Numerische Strömungsmechanik

Vorlesungsskriptum Wintersemester 1998/99

R. Verfürth

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany

Inhalt

I Einführung **1**
- I.1 Beispiele für Strömungsprobleme 1
- I.2 Modellierung 2
- I.3 Der Satz von Cauchy 10
- I.4 Notationen und Hilfsergebnisse 22

II Die Stokes Gleichungen **26**
- II.1 Heuristische Vorüberlegungen 26
- II.2 Ein abstraktes Variationsproblem 29
- II.3 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung der Stokes Gleichungen 35
- II.4 Ein abstrakter Approximationssatz 41
- II.5 Stabile gemischte Elemente für die Stokes Gleichungen 45
- II.6 Petrov-Galerkin Stabilisierung 61
- II.7 Nicht konforme Methoden 69
- II.8 Stromfunktionsformulierung 79
- II.9 Numerische Lösung der diskreten Probleme 87
- II.10 A posteriori Fehlerschätzer 101

III Die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen **107**
- III.1 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen 107
- III.2 Approximation regulärer Lösungsäste 122
- III.3 Stromlinien-Diffusions Methoden 129
- III.4 Numerische Lösung der diskreten Probleme 130
- III.5 A posteriori Fehlerschätzer 138

IV Die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen **143**
- IV.1 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen 143
- IV.2 Finite Element Diskretisierung und numerische Lösung 151
- IV.3 A posteriori Fehlerschätzer 157

I Einführung

I.1 Beispiele für Strömungsprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir einige Beispiele für Strömungsprobleme angeben, ohne dabei näher auf die physikalische und mathematische Modellierung einzugehen. Die Beispiele sollen einen Eindruck über die Vielfalt der auftretenden Probleme vermitteln. Die Liste der Beispiele ist bei weitem nicht vollständig.

Ein erstes Beispiel ist die Reduzierung des Luftwiderstandes eines Kraftfahrzeuges. Hierbei muss die Luftströmung um das Fahrzeug berechnet werden. Mathematisch handelt es sich um ein Außenraumproblem, d.h. ein System von Differentialgleichungen muss außerhalb eines beschränkten Gebietes gelöst werden.

Eng verwandt ist das Problem der Optimierung eines Tragflügels, so dass der Luftwiderstand reduziert und gleichzeitig des Auftrieb verbessert wird. Für jede Tragflügelkonfiguration muss die Strömung um den Tragflügel berechnet werden, d.h., es muss wieder ein Außenraumproblem gelöst werden. Im Gegensatz zum ersten Beispiel sind die Strömungsgeschwindigkeiten wesentlich höher. Hierdurch treten neue physikalische und mathematische Probleme auf. Besonders augenfällig ist dies beim Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten. Eine mathematische Konsequenz ist z.B., dass sich der Typ der Differentialgleichung ändert.

Traditionellerweise wurden die oben beschriebenen Probleme durch Experimente im Windkanal gelöst. In den letzten Jahrzehnten werden diese Experimente jedoch zunehmend durch numerische Simulationen ergänzt und zum Teil ganz ersetzt. Besonders augenfällig ist dies bei der Simulation des Wiedereintrittes eines Raumgleiters in die Erdatmosphäre. Hier sind die Strömungsphänomene in komplizierter Weise mit thermischen und chemischen Problemen gekoppelt (z. B. Abschmelzen des Hitzeschutzes).

Ein weiteres Beispiel ist die Strömung in einem Gewässer, z.B. einem See. Dabei ist z. B. der Transport oder die Sedimentation von Schadstoffen zu simulieren. Wenn die horizontale Ausdehnung des Gewässers groß ist im Vergleich zur Tiefe, können spezielle Vereinfachungen getroffen werden, die auf die sog. Flachwassergleichungen führen. Eng verwandt sind Schwingungsphänomene in großen Seen. Historisch verbürgt ist z. B. das Konstanzer Wasserwunder von 1549. Durch günstige Windkonstellationen wurden mehrere Grundfrequenzen des Bodensees so angeregt, dass sich die Strömungsrichtung in Konstanz umkehrte.

Strömungsprobleme treten oft auch in Verbindung mit freien Randwertproblemen auf. Eine industrielle Anwendung ist z. B. die Filmbeschichtung. Dabei wird ein Trägermaterial durch einen dünnen Kanal, der mit der aufzutragenden Flüssigkeit gefüllt ist, gezogen. Am Austritt des Kanals bildet sich eine freie Oberfläche. Die Geschwindigkeit, mit der das Trägermaterial fortbewegt wird, und die Nachfüllmenge

der Flüssigkeit müssen so gesteuert werden, dass eine gewünschte Filmdicke erreicht wird. Neben dem Strömungsfeld muss dabei auch die unbekannte Grenzfläche des Flüssigkeitsfilmes berechnet werden.

Strömungsprobleme sind häufig mit thermischen, chemischen oder elektromagnetischen Phänomenen gekoppelt. Ein Beispiel ist der bereits erwähnte Wiedereintritt eines Raumgleiters. Ein anderes ist die Strömung eines elektrisch leitenden Plasmas in einem starken Magnetfeld (Tokamak).

Ein letztes alltägliches Beispiel ist die Wettervorhersage. Hierbei muss die Strömung auf einer Mannigfaltigkeit (Erdoberfläche) beeinflusst durch Gravitation, Erdrotation und Topographie simuliert werden.

I.2 Modellierung

Wir betrachten einen Flüssigkeitskörper Ω, der sich unter dem Einfluss innerer und äußerer Kräfte bewegt. Sei $V \subset \Omega$ ein kleines Flüssigkeitsvolumen und $\eta \in V$. Zur Zeit $t > 0$ befindet sich das Teilchen, das zur Zeit $t = 0$ in η war, an der Stelle

$$x = \Phi(\eta, t).$$

Sezte $V(t) := \Phi(., t)(V)$. Wir machen folgende grundlegende Annahme:

(A1) $\Phi(., t) : \Omega \longrightarrow \Omega$ ist für jedes $t > 0$ ein orientierungstreuer C^∞-Diffeomorphismus mit $\Phi(., 0) = Id$.

2.1 Bemerkung: Wir können die Strömung auf zwei Weisen betrachten. Einmal betrachten wir die Trajektorie $t \longrightarrow \Phi(\eta, t)$ eines beliebigen, festen Punktes mit ursprünglicher Position η. Dies ist die sog. **Lagrange'sche Sichtweise**. Entsprechend heißt η **Lagrange'sche Koordinate**. Das Lagrange'sche Koordinatensystem bewegt sich mit der Strömung mit. Bei der anderen Sichtweise, die wir im folgenden stets verfolgen werden, betrachten wir zu einem beliebigen, festen Punkt x die Trajektorien $t \longrightarrow \Phi(., t)^{-1}(x)$, die durch diesen Punkt laufen. Dies ist die sog. **Euler'sche Sichtweise**. Entsprechend heißt x **Euler'sche Koordinate**. Das Euler'sche Koordinatensystem ist unbewegt. $\square$

Bezeichne mit $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta_j}\right)_{1 \le i,j \le 3}$ die Funktionalmatrix von Φ, mit $J := \det D\Phi$ die Funktionaldeterminante von Φ und mit A_{ij} die Ko-Faktoren von $D\Phi$. Dann gilt

$$\left[(D\Phi)^{-1}\right]_{ij} = \frac{1}{J}(-1)^{i+j} A_{ji}$$

und

$$\sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} A_{ij} (D\Phi)_{kj} = J\delta_{ik}.$$

Die **Geschwindigkeit** der Strömung im Punkt $x = \Phi(\eta, t)$ ist definiert durch

$$\mathbf{v}(x,t) := \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta,t) \quad , \quad x = \Phi(\eta,t).$$

2.2 Lemma: *Es ist*

$$\frac{\partial}{\partial t} J = J(\operatorname{div}_x \mathbf{v}) \circ \Phi.$$

Beweis: Aus der Definition von $\mathbf{v}$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t \partial \eta_j}\Phi_i(\eta,t) =& \frac{\partial}{\partial \eta_j} v_i(\Phi(\eta,t),t) \\ =& \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\Phi(\eta,t),t)\frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_j}.\end{aligned}$$

Hieraus und aus dem Entwicklungssatz für Determinanten ergibt sich mit $x = \Phi(\eta, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} J =& \sum_{1\le i,j\le 3} \underbrace{\frac{\partial J}{\partial(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta_j})}}_{=(-1)^{i+j}A_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \eta_j}\Phi_i \\ =& \sum_{1\le i,j,k\le 3} (-1)^{i+j} A_{ij} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x,t) \\ =& \sum_{1\le i,k\le 3} J\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x,t) \\ =& J(\operatorname{div}_x \mathbf{v}) \circ \Phi(\eta,t).\end{aligned}$$

□

2.3 Satz: **(Transport Theorem)** *Sei* $f : \Omega \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *hinreichend oft differenzierbar. Dann gilt für jedes Volumen* V *in* Ω

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(x,t)dx = \int_{V(t)} \Big\{\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(f\mathbf{v})(x,t)\Big\}dx.$$

Beweis: Aus der Annahme (A1) und Lemma 2.2 folgt mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(x,t)dx \\ =& \frac{d}{dt}\int_{V} f(\Phi(\eta,t),t)J(\eta,t)d\eta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_V \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} f(\Phi(\eta,t),t) J(\eta,t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\Phi(\eta,t),t) \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}_{=v_i(\Phi(\eta,t),t)} J(\eta,t) \\
&\qquad + f(\Phi(\eta,t),t) \frac{\partial}{\partial t} J(\eta,t) \Big\} d\eta \\
&= \int_V J(\eta,t) \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} f(.,t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} f(.,t) v_i(.,t) \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{3} f(.,t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(.,t) \Big\} \circ (\Phi(\eta,t)) d\eta \\
&= \int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(f\mathbf{v})(x,t) \Big\} dx.
\end{aligned}
$$

□

An die Bewegung der Flüssigkeit werden nun die klassischen Annahmen der Physik gestellt:

(A2) Erhaltung der Masse,

(A3) Erhaltung des Impulses,

(A4) Erhaltung der Gesamtenergie.

Bezeichne mit $\rho(x,t)$ die **Dichte** der Flüssigkeit. Dann folgt aus der Massenerhaltung (A2) und Satz 2.3 für jedes Volumen V in Ω:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x,t) dx \\
&= \int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})(x,t) \Big\} dx.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich punktweise

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{1}
$$

(Massenerhaltung).

Die zeitliche Änderung des Impulses ist wegen Satz 2.3 gleich

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x,t)\mathbf{v}(x,t) dx \\
&= \Big(\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x,t) v_i(x,t) dx \Big)_{1 \le i \le 3} \\
&= \Big(\int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)(x,t) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v})(x,t) \Big\} dx \Big)_{1 \le i \le 3} \\
&= \int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})(x,t) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(x,t) \Big\} dx
\end{aligned} \tag{2}
$$

mit

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} := (v_i u_j)_{1 \le i,j \le 3}.$$

Wegen der Impulserhaltung (A3) ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der inneren und äußeren Kräfte. Da die äußeren Kräfte mit dem Volumen skalieren und bzgl. des Volumens additiv sind, folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym, dass sie von der Form

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dx$$

sind. Für die inneren Kräfte folgt aus dem **Satz von Cauchy**, dessen Beweis wir im nächsten Abschnitt skizzieren, dass sie von der Form sind

$$\int_{\partial V(t)} \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

mit einem Tensor $\underline{\mathbf{T}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$ und dass der Gauß'sche Integralsatz gilt

$$\int_{\partial V(t)} \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V(t)} \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} dx.$$

(Wie üblich bezeichnen $\partial V(t)$ und $\mathbf{n}$ den Rand von $V(t)$ und den äußeren Einheitsnormalenvektor an $\partial V(t)$.) $\underline{\mathbf{T}}$ heißt der **Spannungstensor**. Aus dieser Darstellung der inneren und äußeren Kräfte und der Identität (2) ergibt sich für jedes Volumen

$$\int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \Big\} dx = \int_{V(t)} \big\{ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} \big\} dx$$

und somit punktweise

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \tag{3}$$

(Impulserhaltung).

Bezeichnen wir mit e die **Gesamtenergie**, so folgt aus Satz 2.3 für ihre zeitliche Änderung

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} e dx = \int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial e}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(e\mathbf{v})(x,t) \Big\} dx. \tag{4}$$

Aus der Eenergieerhaltung (A4) folgt andererseits, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie gleich der Summe der Energie der einwirkenden inneren und äußeren Kräfte plus der Änderung der inneren Energie ist. Wegen der oben hergeleiteten Form der inneren und äußeren Kräfte ergeben sich die ersten beiden Beiträge zu

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx$$

und

$$\int_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_{V(t)} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}) dx.$$

Für die Änderung der inneren Energie folgt aus dem Satz von Cauchy, dass sie von der Form ist

$$\int_{\partial V(t)} \sigma \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

mit einem Vektorfeld $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und dass wieder der Gauß'sche Integralsatz gilt

$$\int_{\partial V(t)} \sigma \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V(t)} \operatorname{div} \sigma dx.$$

Hieraus und aus der Identität (4) ergibt sich für jedes Volumen

$$\int_{V(t)} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} e + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) \Big\} dx = \int_{V(t)} \big\{ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}) + \operatorname{div} \sigma \big\} dx$$

und somit punktweise

$$\frac{\partial}{\partial t} e + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}) + \operatorname{div} \sigma \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \tag{5}$$

(Energieerhaltung).

Die Gleichungen (1), (3) und (5) beschreiben das Verhalten der Flüssigkeit noch nicht vollständig. Sie müssen durch **konstitutive Gleichungen** für die Größen $\underline{\mathbf{T}}, e$ und σ ergänzt werden. Hierzu werden die folgenden Annahmen gemacht:

(A5) $\underline{\mathbf{T}}$ hängt nur vom Gradienten der Geschwindigkeit ab und die Abhängigkeit ist linear; $\underline{\mathbf{T}}$ ist symmetrisch (folgt mit dem Satz von Cauchy auch aus der Erhaltung des Drehmomentes); bei Fehlen innerer Reibung ist $\underline{\mathbf{T}}$ diagonal und dem Druck proportional (es treten nur innere Kräfte in Normalenrichtung auf).

(A6) $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ (ε heißt **interne Energie** und wird häufig mit der Temperatur identifiziert).

(A7) σ ist proportional zur Änderung der internen Energie, d.h. $\sigma = \alpha \nabla \varepsilon$.

Aus der Annahme (A5) folgt, dass der Spannungstensor $\underline{\mathbf{T}}$ von der Form ist

$$\underline{\mathbf{T}} = 2\lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu(\operatorname{div} \mathbf{v}) \underline{\mathbf{I}} - p\underline{\mathbf{I}}. \tag{6}$$

Dabei bezeichnen

$$\underline{\mathbf{I}} = (\delta_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$$

den **Einheitstensor**,

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Big)_{1 \le i,j \le 3}$$

den **Deformationstensor**,

$$p = p(\rho, \varepsilon) \tag{7}$$

den **Druck** und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die **kinematischen Viskositäten** der Flüssigkeit. Gleichung (7) heißt auch **Zustandsgleichung**. Für ein ideales Gas ist z.B. $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ mit $\gamma > 1$. Man beachte, dass $\operatorname{div} \mathbf{v}$ die Spur des Deformationstensors $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v})$ ist.

Aus den Gleichungen (1), (3), (5), (6) und (7) und den Annahmen (A6) und (A7) ergeben sich die **kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in konvervativer Form**

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) =& 0 \\
\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) =& \rho \mathbf{f} + 2\lambda \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p \\
=& \rho \mathbf{f} + \lambda \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p \\
\partial_t e + \operatorname{div}(e \mathbf{v}) =& \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + 2\lambda \operatorname{div}[\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}] \\
&+ \mu \operatorname{div}[\operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] - \operatorname{div}(p \mathbf{v}) + \alpha \Delta \varepsilon \\
=& \{\rho \mathbf{f} + 2\lambda \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p\} \cdot \mathbf{v} \\
&+ \lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
p =& p(\rho, \varepsilon) \\
e =& \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Für reibungsfreie Strömungen, d.h. $\lambda = \mu = 0$, ergeben sich aus (8) die **Euler'schen Gleichungen** für ein ideales Gas

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) =& 0 \\
\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \underline{\mathbf{I}}) =& \rho \mathbf{f} \\
\partial_t e + \operatorname{div}(e \mathbf{v} + p \mathbf{v}) =& \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
p = p(\rho, \varepsilon), e =& \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Aus der ersten Gleichung von (8) ergibt sich für die linke Seite der zweiten Gleichung von (8)

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \\
=& (\partial_t \rho) \mathbf{v} + \rho \partial_t \mathbf{v} + (\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\
=& \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}].
\end{aligned}$$

Einsetzen der ersten beiden Gleichungen von (8) in die dritte Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
&\lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
=& - \{\rho \mathbf{f} + 2\lambda \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p\} \cdot \mathbf{v} \\
&+ \partial_t(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= - \{\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\}\cdot\mathbf{v} \\
&\quad + \varepsilon\partial_t\rho + \varepsilon\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) + \rho\partial_t\varepsilon + \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\partial_t\rho + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) + \rho\partial_t(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) + \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) \\
&= - \rho\mathbf{v}\cdot[\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] \\
&\quad + \rho\partial_t\varepsilon + \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon \\
&\quad + \rho\mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] \\
&= \rho\partial_t\varepsilon + \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir so die **kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen** in nicht konservativer Form

$$
\begin{aligned}
\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) &= 0 \\
\rho[\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] &= \rho\mathbf{f} + \lambda\Delta\mathbf{v} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{grad}p \\
\rho[\partial_t\varepsilon + \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon] &= \lambda\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 - p\operatorname{div}\mathbf{v} + \alpha\Delta\varepsilon \\
p &= p(\rho,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Nehmen wir an, dass die Dichte ρ in $\Omega\times(0,\infty)$ konstant ist, vernachlässigen wir die Energiegleichung, d.h. die dritte Gleichung in (10), ersetzen p durch $\frac{p}{\rho}$ und bezeichnen mit

$$
\nu := \frac{\lambda}{\rho}
$$

die **dynamische Viskosität**, so erhalten wir die **instationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \\
\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{v} - \operatorname{grad}p.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Für eine stationäre Bewegung ergeben sich die **stationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \\
-\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \operatorname{grad}p &= \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Linearisieren wir schließlich um $\mathbf{v} = 0$ und skalieren die Viskosität ν zu 1, erhalten wir die **Stokes Gleichungen**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \\
-\Delta\mathbf{v} + \operatorname{grad}p &= \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Man beachte, dass in den heute in der Praxis üblichen Algorithmen zur numerischen Strömungssimulation die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in der oben beschriebenen Art und Weise auf eine Folge einfacherer Probleme reduziert wird.

Die Gleichungen (8) – (11) sind zeitabhängig. Sie müssen daher durch Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, die interne Energie ε und – bei den Gleichungen (8) – (10) – die Dichte ρ komplettiert werden. Die Euler Gleichungen (9) sind hyperbolischer Natur und erfordern Randbedingungen auf dem Einströmrand von Ω. Die Gleichungen (8) und (10) – (13) sind von zweiter Ordnung im Ort und benötigen daher Randbedingungen auf ganz $\Gamma := \partial\Omega$. Für die Energiegleichungen in (8) und (10) hat man die üblichen Dirichlet und Neumann Randbedingungen zur Auswahl. Schwieriger ist die Situation für die Massen- und Impulsgleichungen in (8) und (10) – (13). Sir **George Gabriel Stokes** (1819 – 1903) schlug um 1845 zur Modellierung vor, dass die Flüssigkeitspartikel an den festen Wänden haften, so dass die Dirichlet Randbedingung

$$\mathbf{v} = 0 \tag{14}$$

auf Γ zu fordern wäre. (Allgemeiner kann man $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\Gamma$ mit bekanntem $\mathbf{v}_\Gamma$ betrachten.) **Pierre Louis Marie Henri Navier** (1785 – 1836) schlug dagegen um 1827 die allgemeinere Randbedingung

$$\begin{aligned} \lambda_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + (1-\lambda_n)\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} =& 0 \\ \lambda_t[\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}] + (1-\lambda_t)[\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] =& 0 \end{aligned} \tag{15}$$

auf Γ mit $\lambda_n, \lambda_t \in [0,1]$ vor. (Allgemeiner kann man die homogene rechte Seite durch bekannte Funktionen ersetzen.) Man beachte, dass die erste Gleichung die Normalkomponente von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}}$ betrifft und dass sich die zweite Gleichung auf die Tangentialkomponenten von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}}$ bezieht. Für $\lambda_n = \lambda_t = 1$ erhält man offensichtlich die **Haftrandbedingung** (14) von Stokes als Spezialfall. Für $\lambda_n = 1, \lambda_t = 0$ erhält man die **Gleitrandbedingung**

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} =& 0 \\ \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} =& 0 \end{aligned} \tag{16}$$

als Spezialfall. Die Frage, welche der beiden Randbedingungen (14) oder (15) die Natur besser wiedergibt, wurde im letzten Jahrhundert durch Pendelexperimente in zähen Flüssigkeiten zugunsten der Haftrandbedingung (14) entschieden. Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten und geringen Reibungskräften, wie sie z.B. beim Wiedereintritt eines Raumkörpers auftreten, scheint allerdings die Gleitrandbedingung (16) bessere Ergebnisse zu liefern. Diese Randbedingung tritt auch zwingend bei freien Randwertproblemen wie z.B. der Filmbeschichtung auf. Die Lage des freien Randes wird dann wegen Kapillaritätseffekten dadurch bestimmt, dass seine Krümmung proportional zu den Normalspannungen $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}$ sein muss.

I.3 Der Satz von Cauchy

Wir betrachten die Bewegung eines Körpers B unter dem Einfluss innerer und äußerer Kräfte. Sei P ein "Teil" von B. Für P gilt der **Satz von der Impulserhaltung**:

$$\begin{aligned} &\text{zeitliche Änderung des Gesamtimpulses von } P \\ &= \text{Resultierende aller auf } P \text{ einwirkenden Kräfte.} \end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnen ρ die **Massendichte** und $\mathbf{u}$ die **Geschwindigkeit**, so lässt sich die linke Seite von (1) in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\int_P \rho \mathbf{u} dV.$$

Die rechte Seite lässt sich zerlegen in den Anteil des äußeren Kraftfeldes und in die Kräfte, die von den Molekülen außerhalb von P auf die innerhalb von P ausgeübt werden. Bezeichnet $\mathbf{f}$ die Dichte der äußeren Kräfte, so ist deren Einfluss auf P gegeben durch

$$\int_P \mathbf{f} dV.$$

Schließlich nimmt man an, dass der Einfluss der inneren Kräfte auf P gegeben wird durch

$$\int_{\partial P} \mathbf{q}(x, \mathbf{n}(x)) dA.$$

Dabei ist $\mathbf{q}$ die Dichte der inneren Kräfte, $\mathbf{n}$ die äußere Normale und A das Flächenelement. Dieser Darstellung der inneren Kräfte liegt die Annahme zugrunde, dass sie nur über die Oberfläche von P auf P einwirken können. Unter der Annahme, dass $\mathbf{q}$ **stetig** von x abhängt, bewies Cauchy im Jahre 1823, dass $\mathbf{q}$ eine **lineare Funktion von $\mathbf{n}$** ist, d.h.

$$\mathbf{q}(x, \mathbf{n}(x)) = \underline{\mathbf{T}}(x) \cdot \mathbf{n}(x).$$

Damit folgt aus der Impulserhaltung (1) die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int_P \rho \mathbf{u} dV = \int_P \mathbf{f} dV + \int_{\partial P} \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dA. \tag{2}$$

Da (2) für alle Teile P von B gelten muss, folgt aus (2) nach dem Gauß'schen Integralsatz unter geeigneten Regularitätsannahmen die differentielle Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}}. \tag{3}$$

Bei der Herleitung von (2) und (3) aus der Impulserhaltung (1) sind Begriffe verwandt und Annahmen gemacht worden, deren mathematische Bedeutung und physikalische Rechtfertigung noch geklärt werden muss:

1° : Was ist ein "Teil" von B? Welche Struktur muss die Gesamtheit der Teile von B haben?

2° : Wodurch ist die Existenz der Kraftdichten $\mathbf{f}$ und $\mathbf{q}$ gerechtfertigt?

3° : Ist die Stetigkeit von $\mathbf{q}$ physikalisch beweisbar oder folgt die lineare Abhängigkeit von $\mathbf{n}$ auch unter schwächeren Annahmen?

4° : Unter welchen Regularitätsannahmen gilt die differentielle Form (3) und sind diese Voraussetzungen physikalisch gerechtfertigt?

Diese Fragen sollen im folgenden beantwortet werden. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf skalare Größen; die Übertragung auf Vektoren – wie dem Impuls – ist unmittelbar klar.

A priori ist ein Körper eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wie wir weiter unten sehen werden, muss der Rand von B gewisse (relativ schwache) Glattheitseigenschaften haben, um obigen Begriffen einen mathematischen Sinn zu geben. Alle physikalischen Aussagen über B sollten auch für alle seine Teile gelten. Insbesondere gelten die gleichen Einschränkungen an deren Ränder. Falls P und Q Teile von B sind, sollten auch $P \cup Q$ und (bis auf "Nullmengen") $P \cap Q$ Teile von B sein. Ebenso sollte mit P auch $B \backslash P$ ein Teil von B sein. Insgesamt muss die Menge der Teile von B also die Struktur einer **σ-Algebra** tragen. Um die Existenz einer Dichte der äußeren Kräfte zu gewährleisten, muss diese σ-Algebra diejenige der Borel-Teilmengen von B enthalten.

Die äußeren Kräfte sind auf den Teilen von B definiert. Für disjunkte Teile von B müssen sie additiv sein. Mithin tragen sie die Struktur eines Maßes. Da die linke Seite von (1) absolut stetig bzgl. des Volumenmaßes ist, muss gleiches für die äußeren Kräfte gelten. Damit folgt die Existenz einer Dichte für die äußeren Kräfte unmittelbar aus dem Satz von Radon-Nikodym. Die Existenz der Kraftdichte $\mathbf{f}$ in (2°) ist also in diesem Zusammenhang trivial.

Die inneren Kräfte, die auf einen Teil P von B wirken, hängen nur von P und $B \backslash P$ bzw. allgemeiner von Teilen Q von $B \backslash P$ ab. Daher ist es sinnvoll anzunehmen, dass sie nur eine Funktion des Randes ∂P von P sind. Außerdem sollten sie auch für "vernünftige" Teilmengen von ∂P definiert und für disjunkte Mengen additiv sein. Insgesamt tragen sie also die Struktur eines **Oberflächenmaßes**. Außerdem hängen sie von der Orientierung ab. Insbesondere muss der Rand von P hinreichend glatt sein, um den Begriff einer Normalen definieren zu können. Da die linke Seite von (1) für kleiner werdendes Volumen gegen Null strebt, ist es sinnvoll anzunehmen, dass die inneren Kräfte absolut stetig bzgl. des Flächenmaßes auf ∂P sind. Außerdem stellt die Erhaltungsgleichung (1) eine Koppelung zwischen Volumen- und Flächenmaßen dar. Diese wird für den Beweis des Satzes von Cauchy wesentlich sein.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

Dabei bezeichnet $|.|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathrm{diam} A = \sup_{x,y \in A} |x-y|.$$

Dann definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ das **m-dimensionale Hausdorffmaß** von $A \subset \mathbb{R}^n$ als

$$H^m(A) := \lim_{\delta \to 0+} H^m_\delta(A) \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} H^m_\delta(A) = \inf\Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} \omega_m 2^{-m} (\mathrm{diam} C_j)^m : & C_j \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \\ & \mathrm{diam} C_j < \delta,\ A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} C_j \Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei bezeichnet $\omega_m := V_m(B(0,1))$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^m$. H^n stimmt mit dem Lebesgue'schen Volumenmaß überein. Für hinreichend glatt berandete Mengen stimmt $H^{n-1}(\partial A)$ mit dem Lebesgue'schen Oberflächenmaß überein.
Für $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir den **maßtheoretischen Rand** $\overline{\partial} A$ von A als

$$\begin{aligned} \overline{\partial} A := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \to 0+} \frac{H^n(A \cap B(x,r))}{H^n(B(x,r))} \neq 0 \quad \text{und} \\ \lim_{r \to 0+} \frac{H^n((\mathbb{R}^n \backslash A) \cap B(x,r))}{H^n(B(x,r))} \neq 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Es ist stets

$$\overline{\partial} A \subset \partial A \quad \text{und} \quad H^{n-1}(\partial A \backslash \overline{\partial} A) = 0. \tag{7}$$

So ist z.B.

$$\begin{aligned} &\partial(B(0,1)\backslash\{0\}) = \partial B(0,1) \cup \{0\} \quad \text{und} \\ &\overline{\partial}(B(0,1)\backslash\{0\}) = \partial B(0,1). \end{aligned}$$

Sei $\mathbf{n}$ ein Vektorfeld auf $\overline{\partial} A$ mit $|\mathbf{n}(x)| = 1$ für alle x. Setze

$$B^{\pm}(x,r) = \{ y \in B(x,r) : \pm(y-x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0 \}.$$

Dann heißt $\mathbf{n}(x)$ die **maßtheoretische äußere Normale** von A in x, wenn gilt

$$\lim_{r \to 0+} \frac{H^n(B^+(x,r) \cap A)}{H^n(B^+(x,r))} = 0 \text{ und } \lim_{r \to 0+} \frac{H^n(B^-(x,r) \cap A)}{H^n(B^-(x,r))} = 1. \tag{8}$$

Die Menge aller Punkte von $\overline{\partial} A$, in denen die maßtheoretische äußere Normale existiert, wird mit $\partial^* A$ bezeichnet.
Falls $H^{n-1}(\overline{\partial} A) < \infty$ ist, heißt A eine Menge **endlichen Perimeters**. Für Mengen endlichen Perimeters gilt

$$H^{n-1}(\overline{\partial} A \backslash \partial^* A) = 0. \tag{9}$$

Falls A eine Menge endlichen Perimeters ist, gibt es abzählbar viele C^1-Mannigfaltigkeiten M_i mit

$$H^{n-1}(\partial^* A \backslash \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i) = 0. \tag{10}$$

Der Rand von A ist also bis auf eine H^{n-1}-Nullmenge glatt. Die Mengen endlichen Perimeters bilden außerdem eine σ-Algebra, die diejenige der Borelmengen enthält. Die Mengen endlichen Perimeters erfüllen also alle oben genannten Bedingungen an die Teile eines Körpers.

Falls A eine Menge endlichen Perimeters und $\mathbf{v} : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld ist, gilt eine Verallgemeinerung des Gauß'schen Integralsatzes:

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{v} dH^n = \int_{\partial^* A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1}. \tag{11}$$

Sei B eine offene, beschränkte Menge endlichen Perimeters. Bezeichne mit

$$\mathcal{P} := \{P \subset B : H^{n-1}(\overline{\partial} P) < \infty\} \tag{12}$$

das System aller Teile von B. Wie wir gesehen haben, besitzt $\mathcal{P}$ die für eine axiomatische Behandlung der klassischen Mechanik erforderliche Struktur.

Unter einer **Materialfläche** S verstehen wir ein Paar $(\hat{S}, \mathbf{n})$ mit $\hat{S} \subset \overline{\partial} P$ für ein $P \in \mathcal{P}$ und $\mathbf{n} = \mathbf{n}_P$ H^{n-1}-f.ü. auf $\hat{S}$. Materialflächen sind also Verallgemeinerungen orientierter Flächenstücke und haben die oben geforderte Struktur. Zwei Flächenstücke $S_i = (\hat{S}_i, \mathbf{n}_i)$ heißen **kompatibel**, falls es ein $P \in \mathcal{P}$ gibt mit $\hat{S}_i \subset \overline{\partial} P$ und $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_P$ H^{n-1}-f.ü. auf $\hat{S}_i, i = 1, 2$. Die Menge der Materialflächen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$.

Die Forderungen an die inneren Kräfte fassen wir in der folgenden Definition zusammen.

3.1 Definition: **(1)** Ein **Cauchy-Fluss** ist eine Abbildung $Q : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf disjunkten, kompatiblen Materialflächen additiv ist und die Lipschitz-stetig bzgl. des $n-1$ dimensionalen Hausdorffmaßes ist, d.h.

$$Q(S_1 \cup S_2) = Q(S_1) + Q(S_2) \quad S_1, S_2 \text{ kompatibel, } H^{n-1}(S_1 \cap S_2) = 0, \tag{13}$$

$$|Q(S)| \leq c H^{n-1}(S) \quad \forall S = \mathcal{S}. \tag{14}$$

(2) Ein Cauchy-Fluss Q erfüllt eine **schwache Erhaltungsgleichung**, falls gilt

$$|Q(\overline{\partial} P)| \leq c H^n(P) \qquad \forall P \in \mathcal{P}. \tag{15}$$

□

Definition 3.1 konkretisiert die allgemeinen Bemerkungen zu den inneren Kräften. Die Bedingungen (14) und (15) sind nicht die schwächst möglichen. Aus Bedingung (13) und (14) und dem Satz von Radon-Nikodym folgt unmittelbar:

3.2 Lemma: *Sei Q ein Cauchy-Fluss. Zu jedem $S \in \mathcal{S}$ gibt es dann eine Funktion $q_S \in L^1(S, H^{n-1})$ mit*

$$Q(S') = \int_{S'} q_S dH^{n-1} \tag{16}$$

für jede zu S kompatible Materialfläche S' mit $\hat{S}' \subset \hat{S}$.

Im Lichte von Lemma 3.2 besehen, besagt der Satz von Cauchy

$$q_S = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_S$$

für alle $S \in \mathcal{S}$ mit einer universellen, d.h. von $S \in \mathcal{S}$ unabhängigen Funktion $\mathbf{q}$.

3.3 Definition: Sei $S = (\hat{S}, \mathbf{n}) \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$-S := (\hat{S}, -\mathbf{n}). \tag{17}$$

□

Aus der Definition von $\mathcal{S}$ und den Eigenschaften von $\mathcal{P}$ folgt, dass mit S auch $-S$ aus $\mathcal{S}$ ist.

3.4 Lemma: *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Für jedes $S \in \mathcal{S}$ gilt dann*

$$Q(S) + Q(-S) = 0 \tag{18}$$

bzw. $q_{-S} = -q_S$, wobei q_S und q_{-S} die gemäß Lemma 3.2 existierenden Dichten sind.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $\hat{S}$ eine C^1-Mannigfaltigkeit ist ($S = (\hat{S}, \mathbf{n})$). Dann sind für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die folgenden Mengen wohl definiert und in $\mathcal{P}$ enthalten:

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^\pm :=& \{x = y \pm t\mathbf{n}(y) : y \in \hat{S}, 0 < t < \varepsilon\} \\ D_\varepsilon :=& \{x = y + t\mathbf{n}(y) : y \in \hat{S}, |t| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$S \cup (-S) \cup \overline{\partial} D_\varepsilon \cup N_\varepsilon = \overline{\partial} D_\varepsilon^+ \cup \overline{\partial} D_\varepsilon^-$$

mit $H^{n-1}(N_\varepsilon) = 0$. Aus (13) – (15) folgt daher

$$\begin{aligned} |Q(S) + Q(-S)| =& |Q(\overline{\partial} D_\varepsilon^+) + Q(\overline{\partial} D_\varepsilon^-) - Q(\overline{\partial} D_\varepsilon)| \\ \leq& |Q(\overline{\partial} D_\varepsilon^+)| + |Q(\overline{\partial} D_\varepsilon^-)| + |Q(\overline{\partial} D_\varepsilon)| \\ \leq& 2cH^n(D_\varepsilon) \\ \to& 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für glatte Flächenstücke. Da jedes $S \in \mathcal{S}$ in $\overline{\partial} P$ für ein $P \in \mathcal{P}$ enthalten ist, ist $\hat{S}$ bis auf eine H^{n-1}-Nullmenge die Vereinigung von abzählbar vielen C^1-Mannigfaltigkeiten. Damit folgt die Behauptung aus dem soeben Bewiesenen und (13), (14). □

3.5 Lemma: *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Dann gibt es eine Funktion $b \in L^1(B, H^n)$ mit*

$$Q(\overline{\partial} P) = \int_P b dH^n \qquad \text{für alle} \quad P \in \mathcal{P}. \tag{19}$$

Beweis: Definiere die Abbildung $M : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$M(P) := Q(\overline{\partial} P) \qquad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Aus Lemma 3.4 folgt, dass M auf $\mathcal{P}$ additiv ist. Aus (15) folgt die absolute Stetigkeit von M bzgl. H^n. Damit ergibt sich die Behauptung aus dem Satz von Radon-Nikodym. □

3.6 Satz: *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Dann gibt es ein $\mathbf{q} \in L^1(B, H^n)^n$, dessen Divergenz im distributionellen Sinn in $L^1(B, H^n)$ ist, mit*

$$\int_{\overline{\partial} P} v dQ = \int_P \operatorname{div}(v\mathbf{q}) dH^n \tag{20}$$

für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle $v \in C^{0,1}(B)$. Außerdem gilt H^n-f.ü. die lokale Form des Erhaltungssatzes

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = b, \tag{21}$$

wobei b die Funktion aus Lemma 3.5 ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass es ein $\mathbf{q} \in L^1(B; H^n)^n$ derart gibt, dass für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle stückweise affinen Funktionen v die Identität

$$\int_{\overline{\partial} P} v dQ = \int_P b v dH^n + \int_P \mathbf{q} \cdot \nabla v dH^n \tag{22}$$

gilt. Sei dazu $P \in \mathcal{P}$ beliebig. Wegen Lemma 3.5 gilt (22) für alle konstanten Funktionen. Bezeichen mit $x_i^* : x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow x_i$ die i-te Koordinatenfunktion. Definiere folgende Mengen

$$\begin{aligned} R(t) :=& \{x \in \mathbb{R}^n : x_i^*(x) \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ R_0(t) :=& \overset{\circ}{R}(t), \\ N(t) :=& \partial R(t), \\ P(t) :=& P \cap R(t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\overline{\partial} P(t) = [\overline{\partial} P \cap R_0(t)] \cup [P \cap N(t)] \cup M(t) \tag{23}$$

mit $H^{n-1}(M(t)) = 0$. Setze

$$\begin{aligned}
F(t) :=& Q(\overline{\partial} P \cap R_0(t)),\\
G(t) :=& Q(P \cap N(t)),\\
H(t) :=& \int_{P(t)} b dH^n.
\end{aligned}$$

Da $P \subset B$ beschränkt ist, hat die Funktion G einen kompakten Träger. Aus (14), (23) und Lemma 3.5 folgt

$$\begin{aligned}
H(t) =& Q(\overline{\partial} P(t))\\
=& Q(\overline{\partial} P \cap R_0(t)) + Q(P \cap N(t))\\
=& F(t) + G(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Wenden wir Satz 2.5.18 aus H. Federer: Geometric Measure Theory auf die Funktionen x_i^* und $f := id$ und die Maße

$$\mu(A) := Q(\overline{\partial} P \cap A)\ ,\ \nu(A) := \int_{P \cap A} b dH^n$$

an, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} t dF(t) &= \int_{\overline{\partial} P} x_i^* dQ,\\
\int_{\mathbb{R}} t dH(t) &= \int_P x_i^* b dH^n.
\end{aligned} \tag{25}$$

Da G kompakten Träger hat, folgt aus (24) und (25)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\overline{\partial} P} x_i^* dQ - \int_P x_i^* b dH^n \right|\\
=& \left| \int_{\mathbb{R}} t d(F - H)(t) \right|\\
=& \left| - \int_{\mathbb{R}} t dG(t) \right|\\
=& \left| \int_{\mathbb{R}} G(t) dt \right|\\
\leq& \int_{\mathbb{R}} |Q(P \cap N(t))| dt\\
\leq& c \int_{\mathbb{R}} H^{n-1}(P \cap N(t)) dt \quad \text{wegen (14)}\\
=& c H^n(P),
\end{aligned} \tag{26}$$

wobei die letzte Identität aus der co-area Formel folgt (sog. slicing). Definiere die Abbildung $\mu_i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mu_i(P) := \int_{\overline{\partial} P} x_i^* dQ - \int_P x_i^* b dH^n.$$

Wegen Lemma 3.4 ist μ_i additiv. Wegen (26) ist μ_i absolut stetig bzgl. H^n. Aus dem Satz von Radon-Nikodym folgt die Existenz eines $q_i \in L^1(B, H^n)$ mit

$$\int_{\overline{\partial} P} x_i^* dQ - \int_P x_i^* b dH^n = \int_P q_i dH^n \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Definiere $\mathbf{q} := (q_1, ..., q_n)$. Wegen $\nabla x_i^* = (0, ..., 1, ..., 0)$ folgt hieraus (22) für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle affinen Funktionen.
Die rechte Seite von (22) ist additiv auf $\mathcal{P}$. Wegen Lemma 3.4 gilt dasselbe für die linke Seite von (22). Daher gilt (22) für alle stückweise affinen Funktionen.
Sei nun $v \in C^{0,1}(B)$ und $P \in \mathcal{P}$. Gemäß I. Ekeland – R. Temam: Analyse convexe et problèmes variationnels gibt es eine Folge $(v_m)_{m \in \mathbf{N}}$ stückweiser affiner Funktionen mit

$$\begin{aligned} v_m &\longrightarrow v \quad \text{gleichmäßig auf } B \\ \nabla v_m &\longrightarrow \nabla v \quad H^n\text{-f.ü. auf } B \\ |\nabla v_m| &\leq c \quad \forall m. \end{aligned}$$

Wegen (22) gilt für jedes m

$$\int_P \mathbf{q} \cdot \nabla v_m dH^n = \int_{\overline{\partial} P} v_m dQ - \int_P v_m b dH^n. \tag{27}$$

Wegen $v_m \longrightarrow v$ gleichmäßig in B konvergiert die rechte Seite von (27) gegen $\int_{\overline{\partial} P} v dQ - \int_P v b dH^n$. Wegen $|\nabla v_m| \leq c$ für alle m konvergiert die linke Seite von (27) gegen $\int_P \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} dH^n$ für ein $\mathbf{w} \in L^\infty(B, H^n)^n$. Wegen $\nabla v_m \longrightarrow \nabla v$ H^n-f.ü. in B ist $\mathbf{w} = \nabla v$. Also gilt (22) für alle $v \in C^{0,1}(B)$.
Sei nun speziell $v \in C_0^\infty(B)$. Dann folgt aus (22)

$$0 = \int_{\overline{\partial} B} v dQ = \int_B v b dH^n + \int_B \mathbf{q} \cdot \nabla v dH^n.$$

Also ist $b = \operatorname{div} \mathbf{q}$ im distributionellen Sinn.
Wegen Lemma 3.5 folgt $\operatorname{div} \mathbf{q} \in L^1(B, H^n)$ und Gleichung (21). Hieraus und aus Gleichung (22) folgt Gleichung (20) für alle $v \in C_0^\infty(B)$ wegen

$$\operatorname{div}(v\mathbf{q}) = v \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla v.$$

Da $C_0^\infty(B)$ dicht ist in $C^{0,1}(B)$ beweist dies die Behauptung. □

3.7 Bemerkung: Falls $\mathbf{q}$ Lipschitz-stetig ist, folgt aus (20) mit $v = 1$ und (11) die Identität

$$Q(\overline{\partial} P) = \int_P \operatorname{div} \mathbf{q} dH^n = \int_{\partial^* P} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1} \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Dies ist genau die Aussage des Satzes von Cauchy. Ein wesentliches Ergebnis wird sein, dass diese Aussage schon unter wesentlich schwächeren Annahmen an $\mathbf{q}$ aus (20) folgt. □

3.8 Lemma: *Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften*

$$\begin{aligned}\varphi \geq& 0,\\ \varphi(x) =& \varphi(|x|),\\ \mathrm{supp}\varphi \subset& B(0,1),\\ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y_1, ..., y_{n-1}, 0) dH^{n-1} =& 1.\end{aligned}$$

Dann gelten für $P \in \mathcal{P}$ und H^{n-1}-f.a. $x \in \overline{\partial} P$ die Beziehungen

$$\lim_{r\to 0+} r^{-n+1} \int_{\overline{\partial} P} \varphi(r^{-1}(x-y)) dH^{n-1}(y) = 1, \tag{28}$$

$$\lim_{r\to 0+} r^{-n} \int_P \nabla\varphi(r^{-1}(x-y)) dH^n(y) = \mathbf{n}_P(x). \tag{29}$$

Beweis: Wegen der Radialsymmetrie von φ gilt die vierte Eigenschaft für alle Ebenen $\mathcal{E}$. Sei nun $P \in \mathcal{P}$ und

$$\hat{\partial} P := \{x \in \overline{\partial} P : \overline{\partial} P \,\text{ist in einer Umgebung von}\, x \,\text{eine}\, C^1\text{-Mannigfaltigkeit}\}.$$

Wegen (10) ist $H^{n-1}(\partial P \backslash \hat{\partial} P) = 0$. Sei $x_0 \in \hat{\partial} P$ und T die Tangentialebene an $\hat{\partial} P$ in x_0. Dann ist

$$\begin{aligned} & r^{-n+1} \int_T \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^{n-1}(y)\\ =& r^{-n+1} \int_{T\cap B(x_0,r)} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^{n-1}(y)\\ =& \int_{(x_0+T)\cap B(0,1)} \varphi(z) dH^{n-1}(z) \quad z := r^{-1}(x_0 - y)\\ =& \int_{x_0+T} \varphi(z) dH^{n-1}(z)\\ =& 1 \end{aligned} \tag{30}$$

und

$$\begin{aligned} & r^{-n+1} \int_{\overline{\partial} P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^{n-1}(y) - r^{-n+1} \int_T \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^{n-1}(y)\\ =& r^{-n+1} \int_{\overline{\partial} P\cap B(x_0,r)} [\varphi(r^{-1}(x_0 - y)) - \varphi(x_0)] dH^{n-1}(y)\\ & - r^{-n+1} \int_{T\cap B(x_0,r)} [\varphi(r^{-1}(x_0 - y)) - \varphi(x_0)] dH^{n-1}(y)\\ & + r^{-n+1}\varphi(x_0) \left\{ \int_{\overline{\partial} P\cap B(x_0,r)} dH^{n-1}(y) - \int_{T\cap B(x_0,r)} dH^{n-1}(y) \right\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Die ersten beiden Summanden von (31) streben wegen der Stetigkeit von φ für $r \to 0$ gegen Null. Das gleiche gilt für den dritten Summanden, da $\overline{\partial} P$ in einer Umgebung von x_0 eine C^1-Mannigfaltigkeit und T die Tangentialebene an $\overline{\partial} P$ in x_0 ist. Wegen (30) ist damit (28) für alle $x_0 \in \hat{\partial} P$ bewiesen.
Sei weiter $x_0 \in \hat{\partial} P$. Wegen $\hat{\partial} P \subset \partial^* P$ folgt aus (28) und dem Satz von Gauß, sowie wegen der Stetigkeit von $\mathbf{n}_p$ in x_0:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_p(x_0) &= \lim_{r \to 0+} r^{-n+1} \int_{\overline{\partial} P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \mathbf{n}_P(x_0) dH^{n-1}(y) \\
&= \lim_{r \to 0+} r^{-n+1} \int_{\overline{\partial} P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \mathbf{n}_P(y) dH^{n-1}(y) \\
&= \lim_{r \to 0+} r^{-n+1} \int_{P} \nabla_y \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^{n-1}(y) \\
&= \lim_{r \to 0+} r^{-n} \int_{P} \nabla \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^{n-1}(y).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (29). □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Satz von Cauchy beweisen.

3.9 Satz: (Satz von Cauchy) *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Dann gibt es eine H^n-Nullmenge N^* von B, derart dass für jedes $S = (\hat{S}, \mathbf{n}) \in \mathcal{S}$ mit $H^{n-1}(\hat{S} \cap N^*) = 0$ die Identität*

$$Q(S) = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1} \tag{32}$$

gilt. Dabei ist $\mathbf{q}$ das Vektorfeld aus Satz 3.6. Insbesondere ist H^{n-1}-f.ü. auf $\hat{S}$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_S, \tag{33}$$

wobei q_S die Dichte aus Lemma 3.2 ist.

Beweis: Sei N^* das Komplement des Durchschnittes der Menge der Lebesgue-Punkte von b mit der Menge der Lebesgue-Punkte von $\mathbf{q}$. Dann ist $H^n(N^*) = 0$. Sei $S = (\hat{S}, \mathbf{n}) \in \mathcal{S}$ mit $H^{n-1}(\hat{S} \cap N^*) = 0$ und $P \in \mathcal{P}$ mit $\hat{S} \subset \overline{\partial} P$. Sei φ die Funktion aus Lemma 3.8 und

$$v_{r,x_0}(y) := r^{-n+1} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \quad \forall x_0 \in \overline{\partial} P \backslash N^*.$$

Für $x_0 \in \overline{\partial} P \backslash N^*$ gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \to 0+} r^{-n+1} \int_P \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) b(y) dH^n(y) \\
=&\lim_{r \to 0+} r \int_{(x_0 + rP) \cap B(0,1)} \varphi(z) b(x_0 - rz) dH^n(z) \\
=&0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Sei $q_{\partial P}$ die Dichte aus Lemma 3.2. Weiter sei $x_0 \in \overline{\partial} P \backslash N^*$ ein Lebesgue-Punkt von $q_{\partial P}$. Dann ist

$$\begin{aligned} q_{\partial P}(x_0) &= \lim_{r \to 0+} r^{-n+1} \int_{\overline{\partial} P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) q_{\partial P}(y) dH^{n-1}(y) \\ &= \lim_{r \to 0+} \int_{\overline{\partial} P} v_{r,x_0}(y) q_{\partial P}(y) dH^{n-1}(y). \end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.2 ist

$$\int_{\overline{\partial} P} v_{r,x_0}(y) q_{\partial P}(y) dH^{n-1}(y) = \int_{\overline{\partial} P} v_{r,x_0}(y) dQ(y).$$

Wenden wir Satz 3.6 auf die Funktion v_{r,x_0} an, so folgt hieraus und aus (34), sowie Lemma 3.8:

$$\begin{aligned} &\lim_{r \to 0+} \int_{\overline{\partial} P} v_{r,x_0}(y) dQ(y) \\ =& \lim_{r \to 0+} \left\{ \int_P v_{r,x_0}(y) b(y) dH^n(y) + \int_P \mathbf{q}(y) \cdot \nabla v_{r,x_0}(y) dH^n(y) \right\} \\ =& \lim_{r \to 0+} r^{-n} \int_P \mathbf{q}(y) \cdot \nabla \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^n(y) \\ =& \mathbf{q}(x_0) \cdot \mathbf{n}_P(x_0). \end{aligned}$$

Da auf $\hat{S}$ die Funktionen $q_{\partial P}$ und q_S übereinstimmen, folgt hieraus (33).
Aus Lemma 3.2 ergibt sich schließlich

$$Q(S) = \int_S q_{\partial P} dH^{n-1} = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

3.10 Bemerkung: Falls Q ein Maß mit Werten im $\mathbb{R}^n$ ist, ergibt der Satz von Cauchy angewandt auf die Komponenten von Q die Existenz einer Funktion $\underline{\mathbf{T}} : B \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$Q(S) = \int_S \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1} \quad \forall S \in \mathcal{S}.$$

Ist insbesondere $n = 3$, wird häufig die Drehmomenterhaltung gefordert. Dies bedeutet

$$\lim_{r \to 0+} r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} (y - x_0) \wedge \mathbf{q}_{\partial P}(y) dH^2(y) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P} \tag{35}$$

für die Dichten $\mathbf{q}_{\partial P}$ aus Lemma 3.2 und H^2-f.a. $x_0 \in \overline{\partial} P$. Hieraus folgt dann die Symmetrie des Tensors $\underline{\mathbf{T}}$ H^2-f.ü..

