüsse bei hohen Temperaturen sehr kritisch, da diese sehr starke Zerstäubungsprozesse verursachen können. Es ist daher wesentlich günstiger, eine gegebene Energiestromdichte auf die Wand

$$q_W = \delta \ \left(k_B T_{e,W}\right)\Gamma_w = \delta \ 2\sqrt{m_i} \ \left(k_B T_{e,W}\right)^{3/2} n_w \qquad (11.15)$$

bei hoher Dichte und kleinen Temperaturen abfließen zu lassen, als umgekehrt bei hoher Temperatur und kleiner Dichte. In Gl. (11.15) sind n_W und $T_{e,W}$ die Dichte und Temperatur an der Schichtkante, also etwa im Abstand der Debyelänge von der Wand (s. Kap. 3). Γ_W ist die entsprechende Teilchenflußdichte (Ionen $m^{-2}\,s^{-1}$), und δ ist der sogenannte *Energietransfer-Faktor*. Für $T_e = T_i$ ergibt er sich für ein Wasserstoffplasma zu $\delta = 8{,}6$.

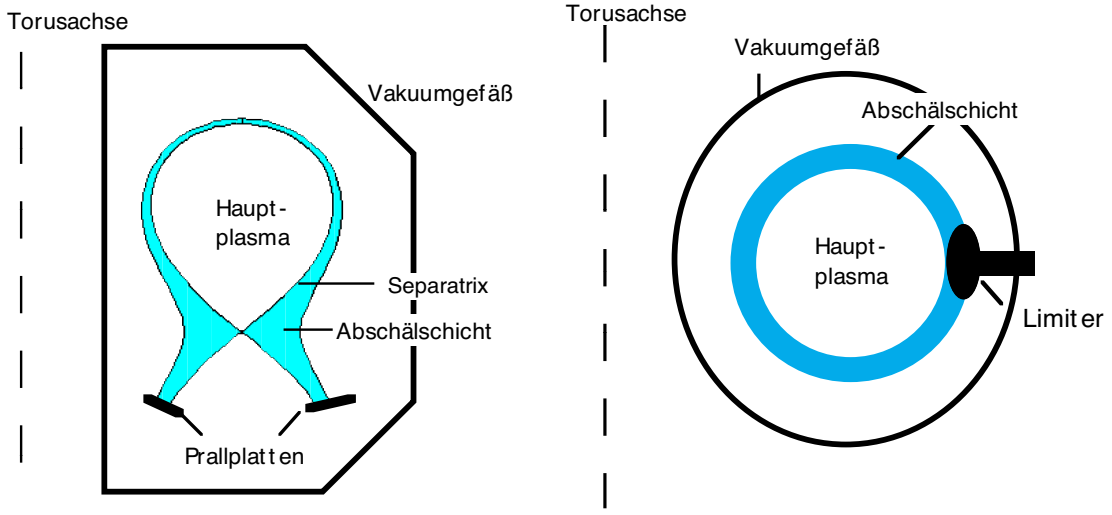


Abb. 11-15: Schematische Querschnitte eines Divertortokamaks (links) und eines Limiter-tokamaks (rechts). Bei dem skizzierten Divertor handelt es sich um eine "single-null"-Konfiguration mit unten liegendem Staupunkt. Der dargestellte Limiter ist ein sogenannter Pilzlimiter.

Um diesen Überlegungen Rechnung zu tragen, wurde das Konzept des *Divertors* entwickelt. Hierbei wird durch Verwendung zusätzlicher Spulen (die ein Multipolfeld erzeugen) die magnetische Topologie aufgebrochen, so daß eine Separatrixfläche entsteht, wie sie in der *Abb. 11-15* zu sehen ist. Diese Fläche teilt (daher Divertor) das innere Plasmagebiet mit geschlossenen magnetischen Flächen von der *Abschälzone (scrape-off layer)*, in der das Plasma auf die sogenannten *Prallplatten* (häufig auch als Divertorplatten bezeichnet) strömt. In dieser Abschälzone lassen sich relativ hohe Dichten durch Gaseinblasen erzeugen. Das Plasma kühlt sich hier außerdem durch zusätzliche UV-Strahlung stark ab, was im Hinblick auf die Erosion der Prallplatten günstig ist. Ferner sind die an der Prallplatte freigesetzten Verunreinigungen weniger schädlich als beim Limiter, da sie in unmittelbarer Nähe der Prallplatten ionisiert werden und nur durch Diffusion entlang der Feldlinien (d.h. über die große Wegstrecke von etwa $q_a R_0 \approx 4 R_0$) und quer zu ihnen ins eigentliche Hauptplasma

gelangen können. Das Plasma schirmt sich also gegen diese Verunreinigungen ab (*impurity screening*). Als nachteilig muß allerdings die Konzentration der Energieflüsse auf die relativ kleine Oberfläche der Prallplatten betrachtet werden. Insgesamt ist dieser Problemkreis des *energy-exhaust* hoch aktuell im Zusammenhang mit dem international konzipierten Tokamak Versuchsreaktor ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), bei dem die Belastung der Prallplatten sehr kritisch werden kann.

11.2.3 DER STELLARATOR

Wir behandeln nun einen Vertreter für nicht-toroidale Symmetrie - den Stellarator[14]. Ein großer Vorteil von Stellaratoren für den Einschluß von Fusionsplasmen ist der Umstand, daß das gesamte Feld durch äußere Leiter gebildet wird. Auf diese Weise hat das Vakuumfeld bereits einschließende Qualität. Dadurch eignet sich ein Stellarator für den Dauerstrichbetrieb; wie bereits erwähnt, ist dies eine wesentliche Voraussetzung für einen Leistungsreaktor.

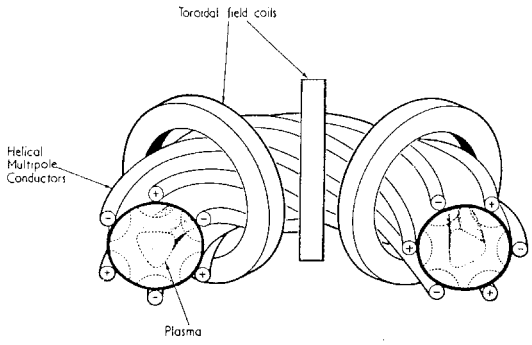


Abb. 11-16: Ein L= 3 Stellarator mit alternierenden helikalen Windungen. Aus der Steigung der Windungen ($\Delta\theta = 2/3\ (2\pi)$ bei halbem Umlauf $\Delta\varphi = 1/2\ (2\pi)$) ergibt sich die toroidale Feldperiode zu M = 4.

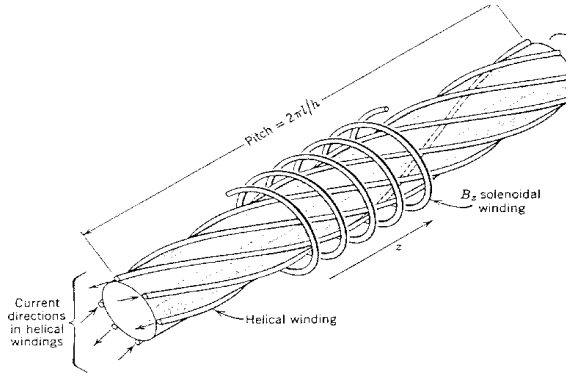


Abb. 11-17: L= 3 Stellarator in gerader Zylindernäherung

Ausgangspunkt für das Stellaratorfeld ist das Feld einer Multipol-Anordnung, deren Leiter helikal verdrillt werden (Abb. 11-16). Beim gewöhnlichen S t e l l a r a t o r , den man auch als *Helias* [15] bezeichnet, hat man immer eine g e r a d e A n z a h l v o n L e i t e r n , wobei in je zwei benachbarten Leitern die Stromrichtung ein unterschiedliches Vorzeichen hat, so daß die Gesamtstromsumme null ist. Zusätzlich werden wie beim Tokamak Toroidalfeldspulen benötigt, da das von den helikalen Windungen erzeugte B_φ-Feld zu schwach ist, um die Stabilität des Plasmas zu gewährleisten.

Die Periodizitätseigenschaften des Stellarators werden durch zwei ganze Quantenzahlen gekennzeichnet. Die poloidale Quantenzahl (L) gibt die Periodizität im kleinen Querschnitt (φ = const.) an, die toroidale Quantenzahl (M) diejenige über den großen Querschnitt (z = 0), wenn also der Torus von oben betrachtet wird[16]. Bei den Berechnungen ist oft die zylindrische Approximation eine große Erleichterung. Zu diesem Zweck wird der Torus aufgebogen und auf einen unendlich langen, geraden Zylinder abgewickelt wie in Abb. 11-17 dargestellt. Wir werden später auf diese Näherung genauer eingehen.

---

14 Von lat. Stella der Stern. Stellaratoren sollen sternähnliche Verhältnisse ermöglichen. Als Übersichtsartikel empfehlen sich: 1) L. Spitzer, The stellarator Concept, Phys. Fluids, 1,4, 253, (1958); 2) J. L. Shohet, Stellarators in Vol. IA, Teller: Fusion, Magnetic Confinement; 3) B. A. Carreras, G. Grieger et al., Progress in Stellarator/ Heliotron Research: 1981-1986, Nucl. Fus. 28, 9, 1613 (1988).

15 Danaben gibt es auch noch die Bezeichnung Heliac für einen Stellarator mit helikaler Achse, die durch einen zentralen Leiter erzeugt werden kann.

16 Wir verwenden hier große Bustaben, anstelle der sonst üblichen Bezeichnungen l und m, um eine Verwechslung mit der poloidalen Quantenzahl m beim Tokamak zu vermeiden. Die toroidale Quantenzahl M wird auch als Feldperiode des Stellarators bezeichnet.

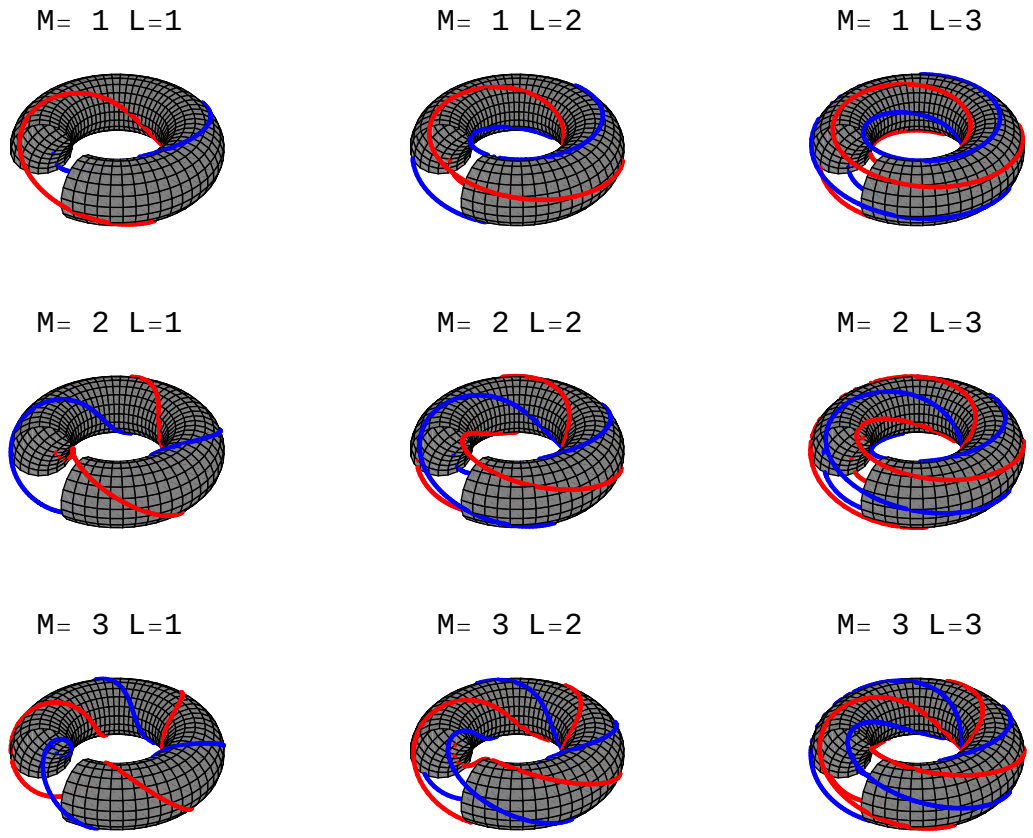


Abb. 11-18: Matrix der Stellaratoren mit den Quantenzahlen M = L = 1 bis L = M =3.

Ein L -Stellarator weist in seinem poloidalem Querschnitt eine 2L-fache Symmetrie auf. In diesem Querschnitt erscheinen dann L positive und L negative Stromleiter. Ebenso zählt man in der z = 0 Ebene 2M Durchstoßpunkte der Leiter auf dem äußeren Rand und ebenso viele auf dem inneren Torusrand. Diese Verhältnisse entnimmt man auch der Abb. 11-18, die in Matrixanordung die neun Stellaratoren mit den niedrigsten Quantenzahlen M, L ≤ 3 wiedergibt. Der Quotient M/L = $d\theta/d\varphi$ gibt die Steigung der Leiter an; er ist mit der *normierten Rotationstransformation* $\iota := \iota / 2\pi$ identisch. Die Konfigurationen auf der Haupdiagonalen der Matrix (M = L) in der Abb. 11-18 haben damit alle die gleiche Steigung $\iota = 1$. Für den einfachsten Fall M = L= 1 werden nur zwei Leiter benötigt. Für die Realisierung der Fälle M = L = 2 und M = L = 3 werden dagegen N = 4 bzw. N = 6 Leiter benötigt, die jeweils um die Winkel $\Delta\varphi = 2\pi/4$ bzw $2\pi/6$ zueinander verschoben sind und in wechselnder Stromrichtung durchflossen werden.

Bei den Konfigurationen L > M (rechte obere Ecke) ist die Steigung der Leiter $\iota < 1$, so daß die Leiter mehrmals die z-Achse umschlingen müssen, um sich zu schließen. Nach L solcher Umläufe umschließt eine Windung den kleinen Querschnitt genau M-mal. Infolgedessen durchstößt ein und derselbe Leiter bereits L-mal die poloidale Querschnittsfläche, und man benötigt nur zwei Leiter insgesamt. Umgekehrt sind die Verhältnisse im linken unteren Teil der Matrix. Hier ist wegen L < M die Steigung der Leiter $\iota > 1$, so daß bereits bei einem toroidalen Umlauf der kleine Querschnitt mehr als einmal umfahren wird. Auch hier schließen sich aber die Leiter nach L Umläufen um die z-Achse und weisen dann M poloidale Umschlingungen auf. Man benötigt deshalb auch in diesen Fällen lediglich zwei Leiter, die jeweils um 180° toroidal versetzt sind.

Komplizierter sind die Verhältnisse, wenn die beiden Quantenzahlen M und L nicht teilerfremd sind, wie das beispielsweise bei M = 4, L = 2 oder M = 3, L = 9 der Fall ist. Im ersten Fall ist die Steigung $\iota = 2$ und der einzelne Leiter ist mit denen in der Abb. 11-18 Mitte/Links (M/L = 2/1) identisch. Diese umschlingen bei einem toroidalen Umlauf den

poloidalen Querschnitt genau zweimal. Um also die geforderte 2M = 8-fache Symmetrie in der z = 0 Ebene und die 2L = 4-fache Symmertrie im poloidalen Querschnitt zu erreichen, benötigt man diesmal 2L = 4 Spulen. Im zweiten Fall (M = 3, L = 9) ist die Steigung ι = 1/3; jede helikale Windung hat jetzt die Gestalt wie in der rechten oberen Ecke der Matrix (Abb. 11-18). Diese benötigen drei toroidale Umläufe für einen poloidalen. Mit 2M = 6 Windungen, die jeweils um 60° toroidal zueinander verschoben angeordnet sind, erhalten wir diesmal die geforderten Periodizitäten über den großen (2M) und kleinen Querschnitt (2L). In Verallgemeinerung dieser Überlegungen kommen wir zu dem Ergebnis, daß die Zahl der helikalen Windungen durch folgende Relation gegeben ist

$$N = \begin{cases} 2 & \text{, falls (M,L) teilerfremd} \\ 2\,\mathrm{Min}(L,M) & \text{sonst} \end{cases} . \qquad (11.16)$$

Ein L = 2 Stellarator kann demnach - je nach seiner toroidalen Periodizität (M ≥ 2) – mit N = 2 oder 4 helikalen Windungen realisiert werden.

Zunächst kann man sich darüber wundern, daß mit derartigen äußeren Spulen überhaupt eine Rotationstransformation im Innern erzeugt werden kann. Gehen wir nämlich vom Amperesche Gesetz $rot\boldsymbol{B} = \mu_0 j$ aus, so ergibt sich wegen j = 0 und mit Hilfe des Stokes'schen Satzes für jeden beliebigen Umlauf innerhalb der Spulen

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 . \qquad (11.17)$$

Dies ist im Gegensatz zum Tokamak, wo wegen des toroidalen Plasmastromes in jedem Fall $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ gilt. Daß es im Stellarator dennoch zu einer Verschraubung der Feldlinien kommt, erklärt sich aus ihrem Fortschreiten in toroidaler Richtung. Folgen wir einer Feldlinie, so erhalten wir allenfalls dann eine geschlossene Kontur, wie in Gl. (11.17) angenommen, wenn wir mindestens einen toroidalen Umlauf vollführen. In einem solchen Fall ist aber das umfahrene Gebiet nicht mehr stromfrei, da dann ja die helikalen Windungen auf der inneren Torusseite umschlossen werden.

Nach dem *Helmholtz'schen Theorem* kann man bekanntlich jedes Vektorfeld entsprechend $\boldsymbol{A} = \nabla A_1 + rot\boldsymbol{A}_2$ zerlegen, wobei $A_1 = -\phi(x,y,z)$ eine skalare Funktion und $\mathbf{A}_2(x,y,z)$ ein Vektorfeld darstellt. Da in unserem Fall $rot\,\mathbf{B} = 0$ gilt, haben wir zusammen mit der immer gültigen Beziehung $div\,\boldsymbol{B} = 0$ die Potentialgleichung

$$\nabla^2 \Phi = 0 , \qquad (11.18)$$

wobei sich das Magnetfeld, wie in der Elektrostatik, entsprechend

$$\vec{B} = -\nabla \Phi \qquad (11.19)$$

aus dem magnetischen Potential ϕ_{mag} berechnen läßt. Wir betonen nochmals, daß diese bequeme Darstellung des Magnetfelds als Gradient eines skalaren Potentials nur für ein stromfreies Gebiet möglich ist und daher z.B. beim Tokamak nicht für den Plasmabereich benutzt werden kann. Im allgemeinen erhält man **B** als Rotation des Vektorpotentials **A** oder auch direkt über das *Biot-Savartsche Gesetz*

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,' , \qquad (11.20)$$

wobei die Integration über das Stromgebiet zu erfolgen hat.

Torsatrons

Wie bereits erwähnt, bildet sich auf Grund der verschwindenden Stromsumme der helikalen Windungen nur ein sehr kleines toroidales Magnetfeld aus, so daß zusätzliche Toroidalfeld-Spulen erforderlich sind (s. Abb. 11-16). Dies ist beim *Torsatron*, wo alle helikalen Spulen im gleichen Sinne durchflossen werden, nicht nötig. Im Gegensatz zum Stellarator kann daher ein Torsatron bereits mit einer einzigen Windung hergestellt werden (z.B. L = 3, M = 13). Diese technische Vereinfachung erkauft man sich jedoch durch den Nachteil eines wesentlich höheren *Feldripples*, der insbesondere im Hinblick auf den Einschluß der α-Teilchen zur Sorge Anlaß gibt. Auch Torsatrons werden gelegentlich mit einem zusätzlichen Toroidalfeld versehen; man bezeichnet eine derartige Konfiguration als *Heliotron*.

Magnetfeldberechnungen in zylindrischer Näherung

Bei den Berechnungen des Magnetfelds spielt es eine große Rolle, ob man es mit einem 2- oder 3-dimensionalen Problem zu tun hat. Beim Tokamak war das Problem 2-dimensional, da der toroidale Winkel (φ) eine *ignorable Koordinate* (auch zyklische Variable genannt) darstellt: die Feldkomponenten B_R,B_φ, B_z sind lediglich Funktionen von R und z, nicht aber von φ. In komplizierteren Fällen können ignorable Koordinaten auch durch Kombinationen der

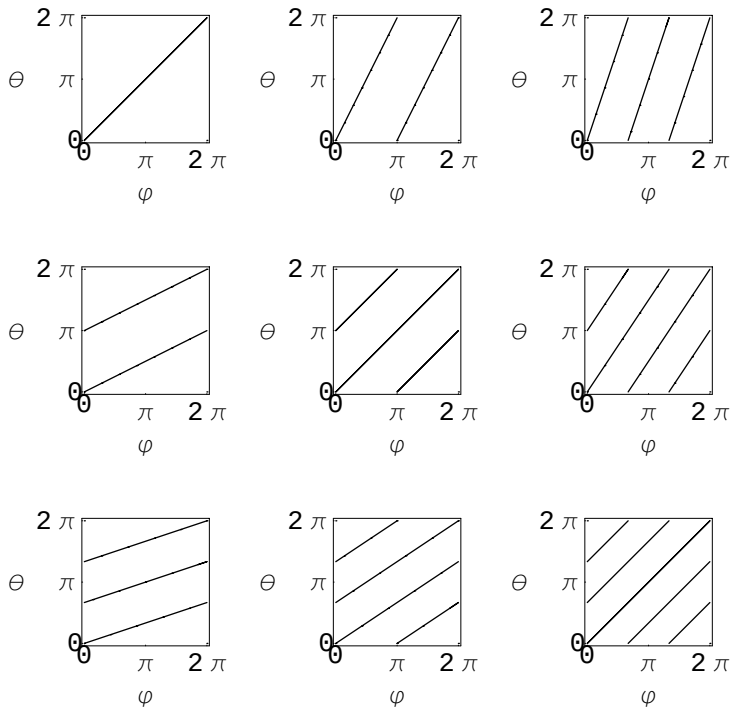


Abb. 11-19: Abwicklung der Stellaratorspulen aus Abb. 11-18 in die φ-θ-Ebene. Nur der halbe Spulensatz (positive Stromrichtung) ist wiedergegeben.

ursprünglichen Koordinaten zustande kommen. So könnte man etwa vermuten, daß beim Stellarator die gemischte Variable $u = L\,\theta - M\,\varphi$ eine derartige ignorable Koordinate darstellt, da alle Positionen auf der Torusoberfläche, mit dem gleichen Wert von u (genauer u = const. $\pm\, 2\pi\, n$ mit n = 0, 1,2,3...), auch den gleichen Abstand zu den Windungen aufweisen. Dies sieht man unmittelbar, wenn man die helikalen Windungen als Funktion der Winkel-koordinaten darstellt, wie das in der Abb. 11-9 für die Matrix aus Abb. 11-18 geschehen ist.

Die helikalen Windungen werden in dieser Darstellung zu der Geradenschar $u = \pm\, 2\pi\, n$. Im Torus jedoch unterliegt der Betrag des Magnetfeldes noch einer zusätzlichen Abhängigkeit vom Winkel θ ($B \sim 1/(1 + \varepsilon \cos\theta)$, so daß diese Symmetrie ein Trugschluß ist. Allerdings, für einen sehr schlanken Torus ($\varepsilon \ll 1$) können wir diese zusätzliche Variation vernachlässigen, und wir haben dann die Verhältnisse wie bei einem geraden Zylinder mit dem Radius r = a auf den 2L helikale Windungen mit konstanter Steigung aufgewickelt sind. Aus dem toroidalen Winkel wird gemäß $z = R_0\,\varphi$ die Achsenkoordinate im zylindrischen Koordinatensystem. In dieser Richtung können wir nun über das gesamte Intervall $-\infty < z < \infty$ die Muster aus Abb. 11-19 periodisch fortsetzen, während wie zuvor der poloidale Winkelbereich auf $0 \le \theta \le 2\pi$ beschränkt bleibt. Die ignorable Koordinate lautet jetzt $u = L\,\theta - k\,z$ mit $k = M/R_0$

Die Gleichung für das magnetische Potential (11.18) nimmt in Zylinderkoordinaten die Gestalt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (11.21)$$

an. Wie in der Elektrostatik üblich, wird man diese Potentialgleichung mit Hilfe des Produktansatzes $\Phi = F(r)\ \Theta(\theta)\ Z(z)$ und anschließender Separation der Variablen lösen können. Dabei ist wegen der Periodizitätsbedingung auf dem Umfang des Zylinders die Funktion Θ ebenfalls periodisch und damit vom Typ $\Theta = a_m \sin(m\ \theta) + b_m \cos(m\ \theta)$ mit ganzzahligem m. Aus der allgemeinen Theorie der Potentialgleichungen weiß man, daß von den verbleibenden zwei Funktionen F(r) und Z(z) nur noch eine oszillierend (d.h. periodisch oder quasi-periodisch) sein kann; die verbleibende dritte Funktion muß in jedem Fall aperiodisch (d.h. überall positiv oder negativ) sein. Bestimmen wir, daß die Funktion Z(z) die aperiodisch sein soll, so sind deren Lösungen vom Typ und $Z(z) = c_k \exp(k\ z) + d_k \exp(-k\ z)$. Für die radiale Funktion ergibt sich schließlich nach Einsetzen in (11.21) die *Besselsche Differentialgleichung*

$$r^2\frac{d^2F_m}{dr^2}+r\frac{dF_m}{dr}+(r^2k^2-m^2)F_m=0\,, \qquad (11.22)$$

deren allgemeine Lösung für $m \neq 0$ durch $F(r) = e_m J_m(k\ r) + f_m N_m(k\ r)$ gegeben ist, wobei die Funktionen J_m und N_m die Besselfunktionen der Ordnung m sind. Die Lösungen haben dann insgesamt die Form

$$\begin{aligned}\Phi=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}&\left[e_mJ_m(k_nr)+f_mN_m(k_nr)\right]\times\\&\left[c_n\exp(+k_nz)+d_n\exp(-k_nz)\right]\left[a_m\sin m\theta+b_m\cos m\theta\right]\end{aligned} \qquad (11.23)$$

Diese Entwicklung des Potentials ist besonders bei elektrostatischen Randwertproblemen geeignet, wenn etwa das Potential auf der Zylinderfläche r = a verschwinden soll. Im Inneren des Zylinders sind dann die Besselfunktionen zweiter Art, die sogenannten *Neumannfunktionen* N_m, auszuschließen, da diese eine Singularität bei r = 0 aufweisen. Die verbleibenden (oszillierenden) Funktionen $J_m(x)$ erlauben dann eine Darstellung des Potentials, indem man für jeden Wert von n das Argument an der Stelle r = a m i t der n-ten Nullstelle von J_m gleichsetzt (also $k_n\ a = x_{mn}$ wobei $J_m(x_{nm}) = 0$). Wir entnehmen der Abbildung Abb. 11-20 beispielsweise, daß die beiden ersten Nullstellen von J_0 bei $x_{01} \approx 2.4$ (genauerer Wert = 2.40483) und $x_{02} \approx 5.5$ (5.52008) liegen.

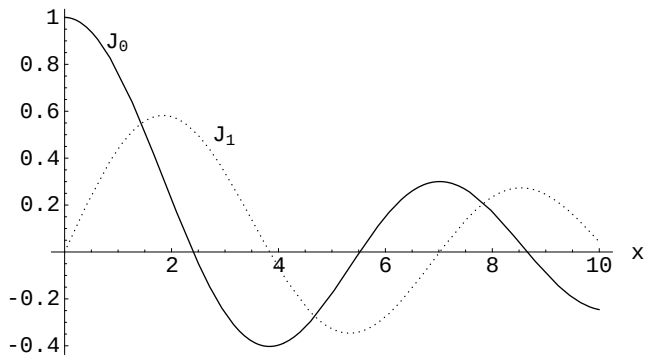


Abb. 11-20: Verlauf der Besselfunktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$.

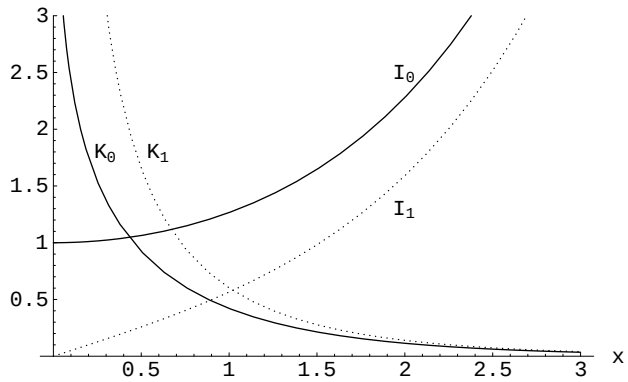


Abb. 11-21: Die modifizierten Besselfunktionen $I_0(x)$ und $I_1(x)$ sowie $K_0(x)$ und $K_1(x)$.

Im anderen Fall, wenn die axiale Funktion periodisch gewählt wird, d.h. $Z(z) = c_k \sin(k\,z) + d_k \cos(k\,z)$, genügt die Radialfunktion der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{d^2 F_m}{dr^2} + r \frac{dF_m}{dr} - (r^2 k^2 + m^2) F_m = 0 . \qquad (11.24)$$

Hier lautet die allgemeine Lösung $F(r) = e_m\, I_m(k\,r) + f_m\, K_m(k\,r)$. Die Funktionen I_m und K_m sind die sogenannten *modifizierten Besselfunktionen*, die den gewöhnlichen Besselfunktionen Funktionen J_m und K_m mit imaginärem Argument entsprechen. Mit den ersteren bestehen nämlich die Zusammenhänge

$$I_n(x) = i^{-n} J(i\,x)\ ; \quad K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} \left(J_n(i\,x) + i N_n(i\,x) \right). \qquad (11.25)$$

Wie man der Abb. 11-21 entnimmt, handelt es sich um monoton steigende (I_m) bzw. monoton fallende (K_m) Funktionen. Drücken wir die gesamte Lösung durch diese Funktionen aus, so hat sie die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_m I_m(k_n r) + f_m K_m(k_n r) \right] \times \\ \left[c_n \sin(k_n z) + d_n \cos(k_n z) \right] \left[a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta \right] \end{aligned} , \qquad (11.26)$$

die einer zweifachen Fourierentwicklung entspricht. Die Frage, ob das obige Potential ein elektrostatisches oder ein magnetisches Problem beschreibt, wird durch die Koeffizienten a_m … f_m festgelegt. Da $I_m(x) = \infty$ für $x \to \infty$ und $K_m(0) = \infty$ kann man kein überall stetig differenzierbares Potential mit konstanten Koeffizienten zulassen. Typisch ist eine Fallunterscheidung in einen inneren Bereich I ($0 \le r \le a$) und einen äußeren Bereich II ($r > a$). Im inneren Bereich verschwinden die Koeffizienten f_m, im äußeren die e_m. Die Fläche $r = a$ wird zur Quellfläche, auf der die Ladungen sitzen bzw. die Ströme fließen. Hat man es mit elektrischen Ladungen zu tun, so muß bei $r = a$ die Radialkomponente des E-Feldes (d.h. dF/dr) einen Sprung aufweisen, E_θ (und damit auch $F(r)$) hingegen stetig sein. Fließen auf der Oberfläche dagegen Ströme, so müssen B_θ (falls $j_z \neq 0$) und B_z (falls $j_\theta \neq 0$) Sprünge aufweisen, während B_r stetig bleibt. Letzteres ergibt sich aus dem Stokesschen Satz, wenn wir ihn auf enge Schleifen anwenden, die Teile der Oberfläche $r = a$ umschließen und deren Normalen in z-Richtung (B_θ) bzw. in θ-Richtung weisen. Wegen

$$B_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -Z\Theta \frac{dF}{dr};\ B_\theta = -\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -Z \frac{d\Theta}{d\theta} \frac{F}{r};\ B_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{dZ}{dz} \Theta F \qquad (11.27)$$

bedeutet dies, daß in diesem Fall bei $r = a$ die Radialfunktion F unstetig, die Ableitung dF/dr aber stetig sein muß.

Um zu einer Darstellung des Potentials zu gelangen, die den helikalen Leitern besonders angepaßt ist, lösen wir die beiden hinteren eckigen Klammern in Gl. (11.26) auf und setzen, um die Periodizitätsbedingung des Torus auf den Zylinder zu übertragen, $k_n = n\, z//R_0$. Unter Verwendung der Additionstheoreme für die sin- und cos-Funktionen erhalten wir so die alternative Darstellung

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[e_{mn} I_m(\frac{n\,r}{R_0}) + f_{mn} K_m(\frac{n\,r}{R_0})\right]\left[a_{mn}\sin(m\theta - \frac{n\,z}{R_0}) + b_{mn}\cos(m\theta - \frac{n\,z}{R_0})\right.$$
$$\left. + c_{mn}\sin(m\theta + \frac{n\,z}{R_0}) + d_{mn}\cos(m\theta + \frac{n\,z}{R_0})\right] \qquad (11.28)$$

mit den neuen Koeffizienten a_{mn} bis f_{mn}. Rechts verschraubte Windungen bedingen $c_{mn} = d_{mn} = 0$. Ferner können wir bei Windungen mit alternierendem Strom noch $b_{mn} = 0$ setzen, wenn wir den Koordinatenursprung entsprechend wählen. Bei der Summation über die beiden Laufindizes ist nun allerdings zu beachten, daß wir nur Windungen mit gleicher Helizität betrachten wollen. Das Verhältnis der Laufindizes n/m muß dann mit dem der Windungen M/L übereinstimmen, d.h. n = M m/L. Damit entfällt die Summation über den Index n und wir erhalten die einfache Fourierdarstellung

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sin[m(\theta - hz)]\begin{cases} a_m I_m(mhr); & r < a \\ b_m K_m(mhr); & r > a \end{cases}, \qquad (11.29)$$

wobei wir zugleich die Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Bereich vorgenommen haben. Ferner wurde zur Abkürzung die reziproke Länge $\mathbf{h = M/(L\,R_0)} = \iota/R_0$ eingeführt. Die zu h inverse Steigungshöhe (engl. pitch = 1/h) ist in der Abb. 11-17 ebenfalls eingetragen. Die oben geforderte Stetigkeit von $d\Phi/dr$ bei r = a bedingt $a_m\, I'_m(mha) = b_m\, K'_m(mha)$. Diese Beziehung wird offensichlich identisch erfüllt, wenn wir $a_m = \alpha_m\, K'(mha)$ und $b_m = \alpha_m\, I'(mha)$ setzen. Die hier auftretenden Ableitungen $I_m'(x) = dI_m/dx$ und $K_m'(x) = dK_m/dx$ lassen sich mit Hilfe der Relationen $I'_m = (I_{m-1} + I_{m+1})/2$ und $K'_m = -(K_{m-1}+K_{m+1})/2$ durch die Funktionen der Ordnung m±1 ausdrücken. Wir haben damit als vorläufiges Endergebnis für das magnetische Potential

$$\boxed{\Phi = -2ah\sum_{m=1}^{\infty} mc_m \sin[m(\theta - hz)]\begin{cases} K_m'(mha)\ I_m(mhr); & r < a \\ I_m'(mha)\ K_m(mhr); & r > a \end{cases} + \begin{cases} -B_0 z & ; r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases}}, \qquad (11.30)$$

wobei wir $\alpha_m = -\,2m\,h\,a\,c_m$ gesetzt haben, um mit dem im Anschluß betrachteten Multipolfall im Einklang zu sein. Ferner haben wir noch einen Term hinzugefügt, der das zusätzliche homogene Magnetfeld in z-Richtung beschreibt, das wir uns ebenfalls durch einen Oberflächenstrom in θ-Richtung auf der Fläche r = a erzeugt denken (s. Abb. 11-17).

Durch Gradientenbildung erhalten wir hieraus für die Feldkomponenten

$$B_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2h^2 a\sum_{m=1}^{\infty} m^2 c_m \sin[m(\theta - hz)]\begin{cases} K_m'(mh\,a) I_m'(mh\,r); & r < a \\ I_m'(mh\,a) K_m'(mh\,r); & r > a \end{cases}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{2ah}{r}\sum_{m=1}^{\infty} m^2 c_m \cos[m(\theta - hz)]\begin{cases} K_m'(mh\,a) I_m(mh\,r); & r < a \\ I_m'(mh\,a) K_m(mh\,r); & r > a \end{cases}$$

$$B_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -2h^2 a\sum_{m=1}^{\infty} m^2 c_m \cos[m(\theta - hz)]\begin{cases} K_m'(mh\,a) I_m(mh\,r); & r < a \\ I_m'(mh\,a) K_m(mh\,r); & r > a \end{cases} + \begin{cases} B_0; & r < a \\ 0; & r > a \end{cases}$$

(11.31)

Wir sehen, daß für den schwach verschraubten Fall (m h a << 1) im inneren Bereich die z-Komponente wesentlich kleiner (etwa Faktor h·r) als die Poloidalkomponente ausfallen.

