Skriptum Kernreaktionen

H. Paetz gen. Schieck
Institut für Kernphysik
Universität Köln

11. April 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **9**

2 Einführung : Rolle der Kernreaktionen in der Kern- und Teilchenphysik **11**

2.1 Ausdehnung der Kerne 11

2.2 Typische Energien 12

2.2.1 Bindungsenergien der Kerne 12

2.2.2 Coulombbarriere 12

2.2.3 "Optisches" Argument 13

2.3 Kernspektroskopie und Kernreaktionen 14

2.4 Kernreaktionsmodelle 15

3 Klassischer Wirkungsquerschnitt **17**

3.1 Ablenkungsfunktion 17

3.2 Rutherfordstreuung 18

3.2.1 Rutherford-Streuquerschnitt 18

3.2.2 Minimaler Streuabstand d 20

3.2.3 Bahn im Coulombfeld 21

3.2.4 Folgerungen 22

3.2.5 Folgerungen aus dem Rutherfordexperiment und seine historische Bedeutung 22

3.2.6 Abweichungen von der Rutherfordformel 22
3.3 Streuung, Dichteverteilungen und Kernradien 23
3.3.1 Kernradien aus Abweichungen von der Rutherfordstreuung . . 23
3.3.2 Coulombstreuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung . . 24
3.3.3 Modellansätze 27
3.3.4 Momentenentwicklung 28
3.3.5 Ergebnisse der Hadronenstreuung 29
3.4 Elektronenstreuung 29
3.4.1 Materiedichteverteilungen und -radien 33
3.4.2 Sonderfälle: Halokerne 33

4 Rolle von Erhaltungssätzen und Symmetrien in Kernreaktionen 35

4.1 Allgemeines 35
4.1.1 Diskrete Transformationen 37
4.1.2 Kontinuierliche Transformationen 37
4.2 Erhaltungsgrößen in Kernreaktionen 38
4.2.1 Energieerhaltung 38
4.2.2 Impulserhaltung 38
4.2.3 Reaktionskinematik 39
4.2.4 Drehimpulserhaltung 39
4.2.5 Paritätserhaltung 40
4.2.6 Kernreaktionen unter Paritätserhaltung 41
4.2.7 Kernreaktionen unter Paritätsverletzung 41
4.3 Isospin in Kernreaktionen 43
4.3.1 Formalismus 44

4.3.2 Isospin als Erhaltungsgröße 45

4.4 Austauschsymmetrie in Kernreaktionen identischer Teilchen 48

4.4.1 Identische Bosonen mit $I = 0$ 48

4.4.2 Identische Fermionen mit $I = 1/2$ 49

4.5 Zeitumkehrinvarianz 49

4.5.1 Zeitumkehr und Reziprozität 51

5 Allgemeines Verhalten von Wirkungsquerschnitten 53

5.1 Ungeladene Teilchen (Neutronen) 53

5.1.1 Elastische Streuung (n,n) 53

5.1.2 Inelastische Neutronenstreuung 53

5.1.3 Exotherme Reaktionen mit thermischen Neutronen (n,γ), (n,p), (n,f) etc. 54

5.1.4 Endotherme Reaktionen Q < 0 54

5.2 Geladene Teilchen im Ein- und Ausgangskanal 55

5.3 Schwelleneffekte 55

5.4 Andere Phänomene 56

6 Formale Beschreibung von Kernreaktionen 59

6.1 Wellenfunktion und Streuamplitude 59

6.2 Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt 60

6.3 Schrödingergleichung 61

7 Inelastizität und Absorption 67

8 Niederenergieverhalten der Streuung 71

8.0.1 Streulänge a 71

8.1 Analytisch lösbare Modelle für das Niederenergieverhalten 72

8.1.1 Beispiel: Streuung von Neutronen an einer harten Kugel . . . 72

8.1.2 Beispiel: Streuung von Neutronen an einem Rechteck-Potentialtopf . . . 73

9 Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung 77

9.1 Die Observablen des NN-Systems . . . 77

9.1.1 NN-Observable . . . 78

9.1.2 NN-Streuphasen . . . 78

9.1.3 NN-Wechselwirkung als Austauschkraft . . . 79

9.1.4 Wenignukleonensysteme . . . 80

10 Bestimmung der T-Matrix 85

10.1 Integralgleichungen . . . 85

10.2 Bornsche Näherung . . . 87

10.2.1 1. Bornsche Näherung = PWBA = Plane Wave Born Approximation . . . 87

10.2.2 Distorted Wave Born Approximation = DWBA . . . 87

11 Reaktionsmodelle 89

11.1 Direkte Reaktionen . . . 89

11.1.1 Allgemeines . . . 89

11.1.2 Elastische Streuung . . . 89

11.1.3 Optisches Modell . . . 90

11.1.4 Direkte (Umordnungs-)Reaktionen . . . 91

11.1.5 Stripping-Reaktion . . . 92

11.1.6 Die Bornsche Näherung . . . 95

11.2 Compoundkern (CN)-Reaktionen . . . 97

11.2.1 Allgemeines . . . 97

11.2.2 Theoretischer Verlauf der Wirkungsquerschnitte 98

11.2.3 Herleitung der Partialbreitenamplituden für Kerne (nur s-Wellen) 99

11.3 Einzelresonanzen 100

11.3.1 Allgemeine Merkmale von Einzelresonanzen 100

11.3.2 Überlappende Resonanzen 102

11.3.3 Ericson-Fluktuationen 103

11.4 Vollständige Mittelung über die CN-Zustände 106

11.4.1 Allgemeines 106

11.4.2 Hauser-Feshbach-Formalismus 106

12 Ausgewählte Literatur zur Vorlesung **109**

12.1 Allgemeine und Lehrbücher 109

12.2 Gebietsübergreifende 109

12.3 Methoden und Technik 110

12.4 Kernreaktions- u. Streutheorie, Drehimpuls 110

12.5 Wenignukleonensysteme 110

12.6 Resonanzen 111

12.7 Statistisches Modell und Ericson-Fluktuationen 111

12.8 Intermediäre Strukturen 111

12.9 Optisches Modell 111

12.10 Direkte Reaktionen 111

12.11 Schwerionenreaktionen 112

12.12 Coulombanregung 112

12.13 Isospin und Isobar-Analogresonanzen 112

12.14 Polarisationsphänomene 112

12.15Nützlich, z.T. auch auf CD-ROM bzw. online 113

Kapitel 1

Vorwort

Kerne sind komplexe Vielteilchensysteme aus Nukleonen (Hadronen). Diese selbst erwiesen sich – v. a. durch Streuexperimente mit Leptonen (Elektronen, Myonen und Neutrinos) – als ausgedehnte Objekte mit komplexer innerer Struktur: Konstituentenquarks, Gluonen, deren Austausch die Quarks zusammenhält, Seequarks (Quark-Antiquark-Paare, in die die Gluonen sich verwandeln und umgekehrt) sowie - nach außen – virtuelle Mesonen, die einen Kernbereich (den *Bag*) umgeben. Abbildung 1.1a) zeigt diese innere Struktur des Nukleons.

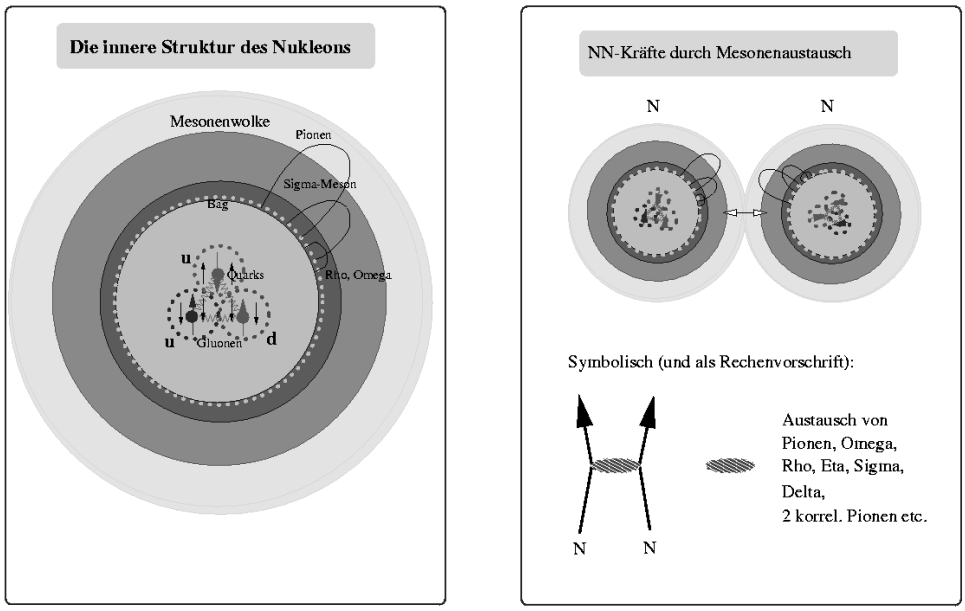


Abbildung 1.1: a) Struktur des Nukleons b) Austausch virtueller Mesonen verschiedener Massen als Ursache der Nukleon-Nukleon-Kraftanteile verschiedener Reichweite

Die virtuellen Mesonenwolken, die die Nukleonen umgeben, sind durch gegenseitigen Austausch von Mesonen auch die Ursache für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Dieser ist damit für die Existenz von Kernen und ihre Wechselwirkung verantwort-

lich. Abbildung 1.1b) zeigt diesen Austausch und die symbolische Darstellung als Feynman-Diagramm.

Kapitel 2

Einführung : Rolle der Kernreaktionen in der Kern- und Teilchenphysik

2.1 Ausdehnung der Kerne

Seit den bahnbrechenden Streuexperimenten von Geiger, Marsden und Rutherford bis 1912 und ihrer Deutung ist die Struktur des Atoms bekannt. Es besteht aus einem kompakten (d.h. kleinen und massiven) Kern, der die Ladung Ze (Z=Kernladungszahl=Ordnungszahl) und fast die gesamte Masse des Atoms trägt. Schon Rutherford konnte aus dem Verlauf der Streuwinkelverteilung in Übereinstimmung mit dem Experiment zusammen mit seinem Ansatz einer Punkt-Coulombwechselwirkung schließen, daß der Kern ein Objekt sein mußte, das kleiner war als die verwendeten Streuabstände (Größenordnung: 1fm = 10^{-15}m). Die reine Tatsache, daß Streuungen unter Rückwärtswinkeln vorkamen, zeigte, daß das Streuzentrum schwerer als das $\alpha-$Teilchen sein mußte. Die Elektronenhülle ist demgegenüber sehr ausgedehnt (Größenordnung: $1\mathring{A} = 10^{-10}$m) und trägt die Ladung -Ze, so daß das Atom exakt neutral ist. Durch Verwendung beschleunigter $\alpha-$Teilchen erreichte man ein Eindringen in den Targetkern und konnte die Kernausdehnung anhand der einsetzenden Abweichungen von der Punkt-Coulombstreuung genauer ermitteln. Eine Schlüsselrolle spielt hierbei der Begriff des *Ladungs-Formfaktors* und seiner Fouriertransformierten, der *Ladungsdichteverteilung*. In ihm drückt sich aus, wie stark das Coulombpotential einer ausgedehnten (oft vereinfacht als homogen angenommenen) Ladungsverteilung im Kerninnern von dem einer Punktladung abweicht oder welchen Einfluß die eigentliche (hadronische) Kernwechselwirkung auf die Observablen hat.

Durch die Verwendung von Leptonen als Sonden, die selbst keine meßbare Ausdehnung haben und nicht der starken Wechselwirkung unterliegen, konnten Ladungs-(und Strom-)Verteilungen in Kernen und Nukleonen ausgemessen werden. Bei höheren Impulsüberträgen (d.h. hohen Energien und größeren Streuwinkeln: *inelastische Streuung*) wurden zunächst Anregungszustände, dann (bei *tief-inelastischer Streu-*

ung) aber Substrukturen der Nukleonen (*Partonen*) entdeckt, die alle Eigenschaften der Quarks hatten: Drittelladungen, Spin $1/2\hbar$, Farbladung und Confinement, Elementarteilchencharakter (Punktförmigkeit, Strukturlosigkeit), Quellen der starken, elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung.

2.2 Typische Energien

Die Größenordnung der in Kernreaktionen maßgebenden Energien soll an drei Beispielen aufgezeigt werden:

2.2.1 Bindungsenergien der Kerne

Um einen Kern aus seinen Nukleonen (Protonen) zusammenzubauen, müssen alle Protonen gegen ihre gegenseitige Abstoßung unter Aufwendung der elektrostatischen Bindungsenergie zusammengeführt werden. Dies erfordert die Energie:

$$E_{Coul} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R}, \tag{2.1}$$

also z.B. etwa 800 MeV (bzw. etwa 4 MeV/Nukleon) für einen schweren Kern. Die Bindungsenergien der Kerne müssen also größer als dieser Wert sein. Eine Kernreaktion, bei der das Pojektil das Innere des Targetkerns berühren soll, muß mit entsprechenden Energien erfolgen. Dies erklärt die Notwendigkeit, Beschleuniger zu entwickeln und zu verwenden, da die Energien der Strahlen radioaktiver Präparate naturgemäß nicht ausreichen. Abbildung 2.1 zeigt die Entwicklung der Beschleunigerenergien seit 1930, insbesondere das jeweilige Einsetzen neuer technischer Entwicklungen nach der "Sättigung" einer Entwicklungslinie.

2.2.2 Coulombbarriere

Die Höhe der Coulombbarriere

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = 1,44\frac{Z_1 Z_2}{R(fm)}(MeV) = 1,44\frac{Z_1 Z_2}{R_0(A_1^{1/3}+A_2^{1/3})(fm)}(MeV) \tag{2.2}$$

ist maßgebend dafür, ob ein geladenes Teilchen in einen Kern eindringen und dort eine Reaktion auslösen kann oder nicht (diese Energie ist der im "Schwerpunktsystem" (der Relativbewegung) berechnete Wert).

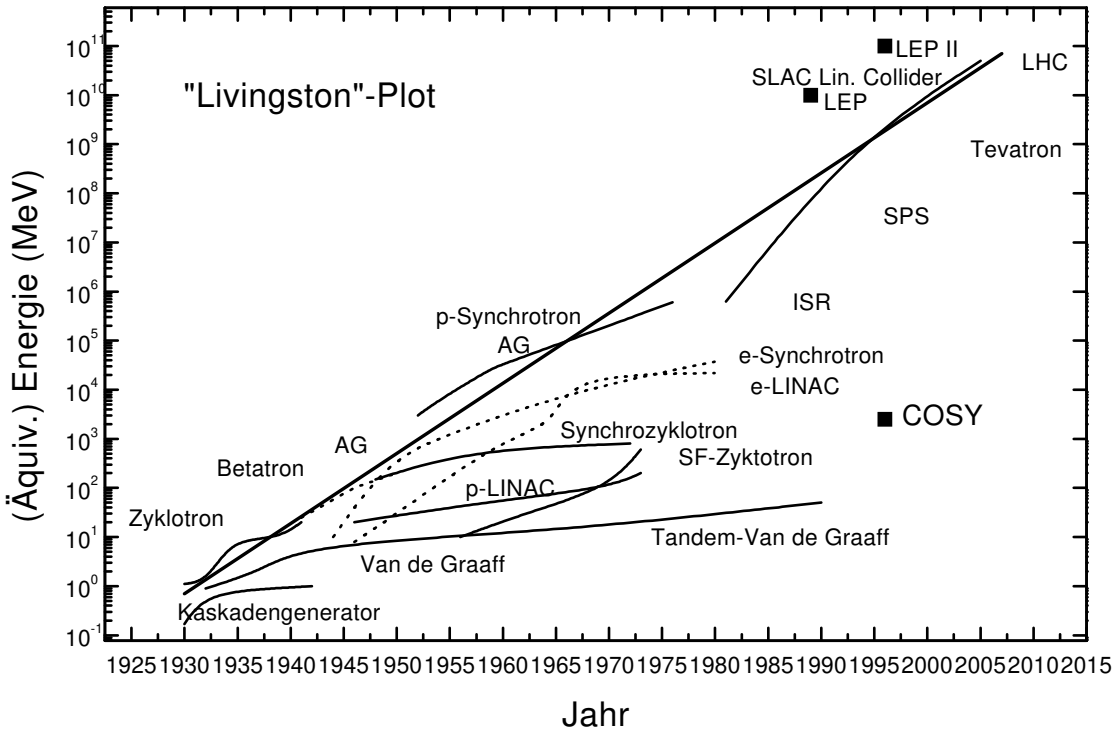


Abbildung 2.1: Zeitliche Entwicklung der Beschleuniger-Energien. Die Gerade entspricht einer Verdopplungszeit von ca. 7 Jahren

2.2.3 "Optisches" Argument

Die de-Broglie-Wellenlänge einer Teilchenstrahlung ist durch ihren Impuls bestimmt:

$$\bar{\lambda}_{deBroglie} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{T^2 + 2(m_0c^2)T}} = \frac{197(MeV)}{\sqrt{T^2 + 2(m_0c^2)T}}(fm). \qquad (2.3)$$

Analog zur Lichtoptik ist das Auflösungsvermögen eines Gerätes (Experiments) durch Beugungserscheinungen begrenzt, so daß nur Objekte voneinander getrennt nachgewiesen werden können, die mindestens um eine Wellenlänge voneinander entfernt sind. Details der räumlichen Kernstruktur wird man nur mit Elektronen mit Energien $\gg$197 MeV (dort ist $\bar{\lambda}_{deBroglie} = 1$ fm) oder Protonen mit Energien $\gg$1 MeV auflösen. Das Argument ist etwas ungenau: genauer sollte man die Wellenlänge der bei einer Wechselwirkung ausgetauschten Strahlung als Maß nehmen, also die der virtuellen Photonen bei der Elektron-Kern-Streuung, die der Austauschmesonen bei der Kernwechselwirkung, die der Gluonen bei der starken Wechselwirkung. Der übertragene Impuls $\hbar\vec{K}$, der hier eingesetzt werden muß, ist außer vom Projektilimpuls auch vom Streuwinkel abhängig. Für elastische Streuung ($\left|\vec{k}_{in}\right| = \hbar\left|\vec{k}_{out}\right|$) ergibt sich z. B. mit dem Kosinussatz)

$$\hbar\left|\vec{K}\right| = \hbar\left|\vec{k}_{in} - \vec{k}_{out}\right| = 2\hbar\left|\vec{k}_{in}\right| sin(\theta/2) \qquad (2.4)$$

Die Abbildung 2.2 zeigt die reduzierte de Broglie-Wellenlänge von Elektronen, Pionen, Protonen und α-Teilchen als Funktion der kinetischen Energie. Im hochrelativistischen Bereich ist λ nicht mehr von der Teilchensorte abhängig und nimmt mit T^{-1} (anstatt nichtrelativistisch mit $T^{-1/2}$) ab.

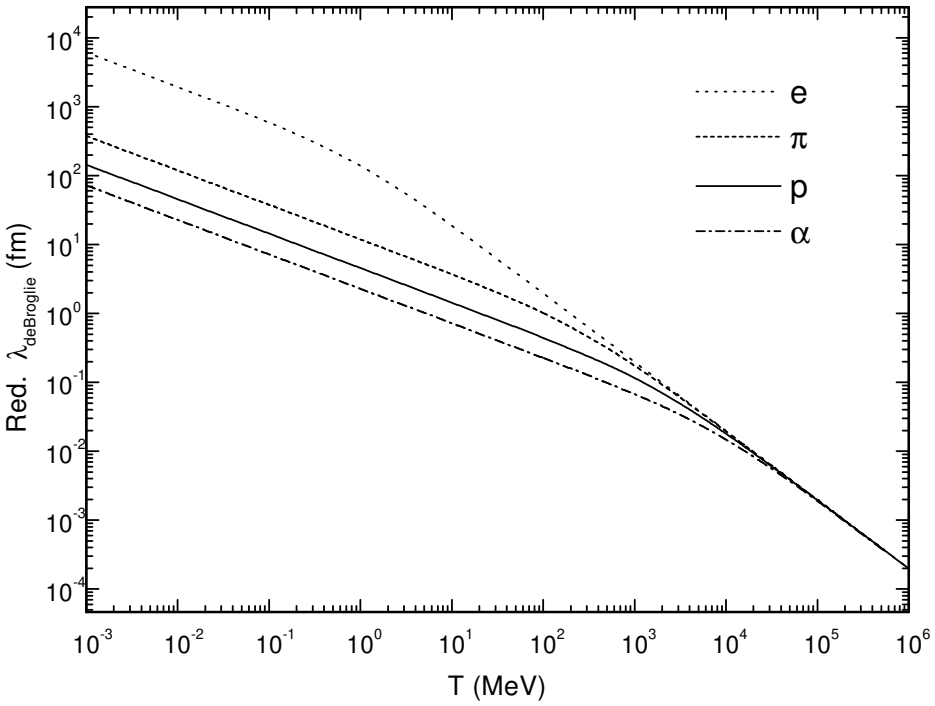


Abbildung 2.2: Die reduzierte de Broglie-Wellenlänge verschiedener Teilchen als Funktion ihrer kinetischen Energie T

2.3 Kernspektroskopie und Kernreaktionen

Die Kernspektroskopie, die die Eigenschaften der Kernzustände untersucht, ist zu deren Anregung in vielfältiger Weise auf Kernreaktionen und die hierzu nötigen Techniken (Ionenquellen, Beschleuniger) angewiesen. Es seien ein paar Beispiele genannt:

- $\gamma-$Übergänge in Kernen lassen sich z.B. nach Coulombanregung untersuchen. Hier dient das schnell wechselnde starke elektrische Feld eines hochbeschleunigten Schwerions zur Anregung im Vorbeiflug.

- Fusions-Verdampfungs-Reaktionen (*Fusion evaporation reactions*) erlauben durch Wahl von Reaktionspartnern und Einschußenergien die Drehimpulse und Anregungsenergien bestimmter zu untersuchender Endkerne festzulegen. Ein Bei-

spiel ist die Bevölkerung superdeformierter Yrastbanden und deren Spektroskopie.

- Anregungsfunktionen der elastischen und inelastischen Protonenstreuung über Isobar-Analogresonanzen ermöglichen die detaillierte Spektroskopie insbesondere von Schalenmodell-Kernzuständen.

- Transferreaktionen wie (d,p)-Stripping dienten v.a. historisch zur Auffindung von Schalenmodellzuständen und ersten Bestätigung des Einteilchen-Schalenmodells.

2.4 Kernreaktionsmodelle

Mangels einer vollständigen Theorie der Kernwechselwirkung (auch die Anwendung der Quantenchromodynamik als fundamentaler Theorie der starken Wechselwirkung stößt auf unüberwindliche Schwierigkeiten im "nichtperturbativen" Bereich) gibt es in der Kernphysik, d.h. auch für die Beschreibung von Kernreaktionen, keinen vollständigen Hamiltonoperator. Man ist auf Modelle angewiesen, die naturgemäß einen beschränkten Gültigkeitsbereich haben. Die verschiedenen Kernreaktionsmodelle lassen sich besonders anschaulich nach der Zeitdauer der Wechselwirkung klassifizieren mit den Grenzfällen direkter (schneller) Reaktionen einerseits, (langsamer) Compoundkernreaktionen andererseits. Typische Modelle für schnelle Reaktionen sind z.B.:

- das optische Modell der elastischen Streuung

- DWBA ("Distorted Waves Born Approximation", CCBA ("Coupled Channels Born Approximation") für direkte inelastische Streuung bzw. Reaktionen wie die Stripping- oder Pickup-Reaktionen

Langsame Prozesse, die über isolierte Resonanzen ablaufen, werden beschrieben mit der

- R-Matrix und Breit-Wigner-Theorie für Compoundkern-Resonanzen

Zwischen beiden Grenzfällen liegen z.B. die

- Hauser-Feshbach-Theorie für Reaktionen über stark überlappende Compoundkernzustände

- Chaostheorien zur Beschreibung von Verteilungsfunktionen von Resonanzen und Ericson-Fluktuationen

- Beschreibung von "intermediären" Strukturen durch "doorway"-Zustände

Kapitel 3

Klassischer Wirkungsquerschnitt

3.1 Ablenkungsfunktion

Wirkungsquerschnitte sind die zentrale Meßgröße der Kern- und Teilchenphysik. In manchen Bereichen der Kernphysik (Schwerionenphysik) werden Kernreaktionen (Streuung) häufig (semi-)klassisch behandelt. Ebenso läßt sich die historisch wichtige Rutherfordstreuung klassisch beschreiben. Die klassische Beschreibung impliziert, daß Teilchen und ihre Bahnen lokalisiert sind. Es muß jedoch in jedem Einzelfall geprüft werden, ob eine klassische Beschreibung zulässig ist. Ein Kriterium für Klassizität ist, daß (wie in der Optik für den Fall der geometrischen Optik) die Wellenlänge der verwendeten Strahlung klein gegenüber einer charakteristischen Objektdimension d ist. Im Einklang mit der Unschärferelation heißt das für Teilchenstrahlung:

$$\bar{\lambda}_{deBroglie} = \hbar/p \ll d \tag{3.1}$$

Wählt man als typische Objektdimension den halben Umkehrabstand d_0 beim zentralen Stoß, so erhält man das Sommerfeld-Kriterium für klassische Streuung:

$$\eta_S = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{c}{v} = Z_1 Z_2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} \gg 1 \tag{3.2}$$

oder numerisch (für ein schweres Target)

$$\eta_S = 0,16 \cdot Z_1 Z_2 \sqrt{\frac{A_{Proj}}{E_{lab}(MeV)}} \gg 1 \tag{3.3}$$

Es gibt verfeinerte Kriterien, die berücksichtigen, daß die Welleneigenschaften der Strahlung zu Beugungserscheinungen führen, besonders dort, wo sich das Potential stark ändert, d.h. am Kernrand. Man fordert also, daß die de Broglie-Wellenlänge sich mit r durch den Potentialgradienten nicht stark ändert. Für Coulombstreuung

führt das zu dem winkelabhängigen Kriterium

$$\eta_S^2 \gg \eta_{crit}^2 = \left(\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2)(1-\sin(\theta/2))} \right)^2 \tag{3.4}$$

Hiernach ist bei $\theta = 0^0$ stets, bei $\theta = 180^0$ niemals eine klassische Beschreibung möglich.

Im Falle der Streuung identischer Teilchen ist wegen der Austauschsymmetrie niemals eine klassische Beschreibung möglich (s.u.).

Hier wird eine vollständige Definition des (klassischen) Wirkungsquerschnittes gegeben, die sich leicht auf die quantenmechanische Definition übertragen läßt:

Definition 1 *Der (differentielle) Wirkungsquerschnitt ist die Anzahl Teilchen einer bestimmten Art aus einer Reaktion, die pro Targetatom und Zeiteinheit in das Raumwinkelelement $d\Omega$ (gebildet durch das Winkelintervall $\theta ... \theta + d\theta$ und $\phi ... \phi + d\phi$) gestreut werden, dividiert durch den einfallenden Teilchenfluß j (Stromdichte!).*

Bis auf weiteres setzen wir Azimut- (d.h. ϕ-)unabhängigkeit der Streuung voraus (Teilchen ohne Spins oder Teilchen mit Spins, aber mit spinunabhängiger Wechselwirkung). Dann führt diese Definition zur klassischen Formel für den Wirkungsquerschnitt. Mit der Anzahl Teilchen $jd\sigma = j \cdot 2\pi b db$ erhält man:

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cl} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\theta d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \tag{3.5}$$

$b = b(\theta, E)$ enthält den Einfluß der Wechselwirkung (Dynamik). $\theta(b)$ heißt aus naheliegenden Gründen auch *Ablenkungsfunktion*. Ihre Kenntnis bestimmt die Streuung vollständig.

3.2 Rutherfordstreuung

3.2.1 Rutherford-Streuquerschnitt

Für die Ableitung des Rutherford-Streuquerschnittes machen wir folgende Annahmen:

- Das Projektil und das Streuzentrum (Target) seien punktförmige Teilchen (dies ist wegen des Satzes von Gauß auch für ausgedehnte Teilchen erfüllt, solange sich die Ladungsverteilungen nicht berühren)
- Der Targetkern sei unendlich schwer (Labor- = Schwerpunktsystem)

- Die Wechselwirkung sei die rein elektrostatische Coulombkraft

$$F_C = \pm\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} = \frac{C}{r^2} \tag{3.6}$$

  mit dem zugehörigen Coulomb-Potential $V_C = \pm C/r$.

Die klassische Streusituation zeigt Abbildung 3.1.

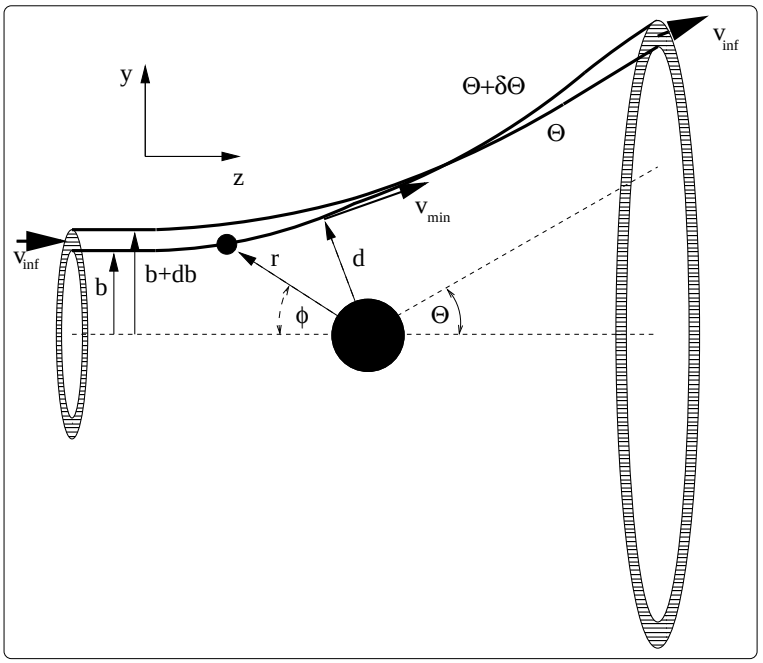


Abbildung 3.1: Rutherfordstreuung klassisch

Die Ablenkungsfunktion läßt sich am einfachsten direkt mit Hilfe des Drehimpulssatzes und der Bewegungsgleichung in einer Koordinate (y) bestimmen:

$$L = mv_\infty b = mr^2\dot{\phi} = mv_{min}d \tag{3.7}$$

und daraus

$$dt = r^2 d\phi / v_\infty b \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} m\Delta v_y &= \int F_y dt \\ v_\infty \sin\theta &= \frac{C}{mv_\infty b}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\phi}\sin\phi dt \\ &= \frac{C}{mv_\infty b}\int_0^{\pi-\theta}\sin\phi d\phi = \frac{C}{mv_\infty b}(1+\cos\theta) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nach Umrechnung auf den halben Streuwinkel ergeben sich die Ablenkungsfunktion

$$\cot(\theta/2) = mv_\infty^2 b/C = v_\infty L/C \tag{3.10}$$

sowie

$$b = \frac{C}{2E_\infty}\cdot\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.11}$$

und

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{C}{2mv_\infty^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{C}{4E_\infty} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \tag{3.12}$$

und damit für den Rutherford-Querschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_\infty}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{3.13}$$

Numerisch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 1.296 \left(\frac{Z_1 Z_2}{E_\infty(MeV)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \left[\frac{mb}{sr}\right] \tag{3.14}$$

3.2.2 Minimaler Streuabstand d

Hierfür benötigt man zusätzlich den Energieerhaltungssatz:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_{min}^2}{2} + \frac{C}{d} \tag{3.15}$$

Der absolut kleinste Abstand d_0 wird beim zentralen Stoß erreicht. Hier gilt:

$$E_\infty = \frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{C}{d_0} \tag{3.16}$$

Hieraus und aus dem Drehimpulssatz Gl.(2.3) gewinnt man die Beziehung:

$$b^2 = d(d - d_0) \tag{3.17}$$

mit der Lösung:

$$\begin{aligned} d &= \frac{C}{2E_\infty}\left(1 + \sqrt{1 + b^2 \frac{4E_\infty^2}{C^2}}\right) \\ &= \frac{d_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin\theta/2}\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Den klassischen Streuabstand d, bezogen auf den Minimalabstand d_0 als Funktion des Streuwinkels, zeigt Abbildung 3.2.

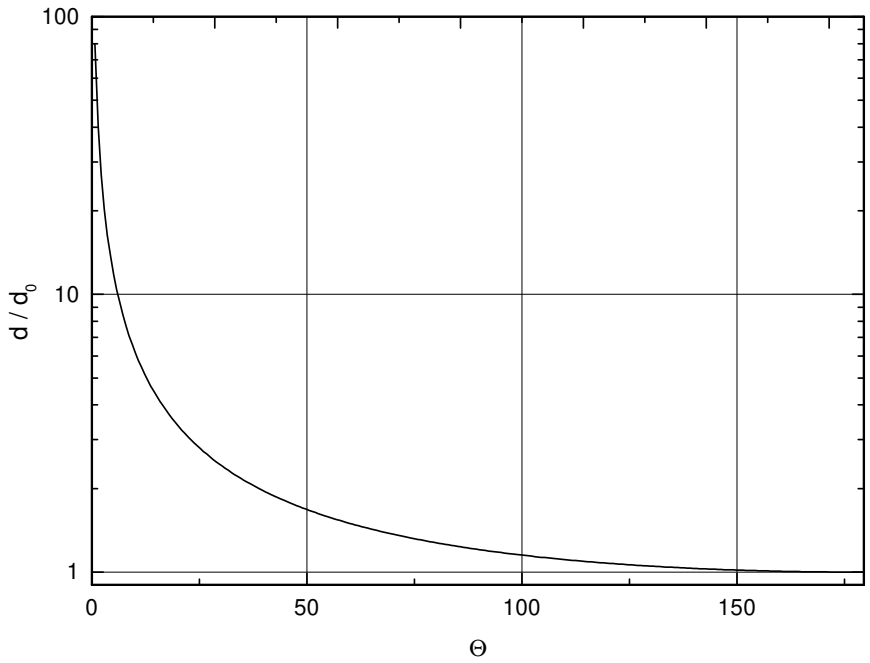


Abbildung 3.2: Minimaler Streuabstand als Funktion des Streuwinkels

3.2.3 Bahn im Coulombfeld

Für die Bewegung im Zentralkraftfeld mit einer Kraft $\propto r^{-2}$ zeigt die klassische Mechanik, daß die Bahnen Kegelschnitte sind (für ein Streuproblem Hyperbeln). Für die Ableitung braucht man wieder Drehimpuls- und Energieerhaltungssatz (hier mit Coulomb-Potential):

$$L = mr^2\dot{\phi} = const \tag{3.19}$$

$$E = \frac{mr^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{C}{r} \tag{3.20}$$

Hieraus wird dt eliminiert. Die Integration von

$$d\phi = -\frac{L}{mr^2}\left[\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2} dr \tag{3.21}$$

liefert

$$r = \frac{L^2}{mC} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{4E^2b^2}{C^2}}\cos\phi} \tag{3.22}$$

mit $b = L/\sqrt{2mE}$. Mit $k = L^2/mC$ und $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E^2b^2}{C^2}}$ (Exzentrizität) entspricht dies der Standardform für Kegelschnitte:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 - \epsilon\cos\phi) \tag{3.23}$$

3.2.4 Folgerungen

Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Stoßparameter b, Streuwinkel θ und Bahndrehimpuls L=$\ell\hbar$:

$$b = \frac{1}{2} d_0 \cot \frac{\theta}{2} = \frac{\ell\hbar}{p_\infty} \tag{3.24}$$

Wegen der Quantisierung von L sind den Bahndrehimpulsquantenzahlen l=0,1,2,... Ringzonen um die z-Richtung zugeordnet. Zu größeren Streuwinkeln gehören kleinere Stoßparameter und kleinere Bahndrehimpulse.