Um dies einzusehen, betrachte einen Lebesque Punkt x_0 von $\underline{\mathbf{T}}$ und ein $P \in \mathcal{P}$, so dass (35) gilt. Wegen Satz 3.9 ist dann

$$\begin{aligned}
&r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} (y-x_0) \wedge \mathbf{q}_{\partial P}(y) dH^2(y) \\
=&r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} (y-x_0) \wedge \underline{\mathbf{T}}(y)\mathbf{n}(y) dH^2(y) \\
=&r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} (y-x_0) \wedge \underline{\mathbf{T}}(x_0)\mathbf{n}(y) dH^2(y) \\
&+ r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} (y-x_0) \wedge [\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)]\mathbf{n}(y) dH^2(y).
\end{aligned}$$

Da x_0 ein Lebesque-Punkt von $\underline{\mathbf{T}}$ ist, ergibt sich für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned}
&\left| r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} (y-x_0) \wedge [\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)]\mathbf{n}(y) dH^2(y) \right| \\
\leq &\sup_{y \in \overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} |\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)| r^{-3} \underbrace{\int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} |y-x_0| dH^2(y)}_{\leq r^3 H^2(S^2)} \\
\leq &\sup_{y \in \overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} |\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)| H^2(S^2) \\
\underset{r \to 0}{\longrightarrow} &0.
\end{aligned}$$

Wähle ein $i \in \{1,2,3\}$ und betrachte die i-te Komponente des ersten Summanden. Dann ergibt sich mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$\begin{aligned}
&r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} \Big[(y-x_0) \wedge \underline{\mathbf{T}}(x_0)\mathbf{n}(y)\Big]_i dH^2(y) \\
=&\sum_{l=1}^{3} r^{-3} \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} \Big\{ (y-x_0)_{i+1} \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2,l} \mathbf{n}(y)_l \\
&\qquad - (y-x_0)_{i+2} \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1,l} \mathbf{n}(y)_l \Big\} dH^2(y) \\
=&\sum_{l=1}^{3} \Big\{ \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2,l} r^{-3} \int_{P \cap B(x_0,r)} \frac{\partial}{\partial x_l} (y-x_0)_{i+1} dH^3(y) \\
&\qquad - \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1,l} r^{-3} \int_{P \cap B(x_0,r)} \frac{\partial}{\partial x_l} (y-x_0)_{i+2} dH^3(y) \Big\} \\
=&\left[\underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2,i+1} - \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1,i+2}\right] r^{-3} H^3(P \cap B(x_0,r))
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&r^{-3} \left| \int_{\overline{\partial} P \cap B(x_0,r)} \Big[(y-x_0) \wedge \underline{\mathbf{T}}(x_0)\mathbf{n}(y)\Big]_i dH^2(y) \right| \\
=&\left|\underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2,i+1} - \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1,i+2}\right| H^3(B(x_0,1) \cap rP).
\end{aligned}$$

Dabei sind die Indizes $i+1$ und $i+2$ modulo 3 zu interpretieren, d.h. $4 \leftrightarrow 1$ und $5 \leftrightarrow 2$.
Aus diesen Abschätzungen und (35) folgt die Symmetrie von $\underline{\mathbf{T}}$ im Punkt x_0. $\square$

I.4 Notationen und Hilfsergebnisse

Wir stellen zunächst einige Bezeichnungen zusammen, die wir im folgenden immer wieder benutzen werden:

Ω offene, beschränkte, zusammenhängende Menge in $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$;

Γ Rand von Ω als Lipschitz-stetig vorausgesetzt;

$\mathbf{n}$ äußeres Einheitsnormalenfeld zu Ω;

$p, q, r, \ldots$ Skalare: Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$;

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ Vektorfelder: Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$;

$\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{T}}, \ldots$ Tensoren: Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^{n\times n}$;

$\underline{\mathbf{I}}$ Einheitstensor;

∇ Gradient;

div Divergenz;

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i};$$

$$\operatorname{div}\underline{\mathbf{T}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{\mathbf{T}}_{ij}}{\partial x_i}\right)_{1\le j\le n};$$

$\Delta = \operatorname{div}\nabla$ Laplace Operator;

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n} \quad \text{Deformationstensor;}$$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ Skalarprodukt;

$\underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{T}}$ dyadisches Produkt (Skalarprodukt von Tensoren);

$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = (\mathbf{u}_i\mathbf{v}_j)_{1\le i,j\le n}$ Tensorprodukt.

Aus der Produktregel für die Differentiation ergeben sich folgende Formeln, wobei $\underline{\mathbf{T}}$ als symmetrisch vorausgesetzt ist:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(p\mathbf{u}) =& \nabla p\cdot\mathbf{u} + p\operatorname{div}\mathbf{u},\\
\operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{u}) =& (\operatorname{div}\underline{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}),\\
\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) =& (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Dementsprechend folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma p\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} &= \int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{u} + \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},\\
\int_\Gamma \mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{u} &= \int_\Omega (\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{u} + \int_\Omega \underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}),\\
\int_\Gamma \mathbf{n}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) &= \int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{u})\mathbf{v} + \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Wir werden im folgenden immer wieder Sobolev-Räume und ihre Eigenschaften benutzen. Die wichtigsten Notationen und Ergebnisse stellen wir nun zusammen. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf R. A. Adams: Sobolev Spaces bzw. die Vorlesung "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen II" (im folgenden abgekürzt als **VFEM**).
Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ und $\varphi, \psi \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, heißt ψ die α-te schwache Ableitung von φ, kurz $\psi = D^\alpha\varphi$, wenn für alle $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \psi\rho = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \varphi D^\alpha\rho.$$

Die Sobolev-Räume und ihre Normen sind dann definiert durch

$$\begin{aligned}
W^{k,p}(\Omega) :=& \{\varphi \in L^p(\Omega) : D^\alpha\varphi \in L^p(\Omega)\ \forall|\alpha| \le k\},\\
|\varphi|_{k,p} :=& \left\{\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{1/p},\\
\|\varphi\|_{k,p} :=& \left\{\sum_{l=0}^{k} |\varphi|^p_{l,p}\right\}^{1/p} = \left\{\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{1/p},\\
H^k(\Omega) :=& W^{k,2}(\Omega),\\
|.|_k :=& |.|_{k,2},\\
\|.\|_k :=& \|.\|_{k,2},\\
W_0^{1,p}(\Omega) :=& \{\varphi \in W^{1,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\},\\
H_0^1(\Omega) :=& W_0^{1,2}(\Omega),\\
L_0^2(\Omega) :=& \{p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0\}.
\end{aligned}$$

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)^n := W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $W^{k,p}(\Omega)^{n\times n} := W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ werden mit der kanonischen Produktnorm versehen; analog die Räume $H^k(\Omega)^n$ und $H^k(\Omega)^{n\times n}$. Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ sind Banach Räume; die Räume $H^k(\Omega)$ sind Hilbert Räume. $C^\infty(\Omega)$ ist jeweils eine dichte Teilmenge. $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ sind die Vervollständigungen von $C_0^\infty(\Omega)$ in der jeweiligen Norm.

Es gelten folgende **Einbettungssätze**

für $n = 2$: $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ $\forall 1 \leq p < \infty$,

für $n = 3$: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ $\forall 1 \leq p \leq 6$; die Einbettung ist kompakt für $1 \leq p < 6$.

Des weiteren gelten folgende Ungleichungen

Friedrich'sche Ungleichung $\|\varphi\|_0 \leq c_\Omega |\varphi|_1 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$,

Poincaré'sche Ungleichung $\|\varphi\|_0 \leq c'_\Omega |\varphi|_1 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

Die Konstanten c_Ω und c'_Ω hängen jeweils nur vom Durchmesser von Ω ab.
$H^{-1}(\Omega)$ ist der Dualraum von $H_0^1(\Omega)$; die entsprechende duale Paarung wird mit $\langle ., . \rangle$ bezeichnet. Dabei wird $L^2(\Omega)$ mit seinem Dualraum identifiziert. Daher ist

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

und

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi\psi \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega),\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Die Spurabbildung $u \longrightarrow \gamma u := u_{|\Gamma}$ ist ein stetiger linearer Operator von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Gamma)$. Das Bild dieses Operators wird mit $H^{1/2}(\Gamma)$ bezeichnet und mit der Graphennorm versehen. Diese wird mit $\|.\|_{1/2,\Gamma}$ bezeichnet. Es ist

$$\|\psi\|_{1/2,\Gamma} = \inf\{\|\varphi\|_1 : \varphi \in H^1(\Omega),\ \gamma\varphi = \psi\}.$$

$H^{-1}(\Omega)^n$, $H^{-1}(\Omega)^{n\times n}$, $H^{1/2}(\Gamma)^n$, $H^{1/2}(\Gamma)^{n\times n}$ sind die kanonischen Produkträume und werden mit den entsprechenden Produktnormen versehen.

Abschließend stellen wir noch einige Bezeichnungen und Eigenschaften für Finite Element Räume zusammen, die wir im folgenden häufig nutzen werden. Für Details verweisen wir auf §§ 6, 7 von VFEM.
$\mathcal{T}_h$, $h > 0$, bezeichnet stets eine Familie von Unterteilungen von Ω mit folgenden Eigenschaften:

(1) **(Affine Äquivalenz)** Jedes $K \in \mathcal{T}_h$ ist ein Dreieck oder Parallelogramm, falls $n = 2$, oder ein Tetraeder oder Parallelepiped, falls $n = 3$.

(2) **(Zulässigkeit)** Je zwei Elemente von $\mathcal{T}_h$ sind entweder disjunkt oder haben einen Eckpunkt oder eine ganze Kante oder – falls $n = 3$ ist – eine ganze Seitenfläche gemeinsam.

(3) **(Regularität)** Das Verhältnis h_K/ρ_K ist unabhängig von $K \in \mathcal{T}_h$ und $h > 0$ durch eine Konstante $c_\mathcal{T}$ nach oben beschränkt. Dabei ist h_K der Durchmesser von K und ρ_K der Durchmesser des größten in K eingeschriebenen Balles.

Mit der Abkürzung $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ definieren wir die Polynomräume

$$R_k(K) := \begin{cases} \operatorname{span}\{x^\alpha : |\alpha| \leq k\} & \text{, falls } K \text{ ein Dreieck oder Tetraeder,} \\ \operatorname{span}\{x^\alpha : \max\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i \leq k\} & \text{, falls } K \text{ ein Parallelogramm oder} \\ & \quad \text{Parallelepiped.} \end{cases}$$

Für die Finite Element Räume verwenden wir folgende Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
S_h^{k,-1} :=& \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi_{|K} \in R_k(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad , k \in \mathbb{N}, \\
S_h^{k,0} :=& S_h^{k,-1} \cap C(\overline{\Omega}) \quad , k \in \mathbb{N}^*, \\
S_{h,0}^{k,0} :=& S_h^{k,0} \cap H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in S_h^{k,0} : \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\} \quad , k \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Mit $h := \max\limits_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ gelten folgende Approximationseigenschaften:

$$\begin{aligned}
\inf_{\varphi_h \in S_h^{k,-1}} \|\varphi - \varphi_h\|_0 \leq& c h^{k+1} |\varphi|_{k+1} \quad \forall \varphi \in H^{k+1}(\Omega)\,, k \in \mathbb{N}, \\
\inf_{\varphi_h \in S_h^{k,0}} |\varphi - \varphi_h|_j \leq& c h^{k+1-j} |\varphi|_{k+1} \quad \forall \varphi \in H^{k+1}(\Omega)\,, j \in \{0,1\}\,, k \in \mathbb{N}^*, \\
\inf_{\varphi_h \in S_{h,0}^{k,0}} |\varphi - \varphi_h|_j \leq& c h^{k+1-j} |\varphi|_{k+1} \quad \forall \varphi \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\,, j \in \{0,1\}\,, k \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir häufig den modifizierten Clément'schen Interpolationsoperator aus § 10 VFEM benutzen. Im Gegensatz zum nodalen Interpolationsoperator ist er auch für L^1-Funktionen definiert und erlaubt lokale, elementweise Fehlerabschätzungen. Für seine Definition bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_h$ die Menge aller Elementeckpunkte, genannt **Knoten**. $\mathcal{N}_{h,\Omega}$ ist die Menge aller inneren Knoten, d.h. der Knoten in Ω. Für $x \in \mathcal{N}_h$ bezeichnet ω_x die Vereinigung aller Elemente, die x als Eckpunkt haben, und λ_x die nodale Basisfunktion zu x, d.h. diejenige Funktion in $S_h^{1,0}$, die in x den Wert 1 annimmt und die in allen anderen Knoten verschwindet. Es ist $\omega_x = \text{supp}\lambda_x$. Schließlich bezeichne $\pi_x : L^1(\omega_x) \longrightarrow \mathbb{R}$ die L^2-Projektion. Dann ist der Interpolationsoperator $R_h : L^1(\Omega) \longrightarrow S_{h,0}^{1,0}$ definiert durch

$$R_h \varphi := \sum_{x \in \mathcal{N}_{h,\Omega}} \lambda_x \pi_x \varphi.$$

Für jede Funktion $\varphi \in H^1(\Omega)$ und jedes Element $K \in \mathcal{T}_h$ gelten die folgenden lokalen Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
\|\varphi - R_h\varphi\|_{L^2(K)} \leq& c_1 h_K \|\varphi\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\
\|\varphi - R_h\varphi\|_{L^2(\partial K)} \leq& c_2 h_K^{1/2} \|\varphi\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{\omega}_K$ die Vereinigung aller Elemente, die einen nicht leeren Durchschnitt mit K haben. Die Konstanten c_1 und c_2 hängen nur von der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ aus der Regularitätsbedingung ab.

II Die Stokes Gleichungen

II.1 Heuristische Vorüberlegungen

Wir betrachten die Stokes Gleichungen mit homogenen Dirichlet Randbedingungen in einem beschränkten, zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, mit Lipschitz Rand Γ:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir stellen uns die Frage nach einer geeigneten schwachen Formulierung von (1) und deren eindeutiger Lösbarkeit. Zunächst ist offensichtlich, dass der Druck p höchstens bis auf eine additive Konstante eindeutig sein kann. Diese Konstante wollen wir durch die Forderung

$$\int_\Omega p = 0$$

festlegen.

Offensichtlich ist die Massengleichung, d.h. die zweite Gleichung in (1), äquivalent zu

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

Da wegen des Gauß'schen Integralsatzes

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$$

gilt, ist die Massengleichung sogar äquivalent zu

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Multipliziere nun die Impulsgleichung, d.h. die erste Gleichung in (1), mit $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n$, integriere über Ω und wende den Gauß'schen Integralsatz an. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \int_\Omega \{-\Delta \mathbf{u} + \nabla p\} \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_\Omega \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v}\}. \end{aligned}$$

Also ist jede klassische Lösung $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^n \cap C_0(\Omega)^n$, $p \in C^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ von (1) eine Lösung des folgenden Variationsproblems

$$\begin{gathered} \text{Finde } \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n,\ p \in L_0^2(\Omega), \text{ so dass} \\ \begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad && \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \end{gathered} \tag{2}$$

Umgekehrt ist jede hinreichend glatte Lösung $\mathbf{u},\ p$ von (2) auch eine klassische Lösung von (1). Mithin ist (2) ein guter Kandidat für eine schwache Formulierung der Stokes Gleichungen (1). Entsprechend stellt sich die Frage, ob (2) eindeutig lösbar ist.
Da $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, L_0^2(\Omega))$ ist, ist

$$\begin{aligned} V :=& \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ f.ü. in } \Omega\} \\ =& \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \ \forall q \in L_0^2(\Omega)\} \end{aligned} \tag{3}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)^n$ und damit ein Banach Raum mit der Norm $\|.\|_1$. Offensichtlich gilt für jede Lösung $\mathbf{u},\ p$ von (2) $\mathbf{u} \in V$. Betrachte daher das Variationsproblem

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u} \in V, \text{ so dass} \\ &\int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \tag{4}$$

Dann ist für jede Lösung $\mathbf{u},\ p$ von (2) $\mathbf{u}$ auch eine Lösung von (4). Allerdings ist in (4) der Druck p eliminiert, und es stellen sich zwei Fragen:

(1) Besitzt (4) eine eindeutige Lösung?

(2) Falls $\mathbf{u}$ eine Lösung von (4) ist, gibt es dann ein eindeutiges $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass $\mathbf{u},\ p$ eine Lösung von (2) ist?

Die erste Frage können wir leicht positiv beantworten. Aus der Friedrich'schen Ungleichung folgt nämlich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_1 =& \{\|\mathbf{u}\|_0^2 + |\mathbf{u}|_1^2\}^{1/2} \\ \leq& \{1 + c_\Omega^2\}^{1/2} |\mathbf{u}|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in V \subset H_0^1(\Omega)^n. \end{aligned}$$

Daher ist die Bilinearform

$$\mathbf{u},\ \mathbf{v} \longrightarrow \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

auf V stetig und koerziv, so dass aus dem Satz von Lax-Milgram (Satz 2.1 VFEM) sofort die eindeutige Lösbarkeit von (4) folgt.
Die zweite Frage lässt sich aber nicht so leicht beantworten. Dies wird im wesentlichen der Inhalt der folgenden beiden Abschnitte sein.

Unsere bisherigen Überlegungen zeigen, dass das Problem (4) durchaus ein Kandidat für eine schwache Formulierung der Stokes Gleichungen (1) ist, sofern wir uns nur für die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ interessieren. Wir könnten daher versuchen, für die numerische Lösung die Schwierigkeit mit dem Druck zu umgehen, indem wir direkt das Problem (4) durch die Konstruktion von Finite Element Räumen $V_h \subset V$ approximieren. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass dies nicht so einfach ist.
Betrachte das Eineitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$. Unterteile Ω in Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}^*$, und jedes Quadrat durch die Diagonale von der linken oberen in

die rechte untere Ecke in zwei Dreiecke. Setze $V_h := [S_{h,0}^{1,0}]^2 \cap V$, d.h. betrachte divergenzfreie, stetige, lineare Dreieckselemente. Sei $\mathbf{v}_h \in V_h$ und $K_0 \in \mathcal{T}_h$ das Dreieck, das die linke untere Ecke von Ω als Eckpunkt hat. Da alle Eckpunkte von K_0 auf Γ liegen, ist $\mathbf{v}_h = 0$ auf K_0. Betrachte nun das Dreieck K_1 das mit K_0 die Hypotenuse gemeinsam hat. Sei z_1 der Eckpunkt von K_1, der in Ω liegt. Aus $\mathbf{v}_h = 0$ auf Γ, $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$ in K_1 und dem Gauß'schen Integralsatz folgt durch Anwenden der Trapezregel auf die Randintegrale

$$0 = \int_{K_1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h = \int_{\partial K_1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{K_1} = \frac{h}{2} \mathbf{v}_h(z_1) \cdot \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}.$$

Dabei sind $\mathbf{n}_{K_1}$ die äußere Normale an K_1 und $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$. Betrachte als nächstes das Dreieck K_2, das an den linken Rand von Ω und an K_1 grenzt. Dann folgt mit dem gleichen Argument wie oben aus der soeben hergeleiteten Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{K_2} \operatorname{div} \mathbf{v}_h = \int_{\partial K_2} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{K_2} \\ &= \underbrace{\frac{h}{2} \mathbf{v}_h(z_1) \cdot \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}}_{=0} - \frac{h}{2} \mathbf{v}_h(z_1) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{h}{2} \mathbf{v}_h(z_1) \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{v}_h(z_1) \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathbf{v}_h(z_1) \cdot \mathbf{e}_2$ folgt insgesamt

$$\mathbf{v}_h(z_1) = 0.$$

Also ist $\mathbf{v}_h = 0$ auf $K_0 \cup K_1 \cup K_2$. Indem wir obige Argumentation sukzessive fortführen, folgt zunächst, dass $\mathbf{v}_h$ auf allen Quadraten, die an den linken Rand von Ω grenzen, verschwindet, und danach, dass $\mathbf{v}_h$ in ganz Ω verschwindet. Also ist $V_h = \{0\}$ und damit gänzlich ungeeignet für eine Approximation von V.

Wenn wir einmal annehmen, dass wir die Schwierigkeiten mit dem Druck in Problem (2) in den Griff bekommen, können wir versuchen, die soeben gefundene Schwierigkeit zu umschiffen, indem wir direkt Problem (2) diskretisieren. Wir würden dann zwei Finite Element Räume $X_h \subset H_0^1(\Omega)^n$ und $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ wählen und (2) approximieren durch

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u}_h \in X_h,\, p_h \in M_h, \text{ so dass} \\ \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= 0 \qquad\qquad \forall q_h \in M_h. \end{aligned} \tag{5}$$

Aber auch dieser Ansatz stößt auf Schwierigkeiten. Betrachte dazu wieder obige Triangulierung des Einheitsquadrates und wähle

$$X_h := [S_{h,0}^{1,0}]^2 \quad , \quad M_h := S_h^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega).$$

Da für jede Lösung von (2) $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2,\ p \in L_0^2(\Omega)$ gilt, ist diese Wahl bei naiver Vorgehensweise durchaus naheliegend. Indem wir in (5) für q_h die Funktionen $\chi_K - \frac{|K|}{|\Omega|}$, $K \in \mathcal{T}_h$, einsetzen und

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \int_\Gamma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} = 0$$

ausnutzen, erhalten wir

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Da aber $\operatorname{div} \mathbf{u}_h \in S_h^{0,-1}$ ist, folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0.$$

Also gilt für jede Lösung von (5) $\mathbf{u}_h \in [S_{h,0}^{1,0}]^2 \cap V$ und, nach dem zuvor Gezeigten, $\mathbf{u}_h = 0$. Also ist auch (5) mit obiger Wahl der Räume X_h und M_h für die Approximation von (2) denkbar ungeeignet.

In den §§ 4 – 6 werden wir Methoden entwickeln, die eine effiziente Finite Element Approximation erlauben und die die oben geschilderten Klippen umschiffen.

II.2 Ein abstraktes Variationsproblem

Im folgenden bezeichnen $(X, \|.\|_X)$ und $(M, \|.\|_M)$ zwei Hilbert Räume, X' und M' die zugehörigen Dualräume mit den Normen $\|.\|_{X'} := \|.\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})}$ und $\|.\|_{M'} := \|.\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})}$, sowie $\langle .,. \rangle_X$ und $\langle .,. \rangle_M$ die entsprechenden dualen Paarungen. Wir betrachten zwei stetige Bilinearformen

$$\begin{aligned} a :& X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ b :& M \times M \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit den zugehörigen Normen

$$\begin{aligned} \|a\| := \|a\|_{\mathcal{L}^2(X,\mathbb{R})} &= \sup_{u,v \in X \setminus \{0\}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_X \|v\|_X}, \\ \|b\| := \|b\|_{\mathcal{L}^2(X \times M,\mathbb{R})} &= \sup_{\substack{u \in X \setminus \{0\} \\ \lambda \in M \setminus \{0\}}} \frac{b(u,\lambda)}{\|u\|_X \|\lambda\|_M}. \end{aligned}$$

Wir wollen die Lösbarkeit des folgenden abstrakten Variationsproblems untersuchen:

Finde zu gegebenem $l \in X'$ und $\chi \in M'$ ein Paar $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) =& \langle l, v\rangle_X \quad \forall v \in X \\ b(u,\mu) =& \langle \chi, \mu\rangle_M \quad \forall \mu \in M. \end{aligned} \tag{Q}$$

Zur Vereinfachung der Notation definieren wir Operatoren

$$A \in \mathcal{L}(X, X') \ , \ B \in \mathcal{L}(X, M') \ , \ B' \in \mathcal{L}(M, X')$$

durch

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle_X :=& a(u,v) \quad \forall u, v, \in X, \\ \langle Bu, \lambda\rangle_M :=& b(u,\lambda) \quad \forall u \in X, \ \lambda \in M, \\ \langle B'\lambda, v\rangle_X :=& b(v,\lambda) \quad \forall v \in X, \ \lambda \in M. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist B' der duale Operator zu B. Mit diesen Notationen ist Problem (Q) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (u,\lambda) \in X \times M \text{ mit} \\ Au + B'\lambda =& l \\ Bu =& \chi. \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\chi \in M'$ betrachten wir den affinen Raum

$$\begin{aligned} V(\chi) :=& \{u \in X : Bu = \chi\} \\ =& \{u \in X : b(u,\mu) = \langle \chi, \mu\rangle_M \ \forall \mu \in M\} \end{aligned}$$

und setzen

$$V := V(0).$$

Die Polare V° von V ist definiert durch

$$V^\circ := \{g \in X' : \langle g, v\rangle_X = 0 \ \forall v \in V\}.$$

Bezeichnet $(.,.)_X$ das Skalarprodukt von X, so ist das orthogonale Komplement $V^\perp$ von V wie üblich definiert durch

$$V^\perp := \{u \in X : (u,v)_X = 0 \ \forall v \in V\}.$$

Schließlich definieren wir den Operator $\pi \in \mathcal{L}(X', V')$ durch

$$\langle \pi f, v\rangle_X := \langle f, v\rangle_X \quad \forall v \in V.$$

Mit diesen Notationen ordnen wir Problem (Q) ein anderes Problem zu:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } u \in V(\chi) \text{ mit} \\ a(u,v) =& \langle l, v\rangle_X \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{P}$$

In Operatorschreibweise lautet Problem (P):

$$\begin{aligned} &\text{Finde } u \in V(\chi) \text{ mit} \\ \pi Au =& \pi l. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist jede Lösung von (Q) auch eine Lösung von (P). Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass auch die Umkehrung gilt.

2.1 Satz: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(1) *Es gibt eine Konstante $\beta > 0$ mit*

$$\inf_{\lambda \in M \setminus \{0\}} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{b(u,\lambda)}{\|u\|_X \|\lambda\|_M} \geq \beta.$$

(2) *Der Operator B' ist ein Isomorphismus von M auf V° und*

$$\|B'\lambda\|_{X'} \geq \beta \|\lambda\|_M \quad \forall \lambda \in M.$$

(3) *Der Operator B ist ein Isomorphismus von $V^\perp$ auf M' und*

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X \quad \forall v \in V^\perp.$$

Beweis: <u>(1) ⇒ (2)</u>: Wegen der Definition von B' und der Dualnorm folgt aus (1) für jedes $\lambda \in M$

$$\begin{aligned} \|B'\lambda\|_{X'} &= \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle B'\lambda, v\rangle_X}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_X} \\ &\geq \beta \|\lambda\|_M. \end{aligned}$$

Also ist B' injektiv und $R(B') := B'(M)$ abgeschlossen in M'. Aus dem closed range theorem (§ VIII.5 in K. Yosida: Functional Analysis) folgt

$$R(B') = (\ker B)^\circ = V^\circ.$$

<u>(2) ⇒ (1)</u>: Folgt aus

$$\|B'\lambda\|_{X'} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle B'\lambda, v\rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_X}.$$

<u>(2) ⇔ (3)</u>: Wir zeigen zunächst, dass V° und $(V^\perp)'$ isometrisch äquivalent sind. Dazu bezeichnen wir mit $v^\perp$ die orthogonale Projektion von $v \in X$ auf $V^\perp$. Jedem $g \in (V^\perp)'$ ordnen wir ein Element $\tilde{g} \in X'$ durch die Vorschrift

$$\langle \tilde{g}, v\rangle_X = \langle g, v^\perp\rangle_X$$

zu. Offensichtlich ist $\tilde{g} \in V^\circ$ und

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}\|_{X'} &= \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{g}, v\rangle_X}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle g, v^\perp\rangle_X}{\|v\|_X} \\ &\leq \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \|g\|_{(V^\perp)'} \frac{\|v^\perp\|_X}{\|v\|_X} \\ &\leq \|g\|_{(V^\perp)'} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\|g\|_{(V^\perp)'} &= \sup_{v\in V^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle g, v\rangle_X}{\|v\|_X} \\
&= \sup_{v\in V^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle g, v^\perp\rangle_X}{\|v\|_X} \quad \text{wegen } v^\perp = v \ \forall v \in V^\perp \\
&= \sup_{v\in V^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle \tilde{g}, v\rangle_X}{\|v\|_X} \\
&\leq \sup_{v\in X\setminus\{0\}} \frac{\langle \tilde{g}, v\rangle_X}{\|v\|_X} \\
&= \|\tilde{g}\|_{X'}.
\end{aligned}$$

Wegen der isometrischen Äquivalenz von V° und $(V^\perp)'$ ist B ein Isomorphismus von $V^\perp$ auf M' mit $\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(M',V^\perp)} \leq \frac{1}{\beta}$ genau dann, wenn B' ein Isomorphismus von M auf $(V^\perp)' = V^\circ$ ist mit $\|B'^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^\circ,M)} \leq \frac{1}{\beta}$. Dies beweist die Äquivalenz von (2) und (3). □

2.2 Bemerkung: Die inf-sup Bedingung aus Satz 2.1 (1) wurde unabhängig voneinander von I. Babuška und F. Brezzi um 1973 eingeführt. Sie firmiert in der Literatur unter den Bezeichnungen **Brezzi**, **Babuška-Brezzi** oder **inf-sup Bedingung**. □

2.3 Satz: *Problem (Q) besitzt genau dann zu jedem Paar $(l, \chi) \in X' \times M'$ eine eindeutige Lösung $(u, \lambda) \in X \times M$ mit*

$$\|u\|_X + \|\lambda\|_M \leq c\{\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}\},$$

wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind
(i) πA ist ein Isomorphismus von V auf V'.
(ii) b erfüllt die inf-sup Bedingung aus Satz 2.1 (1).

Beweis: "$\Leftarrow$": Wegen Satz 2.1 und (ii) existiert genau ein $u_0 \in V^\perp$ mit

$$Bu_0 = \chi$$

und es ist

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'}.$$

Wegen (i) gibt es genau ein $w \in V$ mit

$$\pi A w = \pi(l - Au_0)$$

und es ist

$$\|w\|_X \leq c_0\|\pi(l - Au_0)\|_{V'} \leq c_0\|l - Au_0\|_{X'}$$

mit

$$c_0 := \|(\pi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V',V)}.$$

Setze $u := u_0 + w$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|u\|_X \leq & \frac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'} + c_0\|l\|_{X'} + c_0\|a\|\|u_0\|_X \\ \leq & \frac{1}{\beta}[1 + c_0\|a\|]\|\chi\|_{M'} + c_0\|l\|_{X'}\end{aligned}$$

und

$$\pi(l - Au) = 0 \iff l - Au \in V^\circ.$$

Wegen Satz 2.1 und (ii) gibt es daher genau ein $\lambda \in M$ mit

$$B'\lambda = l - Au$$

und

$$\begin{aligned}\|\lambda\|_M \leq & \frac{1}{\beta}\|l - Au\|_{X'} \\ \leq & \frac{1}{\beta}[1 + c_0\|a\|]\|l\|_{X'} + \frac{1}{\beta^2}\|a\|[1 + c_0\|a\|]\|\chi\|_{M'}.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist (u, λ) die gesuchte Lösung von (Q).
<u>" $\Rightarrow$ "</u>: Wir zeigen zunächst (ii). Sei dazu $\chi \in M'$. Dann gibt es nach Voraussetzung genau ein Paar $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned}Au + B'\lambda =& 0 \\ Bu =& \chi.\end{aligned}$$

Also ist $R(B) = M'$. Mithin ist B eine stetige, bijektive, lineare Abbildung von $V^\perp$ auf M'. Aus dem Satz über die offene Abbildung (§ II.5 in K. Yosida: loc. cit.) folgt, dass B ein Isomorphismus ist. Damit folgt (ii) aus Satz 2.1.
Sei nun $u \in V$ mit $\pi Au = 0$, d.h. $Au \in V^\circ$. Wegen (ii) und Satz 2.1 gibt es ein eindeutiges $\lambda \in M$ mit

$$B'\lambda = -Au.$$

Also löst (u, λ) das Problem (Q) mit $l = \chi = 0$. Nach Voraussetzung ist somit $u = 0$, d.h. πA ist injektiv. Sei nun $g \in V'$. Wegen des Satzes von Hahn-Banach (§ IV.1 in K. Yosida: loc. cit.) gibt es mindestens ein $l \in X'$ mit $\pi l = g$. Sei nun $(u, \lambda) \in X \times M$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned}Au + B'\lambda =& l \\ Bu =& 0,\end{aligned}$$

Für $v \in V$ folgt

$$\begin{aligned}\langle g, v\rangle_X =& \langle l, v\rangle_X = \langle Au, v\rangle_X + \langle B'\lambda, v\rangle_X \\ =& \langle Au, v\rangle_X + \langle Bv, \lambda\rangle_M \\ =& \langle Au, v\rangle_X\end{aligned}$$

und somit

$$\pi Au = g.$$

Also ist πA auch surjektiv. Damit folgt (i) aus dem Satz über die offene Abbildung (§ II.5 K. Yosida: loc. cit.). □

2.4 Bemerkung: **(1)** Im ersten Teil des Beweises von Satz 2.3 zeigen wir, dass Problem (Q) mindestens eine Lösung hat, wenn πA ein Isomorphismus und $V(\chi) \neq \emptyset$ ist. Die inf-sup Bedingung aus Satz 2.1 (1) garantiert, dass $V(\chi) \neq \emptyset$ ist für jedes $\chi \in M'$.
(2) Satz 2.3 zeigt, dass die Probleme (P) und (Q) äquivalent sind, wenn die inf-sup Bedingung aus Satz 2.1 (1) erfüllt ist. □

2.5 Satz: *Die Bilinearform a sei symmetrisch und koerziv auf V, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ mit*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V.$$

Dann besitzt Problem (Q) genau dann zu jedem Paar $(l, \chi) \in X' \times M'$ eine eindeutige Lösung, wenn b die inf-sup Bedingung erfüllt.

Beweis: Sei $l \in V'$. Da a auf V koerziv und symmetrisch ist, folgt aus dem Satz von Lax-Milgram (Satz 2.1 in VFEM), dass es genau ein $u \in V$ gibt mit

$$a(u, v) = \langle l, v\rangle_X \quad \forall v \in V$$

bzw. äquivalent

$$\pi Au = l.$$

Außerdem ist

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|l\|_{V'}.$$

Also ist πA ein Isomorphismus von V auf V'. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.3. □

2.6 Satz: *Die Bilinearform a sei symmetrisch, koerziv auf V und positiv semi-definit auf X, d.h.*

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

Die Bilinearform b erfülle die inf-sup Bedingung. Definiere das Lagrange-Funktional $\mathcal{L} : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{L}(u,\lambda) := \frac{1}{2}a(u,u) + b(u,\lambda) - \langle l, u\rangle_X - \langle \chi, \lambda\rangle_M.$$

Dann ist das Paar $(u,\lambda) \in X \times M$ genau dann eine Lösung von (Q), wenn (u,λ) ein Sattelpunkt von $\mathcal{L}$ ist, d.h., wenn gilt

$$\mathcal{L}(u,\mu) \leq \mathcal{L}(u,\lambda) \leq \mathcal{L}(v,\lambda) \quad \forall v \in X,\ \mu \in M. \tag{1}$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} D_u\mathcal{L}(u,\lambda)v =& a(u,v) + b(v,\lambda) - \langle l, v\rangle_X \\ D_\lambda\mathcal{L}(u,\lambda)\mu =& b(u,\mu) - \langle \chi, \mu\rangle_M \end{aligned}$$

sind die kritischen Punkte von $\mathcal{L}$ genau die Lösungen von (Q). Wegen Satz 2.5 besitzt (Q) eine eindeutige Lösung. Wir müssen also nur noch die Sattelpunktseigenschaft (1) zeigen.
Die erste Ungleichung von (1) ist äquivalent zu

$$b(u,\mu-\lambda) \leq \langle \chi, \mu-\lambda\rangle_M \quad \forall \mu \in M.$$

Da M ein Vektorraum ist, ist dies äquivalent zur zweiten Gleichung von (Q).
Die zweite Ungleichung von (1) ist äquivalent zu

$$\mathcal{L}(u,\lambda) = \inf_{v\in X} \mathcal{L}(v,\lambda).$$

Da die Bilinearform a auf X positiv semi-definit ist, ist aber jeder kritische Punkt von $v \longrightarrow \mathcal{L}(v,\lambda)$ ein Minimum. Hieraus folgt die zweite Ungleichung von (1). $\square$

II.3 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung der Stokes Gleichungen

Wir betrachten die Stokes Gleichungen mit homogenen Dirichlet Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p =& \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} =& 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} =& 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist Ω wie üblich eine offene, beschränkte, zusammenhängende Menge im $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, mit Lipschitz-Rand Γ. Die schwache Formulierung von (1) ist gemäß

Gleichung (2) in § 1 gegeben durch

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n,\, p \in L_0^2(\Omega), \text{ so dass} \\ \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \qquad\qquad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2}$$

Dies entspricht Problem (Q) aus § 2 mit

$$\begin{aligned} X &= H_0^1(\Omega)^n, \\ M &= L_0^2(\Omega), \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \\ b(\mathbf{u}, p) &= -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \langle l, \mathbf{v} \rangle_X &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \\ \langle \chi, q \rangle_M &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der Friedrich'schen Ungleichung ist a auf ganz X koerziv. Also sind die Voraussetzungen von Satz 2.5 an a erfüllt, und wir müssen "nur" noch die inf-sup Bedingung für b beweisen, d.h.

$$\beta := \inf_{p \in L_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_1 \|p\|_0} > 0. \tag{3}$$

Wegen Satz 2.1 ist (3) äquivalent dazu, dass div ein Isomorphismus von $V^\perp$ auf $L_0^2(\Omega)$ ist. Da $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, L_0^2(\Omega))$ auf $V^\perp$ injektiv und $L_0^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$ ist, können wir den Satz von der offenen Abbildung (§ II.5 in K. Yosida: Functional Analysis) heranziehen und müssen nur die Surjektivität von div zeigen. Wenn wir uns auf C^∞-Funktionen auf sternförmigen Gebieten beschränken, folgt diese Surjektivität aber sofort aus dem Satz von Poincaré (Satz X.5.16 in Analysis III). Um dies einzusehen, betrachte ein $p \in C^\infty(\Omega)$ und ordne ihm die Differentialform

$$\varphi = p dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \in \Omega_n^\infty(\Omega)$$

zu. Dann ist φ geschlossen, d.h. $d\varphi = 0$, und nach dem Satz von Poincaré exakt. Also gibt es ein

$$\omega = \sum_{i=1}^n v_i (-1)^i dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \in \Omega_{n-1}^\infty(\Omega)$$

mit $d\omega = \varphi$. Für $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ gilt dann $\operatorname{div} \mathbf{v} = p$. Zwar ist $C^\infty(\Omega)$ dicht in $L_0^2(\Omega)$, aber dies reicht nicht, um von der Surjektivität von $\operatorname{div} : C^\infty(\Omega)^n \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ auf die Surjektivität von $\operatorname{div} : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow L_0^2(\Omega)$ zu schließen.

Wenn wir uns auf glatt berandete ebene Gebiete, d.h. $n = 2$ und $\Gamma \in C^2$, einschränken, können wir (3) mit folgendem Argument relativ leicht nachweisen. Sei $p \in L_0^2(\Omega)$. Wegen $\int_\Omega p = 0$ besitzt das Neumann Problem

$$\begin{aligned} \Delta\varphi =& p \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} =& 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$. Da $\Gamma \in C^2$ ist, gilt $\varphi \in H^2(\Omega)$. Setze $\mathbf{v} := \nabla\varphi$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} =& p \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} =& 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Bezeichne mit $\mathbf{t}$ das Tangentenfeld an Γ, so dass $\det(\mathbf{n}, \mathbf{t}) > 0$ ist. Da $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\Gamma \in C^2$ ist, besitzt die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2\psi &= 0 && \text{in } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $\psi \in H^2(\Omega)$. Setze $\mathbf{w} := (\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x})$. Dann ist $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^2$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} &= -\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} && \text{auf } \Gamma \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^2$ und erfüllt $\operatorname{div} \mathbf{u} = p$.

Um die inf-sup Bedingung (3) im allgemeinen Fall zu beweisen, müssen wir stärkeres mathematisches Geschütz auffahren.

3.1 Satz: *Es gibt eine Konstante c, die nur von Ω abhängt, so dass für alle $p \in L^2(\Omega)$ gilt*

$$\|p\|_0 \leq c \left\{ \|p\|_{-1} + \|\nabla p\|_{-1} \right\}.$$

Beweis: Einen ausführlichen Beweis findet man in G. Duvaut, J. L. Lions: Inequalities in Mechanics and Physics, Theorem III.3.2 und Remark III.3.1. Wir geben im folgenden nur die wesentlichen Ideen des Beweises an.

1. Schritt: Definiere

$$X(\Omega) := \{p \in H^{-1}(\Omega) : \nabla p \in H^{-1}(\Omega)^n\}$$

und

$$|||p||| := \|p\|_{-1} + \|\nabla p\|_{-1}.$$

Aus der Definition von $H^{-1}(\Omega)$ und der schwachen Ableitung folgt:
(1) $(X(\Omega), |||.|||)$ ist ein Hilbert Raum.
(2) $L^2(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$.
Da die kanonische Injektion $\iota : L^2(\Omega) \longrightarrow X(\Omega)$ injektiv ist, folgt die Behauptung aus dem Satz über die offene Abbildung (§ II.5 in K. Yosida: loc. cit.), sofern wir die Surjektivität von ι beweisen können. Wir müssen also nur die mengentheoretische Inklusion

$$X(\Omega) \subset L^2(\Omega) \tag{4}$$

beweisen.
2. Schritt: (4) gilt für den $\mathbb{R}^n$.
Aus der Charakterisierung der Sobolev Räume über die Fourier-Transformation (§ I.4 in Duvaut-Lions: loc. cit.) folgt

$$\begin{aligned} p \in X(\mathbb{R}^n) \iff & (1+|\eta|^2)^{-1/2}\hat{p}(\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ und} \\ & (1+|\eta|^2)^{-1/2}\eta_i\hat{p}(\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n)\ , 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Daher gilt für $p \in X(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^{-1}|\hat{p}(\eta)|^2\{1+\sum_{i=1}^n \eta_i^2\}d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{p}(\eta)|^2 d\eta < \infty.$$

Also ist $p \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
3. Schritt: Es genügt, (4) für den Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+$ zu beweisen.
Es gibt eine Partition der Eins $\alpha_0, ..., \alpha_k$ auf Ω mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\text{supp}\alpha_0 \subset\subset \Omega$
(ii) $\text{supp}\alpha_i$, $1 \le i \le k$, liegt in einer Karte von Γ, in der Ω das Lipschitz-stetige Bild einer Nullumgebung in $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+$ ist.
Dann reicht es, für $p \in X(\Omega)$ die Beziehungen $\alpha_i p \in L^2(\Omega)$, $0 \le i \le k$, zu zeigen. Da $\alpha_0 p$ durch Null auf den $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden kann, kann Schritt 2 auf $\alpha_0 p$ angewandt werden. Die anderen Funktionen $\alpha_i p$, $1 \le i \le k$, können aber wegen (ii) auf Funktionen auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+$ transformiert werden.
4. Schritt: Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zeigt man, dass $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+, \mathbb{R})$ dicht ist in $X(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+)$. Daher muss man (4) nur noch für glatte Funktionen in $X(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+)$ beweisen. Sei p eine solche Funktion. Wir definieren eine

Fortsetzung $\tilde{p}$ von p auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{p}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} p(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) & \text{, falls } x_n > 0 \\ -3p(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \\ +4p(x_1, ..., x_{n-1}, -2x_n) & \text{, falls } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Dann kann man zeigen, dass $\tilde{p} \in X(\mathbb{R}^n)$ ist und dass die Abbildung $p \longrightarrow \tilde{p}$ eine stetige lineare Abbildung von $X(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*)$ nach $X(\mathbb{R}^n)$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Schritt 2. $\square$

3.2 Satz: *Es gibt ein Konstante c, die nur von Ω abhängt, so dass für alle $p \in L_0^2(\Omega)$ gilt*

$$\|p\|_0 \leq c\|\nabla p\|_{-1}.$$

Beweis: Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0^2(\Omega)$ mit

$$\|p_n\|_0 = 1 \quad \text{und} \quad \|\nabla p_n\|_{-1} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da $L_0^2(\Omega)$ ein Hilbert Raum ist und da aus der kompakten Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ (Satz 1.19 VFEM) die kompakte Einbettung von $L^2(\Omega) = L^2(\Omega)'$ in $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)'$ folgt, gibt es ein $p \in L^2(\Omega)$ und eine Teilfolge $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) $\|p_{n_k} - p\|_{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(ii) $p_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$ schwach in $L^2(\Omega)$, d.h. $\displaystyle\int_\Omega p_{n_k} q \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega pq \ \forall q \in L^2(\Omega)$.

Aus (ii) und der Definition der schwachen Ableitung folgt

$$\int_\Omega \nabla p_{n_k} \cdot \mathbf{v} = -\int_\Omega p_{n_k} \operatorname{div} \mathbf{v} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n.$$

Wegen $\|\nabla p_n\|_{-1} \leq \frac{1}{n}$ gilt andererseits

$$\left| \int_\Omega \nabla p_{n_k} \cdot \mathbf{v} \right| \leq \|\nabla p_{n_k}\|_{-1} \|\mathbf{v}\|_1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $\nabla p = 0$ und damit p konstant.
Aus $p_n \in L_0^2(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und (ii) folgt weiter

$$0 = \int_\Omega p_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega p.$$

Also ist $p = 0$, und $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\nabla p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $H^{-1}(\Omega)$ bzw. $H^{-1}(\Omega)^n$ gegen Null. Wegen Satz 3.1 ist dies ein Widerspruch zu $\|p_n\|_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.3 Satz: *Die inf-sup Bedingung (3) ist erfüllt.*

Beweis: Der Operator grad : $L_0^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^n$ ist injektiv und stetig. Wegen Satz 3.2 ist sein Bildbereich $R(\text{grad}) := \text{grad}(L_0^2(\Omega))$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^{-1}(\Omega)^n$. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung (§ II.5 in K. Yosida: loc. cit.) ist somit grad ein Isomorphismus von $L_0^2(\Omega)$ auf $R(\text{grad})$. Wegen des closed range theorems (§ VII.5 in K. Yosida: loc. cit.) ist

$$R(\text{grad}) = \ker(\text{div})^\circ = V^\circ.$$

(Man beachte, dass $-\,\text{div}$ der duale Operator von grad ist.) Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.1. □

Aus Satz 3.3 und Satz 2.5 folgt unmittelbar:

3.4 Satz: *Die schwache Formulierung (2) der Stokes Gleichungen (1) besitzt für jedes* $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ *eine eindeutige schwache Lösung* $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$*, und es gilt*

$$\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\|_0 \leq c\|\mathbf{f}\|_{-1}.$$

Die Konstante c *hängt nur von* Ω *ab.*

Gemäß L. Cattabriga: Su un problema al contorno relativo al sistema di Stokes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31, 308 – 340 (1961) gilt folgender Regularitätssatz:

3.5 Satz: **(1)** *Seien* $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma \in C^{m+2}$ *und* $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^n$*. Dann gilt für die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen* $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^{m+2}(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega)$ *und es gibt eine Konstante* $c = c(m, \Omega)$ *mit*

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2} + \|p\|_{m+1} \leq c\|\mathbf{f}\|_m.$$

(2) *Ist* $n = 2$*, so gilt die Regularitätsaussage aus Teil (1) mit* $m = 0$ *auch für konvexe Polygone.*

3.6 Bemerkung: Häufig tritt folgende Verallgemeinerung der Stokes Gleichungen (1) auf

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \text{div}\,\mathbf{u} &= r \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei ist $r \in L^2(\Omega)$ und $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^n$. Aus dem Gauß'schen Integralsatz folgt, dass r und $\mathbf{g}$ die **Kompatibilitätsbedingung**

$$\int_\Omega r = \int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \tag{6}$$

erfüllen müssen, damit (5) eine Lösung haben kann. Sei also (6) erfüllt. Die schwache Formulierung von (5) lautet dann:

$$\text{Finde } \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n \text{ mit } \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ auf } \Gamma \text{ und } p \in L_0^2(\Omega), \text{ so dass}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} &= \int_\Omega rq \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \tag{7}$$

(Man beachte, dass wir wegen des Gauß'schen Integralsatzes und der Bedingung (6) in der zweiten Gleichung von (7) nur Funktionen in $L_0^2(\Omega)$ betrachten müssen.) Da $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^n$ ist, gibt es mindestens ein $\mathbf{u}_1 \in H^1(\Omega)^n$ mit $\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}$ auf Γ. Wegen (6) gilt

$$\int_\Omega \{r - \operatorname{div} \mathbf{u}_1\} = \int_\Omega r - \int_\Gamma \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Daher definiert

$$q \longrightarrow \int_\Omega \{r - \operatorname{div} \mathbf{u}_1\} q$$

ein stetiges lineares Funktional $\chi \in L_0^2(\Omega)'$. Da $\mathbf{u}_1 \in H^1(\Omega)^n$ ist, definiert

$$\mathbf{v} \longrightarrow \int_\Omega \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{u}_1 : \nabla \mathbf{v}\}$$

ein stetiges, lineares Funktional $l \in H^{-1}(\Omega)^n$. Daher entspricht Problem (7) mit dem Ansatz $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0$ mit $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^n$ dem Problem (Q) aus § 2. Damit folgt die eindeutige Lösbarkeit von (7) aus Satz 2.5 und Satz 3.3. Ebenso folgt die a priori Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\|_0 \le c\{\|\mathbf{f}\|_{-1} + \|r\|_0 + \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)^n}\}$$

mit einer Konstanten c, die nur von Ω abhängt. Der Regularitätssatz 3.5 bleibt ebenfalls gültig. □

II.4 Ein abstrakter Approximationssatz

Wir greifen das abstrakte Variationsproblem (Q) aus § 2 auf und benutzen die dortigen Notationen. Für die Diskretisierung wählen wir endlich dimensionale Unterräume $X_h \subset X$ und $M_h \subset M$ und approximieren (Q) durch:

$$\text{Finde } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) &= \langle l, v_h \rangle_X \quad \forall v_h \in X_h \\ b(u_h, \mu_h) &= \langle \chi, \mu_h \rangle_M \quad \forall \mu_h \in M_h. \end{aligned} \tag{Q_h}$$

Das diskrete Analogon zu $V = \ker B$ ist dann

$$V_h := \{v_h \in X_h : b(v_h, \lambda_h) = 0 \ \forall \lambda_h \in M_h\}. \tag{1}$$

Man beachte, dass V_h *i.a. kein Unterraum von* V ist.