Gerader magnetischer Multipol

Der Spezialfall h = 0 mit unverschraubten, geraden Leitern verdient eine besondere Betrachtung. Die entsprechenden Radialfunktionen für diesen magnetischen Multipol ergeben

sich aus Gl.(11.30) durch den Grenzübergang[17] h → 0 oder auch einfacher direkt aus der Gleichung (11.24) für k = 0: $F_m^{(I)} = (r/a)^{+m}$ und $F_m^{(II)} = (r/a)^{-m}$. Die Stetigkeit von ∂Φ/∂r bei r = a verlangt dann:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(m\theta) \begin{cases} (r/a)^m, & r < a \\ -(r/a)^{-m}, & r > a \end{cases}. \tag{11.32}$$

Das Magnetfeld ergibt sich zu diesmal zu $B_z = 0$ und

$$B_r = -\frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} m c_m \sin(m\theta) \begin{cases} (r/a)^m & r < a \\ (r/a)^{-m} & r > a \end{cases}; \quad B_\theta = \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} m c_m \cos(m\theta) \begin{cases} -(r/a)^m & r < a \\ (r/a)^{-m} & r > a \end{cases}. \tag{11.33}$$

Für die Stromdichte erhalten wir mit Hilfe des Stokes'schen Satzes

$$\begin{aligned} &\int_F \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{f} = \int_F rot\vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \\ &\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \mu_0 j_z \, r d\theta dr = \int_{\theta_1}^{\theta_2} B_\theta(a+\varepsilon) r d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_1} B_\theta(a-\varepsilon) r d\theta \Rightarrow \\ &\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{r=a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \mu_0 j_z \, dr - \left(B_\theta(a+\varepsilon) - B_\theta(a-\varepsilon) \right) \right] a \, d\theta = 0 \end{aligned} \tag{11.34}$$

die Beziehung

$$\mu_0 j_z = \frac{\delta(r/a-1)}{a} \underbrace{\lim}_{\varepsilon \to 0} \left(B_\theta(a+\varepsilon) - B_\theta(a-\varepsilon) \right) = \delta(r/a-1) \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} m c_m \cos(m\theta). \tag{11.35}$$

Wir vergleichen dies mit der Multipolstromverteilung eines L-Stellarators, der durch unverschraubte Fadenströme der Stärke ± I_0 (in Ampere) realisiert wird

$$j_z = \frac{I_0}{a^2} \delta(r/a-1) \sum_{n=0}^{2L-1} (-1)^n \delta(\theta - \pi n / L). \tag{11.36}$$

Ihre Fourierentwicklung

$$\begin{aligned} j_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta') j_z(\theta') d\theta' \right) \cos(m\theta) = \frac{I_0 \delta(r/a-1)}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{2L-1} (-1)^n \cos[m n \pi / L] \right) \cos(m\theta) \\ &= \frac{I_0 \delta(r/a-1)}{a^2 \pi} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \;\; \delta(m - (2m-1)L) \cos(m\theta) = \frac{2 I_0 \delta(r/a-1) L}{a^2 \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos[(2m-1)L\theta)] \\ &= \frac{2 I_0 \delta(r/a-1) L}{a^2 \pi} (\cos(L\theta) + \cos(3L\theta) + \cos(5L\theta) + \ldots) \end{aligned} \tag{11.37}$$

enthält nur ungerade Vielfache des Winkels L θ. Somit lauten die Koeffizienten

$$c_m = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \frac{1}{L}, \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \frac{1}{3L}, \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \frac{1}{5L} \ldots. \tag{11.38}$$

17 Für m ≥ 1 und x<<1 gelten die Beziehungen $I_m(x) = (x/2)^m/m!$ und $K_m(x) = (2/x)^m$ (m-1)!/2 und folglich $I_m'(x) = m\, I_m(x)/x$ sowie $K_m'(x) = -m\, K_m(x)/x$

Da es sich hierbei um die Fourierentwicklung der Leiterströme auf einem Kreis in der z=0 Ebene handelt, gelten diese Koeffizienten auch für den helikalen Fall.

Magnetische Flußflächen

Ist das Magnetfeld bekannt, so kann man versuchen, die in Kap. 5.3.1 eingeführte magnetische Flußfunktion ψ zu berechnen. Wir erinnern daran, daß sich die magnetischen Feldlinien – zumindest lokal – als Schnittmenge von zwei Flächen (χ(x,y,z) = const. und ψ(x,y,z) = const.) im Raum darstellen lassen. Die magnetische Feldstärke ergibt sich dann aus

$$\vec{B} = \nabla\chi \times \nabla\psi\,, \tag{11.39}$$

die man auch die *Clebsch-Darstellung*[18] des Magnetfelds nennt. Hat man eine solche Darstellung mit analytischen Funktionen ψ(x,y,z) = const. und χ(x,y,z) = const. gefunden, so kennt man den Verlauf der Feldlinien im gesamten Raum. Es ist aber keineswegs sicher, daß es zwei solche (hinreichend glatte) Funktionen wirklich gibt. Liegt jedoch eine ignorable Koordinate (d.h. Symmetrie) vor, so muß zumindest eine der beiden Funktionen (sagen wir ψ) existieren. Als Beispiel betrachten wir den Fall der *Achsensymmetrie*. Hier ist der Azimutwinkel θ eine ignorable Koordinate. In Zylinderkoordinaten erhalten wir dann zunächst mit **B** = rot **A** für die Magnetfeldkomponenten die Relationen

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z};\; B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r};\; B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}. \tag{11.40}$$

Zusätzlich benötigen wir die Gleichungen für die magnetischen Feldlinien. Diese ergeben sich aus der Bedingung, daß der infinitesimale Tangentenvektor d**s** parallel zu **B** sein muß, also

$$\vec{B}\times d\vec{s} = 0 \;\Rightarrow (B_r, B_\theta, B_z)\times(dr, rd\theta, dz) = 0\,, \tag{11.41}$$

was auf den Gleichungssatz

$$B_\theta dz - B_z rd\theta = 0,\;\; B_z dr - B_r dz = 0,\;\; B_r rd\theta - B_\theta dr = 0 \tag{11.42}$$

hinausläuft. Diese drei Gleichungen lassen sich auch in der Kurzform

$$\frac{dz}{B_z} = \frac{r\,d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} \tag{11.43}$$

zusammenfassen. Wenden wir nun unsere Kenntnis über die Symmetrie ($\partial/\partial\theta = 0$) auf die Gl. (11.40) an

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z};\; B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r};\; B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}, \tag{11.44}$$

so sehen wir, dass B_r und B_z jeweils nur noch durch einen Differentialquotienten bestimmt werden. Setzen wir die entsprechenden Ausdrücke in die mittlere Gl. (11.42) ein, so bekommen wir

$$\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}dr + \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z}dz = d(rA_\theta) = 0 \;\Rightarrow rA_\theta(r,z) = const.. \tag{11.45}$$

[18] Wir erinnern daran, daß wegen div(**a**x**b**) = **b**·rot**a** - **a**· rot **b** die Clebsch-Form automatisch div **B** = 0 befriedigt.

Die Invariante bzw. Flächenfunktion lautet also in diesem Fall $\psi(r,z) = r\,A_\theta$. Daß es sich um den magnetischen Fluß handelt, erkennen wir mit Hilfe der dritten Gleichung in (11.44)

$$\psi(r,z) = \int_0^r B_z r'\,dr'\,. \qquad (11.46)$$

Von den drei Gleichungen (11.42) haben wir bislang erst eine integriert. Ein weiteres Integral zu finden, ist im allgemeinen schwierig. Weiß man aber beispielsweise, daß $B_\theta = 0$, so erhalten wir mit $B_z \neq 0$ und $B_r \neq 0$ aus der ersten oder dritten Gleichung in (11.42) $d\theta = 0$ und damit die zweite Invariante $\chi = \theta =$ const. Das Magnetfeld ist damit gemäß Gl. (11.39) bestimmt. Die Feldlinien ergeben sich als Schnittmenge der Rotationsflächen $\psi(r,z) =$ const. (Tori) mit den Ebenen $\theta =$ const. (Fächer).

Analog zum obigen axial-symmetrischen Fall läßt sich auch die *helikale Symmetrie* diskutieren. Hier ist $u = \theta - h\,z$ die ignorable Koordinate. Die Invariante ergibt sich diesmal zu

$$A_z(r,u) + h\,r\,A_\theta(r,u) = const. \qquad (11.47)$$

Für den Fall, daß beide Flächenfunktionen existieren, darf man nicht erwarten, daß die beiden Gradienten senkrecht aufeinander stehen, vielmehr hat man es dann in der Regel mit einem nicht-orthogonalen Koordinatensystem zu tun ($\nabla\chi\cdot\nabla\psi \neq 0$). Zum besseren Verständnis noch folgende Anmerkungen: Nehmen wir an, die Flußfunktion ψ sei vorgeben. Der Vektor $\nabla\psi$ steht senkrecht auf der Fläche $\psi =$ const. Bilden wir das Kreuzprodukt mit irgendeinem anderen Vektor **A**, der nicht in die gleiche Richtung weist, so erhalten wir auf jeden Fall einen Vektor, der Tangentenvektor der Fläche ist, also durch Drehung um den Normalenvektor $\nabla\psi$ in den Vektor **B** übergeht. Für einen bestimmten Vektor $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}$ ist somit die Relation

$$\vec{B} = \vec{\Omega} \times \nabla\psi\,, \qquad (11.48)$$

immer erfüllt. Die Form (11.48) ist eine etwas schwächere Variante im Vergleich zu (11.39) und erlaubt zunächst nur die Aussage, daß eine bestimmte Magnetfeldlinie (Index 1) immer auf der Fläche $\psi = c_1$ bleibt. Die Forderung div**B** = 0 führt in diesem Fall auf die Zusatzbedingung $\nabla\psi\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega} = 0$. Wir wollen dieses Konzept der Flußfunktion nun auf das bereits bekannte B-Feld (Gl. (11.31)) der helikalen Windungen im Zylinder anwenden. Gleichgültig, ob wir von Gl.(11.39) oder (11.48) ausgehen, es muß gelten

$$\nabla\psi\cdot\vec{B} = -\nabla\psi\cdot\nabla\phi = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{r\partial\theta}\frac{\partial\phi}{r\partial\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\,, \qquad (11.49)$$

was auf eine Bestimmungsgleichung für die Funktion $\psi(r,\theta,z)$ hinausläuft. Setzen wir zunächst $\rho = m\,h\,r$ und $u = m(\theta - h\,z)$ und $B_0 = 0$, so ist $\phi = \phi(r,u)$. Für ψ haben wir eine entsprechende Darstellung $\psi = \psi(r,u)$ und die Gl. (11.49) lautet

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\,. \qquad (11.50)$$

Das magnetische Potential ist vom Typ $\phi = F_1(\rho)\sin u$, was für ψ den Ansatz $\psi = F_2(\rho)\cos u$ nahelegt. Damit erhalten wir

$$0 = \rho^2 F_1' F_2' - (m^2 + \rho^2) F_1 F_2\,. \qquad (11.51)$$

Die Funktion F_1 erfüllt aber entsprechend Gl. (11.24) die Beziehung $F_1(m^2+\rho^2) = \rho\,F_1 + \rho^2\,F_1''$, so daß wir schließlich erhalten

$$0=\frac{F_2'}{F_2}-\frac{1}{\rho}-\frac{F_1''}{F_1'}\;\Rightarrow 0=\frac{d}{d\rho}\left(\ln F_2-\ln\rho-\ln F_1'\right)=\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{F_2}{\rho F_1'}\right)\;\Rightarrow\;F_2=c\rho F_1'. \quad (11.52)$$

Für den geraden Multipol hatten wir $F_1(\rho) = \rho^{\pm m}$ gefunden, so daß hier mit c = 1/m die Relation $F_2 = \pm\, c\, m\, \rho\, \rho^{\pm m-1} = \pm\, F_1$ vorliegt. Die Funktion ψ geht also in diesem Fall aus ϕ durch eine einfache Drehung um den Winkel $\theta = 90°/m$ hervor. Für den helikalen Multipol sind dagegen auch die Radialfunktionen verschieden, und es ergibt sich aus Gl. (11.30) die bei r = a stetige Flußfunktion

$$\boxed{\psi=-2ah\sum_{m=1}^{\infty}(mhr)c_m\cos[m(\theta-hz)]\begin{cases}K_m'(mha)\;I_m'(mhr); & r<a\\ I_m'(mha)\;K_m'(mhr); & r>a\end{cases}+\frac{B_0h}{2}\begin{cases}r^2; & r<a\\ a^2; & r>a\end{cases}} \quad (11.53)$$

wobei wir hier ebenfalls wieder einen Term hinzugefügt haben, der das homogene z-Feld berücksichtigt. Daß dieser additive Term korrekt gewählt ist zeigt man leicht durch Einsetzen in Gl. (11.49). Man beachte also, daß bei Hinzunahme des homogenen Feldes nach wie vor $\psi = \psi(r,u)$ gilt, während ϕ in diesem Fall keine reine Funktion dieser beiden Variablen ist (sondern außerdem auch von z abhängt).

Den Vektor $\mathbf{\Omega}$ erhalten wir aus

$$\vec{\Omega}=\frac{\nabla\psi\times\vec{B}}{|\nabla\psi|^2}. \quad (11.54)$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich für $B_0 = 0$ und mit $u = m(\theta - h\,z)$

$$\vec{\Omega}=\frac{hr\,\boldsymbol{e}_\theta+\boldsymbol{e}_z}{m(1+h^2r^2)}=\frac{r(\nabla r\times\nabla u)}{m(1+h^2r^2)}=\frac{\nabla\left(\ln(1+h^2r^2)\right)\times\nabla u}{2mh^2}. \quad (11.55)$$

Dieser Vektor ist Tangentenvektor der Fläche u = const. und besitzt keine Radialkomponente, weist also in Richtung der helikalen Windungen. Der letzten Form in Gl. (11.55) entnehmen wir sogleich, daß div $\mathbf{\Omega} = 0$, so daß sich der Vektor auch als Rotation schreiben lassen sollte, was in der Tat gelingt:

$$\vec{\Omega}=rot\left(\frac{r(hz-\theta)\boldsymbol{e}_r}{m(1+h^2r^2)}\right). \quad (11.56)$$

Seine Rotation ergibt

$$rot\vec{\Omega}=\frac{2h}{1+h^2r^2}\vec{\Omega}. \quad (11.57)$$

Wegen rot $\mathbf{\Omega} \neq 0$ für $h \neq 0$ ist $\mathbf{\Omega}$ im allgemeinen nicht als Gradient eines Skalars darstellbar, doch genügt er der geforderten Bedingung $\nabla\psi\cdot$rot $\mathbf{\Omega} = 0$, wie man sofort anhand von $\nabla\psi\cdot$rot$\mathbf{\Omega} \sim \nabla\psi\cdot\mathbf{\Omega} \sim (\partial\psi/\partial r\,\nabla r + (\partial\psi/\partial u\,\nabla u)\cdot(\nabla r \times \nabla u) = 0$ erkennt. Für die Spezialfälle h = 0 und $h \to \infty$ erhalten wir allerdings $\mathbf{\Omega} = (\nabla z)/m$ bzw. $\mathbf{\Omega} = (\nabla\theta)/h$. Die Flächen χ = const. sind also im ersten Fall zur Zylinderachse senkrechte Ebenen (z = const.) und im zweiten Fall sich an die Achse anschmiegende ebene Blätter (θ = const.). Man kann versuchen durch Addition von $\beta\,\nabla\psi$ (mit β = const) auch für $h \neq 0$ einen Gesamtvektor zu erhalten, so daß $\mathbf{\Omega}* = \mathbf{\Omega} + \beta\,\nabla\psi = \nabla\chi$ (da $\beta\nabla\psi$ bei Bildung des Kreuzproduktes in Gl. (11.48) keinen Beitrag liefert). Im vorliegenden Fall gelingt es aber nicht, eine solche Funktion χ zu finden, da es nicht möglich ist, die notwendige Bedingung rot $\mathbf{\Omega}*$ = rot$\mathbf{\Omega} = 0$ zu befriedigen. Wie wir später noch erläutern werden, ermöglicht der Vektor Ω eine allgemeine Darstellung des Magnetfelds im geraden helikalen Fall.

Einige poloidale Querschnitte der Flächen ψ = const., auf denen die Magnetfeldlinien verlaufen, sind in der Abb. 11-22 dargestellt. Zur Vereinfachung betrachten wir hier die Konturen in der z = 0 Ebene für den Fall, daß die helikalen Windungen keine Stromfäden sind, sondern Sinusverteilungen auf der Oberfläche annehmen. In diesem Fall bleibt von der Summe in Gl. (11.53) nur der Term m = L übrig und die Flußflächengleichung ist im inneren Bereich (r < a) vom Typ

$$\psi = \rho^2 - 2V\rho I_L'(L\rho)\cos[L(\theta - hz)] = const. \qquad (11.58)$$

mit ρ = h r. V ist das Verhältnis von helikaler zur homogener Feldstärke (B_0). Für den realen Fall, indem die helikalen Windungen in guter Näherung Stromfäden darstellen ist die Darstellung (11.58) nur eine Näherung für den zentralen Bereich r << a. Am Plasmarand treten dann für V ≈ 0,2 *Separatrizes* auf, die innnere und äußere Bereiche trennen. Ihre Schnittpunkte, in denen das poloidale Magnetfeld verschwindet, bezeichnet man als *Staupunkte*.

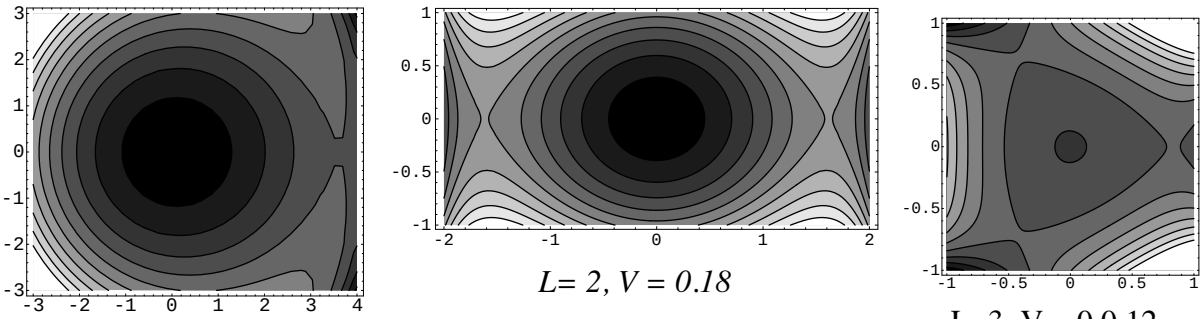


Abb. 11-22: Die magnetischen Flächen (ψ in zylindrischer Näherung) für den L = 1, 2 und den L = 3 Stellarator. Der durch die Separatrizes bedingte Plasmaquerschnitt (Dreieck bei L = 3) folgt der Verschraubung und rotiert entlang der Zylinderachse (bzw. in toroidaler Richtung).

Führen wir als Bezugsgröße für das helikale Magnetfeld die maximale Feldstärke der B_θ-Komponente am inneren Rand $B_1 := \underbrace{\lim}_{\varepsilon \to 0} B_\theta(a-\varepsilon, 0, 0)$ ein, so lautet der führende m = L-Term für das magnetische Potential im inneren Bereich (r < a)

$$\Phi \approx -B_1 \frac{a}{L}\frac{I_L(Lhr)}{I_L(Lha)}\sin[L(\theta - hz)] - B_0 z\,. \qquad (11.59)$$

Für die Feldstärken ergibt sich damit

$$\begin{aligned} B_r &= B_1 ha \frac{I_L'(Lhr)}{I_L(Lha)}\sin[L(\theta - hz)] \approx B_1\left(\frac{r}{a}\right)^{L-1}\sin[L\theta - Mz/R_0] \\ B_\theta &= B_1 \frac{a}{r}\frac{I_L(Lhr)}{I_L(Lha)}\cos[L(\theta - hz)] \approx B_1\left(\frac{r}{a}\right)^{L-1}\cos[L\theta - Mz/R_0]\,. \qquad (11.60) \\ B_z &= B_0 - hrB_\theta \approx B_0 - B_1 ah\left(\frac{r}{a}\right)^{L}\cos[L\theta - Mz/R_0] \approx B_0 \end{aligned}$$

Diese Näherungsformeln geben i.a. die Verhältnisse in der Umgebung des Plasmarandes nicht genau genug wieder. Sie erlauben aber eine Berechnung der Rotationstransformation für den zentralen Bereich. Man erhält mit den in Gl. (11.63) angegebenen Beziehungen

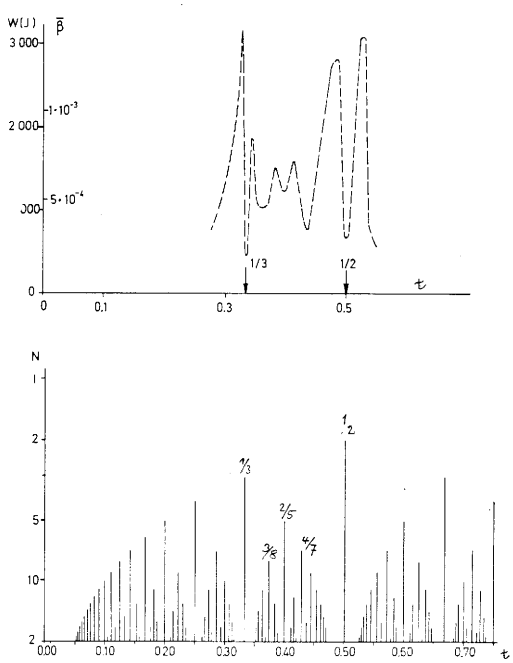
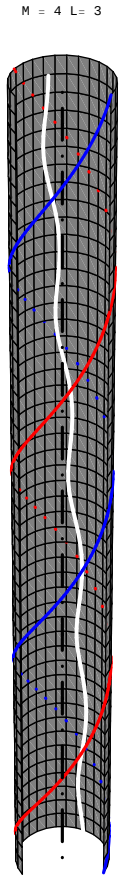


Abb. 11-23: Der Energieinhalt (bzw. das Plasma Beta) im Stellarator W7A als Funktion der normierten Rotations-transformation .

Bei rationalen Werten 1/2 und 1/3 erfolgen starke Einbrüche. In der Umgebung von ι = 1/2 ist dagegen der magnetische Einschluß besonders gut.

Im unteren Bild ist die Verteilung der rationalen Zahlen ι = M/N aufgetragen. Hochrationale sind solche mit kleinem Nenner N. Ihre Amplitude ist in der Abbildung logarithmisch gewichtet.



$$\iota = \frac{1}{q} = \left\langle \frac{d\theta}{d\varphi} \right\rangle \approx R_0 \left\langle \frac{d\theta}{dz} \right\rangle = \frac{B_1}{B_0} \frac{L-2}{2L} \frac{R_0}{a} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{L-2} \quad .(11.61)$$

Im Gegensatz zum Tokamak, wo das q-Profil immer beträchtlich nach außen hin zunimmt (Abb. 11-13), hat dieses Profil im Stellarator eine entgegengesetzte Krümmung und wird für den Fall L = 2 Stellarator sehr flach. Die sogenannte *magnetische Verscherung* s (*magnetic shear*) =(dq/dr)/(q/r) ist nach der Näherungsgleichung (11.61) sogar null. Dies kann von Vor- oder Nachteil sein. Ist nämlich q oder $\iota/2\pi$ gleich einer rationalen Zahl, so können im Plasma sogenannte *Tearing-mode-Instabilitäten* angefacht werden, die mit der Ausbildung von helikalen Strömen im Plasma verbunden sind. Als Folge dieser Störströme bilden sich in deren Umgebung magnetische Inseln aus (vgl. Abb. 11-25), deren Größe durch die magnetische Verscherung begrenzt wird. Bei verschwindender Verscherung können die Inseln prinzipiell den ganzen Plasmaquerschnitt erfassen. Man erwartet unter derartigen Bedingungen eine Einschlußverschlechterung, die im Experiment auch tatsächlich beobachtet wird. Dies zeigen beispielsweise die in der Abb. 11-23 wiedergegebenen Meßergebnisse vom Stellarator W7 A (Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching). Wählt man jedoch die Steigung $\iota/2\pi$ ungleich den "hoch-rationalen Zahlen" 1/2, 1/3 usw., so ist der Energieinhalt im Plasma hoch und der magnetische Einschluß gut. Besonders günstige Bedingungen liegen in der Nachbarschaft $\iota/2\pi$ = 1/2 vor, da dort die Dichte der "hoch-rationalen Zahlen" besonders klein ist (s. Abb. 11-23).

Abb. 11-24: Numerische Berechnung des Verlaufs einer magnetischen Feldlinie (weiß) im Zentralbereich des Stellarators(R_0 = 2a, r_0= a/2, B_0 = 2B_1) mit den ebenfalls gezeigten äußeren Windungen (L=3, M=4). Die Gesamtlänge des Zylinders entspricht dem zweifachen Torusumfang

Berechnung der Magnetfeldlinien

Wir wenden uns nun dem Verlauf der Magnetfeldlinien zu. Diese können wir anhand der Gl. (11.43) berechnen. Fassen wir z als die unabhängige Variable auf, so sind r(z) und θ(z) die gesuchten Funktionen. Aus Gl. (11.43) sich für diese die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{B_r}{B_z} \approx \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{r}{a}\right)^{L.-1} \sin\left[L(\theta - h\,z)\right] \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{B_\theta}{rB_z} \approx \frac{B_1}{aB_0}\left(\frac{r}{a}\right)^{L.-2} \cos\left[L(\theta - h\,z)\right] \end{aligned} \quad , \qquad (11.62)$$

die im allgemeinen nur numerisch zu lösen sind. In Näherung erhält man periodische Schwankungen um einen mittleren Radius (r_0) und einen spiralförmigen Anstieg in z-Richtung, der ebenfalls von einer periodischen Bewegung überlagert ist:

$$\begin{aligned} r &\approx r_0 + a\frac{B_1}{LB_0}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{L-1} \cos\left[L(\theta - hz)\right] \\ \theta &\approx \theta_0 + \frac{B_1}{LB_0}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{L-2}\left[\frac{L-2}{2}\frac{z}{a} - \sin\left[L(\theta - hz)\right]\right] \end{aligned} \quad . \qquad (11.63)$$

Diese spiralförmige Bewegung der Feldlinien mit insgesamt schwacher Steigung ist in der Abb. 11-24 zu erkennen.

11.3 Toroidale Effekte und Plasmaeffekte

Die bisherige mathematische Behandlung war in zweifacher Hinsicht eine Näherung. Zum einen haben wir die Toruskrümmung vernachlässigt und nur die Periodizitätseigenschaften im Torus berücksichtigt, zum anderen fließen auch im Plasma Ströme, ohne daß diese von außen induziert werden. Es handelt sich hierbei um die schon bekannten druckgetriebenen, diamagnetischen Ströme und die später zu behandelnden *Ausgleichsströme*, die speziell im Torus auftreten. Das von uns angegebene Magnetfeld wird daher als das *Vakuumfeld* bezeichnet.

11.3.1 PLASMAEFFEKTE UND GLEICHGEWICHT IN ZYLINDRISCHER NÄHERUNG

Eine allgemeine Beschreibung des geraden helikalen Stellaratorfeldes erlaubt der in Gl. (11.55) angegebene Vektor **Ω**:

$$\boxed{\vec{B} = J(\psi)\vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times \nabla\psi}. \qquad (11.64)$$

Gegenüber Gl. (11.48) tritt hier zusätzlich der erste Term in Erscheinung. Offensichtlich können nur die im Plasma fließenden Ströme dieses parallel zu den äußeren Windungen weisende Magnetfeld (J **Ω)** produzieren. Wir können zunächst zeigen, daß unter der angenommenen helikalen Symmetrie (d.h. in allen Funktionen tauchen die Variablen θ und z nur in der Kombination u = m (θ - h z) auf) div**B** = 0 erfüllt ist. Für den zweiten Term hatten wir bereits früher gezeigt, daß div(**Ω**x∇ψ) = 0 gilt. Wegen ψ = ψ(r,u) und mit Gl. (11.55) erhalten wir nun

$$div\left(J(\psi)\vec{\Omega}\right) = \nabla J \cdot \vec{\Omega} + J\nabla \cdot \vec{\Omega} = \nabla J \cdot \vec{\Omega} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\nabla r + \frac{\partial\psi}{\partial u}\nabla u\right).\frac{(\nabla r \times \nabla u)r}{m(1+h^2r^2)} = 0. \qquad (11.65)$$

Auch die stationäre Stromdichte muß wegen μ_0 **j** = rot **B** divergenzfrei sein. Wir können daher vermuten, daß **j** vom gleichen Typ ist wie die Darstellung des Magnetfeldes nach Gl. (11.64). Die genaue Rechnung liefert mit Hilfe von Gl. (11.57) den Ausdruck

$$\vec{j} = -\left[\frac{dp}{d\psi}(1+h^2r^2) + \frac{J}{\mu_0}\frac{dJ}{d\psi}\right]\vec{\Omega} - \frac{1}{\mu_0}\frac{dJ}{d\psi}\vec{\Omega}\times\nabla\psi\,, \qquad (11.66)$$

wobei J(ψ) den *helikalen Strom* (pro Längeneinheit) darstellt, der zwischen der Zylinderachse und der Linie fließt, die von den Gleichungen u = const, ψ = const bestimmt wird. Hierbei haben wir bereits von der Gleichgewichtsbedingung

$$\vec{j}\times\vec{B} = \nabla p \qquad (11.67)$$

Gebrauch gemacht und berücksichtigt, daß die beiden freien Funktionen p und J nur Funktionen von ψ sein können. Aus der letzten Gleichung folgt mit $\mathbf{j} = \text{rot}\,\mathbf{B}/\mu_0$ noch eine komplizierte Differentialgleichung für die Funktion ψ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\psi &= \frac{2h}{(1+h^2r^2)}J(\psi) - J(\psi)J'(\psi) - \mu_0(1+h^2r^2)p'(\psi) \\ \text{mit}\quad \boldsymbol{L} &:= \frac{1+h^2r^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{1+h^2r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+h^2r^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} \end{aligned} \quad . \qquad (11.68)$$

Diese, der später zu besprechenden *Grad-Schafranov-Gleichung* entsprechende Gleichung, beschreibt die Verzerrung der Flußfunktion im Plasmabereich auf Grund der dort fließenden druckgetriebenen Ströme, wenn man am Rand (p = 0) die Kontur ψ(0) = const. vorgibt.

11.3.2 MAGNETFELD-ERGODISIERUNG IM TORUS

Schon die exakte Berechnung des Vakuumfeldes im Torus ohne Plasma bereitet große Schwierigkeiten, da nun wegen der 1/R-Inhomogenität des Feldes keine helikale Symmetrie mehr vorliegt. In der Tat ist bis heute nicht bekannt, ob unter diesen Umständen noch magnetische Flußflächen vorliegen. Numerische Berechnungen zeigen zwar, daß dies zumindest in guter Näherung der Fall sein kann, doch gibt es auch Gegenbeispiele, in denen insbesondere am Plasmarand eine sogenannte *Ergodisierung der Feldlinien* auftritt. Hierunter versteht man eine stochastische Wanderung der Feldlinien in einem endlichen Volumen. Anders als beim Vorhandensein von glatten magnetische Flächen, bei denen die Feldlinien immer auf dieser bleiben und sie im nicht-resonanten Fall (q nicht rational) ergodisch erfüllen, erfüllen sie nun einen Volumenbereich. Ein Beispiel zeigt die Abb. 11-25. Die hiermit verbundene radiale Exkursion, bei der die Feldlinien nach zahlreichen toroidalen Umläufen u. U. die Wand erreichen, kann eine erhebliche Verschlechterung des Einschlusses zur Folge haben. Für den Randbereich ist diese stochastische Wanderung jedoch nicht unerwünscht und wird mit Hilfe von sogenannten *helikalen Divertoren* sogar provoziert, um das Plasma gezielt in Gebiete mit hoher Pumpleistung abströmen zu lassen.

Neben den Rechnungen kann man in Stellaratoren auch experimentell die Magnetfeldqualität prüfen. Zu diesem Zweck wird ein feiner Elektronenstrahl in den Torus eingebracht. Die Durchstoßpunkte des Strahls in einer bestimmten poloidalen Ebene (nach einem oder bis zu 100 toroidalen Umläufen) können mit einem dünnen, verschiebbaren Szintillatorstab (Aufleuchten) sehr präzise bestimmt werden. Beim Tokamak ist dieses Verfahren wegen der Notwendigkeit des Plasmastromes nicht anwendbar.

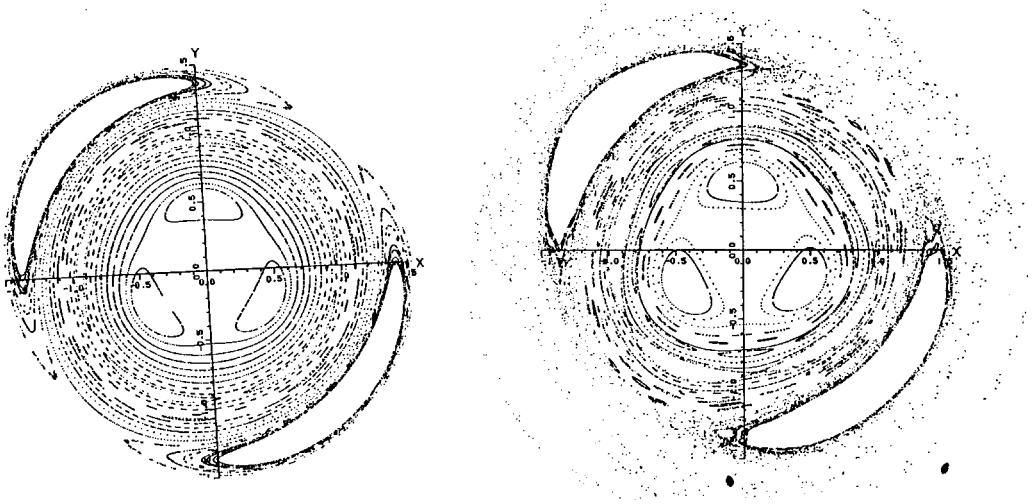


Abb. 11-25: Projektionen der magnetischen Feldlinien in eine poloidale Ebene (Poincaré-Plot). Im linken Bild treten drei- und zweizählige Inselstrukturen in Erscheinung. Die Feldlinien bleiben jedoch auf den Inselflächen. Mit Zunahme der helikalen $\ell = 2$ Störfelder tritt im rechten Bild Ergodisierung auf. Einige Feldlinien verbinden die zwei- und dreizähligen Inselbereiche und gelangen radial weit nach außen.

11.4 Modulare Stellaratoren

Aus verschiedenen technischen Gründen ist es ist schwer vorstellbar, daß ein Stellarator-Reaktor aus helikalen Windungen gebaut werden kann. Ein Grund ergibt sich aus der Notwendigkeit zum Austausch der Innereien eines Reaktors, entweder weil Beschädigungen aufgetreten sind, oder weil Materialien (z.B. zum Brüten von Tritium) erneuert werden müssen. Deshalb ist man bemüht, den Stellarator ähnlich zum Tokamak aus Einzelspulen aufzubauen. Auf diesem Weg sind in den letzten Jahren große Forschritte erzielt worden. Es stellte sich nämlich heraus, daß man durch Verformung der Toroidalfeldspulen sowohl das notwendige toroidale als auch das poloidale Magnetfeld aufbauen kann. Bei diesen sehr aufwendigen numerischen Rechnungen werden die Ableitungen des Vakuumfeldes am Plasmarand vorgegeben und die dazugehörigen Oberflächenströme ausgerechnet (Neumann-Randwertproblem). Die auf diese Weise berechneten geschlossenen Stromschleifen können an den Kreuzungspunkten aufgetrennt und durch Einzelspulen ersetzt werden. Abb. 11-26 zeigt hierfür ein Beispiel.

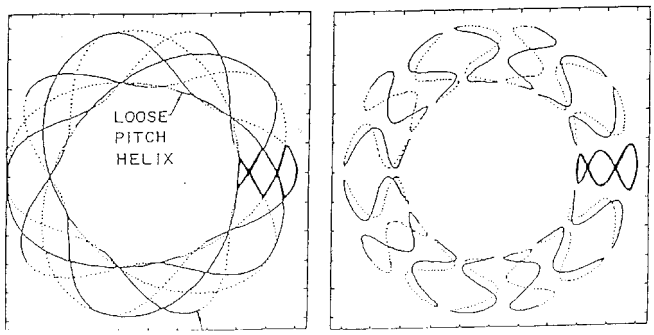


Abb. 11-26: Berechnete Stromschleifen bei Vorgabe des Vakuumfeldes (links) und ihre Auftrennung in Einzelspulen (rechts).

Nach diesem Prinzip wurde bereits der Stellarator W7AS (Garching) gebaut. Die Abb. 11-27 zeigt das geplante Nachfolgeexperiment **W7X**. Die Kenndaten dieses stationären Experiments lauten: $R_0 = 5{,}5$ m; $a \approx 0{,}53$ m; $B_0 = 5$ T; Zahl der toroidalen Feldperioden $M = 5$. Hinsichtlich der poloidalen Modenzahl L liegt eine Mischform vor, wobei besonders die Anteile mit $L = 2$ (Ellipsen) und $L = 3$ (Dreiecke) abwechselnd in Erscheinung treten.

