Projektive Geometrie

Wolf P. Barth

Wintersemester 97/98

Version vom 24. März 1998

Mathematisches Institut der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D - 91054 Erlangen

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung **1**

1 Euklidische Geometrie **3**
1.1 Affine Unterräume (Wiederholung aus der linearen Algebra) 3
1.2 Das euklidische Skalarprodukt 6
1.3 Die Bewegungsgruppe 11
1.4 Volumen, Orientierung, Fläche 16
1.5 Dreiecksgeometrie 24
1.6 Kreisgeometrie 30
1.7 Kreise am Dreieck 33

2 Affine Geometrie **43**
2.1 Die affine Gruppe 43
2.2 Das Teilverhältnis, baryzentrische Koordinaten 46
2.3 Lineare affine Geometrie der Ebene 52
2.4 Ellipsen 62
2.5 Kegelschnitte 66

3 Projektive Geometrie **72**
3.1 Die projektive Ebene 72
3.2 Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ 76
3.3 Projektivitäten 83
3.4 Das Doppelverhältnis 89
3.5 Lineare Geometrie der projektiven Ebene 97
3.6 Das Dualitätsprinzip 101

4 Kegelschnitte in der projektiven Ebene **107**
4.1 Projektive Klassifikation der Kegelschnitte 107
4.2 Sekanten, Tangenten und Polaren 111
4.3 Parametrisierung von Kegelschnitten 120
4.4 Projektivitäten auf Kegelschnitten 128
4.5 Systeme von Kegelschnitten 137

0 Einführung

Dies ist die Wiederholung einer Vorlesung gleichen Titels, welche ich im Wintersemester 1994/95 hielt. Damals wollte ich in einer einsemestrigen Geometrie-Vorlesung den gesamten Stoff abdecken, dessen Kenntnis ich von einem Studenten in einer mündlichen Geometrie-Prüfung des Hauptexamens erwarte. Auch diesmal ist dies wieder meine Absicht.

Projektive Geometrie ist für mich eine Art von Lieblingsvorlesung. An Voraussetzungen braucht man nämlich nicht mehr als die Kenntnis der Linearen Algebra. Die Inhalte kann man meist zeichnerisch illustrieren und gerade im Zeitalter der Computer-Grafik ist das sehr reizvoll. Außerdem sind diese Inhalte oft einfach zu formulieren und trotzdem überraschend.

Ziel dieser Vorlesung ist es auch, einige klassische Gebiete der Geometrie davor zu bewahren, in Vergessenheit zu geraten. Gerade, weil die Geometrie in jüngster Zeit Anwendungen in der Computer-Grafik gefunden hat, besteht die Möglichkeit, daß ihre Weitervermittlung und Anwendung von den Computergraphikern in die Hand genommen wird, so, wie es früher bei der Darstellenden Geometrie durch die Ingenieure geschah. Dies wäre bedauerlich, vor allem aus den folgenden zwei Gründen: Weil

- die Verbindung zwischen Linearer Algebra und Projektiver Geometrie, oder allgemeiner, zwischen Algebra und Geometrie ein instruktives Beispiel dafür ist, wie in der Mathematik scheinbar verschiedene Gebiete doch sehr eng zusammenhängen,
- Geometrie derjenige Teil der Mathematik ist, welcher am direktesten unserem ästhetischen Empfinden zugänglich ist.

Bevor wir uns in dieser Vorlesung auf projektive Geometrie konzentrieren, sollen kurze Einführungen in die euklidische und in die affine Geometrie gegeben werden. Dabei sollen Sätze aus der Dreiecksgeometrie und der Geometrie des Kreises besprochen werden, wie z.B. die wichtigsten Eigenschaften des Feuerbachkreises. Auch soll kurz an die elementarsten Eigenschaften der Kegelschnitte erinnert werden.