4.1 Satz: *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

(1) *a ist koerziv auf V.*

(2) *b erfüllt die inf-sup Bedingung bzgl. $X \times M$.*

(3) **(diskrete Koerzivität)** *a ist* **gleichmäßig** *koerziv auf V_h, d.h. es gibt eine von h unabhängige Konstante $\tilde{\alpha} > 0$ mit*

$$a(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_X^2 \quad \forall v_h \in V_h,\ h > 0.$$

(4) **(diskrete inf-sup Bedingung)** *b erfüllt die inf-sup Bedingung* **gleichmäßig** *bzgl. $X_h \times M_h$, d.h. es gibt eine von h unabhängige Konstante $\tilde{\beta} > 0$ mit*

$$\inf_{\lambda_h \in M_h \setminus \{0\}} \sup_{u_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b(u_h, \lambda_h)}{\|u_h\|_X \|\lambda_h\|_M} \geq \tilde{\beta} \quad \forall h > 0.$$

Dann besitzen die Probleme (Q) und (Q_h) jeweils eine eindeutige Lösung $(u, \lambda) \in X \times M$ bzw. $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} &\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \\ \leq &c \left\{ \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten c.

Beweis: Die eindeutige Lösbarkeit der Probleme (Q) und (Q_h) folgt aus Satz 2.5. Seien $v_h \in X_h$ und $\mu_h \in M_h$ beliebig. Definiere $\tilde{l} \in X'$ und $\tilde{\chi} \in M'$ durch

$$\begin{aligned} \langle \tilde{l}, v \rangle_X &:= a(u - v_h, v) + b(v, \lambda - \mu_h) && \forall v \in X \\ \langle \tilde{\chi}, \mu \rangle_M &:= b(u - v_h, \mu) && \forall \mu \in M. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{l}\|_{X'} \leq &\|a\|_{\mathcal{L}^2} \|u - v_h\|_X + \|b\|_{\mathcal{L}^2} \|\lambda - \mu_h\|_M \\ \|\tilde{\chi}\|_{M'} \leq &\|b\|_{\mathcal{L}^2} \|u - v_h\|_X. \end{aligned}$$

Für alle $w_h \in X_h$ und $\rho_h \in M_h$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{l}, w_h \rangle_X = &\underbrace{a(u, w_h) + b(w_h, \lambda)}_{= \langle l, w_h \rangle_X} - a(v_h, w_h) - b(w_h, \mu_h) \\ = &\underbrace{a(u_h, w_h) + b(w_h, \lambda_h)}_{= \langle l, w_h \rangle_X} - a(v_h, w_h) - b(w_h, \mu_h) \\ = &a(u_h - v_h, w_h) + b(w_h, \lambda_h - \mu_h) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \rho_h \rangle_M = &\underbrace{b(u, \rho_h)}_{= \langle \chi, \rho_h \rangle_M} - b(v_h, \rho_h) \\ = &\underbrace{b(u_h, \rho_h)}_{= \langle \chi, \rho_h \rangle_M} - b(v_h, \rho_h) \\ = &b(u_h - v_h, \rho_h). \end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz 2.1 und Satz 2.5

$$\begin{aligned}\|u_h - v_h\|_X + \|\lambda_h - \mu_h\|_M \leq & c\{\|\tilde{l}\|_{X'} + \|\tilde{\chi}\|_{M'}\} \\ \leq & c'\{\|u - v_h\|_X + \|\lambda - \mu_h\|_M\}.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Dreiecksungleichung ergibt dies

$$\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M \leq \{1 + c'\}\{\|u - v_h\|_X + \|\lambda - \mu_h\|_M\}.$$

Da $v_h \in X_h$ und $\mu_h \in M_h$ beliebig waren, folgt hieraus die Behauptung. □

4.2 Bemerkung: **(1)** Satz 4.1 ist für Sattelpunktsprobleme das Analogon zum Céa-Lemma (Satz 2.5 VFEM) für Minimumprobleme.
(2) Problem (Q_h) ist auch eindeutig lösbar, wenn die Bedingungen (3) und (4) von Satz 4.1 für jedes feste h mit von h abhängigen positiven Konstanten $\tilde{\alpha}(h)$ bzw. $\tilde{\beta}(h)$ gelten. Die Fehlerabschätzung von Satz 4.1 bleibt ebenfalls gültig. Allerdings folgt aus dem Beweis von Satz 2.3 und aus Satz 2.1, dass die Konstanten c' und c zu $\tilde{\alpha}(h)^{-1}$ bzw. $\tilde{\beta}(h)^{-2}$ proportional sind. Daher gilt die Fehlerabschätzung (2) nur dann gleichmäßig in h, wenn die Größen $\tilde{\alpha}(h)$ und $\tilde{\beta}(h)$ für $h \to 0$ von Null weg beschränkt sind.
(3) Wenn wir Basen für X_h und M_h wählen, geht Problem (Q_h) in ein lineares Gleichungssystem über. Die Matrix dieses Gleichungssystemes hat die Form

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen A_h und B_h der Dimension $\dim X_h \times \dim X_h$ bzw. $\dim M_h \times \dim X_h$. Die inf-sup Bedingung (4) aus Satz 4.1 besagt dann u.a., dass die Spalten von B_h^T linear unabhängig sein müssen, d.h.

$$\text{rang} B_h \geq \dim M_h.$$

Da andererseits stets

$$\text{rang} B_h \leq \min\{\dim X_h, \dim M_h\}$$

ist, kann die inf-sup Bedingung (4) höchstens dann gelten, wenn

$$\dim X_h \geq \dim M_h \tag{3}$$

ist. Dies ist allerdings eine notwendige und *keine* hinreichende Bedingung. □

4.3 Satz: *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 4.1. Zusätzlich gebe es dichte Teilmengen $\mathcal{X}$ von X und $\mathcal{M}$ von M und lineare Operatoren $r_h : \mathcal{X} \longrightarrow X_h$ und $\rho_h : \mathcal{M} \longrightarrow M_h$ mit*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \|r_h v - v\|_X &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{X} \\ \lim_{h\to 0} \|\rho_h \mu - \mu\|_M &= 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dann gilt für die Lösungen (u, λ) und (u_h, λ_h) der Probleme (Q) und (Q_h)

$$\lim_{h\to 0} \{\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M\} = 0.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $u_\varepsilon \in \mathcal{X}$ und $\lambda_\varepsilon \in \mathcal{M}$ mit

$$\|u - u_\varepsilon\|_X + \|\lambda - \lambda_\varepsilon\|_M \le \varepsilon.$$

Wegen (4) gibt es ein $h_\varepsilon > 0$, so dass für alle $0 < h \le h_\varepsilon$ gilt

$$\|r_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_X + \|\rho_h \lambda_\varepsilon - \lambda_\varepsilon\|_M \le \varepsilon.$$

Aus Satz 4.1 folgt dann für alle $0 < h \le h_\varepsilon$

$$\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M \le c\{\|u - r_h u_\varepsilon\|_X + \|\lambda - \rho_h \lambda_\varepsilon\|\} \le 2c\varepsilon.$$

Da ε beliebig war und die Konstante c nicht von h abhängt, folgt hieraus die Behauptung. □

Bei Anwendung auf die Stokes Gleichungen liefert Satz 4.1 Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit in der H^1-Norm und für den Druck in der L^2-Norm. Der folgende Satz, der dem Dualitätsargument von Aubin-Nitsche (Satz 2.5 VFEM) für Minimumprobleme entspricht, liefert dann L^2-Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit.

4.4 Satz: *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 4.1. Zusätzlich gebe es einen Hilbert Raum H mit Skalarprodukt $(.,.)_H$ und Norm $\|.\|_H$, so dass X dicht ist in H mit stetiger Einbettung. Für jedes $g \in H$ besitzt dann das Problem*

$$\begin{aligned} a(v, u_g) + b(v, \lambda_g) &= (g, v)_H \quad \forall v \in X \\ b(u_g, \mu) &= 0 \qquad\quad \forall \mu \in M \end{aligned} \tag{5}$$

eine eindeutige Lösung $(u_g, \lambda_g) \in X \times M$. Für die Lösungen (u, λ) und (u_h, λ_h) der Probleme (Q) und (Q_h) gilt dann die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_H \le c\,\{\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M\} \cdot \sup_{g\in H\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_H} \left\{ \inf_{v_h\in X_h} \|u_g - v_h\| + \inf_{\mu_h\in M_h} \|\lambda_g - \mu_h\|_M \right\}.$$

Beweis: Sei $g \in H$ beliebig. Da $X \hookrightarrow H$ ist, definiert die Abbildung $v \longrightarrow (g,v)_H$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Wegen Satz 2.5 besitzt daher (5) eine eindeutige Lösung. Seien $v_h \in X_h$ und $\mu_h \in M_h$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned}
(g, u-u_h)_H =& a(u-u_h, u_g) + b(u-u_h, \lambda_g) + \underbrace{b(u_g, \lambda-\lambda_h)}_{=0} \\
=& a(u-u_h, u_g-v_h) + b(u_g-v_h, \lambda-\lambda_h) + b(u-u_h, \lambda_g-\mu_h) \\
&+ \underbrace{a(u-u_h, v_h) + b(v_h, \lambda-\lambda_h)}_{=0} + \underbrace{b(u-u_h, \mu_h)}_{=0} \\
\leq& \|a\|\|u-u_h\|_X\|u_g-v_h\|_X + \|b\|\|u_g-v_h\|_X\|\lambda-\lambda_h\|_M \\
&+ \|b\|\|u-u_h\|_X\|\lambda_g-\mu_h\|_M.
\end{aligned}$$

Da X dicht ist in H, gilt andererseits

$$\|u-u_h\|_H = \sup_{g \in H\setminus\{0\}} \frac{(g, u-u_h)_H}{\|g\|_H}.$$

Aus diesen beiden Abschätzungen folgt die Behauptung. □

II.5 Stabile gemischte Elemente für die Stokes Gleichungen

Wir wollen die abstrakten Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf Finite Element Diskretisierungen der Stokes Gleichungen anwenden. Dazu wählen wir die Räume X und M und die Bilinearformen a und b wie in § 3. Zusätzlich setzen wir im Rahmen von § 4

$$\begin{aligned}
H :=& L^2(\Omega)^n, \\
\mathcal{X} :=& H^2(\Omega)^n \cap H_0^1(\Omega)^n, \\
\mathcal{M} :=& H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{T}_h$, $h > 0$, eine Familie von affin äquivalenten, zulässigen und regulären Unterteilungen von Ω wie in § I.4. Zur Vermeidung technischer Schwierigkeiten nehmen wir an, dass der Rand von Ω stückweise gerade ist, d.h. dass Ω ein Polyedergebiet ist. $X_h \subset X = H_0^1(\Omega)^n$ und $M_h \subset M = L_0^2(\Omega)$ bezeichnen stets zu $\mathcal{T}_h$ gehörige Finite Element Räume. Wir sagen, das Paar (X_h, M_h) sei **stabil**, wenn es ein von h unabhängiges $\tilde{\beta} > 0$ gibt mit

$$\inf_{p_h \in M_h\setminus\{0\}} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|p_h\|_0} \geq \tilde{\beta} \quad \forall h > 0. \tag{1}$$

Jedem Paar (X_h, M_h) ordnen wir zwei maximal gewählte Zahlen $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}$ mit

$$\left[S_{h,0}^{\mu,0}\right]^n \subset X_h$$

und

$$S_h^{\nu,-1} \cap L_0^2(\Omega) \subset M_h \quad \text{oder} \quad S_h^{\nu,0} \cap L_0^2(\Omega) \subset M_h$$

zu. Offensichtlich können wir o.E. annehmen, dass $\mu \geq 1$ ist und dass $\nu \geq 1$ gilt, falls die Elemente in M_h stetig sind. Für den Operator r_h aus Satz 4.3 wählen wir die nodale Interpolation in den Elementeckpunkten. Für den Operator ρ_h aus Satz 4.3 wählen wir die L^2-Projektion auf $S_h^{0,-1}$, falls die Elemente in M_h unstetig sind, oder den modifizierten Clément'schen Interpolationsoperator aus § I.4, falls die Elemente in M_h stetig sind. Dann ist jeweils die Bedingung (4) aus Satz 4.3 erfüllt. Damit ergibt sich aus den Sätzen 4.1, 4.3, 4.4, 3.4 und 3.5 und den Approximationseigenschaften aus § I.4:

5.1 Satz: *Das Paar (X_h, M_h) sei stabil. Dann besitzt das diskrete Stokes Problem*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{H^1} \quad && \forall \mathbf{v}_h \in X_h \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= 0 && \forall q_h \in M_h \end{aligned}$$

zu jedem $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$. Bezeichne mit $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der entsprechenden Stokes Gleichungen. Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0\} = 0.$$

Gibt es ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $\mathbf{u} \in H^{m+1}(\Omega)^n$, $p \in H^m(\Omega)$, so gilt zusätzlich

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq c_1 \left\{ h^{\min\{\mu,m\}} |\mathbf{u}|_{m+1} + h^{\min\{\nu+1,m\}} |p|_m \right\}. \tag{2}$$

Ist außerdem $n = 2$ und Ω konvex, so gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq c_2 h \{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0\}. \tag{3}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen nur von Ω und der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an $\mathcal{T}_h$ ab.

5.2 Bemerkung: **(1)** Wegen Satz 5.1 liegt die Hauptarbeit bei der Konstruktion geeigneter Finite Element Diskretisierungen im Nachweis der Stabilität, d.h. der Abschätzung (1).
(2) Die Fehlerabschätzung (2) ist optimal, da für Lösungen der Stokes Gleichungen die Regularität des Druckes i.a. um eine Differentiationsstufe niedriger ist als die Regularität der Geschwindigkeit.
(3) Wegen der Abschätzung (2) sind stabile Paare (X_h, M_h) mit $\nu = \mu - 1$ optimal. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Paare $([S_{h,0}^{\mu,0}]^n, S_h^{\mu-1,-1} \cap L_0^2(\Omega))$ und, für $\mu \geq 2$, $([S_{h,0}^{\mu,0}]^n, S_h^{\mu-1,0} \cap L_0^2(\Omega))$ optimal, sofern sie stabil sind. $\square$

5.3 Beispiel: **(1)** Betrachte das Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$ und eine Courant-Triangulierung $\mathcal{T}_h$ bestehend aus rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken mit Katheten der Länge $h = \frac{1}{N+1}$ und Hypotenusen parallel zu $(-1,1)$. Dann ist das Paar $([S^{1,0}_{h,0}]^2, S^{0,-1}_h \cap L^2_0(\Omega))$ instabil. Denn es ist

$$\begin{aligned}
&\dim[S^{1,0}_{h,0}]^2 = 2N^2,\\
&\dim S^{0,-1}_h \cap L^2_0(\Omega) = 2(N+1)^2 - 1 > 2N^2.
\end{aligned}$$

Dies ergänzt die heuristischen Überlegungen vom Ende von § 1.
(2) Betrachte das Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$ und eine Unterteilung $\mathcal{T}_h$ von Ω in Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N+1}$, $N \geq 2$. Wir betrachten das Paar $([S^{1,0}_{h,0}]^2, S^{0,-1}_h \cap L^2_0(\Omega))$, das sog. **Q1/Q0 Element**. Wegen

$$\begin{aligned}
&\dim[S^{1,0}_{h,0}]^2 = 2N^2,\\
&\dim S^{0,-1}_h \cap L^2_0(\Omega) = (N+1)^2 - 1 = 2N^2 - (N-1)^2 + 1 < 2N^2
\end{aligned}$$

könnte dieses Paar stabil sein. Sei p_h die stückweise konstante Funktion, die auf dem Quadrat K_{ij} mit linker unterer Ecke (ih, jh) den Wert $(-1)^{i+j}$ hat. Dann ist offensichtlich $p_h \in S^{0,-1}_h \cap L^2_0(\Omega)$. Sei $\mathbf{u}_h \in [S^{1,0}_{h,0}]^2$ beliebig. Aus dem Gauß'schen Integralsatz folgt für alle $0 \leq i,j \leq N$ unter Anwendung der Trapezregel für die Linienintegrale

$$\begin{aligned}
\int_{K_{ij}} p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h =& (-1)^{i+j} \int_{K_{ij}} \operatorname{div} \mathbf{u}_h\\
=& (-1)^{i+j} \int_{\partial K_{ij}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{K_{ij}}\\
=& (-1)^{i+j} \frac{h}{2} \Big\{ (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_1)((i+1)h, jh) + (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_1)((i+1)h, (j+1)h)\\
&\quad - (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_1)(ih, (j+1)h) - (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_1)(ih, jh)\\
&\quad + (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_2)((i+1)h, (j+1)h) + (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_2)(ih, (j+1)h)\\
&\quad - (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_2)(ih, jh) - (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_2)((i+1)h, jh) \Big\}.
\end{aligned}$$

Summation über alle Paare (i,j) liefert wegen der homogenen Randbedingung für $\mathbf{u}_h$

$$\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0.$$

Da $\mathbf{u}_h \in [S^{1,0}_{h,0}]^2$ beliebig war, kann das Paar nicht stabil sein. Der soeben beschriebene Effekt wird als **Schachbrett Instabilität des Q1/Q0 Elementes** bezeichnet. $\square$

Bevor wir nach diesen ersten negativen Erfahrungen stabile Raumpaare (X_h, M_h) konstruieren, geben wir zwei Kriterien an, die diese Konstruktion erleichtern werden.

5.4 Satz: (Fortin) *Das Paar (X_h, M_h) ist genau dann stabil, wenn es einen linearen Operator $\pi_h : X \longrightarrow X_h$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*
(1) $\|\pi_h \mathbf{u}\|_1 \leq c\|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in X,\ h > 0.$
(2) $\displaystyle\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{u}) = \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in X,\ p_h \in M_h,\ h > 0.$
Beweis: <u>" $\Rightarrow$ "</u>: Sei $\mathbf{u} \in X$ beliebig. Dann definieren

$$\langle l, \mathbf{v}\rangle_X := \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X$$
$$\langle \chi, q\rangle_M := \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} \qquad \forall q \in M$$

zwei stetige lineare Funktionale auf X bzw. M. Offensichtlich ist $(\mathbf{u}, 0)$ die eindeutige Lösung von

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega r \operatorname{div} \mathbf{v} = \langle l, \mathbf{v}\rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X$$
$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{w} = \langle \chi, q\rangle_M \quad \forall q \in M.$$

Da das Paar (X_h, M_h) stabil ist, besitzt das entsprechende diskrete Problem eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$, und es gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|0 - p_h\|_0 \leq c\{\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}\}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten c. Setze

$$\pi_h \mathbf{u} := \mathbf{u}_h.$$

Offensichtlich ist Bedingung (2) erfüllt. Bedingung (1) folgt aus obiger Abschätzung und

$$\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'} \leq c'\|\mathbf{u}\|_1.$$

<u>" $\Leftarrow$ "</u>: Sei $p_h \in M_h$ beliebig mit $\|p_h\|_0 = 1$. Wegen Satz 3.3 gibt es ein $\beta > 0$, das weder von p_h noch von h abhängt, und ein $\mathbf{v} \in X$ mit

$$\|\mathbf{v}\|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Dann folgt

$$\|\pi_h \mathbf{v}\|_1 \leq c \quad \text{und} \quad \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{v}) \geq \beta.$$

Also ist

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{v})}{\|\pi_h \mathbf{v}\|_1} \geq \frac{\beta}{c}.$$

Hieraus folgt die Stabilität mit $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{c}$. $\square$

5.5 Bemerkung: Bezeichne mit $\Pi_h^0 : L_0^2(\Omega) \longrightarrow M_h$ die L^2-Projektion. Es sei $\operatorname{div}(X_h) \subset M_h$. Dann besagt Bedingung (2) von Satz 5.4

$$\Pi_h^0(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X = H_0^1(\Omega)^n & \xrightarrow{\operatorname{div}} & M = L_0^2(\Omega) \\ \pi_h \Big\downarrow & & \Big\downarrow \Pi_h^0 \\ X_h & \xrightarrow{\operatorname{div}} & M_h \end{array}$$

ist kommutativ. Daher wird diese Bedingung häufig auch als **commuting diagram property** bezeichnet. □

Für das zweite Kriterium benötigen wir einige zusätzliche Notationen. Bezeichne mit $\mathcal{E}_h$ die Menge aller inneren Kanten, falls $n = 2$, bzw. Flächen, falls $n = 3$, in $\mathcal{T}_h$. Jedem $E \in \mathcal{E}_h$ ordnen wir einen zu E orthogonalen Einheitsvektor $\mathbf{n}_E$ zu. Für jede stückweise stetige Funktion φ bezeichnen wir mit $[\varphi]_E$ den Sprung von φ über E in Richtung $\mathbf{n}_E$, d.h.

$$[\varphi]_E(x) = \lim_{t \to 0+} \varphi(x + t\mathbf{n}_E) - \lim_{t \to 0+} \varphi(x - t\mathbf{n}_E) \quad \forall x \in E.$$

Schließlich definieren wir für jede stückweise differenzierbare Funktion φ

$$\|\varphi\|_{1,h} := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|[\varphi]_E\|_{L^2(E)}^2 \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Dabei bezeichnet h_E die Länge bzw. den Durchmesser von E.

5.6 Satz: *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*
(1) $\|.\|_{1,h}$ *ist eine Norm auf* M_h.
(2) $[S_{h,0}^{1,0}]^n \subset X_h$.
(3) Es gibt ein von h *unabhängiges* $\beta^* > 0$ *mit*

$$\inf_{p_h \in M_h \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|p_h\|_{1,h}} \geq \beta^* \quad \forall h > 0.$$

Dann ist das Paar (X_h, M_h) *stabil.*

Beweis: Sei $p_h \in M_h$ mit $\|p_h\|_0 = 1$ beliebig. Wegen Bedingung (1) existiert $\eta := \|p_h\|_{1,h}$. Wegen Satz 3.3 gibt es ein $\beta > 0$, das weder von p_h noch von h abhängt, und ein $\mathbf{v} \in X$ mit

$$\|\mathbf{v}\|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Setze $\mathbf{v}_h := R_h\mathbf{v}$, wobei R_h der modifizierte Clément'sche Interpolationsoperator aus § I.4 ist. Wegen Bedingung (2) ist $\mathbf{v}_h \in X_h$. Gemäß den Fehlerabschätzungen für R_h aus § I.4 gibt es Konstanten c_1, c_2, die nicht von h abhängen, mit

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_1 \leq& c_1\|\mathbf{v}\|_1 = c_1\\ \left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2}\|\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\|^2_{L^2(K)} + \sum_{E\in\mathcal{E}_h} h_E^{-1}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|^2_{L^2(E)}\right\}^{1/2} \leq& c_2\|\mathbf{v}\|_1 = c_2.\end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften von $\mathbf{v}$ ist

$$\begin{aligned}\int_\Omega p_h \operatorname{div}\mathbf{v}_h =& \int_\Omega p_h \operatorname{div}\mathbf{v} + \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v})\\ \geq& \beta + \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Elementweise partielle Integration und Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v})\\ =& \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{-\int_K \nabla p_h\cdot(\mathbf{v}_h-\mathbf{v}) + \int_{\partial K} p_h\mathbf{n}_K\cdot(\mathbf{v}_h-\mathbf{v})\right\}\\ =& \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla p_h\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h) + \sum_{E\in\mathcal{E}_h}\int_E [p_h]_E\mathbf{n}_E\cdot(\mathbf{v}_h-\mathbf{v})\\ \leq& \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K\|\nabla p_h\|_{L^2(K)} h_K^{-1}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}\\ &+ \sum_{E\in\mathcal{E}_h} h_E^{1/2}\|[p_h]_E\|_{L^2(E)} h_E^{-1/2}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{L^2(E)}\\ \leq& \|p_h\|_{1,h}\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2}\|\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\|^2_{L^2(K)} + \sum_{E\in\mathcal{E}_h} h_E^{-1}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|^2_{L^2(E)}\right\}^{1/2}\\ \leq& c_2\eta.\end{aligned}$$

Also ist

$$\sup_{\mathbf{u}_h\in X_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div}\mathbf{u}_h}{\|\mathbf{u}_h\|_1} \geq \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div}\mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq \frac{1}{c_1}\left\{\beta - c_2\eta\right\}.$$

Zusammen mit Bedingung (3) folgt hieraus

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{u}_h\in X_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div}\mathbf{u}_h}{\|\mathbf{u}_h\|_1} \geq& \max\left\{\beta^*\eta\,,\ \frac{1}{c_1}\{\beta - c_2\eta\}\right\}\\ \geq& \min_{z\geq 0}\max\left\{\beta^* z\,,\ \frac{1}{c_1}\{\beta - c_2 z\}\right\}\\ =& \beta^*\frac{\frac{\beta}{c_1}}{\beta^* + \frac{c_2}{c_1}}.\end{aligned}$$

Dies beweist die Stabilität des Paares (X_h, M_h) mit $\tilde{\beta} = \frac{\beta\beta^*}{c_1\beta^* + c_2}$. □

5.7 Bemerkung: Bedingung (1) von Satz 5.6 ist erfüllt, falls die Funktionen in M_h elementweise stetig differenzierbar sind. Bedingung (2) ist für alle praxisrelevanten Finite Element Räume erfüllt. $\square$

Beispiel 5.3 und Satz 5.6 legen die Vermutung nahe, dass man bei stückweise konstanten bzw. linearen Druckapproximationen den Geschwindigkeitsraum mit zusätzlichen Freiheitsgraden auf den Elementrändern bzw. im Elementinnern anreichern muss, um eine stabile Diskretisierung zu erhalten. Für diese zusätzlichen Feiheitsgrade benötigen wir einige neue Notationen.
Sei n_K die Zahl der Eckpunkte von $K \in \mathcal{T}_h$. Es gilt $n_K = n+1$, falls K ein n-Simplex ist, und $n_K = 2^n$, falls K ein n-Parallelepiped ist. Bezeichne mit $\lambda_{K,1}, \dots, \lambda_{K,n_K}$ die Schwerpunktskoordinaten von K. D.h., $\lambda_{K,i}$ ist dasjenige Polynom in $R_1(K)$, das im i-ten Eckpunkt von K den Wert 1 annimmt und das in allen anderen Eckpunkten von K verschwindet. Setze

$$\psi_K := \alpha_K \prod_{i=1}^{n_K} \lambda_{K,i}$$

mit

$$\alpha_K = \begin{cases} (n+1)^{n+1} & \text{, falls } K \text{ ein } n\text{-Simplex} \\ 2^n & \text{, falls } K \text{ ein } n\text{-Parallelepiped.} \end{cases}$$

Der Faktor α_K ist so gewählt, dass gilt

$$\begin{aligned} \psi_K &\geq 0 \quad \text{in } K \\ \psi_K &= 0 \quad \text{auf } \partial K \\ \max_{x \in K} \psi_K(x) &= 1. \end{aligned}$$

Wir setzen die Funktionen ψ_K außerhalb von K durch Null fort.
Seien $E \in \mathcal{E}_h$ und K_1, $K_2 \in \mathcal{T}_h$ die beiden Elemente mit $E = K_1 \cap K_2$. Setze $\omega_E := K_1 \cup K_2$. Numeriere die Eckpunkte von K_1 und K_2 so, dass die Punkte von E zuerst numeriert werden. Setze

$$\psi_E := \beta_E \prod_{i=1}^{n_E} \lambda_{K_j,i} \quad \text{auf } K_j,\ j \in \{1,2\}.$$

Dabei ist n_E analog zu n_K definiert und

$$\beta_E = \begin{cases} n^n & \text{, falls } E \text{ ein } (n-1)\text{-Simplex} \\ 2^{n-1} & \text{, falls } E \text{ ein } (n-1)\text{-Parallelepiped.} \end{cases}$$

Der Faktor β_E ist so gewählt, dass gilt

$$\begin{aligned} \psi_E &\geq 0 \quad \text{in } \omega_E \\ \psi_E &= 0 \quad \text{auf } \partial\omega_E \\ \max_{x \in \omega_E} \psi_E(x) = \max_{x \in E} \psi_E(x) &= 1. \end{aligned}$$

Wir setzen die Funktionen ψ_E außerhalb von ω_E durch Null fort.

5.8 Satz: *Sei*

$$B_{\mathcal{E},h} := \operatorname{span}\{\psi_E \mathbf{n}_E : E \in \mathcal{E}_h\}.$$

Dann ist das Paar $X_h = [S_{h,0}^{1,0}]^n \oplus B_{\mathcal{E},h}$, $M_h = S_h^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega)$ *stabil.*

Beweis: Wir wenden Satz 5.4 an. Sei dazu $R_h : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow [S_{h,0}^{1,0}]^n$ der modifizierte Clément'sche Interpolationsoperator aus § I.4. Definiere $\pi_h : X \longrightarrow X_h$ durch

$$\pi_h \mathbf{u} := R_h \mathbf{u} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \psi_E \mathbf{n}_E \left\{ \int_E (\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_E \right\} \left\{ \int_E \psi_E \right\}^{-1}.$$

Dann gilt für jedes $E \in \mathcal{E}_h$ und jedes $\mathbf{u} \in X$

$$\int_E (\pi_h \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_E = \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E.$$

Seien $p_h \in S_h^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$. Mit elementweiser partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{u}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{u}) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ -\int_K \underbrace{\nabla p_h}_{=0} \cdot \pi_h \mathbf{u} + \int_{\partial K} p_h \mathbf{n}_K \cdot \pi_h \mathbf{u} \right\} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [p_h]_E \mathbf{n}_E \cdot \pi_h \mathbf{u} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} [p_h]_E \int_E \mathbf{n}_E \cdot \pi_h \mathbf{u} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} [p_h]_E \int_E \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{u} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [p_h]_E \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{u} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{u} \\
&= \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Also ist Bedingung (2) aus Satz 5.4 erfüllt.

Zum Nachweis der Bedingung (1) erinnern wir zuächst an die Approximationseigenschaften von R_h aus § I.4

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(K)} + h_K |\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}|_{H^1(K)} &\le c h_K \|\mathbf{u}\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\
\|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(\partial K)} &\le c h_K^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{\omega}_K$ die Vereinigung aller Elemente, die einen nicht leeren Durchschnitt mit K haben. Durch Transformation auf das Referenzelement beweist man leicht die folgenden Eigenschaften der Funktionen ψ_E

$$\begin{aligned} |\psi_E|_{H^1(\omega_E)} \leq & c h_E^{n/2-1} \\ \int_E \psi_E \geq & c h_E^{n-1}. \end{aligned}$$

Mit diesen Abschätzungen und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt für jedes Element $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned} |\pi_h \mathbf{u}|_{H^1(K)} \leq & |R_h \mathbf{u}|_{H^1(K)} \\ & + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_h \\ E \subset \partial K}} |\psi_E|_{H^1(K)} \left| \int_E (\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_E \right| \left| \int_E \psi_E \right|^{-1} \\ \leq & c_1 |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\ & + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_h \\ E \subset \partial K}} c_2 h_E^{-n/2} |E|^{1/2} \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(E)} \\ \leq & c_1 |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\ & + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_h \\ E \subset \partial K}} c_3 h_E^{-n/2+(n-1)/2+1/2} |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\ \leq & c_4 |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|E|$ das $(n-1)$-dimensionale Lebesgue-Maß von E. Es ist $|E| \leq c h_E^{n-1}$. Nach Summation über alle Elemente folgt aus obiger Abschätzung

$$|\pi_h \mathbf{u}|_1 \leq |\mathbf{u}|_1.$$

Da wegen der Friedrich'schen Ungleichung $|.|_1$ und $\|.\|_1$ äquivalente Normen auf $H_0^1(\Omega)^n$ sind, beweist dies die Bedingung (1) aus Satz 5.4. □

Wegen $B_{\mathcal{E},h} \subset [S_{h,0}^{n,0}]^n$ folgt aus Satz 5.8 unmittelbar:

5.9 Korollar: *Das Paar* $([S_{h,0}^{n,0}]^n, S_h^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega))$ *ist stabil.*

5.10 Satz: (Mini-Element) *Setze*

$$B_{\mathcal{T},h} := \operatorname{span}\{\psi_K : K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Dann ist das Paar $([S_{h,0}^{1,0} \oplus B_{\mathcal{T},h}]^n, S_h^{1,0} \cap L_0^2(\Omega))$ *stabil.*

Beweis: Wir wenden wieder Satz 5.4 an. Diesmal definieren wir $\pi_h : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow X_h$ durch

$$\pi_h \mathbf{u} := R_h \mathbf{u} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \psi_K \int_K (\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}) \left\{ \int_K \psi_K \right\}^{-1}.$$

Dabei ist wieder R_h der modifizierte Clément'sche Interpolationsoperator aus § I.4. Für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ und alle $K \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\int_K \pi_h \mathbf{u} = \int_K \mathbf{u}.$$

Seien $p_h \in S_h^{1,0} \cap L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$. Da p_h stetig und ∇p_h stückweise konstant ist, folgt mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{u}) &= -\int_\Omega \nabla p_h \cdot \pi_h \mathbf{u} \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nabla p_h \cdot \int_K \pi_h \mathbf{u} \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nabla p_h \cdot \int_K \mathbf{u} \\
&= -\int_\Omega \nabla p_h \cdot \mathbf{u} \\
&= \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Dies beweist Bedingung (2) von Satz 5.4.
Durch Transformation auf das Referenzelement beweist man leicht folgende Eigenschaften der Funktionen ψ_K:

$$\begin{aligned}
|\psi_K|_{H^1(K)} &\leq c h_K^{n/2-1} \\
\int_K \psi_K &\geq c h_K^n.
\end{aligned}$$

Mit den Approximationseigenschaften von R_h liefert dies für jedes $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}
|\pi_h \mathbf{u}|_{H^1(K)} &\leq |R_h \mathbf{u}|_{H^1(K)} + |\psi_K|_{H^1(K)} \left| \int_K (\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}) \right| \left| \int_K \psi_K \right|^{-1} \\
&\leq c_1 |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + c_2 h_K^{-n/2-1} |K|^{1/2} \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(K)} \\
&\leq c_3 |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|K|$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß von K. Es ist $|K| \leq c h_K^n$. Aus diesen Abschätzungen folgt wie im Beweis von Satz 5.8 die Bedingung (1) von Satz 5.4. □

5.11 Satz: (Taylor-Hood Elemente) *Sei $\mathcal{T}_{h/2}$ eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung von Ω, die aus $\mathcal{T}_h$ durch Halbieren aller Kanten aller Elemente in $\mathcal{T}_h$ entsteht. Dann sind die Paare $([S_{h,0}^{2,0}]^n, S_h^{1,0} \cap L_0^2(\Omega))$ und $([S_{h/2,0}^{1,0}]^n, S_h^{1,0} \cap L_0^2(\Omega))$ stabil.*

Beweis: Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall ebener Dreieckselemente. Der allgemeine Fall wird ganz analog behandelt, erfordert aber größeren technischen Aufwand.
Wir wenden diesmal Satz 5.6 an. Offensichtlich müssen wir nur noch Bedingung (3) nachweisen. Sei dazu $p_h \in M_h$ beliebig. Da p_h stetig und ∇p_h stückweise konstant ist, gilt für jedes $\mathbf{u}_h \in X_h$

$$\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = -\int_\Omega \nabla p_h \cdot \mathbf{u}_h = -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nabla p_h \cdot \int_K \mathbf{u}_h.$$

Jeder Kante $E \in \mathcal{E}_h$ ordnen wir einen parallelen Einheitsvektor $\mathbf{t}_E$ zu. Wegen der Regularität von $\mathcal{T}_h$ gibt es eine Konstante c_0, so dass für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und alle $K \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$z \cdot z \le c_0 \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} |\mathbf{t}_E \cdot z|^2.$$

Sei $\mathbf{u}_h \in X_h$ die Funktion, die in allen Dreieckseckpunkten verschwindet und die für jede Kante E im Mittelpunkt m_E von E den Wert $-h_E^2 \frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}\mathbf{t}_E$ annimmt. Dann gilt für jedes Dreieck K

$$\int_K \mathbf{u}_h = \frac{1}{3}|K| \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} \mathbf{u}_h(m_E).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nabla p_h \cdot \int_K \mathbf{u}_h \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} \frac{1}{3}|K| h_E^2 \underbrace{\frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}\mathbf{t}_E \cdot \nabla p_h}_{=\left|\frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}\right|^2} \\
&\ge c_0^{-1} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{3}|K||\nabla p_h|^2 \min_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} h_E^2 \\
&\ge c \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|^2_{L^2(K)} \\
&= c\|p_h\|^2_{1,h}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass wegen der Regularität von $\mathcal{T}_h$

$$\min_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} h_E^2 \ge c h_K^2$$

ist mit einer von K und h unabhängigen Konstanten.
Durch Transformation auf das Referenzelement prüfen wir andererseits leicht nach, dass für alle $K \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$|\mathbf{u}_h|^2_{H^1(K)} \le c h_K^{-2} |K| \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} |\mathbf{u}_h(m_E)|^2$$

mit einer von K und h unabhängigen Konstanten. Damit folgt

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_h|_1^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |\mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c h_K^{-2}|K| \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}_h\\ E\subset\partial K}} \underbrace{h_E^4 \left|\frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}\right|^2}_{\le c h_K^4 |\nabla p_h|^2} \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c' h_K^2 |K| |\nabla p_h|^2 \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c' h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&= c' \|p_h\|_{1,h}^2 .
\end{aligned}$$

Dies beweist Bedingung (3) von Satz 5.6. □

5.12 Satz: (Taylor-Hood Elemente höherer Ordnung) *Das Paar* $([S_{h,0}^{k,0}]^2, S_h^{k-1,0} \cap L_0^2(\Omega))$ *ist für jedes* $k \ge 3$ *stabil.*

Beweis: Wir betrachten nur den einfachsten Fall ebener Dreieckselemente und $k = 3$. Der allgemeine Fall ist in F. Brezzi, R. S. Falk: SIAM J. Numer. Anal. 28, 581 – 590 (1991), D. Boffi: M^3AS 4, 223 – 235 (1994) und D. Boffi: SIAM J. Numer. Anal. 34, 664 – 670 (1997) behandelt.

Die Beweisidee für $k = 3$ und ebene Dreieckselemente ist die gleiche wie im vorigen Beweis. Zusätzlich benötigen wir eine Quadraturformel der Ordnung 4. Bezeichne dazu die Eckpunkte von $K \in \mathcal{T}_h$ mit $z_{K,1}$, $z_{K,2}$, $z_{K,3}$ und setze

$$\begin{aligned}
z_{K,123} &:= \frac{1}{3}(z_{K,1} + z_{K,2} + z_{K,3}) \\
z_{K,iij} &:= (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{12}}{12}) z_{K,i} + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{12}}{12}) z_{K,j} \quad i,j \in \{1,2,3\}\ i \ne j \\
\omega_1 &:= \frac{9}{20} \\
\omega_2 &:= -\frac{1}{60} \\
\omega_3 &:= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $K \in \mathcal{T}_h$ und alle $\varphi \in \mathbb{P}_4(K)$

$$\int_K \varphi = |K| \left\{ \omega_1 \varphi(z_{K,123}) + \omega_2 \sum_{i=1}^{3} \varphi(z_{K,i}) + \omega_3 \sum_{i\ne j} \varphi(z_{K,iij}) \right\}.$$

Sei $p_h \in M_h$ beliebig. Dann gibt es ein $\mathbf{u}_h \in X_h$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h(z_{K,i}) =& 0 \\
\mathbf{u}_h(z_{K,123}) =& -|K|\nabla p_h(z_{K,123}) \\
\mathbf{u}_h(z_{K,iij}) =& -h_E^2 \frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,iij})\mathbf{t}_E
\end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{T}_h$ und alle relevanten Indizes $i,\ j$. Da p_h stetig und $\nabla p_h \cdot \mathbf{u}_h$ elementweise in $\mathbb{P}_4$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h =& -\int_\Omega \nabla p_h \cdot \mathbf{u}_h \\
=& \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |K| \left\{ \omega_1 |K| |\nabla p_h(z_{K,123})|^2 + \omega_3 \sum_{i\neq j} h_E^2 \left| \frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,iij}) \right|^2 \right\} \\
\geq& c \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 |K| \left\{ |\nabla p_h(z_{K,123})|^2 + \sum_{i\neq j} \left| \frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,iij}) \right|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Durch Transformation auf das Referenzelement folgt andererseits für jedes $K \in \mathcal{T}_h$

$$|K| \left\{ |\nabla p_h(z_{K,123})|^2 + \sum_{i\neq j} \left| \frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,iij}) \right|^2 \right\} \geq c' \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2.$$

Also ist

$$\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \geq c \|\nabla p_h\|_{1,h}^2.$$

Durch Transformation auf das Referenzelement folgt wiederum für jedes $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 \leq& c \left\{ |\mathbf{u}_h(z_{K,123})|^2 + \sum_{i\neq j} |\mathbf{u}_h(z_{K,iij})|^2 \right\} \\
=& c \left\{ |K|^2 |\nabla p_h(z_{K,123})|^2 + \sum_{i\neq j} h_E^4 \left| \frac{\partial p_h}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,iij}) \right|^2 \right\} \\
\leq& c' h_K^2 |K| \left\{ |\nabla p_h(z_{K,123})|^2 + \sum_{i\neq j} |\nabla p_h(z_{K,iij})|^2 \right\} \\
\leq& c'' h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2.
\end{aligned}$$

Also ist auch

$$|\mathbf{u}_h|_1 \leq c \|p_h\|_{1,h}.$$

Hieraus folgt Bedingung (3) von Satz 5.6. Die beiden anderen Bedingungen sind offensichtlich erfüllt. $\square$

5.13 Satz: *Betrachte ebene Dreieckselemente. Für $K \in \mathcal{T}_h$ und $m \geq 2$ bezeichne*

$$\tilde{\mathbb{P}}_{m-2}(K) := \operatorname{span}\{x_1^i x_2^{m-2-i} : 0 \leq i \leq m-2\}$$

den Raum der homogenen Polynome vom Grad $m-2$ auf K. Setze

$$B_{\mathcal{T},m,h} := \operatorname{span}\{\psi_K v : v \in \tilde{\mathbb{P}}_{m-2}(K),\ K \in \mathcal{T}_h\}$$

mit ψ_K wie in Satz 5.10. Dann ist das Paar $([S_{h,0}^{m,0} \oplus B_{\mathcal{T},m,h}]^2, S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega))$ für jedes $m \geq 2$ stabil.

Beweis: Sei $p_h \in M_h$ mit $\|p_h\|_0 = 1$ beliebig. Bezeichne mit $\overline{p}_h \in S_h^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega)$ die L^2-Projektion von p_h auf $S_h^{0,-1}$. Dann ist wegen der Poincaré'schen Ungleichung

$$\|p_h - \overline{p}_h\|_0 \leq c_1 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{1/2}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten c_1. Da wir ebene Dreieckselemente betrachten und $m \geq 2$ ist, gilt

$$[S_{h,0}^{1,0}]^2 \oplus B_{\mathcal{E},h} \subset X_h.$$

Dabei ist $B_{\mathcal{E},h}$ wie in Satz 5.8. Also gibt es ein $\beta^* > 0$, das weder von p_h noch von h abhängt, und ein $\overline{\mathbf{u}}_h \in X_h$ mit

$$|\overline{\mathbf{u}}_h|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \overline{p}_h \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}}_h \geq \beta^* \|\overline{p}_h\|_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p_h \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}}_h &= \int_\Omega \overline{p}_h \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}}_h + \int_\Omega (p_h - \overline{p}_h) \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}}_h \\
&\geq \beta^* \|\overline{p}_h\|_0 - \|p_h - \overline{p}_h\|_0 \sqrt{2} |\overline{\mathbf{u}}_h|_1 \\
&\geq \beta^* \|p_h\|_0 - \beta^* \|p_h - \overline{p}_h\|_0 - \sqrt{2} \|p_h - \overline{p}_h\|_0 \\
&\geq \beta^* - (\sqrt{2} + \beta^*)\ c_1 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\eta := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{1/2}$$

folgt

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h}{|\mathbf{v}_h|_1} \geq \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \overline{\mathbf{u}}_h}{|\overline{\mathbf{u}}_h|_1} \geq \beta^* - (\sqrt{2} + \beta^*)\ c_1 \eta. \tag{5}$$

Betrachte nun

$$\hat{\mathbf{u}}_h := -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \psi_K \nabla p_h.$$

Da ∇p_h elementweise in $\mathbb{P}_{m-2}$ ist, ist $\hat{\mathbf{u}}_h \in X_h$. Da $\hat{\mathbf{u}}_h$ auf den Dreieckskanten verschwindet, folgt mit elementweiser partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_\Omega p_h \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_h &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_h \\ &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla p_h \cdot \hat{\mathbf{u}}_h \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K \psi_K |\nabla p_h|^2.\end{aligned}$$

Durch Transformation auf das Referenzelement und Ausnutzen der Äquivalenz von Normen auf endlich dimensionalen Räumen folgt wie im Beweis von Satz 10.2 in VFEM für jedes $K \in \mathcal{T}_h$

$$\int_K \psi_K |\nabla p_h|^2 \geq c_2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2$$

mit einer von K, h und p_h unabhängigen Konstanten c_2. Also ist

$$\int_\Omega p_h \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_h \geq c_2 \eta^2.$$

Durch Transformation auf das Referenzelement folgt andererseits für jedes $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}|\hat{\mathbf{u}}_h|_{H^1(K)} \leq& c_3 h_K^{-1} \|\hat{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(K)} \\ =& c_3 h_K \|\psi_K \nabla p_h\|_{L^2(K)} \\ \leq& c_3 h_K \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}.\end{aligned}$$

Also ist

$$|\hat{\mathbf{u}}_h|_1 \leq c_3 \eta$$

und

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h}{|\mathbf{v}_h|_1} \geq \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_h}{|\hat{\mathbf{u}}_h|_1} \geq \frac{c_2}{c_3}\eta. \tag{6}$$

Aus den Abschätzungen (5) und (6) ergibt sich die behauptete Stabilität mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 5.6. $\square$

5.14 Bemerkung: **(1)** Satz 5.13 lässt sich mit einer kleinen Modifikation auf n-dimensionale simpliziale Elemente mit $n \geq 3$ übertragen. Da die Funktionen ψ_E stückweise Polynome vom Grad n sind, ist $B_{\mathcal{E},h} \subset [S_{h,0}^{n,0}]^n$. Daher überträgt sich der Beweis von Satz 5.13 direkt auf den Fall $m \geq n$ und liefert die Stabilität der Paare $([S_{h,0}^{m,0} \oplus B_{\mathcal{T},m,h}]^n, S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega))$ für alle $m \geq n$. Für $2 \leq m < n$ erhält man analog die Stabilität der Paare $([S_{h,0}^{m,0} \oplus B_{\mathcal{T},m,h}]^n \oplus B_{\mathcal{E},h}, S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega))$.
(2) Für ebene Dreiecksnetze, die einer Zusatzbedingung genügen, kann man auf den Term $B_{\mathcal{T},m,h}$ in Satz 5.13 verzichten (s. L. R. Scott, M. Vogelius: RAIRO M^2AN 19, 111 – 143 (1985)). Zur Beschreibung dieser Zusatzbedingung nennen wir einen Dreieckseckpunkt singulär, wenn die Kanten, die sich in diesem Punkt treffen, auf zwei Geraden liegen. Ist der Dreieckseckpunkt x nicht singulär, bezeichnen wir mit k die Zahl der angrenzenden Dreiecke und mit α_1, ..., α_k die anliegenden Winkel und setzen $R(x) := \max\{|\alpha_i + \alpha_j - \pi| : 1 \leq i, j \leq k, i - j = 1 \bmod k\}$. Die erwähnte Zusatzbedingung an die Triangulierung fordert nun, dass die Triangulierung keine singulären Dreieckseckpunkte enthält und dass $\inf_{h>0} \min_{x \in \mathcal{N}_h} R(x) > 0$ ist.
Die Notwendigkeit dieser Zusatzbedingung kann man sich wie folgt klar machen. Betrachte vier Dreiecke K_1, ..., K_4, die einen singulären Eckpunkt x_0 gemeinsam haben. Bezeichne mit $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ die normierten Richtungsvektoren der beiden Geraden, auf denen die von x_0 ausgehenden Dreieckskanten liegen. Sei $\mathbf{v} \in [S_{h,0}^{m,0}]^2$ beliebig. Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{v}$ elementweise eine Linearkombination der Ausdrücke $\frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, und die entsprechenden Koeffizienten sind auf allen vier Dreiecken die selben. Da $\mathbf{v}$ stetig ist, folgt für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\lim_{K_1 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) &= \lim_{K_2 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) \\
\lim_{K_3 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) &= \lim_{K_4 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) \\
\lim_{K_1 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x) &= \lim_{K_4 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x) \\
\lim_{K_2 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x) &= \lim_{K_3 \ni x \to x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{4} (-1)^i \lim_{K_i \ni x \to x_0} \operatorname{div} \mathbf{v}(x) = 0.$$

Also ist $\operatorname{div}([S_{h,0}^{m,0}]^2)$ in einem echten Unterraum von $S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega)$ enthalten. Wäre aber das Paar $([S_{h,0}^{m,0}]^2, S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega))$ stabil, so folgte wegen $\operatorname{div}([S_{h,0}^{m,0}]^2) \subset S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega)$ sogar die Gleichheit $\operatorname{div}([S_{h,0}^{m,0}]^2) = S_h^{m-1,-1} \cap L_0^2(\Omega)$. $\square$

II.6 Petrov-Galerkin Stabilisierung

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, insb. die Sätze 5.8, 5.10 und 5.13, zeigen, dass man (fast) jedes Paar (X_h, M_h) stabilisieren kann, indem man Funktionen der Form $\psi_K \mathbf{v}$, $\psi_E \mathbf{w}$ zu dem Geschwindigkeitsraum X_h hinzufügt. Dieses Ergebnis ist zwar theoretisch sehr beruhigend, für die Praxis aber nur zum Teil befriedigend. Denn zum einen wird der Geschwindigkeitsraum und damit die Zahl der Unbekannten vergrößert und zum anderen möchte man häufig unbedingt mit den ursprünglichen Ansatzräumen arbeiten, da sie z. B. besonders einfache Datenstrukturen erlauben. Ein Beispiel hierfür ist die in der Praxis sehr beliebte sog. **equal order interpolation**, d.h. $X_h = [S_{h,0}^{m,0}]^n$, $M_h = S_h^{m,0} \cap L_0^2(\Omega)$, bei der Druck und Geschwindigkeit die gleichen Freiheitsgrade haben. In diesem Abschnitt wollen wir daher einen anderen Zugang betrachten, bei dem für die Stabilisierung die Bilinearformen a und b und die linearen Funktionale l und χ modifiziert werden. Das folgende Beispiel motiviert unsere Vorgehensweise und zeigt zugleich, dass die Zugänge dieses und des letzten Paragraphen in gewissem Sinne äquivalent sind.