Insgesamt handelt es sich hierbei um einen optimierten Stellarator, von dem besonders gute Einschlußeigenschaften erwartet werden. Die Optimierung besteht hier darin, daß einerseits eine möglichst kleine Verschiebung der magnetischen Flächen mit steigendem Druck angestrebt wird (Shafranov-Verschiebung, s. Kap. 14). Darüber hinaus möchte man eine stark ausgeprägte *magnetische Mulde* und ein hohes Spiegelverhältnis über eine toroidale Periodenlänge erzeugen. Wie schon bei den Spiegelkonfigurationen erläutert, versteht man unter der magnetische Mulde ein Anwachsen von |B| zum Rand hin. Hierdurch sollen die druckgetriebenen Instabilitäten unterdrückt werden.

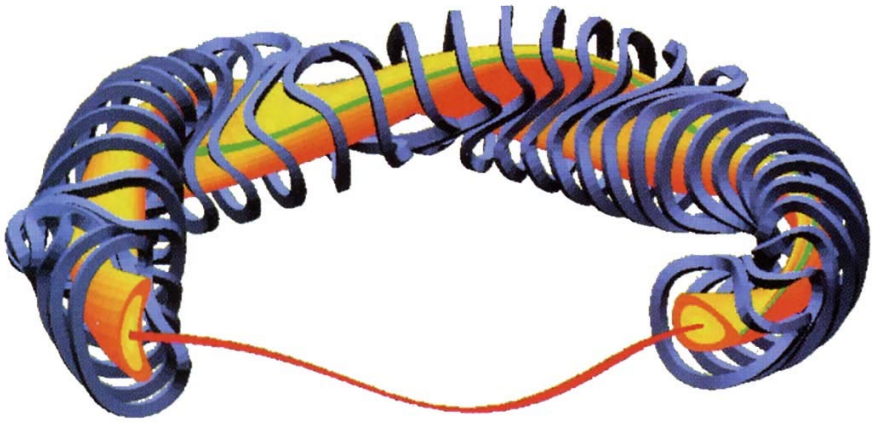


Abb. 11-27: Der in der Aufbauphase befindliche Stellarator W7X mit seinem modular aufgebauten, supraleitenden Spulensystem. Die fünffache toroidale Feldperiode ist erkennbar.

12 ZÜND- UND REAKTORKRITERIEN

Im folgenden sollen einige Betrachtungen zur Energiebilanz eines gezündeten bzw. stationär brennenden Plasmas angestellt werden. Insgesamt kann man je nach Fragestellung vier Kriterien unterscheiden:

- Zündung
- Break-even
- Reaktor-Null-Leistung
- Lawson-Kriterium

Es wird sich herausstellen, daß das Zündkriterium am schwierigsten zu erfüllen ist, so daß diesem eine Schlüsselrolle zukommt.

Alle folgenden Betrachtungen sind *0-dimensional* in dem Sinne, daß weder zeitliche noch räumliche Veränderungen berücksichtigt werden. Trotzdem sind die gewonnenen Kriterien nicht trivial, da selbst im einfachsten Fall noch eine (nichtlineare) Verknüpfung zwischen den drei Parametern Dichte, Temperatur, Energieeinschlußzeit besteht. Das Konzept der **Energieeinschlußzeit** ermöglicht eine derartige vereinfachte Beschreibung eines ansonsten zumindest eindimensionalen Problems (kleiner Radius r). Die Energieeinschlußzeit τ_E ist ein Maß für die Güte des magnetischen Einschlusses. Schaltet man plötzlich die Energiequellen ab, so vermindert sich der Energieinhalt W aufgrund von Wärmeleitung und Wärmekonvektion, so daß er nach der Zeit τ_E auf den Bruchteil 1/e des Ausgangangswertes abgefallen ist. In diesem Falle handelt es sich um eine dynamisch definierte Einschlußzeit. Häufiger jedoch benutzt man τ_E im Sinne der statischen Definition

$$P_{trans} = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{trans} \equiv \frac{W}{\tau_E} \tag{12.1}$$

wobei die rechte Seite den transportbedingten Energieverlust des Plasmas unter stationären Bedingungen angibt. Zumindest für kurze Zeitintervalle ($\Delta t \ll \tau_E$) fallen die dynamischen und statischen Einschlußzeiten zusammen. Für größere Zeitintervalle können jedoch erhebliche Unterschiede auftreten, wenn beispielsweise der Energieeinschluß vom Druck oder der Temperatur des Plasmas abhängt.

Für eingehendere Untersuchungen muß man zwischen dem Energietransport im Ionen- und Elektronenkanal unterscheiden. In einem derartigen Fall addieren sich die Energieverluste ($W_e/\tau_E{}^i$) und ($W_i/\tau_E{}^e$) in beiden Kanälen. Diese Differenzierung ist insbesondere erforderlich, wenn der Energieinput preferentiell in eine Teilchensorte (z. B. in die Elektronen bei der α–Teilchenheizung oder bei der ohmschen Heizung) erfolgt und die Energieaustauschzeiten zwischen Elektronen und Ionen (s. Gl. (4.54)) vergleichbar oder größer als τ_E sind. Ist dagegen die Energieaustauschzeit klein im Vergleich hierzu, so lassen sich die gesamten transportbedingten Energieverluste wieder durch eine Zeitkonstante gemäß

$$\frac{1}{\tau_E} = \frac{1}{\tau_E^i} + \frac{1}{\tau_E^e} \tag{12.2}$$

angeben.

Wir gehen auf diese detaillierteren Analysen nicht näher ein und betrachten auch nicht den Einfluß verschiedener Radialprofile auf die Ergebnisse. Sie führen im wesentlichen zu einer Modifikation der numerischen Vorfaktoren (typisch etwa 10 - 50%), ohne die grundsätzlichen Gesetzmäßigkeiten anzutasten. Hierin liegt gerade der Wert einer 0-dimensionalen Analyse: sie erlaubt eine *algebraische Behandlung des Problems* (keine Differentialgleichungen) und

richtet unser Augenmerk auf die wesentlichen Zusammenhänge. Der grundsätzliche Aufbau eines Fusionsreaktors ist in der Abb. 12-1 dargestellt.

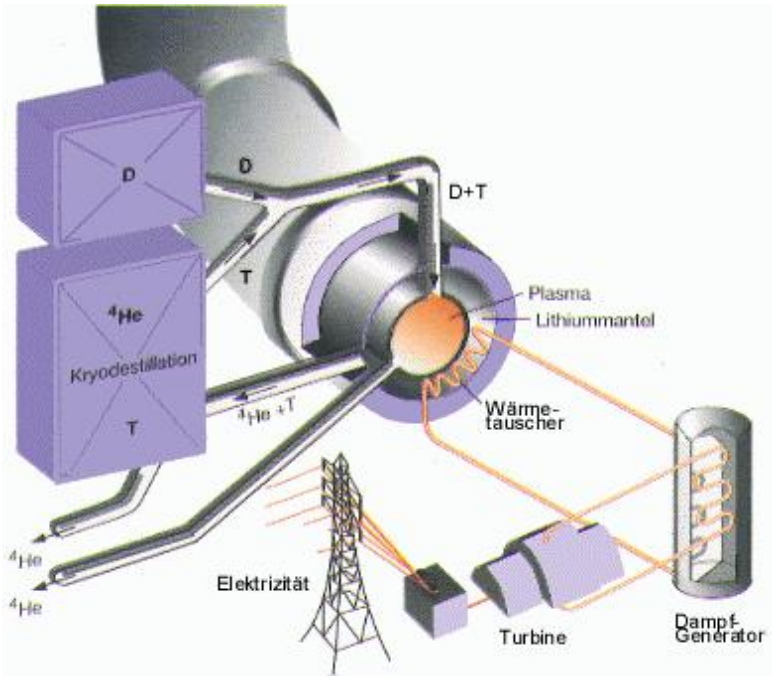


Abb. 12-1: Schematischer Aufbau eines konzeptionellen Fusionsreaktors. In der mit Lithium angefüllten Brutzone (z.B. Li-Keramik-Pellets), die gleichzeitig als Wärmeaustauscher dient, wird das benötigte Tritium erbrütet. Es wird zusammen mit dem enstehenden Helium abgepumpt und nach chemischer Reinigung dem Plasma wieder zugeführt. Auch das im Plasma gebildete Helium (die "Fusionsasche") muß abge-pumt werden, um die Fusionsprozesse aufrechtzuerhalten

12.1 Das Lawson-Kriterium

Schon 1957 griff der amerikanische Physiker *J.D. Lawson* die Frage auf, unter welchen Bedingungen ein Fusionsreaktor zu einer positiven Energiebilanz gelangen könne. Er ging dabei von einem ingenieurmäßigen Ansatz aus, indem er annahm, daß die thermisch freigesetzte Energie mit einem Wirkungsgrad η in elektrische umgewandelt werden kann (s. Abb. 12-1). Als Energieverluste im Plasmabereich stellte er Transport- und Bremsstrahlungsverluste in Rechnung[19].

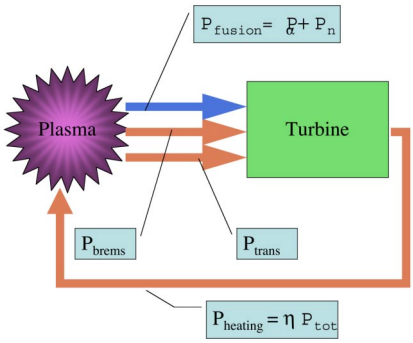


Abb. 12-2: Energiebilanz beim Lawson-Kriterium

Seine Energieungleichung sah dann so aus

$$P_{trans} + P_{brems} \leq \eta P_{tot} \qquad (12.3)$$

wobei die totale Leistung P_{tot} sich aus der Fusionsleistung P_{fus} und der von außen ins Plasma eingekoppelten Leistung ergibt. Letztere sollen die Verluste P_{brems} + P_{trans} decken (die

[19] Lawson bezog sich allerdings nicht auf die Energieeinschlußzeit, sondern betrachtete die *Brennzeit* als die kritische Größe. Man beachte aber, daß die Brennzeit τ_B in diesem Zusammenhang irrelevant ist. Sie kann von der Energieeinschlußzeit sehr verschieden sein und ist im allgemeinen um viele Größenordnungen größer als diese (etwa τ_E = 6 s und τ_B = 1000 s als ITER-Designwerte).

Heizung durch α-Teilchen wird also vernachlässigt). Insgesamt hat man dann für die ausgekopplete thermische Leistung $P_{tot} = P_{fus} + P_{brems} + P_{trans}$. Damit wird aus Gl. (12.3)

$$(1-\eta)(P_{trans} + P_{brems}) \leq \eta P_{fus}\,. \qquad (12.4)$$

Die **Bremsstrahlungsverluste** lassen sich in der Form

$$P_{Brems} = c_{Br}\, n_e^2\, Z_{eff} \sqrt{T_e} = 1{,}54 \cdot 10^{-38} Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T_e} \quad [W / m^3] \qquad (12.5)$$

angeben mit der effektiven Ladungszahl Z_{eff} nach Gl. (3.7) (T_e in eV, n_{ei} in m^{-3}). Die Fusionsleistung schreibt sich als

$$P_{fus} = n_D n_T \langle \sigma_{fus} v \rangle E_{fus}\,, \qquad (12.6)$$

wobei im Falle der D-T-Reaktion E_{fus} = 17,6 MeV ist. Setzen wir $n_D = n_T = n_e/2 = n/2$ und $T_e = T_i = T$, so erhält man mit $W = 3/2\, k_B(n_e T_e + n_D T_D + n_T T_T) = 3\, k_B\, n\, T$ aus Gl. (12.4)und der Definition (12.1) *Lawsons Kriterium*

$$n\,\tau_E \geq \frac{12 k_B T}{\langle \sigma_{fus} v \rangle \frac{\eta}{1-\eta} E_{fus} - 4 c_{Br} Z_{eff} \sqrt{k_B T}} = F_L(T)\,. \qquad (12.7)$$

Hiernach muß das Produkt aus Dichte und Energieeinschlußzeit einen Funktionwert der Temperatur überschreiten. Für $Z_{eff} = 1$ und dem von Lawson angenommenen Wirkungsgrad $\eta = 1/3$ hat die Funktion $F_L(T)$ ein Minimum bei T_{min} = 25 keV und $F_{min} = 8 \cdot 10^{19}\ m^{-3}\ s$.

Das Lawson-Kriterium geht davon aus, daß ständig ein Teil der gewonnenen Energie ins Plasma zurückgekoppelt wird. Diese Annahme entspricht nicht der modernen Auffassung, nach der das gezündete Plasma sich selbst infolge der Heizung durch die α-Teilchen erhält und keine weitere Energiezufuhr benötigt[20]. Insofern hat das Lawson-Kriterium einen eher historischen Wert. Andererseits zeigt es bereits die allen Kriterien gemeinsame Struktur:

- Das Produkt $\mathbf{n\,\tau_E}$ muß einen bestimmten Minimalwert überschreiten.
- Gleichzeitig muß die **Temperatur** hinreichend hoch sein.

12.2 Zündbedingung für das D-T-Plasma

Bei der D-T-Reaktion entstehen simultan α-Teilchen von 3,5 MeV wie auch Neutronen von 14,1 MeV. Die gesamte Fusionsenergie P_{fus} verteilt sich also im Verhältnis der Massen $m_n/(m_n+m_\alpha)$ = 1 : 5 auf α-Teilchen und Neutronen. Während die Neutronen das Plasma verlassen, können bei hinreichend großem Poloidalfeld, d.h. Plasmastrom ($I\,R/a > 10^7$ A), die α-Teilchen im Plasma eingeschlossen werden und stellen somit eine *interne Heizquelle* dar. Ist die Bedingung

$$P_\alpha \geq P_{trans} + P_{brems} \qquad (12.8)$$

erfüllt, so deckt bzw. überkompensiert diese interne Energiequelle die Verluste durch Transport und Strahlung (s. Abb. 12-3). Setzen wir als Strahlungsverluste wiederum nur die unvermeidlichen Bremsstrahlungsverluste an, so ergibt sich mit $P_\alpha = n^2/4 \langle\sigma_{fus} v\rangle E_\alpha$ und den zuvor angegebenen Relationen die Beziehung

[20] Im anderen Fall spricht man von "getriebenen" Anlagen. Eine derartige Energierückkopplung wird beim Tokamakreaktor benötigt, wenn mit Hilfe von Stromtriebmechanismen ein stationärer Betrieb erreicht werden soll.

$$\boxed{n\,\tau_E \geq \frac{12k_BT}{\langle\sigma_{Fus}v\rangle E_\alpha - 4c_{Br}Z_{eff}\sqrt{k_BT}} = F_Z(T)}. \qquad (12.9)$$

Diese als *Zündkriterium* bezeichnete Bedingung wird für $E_\alpha = E_{fus}\,\eta/(1-\eta)$ mit dem Lawson-Kriterium identisch, was wegen $E_{fus}/E_\alpha = 5$ für $\eta = 1/6$ der Fall ist. Ebenso wie F_L weist auch die Funktion F_Z ein Minimum auf, das für $Z_{eff} = 1$ bei $\mathbf{T_{min} = 13\ keV}$ und $\mathbf{(n\,\tau_E)_{min}} = F_{L,min} = \mathbf{2\cdot 10^{20}\ m^{-3}\ s}$ erreicht wird.

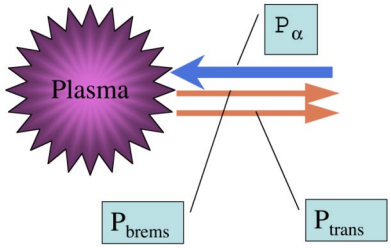


Abb. 12-3: Energiebilanz beim Zündkriterium

Im Vergleich zum Lawson-Kriterium mit η=1/3 ist also die Zündbedingung schwieriger zu erreichen. Dies geht auch aus der Abb. 12-4 hervor, wo die verschiedenen Kriterien als Funktion der Temperatur aufgetragen sind. Als Ordinate ist hier das Produkt $p\,\tau_E$ aufgetragen, das sich aus $n\,\tau_E$ durch Multiplikation mit $2\,k_B\,T$ ergibt. Diese häufig betrachtete Größe $2\,T\,n\,\tau_E$, die der Temperatur eine größere Wichtung beimißt als das einfache Dopplelprodukt $n\,\tau_E$, wird auch als **Fusions-Tripelprodukt** bezeichnet. Hiernach liegt das obige *Zündminimum* bei $\mathbf{(p\,\tau_E)_{min} = 5{,}2\cdot 10^{21}\ keV\ m^{-3}\ s = 0{,}83\cdot 10^6\ P\ s}$. (Man beachte: 1 MP = 10^6 Pascal ist ein Druck von etwa 10 Atmosphären)

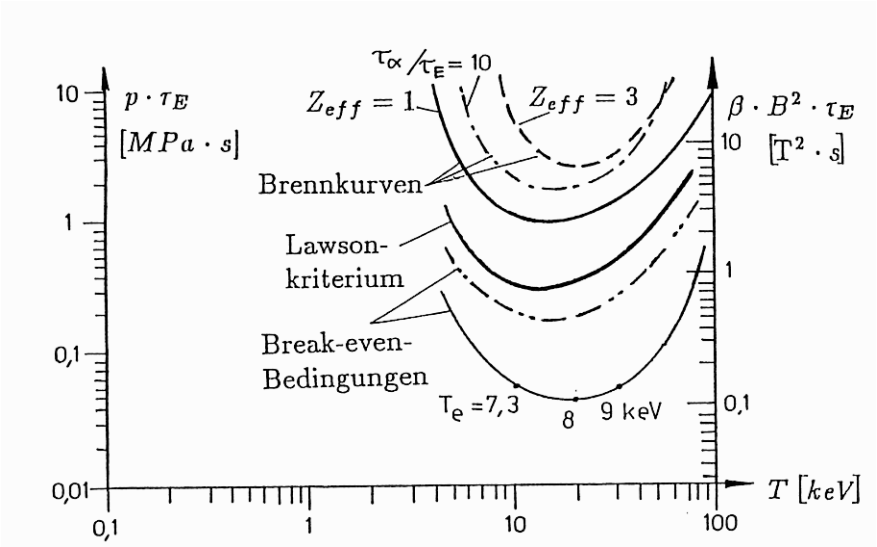


Abb. 12-4: Die Bedingungen für Zündung (Brennen) und break-even sowie das Lawson-Kriterium als Funktion der Temperatur. Die Verschlechterung der Brennbedingung bei endlicher Teilcheneinschlußzeit der α-Teilchen (τ_α/τ_E =10) geht aus dem Vergleich mit der Z_{eff} = 1 Kurve hervor.

Ein tieferes Verständnis der Zündbedingung ergibt sich aus der graphischen Darstellung der in der Relation (12.8) auftretenden Terme, wie sie in der *Abb. 12-5* skizziert sind. P_α ist eine mit der Temperatur zunächst rasch ansteigende Funktion, die nach Erreichen des Maximums

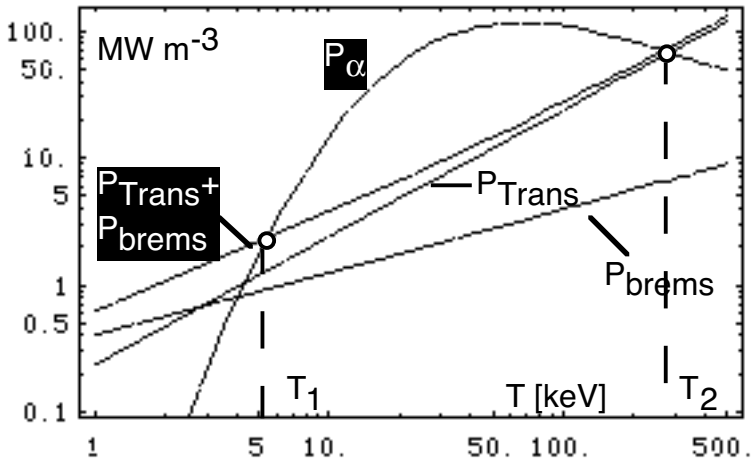


Abb. 12-5: Die Energiebilanz $P_{trans} + P_{brems} = P_\alpha$ kann bei hinreichend gutem magnetischen Einschluß bei zwei Temperaturwerten (T_1,T_2) erreicht werden. Dargestellt sind die Bedingungen für das D-T-Brennen bei $n_e = 1 \cdot 10^{20}\ m^{-3}$, $Z_{eff} = 3$, $\tau_E = 1s$. Für $\tau_E < 0.1$ s existiert kein Schnittpunkt mehr, d.h. keine Zündung. Oberhalb von etwa 100 keV werden auch Zyklotronstrahlungsverluste merklich, die hier nicht berücksichtigt sind.

bei T = 65 keV schwach abfällt. Die Transportverluste sind mit $P_{trans} = W/\tau_E = 3\ k_B\ n\ T/\tau_E$ proportional zu T, während die Bremsstrahlungsverluste nur mit $T^{1/2}$ ansteigen. Entsprechend der Parabelform der Kurven in Abb. 12-4 ergeben sich für ein festes Zahlenpaar von n und τ_E im allgemeinen zwei Schnittpunkte für die Erfüllung der Energiebilanz, wobei der untere, bei der Temperatur T_1, thermisch instabil ist, indem eine kleine Erhöhung der Temperatur eine starke Steigerung der α-Teilchenheizung bedingt, die die Temperatur weiter ansteigen läßt. Ebenso führt eine Erniedrigung der Temperatur zu einer negativen Energiebilanz, die das System zu noch kleineren Temperaturen treibt. Der zweite Gleichgewichtswert bei T_2 ist hingegen stabil. Hier kehrt das System sowohl bei einer positiven als auch negativen Exkursion von T zum Punkt T_2 zurück. Mit steigendem Transport (d.h. abnehmender Energieeinschlußzeit) wandert die Schnittgerade weiter nach oben und erreicht bei Berührung der P_α-Kurve die minimale Zündbedingung. Bei einer weiteren Verschlechterung des Einschlusses ist die statische Energiebilanz nicht mehr erfüllt. Die niedrigste Gleichgewichtstemperatur ergibt sich für $\tau_E \rightarrow \infty$, d.h. reinen Bremsstrahlungsverlusten; sie liegt bei T_1 = 4 keV und wird als ideale Zündtemperatur bezeichnet (s. entsprechender Schnittpunkt in *Abb. 12-5*). Typische Werte für $\tau_E \approx 1$s sind eher T_1 = 15 keV und T_2 = 100 - 150 keV. Obwohl thermisch stabil, sind diese sehr hohen Temperaturen von T_2 aus einer Reihe von Gründen unerwünscht[21]. Man denkt daher daran, das Plasma beim unteren Gleichgewichtspunkt T_1 durch regeltechnische Maßnahmen zu stabilisieren.

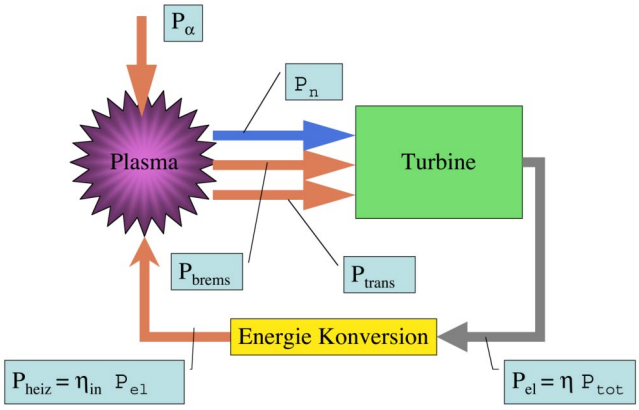
12.3 Break-even und Null-Netto-Leistung Bedingungen

Einfacher als die Zündung ist eine Nullbilanz zu erreichen, bei der die gesamte Fusionsleistung P_{Fus} gleich der gesamten, dem Plasma von außen zugeführten Heizleistung P_{Heiz} ist. Diesen Zustand nennt man die *break-even*-Bedingung. Der *Energieverstärkungsfaktor*

$$Q \equiv \frac{P_{fus}}{P_{Heiz}} \qquad (12.10)$$

wird in diesem Fall zu 1. Im Vergleich hierzu ist die Zündbedingung mit der Forderung $Q \rightarrow \infty$ identisch, da ja in diesem Fall die äußere Heizleistung zu null wird.Der break-even-Punkt ist für Fusionsexperimente eine wichtige Schwelle, die in den derzeitigen Maschinen nahezu erreicht wird (JET: Q = 0,85).

[21] Insbesondere darf der Druck bzw. $\beta = p / (B^2 / 2\mu_0)$ einen gewissen Grenzwert nicht überschreiten. Für $\beta > 10\%$ ist mit druckgetriebenen Instabilitäten zu rechnen.



Für einen Fusionsreaktor ist jedoch eine andere Bedingung bedeutsame, die man als *Null-Netto-Leistung* bezeichnet. In diesem Fall betrachtet man aber generell einen *getriebenen Reaktor* bei dem ständig eine gewisse Heizleistung (P_{heiz}) von außen ins Plasma eingekoppelt wird. Im Gegensatz zum break-even Kriterium berücksichtigt man hierbei die α-Teilchenheizung und den Wirkungsgrad η, mit dem Wärme in elektrische Energie überführt werden kann,

Abb. 12-6: Energiebilanz bei der Null-Netto-Leistungsbedingung

sowie den Wirkungsgrad η_{in}, mit dem diese gewonnene Energie in Plasmaheizung konvertiert werden kann (s. Abb. 12-6) $P_{hei} = \eta_{in} P_{el}$. Je nach Heizart (ohmisch, Atomstrahl oder HF-Heizung) kann dieser zweite Wirkungsgrad η_{in} zwischen nahezu 100% (ohmisch) und wenigen Prozent schwanken. Wir haben also zunächst

$$P_{el} = \eta (P_{neut} + P_{brems} + P_{trans}), \tag{12.11}$$

wobei in der Klammer der gesamte Leistungsfluß durch die erste Wand steht, der sich aus der Neutronenleistung und der Summe aus Strahlungsleistung und Energietransport im Plasma zusammensetzt. Die Erfüllung der Nettobilanz erfordert nun, daß sich die Plasmaverluste durch die Summe von α-Teilchenheizung und externer Heizleistung gerade gedeckt wird:

$$P_{brems} + P_{trans} = P_{\alpha} + \eta_{in} P_{el}. \tag{12.12}$$

Einsetzen von P_{el} aus (12.11) in die letzte Gleichung und Berücksichtigung von $P_{neut} = P_{fus} - P_{\alpha} = 4\, P_{\alpha}$ liefert die Bedingung

$$P_{trans} = \frac{(1 + 4\eta_{in}\eta)}{(1 - \eta_{in}\eta)} P_{\alpha} - P_{brems}. \tag{12.13}$$

Nach Einsetzen der zuvor angegebenen Beziehungen erhält man diesmal

$$\boxed{n\,\tau_E \geq \frac{12 k_B T}{\langle \sigma_{Fus} v \rangle \frac{1 + 4\eta\eta_{in}}{1 - \eta\eta_{in}} E_{\alpha} - 4 c_{Br} Z_{eff} \sqrt{k_B T}} = F_{Netto}(T)} \tag{12.14}$$

Hierin ist der Quotient $(1 + 4\,\eta\,\eta_{in})/(1 - \eta\,\eta_{in}) \geq 1$, so daß nach Vergleich mit Gl. (12.9) die Null-Netto-Bilanz immer leichter als die Zündung zu erreichen ist. Dies ist verständlich, da ja nun – für ein endliches Produkt $\eta\,\eta_{in}$– immer eine gewisse Leistung zusätzlich zur α-Teilchenheizung ins Plasma eingekoppelt werden kann. Für $\eta\,\eta_{in} = 0.5$ erhält man beispielsweise $(1+ 4\,\eta\,\eta_{in})/(1-\eta\,\eta_{in}) = 6$, so daß die α-Teilchenheizung gleichsam um einen Faktor 6 erhöht erscheint.

12.4 Einfluß von Verunreinigungen

Sind neben den erwünschten D- und T-Ionen (jeweils 50%) andere Ionen im Plasma vorhanden, so erschweren diese die Zündbedingung und können u.U. sogar die Zündung völlig unmöglich machen. Der Einfluß dieser Verunreinigungen (auch H ist aus dieser Sicht hierzu zu zählen) kann sich auf zweierlei Weise bemerkbar machen. Zum einen kommt es zu einer *Verdünnung des Fusionsbrennstoffs,* zum anderen können die *Strahlungsverluste* erheblich ansteigen. Letzteres ist insbesondere dann der Fall, wenn die Verunreinigungsionen nicht mehr vollständig ionisiert werden, so daß über die erhöhte Bremsstrahlung hinaus noch Linienstrahlung auftreten kann. Im Plasmazentrum mit fusionsrelevanten Temperaturen um $T_e \approx 10$ keV kommen hierfür nur schwere Atome mit $Z > 20$ in Betracht.

12.4.1 VERDÜNNUNGSEFFEKTE

Wir gehen zunächst auf den Verdünnungseffekt ein, der namentlich durch die produzierten α-Teilchen bedingt ist. Haben diese zunächst hochenergetischen Teilchen ($E_\alpha = 3{,}5$ MeV) ihre Energie ans Plasma abgegeben, so würden bei idealem Teilcheneinschluß die im Plasma verbleibenden ^{4}He-Kerne schließlich die Fusionsprozesse ersticken, wie das beispielsweise in den Sternen auch tatsächlich der Fall ist[22]. Man bezeichnet deshalb das als Folge der Fusion entstehende Helium als "*Fusionsasche*". Ebenso wie es einen radialen Energietransport im Plasma gibt, existiert auch ein Teilchentransport. Analog zur Energieeinschlußzeit definiert man zur Erfassung der Teilchenflüsse Γ_a eine *Teilcheneinschlußzeit* für die Teilchensorte a durch

$$\Gamma_a \equiv \frac{N_a}{\tau_a} \tag{12.15}$$

mit N_a als der Gesamtteilchenzahl im Plasmabereich. Die Teilcheneinschlußzeit kann als mittlere Verweilzeit der Teilchen im Plasma aufgefaßt werden. Die Unterscheidung der verschiedenen Teilchenarten ist hierbei allerdings von erheblicher Bedeutung, da Teilchen sowohl vom Rand zugeführt (Verunreinigungen, Wasserstoffeinblasen) als auch – wie das ^{4}He – im Zentrum entstehen können. Selbst bei gleichem Transportverhalten (Diffusionskoeffizienten u.a.) werden sich dann unterschiedliche Teilcheneinschlußzeiten ergeben, da die am Rand zugeführten Teilchen wesentlich schneller die Wand (bzw. Targetplatten) erreichen, wo sie nach Rekombination entweder neu ins Plasma eindringen können (Recycling, Edelgase) oder abgepumpt werden oder auch haften bleiben (Metalle). Aus diesem Grunde ist τ_a stark abhängig von der Quellverteilung der einfach ionisierten Teilchen. Beim Energietransport ergeben sich grundsätzlich entsprechende Abhängigkeiten von der Energiedeposition, doch kann man hier in der Regel von einer Heizung im Plasmazentrum ausgehen, so daß diese Unterscheidungen weniger bedeutsam sind. Ähnlich günstig sind demnach die Verhältnisse bei den α-Teilchen, deren Quelle auch im Zentralbereich des Plasmas ist.

Bezeichnen wir nun mit τ_α die Einschlußzeit der α–Teilchen und mit $f = n_{He}/n_e$ die relative Konzentration des Heliums, so haben wir wegen der Quasineutralitätsforderung $n_e = n_i + 2\, n_{He}$ die folgende Teilchenbilanz

$$\frac{n_e^2}{4}(1-2f)^2 < \sigma v > -\frac{n_e f}{\tau_\alpha} = 0\,, \tag{12.16}$$

wobei wir mit n_i die Deuteronen und Tritonendichte bezeichnet haben. Für die Zündbedingung ergibt sich die abgewandelte Beziehung

$$n_e\ \tau_E \geq \frac{6(2-f)k_B T}{\langle \sigma_{Fus} v \rangle (1-2f)^2 E_\alpha - 4c_{Br}(1+2f)\sqrt{k_B T}} = F_{He}(T) \tag{12.17}$$

[22] Hier schließt sich allerdings an das H-Brennen das He-Brennen bei höherer Temperatur an.

die für f → 0 in die Relation (12.9) übergeht. Mit zunehmender Teilcheneinschlußzeit (τ_α) wächst die Heliumkonzentration (f), und der Zündbereich wird zunehmend eingeschränkt. Eliminieren wir aus den Gleichungen (12.16) und (12.17) die Elektronendichte (n_e), so ergibt sich für das Verhältnis der Einschlußzeiten die Beziehung

$$\rho \equiv \frac{\tau_\alpha}{\tau_E} = \frac{2}{3}\frac{E_\alpha}{k_B T}\frac{f\left[(1-2f)^2 - 4(1+2f)c_{Br}\sqrt{k_B T}\,/\langle\sigma_{Fus}v\rangle E_\alpha\right]}{(1-2f)^2(2-f)}. \qquad (12.18)$$

Sie stellt als Funktion von f eine Gleichung dritten Grades dar, die gewöhnlich im zulässigen Intervall $0 \le f \le 1/2$ zwei Lösungen f_1 und f_2 aufweist (hohe und niedrige He-Konzentration). Hierbei hängen die Lösungswerte sowohl von der Temperatur als auch vom Parameter ρ ab. Einsetzen der beiden Lösungen f_1 und f_2 in die Gl. (12.17) ergibt bei festgehaltenem ρ als Funktion von T eine geschlossene Kurve im $n_e\,\tau_E$ -T- bzw. p τ_E -T-Diagramm. Die Schar der Kurven mit ρ als Parameter ist in der

Abb. 12-7 wiedergeben. Man erkennt, daß sie sich mit wachsendem ρ auf einen Punkt zusammenziehen. Dieser Grenzfall wird bei der D-T-Reaktion für $f_1 = f_2 = 0{,}225$ entsprechend $\rho_{max} = 15{,}7$ erreicht. Für größere Werte von ρ hat die Gleichung (12.18) im Intervall $0 \le f \le 1/2$ keine reellen Lösungen mehr. Mit anderen Worten: Ist die Teilcheneinschlußzeit für das fusionierte Helium größer als das 15,7fache der Energieeinschlußzeit, so ist ein stationär brennendes D-T-Plasma grundsätzlich unmöglich.

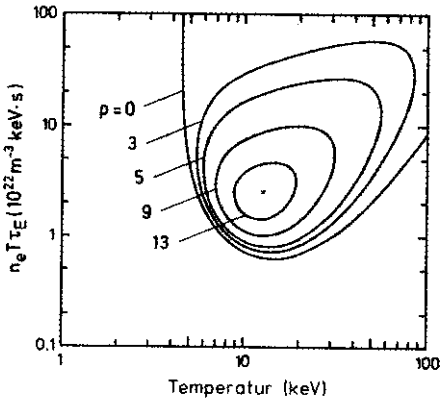


Abb. 12-7: Die Verkleinerung des Brennbereichs mit zunehmendem Verhältnis von Teilchen- zu Energie-Einschlußzeit (r) (nach V. Dose und G. H. Wolf, Phys. Bl. 47, 3 (1991)).

Glücklicherweise ergaben die in den letzten Jahren durchgeführten Experimente recht günstige Werte im Bereich von ρ=5-8, so daß die hinreichend schnelle Abfuhr des Heliums gesichert erscheint.

12.4.2 STRAHLUNGSEFFEKTE

Die Strahlungskühlung des Plasmas kann bei nicht-vollständiger Ionisation der Atome sehr bedeutsam werden und die Temperatur auf Werte unterhalb der für die Fusion erforderlichen T ≈ 10 keV begrenzen. Genauer ausgedrückt, besagt die Strahlungsbegrenzung, daß die α-Energieproduktion nicht ausreicht, einen – durch äußere Heizung herbeigeführten – gezündeten Zustand aufrecht zu erhalten. Es tritt ein *Strahlungskollaps* des Plasmas ein, der natürlich auch eine Folge der Zündung sein kann, wenn beispielsweise durch α-Teilchenbombardement der Wände mehr Verunreinigungen produziert werden. Verantwortlich ist hierfür insbesondere die Linienstrahlung der Ionen im VUV und weichen Röntgengebiet. Wir werden auf diese Prozesse im folgenden Kapitel genauer zu sprechen kommen. Allgemein gilt: je schwerer das Atom, umso größer die Strahlungsproduktion und damit umso kleiner die zulässige Konzentration (n_I/n_e) der Verunreinigungen im Plasma. Die

Abb. 12-8 gibt die maximalen Konzentrationen als Funktion der Ordnungszahl für die DT-Reaktion an. Man erkennt, daß bei einer Temperatur von 10 keV die Anteile an Fe im Plasmazentrum höchsten einige 10^{-3} betragen dürfen. Bei Wolfram, einem aus technischer Sicht (kleine Zerstäubungsausbeuten) sehr geschätzten Material, liegen die maximal zulässigen Konzentrationen sogar unterhalb von 10^{-4}.

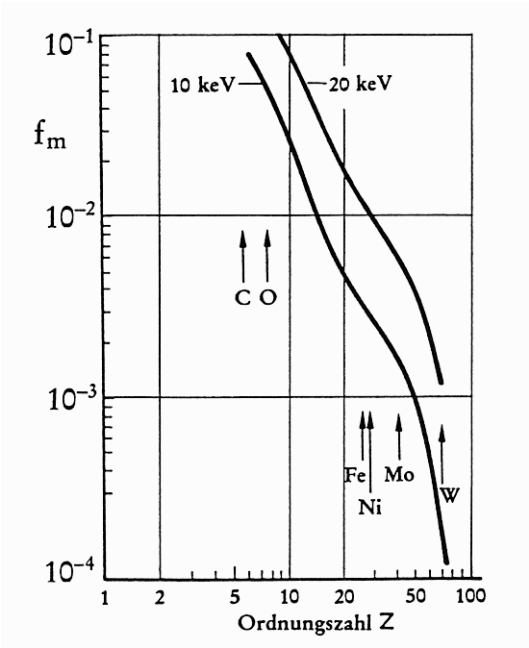


Abb. 12-8: Maximal zulässige Verunreinigungs-konzentrationen (bezogen auf n_e) für Reaktor-temperaturen bei $T_e = T_i = 10$ bzw. 20 keV

.