Die Beziehung zwischen euklidischer, affiner und projektiver Geometrie versteht man am besten von dem Standpunkt aus, den Felix Klein in seinem „Erlanger Programm“ einnahm. Er brachte hier nämlich den Gesichtspunkt ins Gespräch, daß jede Art von Geometrie etwas mit einer Transformationsgruppe zu tun habe. Die *Geometrie* ist *die Gesamtheit der Eigenschaften, welche sich bei den Transformationen der Gruppe nicht ändern.* Für die drei erwähnten Arten von Geometrie sind dies die folgenden Gruppen, und die zugehörigen Räume, auf denen sie operieren:

Geometrie	Raum	Gruppe
euklidische	$\mathbb{R}^n$	Bewegungsgruppe
affine	$\mathbb{K}^n$	affine Gruppe
projektive	$\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$	projektive Gruppe

Wir werden in dieser Vorlesung die Kenntnis der betreffenden Gruppen nicht voraussetzen, sondern diese Gruppen parallel zu unseren geometrischen Untersuchungen einführen.

Felix Klein hat mit seinem Erlanger Programm den Namen der Stadt Erlangen bei Mathematikern unsterblich gemacht. Er selbst blieb allerdings nur wenige Jahre hier, bevor er im

damaligen Land Preußen sehr viel Einfluß auf die Kultus-Bürokratie, und damit auf die Lehrerausbildung gewann. Ich bin immer davon ausgegangen, daß Kleins Erlanger Programm lateinisch abgefaßt, und damit unlesbar ist. Vor drei Jahren machte mich allerdings jemand darauf aufmerksam, daß es davon auch eine deutsche Version gibt. Leider habe ich mir nicht gemerkt, wer das war, oder wo diese Version zu finden ist.

Wer Kleins Erlanger Programm nicht im Original lesen möchte oder kann, dem sei der zweite von den drei Bänden

F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Dritte Auflage, Springer-Verlag (Nachdruck 1968)

empfohlen. Neben diesem Buch habe ich bei meiner kurzen Darstellung der euklidischen und affinen Geometrie, die ich vor der Behandlung der projektiven Geometrie geben möchte, noch die folgenden Bücher zu Rate gezogen:

H.S.M Coxeter, S.L. Greitzer: Geometry Revisited, The Mathem. Assoc. of America (1967),

G. Fischer: Analytische Geometrie, Vieweg (1979),

W. Klingenberg: Lineare Algebra und Geometrie, Springer Hochschultext (1984),

M. Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer Grundwissen (1985),

M. Koecher, A. Krieg: Ebene Geometrie, Springer Lehrbuch (1993).

Bei meiner Darstellung der projektiven Geometrie habe ich sehr von holländischen Vorlesungsskripten des Kollegen *J. Simonis* profitiert, der zu Beginn der 70er Jahre an der Universität Leiden diese Vorlesung mehrmals hielt, als ich auch gerade dort war. Simonis selbst hat offebar intensiv das Buch

J.G. Semple, G.T. Kneebone: Algebraic Projective Geometry, Oxford, Clarendon Press (1952)

zu Rate gezogen. Ein sehr schönes, und erfreulich dünnes Buch ist auch

P. Samuel: Projective Geometry, Springer (1988).

1 Euklidische Geometrie

1.1 Affine Unterräume (Wiederholung aus der linearen Algebra)

Wir betrachten Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Die Komponenten des Vektors $\mathbf{v}$ nennen wir v_ν ($\nu = 1, .., n$), also $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$.

Die Fundamentalaufgabe der linearen Algebra besteht darin, ein lineares Gleichungssystem zu lösen. (Lineare Gleichungen sind übrigens die einzigen Gleichungen zwischen reellen Zahlen in der Mathematik, die exakt lösbar sind.) Ein *homogenes* lineares Gleichungssystem hat die Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\mu^\nu v_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, ..., m).$$

Jeder Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems. Es gibt somit zwei prinzipiell verschiedene Methoden, einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ zu beschreiben:

- Explizit, d.h., durch ein Erzeugendensystem

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} = \sum_{\mu=1}^{d} c^\mu \mathbf{v}_\mu,\ c^1, ..., c^d \in \mathbb{R}\}.$$