3.2.5 Folgerungen aus dem Rutherfordexperiment und seine historische Bedeutung

Rutherford und seine Mitarbeiter Geiger und Marsden (später auch Chadwick) benutzten α-Teilchen aus Präparaten als Projektile. Deren Energien waren so klein, daß für alle Streuwinkel die Minimalabstände d groß gegen die Summe der beiden Kernradien von Projektil und Target waren. Die volle Übereinstimmung zwischen dem Ergebnis der Messungen und der (Punkt-)Rutherford-Streuformel zeigte dies im Einklang mit dem Gaußschen Satz der Elektrostatik, wonach auch eine endliche Ladungsverteilung nach außen wie ein r^{-1}-Potential wirkt. Darüberhinaus zeigt das Vorkommen von Rückwärtsstreuereignissen eindeutig, daß die Targetkerne schwerer sein mußten als die Projektile. Damit war der Atomkern als kompaktes (d.h. sehr kleines und schweres Objekt) nachgewiesen.

Die Z-Abhängigkeit des Rutherfordquerschnittes konnte (ergänzend zu den charakteristischen Röntgenspektren mittels des Moseleyschen Gesetzes) benutzt werden, um Kernladungszahlen und die Zuordnung von Elementen zu Positionen im Periodensystem zu überprüfen.

3.2.6 Abweichungen von der Rutherfordformel

Gemäß dem oben Gesagten erwartet man Abweichungen in folgenden Fällen:

- bei Modifikationen des Punkt-Coulombpotentials durch die Abschirmwirkung der Atomelektronen (abgeschirmtes Coulombpotential). Diese sollten sich v.a. bei Vorwärtswinkeln bemerkbar machen. Näheres hierzu bei der Ableitung des Rutherfordquerschnittes mittels der Bornschen Näherung (Kap. 10.2)
- bei ausgedehnter Ladungsverteilung und genügend hoher Energie, so daß das Projektil in den Kern eintaucht. Leptonische Projektile können diese Ladungsverteilung abtasten. Bei hadronischen geladenen Projektilen erwartet man, daß

starke Effekte der Kernwechselwirkung hinzukommen, während Neutronen nur die Materiedichteverteilung sehen. Aus solchen Streuexperimenten wurden neben den Dichteverteilungen Ladungs- und Materieradien der Kerne und Nukleonen und deren Systematik mit der Kernmassenzahl A bestimmt (s.u.). Das Prinzip fand und findet Anwendung bei der Streuung höchstenergetischer Leptonen (Elektronen, Myonen und Neutrinos) an Nukleonen und führte zum Nachweis von Partonen (den Quarks) in den Nukleonen und zur Bestimmung von deren Eigenschaften (Spin, Massen, Ladungen).

3.3 Streuung, Dichteverteilungen und Kernradien

3.3.1 Kernradien aus Abweichungen von der Rutherfordstreuung

Ohne nähere Kenntnis der Dichteverteilung und des Potentials kann man recht genaue Aussagen über Kernradien durch Streuung geladener Projektile an Kernen gewinnen. Voraussetzung ist allerdings, daß das Potential, das die Abweichungen vom Punktquerschnitt erzeugt, kurzreichweitig ist, bzw. daß die Ladungsverteilung einen relativ scharfen Rand besitzt.

Am eindrucksvollsten stellen sich die bei zunehmender Annäherung zwischen Projektil und Target auftretenden Abweichungen vom Punktquerschnitt bei geschickter Auftragung dar. Da der Rutherfordquerschnitt selbst stark energie- und winkelabhängig ist, wählt man das Verhältnis

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{exp}/(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{Punkt,theor.} \tag{3.25}$$

als Funktion des Minimalstreuabstandes d. Dies erlaubt, Daten bei sehr verschiedenen Energien und Winkeln zu vergleichen (s. Abb. 3.2). Wenn man darüberhinaus die Annahme der Systematik der Kernradien $r = r_0 A^{1/3}$ benutzen bzw. überprüfen will, erhält man eine universelle Darstellung für alle möglichen Streupartner mit der Auftragung über $d/(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$. Wie die experimentellen Ergebnisse zeigen, wirken sich die Ausdehnung der Ladungsverteilung und das Einsetzen der (hadronischen) Absorption als starke Abnahme des Wirkungsquerschnittes bei einem scharf definierten Wert dieses Parameters von 1,5 fm aus. Es ist zu beachten, daß diese Zahl einem universellen Radiusparameter von r_0=1,1 fm entspricht, wenn man für die Reichweite der Kernkräfte 1,5 fm einsetzt.

3.3.2 Coulombstreuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

Hier soll die quantenmechanische Ableitung des Rutherfordstreuquerschnittes für eine homogene Ladungsverteilung gezeigt werden. Ausgangspunkte sind

- Fermis *Goldene Regel* der Störungstheorie
- die 1. Bornsche Näherung

Fermis Goldene Regel liefert für eine "genügend schwache" Störung die Übergangwahrscheinlichkeit pro Zeit W:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \Psi_{out} \left| H_{int} \right| \Psi_{in} \rangle\right|^2 \rho(E) \\ &= \frac{Vmpd\Omega}{4\pi^2\hbar^4} \cdot \left|H_{if}\right|^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Hier wurde benutzt, daß die Dichte der Endzustände $\rho(E) = dn/dE$ aus dem Verhältnis dn des gegebenen zum minimal möglichen Phasenraumvolumen berechnet werden kann:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{V 4\pi p^2 dp \frac{d\Omega}{4\pi}}{(2\pi\hbar)^3 dE} \tag{3.27}$$

mit $E = p^2/2m$ bzw. $dp/dE = m/p = E/c^2 p$. Hieraus:

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{dn}{dE} = V\frac{pmd\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \\ &= V\frac{pEd\Omega}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Der Wirkungsquerschnitt entsteht aus W gemäß der Definition auf S. 18 mit der einlaufenden Stromdichte $j = v/V = p/mV$ als:

$$d\sigma = \frac{W}{j} = \frac{W}{(\frac{p}{mV})} = \frac{V^2 m^2 d\Omega}{4\pi^2\hbar^4} \cdot \left|H_{if}\right|^2 \tag{3.29}$$

Die 1. Bornsche Näherung besteht darin, den ersten Term der Bornschen Reihe (s.u.) mit ebenen Wellen im Ein- und Ausgangskanal anzusetzen:

$$\Phi_{in} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_i\vec{r}} \qquad \text{und} \qquad \Phi_{out} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_f\vec{r}} \tag{3.30}$$

$H_{int} = U(r)$ kennzeichne eine kleine, zeitunabhängige Störung. Mit $\vec{K} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ erhält man:

$$|H_{if}| = \left|\frac{1}{V}\int e^{i\vec{K}\vec{r}}U(r)d\tau\right| \tag{3.31}$$

und

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = [\frac{m}{2\pi\hbar^2}]^2 \left|\int e^{i\vec{K}\vec{r}}U(r)d\tau\right|^2 = |f(\theta)|^2 \tag{3.32}$$

Durch Einsetzen des Coulombpotentials U(r)=C/r erhält man wieder die auch klassisch berechnete Formel für den Rutherford-Streuquerschnitt.

Der Wirkungsquerschnitt ist also (mit der Konstanten $Z_1 Z_2 e^2/16$ und der Substitution $u = iKr\cos\theta$ und $du = -\sin\theta\, d\theta(iKr)$)

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= const.\left|\int e^{i\vec{K}\vec{r}}\cdot\frac{1}{r}d\tau\right|^2 \\
&= const.\left|\int\int\frac{1}{r}e^{iKr\cos\theta}2\pi\sin\theta\, d\theta r^2 dr\right|^2 \\
&= const.2\pi\left|\int\int\frac{r}{iKr}e^u\, du\, dr\right|^2 = const.\left(\frac{2\pi}{iK}\right)^2\left|\int_r\left(e^{iKr\cos\pi}-e^{iKr\cos 0}\right)\, dr\right|^2 \\
&= const.\left(\frac{2\pi}{iK}\right)^2\left|\int_r\left(e^{-iKr}-e^{iKr}\right)\, dr\right|^2 \\
&= const.\left[\frac{(2\pi)(2i)}{iK}\right]^2\left|\int_0^\infty\sin Kr\, dr\right|^2 .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Das Integral ist nicht definiert. Daher macht man einen *Abschirmansatz* nach dem Vorbild von Bohr, der der realen Situation einer Abschirmung des Punkt-Coulombpotentials durch die Elektronen der Atomhülle entspricht, mit der Abschirmkonstanten α. Man benutzt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r}\sin Krdr = \frac{K}{K^2+\alpha^2} \tag{3.34}$$

und erhält

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{R,s} = \left[\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2(\alpha^2+4k^2\sin^2(\theta/2)}\right]^2 \tag{3.35}$$

mit dem Impulsübertrag $K = 2k\sin(\theta/2)$ für elastische Streuung. Dieser Wirkungsquerschnitt ist endlich für $\theta \to 0^0$. Indem man die Abschirmkonstante gegen Null gehen läßt, erhält man den Wirkungsquerschnitt, der mit dem aus der klassischen Ableitung identisch ist:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R &= \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{R,s} \\
&= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_{kin}}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Erweiterung der Ableitung des Rutherfordquerschnittes auf eine ausgedehnte (homogene und sphärisch-symmetrische) Ladungsverteilung ist einfach und führt zum grundlegenden Konzept des *Formfaktors*.

Zunächst sei das Coulomb-Potential einer ausgedehnten homogenen sphärischen Ladungsverteilung angegeben (Abbildung 3.3). Es berechnet sich aus dem Gaußschen Satz der Elektrostatik zu

$$V(r) = \begin{cases} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \text{ für } r > R \\ \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R}\left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right] \text{ für } r \leq R \end{cases} \tag{3.37}$$

Es ist im Außenraum mit dem Potential einer Punktladung identisch, schließt für r=R an dieses an und hat im Innenbereich Parabelform. Es ist zu erwarten, daß bei einer Streuung mit genügend hoher Energie der Streuquerschnitt stark vom Rutherfordquerschnitt abweicht, sobald die Kernoberfläche berührt wird, insbesondere auch, weil dann die starke Wechselwirkung mit Streuung und Absorption einsetzt.

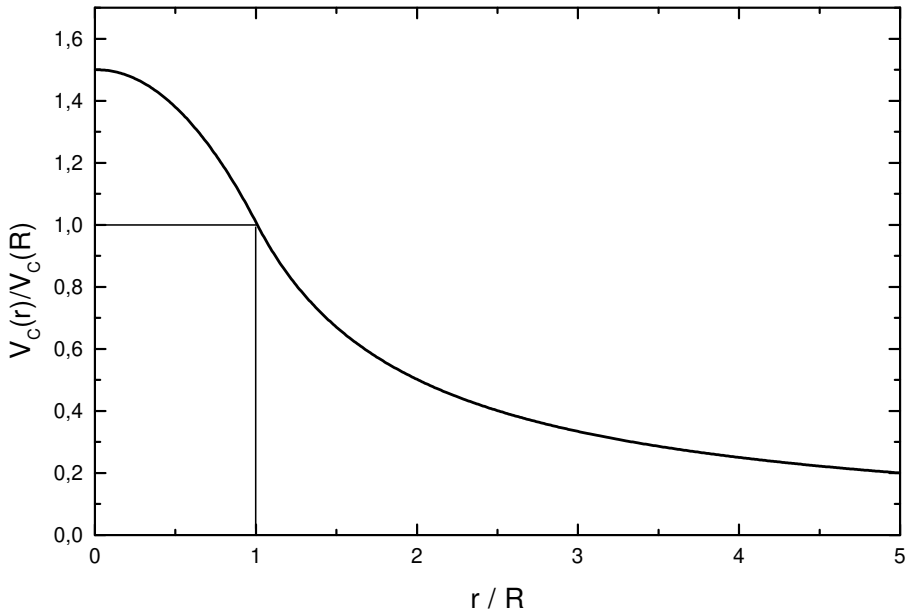


Abbildung 3.3: Coulomb-Potential einer sphärischen homogenen Ladungsverteilung

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes integriert man über die Beiträge aller Ladungselemente $dq = Ze\rho(\vec{r})d\tau$ zum Potential $U(\vec{r}) = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \cdot e^{-\alpha R}\rho(\vec{r})d\tau$

$$U(\vec{r}') = -Z_1 Z_2 e^2 \int \rho(\vec{r}')\frac{e^{-\alpha R}}{R}d\tau \tag{3.38}$$

Setzt man dies in die Bornsche Näherung Gl. (3.32) ein (mit $d\vec{R} = d\vec{r}'$ und $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$), so ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \cdot \left[\int \rho(\vec{r}e^{i\vec{K}\vec{r}}d\tau \cdot \int \frac{e^{-\alpha R}}{R}e^{i\vec{K}\vec{R}}d\vec{R}\right]^2$$

$$= \left(F(\vec{K}^2) \frac{K}{K^2 + \alpha^2} \right)^2 \tag{3.39}$$

Der Wirkungsquerschnitt faktorisiert in zwei Anteile, von denen der eine (nach Grenzübergang $\alpha \to 0$ wieder den Punktquerschnitt ergibt, der andere den Formfaktor:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Punktkern} \cdot \left| F(\vec{K}^2) \right|^2 \tag{3.40}$$

Diese Zerlegung ist charakteristisch für die Wechselwirkung zwischen ausgedehnten Objekten und bedeutet eine Trennung zwischen der eigentlichen Wechselwirkung (z.B. Coulombwechselwirkung) und der Struktur der wechselwirkenden Teilchen.

Experimentell erhält man den Formfaktor als das Verhältnis

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{experimentell} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{theor.,Punkt} \tag{3.41}$$

Die Ladungsverteilung (oder allgemeiner: Dichteverteilung z.B. der hadronischen Materie) erhält man durch *Fourier-Inversion* des Formfaktors:

$$\rho_c(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{0 \to \infty} F_c(\vec{K}^2) e^{-i\vec{K}\vec{r}} d\vec{K} \tag{3.42}$$

Das bedeutet, daß (im Prinzip) für eine vollständige Kenntnis von $\rho(\vec{r})$ F für alle Werte des Impulstransfers bekannt sein müßte. Da $\rho(\vec{r})$ für kleine $\vec{r}$ von den hohen Komponenten von $\vec{K}$ bestimmt wird, ist dies in der Praxis nicht erreichbar. Aus diesem Grunde wählt man z.B. folgende Näherungen:

- Man macht Modellannahmen für die Form der Verteilung: z.B. homogen geladene Kugel, exponentieller, Yukawa- oder Woods-Saxon-Verlauf.
- Man wählt die modellunabhängige Methode der Entwicklung von $e^{i\vec{K}\vec{r}}$ nach Momenten.

3.3.3 Modellansätze

Hierzu ist es nützlich, die Fouriertransformierten verschiedener Modellverteilungen darzustellen:

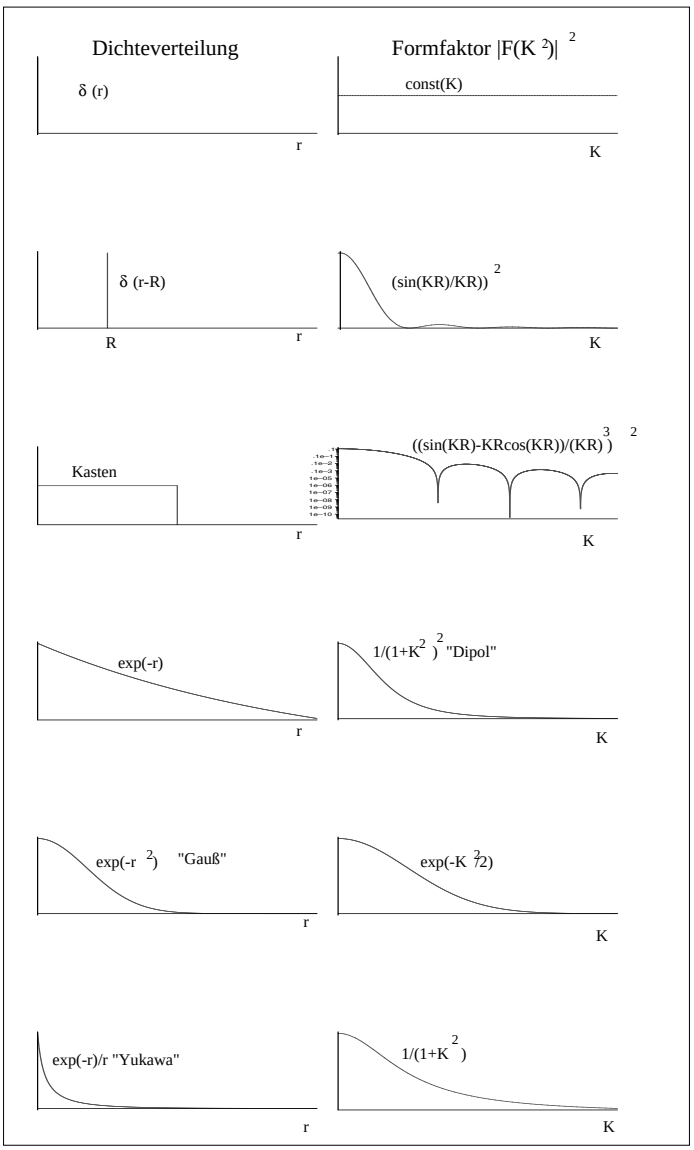


Abbildung 3.4: Quadrate der Fouriertransformierten verschiedener Ladungsdichteverteilungen

Ganz allgemein läßt sich feststellen, daß "scharfkantige" Verteilungen zu oszillierenden Formfaktoren (und damit Wirkungsquerschnitten), glatte Verteilungen zu glatten Formfaktoren führen. In Übereinstimmung mit unserem Ansatz entspricht einer δ-Verteilung ein konstanter Formfaktor ("Skaleninvarianz").

3.3.4 Momentenentwicklung

Mit der Potenzreihenentwicklung von $e^{i\vec{K}\vec{r}}$ wird der Formfaktor

$$F(\vec{K}^2) \propto \int \rho(\vec{r})[1 + i\vec{K}\vec{r} - \frac{(\vec{K}\vec{r})^2}{2!} + -...]d\tau \tag{3.43}$$

Bei Annahme einer sphärisch-symmetrischen Verteilung (reiner r-Abhängigkeit) und mit einer Normierung so, daß für ein Punktobjekt der konstante Formfaktor gerade 1 ergibt, gilt:

$$F(\vec{K}^2) = 1 - const \cdot K^2 \int_{0\to\infty} r^2 \rho(r) d\tau \pm ... \tag{3.44}$$

Der zweite Term enthält den mittleren quadratischen Radius $\langle r^2 \rangle = r_{rms}^2$. Für kleine Werte von $K^2\langle r^2 \rangle$ ergibt sich hieraus modellunabhängig (d.h. für beliebige Formfaktoren):

$$F(\vec{K}^2) \approx 1 - \frac{1}{6} K^2 \langle r^2 \rangle \tag{3.45}$$

Natürlich ist diese Näherung umso schlechter (d.h. man braucht umso höhere Momente), je kleiner r ist, d.h. je feinere Strukturen der Verteilung man auflösen will.

3.3.5 Ergebnisse der Hadronenstreuung

Nachdem Beschleuniger zur Verfügung standen, konnten Ladungs- und Materiedichteverteilungen der Kerne und deren Radien durch Abtasten der Verteilungen mit hadronischen Projektilen erforscht werden. Sowohl mit leichten und schweren Ionen, aber auch Neutronen als Projektilen ist zu beachten, daß sie Ausdehnung und Struktur besitzen. Das führt dazu, daß detaillierte Aussagen über die Dichteverteilungen schwierig bzw. unmöglich sind. Aussagen über Kernradien sind jedoch möglich. Hier soll auf die Resultate mit geladenen Teilchen eingegangen werden, bei denen die Wechselwirkung bekannt ist, während Neutronen die Behandlung mit Kernstreumodellen (z.B. Optisches Modell) voraussetzen.

3.4 Elektronenstreuung

Da Elektronen (und alle Leptonen) als punktförmig gelten, sind sie, solange nicht die hadronische Wechselwirkung direkt abgetastet werden soll, die idealen Projektile. Sie "sehen" die elektromagnetische (und schwache) Struktur der Kerne. Die Behandlung muß naturgemäß relativistisch sein. Anstelle des Rutherford- (Punkt-Coulomb-)Ansatzes muß die Dirac-Theorie treten.

Unterschiede zum (klassischen) Rutherfordquerschnitt entstehen neben der Relativistik durch den Spin der Leptonen. Die Ableitung der richtigen Streuquerschnitte setzt die Methoden der Quantenelektrodynamik (QED) und Techniken wie die der Feynman-Diagramme voraus. Hier sollen nur die Ergebnisse genannt werden. Die Wechselwirkung zwischen Elektron und Hadron wird durch den Austausch virtueller Photonen übermittelt, der mit einem Übertrag von Energie und Impuls einhergeht. Die Wellenlänge dieser Photonen ergibt sich direkt aus dem Impulsübertrag $\hbar K = 2(h\nu/c)\sin(\theta/2)$ zu

$$\bar{\lambda}_{deBroglie} = \frac{\hbar}{\hbar K} = 1/K \tag{3.46}$$

Das Beugungsbegrenzungsargument läßt sich auch im komplementären Zeitbild formulieren; man kann sagen, daß man bei großen Wellenlängen aufgrund der Unschärferelation lange Meßzeiten hat, in denen das Projektil nur ein zeitgemitteltes Bild des betrachteten Objektes sieht, während kleine Wellenlängen kurze Meßzeiten bewirken, in denen man Momentaufnahmen des Objektes bzw. seiner Substrukturen (Partonen) erhält.

Im wesentlichen kann man bei der Leptonenstreuung bei höheren Energien drei Bereiche des Impulsübertrages unterscheiden:

- Elastische Streuung bei kleinem Impulsübertrag ist geeignet, die Form des Hadrons abzutasten. Die resultierenden Formfaktoren (es sind zwei) liefern wieder durch Fourier-Inversion die Ladungs- und Strom-(magn. Moment-)verteilungen und die Radien der Hadronen.

- (Schwach) inelastische Streuung bei höherem Impulsübertrag führt zu Anregungen des Hadrons (z.B. Delta- oder Roper-Anregung des Nukleons). Die Formfaktoren sind sehr ähnlich denen der elastischen Streuung.

- Tief-inelastische Streuung ist geeignet, die Partonen der Hadronen zu sehen. Auf diese Weise wurden in der Elektronen- und Myonenstreuung die (gebundenen) Quarks und ihre Eigenschaften (Spin, Impulsbruchteil) und auch die Seequarks (s-Quark/Antiquarkpaare) identifiziert. Insbesondere zeigte sich die Punktförmigkeit dieser Konstituenten durch die näherungsweise Konstanz der Formfaktoren (hier: Strukturfunktionen) mit dem Impulsübertrag (Bjorken-Scaling).

Hier soll nur auf die elastische Streuung näher eingegangen werden. Die QED liefert für den differentiellen Wirkungsquerschnitt die Rosenbluth-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{Punkt} \cdot \left\{ \frac{F_E^2 + bF_M^2}{1+b} + 2bF_M^2 \tan^2\frac{\theta}{2} \right\} \tag{3.47}$$

Der Punktquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_{Punkt}$ ist ein verallgmeinerter Rutherfordquerschnitt und ist mit den Methoden der QED (z.B. mittels Feynman-Diagrammen) berechenbar. Die allgemeinste Form dieses Querschnittes (der Dirac-Streuquerschnitt) enthält als Hauptanteil die elektrische Streuung, einen vom Impulsübertrag abhängigen Anteil der magnetischen (spinabhängigen) Streuung und eine Korrektur für den Kernrückstoß:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \frac{\alpha^2}{4p_0^2 \sin^4(\theta/2)} \left[1 + \frac{2p_0}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \{\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\} \tag{3.48}$$

Für kleine Energien bzw. Impulsüberträge vereinfacht sich dies zu:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\left[2e^2(E'c^2)\right]^2}{q^4} \cdot \frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{3.49}$$

Die hier verwendeten Symbole bedeuten: q=Viererimpulsübertrag, $b = -q^2/(4m^2c^2)$, E' und E die Energien der aus- bzw. einlaufenden Elektronen. F_E und F_M sind die elektrischen und magnetischen Formfaktoren des Nukleons.

Experimentell erhält man sie aus den Meßdaten durch Anpassung, graphisch durch Auftragen des *Rosenbluth-Plots*, d.h. von $(d\sigma/d\Omega)_{exp.}/(d\sigma/d\Omega)_{Punkt}$ gegen $\tan^2(\theta/2)$.

Analog zum Rutherfordquerschnitt sind hier die Formfaktoren Fouriertransformierte der Ladungs- bzw. Stromdichteverteilungen (Verteilung der (anomalen) magnetischen Momente). Wie dort gewinnt man diese Verteilungen durch Fourierinversion der Formfaktoren und zugleich eine Aussage über Form und Größe der Nukleonen.

Die gemessenen Formfaktoren sind als Funktion von q^2 so normiert, daß sie für $q \to 0$ in die statischen Werte der elektrischen Ladung bzw. magnetischen Momente übergehen. Bis auf den elektrischen Formfaktor des Neutrons lassen sich alle durch einen Dipolansatz beschreiben, dem als Dichteverteilung eine Exponentialfunktion entspricht.

Ein früher gängiger Modellansatz für die Ladungsdichteverteilung war neben der homogen geladenen Kugel gleicher Ladung eine modifizierte Woods-Saxon-Verteilung (auch die zentrale Dichte ρ_0 muß neben dem Radiusparameter r_0 und der Randdicke a als Parameter behandelt werden, da er besonders bei leichten Kernen variiert):

$$\rho_c(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r - r_{1/2}}{a}}} \tag{3.50}$$

"Moderne" Dichteverteilungen lassen sich nicht mehr so einfach beschreiben, sondern haben komplexere Struktur, ohne daß die wesentlichen Ergebnisse sich ändern. Diese wird aus modellunabhängigen Ansätzen (Fourier-Bessel-Entwicklungen) gewonnen. Radien werden als rms-Radien angegeben oder in den Äquivalentradius R (der einer homogen geladenen Kugel gleicher Ladung) umgerechnet mit

$$r_{rms} = \sqrt{3/5}R. \tag{3.51}$$

Kernradien aus myonischen Atomen sind teilweise genauer als aus der Leptonenstreuung, aber komplementär bezüglich des abgetasteten Radiusbereichs. Daher werden die Ergebnisse kombiniert (Abb. 3.5).

Als herausragende Ergebnisse dieser Untersuchungen sind zu nennen:

- Für die Verteilungen erhält man eine zentrale Dichte, die für schwerere Kerne in erster Näherung konstant ist. Dies und die Radiensystematik sind charakteristisch für die Kernkräfte (Kurzreichweitigkeit, Sättigung und Inkompressibilität der Kernmaterie) und legen die Analogie zu dem Verhalten von Flüssigkeiten nahe, was zur Entwicklung kollektiver Kernmodelle (Tröpfchenmodell) führte.
- Die Radien folgen i.w. dem einfachen Gesetz $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$. Der Radiusparameter R_0 für den rms-Radius wird gut durch 1,24 fm wiedergegeben.

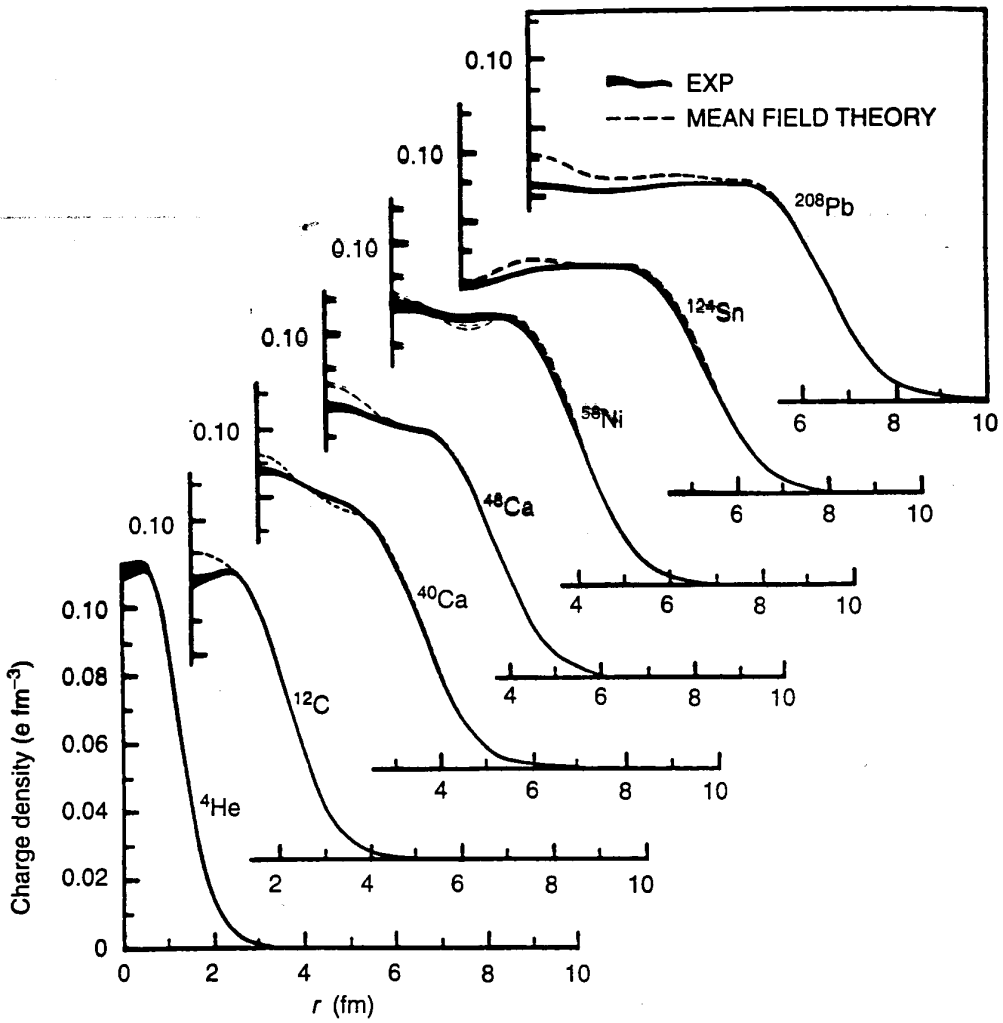


Abbildung 3.5: Ladungsdichteverteilungen verschiedener Kerne

- Die Randdicke aller Kerne ist nahezu konstant (10-90%-Wert t = 2,31 fm entsprechend a = t/4ln3 = 0,53 fm). Das erklärt sich durch die Reichweite der Kernkräfte unabhängig von der Kernmassenzahl A.

- Die Nukleonen haben keinen Kernrand. Die Ladungs- bzw. Strom- bzw. Materiedichte des Protons folgen i.w. einer exponentiellen Verteilung, beim Neutron ist die Ladungsverteilung komplizierter, da Bereiche negativer und positiver Ladung sich kompensieren müssen.

- Die rms-Radien für die Stromverteilungen des Protons und Neutrons sowie die Ladungsverteilung des Protons sind 0,88 fm. Für den rms-Ladungsradius des Neutrons ergibt sich aus dessen Ladungsverteilung 0,12 fm.

- Gerade letzterer Wert zeigt, daß die Nukleonen eine komplizierte Struktur besitzen.

3.4.1 Materiedichteverteilungen und -radien

Hierüber kann man nur durch zusätzliche hadronische Streuexperimente Auskunft erhalten, da Neutronen und Protonen prinzipiell nicht die gleichen Verteilungen zeigen müssen. Insbesondere die Frage einer Neutronenhaut bei Kernen mit Neutronenüberschuß ist von Interesse. Erst neuerdings wurde eine solche überzeugend nachgewiesen.

3.4.2 Sonderfälle: Halokerne

Es gibt eine Reihe von Kernen an den Rändern des Stabilitätstals, die viel größere Radien haben, als der Systematik enstpricht. ^{11}B hat etwa den gleichen Radius wie ^{208}Pb. Auch das Deuteron hat einen rms-Radius von etwa 3,4 fm. In allen Fällen scheinen die Kerne einen Halo von schwach gebundenen Neutronen zu besitzen, der sich um einen fester gebundenen Core-Kern ausdehnt. Indizien für Halos waren ungewöhnlich große Wirkungsquerschnitte in Schwerionen-Reaktionen. Da es sich um radioaktive Kerne handelt, sind für ihre Untersuchung die in der Entwicklung befindlichen "Radioactive Beams"-Beschleuniger geeignet, bei denen Kernreaktionsprodukte gesammelt und beschleunigt werden und als Projektile in Reaktionen verwendet werden können. Die Abb. 3.6 und 3.7 zeigen die für Halokerne charakteristischen Eigenbschaften: (gegenüber der $A^{1/3}-$Systematik) vergrösserte Radien und weiter nach aussen reichende Dichteverteilungen sowie – im Einklang damit – engere Impulsverteilungen der Fragmente eines Aufbruchs des Halokerns (hier: $^{19}C \rightarrow^{18} C + n$, verglichen mit $^{17}C \rightarrow^{18} C + n$.