13 PLASMASTRAHLUNG

Im vorangehenden Kapitel haben wir unter anderem die große Bedeutung der Strahlungsverluste für die Fusionsplasmen kennengelernt. Während in vielen Abschätzungen nur die Bremsstrahlung betrachtet wird, die ein absolutes Minimum dieser Verluste darstellen, kommen unter realistischen Bedingungen noch weitere Strahlungsmechanismen hinzu, die in vielen Fällen die wesentlicheren sind und die Temperatur im Plasmazentrum so weit erniedrigen können, daß eine Zündung nicht mehr möglich ist. Wir haben auch schon im Kap. 11 darauf hingewiesen, daß die Strahlungsverluste nicht immer schädlich sind. Treten sie am Plasmarand auf, so sind sie sogar sehr willkommen, da sie die Energieauskopplung erleichtern. Im Gegensatz zu Ionen, die beim Bombardement mit den Gefäßwänden eine sehr hohe Materialzerstäubung verursachen können, ist dieses Problem bei Photonen völlig unerheblich. In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem Ursprung und der quantitativen Beschreibung der verschiedenen Strahlungsarten befassen. Grundsätzlich kann man eine Unterscheidung in kontinuierliche und diskrete Strahlung vornehmen, wobei die letztere auch als Linienstrahlung bezeichnet wird. Eine gute Kenntnis der zur Strahlung führenden physikalischen Mechanismen erlaubt uns nicht nur, die in einem Plasma auftretenden Strahlungsverluste genauer zu berechnen, sondern bietet darüber hinaus auch die Möglichkeit, zahlreiche Parameter, wie Temperatur und die mittlere Ionenladung, anhand der emittierten Strahlung zu bestimmen. Einige wichtige Strahlungsübergänge wurden bereits im Kap. 2.1 angesprochen. Sie sind in der Abb. 13.1 nochmals schematisch erläutert.

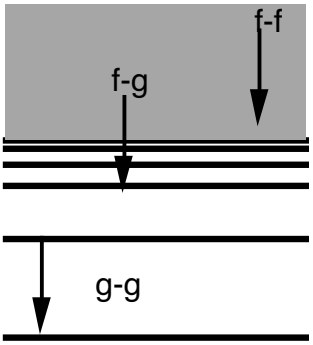


Abb. 13.1: Übergänge vom Typ gebunden-gebunden (g-g), frei-gebunden (f-g) und frei-frei (f-f). Die beiden letzteren führen im Plasma zur Emission von kontinuierlicher Strahlung. Nur bei der zwischen diskreten Atomniveaus ausgesandten (g-g)-Strahlung entsteht Linienstrahlung.

Zu diesen Strahlungsmechanismen, von denen die f-f-(Bremsstrahlung) und die f-g-Strahlung (Rekombinationsstrahlung) grundsätzlich in jedem Plasma auftreten, kommen häufig noch weitere hinzu: Strahlung infolge dielektronischer Rekombination, Linienstrahlung aufgrund von Ladungsaustauschrekombination und bei vorhandenem Magnetfeld die Zyklotronstrahlung. Bei der dielektronischen Rekombination sind - wie es der Name andeutet - zwei Elektronen im Spiel. Es erfolgt die Rekombination des freien Elektrons unter gleichzeitiger Anregung eines gebundenen Elektrons. Im Gegensatz zur Strahlungsrekombination, bei der im wesentlichen nur die niederenergetischen Elektronen beteiligt sind, tragen zur dielektronischen Rekombination auch hochenergetische Elektronen bei.

Die Emission der Linienstrahlung in Form von Linien in der Nachbarschaft der Resonanzlinien (Satelliten) erfolgt nach Einfang des freien Elektrons. Dieser Rekombinationsprozeß ist, wie auch die Ladungsaustauschrekombination, besonders bei hoch geladenen Ionen von Bedeutung. Die Ladungsaustauschrekombination, bei der ein Elektron eines neutralen Atoms von einem Ion eingefangen wird, ist insbesondere mit H-Atomen sehr effektiv. Bei einem Wasserstoffplasma ist dieser Prozeß wegen des Resonanzcharakters des Austauschs $H + H^+ \rightarrow H^+ + H$ von nochmals erhöhter Bedeutung. Wir stellen zur Übersicht alle Prozesse nochmals in der Tabelle 13-1 zusammen.

Art	Mechanismus	Bemerkung
Linienstrahlung	Elektronen-Stoßanregung	nicht vollständig ionisierte Atome
	Ladungsaustausch-Rekombination	Neutralgas erforderlich
	Dielektronische Rekombination	Dielektronische Satelliten
Kontinuumsstrahlung	Elektronen-Ionenstöße	Bremsstrahlung
	Strahlungs-Rekombination	vor allem im kalten, dünnen Plasmen
	Zyklotronstrahlung	in Magnetoplasmen

Tabelle 13-1: Übersicht: Strahlungen im Plasma

Im folgenden soll nicht auf alle angeführten Prozesse eingegangen werden. So sind die Zyklotronstrahlung und die Ladungsaustauschrekombination zwar für die Plasmadiagnostik von großem Interesse, doch sind die hiermit verbundenen Strahlungsverluste des Plasmas i.a. von untergeordneter Bedeutung.

13.1 Kontinuumsstrahlung

13.1.1 PLASMABREMSSTRAHLUNG

Klassische Berechnung

Die klassische Elektrodynamik ermöglicht mit Hilfe der *Lienard-Wiechert-Potentiale*[23] die Berechnung der Felder einer bewegten Punktladung. In großer Entfernung von der Ladung (Strahlungsfelder) und im nicht-relativistischen Grenzfall (v << c) ergeben sich die Ausdrücke

$$\vec{E}_{rad} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{\dot{v}})$$
$$\vec{B}_{rad} = \frac{\vec{r}\times\vec{E}_{rad}}{rc} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r^2}\vec{\dot{v}}\times\vec{r} \qquad (13.1)$$

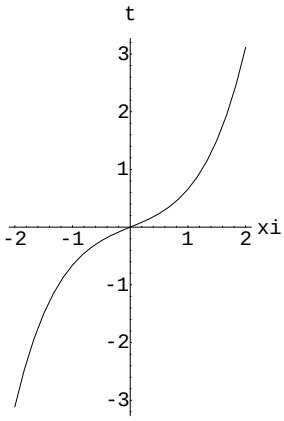
worin $\vec{\dot{v}}$ = d**v**/dt die Beschleunigung des Teilchens, e seine Ladung, **r** der Ortsvektor des Aufpunktes ist. Wie üblich bei der elektromagnetischen Strahlung, stehen E- und B-Feld senkrecht aufeinander und beide senkrecht zum Radiusvektor r. Die obigen Ausdrücke sind die gleichen, wie man sie für einen elektrischen Dipol mit dem Moment **d** = - e $\mathbf{r}_e$ ableitet. Diese Dipolnäherung ist für hinreichend kleine Geschwindigkeiten (v << c) gültig. Sei nun L die Ausdehnung eines strahlenden Gebildes, ferner τ die Periodendauer einer Schwingung und λ die Wellenlänge der ausgesandten Strahlung, so ist wegen $\lambda = c\,\tau$ und $L \approx v\,\tau$ die Forderung v **<<** c mit λ **>>** L äquivalent. Der *Poyntingvektor* ergibt sich zu **N** = **E** x **H** = $\mathbf{E}_{rad}$ x $\mathbf{B}_{rad}/\mu_0 = |E_{rad}|^2 \sin^2\theta\ \mathbf{e}_r/\mu_0 c$ hat damit die für einen Dipol typische $\sin^2\theta$ Abhängigkeit bezüglich der Abstrahlungsrichtung (θ = Winkel zwischen d**v**/dt und **r**). Integrieren wir sie über eine Kugeloberfläche, so erhalten wir die gesamte abgestrahlte Leistung zu

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\vec{\dot{v}}^2}. \qquad (13.2)$$

[23] Diese lauten allgemein $\phi = e[1/s]/4\pi\varepsilon_0$; $\vec{A} = e[\vec{v}/s]/4\pi\varepsilon_0$ *mit* $s = R - \vec{v}\cdot\vec{R}/c$. DieKlammern sind zur retardierten Zeit t' = t - r/c zu berechnen. Es gilt wie üblich $\vec{B}_{rad} = \nabla\times\vec{A}$ *und* $\vec{E}_{rad} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$. Der Poyntingvektor ist dann $\vec{N} = \left|\vec{E}_{rad}\right|^2 [\vec{r} - \vec{r}\,']/\mu_0 c$, wobei $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ die Aufpunkt- bzw. Ladungsvektoren sind (s. z.B. Panofsky-Phillips, *Classical Electrodynamics)*.

Die pro Sekunde abgegebene Strahlungsenergie ist damit proportional zum Quadrat der Beschleunigung. Im folgenden interessieren wir uns für die von den Elektronen eines Plasmas abgegebene Bremsstrahlung, wobei die Beschleunigung durch Stöße mit Ionen zustande kommt. Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß Elektronen-Elektronen-Stöße in dieser Näherung keinen Beitrag zur Bremsstrahlung leisten, da hierbei das Dipolmoment null ist. Die höheren Beiträge vom Quadrupolmoment dieser Wechselwirkungen sind erst bei extrem relativistischen Bedingungen (E > 10 MeV) von Bedeutung. Die Beschleunigung der Elektronen ergibt sich aus ihrer Hyperbelbahn im Coulombfeld des Ions. Diese Bahnen haben die Parameterdarstellung (s. *Landau -Lifschitz* , Band II, § 70)

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{s_{90^\circ}}{v_1}(\varepsilon \sinh\xi - \xi) \\
x &= s_{90^\circ}(\varepsilon - \cosh\xi) \\
y &= s_{90^\circ}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\sinh\xi \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2} = s_{90^\circ}(\varepsilon\cosh\xi - 1)
\end{aligned}
\quad ,
$$



wobei ξ – und damit auch t – den Bereich $-\infty \le \xi \le \infty$ durchläuft. Die charakteristische Länge ist der Stoßparamerter für 90° Ablenkung, für den wir in Kap. 4 die Beziehung $s_{90^\circ} = e^2 Z/(4\pi \varepsilon_0 m_e v_1^2)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 erhalten hatten. Die Exzentrizität ε und der Ablenkwinkel χ hängen mit dem Verhältnis der Stoßparameter s/s_{90° wie folgt zusammen: $\varepsilon = (1 + (s/s_{90^\circ})^2)^{1/2}$, $s/s_{90^\circ} = \cot(\chi/2)$. Mit Hilfe der Beziehungen (13.3) sich insbesondere die Differentiale $dx = \dot{x}\, dt = -\, s_{90^\circ} \sinh\xi\, d\xi$ in paralleler und senkrechter Richtung $dy = \dot{y}\, dt = -\, s_{90}\, (\varepsilon^2+1)^{1/2} \cosh\xi\, d\xi$ zur Einfallsrichtung einfach ausdrücken.

Abb. 13-1: Die Zeit als Funktion des Parameters ξ (hier für $\varepsilon = \sqrt{2}$)

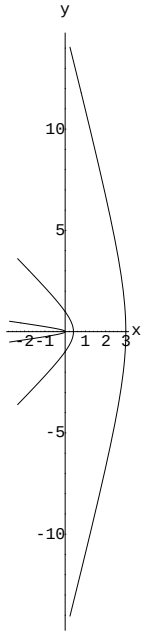


Abb.13.1: Teilchenbahnen nach Gl. (13.3) *für $-2 \le \xi \le 2$ und drei verschiedene Werte der Exzentrizität: $\varepsilon = 1.01$, $\sqrt{2}$, und 4 ($s_{90^\circ} = 1$). Mit steigendem ε werden die Kurven flacher und nähern sich der Geraden $x = \varepsilon - 1$. Für $\varepsilon = \sqrt{2}$ ergibt sich eine Ablenkung um 90°, für $\varepsilon = 1$ beträgt sie 180.*

Diese Ausdrücke kann man direkt zur Berechnung der Fouriertransformierten des E-Feldes $E_{rad}(\omega)$ bzw. der uns letzlich interessierenden Energiedichte pro Frequenzintervall $dW/d\omega$ verwenden[24]

$$
\frac{dW}{d\omega} = \frac{e^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\vec{v}} e^{i\omega t} dt \right|^2 . \qquad (13.4)
$$

Gl. (13.4) liefert uns die abgestrahlte Leistung eines Elektrons bei der Passage eines Ions der Ladung e·Z als Funktion der Kreisfrequenz ω im Intervall $d\omega$.

Dieser Ausdruck hängt noch vom Stoßparameter s ab, über den wir integrieren müssen. Betrachten wir einen monoenergetischen Elektronenstrahl der

[24] Wir verwenden das von der Fouriertheorie her bekannte *Parseval-Theorem:* $\int_{-\infty}^{\infty} |E(t)|^2 dt = 4\pi \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$

Dichte n_e, der in ein Plasma der Ionendichte n_Z eindringt, so wird pro Volumeneinheit und Photonenenergieintervall $dE_{ph} = d(\hbar\omega)$ die Leistung

$$P(E_{ph}, v_1)dE_{ph} = \left(v_1 n_e n_z \frac{1}{\hbar}\int_0^\infty \frac{dW}{d\omega} 2\pi s\, ds \right) dE_{ph} \qquad (13.5)$$

abgestrahlt[25]. Die expliziten Auswertungen der Integrationen sind mathematisch sehr anspruchsvoll und sollen hier im einzelnen nicht wiedergegeben werden. *H. A. Kramers* hat bereits 1923 das exakte Ergebnis angegeben. Es läßt sich in der Form

$$P(E_{ph}, v_1)dE_{Ph} = \left(\frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}(4\pi\varepsilon_0)^3 c^3 m_e^2 \hbar} \frac{n_e n_z}{v_1} \right) G_{kl}\ \ dE_{Ph} \qquad (13.6)$$

schreiben. Die Strahlungsdichte pro eV der Photonenenergie und – anstatt auf v_1 – bezogen auf die kinetische Energie der Elektronen $E_1 = m_e v_1^2/2$ ergibt sich zu

$$\boxed{P(E_{Ph}, E_1) = \frac{1{,}36\cdot 10^{-38} Z^2 n_e n_z}{\sqrt{E_1}} G_{kl} \quad \left[\frac{W}{m^3\, eV}\right]}, \qquad (13.7)$$

wenn E_1 in eV und die Teilchendichten in m^{-3} eingesetzt werden. In diesen Gleichungen ist G_{kl}, der sogenannte klassische *Gauntfaktor*, eine dimensionslose Korrekturgröße der Größenordnung 1. G_{kl} läßt sich durch die *Hankelfunktionen* erster Art $H_n^{(1)}(x)$ mit imaginärem Argument $x = i\,p = i\,(\omega\, s_{90°}/v_1)$ und gleichem Index $n = x$ angeben[26]

$$G_{kl}(\omega) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} x H_x(x) H_x'(x); \ \text{ mit } \ x = ip = i\frac{\omega s_{90}}{v_1} \qquad (13.8)$$

Hierin ist $H_n'(x) = dH_n(x)/dx$. Der Parameter $p = \omega s_{90}/v_1 = \omega\, \tau_{90°}$ ist als das Produkt von Kreisfrequenz und approximativer Stoßdauer $\tau_{90°}$ bei einem 90°-Stoß ebenfalls eine dimensionslose Größe. Er läßt sich umformen zu

$$p = \frac{Z\sqrt{Ry}\, E_{ph}}{2E_1^{3/2}}, \qquad (13.9)$$

mit der Rydbergenergie $Ry = m_e/2\,(e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar)^2 = 13{,}6$ eV. In der Abb. 13-2 ist G_{kl} nach Gl. (13.9) als Funktion von p aufgetragen. Man beachte, daß die Frequenzabhängigkeit, d.h. der Spektralverlauf als Funktion der Photonenenergie, nur über die schwach variierende Funktion $G_{kl} = G_{kl}(\text{ const. } E_{ph}/E_1^{3/2})$ zustande kommt. Bei höheren Frequenzen kommt der größte Beitrag zur Strahlung von Teilchen, die näherungsweise um 180° abgelenkt werden. Für diese ist $G_{kl} \approx 1$. Entsprechend dieser klassischen Rechnung bleibt $G = 1$ auch für $\omega \to \infty$, was quantenmechanisch dem Energiesatz widerspricht (UV-Kathastrophe), da ein Teilchen mit der kinetischen Energie E_1

---

[25] In der Literatur wird häufig auch der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dE_{ph}$ für Photobremsstrahlungsproduktion angegeben. Die Größe $\sigma(E_{ph}) = \beta_1^2 E_{ph}/Z^2\,(d\sigma/dE_{ph})$ mit $\beta_1 = v_1/c$ ist dann näherungsweise eine Konstante und nimmt in der Kramerschen Näherung den Wert $\sigma_{Kr} = 5{,}60$ mb $= 5.60\cdot 10^{-27}$ cm^{-2} an. Die Leistungsdichte nach Gl. (13.6) ergibt sich in dieser Formulierung zu $P = n_e n_z v_1\,(d\sigma/dE_{ph})\,E_{ph} = n_e n_z Z^2 c^2\,\sigma(E_{ph})/v_1$

[26] Hankelfunktionen treten im Zusammenhang mit Zylinderwellen auf. Die hier benötigten H-Funktionen mit imaginärem Index und Argument lassen sich durch das Integral $i\pi H_{ip}^{(1)}(ip) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\,p\,(\xi - \sinh\xi)]\, d\xi$ darstellen. Alternativ kann man auch eine Darstellung durch Bessel- und Neumannfunktionen entsprechend $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\,N_n(x)$ mit $N_n(x) = (\cos(n\pi)\,J_n(x) - J_{-n}(x))/\sin(n\pi)$ wählen.

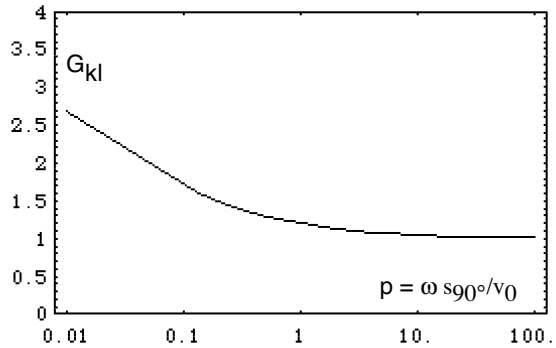


Abb. 13-2: Der klassische Gauntfaktor als Funktion des Parameters p.

(bei einer Streuung mit $E_2 \geq 0$) nur Photonen mit einer maximalen Energie von $h\nu = E_1$ produzieren kann. Man macht daher häufig die *semi-klassische Näherung*

$$G_{semi,klass.} = G_{kl}(\omega)\Theta(E_0 - \hbar\omega), \tag{13.10}$$

wobei $\Theta(x)$ die *Heaviside-Funktion* (auch Einheitssprungfunktion genannt: $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$, $\Theta(x) = 1/2$ für $x = 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$) ist.

Quantenmechanische Rechnung

In der klassischen Beschreibung des Elektron-Ion-Stoßes wird der Energieverlust des Elektrons durch die Abstrahlung nicht berücksichtigt. Außerdem spielt die Wellennatur des Teilchens bei kleinen Stoßparametern eine wichtige Rolle. In seiner quantenmechanischen Behandlung der Bremsstrahlungsemission hat *A. Sommerfeld* im Jahre 1939 diesen Fakten Rechnung getragen. Sein Ergebnis ist, abgesehen von relativistischen Effekten, exakt. Bei seiner Behandlung des Problems ging Sommerfeld von den korrekten Wellenfunktionen

$$\psi_j = e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} L_{n_j}(ik_j r - \vec{k}_j \cdot \vec{r}) \;\; ; j = 1,2 \tag{13.11}$$

aus, wobei sich die Indizes j = 1, 2 auf das freie Elektron vor und nach dem Stoß beziehen. L_n sind die vom Wasserstoffatom her bekannten *Laguerrepolynome*, die hier nicht mit den sonst üblichen ganzen Quantenzahlen, sondern – da die Energie positiv ist – mit imaginärem Index $n_j = i\,\alpha\, c\, Z/v_j$ vorkommen. Die Größe $\alpha = \mu_0\, ce^2/2h \approx 1/137$ ist die bekannte *Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante*. $\mathbf{k}_j = m_e\, \mathbf{v}_j/\hbar$ sind die zum Impuls proportionalen Wellenzahlvektoren. Die Darstellung (13.11) der Wellenfunktion ist speziell für Behandlung der Coulombstreuung geeignet. Im allgemeinen hat man bei Streuproblemen eine Beschreibung durch einlaufende ebene Wellen (Vektor $\mathbf{k}$) und auslaufende Kugelwellen (Vektor $\mathbf{k}_r$), wobei letztere von der Art

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r} \to \infty) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{1}{r} f(\vec{k}_r, \vec{k}) e^{ikr} \tag{13.12}$$

sind, wobei f als Streuamplitude bezeichnet wird.

Die Wellenfunktionen (13.11) genügen der Schrödingergleichung

$$\Delta\psi_j + k_j^2 \psi_j - \frac{2m_e}{h^2} U \psi_j = 0 \;\; ; j = 1,2, \tag{13.13}$$

wenn U(r) das exakte Coulombpotential ist. Die Richtungen der Wellenvektoren werden in Kugelkoordinaten so festgelegt, daß wir die folgende Darstellungen erhalten

$$\vec{k}_1 / k_1 = (1,0,0) \tag{13.14}$$

und

$$\vec{k}_2 / k_2 = (\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi) \qquad (13.15)$$

Dieser Ansatz ist durch die Verwendung der Laguerrepolynome der sonst üblichen *Bornschen Näherung* (Berechnung von f), die das einlaufende Elektron nur durch eine ebene Wellen darstellt, weitaus überlegen. Als wichtiger Unterschied zur klassischen Beschreibung geht bei der Quantenmechanik die unterschiedliche Geschwindigkeit des Elektrons vor und nach dem Stoß ein

$$\hbar\omega = \frac{m_e}{2} v_1^2 - \frac{m_e}{2} v_2^2. \qquad (13.16)$$

Die klassische Beschreibung nimmt hier also $h \to 0$ an. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang $\psi_1 \to \psi_2$ unter Aussendung eines Photons ist in der Dipolnäherung proportional zum Quadrat des Übergangsdipolmoments

$$\vec{d} = -e \int \psi_1 \vec{r} \psi_2^* dV \qquad (13.17)$$

Nach Integration über die beiden Winkel und Bestimmung der Normierungsfaktoren ergibt sich ein Ergebnis, das dem der Gl. (13.6) entspricht, aber eine andere Frequenzabhängigkeit, d.h. Gauntfaktor, aufweist. Dieser *quantenmechanische Gauntfaktor* läßt sich durch die reellen Indizes $\eta_1 = n_1/i = \alpha Z\, c/v_1$ und $\eta_2 = n_2/i = \alpha Z\, c/v_2$ wie folgt angeben

$$\boxed{G_{qu} = \frac{\pi\sqrt{3}x}{(e^{2\pi\eta_1} - 1)(1 - e^{-2\pi\eta_2})} \frac{d}{dx} \left\{ \left| F(i\eta_1, i\eta_2, 1, x) \right|^2 \right\}; \; mit \;\; x = \frac{-4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 - \eta_2)^2}} \qquad (13.18)$$

Hierin ist F die gewöhnliche *hypergeometrische Funktion*, die eine Funktion von vier Argumenten ist. Für $E_{ph} > E_1$ wird η_2 imaginär und damit G_{qu} komplexwertig, während diese Funktion für $E_{ph} < E_1$ reell ist. Interessanterweise hat G_{qu} bei der Grenzfrequenz $h\,\nu_g = E_1$ einen endlichen Wert. Genauere Untersuchungen haben gezeigt, daß der obige Sommerfeldsche Gauntfaktor bis zu Energien von $E_1 \approx 50$ keV noch bis zu einer Genauigkeit von etwa 4% korrekt bleibt. Allerdings ist die Auswertung etwas beschwerlich, da die hypergeometrischen Funktionen schlecht konvergieren bzw. für $x \geq 1$ analytisch fortgesetzt werden müssen. Aus diesem Grunde greift man gerne auf die von *G. Elwert* 1958 angegebene Näherungsformel

$$G_{qu} \approx \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{1 - e^{-2\pi\eta_1}}{1 - e^{-2\pi\eta_2}} \ln\left(\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \right) \qquad (13.19)$$

zurück, die durchgehend eine Genauigkeit von wenigen Prozent erreicht.

Bildet man in Gl. (13.18) den Grenzübergang $E_{ph} \to 0$, so ergibt sich der klassische Grenzfall entsprechend Gl. (13.8), wenn man hierin das Argument p (s. Gl. (13.9)) durch $p^* = (\eta_2 - \eta_1) = (Ry/(E_1 - E_{ph}))^{1/2} - (Ry/E_1)^{1/2}$ ersetzt, das allerdings für sehr kleine Werte von E_{ph}/E_1 in p übergeht. Für quantitative Berechnungen mit einigem Anspruch an Genauigkeit ist aber fast immer in Gl. (13.8) das Argument p* statt p zu wählen. In der Abb. 13-3 vergleichen wir den quantenmechanischen mit dem so berechneten semi-klassischen Gauntfaktor nach Gl.(13.10) für eine Elektronenenergie von 1 keV. Sie zeigen einen ähnlichen Verlauf und steigen zu kleinen Photonenenergien an, sind aber doch bis zu einem Faktor 2 unterschiedlich. Für $E_{ph} \to 0$ liegt eine logarithmische Singularität vor (Infrarotkatastrophe). Sie hat ihre Ursache in den langreichweitigen Coulombfeldern. Man beachte aber, daß die Annahme eines unabgeschirmten Coulombpotentials mit Annäherung an die Plasmafrequenz (d.h. große Stoßparameter) zusammenbricht.

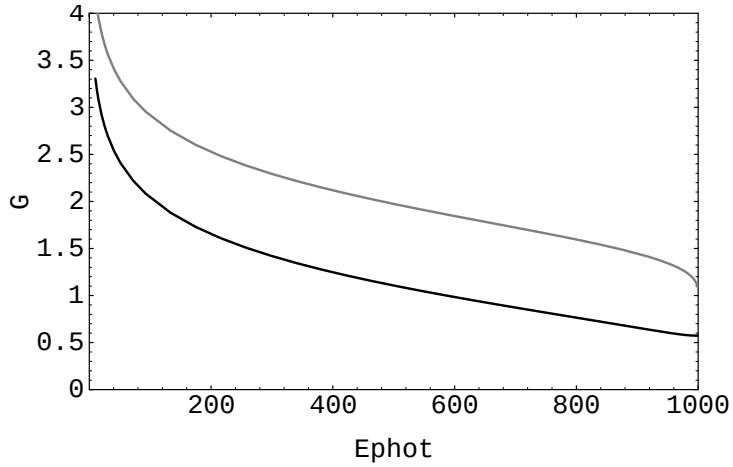


Abb. 13-3: Der Gauntfaktor nach quantenmechanischer Rechnung (untere Kurve) und in klassischer Näherung (obere Kurve) als Funktion der Photonenenergie für eine Einfallsenergie der Elektronen von E_1 = 1keV. In der klassischen Rechnung nach Gl. (13.8) wurde das Argument $p = E_{ph}\,(Ry/(E_1^3))^{1/2}$ durch $p^* = (Ry/(E_1 - E_{ph}))^{1/2} - (Ry/E_1)^{1/2}$ ersetzt.

Schließlich zeigt die Abb. 13-4 die Bremsstrahlungsspektren für zwei verschiedene Elektronenenergien (E_1). Sie wurden mit den korrekten quantenmechanischen Gauntfaktoren berechnet, doch geht nach Gl. (13.7) die Elektronenenergie auch in die absolute Höhe der Intensität ein.

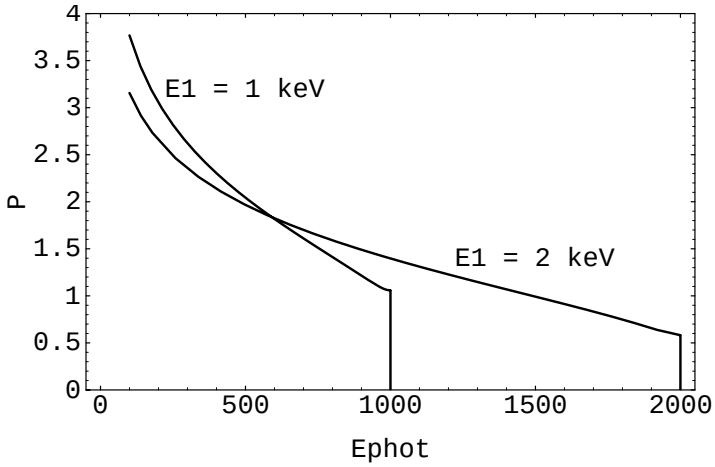


Abb. 13-4: Die Bremsstrahlungs-Spektren für zwei verschiedene Elektronenenergien. Als Ordinate wurde die Größe $P(E_{phot}, E_1)/(Z^2\, n_e\, n_z)$ in Einheiten von 10^{-40} W m^3/eV aufgetragen.

Bremsstrahlungs-Spektrum bei Maxwellscher Verteilungsfunktion

Die bisher angegebenen Beziehungen beschreiben das Bremsstrahlungsspektrum eines Elektronenstrahls. In der Plasmaphysik hat man es aber in der Regel mit thermischen Geschwindigkeitsverteilungen zu tun. Um für diese Verhältnisse das emittierte Spektrum zu erhalten, müssen wir den Ausdruck (13.6) noch über die Geschwindigkeiten integrieren, wobei wir eine Maxwellverteilung der Elektronen $f_e = n_e\, g_e(v_e)$ nach (Gl. 2.3) annehmen, die hierbei zusätzlich zum Fluß der Teilchen $n_e\, v_1$ als Wichtungsfaktor eingeht. Die pro Frequenzintervall und Volumeneinheit abgestrahlte Leistung ergibt sich dann aus

$$P(E_{ph}) = \int_0^\infty P(E_{ph}, \mathrm{v}_1) g_e(\mathrm{v}_1)\, 4\pi \mathrm{v}_1^2 d\mathrm{v}_1 = \int_0^\infty P(E_{ph}, \mathrm{v}_1) \frac{\exp\left(-m_e v^2 / 2T\right)}{(\pi 2T_e / m_e)^{3/2}}\, 4\pi \mathrm{v}_1^2 d\mathrm{v}_1 \quad (13.20)$$

Das Ergebnis läßt sich für einige Näherungen des Gauntfaktors exakt ausrechnen. Man kann es wiederum mit Hilfe eines mittleren Gauntfaktors

$$\bar{g}_{ff}(E_{ph}, T) \equiv \int_0^\infty G(E_{ph}, E + \hbar\omega) e^{-E/T} dE / T \quad (13.21)$$

ausdrücken, der nur sehr wenig variiert und typischerweise zwischen 0,3 und 1 liegt. Die Abb. 13.5 a) zeigt den Verlauf als Funktion von E_{ph}/T_e mit T_e als Parameter für ein reines H-Plasma und außerdem zum Vergleich für reine O- und Fe-Plasmen.

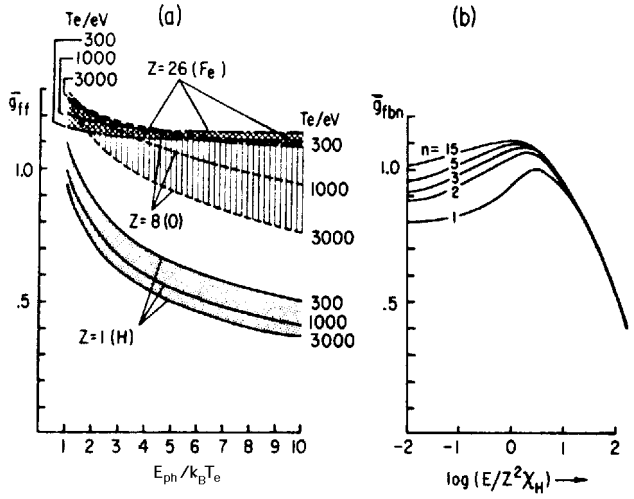


Abb. 13-5: Die Gauntfaktoren für Bremsstrahlung (a) als Funktion der normierten Photonenenergie und für Rekombinationsstrahlung (b) als Funktion der Energie der freien Elektronen (nach v. Goeler et al. Nucl. Fus. 15, 301-311, (1975), basierend auf Rechnungen nach J. Karzas und R. Latter, Astrophys. J. Suppl. Series 6:167, (1961)).

Das Energiespektrum selbst ergibt sich zu

$$\boxed{\begin{aligned} P(E_{ph}) &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}(4\pi\varepsilon_o)^3 c^3 m_e^2 \hbar} Z^2 n_e n_z \sqrt{\frac{2m_e}{\pi k_B T_e}}\; e^{-\frac{E_{ph}}{k_B T_e}} \bar{g}_{ff} \\ &= 1{,}54\cdot 10^{-38}\, \bar{g}_{ff}\, Z^2 \frac{n_e n_z}{\sqrt{T_e}}\; e^{-\frac{E_{ph}}{T_e}} \left(\frac{W}{m^3 eV}\right) \end{aligned}} \qquad (13.22)$$

wobei E_{ph} und T_e in eV, die Dichten n_e und n_z in m^{-3} einzusetzen sind. Es ist insbesondere durch einen exponentiellen Abfall mit der Photonenenergie gekennzeichnet. Trägt man also das gemessene Spektrum halblogarithmisch auf, wie das in der Abb. 13-6 geschehen ist, so kann man aus der Steigung die Elektronentemperatur bestimmen. Hiervon wird bei der Plasmaanalyse häufig Gebrauch gemacht. Bei Temperaturen um 1 keV und höher erstreckt sich das Spektrum ins weiche Röntgengebiet. In diesen Fällen kann man es sehr gut mit Halbleiterdetektoren (Si-(Li)-Dioden oder Ge-Reinstkristalle) messen. Jedes absorbierte Photon erzeugt im Si-Halbleiter eine zur seiner Energie proportionale Anzahl von Elektronen-Lochpaaren (für Si werden ΔE_{ph} = 3,6 eV pro Paar benötigt), die nach Absaugen in einem E-Feld einen Ladungspuls $Q \sim E_{ph}$ am Eingang eines ladungsempfindlichen Verstärkers erzeugen. Nach elektronischer Pulsformung und Analog-Digital-Umwandlung ergeben sich dann in einem Vielkanalanalysator die sogenannten Pulshöhensprektren (Abb. 13-6). Man beachte aber, daß $P(E_{ph})$ nicht die Zahl N_{ph} der Photonen pro Energieintervall dE_{ph} angibt, die man gewöhnlich mißt, sondern die Energie pro Energieintervall, also $P \sim E_{ph} N_{ph}$.

Gewöhnlich sind mehrere Ionensorten vorhanden, so daß Gl. (13.22) zur Summe über diese erweitert werden muß. Das führt auf einen zu $n_e^2 Z_{eff}$ proportionalen Vorfaktor mit $Z_{eff} = \Sigma Z^2 n_z/n_e$. Aus der absolut gemessenen Bremsstrahlung kann man daher die wichtige Größe Z_{eff} bestimmen. Auch hiervon wird oft durch Messungen Gebrauch gemacht, allerdings, wegen der im folgenden zu besprechenden Rekombinationsbeiträge, weniger im Röntgengebiet als im sichtbaren oder infraroten Spektralbereich.

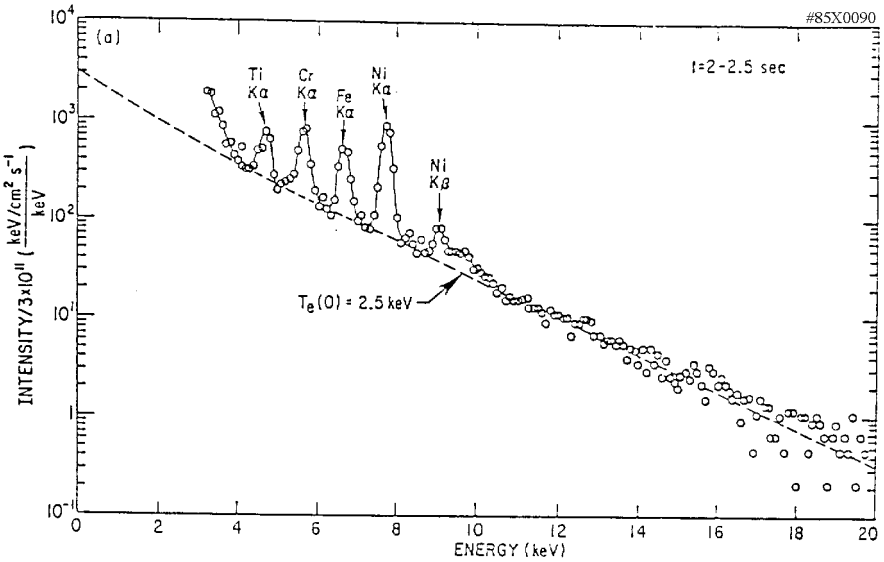


Abb. 13-6: Röntgenspektrum des TFTR-Tokamaks (Princeton) in halblogarithmischer Darstellung. Aus der Steigung des Bremsstrahlungskontinuums ergibt sich eine zentrale Elektronentemperatur von 2,5 keV. Im niederenergetischen Bereich sind die K-Linien der metallischen Verunreinigungen deutlich zu sehen (nach M. Bitter et al., Proceedings 30th annual meeting of the Am. Phys. Soc. (1988)).