6.1 Beispiel: Wir betrachten das Mini-Element aus Satz 5.10 für eine ebene Dreieckszerlegung. Sei $(\mathbf{u}_h, p_h)$ die eindeutige Lösung des diskreten Stokes Problems

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad && \forall \mathbf{v}_h \in [S_{h,0}^{1,0}]^2 \oplus B_{\mathcal{T},h} \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= 0 && \forall q_h \in S_h^{1,0} \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ ist. Die Geschwindigkeit $\mathbf{u}_h$ lässt sich eindeutig in einen "linearen Anteil" $\mathbf{u}_{h,L} \in [S_{h,0}^{1,0}]^2$ und einen "Blasenanteil" $\mathbf{u}_{h,B} \in B_{\mathcal{T},h}$ zerlegen:

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{h,L} + \mathbf{u}_{h,B}.$$

Da $\mathbf{u}_{h,B}$ auf den Elementrändern verschwindet, ergibt sich mit dem Gauß'schen Integralsatz für jedes $\mathbf{v}_h \in [S_{h,0}^{1,0}]^2$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_{h,B} : \nabla \mathbf{v}_h &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_{h,B} : \nabla \mathbf{v}_h \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{u}_{h,B} \cdot \underbrace{\Delta \mathbf{v}_h}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_{h,L} : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in [S_{h,0}^{1,0}]^2.$$

Ebenso folgt für die Koeffizienten α_K in der Darstellung

$$\mathbf{u}_{h,B} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \alpha_K \psi_K$$

die Identität

$$\begin{aligned}
&\int_K \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_i\psi_K \\
=&\int_\Omega \mathbf{f}\cdot(\psi_K\mathbf{e}_i) \\
=&\underbrace{\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_{h,L} : \nabla(\psi_K\mathbf{e}_i)}_{=0} + \underbrace{\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_{h,B} : \nabla(\psi_K\mathbf{e}_i)}_{=\alpha_{K,i}\int_K|\nabla\psi_K|^2} - \underbrace{\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\psi_K\mathbf{e}_i)}_{=-\int_K \frac{\partial p_h}{\partial x_i}\psi_K} \\
=&\alpha_{K,i}\int_K |\nabla\psi_K|^2 + \int_K \frac{\partial p_h}{\partial x_i}\psi_K, \quad i=1,2,
\end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_K = \left\{\int_K [\mathbf{f}-\nabla p_h]\psi_K\right\}\left\{\int_K |\nabla\psi_K|^2\right\}^{-1} \quad \forall K\in\mathcal{T}_h.$$

Definieren wir zur Abkürzung

$$\tilde{\gamma}_K := \left\{\int_K |\nabla\psi_K|^2\right\}^{-1}$$

und setzen die gewonnene Darstellung für $\mathbf{u}_{h,B}$ in die diskrete Massengleichung ein, erhalten wir für jedes $q_h \in S_h^{1,0}\cap L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
0 =& \int_\Omega q_h \operatorname{div}\mathbf{u}_h \\
=& \int_\Omega q_h \operatorname{div}\mathbf{u}_{h,L} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \underbrace{\int_K q_h \operatorname{div}(\alpha_K\psi_K)}_{=-\int_K \psi_K\alpha_K\cdot\nabla q_h} \\
=& \int_\Omega q_h \operatorname{div}\mathbf{u}_{h,L} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \tilde{\gamma}_K \left\{\int_K \psi_K\nabla q_h\right\}\cdot\left\{\int_K \psi_K[\mathbf{f}-\nabla p_h]\right\}.
\end{aligned}$$

Also ist $(\mathbf{u}_{h,L}, p_h) \in [S_{h,0}^{1,0}]^2 \times [S_h^{1,0}\cap L_0^2(\Omega)]$ die Lösung des modifizierten Problems

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_{h,L} : \nabla\mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div}\mathbf{v}_h &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_h \quad \forall\mathbf{v}_h\in[S_{h,0}^{1,0}]^2 \\
\int_\Omega q_h \operatorname{div}\mathbf{u}_{h,L} + c_h(p_h,q_h) &= \chi_h(q_h) \qquad \forall q_h\in S_h^{1,0}\cap L_0^2(\Omega)
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
c_h(p_h, q_h) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \gamma_K \int_K \nabla p_h \cdot \nabla q_h \\
\chi_h(q_h) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{\gamma}_K \left\{ \int_K \psi_K \nabla q_h \right\} \cdot \left\{ \int_K \psi_K \mathbf{f} \right\} \\
\gamma_K &:= \tilde{\gamma}_K |K|^{-1} \left\{ \int_K \psi_K \right\}^2 .
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass γ_K zu h_K^2 proportional ist. $\square$

Wir betrachten im folgenden eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung $\mathcal{T}_h$ eines polyhedralen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, wie in § I.4 und zugehörige Finite Element Räume $X_h \subset H_0^1(\Omega)^n$ und $M_h \subset L_0^2(\Omega)$. Wie in § 5 ordnen wir diesen Räumen maximal gewählte Zahlen $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}$ mit

$$
\left[S_{h,0}^{\mu,0} \right]^n \subset X_h
$$

und

$$
S_h^{\nu,-1} \cap L_0^2(\Omega) \subset M_h \quad \text{oder} \quad S_h^{\nu,0} \cap L_0^2(\Omega) \subset M_h
$$

zu. Zusätzlich nehmen wir an, dass die Funktionen in X_h bzw. M_h elementweise zwei- bzw. einmal stetig differenzierbar sind. Insbesondere ist dann $\|.\|_{1,h}$ aus Gleichung (4) von § 5 eine Norm auf M_h. Jedem Element $K \in \mathcal{T}_h$ und jeder Kante bzw. Fläche $E \in \mathcal{E}_h$ ordnen wir zwei positive Parameter δ_K und δ_E zu. Die Wahl dieser Größen ist zunächst beliebig, wird aber später eingeschränkt. Wir definieren nun auf $X_h \times M_h$ eine Norm $|||.|||_h$, eine Bilinearform B_h und ein lineares Funktional l_h durch

$$
\begin{aligned}
|||[\mathbf{u}_h, p_h]|||_h &:= \left\{ |\mathbf{u}_h|_1^2 + \|p_h\|_0^2 + \|p_h\|_{1,h}^2 \right\}^{1/2} \\
B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &:= \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \int_K [-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h] \cdot \nabla q_h \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \int_E [p_h]_E [q_h]_E \\
l_h([\mathbf{v}_h, q_h]) &:= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla q_h .
\end{aligned}
$$

Dabei setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass der Quellterm $\mathbf{f}$ der Stokes Gleichungen quadrat-integrierbar ist. Man beachte, dass die δ_K- und δ_E-Terme in B_h und l_h die zusätzlichen Stabilisierungsterme sind. Die Sprungterme in B_h verschwinden,

wenn eine stetige Druckapproximation, d.h. $M_h \subset C(\overline{\Omega})$, verwendet wird. Ebenso verschwindet der Term $\Delta \mathbf{u}_h$ in B_h, wenn die Geschwindigkeit stückweise linear ist. Das neue diskrete Problem lautet nun:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } [\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h \times M_h, \text{ so dass} \\ B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) =& l_h([\mathbf{v}_h, q_h]) \quad \forall [\mathbf{v}_h, q_h] \in X_h \times M_h. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir untersuchen zunächst die Stabilität von B_h und damit die eindeutige Lösbarkeit von (1). Dazu definieren wir

$$\delta_{\max} := \max \left\{ \max_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \ , \ \max_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E \right\}$$

$$\delta_{\min} := \begin{cases} \min \left\{ \min_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \ , \ \min_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E \right\} & \text{, falls } M_h \not\subset C(\overline{\Omega}) \\ \min_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K & \text{, falls } M_h \subset C(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

6.2 Satz: *Es gibt eine Konstante $\delta_0 > 0$, die nur von der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an $\mathcal{T}_h$ abhängt, so dass für alle Parameter δ_K, δ_E mit $\delta_{\max} \leq \delta_0$ und $\delta_{\min} > 0$ folgendes gilt: Es gibt eine Konstante β, die nur von $\delta_{\min}$ abhängt, mit*

$$\inf_{[\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h \times M_h \setminus \{0\}} \ \sup_{[\mathbf{v}_h, q_h] \in X_h \times M_h \setminus \{0\}} \frac{B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h])}{|||[\mathbf{u}_h, p_h]|||_h |||[\mathbf{v}_h, q_h]|||_h} \geq \beta.$$

Es ist $\beta \sim \delta_{\min}^{-1}$.

Beweis: **1. Schritt:** Wir zeigen, dass es ein δ_0 der beschriebenen Art gibt, so dass für alle Parameter δ_K, δ_E mit $\delta_{\max} \leq \delta_0$ und $\delta_{\min} > 0$ und alle $[\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h \times M_h$ gilt

$$B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) \geq \frac{1}{2} \delta_{\min} \left\{ |||[\mathbf{u}_h, p_h]|||_h^2 - \|p_h\|_0^2 \right\}.$$

Sei dazu $[\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h \times M_h$ beliebig. Dann folgt aus der Definition von B_h

$$\begin{aligned} B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) = & \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}_h|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \int_K [-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h] \cdot \nabla p_h \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \int_E |[p_h]_E|^2 \\ \geq & |\mathbf{u}_h|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \|[p_h]_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \|\Delta \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

Durch Transformation auf das Referenzelement zeigt man, dass es eine Konstante c_0 gibt, die nur von $c_{\mathcal{T}}$ abhängt, so dass für alle $K \in \mathcal{T}_h$, alle $h > 0$ und alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt

$$\|\Delta \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} \leq c_0 h_K^{-1} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}.$$

Setzen wir dies in obige Abschätzung ein und wenden die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für Summen an, erhalten wir mit Gleichung (4) aus § 5

$$\begin{aligned}
B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) \geq & |\mathbf{u}_h|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \|[p_h]_E\|_{L^2(E)}^2 \\
& - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_0 \delta_K^{1/2} |\mathbf{u}_h|_{H^1(K)} \delta_K^{1/2} h_K \|\nabla p_h\|_{L^2(K)} \\
\geq & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_K) |\mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \|[p_h]_E\|_{L^2(E)}^2 \\
\geq & (1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_{\max}) |\mathbf{u}_h|_1^2 + \frac{1}{2} \delta_{\min} \|p_h\|_{1,h}^2.
\end{aligned}$$

Setze $\delta_0 = \frac{2}{1+c_0^2}$. Dann folgt aus $\delta_{\max} \leq \delta_0$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_{\max} \geq & 1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_0 \\
= & \frac{1}{1 + c_0^2} = \frac{1}{2} \delta_0 \geq \frac{1}{2} \delta_{\max} \\
\geq & \frac{1}{2} \delta_{\min}.
\end{aligned}$$

Also ist dann

$$\begin{aligned}
B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{u}_h, p_h]) \geq & \frac{1}{2} \delta_{\min} \{|\mathbf{u}_h|_1^2 + \|p_h\|_{1,h}^2\} \\
= & \frac{1}{2} \delta_{\min} \{|||[\mathbf{u}_h, p_h]|||_h^2 - \|p_h\|_0^2\}.
\end{aligned}$$

2. Schritt: Sei δ_0 wie im 1. Schritt bestimmt und $0 < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} \leq \delta_0$. Wir zeigen nun die inf-sup-Bedingung für B_h. Sei dazu $[\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h \times M_h$ mit $|||[\mathbf{u}_h, p_h]|||_h = 1$ beliebig. Gemäß Satz 3.3 gibt es ein $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ mit

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = -p_h \quad \text{und} \quad |\mathbf{w}|_1 \leq c_\Omega \|p_h\|_0.$$

Sei $\mathbf{w}_h := R_h \mathbf{w} \in [S_{h,0}^{1,0}]^n \subset X_h$ die modifizierte Clément Interpolierende von $\mathbf{w}$ wie in § I.4. Dann ist

$$|\mathbf{w}_h|_1 \leq c_1 c_\Omega \|p_h\|_0$$

und

$$
\begin{aligned}
B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{w}_h, 0]) &= \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h \\
&= \underbrace{-\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{w}}_{=\|p_h\|_0^2} + \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) + \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h \\
&\geq \|p_h\|_0^2 + \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) - |\mathbf{u}_h|_1 |\mathbf{w}_h|_1 \\
&\geq \|p_h\|_0^2 - c_1 c_\Omega \|p_h\|_0 |\mathbf{u}_h|_1 + \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h).
\end{aligned}
$$

Als nächstes integrieren wir $\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h)$ elementweise partiell und nutzen die lokalen Approximationseigenschaften von R_h wie im Beweis von Satz 5.6 aus. Dies ergibt

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla p_h \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [p_h]_E (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \cdot \mathbf{n}_E \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla p_h\|_{L^2(K)} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|[p_h]_E\|_{L^2(E)} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(E)} \\
&\leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|[p_h]_E\|_{L^2(E)}^2 \right\}^{1/2} \cdot \\
&\quad \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(E)}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq \|p_h\|_{1,h} c_2 |\mathbf{w}|_1 \\
&\leq c_2 c_\Omega \|p_h\|_{1,h} \|p_h\|_0.
\end{aligned}
$$

Setzen wir dies in die Abschätzung für $B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{w}_h, 0])$ ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{w}_h, 0]) &\geq \|p_h\|_0^2 - c_1 c_\Omega \|p_h\|_0 |\mathbf{u}_h|_1 - c_2 c_\Omega \|p_h\|_{1,h} \|p_h\|_0 \\
&\geq \frac{1}{4} \|p_h\|_0^2 - c_1^2 c_\Omega^2 |\mathbf{u}_h|_1^2 - c_2^2 c_\Omega^2 \|p_h\|_{1,h}^2 \\
&\geq \frac{1}{4} \|p_h\|_0^2 - c_3^2 c_\Omega^2 \{|\mathbf{u}_h|_1^2 + \|p_h\|_{1,h}^2\} \\
&= (c_3^2 c_\Omega^2 + \frac{1}{4}) \|p_h\|_0^2 - c_3^2 c_\Omega^2
\end{aligned}
$$

mit $c_3 := \max\{c_1, c_2\}$. Aus dieser Abschätzung und Schritt 1 folgt

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[\mathbf{v}_h, q_h] \in X_h \times M_h \setminus \{0\}} \frac{B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h])}{|||[\mathbf{v}_h, q_h]|||_h} \\
&\geq \max \left\{ \frac{B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{u}_h, p_h])}{|||[\mathbf{u}_h, p_h]|||_h} \ , \ \frac{B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{w}_h, 0])}{|||[\mathbf{w}_h, 0]|||_h} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \max\left\{\frac{1}{2}\delta_{\min} - \frac{1}{2}\delta_{\min}\|p_h\|_0^2\ ,\ \frac{\frac{1}{4}+c_3^2c_\Omega^2}{c_1c_\Omega}\|p_h\|_0 - \frac{c_3^2c_\Omega}{c_1}\|p_h\|_0^{-1}\right\}\\
&\geq \min_{z\in\mathbb{R}_+^*}\max\left\{\frac{1}{2}\delta_{\min} - \frac{1}{2}\delta_{\min}z\ ,\ \frac{\frac{1}{4}+c_3^2c_\Omega^2}{c_1c_\Omega}z - \frac{c_3^2c_\Omega}{c_1}z^{-1}\right\}\\
&:=\beta\\
&>0.
\end{aligned}
$$

Dies beweist die Behauptung. □

Aus Satz 6.2 folgt unmittelbar, dass das diskrete Problem (1) eindeutig lösbar ist. Der folgende Satz gibt eine Fehlerabschätzung für diese Lösung.

6.3 Satz: *Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz 6.2. Bezeichne mit* $[\mathbf{u},p]\in X\times M$ *die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen und mit* $[\mathbf{u}_h,p_h]\in X_h\times M_h$ *die eindeutige Lösung von (1). Es sei* $\mathbf{u}\in H^2(\Omega)^n$, $p\in H^1(\Omega)$. *Dann ist*

$$
\begin{aligned}
|||[\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h]|||_h \leq c \inf_{[\mathbf{v}_h,q_h]\in X_h\times M_h}&\Big\{|||[\mathbf{u}-\mathbf{v}_h,p-q_h]|||_h\\
&+\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\|\Delta(\mathbf{u}-\mathbf{v}_h)\|_{L^2(K)}^2\Big\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

mit $c\sim\delta_{\max}\beta^{-1}$. *Weiter gebe es ein* $m\in\mathbb{N}^*$ *mit* $\mathbf{u}\in H^{m+1}(\Omega)^n$ *und* $p\in H^m(\Omega)$. *Dann ist*

$$
|||[\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h]|||_h \leq c\left\{h^{\min\{\mu,m\}}|\mathbf{u}|_{m+1} + h^{\min\{\nu+1,m\}}|p|_m\right\}.
$$

Beweis: Sei $[\mathbf{v}_h,q_h]\in X_h\times M_h$ beliebig. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$
|||[\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h]|||_h \leq |||[\mathbf{u}-\mathbf{v}_h,p-q_h]|||_h + |||[\mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h,p_h-q_h]|||_h.
$$

Aus Satz 6.2 ergibt sich

$$
|||[\mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h,p_h-q_h]|||_h \leq \frac{1}{\beta}\sup_{[\mathbf{w}_h,r_h]\in X_h\times M_h}\frac{B_h([\mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h,p_h-q_h],[\mathbf{w}_h,r_h])}{|||[\mathbf{w}_h,r_h]|||_h}.
$$

Betrachte ein beliebiges Element $[\mathbf{w}_h,r_h]\in X_h\times M_h$ mit $|||[\mathbf{w}_h,r_h]|||_h=1$. Wegen der Bilinearität von B_h ist

$$
\begin{aligned}
&B_h([\mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h,p_h-q_h],[\mathbf{w}_h,r_h])\\
=&B_h([\mathbf{u}-\mathbf{v}_h,p-q_h],[\mathbf{w}_h,r_h]) + B_h([\mathbf{u}_h-\mathbf{u},p_h-p],[\mathbf{w}_h,r_h]).
\end{aligned}
$$

Aus der Definition von B_h und l_h folgt

$$
\begin{aligned}
B_h([\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, p_h - p], [\mathbf{w}_h, r_h]) =& B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{w}_h, r_h]) - B_h([\mathbf{u}, p], [\mathbf{w}_h, r_h]) \\
=& l_h([\mathbf{w}_h, r_h]) - B_h([\mathbf{u}, p], [\mathbf{w}_h, r_h]) \\
=& \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla r_h \\
& \underbrace{- \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w}_h + \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{w}_h}_{= - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_h} - \underbrace{\int_\Omega r_h \operatorname{div} \mathbf{u}}_{=0} \\
& - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \int_K \underbrace{[-\Delta \mathbf{u} + \nabla p]}_{=\mathbf{f}} \cdot \nabla r_h \\
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \int_E \underbrace{[p]_E}_{=0} [r_h]_E \\
=& 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass wegen $p \in H^1(\Omega)$ die Sprünge von p über die Elementränder verschwinden.
Aus der Definition von B_h und von $|||.|||_h$ folgt weiter mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
& B_h([\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, p - q_h], [\mathbf{w}_h, r_h]) \\
=& \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) : \nabla \mathbf{w}_h - \int_\Omega (p - q_h) \operatorname{div} \mathbf{w}_h + \int_\Omega r_h \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \int_K [-\Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \nabla(p - q_h)] \cdot \nabla r_h \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \int_E [p - q_h]_E [r_h]_E \\
\leq& |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_1 |\mathbf{w}_h|_1 + \sqrt{n} \|p - q_h\|_0 |\mathbf{w}_h|_1 + \sqrt{n} \|r_h\|_0 |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_1 \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K h_K^2 \left\{ \|\Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{L^2(K)} + \|\nabla(p - q_h)\|_{L^2(K)} \right\} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \delta_E h_E \|[p - q_h]_E\|_{L^2(E)} \|[r_h]_E\|_{L^2(E)} \\
\leq& c \left\{ |||[\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, p - q_h]|||_h^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{1/2} |||[\mathbf{w}_h, r_h]|||_h.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Abschätzungen folgt die erste Fehlerabschätzung des Satzes.
Die zweite Fehlerabschätzung des Satzes folgt aus der ersten und den Approximationseigenschaften der Finite Element Räume aus § I.4. $\square$

6.4 Bemerkung: **(1)** Ein wesentlicher Schritt im Beweis von Satz 6.3 ist die sog. **Galerkin Orthogonalität des Fehlers**, d.h. Gleichung (2). Sie gilt, da die zusätzlichen Stabilitätsterme in B_h und l_h konsistent sind, d.h. für die schwache Lösung der Stokes Gleichungen verschwinden.

(2) Wie in Bem. 5.2 (3) ist wieder die Wahl $\nu = \mu - 1$ optimal.

(3) Anders als in Satz 5.1 benötigt die erste Fehlerabschätzung von Satz 6.3, die dem Céa-Lemma entspricht, schon eine höhere Regularität der Lösung der Stokes Gleichungen. Satz 6.3 kommt nicht mit der Regularität aus, die für die schwache Variationsformulierung benötigt wird. Diese zusätzliche Regularitätsvoraussetzung spiegelt sich auch in praktischen Rechnungen wider. Und zwar in Form eines Genauigkeitsverlustes bei Stokes Problemen, deren Lösung nicht die nötige Regularität aufweist, z.B. bei polygonalen Gebieten mit einspringenden Ecken. $\square$

II.7 Nicht konforme Methoden

Bisher haben wir stets konforme Methoden betrachtet, d.h. es galt $X_h \subset X$ und $M_h \subset M$. Die wesentliche Bedingung ist hierbei natürlich die globale Stetigkeit der diskreten Geschwindigkeitsfelder. Wie in § 12 VFEM wollen wir diese Restriktion nun aufgeben. Dafür werden wir eine Approximation erhalten, die exakt divergenzfrei ist und eine explizite lokale Basis des Raumes V_h besitzt.

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{T}_h$, $h > 0$, eine Familie ebener, zulässiger und regulärer Triangulierungen des *einfach zusammenhängenden* polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die Menge aller Dreieckskanten bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{E}}_h$; $\mathcal{E}_h$ bezeichnet wie bisher die Menge der inneren Kanten. Für $E \in \overline{\mathcal{E}}_h$ ist m_E der Mittelpunkt. In Analogie zu § 12 VFEM definieren wir den Raum der **Crouzeix-Raviart Elemente** durch

$$\begin{aligned} X_h := \{\varphi \in L^2(\Omega)^2 :& \varphi_{|K} \in \mathbb{P}_1 \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ & [\varphi]_E(m_E) = 0 \ \forall E \in \mathcal{E}_h, \ \varphi(m_E) = 0 \ \forall E \in \overline{\mathcal{E}}_h \backslash \mathcal{E}_h\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen in X_h sind eindeutig bestimmt durch ihre Werte in den Kantenmittelpunkten. Durch

$$|\mathbf{v}_h|_{1,h} := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}_h|^2_{H^1(K)} \right\}^{1/2}$$

wird eine Norm auf X_h definiert. Für die Druckapproximation wählen wir

$$M_h := S_h^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega).$$

Wir definieren diskrete Analoga a_h, b_h und l_h von a, b und l durch

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \\ b_h(\mathbf{u}_h, p_h) &:= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \\ l_h(\mathbf{u}_h) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_h. \end{aligned}$$

Man beachte, dass diese Bilinear- bzw. Linearformen auch für Argumente aus X bzw. M definiert sind und mit a, b bzw. l übereinstimmen, wenn die entsprechenden Argumente alle aus den Räumen X bzw. M sind.

Das diskrete Stokes Problem, das wir im folgenden betrachten werden, lautet dann:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h, \text{ so dass} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= l_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \qquad\quad \forall q_h \in M_h. \end{aligned} \tag{1}$$

7.1 Lemma: **(1)** *Für alle $h > 0$ und alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt*

$$a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq |\mathbf{v}_h|_{1,h}^2.$$

(2) *Es gibt ein $\tilde{\beta} > 0$, das nicht von h abhängt, so dass für alle $h > 0$ gilt*

$$\inf_{p_h \in M_h \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{u}_h, p_h)}{|\mathbf{u}_h|_{1,h} \|p_h\|_0} \geq \tilde{\beta}.$$

(3) *Sei*

$$V_h := \{\mathbf{v}_h \in X_h : b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = 0 \ \forall p_h \in M_h\}.$$

Dann ist $V_h \neq \{0\}$ und

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h : \operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0\}.$$

Beweis: **ad (1):** Folgt direkt aus der Definition von a_h und $|.|_{1,h}$.
ad (2): Wir definieren zunächst einen linearen Operator $\pi_h : X \longrightarrow X_h$ durch

$$(\pi_h \mathbf{v})(m_E) := \begin{cases} \dfrac{1}{|E|} \displaystyle\int_E \mathbf{v} & \text{, falls } E \in \mathcal{E}_h \\ 0 & \text{, falls } E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h. \end{cases}$$

Seien $q_h \in M_h$ und $\mathbf{v} \in X$ beliebig. Da die Mittelpunktsregel die Ordnung 1 hat, folgt

$$
\begin{aligned}
b_h(\pi_h \mathbf{v}, q_h) &= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{v}) \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h \int_K \operatorname{div}(\pi_h \mathbf{v}) \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h \left\{ \sum_{\substack{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \\ E \subset \partial K}} \underbrace{\int_E \mathbf{n}_K \cdot (\pi_h \mathbf{v})}_{=|E| \mathbf{n}_K \cdot (\pi_h \mathbf{v})(m_E)} \right\} \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h \left\{ \sum_{\substack{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \\ E \subset \partial K}} \int_E \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v} \right\} \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{v} \\
&= b_h(\mathbf{v}, q_h) \\
&= b(\mathbf{v}, q_h).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Seien nun $\mathbf{v} \in X$ und $K \in \mathcal{T}_h$ beliebig. Da $\pi_h \mathbf{v}$ und $\frac{\partial \pi_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_K}$ auf den Kanten von K linear bzw. konstant sind, folgt mit der Mittelpunktsregel und dem Gauß'schen Integralsatz

$$
\begin{aligned}
|\pi_h \mathbf{v}|^2_{H^1(K)} &= \int_K \nabla(\pi_h \mathbf{v}) : \nabla(\pi_h \mathbf{v}) \\
&= \int_{\partial K} \frac{\partial(\pi_h \mathbf{v})}{\partial \mathbf{n}_K} \cdot \pi_h \mathbf{v} - \int_K \underbrace{\Delta(\pi_h \mathbf{v})}_{=0} \cdot \pi_h \mathbf{v} \\
&= \sum_{\substack{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \\ E \subset \partial K}} \frac{\partial(\pi_h \mathbf{v})}{\partial \mathbf{n}_K} \cdot \underbrace{\int_E \pi_h \mathbf{v}}_{=|E|(\pi_h \mathbf{v})(m_E)} \\
&= \sum_{\substack{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \\ E \subset \partial K}} \frac{\partial(\pi_h \mathbf{v})}{\partial \mathbf{n}_K} \cdot \int_E \mathbf{v} \\
&= \int_{\partial K} \frac{\partial(\pi_h \mathbf{v})}{\partial \mathbf{n}_K} \cdot \mathbf{v} \\
&= \int_{\partial K} \frac{\partial(\pi_h \mathbf{v})}{\partial \mathbf{n}_K} \cdot \mathbf{v} - \int_K \underbrace{\Delta(\pi_h \mathbf{v})}_{=0} \cdot \mathbf{v} \\
&= \int_K \nabla(\pi_h \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} \leq |\pi_h \mathbf{v}|_{H^1(K)} |\mathbf{v}|_{H^1(K)}.
\end{aligned}
$$

Summation über alle $K \in \mathcal{T}_h$ und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für Summen ergeben

$$|\pi_h \mathbf{v}|_{1,h}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\pi_h \mathbf{v}|_{H^1(K)} |\mathbf{v}|_{H^1(K)} \leq |\pi_h \mathbf{v}|_{1,h} |\mathbf{v}|_1.$$

Also ist

$$|\pi_h \mathbf{v}|_{1,h} \leq |\mathbf{v}|_1. \tag{3}$$

Sei nun $p_h \in M_h$ mit $\|p_h\|_0 = 1$ beliebig. Wegen Satz 3.3 gibt es ein $\beta > 0$, das weder von h noch von p_h abhängt, und ein $\mathbf{v} \in X$ mit

$$|\mathbf{v}|_1 = 1 \quad \text{und} \quad -\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Aus (2) und (3) folgt

$$|\pi_h \mathbf{v}|_{1,h} \leq 1$$

und

$$b_h(\pi_h \mathbf{v}, p_h) = b(\mathbf{v}, p_h) = -\int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige inf-sup Bedingung mit $\tilde{\beta} = \beta$.
ad (3): Wegen Satz 2.1 und Teil (2) ist $V_h \neq \{0\}$. Da die Mittelpunktsregel die Ordnung 1 hat, gilt für jedes $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\begin{aligned}
b_h(\mathbf{v}_h, 1) =& -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}_h \\
=& -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \\ E \subset \partial K}} \underbrace{\int_E \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K}_{=|E| \mathbf{v}_h(m_E) \cdot \mathbf{n}_K} \\
=& -\sum_{E \in \mathcal{E}_h} |E| [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E (m_E) - \sum_{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h} |E| \mathbf{v}_h(m_E) \cdot \mathbf{n} \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h : b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \ \forall q_h \in S_h^{0,-1}\}.$$

Da andererseits $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ für $\mathbf{v}_h \in X_h$ stückweise konstant ist, folgt hieraus die Behauptung. □

Wegen Lemma 7.1 und Satz 2.5 besitzt Problem (1) stets eine eindeutige Lösung. Außerdem ist (1) äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
&\text{Finde } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ mit} \\
&a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h.
\end{aligned} \tag{4}$$

Als nächstes schätzen wir den Konsistenzfehler von (4) ab.

7.2 Lemma: *Sei $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen. Es gelte $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ und $p \in H^1(\Omega)$. Dann gilt für alle $\mathbf{w} \in V \oplus V_h$*

$$\begin{aligned}|L_h(\mathbf{w})| :=& |a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - l_h(\mathbf{w})| \\ \leq& ch\{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}|\mathbf{w}|_{1,h}.\end{aligned}$$

Die Konstante c hängt nur von der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an $\mathcal{T}_h$ ab.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 12.3 in VFEM. Sei $\mathbf{w} \in V \oplus V_h$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}L_h(\mathbf{w}) =& a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - l_h(\mathbf{w}) \\ =& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}\} \\ =& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \nabla p \cdot \mathbf{w}\}.\end{aligned}$$

Durch elementweise partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} \\ =& \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E} \cdot \mathbf{w}\right]_E + \sum_{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h} \int_E \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Bezeichne mit

$$\overline{\mathbf{w}}_E := \frac{1}{|E|} \int_E \mathbf{w}$$

den Mittelwert von $\mathbf{w}$ auf $E \in \overline{\mathcal{E}}_h$ und mit $I_h : X \cap H^2(\Omega)^2 \longrightarrow [S_{h,0}^{1,0}]^2 \subset X_h$ den nodalen Interpolationsperator. Da $\frac{\partial I_h \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E}$ für jede Kante $E \in \overline{\mathcal{E}}_h$ konstant und $\int_E (\mathbf{w} - \overline{\mathbf{w}}_E) = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned}&\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} \\ =& \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left[\frac{\partial (\mathbf{u} - I_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_E} \cdot (\mathbf{w} - \overline{\mathbf{w}}_E)\right]_E + \sum_{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h} \int_E \frac{\partial (\mathbf{u} - I_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \cdot (\mathbf{w} - \overline{\mathbf{w}}_E).\end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 12.3 VFEM haben wir gezeigt, dass jeder Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung durch

$$ch_E |\mathbf{w}|_{H^1(K)} |\mathbf{u}|_{H^2(K)}$$

abgeschätzt werden kann. Dabei ist K ein Dreieck mit $E \subset \partial K$. Dies liefert mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung die Abschätzung

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} \right| \leq ch|\mathbf{u}|_2 |\mathbf{w}|_{1,h}.$$

Wir betrachten nun den Term $-\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla p \cdot \mathbf{w}$. Elementweise partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} &- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla p \cdot \mathbf{w} \\ = &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{w} - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [p\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_E]_E - \sum_{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h} \int_E p\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Die Linienintegrale auf der rechten Seite dieser Gleichung können wie oben mit $p\mathbf{n}_E$ an Stelle von $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E}$ abgeschätzt werden. Wir erhalten dann für diesen Beitrag

$$\left| \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [p\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_E]_E + \sum_{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h} \int_E p\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \right| \leq ch|p|_1 |\mathbf{w}|_{1,h}.$$

Ist $\mathbf{w} \in V$, so ist natürlich

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{w} = 0,$$

und wir sind fertig. Sei also $\mathbf{w} \in V_h$. Bezeichne mit $\pi_h^{(0)} : L_0^2(\Omega) \longrightarrow M_h$ die L^2-Projektion. Dann folgt mit der Poincaré'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{w} = &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p - \pi_h^{(0)} p) \operatorname{div} \mathbf{w} \\ \leq &\|p - \pi_h^{(0)} p\|_0 |\mathbf{w}|_{1,h} \\ \leq &ch|p|_1 |\mathbf{w}|_{1,h}, \end{aligned}$$

und wir haben auch in diesem Fall die Behauptung bewiesen. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun eine Fehlerabschätzung für die Diskretisierung (1) beweisen.

7.3 Satz: *Seien $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen und $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ die eindeutige Lösung von (1). Es gelte $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ und $p \in H^1(\Omega)$. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,h} + \|p - p_h\|_0 \leq c_1 h\{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.$$

Ist zusätzlich Ω konvex, so ist

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0 \le c_2 h^2\{|\mathbf{u}|_2+|p|_1\}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen nur von Ω und der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an $\mathcal{T}_h$ ab.

Beweis: Für den Geschwindigkeitsfehler können wir die abstrakten Fehlerabschätzungen für nicht konforme Methoden der Sätze 12.1 und 12.2 aus VFEM anwenden. Zusammen mit der Abschätzung des Konsistenzfehlers aus Lemma 7.2 ergeben diese Sätze die Fehlerabschätzungen

$$|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,h} \le 2 \inf_{\mathbf{v}_h\in V_h} |\mathbf{u}-\mathbf{v}_h|_{1,h} + ch\{|\mathbf{u}|_2+|p|_1\}$$

und

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_0 \le \sup_{\substack{\mathbf{g}\in L^2(\Omega)^2\\ \|\mathbf{g}\|_0=1}} \Big\{ &|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,h}|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}-\mathbf{u}_{\mathbf{g},h}|_{1,h}\\ &+ ch\{|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}|_2+|p_{\mathbf{g}}|_1\}|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,h}\\ &+ ch\{|\mathbf{u}|_2+|p|_1\}|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}-\mathbf{u}_{\mathbf{g},h}|_{1,h}\Big\}.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $(\mathbf{u}_{\mathbf{g}}, p_{\mathbf{g}}) \in X\times M$ und $\mathbf{u}_{\mathbf{g},h} \in V_h$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen mit rechter Seite $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2$ bzw. des entsprechenden diskreten Problems (4).

Wegen des Regularitätssatzes 3.5 müssen wir für die Fehlerabschätzung der Geschwindigkeit nur noch den Term $\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h} |\mathbf{u}-\mathbf{v}_h|_{1,h}$ abschätzen. Dazu beachten wir, dass $\mathbf{u} \in V$ ist und dass für den Operator π_h aus dem Beweis von Lemma 7.1 (2) gilt $\pi_h(V) \subset V_h$. Daher ist

$$\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h} |\mathbf{u}-\mathbf{v}_h|_{1,h} \le |\mathbf{u}-\pi_h\mathbf{u}|_{1,h}.$$

Bezeichne wieder mit $I_h : X\cap H^2(\Omega)^2 \longrightarrow [S^{1,0}_{h,0}]^2 \subset X_h$ den nodalen Interpolationsoperator. Wegen $\pi_h I_h\mathbf{u} = I_h\mathbf{u}$ folgt dann aus (3)

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}-\pi_h\mathbf{u}|_{1,h} \le& |\mathbf{u}-I_h\mathbf{u}|_{1,h} + |I_h\mathbf{u}-\pi_h\mathbf{u}|_{1,h}\\ =& |\mathbf{u}-I_h\mathbf{u}|_{1,h} + |\pi_h(I_h\mathbf{u}-\mathbf{u})|_{1,h}\\ \le& 2|\mathbf{u}-I_h\mathbf{u}|_{1,h}\\ =& 2|\mathbf{u}-I_h\mathbf{u}|_1\\ \le& ch|\mathbf{u}|_2.\end{aligned}$$

Damit sind die Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit bewiesen.

Bezeichne wieder mit $\pi_h^{(0)} : L_0^2(\Omega) \longrightarrow M_h$ die L^2-Projektion. Dann ist

$$\|p - p_h\|_0 \leq \|p - \pi_h^{(0)} p\|_0 + \|\pi_h^{(0)} p - p_h\|_0$$

und

$$\|p - \pi_h^{(0)} p\|_0 \leq ch|p|_1.$$

Aus Lemma 7.1 (2) folgt weiter

$$\|\pi_h^{(0)} p - p_h\|_0 \leq \tilde{\beta}^{-1} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h^{(0)} p - p_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}}.$$

Sei $\mathbf{v}_h \in X_h$ mit $|\mathbf{v}_h|_{1,h} = 1$ beliebig. Dann ist

$$b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h^{(0)} p - p_h) = b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h^{(0)} p - p) + b_h(\mathbf{v}_h, p - p_h)$$

und

$$b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h^{(0)} p - p) \leq \sqrt{2} |\mathbf{v}_h|_{1,h} \|p - \pi_h^{(0)} p\|_0 \leq ch|p|_1.$$

Aus (1) folgt weiter

$$\begin{aligned}
& b_h(\mathbf{v}_h, p - p_h) \\
=& b_h(\mathbf{v}_h, p) + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - l_h(\mathbf{v}_h) \\
=& a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_h - p \operatorname{div} \mathbf{v}_h - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h\} \\
=& a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_h + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_h - p \operatorname{div} \mathbf{v}_h - \nabla p \cdot \mathbf{v}_h\}.
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden erhalten wir mit den schon bewiesenen Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit

$$a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \leq |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,h} |\mathbf{v}_h|_{1,h} \leq ch\{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir mit elementweiser partieller Integration und dem Beweis von Lemma 7.2

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_h + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_h - p \operatorname{div} \mathbf{v}_h - \nabla p \cdot \mathbf{v}_h\} \\
=& \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\{ \int_E \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E} \cdot \mathbf{v}_h \right]_E - \int_E [p \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E \right\} \\
& + \sum_{E \in \overline{\mathcal{E}}_h \setminus \mathcal{E}_h} \left\{ \int_E \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_h - \int_E p \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \right\} \\
\leq& ch|\mathbf{v}_h|_{1,h} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\} \\
\leq& ch\{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Fehlerabschätzung für den Druck bewiesen. $\square$

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch eine lokale Basis von V_h konstruieren. Dazu berechnen wir zunächst $\dim V_h$. Bezeichne mit NT, NE_0 und NV_0 die Zahl der Dreiecke, der inneren Kanten und der inneren Eckpunkte von $\mathcal{T}_h$. Da Ω einfach zusammenhängend ist, folgt aus der Euler'schen Polyederformel

$$NT - NE_0 + NV_0 = 1.$$

Da X_h und M_h die inf-sup Bedingung erfüllen, ergibt sich

$$\dim V_h = \dim X_h - \dim M_h = 2NE_0 - NT + 1 = NE_0 + NV_0.$$

Jedem $E \in \mathcal{E}_h$ ordnen wir nun einen Einheitstangentenvektor $\mathbf{t}_E$ und die eindeutig bestimmte, stückweise lineare Funktion φ_E mit

$$\varphi_E(m_{E'}) = \delta_{EE'} \quad \forall E' \in \overline{\mathcal{E}}_h$$

zu. Setze

$$\mathbf{w}_E := \varphi_E \mathbf{t}_E \quad \forall E \in \mathcal{E}_h.$$

Bezeichne mit $\mathcal{N}_h$ die Menge der Dreieckseckpunkte von $\mathcal{T}_h$ in Ω. Für $x \in \mathcal{N}_h$ sei $\mathcal{E}_x$ die Menge aller Dreieckskanten, die x als einen Endpunkt haben. Ausgehend von einer beliebigen Kante in $\mathcal{E}_x$ werden die restlichen Kanten in $\mathcal{E}_x$ fortlaufend in mathematisch positiver Orientierung durchnumeriert. Für $E \in \mathcal{E}_x$ bezeichnen $\mathbf{t}_{E,x}$ und $\mathbf{n}_{E,x}$ zwei orthogonale Einheitsvektoren, derart dass $\mathbf{t}_{E,x}$ tangential zu E ist, von x wegweist und $\det[\mathbf{t}_{E,x}, \mathbf{n}_{E,x}] > 0$ ist. Setze

$$\mathbf{w}_x := \sum_{E \in \mathcal{E}_x} \frac{1}{|E|} \varphi_E \mathbf{n}_{E,x}.$$

Da die Vektorfelder $\mathbf{w}_E$ und $\mathbf{w}_x$ zu den Kanten tangential bzw. normal sind, sind sie linear unabhängig. Außerdem ist offensichtlich stets $\mathbf{w}_E \in V_h$. Seien nun $K \in \mathcal{T}_h$ ein Dreieck, $x \in \mathcal{N}_h$ ein Eckpunkt von K und $E_1,\ E_2$ die beiden Kanten von K, die den Punkt x gemeinsam haben. Dann folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz mit der Mittelpunktsregel für die Linienintegrale

$$\begin{aligned}
\int_K \operatorname{div} \mathbf{w}_x &= \int_{\partial K} \mathbf{w}_x \cdot \mathbf{n}_K \\
&= \sum_{i=1}^{2} |E_i| \mathbf{w}_x(m_{E_i}) \cdot \mathbf{n}_K \\
&= \sum_{i=1}^{2} \mathbf{n}_{E_i,x} \cdot \mathbf{n}_K \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist auch stets $\mathbf{w}_x \in V_h$. Dies beweist

$$V_h = \operatorname{span}\{\mathbf{w}_E,\ \mathbf{w}_x : E \in \mathcal{E}_h,\ x \in \mathcal{N}_h\}.$$

Wir haben nun die Wahl, ob wir das diskrete Problem (1) oder (4) numerisch lösen. Das Problem (1) hat eine dünn besetzte Steifigkeitsmatrix mit $2NE_0+NT-1 = 3NE_0-NV_0$ Zeilen und Spalten. Diese Matrix ist symmetrisch, aber indefinit, d.h., sie besitzt positive und negative Eigenwerte. Problem (1) liefert uns direkt die diskreten Geschwindigkeiten und Drücke.
Da V_h eine lokale Basis besitzt, ist die Steifigkeitsmatrix von (4) ebenfalls dünn besetzt. Sie hat $NE_0 + NV_0$ Zeilen und Spalten, ist also viel kleiner als die Steifigkeitsmatrix von (1). Außerdem ist sie symmetrisch und positiv definit. Allerdings hat sie eine Kondition von $O(h^{-4})$, während die Kondition der Steifigkeitsmatrix von (1) "nur" $O(h^{-2})$ ist (s. W. Dörfler: Numer. Math. 58, 203 – 214 (1990)).
Problem (4) liefert uns auch nur die diskreten Geschwindigkeiten. Allerdings lassen sich die diskreten Drücke leicht aus den diskreten Geschwindigkeiten berechnen. Um dies einzusehen, betrachte eine beliebige Kante $E \in \mathcal{E}_h$ und setze die Funktion $\varphi_E \mathbf{n}_E$ als Testfunktion $\mathbf{v}_h$ in (1) ein. Da die Mittelpunktsregel die Ordnung 1 hat, ergibt sich mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$\begin{aligned} l_h(\varphi_E \mathbf{n}_E) - a_h(\mathbf{u}_h, \varphi_E \mathbf{n}_E) =& b_h(\varphi_E \mathbf{n}_E, p_h) \\ =& -\int_E [\varphi_E p_h]_E \\ =& -|E|[\varphi_E(m_E) p_h]_E \\ =& -|E|[p_h]_E. \end{aligned}$$

Also können die Sprünge des Druckes p_h über die Kanten leicht aus $\mathbf{u}_h$ berechnet werden. Wir wählen nun ein beliebiges Dreieck K, das eine Kante auf dem Rand Γ hat, aus, setzen dort $\tilde{p}_h := 0$ und bestimmen $\tilde{p}_h$ auf den restlichen Dreiecken, indem wir sukzessiv von Dreieck zu Dreieck fortschreiten und jeweils den Sprung von p_h über die gemeinsame Kante zu $\tilde{p}_h$ hinzu addieren. Anschließend bestimmen wir

$$P := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{|\Omega|} \tilde{p}_{h|K}$$

und subtrahieren P von $\tilde{p}_h$. Dies liefert den gesuchten Druck p_h mit Mittelwert 0.

II.8 Stromfunktionsformulierung

Die Methoden der vorigen Abschnitte diskretisieren alle die schwache Formulierung der Stokes Gleichungen aus § 3 und approximieren simultan das Geschwindigkeitsfeld und den Druck. Sie liefern i.a. Geschwindigkeitsfelder, die nur näherungsweise divergenzfrei sind. Im vorigen Abschnitt konnten wir exakte Divergenzfreiheit der diskreten Geschwindigkeitsfelder erzielen, erkauften dies aber durch Aufgabe der H^1-Konformität. In diesem Paragraphen betrachten wir andere schwache Formulierungen der Stokes Gleichungen, die konforme Diskretisierungen mit exakt divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldern erlauben. Wir werden sehen, dass wir diesen Vorteil durch andere Nachteile erkaufen.

Sei Ω ein beschränktes, offenes, *einfach zusammenhängendes* Gebiet in $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist der Rand Γ von Ω zusammenhängend. Wir betrachten die Stokes Gleichungen mit homogenen Dirichlet Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Für die neue schwache Formulierung führen wir die Operatoren $\mathbf{curl} : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^2$ und $\operatorname{curl} : H^1(\Omega)^2 \longrightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\, \varphi &:= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T \\ \operatorname{curl} \mathbf{v} &:= \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \end{aligned}$$

ein. Wie man leicht nachrechnet, gelten folgende Identitäten

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\mathbf{curl}\, \varphi) &= -\Delta \varphi && \forall \varphi \in H^2(\Omega) \\ \mathbf{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) &= -\Delta \mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) && \forall \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^2. \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz

$$\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{curl}\, \varphi = \int_\Omega \operatorname{curl} \mathbf{v} \varphi + \int_\Gamma \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \ \varphi \in H^1(\Omega).$$

Dabei ist $\mathbf{t}$ ein Einheitstangentenfeld an Γ.

8.1 Satz: *Der Operator* **curl** *ist ein Isomorphismus von* $H_0^1(\Omega)^2$ *auf*

$$H_0(\operatorname{div}) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

Beweis: Offensichtlich bildet **curl** den Raum $H_0^1(\Omega)^2$ in $H_0(\operatorname{div})$ ab. Die Abbildung ist auch injektiv. Denn aus $\mathbf{curl}\, \varphi = 0$ folgt $\nabla \varphi = 0$ und damit $\varphi = \text{const}$ und, wegen

der Randbedingung, $\varphi = 0$. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung (§ II.5 in K. Yosida: Functional Analysis) müssen wir also nur noch die Surjektivität von **curl** zeigen. Sei dazu $\mathbf{v} \in H_0(\mathrm{div})$ und $\mathbf{v}^\perp := (v_2\ ,\ -v_1)^T$. Aus $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}^\perp)_1 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}^\perp)_2,$$

d.h. $D\mathbf{v}^\perp$ ist symmetrisch. Wegen des Satzes von Poincaré (Satz VIII.3.16 Analysis II) ist $\mathbf{v}^\perp$ ein Gradientenfeld, d.h. $\mathbf{v}^\perp = \nabla\psi$. Hieraus folgt $\mathbf{v} = \mathbf{curl}\,\psi$. Wegen $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ auf Γ ist ψ konstant auf Γ. Wegen $\mathbf{v} = \mathbf{curl}\,\psi$ ist also o.E. $\psi = 0$ auf Γ. Dies beweist die Surjektivität. $\square$

Sei nun $\mathbf{u},\ p$ eine hinreichend glatte Lösung der Stokes Gleichungen (1). Wegen Satz 8.1 existiert ein eindeutiges $\psi \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl}\,\psi.$$

ψ heißt die **Stromfunktion** von $\mathbf{u}$. Aus

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{t} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma$$

folgt zusätzlich

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{curl}\,\psi = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma.$$

Setzen wir obige Darstellung für $\mathbf{u}$ in die Impulsgleichung, d.h. die erste Gleichung von (1), ein und bilden deren curl, so erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned}
\mathrm{curl}\,\mathbf{f} &= \mathrm{curl}\{-\Delta\mathbf{u} + \nabla p\} \\
&= -\,\Delta(\mathrm{curl}\,\mathbf{u}) + \underbrace{\mathrm{curl}(\nabla p)}_{=0} \\
&= -\,\Delta(\mathrm{curl}(\mathbf{curl}\,\psi)) \\
&= \Delta^2\psi.
\end{aligned}$$

Also ist die Stromfunktion ψ eine Lösung der **biharmonischen Gleichung**

$$\begin{aligned}
\Delta^2\psi &= \mathrm{curl}\,\mathbf{f} && \text{in } \Omega \\
\psi &= 0 && \text{auf } \Gamma \\
\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} &= 0 && \text{auf } \Gamma.
\end{aligned} \tag{2}$$

Sei nun umgekehrt ψ eine hinreichend glatte Lösung der biharmonischen Gleichung (2). Setze

$$\mathbf{u} := \mathbf{curl}\,\psi.$$

Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Aus den Randbedingungen an ψ folgt

$$\nabla \psi = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

und damit

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl}\, \psi = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Weiter ist

$$\operatorname{curl}\{\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}\} = \operatorname{curl} \mathbf{f} - \Delta^2 \psi = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Daher gilt für jedes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$0 = \int_\Omega \operatorname{curl}\{\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}\}\varphi = \int_\Omega \{\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}\} \cdot \mathbf{curl}\, \varphi.$$

Also ist wegen Satz 8.1

$$\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u} \in V^\perp.$$

Wegen Satz 3.3 und Satz 2.1 gibt es daher ein $p \in L_0^2(\Omega)$ mit

$$\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u} = \nabla p.$$

Also ist $\mathbf{u},\ p$ eine Lösung der Stokes Gleichungen (1). In diesem Sinne sind die Stokes Gleichungen (1) und die Biharmonische Gleichung (2) äquivalent.

Die schwache Formulierung von (2) lautet:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \psi \in H_0^2(\Omega), \text{ so dass} \\ &\int_\Omega \Delta\psi \Delta\varphi = \int_\Omega \operatorname{curl} \mathbf{f} \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega). \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei ist

$$H_0^2(\Omega) = \{\varphi \in H^2(\Omega) : \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

Problem (3) ist offensichtlich die Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsproblems

$$J(\psi) := \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta\psi)^2 - \int_\Omega \operatorname{curl} \mathbf{f} \psi \longrightarrow \min \quad \text{in } H_0^2(\Omega).$$

Problem (3) passt also in den abstrakten Rahmen von § 2 VFEM für koerzive Minimumprobleme und erscheint daher auf den ersten Blick leichter für die Numerik zugänglich als die bisher betrachtete Sattelpunktsformulierung der Stokes Gleichungen. Der erste Eindruck täuscht aber. Denn (3) ist ein Minimumproblem über $H_0^2(\Omega)$ und erfordert daher die Konstruktion von Finite Element Funktionen, die global stetig differenzierbar sind. Dies ist sehr aufwendig.