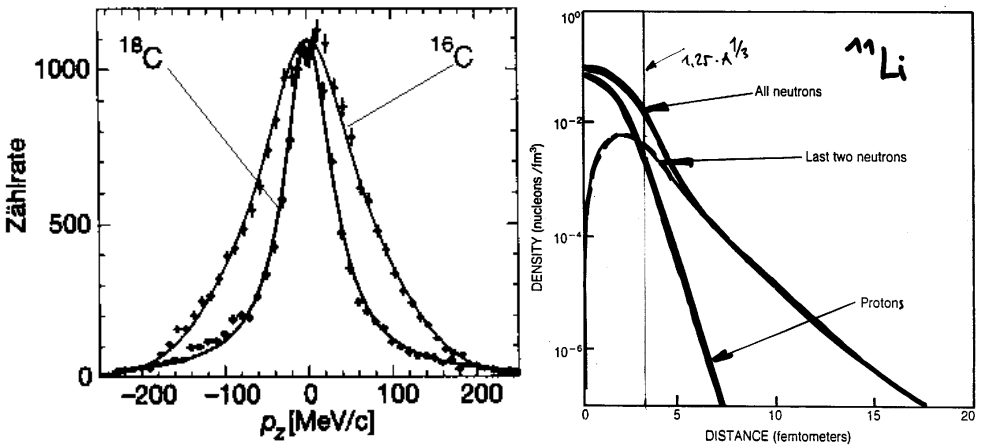


Abbildung 3.6: Fragment-Impulsverteilung und Dichteverteilung in Halokernen

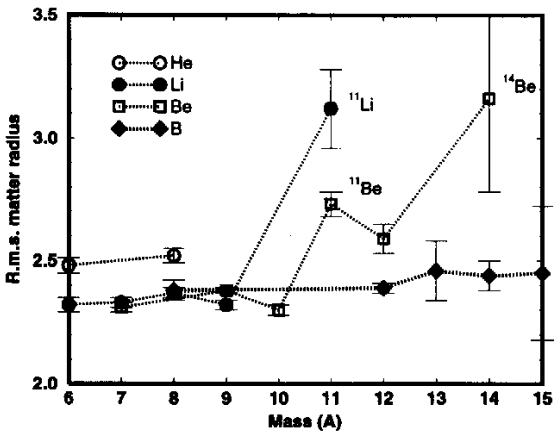


Abbildung 3.7: Radien von Halokernen

Kapitel 4

Rolle von Erhaltungssätzen und Symmetrien in Kernreaktionen

4.1 Allgemeines

Neben den klassischen Erhaltungssätzen spielen in der Kern- und Teilchenphysik eine Reihe nichtklassischer Erhaltungssätze (z.B. der der Parität) bzw. Symmetrien (z.B. die der Zeitumkehrinvarianz oder die Austauschsymmetrie identischer Teilchen) eine Rolle. Insbesondere waren historisch die Verletzungen von als selbstverständlich für gültig gehaltenen Symmetrien von großer Bedeutung und kamen kleinen Umstürzen im Weltbild gleich. Es zeigte sich, daß die Gültigkeit von Erhaltungssätzen/Symmetrien von der Art der fundamentalen Wechselwirkung abhängt, die man betrachtet und daß die Zahl der Erhaltungen mit zunehmender Stärke der Wechselwirkung zunimmt. Tabelle 1 zeigt dies für die bekanntesten Symmetrien.

Ist $\mathbf{F}$ der Operator einer Erhaltungsgröße und nicht explizit von der Zeit t abhängig, so ist das gleichbedeutend mit der Vertauschbarkeit von $\mathbf{F}$ mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H}$. Dann existieren Eigenfunktionen von $\mathbf{H}$, die gleichzeitig Eigenfunktionen zu $\mathbf{F}$ sind. (Ist $\mathbf{F}$ explizit zeitabhängig, so muß zusätzlich noch $\partial\mathbf{F}/\partial t = 0$ sein).

In einfachen Fällen läßt sich die Vertauschbarkeit direkt nachrechnen. Beispiele: Hamiltonoperator und Erhaltung der Gesamtenergie E führen zu der Aussage, daß der physikalische Vorgang nicht zeitabhängig sein darf, analog für Impulserhaltung und Ortsunabhängigkeit, Drehimpulserhaltung und Unabhängigkeit vom Winkel bei Drehungen.

Hieraus wird sofort klar, daß Erhaltungssätze an Symmetrien gekoppelt sind (*Noether-Theorem* (1918): Wenn ein physikalisches Gesetz invariant unter einer Symmetrietransformation ist, dann existiert dazu ein Erhaltungssatz). $\mathbf{U}$ ist dann ein Symmetrieoperator, wenn $\mathbf{U}|\Psi\rangle$ dieselbe Schrödingergleichung erfüllt wie $|\Psi\rangle$:

Tabelle 1: Erhaltungsgrößen (und deren Brechung) und fundamentale Wechselwirkungen

Erhaltungsgröße oder Symmetrie	STARKE	EL-MAG	SCHWACHE
	WECHSELWIRKUNG		
Masse/Energie Impuls, Drehimpuls	+	+	+
Ladung Q	+	+	+
Isospin T	+	-	-
Strangeness S Charm C,... Beauty B, Topness T	+	+	-
Parität P	+	+	-
Ladungskonjugation C	+	+	-
Baryonenzahl B	+	+	+
Leptonenzahl(en)		+	+
Hyperladung Y	+	+	-
Zeitumkehr T	+	+	(-?)
CP	+	+	(-)
CPT	+	+	+

$$i\hbar\frac{d}{dt}(\mathbf{U}\,|\Psi\rangle) = \mathbf{H}\mathbf{U}\,|\Psi\rangle \tag{4.1}$$

Dann gilt auch (zusammen mit $\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}$=**1**):

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\Psi\rangle = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}\,|\Psi\rangle\ , \tag{4.2}$$

woraus (zusammen mit $i\hbar d/dt\,|\Psi\rangle$) folgt:

$$[\mathbf{H},\mathbf{U}] = 0 \tag{4.3}$$

Wenn man die explizite Vertauschbarkeit nicht zeigen kann, weil z.B. das im Hamiltonoperator auftretende Potential gar nicht genau bzw. in analytischer Form bekannt ist (ein für die Kernphysik typischer Fall), muß man das Verhalten unter der entsprechenden Symmetrieoperation untersuchen. Im Falle der Zeitumkehrinvarianz gibt es auf Grund der Eigenschaften des Zeitumkehroperators keine Erhaltungsgröße, wohl aber eine Symmetrie.

Eine weitere wichtige Unterscheidung ist die zwischen *diskreten* und *kontinuierlichen* Transformationen. Erstere haben *multiplikative* Quantenzahlen, die anderen *additive*. Typische diskrete Transformationen sind die Paritätsoperation oder die Austauschsymmetrieoperation, kontinuierlich sind die Drehungen im Raum (Erhaltungsgröße Drehimpuls) oder Isospinraum (Erhaltungsgröße Isospin), Translationen in Raum und Zeit (Erhaltungsgrößen Impuls und Energie).

4.1.1 Diskrete Transformationen

Der Operator einer Symmetrietransformation muß unitär sein: $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$. Die zweifache Hintereinanderausführung der Transformation führt zum ursprünglichen Zustand zurück. Die Eigenwerte des Transformationsoperators sind damit ± 1. Für die Parität:

$$P\Psi = \pi\Psi \text{ und } P^2\Psi = \Psi \tag{4.4}$$

Damit der Symmetrieoperator eine *Observable* darstellt, muß er (um reelle Eigenwerte zu haben) zusätzlich hermitesch sein: $\mathbf{U} = \mathbf{U}^\dagger$. Für diskrete Transformationen ist dies erfüllt und der Symmetrieoperator auch der der Erhaltungsgröße (Beispiel: Parität).

4.1.2 Kontinuierliche Transformationen

Der Symmetrieoperator schließt sich hier stetig (kontinuierlich, d.h. auch infinitesimal) an die Einheitsoperation an und wird durch einen *Generator* $\mathbf{F}$ der Transformation erzeugt.

$$\mathbf{U} = e^{i\epsilon\mathbf{F}} = 1 + i\epsilon\mathbf{F} + \frac{(i\epsilon\mathbf{F})^2}{2!} + \ldots \tag{4.5}$$

mit ϵ reell und < 1. Die Bedingung für Unitarität von $\mathbf{U}$ ist (zunächst für infinitesimale Transformationen):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} &\approx (1 - i\epsilon\mathbf{F}^\dagger)(1 + i\epsilon\mathbf{F}) && (4.6)\\ &= 1 - i\epsilon(\mathbf{F}^\dagger - \mathbf{F}) + O\left[(i\epsilon\mathbf{F})^2\right] = 1 && (4.7)\end{aligned}$$

d.h.

$$\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{F}, \tag{4.8}$$

also Hermitezität von $\mathbf{F}$. $\mathbf{F}$ ist damit die Observable zu $\mathbf{U}$. Wenn $\mathbf{U}$ ein Symmetrieoperator ist, der mit $\mathbf{H}$ kommutiert, so auch $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{H}(1 + i\epsilon\mathbf{F}) - (1 + i\epsilon\mathbf{F})\mathbf{H} = 0, \tag{4.9}$$

d.h.

$$[\mathbf{H}, \mathbf{F}] = 0. \tag{4.10}$$

$\mathbf{F}$ ist also die zur Symmetrietransformation $\mathbf{U}$ gehörende Erhaltungsgröße.

Erhaltunsgssätze führen zu Quantenzahlen, Auswahlregeln (Verboten) und Verzweigungsverhältnissen, die auch den Ablauf von Kernreaktionen bestimmen.

4.2 Erhaltungsgrößen in Kernreaktionen

4.2.1 Energieerhaltung

Die Erhaltung der Gesamtenergie (Ruhe- + kinetische Energie) spielt in der Dynamik und in der Kinematik von Kernreaktionen eine wichtige Rolle. Hier soll nur die Kinematik angesprochen werden. Der Q-Wert von Kernreaktionen ist durch die Massendifferenzen zwischen Aus- und Eingangskanal definiert:

$$Q = \left[(m_1 + m_2) - \sum_{n_{out}} m_i\right] c^2 \tag{4.11}$$

Wegen der Konstanz der Gesamtenergie läßt sich Q auch durch die Differenz der kinetischen Energien ausdrücken. Die je nach dem Wert von Q als endotherm ($Q < 0$), elastisch ($Q = 0$) oder exotherm ($Q > 0$) bezeichneten Reaktionen haben sehr verschiedenes Verhalten, besonders bei niedrigen Energien. Die endothermen Reaktionen beginnen erst bei einer Schwellenenergie, bei der die Energie der Relativbewegung ("Energie im Schwerpunktsystem" $E_{c.m.}$) gerade gleich Q ist.

4.2.2 Impulserhaltung

Die Erhaltung des Impulses ist quantenmechanisch ebenso wichtig wie in klassischen Stoßprozessen. Zusammen mit der Energieerhaltung bestimmt sie die Kinematik aller Zerfälle und Kernreaktionen. Bestimmte Prozesse wie die Paarbildung sind nicht möglich, wenn nicht ein schwerer Stoßpartner für die Impulserhaltung sorgt.

4.2.3 Reaktionskinematik

Eine wichtige Anwendung der beiden Erhaltungssätze liegt in der Transformation (nichtrelativistisch: Galilei-Transformation, relativistisch: Lorentz-Transformation) zwischen verschiedenen Koordinatensystemen, speziell zwischen Labor- und dem sog. Schwerpunkt(c.m.)-System. Bei der Reduktion des Zweikörpersystems des Eingangskanals auf ein Einkörperproblem der Relativbewegung sowohl bei klassischen Bewegungsgleichungen wie auch für die Schrödingergleichung für Stoßprozesse folgt, daß die Bewegung des Schwerpunktes geradlinig-gleichförmig ist und von der Stoßdynamik nicht beeinflußt wird. Die Stoßdynamik ist nur von der Relativbewegung abhängig. Ihr entspricht die für eine Reaktion *verfügbare* Energie, die stets kleiner ist als die Gesamtenergie oder die gesamte kinetische Energie im Laborsystem. Theoretische Betrachtungen erfolgen i.a im c.m.-System; die experimentellen Daten müssen daher kinematisch in dieses umgerechnet werden (oder vice versa).

4.2.4 Drehimpulserhaltung

Die Drehimpulserhaltung ist mit kontinuierlichen Transformationen, nämlich Drehungen im Raum verbunden. Der Generator infinitesimaler Rotationen z.B. um die z-Achse ist

$$R = 1 + \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{4.12}$$

Mit der z-Komponente des Drehimpulsoperators **J**

$$J_z = -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{4.13}$$

ergibt sich:

$$R_{inf} = 1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi \tag{4.14}$$

bzw.

$$R_{fin} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\phi)^n = exp(\frac{i}{\hbar} J_z \Delta\phi) \text{ für endliche Drehungen.} \tag{4.15}$$

J_z ist dann erhalten ($[J_z, \mathbf{H}] = 0$), wenn das Potential nicht explizit von ϕ abhängt. Analog ist **J** bzw. $\mathbf{J}^2$ dann erhalten, wenn das Potential explizit nur von r, nicht aber von θ, ϕ abhängt, d.h. wie in der klassischen Physik für Zentralkräfte, denn der Operator von **J** wirkt nur auf Winkelvariable.

Die übliche Beschreibung von Kernreaktionen berücksichtigt die Erhaltung des Drehimpulses dadurch, daß die Observablen in der Drehimpulsdarstellung beschrieben werden. Die Lösung der Schrödingergleichung erfolgt i.a. in sphärischen Polarkoordinaten. Die Drehimpulseigenfunktionen $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ sind die winkelabhängigen Teile

der Wellenfunktion und von der Ortswellenfunktion abspaltbar. Für Teilchen mit Spin ist die Beschreibung wesentlich komplizierter, da die Bahndrehimpulse und Kanalspins von Ein- und Ausgangskanal jeweils zum Gesamtdrehimpuls J gekoppelt werden müssen. Hierzu dienen je nach Observabler 3j- 6j- oder 9j-Symbole. Der allgemeinste Formalismus hierfür wurde von Welton (s. Literaturliste) angegeben und führt auf Drehfunktionen $D^L_{MM'}(\theta, \phi, \beta)$.

Für spinlose Teilchen und Zentralkräfte ist der Bahndrehimpuls ℓ Erhaltungsgröße, für Reaktionen mit Teilchen, deren Spin $\neq 0$ ist, ist nur der Gesamtdrehimpuls J erhalten. Es gilt also bei (Zweiteilchen-)Kernreaktionen

$$\vec{\ell}_{in} + \vec{s}_a + \vec{s}_A (\rightarrow \vec{J}(Zwischenzustand)) \rightarrow \vec{\ell}_{out} + \vec{s}_b + \vec{s}_B \tag{4.16}$$

Die Vektorsumme $\vec{S}_{in} = \vec{s}_a + \vec{s}_A$ bzw. $\vec{S}_{out} = \vec{s}_b + \vec{s}_B$ nennt man die *Eingangs- bzw. Ausgangskanalspins*.

4.2.5 Paritätserhaltung

Die Paritätsoperation P bedeutet die räumliche Spiegelung des physikalischen Systems am Ursprung und ist eine diskrete Transformation:

$$P\vec{r} = -\vec{r} \tag{4.17}$$

bzw.

$$Pr = r, P\theta = \pi - \theta, P\phi = \pi + \phi \tag{4.18}$$

und

$$Pt = t, P\vec{p} = -\vec{p}, P\vec{\ell} = \vec{\ell}. \tag{4.19}$$

Ihr wird die multiplikative Quantenzahl "Parität" π zugeordnet:

$$P\Psi = \pi\Psi. \tag{4.20}$$

Nacheinanderausführung zweier Paritätsoperationen führt zurück zum alten System

$$P^2\Psi = \Psi, \tag{4.21}$$

daher ist der Eigenwert der Paritätsoperation

$$\pi = \pm 1. \tag{4.22}$$

Das System verhält sich auch bei Paritätserhaltung "paritätsgerade oder -ungerade". Die P-Operation transformiert daher auch einen (unitären) Operator entsprechend:

$$PU_{g,u}P^{-1} = \pm U_{g,u}. \tag{4.23}$$

Für Übergangsmatrixelemente gilt daher:

$$\langle\alpha|U_{g,u}|\beta\rangle \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}, \text{ wenn } \alpha \text{ und } \beta \begin{cases} \text{gleiche} \\ \text{verschiedene} \end{cases} \text{Parität haben .} \tag{4.24}$$

Entsprechend gilt für Eigenzustände wohldefinierter Parität (also bei Paritätserhaltung): der Erwartungswert eines paritätsungeraden Operators muß verschwinden. Ein Beispiel sind *Pseudoskalare* wie die Helizität (longitudinale Polarisation) $\langle\hat{\sigma}\vec{p}\rangle$:

$$\langle\alpha_\pm|\hat{\sigma}\vec{p}|\alpha_\pm\rangle = 0 \tag{4.25}$$

4.2.6 Kernreaktionen unter Paritätserhaltung

Die Parität tritt in Kernreaktionen in zwei Erscheinungsformen auf:

- Jedem Teilchen kommt eine *intrinsische Parität* zu. Ordnet man den Nukleonen positive Parität zu, so folgen daraus die Paritäten aller Teilchen über entsprechende sie verbindende Kernreaktionen (Beispiel: Aus der Reaktion $np \to d\pi$ folgt, zusammen mit der Isospinerhaltung, die negative Parität der Pionen).
- Entsprechend dem Paritätsverhalten der sphärischen Kugelflächenfunktionen:

$$PY_\ell^m(\theta,\phi) = (-)^\ell Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{4.26}$$

  ist die Parität der Relativbewegung

$$\pi = (-)^\ell \tag{4.27}$$

Daher gilt für eine Kernreaktion

$$\pi_a \cdot \pi_A \cdot (-)^{\ell_{in}} \to \pi(\text{Zwischenzustand}) \to \pi_b \cdot \pi_B \cdot (-)^{\ell_{out}} \tag{4.28}$$

Abb. 4.1 zeigt das Verhalten der Kernreaktion bei Raumspiegelung.

Zusammen mit der Drehimpulserhaltung beschränkt die Paritätserhaltung die Zahl der möglichen Drehimpulskanäle bzw. Zwischenzustände (bei Compoundkernreaktionen). So sind für einen wohldefinierten Zwischenzustand (Resonanz, Compoundkernzustand) mit fester Parität π die Bahndrehimpulse im Ein- und Ausgangskanal entweder nur gerade oder ungerade; die jeweils andere Möglichkeit, wenn sie durch die Drehimpulskopplung möglich wäre, scheidet aus.

Die Erhaltung der Parität gilt für die *starke Wechselwirkung* als gesichert, ebenso ihre vollständige Verletzung in der *schwachen Wechselwirkung*. Dies hat vielfache Konsequenzen. Einerseits vereinfacht sich die Beschreibung von Kernreaktionen (insbesondere die der Polarisationsobservablen) u.U. erheblich, da eine Reihe von Observablen verschwindet. Für andere gibt es zumindest Einschränkungen, z.B. was die möglichen Drehimpulse betrifft. Andererseits bieten Kernreaktionen die reizvolle Möglichkeit, durch Messung "verbotener" Observabler nach Effekten der Paritätsverletzung zu suchen.

4.2.7 Kernreaktionen unter Paritätsverletzung

Eine Wellenfunktion "guter" Parität ist entweder paritätsgerade oder -ungerade. Eine Wellenfunktion zu Zuständen nichterhaltener Parität ist stets "paritätsgemischt" mit einem Mischungsparameter F mit

$$\Psi = (1-F)^{1/2}\Psi_g + F^{1/2}\Psi_u. \tag{4.29}$$

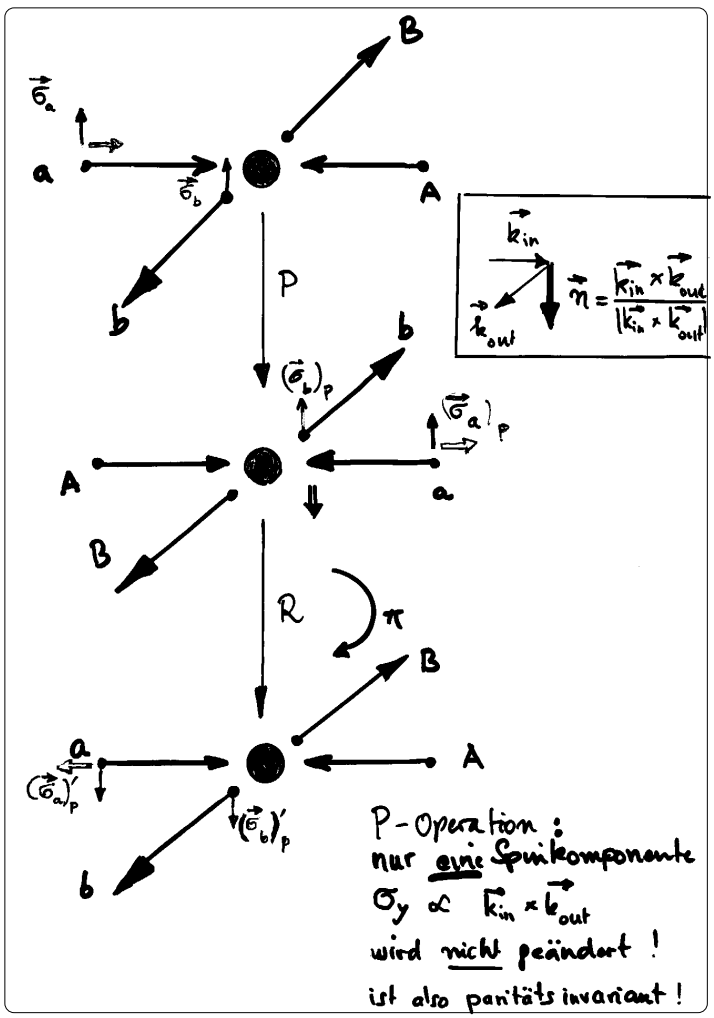


Abbildung 4.1: Wirkung der Paritätsoperation in einer Kernreaktion mit Spins

Ein Operator hat nichtverschwindende Erwartungswerte für solche gemischten Wellenfunktionen nur, wenn er paritätsungerades Transformationsverhalten hat:

$$\langle\Psi|U|\Psi\rangle = (1-F)^{1/2}[\langle\Psi_g|U|\Psi_g\rangle+\langle\Psi_u|U|\Psi_u\rangle]+2F^{1/2}\cdot\langle\Psi_g|U|\Psi_u\rangle = 2F^{1/2}\cdot\langle\Psi_g|U|\Psi_u\rangle \tag{4.30}$$

Eine longitudiale Polarisation bzw. Analysierstärke ist eine solche Meßgröße. Genauer zeigt man, daß, wenn die Quantisierungsachse $\hat{y}$ des Spins bei Kernreaktionen mit polarisierten Teilchen durch

$$\hat{y} = \frac{\vec{k}_{in} \times \vec{k}_{out}}{|\vec{k}_{in} \times \vec{k}_{out}|} \tag{4.31}$$

gegeben ist, die anderen beiden Komponenten der Polarisation (Analysierstärke) in $\hat{x}-$ und $\hat{z}$-Richtung bei Paritätserhaltung verschwinden müssen, bzw. bei Paritätsverletzung gerade nicht verschwinden.

Damit ergibt sich eine auf diese Verletzung empfindliche Meßgröße P_z bzw. A_z. Die letztere wurde v.a. in der pp-Streuung bei mehreren Energien gemessen. Der durch

die schwache Wechselwirkung bedingte paritätsverletzende Effekt hat im Wirkungsquerschnitt eine Größenordnung von 10^{-7} des überlagernden Effekts der starken Wechselwirkung. Er muß daher, um ihn mit einer ausreichenden Statistik nachzuweisen, mit einer absoluten Genauigkeit von besser als 10^{-8} und mit kleinen systematischen Fehlern gemessen werden. 4.2 zeigt den Stand der Experimente und eine klare Paritätsverletzung im Einklang mit dem Standardmodell.

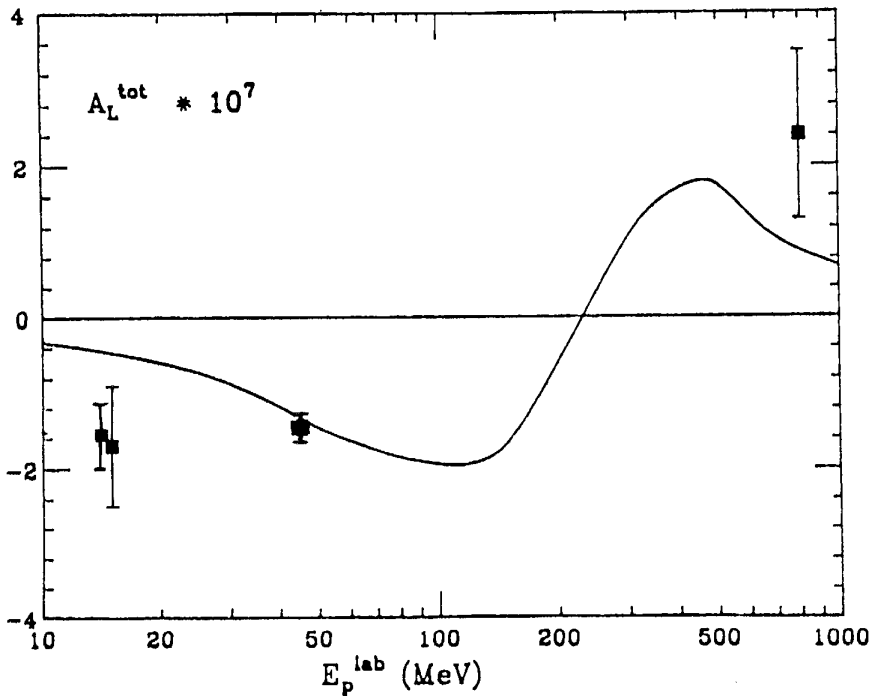


Abbildung 4.2: Meßwerte der longitudinalen Analysierstärke in der p-p-Streuung bei 15 MeV (Los Alamos, Bonn), 45 MeV (SIN/PSI) und 800 MeV (ANL) im Vergleich zur Vorhersage des Standardmodells (Desplanques, Donoghue und Holstein)

4.3 Isospin in Kernreaktionen

Der Isospin (und seine Erhaltung) in Kernreaktionen geht auf Heisenberg (1932) zurück und wurde durch die Ähnlichkeit der Wirkungsquerschnitte (genauer der Streulängen (s.u.)) in der pp(nach Abzug der Coulombeffekte)-, np- und nn-Wechselwirkung nahegelegt. Später wurden weitere Übereinstimmungen z.B. der magnetischen Formfaktoren der Nukleonen gefunden. Iso-Multipletts in Spiegelkernen unterscheiden sich bei gleicher Kernstruktur näherungsweise nur in den Coulombenergiedifferenzen, und in der Teilchenphysik spielen die Iso-Multipletts eine große Rolle (dort sind Coulombenergiedifferenzen klein gegen die Gesamtenergie).

4.3.1 Formalismus

Der Isospin läßt sich formal wie der Spin behandeln. Man definiert für die hadronische Wechselwirkung Isospinoperatoren (Vektoren mit den üblichen Vertauschungsrelationen, Leiteroperatoren, Isospinkopplung, Isospinunterzustände etc.). Die zugehörigen Symmetrietransformationen sind Drehungen im Isospinraum. Isospinerhaltung bedeutet Invarianz unter Drehungen im dreidimensionalen Isoraum

$$\mathbf{U} = e^{i\theta\vec{n}\mathbf{T}/\hbar} \tag{4.32}$$

mit det$\mathbf{U}$=1. In der starken Wechselwirkung bleibt die Länge $\sqrt{T(T+1)}$ des Vektors $\mathbf{T}$ bei Drehungen konstant (Skalar im T-Raum). In der elektromagnetischen Wechselwirkung werden die T-Multipletts in 2T+1 Komponenten aufgespalten, die verschiedenen Ladungszuständen entsprechen. Q=T_3+Y/2 (Y = Hyperladung; Gell-Mann, Nishijima-Relation, für Kerne Y=A=Baryonenzahl). $\mathbf{T}$ ist also in der elektromagnetischen Wechselwirkung keine Erhaltungsgröße. In der starken Wechselwirkung liegt die Annahme einer Erhaltung von $\mathbf{T}$ wegen der Übereinstimmungen in den Eigenschaften der Mitglieder von Iso-Multipletts nahe, muß aber geprüft werden. Tatsächlich findet man, daß die Isospinsymmetrie bis zur Größenordnung von etwa 1% gebrochen ist. T_3 dagegen ist wegen der Ladungserhaltung eine perfekte Erhaltungsgröße.

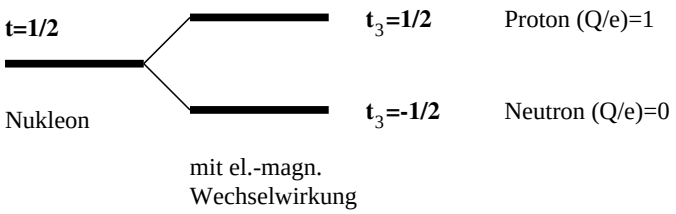


Abbildung 4.3: Brechung der Isospinsymmetrie durch die elektromagnetische Wechselwirkung

In der Kernphysik ordnet man dem Nukleon (ein *Zweizustandssystem*) den Isospin $\mathbf{t} = 1/2$, dem Proton die "UP"-Projektion $t_3 = +1/2$, dem Neutron die "DOWN"-Projektion $t_3 = -1/2$ zu. Für zusammengesetzte Systeme ist der Gesamtisospin die Vektorsumme der Komponentenisospins, für die Projektionen die skalare:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{A} \mathbf{t}^{(i)};\ T_3 = \sum_{i=1}^{A} t_3^{(i)}, \tag{4.33}$$

und es gilt für Kerne: $T_3 = -1/2(N-Z)$ und $T_{min} = 0$ für gerade A, $T_{min} = 1/2$ für ungerade A, $T_{max} = A/2$.

Formal ist (unter der Annahme der Isospinerhaltung) auch die Verallgemeinerung des *Pauliprinzips* durch Einbeziehung des Isospins. Ein Fermionenzustand wird danach nur durch eine Wellenfunktion beschrieben, die eine antisymmetrisierte Produktwellenfunktion aus Orts-, Spin- und Isospinwellenfunktion ist. Damit schließt man z.B. im Nukleon-Nukleon-System jeden zweiten im Prinzip möglichen Zweinukleonenzustand aus.

Tabelle 2: Erlaubte Partialwellenzustände des Zweinukleonensystems

	$T=0$		$T=1$	
	$S=0$	$S=1$	$S=0$	$S=1$
$L=0$	–	${}^3S_1(d)$	${}^1S_0(d^*)$	–
$L=1$	${}^1P_1$	–	–	${}^3P_{0,1,2}$
$L=2$	–	${}^3D_{1,2,3}$	${}^1D_2$	–

Bei Isospinerhaltung ist z.B. der Übergang vom (gebundenen) Triplett-Deuteron zum (ungebundenen) Singulett-Deuteron in der Endzustandswechselwirkung der Aufbruchreaktion

$$p + d \to p + (n+p)_{{}^1S_0 = d^*} \tag{4.34}$$

strikt verboten. Man hat experimentell Hinweise auf diesen Übergang gefunden, was darauf hinweist, daß der Isospin nicht vollständig erhalten ist. Tatsächlich bricht die elektromagnetische Wechselwirkung die Isospinerhaltung trivialerweise, so daß die Frage entsteht, ob die (schwachen) beobachteten Isospinbrechungen durch Einflüsse der Coulombkraft entstehen oder ein fundamentaler Zug der starken Wechselwirkung sind. Heute nimmt man an, daß letzteres gilt.

4.3.2 Isospin als Erhaltungsgröße

Die Frage der Isospinerhaltung (-verletzung) geht weit über den reinen Formalismus hinaus. Das Verhalten bestimmter Reaktionen weist zunächst auf eine weitgehende Isospinerhaltung (von Coulombeffekten abgesehen) hin. Beispiele sind:

- Die Verzweigungsverhältnisse bestimmter Reaktionen lassen sich weitgehend durch die Isospinkopplung mittels Clebsch-Gordan-(3j)-Koeffizienten erklären (dies setzt voraus, daß das Übergangsmatrixelement nicht wesentlich von der dritten Komponente des Isospins abhängt):

  $$p + d \to {}^3\,He + \pi^0(1) \text{ verglichen mit } p + d \to {}^3\,H + \pi^+(2) \tag{4.35}$$

  Aus den Isospin-CG-Koeffizienten errechnet man das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte im Einklang mit den Experimenten zu:

  $$\frac{(d\sigma/d\Omega)_1}{(d\sigma/d\Omega)_2} = \left(\frac{\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}10|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle}{\langle \frac{1}{2}-\frac{1}{2}11|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle}\right)^2 = \left(\frac{-\sqrt{1/3}}{\sqrt{2/3}}\right)^2 = 1:2 \tag{4.36}$$

  Weitere Beispiele sind die Pion-Nukleon-Streuung oder Reaktionen wie $pp \to d\pi^+ / pn \to d\pi^0$.

- Resonanzen in isospinverbotenen Compoundprozessen zeigen um Größenordnungen kleinere Bildungs-(bzw. Zerfalls-) Wahrscheinlichkeiten, die sich in ihrer totalen Breite Γ ausdrücken, als vergleichbare nichtverbotene Resonanzübergänge.

Ein Beispiel ist die Reihe schmaler Resonanzen in der elastischen Protonenstreuung an leichten Kernen wie ^{12}C,^{24}Mg u.a., bei denen der Eingangskanal den Isospin $T = 1/2$ hat, die Resonanzen aber zu Zuständen mit Isospin $T = 3/2, T = 5/2$ gehören:

$$p +^{12} C \rightarrow^{13} N^*(E_p = 14.231 MeV) \rightarrow p +^{12} C. \tag{4.37}$$

Die Resonanz ist nur 1.1 keV breit, vergleichbare benachbarte Resonanzen haben Breiten von ca. 100 keV. (Diese Resonanz wird wegen ihrer Schärfe zur Energieeichung von Beschleunigern verwendet). Das Nichtverschwinden der Breite ist allerdings ein Indiz dafür, daß die Isospinerhaltung nicht vollständig ist.

- Isobar-Analog-Resonanzen (IAR) sind ebenfalls ein gutes Beispiel für Isospinerhaltung und gleichzeitiger schwacher Isospinbrechung. Bei schweren Kernen hatte man zunächst v.a. wegen der Stärke der Coulombwechselwirkung keine Isospinerhaltung erwartet. Das Auftreten ausgeprägter IAR jedoch wies auf eine relativ gute Isospinreinheit der Systeme, die durch — wegen der hohen Anregungsenergie — schnellen Zerfall der Zustände, der eine starke Mischung verhindert, erhalten bleibt. Der Doorway-Mechanismus, über den die IAR mit Isospin $T^> = T_0 + 1/2$ in die — mit ihnen mischenden — sehr dichtliegenden normalen Compoundzustände mit $T^< = T_0 - 1/2$ zerfallen, bevor sie weiter in den Ausgangskanal zerfallen, setzt diese Mischung von Zuständen verschiedenen Isospins voraus.