Integrale Bremsstrahlungsleistung

Als letzter Schritt verbleibt die Integration der Gl. (13.22) über die Photonenenergie, um die insgesamt abgestrahlte Leistung pro Volumenelement zu erhalten

$$P_{Br} = \int_0^\infty P(E_{ph})\,dE_{ph}\,. \tag{13.23}$$

Mit der Näherung g_{ff} = const ergibt sich sofort

$$\boxed{P_{Br} = 1{,}54 \cdot 10^{-38}\,\overline{g}_{ff}\;\; n_e^2 Z_{eff}\sqrt{T_e[eV]}\;\;(W/m^3)}. \tag{13.24}$$

Von dieser Beziehung haben wir bereits im Kapitel 12 mit $g_{ff} \approx 1$ Gebrauch gemacht.

13.1.2 REKOMBINATIONSSTRAHLUNG

In den Plasmarandzonen oder auch in abklingenden Plasmen (oft als after glow plasmas bezeichnet) mit niedriger Temperatur ist ein zweiter Strahlungsprozeß, der ebenfalls ein Kontinuum erzeugt, oft wesentlich bedeutsamer als die Bremsstrahlung. Es handelt sich um die Rekombinationsstrahlung, die im Gegensatz zur Bremsstrahlung nicht aus frei-frei Übergängen, sondern aus frei-gebunden Übergängen hervorgeht.

Die rigorose quantenmechanische Behandlung dieses Problems[27] ist recht anspruchsvoll, doch kommt man mit einer semi-klassischen Betrachtung – im Sinne des Bohrschen Korrespondenzprinzips – zu recht brauchbaren Näherungen. Bei dieser Überlegung geht man davon aus, daß sich die Wellenfunktionen am "Atomrand" (typisch einige Å oder darüber

[27] Man geht meist von der Photoionisation als inverser Prozeß zur Strahlungsrekombination aus.

hinaus) für ein freies Elektron mit (E > 0) oder ein schwach gebundenes Elektron (E < 0) nur wenig unterscheiden. Daher werden die Dipolelemente bzw. die aus ihnen hervorgehenden Übergangswahrscheinlichkeiten $A_{mn} = 4\,\omega_{ik}^3\,|d_{mn}|^2/(3c^3\hbar)$ stetig bei E = 0 sein. Die Dipolmomente – bzw. deren Fouriertransformierte – können wir dann für diejenigen Teilchen, die im Coulombfeld des Ions eingefangen werden, auch näherungsweise klassisch berechnen. Allerdings ist hierbei die nahezu parabolische Bahn der einfallenden Teilchen zu beachten. Diese klassische Rechnung ist mit der bereits im vorigen Kapitel skizzierten identisch, und die Gl. (13.6) liefert uns die insgesamt hierbei abgestrahlte Leistung. Die dort gefundene Lösung ist jedoch in einem entscheidenden Punkt zu revidieren: Anders nämlich als in der klassischen Theorie wird die Strahlung eines Elektrons nicht als Kontinuum, sondern als monoenergetische Strahlung mit der Energie

$$E_{ph} = \hbar\omega = \frac{m_e}{2}v_e^2 + \chi_n = \frac{m_e}{2}v_e^2 + \frac{R_y Z^2}{n^2} \qquad (13.25)$$

abgestrahlt, wenn n die Hauptquantenzahl des gebundenen Niveaus ist, in das das Elektron eingefangen wird. Alle gebundenen Zustände wurden hierbei als wasserstoffähnlich angenommen, so daß $\chi_n = -E_n = Ry\,Z^2/n^2$ mit Ry = 13,6 eV die *Ionisationsenergie* des n-ten Quantenzustandes ist. Dies ist zumindest für die angeregten Zustände eine gute Näherung. Die Energieintervalle zwischen den gebundenen Niveaus haben den Abstand

$$\Delta E_n = \left|E_{n+1/2} - E_{n-1/2}\right| \approx \frac{2Z^2 R_y}{n^3}. \qquad (13.26)$$

In diese Intervalle fällt beim klassischen Strahler die zugeordnete Strahlungsleistung. Wir setzen also in Gl. (13.6) $dE_{ph} \approx \Delta E_n$ und erhalten so

$$P_n \approx \left(\frac{dW}{dE_{ph}}\right)_{kl} \Delta E_n \approx \left(\frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}(4\pi\varepsilon_0)^3 c^3 m_e^2 \hbar}\frac{n_e n_z}{v_1}\right)\left(\frac{2Z^2 R_y}{n^3}\right) g_n \;\; \delta(E_{ph} - \frac{m_e}{2}v_1^2 - \chi_n), \qquad (13.27)$$

wobei wir zur quantenmechanischen Korrektur den neuen Gauntfaktor $g_n = g_{free\text{-}bound}$ eingeführt haben. Da der klassische Gauntfaktor in diesem Gebiet hoher Frequenzen nahe bei eins lag, kann man vermuten, daß auch der quantenmechanische nicht stark von 1 verschieden ist. Dies haben *Karzas* und *Latter* durch genauere quantenmechanische Rechnungen bestätigt. Gleichung (13.27) liefert die monochromatisch – bei der durch Gl. (13.25) gegebenen Photonenenergie – abgestrahlte Leistung eines Elektronenstrahls mit der Geschwindigkeit v_1. Dies wird durch die Delta-Funktion $\delta(E_{ph} - m_e/2\, v_1^2 - \chi_n)$ sichergestellt. Die Berücksichtigung einer Geschwindigkeitsverteilung bereitet aber keinerlei Probleme. Wir brauchen nur n_e durch $4\pi\, v_1^2\, f_e(v_1)$ zu ersetzen und dann über v_1 integrieren. Wegen der δ-Funktion erhalten wir das Ergebnis unmittelbar, indem wir im Integranden $v_1 = [(E_{ph} - \chi_n)\, 2/m_e]^{1/2}$ setzen. Für eine Maxwellverteilung ergibt sich dann die Beziehung

$$P_n(E_{ph}) = n_e n_z \frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}(4\pi\varepsilon_0)^3 c^3 m_e^2 \hbar}\sqrt{\frac{2m_e}{\pi k_B T_e}}\, e^{-\frac{E_{ph}}{k_B T_e}}\left[\bar{g}_n(E_{ph})\frac{2}{n}\;\frac{\chi_n}{k_B T_e}e^{\frac{\chi_n}{k_B T_e}}\right], \qquad (13.28)$$

die bis auf den Faktor in der eckigen Klammer mit dem Ausdruck für die Bremsstrahlung (13.22) identisch ist. Für jedes n wird die kleinstmögliche Photonenenergie bei $E_{phot} = \chi_n = R_y Z^2/n^2$ entsprechend $v_1 = 0$ ausgestrahlt. Unterhalb dieser Energie muß daher der gemittelte Gauntfaktor g_n verschwinden (s. Abb. 13.5 für berechnete $g_n E_{ph}$). Wir können dieses Verhalten wieder durch die *Heaviside-Funktion* zum Ausdruck bringen

$$\bar{g}_n(E_{ph}) \approx \Theta(E_{ph} - \chi_n), \qquad (13.29)$$

wodurch die Rekombinationsstrahlung die in der Abb. 13.7 demonstrierte Zackenform erhält. Die Rekombinationsstrahlung in den Zackenmaxima wird von den langsamen Elektronen mit $v_1 \approx 0$ hervorgerufen, die besonders leicht in die gebundenen Zustände eingefangen werden.

Wir weisen jedoch nochmals auf einen wichtigen Unterschied zur Bremsstrahlung hin: Während bei der Bremsstrahlung schon beim monoenergetischen Strahl – wegen der unbestimmten Endenergie – ein kontinuierliches Spektrum entsteht, ist dies bei der Rekombination eine Folge der Verteilungsfunktion der Elektronen.

Schließlich kann man die Bremsstrahlung und die Rekombinationsstrahlung in einer Gleichung zusammenfassen. Wir geben das Ergebnis sogleich unter Auswertung des numerischen Vorfaktors an

$$\boxed{\begin{aligned} P_{kont}(E_{ph}) &= 1.54\cdot 10^{-38} n_e n_Z Z^2 e^{\frac{-E_{ph}}{T_e}} \Big/ \sqrt{T_e}\ * \\ &\left[\bar{g}_{ff} + \bar{g}_{n_g}(E_{ph})\frac{\xi}{n_g^{\,3}}\frac{\chi_{ion}}{T_e} e^{\frac{\chi_{ion}}{T_e}} + \sum_{k=n_g+1}^{\infty} \bar{g}_k(E_{ph})\frac{2Z^2R_y}{k^3T_e} e^{\frac{Z^2R_y}{k^2T_e}}\right]\left(\frac{W}{m^3\,eV}\right) \end{aligned}} \quad (13.30)$$

mit E_{ph} und T_e in eV und n_e, n_i in m^{-3}. Der Grundzustand mit der Hauptquantenzahl n_g wurde hierbei im Nachgang zu *S. v. Goeler* (Ref. s. Abb. 13.5) noch besonders betrachtet, da für diesen die Annahme der Wasserstoffähnlichkeit in vielen Fällen nicht mehr gerechtfertigt ist. χ_{ion} ist die Ionisationsenergie und ξ die Zahl der freien Elektronenplätze in der Grundzustandsschale, die maximal $2\,n_g^2$ beträgt. Man beachte auch die starke Abhängigkeit von der Ladung: Bei der Bremsstrahlung haben wir $P_{Br} \sim Z^2$, beim Rekombinationsanteil sogar $P_{Rek} \sim Z^4$. Ferner ist ersichtlich, daß die Rekombination in den Grundzustand von besonderer Bedeutung ist.

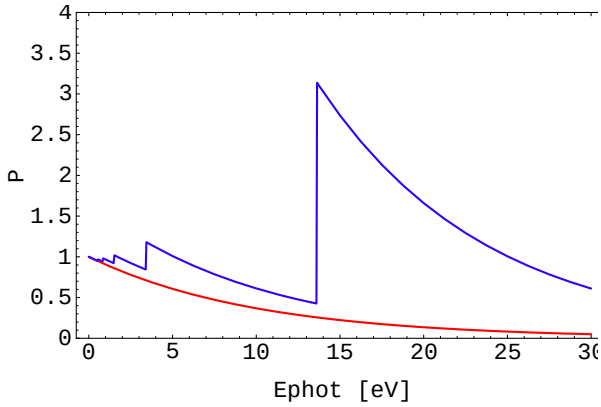


Abb. 13.7a: Das kontinuierliche Spektrum eines Wasserstoffplasmas mit Te = 10 eV. Es sind die Bremsstrahlung (untere glatte Kurve) und das gesamte kontinuierliche Spektrum unter Einschluß der Rekombinationsstrahlung dargestellt. Die Intensität wurde für Ephot → 0 auf 1 normiert. Man beachte die Kanten bei den Hauptquantenzahlen: n = 1 Lymankante (Eph = 13,6 eV), n = 2 (Eo = 3,4 e.V.) usw.

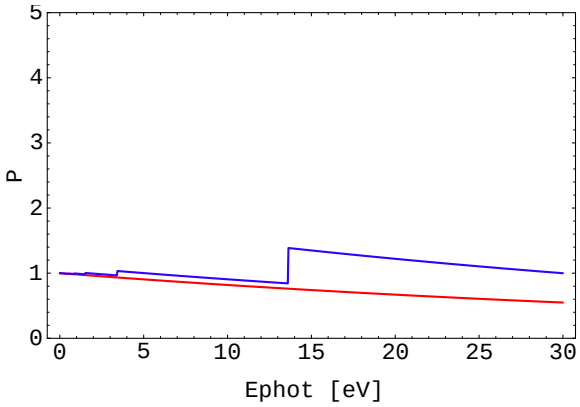


Abb. 13.7b: Wie oben, aber bei erhöhter Temperatur (Te = 50 eV)

Die bei den Seriengrenzen auftretenden Sprünge sind als Faktor durch die eckige Klammer in Gl. (13.28) gegeben. Sie sind Funktionen der Temperatur und lassen sich somit auch zur Bestimmung von T_e verwenden. Hiervon wird insbesondere in der Astrophysik Gebrauch gemacht, indem man aus dem sogenannten Balmersprung (n = 2, die zweite Zacke von rechts in Abb. 13.7) die Temperatur von Sternoberflächen bestimmt. Allerdings ist in den Spektren der Sprung an der Seriengrenze verschliffen, da dort die verbreiterten Linien mit oberen Hauptquantenzahl $n' \to \infty$ das Kontinuum noch ein Stückweit fortsetzen. Man trägt daher die Kontinuumsintensität zwischen den noch unterscheidbaren Emissionslinien und dem

Kontinuum jenseits der wahren Seriengrenze ν_0 bzw. λ_0 auf und ermittelt so den Sprung. Abb. 13.8 illustriert die Vorgehensweise am Beispiel der Chromosphäre der Sonne. Das hier dargestellte Spektrum wurde während einer Sonnenfinsternis am Sonnenrand aufgenommen. In den Sternspektren treten jedoch gewöhnlich die Linien in Absorption auf. Ein solches Spektrum zeigt die Abb. 13.9 vom Stern Wega in der Leier. Eine Temperatur von T = 15 000K beschreibt recht gut das Spektrum im sichbaren Bereich (Farbtemperatur). Die abgestrahlte Leistung unter Einschluß der UV-Strahlung (Fläche unter den Kurven) entspricht dagegen eher der niedrigen Temperatur von T = 9 500 K.

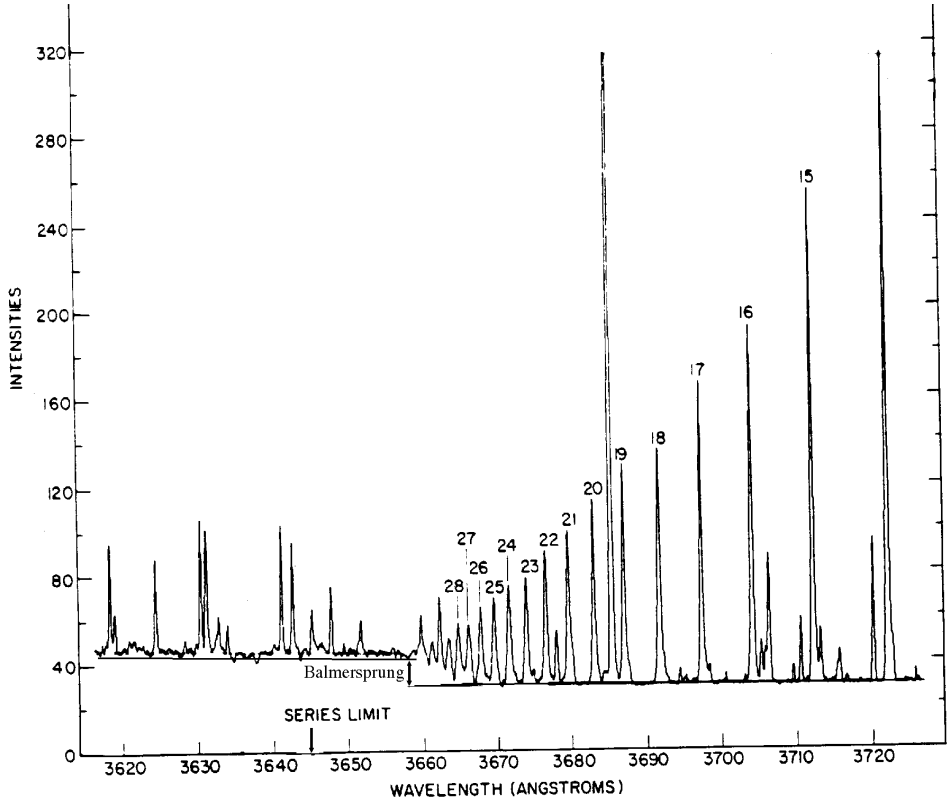


Abb. 13.8: Das Emissionsspektrum der Sonne, aufgenommen bei einem Winkelabstand von 2" oberhalb der Photosphäre. Die Linien der Balmerserie sind bis zur oberen Hauptquantenzahl n = 30 getrennt (dazwischen liegen einige Linien von anderen Elementen). Aus dieser Verschmelzungsgrenze bei n = 30 ergibt sich anhand der Starkverbreitungstheorie der Linien eine Dichte von $n_e = 5 \cdot 10^{17}\ m^{-3}$. Der Balmersprung in der kontinuierlichen Strahlung ist durch die eingezeichneten Horizontalen verdeutlicht (nach U. Feldman, Physica Scripta 24, 681 (1981)) .

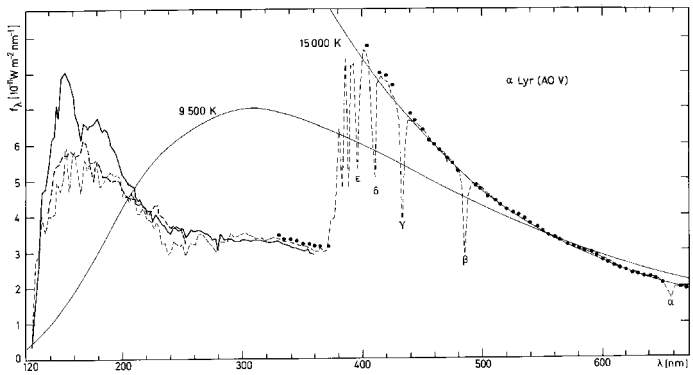


Abb. 13.9: Optisches Spektrum des Sterns Wega im Sternbild Leier. Der Balmersprung des Wasserstoffs bei der Seriengrenzwellenlänge λ= 365 nm ist deutlich erkennbar. Die Balmerlinien H_α bis H_ε treten in Absorption auf. Die Meßpunkte (•••) wurden von der Erde aufgenommen. In dem sich anschließenden UV-Bereich (λ < 350 nm) gehen die Kurven (—und ---) auf Satellitenbeobachtungen zurück. Zum Vergleich ist die Kirchhoff-Planck-Funktion B_λ (T) für die Ober-flächentemperaturen T = 15 000 K und T = 9 500 K eingezeichnet. Eine

recht befriedigende Übereinstimmung wird mit genaueren Modellrechnungen (---) erreicht (n. A. Usöld, B. Baschek, "Der neue Kosmos", Springer Verlag 1991).

13.1.3 REKOMBINATIONSWAHRSCHEINLICHKEIT

Mit der nach Gl. (13.28) gegebenen Strahlungsleistung können wir auch sogleich den Ratenkoeffizienten für Strahlungsrekombination (s. Kap. 2.3) in den n-ten Zustand angeben

$$\alpha_{Z,n}(T_e) = \int_{\chi_n}^{\infty} \frac{P_n(E_{ph})}{n_e n_z E_{ph}} dE_{ph} = \frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}(4\pi\varepsilon_0)^3 c^3 m_e^2 \hbar} \sqrt{\frac{2m_e}{\pi k_B T}}\, \bar{g}_n \frac{2}{n} \frac{\chi_n}{k_B T_e} e^{\frac{\chi_n}{k_B T_e}} \int_{\chi_n / k_B T_e}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$= \frac{32\pi e^6 Z}{3\sqrt{3}(4\pi\varepsilon_0)^3 c^3 m_e^2 \hbar} \sqrt{\frac{2m_e}{\pi R_y}} \frac{\bar{g}_n}{\sqrt{n^2 \chi_n / (Z^2 R_y)}} \left[\left(\frac{\chi_n}{k_B T_e}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\chi_n}{k_B T_e}\right) E_1\left(\frac{\chi_n}{k_B T_e}\right) \right] \quad (13.31)$$

$$= 5{,}20 \cdot 10^{-20}\, Z\; F(\chi_n / T_e) \frac{\bar{g}_n}{\sqrt{n^2 \chi_n / (Z^2 R_y)}} \quad \left(m^3 s^{-1}\right)$$

Hierin enthält die Funktion $F(x) = x^{3/2} \exp(x)\, E_1(x)$ die Integralexponential-Funktion $E_1(x)$[28] Der am Ende stehende Bruch wird für wasserstoffähnliche Terme zu $\bar{g}_n$ und damit ≈ 1. Neben der expliziten Proportionalität zu Z hängt der Ratenkoeffizient auch implizit über $\chi_n = Z^2 R_y/n^2$ von der Ladungszahl der Ionen ab. Die in der Abb. 13.10 wiedergegebene Funktion F(x) hat die Näherungen $F(x) \approx x^{1/2}$ für $x \to \infty$ und $F(x) \approx -x^{3/2} \ln x$ für $x \to 0$. Wie die Abb. 13.11 veranschaulicht, erfolgt die Rekombination bei wasserstoffähnlichen Ionen – insbesondere bei $T_e \geq \chi_{ion}$ – bevorzugt in den Grundzustand.

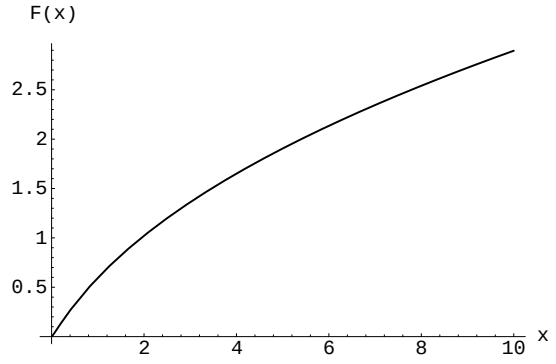


Abb. 13.10: Die in Gl. (13.31) auftretende Funktion $F(x) = x^{3/2} \exp(x)\, E_1(x)$.

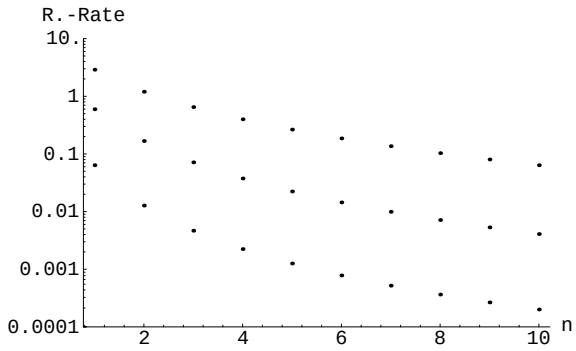


Abb. 13.11: Rekombinations-raten des Wasserstoffs (in Ein-heiten von $5{,}2 \cdot 10^{-20} m^3 s^{-1}$) in Niveaus der Quantenzahlen n für T_e = 1.36 eV (obere Punktfolge); 13,6 (mittlere Punktfolge) und 136 eV (untere Punktfolge).

Für die Berechnung des Corona-Ionisationsgleichgewichtes benötigt man den totalen Rekombinations-Ratenkoeffizienten, der sich durch Summation über alle Hauptquantenzahlen ergibt. Hutchinson ("Principles of Plasma Diagnostics", S. 205) gibt hierfür die folgende Näherungsformel an

[28] Mit den Definitionen $E_n(x) = \int_1^{\infty} \exp(-x\, t)\, t^{-n}\, dt$ und $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \exp(-t)/t\, dt$ gilt speziell $E_1(x) = -Ei(-x)$. Eine gute Näherung (Abweichungen < 2,5%) ist $\exp(x)\, E_1(x) \approx \ln[1+(1/\gamma x)(1+1{,}4\gamma x)/(1+1{,}4x)]$ mit $\gamma = 1{,}78$

$$\alpha_Z = 5{,}2\cdot 10^{-20}\,\frac{Z}{2}\sqrt{\frac{Z^2 R_y}{T_e}\left[\left(\ln\frac{\chi_{ion}}{T_e}\right)^2+2\right]}\left[1-e^{-\frac{\chi_{ion}}{T_e}\left[1+\frac{1}{n_g}\left(\frac{\xi}{n_g^2-1}\right)\right]}\right]\quad\left(m^3 s^{-1}\right),(13.32)$$

worin n_g die Hauptquantenzahl des Grundzustandes und ξ die dort vorhandene Anzahl freier Plätze ist. Die Formel (13.32) stimmt bis auf etwa 30% mit der exakten Summe $\alpha_Z = \Sigma_n\, \alpha_{Z,n}$ überein. Die größten Abweichungen treten für $T_e \approx \chi_{ion}$ auf.

13.2 Linienstrahlung

Die Berechnung der Stoßanregung der Atome und Ionen von einem gebundenen Zustand i in einen anderen j erfordert i.a. sehr aufwendige quantenmechanische Rechnungen. Eine vereinfachte Behandlung des Problems ist im Rahmen der *Bornschen Näherung* für große kinetische Energien der stoßenden Elektronen (d. h. $E >> E_{ij}$) möglich. *Bethe* fand auf diese Weise bereits 1930, daß der Wirkungsquerschnitt für Elektronenstoßanregung grundsätzlich die Form

$$\sigma_{ij} = 4\pi a_0^2 (R_y / E_{ij})^2\left[f_{ij}U^{-1}\ln(aU)+bU^{-2}+O\left(U^{-3}\right)\right] \qquad (13.33)$$

haben sollte. Hierin ist $U = E/E_{ij}$, $E_{ij} = E_j - E_i$ die Anregungsenergie, $R_y = 13{,}6$ eV; $a_0 = 5{,}29\cdot 10^{-11}$ m der Bohrsche Radius und a, b Konstanten der Größenordnung 1. Die mit dem Dipolmoment d_{ij} des Übergangs zusammenhängende dimensionslose Größe $f_{ij} = 2m_e E_{ij} |d_{ij}|^2 / e^2 \hbar^2$ wird als *Oszillatorenstärke* bezeichnet, sie ist für starke Linien von der Größenordnung 1 [29] . Eine noch einfachere Beziehung wurde von *Seaton und van Regemorter* hergeleitet, indem sie den Stoßvorgang als einen induzierten Strahlungsübergang behandelten[30]. Sie erhielten

$$\sigma_{ij} = 4\pi a_0^2 (2\pi/\sqrt{3}) R_y{}^2 g\,\frac{f_{ij}}{E_{ij}E}. \qquad (13.34)$$

Hierin ist g wiederum ein Anpassungsfaktor (Gauntfaktor), der für energiereiche Strahlung, (d.h. Änderung der Hauptquantenzahl $\Delta n \geq 1$) näherungsweise bei g = 0,2, für die energiearmen $\Delta n = 0$ Übergänge dagegen eher bei 0,8 liegt. Mit diesem Wirkungsquerschnitt für optisch erlaubte Übergänge kann man nun den Ratenkoeffizienten für Anregung für eine Maxwellverteilung der Elektronen – analog zu Gl. (9.17) – berechnen[31]

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \left\langle \sigma_{ij} v\right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2\pi m_e}(k_B T_e)^{3/2}}\int_{E_{ij}}^{\infty}\sigma_{ij} e^{-E/k_B T_e} E\,dE = \sqrt{\frac{8}{\pi m_e k_B T_e}}\,\frac{E_{ij}^2}{k_B T_e}\int_1^{\infty}\sigma_{ij}\, e^{-\frac{E_{ij}}{k_B T_e}U} U\,dU = \\ &\approx \sqrt{\frac{8}{\pi m_e k_B T_e}}\,\frac{8\pi^2 a_o^2 R_y^2 g f_{ij}}{\sqrt{3}k_B T_e}\int_1^{\infty} e^{-\frac{E_{ij}}{k_B T_e}U}\,dU = \sqrt{\frac{8}{3\pi m_e k_B T_e}}\,\frac{8\pi^2 a_o^2 R_y^2 g f_{ij}}{E_{ij}} \qquad ,(13.35) \\ &= 1{,}6\cdot 10^{-11}\,\frac{f_{ij}}{E_{ij}}\,\frac{g}{\sqrt{T_e}}\,e^{-E_{ij}/T_e}\quad [m^3 s^{-1}] \end{aligned}$$

---

[29] Es gilt der f.Summensatz von Kuhn und Thomas : Ist i der Grundzustand und sind Z-Elektronen vorhanden, so gilt $\Sigma_j f_{ij} = Z$. Für Wasserstoff (Z = 1) hat man: $f_{12} = 0{,}42$ (Ly-α), $f_{13} = 0{,}079$ (Ly-β) sowie für das Kontinuum $f_{1\infty} = 0{,}44$.

[30] Dies führt letztlich wieder auf eine zum Bremsstrahlungsproblem analoge Beschreibung. Einzelheiten findet man bei I. H. Hutchinson, *Priciples of Plasma Diagnostics*, chap. 6.

[31] Eine genauere Angabe von g findet man in : R. Mewe, Astr.& Astrophys. 20, 2121 (1973).

wobei, wie üblich, im numerischen Endresultat E_{ij} und T_e in eV einzusetzen sind.

In vielen, nicht zu dichten Plasmen ist die Zeit zwischen zwei Anregungstößen sehr viel kleiner als die Lebensdauer der Niveaus (s. Kap. 2.5). Unter diesen Verhältnissen zerfällt das angeregte Atom sogleich wieder unter Aussendung eines Photons. Man spricht vom sogenannten *Coronagleichgewicht für die Besetzung*, das grundsätzlich nicht mit dem entsprechenden Gleichgewicht für Ionisation (Kap. 2.3) verwechselt werden darf. Wegen der extrem kurzen Lebensdauer der angeregten Niveaus (typisch $< 10^{-9}$ s) ist das Corona-Besetzungsgleichgewicht viel eher als das Corona-Ionisationsgleichgewicht erfüllt. Für die Berechnung der Strahlungsleistung ist dann der genaue Wert der Lebensdauer bzw. der Übergangswahrscheinlichkeit für spontane Emission unerheblich. Es kommt vielmehr nur auf die Stoßanregungsrate an. Der Emissionskoeffizient, definiert als die pro Volumeneinheit in den Raumwinkel $\Delta\Omega = 1$ abgegebene Strahlungsleistung, ergibt sich dann für den betrachteten Übergang zu

$$\varepsilon_{ik} = \frac{E_{ik}}{4\pi} n_e n_z X_{ik} . \tag{13.36}$$

Für die insgesamt in den Raumwinkel 4π abgestrahlte Leistung ist über alle Linien zu summieren. In der Regel wird die Strahlung nicht nur von einem bestimmten Atom ausgesandt. Vielmehr liegt eine Atomart gewöhnlich in mehreren Ionisationszuständen vor. Sind die entsprechenden relativen Häufigkeiten C_α mit $\Sigma_\alpha C_\alpha = 1$, so haben wir

$$P_{Line} = n_e n_z \sum_{\alpha, i>j} C_\alpha E_{\alpha ij} X_{\alpha ij} = n_e n_z \, L_{line} . \tag{13.37}$$

Die hier auftauchende Größe L_{line} als Summe über drei Indizes wird als *Strahlungsrate* bezeichnet. Sie ist für den Fall, daß auch die C_α nur eine Funktion von T_e sind (Coronagleichgewicht für Ionisation), ebenfalls nur eine Funktion der Elektronentemperatur und ist für verschiedene Elemente berechnet worden. Dehnt man die Summation auch auf die kontinuierlichen Energiewerte aus, so ergibt sich die totale Strahlungsleistung pro Volumeneinheit aus

$$P_{rad} = n_e n_z L(T_e) \tag{13.38}$$

mit der totalen Strahlungsrate L. Die Abb. 13.12 gibt einige berechnete Beispiele. Bemerkenswert ist insbesondere, daß $L(T_e)$ nach Erreichen eines Maximums wieder abfällt. Dieser Abfall ist mit dem Übergang zur vollständigen Ionisation verbunden, wonach nur noch die kontinuierliche Strahlung (hier im wesentlichen Bremsstrahlung) übrig bleibt. Der weitaus größte Beitrag zur Gesamtstrahlung kommt danach bei mittleren Temperaturen durch Linienstrahlung zustande. Man kann ihn grob durch oben bereits erwähnte Aufteilung in $\Delta n = 0$ und $\Delta n = 1$ Übergänge erklären. Im ersten Fall ändert sich nur der Drehimpuls ($\Delta l \neq 0$), nicht aber die Hauptquantenzahl n. Die entsprechende Strahlung (z. B. bei Li-ähnlichen Atomen $2p \rightarrow 2s$) liegt gewöhnlich im sichtbaren oder UV-Bereich. Bei Änderung der Hauptquantenzahl wird härtere Strahlung im VUV bis Röntgenbereich emittiert.

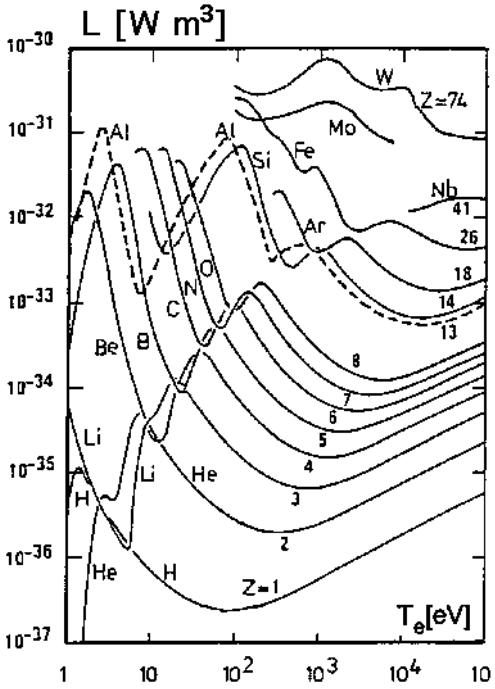


Abb. 13.12: Die Strahlungsrate L für die Gesamtstrahlungsverluste verschiedener Verunreinigungselemente als Funktion der Elektronentemperatur. Bei niedrigen und mittleren Temperaturen überwiegt der Beitrag der Linienstrahlung. Nach Erreichen eines Maximums fallen die Kurven der leichten Elemente wegen der Annäherung an die vollständige Ionisation. Bei sehr hohen Temperaturen steigt die Strahlung aufgrund der Bremsstrahlungsverluste ($P_{brems} \sim T_e^{1/2}$) wieder an.

Die Abb. 13.13 zeigt das Ergebnis einer Messung im VUV-Bereich im Tokamak ASDEX. Durch Vergleich mit Bolometermessungen ergibt sich, daß die in den erfaßten 18 Linien der leichten Verunreinigungen C (2,3%) und O (1,7%) abgestrahlte Leistung bereits 90% der Gesamtstrahlung ausmacht. Allein im Dublett des Li-ähnlichen Sauerstoffs (λ = 103,2 nm; 103,7 nm) wird etwa 1/3 der Gesamtstrahlung abgegeben. Im Vergleich dazu ist die Strahlungsleistung in den Wasserstofflinien vernachlässigbar.

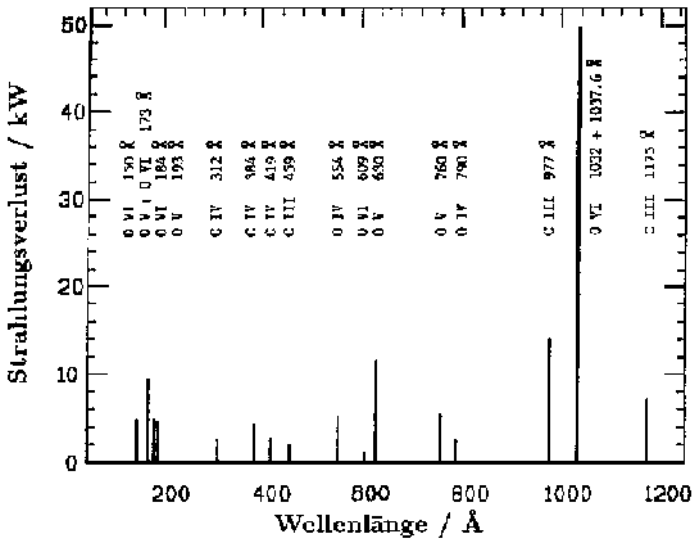


Abb. 13.13: Linienstrahlung im ASDEX-Tokamak. Die vermessenen 18 VUV-Linien der Li- und Be-ähnlichen Ionen liefern bereits eine Strahlungsleistung von P_{Line}= 132 kW im Vergleich zur Gesamtstrahlung P_{rad} = 150 kW und der eingekoppelten Leistung P_{Ohm}= 440 kW (n. W. Pöffel et al.).

13.3 Dielektronische Rekombination und charakteristische Röntgenstrahlung

Die nicht-vollständig ionisierten Atome geben im Plasma zu besonderen Erscheinungen Anlaß. Von großer Bedeutung ist dabei das Wechselspiel zwischen *Autoionisation* und *dielektronischer Rekombination*, das wir im folgenden betrachten wollen. Ausgangspunkt unserer Überlegung ist das Phänomen der doppelten Anregung, das bei Atomen oder Ionen mit mindestens zwei Elektronen auftritt. Betrachten wir z.B. ein Heliumatom, so können neben der Einfachanregung (etwa 1s 2p $^1P_1$) auch gleichzeitig zwei Elektronen angeregt sein (etwa 2s 2p $^1P_1$). Wie man der schematischen Darstellung in Abb. 13.14 entnimmt, haben einfach und zweifach angeregte Atome verschiedene Energiezustände. Insbesondere erstreckt sich das diskrete Termschema der zweifachen Anregung über die Ionisierungsgrenze der Einfachanregung hinaus. In diesem Gebiet kann ein diskreter Zweifachzustand zerfallen und die Energie auf ein freies Elektron übertragen. Diesen Vorgang bezeichnet man als Autoionisation.