Man kann versuchen, diese Schwierigkeit zu umgehen, indem man eine gemischte Formulierung von (3) mit $\Delta\psi$ als zusätzlicher Unbekannten betrachtet. Im Rahmen der abstrakten Theorie von § 2 entspricht dies der Wahl

$$\begin{aligned} X =& H^1(\Omega) \\ M =& H_0^1(\Omega) \\ a(u,v) =& \int_\Omega uv \\ b(v,\lambda) =& \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \lambda. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse von § 2 sind jedoch nicht anwendbar, da die Bilienearform a nicht koerziv auf dem Kern V von b ist. Dies führt zu erheblichen Problemen bei der Analyse und Approximation des zu (3) gehörenden gemischten Problems.

Ein anderer Nachteil der biharmonischen Gleichung (3) ist das Fehlen jedweder Information über den Druck, der häufig die physikalisch interessante Größe ist.

Wir wollen im folgenden zeigen, wie man die geschilderten Schwierigkeiten umgehen kann und eine "vernünftige" Stromfunktionsformulierung der Stokes Gleichungen erhält, die zudem die effiziente Berechnung des Druckes erlaubt. Diese Vorteile werden durch verschärfte Regularitätsanforderungen an die Lösung der Stokes Gleichungen und sub-optimale Fehlerabschätzungen für die Finite Element Approximation erkauft.

8.2 Lemma: *Für alle* $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2 \cap H_0(\mathrm{div})$ *und alle* $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ *gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \mathbf{v} = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}.$$

Beweis: Sei

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V} := \{\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^2 : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}.$$

Dann folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz für alle $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_\Omega [-\Delta \mathbf{u} + \nabla \underbrace{(\operatorname{div} \mathbf{u})}_{=0}] \cdot \mathbf{v} = -\int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{V}$ in $H_0^1(\Omega)^2 \cap H_0(\mathrm{div})$ dicht ist, folgt die Behauptung. □

Bezeichne mit

$$\omega := \operatorname{curl} \mathbf{u} \tag{4}$$

die **Wirbelstärke** des Geschwindigkeitsfeldes. Aus Lemma 8.2 und der schwachen Formulierung der Stokes Gleichungen aus § 3 ergibt sich für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} &= \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v} = \int_\Omega \operatorname{curl}\mathbf{u}\operatorname{curl}\mathbf{v} - \int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v}\\ &= \int_\Omega \omega \operatorname{curl}\mathbf{v} - \int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Da (4) zu

$$\int_\Omega \omega\mu = \int_\Omega \operatorname{curl}\mathbf{u}\mu \quad \forall \mu \in L^2(\Omega)$$

äquivalent ist, erhalten wir folgende schwache Formulierung der Stokes Gleichungen (1):

$$\begin{aligned}&\text{Finde } \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2,\ p \in L_0^2(\Omega),\ \omega \in L^2(\Omega) \text{ mit}\\ \int_\Omega \omega\operatorname{curl}\mathbf{v} - \int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2\\ \int_\Omega q\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega)\\ \int_\Omega \omega\mu - \int_\Omega \operatorname{curl}\mathbf{u}\mu &= 0 \qquad \forall \mu \in L^2(\Omega).\end{aligned} \tag{5}$$

Problem (5) ordnet sich in den abstrakten Rahmen von § 2 ein mit der Wahl

$$\begin{aligned}X &:= H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)\\ M &:= L^2(\Omega)\times L_0^2(\Omega)\\ a([\mathbf{u},\omega],[\mathbf{v},\theta]) &:= \int_\Omega \omega\theta\\ b([\mathbf{v},\theta],[\lambda,p]) &:= \int_\Omega (\operatorname{curl}\mathbf{v}-\theta)\lambda - \int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass man hierfür die Identität $\lambda = \omega$ in schwacher Form zu den Gleichungen von (5) hinzufügen muss.

Problem (5) ist für unsere Zwecke noch nicht geeignet, da es zu starke Regularitätsanforderungen an das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ und damit an die Wirbelstärke ω stellt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, schwächen wir die Regularitätsbedingungen an $\mathbf{u}$ ab und verschärfen die an p und λ. Dies führt auf folgendes Variationsproblem:

$$\begin{aligned}&\text{Finde } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2,\ \omega \in L^2(\Omega),\ \lambda \in H^1(\Omega),\ p \in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega) \text{ mit}\\ \int_\Omega \mathbf{curl}\,\lambda\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{v} &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2\\ \int_\Omega \omega\theta - \int_\Omega \lambda\theta &= 0 \qquad \forall \theta \in L^2(\Omega)\\ \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{curl}\,\mu - \int_\Omega \omega\mu &= 0 \qquad \forall \mu \in H^1(\Omega)\\ \int_\Omega \nabla q\cdot\mathbf{u} &= 0 \qquad \forall q \in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega).\end{aligned} \tag{6}$$

Problem (6) ordnet sich in den abstrakten Rahmen von § 2 ein mit der Wahl

$$\begin{aligned} X :=& L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) \\ M :=& H^1(\Omega) \times [H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)] \\ a([\mathbf{u},\omega],[\mathbf{v},\theta]) :=& \int_\Omega \omega\theta \\ b([\mathbf{v},\theta],[\lambda,p]) :=& \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{curl}\,\lambda - \int_\Omega \theta\lambda + \int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Die Probleme (5) und (6) sind offensichtlich äquivalent in dem üblichen Sinne, dass jede hinreichend glatte Lösung des einen Problems eine Lösung des anderen Problems ist und umgekehrt.

Wegen Satz 8.1 ist jede Lösung $\mathbf{u}$ von (6) von der Form $\mathbf{u} = \mathbf{curl}\,\psi$ mit $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Wählen wir die Testfunktion $\mathbf{v}$ in (6) von der Form $\mathbf{v} = \mathbf{curl}\,\varphi$ mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, so erhalten wir das Problem:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \psi \in H_0^1(\Omega),\ \omega \in L^2(\Omega),\ \lambda \in H^1(\Omega) \text{ mit} \\ &\int_\Omega \mathbf{curl}\,\lambda\cdot\mathbf{curl}\,\varphi = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{curl}\,\varphi \quad \forall\varphi\in H^1(\Omega) \\ &\int_\Omega \omega\theta - \int_\Omega \lambda\theta = 0 \qquad \forall\theta\in L^2(\Omega) \\ &\int_\Omega \mathbf{curl}\,\psi\cdot\mathbf{curl}\,\mu - \int_\Omega \omega\mu = 0 \qquad \forall\mu\in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{7}$$

Wählen wir andererseits die Testfunktion $\mathbf{v}$ in (6) von der Form $\mathbf{v} = \nabla q$ mit $q \in H^1(\Omega)$, so erhalten wir das Problem:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } p \in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega) \text{ mit} \\ &\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla q = \int_\Omega (\mathbf{f} - \mathbf{curl}\,\lambda)\cdot\nabla q \quad \forall q\in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Also spaltet das Problem (6) äquivalent in die beiden entkoppelten Probleme (7) und (8) auf. Problem (7) ist eine gemischte Formulierung der biharmonischen Gleichung (2); Problem (8) ist die schwache Formulierung einer Poisson Gleichung mit Neumann Randbedingungen.

8.3 Satz: *Seien $\Gamma \in C^2$ oder Ω konvex und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$. Dann besitzen die Probleme (6), (7) und (8) jeweils eine eindeutige Lösung.*

Beweis: Die eindeutige Lösbarkeit der Probleme (7) und (8) folgt offensichtlich aus der eindeutigen Lösbarkeit von Problem (6).
Gemäß Satz 3.5 besitzen die Stokes Gleichungen eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u}$, p. Wegen der Voraussetzungen an Γ bzw. Ω ist $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$, $p \in H^1(\Omega)$. Wegen Satz

8.1 ist $\mathbf{u} = \mathbf{curl}\,\psi$, und ψ, $\omega := \operatorname{curl}\mathbf{u}$, $\lambda := \omega$ und p lösen Problem (6). Wir müssen also nur noch zeigen, dass es keine weitere Lösung von (6) gibt, d.h. dass Problem (6) mit $\mathbf{f} = 0$ nur die triviale Lösung zulässt.
Aus der ersten Gleichung von (7) folgt in diesem Fall

$$\mathbf{curl}\,\lambda = \mathbf{curl}\,\omega = 0.$$

Also ist ω ein Gradientenfeld. Aus der dritten Gleichung von (7) folgt aber, dass ω senkrecht steht auf allen Gradientenfeldern. Also ist $\lambda = \omega = 0$. Da die Bilinearform

$$\psi,\ \mu \longrightarrow \int_\Omega \mathbf{curl}\,\psi \cdot \mathbf{curl}\,\mu$$

auf $H_0^1(\Omega)$ koerziv ist, folgt wiederum mit der dritten Geleichung von (7), dass auch $\psi = 0$ ist. Aus (8) folgt dann

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

Wegen der Poincaré'schen Ungleichung impliziert dies $p = 0$. □

Für die Finite Element Diskretisierung von (7) und (8) nehmen wir von nun an stets an, dass Ω ein *konvexes Polygon* ist. (Die Konvexität benötigen wir wegen Satz 8.3.) $\mathcal{T}_h$ sei eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung von Ω in Dreiecke oder Vierecke wie in § I.4. Wir wählen Finite Element Räume $\Phi_h \subset H_0^1(\Omega)$, $\Theta_h \subset L^2(\Omega)$, $M_h \subset H^1(\Omega)$, $Q_h \subset H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ und betrachten die folgenden beiden diskreten Analoga der Probleme (7) und (8):

$$\begin{aligned}
&\text{Finde } \psi_h \in \Phi_h,\ \omega_h \in \Theta_h,\ \lambda_h \in M_h \text{ mit} \\
&\int_\Omega \mathbf{curl}\,\lambda_h \cdot \mathbf{curl}\,\varphi_h = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl}\,\varphi_h \quad && \forall \varphi_h \in \Phi_h \\
&\int_\Omega \omega_h \theta_h - \int_\Omega \lambda_h \theta_h = 0 && \forall \theta_h \in \Theta_h \\
\int_\Omega \mathbf{curl}\,\psi_h \cdot \mathbf{curl}\,\mu_h - &\int_\Omega \omega_h \mu_h = 0 && \forall \mu_h \in M_h.
\end{aligned} \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}
&\text{Finde } p_h \in Q_h \text{ mit} \\
&\int_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla q_h = \int_\Omega (\mathbf{f} - \mathbf{curl}\,\lambda_h) \cdot \nabla q_h \quad \forall q_h \in Q_h.
\end{aligned} \tag{10}$$

Für den Beweis einer Fehlerabschätzung benötigen wir einen Projektionsoperator $P_h : H^1(\Omega) \longrightarrow \Theta_h$, der durch

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(P_h\mu - \mu) \cdot \nabla \theta_h &= 0 \quad \forall \theta_h \in \Theta_h \\
P_h\mu - \mu &\in L_0^2(\Omega)
\end{aligned} \tag{11}$$

definiert ist.

8.4 Satz: **(1)** *Es gelte*

$$\Phi_h \subset M_h \subset \Theta_h.$$

Dann besitzt Problem (9) eine eindeutige Lösung. Bezeichne mit $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\omega \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in H^1(\Omega)$ *die eindeutige Lösung von (7) und setze*

$$K(h) := \sup_{\theta_h \in \Theta_h \setminus \{0\}} \frac{\|\theta_h\|_1}{\|\theta_h\|_0}.$$

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\psi - \psi_h\|_1 + \|\omega - \omega_h\|_0 \le c\Big\{(1 + K(h))\big[\inf_{\varphi_h \in \Phi_h} \|\psi - \varphi_h\|_1 + \inf_{\theta_h \in \Theta_h} \|\omega - \theta_h\|_0\big] + \|\omega - P_h\omega\|_0\Big\}.$$

(2) *Problem (10) besitzt eine eindeutige Lösung. Jedes* $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ *besitze eine Zerlegung der Form*

$$\mathbf{u} = \nabla q + \mathbf{curl}\,\varphi \tag{12}$$

mit $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ *und* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *und es gelte*

$$\|q - P_h q\|_1 + \inf_{\varphi_h \in \Phi_h} \|\varphi - \varphi_h\|_1 \le ch\|\mathbf{u}\|_1. \tag{13}$$

Bezeichne mit $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ *die eindeutige Lösung von (8). Dann gilt die Fehlerabsachätzung*

$$\|p - p_h\|_0 \le c\Big\{h \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_1 + \|\omega - \omega_h\|_0 + \inf_{\theta_h \in \Theta_h} \big[hK(h)\|\omega_h - \theta_h\|_0 + h\|\omega - \theta_h\|_1\big]\Big\}.$$

Beweis: Theoreme III.2.6 und III.2.7 in V. Girault, P. A. Raviart: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. □

8.5 Bemerkung: **(1)** Es gebe zwei Zahlen $\nu_1,\ \nu_2 \in \mathbb{N}$ mit $\nu_1 \le \nu_2$ und $S_h^{\nu_1,-1} \subset \Theta_h \subset S_h^{\nu_2,-1}$. Dann folgt durch Transformation auf das Referenzelement

$$\begin{aligned} c_1 \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-1} &\le \sup_{\theta_h \in S_h^{\nu_1,-1}} \frac{\|\theta_h\|_1}{\|\theta_h\|_0} \\ &\le K(h) \\ &\le \sup_{\theta_h \in S_h^{\nu_2,-1}} \frac{\|\theta_h\|_1}{\|\theta_h\|_0} \le c_2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-1}. \end{aligned}$$

(2) Eine Zerlegung der Form (12) heißt **Helmholtz Zerlegung**. Sie existiert für alle einfach zusammenhängenden Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die wesentliche Annahme in Satz 8.4 (2) ist die Abschätzung (13). □

Aus Satz 8.4 und den Approximationsresultaten aus § I.4 folgt unmittelbar:

8.6 Satz: *Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz 8.4. Zusätzlich sie $\mathcal{T}_h$* **uniform**, *d.h. es gibt ein $c > 0$ mit*

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \leq c \min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \quad \forall h > 0.$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} \Theta_h = M_h =& S_h^{l,0}, \\ \Phi_h =& S_{h,0}^{l,0}, \\ Q_h =& S_h^{k,0} \cap L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

mit $l \in \mathbb{N}^*$ und $k = \max\{1, l-1\}$. Schließlich gelte für die Lösung von (7) und (8) die Regularitätsannahme $\psi \in H^{m+1}(\Omega)$, $\Delta\psi \in H^m(\Omega)$, $p \in H^{\max\{1,m-1\}}(\Omega)$ für ein m mit $1 \leq m \leq l$. Dann gilt für die Lösung von (9), (10) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} &\|\psi - \psi_h\|_1 + \|\omega - \omega_h\|_0 + \|p - p_h\|_0 \\ \leq& c \left\{ h^{m-1} \left[\|\psi\|_{m+1} + \|\Delta\psi\|_m + \|p\|_{\max\{1,m-1\}} \right] + h^m \|\Delta\psi\|_m \right\}. \end{aligned}$$

8.7 Bemerkung: **(1)** Die Fehlerabschätzung von Satz 8.6 ist nicht optimal. Dies liegt an dem Term $K(h)$ in Satz 8.4. Dieser Term tritt auf, da im abstrakten Rahmen von § 2 die Bilinearform a zu Problem (7) nur bzgl. der L^2-Norm koerziv ist.
(2) Satz 8.6 liefert für $l = 1$ keine Konvergenz der Finite Element Approximation. Für diesen Fall kann man mit einer verbesserten Technik immer noch eine Fehlerabschätzung der Ordnung $O(h^{1/2})$ zeigen, sofern $\psi \in H^3(\Omega)$ ist. □

II.9 Numerische Lösung der diskreten Probleme

Wir betrachten die abstrakte Situation aus § 4. Gegeben sind endlich dimensionale Räume X_h, M_h und stetige Bilinearformen $a : X_h \times X_h \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : X_h \times M_h \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie stetige Linearformen $l : X_h \longrightarrow \mathbb{R}$, $\chi : M_h \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
(1) a ist gleichmäßig X_h koerziv, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ mit

$$a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{X_h}^2 \quad \forall u_h \in X_h,\ h > 0.$$

(2) b erfüllt die uniforme inf-sup Bedingung, d.h. es gibt ein $\beta > 0$ mit

$$\inf_{\lambda_h \in M_h \setminus \{0\}} \sup_{u_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b(u_h, \lambda_h)}{\|u_h\|_{X_h} \|\lambda_h\|_{M_h}} \geq \beta \quad \forall h > 0.$$

Zu lösen ist das diskrete Problem

$$\begin{aligned} &\text{Finde } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h \text{ mit} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) =& l(v_h) \quad \forall v_h \in X_h \\ b(u_h, \mu_h) =& \chi(\mu_h) \quad \forall \mu_h \in M_h. \end{aligned} \tag{1}$$

Für die Stokes Gleichungen sind X_h, M_h Finite Element Räume mit $X_h \subset H_0^1(\Omega)^n$, $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned}
\|.\|_{X_h} =& \|.\|_1 \\
\|.\|_{M_h} =& \|.\|_0 \\
a(\mathbf{u},\mathbf{v}) =& \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\
b(\mathbf{v},p) =& -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \\
l(\mathbf{v}) =& \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\
\chi(q) =& 0.
\end{aligned}$$

Wir führen auf X_h und M_h Skalarprodukte $(.,.)_{X_h}$ und $(.,.)_{M_h}$ ein. Diese müssen *nicht* die entsprechenden Normen induzieren. Vielmehr werden sie in der Praxis skalierte Euklidische Skalarprodukte sein. Mit diesen Skalarprodukten definieren wir Operatoren $A_h : X_h \longrightarrow X_h$, $B_h : X_h \longrightarrow M_h$ und $B_h' : M_h \longrightarrow X_h$ sowie Elemente $f_h \in X_h$, $\varphi_h \in M_h$ durch

$$\begin{aligned}
(A_h u_h, v_h)_{X_h} =& a(u_h, v_h) && \forall u_h,\ v_h \in X_h \\
(B_h u_h, \lambda_h)_{M_h} =& b(u_h, \lambda_h) && \forall u_h \in X_h,\ \lambda_h \in M_h \\
(B_h' \lambda_h, v_h)_{M_h} =& b(v_h, \lambda_h) && \forall v_h \in X_h,\ \lambda_h \in M_h \\
(f_h, u_h)_{X_h} =& l(u_h) && \forall u_h \in X_h \\
(\varphi_h, \lambda_h)_{M_h} =& \chi(\lambda_h) && \forall \lambda_h \in M_h.
\end{aligned}$$

Dann ist (1) offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{aligned}
A_h u_h + B_h' \lambda_h =& f_h \\
B_h u_h =& \varphi_h.
\end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Koerzivität und Stetigkeit von a folgt

$$\begin{aligned}
\|A_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_h,X_h)} \leq& \frac{1}{\alpha} \\
\|A_h\|_{\mathcal{L}(X_h,X_h)} \leq& \mathcal{A} := \|a\|_{\mathcal{L}^2(X_h \times X_h, \mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von b und der inf-sup Bedingung folgt

$$\begin{aligned}
\|B_h\|_{\mathcal{L}(X_h,M_h)} = \|B_h'\|_{\mathcal{L}(M_h,X_h)} \leq& \mathcal{B} := \|b\|_{\mathcal{L}^2(X_h \times M_h, \mathbb{R})} \\
\|B_h' \lambda_h\|_{X_h} \geq& \beta \|\lambda_h\|_{M_h} \quad \forall \lambda_h \in M_h.
\end{aligned}$$

Insbesondere können wir die erste Gleichung von (2) nach u_h auflösen und das Ergebnis in die zweite Gleichung von (2) einsetzen. Dies liefert

$$\begin{aligned}
u_h =& A_h^{-1}\{f_h - B_h' \lambda_h\} \\
B_h A_h^{-1} B_h' \lambda_h =& B_h A_h^{-1} f_h - \varphi_h.
\end{aligned} \tag{3}$$

Setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} L_h :=& B_h A_h^{-1} B_h' \\ \rho_h :=& B_h A_h^{-1} f_h - \varphi_h. \end{aligned} \tag{4}$$

Offensichtlich ist der Operator L_h symmetrisch. Aus den Abschätzungen für A_h und B_h folgt

$$\|L_h\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \leq \mathcal{B}^2 \alpha^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} (L_h\lambda_h, \lambda_h)_{M_h} =& (A_h^{-1} B_h' \lambda_h, B_h' \lambda_h)_{X_h} \\ =& (A_h^{-1} B_h' \lambda_h, A_h A_h^{-1} B_h' \lambda_h)_{X_h} \\ =& a(A_h^{-1} B_h' \lambda_h, A_h^{-1} B_h' \lambda_h) \\ \geq& \alpha \|A_h^{-1} B_h' \lambda_h\|_{X_h}^2 \\ \geq& \alpha \mathcal{A}^{-2} \|B_h' \lambda_h\|_{X_h}^2 \\ \geq& \alpha \mathcal{A}^{-2} \beta^2 \|\lambda_h\|_{M_h}^2. \end{aligned}$$

Also ist L_h auch koerziv und

$$\|L_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \leq \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2}.$$

Insbesondere folgt für die Kondition von L_h

$$\kappa(L_h) := \|L_h\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \|L_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \leq \left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{\alpha\beta}\right)^2.$$

Daher kann die zweite Gleichung von (3) effizient durch ein CG-Verfahren gelöst werden. Die Konvergenzrate hängt nicht von h ab, und der Aufwand, der für die Reduktion des Fehlers um einen festen Faktor erforderlich ist, ist proportional zur Zahl der Unbekannten, d.h. zu $\dim M_h$. Die Proportionalitätskonstante hängt dabei von dem Aufwand ab, den die Auswertung von L_h erfordert.
Die Berechnung von ρ_h und die Auswertung von $L_h\mu_h$ für gegebenes μ_h erfordert die Lösung eines Problems der Form

$$A_h v_h = w_h. \tag{5}$$

Für die Stokes Gleichungen sind dies entkoppelte diskrete Poisson Gleichungen für die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes.
Wenn wir die Probleme (5) näherungsweise durch n Iterationen eines stationären Iterationsverfahrens mit Startwert 0 lösen, approximieren wir A_h^{-1} durch einen Operator $K_{h,n}$. Bezeichnet κ die Konvergenzrate gemessen in der X_h-Norm dieses Iterationsverfahrens, so gilt für jedes $w_h \in X_h$ die Abschätzung

$$\|K_{h,n} w_h - A_h^{-1} w_h\|_{X_h} \leq \kappa^n \|A_h^{-1} w_h\|_{X_h}. \tag{6}$$

Setze

$$L_{h,n} := B_h K_{h,n} B_h'.$$

Falls $K_{h,n}$ symmetrisch bzgl. der Bilinearform a ist, ist $L_{h,n}$ symmetrisch. Aus den Abschätzungen für L_h und (6) folgt für jedes $\lambda_h \in M_h$

$$\begin{aligned}
\|L_h\lambda_h - L_{h,n}\lambda_h\|_{M_h} =& \|B_h(A_h^{-1} - K_{h,n})B_h'\lambda_h\|_{M_h} \\
\leq& \mathcal{B}\|(A_h^{-1} - K_{h,n})B_h'\lambda_h\|_{X_h} \\
\leq& \kappa^n \mathcal{B}\|A_h^{-1}B_h'\lambda_h\|_{X_h} \\
\leq& \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha}\|\lambda_h\|_{M_h}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\lambda_h, L_{h,n}\lambda_h)_{M_h} \geq& (\lambda_h, L_h\lambda_h)_{M_h} - (\lambda_h, (L_h - L_{h,n})\lambda_h)_{M_h} \\
\geq& \frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2}\|\lambda_h\|_{M_h}^2 - \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha}\|\lambda_h\|_{M_h}^2 \\
\geq& \left(\frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha}\right)\|\lambda_h\|_{M_h}^2.
\end{aligned}$$

Also ist $L_{h,n}$ koerziv, falls

$$\frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha} > 0$$

d.h.

$$\kappa^n < \left(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{A}\mathcal{B}}\right)^2 \tag{7}$$

ist. Insbesondere folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
\|L_{h,n}\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \leq& \|L_h\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} + \|L_h - L_{h,n}\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \\
\leq& \frac{\mathcal{B}^2}{\alpha} + \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha} \\
=& \frac{\mathcal{B}^2}{\alpha}(1+\kappa^n)
\end{aligned}$$

und

$$\|L_{h,n}^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_h,M_h)} \leq \left[\frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha}\right]^{-1}$$

sowie für die Kondition

$$\kappa(L_{h,n}) \leq \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2(1+\kappa^n)}{\alpha^2\beta^2 - \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2\kappa^n}.$$

Ist insbesondere

$$\kappa^n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{A}\mathcal{B}}\right)^2, \tag{8}$$

ergibt sich wegen $(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{AB}})^2 \leq 1$

$$\kappa(L_{h,n}) \leq 3\left(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{AB}}\right)^2 = 3\kappa(L_h).$$

Daher kann eine Gleichung der Form

$$L_{h,n}\lambda_h = \rho_{h,n}$$

effizient durch ein CG-Verfahren gelöst werden. Insbesondere ist der Aufwand zur Reduktion des Fehlers um einen festen Faktor nach wie vor proportional zu $\dim M_h$. Dabei hängt die Proportionalitätskonstante von dem Aufwand zur Auswertung von $K_{h,n}$ ab.

Diese Überlegungen führen auf folgenden Algorithmus.

9.1 Algorithmus: (CG-MG Algorithmus zur Lösung der diskreten Stokes Gleichungen)

(1) Löse die diskreten Poisson Gleichungen

$$A_h\mathbf{w}_h = \mathbf{f}_h$$

näherungsweise durch n Iterationen eines Mehrgitterverfahrens mit Startwert 0. Das Ergebnis sei $\mathbf{w}_{h,n}$. Setze

$$\rho_{h,n} := B_h\mathbf{w}_{h,n}.$$

(2) Wende ein CG-Verfahren mit Startwert 0 auf das Problem

$$L_h p_h = \rho_{h,n}$$

an. Dabei werde für gegebenes q_h der Ausdruck $L_h q_h$ näherungsweise berechnet, indem die diskreten Poisson Gleichungen

$$A_h\mathbf{v}_h = B_h' q_h$$

näherungsweise durch n Iterationen eines Mehrgitterverfahrens mit Startwert 0 gelöst werden.

(3) Sei $\tilde{p}_h$ die in Schritt 2 berechnete Näherung für den Druck. Löse die diskreten Poisson Gleichungen

$$A_h\mathbf{v}_h = \mathbf{f}_h - B_h'\tilde{p}_h$$

näherungsweise durch n Iterationen eines Mehrgitterverfahrens mit Startwert 0. Das Ergebnis sie $\tilde{\mathbf{u}}_h$. Dies ist die Approximation für die Geschwindigkeit.

9.2 Satz: *Bezeichne mit $\tilde{\mathbf{u}}_h$, $\tilde{p}_h$ das Ergebnis von Algorithmus 9.1, mit $\mathbf{u}_h$, p_h die exakte Lösung der diskreten Stokes Gleichungen, mit $K_{h,n}$ die durch das Mehrgitterverfahren gegebene Approximation von A_h^{-1} und mit $L_{h,n} := B_h K_{h,n} B_h'$ die entsprechende Approximation von $L_h = B_h A_h^{-1} B_h'$. Es gelte (8) und*

$$\|L_{h,n}\tilde{p}_h - \rho_{h,n}\|_0 \leq \varepsilon.$$

Dann ist

$$\|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p_h - \tilde{p}_h\|_0 \leq \kappa^n c_1(\alpha, \beta, \mathcal{A}, \mathcal{B})\|\mathbf{f}\|_0 + \varepsilon c_2(\alpha, \beta, \mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\|\rho_h - \rho_{h,n}\|_0 =& \|B_h(A_h^{-1} - K_{h,n})\mathbf{f}_h\|_{M_h} \\
\leq& \mathcal{B}\kappa^n \|A_h^{-1}\mathbf{f}_h\|_{X_h} \\
\leq& \mathcal{B}\kappa^n \alpha^{-1} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h)_{X_h}}{\|\mathbf{v}_h\|_{X_h}} \\
\leq& \mathcal{B}\kappa^n \alpha^{-1} \|\mathbf{f}\|_0.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|p_h - \tilde{p}_h\|_0 =& \|p_h - \tilde{p}_h\|_{M_h} \\
\leq& \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \|\underbrace{L_h p_h}_{=\rho_h} - L_h\tilde{p}_h\|_{M_h} \\
\leq& \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \left\{ \|\rho_h - \rho_{h,n}\|_{M_h} + \|\rho_{h,n} - L_{h,n}\tilde{p}_h\|_{M_h} + \|L_{h,n}\tilde{p}_h - L_h\tilde{p}_h\|_{M_h} \right\} \\
\leq& \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \left\{ \frac{\mathcal{B}\kappa^n}{\alpha} \|\mathbf{f}\|_0 + \varepsilon + \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha} \|\tilde{p}_h\|_{M_h} \right\} \\
\leq& \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \|\mathbf{f}\|_0 + \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2}\varepsilon + \underbrace{\frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha^2\beta^2}}_{\leq \frac{1}{2}} \left\{ \|\tilde{p}_h - p_h\|_{M_h} + \|p_h\|_{M_h} \right\}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\|p_h\|_{M_h} =& \|p_h\|_0 \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h^\perp \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \\
\leq& \frac{1}{\beta} \|\mathbf{f}\|_0
\end{aligned}$$

folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\|p_h - \tilde{p}_h\|_0 \leq& 2\frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \|\mathbf{f}\|_0 + 2\frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2}\varepsilon + 2\frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \|p_h\|_{M_h} \\
\leq& 2\left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{\alpha\beta}\right)^2 \kappa^n \left[\frac{1}{\mathcal{B}} + \frac{1}{\beta}\right] \|\mathbf{f}\|_0 + 2\frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Wegen der ersten Gleichung von (3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 =& \|A_h^{-1}(\mathbf{f}_h - B_h' p_h) - K_{h,n}(\mathbf{f}_h - B_h'\tilde{p}_h)\|_{X_h} \\
\leq& \|(A_h^{-1} - K_{h,n})\mathbf{f}_h\|_{X_h} + \|(A_h^{-1} - K_{h,n})B_h'\tilde{p}_h\|_{X_h} \\
&+ \|A_h^{-1}B_h'(p_h - \tilde{p}_h)\|_{X_h} \\
\leq& \kappa^n \|A_h^{-1}\mathbf{f}_h\|_{X_h} + \kappa^n \|A_h^{-1}B_h'\tilde{p}_h\|_{X_h} + \frac{\mathcal{B}}{\alpha}\|p_h - \tilde{p}_h\|_{M_h} \\
\leq& \frac{\kappa^n}{\alpha}\|\mathbf{f}\|_0 + \frac{\mathcal{B}}{\alpha}\kappa^n\Big[\|\tilde{p}_h - p_h\|_0 + \|p_h\|_0\Big] + \frac{\mathcal{B}}{\alpha}\|p_h - \tilde{p}_h\|_0 \\
\leq& \frac{\kappa^n}{\alpha}\left(1 + \frac{\mathcal{B}}{\beta}\right)\|\mathbf{f}\|_0 + \frac{\mathcal{B}}{\alpha}\left(1 + \kappa^n\right)\|\tilde{p}_h - p_h\|_0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

9.3 Bemerkung: Aus dem Beweis von Satz 9.2 folgt, dass der κ^n-Term in der Abschätzung von $\|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p_h - \tilde{p}_h\|_0$ nur von der Genauigkeit des Mehrgitteralgorithmus in Schritt 1, Schritt 3 und der letzten Iteration von Schritt 2 in Algorithmus 9.1 abhängt. Daher kann man in Schritt 2 mit einer geringen Anzahl von Mehrgitteriterationen (typischerweise 1 – 2 Iterationen) arbeiten und erst auf eine höhere Genauigkeit (typischerweise 4 – 5 Iterationen) umschalten, wenn das Abbruchkriterium $\|L_{h,n}\tilde{p}_h - \rho_{h,n}\|_0 \leq \varepsilon$ zum ersten Mal erfüllt wird. □

In Algorithmus 9.1 wird ein Mehrgitteralgorithmus zur Lösung diskreter Poisson Gleichungen als innere Iteration eines iterativen Lösungsverfahrens für die diskreten Stokes Gleichungen verwendet. Wir wollen nun die Mehrgitteridee direkt auf die diskreten Stokes Gleichungen anwenden. Dazu nehmen wir an, dass wir über eine Folge $h_0 > h_1 > ... > h_R$ von Unterteilungen $\mathcal{T}_{h_k}$ von Ω und entsprechender Finite Element Räume X_{h_k}, M_{h_k} verfügen. Wir machen folgende Annahmen:

(1) Die Unterteilungen $\mathcal{T}_{h_k}$ sind *uniform*, d.h.

$$\max_{K\in\mathcal{T}_{h_k}} h_K \leq c \min_{K\in\mathcal{T}_{h_k}} h_K \quad \forall 0 \leq k \leq R.$$

(2) Die Räume X_{h_k} und M_{h_k} sind geschachtelt, d.h.

$$X_{h_k} \subset X_{h_{k+1}}\ ,\ M_{h_k} \subset M_{h_{k+1}} \quad \forall 0 \leq k < R.$$

(3) Die Bilinearform a ist gleichmäßig X_{h_k}-koerziv; die Bilinearform b erfüllt die gleichmäßige inf-sup Bedingung.

(4) Die Skalarprodukte $(.,.)_{X_{h_k}}$ und $(.,.)_{M_{h_k}}$ sind gleichmäßig äquivalent zum L^2-Skalarprodukt.

Zur Vereinfachung der Notation ersetzen wir den Index h_k stets durch k. Zusätzlich zu den bisherigen Notationen führen wir zwei Restriktionsoperatoren $R_k : X_k \longrightarrow X_{k-1}$

und $\rho_k : M_k \longrightarrow M_{k-1}$ durch

$$\begin{aligned}(R_k\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k-1})_{X_{k-1}} =&(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k-1})_{X_k} \quad \forall \mathbf{u}_k \in X_k,\ \mathbf{v}_{k-1} \in X_{k-1},\ k \geq 1\\ (\rho_k p_k, q_{k-1})_{M_{k-1}} =&(p_k, q_{k-1})_{M_k} \quad \forall p_k \in M_k,\ q_{k-1} \in M_{k-1},\ k \geq 1\end{aligned}$$

ein.

Wir betrachten im folgenden Algorithmus die Stokes Probleme

$$\begin{aligned}A_k\mathbf{u}_k + B_k' p_k =&\mathbf{f}_k\\ B_k\mathbf{u}_k =&g_k.\end{aligned} \tag{P_k}$$

Dabei ist $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}_{h_R}$ und $g_R = 0$. Die Größen $\mathbf{f}_k$, g_k mit $k \leq R-1$ werden rekursiv während des Algorithmus berechnet. Man beachte, dass eine äquivalente Formulierung von (P_k) mit den Bilinearformen a und b gegeben ist durch

$$\begin{aligned}a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, p_k) =&(\mathbf{f}_k, \mathbf{v}_k)_{X_k} \quad \forall \mathbf{v}_k \in X_k\\ b(\mathbf{u}_k, q_k) =&(g_k, q_k)_{M_k} \quad \forall q_k \in M_k.\end{aligned}$$

9.4 Algorithmus: (Eine Iteration des Mehrgitteralgorithmus auf Stufe k mit m Richardson Glättungsschritten)
1. Glätung: *Gegeben sei eine Näherung $\mathbf{u}_k^0 \in X_k$, $p_k^0 \in M_k$ für die Lösung von Problem (P_k). Berechne für $l = 1, 2, ..., m$*

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_k^l :=&\omega_k^{-2}\{\mathbf{f}_k - A_k\mathbf{u}_k^{l-1} - B_k' p_k^{l-1}\}\\ r_k^l :=&h_k^{-2}\omega_k^{-2}\{g_k - B_k\mathbf{u}_k^{l-1}\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k^l :=&\mathbf{u}_k^{l-1} + A_k\mathbf{w}_k^l + B_k' r_k^l\\ p_k^l :=&p_k^{l-1} + h_k^{-2}B_k\mathbf{w}_k^l.\end{aligned}$$

2. Grobgitterkorrektur: *Sei $\mathbf{u}_{k-1}^* \in X_{k-1}$, $p_{k-1}^* \in M_{k-1}$ die exakte Lösung von Problem (P_{k-1}) mit*

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{k-1} :=&R_k\{\mathbf{f}_k - A_k\mathbf{u}_k^m - B_k' p_k^m\}\\ g_{k-1} :=&\rho_k\{g_k - B_k\mathbf{u}_k^m\}.\end{aligned}$$

Falls $k = 1$ ist, setze $\tilde{\mathbf{u}}_{k-1} := \mathbf{u}_{k-1}^*$, $\tilde{p}_{k-1} := p_{k-1}^*$. Falls $k > 1$ ist, berechne Näherungen $\tilde{\mathbf{u}}_{k-1} \in X_{k-1}$, $\tilde{p}_{k-1} \in M_{k-1}$ für $\mathbf{u}_{k-1}^*$, p_{k-1}^* durch Anwenden von $\mu \geq 2$ Iterationen des Mehrgitteralgorithmus auf Stufe $k-1$ mit Startwert $\mathbf{u}_{k-1}^0 = 0$, $p_{k-1}^0 = 0$. Setze

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k^{m+1} :=&\mathbf{u}_k^m + \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}\\ p_k^{m+1} :=&p_k^m + \tilde{p}_{k-1}.\end{aligned}$$

9.5 Bemerkung: Ein Glättungsschritt von Algorithmus 9.4 entspricht einem Schritt der gedämpften Richardson Iteration angewandt auf das System

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_k \\ h_k^{-2}g_k \end{pmatrix}.$$

Das Quadrieren berücksichtigt die Indefinitheit von

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ B_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix}$$

spektral äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} A_k & h_k^{-1}B_k' \\ h_k^{-1}B_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Skalierung von B_k und B_k' berücksichtigt die unterschiedliche Ordnung der Differentialoperatoren, die zu A_k bzw. B_k und B_k' gehören. Der Dämpfungsparameter ω_k muss größer sein als der größte Eigenwert von

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir werden zeigen, dass dieser Eigenwert proportional zu h_k^{-2} ist. □

Für die Konvergenzanalyse von Algorithmus 9.4 definieren wir eine gitterabhängige Norm $\|.\|_{0,k}$ auf $X_k \times M_k$ durch

$$\|[\mathbf{u}_k, p_k]\|_{0,k} := \left\{(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k)_{X_k} + h_k^2(p_k, p_k)_{M_k}\right\}^{1/2}.$$

Wegen der Voraussetzung (4) ist die Norm $\|.\|_{0,k}$ gleichmäßig äquivalent zu $\{\|\mathbf{u}_k\|_0^2 + h_k^2\|p_k\|_0^2\}^{1/2}$. Die Skalierung des Druckes berücksichtigt die unterschiedliche Regularität von Druck und Geschwindigkeit.

Da der Operator

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix}$$

spektral äquivalent ist zu dem symmetrischen Operator

$$\begin{pmatrix} A_k & h_k^{-1}B_k' \\ h_k^{-1}B_k & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt er einen vollständigen Satz von reellen Eigenwerten $\lambda_{k,1}, ..., \lambda_{k,N_k}$ und zugehörigen Eigenfuktionen $[\mathbf{w}_{k,1}, r_{k,1}], ..., [\mathbf{w}_{k,N_k}, r_{k,N_k}]$ mit $N_k := \dim(X_k \times M_k)$. Dabei

können die Eigenwerte der Größe nach geordnet und die Eigenfunktionen bezüglich des zu $\|.\|_{0,k}$ gehörenden Skalarproduktes orthonormiert werden:

$$\begin{aligned}
|\lambda_{k,1}| \leq ... \leq |\lambda_{k,N_k}| \\
A_k \mathbf{w}_{k,i} + B_k' r_{k,i} =& \lambda_{k,i} \mathbf{w}_{k,i} \\
B_k \mathbf{w}_{k,i} =& h_k^{-2} \lambda_{k,i} r_{k,i} \\
(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{w}_{k,j})_{X_k} + h_k^2 (r_{k,i}, r_{k,j})_{M_k} =& \delta_{i,j}.
\end{aligned}$$

Da o.E. $h_k \leq 1$ ist, folgt aus den Voraussetzungen (3) und (1) mit von k unabhängigen positiven Konstanten

$$\begin{aligned}
\beta_0 =& \beta_0 \|[\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}]\|_{0,k} \\
\leq& \beta_0 c \left\{ \|\mathbf{w}_{k,i}\|_1^2 + \|r_{k,i}\|_0^2 \right\}^{1/2} \\
\leq& c \sup_{[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k \setminus \{0\}} \frac{a(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, r_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, q_k)}{\{\|\mathbf{v}_k\|_1^2 + \|q_k\|_0^2\}^{1/2}} \\
\leq& c' \sup_{[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k \setminus \{0\}} \frac{a(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, r_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, q_k)}{\|[\mathbf{v}_k, q_k]\|_{0,k}} \\
\leq& c' |\lambda_{k,i}|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\lambda_{k,i}| =& |a(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{w}_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i})| \\
\leq& c'' \{\|\mathbf{w}_{k,i}\|_1^2 + \|r_{k,i}\|_0^2\} \\
\leq& c''' h_k^{-2} \|[\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}]\|_{0,k}^2 \\
=& c''' h_k^{-2}.
\end{aligned}$$

Also ist $|\lambda_{k,N_k}| \in [c_1, c_2 h_k^{-2}]$ mit von k unabhängigen Konstanten c_1, c_2. Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden stets an, dass $\omega_k = |\lambda_{k,N_k}|$ ist.

Jedes Element $[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$[\mathbf{v}_k, q_k] = \sum_{i=1}^{N_k} c_i [\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}].$$

Mit Hilfe dieser Zerlegung können wir für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Norm auf $X_k \times M_k$ durch

$$|||[\mathbf{v}_k, q_k]|||_{s,k} := \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 |\lambda_{k,i}|^s \right\}^{1/2}$$

definieren. Konstruktionsgemäß ist $|||.|||_{0,k} = \|.\|_{0,k}$.

9.6 Lemma: (Glättungseigenschaft) *Bezeichne mit* $[\mathbf{u}_k^*, p_k^*] \in X_k \times M_k$ *die exakte Lösung von Problem* (P_k) *und mit* $[\mathbf{e}_k^i, \varepsilon_k^i] := [\mathbf{u}_k^i - \mathbf{u}_k^*, p_k^i - p_k^*]$ *den Fehler nach dem* i*-ten Schritt von Algorithmus 9.4. Dann ist*

$$|||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k} \leq \frac{ch_k^{-2}}{\sqrt{2m+1}} \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_{0,k}$$

mit einer von k *unabhängigen Konstanten* c.

Beweis: Zerlege den Anfangsfehler gemäß

$$[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0] = \sum_{i=1}^{N_k} c_i [\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}].$$

Dann ist am Ende von Schritt 1

$$[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m] = \sum_{i=1}^{N_k} c_i \left(1 - \omega_k^{-2} \lambda_{k,i}^2\right)^m [\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}]. \tag{9}$$

Wegen $\omega_k = |\lambda_{k,N_k}|$ folgt

$$\begin{aligned}
|||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k} &= \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_{k,i}^2}{\lambda_{k,N_k}^2}\right)^{2m} \lambda_{k,i}^2 \right\}^{1/2} \\
&= |\lambda_{k,N_k}| \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_{k,i}^2}{\lambda_{k,N_k}^2}\right)^{2m} \frac{\lambda_{k,i}^2}{\lambda_{k,N_k}^2} \right\}^{1/2} \\
&\leq |\lambda_{k,N_k}| \max_{|x| \leq 1} |x|(1-|x|^2)^m \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 \right\}^{1/2} \\
&= |\lambda_{k,N_k}| \max_{0 \leq z \leq 1} z(1-z^2)^m \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_{0,k}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $z(1-z^2)^m$ ihr Maximum in $[0,1]$ an der Stelle $1/\sqrt{2m+1}$ annimmt, folgt hieraus die Behauptung. □

9.7 Lemma: (Approximationseigenschaft) *Es gibt eine von* k *unabhängige Konstante* c *mit*

$$\|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_{0,k} \leq ch_k^2 |||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k}.$$

Beweis: Definiere die Projektionsoperatoren $P_k : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow X_k$ und $\pi_k : L_0^2(\Omega) \longrightarrow M_k$ durch

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, p - \pi_k p) &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_k \in X_k \\
b(\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}, q_k) &= 0 \quad \forall q_k \in M_k.
\end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung (3) und den abstrakten Ergebnissen von § 4 folgt für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_1 + \|p - \pi_k p\|_0 \leq & c\{\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\|_0\}\\ \|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_1 + \|p - \pi_k p\|_0 \leq & ch_k\{\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1\}.\end{aligned}$$

Für $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^n$ bezeichne $\mathbf{w_g}$, $r_\mathbf{g}$ die Lösung des Stokes Problems

$$\begin{aligned}a(\mathbf{w_g}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, r_\mathbf{g}) = & \int_\Omega \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n\\ b(\mathbf{w_g}, q) = & 0 \qquad\qquad \forall q \in L_0^2(\Omega).\end{aligned}$$

Da Ω ein konvexes Polygon ist, folgt $\mathbf{w_g} \in H^2(\Omega)^n$, $r_\mathbf{g} \in H^1(\Omega)$ und

$$\|\mathbf{w_g}\|_2 + \|r_\mathbf{g}\|_1 \leq c\|\mathbf{g}\|_0.$$

Damit folgt für beliebiges $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}) =& a(\mathbf{w_g}, \mathbf{u} - P_k\mathbf{u}) + b(\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}, r_\mathbf{g}) + b(\mathbf{w_g}, p - \pi_k p)\\ =& a(\mathbf{w_g} - P_k\mathbf{w_g}, \mathbf{u} - P_k\mathbf{u}) + b(\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}, r_\mathbf{g} - \pi_k r_\mathbf{g})\\ &+ b(\mathbf{w_g} - P_k\mathbf{w_g}, p - \pi_k p)\\ \leq& c\{\|\mathbf{w_g} - P_k\mathbf{w_g}\|_1 + \|r_\mathbf{g} - \pi_k r_\mathbf{g}\|_0\}\{\|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_1 + \|p - \pi_k p\|_0\}\\ \leq& c' h_k\{\|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_1 + \|p - \pi_k p\|_0\}\|\mathbf{g}\|_0\end{aligned}$$

und somit

$$\|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_0 \leq c' h_k\{\|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_1 + \|p - \pi_k p\|_0\}.$$

Wegen der Definition von $\|.\|_{0,k}$ folgt hieraus

$$\|[\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}, p - \pi_k p]\|_{0,k} \leq c' h_k\{\|\mathbf{u} - P_k\mathbf{u}\|_1 + \|p - \pi_k p\|_0\}.$$

Daher gilt für jedes $[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k$

$$\begin{aligned}& a(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*) + b(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, q_k)\\ =& a(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \mathbf{v}_k - P_{k-1}\mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k - P_{k-1}\mathbf{v}_k, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*)\\ &+ b(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, q_k - \pi_{k-1}q_k)\\ =& a(\mathbf{e}_k^m, \mathbf{v}_k - P_{k-1}\mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k - P_{k-1}\mathbf{v}_k, \varepsilon_k^m) + b(\mathbf{e}_k^m, q_k - \pi_{k-1}q_k)\\ \leq& |||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k}\|[\mathbf{v}_k - P_{k-1}\mathbf{v}_k, q_k - \pi_{k-1}q_k]\|_{0,k}\\ \leq& ch_{k-1}|||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k}\{\|\mathbf{v}_k\|_1 + \|q_k\|_0\}.\end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung (3) folgt hieraus

$$\|\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*\|_1 + \|\varepsilon_k^m - p_{k-1}^*\|_0 \leq ch_{k-1}|||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k}.$$

Da $\mathbf{u}_{k-1}^* = P_{k-1}\mathbf{e}_k^m$, $p_{k-1}^* = \pi_{k-1}\varepsilon_k^m$ und $h_{k-1} \leq ch_k$ ist, folgt hieraus die Behauptung. $\square$

9.8 Satz: *Sei Ω ein konvexes Polygon. Dann gibt es zwei von k unabhängige Konstanten c_1, c_2, so dass für alle $\omega_k \in [c_1 h_k^{-2}, c_2 h_k^{-2}]$ folgendes gilt:*
(1) *Die Konvergenzrate δ_{TG} gemessen in der $\|.\|_{0,k}$-Norm des Zweigitteralgorithmus 9.4 (d.h. auf Niveau $k-1$ wird exakt gelöst) ist beschränkt durch*

$$\delta_{TG} \leq \frac{c_0}{\sqrt{2m+1}}.$$

Die Konstante c_0 hängt nicht von k ab.
(2) *Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$, alle $\mu \geq 2$ und alle k die Konvergenzrate δ_k gemessen in der $\|.\|_{0,k}$-Norm des Mehrgitteralgorithmus 9.4 beschränkt ist durch*

$$\delta_k \leq 2\delta_{TG} \leq \frac{1}{2}.$$

Beweis: **ad (1):** Aus der Glättungs- und der Approximationseigenschaft folgt für den Zweigitteralgorithmus

$$\begin{aligned}\|[\mathbf{e}_k^{m+1}, \varepsilon_k^{m+1}]\|_{0,k} =& \|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_{0,k} \\ \leq& c_1 h_k^2 |||[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]|||_{2,k} \\ \leq& \frac{c_2}{\sqrt{2m+1}} \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_{0,k}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.
ad (2): Konstruktionsgemäß gilt für den Fehler nach der Grobgitterkorrektur

$$\begin{aligned}\|[\mathbf{e}_k^{m+1}, \varepsilon_k^{m+1}]\|_{0,k} =& \|[\mathbf{e}_k^m - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, \varepsilon_k^m - \tilde{p}_{k-1}]\|_{0,k} \\ \leq& \|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_{0,k} \\ &+ \|[\mathbf{u}_{k-1}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, p_{k-1}^* - \tilde{p}_{k-1}]\|_{0,k}.\end{aligned}$$

Gemäß Teil (1) ist

$$\|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_{0,k} \leq \delta_{TG} \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_{0,k}.$$

Wegen der Definition der Norm $\|.\|_{0,k}$ und der Mehrgitterkonvergenzrate gilt weiter

$$\begin{aligned}\|[\mathbf{u}_{k-1}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, p_{k-1}^* - \tilde{p}_{k-1}]\|_{0,k} \leq& \|[\mathbf{u}_{k-1}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, p_{k-1}^* - \tilde{p}_{k-1}]\|_{0,k-1} \\ \leq& \delta_{k-1}^{\mu} \|[\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*]\|_{0,k-1} \\ \leq& c\delta_{k-1}^{\mu} \|[\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*]\|_{0,k}.\end{aligned}$$

Dabei hängt die Konstante $c \geq 1$ nur von h_{k-1}/h_k ab. Mit der Dreiecksungleichung, Teil (1) und der Fehlerdarstellung (9) folgt schließlich

$$\begin{aligned}\|[\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*]\|_{0,k} \leq& \|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_{0,k} + \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{0,k} \\ \leq& (\delta_{TG} + 1) \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_{0,k}.\end{aligned}$$

Gemäß Teil (1) gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ gilt

$$\delta_{TG} \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2c}\right\}.$$

Für diese m und $\mu \geq 2$ folgt dann aus obigen Abschätzungen induktiv

$$\begin{aligned}
\delta_k \leq & \delta_{TG} + c\delta_{k-1}^{\mu}(1+\delta_{TG}) \\
\leq & \delta_{TG} + c\delta_{k-1}^{2}(1+\delta_{TG}) \\
\leq & \delta_{TG} + 4c\delta_{TG}^{2}(1+\delta_{TG}) \\
= & \delta_{TG}[1 + 4c\delta_{TG} + 4c\delta_{TG}^{2}] \\
\leq & \delta_{TG}[1 + 2c\delta_{TG}]^2 \\
\leq & 2\delta_{TG}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung. □

9.9 Bemerkung: (1) Mit einer Modifikation des vorigen Beweises kann man zeigen, dass das Konvergenzresultat von Satz 9.8 auch gilt, wenn in Algorithmus 9.4 die gedämpfte Richardson Iteration

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_k^l :=& \mathbf{u}_k^{l-1} + \omega_k^{-1}\{\mathbf{f}_k - A_k\mathbf{u}_k^{l-1} - B_k' p_k^{l-1}\} \\
p_k^l :=& p_k^{l-1} + h_k^{-2}\omega_k^{-1}\{g_k - B_k\mathbf{u}_k^{l-1}\}
\end{aligned}$$

als Glätter benutzt wird. Da pro Glättungsschritt der Operator

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ B_k & 0 \end{pmatrix}$$

nur noch einmal ausgewertet werden muss, halbiert sich in etwa der Aufwand für den Mehrgitteralgorithmus.