Aus der Kernstrukturphysik leichter Kerne kennt man ebenfalls Beispiele der Isospinerhaltung (Isobarenmultipletts wie ^3H und ^3He), bei denen die sorgfältige Korrektur auf Coulombeffekte einen Rest von Isospinbrechung unerklärt läßt (*Nolen-Schiffer-Anomalie*).

Nach heutigem Verständnis der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung als durch den Austausch von Mesonen vermittelt gelten als nichttriviale Ursache der Isospinbrechung vor allem:

- Die Massendifferenz von π^0 und $\pi^\pm$. Auf dem Niveau der QCD ist deren Ursache wiederum die Massendifferenz zwischen u- und d-Quark.
- Die Mischung der beiden Mesonen ρ mit t=1 und ω mit t=0 im Mesonenaustausch zwischen Nukleonen.

Henley und Miller geben eine detaillierte Klassifizierung der verschiedenen Möglichkeiten der Isospinbrechung bzw. -mischung (Class I bis Class IV). Im Nukleon-Nukleon-System sind davon die Effekte der *Ladungsunabhängigkeit* (Gleichheit der Observablen des np- und der pp/nn-Systeme) und der *Ladungssymmetrie* (Gleichheit der Observablen des nn- und des pp-Systems) bzw. deren Brechung von Interesse. Die Streulängen zeigen in empfindlicher Weise die Brechung der Ladungsunabhängigkeit, während eine kleine Ladungssymmetriebrechung erst vor kurzem in schwierigen Mittelenergieexperimenten nachgewiesen wurde (TRIUMF, IUCF).

Tabelle 3: Henley-Klassifizierung der Isopinbrechung in Zweinukleonen-Kernkräften

KLASSE	FORM des Iso-Potentials	WIRKUNG	BEISPIEL
I	Isoskalar $V_{ij}^{I} = A + B\vec{\tau}(i) \cdot \vec{\tau}(j)$	Ladungssymmetrie (CS) Ladungsunabhängigkeit (CI) Rotationsinvarianz im Isoraum	gilt in der starken Ww. in erster Näherung n-n = n-p = p-p
II	Isotensor $V_{ij}^{II} = C[\tau_3(i)\tau_3(j)$ $-\frac{1}{3}\vec{\tau}(i)\vec{\tau}(j)]$	CS, nicht CI Invarianz unter Reflexion an der 1-2-Ebene des Isoraums	n-n = n-p n-p(T=1) = n-p(T=0) n-p(T=1) $\neq$ n-n/p-p
III	3. Komponente Isovektor $V_{ij}^{III} = D[\tau_3(i) + \tau_3(j)]$	keine CS, keine CI aber Symmetrie bei Vertauschung $1 \longleftrightarrow 2$	n-n $\neq$ n-p $[V_{ij}^{III}, T^2] \propto [T_3, T^2] = 0$ kein "Mixing" wirkt nicht auf n-p
IV	$V_{ij}^{IV} = E[\tau_3(i) - \tau_3(j)]$ $+F[\vec{\tau}(i) \times \vec{\tau}(j)]$	keine CS, keine CI Antisymmetrie bei Austausch $1 \longleftrightarrow 2$	nur für n-p $[V_{ij}^{IV}, T^2] \neq 0$ "Mixing" Übergänge ${}^3L_j \longleftrightarrow {}^1L_j$ d$\longleftrightarrow$ d* **Ursprung:** nicht Coulomb, sondern $m_d \neq m_u$, $\rho^0 - \omega-$, $\pi^0 - \eta-$Mixing
		Test: z.B. in der n-p-Streuung: $\Delta P(\theta) \equiv P_n(\Theta) - P_p(\pi - \theta) \neq 0?$ $\Delta A(\theta) \equiv A_n(\theta) - A_p(\pi - \theta) \neq 0?$	

4.4 Austauschsymmetrie in Kernreaktionen identischer Teilchen

Bei der Streuung identischer Teilchen kann ein Detektor beim c.m.-Winkel θ nicht unterscheiden, ob er z.B. unter dem Vorwärtswinkel Θ gestreute oder Rückstoßteilchen unter dem Winkel $\pi - \theta$ registriert. Dies zeigt Abbildung 4.4.

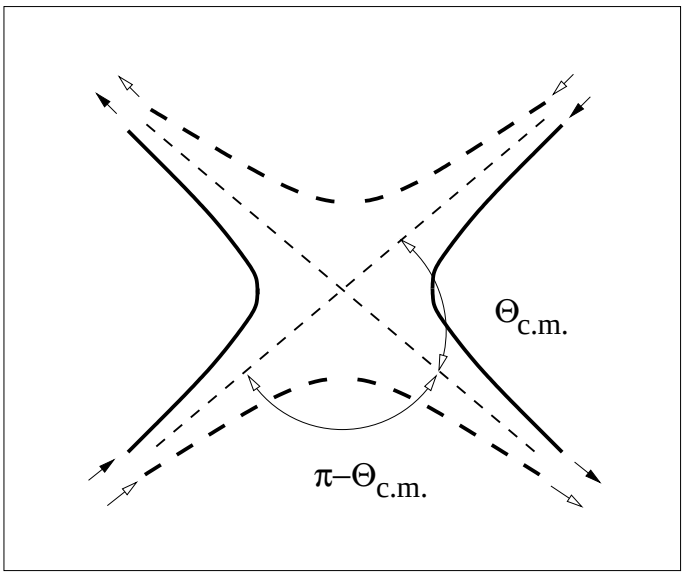


Abbildung 4.4: Trajektorien identischer Teilchen im c.m.-System

Die formale Streutheorie (s.u.) zeigt, daß dies bedeutet, daß die Winkelverteilung symmetrisch um $\pi/2$ sein muß bzw. durch gerade Legendre-Polynome beschrieben wird. Qunatenmechanisch ist darüberhinaus zu erwarten, daß die vor- und rückgestreuten Teilchenwellen miteinander interferieren. In einem solchen Fall ist keine klassische Beschreibung des Streuvorganges möglich. Die Details der Interferenz sind zudem noch von der Spinstruktur der wechselwirkenden Teilchen abhängig: identische Bosonen verhalten sich anders als identische Fermionen und bei Teilchen mit Spin (d.h. immer für Fermionen) müssen die gekoppelten Spinzustände mit ihren durch die Spinmultiplizität gegebenen Gewichtsfaktoren im Wirkungsquerschnitt überlagert werden. Das folgende auch experimentell nachgeprüfte Beispiel soll dies erläutern.

4.4.1 Identische Bosonen mit $I = 0$

Hier gilt

$$(d\sigma/d\Omega(\theta))_B = |f_1(\theta) + f_2(\pi - \theta)|^2 \tag{4.38}$$

4.4.2 Identische Fermionen mit $I = 1/2$

Hier gilt für das Spin-Singulett:

$$\left(d\sigma/d\Omega(\theta)\right)_s = \left|f_1(\theta) - f_2(\pi-\theta)\right|^2 \tag{4.39}$$

und für das Triplett:

$$\left(d\sigma/d\Omega(\theta)\right)_t = \left|f_1(\theta) + f_2(\pi-\theta)\right|^2 . \tag{4.40}$$

Beide müssen im Gesamtquerschnitt mit ihren Spingewichten gemittelt (inkohärent addiert) werden:

$$\left(d\sigma/d\Omega(\theta)\right)_F = \frac{1}{4}\left|f_1(\theta) + f_2(\pi-\theta)\right|^2 + \frac{3}{4}\left|f_1(\theta) - f_2(\pi-\theta)\right|^2 \tag{4.41}$$

Die Interferenz erfolgt in diesen beiden Fällen mit umgekehrtem Vorzeichen, was z.B. bei $\theta = \pi/2$ zur Folge hat, daß im Fall der Bosonen ein Interferenzmaximum, für Fermionen ein Minimum angenommen wird. Unter der speziellen Annahme, daß keine Spin-Spin-Kraft wirkt (f_s=f_t=f), und da dort f(θ)=f($\pi-\theta$) ist, erhält man für identische Fermionen eine Absenkung, für identische Bosonen eine Anhebung jeweils um den Faktor 2 gegenüber dem klassischen Wirkungsquerschnitt.

Für reine Coulombstreuung identischer Teilchen lassen sich die Streuamplituden explizit (d.h. auch über Partialwellen aufsummiert) angeben, da es sich um die aus der Streutheorie bekannten Rutherfordamplituden handelt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Coul} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z^2e^2}{4E_\infty}\right)^2 \left\{\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} + \frac{2(-1)^{2s}\cos[\eta_s \ln\tan^2\frac{\theta}{2}]}{(2s+1)\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\} \tag{4.42}$$

Es treten neben dem Vorwärts-Rutherford-WQ ein entsprechender Rückstreu-Rutherfordterm sowie ein Interferenzterm zwischen beiden auf. Die Abbildung 4.5 zeigt dieses Verhalten (das dem des Lichtes im Youngschen Doppelspaltversuch entspricht, jedoch zusätzlich den Einfluß von Spin und Statistik zeigt).

4.5 Zeitumkehrinvarianz

Durch die Verletzung der CP-Invarianz in der schwachen Wechselwirkung ist auch (über das CPT-Theorem) die Gültigkeit der Zeitumkehrinvarianz in Frage gestellt worden.

Die Zeitumkehrinvarianz stellt eine Besonderheit dar. Zu ihr gibt es keine Erhaltungsgröße (und Quantenzahl), da der Operator T der Zeitumkehr *antilinear und unitär = antiunitär* ist. Er wirkt folgendermaßen:

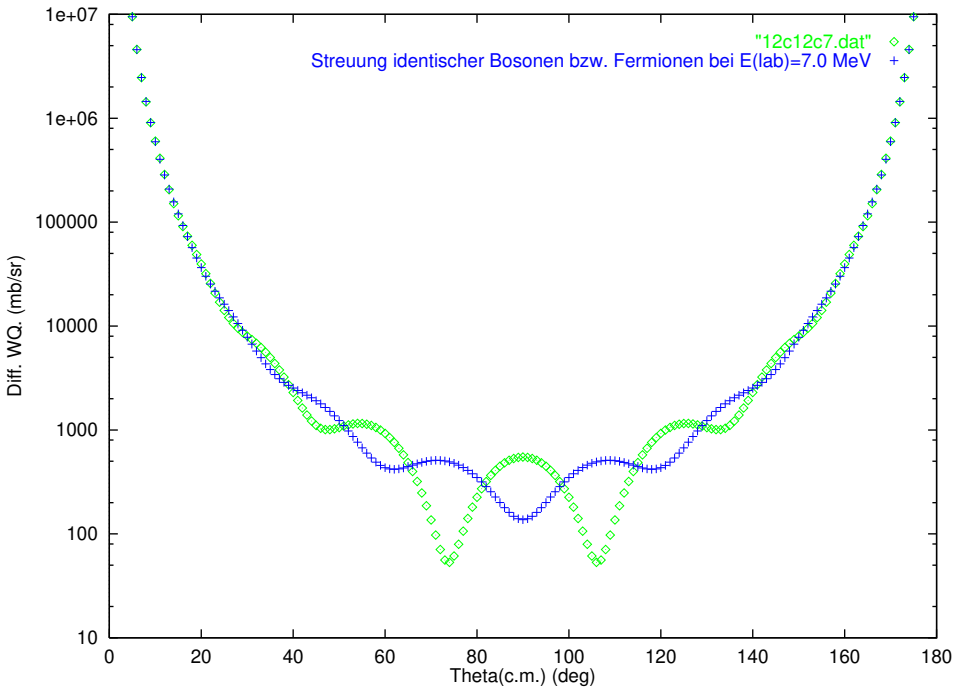


Abbildung 4.5: c.m.-Winkelverteilung der Coulombstreuung identischer Bosonen (^{12}C) bzw. Fermionen (^{13}C) bei E_{lab}=7 MeV

- $Tt = -t$
- $T\vec{r} = \vec{r}$
- $T\vec{p} = -\vec{p}$
- $T\vec{L} = -\vec{L}$
- $T\vec{S} = -\vec{S}$

Die Zeitumkehroperation läßt die (zeitabhängige) Schrödingergleichung nicht *forminvariant*:

$$T : -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi \rightarrow -\frac{\partial \Psi}{\partial(-t)} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{4.43}$$

Die Forminvarianz unter der T-Operation läßt sich erst durch die zusätzliche Operation der komplexen Konjugation (Operator CC) wiederherstellen:

$$T = T_0 \cdot CC \tag{4.44}$$

Also

$$T\Psi(t) = \Psi^*(-t) \tag{4.45}$$

Die Wellenfunktion des freien Teilchens wird durch die T-Operation in die konjugiert komplexe umgewandelt:

$$T : e^{i(kr-Et/\hbar)} \rightarrow e^{-i(kr-Et/\hbar)} \tag{4.46}$$

Auf Bewegungsvorgänge angewandt bewirkt der Operator T eine *Bewegungsumkehr*. Bei Kernreaktionen vertauscht er Ein- und Ausgangskanal, ein- und auslaufende Impulse und Spins. Die Zeitumkehrinvarianz hat prinzipielle und praktische Bedeutung. Ihre Gültigkeit läßt sich im Prinzip in Kernreaktionen testen. Wenn sie gilt, vereinfacht sie die Beschreibung von Kernreaktionen, insbesondere der Polarisationsobservablen bei Teilchen mit Spin. Abb. 4.6 zeigt die Wirkung der Zeitumkehroperation auf eine Kernreaktion mit Spins.

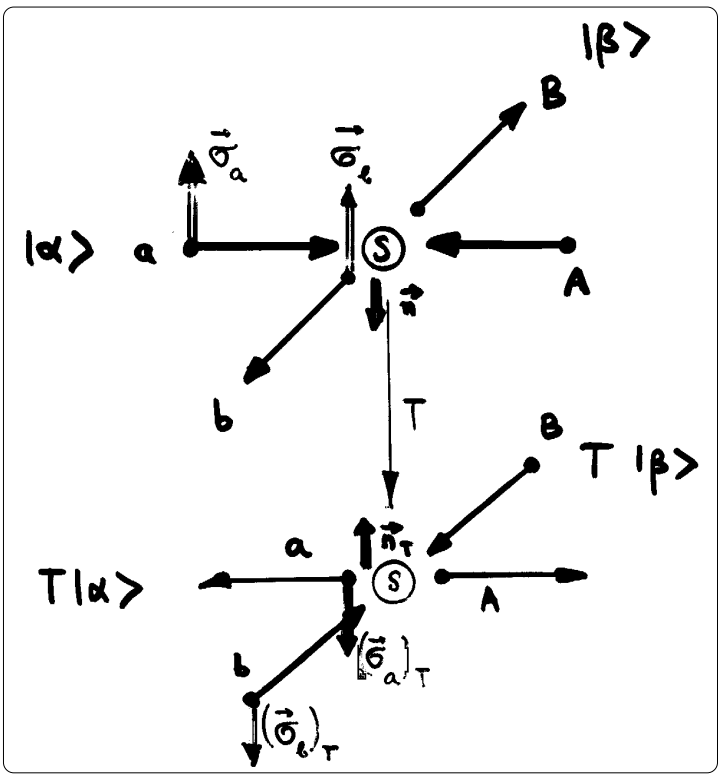


Abbildung 4.6: Wirkung der Zeitumkehroperation auf eine Kernreaktion mit Spins

4.5.1 Zeitumkehr und Reziprozität

Im Rahmen der Störungstheorie lassen sich aus der Reziprozität Beziehungen zwischen den Observablen von Hin- und Rückreaktionen herstellen. Die Fermische Goldene Regel verbindet beide über das Übergangsmatrixelement:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rightarrow} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \Psi_{out} | H_{if} | \Psi_{in} \rangle\right|^2 \rho_{\rightarrow} \tag{4.47}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\leftarrow} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \Psi_{out} | H_{if} | \Psi_{in} \rangle\right|^2 \rho_{\leftarrow}. \tag{4.48}$$

Bei Zeitumkehrinvarianz ist für spinlose Teilchen $H_{if} = H_{fi}$

Hieraus folgt das *Prinzip des detaillierten Gleichgewichts:* Die Wirkungsquerschnitte von Hin- und Rückreaktion sind — bis auf Phasenraumfaktoren — gleich. Genauer:

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rightarrow}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\leftarrow}} = \frac{(2s_a+1)(2s_A+1)}{(2s_b+1)(2s_B+1)} \cdot \frac{k_{in}}{k_{out}}. \tag{4.49}$$

Diese Relation hat praktische Bedeutung dadurch, daß sie über die Umkehrreaktion die Observablen von Reaktionen liefern kann, die direkt nicht meßbar sind, z.B. weil stabile Targets nicht existieren (radioaktive Targets).

Sie kann zum Test der Zeitumkehrinvarianz benutzt werden. Ihre Gültigkeit wurde in Messungen an mehreren Reaktionen (z.B.$^{24}Mg(\alpha,p)^{27}Al$ und ihre Umkehrreaktion) und in verschiedenen Energiebereichen (mit verschiedenen dominierenden Reaktionsmechanismen) untersucht. Das Ergebnis war die Bestätigung der Nichtverletzung der Zeitumkehrinvarianz mit einer Genauigkeit (obere Grenze einer möglichen Verletzung) von $\approx 10^{-3}$ [Lit.: Harney, G. Klein, s. Literaturliste]

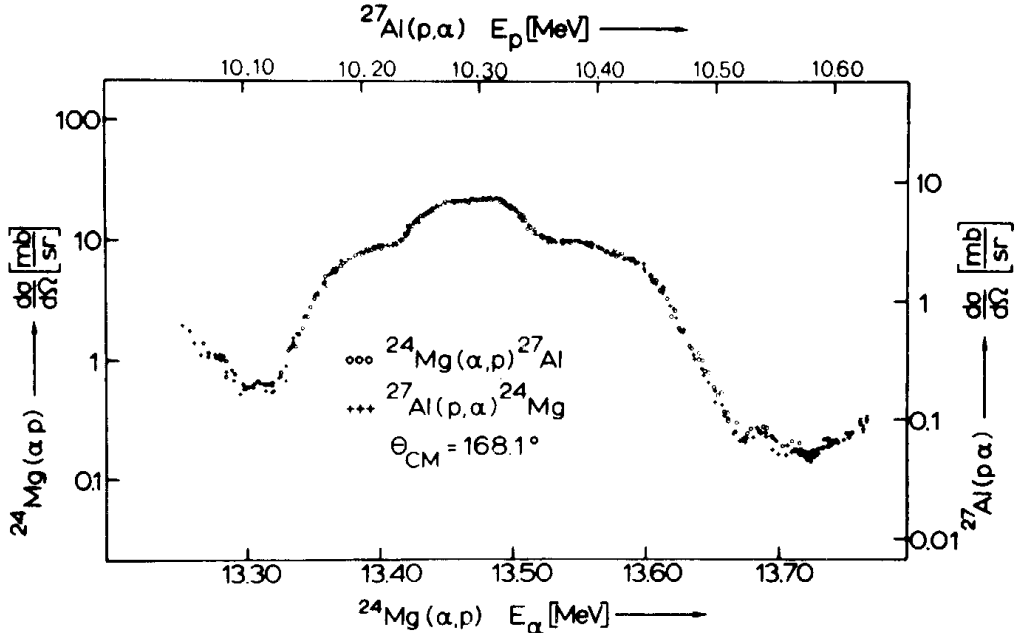


Abbildung 4.7: Wirkungsquerschnitte der Hin- und Rückreaktion $^{24}Mg(\alpha,p)^{27}Al$

Für Reaktionen mit polarisierten Teilchen sagt die Zeitumkehrinvarianz Relationen zwischen Polarisationsobservablen der Hin- und Rückreaktion voraus:

$$(A_y)_{\rightarrow} = (P_y)_{\leftarrow} \tag{4.50}$$

Die Vektoranalysierstärke der Hinreaktion mit polarisierten Teilchen im Eingangskanal ist gleich der Vektorpolarisation, die mit unpolarisierten Teilchen im Ausgangskanal der Rückreaktion ensteht. Für die elastische Streuung, bei der Hin- und Rückreaktion identisch sind, bedeutet das, daß man mit einem *Doppelstreuexperiment* (gleiche Reaktion bei gleicher Relativenergie und gleichem c.m.-Winkel) die Analysierstärke (bzw. Polarisation) absolut (bis auf das Vorzeichen) bestimmen kann:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pol} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{unpol} (1 + A_y^2). \tag{4.51}$$

Kapitel 5

Allgemeines Verhalten von Wirkungsquerschnitten

In gewissen Grenzfällen (z.B. bei niedrigen Energien) läßt sich der Verlauf von Wirkungsquerschnitten ohne Bezugnahme auf innere Freiheitsgrade der Nukleonenwechselwirkung verstehen. Setzt man die Gültigkeit der *Goldenen Regel* von Fermi voraus, so gilt für eine Zweiteilchenreaktion $a + A \rightarrow b + B$ und Teilchen mit Spins:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2I_b + 1)(2I_B + 1)}{(2\pi\hbar^2)^2} \mu_i \mu_f \frac{k_f}{k_i} |H'_{if}|^2. \tag{5.1}$$

Daraus ergeben sich für s-Wellen folgende Charakeristika:

5.1 Ungeladene Teilchen (Neutronen)

5.1.1 Elastische Streuung (n,n)

Da $Q = 0; v_i = v_f$ und $H_{if} = const$, ist der (über Winkel integrierte) Wirkungsquerschnitt konstant.

5.1.2 Inelastische Neutronenstreuung

Die Reaktion (n,n') ist *endotherm*, d.h. Q < 0. In der Nähe der Schwelle (d.h. in einem kleinen Energieintervall) kann man $v_i = const$ setzen, und es folgt:

$$\sigma \propto v_f = \sqrt{2\mu_f (E_i - E_{Schwelle})}, \tag{5.2}$$

also ein parabelförmiger Anstieg des Wirkungsquerschnittes von der Schwellenenergie.

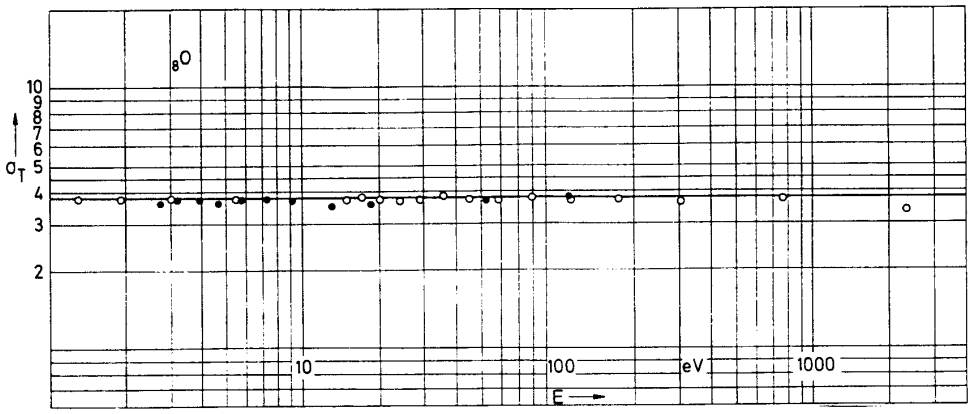


Abbildung 5.1: Anregungsfunktion elastischer Neutronenstreuung an Sauerstoff bei niedrigen Energien

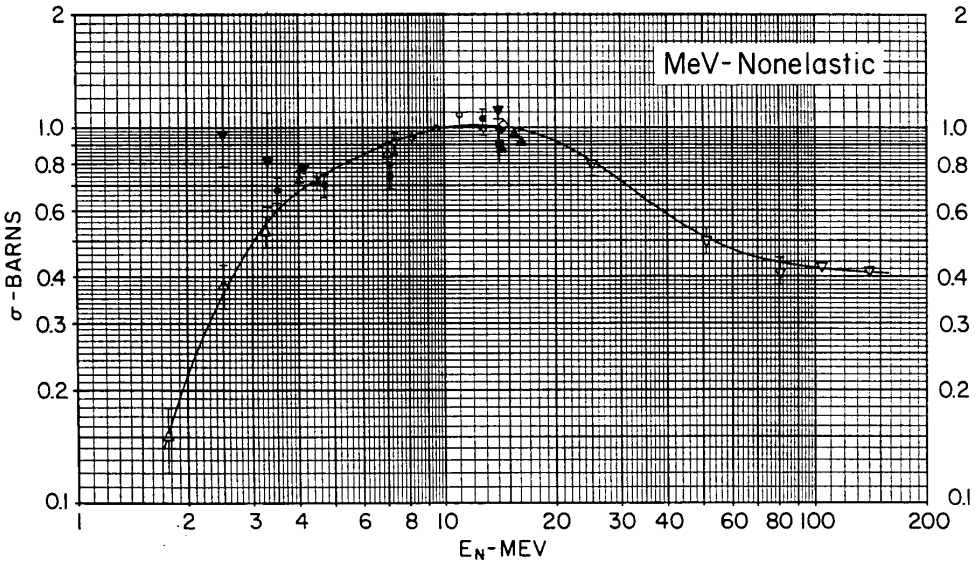


Abbildung 5.2: Anregungsfunktion nicht-elastischer Neutronenstreuung (n,n′) bzw. (n,2n) an Al bei niedrigen Energien

5.1.3 Exotherme Reaktionen mit thermischen Neutronen (n,γ), (n,p), (n,f) etc.

Typischerweise ist $Q \approx 1MeV$. Dann ist $v_f \approx const$, und es gilt (s. Abb. 5.3)

$$\sigma \propto 1/v_i \propto E^{-1/2}. \tag{5.3}$$

5.1.4 Endotherme Reaktionen Q < 0

Bei geladenen Teilchen im Ausgangskanal (typische Reaktionen (n,α), (n,p),...) dominiert der durch die Coulombbarriere bestimmte *Gamow*-Faktor e^{-G_b}. Hier geht eine Energieabhängigkeit des Matrixelements H'_{if} in Form einer *Penetrabilität* ein.

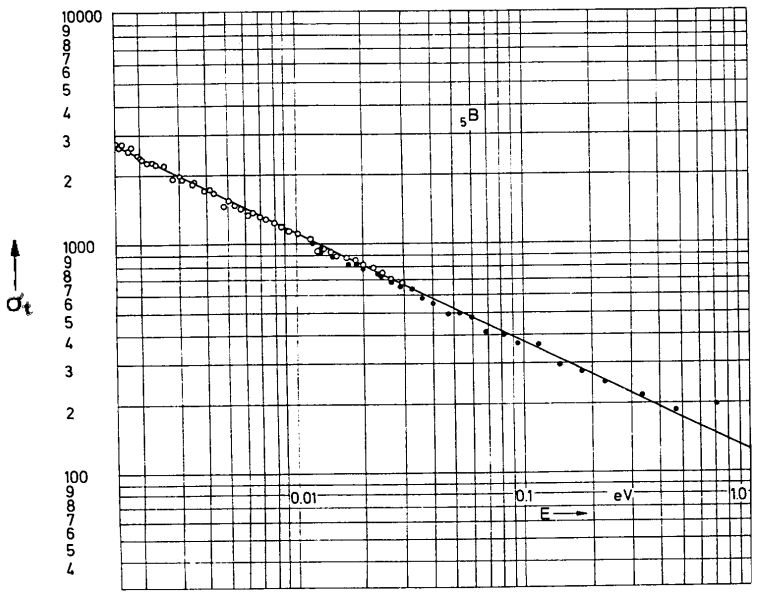


Abbildung 5.3: Anregungsfunktion einer Neutroneneinfangreaktion (n,γ) an Bor bei niedrigen Energien

Wir erhalten also einen von der Schwelle exponentiell ansteigenden integrierten Wirkungsquerschnitt (Abb. 5.4).

5.2 Geladene Teilchen im Ein- und Ausgangskanal

Hier gilt dasselbe, nur daß zwei Gamow-Faktoren vorhanden sind und der Wirkungsquerschnitt mit $\propto e^{-(G_a+G_b)}$ geht. Das ist für exotherme wie endotherme Reaktionen analog.

5.3 Schwelleneffekte

Überschreitet die Einschußenergie nacheinander mehrere Schwellen sich öffnender Kanäle, so geht dies jedesmal mit einem entsprechenden Anstieg des Wirkungsquerschnittes einher. Ein typisches Beispel ist die (n,f)-Reaktion (f=Spaltung) mit zunehmender Anzahl n hierbei emittierter Neutronen (n=0, 1,2,...).

Betrachtet man nur einen Kanal, z.B. den rein elastischen, so beobachtet man in

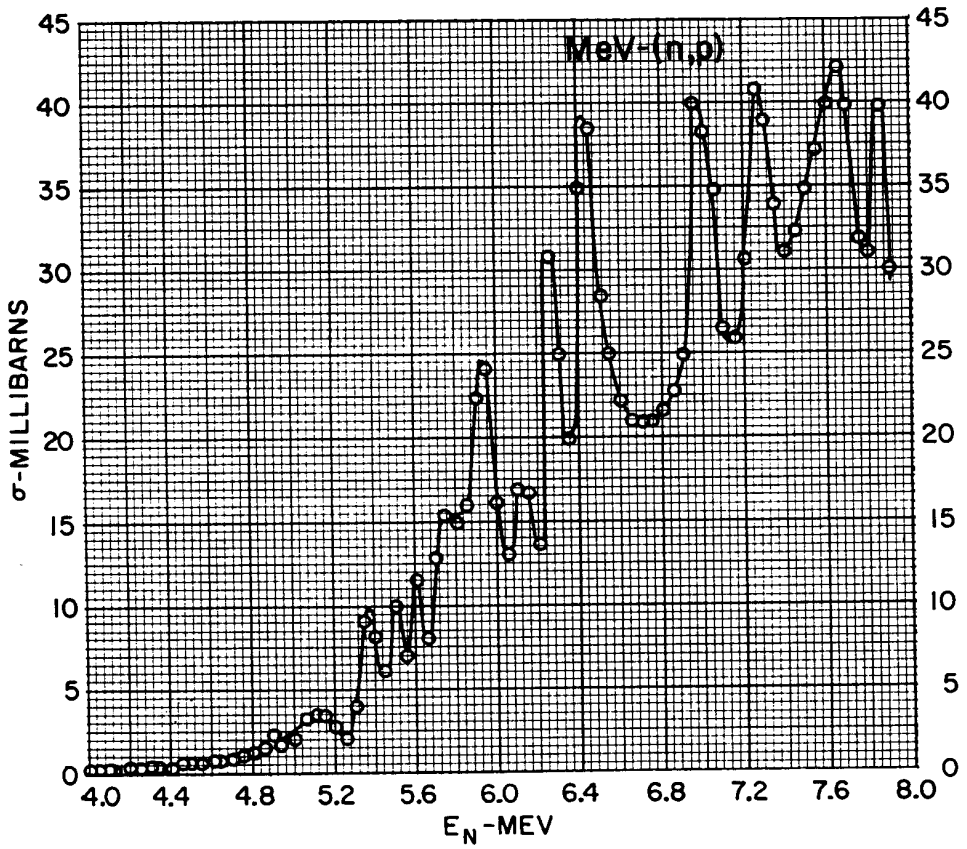


Abbildung 5.4: Anregungsfunktion der Reaktion Si(n,p) bei niedrigen Energien

diesem Kanal mit dem Aufgehen eines neuen Kanals ein starkes Absinken des Wirkungsquerschnittes. Dies erklärt sich durch die Erhaltung des Teilchenflusses (= Wahrscheinlichkeitserhaltung), die theoretisch durch die Unitarität der Streumatrix berücksichtigt wird. Ein Beispiel ist der pp-Wirkungsquerschnitt an der Pionenerzeugungsschwelle.

Gelegentlich zeigen Wirkungsquerschnitte an dieser Stelle resonanzähnliches Verhalten (*Cusps*), das aber nicht durch Resonanzverhalten im üblichen Sinne, sondern mit der Unitarität der S-Matrix beschrieben werden kann. Die Cuspform hat nichts mit der Breit-Wigner-Form von Resonanzen zu tun.

5.4 Andere Phänomene

Die bisher diskutierten Verhaltensweisen der s-Wellen-Wirkungsquerschnitte waren durch den Phasenraum allein (konstantes Matrixelement) oder durch ein einfaches Transmissionsverhalten (Coulomb-Penetrabilität) bestimmt. In ähnlicher Weise würde man auch für Partialwellen mit $\ell > 0$ die Penetrabilität parametrisieren. In der nuklearen Astrophysik wird dieses Verhalten bei der Diskussion gemessener Anregungsfunktionen "herausdividiert", indem man statt des Wirkungsquerschnittes die astrophysikalische *S-Funktion* aufträgt.

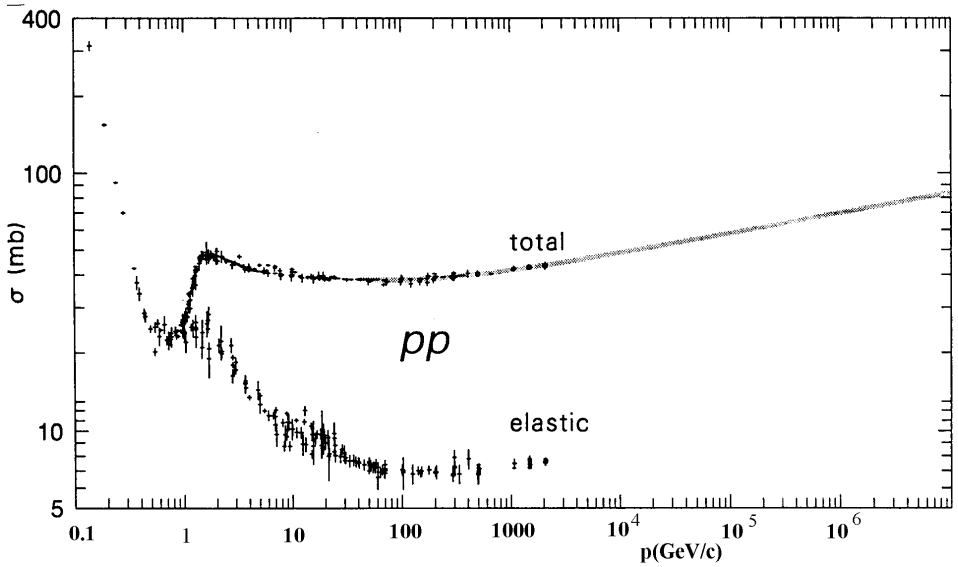


Abbildung 5.5: Elastische und inelastische Streuuung von Protonen an Protonen. Die Inelastizität beginnt hier an der Pionen-Erzeugungsschwelle und bewirkt einen Abfall des rein elastischen Streuquerschnitts zusammen mit einem schwachen Schwelleneffekt (Cusp)

Jede besondere Energieabhängigkeit des Matrixelements wird dann deutlich sichtbar. Insbesondere gilt dies für *Resonanzen*, die Eigenzuständen des Hamiltonoperators des Compoundsystems mit endlicher Lebensdauer (Breite) entsprechen. Ein Beispiel sind die Neutronenresonanzen der Uran-Isotope, die eine große Rolle bei der Neutronenbremsung in Reaktoren spielen, s. Abb. 5.6.