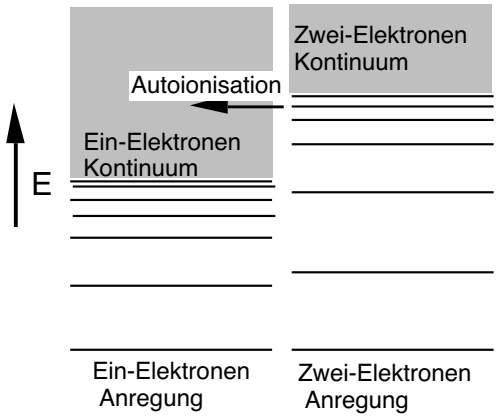


Abb. 13.14: Termschema der einfach und zweifach angeregten Zustände.

Andererseits kann aber auch ein spontaner Zerfall unter Aussendung eines Photons erfolgen. Ist die Energie des Photons hinreichend groß, so liegt nach dem Zerfall ein (meistens einfach) angeregter Zustand vor, mit einer Energie, die unterhalb der Ionisierungsenergie des einfach angeregten Sytems liegt. Eine Autoionisation ist dann aus energetischen Gründen nicht mehr möglich. Das System ist also durch Strahlungsemission stabilisiert worden. Diese *Strahlungsstabilisierung* ist für die dielektronische Rekombination, als inverser Prozeß zur Autoionisation, wesentlich. Bei dieser Rekombination, die im Gegensatz zur Strahlungsrekombination ein resonanter Prozeß ist, wird also im ersten Schritt ein freies Elektron eingefangen und gleichzeitig ein zweites aus dem Grundzustand angeregt. Dieses doppelt angeregte Sytem kann sogleich wieder durch Autoionisation zerfallen. Findet jedoch vorher eine Photonenemission statt, so ist die Rekombination stabilisiert. Die Vorgänge sind in der Abb. 13.15 am Beispiel der Rekombination eines He-ähnlichen Ions veranschaulicht.

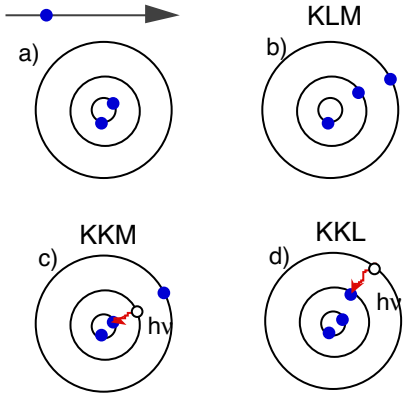


Abb. 13.15: Schema der dielektronischen Rekombination: a) Passage eines freien Elektrons; b) Einfang des freien und Anregung des gebundenen Elektrons; entsprechend der Schalenbesetzung spricht man von einem KLM-Atom c) Strahlungsstabilisierung (Satellitenlinie) der dielektronischen Rekombination; KKM-Atom d) Spontaner Zerfall in den Grundzustand unter Aussendung eines niederenergetischen Photons. Es liegt schließlich das Li-ähnliche KKL-Atom vor.

Bei der Strahlungsstabilisierung befindet sich das zweite Elektron gelegentlich in einer weiter außen gelegenen Schale. Es schirmt dann den Atomkern nur sehr geringfügig ab, indem es quantenmechanisch mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit innerhalb der unteren Schale aufzufinden ist. Man nennt dieses zweite Elektron auch "Zuschauer-Elektron" (*spectator electron*). Aufgrund seiner abschirmenden Eigenschaft wird beim Emissionsprozeß des ersten Elektrons ein leicht rot verschobenes Photon ausgesandt. Je nachdem, ob das Zuschauer-Elektron in die Schale n = 2 (L), n = 3 (M), n = 4 (N)… eingefangen wurde, ergeben sich entsprechende n = 2, n = 3, n

= 4 -Satellitenlinien. Ein Beispiel zeigt das in der Abb. 13.16 wiedergegebene Spektrum des helium-ähnlichen Chlors.[32]

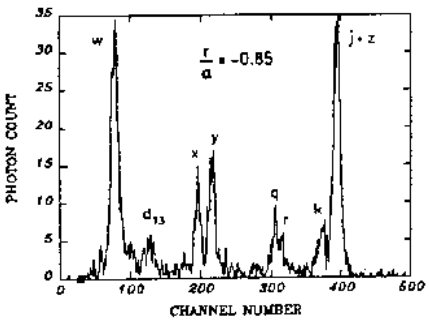


Abb.13.16a: Spektrum des He-ähnlichen Chlors (Cl^{+15}) im weichen Röntgengebiet, aufgenommen in der Plasmarandzone (r = 0,85 a) am Tokamak ASDEX. Neben der Resonanzlinie w (λ = 0,5038 nm) treten die Interkombinationslinien (x,y) sowie die dielektronischen Satellitenlinien des Li-ähnlichen Ions n = 3 (d_{13}) und n=2 (q, r, k, j) in Erscheinung. Die "verbotene Linie" z (λ = 0,5099 nm) fällt mit dem Satelliten j zusammen. Das Spektrum wurde mit einem gekrümmten Kristall (Johann-Spektrometer, hier mit einem Si -111 Kristall) aufgenommen. Die Abszisse (Kanäle) entspricht der Wellenlängenskala. Als Detektor diente ein ortsempfindliches Proportionalzählrohr. Die Intensität ist in Photonen pro Kanalintervall gegeben (n. P. Lee et al.).

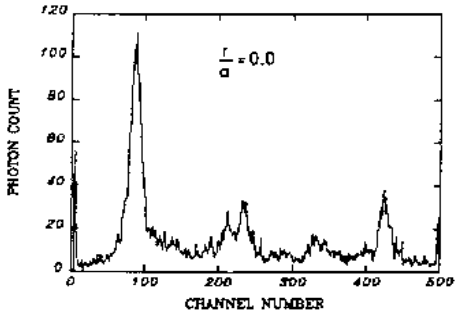


Abb.13.16b: Wie oben, jedoch aufgenommen mit der Sichtlinie durch das Plasmazentrum (r = 0). Wegen der höheren Elektronentemperatur ($T_{e0} \approx 1$ keV) treten die n = 2 dielektronischen Satelliten deutlich gegenüber der Resonanzlinie (w) zurück.

Aus der Doppler-Verbreiterung der Resonanzlinie ergibt sich die Temperatur der Ionen (Es gilt $\Delta\lambda_D/\lambda_0 = (8 \ln 2\, k_B T_i/m\, c^2)^{1/2} = 2.43 \cdot 10^{-3}\, [T_i(\text{keV})/A]^{1/2}$ mit A = rel. Atommasse und $\Delta\lambda_D$ der vollen Halbwertsbreite des Dopplerprofils.). Allerdings kann man wegen der nahen Satelliten ($n \geq 3$) auf der roten Seite nur die blauen Flügel der Linien auswerten. Ein Beispiel zeigt die Abb. 13.17 für den Fall des He-ähnlichen Titans. Aus dem Verhältnis der Satelliten zur Resonanzlinie kann man zusätzlich die Temperatur der Elektronen bestimmen. Dies erklärt sich aus dem – in der Abb. 13.18 – erläuterten Umstand, daß bei der Anregung der Resonanzlinie durch Elektronenstoß der gesamte energiereiche Schwanz der Verteilungsfunktion mit $E > E_{res}$ beteiligt ist, dagegen wird die dielektronische Rekombination nur von den niederenergetischeren Elektronen innerhalb eines schmalen Energiebereichs um $E = E_{sat}$ bewerkstelligt.

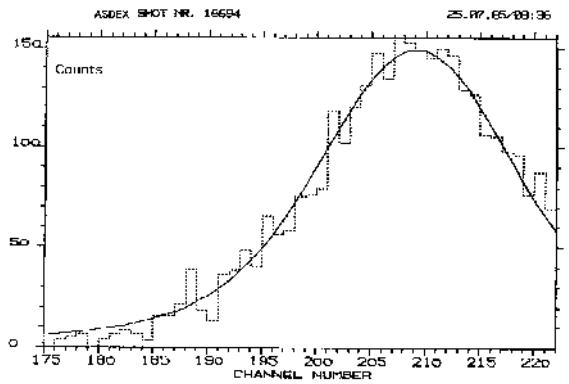


Abb. 13.17: Fit eines Dopplerprofils (glatte Kurve: $I = I_0 \exp[-(\Delta\lambda/\Delta\lambda_D)^2]$) an das gemessene Linienprofil (gepunktet) der Resonanzlinie von Ti^{+20} (λ_0 = 0,261 nm). Aus dem so ermittelten Wert von λ_D = 0,112 pm ergibt sich eine Ionentemperatur von T_i = 2,27 keV (nach M. Hesse, ASDEX).

Wir sehen also in dem in der Abb. 13.17 dargestellten Fall des Ti^{+20}, daß an der dielektronischen Rekombination freie Elektronen mit einer Energie von 3,31 keV beteiligt sind. Darin besteht ein wesentlicher Unterschied zur Strahlungsrekombination, an der im wesentlichen nur die ganz langsamen Elekronen teilhaben. Die dielektronische

[32] Die häufig auf "natürliche Weise" im Plasma vorhandenen Konzentrationen von $n_Z/n_e \approx 10^{-4}$ an Chlor und Schwefel reichen für derartige Messungen völlig aus.

Rekombination ist daher insbesondere bei hohen Temperaturen von Bedeutung, wenn die Strahlungsrekombination vernachlässigbar klein wird.

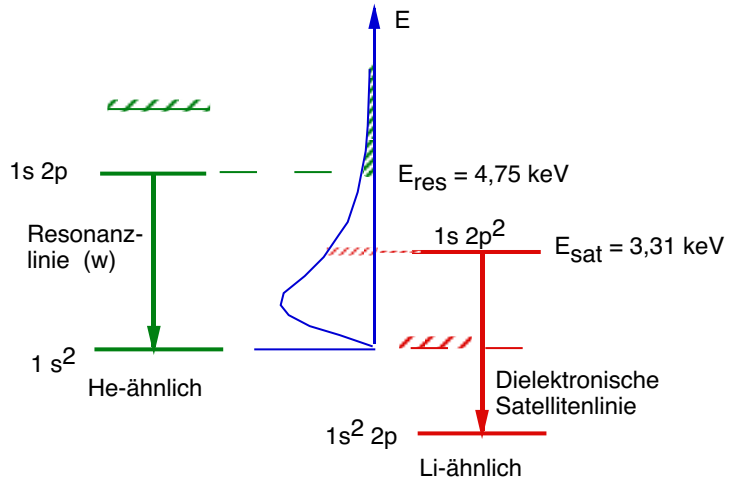


Abb. 13.18: Elektronen-Stoßanregung und dielektronische Rekombination. An der Anregung sind die Teilchen aus dem Schwanz der Verteilungsfunktion beteiligt. Zur dielektronischen Rekombination tragen nur Elektronen aus einem kleinen Energiebereich bei.

Schließlich bleibt noch die Frage zu klären, welche Ionen zur dielektronischen Rekombination neigen. Wie bereits gesagt, muß mindestens ein gebundenes Elektron vorhanden sein. Darüber hinaus ist das Wechselspiel zwischen Autoionisation und Strahlungsstabilisierung zu beachten. Es zeigt sich, daß die Autoionisierungswahrscheinlichkeit bei niedrig geladenen Ionen wesentlich höher als die Wahrscheinlichkeit für spontanen Photonenzerfall ist. Allerdings hängt erstere nur sehr schwach von der Ladungszahl ab, während die Übergangswahrscheinlichkeit für spontanen Zerfall mit Z^4 anwächst (s. Tabelle 13.1). Demzufolge wird die dielektronische Rekombination bei hochgeladenen Ionen wesentlich. Ohne Ableitung sei hier die von Hutchinson gefundene Näherungsformel für den dielektronischen Ratenkoeffizienten angegeben

$$\alpha_D = 8{,}8 \cdot 10^{-18} \sum_{i<j} f_{ij} Z^{2/3} \frac{E_{ij}}{R_y} \left(\frac{R_y}{T_e} \right) e^{-\frac{E_{ij}}{T_e}} \quad \left(m^3 s^{-1} \right). \tag{13.39}$$

Hierin sind die f_{ij} wiederum die Oszillatorenstärken der Übergänge im rekombinierten Ion. Häufig genügt es auch für den totalen Ratenkoeffizienten, nur den Grundzustand (i = g) und einen angeregten Zustand (j) zu berücksichtigen. Mit dem Anregungsratenkoeffizienten nach Gl. (13.35) ergibt sich dann für das Verhältnis der Intensitäten von Resonanzlinie zu Satellitenlinie

$$\frac{I_{res}}{I_{sat}} = \frac{C}{T_e} e^{-\frac{E_{res} - E_{sat}}{T_e}} . \tag{13.40}$$

Die Konstante C ist durch die Atomphysik bestimmt, doch ist ihre Berechnung zumeist mit großen Unsicherheiten behaftet. Die Untersuchungen an Fusionslagen bieten die Möglichkeit, diese Größe zu bestimmen, da hier die Temperatur durch andere Verfahren (z. B. Thomson - Streuung) im Rahmen einer Genauigkeit von etwa 5% gemessen werden kann. Mit der so erhaltenen Konstante lassen sich dann auch die Elektronentemperaturen von Sternenatmosphären angeben, wo die dielektronische Rekombination ebenfalls von großer Bedeutung ist und in den aufgenommenen Spektren zweifelsfrei zutage tritt (siehe für

Einzelheiten I. I. Sobelman " X–Ray Plasma Spectroscopy and Properties of Multiply-Charged Ions").

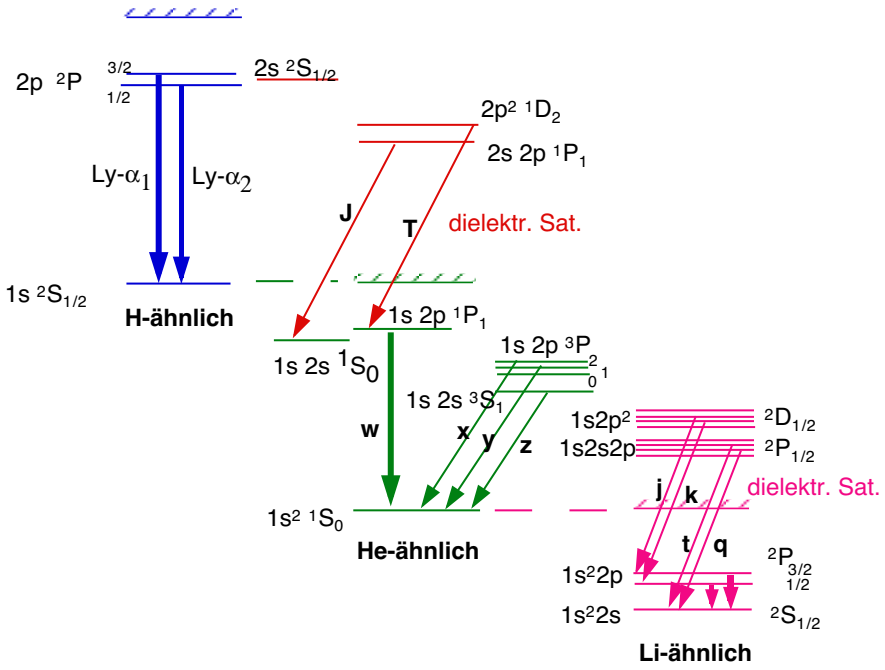


Abb. 13.19: Linienentstehung in den H-, He- und Li-ähnlichen Atomen mit hoher Ladungszahl.

Zum Schluß dieses Abschnitts gehen wir noch kurz auf einige allgemeine Aspekte der charakteristischen Röntgenstrahlung von hoch-ionisierten Atomen ein. Grundsätzlich steigt mit wachsender Ladung die Bindungsenergie der Elektronen ($E_{z,n} \sim Z^2/n^2$) und damit die ihr klassisch zugeordnete Umlaufgeschwindigkeit $v = \alpha\ c\ Z/n$ (mit $\alpha \approx 1/137$ und Hauptquantenzahl n). Obwohl der hochrelativistische Fall $v \approx c$ wegen $Z < 137$ nicht erreicht wird, machen sich mit steigender Ladungszahl Z relativistische Effekte mehr und mehr bemerkbar. Hierzu gehört die zunehmende Feinstrukturaufspaltung (L-S Kopplung), das Auftreten von "verbotenen Linien" und die bereits diskutierten dielektronischen Satelliten. Unter verbotenen Linien verstehen wir hierbei zunächst im allgemeineren Sinne alle Übergänge, die bei schwacher L-S-Kopplung nicht auftreten. Das sind die höheren Multipolübergänge (insbesondere elektrische Quadrupolstrahlung und magnetische Dipolstrahlung) sowie Übergänge mit Spinflip ($\Delta S \neq 0$). Letztere werden gewöhnlich als *Interkombinationsübergänge* (x, y) bezeichnet, da sie, wie der Abb. 13.19 zu entnehmen ist, Übergänge mit unterschiedlicher Multiplizität (hier Triplett →Singulett) verbinden. Als *verbotene Übergänge* (z) im engeren Sinne bezeichnet man solche, bei denen der Bahndrehimpuls des angeregten Elektrons unverändert bleibt ($\Delta l = 0$). Der entsprechende obere Energiezustand ist beim Helium das $^3S_1$ metastabile Niveau. Beim Helium selbst werden weder die z- noch die x,y-Linien beobachtet. Sie treten jedoch schon beim heliumähnlichen Sauerstoff O^{+6} in Erscheinung. Von den drei Triplett-Singulett-Übergängen ist die Interkombinationslinie y die stärkste, da hierbei – wie bei elektrischen Dipolübergängen – die Änderung des Gesamtdrehimpulses $\Delta J = 1$ beträgt. Der Übergang x mit $\Delta J = 2$ ist ein magnetischer Quadrupolübergang. Schließlich wird die verbotene Linie z nur bei sehr starken relativistischen Effekten (relativist. magn. Dipol) sichtbar. Man beachte, daß ein Übergang $^3P_0$ - $^3S_0$ wegen des strengen Verbots $J = 0 \rightarrow, / \ J = 0$ (es steht kein Drehimpuls für ein zu emittierende Photon zur Verfügung) nur als Zwei-Photonenübergang auftritt. Zur Vervollständigung der Information dienen die in der Tabelle 13.1 angegebenen Übergangsraten für einige Elemente.

Ion	Resonant (**w**)	Interkomb. (**y**)	Interkomb. (**x**)	verboten (**z**)	Dielektr. Sat. (j) A_{auto}	A_{rad}
O^{+6} $\lambda = 2{,}16$ nm	$3{,}3\cdot10^{12}$	$9{,}5\cdot10^{8}$	$3{,}3\cdot10^{3}$	$1{,}0\cdot10^{3}$	-	-
Mg^{+9} $\lambda = 0{,}93$ nm	$2{,}3\cdot10^{13}$	$3{,}3\cdot10^{10}$	$1{,}6\cdot10^{7}$	$1{,}0\cdot10^{5}$	$1{,}9\cdot10^{14}$	$0{,}9\cdot10^{13}$
Fe^{+24} $\lambda = 0{,}86$ nm	$4{,}8\cdot10^{14}$	$4{,}3\cdot10^{13}$	$7{,}8\cdot10^{9}$	$2{,}4\cdot10^{8}$	$1{,}6\cdot10^{14}$	$2{,}2\cdot10^{14}$
	$\propto Z^4$	$\propto Z^9$	$\propto Z^8$	$\propto Z^{10}$		

Tab. 13.1: Übergangswahrscheinlichkeiten in s^{-1} von He-ähnlichen Ionen. In der letzten Zeile ist der Trend in Abhängigkeit von der Ladungszahl angegeben.

13.4 Stoßionisation und Coronagleichgewicht

13.4.1 ELEKTRONENSTOßIONISATION

Die von Bethe angegebene Formel (13.33) sollte nicht nur für Berechnung von Wirkungsquerschnitten für Anregung, sondern auch für Elektronenstoßionisation gültig sein, wenn hierin $U = E/\chi_{ion}$ gesetzt wird. Diesem Ansatz ist W. Lotz (Z. Phys., 216-241 (1967)) bei der Sichtung des damals vorliegenden Datenmaterial nachgegangen. Er fand, daß insbesondere der erste Term in Gl. (13.33), der das asymptotische Verhalten für $E \to \infty$ beschreibt, wichtig ist. Für Wasserstoff und Helium sollte der Wirkungsquerschnitt danach die Form

$$\sigma_{ion} = a\ \zeta\ \frac{\ln\frac{E}{\chi_{ion}}}{E\,\chi_{ion}} \tag{13.41}$$

haben. Hierin ist ζ die Zahl der verfügbaren Elektronen (also 1 für H und 2 für He) und a eine Konstante, die bei den neutralen Atomen den Wert $4{,}0\cdot10^{-14}$ cm^2 (eV)^2, bei den H- und He-ähnlichen Ionen den um 10% größeren Wert $4{,}4\cdot10^{-14}$ cm^2 (eV)^2 annimmt. Die Gl. (13.41) ist zwar in der Lage, σ_{ion} bei hohen Energien richtig zu beschreiben, doch liefert sie in der Nähe der Schwelle $E = \chi_{ion}$ erheblich zu große Werte. Gerade dieses Gebiet ist aber im Plasma von großer Bedeutung, da, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, die Elektronen des Maxwellschwanzes mit $E > \chi_{ion}$ bereits einen erheblichen Ionisierungsgrad herbeiführen können, falls $T_e/\chi_{ion} \approx, > 0{,}1$. Bei schwereren Elementen kommt hinzu, daß die Ionisation sowohl aus der äußeren wie auch aus den tieferen Schalen erfolgen kann. Haben diese die Ionisierungsenergien χ_1, χ_2... und die Elektronenzahlen ζ_1, ζ_2..., so läßt sich der gesamte Ionisierungswirkungsquerschnitt nach W. Lotz aus der Summe

$$\sigma_{ion} = \sum_{i=1}^{N} a_i\ \zeta_i\ \frac{\ln\frac{E}{\chi_i}}{E\,\chi_i}\left\{1 - b_i\, e^{-c_i\left(\frac{E}{\chi_i}-1\right)}\right\} \tag{13.42}$$

berechnen. Die hier auftretenden Koeffizienten a_i, b_i, c_i sind den Tabellenwerken von Lotz zu entnehmen. Maximal werden N = 3 Schalen berücksichtigt. Die in Gl. (13.42) angegebene *Lotzformel* vermeidet das Überschwingen im Schwellbereich und erreicht i.a. eine Genauigkeit von ±30%, doch ist sie physikalisch nicht begründbar. Es sind auch in verschiedenen Fällen erhebliche Abweichungen (bis Faktor 3) zu neueren Messungen gefunden worden. Trotzdem ist für viele überschlägige Betrachtungen eine einfache Formel von großem Nutzen. Diesem Umstand verdankt die Lotzformel nach wie vor ihre Bedeutung.

Für Wasserstoff und Helium (N = 1) geben wir die benötigten Koeffizienten in der Tabelle 13.2 an.

Element	a_1 (10^{-18} m^2 (eV)^2)	b_1	c_1	ζ_1	χ_1 (eV)
H	4,0	0,60	0,56	1	13,6
He	4,0	0,75	0,46	2	24,6
He+	4,4	0,38	0,60	1	54,4

Tabelle 13.2: Lotzkoeffizienten für Wasserstoff und Helium

Die Lotzformel ist auch geeignet, die Mittelung über eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung analytisch durchzuführen. Das Ergebnis für den hieraus hervorgehenden Ionisations-Ratenkoeffizienten lautet

$$S = 6{,}7 \cdot 10^5 T_e^{-3/2} \sum_{i=1}^{N} a_i \zeta_i \left\{ \frac{T_e}{\chi_i} E_1\left(\frac{\chi_i}{T_e}\right) - \frac{b_i e^{c_i}}{\frac{\chi_i}{T_e} + c_i} E_1\left(\frac{\chi_i}{T_e} + c_i\right) \right\} \left(m^3 s^{-1}\right) \qquad (13.43)$$

mit T_e in eV und und der schon bekannten Exponentialintegralfunktion $E_1(x)$.

13.4.2 CORONAGLEICHGEWICHTE

Mit den nun vorhandenen Gleichungen zur Rekombination und Ionisation können wir das in Kap. 2.3 diskutierte Corona-Ionisationsgleichgewicht dünner Plasmen explizit berechnen. Wir beschränken uns im folgenden auf den besonders wichtigen Fall des Wasserstoffs, wo lediglich die Strahlungsrekombination Gl. (13.31) bzw. (13.32) und die Stoßionisation nach Gl. (13.43) von Bedeutung sind. In der Abb. 13.20 sind die entsprechenden Ratenkoeffizienten α und S als Funktion der Temperatur dargestellt. Auffällig ist die im Vergleich zur Ionisation schwache Abhängigkeit der Rekombination von der Temperatur. Die beiden Kurven schneiden sich bei etwa T_e = 1,4 eV. Aus der stationären Bilanzgleichung $S\, n_e\, n_0 = \alpha\, n_e\, n_i$ ergibt sich, im Einklang mit der allgemeinen Lösung nach Gl. (2.12), daß für diese Temperatur die Dichten der neutralen Atome n_0 und der Protonen n_i gleich sind. Für den in Kap. 2.4 eingeführten *Ionisationsgrad*

$$X \equiv \frac{n_e}{n_e + n_0} \qquad (13.44)$$

erhält man mit $n_e = n_i$ die Beziehung $X = 1/(1+\alpha/S)$. Diese Funktion ist in der Abb. (13.21) gegen T_e aufgetragen. Demnach ist ein dünnes Wasserstoffplasma (etwa $n_e \leq 10^{20}$ m^3) bereits bei T_e = 2 eV vollständig ionisiert.

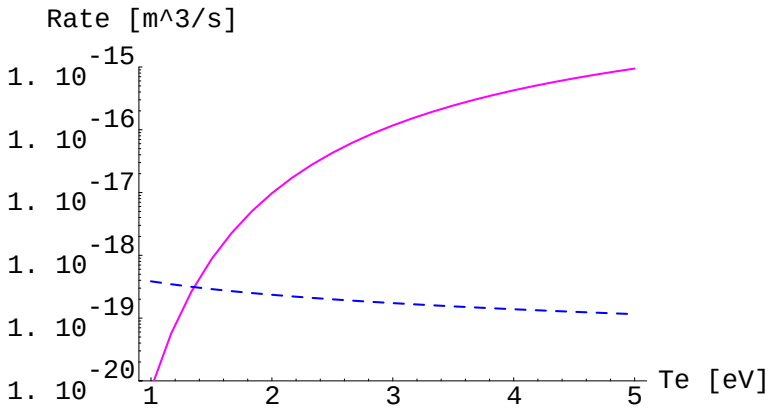


Abb. 13.20: Die Ratenkoeffizienten für Ionisation (voll) und Rekombination (gestrichelt) für Wasserstoff als Funktion der Elektronentemperatur.

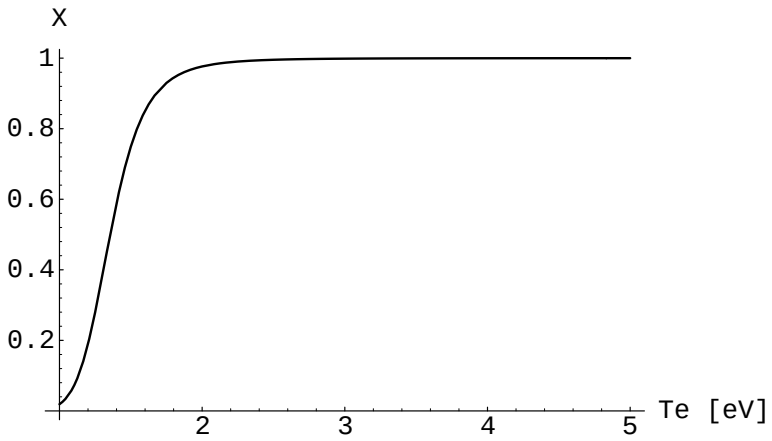


Abb. 13. 21: Ionisationsgrad des Wasserstoffs in der Corona-Näherung.

Die Abbildung 13.20 gestattet uns auch eine Abschätzung der charakteristischen Zeit, nach der sich das Ionisationsgleichgewicht einstellt. Es ist dies die kleinere der beiden Zeiten $\tau_{Rek}= 1/(\alpha\, n_e)$ und $\tau_{Ion}= 1/(S\, n_e)$. Kühlt sich nun beispielsweise ein zuvor vollständig ionisiertes Plasma rasch auf $T_e \approx 1$ eV ab, so ist die Rekombinationszeit maßgebend. Für eine Elektronendichte von 10^{20} m^{-3} erhalten wir die relativ lange Zeit von $\tau_{Rek} \approx 250$ ms. Der langsame Prozeß der Rekombination ist häufig auch beim Transport der verschiedenen Ionen in Plasmen mit starken Temperaturgradienten (z.B. quer zum Magnetfeld) von Bedeutung. Es kann so beim Diffusionsprozeß in Gebiete mit niedriger Temperatur zu Verschleppungen des Ionisationszustandes kommen, indem dort Teilchen in scheinbar zu hohen Ionisationszuständen angetroffen werden.

14 GLEICHGEWICHT UND PFIRSCH-SCHLÜTER-TRANSPORT IM TOKAMAK

14.1 Tokamakgleichgewicht

Die maßgebliche Gleichung für die Kraftbilanz

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \tag{14.1}$$

ist uns schon im Kapitel 6.3.2 begegnet. In toroidaler Geometrie ist diese Gleichung keineswegs einfach zu lösen, selbst wenn toroidale Symmetrie vorliegt wie im Tokamak. Zunächst ist wichtig festzustellen, daß die in Kap. 5.3 eingeführten *magnetischen Flächen* $\psi(R, z)$ = const. gleichzeitig Flächen konstanten Drucks $p = p(\psi)$ und konstanten *Poloidalstroms* $J = J(\psi)$ sind. Dies folgt sofort aus Gl. (14.1), da hiernach die Skalarprodukte $\mathbf{B}\cdot\nabla p$ und $\mathbf{j}\cdot\nabla p$ verschwinden. Wie in der Abb. 22 (Teil I) veranschaulicht wurde, sind die Funktionen ψ diejenigen Flächen, auf denen der poloidale magnetische Fluß $\psi = \int \mathbf{B}_\theta \cdot d\,\mathbf{S}/2\pi$ konstant ist. In der gleichen Weise war auch der poloidale Strom $J = \int \mathbf{j}_\theta \cdot d\,\mathbf{S}/2\pi$ definiert worden.

Mit den beiden Funktionen ψ und J läßt sich zunächst das Magnetfeld in der besonders angepaßten Form

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_\theta = \mu_0 J \nabla\varphi + \nabla\varphi \times \nabla\psi} \tag{14.2}$$

schreiben, wie wir das schon im Kapitel 5.3.2 getan haben. Hierbei ist $\nabla\varphi = \mathbf{e}_\varphi/R$ ein Vektor in toroidaler Richtung, da die Flächen φ = const. Ebenen darstellen, die die Torusachse als Drehachse aufweisen. Für den im toroidalen Magnetfeld auftauchenden poloidalen Strom gilt damit offensichtlich $J(\psi) = B_\varphi R/\mu_o$; bis auf Feinheiten der Größenordnung β (d.h. einige %) ist diese Funktion bereits durch die äußeren Toroidalfeldspulen zu $J_0 = B_{\varphi 0} R_0/\mu_0$ festgelegt (s. Abb. 11-13).

Die Stromdichte ergibt sich nun aus der Maxwellgleichung rot $\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j}$. Für die Berechnung verwenden wir die allgemeinen Ausdrücke der Vektoranalysis für beliebige Vektorfelder $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(f\vec{A}) &= f\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \nabla f \times \vec{A} \\ \mathrm{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \end{aligned} . \tag{14.3}$$

Aus der φ-Komponente des Magnetfelds erhalten wir damit zunächst

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}_\varphi = \mu_0\,\mathrm{rot}(J\nabla\varphi) = \mu_0 \nabla J \times \nabla\varphi . \tag{14.4}$$

Die Poloidalkomponente ergibt sich in Zylinderkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{B}_\theta &= \mathrm{rot}(\nabla\varphi\times\nabla\psi) = \nabla\varphi\,\mathrm{div}(\nabla\psi) - \nabla\psi\,\mathrm{div}(\nabla\varphi) + (\nabla\psi\cdot\nabla)\nabla\varphi - (\nabla\varphi\cdot\nabla)\nabla\psi \\ &= \nabla\varphi\nabla^2\psi - 0 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\vec{e}_\varphi}{R}\right) - \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{R\partial\varphi}\right)\nabla\psi \\ &= \nabla\varphi\nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial R}\frac{\vec{e}_\varphi}{R^2} - \frac{\partial\vec{e}_R}{R^2\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial R} = \left(\nabla^2\psi - \frac{2}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)\nabla\varphi \end{aligned} ,\tag{14.5}$$

so daß wir schließlich für die Gesamtstromdichte den zu Gl. (14.2) analogen Ausdruck

$$\boxed{\vec{j} = \frac{L[\psi]}{\mu_0}\nabla\varphi - \nabla\varphi\times\nabla J} \qquad (14.6)$$

erhalten, worin

$$L[\psi] := \nabla^2\psi - \frac{2}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} = \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = R\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = R^2\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\psi}{R^2}\right) \qquad (14.7)$$

einen modifizierten Laplace-Operator darstellt.

Schließlich kann man in der poloidalen Stromdichte noch ∇J durch $\nabla\psi \cdot dJ/d\psi$ ersetzen, so daß — wie gefordert — die Vektoren $\mathbf{B}_\theta$ und $\mathbf{j}_\theta$ Tangentenvektoren an die gleiche Fläche sind. Die Darstellungen für **B** und **j** erfüllen die notwendigen Bedingungen div **B** = div **j** = 0 und tragen darüber hinaus der toroidalen Symmetrie ($\partial/\partial\varphi = 0$) voll Rechnung. Allerdings wäre es für die Erfüllung von div **B** = 0 nicht notwendig gewesen $J = J(\psi)$ zu fordern – jede vom toroidalen Winkel unabhängige Funktion $J = J(R,z)$ hätte dieser Bedingung entsprochen. Wir sehen jedoch aus der Beziehung (14.6), daß dann ein Strom senkrecht zur magnetischen Fläche fließen kann, so daß die elektromagnetische jxB-Kraft nicht senkrecht auf ihrer Oberfläche stehen würde. In der Konsequenz kann eine solche Kraft nicht durch eine reine Druckkraft vom Typ ∇p bilanziert werden, sondern verlangt zusätzliche Scherkräfte wie sie beispielsweise durch die Viskosität ($\nabla p \rightarrow$ div **p**) hervorgerufen werden.

Die B- und j-Linien und das von ihnen auf einer (irrationalen) magnetischen Fläche gebildetete Netz ist in der Abb.14.1 veranschaulicht.

Abb.14.1: Das Netz der B- und j-Linien. Bei irrationalem q schließt sich eine B-Feldlinie nicht, sondern spannt eine magnetische Fläche auf (links). Ähnlich verhalten sich die Linien der Stromdichte j, falls $q_j = r\, j_\varphi / R\, j_\theta \neq m/n$ mit n, m ganzzahlig. Beide zusammen bilden auf der magnetischen Fläche ein Netz (rechts), dessen Maschenwinkel sich mit zunehmendem Druck aufweiten.

Setzt man die obigen Ausdrücke für **B** und **j** in die Gleichgewichtsbeziehung (14.1) ein, so ergibt sich mit der Abkürzung $dJ/d\psi = J'$

$$\begin{aligned}\vec{j}\times\vec{B} &= \left(L[\psi]\nabla\varphi/\mu_0 - J'\nabla\varphi\times\nabla\psi\right)\times\left(\mu_0 J\nabla\varphi + \nabla\varphi\times\nabla\psi\right)\\ &= \left(L[\psi]/\mu_0 + \mu_0 JJ'\right)\nabla\varphi\times\left(\nabla\varphi\times\nabla\psi\right) = -\left(L[\psi]/\mu_0 + \mu_0 JJ'\right)|\nabla\varphi|^2\nabla\psi \qquad (14.8)\\ &= -\left(L[\psi]/\mu_0 + \mu_0 JJ'\right)\frac{\nabla\psi}{R^2}\end{aligned}$$

und nach Gleichsetzen mit $\nabla p = p'\,\nabla\psi$ die *Grad-Shafranov-Lüst-Schlüter-Gleichung*

$$\boxed{j_\varphi = \frac{L[\psi]}{\mu_0 R} = -R\frac{dp}{d\psi} - \mu_0\frac{J}{R}\frac{dJ}{d\psi}}. \qquad (14.9)$$

Hier haben wir die toroidale Stromdichte j_φ aus der Gl. (14.6) entnommen; sie ist bis auf den Faktor $1/\mu_0$ R mit dem linearen Operator $L[\psi]$ nach Gl. (14.7) identisch. Der Form (14.9) entnehmen wir, daß im allgemeinen weder j_φ noch R j_φ auf der magnetischen Fläche konstant ist, wie das für R B_φ der Fall ist. Der Grund hierfür liegt darin, daß als Ergebnis von rot**B** sich anstelle von J die Funktion $L[\psi]$ ergibt, die nur im druckfreien Fall ($p' = 0$) wiederum eine Funktion von ψ ist.