(2) Eine weitere Verbesserung der Konvergenzrate bei in etwa gleichem Aufwand kann man durch folgende Modifikation von Algorithmus 9.4 erreichen. Sei α_k eine Approximation für den größten Eigenwert von A_k, der von der Ordnung h_k^{-2} ist. Ersetze in Schritt 1 von Algorithmus 9.4 die gedämpfte Richardson Iteration durch die Vorschrift

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^l \\ p_k^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^{l-1} \\ p_k^{l-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_k I & B_k' \\ B_k & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} A_k & B_k' \\ B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^{l-1} \\ p_k^{l-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_k \\ g_k \end{pmatrix} \right\}. \tag{10}$$

Ersetze vor der Grobgitterkorrektur den Druck p_k^m durch die Lösung $\hat{p}_k^m$ des Minimumproblems

$$\|A_k\mathbf{u}_k^m + B_k' q_k - \mathbf{f}_k\|_{X_k} \longrightarrow \min \text{ in } M_k.$$

Führe schließlich nach der Grobgitterkorrektur noch einen Schritt der Iterationsvorschrift (10) aus. Mit diesen Modifikationen kann man die Glättungseigenschaft von Lemma 9.6 mit $1/m$ statt $1/\sqrt{2m+1}$ beweisen. Der Beweis von Satz 9.8 bleibt ansonsten unverändert. Da die Konvergenzrate des modifizierten Algorithmus $1/m$ statt $1/\sqrt{2m+1}$ beträgt, ist das neue Verfahren etwa doppelt so schnell wie Algorithmus 9.4. Für die Durchführung des Iterationsschrittes (10) beachte man, dass für gegebenes $[\mathbf{w}_k, r_k] \in X_k \times M_k$ die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \alpha_k I & B_k' \\ B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k \\ q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k =& \frac{1}{\alpha_k}[\mathbf{w}_k - B_k' q_k] \\ q_k =& (B_k B_k')^{-1}\{B_k \mathbf{w}_k - \alpha_k r_k\}. \end{aligned}$$

Für die Stokes Gleichungen entspricht aber das Problem

$$(B_k B_k') q_k = B_k \mathbf{w}_k - \alpha_k r_k$$

einer diskreten Poisson Gleichung. Diese kann mit den bekannten Verfahren leicht effizient näherungsweise gelöst werden. □

II.10 A posteriori Fehlerschätzer

In § 10 VFEM haben wir für Finite Element Diskretisierungen der Reaktions-Diffusions Gleichung gezeigt, wie man aus den bekannten Daten der Differentialgleichung und der berechneten Finite Element Approximation leicht berechenbare lokale Größen bestimmen kann, die a posteriori globale obere und lokale untere Schranken für den Fehler der Finite Element Approximation liefern. Die wesentlichen Schritte hierbei waren:

(1) Die Stabilität des unendlich dimensionalen Variationsproblems, d.h. der Differentialoperator ist ein Isomorphismus zwischen geeigneten Sobolev Räumen.
(2) Eine L^2-Darstellung des Residuums der Finite Element Approximation.
(3) Die Konsistenz der Diskretisierung.
(4) Geeignete Interpolationsoperatoren, die unter minimalen Regularitätsannahmen lokale Fehlerabschätzungen liefern.
(5) Lokale Abschneidefunktionen.

Diese Ingredienzien lassen sich leicht auf gemischte Finite Element Diskretisierungen der Stokes Gleichungen übertragen. Um unnötige technische Schwierigkeiten zu vermeiden, betrachten wir im folgenden ebene Dreieckselemente. D.h., Ω ist ein

beschränktes Polygon, $\mathcal{T}_h$ ist eine Familie zulässiger und regulärer Triangulierungen von Ω und X_h, M_h sind Finite Element Räume zu $\mathcal{T}_h$, die Geschwindigkeit und Druck approximieren. Man beachte, dass die nachfolgenden Argumente nie die Stabilität des Paares (X_h, M_h) erfordern.

Wir nehmen an, dass es zwei Zahlen $\mu \geq 1$ und $\nu \geq 0$ gibt mit $X_h \subset [S_{h,0}^{\mu,0}]^2$, $M_h \subset S_h^{\nu,-1} \cap L_0^2(\Omega)$ und dass $[S_{h,0}^{1,0}]^2 \subset X_h$ ist. Mit $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2, p \in L_0^2(\Omega)$ bezeichnen wir die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen und mit $\mathbf{u}_h \in X_h$, $p_h \in M_h$ eine Lösung der entsprechenden Finite Element Diskretisierung

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad && \forall \mathbf{v}_h \in X_h \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= 0 && \forall q_h \in M_h. \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen Satz 3.4 gibt es eine Konstante $\beta > 0$, die nur von Ω abhängt, mit

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \\ \leq &\beta^{-1} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, q \in L_0^2(\Omega) \\ \|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|_0^2 = 1}} \Big\{ \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &\qquad + \int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \Big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dies ist die Stabilität des Variationsproblems aus Punkt (1).

Für die L^2-Darstellung des Residuums aus Punkt (2) führen wir elementweise partielle Integration aus. Für beliebiges $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$, $q \in L_0^2(\Omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v} + \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}_h \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \underbrace{- \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v} + \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}}_{= \int_K (\Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{v}} \quad - \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_h \Big\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{v} - \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_h - \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{v} \Big\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{v} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_h \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{3}$$

Hierbei bezeichnen $\underline{\mathbf{I}}$ die 2×2 Einheitsmatrix, $\mathbf{n}_K$ die äußere Normale zu K, $\mathcal{E}_h$ die Menge der inneren Kanten in $\mathcal{T}_h$, $\mathbf{n}_E$ einen zu E senkrechten Einheitsvektor und $[\varphi]_E$ den Sprung von φ über E in Richtung $\mathbf{n}_E$. Man beachte, dass die Terme $[\mathbf{n}_E \cdot p_h \underline{\mathbf{I}}]_E$ verschwinden, wenn wir stetige Druckapproximationen verwenden.

Aus der schwachen Formulierung der Stokes Gleichungen und (1) folgt für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$, $q_h \in M_h$

$$\int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) q_h = 0. \tag{4}$$

Dies ist die Konsistenz aus Punkt (3).

Für die Interpolationsoperatoren aus Punkt (4) greifen wir auf den modifizierten Clément'schen Interpolationsoperator aus § I.4 zurück und wenden ihn auf die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes an. Seien dazu $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ und $q \in L_0^2(\Omega)$ beliebig mit $\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0 = 1$. Dann folgt mit $\mathbf{v}_h = R_h \mathbf{v}$ und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung aus den Identitäten (3) und (4) und den Fehlerabschätzungen aus § I.4

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) q \\
&= \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - \int_\Omega (p - p_h) \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) q \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_h \\
&\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\
&\le \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(E)} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{L^2(K)} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} \\
&\le \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_1 h_K \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} c_2 h_E^{1/2} \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{L^2(K)} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} \\
&\le c_0 \Big\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big[h_K^2 \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \big] \\
&\qquad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}^2 \Big\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\eta_K := \Big\{ h_K^2 \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_h \\ E \subset \partial K}} h_E \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}^2 \Big\}^{1/2}, \tag{6}$$

so folgt aus dieser Abschätzung und der Ungleichung (2) die **globale obere Fehlerschranke**

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \le c_0 \beta^{-1} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

η_K ist der gesuchte **residuelle a posteriori Fehlerschätzer**. Wegen Abschätzung (7) ist der Fehlerschätzer **zuverlässig**. Man beachte, dass die Konstante in (7) nur von der Stabilität des unendlich dimensionalen Variationsproblems und den Konstanten in der Interpolationsfehlerabschätzung von § I.4 abhängt.

Für die Abschneidefunktionen aus Punkt (5) können wir die Funktionen ψ_K und ψ_E aus § 10 VFEM übernehmen. ψ_K ist die Elementblasenfunktion aus § 5 (vgl. Satz 5.10). Diese ist das eindeutige kubische Polynom, das auf dem Rand von K verschwindet und das im Schwerpunkt von K den Wert 1 annimmt. ψ_E ist die Kantenblasenfunktion aus § 5 (vgl. Satz 5.8). Diese ist das eindeutige stetige, stückweise quadratische Polynom, das im Mittelpunkt von E den Wert 1 annimmt und das auf dem Rand von ω_E verschwindet. In Satz 10.2 VFEM haben wir folgende Eigenschaften der Funktionen ψ_K und ψ_E bewiesen:

$$\begin{aligned} c_1 \|v\|_{L^2(K)} &\le \Big\{ \int_K \psi_K v^2 \Big\}^{1/2} &&\le \|v\|_{L^2(K)}, \\ c_2 h_K^{-1} \|\psi_K v\|_{L^2(K)} &\le |\psi_K v|_{H^1(K)} &&\le c_3 h_K^{-1} \|\psi_K v\|_{L^2(K)}, \\ c_4 \|\sigma\|_{L^2(E)} &\le \Big\{ \int_E \psi_E \sigma^2 \Big\}^{1/2} &&\le \|\sigma\|_{L^2(E)}, \\ c_5 h_E^{-1} \|\psi_E \sigma\|_{L^2(\omega_E)} &\le |\psi_E \sigma|_{H^1(\omega_E)} &&\le c_6 h_E^{-1} \|\psi_E \sigma\|_{L^2(\omega_E)}, \\ \|\psi_E \sigma\|_{L^2(\omega_E)} &\le c_7 h_E^{1/2} \|\sigma\|_{L^2(E)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei sind $K \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}_h$, v ein Polynom vom Grad k auf K, σ ein Polynom vom Grad k auf E und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Konstanten $c_1, ..., c_7$ hängen nur von k und der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an $\mathcal{T}_h$ ab.

Wegen $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ist offensichtlich für jedes $K \in \mathcal{T}_h$

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} = \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(K)} \le \sqrt{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(K)}. \tag{9}$$

Sei nun $\mathbf{f}_h$ irgendeine Finite Element Approximation an $\mathbf{f}$, z.B. die L^2-Projektion auf $[S_h^{0,-1}]^2$. Setzen wir die Funktionen $\mathbf{v} := \mathbf{v}_K := \psi_K(\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h)$ und $q := 0$ in

(3) ein, so erhalten wir mit (8)

$$
\begin{aligned}
&c_1^2\|\mathbf{f}_h+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(K)}^2\\
\le&\int_K(\mathbf{f}_h+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h)\cdot\underbrace{\psi_K(\mathbf{f}_h+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h)}_{=\mathbf{v}_K}\\
=&\int_K(\mathbf{f}+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h)\cdot\mathbf{v}_K+\int_K(\mathbf{f}_h-\mathbf{f})\cdot\mathbf{v}_K\\
=&\int_K\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h):\nabla\mathbf{v}_K-\int_K(p-p_h)\operatorname{div}\mathbf{v}_K+\int_K(\mathbf{f}_h-\mathbf{f})\cdot\mathbf{v}_K\\
\le&\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(K)}\|\nabla\mathbf{v}_K\|_{L^2(K)}+\|p-p_h\|_{L^2(K)}\sqrt{2}\|\nabla\mathbf{v}_K\|_{L^2(K)}\\
&+\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}\|\mathbf{v}_K\|_{L^2(K)}\\
\le&\left\{c_3h_K^{-1}\left[\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(K)}+\sqrt{2}\|p-p_h\|_{L^2(K)}\right]+\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}\right\}\\
&\cdot\|\mathbf{f}_h+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|\|_{L^2(K)}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt für jedes $K\in\mathcal{T}_h$

$$
\begin{aligned}
&h_K\|\mathbf{f}_h+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|\|_{L^2(K)}\\
\le&c\left\{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(K)}+\|p-p_h\|_{L^2(K)}+h_K\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Setzen wir schließlich die Funktionen $\mathbf{v}:=\mathbf{v}_E:=\psi_E[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h-p_h\underline{\mathbf{I}})]_E$ und $q:=0$ in (3) ein, erhalten wir aus (8)

$$
\begin{aligned}
&c_4^2\|[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h-p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}^2\\
\le&\int_E[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h-p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\cdot\underbrace{\psi_E[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h-p_h\underline{\mathbf{I}})]_E}_{=\mathbf{v}_E}\\
=&-\int_{\omega_E}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h):\nabla\mathbf{v}_E+\int_{\omega_E}(p-p_h)\operatorname{div}\mathbf{v}_E\\
&-\sum_{K\subset\omega_E}\int_K(\mathbf{f}+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h)\cdot\mathbf{v}_E\\
\le&\Big\{c_6c_7h_E^{-1/2}\left[\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(\omega_E)}+\sqrt{2}\|p-p_h\|_{L^2(\omega_E)}\right]\\
&+c_7h_E^{1/2}\|\mathbf{f}+\Delta\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(\omega_E)}\Big\}\|[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h-p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit (10) liefert dies für jedes $E\in\mathcal{E}_h$

$$
\begin{aligned}
&h_E^{1/2}\|[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h-p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}\\
\le&c\left\{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(\omega_E)}+\|p-p_h\|_{L^2(\omega_E)}+h_E\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(\omega_E)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Aus den Abschätzungen (9) – (11) ergibt sich die **lokale untere Fehlerschranke**

$$
\eta_K\le c\left\{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(\omega_K)}+\|p-p_h\|_{L^2(\omega_K)}+h_K\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(\omega_K)}\right\}
\tag{12}
$$

mit

$$\omega_K := \bigcup_{K \cap K' \in \mathcal{E}_h} K'.$$

Daher ist der Schätzer auch **effizient**. Man beachte, dass der Term $h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\omega_K)}$ in (12) eine Störung höherer Ordnung ist.

Wie in § 10 VFEM beschrieben, kann man die Größen η_K für eine automatische, adaptive Gitterverfeinerung benutzen.

Ähnlich wie in Bem. 10.3 VFEM kann man für das Stokes Problem auch Fehlerschätzer konstruieren, die auf der Lösung lokaler, diskreter Hilfsprobleme beruhen. Jetzt sind diese Probleme aber Stokes Gleichungen. Man muss daher besonders auf die Stabilität der lokalen Probleme achten. Mit Hilfe der Abschneidefunktionen ψ_K und ψ_E kann man zeigen, dass diese Hilfsprobleme Fehlerschätzer liefern, die in dem Sinne zu η_K äquivalent sind, dass beide Größen in beide Richtungen bis auf multiplikative, von h unabhängige Konstanten und additive Terme höherer Ordnung gegeneinander abgeschätzt werden können.

III Die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

III.1 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

Wir betrachten in diesem Kapitel die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen aus § I.2

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla\tilde{p} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} =& \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} =& 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} =& 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, wie üblich ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz Rand Γ; $\nu > 0$ bezeichnet die Viskosität. Wir beschränken uns zunächst auf homogene Dirichlet Randbedingungen, um technische Schwierigkeiten zu vermeiden. Später werden wir zeigen, wie inhomogene Dirichlet Randbedingungen behandelt werden können.

Für das weitere ist es hilfreich, Gleichung (1) umzuskalieren. Dazu dividieren wir die Impulsgleichung durch die Viskosität und setzen $p := \nu^{-1}\tilde{p}$. Dies liefert die äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} =& \frac{1}{\nu}\mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} =& 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} =& 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

Für eine schwache Formulierung von (2) definieren wir eine Trilinearform N durch

$$N(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) := \int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w} = \int_\Omega \sum_{1\le i,j\le n} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i}\mathbf{w}_j.$$

1.1 Satz: *N ist eine stetige Trilinearform auf $H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n$. Für alle $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ mit $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ gilt*

$$N(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -N(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$$

und

$$N(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0.$$

Beweis: Wir erinnern daran, dass $n \in \{2,3\}$ ist. Seien $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^n$. Dann folgt aus der Hölder'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} N(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) =& \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}) \\ \le& \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \\ \le& \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Da $n \leq 4$ ist, ist gemäß dem Sobolev'schen Einbettungssatz $H_0^1(\Omega)^n$ stetig in $L^4(\Omega)^n$ eingebettet. Da $C_0^\infty(\Omega)^n$ dicht ist $H_0^1(\Omega)^n$, beweist dies die Stetigkeit von N.
Die Trilinearität ist offensichtlich.
Für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^n$ folgt mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$\begin{aligned}
N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \mathbf{w}_j \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j) - \mathbf{v}_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{u}_i \mathbf{w}_j) \right\} \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left\{ \int_\Gamma \underbrace{\mathbf{n}_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j}_{=0} - \int_\Omega \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} \mathbf{w}_j - \int_\Omega \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial x_i} \mathbf{u}_i \right\} \\
&= - \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die restlichen Eigenschaften von N. □

Wegen Satz 1.1 lautet die schwache Formulierung von (2):

$$\begin{aligned}
&\text{Finde } \mathbf{u} \in X := H_0^1(\Omega)^n,\ p \in M := L_0^2(\Omega), \text{ so dass} \\
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\nu} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X \\
b(\mathbf{u}, q) &= 0 \qquad\qquad \forall q \in M.
\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist wie bei den Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\
b(\mathbf{v}, p) &:= - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist jede klassische Lösung von (2) eine Lösung von (4) und umgekehrt jede hinreichend glatte Lösung von (4) eine klassische Lösung von (2).
Sei wie üblich

$$V := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Dann ist wegen Satz II.3.3 und Bem. II.2.4 Problem (4) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&\text{Finde } \mathbf{u} \in V, \text{ so dass} \\
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\nu} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V.
\end{aligned} \tag{5}$$

Für den Nachweis der Lösbarkeit von Problem (5) – und damit auch von Problem (4) – und für die spätere Finite Element Diskretisierung ist es hilfreich, Problem (5)

als eine äquivalente Operatorgleichung zu formulieren. Hierzu bezeichnen wir mit $T \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^n, V)$ den **Stokes Operator**, der jedem $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$ die eindeutige Lösung $\mathbf{u} := T\mathbf{w} \in V$ von

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

zuordnet. Weiter definieren wir stetige Abbildungen $G,\ G_0 : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^n$ durch

$$\begin{aligned} \langle G_0(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} :=& N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ G(\mathbf{u}) :=& G_0(\mathbf{u}) - \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Dann ist Problem (5) äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \text{ mit} \\ F(\frac{1}{\nu}, \mathbf{u}) :=& \mathbf{u} + \frac{1}{\nu} TG(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Im folgenden setzen wir zur Abkürzung häufig

$$\lambda := \frac{1}{\nu}.$$

Man beachte, dass für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ und alle $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$a(F(\lambda, \mathbf{u}), \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)}.$$

1.2 Satz: (1. Schauder'scher Fixpunktsatz) *Seien X ein Banach Raum, $K \subset X$ nicht leer, konvex und kompakt und $\psi : K \longrightarrow K$ stetig. Dann besitzt ψ einen Fixpunkt in K.*

Beweis: Satz X.7.10 Analysis III oder Satz 230.3 Heuser: Lehrbuch der Analysis, Band 2. □

1.3 Satz: *Seien X ein endlich dimensionaler Hilbert Raum mit Skalarprodukt $(.,.)_X$ und $\varphi : X \longrightarrow X$ stetig. Es gebe ein $r > 0$ mit*

$$(\varphi(u), u)_X \geq 0 \quad \forall u \in X \text{ mit } \|u\|_X = r.$$

Dann gibt es ein $u \in X$ mit $\|u\|_X \leq r$ und

$$\varphi(u) = 0.$$

Beweis: (Vgl. Satz X.7.3 Analysis III) Wir nehmen an, φ besitze keine Nullstelle in $K := \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$. K ist konvex und kompakt, da X endlich dimensional ist. Da φ keine Nullstelle in K besitzt, ist

$$\psi(u) := -r \frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|_X}$$

auf K wohldefiniert und stetig. Aus Satz 1.2 folgt, dass ψ einen Fixpunkt u^* in K besitzt. Wegen $\|\psi(u)\|_X = r$ für alle $u \in K$ gilt $\|u^*\|_X = r$. Damit folgt

$$\begin{aligned} r^2 =& (u^*, u^*)_X \\ =& (\psi(u^*), u^*)_X \\ =& - r\|\varphi(u^*)\|_X^{-1}(\varphi(u^*), u^*)_X \\ \leq& 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. □

1.4 Satz: (Existenzsatz) *Die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2) besitzen für jedes* $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ *und jedes* $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ *mindestens eine schwache Lösung. Für jede schwache Lösung* $\mathbf{u}$ *gilt die a priori Abschätzung*

$$|\mathbf{u}|_1 \leq \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1}. \tag{7}$$

Beweis: Sei $\mathbf{u}$ eine schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen. Aus (5) und Satz 1.1 folgt

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|_1^2 =& a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ =& a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{\nu}N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ =& \frac{1}{\nu}\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{H^1(\Omega)} \\ \leq& \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1}|\mathbf{u}|_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die a priori Abschätzung (7).
Wir zeigen nun die Existenz einer Lösung. V ist als abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)^n$ separabel, d.h., es gibt eine Folge $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ endlich dimensionaler Unterräume mit

$$V_m \subset V_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und

$$V = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m}.$$

Bezeichne mit $T_m \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^n, V_m)$ den Stokes Operator auf V_m, der jedem $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$ die eindeutige Lösung $\mathbf{u}_m := T\mathbf{w} \in V_m$ von

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in V_m$$

zuordnet. Da a V-koerziv ist, ist T_m wohldefiniert. Definiere $F_m : \mathbb{R}_+^* \times V_m \longrightarrow V_m$ durch

$$F_m(\lambda, \mathbf{u}) := \mathbf{u} + \lambda T_m G(\mathbf{u}).$$

Sei $\mathbf{u} \in V_m$ mit $|\mathbf{u}|_1 = \lambda \|\mathbf{f}\|_{-1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a(F_m(\lambda, \mathbf{u}), \mathbf{u}) =& a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{H^1(\Omega)} \\ =& a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{H^1(\Omega)} \\ \geq& |\mathbf{u}|_1^2 - \lambda |\mathbf{u}|_1 \|\mathbf{f}\|_{-1} \\ =& 0. \end{aligned}$$

Daher können wir Satz 1.3 auf $X := V_m$, $(.,.)_X := a(.,.)$, $\varphi := F_m(\lambda, .)$ anwenden und erhalten für alle λ und alle m die Existenz eines $\mathbf{u}_{\lambda,m} \in V_m$ mit

$$|\mathbf{u}_{\lambda,m}|_1 \leq \lambda \|\mathbf{f}\|_{-1} \tag{8}$$

und

$$F_m(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda,m}) = 0. \tag{9}$$

Aus (8) und dem Sobolev'schen Einbettungssatz folgt, dass es ein $\mathbf{u}_\lambda^* \in V$ gibt mit $\mathbf{u}_{\lambda,m} \to \mathbf{u}_\lambda^*$ schwach in H^1 und stark in L^4. Aus (9) folgt

$$a(\mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{v}) = \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in V_n,\ n \leq m. \tag{10}$$

Wegen der schwachen Konvergenz der Folge $(\mathbf{u}_{\lambda,m})_{m \in \mathbb{N}}$ in H^1 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\mathbf{v} \in V_n$

$$a(\mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{v}) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} a(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}).$$

Wegen der Trilinearität von N, Satz 1.1 und Abschätzung (3) gilt weiter

$$\begin{aligned} & |N(\mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{v}) - N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v})| \\ =& |N(\mathbf{u}_{\lambda,m} - \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{v}) + N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_{\lambda,m} - \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v})| \\ =& |N(\mathbf{u}_{\lambda,m} - \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_{\lambda,m}, \mathbf{v}) - N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\lambda,m} - \mathbf{u}_\lambda^*)| \\ \leq& \|\mathbf{u}_{\lambda,m} - \mathbf{u}_\lambda^*\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{u}_{\lambda,m}|_1 \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{\lambda,m} - \mathbf{u}_\lambda^*\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{v}|_1 \|\mathbf{u}_\lambda^*\|_{L^4(\Omega)} \\ \underset{m \to \infty}{\longrightarrow}& 0. \end{aligned}$$

Also können wir in (10) für festes $\mathbf{v}$ den Grenzübergang $m \to \infty$ ausführen und erhalten

$$a(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}) = \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in V_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Da $\bigcup V_n$ dicht ist in V, zeigt dies, dass $\mathbf{u}_\lambda^*$ eine schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen ist. $\square$

1.5 Satz: (Eindeutigkeitssatz) *Setze zur Abkürzung*

$$\gamma := \|N\|_{\mathcal{L}^3} = \sup_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in H_0^1(\Omega)^n\setminus\{0\}} \frac{N(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})}{|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_1|\mathbf{w}|_1}.$$

Gilt

$$\gamma\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{-1} < 1,$$

so besitzen die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2) eine eindeutige schwache Lösung.

Beweis: Wegen Satz 1.4 müssen wir nur noch die Eindeutigkeit der schwachen Lösung zeigen. Seien also $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ zwei schwache Lösungen und $\mathbf{v} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Wegen Satz 1.4 ist

$$|\mathbf{u}_i|_1 \leq \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1} \quad i = 1, 2.$$

Mit Satz 1.1 folgt

$$\begin{aligned}
0 =& a(\underbrace{F(\frac{1}{\nu},\mathbf{u}_1)}_{=0} - \underbrace{F(\frac{1}{\nu},\mathbf{u}_2)}_{=0},\mathbf{v})\\
=& a(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \frac{1}{\nu}\{N(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1,\mathbf{v}) - N(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2,\mathbf{v})\}\\
=& |\mathbf{v}|_1^2 + \frac{1}{\nu}\{N(\mathbf{v},\mathbf{u}_1,\mathbf{v}) + \underbrace{N(\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{v})}_{=0}\}\\
\geq& |\mathbf{v}|_1^2 - \gamma\nu^{-1}|\mathbf{v}|_1^2|\mathbf{u}_1|_1\\
\geq& |\mathbf{v}|_1^2 \underbrace{\{1 - \gamma\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{-1}\}}_{>0}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{v} = 0$. □

1.6 Satz: (Regularitätssatz) *Jede schwache Lösung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen hat die gleiche Regularität wie die Lösung der Stokes Gleichungen mit gleicher rechter Seite* $\mathbf{f}$. *Ist insbesondere* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ *und* $\Gamma \in C^2$ *oder* Ω *ein konvexes Polygon, so ist jede schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in* $H^2(\Omega)^n \times H^1(\Omega)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt mit einem "Münchhausenargument". Wir zeigen nur die H^2-Regularität; höhere Regularität wird völlig analog bewiesen. Sei also $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\Gamma \in C^2$ oder Ω ein konvexes Polygon und $\mathbf{u} \in V$ eine Lösung von (5). Aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz folgt wegen $n \leq 3$, dass $\mathbf{u} \in L^6(\Omega)^n$ ist. Wegen der Hölder'schen Ungleichung ist daher $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \in L^{5/3}(\Omega)^n$. Wiederum mit der Hölder'schen Ungleichung folgt hieraus

$$|N(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^{5/2}(\Omega)} \quad \forall\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n.$$

Da $C_0^\infty(\Omega)^n$ dicht ist in $H_0^1(\Omega)^n$ und $H^{3/10}(\Omega)^n$ stetig in $L^{5/2}(\Omega)^n$ eingebettet ist, zeigt dies $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \in H^{-3/10}(\Omega)^n$. Wegen der H^2-Regularität des Stokes Problems und $\mathbf{u} = \frac{1}{\nu}TG(\mathbf{u})$ folgt hieraus $\mathbf{u} \in H^{2-3/10}(\Omega)^n = H^{1+7/10}(\Omega)^n$. Wegen des Sobolev'schen Einbettungssatzes ist daher $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^n$ und somit $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$. Wiederum wegen der H^2-Regularität des Stokes Problems und $\mathbf{u} = \frac{1}{\nu}TG(\mathbf{u})$ impliziert dies $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$, $p \in H^1(\Omega)$. □

Die folgende Definition spielt eine wesentliche Rolle für die Finite Element Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen.

1.7 Definition: **(1)** Eine Lösung $\mathbf{u}_\lambda \in V$, $\lambda = \frac{1}{\nu}$, von (6) heißt **regulär**, wenn $D_\mathbf{u}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda) \in \mathrm{ISOM}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)$ ist.
(2) Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ ein nicht leeres Intervall. Eine Abbildung $\Lambda \ni \lambda \longrightarrow \mathbf{u}_\lambda \in V$ heißt ein **regulärer Lösungsast** von (6), wenn die Abbildung stetig und jedes $\mathbf{u}_\lambda$ eine reguläre Lösung von (6) ist. □

1.8 Satz: *Sei $\mathbf{u}_\lambda$ eine Lösung von (6) mit*

$$\lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1 < 1.$$

Dann ist $\mathbf{u}_\lambda$ regulär.

Beweis: Sei $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n\backslash\{0\}$ beliebig. Aus der Definition von G folgt für jedes $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\langle D_\mathbf{u}G(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{H^1(\Omega)} = N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}) + N(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a(D_\mathbf{u}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{v}) =& a(\mathbf{v} + \lambda T D_\mathbf{u}G(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ =& a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda\langle D_\mathbf{u}G(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{H^1(\Omega)} \\ =& |\mathbf{v}|_1^2 + \lambda N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}) + \lambda \underbrace{N(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=0} \\ \geq& |\mathbf{v}|_1^2 - \lambda\gamma|\mathbf{v}|_1^2|\mathbf{u}_\lambda|_1 \\ =& |\mathbf{v}|_1^2 \underbrace{\{1 - \lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1\}}_{>0}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die $H_0^1(\Omega)^n$-Koerzivität der Bilinearform $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \longrightarrow a(D_\mathbf{u}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{w})$ und damit die Isomorphie von $D_\mathbf{u}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$. □

Das folgende Beispiel soll ein Gefühl für das asymptotische Verhalten von $\lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1$ und $\|D_\mathbf{u}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)^{-1}\|_\mathcal{L}$ für $\lambda \to \infty$, d.h. $\nu \to 0$, vermitteln.

1.9 Beispiel: Wir betrachten die eindimensionale Navier-Stokes Gleichung

$$\begin{aligned} -u'' + \lambda u u' =& 0 \quad \text{in } I := (-1, 1) \\ u(-1) = 1\ ,\ u(1) =& -1. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen $uu' = (\frac{1}{2}u^2)'$ ist $-u' + \frac{1}{2}u^2$ konstant. Daher muss jede Lösung von (11) die Form

$$u_\lambda(x) = \beta_\lambda \tanh(\alpha_\lambda x)$$

haben mit $\alpha_\lambda,\ \beta_\lambda \in \mathbb{R}$. Aus den Randbedingungen folgt

$$\beta_\lambda = -\frac{1}{\tanh(\alpha_\lambda)}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Bestimmungsgleichung

$$2\alpha_\lambda \tanh(\alpha_\lambda) = \lambda \tag{12}$$

für α_λ. Man überzeugt sich leicht, dass (12) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ eine eindeutige Lösung $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ besitzt. Eine einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
|u_\lambda|_1^2 &= \int_{-1}^{1} (u_\lambda')^2 \\
&= \int_{-1}^{1} u_\lambda' \left[-\frac{2\alpha_\lambda^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} u_\lambda^2 \right] \\
&= \frac{4\alpha_\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}
\end{aligned}$$

und somit

$$|u_\lambda|_1 = \sqrt{\frac{4\alpha_\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}}.$$

Offensichtlich ist

$$N(u,v,w) = \int_{-1}^{1} uv'w \le \|u\|_{L^\infty} \|v'\|_{L^2} \|w\|_{L^2}.$$

Für jedes $w \in H_0^1(I)$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
|w(x)| &= \left| \int_{-1}^{x} w'(t)dt \right| \\
&\le \left\{ \int_{-1}^{x} dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-1}^{x} w'(t)^2 dt \right\}^{1/2} \\
&\le \sqrt{2} \|w'\|_{L^2} \\
\Rightarrow \|w\|_{L^\infty} &\le \sqrt{2} \|w'\|_{L^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^2}^2 &= \int_{-1}^{1} w(x)^2 dx \\
&\le \int_{-1}^{1} \left\{ (x+1) \int_{-1}^{x} w'(t)^2 dt \right\} dx \\
&\le 2\|w'\|_{L^2}^2 \\
\Rightarrow \|w\|_{L^2} &\le \sqrt{2} \|w'\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\gamma \leq 2.$$

Damit ist die Bedingung

$$\lambda\gamma|u_\lambda|_1 < 1$$

sicher dann erfüllt, wenn gilt

$$2\lambda\sqrt{\frac{4\alpha_\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}} < 1 \Leftrightarrow \alpha_\lambda^2 \leq \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{16\lambda}.$$

Aus der Bestimmungsgleichung (12) folgt andererseits

$$\lambda = 2\alpha_\lambda \tanh(\alpha_\lambda) \leq 2\alpha_\lambda \Rightarrow \alpha_\lambda \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Also ist $\alpha_\lambda^2 \geq \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{16\lambda}$ sicherlich dann, wenn gilt

$$\frac{\lambda^2}{4} \geq \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{16\lambda} \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{3^{1/3}}{2}.$$

Also ist das Kriterium von Satz 1.8 für die Regularität des Lösungsastes für $\lambda \geq \frac{3^{1/3}}{2} \sim 0.721$ nicht mehr erfüllt, d.h. Satz 1.8 ist nur für den Bereich $\lambda \preceq 0.721$ bzw. $\nu \succeq 1.386$ anwendbar.
Im aktuellen Beispiel ist

$$\|D_u F(\lambda, u_\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}} = \sup_{f \in H^{-1}(I)\setminus\{0\}} \frac{|v|_1}{\|f\|_{-1}},$$

wobei v das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -v'' + \lambda u_\lambda v' + \lambda v u_\lambda' =& f \quad \text{in } I \\ v(\pm 1) =& 0 \end{aligned} \tag{13}$$

löst. Sei

$$\overline{u}_\lambda(x) := -2\ln(\cosh(\alpha_\lambda x)).$$

Dann ist $\overline{u}_\lambda' = \lambda u_\lambda$ und

$$\begin{aligned} -v'' + \lambda u_\lambda v' + \lambda u_\lambda' v =& [-v' + \lambda u_\lambda v]' \\ =& [-v' + \overline{u}_\lambda' v]' \\ =& -\left[e^{\overline{u}_\lambda}\left(e^{-\overline{u}_\lambda} v\right)'\right]'. \end{aligned}$$

Also ist die eindeutige Lösung von (13) gegeben durch

$$v(x) = e^{\overline{u}_\lambda(x)}\left[\int_{-1}^{x} e^{-\overline{u}_\lambda(t)}\left\{c - \int_0^t f(s)ds\right\}dt\right],$$

wobei c durch die Bedingung $v(1) = 0$ festgelegt ist. Ist f gerade, ergibt sich aus Symmetriegründen $c = 0$. Sei nun speziell $f(x) = \cosh(\alpha_\lambda x)$. Dann folgt

$$v(x) = \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - \cosh^3(\alpha_\lambda x)}{3\alpha_\lambda^2 \cosh^2(\alpha_\lambda x)}.$$

Wegen $\|w\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\|w'\|_{L^2}$ für alle $w \in H_0^1(I)$ folgt für alle $\varphi \in L^\infty(I)$

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{-1} &= \sup_{w \in H_0^1(I)\setminus\{0\}} \frac{\int_{-1}^1 \varphi w}{|w|_1} \\
&\leq \sup_{w \in H_0^1(I)\setminus\{0\}} \frac{2\|\varphi\|_{L^\infty}\|w\|_{L^\infty}}{|w|_1} \\
&\leq \sqrt{8}\|\varphi\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für obiges f und v

$$\begin{aligned}
|v|_1 &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_{L^\infty} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}|v(0)| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{3\alpha_\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{3\alpha_\lambda^2 \cosh(\alpha_\lambda)} \underbrace{\cosh(\alpha_\lambda)}_{=\|f\|_{L^\infty}} \\
&\geq \frac{1}{4} \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{3\alpha_\lambda^2 \cosh(\alpha_\lambda)} \|f\|_{-1}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\|D_u F(\lambda, u_\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_0^1(I), H_0^1(I))} \geq \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{12\alpha_\lambda^2 \cosh(\alpha_\lambda)} \sim e^\lambda \quad \text{für } \lambda \to \infty.$$

□

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir zeigen, wie die Ergebnisse der Sätze 1.4, 1.5, 1.6 und 1.8 auf Navier-Stokes Gleichungen mit inhomogenen Dirichlet Randbedingungen übertragen werden können. Wir betrachten daher die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2) mit der inhomogenen Randbedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \tag{14}$$

Dabei muss wegen $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ in Ω das Vektorfeld $\mathbf{g}$ die **Kompatibilitätsbedingung**

$$\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{15}$$

erfüllen. Wegen Bem. II.3.6 gibt es eine divergenzfreie Fortsetzung $\mathbf{u_g}$ von $\mathbf{g}$, d.h. $\mathbf{u_g} \in H^1(\Omega)^n$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u_g} =& 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u_g} =& \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Jede schwache Lösung $\mathbf{u}, p$ von (2) mit der Randbedingung (14) können wir in der Form $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u_g}$ mit $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)^n$ schreiben. Wegen

$$N(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{z}) = N(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$$

löst dann $\tilde{\mathbf{u}}, p$ das Problem

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) =& \tilde{l}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, q) =& 0 \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

.

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) :=& a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u_g}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{v}, \mathbf{u_g}, \mathbf{w}) \\ \tilde{l}(\mathbf{v}) :=& \frac{1}{\nu} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u_g}, \mathbf{u_g}, \mathbf{v}). \end{aligned} \tag{16}$$

Entsprechend muss für die Übertragung der Sätze 1.4, 1.5, 1.6 und 1.8 die Bilinearform a stets durch die Bilinearform $\tilde{a}$ ersetzt werden. Aus den Beweisen dieser Sätze ergibt sich unmittelbar, dass sie gültig bleiben, sofern wir die H_0^1-Koerzivität von $\tilde{a}$, d.h.

$$\tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \tag{17}$$

mit $\alpha > 0$ zeigen können. Wir müssen dann überall nur ν durch $\alpha\nu$ ersetzen. Aus Satz 1.1, der Hölder'schen Ungleichung und dem Sobolev'schen Einbettungssatz $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ für $n \leq 3$ folgt für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) =& |\mathbf{v}|_1^2 + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{v}, \mathbf{u_g}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} \underbrace{N(\mathbf{u_g}, \mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=0} \\ =& |\mathbf{v}|_1^2 - \frac{1}{\nu} N(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u_g}) - \frac{1}{\nu} \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{u_g} \cdot \mathbf{v}) \\ \geq& |\mathbf{v}|_1^2 - \frac{1}{\nu} \|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)} |\mathbf{v}|_1 \|\mathbf{u_g}\|_{L^3(\Omega)} - \frac{1}{\nu} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{u_g}\|_{L^3(\Omega)} \\ \geq& \left[1 - \frac{c}{\nu} \|\mathbf{u_g}\|_{L^3(\Omega)}\right] |\mathbf{v}|_1^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei hängt die Konstante c nur von der Norm der Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ ab. Wegen (18) liefert der folgende Satz das gewünschte Koerzivitätsresultat (17) mit einer Konstanten $\alpha < 1$ beliebig nahe bei 1.

1.10 Satz: *Sei* $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^n$ *mit* $\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\mathbf{u}_{\mathbf{g},\varepsilon} \in H^1(\Omega)^n$ *mit*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathbf{g},\varepsilon} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}_{\mathbf{g},\varepsilon} &= \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{g},\varepsilon}\|_{L^3(\Omega)} \leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 3$. In zwei Dimensionen muss man in Schritt 3 das Vektorfeld $\varphi_{\mathbf{g}}$ durch eine skalare Funktion $\varphi_{\mathbf{g}}$ und die Rotation rot durch den Operator **curl** aus Satz II.8.1 ersetzen.

1. Schritt: Für alle $p \in (1, \infty)$ gibt es eine Konstante $c_p > 0$, so dass für alle $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\|d(., \Gamma)^{-1} \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p |\varphi|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{19}$$

Dabei ist

$$d(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$$

der Abstand zum Rand Γ gemessen in der Euklidischen Norm.

Nach Einführen einer Partition der Eins und entsprechender Karten von Γ können wir uns für den Beweis von (19) auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ zurückziehen. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht ist in $L^p(\Omega)$, reicht es dann, die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*} |x_3^{-1} \varphi(x)|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right|^p dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen. Wegen des Satzes von Fubini folgt diese Ungleichung direkt aus der **Hardy Ungleichung**

$$\int_0^\infty |t^{-1} \varphi(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |\varphi'(t)|^p dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((0, \infty)).$$

Die Hardy Ungleichung beweist man wie folgt. Wegen $\varphi \in C_0^\infty((0, \infty))$ ist für jedes $t \in (0, \infty)$

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(s) ds$$

und daher

$$\int_0^\infty |t^{-1} \varphi(t)|^p dt = \int_0^\infty t^{-p} \left| \int_0^t \varphi'(s) ds \right|^p dt.$$

Mit der Variablentransformation $t = e^\tau$, $s = e^\sigma$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |t^{-1}\varphi(t)|^p dt &= \int_{-\infty}^\infty e^{-p\tau} \left| \int_{-\infty}^\tau \varphi'(e^\sigma) e^\sigma d\sigma \right|^p e^\tau d\tau \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\tau e^{-\frac{p-1}{p}\tau} e^\sigma \varphi'(e^\sigma) d\sigma \right|^p d\tau \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\tau e^{-\frac{p-1}{p}(\tau-\sigma)} e^{\frac{\sigma}{p}} \varphi'(e^\sigma) d\sigma \right|^p d\tau \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{p-1}{p}(\tau-\sigma)} \chi_{\mathbb{R}_+}(\tau-\sigma) e^{\frac{\sigma}{p}} \varphi'(e^\sigma) d\sigma \right|^p d\tau \\
&= \|f * g\|^p_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
f(t) &:= \chi_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\frac{p-1}{p}t} \\
g(t) &:= \varphi'(e^t) e^{\frac{t}{p}}
\end{aligned}$$

und der Faltung

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^\infty f(t-s) g(s) ds.$$

Wegen $f \geq 0$ folgt aus der Hölder'schen Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned}
|(f * g)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^\infty f(t-s) g(s) ds \right| \\
&\leq \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s) ds \right\}^{1/q} \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p ds \right\}^{1/p} \\
&= \|f\|^{1/q}_{L^1(\mathbb{R})} \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p ds \right\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir die p-te Potenz hiervon und integrieren über $\mathbb{R}$, erhalten wir mit dem Satz von Fubini wegen $f \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|f * g\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^\infty |(f * g)(t)|^p dt \\
&\leq \|f\|^{p/q}_{L^1(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p ds \right\} dt \\
&= \|f\|^{p/q}_{L^1(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p dt}_{= |g(s)|^p \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}} \right\} ds \\
&= \|f\|^p_{L^1(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^\infty |g(s)|^p ds \\
&= \|f\|^p_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_0^\infty e^{-\frac{p-1}{p}t} dt = \frac{p}{p-1}.$$

Hieraus folgt die Hardy Ungleichung.
2. Schritt: Zu jedem hinreichend kleinen $\eta > 0$ gibt es eine Funktion $\theta_\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \theta_\eta &= 1 && \text{in einer Umgebung von } \Gamma \\ \theta_\eta(x) &= 0 && \text{falls } d(x,\Gamma) \geq e^{-1/\eta} \\ \left|\frac{\partial}{x_i}\theta_\eta(x)\right| &\leq \eta d(x,\Gamma)^{-1} && \text{falls } d(x,\Gamma) \leq e^{-1/\eta} \text{ und } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Für die Konstruktion von θ_η setzen wir $\delta(\eta) := e^{-1/\eta}$ und betrachten die Funktion

$$\varphi_\eta(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq \delta(\eta)^2 \\ \eta \ln[\delta(\eta)/t] & \text{falls } \delta(\eta)^2 \leq t \leq \delta(\eta) \\ 0 & \text{falls } t \geq \delta(\eta). \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$. Setze

$$\theta_\eta(x) := \varphi_\eta(d(x,\Gamma)) \quad \forall x \in \Omega.$$

Da Γ Lipschitz-stetig ist, ist $d(.,\Gamma) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und erfüllt

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} d(x,\Gamma)\right| \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n,\ x \in \Omega.$$

Daher ist $\theta_\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und hat die genannten Eigenschaften.
3. Schritt: Gemäß Bem. II.3.6 besitzt das Stokes Problem

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= 0 && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u_g} \in H^1(\Omega)^n$, $p_\mathbf{g} \in L^2_0(\Omega)$, und es gilt

$$\|\mathbf{u_g}\|_1 \leq c_\Omega \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

mit einer Konstanten c_Ω, die nur von Ω abhängt. Wegen $\operatorname{div} \mathbf{u_g} = 0$ gibt es ein Vektorfeld $\varphi_\mathbf{g} \in H^2(\Omega)^n$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{u_g} &= \operatorname{rot} \varphi_\mathbf{g} && \text{in } \Omega \\ \varphi_\mathbf{g} \times \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Sei nun $\eta > 0$ hinreichend klein und

$$\mathbf{u}_{\mathbf{g},\eta} := \operatorname{rot}(\theta_\eta \varphi_{\mathbf{g}})$$

mit θ_η aus Schritt 2. Wegen der Eigenschaften von θ_η und $\varphi_{\mathbf{g}}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathbf{g},\eta} =& 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}_{\mathbf{g},\eta} =& \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch die gewünschte Abschätzung für die L^3-Norm von $\mathbf{u}_{\mathbf{g},\eta}$ zeigen.
Aus der Produktregel folgt

$$\mathbf{u}_{\mathbf{g},\eta} = (\nabla \theta_\eta) \times \varphi_{\mathbf{g}} + \theta_\eta \operatorname{rot} \varphi_{\mathbf{g}} =: \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

Für $\mathbf{u}_2$ erhalten wir wegen der Eigenschaften von θ_η mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und dem Sobolev'schen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2\|_{L^3(\Omega)} =& \|\theta_\eta \mathbf{u}_{\mathbf{g}}\|_{L^3(\Omega)} \\ =& \left\{ \int_{d(x,\Gamma) \le 2\delta(\eta)} |\theta_\eta(x) \mathbf{u}_{\mathbf{g}}(x)|^3 dx \right\}^{1/3} \\ \le& c_1 \operatorname{meas}\{x \in \Omega : d(x,\Gamma) \le 2\delta(\eta)\}^{1/6} \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}\|_{L^6(\Omega)} \\ \le& c_2 \operatorname{meas}\{x \in \Omega : d(x,\Gamma) \le 2\delta(\eta)\}^{1/6} \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}\|_1 \\ \le& c_3 \operatorname{meas}\{x \in \Omega : d(x,\Gamma) \le 2\delta(\eta)\}^{1/6} \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung von $\mathbf{u}_1$ können wir uns wie im 1. Schritt auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ beschränken. Aus der Konstruktion von θ_η folgt dann

$$\nabla \theta_\eta = \begin{cases} -\frac{\eta}{x_3} \mathbf{e}_3 & \text{für } \delta(\eta)^2 \le x_3 \le \delta(\eta) \\ 0 & \text{für } 0 \le x_3 \le \delta(\eta)^2. \end{cases}$$

Insbesondere ist also $\mathbf{u}_1(x) = 0$ für $0 \le x_3 \le \delta(\eta)^2$ und

$$\mathbf{u}_1(x) = \frac{\eta}{x_3} \begin{pmatrix} \varphi_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_2 \\ -\varphi_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\delta(\eta)^2 \le x_3 \le \delta(\eta)$. Wegen $\varphi_{\mathbf{g}} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ ist $\varphi_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_i \in H_0^1(\Omega)$ für $i = 1, 2$. Damit folgt aus dem 1. Schritt und dem Sobolev'schen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\|_{L^3(\Omega)} \le& \eta \sum_{i=1}^{2} \|d(.,\Gamma)^{-1} \varphi_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_i\|_{L^3(\Omega)} \\ \le& c_1 \eta \sum_{i=1}^{2} \|\varphi_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_i\|_{W^{1,3}(\Omega)} \\ \le& c_2 \eta \|\varphi_{\mathbf{g}}\|_{H^2(\Omega)} \\ \le& c_3 \eta \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}\|_{H^1(\Omega)} \\ \le& c_4 \eta \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{\eta \to 0} \delta(\eta) = 0$ ist, folgt aus diesen Abschätzungen die Behauptung des Satzes. $\square$

III.2 Approximation regulärer Lösungsäste

Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, nehmen wir im folgenden an, dass Ω ein Polyedergebiet und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_h$ eine Familie affin äquivalenter, zulässiger und regulärer Unterteilungen von Ω wie in § I.4 und mit $X_h \subset H_0^1(\Omega)^n$ und $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ zugehörige Finite Element Räume, die die Geschwindigkeit und den Druck approximieren und die im Sinne von § II.5 *stabil* sind. Wie beim Stokes Problem nehmen wir an, dass es zwei Zahlen $\mu \in \mathbb{N}^*$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$[S_{h,0}^{\mu,0}]^n \subset X_h$$

und

$$S_h^{\nu,-1} \cap L_0^2(\Omega) \subset M_h \quad \text{oder} \quad S_h^{\nu,0} \cap L_0^2(\Omega) \subset M_h.$$

Weiter definieren wir eine modifizierte Trilinearform $\tilde{N}$ auf $H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n$ durch

$$\tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{2}[N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})].$$

Gemäß Satz 1.1 gilt für alle $\mathbf{u} \in V$ und alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ gilt zudem

$$\tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Die standard Finite Element Diskretisierung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (2) aus § 1 lautet dann:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u}_h \in X_h,\ p_h \in M_h, \text{ so dass} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{\nu}\tilde{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \frac{1}{\nu}\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \qquad\qquad \forall q_h \in M_h. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist wie im vorigen Paragraphen

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Definiere wie üblich

$$V_h := \{\mathbf{v}_h \in X_h : b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \ \forall q_h \in M_h\}.$$

Da das Paar (X_h, M_h) stabil ist, ist $V_h \neq \{0\}$, und Problem (1) ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u}_h \in V_h, \text{ so dass} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{\nu}\tilde{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) =& \frac{1}{\nu}\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \end{aligned} \tag{2}$$

Analog zum vorigen Paragraphen wollen wir Problem (2) in Operatorform schreiben. Dazu bezeichnen wir mit $T_h \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^n, V_h)$ den **diskreten Stokes Operator**, der jedem $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$ die eindeutige Lösung $\mathbf{u}_h =: T_h\mathbf{w} \in V_h$ von

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_h \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

zuordnet. Analog zu G_0 und G definieren wir die Abbildungen $\tilde{G}_0,\ \tilde{G} \in C(H_0^1(\Omega)^n, H^{-1}(\Omega)^n)$ durch

$$\begin{aligned} \langle \tilde{G}_0(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} :=& \tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \tilde{G}(\mathbf{u}) :=& \tilde{G}_0(\mathbf{u}) - \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Dann ist Problem (2) – und damit auch Problem (1) – äquivalent zu:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ mit} \\ F_h(\frac{1}{\nu}, \mathbf{u}_h) :=& \mathbf{u}_h + \frac{1}{\nu} T_h \tilde{G}(\mathbf{u}_h) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Wie im vorigen Paragraphen setzen wir zur Abkürzung

$$\lambda := \frac{1}{\nu}.$$

2.1 Satz: *Die diskreten Navier-Stokes Gleichungen (2) besitzen für jedes $\nu > 0$ und jedes $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ mindestens eine Lösung. Für jede Lösung $\mathbf{u}_h$ von (2) gilt die a priori Abschätzung*

$$|\mathbf{u}_h|_1 \leq \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1}. \tag{4}$$

Sei $(\mathbf{u}_h)_{h>0}$ eine Familie von Lösungen von (2) zu beliebigem, aber festem ν und $\mathbf{f}$. Dann konvergiert eine Teilfolge $(\mathbf{u}_{h_m})_{m\in\mathbf{N}}$ von $(\mathbf{u}_h)_{h>0}$ schwach in $H_0^1(\Omega)^n$ gegen eine schwache Lösung $\mathbf{u}$ der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen. Die zugehörigen Drücke p_{h_m} konvergieren schwach in $L^2(\Omega)$ gegen den zu $\mathbf{u}$ gehörenden Druck p.