Diese zeigen für die beiden wichtigsten Target-Isotope ^{235}U und ^{238}U sehr verschiedenes Verhalten: ^{235}U ist durch thermische Neutronen spaltbar, zeigt also für niedrige Energien den typischen Einfangreaktionsverlauf mit 1/v. ^{238}U ist erst durch schnelle Neutronen spaltbar, der Spaltwirkungsquerschnitt ist erst ab einer Schwelle von ca. 1.5 MeV ungleich null, darunter dominiert die elastische Streuung (konstanter Verlauf). Beide Reaktionen zeigen zusätzlich im mittleren Energiebereich starke Resonanzen, die bei der Neutronenbremsung in Reaktoren eine große Rolle spielen (enstprechend einer starken Energieabhängigkeit des Matrixelements H).

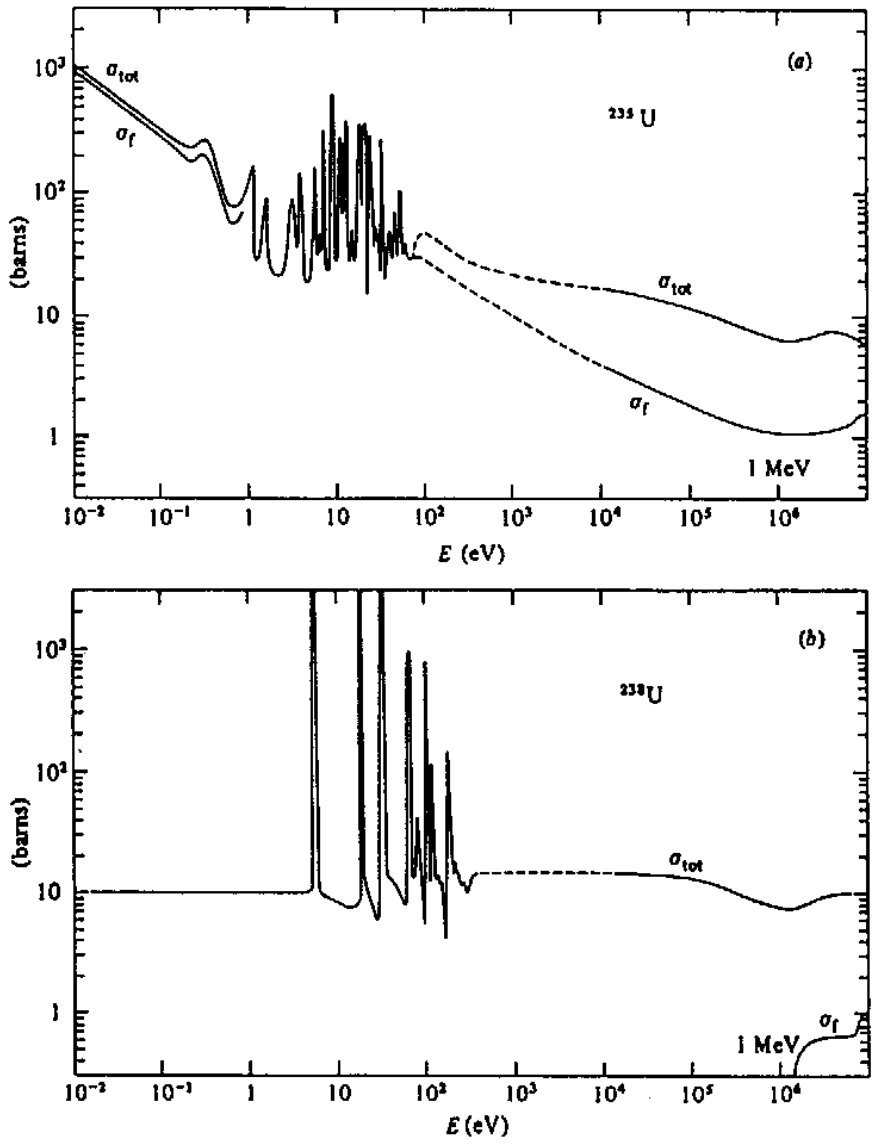


Abbildung 5.6: Integrierte Wirkungsquerschnitte der Wechselwirkung von Neutronen mit ^{235}U und ^{238}U

Kapitel 6

Formale Beschreibung von Kernreaktionen

6.1 Wellenfunktion und Streuamplitude

Die Streuung wird durch eine stationäre Wellenfunktion für asymptotische Zustände beschrieben. Die einlaufende Welle wird als ebene Welle bei $z \to -\infty, t \to -\infty$ präpariert. Die gestreute Welle ist eine auslaufende Kugelwelle, die bei $r \to \infty, t \to \infty$ beschrieben wird. Diese (dem üblichen Experimentaufbau entsprechende) Situation zeigt Abbildung 6.1.

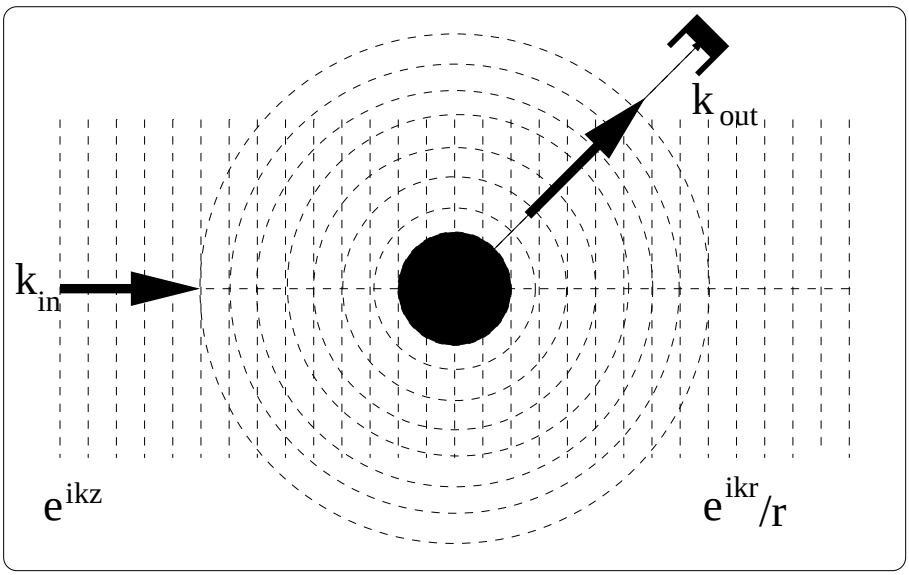


Abbildung 6.1: Streuung quantenmechanisch

Ihre Modifikation durch den Streuprozeß wird durch die Streuamplitude $f(\theta, \phi)$ be-

schrieben. Die Gesamtwellenfunktion

$$\Psi \to e^{ik_{in}z} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ik_{out}r}}{r}, \tag{6.1}$$

ist die Lösung einer Schrödingergleichung mit Randbedingungen oder einer entsprechenden Integralgleichung (Lippmann-Schwinger-Gleichung). Sie unterliegt mehreren Bedingungen. Beim Vorhandensein eines Potentials paßt man die Wellenfunktion im Außenraum, also die des freien Teilchens, an einer geeigneten Stelle (Kernrand r=R, Potential"rand") an die Wellenfunktion im Kerninneren, also im Potential an. Dabei muß gelten:

- Die Wellenfunktion und ihre Ableitung seien stetig bei r=R
- für gebundene Zustände geht $\Psi \to 0$ für $r \to \infty$
- für Streuzustände geht $\Psi \to$ asymptotische Lösung für eine freies Teilchen mit $r \to \infty$
- $\Psi \to 0$ für $r \to 0$, um Singularität im Ursprung zu vermeiden.

6.2 Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt

Wir gehen von der allgemeinen Definition des Wirkungsquerschnittes als

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{out} d\vec{A}}{\left|\vec{j}_{in}\right|} \tag{6.2}$$

aus und benutzen, daß für $\vec{j}$ eine klassische Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} \tag{6.3}$$

Quantenmechanisch ist

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2\mu}[\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*] \quad \text{und} \quad \rho = \Psi\Psi^*, \tag{6.4}$$

wodurch sich die Verbindung zu den Wellenfunktionen, die z.B. Lösungen der Schrödingergleichung sein können, herstellen läßt. Mit

$$\Psi_{in} \equiv \Phi = ae^{ik_{in}z} \quad \text{und} \quad \Psi_{out} = af(\theta,\phi)\frac{e^{ik_{out}r}}{r} \tag{6.5}$$

ergibt sich:

$$\vec{j}_{in} = \hbar/2\mu|a|^2 2\vec{k}_{in} = |a|^2\vec{v}_{in} \tag{6.6}$$

$$\vec{j}_{out} = \hbar/2\mu|a|^2\left|f(\theta,\phi)\right|^2\frac{k_{out}}{r^2} = |a|^2\vec{v}_{out}\frac{\left|f(\theta,\phi)\right|^2}{r^2}. \tag{6.7}$$

Mit dem auslaufenden Fluß $\vec{j}_{out}d\vec{A} = \vec{v}_{out}|a|^2\,|f(\theta,\phi)|^2\,dA/r^2$ durch die Fläche $dA = r^2 d\Omega$ wird

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{out}d\vec{A}}{\left|\vec{j}_{in}\right|} = \frac{v_{out}|a|^2\,|f(\theta,\phi)|^2\,d\Omega}{v_{in}|a|^2} \tag{6.8}$$

und

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k_{out}}{k_{in}}\,|f(\theta,\phi)|^2 = \frac{k_{out}}{k_{in}} f \cdot f^* \tag{6.9}$$

bzw.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2 \quad \text{für elastische Streuung} \tag{6.10}$$

Bemerkung (s.u.):

- Für Teilchen mit Spin ist die Streuamplitude durch eine Matrix, die die Übergänge zwischen den verschiedenen Spin-Unterzuständen des Ein- und Ausgangskanals vermittelt, zu ersetzen (*M-Matrix*). Das komplexe Betragsquadrat $f \cdot f^*$ wird dabei durch die Spurbildung ersetzt: $d\sigma/d\Omega \propto Sp(MM^\dagger)$.
- Neben dem (unpolarisierten) Wirkungsquerschnitt gibt es dann weitere (*Polarisations-*)Observable wie Polarisation, Analysierstärke, Polarisationstransferkoeffizienten, Spinkorrelationskoeffizienten u.a. Näheres hierzu s. Skriptum Schieck: Kernphysik mit polarisierten Teilchen (Dichtematrix, Beschreibung der Spinpolarisation, Drehungen, Kernreaktionen mit Spin).

6.3 Schrödingergleichung

Für die Anwendung auf Kernreaktionen sucht man stationäre Lösungen, d.h. man benutzt die zeitunabhängige Schrödingergleichung. Entsprechend der Geometrie des Streuproblems ist die Darstellung in sphärischen Polarkoordinaten zweckmäßig. Für ein Zentralpotential $V(\vec{r})$ ist diese Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \tag{6.11}$$

$\Psi(\vec{r})$ ist die verkürzte Schreibweise für $\Psi^{(+)}_{\vec{k}_i}(\vec{r})$, entspricht also der stationären Streuwellenfunktion. Der winkelabhängige Teil des Hamiltonoperators läßt sich durch den Drehimpulsoperator ausdrücken:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]. \tag{6.12}$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen zu L^2 bzw. L_z sind durch die EW-Gleichungen gegeben:

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell m}(\theta,\phi), \tag{6.13}$$

$$L_z Y_{\ell m}(h\eta, \phi) = m\hbar Y_{\ell m}(\theta, \phi). \tag{6.14}$$

Es gelten die bekannten Vertauschungsrelationen. Damit kann man den Hamiltonoperator schreiben:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\right] + V(r), \tag{6.15}$$

d.h. die Substitution führt zum Auftreten eines Terms mit L^2, der dem Potential zugeschlagen werden kann (*Zentrifugalpotential*). Wegen $[H, L^2]$ und $[H, L_z] = 0$ sucht man die zu H, L^2 und L_z gemeinsamen Eigenfunktionen durch einen Produktansatz, der einer Separation von Radial- und Winkelanteil der Wellenfunktion entspricht und gleichzeitig eine Partialwellenzerlegung darstellt:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell m}(k) R_{\ell m}(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \tag{6.16}$$

Die separierte Radialgleichung [für m=0 (Azimutunabhängigkeit des Steuproblems)] ist die *Bessel-Differentialgleichung*:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r)\right] u_\ell(k, r) = 0, \tag{6.17}$$

wobei die Ersetzungen vorgenommen wurden: $u_\ell(k, r) = rR_\ell(k, r)$ und $U(r) = 2\mu V(r)/\hbar^2$.

Die Lösungen dieser Gleichung für das freie Teilchen (U=0) sind:

- $$j_\ell(kr) \to_{r\to\infty} = \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} \equiv \frac{e^{i[kr-\ell\pi/2]} - e^{-i[kr-\ell\pi/2]}}{2ikr} \tag{6.18}$$

  Diese Sphärische Besselfunktion ist regulär für $r \to 0$

- $$n_\ell(kr) \to_{r\to\infty} \frac{\cos(kr - \ell\pi/2)}{kr} \equiv \frac{e^{i[kr-\ell\pi/2]} - e^{-i[kr-\ell\pi/2]}}{-2kr}. \tag{6.19}$$

  Diese Sphärische Neumannfunktion ist irregulär für $r \to 0$.

- Lösungen sind auch die Linearkombinationen:

  $$h_\ell^{(1,2)}(kr) = j_\ell(kr) \pm i n_\ell(kr) \tag{6.20}$$

  (Hankelfunktionen).

  Für gebundene Zustände kann man wegen des Verhaltens am Ursprung nur die Lösung $j_\ell(kr)$ verwenden.

Bei Streuung an einem Potential verschiebt sich die Phase der Streuwelle um δ_ℓ: Die Wellenzahlen im freien Raum ($k_{frei} = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$) und im Potential ($k_{pot} = \sqrt{2\mu(E-V)/\hbar^2}$) unterscheiden sich. Nach Durchgang einer Welle durch eine Potential"schicht" der Dicke d hat sich die Phase der transmittierten Welle gegenüber der der freien Welle um $\delta = (k_{pot} - k_{frei})d$ geändert.

Um die Gesamtwellenfunktion ebenfalls nach Partialwellen entwickeln zu können, braucht man noch eine solche Entwicklung der ebenen einfallenden Welle e^{ikz}. Diese liefert die mathematische Identität (Rayleigh):

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}j_{\ell}(kr)P_{\ell}(\cos\theta) \tag{6.21}$$

Damit wird die Gesamtwellenfunktion:

$$\Psi_{tot} \to\propto \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}\frac{e^{i[kr-\ell\pi/2]}-e^{-i[kr-\ell\pi/2]}}{2ikr}P_{\ell}(\cos\theta)+f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{6.22}$$

Andererseits muß diese Gesamtwellenfunktion einer einfachen Partialwellenentwicklung – aber mit Phasenverschiebung durch das Potential – genügen:

$$\Psi_{tot} \to \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell}\frac{1}{2ikr}\left[e^{i(kr-\ell\pi/2+\delta_{\ell})}-e^{-i(kr-\ell\pi/2+\delta_{\ell})}\right]P_{\ell}(\cos\theta) \tag{6.23}$$

Durch Koeffizientenvergleich der ein- und der auslaufenden Wellen in beiden Entwicklungen erhält man einerseits die Normierung, nämlich:

$$C_{\ell}(k) = (2\ell+1)i^{\ell}e^{i\delta_{\ell}}, \tag{6.24}$$

andererseits $f(\theta)$:

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell}(2\ell+1)i^{\ell}e^{i\delta_{\ell}}\frac{1}{2ikr}P_{\ell}(\cos\theta)e^{i(kr-\ell\pi/2+\delta_{\ell})}\\ =&\sum_{\ell}(2\ell+1)i^{\ell}\frac{1}{2ikr}e^{i(kr-\ell\pi/2)}P_{\ell}(\cos\theta)+f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r},\end{aligned} \tag{6.25}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{i}{2k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)(1-e^{2i\delta_{\ell}})P_{\ell}(\cos\theta)\\ &= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin\delta_{\ell}e^{i\delta_{\ell}}P_{\ell}(\cos\theta)\end{aligned} \tag{6.26}$$

Die Größe $\eta_{\ell} = exp(2i\delta_{\ell})$ ist die *Streufunktion* und identisch mit der einfachsten Form der allgemeinen Streumatrix $S_{\ell}(k)$. Diese Funktion enthält die Dynamik der Wechselwirkung und bestimmt über die Streuamplitude (allgemeiner: über die Transfer(T)-Matrix bzw. für Teilchen mit Spin die M-Matrix) die Observablen wie $d\sigma/d\Omega$ u.a.

Als Beispiel sei hier der differentielle Wirkungsquerschnitt abgeleitet:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f|^2 = ff^* = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)(e^{2i\delta_{\ell}}-1)P_{\ell}(\cos\theta)\right|^2\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sum_{\ell'=0}^{\infty}(2\ell+1)(2\ell'+1)e^{i[\delta_{\ell}(k)-\delta_{\ell'}(k)]}\sin\delta_{\ell}\sin\delta_{\ell'}P_{\ell}P_{\ell'}\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{L=|\ell-\ell'|}^{\ell+\ell'}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)(2\ell'+1)(\ell\ell'00|L0)^2e^{i[\delta_{\ell}(k)-\delta_{\ell'}(k)]}\sin\delta_{\ell}\sin\delta_{\ell'}P_L(\cos\theta)\end{aligned} \tag{6.27}$$

Dabei wurde die Beziehung

$$P_\ell P_{\ell'} = \sum_{L=|\ell-\ell'|}^{\ell+\ell'} (\ell\ell' 00|L0)^2 P_L(\cos\theta) \tag{6.28}$$

verwendet.

Aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt gewinnt man den *integrierten Wirkungsquerschnitt* durch Integration über den gesamten Raumwinkel. Bei Φ-Unabhängigkeit ergibt dies:

$$\begin{aligned} \sigma_{int} &= 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2\delta_\ell = \sum_{\ell}^{\infty} \sigma_\ell \end{aligned} \tag{6.29}$$

unter Benutzung der Beziehung $\int_{-1}^{+1} P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) d(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$. Der integrierte Querschnitt ist also eine inkohärente Summe über Partialquerschnitte zu ℓ, und diese zeigen eine Gewichtung mit $2\ell+1$. Die maximalen integrierten Partialquerschnitte, wie sie z.B. in Resonanzmaxima auftreten und für die $\delta_\ell(k) = (n+1/2)\pi; n = 0, \pm1, \pm2, ...$ gilt, wachsen also linear mit ℓ:

$$\sigma_{\ell,max}(k) = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1) \tag{6.30}$$

Andererseits ist der Beitrag höherer ℓ-Werte (zumindest für kurzreichweitige Kräfte) beschränkt durch das Wirken der Zentrifugalbarriere. Für eine "Reichweite" d des Potentials können nur Partialwellen wichtig sein, für die

$$\ell \leq kd \tag{6.31}$$

ist. Dies folgt u.a. aus dem Verhalten der Besselfunktionen: das erste Maximum von $j_\ell(kr)$ liegt bei $r_0 \approx \ell/k$; für kleine r geht $j_\ell(kr) \propto r^\ell$, d.h. für $d \leq \ell/k$ ist $j_\ell(kr)$ ebenso wie δ_ℓ klein. Diese obere Grenze für ℓ_{max}, häufig: ℓ_{gr} (gr für "grazing"), wird nur in Reaktionen erreicht, die am Potentialrand stattfinden, also in *direkten* Prozessen. Bei *Compoundkern*prozessen, die eher zentral stattfinden, liegt die obere Grenze für ℓ niedriger (ℓ_{crit}). Für *dissipative* Prozesse wie "unvollständige Fusion" bzw. "tief-inelastische Streuung" liegt ℓ_{max} zwischen ℓ_{crit} und ℓ_{gr}. Dieses Verhalten als Funktion von ℓ zeigt Abb. 6.2.

Schlußfolgerungen für Reaktionen, die durch einen definierten Zwischenzustand verlaufen (z.B. eine isolierte Resonanz in der Wechselwirkung von Teilchen ohne Spins):

Der CG-Koeffizient $(\ell\ell' 00|L0)$ hat die Eigenschaft, nur dann ungleich 0 zu sein, wenn $\ell + \ell' + L$ gerade ist. Das bedeutet hier: wegen $\ell = \ell'$ ist L gerade, und weil deshalb auch L nur die geraden Werte von $|\ell - \ell'|...\ell + \ell'$ in der Legendre-Entwicklung annimmt mit $L_{max} = 2\ell$, enthält die Winkelverteilung nur gerade Legendre-Polynome, die symmetrisch um $\pi/2$ sind, und $\ell = J$ des Zwischenzustandes ist gerade durch die halbe "Komplexität" L der Winkelverteilung gegeben. Dies dient zur Spinbestimmung isolierter Resonanzen in der Kern- und Teilchenphysik (Beispiel: Δ-Resonanz, s. Kap. 11.3.1).

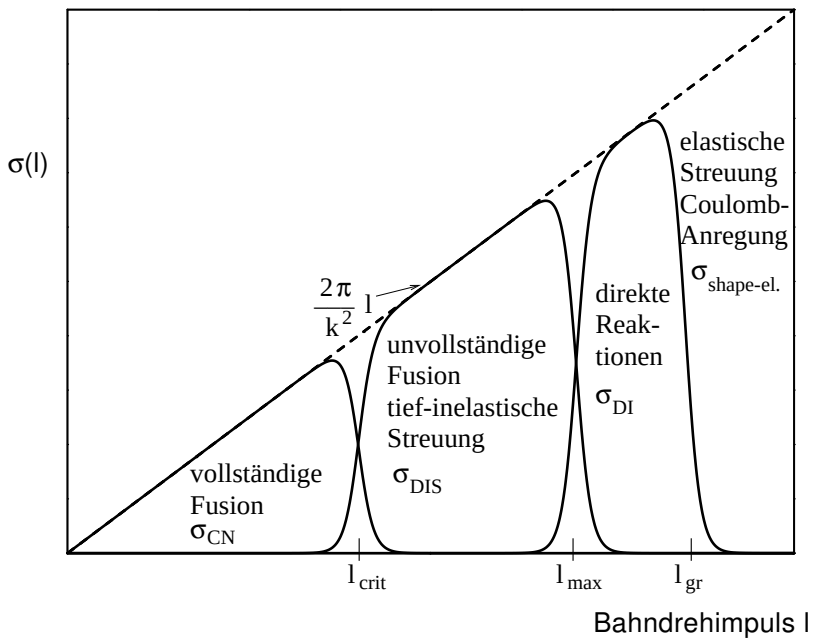


Abbildung 6.2: Anstieg der integrierten Wirkungsquerschnitte für Neutronen mit ℓ für verschiedene Reaktionsmechanismen. ℓ ist im semiklassischen Bild auch zunehmenden Wechselwirkungsabständen zuzuordnen.

Kapitel 7

Inelastizität und Absorption

Unter *inelastischen* Prozessen sollen *alle* Prozesse verstanden werden, die nicht-elastisch sind, d.h. solche, die Teilchenfluß aus dem direkten elastischen Kanal abzweigen. Hierzu gehören alle *Reaktionen* im engeren Sinne (also ohne direkte elastische Streuung, Shape-elastische Streuung), aber auch die compoundelastische Streuung, die über Zwischenzustände verläuft, sowie z.B. die induzierte Kernspaltung und – bei höheren Energien – die Erzeugung von Teilchen oberhalb der entsprechenden Schwellen. Für diese Prozesse lassen sich einige allgemeine Aussagen machen, ohne daß man sich um Details des Reaktionsmechanismus kümmern muß.

Der Fluß der einlaufenden Teilchen (Eingangskanal α) verteilt sich also i.a. auf mehrere Ausgangskanäle (β). Wir benutzen die Schreibweise für Reaktionen $\eta_{\ell,\beta} \equiv \eta_\alpha^\ell$, für rein elastische Streuung $\eta_\ell \equiv \eta_{\ell,\alpha}$, wo η die oben definierte Streufunktion, S die äquivalente S-Matrix ist. Die S-Matrix hat einige Eigenschaften, die man sich hier zunutze machen kann. Es gelten z.B.

- Unitarität: $\sum_\beta \left|S_{\beta,\alpha}^\ell\right|^2 = 1$
- Reziprozität (bei Zeitumkehrinvarianz): $S_{\alpha,\beta}^\ell = S_{\beta,\alpha}^\ell$

Auf η übertragen heißt das:

$$\sum_\beta \left|\eta_{\ell,\beta}\right|^2 = 1, \tag{7.1}$$

wobei β über alle offenen Kanäle einschließlich des elastischen (Eingangs-) Kanals α läuft. Hiermit läßt sich der *Absorptionsquerschnitt* σ_{abs} als Summe über alle nicht-elastischen Querschnitte definieren:

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \sum_{\beta\neq\alpha} \sigma_\beta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell+1) \sum_{\beta\neq\alpha} \left|\eta_{\ell,\beta}\right|^2 \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[1 - \left|\eta_{\ell,\alpha}\right|^2\right] \end{aligned} \tag{7.2}$$

Vereinfacht geschrieben ist dies

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left[1 - |\eta_\ell|^2 \right] \tag{7.3}$$

Dagegen ist der elastische Streuquerschnitt, wenn man die früher abgeleitete Form für einen Kanal auf den allgemeinen Fall einer Streufunktion für mehrere Kanäle erweitert:

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left| \delta_{\alpha,\beta} - \eta_{\ell,\beta} \right|^2 , \tag{7.4}$$

was sich vereinfacht schreiben läßt als:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left| 1 - \eta_\ell \right|^2 \tag{7.5}$$

Für die Summe, den *totalen* (integrierten) Wirkungsquerschnitt, ergibt sich daraus:

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left[1 - |\eta_\ell| \cos(2\Re\delta_\ell) \right] . \tag{7.6}$$

Die Beziehungen zwischen dem elastischen und dem Absorptionsquerschnitt lassen sich grafisch auftragen und ergeben z.B., daß es zwar elastische Streuung ohne Absorption (also für $|\eta_\ell| = 1$) geben kann (z.B. unterhalb der entsprechenden Schwellenenergien), aber umgekehrt Absorption stets begleitet ist von elastischer Streuung. Es ist plausibel, daß die elastische Streuung ihren (durch die Unitarität der S-Matrix gegebenen) Maximalwert des Wirkungsquerschnittes von $\frac{4\pi}{k^2}(2\ell + 1)$ auch nur für verschwindende Absorption erreicht. Der Maximalwert des Absorptionsquerschnittes $\frac{\pi}{k^2}(2\ell + 1)$ wird für $\eta_\ell = 0$ erreicht, so daß auch für den totalen Querschnitt die obere Grenze von $\frac{4\pi}{k^2}(2\ell + 1)$ gilt.

Formal beschreibt man die Absorption dadurch, daß man das die Streuung bewirkende Potential komplex ansetzt:

$$V = U + iW. \tag{7.7}$$

Dieser Ansatz ist die Grundlage des *Optischen Modells* der elastischen Streuung bzw. des *Optischen Potentials*. Der Imaginärteil W beschreibt die Schwächung des einlaufenden Teilchenflusses durch Absorption in andere Kanäle als den elastischen Kanal. Diese Absorption (Teilchensenke) kann man folgendermaßen verstehen: man setzt die Schrödingergleichung mit komplexem Potential an, bildet die konjugiert-komplexe Gleichung, multipliziert die Gleichungen mit Ψ^* bzw. Ψ und kommt durch Subtraktion beider zu einer Kontinuitätsgleichung für einen stationären Zustand,d.h. mit $d\rho/dt = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi + 2\mu/\hbar^2 \left[E - (U + iW) \right] \Psi &= 0 \qquad | \cdot \Psi^* \qquad (7.8) \\ \nabla^2\Psi^* + 2\mu/\hbar^2 \left[E - (U + iW) \right] \Psi^* &= 0 \qquad | \cdot \Psi \\ \underbrace{\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*}_{\nabla\vec{j}} &= \underbrace{\frac{2i\mu W}{\hbar^2}\Psi\Psi^*}_{-kv\rho} \qquad (7.9) \end{aligned}$$

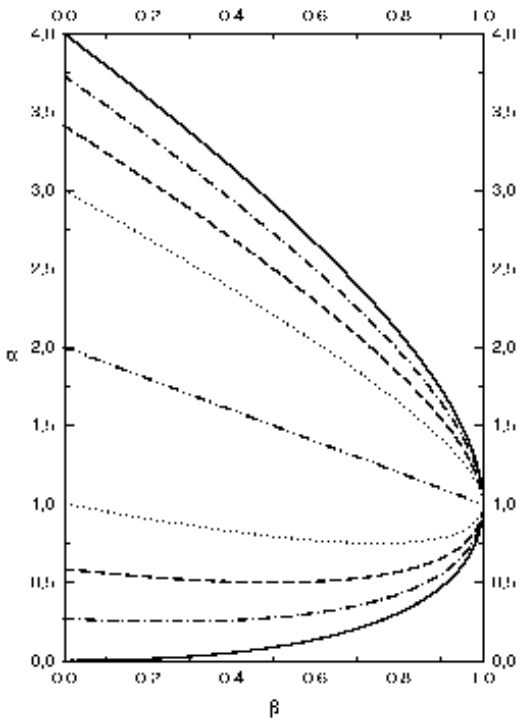


Abbildung 7.1: Elastische Streuung und Absorption. Aufgetragen ist $\alpha = \frac{\sigma_{el,\ell}}{(2\ell+1)\pi/k^2} = |1-\eta_\ell|^2$ gegen $\beta = \frac{\sigma_{r,\ell}}{(2\ell+1)\pi/k^2} = 1-|\eta_\ell|^2$. Der mögliche Bereich ist gegeben durch $\alpha = 2[1-\sqrt{1-\beta}\cos(2\Re\delta_\ell)] - \beta$, die Grenzkurve durch die Werte $\Re\delta_\ell = 0, \pi$.

Der Term auf der rechten Seite charakterisiert die Teilchensenke mit $W = \frac{1}{2}v\hbar k = \frac{1}{2}\frac{\hbar v}{\lambda}$ und $W < 0$. Die Wellenzahl ist ebenfalls komplex und läßt sich schreiben als:

$$k = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-(U+iW)\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-U)}\sqrt{1-i\frac{W}{(E-U)}} = k_0 + \frac{i}{\lambda} \tag{7.10}$$

Das bedeutet z.B. für eine ebene Welle

$$e^{ikz} = e^{ik_0 z}\cdot e^{-z/\lambda} = e^{ik_0 z}\cdot e^{-z\frac{2W}{\hbar v}} \tag{7.11}$$

eine Amplitudenabschwächung mit einer *mittleren freien Weglänge* $\lambda = \hbar v/2W$.

Ganz formal kann man die komplexe Wellenzahl mit einer ebenfalls komplexen Streuphase identifizieren:

$$\Im\delta = \Im[(k_{pot}-k_{frei})d], \tag{7.12}$$

d.h. der Imaginärteil der Phasenverschiebung beschreibt ebenfalls die Absorption. Die Streufunktion hat dann folgende Form:

$$\eta_\ell = e^{2i(\Re\delta_\ell + i\Im\delta_\ell)} = e^{-2\Im\delta_\ell}e^{2i\Re\delta_\ell} = |\eta_\ell|\, e^{2i\Re\delta_\ell} = \rho_\ell e^{2i\Re\delta_\ell}. \tag{7.13}$$

Der Betrag der Streuamplitude wird durch den Schwächungsterm $|\eta_\ell|$ verringert. Bei einer Phasenanalyse müssen daher z.B. oberhalb der Teilchenerzeugungsschwelle in

der NN-Wechselwirkung die Phasen stets komplex angesetzt werden, wodurch sich die Zahl der Fitparameter verdoppelt.

Kapitel 8

Niederenergieverhalten der Streuung

Das Niederenergieverhalten der Streuung (d.i. für $k \to 0$) ist durch die Dominanz der s-Wellenstreuung gekennzeichnet. Die folgende Diskussion soll sich daher auf diese Streuung mit $\ell = 0$ von ungeladenen Projektilen beschränken.

8.0.1 Streulänge a

Für $k \to 0$ geht die asymptotische Wellenfunktion im Außenraum gegen eine lineare Funktion von k:

$$\sin(kr) \to kr. \tag{8.1}$$

Paßt man diese Funktion am Kernrand r=R stetig an die Wellenfunktion im Kerninneren an und normiert sie so, daß sie den Wert 1 für r=0 annimmt, so erhält man eine Gerade, die die kr-Achse in einem Punkt r=a schneidet. Einerseits ist

$$v_0 = \frac{\sin(kr + \delta_0)}{\sin \delta_0} = 1 + kr \cot \delta_0, \tag{8.2}$$

andererseits ist (mit entsprechender Normierung)

$$v_0 = const(r - a) = -1/a(r - a) = 1 - (r/a). \tag{8.3}$$

Der Vergleich beider Formen liefert $-(r/a) = \lim_{k\to 0}(kr \cot \delta_0)$ und damit die Definition der *Streulänge*:

$$a = -\lim_{k\to 0} \frac{\tan \delta_0(k)}{k}. \tag{8.4}$$

Damit kann man die s-Wellen-Streuampitude ausdrücken:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 = \frac{1}{k} \frac{\sin \delta_0}{e^{-i\delta_0}} \\ &= \frac{1}{k} \frac{\sin \delta_0}{\cos \delta_0 - i \sin \delta_0} = \frac{1}{k(\cot \delta_0 - i)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{k}{\tan \delta_0}\right) - ika} \end{aligned} \tag{8.5}$$

woraus folgt:

$$\lim_{k\to 0} f_0 = -a \quad \text{und} \quad \lim_{k\to 0} \sigma = 4\pi a^2 \tag{8.6}$$

Der Betrag der Streulänge läßt sich also aus dem Grenzwert des totalen Querschnittes ermitteln, nicht jedoch ihr Vorzeichen. Dieses kann man z.B. für geladene Teilchen aus dem Vorzeichen der Interferenz mit der Coulombamplitude oder aus einer kompletten Streuphasenanalyse ermitteln.