Für vorgegebene Funktionen des Drucks $p(\psi)$ und des poloidalen Plasmastroms $J(\psi)$ ist die Grad-Shafranov-Schlüter-Gleichung zunächst eine nicht-lineare, partielle Differentialgleichung für die Funktionen $\psi(R, z)$. Legt man am Rand die Kontur $\psi_{Rand} = \psi_{Rand}(R,z)$ fest, so beschreibt die Gl. (14.9) wie sich diese Flußflächen nach innen hin verformen. Im besonders einfachen Spezialfall $dJ^2/d\psi$ = const. und $dp/d\psi$ = const., ergibt sich die von *Solowjow* angegebe analytische Lösung mit vier freien geometrischen Parametern. Wir werden im folgenden realistische Näherungslösungen für die kreisförmige Geometrie behandeln. Im allgemeinen ist man aber auf numerische Verfahren bei der Lösung dieser Gleichung angewiesen.

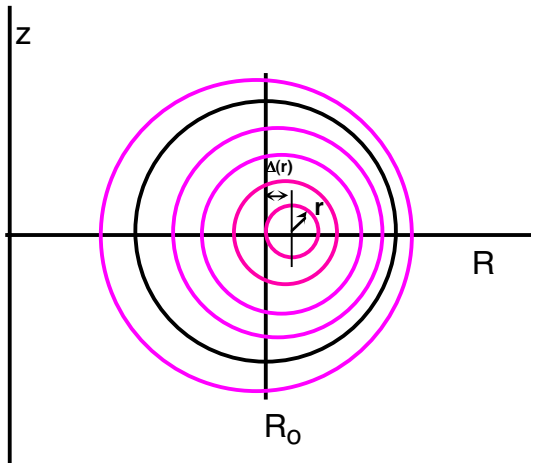


Abb. 14.2: Shafranov-Verschiebung der magnetischen Flächen.

14.1.1 NÄHERUNGSLÖSUNGEN BEI GROßEM ASPEKTVERHÄLTNIS

Bei sehr großem Aspektverhältnis ($R_0/a >> 1$) läßt sich bei kreisförmiger Randkontur ($\psi_{rand}(R, z) = (R - R_0)^2 + z^2 = a^2$) eine Näherungslösung angeben. Die Flächen ψ = const. sind in diesem Falle wiederum kreisförmige Toren mit kleinem Radius r, deren Zentren nach außen um den Betrag $\Delta = \Delta(r)$ verschoben sind. Es ist also $\psi = \psi(r)$ mit

$$r^2 = [R - R_0 - \Delta(r)]^2 + z^2 . \qquad (14.10)$$

Die nach *Shafranov* benannte Verschiebungsfunktion $\Delta(r)$ hängt vom Druck- und der toroidalen Stromdichteprofil ab und fällt — wie aus der Abb. 14.2 ersichtlich — vom Maximalwert $\Delta(0)$ monoton zum Rande hin ab und wird für $r > a$ negativ. Nur für die einfachsten Verschiebungs -Funktionen (z.B $\Delta = \Delta_0 (1-r^2/a^2)$) läßt sich die Gleichung (14.10) explizit nach $r = r(R,z)$ auflösen. Den Gradienten ∇r (eine dimensionslose Größe) können wir jedoch auch für den allgemeinen Fall aus der Gleichung (14.10) ableiten

$$\nabla r = \frac{(R - R_0 - \Delta)\vec{e}_R + z\vec{e}_z}{r + (R - R_0 - \Delta)\Delta'} \qquad (14.11)$$

mit $\Delta' = d\Delta/dr$. Sein Betrag ergibt sich zu

$$|\nabla r| = \frac{1}{1 + \Delta'(R - R_0 - \Delta)/r} = \frac{1}{1 + \Delta' \cos\theta^*} . \qquad (14.12)$$

Mit $\theta^* = \arccos(x^*/r)$ haben wir einen poloidalen Winkel im verschobenen Bezugssystem eingeführt. Ebenso ist $x^* = R - R_0 - \Delta = x - \Delta$ der Koordinatenabstand von diesem Zentrum. Für kleine Verschiebungen fallen die gesternten Größen natürlich mit den Variablen im ortsfesten Polarkoordinaten-System zusammen: es gilt $\cos\theta^* = \cos\theta - (\Delta/r) \approx \cos\theta$. Mit dem Ausdruck (14.12) sind wir nun in der Lage, das Poloidalfeld anzugeben

$$RB_\theta = |\nabla\psi| = \frac{d\psi}{dr}|\nabla r| = \frac{\psi'(r)}{1+\Delta'(r)\cos\theta^*}. \qquad (14.13)$$

Im Gegensatz zum Toroidalfeld, für das R $B_\varphi = \mu_0$ J(r) gilt, ist R $B_\theta$nicht konstant auf den magnetischen Flächen, sondern weist noch eine Variation mit dem poloidalen Winkel auf. Es ergibt sich aus (14.13) die Näherung

$$B_\theta \approx \frac{d\psi}{dr}\left[1-\left(\frac{r}{R_0}+\Delta'(r)\right)\cos\theta\right]. \qquad (14.14)$$

Das Konzept der verschobenen Kreise läßt sich auch auf andere Konturen übertragen. Grundsätzlich benötigt man einen geometrischen Parameter V (Index, im Englischen als *label* bezeichnet), der die Flächen gemäß $\psi = \psi(V)$ sortiert. Als solcher kann beispielsweise das von den magnetischen Flächen eingeschlossene Volumen dienen. Wegen der toroidalen Symmetrie kann man aber ebenso auch ihre polodale Querschnitfsfläche f bzw. den mittleren Radius $\bar{r} := (f/\pi)^{1/2}$ verwenden, so daß die Verschiebung eine Funktion dieser Variablen wird $\Delta = \Delta(\bar{r})$. Als Verschiebung wird dann der Abstand des Schwerpunktes der Fläche vom geometrischen Zentrum definiert $\Delta := R_S - R_0$.

14.1.2 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN FLÜSSEN UND STRÖMEN

Als nächstes wollen wir, ausgehend von der gefunden Beziehung

$$j_\varphi = \frac{R}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\psi}{R^2}\right), \qquad (14.15)$$

den toroidalen Strom berechnen. Dabei legt die Struktur des obigen Ausdrucks es nahe, die Integration über den poloidalen Querschnitt in ein Volumenintegral umzuwandeln, um dann, mit Hilfe des Gauß´schen Satzes, ein Integral über die Torusoberfläche zu erhalten. Der erste Schritt gelingt durch eine formale Integration über den toroidalen Winkel

$$I = \int_F j_\varphi df = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_F \frac{j_\varphi df}{R} R\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_V \frac{j_\varphi}{R}dV = \frac{1}{2\pi\mu_0}\int_V \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\psi}{R^2}\right)dV. \qquad (14.16)$$

Der Gauß´sche Satz liefert nun

$$I = \frac{1}{2\pi\mu_0}\int_S \frac{|\nabla\psi|}{R^2}dS = \frac{1}{2\pi\mu_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\nabla\psi|}{R^2}rR\,d\theta^*\,d\varphi = \frac{r}{\mu_0}\frac{d\psi}{dr}\int_0^{2\pi}\frac{|\nabla r|}{R}d\theta^*. \qquad (14.17)$$

Der vom Radius abhängige Toroidalstrom berechnet sich also aus

$$\boxed{I(r) = \frac{2\pi r}{\mu_0 R_0}\frac{d\psi}{dr}\left\langle\frac{R_0^2\,|\nabla r|}{R^2}\right\rangle}, \qquad (14.18)$$

wobei der durch die geschweifte Klammer gekennzeichnete Mittelwert über die Flußfläche entsprechend Gl. (14.29) bzw. (14.30) definiert ist. Für kreisförmige Flächen ergibt sich

$$\left\langle \frac{R_0^2\,|\nabla r|}{R^2} \right\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R_0\,|\nabla r|}{R}\,d\theta^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta^*}{(1+\Delta'\cos\theta^*)(1+\frac{\Delta}{R_0}+\frac{r}{R_0}\cos\theta^*)}$$
$$= \frac{\dfrac{\frac{r}{R_0}}{\sqrt{(1+\frac{\Delta}{R_0})^2-(\frac{r}{R_0})^2}} - \dfrac{\Delta'}{\sqrt{1+(\Delta')^2}}}{\frac{r}{R_0}-(1+\frac{\Delta}{R_0})\Delta'} \approx 1-\tfrac{\Delta}{R_0}+\tfrac{1}{2}\Delta'(\Delta'+\tfrac{r}{R_0}) \quad . \qquad (14.19)$$

Den toroidalen magnetischen Fluß Φ erhalten wir direkt als Integral des Poloidalstroms

$$\Phi(r) = \int_F B_\varphi df = \int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 J(r')}{R}\frac{dr'}{|\nabla r|}r'd\theta^* = \frac{2\pi\mu_0}{R_0}\left\langle \frac{R_0^2}{R^2\,|\nabla r|}\right\rangle \int_0^r J(r')r'dr' \,. \quad (14.20)$$

Hier ist zu beachten, daß das Flächenelement gemäß df = (h_r dr) ($h_{\theta *}$dθ*) mit den Skalierungsfaktoren h_r= 1/|∇r| und $h_{\Theta *}$ = 1/|$\nabla\theta$*| = r zu berechnen ist. Anschaulich beschreibt h_r = 1+Δ' cosθ* die Veränderung des Abstandes zwischen zwei benachbarten Kreisen als Funktion des Winkels. Wir können Gl. (14.20) auch in der zu Gl. (14.18) analogen Form schreiben

$$\boxed{J(r) = \frac{R_0}{2\pi\mu_0 r}\frac{d\Phi}{dr}\left\langle \frac{R_0^2}{R^2\,|\nabla r|}\right\rangle^{-1}}, \qquad (14.21)$$

wobei der von r abhängige Mittelwert wegen

$$\left\langle \frac{R_0^2}{R^2\,|\nabla r|}\right\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\Delta'(\cos\theta^*)}{(1+\Delta/R_0+r/R_0\cos\theta^*)}\frac{d\theta^*}{2\pi} \approx \left(1-\frac{\Delta}{R_0}-\frac{\Delta' r}{2R_0}\right) \qquad (14.22)$$

wieder nahe bei 1 liegt[33].

Der im vorausgehenden eingeschlagene Weg, die Variablen in drei Kategorien einzuteilen 1) Flächenkonstante, 2) Flächenmittelwerte und 3) Ortsvariable bzw. geometrischer Parameter (r oder allgemein $\bar{r}$) ist offensichtlich sehr erfolgreich und wird uns auch im folgenden gute Dienste leisten.

14.1.3 TOROIDALE UND POLOIDALE STROMDICHTEN

Mit den Gleichungen (14.18) und (14.21) haben wir zwei wichtige Verknüpfungen zwischen den Strömen und den magnetische Flüssen abgeleitet. Damit ist aber die eigentliche Aufgabe, die Lösung der Grad-Schafranov-Gleichung (14.9), noch nicht geleistet. Das Eigentümliche an dieser Gleichung ist die unterschiedliche Abhängigkeit vom großen Radius der beiden Terme auf der rechten Seite. Eine Abhängigkeit vom Typ $j_\varphi \sim 1/R$ würde man erwarten, da das induzierte E_φ–Feld ebenfalls diese Proportionalität aufweist. Wie aber kann der zum Druckgradienten proportionale Term eine Abhängigkeit der Art $j_\varphi \sim R$ erhalten? Die Erklärung hierfür liegt in den von der Divergenzfreiheit erzwungenen parallelen Strömen. Im Plasma selbst sind die Richtungen “parallel” und “senkrecht” zu B ausgezeichnet, die Tokamak-Geometrie dagegen zeichnet die “toroidale” und “poloidale” Richtung aus.

Toroidale Stromdichte und Mittelungen über die Flußfläche

Es gilt nun zunächst die toroidale Stromdichte aus ihren senkrechten und parallelen Anteilen zusammenzusetzen:

---

[33] Man beachte, daß die poloidalen Flüsse und Ströme normierte Größen sind entsprechend $\psi = \psi_{real}/2\pi$ und $J = J_{real}/2\pi$. Im Gegensatz dazu sind die toroidalen Flüsse und Ströme Φ und I die realen Größen.

$$j_\varphi = (\vec{j}_{||} + \vec{j}_\perp)\cdot\vec{e}_\varphi = (j_{||}\frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{B}\times\nabla p}{B^2})\cdot\vec{e}_\varphi, \qquad (14.23)$$

wobei die Senkrechtstromdichte aus der Gleichgewichtsbeziehung (14.1) hervorgeht. Im Kreuzprodukt mit dem Druckgradienten kommt nur das Poloidalfeld vor, das sich aus (14.2) ablesen läßt. Mit $\mathbf{e}_\varphi = R\,\nabla\varphi$ erhalten wir so

$$j_\varphi = j_{||}\frac{B_\varphi}{B} + R\frac{(\nabla\varphi\times\nabla\psi)\times\nabla p}{B^2}.\nabla\varphi = j_{||}\frac{B_\varphi}{B} - \frac{dp}{d\psi}\frac{R\,|\nabla\psi|^2|\nabla\varphi|^2}{B^2} = j_{||}\frac{B_\varphi}{B} - \frac{dp}{d\psi}\frac{RB_\theta^2}{B^2} \qquad (14.24)$$

und schließlich wegen $B^2 = B_\varphi^{\,2} + B_\theta^{\,2}$

$$j_\varphi = -R\frac{dp}{d\psi} + \frac{dp}{d\psi}\frac{RB_\varphi^2}{B^2} + j_{||}\frac{B_\varphi}{B}, \qquad (14.25)$$

worin der erste Term schon die richtige Form hat. Als nächstes benötigen wir die parallele Stromdichte

$$j_{||} = \sigma_{||}E_{||} = \sigma_{||}\vec{E}\cdot\vec{B}/B = \sigma_{||}(E_\varphi\frac{B_\varphi}{B} + E_\theta\frac{B_\theta}{B}) = \frac{\sigma_{||}}{B}(\frac{U}{2\pi R}B_\varphi + E_\theta B_\theta). \qquad (14.26)$$

Sie besteht aus zwei Termen, den von der Umfangsspannung (U) induzierten Teil und den vom poloidalen E-Feld getrieben Anteil. Einsetzen in (14.25) liefert

$$j_\varphi = -R\frac{dp}{d\psi} + \left(R\frac{dp}{d\psi}\frac{B_\varphi^2}{B^2} + \sigma_{||}\frac{U}{2\pi R}\frac{B_\varphi^2}{B^2} + \sigma_{||}E_\theta\frac{B_\theta B_\varphi}{B^2}\right) = -R\frac{dp}{d\psi} + \frac{F(\psi)}{R}. \qquad (14.27)$$

Der Vergleich mit (14.9) zeigt uns, daß der Klammerausdruck von der Form (…) = $F(\psi)/R$ sein muß, wobei wir vorübergehend die Abkürzung $F = -\mu_0\,J\,J'$ verwenden. Lösen wir diese Beziehung nach dem Produkt $E_\theta\,B_\theta$ auf, so erhalten wir

$$-\vec{B}\cdot\nabla\phi = B_\theta E_\theta = \frac{F}{\sigma_{||}}\frac{B^2}{\mu_0 J} - \frac{1}{\sigma_{||}}\frac{dp}{d\psi}\mu_0 J - \frac{U}{2\pi}\frac{\mu_0 J}{R^2}, \qquad (14.28)$$

wobei wir $RB_\varphi = \mu_0 J$ eingesetzt und gleichzeitigt ausgenutzt haben, daß das Feld E_θ durch Ladungstrennung hervorgerufen wird, sich somit als Gradient eines skalaren Potentials $\phi = \phi(R,z)$ schreiben läßt. Führen wir nun eine Mittelung über die magnetische Fläche durch, so verschwindet die linke Seite. Das sieht man wie folgt ein:

Eine Mittelung über die magnetische Fläche ist bei skalaren physikalischen Größen wie Dichten oder Duck (Teilchenzahl bzw. Energie pro Volumeneinheit) eigentlich immer als Grenzwert einer Volumenmittelung im Sinne von

$$\langle A\rangle = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} A\,dV \qquad (14.29)$$

zu betrachten. Hängt allerdings die Größe A nicht vom toroidalen Winkel ab, wie das im Tokamak grundsätzlich der Fall ist, so geht die Mittelung in ein Integral über die poloidale Kontur über

$$\langle A\rangle = \oint A\frac{R}{R_0}dl \,/\, \oint dl = \int_0^{2\pi} A(1+\varepsilon\cos\theta)\frac{d\theta}{2\pi}. \qquad (14.30)$$

Es gilt also insbesondere $\langle R_0/R\rangle = 1$, ebenso ist natürlich eine Konstante mit ihrem Mittelwert identisch $\langle c\rangle = c$. Für Skalarprodukte der Form $\mathbf{B}\cdot\nabla\chi$ ist aber die Mittelungsvorschrift (14.29) besser geeignet. In diesem Fall kann man, wegen div $\mathbf{B} = 0$, unter Verwendung des Gauß´schen Satzes den Grenzwert des Volumenmittels in zwei Integrale über die innere und äußere Oberfäche (mit dem mittleren Abstand $\Delta\bar{r}$) verwandeln

$$\left\langle \vec{B}\cdot\nabla\chi\right\rangle = \left\langle \nabla\cdot(\chi\vec{B})\right\rangle = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\nabla\cdot(\chi\vec{B})dV = \frac{\lim\limits_{\Delta\bar{r}\to 0}}{S\Delta\bar{r}}\left(\int_{S(1+\Delta\bar{r})}\chi\vec{B}\cdot d\vec{S} - \int_S \chi\vec{B}\cdot d\vec{S}\right) = 0. \qquad (14.31)$$

Da **B** immer Tangentenvektor an die magnetische Fläche ist, verschwindet jedes der beiden Integrale. Man bezeichnet daher den Flächenmittelungsprozeß <> als *Annihiltations-Operator* für Terme vom Typ $\mathbf{B}\cdot\nabla\chi$.

Angewandt auf (14.28) ermöglicht uns die Flächenmittelung (als Annihilations-Operation), das unbekannte E_θ-Feld zu eliminieren, und wir erhalten mit $\sigma_{||} = \sigma_{||}(T_e) \to \sigma_{||}(\psi)$

$$0 = \frac{F}{\sigma_{||}}\frac{\langle B^2\rangle}{\mu_0 J} - \frac{p'}{\sigma_{||}}\mu_0 J - \frac{U}{2\pi}\mu_0 J\left\langle\frac{1}{R^2}\right\rangle, \qquad (14.32)$$

Diese Beziehung lösen wir nach F auf und setzen das Ergebnis in Gl.(14.27) ein. Es ergibt sich der folgende Ausdruck für die toroidale Stromdichte

$$\boxed{j_\varphi = -R\frac{dp}{d\psi} + \frac{\mu_0^2 J^2}{R\langle B^2\rangle}\left(\frac{dp}{d\psi} + \frac{\sigma_{||}U}{2\pi}\left\langle\frac{1}{R^2}\right\rangle\right)}. \qquad (14.33)$$

Bilden wir hiervon wiederum den Mittelwert

$$\langle j_\varphi\rangle = \left(\frac{\mu_0^2 J^2}{R_0^2\langle B^2\rangle} - \left\langle\frac{R}{R_0}\right\rangle\right)R_0\frac{dp}{d\psi} + \left(\frac{\mu_0^2 J^2}{\langle B^2\rangle}\left\langle\frac{1}{R^2}\right\rangle\right)\frac{\sigma_{||}U}{2\pi R_0}, \qquad (14.34)$$

so tritt in der ersten Klammer ein dimensionsloser Faktor der Größenordnung $-(B_\theta/B_\varphi)^2 - \varepsilon^2/2 \approx -\varepsilon^2(1/q^2+1/2)$ auf. Er besagt, daß auch der Druckgradient einen zwar sehr kleinen, aber nicht verschwindenden Netto-Toroidalstrom treiben kann. Der enstrechende Strom wird als *klassischer Bootstrap-Strom* (hervorgehend aus den Gleichgewichtsbeziehungen unter Vernachlssigung der Viskositätskräfte) bezeichnet. Der Wert der zweiten Klammer ist dagegen von der Größenordnung $(B_\varphi/B)^2 \approx 1$. Der Netto-Toroidalstrom wird daher, wie erwartet, fast gänzlich von der Umfangsspannung getrieben. Dies wollen wir später benutzen, um die Umfangsspannung durch die Änderung des Stromes auszudrücken. Es gilt ja die Beziehung

$$\langle j_\varphi\rangle = \frac{dI}{df} = \frac{dI}{\langle 1/|\nabla r|\rangle 2\pi r dr} \approx \frac{\sigma_{||}U}{2\pi R_0}, \qquad (14.35)$$

wobei der Ausdruck für das Flächenelement (df) bereits im Zusammenhang mit der Ableitung von Gl. (14.21) abgeleitet wurde.

Aus dem Vergleich von (14.33) mit Gl. (14.9) erhalten wir nun weiterhin die wichtige Beziehung für den Poloidalstrom

$$\frac{dJ}{d\psi} = -\frac{\mu_0 J}{\langle B^2 \rangle}\left(\frac{dp}{d\psi} + \frac{\sigma_{||} U}{2\pi}\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle\right), \tag{14.36}$$

die wir auf die Form

$$\int_{J_{Rand}}^{J} d\ln J = -\frac{\mu_0}{\langle B^2 \rangle}\int_{p_{Rand}}^{p} dp - \int_{\psi_{Rand}}^{\psi} \frac{\mu_0}{\langle B^2 \rangle}\left\langle \frac{R_0^2}{R^2} \right\rangle \frac{\sigma_{||} U}{2\pi R_0^2} d\psi' = -\frac{\mu_0 p}{\langle B^2 \rangle} - \int_{\psi_{Rand}}^{\psi} \frac{\mu_0}{\langle B^2 \rangle}\left\langle \frac{R_0^2}{R^2} \right\rangle \frac{\langle j_\varphi \rangle}{R_0} d\psi' \tag{14.37}$$

bringen. Vernachlässigt man die schwache Variation der hierin auftretenden Mittelwerte über den Plasmaquerschnitt und drückt den Term der rechten Seite durch Gl. (14.35) aus, so erhält man mit $p_{Rand} = 0$

$$\frac{J(r)}{J_{Rand}} \approx \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{p(r)}{B_0^2/2\mu_0} - \frac{\mu_0}{B_0^2 R_0}\int_{\psi_{Rand}}^{\psi} \langle j_\varphi \rangle d\psi\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{p(r)}{B_0^2/2\mu_0} - \frac{\mu_0}{B_0^2 R_0}\int_a^r \frac{dr}{2\pi r}\frac{dI}{dr}\frac{d\psi}{dr}\right] \tag{14.38}$$

Den Integranden formen wir noch mit Hilfe von Gl. (11.19) unter Vernachlässigung von Termen 2. Ordnung in Δ´ wie folgt um

$$\frac{\mu_0}{2\pi r R_0}\frac{dI}{dr}\frac{d\psi}{dr} = \frac{\mu_0^2}{(2\pi r)^2} I \frac{dI}{dr} = \frac{\mu_0^2}{2(2\pi r)^2}\frac{dI^2}{dr} = \frac{1}{2r^2}\frac{d(r^2 B_\theta^2)}{dr} = \frac{1}{2}\frac{dB_\theta^2}{dr} + \frac{B_\theta^2}{r}. \tag{14.39}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{J(r)}{J_a} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{p(r)}{B_0^2/2\mu_0} + \frac{1}{2}\frac{B_\theta^2(r) - B_\theta^2(a)}{B_0^2} + \frac{1}{B_0^2}\int_r^a \frac{B_\theta^2}{r} dr. \tag{14.40}$$

Wegen der Kleinheit der Argumente ($\beta = p/(B^2/2\mu_0)$ ebenso wie $(B_\theta/B)^2$ im Prozentbereich) haben wir die Exponentialfunktion nur bis zu Termen erster Ordung entwickelt.

Poloidale Stromdichte und Poloidalstrom

Ganz analog wie wir zuvor die Toroidalkomponente der Stromdichte bestimmt haben, wollen wir nun die Poloidalkomponente ableiten. Wir haben diesmal

$$\begin{aligned} j_\theta &= (\vec{j}_{||} + \vec{j}_\perp)\cdot\vec{e}_\theta = (j_{||}\frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{B}\times\nabla p}{B^2})\cdot\vec{e}_\theta = j_{||}\frac{B_\theta}{B} + \frac{(\vec{e}_\theta\times\vec{B})\cdot\nabla p}{B^2} = \\ &= j_{||}\frac{B_\theta}{B} + \frac{|\nabla p| B_\varphi}{B^2} = j_{||}\frac{B_\theta}{B} + \frac{dp}{d\psi}\frac{|\nabla\psi| B_\varphi}{B^2} = j_{||}\frac{B_\theta}{B} + \frac{dp}{d\psi}\frac{R B_\theta B_\varphi}{B^2}, \end{aligned} \tag{14.41}$$

wobei wir einen radialen Einheitsvektor senkrecht zu den magnetischen Flächen $\mathbf{e}_r = \nabla p/|\nabla p|$ eingeführt haben. $\mathbf{e}_r$ definiert auch den polidalen Einheitsvektor gemäß $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$, so daß die Koordinaten (r, θ, φ) ein Rechtssystem bilden. Für $j_{||}$ setzen wir nun wieder die Beziehung (14.26) und erhalten

$$j_\theta = \left(B_\varphi R\frac{dp}{d\psi} + \sigma_{||}\left(\frac{U}{2\pi R}B_\varphi + E_\theta B_\theta\right)\right)\frac{B_\theta}{B^2}. \tag{14.42}$$

Wegen $dp/d\psi < 0$ nimmt daher mit steigendem Druckgradienten die Verschraubung der j-Linien zunächst ab, um schließlich nach einem Nulldurchgang von j_θ den Schraubensinn zu ändern. Aus anfänglich zusammenfallenden Rechtsschrauben der B- und j-Linien (falls U und B_φ gleichsinning, sonst Linksschrauben) wird mit steigendem Druck aus den j-Linien eine Linksschraube, während die B-Linien nahezu unverändert bleiben. Diese Überlegung ist jedoch nur im Flächenmittel richtig. Setzen wir nämlich den später in Gl. (14.84) angegeben Ausdruck für $E_\theta B_\theta \approx 2q\,(dp/dr)\cos\theta/\sigma_{||}$ in die exakte Beziehung (14.42) ein, so ergibt sich

$$j_\theta = \frac{(1-2\varepsilon\cos\theta)}{B}\frac{dp}{dr} + \sigma_{||}\frac{U}{2\pi R}\frac{\varepsilon}{q} \quad . \qquad (14.43)$$

also eine schwache Modulation der Helix der j-Linien. Hierbei haben wir noch von den Relationen $dp/d\psi = (dp/dr)/(d\psi/dr) = (dp/dr)/(RB_\theta)$ sowie $B_\theta/B_\varphi = \varepsilon / q$ Gebrauch gemacht.

Shafranovs Beziehung für das Vertikalfeld

Während sich im Inneren des Plasmas die notwendigen Stromverteilungen und damit die Magnetfelder von selbst so einstellen, daß das Gleichgewicht erfüllt ist, kann dies am Plasmarand nur geschehen, wenn man es in ein sehr gut leitendes Gefäß einsperrt, so daß die notwendigen Spiegelströme in diesem fließen können. Deratige Konfigurationen mit Kupferschalen, die zumindest für einige 10 ms das Gleichgewicht aufrechterhalten können, sind früher häufig verwendet worden. Man bevorzugt heute jedoch einen freien Rand, bei dem zur Herstellung des Gleichgewichts ein vertikales Magnetfeld der richtigen Stärke überlagert wird. Es muß das vom toroidalen Plasmastrom herrührende Magnetfeld, das zur Torusinnenseite hin zunimmt, in der Weise korrigieren, daß sich in Näherung am Plasmarand das Poloidalfeld entsprechend Gl (14.34) einstellt. Shafranov[34] hat die entsprechenden Flußfunktionen für ein Plasma mit Radius a in der Näherung $a << R_0$ berechnet. Dabei ersetzte er zunächst das Plasma durch einen stromführenden supraleitenden Torus. An dessen Oberfäche fließen Ströme, die die senkrechten Komponenten des Magnetfeldes unterdrücken und sie daher zu einer Flußfunktion werden lassen. Es zeigt sich, daß die sich ergebenden Magnetfelder (und ebenso die Stromdichte) auf der Innenseite des Torus größer als auf der äußeren sind. Die hieraus resultierenden magnetischen Druckkräfte $B^2/2\mu_0$ trachten den Ring aufzuweiten. Bei einem Plasma, das im Gegensatz zum Supraleiter keine Dehnungskräfte aufnehmen kann, muß sowohl diese Kraft (hoop-force) als auch die vom Plasmadruck erzeugte Nettokraft durch ein äußeres Magnetfeld kompensiert werden. Für den Bereich außerhalb des Plasmas ($r \geq a$) erhielt Shafranov die Beziehungen

$$\psi_{Plasma} = \frac{\mu_0 I R_0}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right)-2\right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[-\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right)+1-\left(\Lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{r^2}\right] r\cos\theta$$

$$\psi_{ext} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\ln\left(\frac{8R_0}{a}\right)+\Lambda-\frac{1}{2}\right) r\cos\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\ln\left(\frac{8R_0}{a}\right)+\Lambda-\frac{1}{2}\right)(R-R_0) \qquad , (14.44)$$

$$\psi = \psi_{Pasma} + \psi_{ext} = \frac{\mu_0 I R_0}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{8R_0}{r}\right)-2\right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\frac{r}{a}+\left(\Lambda+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right] r\cos\theta$$

wobei zur Abkürzung $\Lambda = \beta_\theta + l_i/2 - 1$ gesetzt wurde und ψ_{ext} der externe Fluß ist. Er wird erzeugt von einem nahezu homogenen Magnetfeld in z-Richtung

$$B_z = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi_{ext}}{\partial R} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\ln\frac{8\pi}{a}+\Lambda-\frac{1}{2}\right) \approx -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_0}\left(\ln\frac{8\pi}{a}+\beta_\theta+\frac{l_i}{2}-\frac{3}{2}\right). \quad (14.45)$$

---

[34] V.S. Mikuhatov and V.D. Shafranov, Nucl. Fus. 11,605-632 (1971)

[35] Siehe H.P. Zehrfeld, G. Fussmann, B.J. Green, Plama Physics, 23, 5,473-489 (1981)

Größenordnungsmäßig ist dieses Vertikalfeld etwa 0,2 T, während das Poloidalfeld am Plasmarand ca. 0,5 T und das Toroidalfeld B_φ typischerweise 3-4 T beträgt. Der in den Gleichungen auftretende Term $\ln(8R_0/a)$ hat seinen Ursprung in der bekannten Entwicklung der poloidalen Flußfunktion eines stromführenden Rings mit den großen und kleinen Radien R und a

$$\psi = A_\varphi R = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{\sqrt{aR}}{k}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(k)-E(k)\right];\quad k^2 = \frac{4aR}{(a+R)^2+z^2}, \qquad (14.46)$$

wenn man die hierin auftretenden Elliptischen-Integrale E und K durch ihre Näherung für $k \approx 1$ (d.h. in der Nähe der Oberfläche) ersetzt, was auf $\psi \approx \mu_0 I\ a/(2\pi)\ [\ln(8a/R)-2]$ hinausläuft.

14.1.4 GLEICHGEWICHTSLÖSUNGEN FÜR EINE KLASSE VON PROFILEN

Leider ist die von Shafranov angegebene Flußfunktion für den besonders interessierenden Plasmabereich nicht brauchbar (ψ divergiert für $r \to 0$). Für eine Klasse von Druck und Stromprofilen lassen sich aber relativ einfache analytische Beziehungen ableiten, die wir im folgenden näher betrachten werden.

Die Schwierigkeiten, die Gleichgewichtsprofile bei der Auswertung von Meßergebnissen zu berücksichtigen, bestehen zum einen darin, daß der Experimentalphysiker alle Größen zunächst als Funktion der Ortskoordinaten mißt und die Flußflächen im Raum a priori nicht kennt. Er beschreibt daher die Dichte- und Temperaturprofile bestenfalls als Funktionen von R und z, gewöhnlich aber, wegen der ungenügenden Diagnostik, vereinfacht als Funktionen des kleinen Radius. Mehr oder minder zugespitzte Profile vom Typ $T = T_0\,[1-(r/a)^2]^\alpha$ und $n_e(r) = n_{e0}\,[1-(r/a)^2]^\beta$ mit positiven Exponenten $\alpha \approx 2$ und $\beta \approx 1$ führen dann auf Druck- und Leitfähigkeitsprofile der Art $p = p_0\,[1-(r/a)^2]^n$ und $\sigma_\parallel = \sigma_0[1-(r/a)^2]^m$ mit den Exponenten $n = \alpha+\beta \approx 3$ und $m = 3\alpha/2 \approx 3$ Da das induzierte E-Feld im wesentlichen den toroidalen Nettostrom treibt, hat man in Näherung auch $\langle j_\varphi\rangle \approx j_0[1-(r/a)^2]^m$. Es ergibt sich allerdings das Problem, daß derartige Profile mit einem festem Bezugspunkt ($R = R_0$, $z = 0$) für den kleinen Radius r mit der Gleichgewichtstheorie nicht verträglich sind. Durch Zulassen eines variablen Bezugspunktes ($R = R_0 + \Delta$, $z = 0$) mit kleiner Verschiebung Δ läßt sich dieses Problem beheben. Hierbei müssen wir jedoch beachten, daß weder j_φ noch $R\,j_\varphi$ auf diesen magnetischen Kreisfächen konstant ist. Stattdessen muß man entweder den Mittelwert $\langle j_\varphi\rangle$ oder, besser, den innerhalb der Flußfläche fließenden toroidalen Strom betrachten, der, wie wir ja gesehen haben, eine Flächenvariable ($I = I(\psi)$) darstellt. Durch formale Integration von $I \approx \int_0^r \langle j_\varphi\rangle\, 2\pi r\, dr$ wird man so auf die Profilgleichungen

$$\boxed{p = p_0(1-\rho^2)^n \quad I = I_a[1-(1-\rho^2)^{m+1}]} \qquad (14.47)$$

mit $\rho = r/a$. geführt. Sie dienen im folgenden als kanonische Profile.

Die Gl. (14.18) liefert nun die Grundlage die poloidale Flußfunktion $\psi(\rho)$ aus der Stromfunktion $I(\rho)$ zuberechnen. Unter Vernachlässigung des nahe bei 1 liegenden Mittelwertes lautet Gl. (14.18)

$$\psi(\rho) = \frac{\mu_0 R_0}{2\pi}\int_0^\rho \frac{I(\rho)}{\rho}d\rho \qquad (14.48)$$

Es erweist sich als sehr hilfreich, die Variable $x = 1-\rho^2$ einzuführen. Damit haben wir

$$p(x) = p_0 x^n;\quad I(x) = I_a\left(1-x^{m+1}\right);\quad \psi(x) = \frac{\mu_0 R_0 I_a}{4\pi}F_{m+1}(x) \qquad (14.49)$$

mit der Definition

$$F_m(x) := \int_x^1 \frac{1-x^m}{1-x}\,dx\,. \tag{14.50}$$

Für ganzzahlige Exponenten m läßt sich der Integrand als Summe entwickeln und die Lösung in Form einer Reihe angeben.[35]

$$F_m(x) = \int_x^1 \sum_{k=0}^{m-1} x^k\,dx = \sum_{k=1}^{m} \frac{1-x^k}{k}\,, \tag{14.51}$$

Für die Fälle m = 0, 1 sind die Flußfunktionen in der Tabelle 14-2 aufgeführt. Für den einfachsten, aber unphysikalischen Fall m = 0, mit $\psi = \psi_a\,\rho^2$ sind Druck und Stromprofile ebenfalls einfache Funktionen von ψ: $p = p_0(1 - (\psi/\psi_a))^n$ und $I = I_a\,\psi/\psi_a$. Aber schon für m = 2 sind diese nicht mehr durch Polynome in ψ darstellbar, und in allen anderen Fällen ist eine explizite Auflösung der Gleichung $\rho = \rho(\psi)$ nicht möglich, so daß sich $p(\psi)$ und $I(\psi)$ nicht in geschlossener Form angeben lassen.