Beweis: Wie im Beweis von Satz1.4 folgt für jede Lösung $\mathbf{u}_h$ von (2)

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}_h|_1^2 =& a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)\\ =& a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \frac{1}{\nu}\underbrace{\tilde{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}_{=0}\\ =& \frac{1}{\nu}\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_h\rangle_{H^1(\Omega)}\\ \leq& \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1}|\mathbf{u}_h|_1\end{aligned}$$

und damit die a priori Abschätzung (4). Aus (4) und Satz 1.3 angewandt auf $X := V_h$, $(.,.)_X := a(.,.)$ und $\varphi := F_h(\frac{1}{\nu},.)$ folgt die Lösbarkeit von (2). Die Konvergenzaussage folgt wie im Beweis von Satz 1.4 mit den Räumen V_h an Stelle der Räume V_m. □

2.2 Satz: *Sei γ wie in Satz 1.5. Gilt*

$$\gamma\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{-1} < 1,$$

so besitzt (2) eine eindeutige Lösung.

Beweis: Die Behauptung folgt wie im Beweis von Satz 1.5 mit F_h und $\tilde{N}$ an Stelle von F und N. □

Die Konvergenzaussage von Satz 2.1 ist sehr schwach. Wie beim Stokes Problem möchten wir gerne eine Konvergenzrate für die Finite Element Approximation beweisen. Hierzu müssen wir stärkere Anforderungen an die Lösung des analytischen Problems stellen.

2.3 Satz: *Seien $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ ein nicht leeres, kompaktes Intervall und $\Lambda \ni \lambda \longrightarrow \mathbf{u}_\lambda$ ein regulärer Lösungsast schwacher Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen im Sinne von Definition 1.7. Für alle $\lambda \in \Lambda$ gelte $\mathbf{u}_\lambda \in H^2(\Omega)^n$ und $p_\lambda \in H^1(\Omega)$, wobei p_λ der zugehörige Druck ist. Seien*

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda) :=& \|D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)},\\ \gamma^* :=& \sup_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda),\\ K :=& \max\left\{\|\mathbf{f}\|_0\ ,\ \sup_{\lambda\in\Lambda}|\mathbf{u}_\lambda|_2\right\}.\end{aligned}$$

Dann gibt es ein $h_0 = h_0(\gamma^*, K) > 0$, so dass Problem (1) für alle $0 < h \leq h_0$ und alle $\lambda \in \Lambda$ eine Lösung $[\mathbf{u}_{\lambda,h}, p_{\lambda,h}] \in X_h \times M_h$ besitzt mit

$$\|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda,h}\|_1 + \|p_\lambda - p_{\lambda,h}\|_0 \leq chK^2.$$

Die Konstante c hängt weder von λ noch von h ab.

Beweis: Bezeichne mit $\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}$ die H^1-Projektion von $\mathbf{u}_\lambda$ auf V_h und setze

$$\varepsilon_h(\lambda) := |F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})|_1.$$

1. Schritt: Wegen $F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda) = 0$ und $\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda) = G(\mathbf{u}_\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon_h(\lambda) =& |F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)|_1 \\ =& |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} + \lambda T_h \tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - \mathbf{u}_\lambda - \lambda T G(\mathbf{u}_\lambda)|_1 \\ \leq& |\mathbf{u}_\lambda - \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}|_1 + \lambda |T_h[\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - \tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)]|_1 + \lambda |(T_h - T)G(\mathbf{u}_\lambda)|_1.\end{aligned}$$

Da das Paar (X_h, M_h) stabil ist, folgt aus § II.4 und § I.4

$$|\mathbf{u}_\lambda - \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}|_1 \leq ch|\mathbf{u}_\lambda|_2 \leq chK.$$

Aus dem gleichen Grunde ist

$$|T_h \mathbf{w}|_1 \leq \|\mathbf{w}\|_{-1}$$

für alle $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$. Aus Satz 1.1 folgt mit der Bezeichnung von Satz 1.5

$$\begin{aligned}\|\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - \tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\|_{-1} =& \sup_{\substack{\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n \\ |\mathbf{w}|_1 = 1}} |\tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}, \mathbf{w}) - \tilde{N}(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w})| \\ =& \sup_{\substack{\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n \\ |\mathbf{w}|_1 = 1}} |\tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{u}_\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}, \mathbf{w}) + \tilde{N}(\mathbf{u}_\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w})| \\ \leq& \gamma[|\mathbf{u}_\lambda|_1 + |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}|_1]|\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{u}_\lambda|_1 \\ \leq& chK^2.\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus Satz II.4.1 und dem Sobolev'schen Einbettungssatz

$$\begin{aligned}|(T_h - T)G(\mathbf{u}_\lambda)|_1 \leq& ch\|G(\mathbf{u}_\lambda)\|_0 \\ \leq& ch\{\|\mathbf{f}\|_0 + \|(\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla)\mathbf{u}_\lambda\|_0\} \\ \leq& ch\{\|\mathbf{f}\|_0 + \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^\infty}|\mathbf{u}_\lambda|_1\} \\ \leq& c'hK^2.\end{aligned}$$

Also ist

$$\varepsilon_h(\lambda) \leq chK^2.$$

2. Schritt: Sei $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}& D_{\mathbf{u}} F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - D_{\mathbf{u}} F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w} \\ =& \mathbf{w} + \lambda T_h D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - \mathbf{w} - \lambda T D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w} \\ =& \lambda T_h[D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}] + \lambda(T_h - T)D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Wie in Schritt 1 folgt

$$|T_h[D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}]|_1 \leq \|D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}\|_{-1}$$

und

$$\begin{aligned}
&\|D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}\|_{-1} \\
=& \sup_{\substack{\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^n \\ |\mathbf{v}|_1=1}} |\tilde{N}(\mathbf{w},\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h},\mathbf{v}) + \tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h},\mathbf{w},\mathbf{v}) - \tilde{N}(\mathbf{w},\mathbf{u}_\lambda,\mathbf{v}) - \tilde{N}(\mathbf{u}_\lambda,\mathbf{w},\mathbf{v})| \\
=& \sup_{\substack{\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^n \\ |\mathbf{v}|_1=1}} |\tilde{N}(\mathbf{w},\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}-\mathbf{u}_\lambda,\mathbf{v}) + \tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}-\mathbf{u}_\lambda,\mathbf{w},\mathbf{v})| \\
\leq& 2\gamma|\mathbf{w}|_1|\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}-\mathbf{u}_\lambda|_1 \\
\leq& chK|\mathbf{w}|_1.
\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned}
|(T_h - T)D\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}|_1 =& |(T_h - T)DG(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}|_1 \\
\leq& ch\|DG(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}\|_0
\end{aligned}$$

und – mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz –

$$\begin{aligned}
\|DG(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}\|_0 \leq& \|(\mathbf{u}_\lambda\cdot\nabla)\mathbf{w}\|_0 + \|(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\lambda\|_0 \\
\leq& \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^\infty}|\mathbf{w}|_1 + \|\mathbf{w}\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}_\lambda\|_{L^{4/3}} \\
\leq& c|\mathbf{w}|_1|\mathbf{u}_\lambda|_2 \\
\leq& cK|\mathbf{w}|_1.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also für alle $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$|D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\mathbf{w} - D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{w}|_1 \leq chK|\mathbf{w}|_1$$

und somit

$$\|D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n,H_0^1(\Omega)^n)} \leq chK.$$

3. Schritt: Wegen

$$\begin{aligned}
D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) =& D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda) - [D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda) - D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})] \\
=& D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda)\Big[I - D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda)^{-1}[D_\mathbf{u}F(\lambda,\mathbf{u}_\lambda) - D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})]\Big]
\end{aligned}$$

und Schritt 2 gibt es ein $h_1 = h_1(\gamma^*, K) > 0$, so dass für alle $0 < h \leq h_1$ und alle $\lambda \in \Lambda$ gilt $D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) \in \mathrm{ISOM}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)$ und $\|D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}\|_\mathcal{L} \leq 2\gamma(\lambda)$.
4. Schritt: Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D_\mathbf{u}F_h(\lambda,\mathbf{v}_2)\mathbf{w} =& \mathbf{w} + \lambda T_h D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - \mathbf{w} - \lambda T_h D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w} \\
=& \lambda T_h[D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w}].
\end{aligned}$$

Wie im 2. Schritt folgt

$$|T_h[D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w}]|_1 \leq \|D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w}\|_{-1}$$

und

$$\|D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w}\|_{-1} \leq 2\gamma|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1|\mathbf{w}|_1.$$

Also ist

$$|D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v}_2)\mathbf{w}|_1 \leq 2\gamma\lambda|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1|\mathbf{w}|_1$$

und damit

$$\|D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v}_1) - D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v}_2)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)} \leq 2\gamma\lambda|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1.$$

5. Schritt: Sei $0 < h \leq h_1$. Wegen Schritt 3 können wir eine Abbildung $\Phi : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow H_0^1(\Omega)^n$ durch

$$\Phi(\mathbf{v}) := \mathbf{v} - D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}F_h(\lambda, \mathbf{v})$$

definieren. Setze

$$B := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : |\mathbf{v} - \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}|_1 \leq 4\gamma(\lambda)\varepsilon_h(\lambda)\}.$$

Für beliebiges $\mathbf{v} \in B$ folgt aus Schritt 3 und 4

$$\begin{aligned}
&|\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \Phi(\mathbf{v})|_1 \\
=&|\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v} + D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}F_h(\lambda, \mathbf{v})|_1 \\
=&\Bigg| D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}\Big\{D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v}) \\
&\qquad\qquad - \int_0^1 D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v} + t(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v}))(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v})dt\Big\} \\
&\quad + D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})\Bigg|_1 \\
\leq&2\gamma(\lambda)\int_0^1 \Big|[D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v} + t(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v}))]\,(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v})\Big|_1 dt \\
&\quad + 2\gamma(\lambda)\varepsilon_h(\lambda) \\
\leq&2\gamma(\lambda)\gamma\lambda|\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{v}|_1^2 + 2\gamma(\lambda)\varepsilon_h(\lambda) \\
\leq&2\gamma(\lambda)\varepsilon_h(\lambda)[1 + 16\lambda\gamma\gamma(\lambda)^2\varepsilon_h(\lambda)].
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten ergibt sich für beliebiges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in B$

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(\mathbf{v}_1) - \Phi(\mathbf{v}_2)|_1 \\
=&|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}F_h(\lambda, \mathbf{v}_1) + D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}F_h(\lambda, \mathbf{v}_2)|_1 \\
=&\Bigg| D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})^{-1}\Big[D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h})(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
&\qquad\qquad - \int_0^1 D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v}_2 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)dt\Big]\Bigg|_1 \\
\leq& 2\gamma(\lambda)\int_0^1 \Big|\left[D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h}) - D_{\mathbf{u}}F_h(\lambda, \mathbf{v}_2 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))\right](\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\Big|_1 dt \\
\leq& 4\gamma\gamma(\lambda)\lambda|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1 \int_0^1 |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \underbrace{[\mathbf{v}_2 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]}_{\in B}|_1 dt \\
\leq& 16\gamma\gamma(\lambda)^2\lambda\varepsilon_h(\lambda)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1.
\end{aligned}
$$

Wegen Schritt 1 gibt es ein $0 < h_0 = h_0(\gamma^*, K) \leq h_1$ mit

$$16\gamma\gamma(\lambda)^2\lambda\varepsilon_h(\lambda) \leq \frac{1}{2} \quad \forall 0 < h \leq h_0.$$

Für diese h ist dann Φ eine Kontraktion auf B und besitzt daher einen Fixpunkt $\mathbf{u}_{\lambda,h}$ in B. Sei $p_{\lambda,h}$ der zugehörige Druck. Offensichtlich ist $\mathbf{u}_{\lambda,h}, p_{\lambda,h}$ eine Lösung von (1).
6. Schritt: Seien h und $\mathbf{u}_{\lambda,h}, p_{\lambda,h}$ wie in Schritt 5. Konstruktionsgemäß ist

$$|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda,h}|_1 \leq 4\gamma(\lambda)\varepsilon_h(\lambda) \leq chK^2.$$

Sei

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\lambda,h} := \lambda T_h\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda) = \lambda T_h G(\mathbf{u}_\lambda)$$

und $\tilde{p}_{\lambda,h}$ der zugehörige Druck. Aus der Stabilität des Paares (X_h, M_h) folgt

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}_{\lambda,h} - \tilde{\mathbf{u}}_{\lambda,h}|_1 + \|p_{\lambda,h} - \tilde{p}_{\lambda,h}\|_0 \leq& c\lambda\|\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda) - \tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda,h})\|_{-1} \\
\leq& c\gamma\lambda|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda,h}|_1[|\mathbf{u}_\lambda|_1 + |\mathbf{u}_{\lambda,h}|_1] \\
\leq& c'\lambda hK^2.
\end{aligned}
$$

Aus § II.4 folgt andererseits

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\mathbf{u}}_{\lambda,h} - \mathbf{u}_\lambda|_1 + \|\tilde{p}_{\lambda,h} - p_\lambda\|_0 \leq& ch\{|\mathbf{u}_\lambda|_2 + |p_\lambda|_1\} \\
\leq& chK.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

2.4 Bemerkung: Seien $\mathbf{u}_\lambda, p_\lambda$ und $\mathbf{u}_{\lambda,h}, p_{\lambda,h}$ wie in Satz 2.3. Für ein $m \in \mathbb{N}^*$ gelte $\mathbf{u}_\lambda \in H^{m+1}(\Omega)^n$ und $p_\lambda \in H^m(\Omega)$. Dann folgt aus den Schritten 1 und 6 des Beweises von Satz 2.3 die Fehlerabschätzung

$$|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda,h}|_1 + \|p_\lambda - p_{\lambda,h}\|_0 \leq ch^{\min\{m,\mu,\nu+1\}}\{|\mathbf{u}_\lambda|_{m+1} + |p_\lambda|_m\}.$$

Ebenso kann man wie in Satz II.4.4 die verbesserte L^2-Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda,h}\|_0 \leq ch\{|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda,h}|_1 + \|p_\lambda - p_{\lambda,h}\|_0\}$$

beweisen. □

III.3 Stromlinien-Diffusions Methoden

Die Diskretisierung des vorigen Paragraphen entspricht einer zentralen Differenzen Diskretisierung des Konvektionstermes $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ in den Navier-Stokes Gleichungen. Wir haben bereits in § 6 VFEM an Hand einer skalaren Konvektions-Diffusions Gleichung gesehen, dass diese Vorgehensweise nur für sehr kleine Gitterweiten h vernünftige Ergebnisse liefert. Diese Schwierigkeit konnten wir durch eine Stromlinien-Diffusions Diskretisierung vermeiden, bei der wir die Differentialgleichung zusätzlich mit einer Testfunktion $\mathbf{w} \cdot \nabla v$ testeten. Dabei bezeichnet $\mathbf{w}$ die (damals bekannte) Stromrichtung. Für die Navier-Stokes Gleichungen würde diesem Vorgehen eine zusätzliche Testfunktion $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ entsprechen, wobei $\mathbf{u}$ das gesuchte Geschwindigkeitsfeld ist.

Andererseits haben wir in § II.6 gesehen, dass wir durch analoge Petrov-Galerkin Verfahren mit zusätzlichen Testfunktionen ∇q für die Impulsgleichung die Divergenznebenbedingung stabilisieren und so die inf-sup Bedingung für Geschwindigkeits- und Druckraum umgehen können. Es liegt nahe, diese beiden Vorgehensweisen für die Navier-Stokes Gleichungen zu kombinieren.

Sei daher $\mathcal{T}_h$ eine Familie affin äquivalenter, zulässiger und regulärer Unterteilungen von Ω und X_h und M_h zugehörige Finite Element Räume, die Geschwindigkeit und Druck approximieren sollen. Diese Räume können beliebig sein und müssen nicht mehr der Stabilitätsbedingung der §§ II.5 und III.2 genügen. Die **Stromlinien-Diffusions Diskretisierung**, kurz **SDFEM**, der Navier-Stokes Gleichungen lautet dann

$$\begin{aligned} &\text{Finde } [\mathbf{u}_h, p_h] \in X_h \times M_h, \text{ so dass} \\ B_h([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) =& l_h([\mathbf{v}_h, q_h]) \quad \forall [\mathbf{v}_h, q_h] \in X_h \times M_h \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$
\begin{aligned}
&B_h([\mathbf{u}_h, p_h],[\mathbf{v}_h, q_h]) \\
&\qquad := \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h + \frac{1}{\nu} \int_\Omega [(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h] \cdot \mathbf{v}_h \\
&\qquad\quad + \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K [-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h] \cdot [\nabla q_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{v}_h] \\
&\qquad\quad + \delta \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \int_E [p_h]_E [q_h]_E + \alpha\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \\
&\quad l_h([\mathbf{v}_h, q_h]) \\
&\qquad := \int_\Omega \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \cdot [\nabla q_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{v}_h].
\end{aligned}
$$

Dabei sind $\alpha \geq 0$ und $\delta \geq 0$ frei wählbare Parameter. Für $\delta = 0$ erhalten wir das Standard Galerkin Verfahren des vorigen Paragraphen wieder. Wählen wir $\alpha = 0$ und setzen formal alle Terme mit $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)$ gleich Null, geht (1) in die Diskretisierung der Stokes Gleichungen aus § II.6 über. Die $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{v}_h$-Terme stabilisieren den Einfluss des nicht linearen Konvektionstermes. Die ∇q_h-Terme stabilisieren den Einfluss der Divergenznebenbedingung. Die Parameter α und δ werden üblicherweise in der Größenordnung 1 gewählt.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen lassen sich auf die SDFEM (1) übertragen. Dabei werden die gleichen Techniken benutzt. Allerdings sind die entsprechenden Abschätzungen wegen der zusätzlichen Stabilisierungsterme wesentlich technischer. Wir verzichten daher auf eine detailierte Darstellung und verweisen statt dessen auf SIAM J. Numer. Anal. 33, 107 – 127 (1996).

III.4 Numerische Lösung der diskreten Probleme

In diesem Paragraphen stellen wir verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung der Finite Element Diskretisierung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen vor. Die Darstellung vereinfacht sich wesentlich, wenn wir dabei die Notationen des analytischen Problems verwenden. Alle Ausdrücke sind dann in ihrer schwachen Form zu verstehen, d.h. Ausdrücke der Form

$$\Delta \mathbf{u} \ , \ \nabla p \ , \ (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} \ , \ \operatorname{div} \mathbf{u}$$

sind als

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \ , \ -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \ , \ \int_\Omega [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}] \cdot \mathbf{v} \ , \ \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}$$

mit Testfunktionen $\mathbf{v}$, q aus Finite Element Räumen zu interpretieren.

Den einfachsten Algorithmus liefert die Fixpunktiteration.

4.1 Algorithmus: (Fixpunktiteration) *Wähle ein* $\mathbf{u}^0 \in X$ *und löse für* $i = 0, 1, \ldots$ *die Stokes Probleme*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}^{i+1} + \nabla p^{i+1} &= \frac{1}{\nu}\{\mathbf{f} - (\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^i\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Mit den Notationen von § 2 ist Algorithmus 4.1 die Fixpunktiteration für

$$\Phi(\mathbf{u}) := \frac{1}{\nu} T_h \tilde{G}(\mathbf{u}).$$

Wegen

$$|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{v})|_1 \leq \frac{1}{\nu}\|\tilde{G}(\mathbf{u}) - \tilde{G}(\mathbf{v})\|_{-1} \leq \frac{\gamma}{\nu}[|\mathbf{u}|_1 + |\mathbf{v}|_1]|\mathbf{u} - \mathbf{v}|_1$$

ist Φ eine Kontraktion auf $\overline{B(0, \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1})}$, sofern

$$\frac{2\gamma}{\nu^2}\|\mathbf{f}\|_{-1} < 1 \tag{1}$$

ist. Daher konvergiert Algorithmus 4.1 sicher dann, wenn die Bedingung (1) erfüllt ist. Die Stokes Probleme, die in jedem Schritt von Algorithmus 4.1 auftreten, können mit einem der Verfahren aus § II.9 gelöst werden.

Eine wesentlich bessere Konvergenz kann man von dem Newton Verfahren erhoffen.

4.2 Algorithmus: (Newton Verfahren) *Wähle ein* $\mathbf{u}^0 \in X$ *und löse für* $i = 0, 1, \ldots$ *die modifizierten Stokes Probleme*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}^{i+1} + \nabla p^{i+1} + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^i + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+1} &= \frac{1}{\nu}\{\mathbf{f} + (\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^i\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

In jedem Schritt von Algorithmus 4.2 muss ein modifiziertes Stokes Problem gelöst werden. Kritisch ist dabei vor allem der Konvektionsterm $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+1}$. Die Algorithmen des § II.9 sind daher entsprechend zu modifizieren. Es ist nicht ratsam, in den Termen $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+1}$ und $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^i$ die Größe $\mathbf{u}^{i+1}$ durch $\mathbf{u}^i$ zu ersetzen, da dann das Newton Verfahren 4.2 zur Fixpunktiteration 4.1 wird.
Wie üblich sollte man besonders zu Beginn des Verfahrens die Newton Schritte dämpfen. Ebenso kann man Quasi-Newton Verfahren anwenden und die Größen

$\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+1}$ und $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^i$ durch $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^j \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+1}$ und $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^j$ mit $j = J\lceil i/J \rceil$ ersetzen. Dabei ist $J \geq 2$ ein fester Parameter. Durch diese Modifikation muss die Steifigkeitsmatrix der modifizierten Stokes Probleme nur alle J Schritte neu aufgestellt werden.
Bekanntlich hängt die Konvergenz des Newton Verfahrens wesentlich von einer guten Wahl des Startwertes $\mathbf{u}^0$ ab. Diese kann man durch eine **Kontinuitätsmethode** erzielen. Dazu schreiben wir die Navier-Stokes Gleichungen wieder in Operatorform als

$$\mathbf{u}_\lambda + \lambda TG(\mathbf{u}_\lambda) = 0.$$

Setze

$$\mathbf{v}_\lambda := \frac{d\mathbf{u}_\lambda}{d\lambda}.$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\mathbf{v}_\lambda + TG(\mathbf{u}_\lambda) + \lambda TDG(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}_\lambda = 0.$$

Also ist $\mathbf{v}_\lambda$ die Lösung des folgenden modifizierten Stokes Problems

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}_\lambda + \nabla q_\lambda + \lambda(\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla)\mathbf{v}_\lambda + \lambda(\mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla)\mathbf{u}_\lambda &= \mathbf{f} - (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla)\mathbf{u}_\lambda && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_\lambda &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{v}_\lambda &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Sei nun eine Lösung $\mathbf{u}_{\lambda_0}$ für die Navier-Stokes Gleichungen zum Parameter λ_0 bekannt. Dann kann man obiges modifizierte Stokes Problem mit $\lambda = \lambda_0$ lösen und $\mathbf{u}_{\lambda_0} + (\lambda_1 - \lambda_0)\mathbf{v}_{\lambda_0}$ als Startwert für Algorithmus 4.2 zum Parameter λ_1 verwenden. Falls $\lambda_1 - \lambda_0$ nicht zu groß ist, liefert diese Strategie eine hinreichend gute Anfangsnäherung für das Newton Verfahren.

Ein anderer Ansatz für ein Verfahren, das global konvergiert und sich in der Nähe einer Lösung wie das Newton Verfahren verhält, ist die sog. **least squares Methode**. Die Idee ist, das Funktional

$$J(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}|\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u})|_1^2$$

zu minimieren und hierzu ein **nicht lineares CG-Verfahren** zu verwenden. Zur Beschreibung dieses Verfahrens betrachten wir zunächst folgende abstrakte Situation.

Sei X ein Hilbert Raum mit Skalarprodukt $(.,.)_X$ und $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ ein nicht lineares Funktional, das in der Nähe jedes kritischen Punktes konvex ist. Für $u \in X$ definieren wir den Gradienten $g(u) \in X$ als die Ritz Projektion von $DJ(u)$, d.h.

$$(g(u), v)_X = DJ(u)v \quad \forall v \in X.$$

Dann lautet das nicht lineare CG-Verfahren zur Minimierung von J:

4.3 Algorithmus: (nicht lineares CG-Verfahren nach Polak-Ribière) *Wähle ein $u^0 \in X$ und bestimme*

$$w^0 := g^0 := g(u^0).$$

Für $i = 0, 1, \ldots$ berechne

$$\begin{aligned}
\rho^i &:= \operatorname{argmin} J(u^i - \rho w^i) \\
u^{i+1} &:= u^i - \rho^i w^i \\
g^{i+1} &:= g(u^{i+1}) \\
\sigma^{i+1} &:= (g^{i+1} - g^i, g^{i+1})_X \|g^i\|_X^{-2} \\
w^{i+1} &:= g^{i+1} + \sigma^{i+1} w^{i+1}.
\end{aligned}$$

4.4 Bemerkung: Man kann zeigen, dass Algorithmus 4.3 für konvexe quadratische Funktionale auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h. $J(u) = \frac{1}{2} u^T A u - b^T u$ mit A s.p.d., mit dem klassischen PCG-Verfahren aus der Vorlesung "Einführung in die Numerik" übereinstimmt. Die Wahl des Skalarproduktes $(.,.)_X$ auf $X = \mathbb{R}^n$ bestimmt dann die Vorkonditionierungsmatrix C. $\square$

Für die Navier-Stokes Gleichungen ist $X = V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ bzw. das entsprechende diskrete Analogon,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_X = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

und

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} |\mathbf{u} + \lambda T G(\mathbf{u})|_1^2 \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{u} + \lambda T G(\mathbf{u}), \mathbf{u} + \lambda T G(\mathbf{u}))_X.
\end{aligned}$$

Dabei ist gemäß § 1 für jedes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$

$$\langle G(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} = N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)}$$

und

$$(T\mathbf{w}, \mathbf{v})_X = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)}.$$

Damit folgt

$$DJ(\mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathbf{u} + \lambda T G(\mathbf{u}), \mathbf{v} + \lambda T DG(\mathbf{u})\mathbf{v})_X,$$

und mit

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda T G(\mathbf{u})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
DJ(\mathbf{u})\mathbf{v} &= (\mathbf{w}, \mathbf{v})_X + \lambda \langle DG(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= (\mathbf{w}, \mathbf{v})_X + \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \lambda N(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\
&= (\mathbf{w}, \mathbf{v})_X - \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \lambda \underbrace{\langle \mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)}}_{= N(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{g}}$$

mit

$$(\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{v})_X = \lambda\{\langle \mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle_{H^1(\Omega)} - N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})\}.$$

Da G quadratisch ist in $\mathbf{u}$, ist J ein Polynom vierten Grades in $\mathbf{u}$. Daher gilt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in X$ und alle $\rho \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}) =& J(\mathbf{u}) - \rho DJ(\mathbf{u})\mathbf{w} + \frac{1}{2}\rho^2 D^2 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}, \mathbf{w}] \\ & - \frac{1}{6}\rho^3 D^3 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}] + \frac{1}{24}\rho^4 D^4 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}]. \end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung liefert für alle $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_4, \mathbf{u} \in X$ (beachte: $D^k G(\mathbf{u}) = 0$ für alle $k \geq 3$)

$$\begin{aligned} DJ(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 =& (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1)_X \\ D^2 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] =& (\mathbf{w}_2 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1)_X \\ & + (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])_X \\ D^3 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3] =& (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3], \mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1)_X \\ & + (\mathbf{w}_2 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_2, \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3])_X \\ & + (\mathbf{w}_3 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_3, \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])_X \\ D^4 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4] =& (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3], \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_4])_X \\ & + (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4], \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3])_X \\ & + (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4], \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])_X. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} D^2 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] =& |\mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1|_1^2 \\ & + (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1])_X \\ D^3 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] =& 3(\mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1, \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1])_X \\ D^4 J(u)[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] =& 3|\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1]|_1^2. \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 :=& \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1, \\ \mathbf{z}_2 :=& \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1]. \end{aligned}$$

Dann ist für alle $\mathbf{v} \in X$

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}_1, \mathbf{v})_X =& \lambda\{N(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}) + N(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}, \mathbf{v})\} \\ (\mathbf{z}_2, \mathbf{v})_X =& \lambda N(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\mathbf{w} := \mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u})$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} DJ(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 =& (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1)_X \\ D^2J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] =& |\mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1|_1^2 + (\mathbf{w}, \mathbf{z}_2)_X \\ D^3J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] =& 3(\mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)_X \\ D^4J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] =& 3|\mathbf{z}_2|_1^2. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}_0 := \lambda TG(\mathbf{u}),$$

dann ist

$$(\mathbf{z}_0, \mathbf{v})_X = \lambda\{N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{H^1(\Omega)}\} \quad \forall \mathbf{v} \in X$$

und

$$\begin{aligned} \lambda TG(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}_1) =& \lambda T\Big\{G(\mathbf{u}) - \rho DG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}\rho^2 D^2G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1]\Big\} \\ =& \mathbf{z}_0 - \rho\mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{z}_2. \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen nimmt Algorithmus 4.3 für die Navier-Stokes Gleichungen folgende Form an:

4.5 Algorithmus: (nicht lineares CG-Verfahren nach Polak-Ribière für die least squares Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen)
0: *Wähle ein* $\mathbf{u}^0 \in X$ *und bestimme die Lösungen* $\mathbf{z}^0$ *und* $\tilde{\mathbf{g}}^0$ *der Stokes Gleichungen*

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{z}^0 + \nabla r^0 &= \frac{1}{\nu}\{(\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)\mathbf{u}^0 - \mathbf{f}\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{z}^0 &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{z}^0 &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{\mathbf{g}}^0 + \nabla\tilde{s}^0 &= \frac{1}{\nu}\{(\mathbf{u}^0 + \mathbf{z}^0) \cdot (\nabla\mathbf{u}^0) - (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)(\mathbf{u}^0 + \mathbf{z}^0)\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{g}}^0 &= 0 && \text{in } \Omega \\ \tilde{\mathbf{g}}^0 &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Setze $i := 0$ *und* $\mathbf{w}^0 := \mathbf{g}^0 := \mathbf{u}^0 + \mathbf{z}^0 + \tilde{\mathbf{g}}^0$.
1: *Für* $i = 0, 1, ...$ *führe folgende Schritte aus.*
Bestimme die Lösungen $\mathbf{z}_1^i$ *und* $\mathbf{z}_2^i$ *der Stokes Probleme*

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{z}_1^i + \nabla r_1^i &= \frac{1}{\nu}\{(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{w}^i + (\mathbf{w}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^i\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{z}_1^i &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{z}_1^i &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{z}_2^i + \nabla r_2^i &= \frac{1}{\nu}(\mathbf{w}^i \cdot \nabla)\mathbf{w}^i && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{z}_2^i &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{z}_2^i &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \alpha :=& -\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}^i + \mathbf{z}_0^i) : \nabla(\mathbf{w}^i + \mathbf{z}_1^i) \\ \beta :=& |\mathbf{w}^i + \mathbf{z}_1^i|_1^2 + \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}^i + \mathbf{z}_0^i) : \nabla \mathbf{z}_2^i \\ \gamma :=& -\frac{3}{2}\int_\Omega \nabla(\mathbf{w}^i + \mathbf{z}_1^i) : \nabla \mathbf{z}_2^i \\ \delta :=& \frac{1}{2}|\mathbf{z}_2^i|_1^2. \end{aligned}$$

Bestimme die kleinste positive Nullstelle ρ^i von

$$\alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2 + \delta\rho^3$$

und setze

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{i+1} :=& \mathbf{u}^i - \rho^i \mathbf{w}^i \\ \mathbf{z}_0^{i+1} :=& \mathbf{z}_0^i - \rho^i \mathbf{z}_1^i + \frac{1}{2}{\rho^i}^2 \mathbf{z}_2^i. \end{aligned}$$

Bestimme die Lösung $\tilde{\mathbf{g}}^{i+1}$ des Stokes Problems

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} + \nabla \tilde{s}^{i+1} &= \frac{1}{\nu}\{(\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{z}^{i+1}) \cdot (\nabla \mathbf{u}^{i+1}) - (\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{z}^{i+1})\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und setze

$$\mathbf{g}^{i+1} := \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} + \mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{z}_0^{i+1}.$$

Berechne

$$\sigma^{i+1} := |\mathbf{g}^{i+1}|_1^{-2} \int_\Omega \nabla(\mathbf{g}^{i+1} - \mathbf{g}^i) : \nabla \mathbf{g}^{i+1}$$

und setze

$$\mathbf{w}^{i+1} := \mathbf{g}^{i+1} + \sigma^{i+1}\mathbf{w}^i.$$

Die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen wird durch zwei Punkte erschwert: den nicht linearen Konvektionsterm und die Divergenznebenbedingung. Der Versuch ist daher naheliegend, diese Schwierigkeiten zu entkoppeln. Dies ist die grundlegende Idee der sog. **Operator Splitting Methoden**.

4.6 Algorithmus: (Operator Splitting für die Navier-Stokes Gleichungen) *Wähle eine Startnäherung* $\mathbf{u}^0 \in X$ *und einen Dämpfungsparameter* $\omega \in (0,1)$. *Für* $i = 0, 1, \ldots$ *berechne die Lösungen folgender Probleme:*

(a)

$$\begin{aligned} 2\omega\mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} - \Delta\mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} + \nabla p^{i+\frac{1}{4}} &= 2\omega\mathbf{u}^i + \frac{1}{\nu}\mathbf{f} - \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla)\mathbf{u}^i && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \omega\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} - \Delta\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} &= \omega\mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} + \frac{1}{\nu}\mathbf{f} - \nabla p^{i+\frac{1}{4}} && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2\omega\mathbf{u}^{i+1} - \Delta\mathbf{u}^{i+1} + \nabla p^{i+1} &= 2\omega\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\nu}\mathbf{f} - \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

In jedem Schritt von Algorithmus 4.6 müssen zwei Stokes Probleme (Teile (a) und (c)) und ein System nicht linearer Poisson Gleichungen (Teil (b)) gelöst werden. Das nicht lineare Problem in Teil (b) kann z.B. mit einem nicht linearen CG-Verfahren wie in Algorithmus 4.5 gelöst werden. Dabei entfallen im Vergleich zu Algorithmus 4.5 die Divergenznebenbedingungen und die Drücke. Insbesondere sind dann als Teilprobleme nur noch skalare Poisson Gleichungen zu lösen. Hierdurch reduziert sich der Aufwand für den Gesamtalgorithmus.

Selbstverständlich kann man die Mehrgitteridee direkt auf die nicht linearen diskreten Navier-Stokes Gleichungen anwenden. Die Hauptschwierigkeit besteht dann in der Konstruktion geeigneter Glättungsverfahren. Wegen des hohen Codierungsaufwandes werden in der Praxis in der Regel jedoch Algorithmen 4.1 – 4.5 und Varianten davon in Verbindung mit schnellen Stokes Lösern verwendet. Mehrgitterverfahren werden dann im Rahmen innerer Itrationen als Stokes Löser oder wie in Algorithmus II.9.1 als Poisson Löser eingesetzt.

III.5 A posteriori Fehlerschätzer

Wie in § II.10 wollen wir für Finite Element Diskretisierungen der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen leicht berechenbare obere und untere Schranken für den Fehler herleiten, die nur die gegebenen Daten der Differentialgleichung und die berechnete Finite Element Lösung benötigen. Dazu brauchen wir ein abstraktes Ergebnis.

5.1 Satz: *Seien $(V, \|.\|_V)$, $(W, \|.\|_W)$ zwei Banach Räume und $F \in C^1(V, W')$ eine stetig differenzierbare Abbildung von V in den Dualraum W' von W. Sei $u_0 \in V$ eine reguläre Lösung der Gleichung*

$$F(u) = 0, \tag{1}$$

d.h., es ist $DF(u_0) \in \mathrm{ISOM}(V, W')$. Außerdem sei $DF(u)$ lokal Lipschitz-stetig in u_0, d.h., es gibt ein $R_0 > 0$ und ein $\beta > 0$ mit

$$\|DF(v) - DF(w)\|_{\mathcal{L}(V,W')} \leq \beta \|v - w\|_V \quad \forall v, w \in \overline{B(u_0, R_0)}.$$

Setze

$$R := \min\{R_0, \beta^{-1}\|DF(u_0)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(W',V)}, 2\beta^{-1}\|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W')}\}.$$

Dann gilt für alle $v \in \overline{B(u_0, R)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|DF(u_0)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(W',V)}\|u_0 - v\|_V \\
\leq &\|F(v)\|_{W'} \\
\leq &2\|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W')}\|u_0 - v\|_V.
\end{aligned}$$

Beweis: Wegen $F(u_0) = 0$ und $DF(u_0) \in \mathrm{ISOM}(V, W')$ gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned}
u_0 - v =& DF(u_0)^{-1}DF(u_0)(u_0 - v) \\
=& DF(u_0)^{-1}\Big\{DF(u_0)(u_0 - v) + F(v) - F(u_0) - F(v)\Big\} \\
=& DF(u_0)^{-1}\int_0^1 \Big[DF(u_0) - DF(v + t(u_0 - v))\Big](u_0 - v)dt - DF(u_0)^{-1}F(v).
\end{aligned}$$

Wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von $DF(u)$ folgt hieraus für alle $v \in \overline{B(u_0, R)}$

$$\begin{aligned}
\|u_0 - v\|_V \leq &\|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W',V)}\int_0^1 \beta(1-t)\|u_0 - v\|_V^2 dt \\
&+ \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W',V)}\|F(v)\|_{W'} \\
\leq &\frac{\beta}{2}\|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W',V)}\|u_0 - v\|_V^2 + \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W',V)}\|F(v)\|_{W'}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|F(v)\|_{W'} \leq & \|DF(u_0)(u_0 - v)\|_{W'} + \int_0^1 \beta(1-t)\|u_0 - v\|_V^2 dt \\ \leq & \|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W')}\|u_0 - v\|_V + \frac{\beta}{2}\|u_0 - v\|_V^2.\end{aligned}$$

Wegen der Definition von R folgt hieraus die Behauptung. □

Seien nun $V_h \subset V$, $W_h \subset W$ endlich dimensionale Unterräume und $F_h \in C(V_h, W_h')$. Dann approximiert das Problem

$$F_h(u_h) = 0 \tag{2}$$

Problem (1). Ist $u_{h,0}$ eine Lösung von (2) mit $\|u_0 - u_{h,0}\|_V \leq R$, so folgt aus Satz 5.1, dass der Fehler $\|u_0 - u_{h,0}\|_V$ nach oben und unten beschränkt ist durch das Residuum

$$\|F(u_{h,0})\|_{W'} = \sup_{\substack{\varphi \in W \\ \|\varphi\|_W = 1}} \langle F(u_{h,0}), \varphi\rangle_W.$$

Wie wir in § II.10 gesehen haben, ist aber gerade die Äquivalenz von Fehler und Residuum der wesentliche Grundstein für die a posteriori Fehlerschätzung. Anders als bei linearen Problemen gilt diese Äquivalenz bei nicht linearen Problemen nur dann, wenn die diskrete Lösung hinreichend nahe bei der betrachteten kontinuierlichen Lösung liegt. Dies ist nicht überraschend, da nicht lineare Probleme i.a. mehrere Lösungen zulassen.

Im Rahmen der Navier-Stokes Gleichungen setzen wir

$$\begin{aligned}V = W :=& H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \\ \|[\mathbf{u}, p]\|_V = \|[\mathbf{u}, p]\|_W :=& \left\{\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|p\|_0^2\right\}^{1/2} \\ \langle F([\mathbf{u}, p]), [\mathbf{v}, q]\rangle_W :=& \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v} \\ & + \frac{1}{\nu}\int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{\nu}\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega q \operatorname{div}\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Die Lipschitz-Stetigkeit von DF gilt wegen der Multilinearität und Stetigkeit des nicht linearen Termes global. Die Bedingung der Regularität einer Lösung ist identisch mit dem Regularitätsbegriff aus Definition 1.7.

Wir betrachten nun zunächst die Finite Element Diskretisierung aus § 2. Im abstrakten Rahmen ist dann

$$\begin{aligned}V_h = W_h :=& X_h \times M_h \\ \langle F_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}_h, q_h]\rangle_W =& \langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}_h, q_h]\rangle_W.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jede Lösung $[\mathbf{u}_h, p_h]$ von (2) die **Galerkin Orthogonalität**

$$\langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}_h, q_h]\rangle_W = 0 \quad \forall [\mathbf{v}_h, q_h] \in X_h \times M_h. \tag{3}$$

Sei nun $[\mathbf{v}, q] \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ mit $\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|_0^2 = 1$ beliebig. Mittels elementweiser partieller Integration erhalten wir für das Residuum folgende L^2-Darstellung

$$\begin{aligned}\langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q]\rangle_W = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \{-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}\} \cdot \mathbf{v} \\ &+ \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \int_E [\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E \cdot \mathbf{v} \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_h.\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei verwenden wir die gleichen Notationen wie in § II.10.

Wegen der Galerkin Orthogonalität (3) können wir auf der rechten Seite von (4) $\mathbf{v}$ und q durch $\mathbf{v} - \mathbf{v}_h$ und $q - q_h$ mit beliebigen Elementen $\mathbf{v}_h \in X_h$ und $q_h \in M_h$ ersetzen. Insbesondere können wir $q_h = 0$ und $\mathbf{v}_h = R_h\mathbf{v}$ wählen, wobei R_h komponentenweise der modifizierte Clément'sche Interpolationsoperator aus § I.4 ist. Die lokalen Interpolationsfehlerabschätzungen aus § I.4 und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung liefern dann die Abschätzung

$$\begin{aligned}\langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q]\rangle_W = &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \| -\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}\|_{L^2(K)} \\ &\qquad \times \underbrace{\|\mathbf{v} - R_h\mathbf{v}\|_{L^2(K)}}_{\le c_1 h_K |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}} \\ &+ \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)} \underbrace{\|\mathbf{v} - R_h\mathbf{v}\|_{L^2(E)}}_{\le c_2 h_E^{1/2} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}} \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|q\|_{L^2(K)} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} \\ \le c\Big\{ &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \| -\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}\|_{L^2(K)}^2 \\ &+ \sum_{E\in\mathcal{E}_h} h_E \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}^2 \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \Big\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\eta_K := \Big\{ &h_K^2 \| -\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}\|_{L^2(K)}^2 \\ &+ \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}_h \\ E\subset\partial K}} h_E \|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E\|_{L^2(E)}^2 \\ &+ \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \Big\}^{1/2},\end{aligned} \tag{5}$$

so erhalten wir mit Satz 5.1 die **obere Fehlerabschätzung**

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_1 + \|p-p_h\|_0 \le c\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Die Konstante c hängt von c_1, c_2 und damit von der Konstanten $c_{\mathcal{T}}$ aus der Regularitätsbedingung an $\mathcal{T}_h$ sowie von $\|DF([\mathbf{u},p])^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ ab. Wie Beispiel 1.9 zeigt, ist die zweite Größe die kritischere. Die Größe η_K aus (5) ist der gesuchte residuelle a posteriori Fehlerschätzer.

Aus Satz 5.1 folgt, dass der Ausdruck $\langle F([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v},q]\rangle_W \|[\mathbf{v},q]\|_V^{-1}$ für jede Testfunktion $[\mathbf{v},q]\in V\backslash\{0\}$ eine untere Schranke für den Fehler liefert. Daher können wir für den Nachweis, dass η_K auch eine untere Fehlerschranke darstellt, wie in § II.10 vorgehen. Wählen wir mit den dortigen Notationen nacheinander die Testfunktionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= 0 && , q = \psi_K \operatorname{div}\mathbf{u}_h\\
\mathbf{v} &= \psi_K\{-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h\cdot\nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}_h\} && , q = 0\\
\mathbf{v} &= \psi_E[\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h - p_h\underline{\mathbf{I}})]_E && , q = 0,
\end{aligned}$$

so erhalten wir für alle $K\in\mathcal{T}_h$ die **untere Fehlerschranke**

$$\eta_K \le c\Big\{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{H^1(\omega_K)} + \|p-p_h\|_{L^2(\omega_K)} + h_K\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(\omega_K)}\Big\}. \tag{7}$$

Dabei ist $\mathbf{f}_h$ eine beliebige Finite Element Approximation an $\mathbf{f}$, z.B. die L^2-Projektion auf $[S_h^{0,-1}]^n$. Die Konstante c hängt von $c_{\mathcal{T}}$ und $\|DF([\mathbf{u},p])\|_{\mathcal{L}}$ ab. Im Gegensatz zu $\|DF([\mathbf{u},p])^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ ist der Faktor $\|DF([\mathbf{u},p])\|_{\mathcal{L}}$ harmlos.

Wir betrachten nun die SDFEM-Diskretisierung aus § 3. Wegen der zusätzlichen Stabilisierungsterme gilt die Galerkin Orthogonalität (3) nicht mehr. Statt dessen erhalten wir für alle $[\mathbf{v}_h,q_h]\in X_h\times M_h$ den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned}
\langle F([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v}_h,q_h]\rangle_W =& \delta\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\int_K[-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h\cdot\nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}]\\
&\qquad\cdot[\nabla q_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h\cdot\nabla)\mathbf{v}_h]\\
&+\delta\sum_{E\in\mathcal{E}_h} h_E\int_E[p_h]_E[q_h]_E\\
&+\alpha\delta\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \operatorname{div}\mathbf{u}_h\operatorname{div}\mathbf{v}_h.
\end{aligned}$$

Ist speziell $q_h=0$, $\mathbf{v}_h = R_h\mathbf{v}$, so folgt wegen

$$|R_h\mathbf{v}|_{H^1(K)} \le c_0|\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}$$

die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\langle F_h([\mathbf{u}_h, p_h]), [R_h\mathbf{v}, 0]\rangle_W \\
\leq & c\|\mathbf{v}\|_1 \Big\{ \delta^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \| -\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_h\cdot\nabla)\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\mathbf{f}\|_{L^2(K)}^2 \\
& + \alpha^2\delta^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\operatorname{div}\mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \Big\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Da $\delta \leq 1$ und $\alpha\delta \leq 1$ ist, kann der zusätzliche Konsistenzfehler also durch den Fehlerschätzer η_K absorbiert werden. Daher bleiben die Fehlerabschätzungen (6) und (7) auch für die SDFEM-Diskretisierung aus § 3 gültig.

Wie in § II.10 kann man auch Fehlerschätzer konstruieren, die zu η_K äquivalent sind und die auf der Lösung diskreter, lokaler Hilfsprobleme beruhen. Für die Praxis ist es wesentlich, dass diese Hilfsprobleme nach wie vor linear, d.h. diskrete Stokes Probleme sind.

IV Die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

IV.1 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

Wir betrachten in diesem Kapitel die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen aus § I.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} =& \mathbf{f} && \text{in } \Omega\times(0,T) \\ \operatorname{div}\mathbf{u} =& 0 && \text{in } \Omega\times(0,T) \\ \mathbf{u} =& 0 && \text{auf } \Gamma\times(0,T) \\ \mathbf{u}(.,0) =& \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Um einen geeigneten schwachen Lösungsbegriff für (1) einführen zu können, benötigen wir einige Notationen.
Wir setzen wie üblich

$$V := \{\mathbf{u}\in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$$

und definieren

$$H := \{\mathbf{u}\in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

H ist der Abschluss von $\{\mathbf{u}\in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$ in der L^2-Norm.
Zur Abkürzung bezeichnen wir mit $(.,.)$ das L^2-Skalarprodukt und setzen wie in den vorigen Abschnitten

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} \\ b(\mathbf{v},p) &:= -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v} \\ N(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &:= \int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Ist $(X,\|.\|_X)$ ein Banach Raum, so bezeichnet $L^p((0,T),X)$ mit $1\le p\le\infty$ und $T>0$ den Raum der messbaren Funktionen φ auf $(0,T)$ mit Werten in X, derart dass die Funktion $t\longrightarrow\|\varphi(.,t)\|_X$ in $L^p((0,T),\mathbb{R})$ ist. $L^p((0,T),X)$ ist ein Banach Raum mit der Norm

$$\|\varphi\|_{L^p((0,T),X)} := \left\{\int_0^T \|\varphi(.,t)\|_X^p dt\right\}^{1/p}$$

mit der offensichtlichen Modifikation für $p=\infty$.