Die geometrische Deutung der Streulänge als Achsenabschnitt der Wellenfunktion auf der r-Achse zeigt, daß sie besonders empfindlich ist auf das Verhalten der Wellenfunktion am Kernrand, d.h. dort, wo die logarithmischen Ableitungen der Wellenfunktionen im Innen- und Außenraum aneinander angepaßt werden. Hat die Wellenfunktion dort eine waagerechte Tangente (und das ist der Fall für einen gerade bei der Energie 0 gebundenen Zustand), so geht $a \to \infty$. Kleinste Potentialunterschiede bewirken sehr große Änderungen von a (*Lupeneffekt*). Die gefundene Brechung der Ladungsunabhängigkeit (Isospinbrechung) in der Größenordnung von $\Delta V/V \approx 1\%$ ist verantwortlich für den Unterschied in den NN-Streulängen von

$$a_{nn} \approx a_{pp,Coul.korr.} = 17.1 fm \quad \text{und} \quad a_{np} = 23.7 fm \tag{8.7}$$

8.1 Analytisch lösbare Modelle für das Niederenergieverhalten

8.1.1 Beispiel: Streuung von Neutronen an einer harten Kugel

Die Hartkugelstreuung ist die Streuung an einem vollkommen reflektierenden Kern. Es gibt keine Absorption und kein Eindringen der Wellenfunktion in den unendlich hohen Potentialbereich bei r $\leq$ d, also kann die Wellenfunktion bei r = d nur einen Knoten haben. Damit gilt für die Wellenfunktion im Außenraum die besondere Bedingung:

$$\tan\delta_\ell = -\frac{j_\ell(kd)}{n_\ell(kd)}. \tag{8.8}$$

Daraus folgt:

$$\sin^2\delta_\ell = \frac{\tan^2\delta_\ell}{1+\tan^2\delta_\ell} = \frac{1}{j_\ell^2(kd)+n_\ell^2(kd)} j_\ell^2(kd) = P_\ell(kd)\cdot j_\ell^2(kd). \tag{8.9}$$

Aus der asymptotischen Form von $j_\ell(kr)$ und $n_\ell(kr)$ für $k \to \infty$ erhält man für das Verhalten der Streuphasen für große kd:

$$\delta_\ell \to_{kd>>1} -(kd - \ell\pi/2) \tag{8.10}$$

und daraus den totalen Streuquerschnitt

$$\sigma_\ell = 4\pi d^2(2\ell+1)\frac{1}{(kd)^2} P_\ell(kd) j_\ell^2(kd) = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1) P_\ell(kd) j_\ell^2(kd). \tag{8.11}$$

Abbildung 8.1 zeigt die Hartkugelstreuphasen und demonstriert damit, daß ein repulsives Potential durch (anwachsend) negative Streuphasen charakterisiert wird.

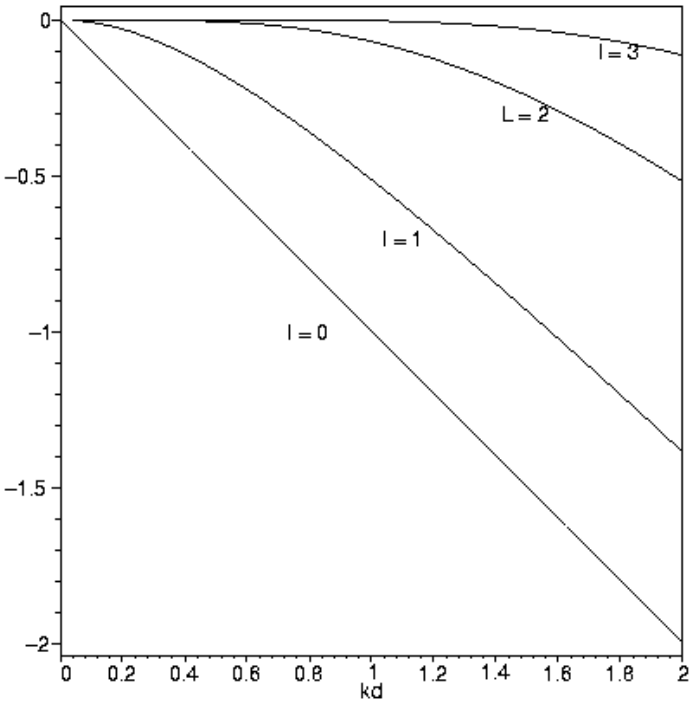


Abbildung 8.1: Hartkugelstreuphasen für $\ell = 0$, 1, 2 und 3

Für reine s-Wellen ($\ell = 0$) ist

$$\tan \delta_0 = -\frac{\sin(kd)}{\cos(kd)} = -\tan(kd), \tag{8.12}$$

d.h.

$$\delta_0 = -kd \tag{8.13}$$

und

$$a = d. \tag{8.14}$$

Für diesen Spezialfall ist die Streulänge gerade gleich dem Potentialradius und

$$\sigma_0 = 4\pi d^2 = 4 \cdot \sigma_{class} \tag{8.15}$$

8.1.2 Beispiel: Streuung von Neutronen an einem Rechteck-Potentialtopf

Das Potential sei gegeben durch:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 (U_0 > 0) & r < d \\ 0 & r > d \end{cases} \tag{8.16}$$

Die Radialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa^2 - \ell(\ell+1)/r^2\right] u_\ell(r) = 0 \tag{8.17}$$

mit

$$\kappa = \sqrt{k^2 + U_0} \tag{8.18}$$

(Wellenzahl im Potentialtopf) hat die reguläre Lösung im Topfbereich $r < d$:

$$u_\ell(r) = rC_\ell j_\ell(\kappa r) \tag{8.19}$$

bzw.

$$R_\ell(r) = C_\ell j_\ell(\kappa r), \tag{8.20}$$

im Außenbereich $r > d$

$$u_\ell(r) = C_\ell j_\ell(kr + \delta_\ell) = rA_\ell[j_\ell(kr) - \tan\delta_\ell n_\ell(kr)] = rR_\ell(kr) \tag{8.21}$$

. Die Anpassung von R_ℓ und R'_ℓ am Potentialrand r=d wird so durchgeführt, daß man die logarithmischen Ableitungen

$$L_\ell = \left(\frac{dR_\ell}{dr}\frac{1}{R_\ell}\right)_{r=d} \tag{8.22}$$

der inneren und der äußeren Lösung gleichsetzt:

$$\kappa \cdot \frac{j'_\ell(\kappa d)}{j_\ell(\kappa d} = \frac{j'_\ell(kd) - \tan\delta_\ell n'_\ell(kd)}{j_\ell(kd) - \tan\delta_\ell n_\ell(kd)}. \tag{8.23}$$

Beschränkt man sich auf s-Wellen, so wird mit $j_0(x) = \sin x/x$ und $n_0(x) = -\cos x/x$

$$\tan\delta_0 = \frac{k\tan(\kappa d) - \kappa\tan(kd)}{\kappa + k\tan(kd)\tan(\kappa d)} \tag{8.24}$$

und

$$\delta_0 = -kd + \arctan\left[\frac{kd}{\kappa d}\tan(\kappa d)\right]. \tag{8.25}$$

Für kleine k ($kd << 1$):

$$\delta_0 = kd\left(\frac{\tan\kappa d}{\kappa d} - 1\right) + n\pi. \tag{8.26}$$

Das Verhalten der s-Phase hängt stark davon ab, ob die Tiefe des Potentialtopfes ausreicht, einen oder mehrere gebundene Zustände zu tragen oder nicht. Dies wird in Abbildung 8.2 deutlich.

Es besteht eine Vieldeutigkeit der Streuphasen modulo π, die in einer Phasenanalyse (bei einer Energie) nicht aufgelöst werden kann. Beim Durchlaufen einer isolierten rein elastischen Resonanz schreitet δ um $\Delta\delta = \pi$ fort, mit $\Delta\delta = \pi/2$ bei der Resonanzenergie. Die Gesamtstreuphase, die auch die Potentialstreuung enthält, erhöht sich entsprechend.

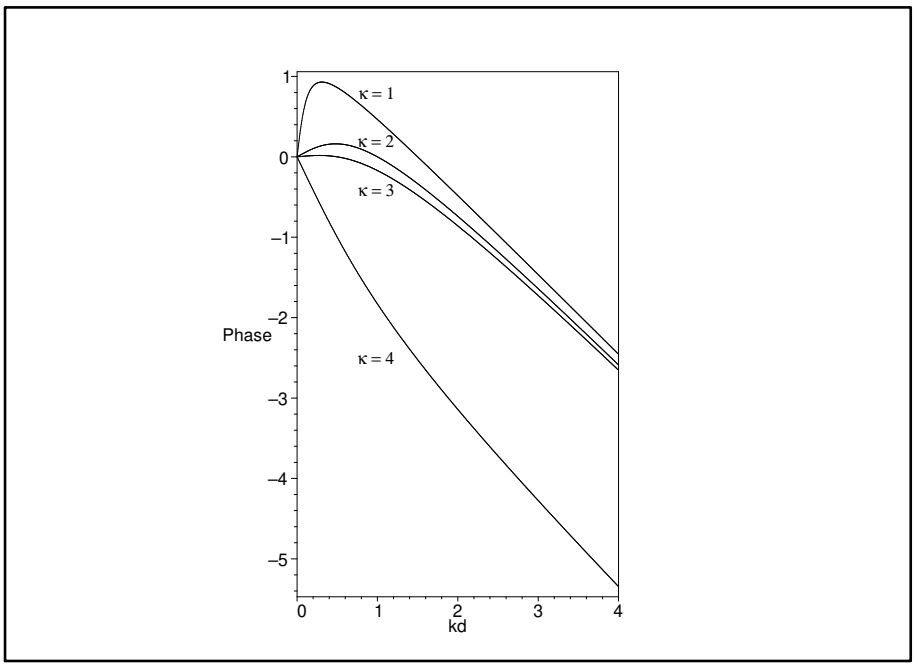


Abbildung 8.2: s-Wellen-Streuphasen im Potentialtopf für verschiedene Potentialtiefen, charakterisiert durch κ.

Kapitel 9

Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ist der Prototyp für das Wirken der Kernkräfte. Hat man diese "verstanden", so kann man hoffen, auch die Struktur und Wechselwirkung komplexer Kerne zu verstehen, mindestens im Sinne einer *effektiven* Wechselwirkung. Heute ist die Beschreibung der NN-Wechselwirkung im Rahmen von Mesonen-Austauschmodellen so gut, daß die neuesten *Präzisionspotentiale* an die Daten mit reduzierten χ^2-Werten nahe 1 angepaßt werden können.

Dies erlaubt darüberhinaus, diese Potentiale in den nächstschwereren Dreinukleonensystemen zu testen, wobei die Voraussetzung, daß diese Systeme exakt beschrieben werden können, erfüllt sein muß. Heutige *Faddeev*-Rechnungen sind numerisch exakt, so daß sogar neue Phänomene wie *Dreikörperkräfte* untersucht werden können. Hier soll nur knapp auf die NN-Resultate eingegangen werden. Im Zusammenhang mit dem Isospinformalismus wurde bereits die Empfindlichkeit der Streulängen auf Isospinbrechungen angeführt.

9.1 Die Observablen des NN-Systems

Zur Bestimmung der NN-Streuphasen, die oberhalb der Pionerzeugungsschwelle komplex sind, müssen eine Vielzahl von (insbesondere Polarisations-)Observablen gemessen sein. Es gibt davon im Prinzip 256, die sich aber durch Erhaltungssätze (P- und T-Invarianz) und Austauschsymmetrie (für die nn- und pp-Systeme) auf 36 bzw. 25 linear unabhängige Messgrößen reduzieren. Da die Streuung durch 5 (bzw. 6) komplexe Streuamplituden vollständig beschrieben wird, genügt die Messung von aus dieser Zahl geeignet auszuwählenden 9 (pp, nn) bzw. 11 (np) unabhängigen Größen. Die einfacher zu messenden sind neben differentiellem Wirkungsquerschnitt die Analysierstärke, Polarisationstransfer und Spinkorrelations-Koeffizienten.

Für NN kann man die Experimente in Teilbereichen als in diesem Sinne *vollständig* ansehen. In der Praxis wird man mehr Observable als minimal für eine Lösung

der Gleichungen zur Bestimmung der M-(T-)Matrix notwendig messen. Die übliche Parametrisierung des Gesamtdatensatzes ist die nach Streuphasen zu jeder (spingekoppelten) Partialwelle. Es gibt aber auch die direkte Parametrisierung nach Streuamplituden (Elementen der M-Matrix).

9.1.1 NN-Observable

Hier soll nur eine Auswahl typischer Observabler gezeigt werden, zunächst der totale np-Querschnitt σ(E) (Abb. 9.1): Die Abb. 9.2 zeigt die glatten Verläufe reiner Po-

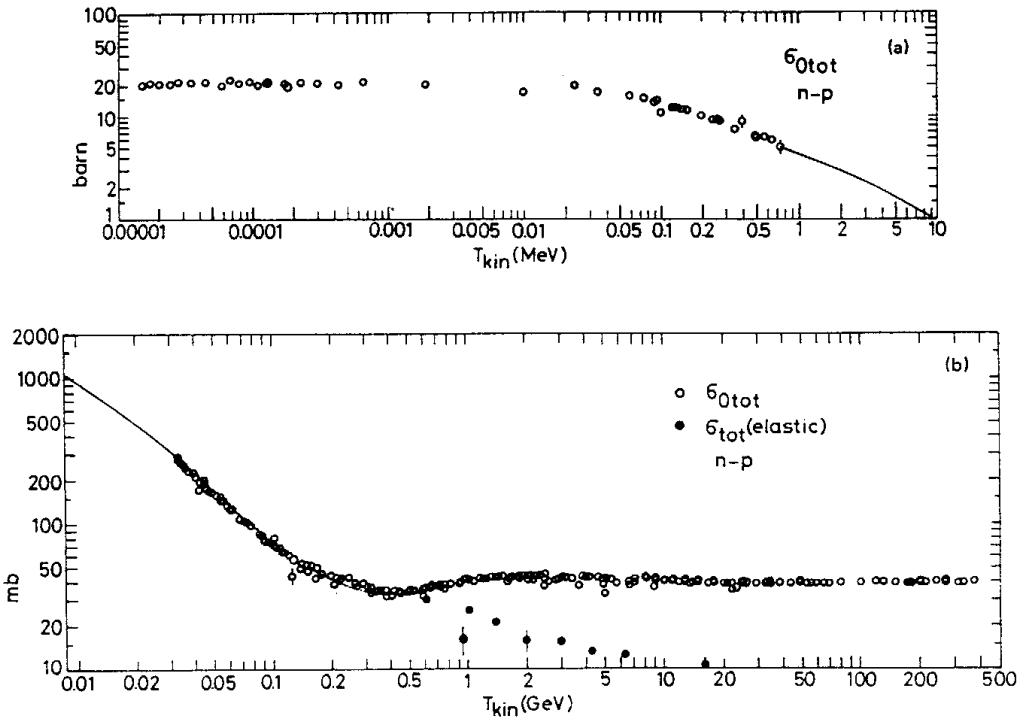


Abbildung 9.1: Totaler Wirkungsquerschnitt der np-Streuung als Funktion der Laborenergie.

tentialstreuung ohne Resonanzen (solche – *Dibaryon-Resonanzen* – wurden in den Anregungsfunktionen gesucht, aber bisher nicht sicher nachgewiesen), vgl. auch Abb. 5.5.

Die Abb. 9.3 zeigt die Analysierstärke der pp- und np-Streuungen bei 25 MeV. Die großen Unterschiede der – was die Kernwechselwirkung betrifft – im Prinzip (Isospin!) als sehr ähnlich erwarteten Reaktionen enstehen durch die Interferenz mit der Coulombwechselwirkung im pp-Fall.

9.1.2 NN-Streuphasen

Diese und alle anderen Observablen bei allen Energien werden laufend einer gemeinsamen Phasenanalyse unterzogen. Die durch Fit (χ^2-Minimierung) erhaltenen

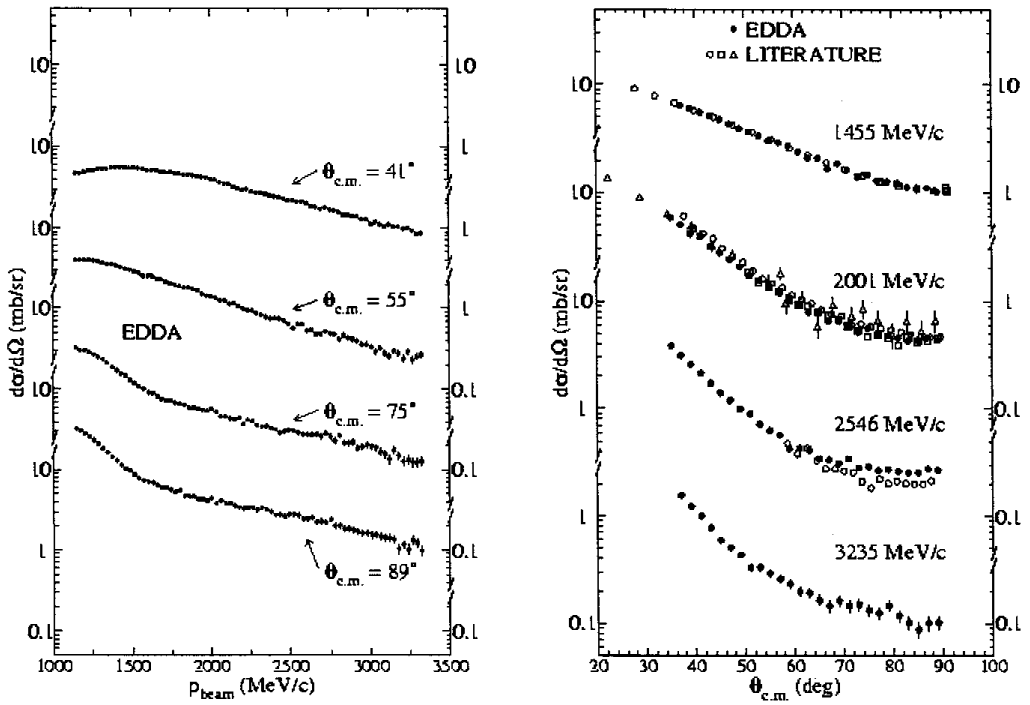


Abbildung 9.2: Anregungsfunktion und Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der pp-Streuung.

Streuphasen parametrisieren die Daten in einer Streuwinkel-unabhängigen Form als Funktion der Energie. Ab der untersten Teilchenerzeugungsschwelle (Pionenschwelle) müssen die Phasen komplex angesetzt werden (Abb. 9.4 und Abb. 9.5).

9.1.3 NN-Wechselwirkung als Austauschkraft

Alle fundamentalen Wechselwirkungen werden heute durch den Austausch virtueller Teilchen erklärt. Im Fall der NN-Wechselwirkung sind die Austauschteilchen Mesonen. Die Masse der Austauschteilchen bestimmt über die Unschärferelation die Reichweite der zugehörigen Kernkraftanteile. Die leichtesten Teilchen, die Pionen, sind für die Kernkräfte "weit außen" zuständig, die schwereren Mesonen entsprechend weiter innen. Verschiedene moderne Austauschpotentiale (typ. "CD BONN", "NIJMEGEN", "ARGONNE 18" u.a.) beschreiben die Daten mit $\chi^2 \approx 1$. Abb. 9.6 zeigt als Feynman-Diagramm den Austauschprozess, den radialen Verlauf des zentralen Teils der Kernkraft mit einem anziehenden und weiter innen einem abstossenden Anteil ("hard core"), den man im innersten Bereich auf die Quark-Quark-Wechselwirkung zurückführt.

Die Erhaltungssätze (Parität, Zeitumkehr, Austauschsymmetrie etc.) lassen nur bestimmte Formen der Kernwechselwirkung zu (Zentral-, Spin-Spin-, Spin-Bahn-, Tensorkraft etc.). Experimentell tragen diese in verschiedenen Observablen verschieden bei. Ein Beispiel ist das Quadrupolmoment des einzigen gebundenen NN-Systems (des Deuterons), das eine D-Wellen-Beimischung zum S-Wellen-Grundzustand verlangt, die wiederum nur mit der *Tensorkraft* erklärt werden kann. Die *Spin-Spin-*

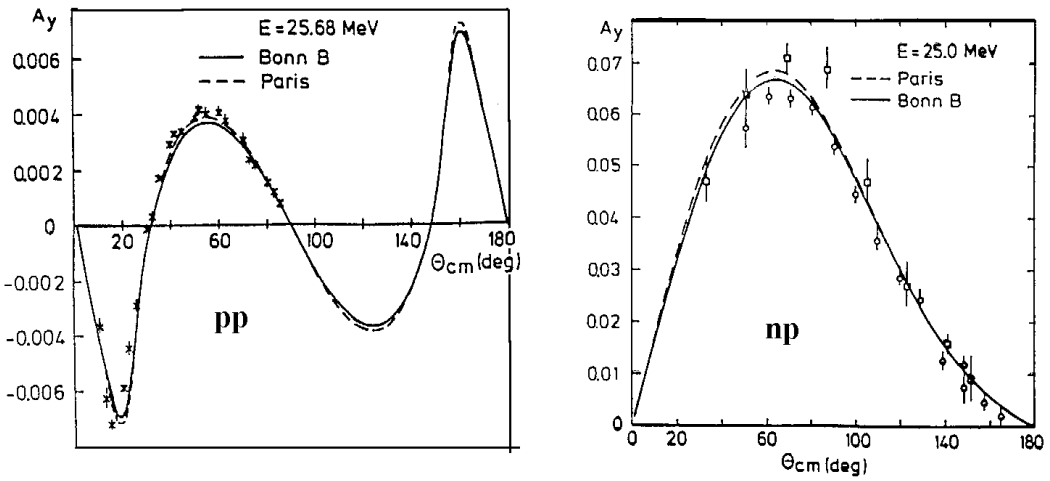


Abbildung 9.3: Winkelverteilung der Analysierstärke der pp- bzw. np-Streuung bei 25 MeV.

Kraft erklärt den Energieunterschied zwischen dem gebundenen np-Triplett (dem Deuteron) und dem ungebundenen Singulett-np-Streusystem (Singulett-Deuteron d*). Das *Spin-Bahn*-Potential ist v.a. in den Polarisationsobservablen wie der Analysierstärke wirksam. Die Abb. 9.7 zeigt die Zusammensetzung des Kernpotentials aus Anteilen verschiedener Form.

9.1.4 Wenignukleonensysteme

Das Dreinukleonensystem ist nach dem 2N-System das nächstkompliziertere. Mithilfe von (numerisch-exakten) Rechnungen im Rahmen des *Faddeev*-Formalismus ist es gelungen, das 3N-System mit einer Summe von NN-Wechselwirkungen zu beschreiben. Hierbei ergeben sich bei einigen Observablen aber Diskrepanzen zu den Vorhersagen der exakten Theorie. Solche sind:

- Die Bindungsenergie des Tritons (^{3}H) wird um ca. 1 MeV zu niedrig vorhergesagt
- verschiedene Observable des Streusystems werden trotz sonst im ganzen guter Beschreibung nicht gut beschrieben:
  - Die Analysierstärke A_y der elastischen Streuung ^{2}H(p,p)^{2}H
  - Die Tensoranalysierstärke iT_{11} der elastischen Streuung ^{1}H(d,d)^{1}H
  - Der Wirkungsquerschnitt der Aufbruchreaktion ^{2}H(p,pp)n in bestimmten Konfigurationen u.a.

Diese Beobachtungen und die Tatsache, dass *Dreikörperkräfte* durch physikalische Gesetze nicht ausgeschlossen sind, führt zum Postulat solcher Kräfte, die z.B. in

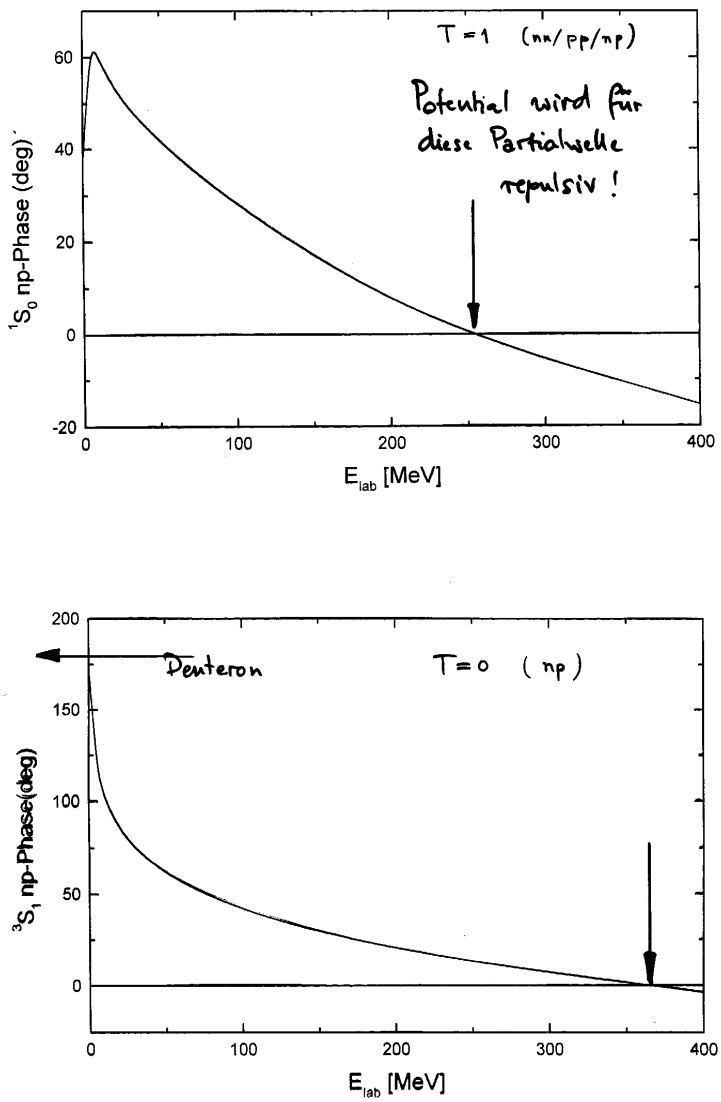


Abbildung 9.4: (Reelle) Streuphasen der pp-Streuung als Funktion der Energie.

Molekülen durchaus bekannt sind (*Axilrod-Teller-Kraft*), auch in Kernen. Solche Kräfte lassen sich in Faddeev-Rechnungen integrieren (Beispiel: Tucson-Melbourne-Kraft) und damit deren Effekte explizit studieren. Andererseits ist es noch nicht gelungen, die Coulombkraft wegen deren langer Reichweite und daraus folgenden Problemen exakt in die Rechnungen einzubeziehen.

Die experimentellen Tatsachen zeigen aber, dass Dreikörperkräfte – zumindest bei niedrigen Reaktionsenergien – sehr klein sind ($< 1\%$). Neuerdings häufen sich die Indizien, dass bei mittleren Energien (< 150 MeV) die Effekte der Dreikörperkräfte nicht zu vernachlässigen sind. Dieses Verhalten bedeutet in einer semiklassischen Betrachtung, dass diese Kräfte von kurzer Reichweite sind.

Bereits für das Viernukleonensystem kann man zwar den entsprechenden Formalismus angeben *Faddeev-Yakubowski*, aber einer exakten Rechnung stehen auch ohne die Coulombkraft sehr grosse rechentechnische Schwierigkeiten im Wege. Bei schwereren Kernen ist man daher weiterhin zur Beschreibung des Kernpotentials auf aus

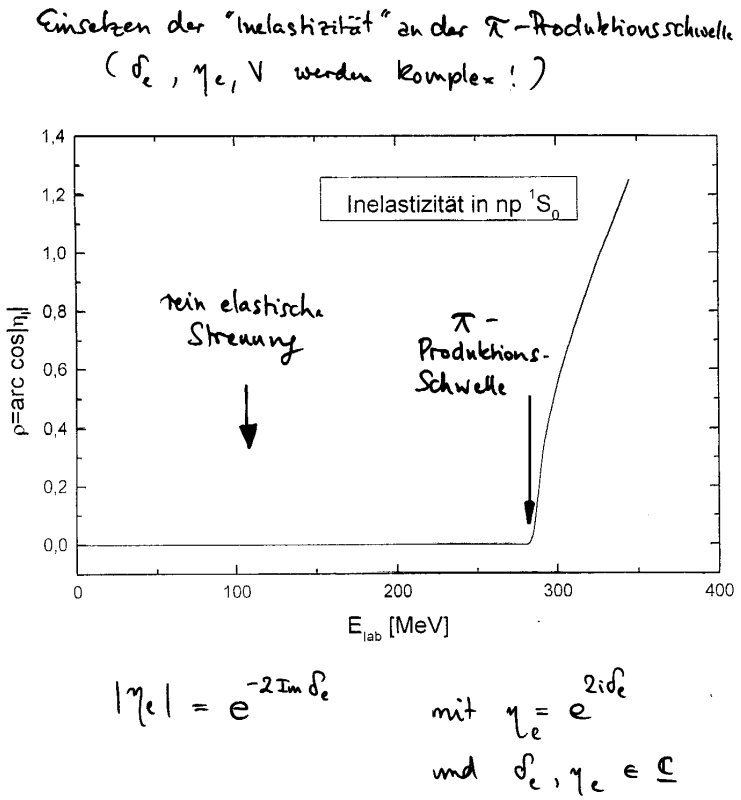
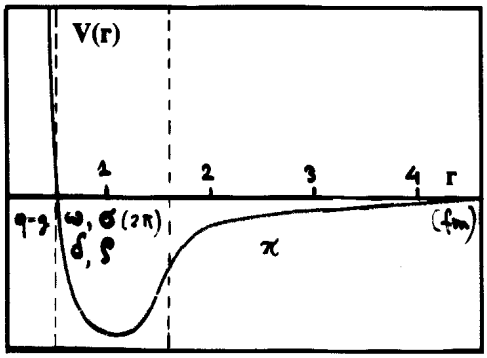


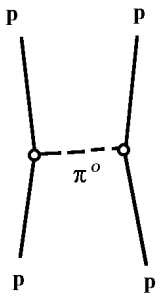
Abbildung 9.5: Imaginärteil einer Streuphase der pp-Streuung.

der NN-Wechselwirkung abgeleitete "effektive" Wechselwirkungen angewiesen.

Die Theorie bemüht sich, die Kernkräfte auf die Quark-Gluon-Wechselwirkung, beschrieben durch die QCD, zurückzuführen. Bei den typischen Energien der Kernphysik befindet man sich jedoch im "nicht-perturbativen" Energiebereich, in dem exakte Lösungen der QCD praktisch ausgeschlossen scheinen. Die "chirale Störungstheorie" könnte hier in der Zukunft approximative Lösungen anbieten. Experimentell ist bisher kaum eine Notwendigkeit des Rückgriffs auf die Quark-Gluon-Ebene in der Niederenergie-Kernphysik zu erkennen.

Rolle der Austauschbosonen im (Bonn-)NN-Potential





Teilchen	Haupt-Potentialanteil	Reichweite
π	Z, T, LS	lang
η	Z, T, LS	mittel
ω	Z (-), SS, T, LS	mittel
ρ	Z, T(-), LS	kurz-mittel
$2\pi \equiv \sigma$ Korrel. 2π	Z, LS	mittel

+: Anziehung, -: Abstoßung

Z: Zentral, T: Tensor, LS: Spin-Bahn, SS: Spin-Spin

Abbildung 9.6: Kernkräfte als Austauschkräfte, Dominanz der verschiedenen ausgetauschten Mesonen in verschiedenen Abstandsbereichen sowie in den charakteristisch verschiedenen Kernkraftanteilen.

Mit den Erhaltungssätzen (Invarianzprinzipien) verträgliche Form:

$$V = \sum_i V_i \cdot \mathcal{O}_i$$

Potentialanteil	$\mathcal{O}_i$
Zentral	$\mathbf{1}$
Spin-Bahn	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$
Tensor	$\frac{3(\sigma_1 \cdot r_1)(\sigma_2 \cdot r_2)}{r^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2$
Spin-Spin	$\sigma_1 \cdot \sigma_2$
quadr. Spin-Bahn	$(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S})^2$

Abbildung 9.7: Form der verschiedenen Kernpotentialanteile.

Kapitel 10

Bestimmung der T-Matrix

10.1 Integralgleichungen

Ausgehend von der Schrödingergleichung

$$H\Psi = E\Psi, \tag{10.1}$$

die umgeschrieben lautet:

$$(E - H)\Psi = 0 \tag{10.2}$$

erhält man mit dem Ansatz

$$H = H_0 + U_\alpha \tag{10.3}$$

(α bezeichnet den durch a und A gebildeten Reaktionskanal) und

$$H_0 = H_a + H_A - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_\alpha^2 \tag{10.4}$$

zwei Gleichungen (eine inhomogene und eine homogene):

$$(E - H_0)|\Psi\rangle = U_\alpha|\Psi\rangle \tag{10.5}$$

$$(E - H_0)|\Phi\rangle = 0. \tag{10.6}$$

Die formale Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$|\Psi^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}U_\alpha|\Psi^{(+)}\rangle. \tag{10.7}$$

Diese Lösung enthält bereits die Randbedingung einer auslaufenden Welle und die Umgehung von Polen in der komplexen E-(k-)Ebene. Sie ist eine Integralgleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Summe aus dieser speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (der ebenen Welle):

$$|\Psi^{(+)}\rangle = |\Phi\rangle + \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}}_{G_0}U_\alpha|\Psi^{(+)}\rangle. \tag{10.8}$$

Da diese Lösung die Lösungsfunktion nur implizit enthält, geschieht die Lösung i.a. iterativ mit der ebenen Welle als Startfunktion. Die *Bornsche Reihe* kann geeignet abgebrochen werden.

$$|\Psi^{(+)}\rangle = \underbrace{|\Phi\rangle + G_0 U|\Phi\rangle}_{\text{1. Bornsche Näherung}} + G_0 U G_0 U|\Phi\rangle + \ldots \tag{10.9}$$

Man erhält die Form von G_0 aus der Lösung der inhomogenen Gleichung mit einem $\delta-$Potential (*Green-Funktion*):

$$G_0(\vec{r},\vec{r'}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{10.10}$$

Damit ergibt sich die *explizite* Form der Lippmann-Schwinger-Gleichung:

$$\Psi^{(+)} = e^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} U\Psi(\vec{r'})d\vec{r'} \tag{10.11}$$

Asymptotisch erhält man mit

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 1/r \text{ und } |\vec{r}-\vec{r'}| \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} r - \frac{\vec{r}}{r}\vec{r'} \tag{10.12}$$

die *asymptotische* Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$\Psi^{(+)}(\vec{k},\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}\vec{r'}} V(\vec{r'})\Psi^{(+)}(\vec{k},\vec{r'})d\vec{r'}\right) \tag{10.13}$$

Der Vergleich mit dem üblichen Ansatz liefert für die Streuamplitude (mit $V = \hbar^2/2\mu U$)

$$f(\theta,\phi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}\vec{r'}} V(\vec{r'})\Psi^{(+)}(\vec{k},\vec{r'})d\vec{r'} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\langle\Phi|V|\Psi^{(+)}\rangle \tag{10.14}$$

bzw. nach Normierung auf den einfallenden Teilchenfluß:

$$f(\theta,\phi) = -\frac{\mu(2\pi)^2}{\hbar^2}\underbrace{\langle\Phi|V|\Psi^{(+)}\rangle}_{\text{T-Matrix } T_{fi}} \tag{10.15}$$

Die Beziehung zwischen T- und S-Matrix ist:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)\cdot c\cdot\delta(\vec{k}_i,\vec{k}_f)\delta(E_i,E_f)\cdot T_{fi} \tag{10.16}$$

Nur für elastische Streuung ist $\delta_{fi} \neq 0$.