Als nächstes benötigen wir den Poloidalstrom, den wir basierend auf Gl. (14.38) aus der Näherung

$$\frac{J}{J_a} = 1 - \frac{\mu_o p}{B_0^2} + \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 B_0^2}\int_r^a \frac{I}{r^2}\frac{dI}{dr}dr\,. \tag{14.52}$$

berechnen können. Es ergibt sich

$$\frac{J(x)}{J_a} = 1 - \frac{\mu_o p_0}{B_0^2}x^n + (m+1)\frac{B_\theta^2(a)}{B_0^2}\left[F_{2m+1}(x) - F_m(x)\right]. \tag{14.53}$$

mit $B_\theta(a) = \mu_0\,I_a/(2\pi a)$. In der Grad-Shafranov-Gleichung (s. Gl. (14.9))

$$-\frac{R^2}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\psi}{R^2}\right) = R^2\frac{dp}{d\psi} + \mu_0 J\frac{dJ}{d\psi} = \left[R^2\frac{dp}{dr} + \mu_0 J\frac{dJ}{dr}\right]\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^{-1} \tag{14.54}$$

können wir jedoch wegen der sehr geringen Variation von J über den Querschnitt, die Funktion durch ihren Randwert $J_a = B_0\,R_0/\mu_0$ ersetzen, so daß wir nur die Ableitung

$$\frac{dJ}{dr} = -J_a\left(\frac{\mu_o}{B_0^2}\frac{dp}{dr} + \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 B_0^2}\frac{I}{r^2}\frac{dI}{dr}\right) \tag{14.55}$$

benötigen. Damit lautet Gl. (14.54)

$$-\frac{R^2}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\psi}{R^2}\right) = \left[(R^2 - R_0^2)\frac{dp}{dr} - \mu_0 R_0^2\frac{I}{(2\pi r)^2}\frac{dI}{dr}\right]\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^{-1} \tag{14.56}$$

Linke und rechte Seiten werden von r und vom poloidalen Winkel θ^* im verschobenen Bezugssystem, den wir im Zusammenhang mit der Gleichung (14.11) eingeführt haben, abhängen. Die rechte Seite aber nur über $R = R_0 + \Delta + r\cos\theta^* \approx R_0 + r\cos\theta^*$, und für großes Aspektverhältnis hat man $(R^2-R_0^2) = (R+R_0)(R-R_0) \approx 2R_0\,r\cos\theta^*$. Denken wir uns nun beide Seiten der Gleichung (14.56) in eine Fourier-Reihe entwickelt, so müssen die jeweiligen Koeffizienten der Terme $\cos(k\,\theta^*)$ übereinstimmen. Die konstanten Anteile (k = 0) müssen im gegebenen Fall eine Identität liefern. Für k = 1 dagegen, wird sich eine Bestimmunggleichung für $\Delta(r)$ ergeben. Alle höheren Terme der Fourier-Entwicklung können in dieser Beschreibung keine Verwendung finden, da wir keine weiteren

Verformungsparameter in Betracht ziehen wollen. Die Aufgabe wird sich im folgenden also darauf konzentrieren, die zu cosθ* proportionalen Terme abzuspalten.

Auf der linken Seite von Gl. (14.56) setzen wir nun in $\nabla\psi = (d\psi/dr)\,\nabla r$ unser Ergebnis (14.11) für ∇r ein und berechnen den Ausdruck in Zylinderkoordinaten (R, z). Nach Entfernen der Terme zweiter und höher Ordung erhält man

$$\frac{-R^2}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{d\psi}{dr}\frac{\nabla r}{R^2}\right)\approx\frac{1}{\mu_0}\left\{-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)+\cos\theta^*\left[\left(\frac{r}{R_0}+\Delta'+r\Delta''\right)\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+2\Delta'\frac{d^2\psi}{dr^2}\right]\right\}. \quad (14.57)$$

Es muß also nach unseren Überlegungungen die Identität

$$-\frac{1}{\mu_0 r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\equiv-\mu_0 R_0^2\frac{I}{(2\pi r)^2}\frac{dI}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^{-1} \quad (14.58)$$

existieren, was man in der Tat leicht bestätigt. Multiplieren wir nämlich beide Seiten mit $r^2\psi'$, so erhalten wir

$$r\psi'\frac{d}{dr}(r\psi')\equiv\frac{\mu_0^2R_0^2}{(2\pi)^2}\frac{dI}{dr}I\;\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(r\psi')^2=\frac{1}{2}\frac{\mu_0^2R_0^2}{(2\pi)^2}\frac{dI^2}{dr}\;\Rightarrow\psi'=R_0\frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (14.59)$$

Jetzt wenden wir uns der Beziehung zu, die aus der Gleichsetzung der Cosinus-Terme hervorgeht:

$$\boxed{\left(\frac{r}{R_0}+\Delta'+r\Delta''\right)\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+2\Delta'\frac{d^2\psi}{dr^2}=\mu_0 2R_0 r\frac{dp}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^{-1}}. \quad (14.60)$$

Bringen wir sie auf die Form

$$\Delta''+\left(\frac{1}{r}+2\frac{\psi''}{\psi'}\right)\Delta'=2\mu_0R_0r\frac{p'}{\psi'^2}-\frac{1}{R_0}, \quad (14.61)$$

so sehen wir, daß der Koeffizient der ersten Ableitung sich als Differentialquotient schreiben läßt. Wir erhalten so die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in Δ´

$$\Delta''+\Delta'\frac{d}{dr}\ln\left(r\psi'^2\right)=\frac{1}{r\psi'^2}\frac{d}{dr}\left(r\psi'^2\Delta'\right)=2\mu_0R_0r\frac{p'}{\psi'^2}-\frac{1}{R_0}, \quad (14.62)$$

die sich nun sofort auf die Quadratur

$$\Delta'(r)=\frac{2\mu_0R_0}{r\psi'^2}\int_0^r p'\,r^2dr-\frac{1}{R_0r\psi'^2}\int_0^r\psi'^2\,r\,dr \quad (14.63)$$

zurückführen läßt. Im ersten Term empfiehlt sich eine partielle Integration, die es schließlich gestattet, das Ergebnis durch querschnittsgemittelte Größen (Symbol {}) anzugeben

$$\boxed{\Delta'(r)=-\frac{r}{R_0}\frac{2\mu_0}{B_\theta^2(r)}\left(\{p\}-p(r)\right)-\frac{r}{2R_0}\frac{\{B_\theta^2\}}{B_\theta^2(r)}}, \quad (14.64)$$

wobei vermöge $\psi' = R_0 B_\theta$, auf das Poloidalfeld übergegangen wurde. Diese Gleichung erlaubt sofort eine Aussage über den Plasmarand zu machen, da dort ja der Druck verschwindet. Wir erhalten Shafranovs Beziehung (s. Gl. (14.45))

$$\Delta'(a) = -\frac{a}{R_0}\left(\frac{2\mu_0\{p\}_{r=a}}{B_\theta^2(a)} + \frac{1}{2}\frac{\{B_\theta^2\}_{r=a}}{B_\theta^2(a)}\right) \equiv -\frac{a}{R_0}\left(\beta_{pol} + \frac{1}{2}l_i^{Rand}\right), \qquad (14.65)$$

in der in der rechts die *innere Induktivität* l_i und das *poloidale Beta* β_θ als dimensionslose Größen eingeführt wuden. Hier tauchen ihre Werte am Rand auf. Für β_{pol}, das als Quotient des zentralen Drucks und der poloidalen Magnetfeldenergie am Plasmarand definiert ist, erhalten wir

$$\beta_{pol} := \frac{\{p\}_{r=a}}{B_\theta^2(a)/(2\mu_0)} = p_0\frac{8\pi^2 a^2}{(n+1)\mu_0 I_a^2}, \qquad (14.66)$$

wobei wir rechts bereits vom folgenden Ergebnis Gebrauch gemacht haben. Mit Bezug auf die vorgegebenen kanonischen Profile (11.29) bzw. (13.6) erhalten wir nämlich zunächst

$$\{p\} = \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho p(\rho)2\rho d\rho = \frac{1}{1-x}\int_x^1 p(x)dx = p_0\frac{1-x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}. \qquad (14.67)$$

Das Quadrat des Poloidalfelds hat die Darstellung

$$B_\theta^2(x) = (\psi'/R_0)^2 = B_\theta^2(a)\frac{\left(1-x^{m+1}\right)^2}{1-x}. \qquad (14.68)$$

Dessen Querschnittsmittel ergibt

$$\begin{aligned}\left\{B_\theta^2\right\} &= \frac{1}{1-x}\int_x^1 B_\theta^2 dx = \frac{B_\theta^2(a)}{1-x}\int_x^1\frac{1-2x^{m+1}+x^{2m+2}}{1-x}dx \\ &= \frac{B_\theta^2(a)}{1-x}\int_x^1\frac{2(1-x^{m+1})-(1-x^{2m+2})}{1-x}dx = B_\theta^2(a)\frac{2F_{m+1}(x)-F_{2m+2}(x)}{1-x}\end{aligned}. \qquad (14.69)$$

Gleichung (14.64) lautet damit

$$\boxed{\Delta' = \frac{d\Delta}{dr} = -\frac{r}{R_0}\beta_{pol}\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{\left(1-x^{m+1}\right)^2} - \frac{r}{R_0}\frac{F_{m+1}(x)-\frac{1}{2}F_{2m+2}(x)}{\left(1-x^{m+1}\right)^2}}, \qquad (14.70)$$

worin $x = 1 - (r/a)^2$ als Abkürzung zu betrachten ist. Schreiben wir das Ergebnis in der Form

$$\Delta'(r) = -\frac{r}{R_0}\left[\beta_\theta(r) + \frac{1}{2}l_i(r)\right], \qquad (14.71)$$

so erhalten wir für die ortsabhängigen Größen als Funktionen von x

$$\beta_\theta(x) = \beta_{pol}\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{\left(1-x^{m+1}\right)^2}; \quad l_i(x) = \frac{2F_{m+1}(x)-F_{2m+2}(x)}{\left(1-x^{m+1}\right)^2}. \qquad (14.72)$$

Für ganzahlige m ergibt sich die innere Induktivität am Rande (x = 0) aus

$$\begin{aligned} l_i^{Rand} &= 2F_{m+1}(0) - F_{2m+2}(0) \\ &= 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m+2}\right) \quad (14.73) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+1}\right)-\left(\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m+2}\right) \end{aligned}$$

Es handelt sich um Summen der harmonischen Reihe. Allgemein bezeichnet man das bestimmte Integral (14.50) (in den Grenzen [0,1]) als *Harmonische Funktion* (in *Mathematica* als interne Funktion aufrufbar). Für einige niedrige Stromexponenten sind die Werte von l_i^{Rand} in der Tablle Tabelle 14-1 eingetragen. Mit zunehmender Spitzheit der Stromprofile steigen die Werte an.

m	*0*	*1/2*	*1*	*3/2*	*2*
l_i^{Rand}	*0.5*	*0.73*	*0.92*	*1.08*	*1.22*

Tabelle 14-1: Werte der innere Induktvität am Plasmarand für Plasmastromprofile des Typs I ~ $[1-(1-\rho^2)^{m+1}]$.

Eine sehr brauchbare Näherung für alle positiven Exponenten m (Fehler 26% für m = 0 und < 10% für m > 1) ist durch

$$l_i(a) \approx \frac{1}{2} + 2\ln(m+3/2) - \ln(m+5/2) \qquad (14.74)$$

gegeben.

Für das verschobene Zentrum ergibt der Grenzübergang r → 0 für den Quotienten $\{B_\theta^2\}/B_\theta^2 \to 1/2$ und ({p}-p) → 0, so daß man für kleine Radien die Relation $\Delta' \approx -(r/R_0)/4$ hat. Da somit $\Delta'(0) = 0$ gilt, berechnet sich die Verschiebung selbst aus folgendem Integral

$$\Delta(\rho) = \int_a^r \frac{d\Delta}{dr} dr = \frac{a^2}{2R_0}\int_0^{1-\rho^2} \left(\beta_\theta(x) + l_i(x)\right) dx. \qquad (14.75)$$

Für die niedrigsten Exponenten n = 1,2 und m = 0, 1 sind die Ergebnisse in der Tabelle Tabelle 14-2 zusamm engestellt.

m	*n*	$\psi(\rho)$	$\Delta/(a^2/R_0)$	$-\Delta'/(r/R_0)$
0	*1*	ρ^2	$x/8 + x\beta_{pol}/2$	$1/4 + \beta_{pol}$
	2		$x/8 + x(1+x)\beta_{pol}/2$	$1/4 + (1+2x)\beta_{pol}$
1	*1*	$\frac{\rho^2}{2}(4-\rho^2)$	$\left[\frac{\ln(1+x)}{12} + \frac{x(7+3x)}{48(1+x)}\right] + \frac{x}{2(1+x)}\beta_{pol}$	$\frac{11+x(10+3x)}{24(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\beta_{pol}$
	2		$\left[\frac{\ln(1+x)}{12} + \frac{x(7+3x)}{48(1+x)}\right] + \left[\ln(1+x) - \frac{x}{2(1+x)}\right]\beta_{pol}$	$\frac{11+x(10+3x)}{24(1+x)^2} + \frac{1+2x}{(1+x)^2}\beta_{pol}$

Tabelle 14-2: Poloidalfluß (ψ), Schafranov-Verschiebung (Δ) sowie deren Ableitung $\Delta' = d\Delta/dr$ für verschiedene Druck (Index n) und Stromprofile (Index m). Die wahre Verschiebung Δ ergibt sich aus den Tabellenangaben durch Multiplikation mit dem kleinen Radius (a) und dem inversen Aspektverhältnis (a/R_0). Die wahre Ableitung der Verschiebung (Δ'= negative dimenslose Zahl) ergibt sich durch Multiplikation mit ($-r/R_0$). Die Variable x is durch $x = 1-\rho^2$ mit dem normierten Radius $\rho = r/a$ verknüpft.

Der Fall m = 0 entspricht einer nicht realistischen, flachen Stromdichteverteilung. Die Ergebnisse wurden aber wegen ihrer besonderen Einfachheit mit in die Tabelle aufgenommen. Bei der Verschiebung (Δ) und ihrer Ableitung (Δ') hat man es wie zuvor mit einem druckabhängigen Anteil ($\sim \beta_\theta$) und einem vom Stromprofil abhängigen Term (hier eine von m abhängige Konstante) zu tun. Für die Verschiebung des Plasmazentrums hat man im Fall m = n die Näherung

$$\Delta(r=0) = \frac{a^2}{2R_0}\left(\frac{m}{1+m}\beta_{pol} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\ln(1+\frac{m}{8})\right), \qquad (14.76)$$

die im Intervall $0 \le m < 100$ eine Genauigkeit von etwa 5% aufweist. Die besonders interessanten Werte für die Verschiebung des Zentrums und der Ableitung am Plasmarand sind in der Tabelle 14-3 zusammengestellt. Ferner sind die Funktionen $\Delta(r)$ für die beiden unteren Fälle der Tabelle 14-2 in der Graphik Abb. 14-1 wiedergegen.

m	*n*	*$\Delta(0)$*	*$\Delta'(a)$*
0	*1*	$(0.125 + 0.5\,\beta_{pol})\,a^2/R_0$	$-(0.25 + \beta_{pol})\,(a/R_0)$
	2	$(0.125 + \beta_{pol})\,a^2/R_0$	$-(0.25 + \beta_{pol})\,(a/R_0)$
1	*1*	$(0.16 + 0.25\,\beta_{pol})\,a^2/R_0$	$-(0.46 + \beta_{pol})\,(a/R_0)$
	2	$(0.16 + 0.44\,\beta_{pol})\,a^2/R_0$	$-(0.46 + \beta_{pol})\,(a/R_0)$

Tabelle 14-3: Verschiebung des Zentrums und Ableitung am Plasmarand für die in Tabelle 14-2 angegeben Profile.

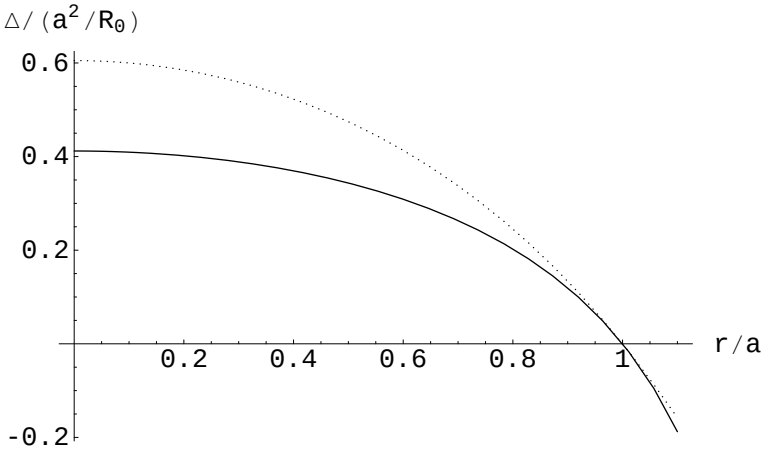


Abb. 14-1: Schafranov-Verschiebung der Flußflächen als Funktion des Radius für die Fälle (m = 1, n = 1, durchgezogene Linie) und (m = 1, n = 2, gepunktet) beide für $\beta_{pol} = 1$.

Die große Bedeutung der Größe Δ´ wird aus der Abb. 14-2 erkenntlich, die zwei Kurvenverläufe des poloidalen Magnetfeldes wiedergibt. Nach Gl. (14.13) weist dieses ja auf den Flußflächen eine Abhängigkeit der Art

$$\frac{B_\theta(\theta)}{B_\theta(\pi/2)} = \frac{1}{(1+\frac{r}{R_0}\cos\theta)(1+\Delta'\cos\theta)} \tag{14.77}$$

auf. Die Graphik verdeutlicht für einen realistischen Fall den großen Einfluß dieser Größe auf den Kurvenverlauf.

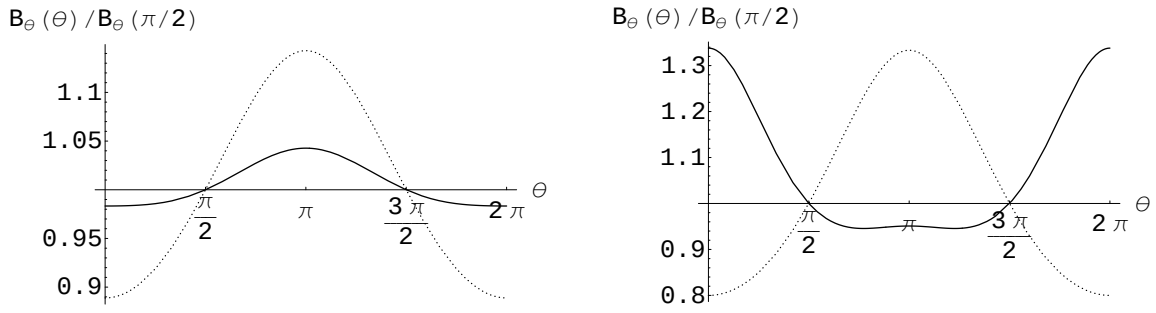


Abb. 14-2: Die Variation des Poloidalfelds (durchgezogene Linien) auf den magnetischen Flächen für r/a = 1/2 links und r/a = 1 rechts. In beiden Fällen wurden die Parameter a/R_0 = 1/4, β_{pol} = 1 sowie m=n=2 zugrunde gelegt. Zum Vergleich sind gestrichelt die Kuven für Δ´ = 0 (also $B_\theta \sim 1/R$) gezeigt. Am Plasmarand (Bild rechts) ist das Poloidalfeld auf der Torusaußenseite (θ = 0, 2π) deutlich stärker als auf der Innenseite (θ = π).

Wir entnehmen der Abb. 14-2 insbesondere, daß die in der Literatur häufig angenommene Beziehung[36] $B_\theta \sim 1/R$ völlig falsch sein kann.

14.2 Qualitative Betrachtungen

Ergänzend zum vorausgehenden Abschnitt erscheinen einige generelle Bemerkungen zum Ohmschen Gesetz und zu den poloidalen Strömen angebracht. Häufig wird die Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit dahingehend mißverstanden, daß ein elektrisches Feld auch eine Stromdichte senkrecht zum Magnetfeld entsprechend $j_\perp = \sigma_\perp E_\perp$ treiben würde. Dem ist aber nicht so, da — wie bereits erläutert — die senkrechte E-Feldkomponente lediglich eine Drift bewirkt. Betrachten wir als Beispiel zunächst ein Tokamakgleichgewicht bei sehr kleinem Druckgradienten $\nabla p \approx 0$, aber gewöhnlichem Toroidalstrom. In diesem in Abb. 14.3a skizzierten Fall, muß nach der Gleichgewichtsbedingung (14.1) die Stromdichte j überall nahezu parallel zu B fließen. Das induzierte E-Feld weist grundsätzlich in die toroidale Richtung. Aufgrund des toroidalen Stroms existiert aber eine poloidale Magnetfeldkomponente $B_\theta \approx \mu_0 I(r)/(2\pi r)$, so daß das Gesamtmagnetfeld einen Winkel mit der toroidalen Richtung bildet. Wie können also j und B parallel sein? Die Antwort liefert die radiale ExB-Drift des Plasmas. Im Bezugssystem des strömenden Plasmas ($\mathbf{v} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$) weist nämlich das Feld $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ in die Richtung von **B**, so daß in Wirklichkeit nur eine parallele Stromdichte $j_\parallel = \eta_\parallel E_\varphi B_\varphi/B$ induziert wird.

Denken wir uns nun — beispielsweise durch Verbesserung des Energieeinschlusses oder Reduzierung der Strahlungsverluste — eine Erhöhung des Plasmadrucks herbeigeführt, so muß der Vektor der Stromdichte einen Winkel mit B bilden. Entsprechend der Abb. 14.3b

[36] Unter anderem in der bedeutsamen Arbeit: P. H. Rutherford, *Impurity Transport in the Pfirsch Schlüter Regime*, Phys. Fluids 17, 9 (1974)

dreht er mit zunehmendem Druckgradienten in die toroidale Richtung, die er im Mittel über den Querschnitt bei $\beta_\theta = 1$ erreicht. Gewöhnlich wird in den Experimenten der Toroidalstrom I(a) über die Umfangsspannung konstant geregelt, so daß daher auch j_φ und B_θ im Mittel unverändert sind. In den Experimenten mit Zusatzheizung kann der Grenzfall $\beta_\theta = 1$ mit verschwindendem Poloidalstrom auch überschritten werden, so daß die Stromdichte eine positive Poloidalkomponente aufweist (Abb. 14.3c). Man bezeichnet die Fälle $j_\theta < 0$ und $j_\theta > 0$ (oder umgekehrt, falls $B_\varphi < 0$) als den *paramagnetischen* bzw. *diamagnetischen Zustand*. Die Bezeichnungen beziehen sich auf die toroidale Magnetfeldkomponente, die im ersten Fall verstärkt, im diamagnetischen Fall dagegen geschwächt wird. Im paramagnetischen Fall sind nämlich die poloidalen Plasmaströme gleichgerichtet zu den Strömen in den äußeren Hauptfeldspulen, im diamagnetischen Fall dagegen entgegengesetz gerichtet.

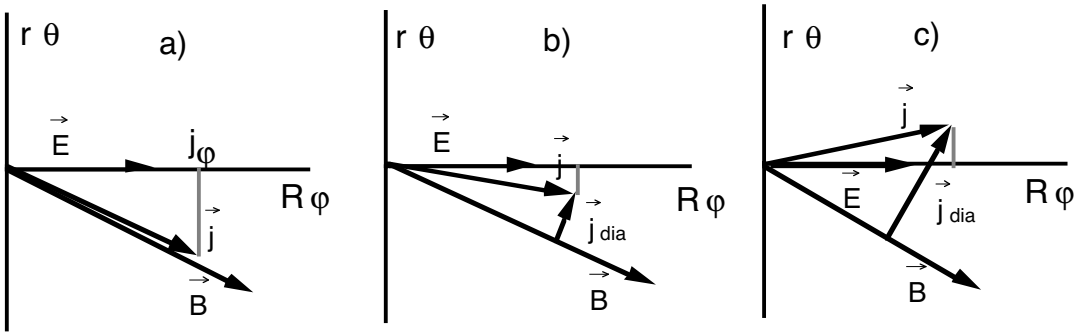


Abb. 14.3: Vektordiagramm zur lokalen Gleichgewichtsbedingung.

*Der Druckgradient steigt vom nahezu kraftfreien Fall (a) über den "paramagnetischen (b)" zum "diamagnetischen" Fall (c). Das in φ-Richtung induzierte elektrische Feld ist so geregelt, daß j_φ = const. Der Vektor der Stromdichte wird verändert, indem sich senkrecht zu **B** eine diamagnetische Komponente hinzuaddiert. Aus Gründen der Verdeutlichung wurde die B_θ-Komponente stark vergrößert.*

Es stellt sich die Frage, wie der für das Gleichgewicht im Fall $\beta_\theta \neq 1$ erforderliche poloidale Strom ensteht. Offensichtlich kann er nicht durch eine elektrische Spannung entlang des kleinen Umfangs induziert werden, denn unabhängig davon, daß es die hierfür erforderliche Flußänderung des toroidalen Magnetfeldes nicht gibt, würde ein solches elektrisches Feld wiederum nur zu einer radialen Drift führen. Die Auflösung dieses Paradoxons ergibt sich aus der Natur der diamagnetischen Ströme, worauf wir schon in Kap. 6.3.2.2 eingegangen sind.

14.3 Pfirsch-Schlüter-Ströme und Transport im Torus

Lösen wir die Gleichgewichtsbedingung (14.1) nach der Stromdichte auf, so erhalten wir die hierdurch allein bestimmte Senkrechtkomponente

$$\vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2}. \tag{14.78}$$

Es handelt sich um die bereits im Kapitel 6.3.2 diskutierte diamagnetische Stromdichte. Im Torus ist diese diamagnetische Stromdichte nicht unproblematisch, da sie nicht divergenzfrei ist. Berechnen wir nämlich div $\mathbf{j}_\perp$ unter Verwendung der Regeln der Vektoranalysis sowie div $\mathbf{B} = 0$ und $\nabla p \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0\ \nabla p \cdot \mathbf{j} = 0$, so ergibt sich

$$div\, \vec{j}_\perp = 2\frac{\nabla B}{B} \cdot \frac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2} = -\frac{2}{R}\vec{e}_R \cdot \vec{j}_\perp = -\frac{2}{R}\frac{B_\varphi}{B^2}\frac{dp}{dr}\sin\theta, \tag{14.79}$$

wobei die letzte Form speziell für kreisförmige Plasmaquerschnitte gilt. Es sind also diese in den magnetischen Flächen durch das Gleichgewicht erzwungenen Ströme für sich allein

nicht divergenzfrei. Es kommt in der Folge zu einer Ladungstrennung zwischen der oberen und unteren Torushälfte, die wiederum elektrische Felder erzeugen. Diese E-Felder besitzen sowohl eine poloidale wie auch eine radiale Komponente, jedoch wegen der toroidalen Symmetrie keine Toroidalkomponente. Die Poloidalkomponente können wir uns in einen Vektor parallel und senkrecht zu B zerlegt denken. Die parallele Komponente $E_{||}$ treibt dann einen elektrischen Ausgleichstrom parallel zu B, so daß es zu einem stationären Zustand mit div j = 0 kommt. Diese sogenannten *Pfirsch-Schlüter-Ströme* ergeben sich allgemein zu

$$j_{||} = \frac{J}{B}\frac{dp}{d\psi}\left(\frac{B^2}{\langle B^2\rangle} - 1\right), \tag{14.80}$$

worin die spitzen Klammern eine Mittelung über die magnetischen Flächen bedeuten. Insgesamt sind also die Pfirsch-Schlüter-Ströme eine Folge des Druckgradienten und der Toruskrümmung.

Wir betrachten den kreisförmigen Fall genauer: Für die parallele Stromdichte gilt bei vernachlässigbarer Umfangsspannung

$$\vec{j}_{||} = \sigma_{||} E_{||} \frac{\vec{B}}{B} = \sigma_{||} \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{B^2}\vec{B} = \sigma_{||} \frac{E_\theta \cdot B_\theta}{B^2}\vec{B}. \tag{14.81}$$

Das poloidale elektrische Feld E_θ erhält man aus der verschwindenden Divergenz der Gesamtstromdichte

$$\nabla\cdot\vec{j} = \nabla\cdot\vec{j}_\perp + \nabla\cdot j_{||} = 0 \quad \Rightarrow \; -\frac{2}{R}\frac{B_\varphi}{B^2}\frac{\partial p}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial j_{||}}{\partial s} = 0. \tag{14.82}$$

Mit der differentiellen Wegstrecke parallel zum Magnetfeld $ds = [(Rd\varphi)^2 + (rd\theta)^2]^{1/2} = ((B_\varphi/B_\theta)^2 + 1)^{1/2}\, r\, d\theta \approx B_\varphi/B_\theta\; r\, d\theta = q R_O\, d\theta$ hat man

$$\frac{2\sin\theta}{BR}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\sigma_{||} B_\theta}{qBR_0}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} = 0 \tag{14.83}$$

woraus sich das poloidale E-Feld zu

$$E_\theta = -\frac{2R_0 q}{\sigma_{||} R B_\theta}\frac{dp}{dr}\cos\theta \tag{14.84}$$

ergibt.

Dieses elektrische Feld verursacht eine gemeinsame radiale Drift aller Teilchen gemäß Gl. (5.9) bzw. Gl. (6.85). Hier erhalten wir für die Radialkomponente $v_r \approx E_\theta/B$. Mit Hilfe des *inversen Aspektverhältnisses* $\varepsilon = r/R_O$ hat man $R = R_O(1+\varepsilon\cos\theta)$ und $B = B_0/(1+\varepsilon\cos\theta)$ sowie $q = \varepsilon\, B/B_\theta$. Der über die Torusoberfläche gemittelte Wert ergibt sich dann mit dem toroidalen Flächenelement $df = 2\pi\, R\, r\, d\theta$ und unter Beachtung von $B_\theta/B = \varepsilon/q$ zu

$$\langle v_r\rangle = \int_0^{2\pi} v_r(1+\varepsilon\cos\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{2q^2}{\sigma_{||}B_0^2\varepsilon}\frac{dp}{dr}\int_0^{2\pi}(1+\varepsilon\cos\theta)^2\cos\theta\frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{2q^2}{\sigma_{||}B_0^2}\frac{dp}{dr} \tag{14.85}$$

Mit dem letzten Ausdruck haben wir die druckgetriebene **Pfirsch-Schlüter-Diffusion** erhalten. Ein Vergleich mit Gl. (6.62) zeigt uns, daß dieser mit den parallelen Ausgleichströmen zusammenhängende radiale Teilchentransport um den Faktor $2q^2(\sigma_\perp/\sigma_{||}) \approx 10$ größer ist als der Transport im geraden Zylinder.

Wir merken an dieser Stelle noch an, daß sich ganz analoge Verhältnisse für den senkrechten Wärmestrom $\mathbf{q} = 5/2\, p/e\ \mathbf{B} \times \nabla T/B^2$ ergeben (s. Abschnitt 6.6.2). Auch dieser ist nicht divergenzfrei, so daß sich entsprechende Oben-Unten-Asymmetrien in der Temperaturverteilung ergeben, die ebenfalls Rückwirkungen auf den Teilchentransport haben.

15 LITERATUR

Einführungen in die Plasmaphysik

• F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York 1984

• R. J. Goldstone and P.H. Rutherford, *Introduction to Plasmaphysics,* IOP-Publishing Company, Bristol (1995)

R. Dendy (ed.), *Plasma Physics: an Introductory Course,* Cambridge University Press 1993

L. A. Artsimovich, R. Z. Sagdeev: *Plasmaphysik für Physiker*, B. G. Teubner, Stuttgart 1983

L.A. Arzimovich: *Elementary Plasma Physics*, Blaisdell Publ. Comp., London 1965

K. Hübner, *Einführung in die Plasmaphysik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1982

R. Kippenhahn, C. Möllenhoff, *Elementare Plasmaphysik*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1975

L. Spitzer Jr., *Physics of Fully Ionized Gases*, Intersience Tracts on Physics and Astronomy, No. 3, New York 1962

N. A. Krall, A. W. Trivelpiece: *Principles of Plasmaphysics*, McGraw-Hill Book Company, New York 1974

G. Schmidt: *Physics of High Temperature Plasmas,* 2nd Edition, Academic Press, New York 1979

T.J.M. Boyd, J.J. Sanderson: *Plasma Dynamics*, Thomas Nelson Sons Ltd., London 1969

D.J. Rose, M.C. Clark, *Plasmas and Controlled Fusion,* J. Wiley and Sons, New York 1961

D. A. Frank-Kaminetskii, *Plasma the Fourth State of Matter*, Macmillan Press LTD, London 1972

H. W. Bartels et al. , *Lectures on PlasmaPhysics*, Manuskript, Summer University for plasmaphysics, Max-Planck-Institut für Plasmaphsik, Garching 1993

J. Winter et al., *Moderne Probleme der Plasmaphysik*, Manuskript: Ferienkurs 1989 der Kernforschungsanslage Jülich

F. Cap, *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*, Springer-Verlag, Wien-New York1994

Plasmadiagnostik und Astrophysik

I.H. Hutchinson, *Principles of Plasma Diagnostics,* Cambridge University Press 1987

R. K. Janev, W. D. Langer, K. Evans, D.E. Post,Jr., *Elementary Processes in Hydrogen and Helium Plasmas,* (Cross-sections and rate coefficients), Springer-Verlag, Berlin 1987

I.I. Sobelman, *Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines,* Springer-Verlag, Berlin 1981

H. Griem: *Plasma Spectroscopy,* McGraw-Hill Book Company 1984

H. Griem: *Spectral Line Broadening by Plasmas,* Academic Press, New York, London 1974

G. Marr, *Plasma Spectroscopy,* Elsvier Publishing Company, Amsterdam,-London-N.Y. 1968

R. H. Huddelstone, S. L. Leonard, *Plasmadiagnostic Techniques*, Academic Press, N. Y., 1965

X-ray plasma spectroscopy and properties of multi-charged ions, Edited by I.I. Sobelman, Nova Science Publishers Vol. 179, 1988

Lochte-Holtgreven, *Plasma Diagnostics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1968

A. Unsöld, *Physik der Sternatmosphären*, Springer-Verlag, Berlin 1968

H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics,* Oxford University Press 1963

R.W. Motley, Q-*Machines*, Academic Press, New York-San Francisco-London 1975

Plasmatechnologie und Physik der elektrischen Entladungen
A. Rutscher, H. Deutsch, *Plasmatechnik–Grundlagen und Anwendungen*, Carl Hanser Verlag, München, Wien 1984

K. Wiesemann, *Einführung in die Gaselektronik,* Teubner Studienbücher 1976

R. N. Franklin, *Plasma Phenomena in Gas Discharges*, Clarendon Press, Oxford 1976

M. Venugopalan, *Reactions under plasma conditions,* Vol. I-III, Wiley-Interscience, New York 1971

W. Rieder, *Plasma und Lichtbogen*, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1972

G. Janzen, *Plasmatechnik,* Hüthig Buch Verlag Heidelberg (1992)

R. Suryanarayanan, *Plasma Spraying - Theory and Applications*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London 1993

Plasmatheorie, Simulationen und Plasmawellen
K.H. Spatschek: *Theoretische Plasmaphysik,* Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart, 1990

R. Balescu: *Transport Processes in Plasmas*, North-Holland, Amsterdam 1988

G. Bateman: *MHD Instabilities,* MIT Press, Cambridge 1978

G. Ecker: *Theory of Fully Ionized Plasmas*, Academic, New York 1972

T. H. Stix: *The Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York 1962

B. Lehnert: *Dynamics of Charged Particles,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964

J. Blum, *Numerical simulation and optimal control in plasma physics*, Wiley/Gauthier-Villars Series in modern applied mathematics, Chichester 1989

Y.N. Dnestrovskii, D.P. Kostomarov, *Numerical Simulation of Plasmas*, Springer-Verlag, Berlin 1982

R. Cross, *An introduction into Alfven Waves*, Adam Hilger Series on Plasma Physics, Bristol 1988

Ebeling/Förster/Fortov et al., *Thermophysical Properties of Hot Dense Plasmas,* Bd.25, Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart-Leipzig 1991

Ebeling/Förster/Radtke, *Physics of Non-Ideal Plasmas*, Bd. 26, Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart-Leipzig 1992

P.A. Sturrock, *Plasma Physics*, Cambridge University Press 1994

S. Ortolani, D.D. Schnack, *Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation*, World Scientific, London 1993

Umfangreichere Lehrbücher und Handbücher

Reviews of Plasma Physics, Edited by Acad. M.A. Leontovich, Vol. I bis VIII, Consultant Bureau, New York 1966

F.L. Hinton, in: *Handbook of Plasma Physics*, A.A. Galeev and R.N. Sudan Eds., North-Holland, Amsterdam 1984

F. Cap: *Plasmaphysik I bis III*, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1970

• J.A. Bittencourt, *Fundamentals of.Plasma Physics,* Pergamon Press, Oxford-Frankfurt 1988

W.K.H. Panofsky u. M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism,* Addison-Wesley Publ. Comp., London-Amsterdam 1962

J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York 1975

R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* Addison-Wesley Publ. Comp., London 1965

Kernfusion

• U. Schumacher, *Fusionsforschung – Eine Einführung,* Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1993

J. Raeder u. a.: *Kontrollierte Kernfusion,* Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart 1981

J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford Engineering Science Series 20, Clarendon Press, Oxford 1987

T. J. Dolan: *Fusion Research*, Pergamon Press, New York 1982

K. Miyamoto: *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, MIT Press Cambridge 1980

W. M. Stacey Jr., Fusion:
An Introduction to the Physics and Technology of Magnetic Confinement Fusion
J. Wiley and Sons, New York 1984

R. A. Gross: *Fusion Energy*, J. Wiley and Sons, New York 1984, E. Teller: *Fusion, Magnetic Confinement,* Academic Press, New York 1981

T. Kammash, *Fusion reactor physics, principles and technology*, Ann Arbor Science Publisher Inc., Mich. 48106, 1975

K.H. Spatschek und J. Uhlenbusch: *Contributions to High-Temperature Plasma Physics*
Akademie-Verlag Berlin, 1994