Ist φ eine Funktion auf $(0,T)$ mit Werten in X, so heißt φ schwach stetig in t_0, wenn für jede Folge $(t_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,T)$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = t_0$ und jedes $\psi \in X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} \langle \varphi(.,t_m), \psi\rangle_X = \langle \varphi(.,t_0), \psi\rangle_X.$$

1.1 Definition: Seien $T > 0$, $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2((0,T),V')$ und $\mathbf{u} \in L^\infty((0,T),L^2(\Omega)^n)$ $\cap L^2((0,T),V)$. Ferner sei $\mathbf{u}$ im L^2-Sinne schwach stetig auf $[0,T]$. Dann heißt $\mathbf{u}$ eine schwache Lösung von (1), wenn für alle $\mathbf{v} \in C^1((0,T),L^2(\Omega)^n) \cap C^0([0,T],V)$ mit $\mathbf{v}(.,T) = 0$ gilt

$$-\int_0^T (\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \int_0^T N(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_0^T (\mathbf{f},\mathbf{v}) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}(.,0)). \tag{2}$$

□

1.2 Bemerkung: Durch die Einschränkung auf die Räume V und H divergenzfreier Funktionen tritt in der schwachen Formulierung (2) der Druck nicht mehr auf. Wir werden ihn später mit Hilfe von Satz II.3.3 wie bei den stationären Problemen wiedergewinnen. □

1.3 Satz: (Existenzsatz) *Seien* $\mathbf{f}$ *und* $\mathbf{u}_0$ *wie in Definition 1.1. Dann besitzen die instationären Navier-Stokes Gleichungen (1) mindestens eine schwache Lösung* $\mathbf{u}$. *Außerdem gilt* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^1((0,T),V')$.

Beweis: Da V als abgeschlossener Unterraum des Hilbert Raumes $H_0^1(\Omega)^n$ separabel ist, gibt es eine abzählbare Basis $(\mathbf{w}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eines dichten Unterraumes von V, d.h.

$$V = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{span}\{\mathbf{w}_j : 0 \le j \le m\}}.$$

Bezeichne mit $\mathbf{u}_{0,m}$ die L^2-Projektion von $\mathbf{u}_0$ auf $V_m := \operatorname{span}\{\mathbf{w}_j : 0 \le j \le m\}$. Für beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$ können wir dann das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachten

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m (\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j)\dot{g}_{i,m}(t) + \nu \sum_{i=0}^m a(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j) g_{i,m}(t) \\ + \sum_{0\le i,l\le m} N(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_l,\mathbf{w}_j) g_{i,m}(t) g_{l,m}(t) = (\mathbf{f},\mathbf{w}_j) \quad 0 \le j \le m \\ \sum_{i=0}^m g_{i,m}(0)\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_{0,m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen der Bilinearität von a und der Trilinearität und Stetigkeit von N erfüllt dieses System die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf und besitzt daher eine

eindeutige maximale Lösung $(g_{0,m}(t), ..., g_{m,m}(t))$ auf einem maximalen Zeitintervall $[0, t_m]$ mit $0 < t_m \leq T$. Setze

$$\mathbf{u}_m := \sum_{i=0}^{m} g_{i,m}(t)\mathbf{w}_i.$$

Ist $t_m < T$, so folgt aus Analysis III Satz XI.1.9

$$\lim_{t \to t_m} \|\mathbf{u}_m(.,t)\|_0 = \infty.$$

Multiplizieren wir die j-te Gleichung von (3) mit $g_{j,m}(t)$ und addieren alle Gleichungen, so erhalten wir wegen $N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ für alle $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{u}_m) + \nu a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(.,t)\|_0^2 + 2\nu|\mathbf{u}_m(.,t)|_1^2 =& 2(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m(.,t)) \\ \leq& 2\|\mathbf{f}\|_{-1}|\mathbf{u}_m(.,t)|_1 \\ \leq& \nu|\mathbf{u}_m(.,t)|_1^2 + \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für alle $s \in [0, t_m]$

$$\|\mathbf{u}_m(.,s)\|_0^2 + \nu \int_0^s |\mathbf{u}_m(.,\tau)|_1^2 d\tau \leq \frac{1}{\nu} \int_0^s \|\mathbf{f}(.,\tau)\|_{-1}^2 d\tau + \|\mathbf{u}_0\|_0^2.$$

Also ist

$$\limsup_{t \to t_m} \|\mathbf{u}_m(.,t)\|_0 < \infty$$

und daher $t_m = T$. Außerdem ist die Folge $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ in einer beschränkten Teilmenge von $L^\infty((0,T), H) \cap L^2((0,T), V)$ enthalten. Mit Hilfe eines Kompaktheitssatzes kann man hieraus folgern, dass es ein $\mathbf{u} \in L^\infty((0,T), H) \cap L^2((0,T), V)$ und eine Teilfolge $(\mathbf{u}_{m'})_{m' \in \mathbf{N}}$ von $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ gibt mit $\mathbf{u}_{m'} \longrightarrow \mathbf{u}$ schwach in $L^2((0,T), V)$, schwach-* in $L^\infty((0,T), H)$ und stark in $L^2((0,T), H)$. Diese Konvergenz ist ausreichend, um in (3) den Grenzübergang $m' \to \infty$ bei festem j auszuführen. Daher erfüllt $\mathbf{u}$ die Beziehung (2) für alle $\mathbf{w}_j$. Da $\bigcup V_m$ dicht ist in V, folgt hieraus die Behauptung. $\square$

1.4 Lemma: *Für alle $n \in \{2, 3\}$ und alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt*

$$\|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{n-1}{4}} \|\varphi\|_0^{\frac{4-n}{4}} |\varphi|_1^{\frac{n}{4}}.$$

Beweis: Es genügt, die Abschätzung für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zu zeigen.

Sei zunächst $n = 2$. Dann ist

$$|\varphi(x)|^2 = 2\int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t, x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2)dt$$

und daher

$$\frac{1}{2}|\varphi(x)|^2 \leq \varphi_1(x_2) := \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t, x_2)||\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2)|dt.$$

Ebenso folgt

$$\frac{1}{2}|\varphi(x)|^2 \leq \varphi_2(x_1) := \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, s)||\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, s)|ds.$$

Mit dem Satz von Fubini und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt hieraus

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx \leq& 4\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)dx\\ =& 4\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x_2)dx_2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x_1)dx_1\\ \leq& 4\|\varphi\|_0\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\|_0\|\varphi\|_0\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\|_0\\ \leq& 2\|\varphi\|_0^2|\varphi|_1^2.\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung für $n = 2$.
Sei nun $n = 3$. Aus dem Fall $n = 2$ folgt

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx\\ \leq& 2\int_{\mathbb{R}} \left\{\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2\right\} \left\{\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{2} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)|^2 dx_1 dx_2\right\} dx_3\\ \leq& 2\left\{\sup_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2\right\} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{2} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2 dx.\end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|^2 =& 2\int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_1, x_2, r)\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, r)dr\\ \leq& 2\int_{-\infty}^{x_3} |\varphi(x_1, x_2, r)||\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, r)|dr\end{aligned}$$

ist, folgt mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}\sup_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \leq& 2\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)||\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x)|dx\\ \leq& 2\|\varphi\|_0\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\|_0.\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Abschätzung für $\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx$ ein, so erhalten wir wegen $a[b^2 + c^2] \leq [a^2 + b^2 + c^2]^{3/2}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx \leq & 4\|\varphi\|_0 \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\|_0 \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|_0^2 \right\} \\ \leq & 4\|\varphi\|_0 \left\{ \sum_{i=1}^{3} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|_0^2 \right\}^{3/2}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung für den Fall $n = 3$. □

1.5 Satz: (Eindeutigkeitssatz) (1) *Sie $n = 2$. Dann besitzen die instationären Navier-Stokes Gleichungen (1) genau eine schwache Lösung. Außerdem gilt $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0,T), V')$, $\mathbf{u} \in C([0,T], H)$ und $\mathbf{u}(.,t) \to \mathbf{u}_0$ in H für $t \to 0$.*
(2) *Sei $n = 3$. Dann gilt für jede schwache Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen (1) $\mathbf{u} \in L^{8/3}((0,T), L^4(\Omega)^3)$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^{4/3}((0,T), V')$. Es gibt höchstens eine schwache Lösung in $L^2((0,T), V) \cap L^\infty((0,T), H) \cap L^8((0,T), L^4(\Omega)^3)$. Eine solche Lösung ist automatisch in $C([0,T], H)$ und erfüllt $\mathbf{u}(.,t) \to \mathbf{u}_0$ in H für $t \to 0$.*

Beweis: Definiere die Operatoren A, B auf $L^2((0,T), V) \cap L^\infty((0,T), H)$ durch

$$\begin{aligned}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle :=& a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \langle B(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle :=& N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Dann gilt wegen Satz 1.3 für jede schwache Lösung $\mathbf{u}$ der instationären Navier-Stokes Gleichungen (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}) =& \mathbf{f} \quad \text{f.ü. in } V' \\ \mathbf{u}(.,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} & \mathbf{u}_0 \quad \text{in } H'.\end{aligned}$$

ad (1): Aus Lemma 1.4 und Satz III.1.1 folgt

$$\begin{aligned}\|B(\mathbf{u})\|_{V'} =& \sup_{\substack{\mathbf{v}\in V \\ |\mathbf{v}|_1 = 1}} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ =& \sup_{\substack{\mathbf{v}\in V \\ |\mathbf{v}|_1 = 1}} N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ \leq& \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ \leq& \sqrt{2}\|\mathbf{u}\|_0 |\mathbf{u}|_1.\end{aligned}$$

Also folgt aus $\mathbf{u} \in L^2((0,T), V) \cap L^\infty((0,T), L^2(\Omega)^2)$ auch $A\mathbf{u}$, $B(\mathbf{u}) \in L^2((0,T), V')$ und damit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0,T), V')$. Mit Hilfe von Einbettungssätzen folgen hieraus die restlichen Regularitätsaussagen für eine schwache Lösung $\mathbf{u}$. Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei schwache Lösungen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ und setzen $\mathbf{w} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Wegen $\mathbf{w} \in L^2((0,T),V)$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in L^2((0,T),V')$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 + 2\nu|\mathbf{w}(.,t)|_1^2 =& 2(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t},\mathbf{w}) + 2\nu a(\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
=& 2(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t},\mathbf{w}) + 2\nu a(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}) - 2(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t},\mathbf{w}) - 2\nu a(\mathbf{u}_2,\mathbf{w}) \\
=& 2(\mathbf{f},\mathbf{w}) - 2N(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1,\mathbf{w}) - 2(\mathbf{f},\mathbf{w}) + 2N(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2,\mathbf{w}) \\
=& -2N(\mathbf{w},\mathbf{u}_1,\mathbf{w}) - 2\underbrace{N(\mathbf{u}_2,\mathbf{w},\mathbf{w})}_{=0} \\
\leq& 2|\mathbf{u}_1(.,t)|_1\|\mathbf{w}(.,t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
\leq& \sqrt{8}|\mathbf{u}_1(.,t)|_1\|\mathbf{w}(.,t)\|_0|\mathbf{w}(.,t)|_1 \\
\leq& 2\nu|\mathbf{w}(.,t)|_1^2 + \frac{1}{\nu}|\mathbf{u}_1(.,t)|_1^2\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 \leq \frac{1}{\nu}|\mathbf{u}_1(.,t)|_1^2\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2.$$

Wegen $\mathbf{u}_1 \in L^2((0,T),V)$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 \exp\left[-\frac{1}{\nu}\int_0^t |\mathbf{u}_1(.,s)|_1^2 ds\right]\right\} \\
=&\left\{\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 - \frac{1}{\nu}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2|\mathbf{u}_1(.,t)|_1^2\right\}\exp\left[-\frac{1}{\nu}\int_0^t |\mathbf{u}_1(.,s)|_1^2 ds\right] \\
\leq& 0.
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{w}(.,0) = 0$ ist, beweist dies die behauptete Eindeutigkeit der schwachen Lösung.
ad (2): Aus Lemma 1.4 und Satz III.1.1 folgt nun

$$\begin{aligned}
\|B(\mathbf{u})\|_{V'} =& \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
\leq& 2\|\mathbf{u}\|_0^{1/2}|\mathbf{u}|_1^{3/2}.
\end{aligned}$$

Also folgt aus $\mathbf{u} \in L^2((0,T),V) \cap L^\infty((0,T),L^2(\Omega)^3)$ nun $A\mathbf{u} \in L^2((0,T),V')$ und $B(\mathbf{u}) \in L^{4/3}((0,T),V')$ und somit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^{4/3}((0,T),V')$. Mit dem gleichen Argument folgt $\mathbf{u} \in L^{4/3}((0,T),L^4(\Omega)^3)$. Die zusätzliche Regularität einer schwachen Lösung in $L^2((0,T),V) \cap L^\infty((0,T),H) \cap L^8((0,T),L^4(\Omega)^3)$ folgt aus Einbettungssätzen. Für den Nachweis der Eindeutigkeit unter den genannten Regularitätsannahmen gehen wir wie in Teil (1) vor und erhalten mit den gleichen Notationen wegen Lemma 1.4 und Satz III.1.1 nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 + 2\nu|\mathbf{w}(.,t)|_1^2 =& -2N(\mathbf{w},\mathbf{u}_1,\mathbf{w}) \\
=& 2N(\mathbf{w},\mathbf{w},\mathbf{u}_1) \\
\leq& 2\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)}|\mathbf{w}|_1\|\mathbf{u}_1\|_{L^4(\Omega)} \\
\leq& 4\|\mathbf{w}\|_0^{1/4}|\mathbf{w}|_1^{7/4}\|\mathbf{u}_1\|_{L^4(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Wegen der Ungleichung

$$ab \leq \frac{7}{8}a^{8/7} + \frac{1}{8}b^8 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

(vgl. den Beweis der Hölder Ungleichung, Satz IX.6.2 Analysis III) folgt hieraus mit $a = \left[\frac{16}{7}\nu\right]^{7/8} |\mathbf{w}(.,t)|_1^{7/4}$ und $b = 4\left[\frac{16}{7}\nu\right]^{-7/8} \|\mathbf{w}(.,t)\|_0^{1/4} \|\mathbf{u}_1(.,t)\|_{L^4(\Omega)}$

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 + 2\nu|\mathbf{w}(.,t)|_1^2 \leq 2\nu|\mathbf{w}(.,t)|_1^2 + \frac{1}{7}\left[\frac{7}{4\nu}\right]^7 \|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 \|\mathbf{u}_1\|_{L^4(\Omega)}^8$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2 \leq \frac{1}{2}\left[\frac{7}{4\nu}\right]^7 \|\mathbf{u}_1(.,t)\|_{L^4(\Omega)}^8 \|\mathbf{w}(.,t)\|_0^2.$$

Wegen $\mathbf{u}_1 \in L^8((0,T), L^4(\Omega)^3)$ folgt hieraus wie in Teil (1) $\mathbf{w} = 0$, d.h. die behauptete Eindeutigkeit. □

1.6 Satz: (Regularitätssatz) (1) *Sei $n = 2$ und $\mathbf{f}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^2((0,T), V')$, $\mathbf{f}(.,0) \in H$ und $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^2 \cap V$. Dann gilt für die eindeutige schwache Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0,T), V) \cap L^\infty((0,T), H)$. Ist zusätzlich $\Gamma \in C^2$ und $\mathbf{f} \in L^\infty((0,T), H)$, so ist $\mathbf{u} \in L^\infty((0,T), H^2(\Omega)^2)$.*
(2) *Sei $n = 3$ und $\mathbf{f} \in L^\infty((0,T), H)$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^1((0,T), H)$ und $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^3 \cap V$. Definiere*

$$\begin{aligned} d_1 :=& \|\mathbf{f}(.,0)\|_0 + \nu\|\mathbf{u}_0\|_2 + \|\mathbf{u}_0\|_2^2 \\ d_2 :=& \|\mathbf{f}\|_{L^\infty((0,T),V')}. \end{aligned}$$

Falls

$$\nu^{-2}d_2 + \nu^{-3}(1 + d_1^2)\{\|\mathbf{u}_0\|_0^2 + \nu^{-1}Td_2\}\exp\left\{\int_0^T \|\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}(.,s)\|_0 ds\right\}$$

hinreichend klein ist, besitzen die instationären Navier-Stokes Gleichungen eine eindeutige schwache Lösung, und es gilt $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0,T), V) \cap L^\infty((0,T), H)$. Ist zusätzlich $\Gamma \in C^\infty$, so ist $\mathbf{u} \in L^\infty((0,T), H^2(\Omega)^3)$.

Beweis: R. Temam: Navier-Stokes Equations, Theoreme III.3.5 – III.3.8. □

1.7 Bemerkung: Sei $\mathbf{u}$ eine schwache Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen. Mit den Notationen des Beweises von Satz 1.5 setze

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) :=& \int_0^t \mathbf{u}(.,s)ds \\ \beta(t) :=& \int_0^t B(\mathbf{u}(.,s))ds \\ \mathbf{F}(t) :=& \int_0^t \mathbf{f}(.,s)ds. \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathbf{U}, \beta, \mathbf{F} \in C([0,T], V')$. Aus der schwachen Formulierung (2) folgt

$$\nu a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

mit

$$\mathbf{g} := \mathbf{F} - \beta - \mathbf{u}(.,t) + \mathbf{u}_0 \in C([0,T], V').$$

Wegen Satz II.3.3 und Bem. II.2.4 gibt es daher ein $q(.,t) \in L^2(\Omega)$ mit

$$\nabla q(.,t) = \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{U} \tag{4}$$

im Distributionssinn. Es folgt $\nabla q \in C([0,T], H^{-1}(\Omega))$ und daher $q \in C([0,T], L^2(\Omega))$. Daher kann man (4) im Distributionssinn bzgl. t ableiten und erhält für $p := \frac{\partial q}{\partial t}$ die Identität

$$\nabla p = \mathbf{f} - B(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nu \Delta \mathbf{u}$$

im Distributionssinn. Außerdem folgt $p \in L^2((0,T), L^2(\Omega))$. Daher ist p der gesuchte Druck in (1). Unter den Voraussetzungen von Satz 1.6 ergibt sich zusätzlich $p \in L^\infty((0,T), H^1(\Omega))$. $\square$

1.8 Bemerkung: Die Regularitätsaussagen von Satz 1.6 für $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ sind zu schwach, um Fehlerabschätzungen der Ordnung 2 oder höher für Zeitdiskretisierungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen zu erhalten. J. R. Heywood und R. Rannacher haben gezeigt, dass die hierfür erforderlichen Regularitätseigenschaften nur gelten, wenn die Daten $\mathbf{f}, \mathbf{u}_0$ nicht lokale Kompatibilitätsbedingungen erfüllen. Bleibt z.B. eine der Größen

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(.,t) \right|_1 \ , \ \int_t^T \| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(.,s) \|_2^2 ds \ , \ \int_t^T \| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(.,s) \|_0^2 ds$$

für $t \to 0$ beschränkt, so besitzt das überbestimmte Neumann Problem

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \operatorname{div}\{\mathbf{f}(.,0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0\} && \text{in } \Omega \\ \nabla \varphi &= \nu \Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}(.,0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung. Wegen des Gauß'schen Integralsatzes ist eine notwendige Bedingung hierfür

$$\int_\Omega \operatorname{div}\{\mathbf{f}(.,0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0\} = \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \{\nu \Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}(.,0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0\}.$$

$\square$

IV.2 Finite Element Diskretisierung und numerische Lösung

Es gibt verschiedene Vorgehensweisen, die instationären Navier-Stokes Gleichungen in Ort und Zeit zu diskretisieren. Sie unterscheiden sich in ihrer Herleitung und Analyse, führen aber häufig auf die gleichen diskreten Probleme.

Wir betrachten zuerst die **Linien Methode**. Dazu wählen wir eine Familie $\mathcal{T}_h$ affin äquivalenter, zulässiger und regulärer Unterteilungen von Ω und stabile Paare (X_h, M_h) zugehöriger Finite Element Räume zur Approximation von Geschwindigkeit und Druck. Setze wie üblich

$$V_h := \{\mathbf{u}_h \in X_h : \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0 \ \forall p_h \in M_h\}.$$

Dann lautet mit den gleichen Notationen wie in § 1 das diskrete Analogon der schwachen Formulierung (2) aus Definition 1.1:
Finde $\mathbf{u}_h \in L^2((0,T), V_h)$, so dass für alle $\mathbf{v}_h \in C^1([0,T], V_h)$ gilt

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (\mathbf{u}_h, \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t}) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_0^T N(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ &= \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_h(.,0)). \end{aligned} \tag{1}$$

Setzen wir $\mathbf{u}_h \in C^1((0,T), V_h) \cap C([0,T], V_h)$ voraus, können wir in (1) bzgl. der Zeit partiell integrieren und erhalten das äquivalente Problem:
Finde $\mathbf{u}_h \in C^1((0,T), V_h) \cap C([0,T], V_h)$ mit

$$\mathbf{u}_h(.,0) = \mathbf{u}_{0,h}$$

und

$$(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_h) + \nu a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + N(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \ t \in (0,T). \tag{2}$$

Dabei ist $\mathbf{u}_{0,h}$ die L^2-Projektion von $\mathbf{u}_0$ auf V_h.
Definieren wir die Operatoren $A_h, \ B_h : V_h \longrightarrow V_h$ durch

$$\begin{aligned} (A_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) :=& a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ (B_h(\mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h) :=& N(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \end{aligned}$$

so können wir Problem (2) in der vertrauten Form eines gewöhnlichen Anfangswertproblems schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_h =& F_h(\mathbf{u}_h) := \mathbf{f} - \nu A_h \mathbf{u}_h - B_h(\mathbf{u}_h) \\ \mathbf{u}_h(.,0) =& \mathbf{u}_{0,h}. \end{aligned} \tag{3}$$

Hierauf können dann die üblichen Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt werden. Dabei ist zu beachten, dass der Operator A_h eine Kondition von $O(h^{-2})$ hat und dass daher bei expliziten Zeitschrittverfahren eine CFL-Bedingung der Form $\tau \leq ch^2$ für die Zeitschrittweite τ eingehalten werden muss.

Eine besonders häufig verwandte Zeitdiskretisierung ist das **θ-Schema**. Dies ist die allgemeine Form eines linearen Einschrittverfahrens. Die Parameter $\theta = 0$, $\theta = 1$ und $\theta = \frac{1}{2}$ entsprechen dem expliziten und impliziten Euler Verfahren sowie der Trapezregel (Crank-Nicolson Verfahren) (vgl. Def. III.4.2, Bem. III.4.3 und Lemma III.4.4 der Vorlesung "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen I"). Für Problem (3) ergibt sich bei konstanter Zeitschrittweite τ das folgende Schema

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h^0 =& \mathbf{u}_{0,h} \\
\frac{1}{\tau}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) =& \theta\{\mathbf{f}^{n+1} - \nu A_h \mathbf{u}_h^{n+1} - B_h(\mathbf{u}_h^{n+1})\} \\
&+ (1-\theta)\{\mathbf{f}^n - \nu A_h \mathbf{u}_h^n - B_h(\mathbf{u}_h^n)\}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h^0 =& \mathbf{u}_{0,h} \\
\mathbf{u}_h^{n+1} + \tau\theta\nu A_h \mathbf{u}_h^{n+1} + \tau\theta B_h(\mathbf{u}_h^{n+1}) =& \mathbf{g}^{n+1} \\
:=& \mathbf{u}_h^n + \tau\theta\mathbf{f}^{n+1} \\
&+ \tau(1-\theta)\{\mathbf{f}^n - \nu A_h \mathbf{u}_h^n - B_h(\mathbf{u}_h^n)\}.
\end{aligned}$$

Die Näherung $\mathbf{u}_h^{n+1}$ für $\mathbf{u}_h(., (n+1)\tau)$ ergibt sich also als Lösung der diskreten stationären Navier-Stokes Gleichung

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \tau\theta\nu a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \tau\theta N(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4)$$

Dieses Problem kann mit einem der in § III.4 beschriebenen Verfahren gelöst werden.

Für die Fehleranalyse der Linien Methode kombiniert man die Fehlerabschätzungen des vorigen Kapitels für stationäre Navier-Stokes Gleichungen mit den Techniken zur Fehlerabschätzung bei der Diskretisierung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Der Nachteil dieser Vorghensweise liegt in den unrealistisch starken Regularitätsvoraussetzungen an die Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen. Außerdem ist die Linien Methode kaum einer a posteriori Fehleranalyse und automatischen Gitteranpassung zugänglich.

Bei der **Rothe Methode** wird die Reihenfolge der Orts- und Zeitdiskretisierung vertauscht. Dazu werden die instationären Navier-Stokes Gleichungen als ein gewöhnliches Anfangswertproblem in einem unendlich dimensionalen Hilbert Raum aufgefasst und mit den üblichen Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen bzgl.

der Zeit diskretisiert. Dazu muss in jedem Zeitschritt eine stationäre Navier-Stokes Gleichung gelöst werden. Dies geschieht mit den Methoden des vorigen Kapitels. Insgesamt erhält man in der Regel die gleichen diskreten Probleme wie bei der Linien Methode. Wie bei der Linien Methode können bei dieser Vorgehensweise alle Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen benutzt werden. Die Fehleranalyse kommt nun aber mit schwächeren Regularitätsannahmen aus. Sie ist aber wesentlich aufwendiger, da man in unendlich dimensionalen Räumen arbeiten muss. Außerdem müssen die Fehlerabschätzungen für die Ortsdiskretisierung gleichmäßig bzgl. der Zeitschrittweite sein. Dies ist ein nicht triviales Problem. Wie die Linien Methode ist die Rothe Methode kaum einer a posteriori Fehleranalyse zugänglich.

Bei den **Raum-Zeit Finite Elementen** werden Orts- und Zeitvariable gleichzeitig diskretisiert. Hierzu unterteilen wir das Zeitintervall $[0,T]$ durch

$$0 = t_1 < t_2 < ... < t_{N_\tau} < t_{N_{\tau+1}} = T$$

und setzen für $1 \leq j \leq N_\tau$

$$J_j := [t_j, t_{j+1}] \ , \ \tau_j := t_{j+1} - t_j.$$

Zu jedem Zeitpunkt t_j mit $1 \leq j \leq N_\tau$ wählen wir eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung $\mathcal{T}_j$ von Ω und ein stabiles Paar (X_j, M_j) zugehöriger Finite Element Räume. V_j sei der entsprechende Raum der diskret divergenzfreien Geschwindigkeitsfelder. Setze für $1 \leq j \leq N_\tau$ und $\theta \in [0,1]$

$$\lambda_j(t) := \begin{cases} \frac{1}{\tau_{j-1}}(t - t_{j-1}) & \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ \frac{1}{\tau_j}(t_{j+1} - t) & \text{für } t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_j(t) := \frac{4}{\tau_j^2}(t - t_j)(t_{j+1} - t)$$

und

$$\lambda_j^\theta(t) := \lambda_j(t) + \frac{3}{2}(\theta - \frac{1}{2})[b_j(t) - b_{j-1}(t)]$$

mit der offensichtlichen Modifikation für $j = 1$. Die Funktionen λ_j und b_j sind die stetigen, stückweise linearen, nodalen Basisfunktionen bzw. die quadratischen Elementblasenfunktionen zu der Unterteilung $\{J_j : 1 \leq j \leq N_\tau\}$ von $[0,T]$. Mit Hilfe der Simpson-Regel rechnet man leicht nach, dass für $1 \leq j \leq N_\tau$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_j^\theta(t)dt = (1-\theta)\tau_{j-1}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda_j^\theta(t)dt = \theta\tau_j$$

ist mit der offensichtlichen Modifikation für $j = 1$.
Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} S_\tau^{k,-1}(V_{h(\tau)}) :=& \text{span}\{\chi_{J_j}(t)t^\mu \mathbf{v}_j(x) : 0 \le \mu \le k, 1 \le j \le N_\tau, \mathbf{v}_j \in V_j\} \\ S_\tau^{\theta;1,0}(V_{h(\tau)}) :=& \text{span}\{\lambda_j^\theta(t)\mathbf{v}_j(x) : 1 \le j \le N_\tau, \mathbf{v}_j \in V_j\} \end{aligned}$$

und – für $k \ge 2$ –

$$\begin{aligned} S_\tau^{\theta;k,0}(V_{h(\tau)}) :=& S_\tau^{\theta;1,0}(V_{h(\tau)}) \\ & \oplus \text{span}\{b_j(t)t^\mu \mathbf{w}_j(x) : 0 \le \mu \le k-2, 1 \le j \le N_\tau, \mathbf{w}_j \in V_j\}. \end{aligned}$$

$S_\tau^{k,-1}(V_{h(\tau)})$ besteht also aus in der Zeit unstetigen Funktionen, die stückweise Polynome vom Grad $\le k$ mit Koeffizienten in V_j sind. Die Funktionen in $S_\tau^{\theta;k,0}(V_{h(\tau)})$ sind global stetig, verschwinden zur Zeit T und sind stückweise Polynome vom Grad $\le k$ mit Koeffizienten in V_j.
Die Raum-Zeit Finite Element Diskretisierung der instationären Navier-Stokes Gleichungen lautet dann (mit $k \in \mathbb{N}$):
Finde $\mathbf{u}_{h,\tau} \in S_\tau^{k,-1}(V_{h(\tau)})$, so dass für alle $\mathbf{v}_{h,\tau} \in S_\tau^{\theta;k+1,0}(V_{h(\tau)})$ gilt

$$\begin{aligned} & -\int_0^T (\mathbf{u}_{h,\tau}, \frac{\partial \mathbf{v}_{h,\tau}}{\partial t}) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u}_{h,\tau}, \mathbf{v}_{h,\tau}) + \int_0^T N(\mathbf{u}_{h,\tau}, \mathbf{u}_{h,\tau}, \mathbf{v}_{h,\tau}) \\ = & \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{h,\tau}) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_{h,\tau}(.,0)). \end{aligned} \tag{5}$$

Für ein besseres Verständnis dieser Diskretisierung integrieren wir den ersten Summanden auf der linken Seite von (5) auf jedem Zeitintervall J_j partiell. Mit der Notation

$$\mathbf{u}_{h,\tau}(.,t_j \pm 0) := \lim_{s \to 0+} \mathbf{u}_{h,\tau}(.,t_j \pm s)$$

und

$$\mathbf{u}_{h,\tau}(.,0-0) := \mathbf{u}_0$$

erhalten wir dann die äquivalente Beziehung

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_\tau} \Big\{ (\mathbf{u}_{h,\tau}(.,t_j+0) - \mathbf{u}_{h,\tau}(.,t_j-0), \mathbf{v}_{h,\tau}(.,t_j)) \\ & \qquad + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\frac{\partial \mathbf{u}_{h,\tau}}{\partial t}, \mathbf{v}_{h,\tau}) + \nu \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(\mathbf{u}_{h,\tau}, \mathbf{v}_{h,\tau}) \\ & \qquad + \int_{t_j}^{t_{j+1}} N(\mathbf{u}_{h,\tau}, \mathbf{u}_{h,\tau}, \mathbf{v}_{h,\tau}) \Big\} \\ = & \sum_{j=1}^{N_\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{h,\tau}). \end{aligned} \tag{6}$$

Betrachte nun speziell den Fall $k = 0$. Setze

$$\mathbf{u}_h^j := \mathbf{u}_{h,\tau|J_j} \quad 1 \le j \le N_\tau$$

und wähle in (6)

$$\mathbf{v}_{h,\tau} := \lambda_j^\theta(t)\mathbf{v}_j$$

mit $\mathbf{v}_j \in V_j$. Dann erhalten wir

$$\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_{h,0}$$

und

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}_h^j - \mathbf{u}_h^{j-1}, \mathbf{v}_j) + \theta\tau_j\nu a(\mathbf{u}_h^j, \mathbf{v}_j) + \theta\tau_j N(\mathbf{u}_h^j, \mathbf{u}_h^j, \mathbf{v}_j) \\
&+ (1-\theta)\tau_{j-1}\nu a(\mathbf{u}_h^{j-1}, \mathbf{v}_j) + (1-\theta)\tau_{j-1} N(\mathbf{u}_h^{j-1}, \mathbf{u}_h^{j-1}, \mathbf{v}_j) \\
=&\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \lambda_j^\theta(t)(\mathbf{f}, \mathbf{v}_j) \\
\sim&\theta\tau_j(\mathbf{f}^j, \mathbf{v}_j) + (1-\theta)\tau_{j-1}(\mathbf{f}^{j-1}, \mathbf{v}_j).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{u}_{h,0}$ wieder die L^2-Projektion von $\mathbf{u}_0$ auf V_0, und $\mathbf{f}^j$ bezeichnet den Mittelwert von $\mathbf{f}$ auf J_j. In Operatorschreibweise lautet dies

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h^0 =& \mathbf{u}_{0,h} \\
\mathbf{u}_h^j + \tau_j\theta\nu A_h\mathbf{u}_h^j + \tau_j\theta B_h(\mathbf{u}_h^j) =& \mathbf{u}_h^{j-1} + \tau_j\theta\mathbf{f}^j \\
&+ \tau_{j-1}(1-\theta)\{\mathbf{f}^{j-1} - \nu A_h\mathbf{u}_h^{j-1} - B_h(\mathbf{u}_h^{j-1})\}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder das θ-Schema.
Mit einigem technischen Mehraufwand kann man zeigen, dass die Diskretisierung (5) einem impliziten $(k+1)$-stufigen Runge-Kutta Verfahren für die Zeit-Diskretisierung entspricht und dass man für $\theta = \frac{1}{2}$ die $(k+1)$-te diagonale Padé-Approximation erhält. Insbesondere ist die Zeit-Diskretisierung dann A-stabil und hat die Ordnung $2k+2$.
Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist die Diskretisierung (5) einer a posteriori Fehleranalyse besonders gut zugänglich.

Eine andere Variante von Raum-Zeit Finiten Elementen ist die **discontinuous Galerkin method**, kurz **DG(k)**, von C. Johnson et al. Man gewinnt sie, indem man von der Formulierung (6) ausgeht und die Lösung $\mathbf{u}_{h,\tau}$ und die Testfunktionen $\mathbf{v}_{h,\tau}$ beide aus dem Raum $S_\tau^{k,-1}(V_{h(\tau)})$ wählt. Da alle Funktionen nun unstetig in der Zeit sind, ist dies eine nicht konforme Methode. Dies erschwert die Fehleranalyse. Für $k = 0$ erhält man insbesondere das implizite Euler Verfahren. Man kann zeigen, dass man für allgemeines k ein implizites $(k+1)$-stufiges Runge-Kutta Verfahren erhält und dass die Stabilitätsfunktion die $(k+1)$-te sub-diagonale Padé-Approximation ist. Insbesondere ist das Verfahren L-stabil und hat die Ordnung $2k+1$.

Bei allen Verfahren, die wir bisher betrachtet haben, müssen wir in jedem Zeitschritt diskrete stationäre Navier-Stokes Gleichungen lösen. Man kann auch die instationären Navier-Stokes Gleichungen zuerst linearisieren und danach die linearen instationären Probleme diskretisieren. Dann muss in jedem Zeitschritt ein diskretes Stokes Problem gelöst werden. Den Fehler der Linearisierung kann man mit den Methoden von § III.2 kontrollieren. Den Fehler der Diskretisierung bekommt man mit den Methoden von Kapitel II in den Griff.

Zum Abschluss wollen wir noch auf den **Transport-Diffusions Algorithmus** eingehen. Bei ihm werden Linearisierung und Diskretisierung gewissermaßen in einem Schritt durchgeführt. Wir betrachten wieder eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung $\mathcal{T}_h$ von Ω und zugehörige Finite Element Räume X_h, M_h für Geschwindigkeit und Druck sowie den Raum V_h der diskret divergenzfreien Geschwindigkeitsfelder. Wir nehmen an, dass X_h ein Lagrange'scher Finite Element Raum ist, d.h. dass er eine nodale Basis besitzt. Die entsprechenden Gitterpunkte nennen wir x_i. Aus dem Transport-Theorem I.2.3 wissen wir, dass $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ die totale zeitliche Ableitung entlang der Trajektorien ist und somit den Transport entlang der Charakteristiken beschreibt. Daher berechnet der Transport-Diffusions Algorithmus die Näherung $\mathbf{u}_h^{n+1}$ für $\mathbf{u}_h(., t_{n+1})$ aus der Näherung $\mathbf{u}_h^n$ für $\mathbf{u}_h(., t_n)$ in den folgenden zwei Teilschritten:

(1) **(Transport Schritt)** Löse für jeden Gitterpunkt x_i das gewöhnliche Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_i(t) =& \mathbf{u}_h^n(y_i(t)) \quad \text{für } t_n < t < t_{n+1} \\ y_i(t_{n+1}) =& x_i. \end{aligned}$$

(2) **(Diffusions Schritt)** Löse das diskrete Analogon des Stokes Problems

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}(y(t_n), t_n)}{t_{n+1} - t_n} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} =& f(., t_{n+1}) && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} =& 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{n+1} =& 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Beim Transport-Diffusions Algorithmus wird also der Term

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_h(x_i, t_{n+1}) + (\mathbf{u}_h(x_i, t_{n+1}) \cdot \nabla)\mathbf{u}_h(x_i, t_{n+1})$$

durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\mathbf{u}_h(x_i, t_{n+1}) - \mathbf{u}_h(y_i(t_n), t_n)}{t_{n+1} - t_n}$$

approximiert.

Die Implementierung dieses Algorithmus ist recht aufwendig, da im Transport Schritt die Charakteristiken durch das Gitter verfolgt werden müssen. Außerdem treten Schwierigkeiten bei geschlossenen Stromlinien auf.

Zum Abschluss sei generell bemerkt, dass sich die Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen für $t \sim 0$ wie $\sqrt{t}$ für das Geschwindigkeitsfeld bzw. wie $1/\sqrt{t}$ für den Druck verhalten. Daher ist es bei jeder Diskretisierung empfehlenswert, in den ersten Zeitschritten eine Zeitdiskretisierung niedriger Ordnung mit gutem Stabilitätsverhalten wie z.B. das implizite Euler Verfahren zu verwenden und erst später auf ein Verfahren höherer Ordnung wie z.B. das Crank-Nicolson Verfahren umzuschalten.

IV.3 A posteriori Fehlerschätzer

Wir benutzen den abstrakten Rahmen von § III.5. Für die instationären Navier-Stokes Gleichungen ist dann mit den üblichen Notationen

$$\begin{aligned}
\langle F([\mathbf{u},p]),[\mathbf{v},q]\rangle_W :=& -(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}(.,0)) - \int_0^T (\mathbf{u},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) \\
&+ \int_0^T \{\nu a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + N(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) - (\mathbf{f},\mathbf{v})\} \\
&+ \int_0^T b(\mathbf{u},q) \\
W :=& \{[\mathbf{v},q] : \mathbf{v} \in L^2((0,T),H_0^1(\Omega)^n),\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^2((0,T),H^{-1}(\Omega)^n), \\
&\qquad \mathbf{v}(.,T) = 0 \text{ in } H^{-1}(\Omega)^n,\ q \in L^2((0,T),L_0^2(\Omega))\} \\
V :=& V_1 \times V_2
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
V_1 :=& \begin{cases} L^\infty((0,T),L^2(\Omega)^2) \cap L^2((0,T),H_0^1(\Omega)^2) & \text{falls } n=2 \\ L^\infty((0,T),L^2(\Omega)^3) \cap L^2((0,T),H_0^1(\Omega)^3) \cap L^8((0,T),L^4(\Omega)^3) & \text{falls } n=3 \end{cases} \\
V_2 :=& L^2((0,T),L_0^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Insbesondere besitzt wegen Satz 1.5 das Problem

$$F([\mathbf{u},p]) = 0$$

für $n = 2$ genau eine Lösung und für $n = 3$ höchstens eine Lösung. Aus den üblichen Energieabschätzungen folgt, dass diese Lösung regulär ist im Sinne von Satz III.5.1.

Die Lipschitz-Stetigkeit von $DF([\mathbf{u},p])$ folgt aus der Trilinearität und Stetigkeit von N.

Für die Diskretisierung betrachten wir Raum-Zeit Finite Elemente, d.h. Problem (5) aus § 2. Im vorliegenden abstrakten Rahmen entspricht dies der Wahl

$$\begin{aligned} V_h :=& S_\tau^{k,-1}(X_{h(\tau)}) \times S_\tau^{k,-1}(M_{h(\tau)}) \\ W_h :=& S_\tau^{\theta;k+1,0}(X_{h(\tau)}) \times S_\tau^{k,-1}(M_{h(\tau)}) \\ \langle F_h([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v}_h,q_h]\rangle_W :=& \langle F([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v}_h,q_h]\rangle_W. \end{aligned}$$

Man beachte, dass für den Druck Ansatz- und Testraum übereinstimmen. Insbesondere gilt also wieder die Galerkin Orthogonalität

$$\langle F([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v}_h,q_h]\rangle_W = 0 \quad \forall [\mathbf{v}_h,q_h] \in W_h$$

für jede Lösung $[\mathbf{u}_h,p_h]$ des diskreten Problems (5), d.h.

$$F_h([\mathbf{u}_h,p_h]) = 0.$$

Wegen Satz III.5.1 ist somit der Fehler

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{L^2((0,T),H_0^1(\Omega)^n)} + \|p-p_h\|_{L^2((0,T),L_0^2(\Omega))}$$

äquivalent zu dem Residuum

$$\|F([\mathbf{u}_h,p_h])\|_{W'} = \sup_{\substack{[\mathbf{v},q]\in W \\ \|[\mathbf{v},q]\|_W=1}} \langle F([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v},q]\rangle_W.$$

Aus Gleichung (6) von § 2 erhalten wir mittels elementweiser partieller Integration wie in Gleichung (4) aus § III.5 die folgende Darstellung des Residuums

$$\begin{aligned} &\langle F([\mathbf{u}_h,p_h]),[\mathbf{v},q]\rangle_W \\ =&\sum_{j=1}^{N_\tau}\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_j}\Big\{\int_K (\mathbf{u}_h(x,t_j+0)-\mathbf{u}_h(x,t_j-0))\cdot\mathbf{v}(x,t_j)dx \\ &\qquad + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_K \{\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + (\mathbf{u}_h\cdot\nabla)\mathbf{u}_h - \mathbf{f}\}\cdot\mathbf{v}dxdt \\ &\qquad + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_K q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h dxdt\Big\} \\ &+ \sum_{E\in\mathcal{E}_j}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_E [\mathbf{n}_E\cdot(\nabla\mathbf{u}_h - p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\cdot\mathbf{v}dSdt\Bigg\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei benutzen wir die Notationen des vorigen Paragraphen; insbesondere ist

$$\mathbf{u}_h(.,0-0) := \mathbf{u}_0$$

der bekannte Anfangswert.
Um eine kompaktere Schreibweise zu erhalten, definieren wir

$$\mathcal{P}_\tau := \{K \times J_j : 1 \le j \le N_\tau, K \in \mathcal{T}_j\}$$

und setzen für $Q := K \times J_j \in \mathcal{P}_\tau$

$$\partial Q_B := K \times \{t_j\}\ ,\ \partial Q_L := \partial K \times J_j.$$

Mit diesen Notationen geht (1) über in

$$\begin{aligned}
&\langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q]\rangle_W \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{P}_\tau} \Big\{ \int_{\partial Q_B} (\mathbf{u}_h(x,t_j+0) - \mathbf{u}_h(x,t_j-0)) \cdot \mathbf{v}(x,t_j)dx \\
&\qquad + \int_Q \{\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + (\mathbf{u}_h\cdot\nabla)\mathbf{u}_h - \mathbf{f}\}\cdot\mathbf{v}dxdt \\
&\qquad + \int_Q q \operatorname{div}\mathbf{u}_h dxdt \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{\partial Q_L} [\mathbf{n}_E \cdot (\nabla\mathbf{u}_h - p_h\underline{\mathbf{I}})]_E \cdot \mathbf{v} dSdt \Big\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem letzten Summanden berücksichtigt, dass jedes $E \in \mathcal{E}_j$ doppelt gezählt wird.

Für die Herleitung einer oberen Fehlerschranke benötigen wir wieder einen geeigneten Interpolationsoperator. Dazu nehmen wir an, dass die Räume X_j die stetigen, stückweise linearen bzw. n-linearen Elemente enthalten und bezeichnen mit R_j den modifizierten Clément'schen Interpolationsoperator zu $\mathcal{T}_j$ aus § I.4. Setze

$$\pi_j\mathbf{u} := \frac{1}{\tau_{j-1}+\tau_j}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \mathbf{u}(.,t)dt$$

mit der offensichtlichen Modifikation für $j = 1$. Dann definieren wir den Interpolationsoperator $I_h : V_1 \longrightarrow S_\tau^{\theta;1,0}(S_{h(\tau)}^{1,0})$ durch

$$I_h\mathbf{u} := \sum_{j=1}^{N_\tau} \lambda_j^\theta(t)\pi_j(R_j\mathbf{u}).$$

Man kann zeigen, dass dann für alle $Q = K \times J_j \in \mathcal{P}_\tau$ folgende Interpolationsfehlerabschätzungen gelten

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - I_h\mathbf{u}\|_{L^2(Q)} \leq & c\{h_K\|\mathbf{u}\|_{L^2(J_j,H_0^1(\tilde{\omega}_K)^n)} + \tau_j h_K^{-1}\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\|_{L^2(J_j,H^{-1}(\tilde{\omega}_K)^n)}\} \\
\|\mathbf{u} - I_h\mathbf{u}\|_{L^2(\partial Q_L)} \leq & c\{h_K^{1/2}\|\mathbf{u}\|_{L^2(J_j,H_0^1(\tilde{\omega}_K)^n)} + \tau_j h_K^{-3/2}\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\|_{L^2(J_j,H^{-1}(\tilde{\omega}_K)^n)}\} \\
\|\mathbf{u} - I_h\mathbf{u}\|_{L^2(\partial Q_B)} \leq & c\{\tau_j^{-1/2}h_K\|\mathbf{u}\|_{L^2(J_{j-1}\cup J_j,H_0^1(K)^n)} \\
& + \tau_j^{1/2}h_K^{-1}\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\|_{L^2(J_{j-1}\cup J_j,H^{-1}(K)^n)}\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dabei ist wie in § III.5 $\tilde{\omega}_K$ die Vereinigung aller Elemente in $\mathcal{T}_j$, die einen nicht leeren Durchschnitt mit K haben.
Aus den Interpolationsfehlerabschätzungen (3) und der Darstellung (2) folgt für alle $[\mathbf{v}, q] \in W$ mit $\|[\mathbf{v}, q]\|_W = 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q]\rangle_W \\
\leq & c \sum_{Q\in\mathcal{P}_\tau} \Big\{ (\tau_j^{-1/2}h_K + \tau_j^{1/2}h_K^{-1})^2\|\mathbf{u}_h(x, t_j + 0) - \mathbf{u}_h(x, t_j - 0)\|^2_{L^2(\partial Q_B)} \\
& \quad + (h_K + \tau_j h_K^{-1})^2\|\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h - \mathbf{f}\|^2_{L^2(Q)} \\
& \quad + (h_K^{1/2} + \tau_j h_K^{-3/2})^2\|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla\mathbf{u}_h - p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\|^2_{L^2(\partial Q_L)} \\
& \quad + \|\operatorname{div}\mathbf{u}_h\|^2_{L^2(Q)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\eta_Q := \Big\{ & (\tau_j^{-1/2}h_K + \tau_j^{1/2}h_K^{-1})^2\|\mathbf{u}_h(x, t_j + 0) - \mathbf{u}_h(x, t_j - 0)\|^2_{L^2(\partial Q_B)} \\
& + (h_K + \tau_j h_K^{-1})^2\|\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h - \mathbf{f}\|^2_{L^2(Q)} \\
& + (h_K^{1/2} + \tau_j h_K^{-3/2})^2\|[\mathbf{n}_E \cdot (\nabla\mathbf{u}_h - p_h\underline{\mathbf{I}})]_E\|^2_{L^2(\partial Q_L)} \\
& + \|\operatorname{div}\mathbf{u}_h\|^2_{L^2(Q)}\Big\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dann erhalten wir wegen Satz III.5.1 die folgende **obere Fehlerschranke**

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2((0,T),H_0^1(\Omega)^n)} + \|p - p_h\|_{L^2((0,T),L_0^2(\Omega))} \leq c\left\{\sum_{Q\in\mathcal{P}_\tau} \eta_Q^2\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Wegen Satz III.5.1 liefert $\langle F([\mathbf{u}_h, p_h]), [\mathbf{v}, q]\rangle_W$ für jedes Element $[\mathbf{v}, q] \in W$ mit $\|[\mathbf{v}, q]\|_W = 1$ eine untere Schranke für den Fehler. Indem wir sukzessive die

Funktionen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= 0 && , \; q = b_j \psi_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h \\
\mathbf{v} &= b_j \psi_K \{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h - \mathbf{f}_h \} && , \; q = 0 \\
\mathbf{v} &= b_j \psi_E [\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}})]_E && , \; q = 0 \\
\mathbf{v} &= \lambda_j \psi_K \{ \mathbf{u}_h(., t_j + 0) - \mathbf{u}_h(., t_j - 0) \} && , \; q = 0
\end{aligned}
$$

wählen, erhalten wir mit ähnlichen Argumenten wie in § II.10 und § III.5 die **untere Fehlerschranke**

$$
\begin{aligned}
\eta_Q \leq c(1 + h_K^2 \tau_j^{-1} + h_K^{-2} \tau_j) \Big\{ & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, H_0^1(\omega_K)^n)} \\
& + \|p - p_h\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, L^2(\omega_K))} \\
& + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, L^2(\omega_K))} \Big\}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Dabei ist wieder $\mathbf{f}_h$ eine beliebige Finite Element Approximation an $\mathbf{f}$, z.B. durch stückweise konstante Funktionen, und ω_k die Vereinigung aller Elemente, die mit K eine Kante, falls $n = 2$ ist, bzw. eine Seitenfläche, falls $n = 3$ ist, gemeinsam haben. Der Faktor $1 + h_K^2 \tau_j^{-1} + h_K^{-2} \tau_j$ hat kein Gegenstück bei den stationären Problemen der Paragraphen II.10 und III.5. Er spiegelt wider, dass die instationären Navier-Stokes Gleichungen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bzgl. des Ortes, aber nur erster Ordnung bzgl. der Zeit sind.
Wegen der nicht lokalen Natur des Raumes $H^{-1}(\Omega)$ kann man die lokale untere Fehlerschranke (5) nicht in der gewohnten Art und Weise zu einer globalen unteren Fehlerschranke zusammensetzen. Man verliert in diesem Fall einen Faktor

$$
\left\{ \min_{1 \leq j \leq N_\tau} \min_{K \in \mathcal{T}_j} h_K \right\}^{-1}.
$$

Man kann diesen Nachteil vermeiden, wenn man Fehlerschranken für

$$
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2((0,T), L^2(\Omega)^n)} + \|p - p_h\|_{L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))}
$$

betrachtet. Dann gelten die Abschätzungen (4) und (5) und das globale Analogon von (5), wenn überall η_Q durch $h_K \eta_Q$ ersetzt wird.