10.2 Bornsche Näherung

10.2.1 1. Bornsche Näherung = PWBA = Plane Wave Born Approximation

$$\Psi^{(+)} = \Phi + GV\Phi \tag{10.17}$$

und damit

$$f(\theta, \phi) = -\frac{(2\pi)^2 \mu}{\hbar^2} \langle \Phi | V | \Phi \rangle \tag{10.18}$$

Das Resultat ist dasselbe wie das durch Einsetzen ebener Wellen in *Fermis Goldene Regel*.

10.2.2 Distorted Wave Born Approximation = DWBA

Im Rahmen dieser 1.Bornschen Näherung läßt sich eine Verbesserung durch Verwendung im Kern- und Coulombfeld "verzerrter" Wellen erreichen. Diese Wellen enthalten Beugungs- und Absorptionsanteile und werden durch das optische Modell elastischer Streuung für den jeweiligen Ein- und Ausgangskanal beschrieben. Beispiel: Zur Beschreibung der Transferreaktion $^{40}Ca(d,p)^{41}Ca$ benötigt man die aus der Anpassung der optischen Potentiale an die Daten der Streuungen $^{40}Ca(d,d)^{40}Ca$ und $^{41}Ca(p,p)^{41}Ca$ bei den richtigen Kanalergien erhaltenen Wellenfunktionen. Wegen der Nichtverfügbarkeit von $^{41}Ca-$Targets wurde die Streuung $^{40}Ar(p,p)^{40}Ar$ gemessen, was wegen der schwachen Massenzahlabhängigkeit der optischen Parameter möglich ist. Abb. 10.1.

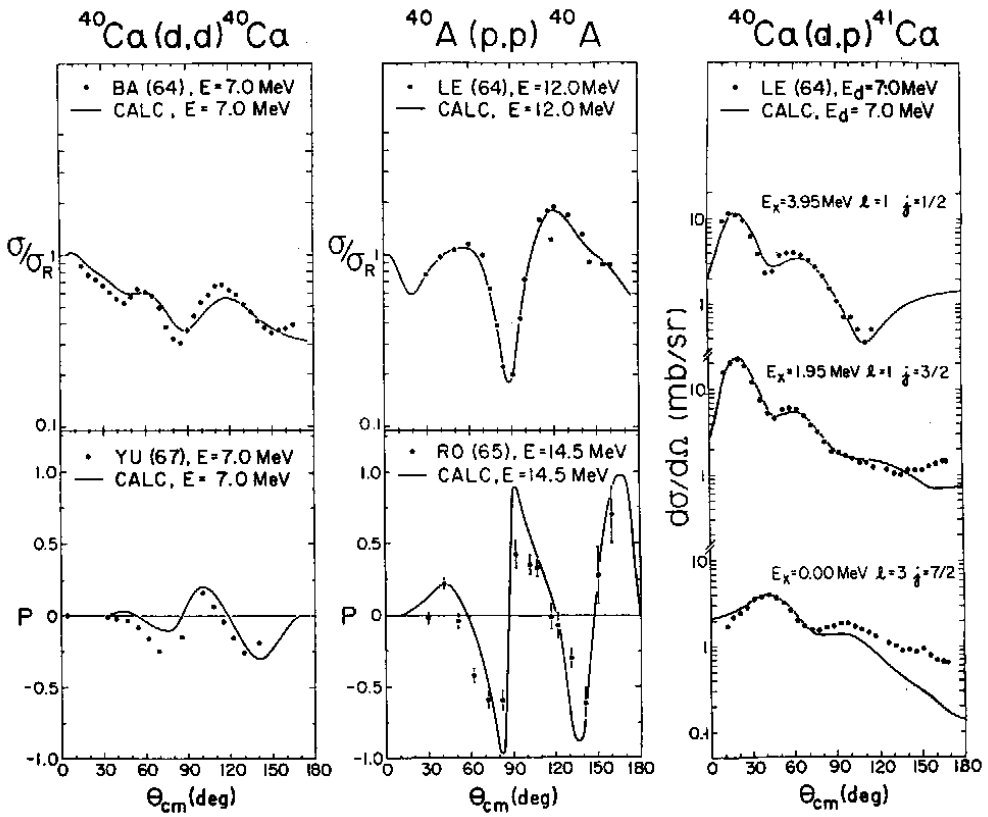


Abbildung 10.1: Beschreibung von Observablen der Transferreaktion $^{40}Ca(d,p)^{39}Ca$ durch Bestimmung der "distorted waves" der elastischen Streuung des Ein- und Ausgangskanals im optischen Modell.

Kapitel 11

Reaktionsmodelle

Modelle realer Reaktionen haben einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Es gibt eine Hierarchie von Anregungszuständen, die durch verschiedene Reaktionsmodelle erfaßt werden. Direkte Reaktionen sind prinzipiell solche, die nur eine geringe Zahl von Freiheitsgraden anregen, so daß auch nur wenige Nukleonen involviert sind (Grenzfall: Einteilchen-Anregung) und die daher schnell und peripher ablaufen. Typische Strukturen in Anregungsfunktionen sind daher breit ($\approx$ MeV). Compoundkernreaktionen liegen am anderen Ende des Spektrums möglicher Anregungen und beziehen viele, im Grenzfall alle Nukleonen in die Wechselwirkung ein. Sie verlangen das Erreichen eines (thermischen) Gleichgewichtszustandes aller Freiheitsgrade. Damit sind notwendigerweise lange Äquilibrierungszeiten (d.h. über die Unschärferelation schmale Strukturen in Anregungsfunktionen) verbunden. Zwischen diesen Extremfällen der Hierarchie der Anregungen liegen verschiedene Prozesse, die je nach dem betrachteten Aspekt *semi-direkte, Präcompound-, Doorway-, Hallway*-Prozesse genannt werden.

11.1 Direkte Reaktionen

11.1.1 Allgemeines

Direkte Reaktionen sind durch ein Hauptmerkmal gekennzeichnet, ihren zeitlichen Ablauf. Sie spielen sich i.w. in der Größenordnung der Durchflugszeit des Projektils durch das Target ab.

11.1.2 Elastische Streuung

Das wichtigste Reaktionsmodell für die Beschreibung der direkten ("Shape"-)elastischen Streuung ist das *Optische Modell*. Es basiert darauf, daß man bei etwas höheren Energien immer Absorption annehmen darf und daher das Potential (und

daraus folgend die Streuphasen) komplex angesetzt werden müssen (s.a. Kap. 7).

11.1.3 Optisches Modell

Die radiale Schrödingergleichung für Protonen (Spin s=1/2) lautet:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \quad - \quad \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + Vf(r) + iWg(r) - V_C(r) \right. \tag{11.1}$$

$$\left. + \quad (V_{s.o.} + iW_{s.o.})h(r) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ell \\ -(\ell+1) \end{array} \right) u_{\ell j}^{(\pm)}(kr) = 0 \right. \tag{11.2}$$

Hier sind: V, W Real- und Imaginärteil des Zentralpotentials, V_C das Coulombpotential und $V_{s.o.}, W_{s.o.}$ Real- und Imginärteil des für die Beschreibung der Polarisationsobservablen wichtigen Spin-Bahn-Potentials. Für Neutronen entfällt der Coulombterm. Die Lösung dieser Gleichung ist Teil der Gesamtstreuwellenfunktion

$$\Psi = \frac{1}{kr} \sum_{\ell j \lambda} i^\ell \left[4\pi(2\ell+1)\right]^{1/2} (\ell 0 s\mu | jm)(\ell\lambda s\nu | jm) u_{\ell j}^{(\pm)}(kr) Y_\ell^\lambda(\theta,\phi) \chi_s^\mu e^{i\sigma_\ell} \tag{11.3}$$

mit

$$u_{\ell j} \rightarrow_{r\to\infty} \frac{1}{2i}\left[e^{-i(kr-\eta ln 2kr-\ell\pi/2)} - e^{2i\delta_{\ell j}} e^{i(kr-\eta ln 2kr-\ell\pi/2+2\sigma_\ell)}\right] \tag{11.4}$$

und $\delta_{\ell j}$ = komplexe Kernstreuphasen, $\sigma_\ell = arg\Gamma(1+\ell+i\eta)$ = Coulombstreuphasen, $\eta_\ell^j = e^{2i\delta_{\ell j}}$ = Reflexionskoeffizient, $\eta = Z_1 Z_2 e^2/\hbar v$ = Coulombparameter und $k = \sqrt{2\mu E_{kin}^{c.m.}/\hbar^2}$ = Eingangskanal-Wellenzahl.

Der Potential-Formfaktor f(r) orientiert sich an der Form der üblichen Kerndichte- bzw. Potentialverteilungen, die auch im klassischen Schalenmodell verwendet werden (*Woods-Saxon-Form*). Die Absorption findet bevorzugt an der Kernoberfläche statt. Daher wählt man als Form für g(r) bei niedrigen Energien die Ableitung des Woods-Saxon-Formfaktors, für den Spin-Bahn-Term h die *Thomas-Form* g(r)/r. Bei hohen Energien ist eine Absorption im Volumen plausibel, was sich durch einen graduellen Übergang von der Oberflächenabsorption zur Volumenabsorption berücksichtigen läßt.

Die besten Parametersätze wurden durch Anpassung mit χ^2-Minimierung an sehr viele Datensätze sowohl von Wirkungsquerschnitten als auch Analysierstärken gewonnen. Es haben sich einige Ansätze als Standards für das optische Modell entwickelt. Am verbreitetsten für Nukleonen ist die Parametrisierung von Greenlees & Becchetti, insbesondere weil sie einen globalen Parametersatz angeben (der in Einzelfällen, z.B. bei doppelt-magischen Kernen die Daten schlechter wiedergibt als ein Einzelfit). Interessant ist, daß die Tiefe des reellen Potentials der des Schalenmodellpotentials entspricht ebenso wie beim LS-Term. Für leichte, aus A Nukleonen zusammengesetzte Projektile (Deuteronen, Alphateilchen etc.) ergeben sich Potentialtiefen, die das A-fache der Nukleonenpotentialtiefe sind. Für Schwerionenstreuung gibt es recht verschiedene Ansätze, teils mit sehr flachen Potentialen. Abb. 11.1 zeigt die Formfaktoren und das Verhalten des Imaginärpotentials mit der Energie.

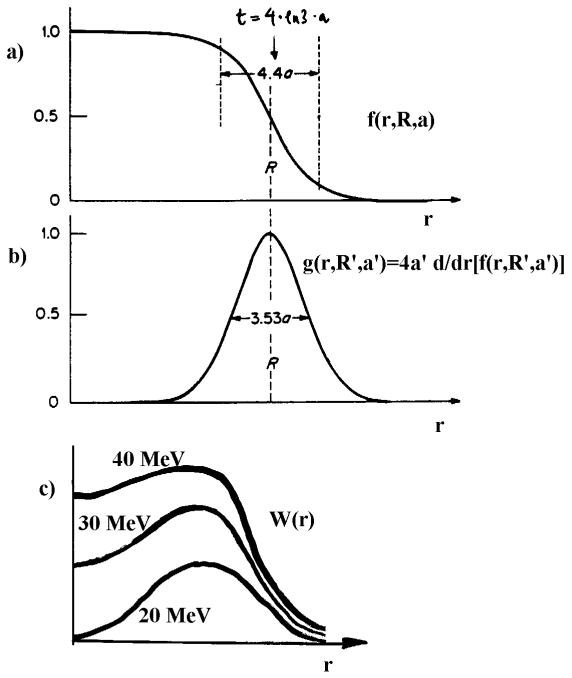


Abbildung 11.1: Formfaktoren des Optischen Modells: a) Woods-Saxon-Form des Realteils f, b) Abgeleitete Woods-Saxon-Form g=f' des Imaginärteils, c) Gleitender Übergang von Oberflächen- zu Volumenform des Imaginärteils als Funktion der Energie.

11.1.4 Direkte (Umordnungs-)Reaktionen

Die Vielzahl solcher Reaktionen läßt sich klassifizieren:

- Reaktionen ohne Änderung der Massenzahl
  - Elastische Potentialstreuung (s.o., Beschreibung durch das optische Modell)
  - Direkte inelastische Streuung $((p,p'\gamma),(\alpha,\alpha'),...)$. Sie führt bevorzugt zu kollektiver Kernanregung (Rotation, Vibration).
  - Quasielastische (Ladungsaustausch-) Prozesse $((p,n),(n,p),(\tau,t),(^{14}N,^{14}C),...)$. Diese führen z.B. zu Isobar-Analog-Zuständen des Targetkerns.
- Reaktionen mit Änderung der Massenzahl
  - Pickup-Reaktionen (Einnukleontransfer:$(p,d),(d,^3He),(d,t),...$, Mehrnukleontransfer: $(p,\alpha),(d,^6Li),...)$
  - Stripping-Reaktionen (Einnukleontransfer: $(d,p),(d,n),(^3He,d),...)$ Mehrnkleonentransfer: $(^6Li,d),(\alpha,p),(^3He,p),...)$
  - Knockout-Reaktionen $((p,\alpha),(p,p'),...)$

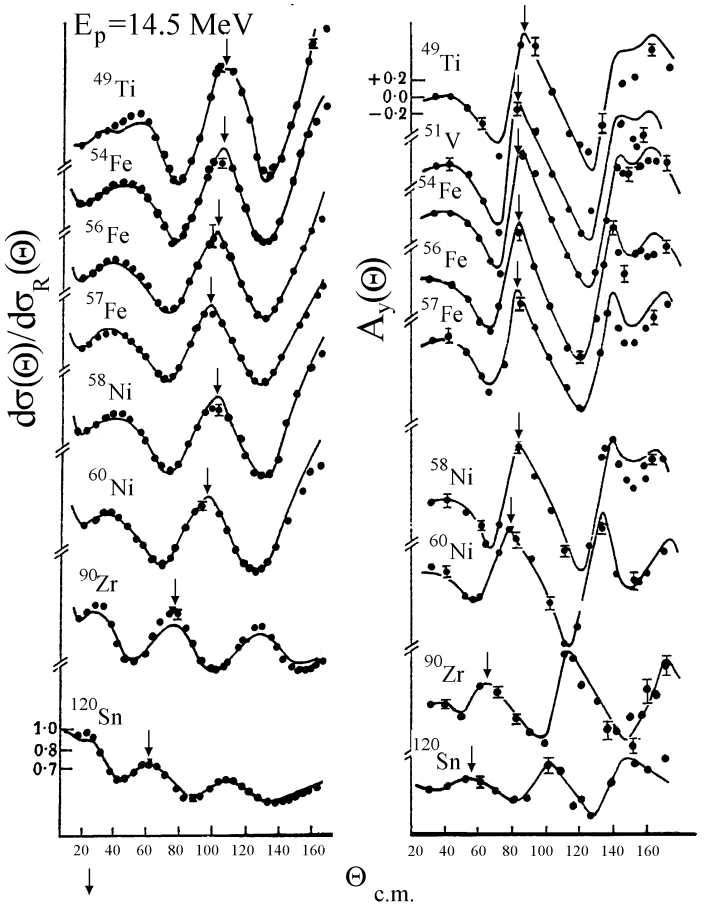


Abbildung 11.2: Globaler Fit des Optischen Modells an elastische Protonen-Streudaten für einen großen Massenbereich.

- Direkte Aufbruchprozesse wie Knockout mit Mehrteilchen-Ausgangskanal
  $((p, pp), (\alpha, 2\alpha), ...)$
- Prozesse höherer Ordnung (Mehrstufenprozesse über angeregte Zwischenzustände, gekoppelte Kanäle)

Hier soll nur der einfachste Fall der Stripping-Reaktion behandelt werden.

11.1.5 Stripping-Reaktion

Ein semiklassischer Ansatz liefert bereits ein qualitatives Bild der Winkelverteilungen in Strippingreaktionen. Er erklärt das erwartete Verhalten unter der Annahme eines schnellen, am Kernrand lokalisierten nichtäquilibirierten Prozesses. Der Wellenzahlvektor des einlaufenden Deuterons sei $\vec{k}_d$, die des übertragenen Nukleons und des auslaufenden Nukleons jeweils $\vec{k}_n$ und $\vec{k}_p$. Sie bilden ein Impulsdiagramm, aus dem man den Zusammenhang zwischen dem bevorzugten Streuwinkel θ und dem übertragenen Impuls bzw. Drehimpuls entnehmen kann:

$$p_n R = \hbar k_n R = \hbar \ell_n \tag{11.5}$$

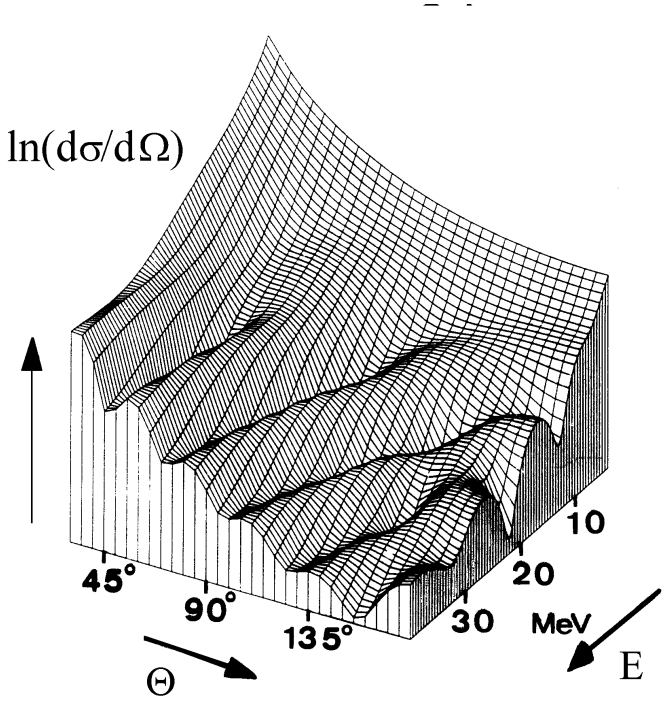


Abbildung 11.3: Mit Standardparametern des Optischen Modells berechnete Winkel- und Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes der elastischen Protonenstreuung an ^{90}Zr. Die Interferenzstrukturen der Winkelverteilungen lassen sich auch als "resonante" (Einteilchen-)Strukturen der Anregungsfunktion interpretieren, deren Breiten typisch sind für schnelle (*direkte*) Prozesse.

Für kleine θ gilt

$$\theta_0 \approx \frac{k_n}{k_d} = \frac{\ell_n}{k_d R} \tag{11.6}$$

Wegen der Quantelung von ℓ gibt es diskrete, mit ℓ monoton ansteigende Werte von θ für jedes ℓ. Dieses qualitative Bild ändert sich auch nicht, wenn man die Winkelverteilungen quantenmechanisch rechnet. Als Beispiel seien für die Reaktion $^{52}Cr(d,p)^{53}Cr$ die Winkel des Strippingmaximums in verschiedenen Ansätzen (s.u.) angegeben:

	θ^{DWBA}	θ^{PWBA}	$\theta_{s.c.}$
$\ell = 0$	0^0	0^0	0^0
$\ell = 1$	18^0	13^0	13^0
$\ell = 2$	34^0	19^0	26^0
$\ell = 3$	49^0	30^0	39^0
$\ell = 4$	64^0	40^0	52^0

(11.7)

Gemessene Winkelverteilungen des Wirkungsquerschnittes zeigen neben Diffraktionsstrukturen ausgeprägte Strippingmaxima, die häufig die Bestimmung des Drehimpulses des übertragenen Nukleons erlauben.

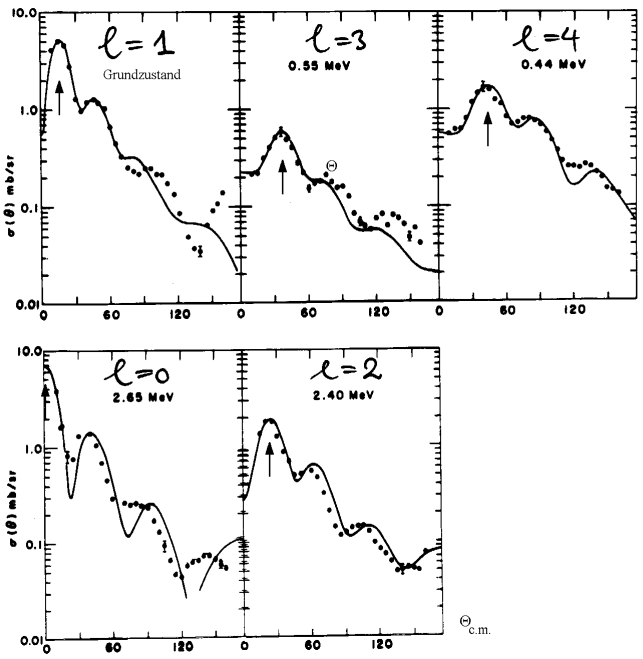


Abbildung 11.4: Charakteristisches Verhalten des Strippingmaximums als Funktion des übertragenen Bahndrehimpulses.

Dieser war (und ist) v.a. wichtig für die Zuordnung der Endkernzustände zu Orbitalen im Einteilchen-Schalenmodell. Die energetischen Verhältnisse bei Strippingreaktionen sind gerade so, daß das übertragene Nukleon in der Nähe magischer Schalen bevorzugt in niedrigliegende Schalenmodellzustände eingebaut wird. Wegen der Spin-Bahn-Aufspaltung gelingt die vollständige Zuordnung jedoch erst, wenn auch der Gesamtdrehimpuls j des übertragenen Nukleons bekannt ist. Dieser läßt sich durch Messung der Analysierstärke gewinnen.

Auch hierfür gibt es ein einfaches semiklassisches Modell (Newns). Es setzt wie oben angenommen voraus, daß die Reaktion an der Kernoberfläche stattfindet, daß relativ starke Absorption in der Kernmaterie stattfindet, also jeweils die vordere, dem Projektil zugewandte Hälfte des Kerns stärker zur Reaktion beiträgt als die hintere. Der vorderen Hälfte ist bevorzugt der Bahndrehimpuls nach oben, senkrecht zur Reaktionsebene, der hinteren der Bahndrehimpuls nach unten zuzuordnen. Dann kann man bei Einfall eines Deuterons, das senkrecht zur Streuebene einmal nach oben, einmal nach unten polarisiert ist, und unter der Annahme der Existenz einer Spin-Bahn-Kraft annehmen, daß im ersten Fall das eingebaute Nukleon bei Streuung nach links bevorzugt im Zustand $j = \ell + 1/2$, im anderen Fall mit $j = \ell - 1/2$ eingebaut wird. Mißt man die auf diese Art die Analysierstärke

$$A_y = \frac{1}{P_d} \frac{N^{up} - N^{down}}{N^{up} + N^{down}}, \tag{11.8}$$

so erwartet man für die beiden Fälle verschiedene Vorzeichen dieser Meßgröße. Dieses Verhalten wird durch viele Beispiele belegt, nicht nur für die Strippingreaktion. Will man den Grad bestimmen, in dem die betrachteten Übergänge tatsächlich Einteilchenübergänge sind, so muß man den *spektroskopischen Faktor* bestimmen.

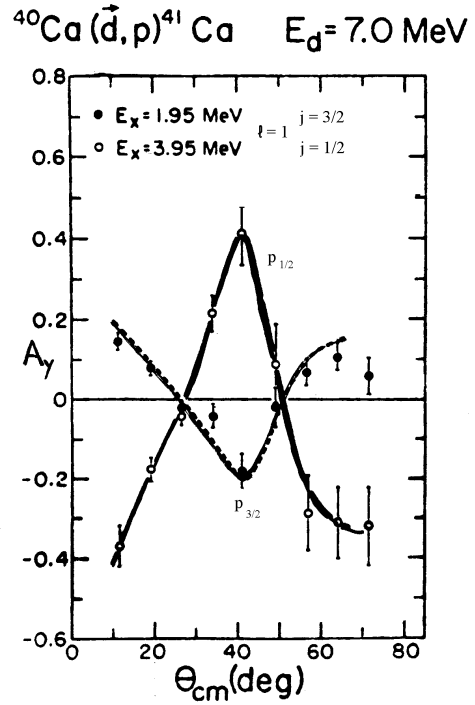


Abbildung 11.5: Empfindlichkeit (Vorzeichen!) der Analysierstärke der Strippingreaktion auf den Gesamtdrehimpuls des übertragenen Nukleons.

Die gelingt jeoch nur im Rahmen einer — wenigsten in Näherung — quantitativen Theorie (DWBA, CC-DWBA).

Da die Einteilchenstärke durch die Restwechselwirkung häufig fraktioniert, d.h. auf viele Zustände in einem Bereich von Energien verteilt ist, sind hier spektroskopische Untersuchungen an sehr vielen Zuständen notwendig. Besonders geeignet sind hierfür Magnetspektrometer hoher Auflösung an Tandem-Van-de-Graaff-Beschleunigern mit polarisierten Teilchenstrahlen.

11.1.6 Die Bornsche Näherung

Man benutzt hier stets die erste Bornsche Näherung, d.h. den ersten Term der Bornschen Reihe. Ausgehend von der Fermischen *Goldenen Regel* der Störungstheorie, die für den differentiellen Wirkungsquerschnitt liefert:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2I_b+1)(2I_B+1)}{2\pi)^2\hbar^4}\mu_i\mu_f\frac{k_f}{k_i}\,|T_{if}|^2 \tag{11.9}$$

muß man Annahmen über das Übergangsmatrixelement machen.

In der *Plane Wave Born Approximation* PWBA (Butler-Theorie) setzt man für die ein- und auslaufenden Wellen ebene Wellen an. Da die Radialwellenfunktionen Besselfunktionen sind, findet man für den Wirkungsquerschnitt ein einfaches Diffraktionsverhalten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto [j_\ell(kR)]^2 \tag{11.10}$$

Die Winkelabhängigkeit des Strippingmaximums steckt nur in der Impulsbeziehung $k^2 = k_{in}^2 + k_{out}^2 - 2k_{in}k_{out}\cos\theta$. Die PWBA gibt nur in wenigen einfachen Fällen die Winkelverteilungen in der Nähe des Maximums befriedigend wieder. Sie macht keine Aussagen über Polarisationsobservable und enthält keine Kernstrukturinformation.

Bessere Ergebnisse zumindest für Vorwärtswinkel erzielt man mit der *Distorted Wave Born Approximation* DWBA. Sie wurde mit einer Reihe weitergehender Annahmen formuliert:

- Man verwendet im Ein- und Ausgangskanal *verzerrte* Wellen, d.h. man benutzt als Wellenfunktionen die Lösungen, die man aus Anpassungen der Daten der elastischen Streuung im jeweiligen Kanal bei der entsprechenden Energie an das optische Modell (OM) erhält. Also braucht man z.B. für die Beschreibung der Reaktion A(d,p)B die OM-Wellenfunktionen aus der Anpassung an Daten sowohl von A(d,d)A, als auch B(p,p)B. Damit berücksichtigt man — immer noch in erster Bornscher Näherung — die Beugung und Absorption der ein- und auslaufenden Wellen im Kern- (und evtl. Coulomb-) Feld, sowie die Wirkung des LS-Potentials (s.a. Abb. 10.1).
- Als Kernanfangs- und Endzustände benutzt man Schalenmodell-Zustände
- Die endliche Reichweite der Kernkräfte wird durch eine *finite-* oder sogar *zero range-* Näherung berücksichtigt.
- Die T-Matrix wird nach Partialwellen zu festem Drehimpulstransfer entwickelt
- Die Transfermatrix wird in einen kernstrukturabhängigen und einen kinematischen Teil faktorisiert.

Damit schreibt sich der Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\mu_a\mu_b}{\pi\hbar^4}\left(\frac{m_B}{m_A}\right)^4 \\ &\quad \frac{2J_B+1}{(2J_A+1)(2s_a+1)}\frac{1}{k_a k_b}\sum_{\ell sj}\left[|A_{\ell sj}|^2\sum_m\left|\beta_{sj}^{\ell m}\right|^2\right] \qquad (11.11)\end{aligned}$$

Der experimentelle Wirkungsquerschnitt wird durch das Produkt eines Anpassungsfaktors, des *spektroskopischen Faktors* $S_{\ell j}$ und des im Rahmen der DWBA mit Einteilchenannahmen berechenbaren theoretischen Wirkungsquerschnittes dargestellt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}^{\ell j} = S_{\ell j}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{DWBA}^{\ell j} \qquad (11.12)$$

Bei einem Strippingprozeß ist der spektroskopische Faktor das Amplitudenquadrat eines Fragments eines Einteilchenzustandes. Wegen dieser Fraktionierung in evtl. viele Zustände mit gleichen Quantenzahlen muß man die *Stärke* dieser Zustände summieren. Man erhält bei vollständiger Erfassung die Gesamtstärke, die berechenbar ist, da die Zahl der Nukleonen N in einer Unterschale festliegt. Es gelten

daher Summenregeln, z.B. ist bei Einteilchenstripping $\sum S_{\ell j} = (2J + 1)$. Mathematisch ist der spektroskopische Faktor das Überlappintegral zwischen dem (antisymmetrisierten k-Teilchen-Endkernzustand $\Psi_A(i)$, in den das Nukleon eingebaut wird, und der Einteilchenkonfiguration aus dem antsiymmetrisierten (k-1)-Teilchen-Targetkerngrundzustand (Core) und der Einteilchenwellenfunktion des übertragenen k-ten Teilchens $\Psi(j)$, gibt also die Wahrscheinlichkeit an, mit der sich ein bestimmter Zustand in dieser Konfiguration befindet. Mittelt man über die Stärkeverteilung aller Zustände, die Fraktionen eines Einteilchenzustandes sind (z.B. unter der Annahme einer Breit-Wigner-Verteilungsfunktion), so gibt die Lage des Mittelwerts die Energie des Einteilchenzustandes, die Breite der Verteilung dessen Lebensdauer (*Spreading*-breite), d.h. die des Zerfalls des Einteilchenzustandes in die tatsächlichen durch die Restwechselwirkung aufgepaltenen Kernzustände.

11.2 Compoundkern (CN)-Reaktionen

11.2.1 Allgemeines

Resonanzen sind eine sehr allgemeine Erscheinung der Physik. In der klassischen Physik treten sie auf, wenn ein schwingungsfähiges System mit seiner Eigenfrequenz angeregt wird, was – abhängig vom Grad der Dämpfung – zu großen Schwingungsamplituden führen kann. Diese durchlaufen beim Abstimmen des Systems (Ändern der Anregungsfrequenz) eine Resonanzkurve von *Lorentzform*. In der Kernphysik treten Resonanzen im Kontinuum (also bei Streuproblemen, bei positiver Gesamtenergie) dann auf, wenn die Projektilenergie im Schwerpunktsystem plus der Q-Wert der Reaktion gerade gleich der Anregungsenergie eines Kernzustandes sind.

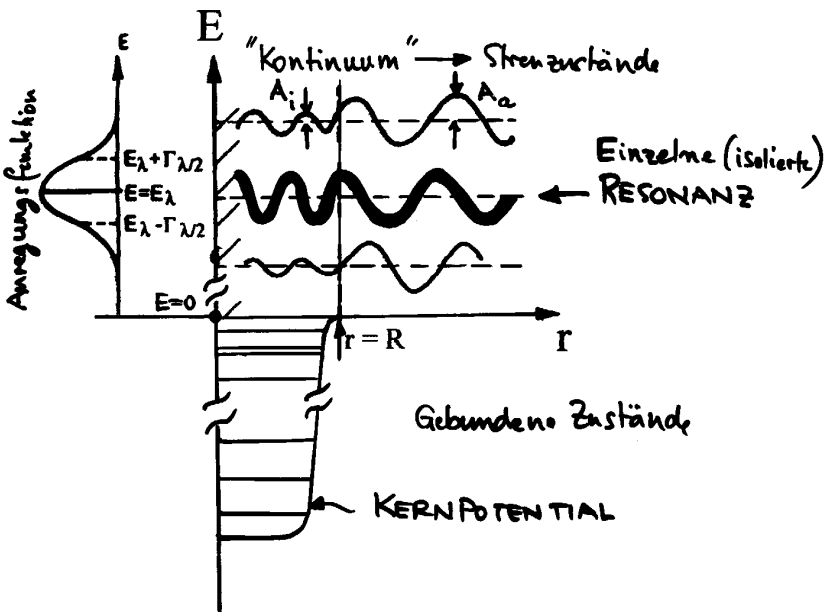


Abbildung 11.6: Anpassungsbedingung am Kern-(Potential-)Rand für das Entstehen einer Resonanz in der Anregungsfunktion.

Die beim Durchlaufen der Einschußenergie entstehende Anregungsfunktion der Observablen (Wirkungsquerschnitt) zeigt charakteristische Exkursionen vom glatten Verlauf (der dem *direkten* Anteil, z.B. dem Coulomb- oder Shape-elastischen Anteil entspricht). Ebenso ändern sich Streuphasen und Streuamplituden in charakteristischer Weise über vergleichsweise kleine Energiebereiche.

11.2.2 Theoretischer Verlauf der Wirkungsquerschnitte

Eine Modellannahme bei Resonanzen ist im Gegensatz zu direkten Prozessen, daß das System über einen Zwischenzustand vom Eingangs- in den Ausgangskanal übergeht. Für diesen Fall gibt die Störungstheorie für das Übergangsmatrixelement folgende Form vor:

$$\langle \Psi_{out} | H_{int} | \Psi_{in} \rangle = \frac{const}{E - \tilde{E}_R} \tag{11.13}$$

E_R ist die Energie des Kerneigenzustandes. Dieser ist jedoch, da er im Kontinuum liegt, kein stationärer, sondern ein zeitabhängig zerfallender Eigenzustand, den man zweckmäßig durch eine komplexe Eigenenergie beschreibt:

$$\tilde{E}_R = E_R + i\Gamma/2 \tag{11.14}$$

Die Deutung des Imaginärteils ist folgende: die Zeitentwicklung eines Zustandes hat die Form $e^{i\tilde{E}t/\hbar}$, andererseits zerfalle der Zustand mit einer Lebensdauer τ, woraus sich ergibt:

$$1/\tau = Im(\tilde{E}) = \Gamma/2. \tag{11.15}$$

Die Resonanzamplitude hat also folgende Form:

$$g(E) = \frac{F(E)}{E - E_R + i\Gamma/2} \tag{11.16}$$

Zu bestimmen ist noch die Bedeutung von F(E). Im Sinne der Bohrschen Unabhängigkeitshypothese sind Bildung und Zerfall der Resonanz unabhängig, d.h. entkoppelt. Man schreibt daher die Amplitude als das Produkt aus Bildungs-Wahrscheinlichkeitsamplitude und Zerfallswahrscheinlichkeit in den betrachteten Ausgangskanal. I.a. gibt es zu einem Bildungskanal (dem Eingangskanal c) mehrere Ausgangskanäle c'.

Die Breite Γ der Breit-Wigner-Funktion ist umgekehrt proportional zur Bildungswahrscheinlichkeit P und ergibt sich als Integral über den Wirkungsquerschnitt über den Energiebereich der Resonanz als

$$\begin{aligned} P &= \int \frac{\sigma_{aA} v_{aA}}{V} \cdot \frac{V p_{aA}^2 dp_{aA}}{2\pi^2\hbar^3} = \int \frac{\sigma_{aA} k_{in}^2 dE}{2\pi^2\hbar} \approx \frac{k_{in}^2 F(E_R)}{2\pi^2\hbar} \int \frac{dE}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4} \\ &= \frac{k_{in}^2 F(E_R)}{\pi\hbar\Gamma} \end{aligned} \tag{11.17}$$

Im Gleichgewicht ist dies auch gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die Resonanz gerade in den Eingangskanal zurückzerfällt (rein elastischer Fall). Ein Maß hierfür ist eine analog zu Γ gebildete Partialbreite Γ_{aA}, also:

$$\Gamma_{aA}/\hbar = \frac{k_{in}^2 F(E_R)}{\pi\hbar\Gamma}, \tag{11.18}$$

daher:

$$F(E_R) = \frac{\pi}{k_{aA}^2}\Gamma_{aA}\Gamma \tag{11.19}$$

Definitionsgemäß ist Γ die Summe aller Partialbreiten über die offenen Kanäle. Daher ist das Verzweigungsverhältnis für den Zerfall in einen bestimmten Kanal $bB \equiv c'$ gleich $\Gamma_{c'}/\Gamma$ und der *Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt* für die Bildung der Resonanz über den Kanal c und den Zerfall über den Kanal c' ist:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k_{in}^2} \cdot \frac{\Gamma_c\Gamma_{c'}}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4} \tag{11.20}$$

Diese Herleitung ist vereinfacht und muß, um die Interferenz mit einem direkten Untergrundanteil und über eine Partialwellenentwicklung auch differentielle Wirkungsquerschnitte in der Nähe einer Resonanz beschreiben zu können, für die komplexe *Streuamplitude* durchgeführt werden. Sie führt für elastische s-Wellen-Streuung zu dem Ergebnis einer resonanten Streuamplitude der Form:

$$A_{res} = \frac{i\Gamma_{aA}}{(E-E_R) + i\Gamma/2} \tag{11.21}$$

Bei Anwesenheit eines direkten Untergrundes tritt neben dem reinen Resonanzterm und dem rein direkten (glatten) Term ein typischer Interferenzterm auf, der auch destruktiv sein kann. Für σ gilt dann:

$$\sigma_{tot} = |A_{res} + A_{pot}|^2 = \sigma_{res} + \sigma_{pot} + 2\Re(A_{res}A_{pot}^*) \tag{11.22}$$

worin A_{pot} die Amplitude der schwach energieveränderlichen Potentialstreuung ist.

11.2.3 Herleitung der Partialbreitenamplituden für Kerne (nur s-Wellen)

Die Verbindung zwischen (resonanter) Streuwellenfunktion und der Wellenfunktion des Eigenzustandes des Kerns macht die *R-Matrix-Theorie*. Deren Grundzüge sind etwa:

- Die beiden Wellenfunktionen und ihre ersten Ableitungen werden am Kernrand (Potentialrand o.ä.) stetig angepaßt.
- Die Bedingung für Resonanz ist gleichbedeutend damit, daß die Wellenfunktionsamplitude im Kerninnern einen Maximalwert annimmt. Dies geschieht genau für eine Anpassung der Wellenfunktion am Rand mit Steigung null.

Die beiden Bedingungen lassen sich so zusammenfassen, daß die beiden logarithmischen Ableitungen L (L_0 für reine s-Wellen) am Kernrand gerade null sind: Mit der Form der Wellenfunktion im Außenraum

$$u_0(r) = e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr}, r > a \tag{11.23}$$

und den Wellenzahlen im Außenraum k und im Innenraum κ ergibt sich:

$$L_0(E) = \left(\frac{a}{u_0} \frac{du_0}{dr} \right)_{r=a} \tag{11.24}$$

Drückt man Gl. (11.23) durch L_0 aus, so erhält man die Streufunktion η_0 als Funktion von L_0:

$$\eta_0 = \frac{L_0 + ika}{L_0 - ika} e^{-2ika} \tag{11.25}$$

Setzt man diese Streufunktion in die bekannten Ausdrücke für die elastische Streuung und die Absorption ein (und mit $L_0 = ReL_0 + iImL_0$), so erhält man:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k_{in}^2} |1 - \eta_0|^2 = \frac{\pi}{k_{in}^2} \left| \left[e^{2ika} - 1 \right] - \frac{2ika}{ReL_0 + i(ImL_0 - ka)} \right|^2 \tag{11.26}$$

und

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k_{in}^2} \left(1 - |\eta_0|^2 \right) = \frac{\pi}{k_{in}^2} \left(\frac{-4k_{in} a ImL_0}{(ReL_0)^2 + (ImL_0 - ka)^2} \right) \tag{11.27}$$

Entwickelt man ReL_0 in eine Taylorreihe und bricht nach dem ersten Glied ab, so kann man durch Vergleich neben der o.g. Resonanzstreuamplitude (mit $A_{pot} \propto e^{2ika} - 1$) noch folgende Ergebnisse gewinnen:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k_{in}^2} \left| \left(e^{2ika} - 1 \right) + \frac{i\Gamma_{aA}}{(E - E_R) + i\Gamma/2} \right|^2 \tag{11.28}$$

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k_{in}^2} \frac{\Gamma_{aA}(\Gamma - \Gamma_{aA})}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \tag{11.29}$$

Hierin wird deutlich, daß gemäß unserer Definition die *Absorption* alle Ausgangskanäle außer dem elastischen umfaßt.

11.3 Einzelresonanzen

11.3.1 Allgemeine Merkmale von Einzelresonanzen

Das Vorliegen von (isolierten) Einzelresonanzen ist an folgenden Merkmalen erkennbar:

- In Wirkungsquerschnitten (und anderen Observablen) als Funktion der Energie sind starke Exkursionen sichtbar. Maxima in Wirkungsquerschnitten sind bedingt durch den Resonanznenner. Für die elastische s-Wellen-Streuung ist der Maximalwert von $(4\pi/k_{in}^2)\sin^2\delta_0$ gerade bei $\delta = \pi/2$ erreicht. Je nachdem, ob die Resonanz isoliert ist und in einem untergrundfreien Bereich liegt oder nicht und ob es sich um Wirkungsquerschnitt oder Polarisationsobservablen handelt, ist das Erscheinungsbild bei schmalen Resonanzen eine reine Breit-Wigner-Form oder zeigt *Dispersionsform* durch Interferenz. Das bedeutet, daß auch destruktive Interferenz auftreten kann. Ein Beispiel für den theoretischen Verlauf des Wirkungsquerschnittes über eine isolierte (elastische) Resonanz ohne Interferenz zeigt Abb. 11.7.

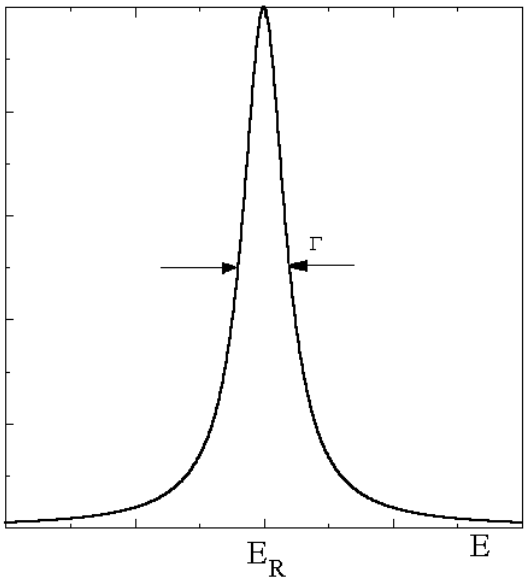


Abbildung 11.7: Reine (elastische) Resonanzform und Bedeutung der totalen Breite Γ.

Ein gutes Beispiel für eine gemessene weitgehend isolierte Resonanz ist die Δ^{++}-Resonanz in der $\pi^+ -$p-Streuung. Sie zeigt eine geringe Interferenz mit dem Untergrund. Ihre Winkelverteilung ist symmetrisch um 90° und ihr Argand-Plot füllt den Einheitskreis vollständig aus (keine Inelastizität).

- Ein wesentliches Merkmal ist also der Anstieg der Resonanzstreuphase über den Bereich der Resonanz, im Idealfall um $+\pi$, mit Durchgang durch $\pi/2$ am Ort der Resonanz.

- Die Winkelverteilung in der Resonanz ist symmetrisch um 90°.

- Argand-Plot: Trägt man $Im(f_R)$ gegen $Re(f_R)$ mit der Energie als Parameter auf, so erwartet man im Idealfall einer rein elastischen Resonanz folgendes Verhalten: Die komplexe Streuamplitude durchläuft im Gegenzeigersinn einen Kreis um den Mittelpunkt $(E_R, \Gamma/2)$ mit dem Radius $\Gamma/2$.

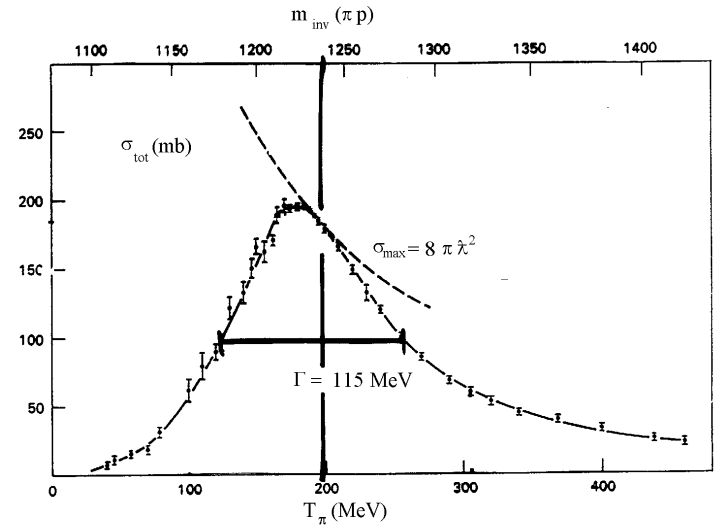


Abbildung 11.8: Die Δ-Resonanz (hier in der π^+−p-Streuung) ist eine der ausgeprägtesten Resonanzen. Sie ist so stark, daß sie den durch die Wahrscheinlichkeitserhaltung (Unitarität der S-Matrix) gegebenen Maximalwert des Wirkungsquerschnittes erreicht.

Ein Beipiel für die Resonanzstreuung von Protonen an ^{12}C mit Streuphasenanalyse und Argand-Plot zeigt Abb. 11.11.

11.3.2 Überlappende Resonanzen

Der Bereich, in dem $\Gamma/D \gg 1$ ist, in dem also die Compoundresonanzen überlappen, ist durch zwei mögliche Erscheinungsformen der Anregungsfunktionen gekennzeichnet:

- Die experimentelle Auflösung (Energieschärfe des Strahls, kinematische Verschmierung durch endliche Detektorwinkelöffnung etc.) ΔE ist klein: $\Delta E \ll \Gamma$. In diesem Fall überlagern sich die vielen Breit-Wigner-Amplituden stochastisch und kohärent. Die Wirkungsquerschnitte fluktuieren statistisch mit charakteristischen *Kohärenzbreiten* Γ_{coh}, und sie gehorchen statistischen Verteilungsfunktionen.

- Die experimentelle Auflösung ist schlecht: $\Delta E \gg \Gamma$. Hier wird über die fluktuierenden Wirkungsquerschnitte gemittelt, so daß ein glatter Verlauf entsteht. Da auch die konkurrierenden direkten Prozesse glatt verlaufen, müssen Unterscheidungsmerkmale zwischen beiden gesucht werden, z.B. der Verlauf der

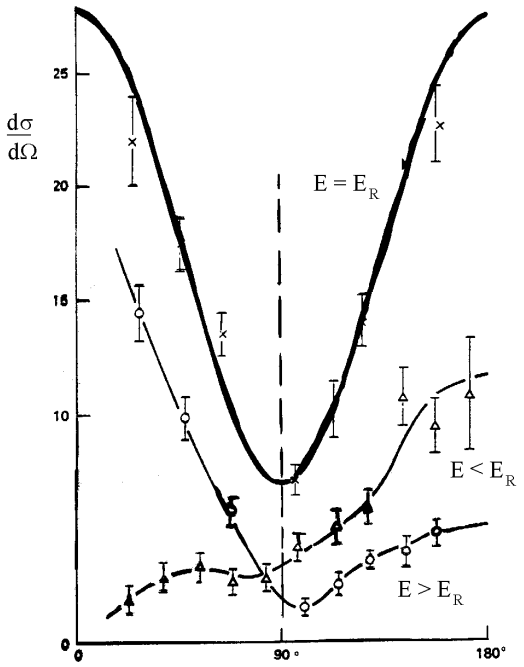


Abbildung 11.9: Die Δ-Resonanz hat eine um $\pi/2$ symmetrische Winkelverteilung.

Winkelverteilungen.

11.3.3 Ericson-Fluktuationen

Die übliche Modellannahme hierbei ist, daß in den Ausdrücken für die S-Matrix

$$S_{cc'} = S_{DI} + \sum \frac{a_{cc'}}{(E - E_R) + i\Gamma/2} \tag{11.30}$$

die Partialbreitenamplituden $a_{cc'} = \Gamma_c^{1/2}\Gamma_{c'}^{1/2}\cos(\Phi)$

des Compoundanteils sich stochastisch verhalten: sie sind nach Real- und Imaginärteil statistisch gleichverteilt mit dem Mittelwert null:

$$\langle S_{cc'}\rangle_{cc'} = 0 \tag{11.31}$$

$$\langle S_{cc'}\rangle_{cc'}^2 \neq 0 \tag{11.32}$$

Mit dieser Anahme ergibt sich für das statistische Verhalten der S-Matrixelemente: Ihre Real- und Imaginärteile fluktuieren unabhängig und gaußverteilt, ebenfalls mit Mittelwert null. Der $S_{cc'}^2$ entsprechende Wirkungsquerschnitt

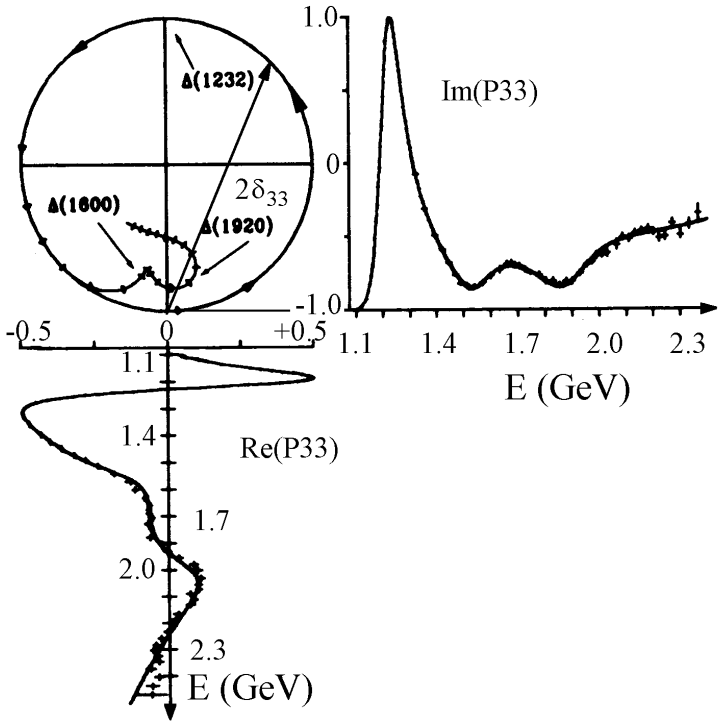


Abbildung 11.10: Der Argand-Plot über die $\Delta-$Resonanz füllt den Einheitskreis nahezu perfekt.

$$\langle S_{cc'} \rangle^2_{cc'} \neq 0 \tag{11.33}$$

fluktuiert um den glatten, nämlich $\langle S_{cc'} \rangle^2_{cc'} \neq 0$ entsprechenden mittleren Wirkungsquerschnitt, der z.B. mittels der Hauser-Feshbach-Theorie beschrieben werden kann.

Aus dem stochastischen (chaotischen) Verhalten der Amplituden folgen eine Reihe von Vorhersagen, die benutzt werden können, einerseits die statistischen Grundannahmen zu überprüfen, andererseits Informationen nicht über einzelne Compoundniveaus, aber über deren Verhalten im Mittel zu gewinnen.

- Die Niveauabstände D folgen einer Wigner-Verteilung:

$$P(D)dD = \frac{\pi D}{2\langle D \rangle^2} \exp\left(\frac{-\pi D^2}{4\langle D \rangle^2}\right) \tag{11.34}$$

  um den mittleren Niveauabstand $\langle D \rangle$. Eine reine Zufallsverteilung wäre $\propto \frac{1}{\langle D \rangle} \exp\left(-\frac{D}{\langle D \rangle}\right)$, würde also kleine Niveauabstände bevorzugen. In Wirklichkeit stoßen sich die Niveaus (mit gleichem Spin und gleicher Parität) ab, und die Verteilung wird gleichmäßiger.

- Die Niveaubreiten für einen (den elastischen) Kanal gehorchen einer Porter-Thomas-Verteilung:

$$P(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-x/2\right) dx \tag{11.35}$$

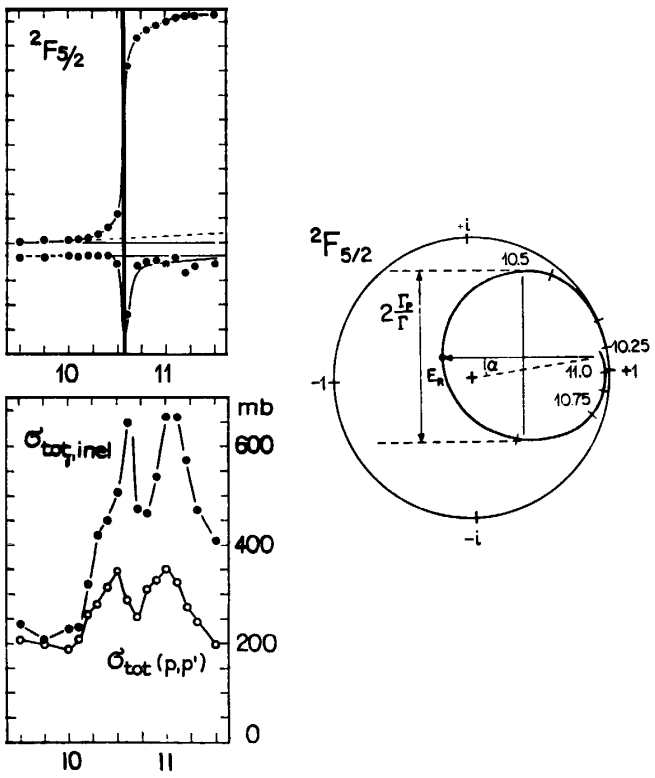


Abbildung 11.11: Elastische Streuung von Protonen an ^{12}C mit Durchgang der $F_{5/2}$-Streuphase durch $\pi/2$ und Argand-Plot. Letzterer zeigt erhebliche Anteile von Inelastizität (Abweichung vom Einheitskreis).

mit $x = \Gamma/\langle\Gamma\rangle$. Für mehrere (n) Kanäle geht sie in eine χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden über.

- Die (rel.) Wirkungsquerschnitte gehorchen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die im einfachsten Fall (ein Spinkanal) gegeben ist durch:

$$P(y)dy = e^{-y} \tag{11.36}$$

mit

$$y = \frac{\sigma}{\langle\sigma\rangle} \tag{11.37}$$

Für N Spinkanäle gilt:

$$P(y) = \frac{N^N}{(N-1)!} y^{N-1} e^{-Ny} \tag{11.38}$$

- Es gibt keine Kanal-Kanal-Korrelationen
- Die Korrelationen zwischen (differentiellen)Wirkungsquerschnitten für einen Kanal, aber bei verschiedenen Winkeln ist von der Zahl unabhängig fluktuierender Spinkanäle und vom direkten Anteil abhängig. Die Korrelation ist am

größten für 0^0und 180^0, am kleinsten für 90^0. Die Zahl der Spinkanäle läßt sich berechnen: z.B. für 90^0:

$N_{eff,max}$= g/2 für g = gerade, $N_{eff,max}$= (g+1)/2 für g = ungerade, mit

$$g = (2S_a + 1)(2S_A + 1)(2S_b + 1)(2S_B + 1) \tag{11.39}$$

Für die Grenzwinkel 0^0 bzw. 180^0 ist $N_{eff,min} < N_{eff,max}$ und abhängig von der Spinstruktur der Reaktion. Der besonders interessante Fall $N_{eff} = 1$ ergibt sich bei der Spinstruktur $1/2 + 0 \rightarrow 1/2 + 0$ (bei diesem ist die Fluktuation am stärksten ausgeprägt). Im allgemeinen Fall braucht man die Transmissionskoeffizienten des optischen Modells. Damit läßt sich aus der Messung dieser Winkelkorrelation u.U. der direkte Reaktionsanteil ermitteln.

- Energie(auto)korrelationen: Die Energiekorrelation

$$C(\epsilon) = \frac{\langle \sigma(E)\sigma(E+\epsilon)\rangle}{\langle \sigma(E)\rangle\langle \sigma(E+\epsilon)\rangle} - 1, \tag{11.40}$$

für die unter den obigen Annahmen gilt:

$$C(\epsilon) = \frac{\Gamma^2}{\Gamma_{coh}^2 + \epsilon^2}, \tag{11.41}$$

liefert als die mittlere Niveaubreite (Lebensdauer) der CN-Niveaus. Die Autokorrelation

$$C(0) = \frac{1}{N_{eff}}(1 - y_{DI}^2), \tag{11.42}$$

kann benutzt werden, den direkten Anteil y_{DI}^2 der Reaktion zu bestimmen.

11.4 Vollständige Mittelung über die CN-Zustände

11.4.1 Allgemeines

11.4.2 Hauser-Feshbach-Formalismus

Nach der Bohr-Hypothese sind Bildung und Zerfall von CN-Zuständen unabhängig. D.h. z.B., daß der integrierte Wirkungsquerschnitt faktorisierbar ist:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{CN} \cdot P_\beta \tag{11.43}$$

mit

$$P_\beta = \frac{\Gamma_\beta}{\sum_{alle\beta} \Gamma_\beta} \tag{11.44}$$

und

$$\sum_\beta P_\beta = 1 \tag{11.45}$$

Der Bildungsquerschnitt wird im Optischen Modell über Transmissionskoeffizienten T_α beschrieben:

$$\sigma_\alpha^{CN} = \pi\hbar\lambda^2(1 - |\eta_{\alpha\alpha}|^2) = \pi\bar{\lambda}^2 \cdot T_\alpha. \tag{11.46}$$

Damit wird

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi\bar{\lambda}^2 T_\alpha P_\beta \tag{11.47}$$

Aus dem *Prinzip des detaillierten Gleichgewichtes* folgt:

$$\bar{\lambda}_\beta^2 \sigma_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}_\alpha^2 \sigma_{\beta\alpha} \tag{11.48}$$

$$T_\alpha P_\beta = T_\beta P_\alpha \tag{11.49}$$

$$\frac{P_\alpha}{T_\alpha} = \frac{P_\beta}{T_\beta} = \lambda = const \tag{11.50}$$

$$\sum P_\alpha = \lambda \sum_{\gamma=alle\beta} T_\beta = 1 \tag{11.51}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sum_\gamma T_\gamma} \tag{11.52}$$

$$P_\beta = \lambda \cdot T_\beta = \frac{T_\beta}{\sum_\gamma T_\gamma} \tag{11.53}$$

Das Endresultat für den Hauser-Feshbach-WQ. ist dann:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{HF} = \langle \sigma_{\alpha\beta}^{CN} \rangle = \pi\bar{\lambda}_\alpha^2 \cdot \frac{T_\alpha T_\beta}{\sum_\gamma T_\gamma} \tag{11.54}$$

Analog und unter Benutzung der Partialwellenentwicklung leitet sich der differentielle Hauser-Feshbach-Querschnitt hier für Teilchen ohne Spins her:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_l = \pi\bar{\lambda}_\alpha^2 \sum_l (2l+1) \left|P_l(\cos(\theta))\right|^2 \cdot \frac{T_\alpha T_\beta}{\sum_\gamma T_\gamma} \tag{11.55}$$

Beide Wirkungsquerschnitte zeigen die Faktorisierung in Ein- und Ausgangskanal.

Wesentlich für die Berechnung des Hauser-Feshbach-Querschnittes ist also die Kenntnis der Transmissionskoeffizienten T_l bzw. T_{lJ}, die man durch Anpassung des Optischen Modells an elastische Streudaten für den Eingangskanal wie auch für den betrachteten Ausgangskanal sowie für alle überhaupt möglichen Ausgangskanäle erhält. Sie müssen für alle Energien bis zu den Anregungsenergien, die im Compoundkern bzw. Endkern maximal erreicht werden, bekannt sein.

Eine v.a. bei Schwerionenreaktionen (d.h. bei starker Absorption) verwendete Näherung war das Sharp-cutoff-Modell, bei dem die Transmissionskoeffizienten durch eine geeignete Stufenfunktion ersetzt wurden, die ihren Wert bei einer scharfen Energie von Null auf Eins ändert.

Bei der Bestimmung der Übergänge, die im Kontinuum (also im Bereich starker Überlappung der Endzustände) enden, müssen diese statistisch behandelt werden mit der Niveaudichte als Gewichtsfaktor.

Die wesentlichsten Merkmale der Hauser-Feshbach-Querschnitte sind:

- Die Winkelverteilungen sind aufgrund des Verhaltens der Legendre-Polynome und Clebsch-Gordan-Koeffizienten symmetrisch um 90°.

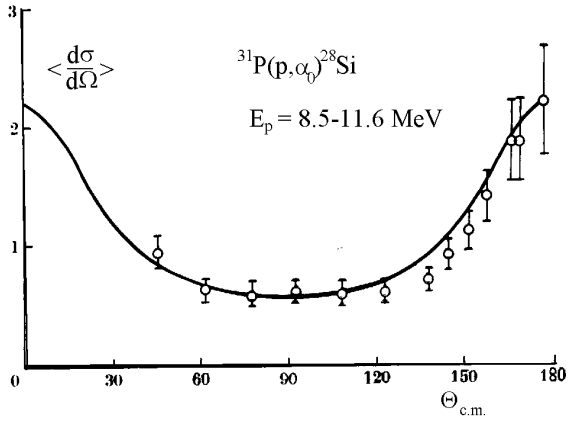


Abbildung 11.12: Hauser-Feshbach-Winkelverteilung, angepaßt an Daten der Compoundreaktion $^{31}P(p,\alpha_0)$.

- Die Wirkungsquerschnitte nehmen mit zunehmender Energie stark ab, da durch die steigende Zahl offener Zerfallskanäle der Transmissionsnenner stark zunimmt. Man erwartet daher, daß bei Konkurrenz mit direkten Prozessen letztere mit steigender Energie dominieren, die Compoundprozesse jedoch aussterben werden.

Kapitel 12

Ausgewählte Literatur zur Vorlesung

12.1 Allgemeine und Lehrbücher

- **T. Mayer-Kuckuk, Kernphysik, Teubner**
- P. Marmier/E. Sheldon, Physics of Nuclei and Particles I+II, Academic Press
- **E. Bodenstedt, Experimente der Kernphysik und ihre Deutung I-III, B.I.**
- P.E. Hodgson, Nucl. Reactions and Nucl. Structure, Oxford
- D. Jackson, Nuclear Reactions, Methuen
- **G.R. Satchler, Introduction to Nuclear Reactions, MacMillan**
- K. Krane, Introductory Nuclear Physics, Wiley
- K. Bethge, Kernphysik (Eine Einführung), Springer
- **H. Feshbach, Theor. Nucl. Phys. II, Nuclear Reactions, Wiley**

12.2 Gebietsübergreifende

- H. Frauenfelder/E.M. Henley, Subatomic Physics, Prentice Hall
- dito, Nuclear and Particle Physics, Background and Symmetries, Benjamin
- **E. Segrè, Nuclei and Particles, Benjamin**
- E. Lohrmann, Hochenergiephysik, Teubner
- E. Lohrmann, Einführung in die Elementarteilchenphysik, Teubner

- D.H. Perkins, Introduction to High Energy Physics, Addison-Wesley
- K. Gottfried/V. Weisskopf, Concepts of Particle Physics I+II

12.3 Methoden und Technik

- K. Siegbahn (ed.), $\alpha-, \beta-, \gamma-$Ray Spectroscopy, North-Holland
- H. Neuert, Kernphysikalische Meßverfahren, Teubner
- F. Knoll, Radiation Detection and Measurement, Wiley
- K.-H. Rohe, Elektronik für Physiker, Teubner
- H.U. Schmidt, Meßelektronik in der Kernphysik, Teubner
- H. Daniel, Teilchenbeschleuniger, Teubner
- K. Wille, Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen, Teubner
- F. Hinterberger, Physik der Teilchenbeschleuniger und Ionenoptik, Springer
- H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics, Springer

12.4 Kernreaktions- u. Streutheorie, Drehimpuls

- M.L. Goldberger/K.M. Watson, Collision Theory, Wiley
- L.S. Rodberg/R.M. Thaler, Intr. to the Quantum Theory of Scattering, Academic Press
- R.G. Newton, Scattering Theory of Waves and Particles, Springer
- C. Joachain, Quantum Collision Theory, North-Holland
- D.M. Brink/G.R. Satchler, Angular Momentum, Oxford
- H. Lindner, Drehimpulse in der Quantenmechanik, Teubner

12.5 Wenignukleonensysteme

- Proc. der Few-Nucleon- bzw. Few-Body-Konferenzen, z.B. Graz (1978), Eugene (1980), Kerlsruhe (1983), Rom (1986), Vancouver (1989), Adelaide (1992), Williamsburg (1994), Groningen (1997)
- G.E. Brown/A.D. Jackson, The Nucleon-Nucleon Interaction, North-Holland
- W. Glöckle, The Quantum Mechanical Few-Body Problem, Springer

12.6 Resonanzen

- The Feynman Lectures in Physics I
- R.G. Sachs, Nuclear Theory
- E. Vogt, Advances in Nucl. Phys. 1(1968)261
- P.E. Hodgson, Nucle. Reactions and Nucl. Structure (s.o.)
- A.M. Lane/R.G. Thomas, Revs. Mod. Phys. **30**(1958)145

12.7 Statistisches Modell und Ericson-Fluktuationen

- T. Ericson/T. Mayer-Kuckuk, Ann. Rev. Nucl. Science **16**(1966)183
- M.G. Braga Marcazzan/L. Milazzo Colli, Progr. Nucl. Phys. **11**(1970) 145
- A. Richter, "Specialized Reactions" in "Nucl. Spectroscopy and Reactions" B, Cerny (ed.), Plenum
- Proc. Int. Conf. on Statistical Properties of Nuclei, Garg(ed.), Albany 1971, Plenum

12.8 Intermediäre Strukturen

- H. Feshbach, Ann. of Physics **11**(1967)230
- auch: P.E. Hodgson, Nucl. Reactions and Nucl. Structure (s.o.)

12.9 Optisches Modell

- P.E. Hodgson, The Optical Model of Elastic Scattering, Oxford

12.10 Direkte Reaktionen

- N. Austern, Direct Nuclear Reaction Theories, Wiley
- G.R. Satchler, Direct Nuclear Reactions, Oxford
- N.K. Glendenning, Theory of Direct Nuclear Reactions, Academic Press

12.11 Schwerionenreaktionen

- W. Nörenberg/H.A. Weidenmüller, Intr. Theory of Heavy Ion Collisions, Lect. Notes in Physics **51**, Springer, 1976
- A: Bromley, Teatise on Heavy Ion Science I-VIII, Plenum
- R. Bock (ed.) Heavy-Ion Collisions I-III, North-Holland

12.12 Coulombanregung

- K. Alder/A. Winther, Coulomb Excitation, Academic Press
- dito, Electromagnetic Excitation, Theory of Coulomb Excitation with Heavy Ions, North-Holland

12.13 Isospin und Isobar-Analogresonanzen

- G.M. Temmer, in "Fundamentals in Nuclear Theory", IAEA Wien, 1967
- J. Fox/D. Robson (eds.), Conf. on Isobaric Spin in Nuclear Physics, Tallahassee, Academic Press, 1966
- J.D. Anderson et al., Conf. on Nuclear Isospin, Asilomar, Academic Press, 1969
- D. Wilkinson (ed.), Isospin in Nuclear Physics, North-Holland
- Henley & Miller, in "Mesons in Nuclei", (eds. M. Rho & Wilkinson) Amsterdam, 1979, p. 416

12.14 Polarisationsphänomene

- D. Fick, Kernpyhsik mit polarisierten Teilchen, Teubner
- dito (ed.), Polarization Nuclear Physics, Lect. Notes in Physics **30**, Springer 1974
- Proc. der Polarisations-Symposia in Basel (1960), Karlsruhe (1965), Madison (1970), Zürich (1975), Santa Fe (1980), Osaka (1985), Paris (1990), Bloomington (1994), Amsterdam
- analog für HE-Spin Physics: ... Bonn (1990), Bloomington (1994), Amsterdam (1996)
- H. Paetz gen. Schieck, Skriptum Kernphysik mit polarisierten Teilchen
- T.A. Welton, in Fast Neutron Physics II, eds. Marion & Fowler, Interscience, N.Y. 1963, p. 1317 ff.

12.15 Nützlich, z.T. auch auf CD-ROM bzw. online

- Nuklidkarte
- Nuclear Data Tables (u.a. Q-Wert-Tabellen, Reaction Lists etc.), Academic Press
- Nuclear Data Sheets, Academic Press
- Energy Levels of Light Nuclei, Kompilationen in Nuclear Physics **A**
- C.M. Lederer/V.S. Shirley, neu: R.B. Firestone/V.S. Shirley, Table of Isotopes, Wiley
- Review of Particle Physics, Particle Data Group, Phys. Rev. **D 54**(1996)1, (Update alle 2 Jahre)