- Implizit, d.h. durch ein Gleichungssystem

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \sum_{\nu=1}^{n} a_\mu^\nu v_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, ..., m\}.$$

Der Übergang von einer impliziten Beschreibung zu einer expliziten Beschreibung eines Untervektorraums besteht in der Lösung des Gleichungssystems. Aber auch der Übergang von einer expliziten Beschreibung zu einer impliziten Beschreibung besteht in der Lösung eines homogenen Gleichungssystems: Sind nämlich Erzeugende $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_d \in V$ gegeben, so sucht man Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r$ die den Raum

$$\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \sum_{\nu=1}^{n} v_{\mu,\nu} a_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, ..., d\}$$

erzeugen.

Die Fundamentaloperationen beim Umgang mit Untervektorräumen sind die Bildung des Durchschnitts $V_1 \cap V_2$ und des Verbindungsraums $V_1 + V_2$ zweier Untervektorräume $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$. Die *Dimensionsformel*

$$dim(V_1 \cap V_2) + dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$$

gibt den Zusammenhang zwischen den Dimensionen dieser Räume.

Entsprechend der Beschreibung der Untervektorräume V_1, V_2 ist die Ermittlung von Durchschnitt oder Verbindungsraum entweder einfach (Zusammenfügen der Gleichungen, bzw. Erzeugendensysteme) oder führt auf Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS):

Beschreibung	$V_1 \cap V_2$	$V_1 + V_2$
implizit	einfach	LGS
explizit	LGS	einfach.

Neben homogenen linearen Gleichungssystemen löst man in der linearen Algebra auch *inhomogene* lineare Gleichungssysteme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\mu^\nu v_\nu = b_\mu, \quad \mu = 1, ..., m.$$

Falls der Spaltenvektor $\mathbf{b}$ auf der rechten Seite $\neq \mathbf{0}$ ist, so ist der Nullvektor $\mathbf{0}$ keine Lösung des Systems, und die Lösungsmenge V kein Untervektorraum mehr. Man hat den Struktursatz: Die Lösungsmenge V des inhomogenen Systems erhält man, indem man zu einer speziellen Lösung $\mathbf{t}$ des inhomogenen Systems alle Vektoren aus dem Lösungsraum V^0 des homogenen Systems addiert:

$$V = \mathbf{t} + V^0 = \{\mathbf{t} + \mathbf{v} : \ \mathbf{v} \in V^0\}.$$

Den Lösungsraum $V \subset \mathbb{R}^n$ eines (homogenen oder) inhomogenen Systems nennt man *affinen Unterraum* des $\mathbb{R}^n$, den zugehörigen Untervektorraum $V^0 \subset \mathbb{R}^n$ mit $V = \mathbf{t} + V^0$ nennen wir den *zugehörigen parallelen Untervektorraum* zum affinen Unterraum V. Die *Dimension* eines affinen Unterraums ist die Dimension des zugehörigen Untervektorraums. Affine Unterräume der Dimension

$$\left.\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{array}\right\} \text{ heißen } \left\{\begin{array}{l} \text{Punkte} \\ \text{Geraden} \\ \text{Ebenen} \\ \vdots \\ \text{Hyperebenen} \end{array}\right.$$

Ebenso wie bei Untervektorräumen stellt sich auch für affine Unteräume $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ die Aufgabe, ihren Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ und ihren Verbindungsraum $V_1 + V_2$ (den kleinsten affinen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$, der V_1 und V_2 enthält) zu bestimmen. Schlimmstenfalls führen diese Probleme auf lineare Gleichungssysteme, aber, weil sie jetzt inhomogen sind, brauchen sie nicht immer lösbar zu sein.

Wir wollen hier keine abstrakten allgemeinen Aussagen formulieren (hierzu s. etwa das Buch von Fischer), sondern den wichtigsten Spezialfall betrachten: zwei Geraden

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a_1 x + b_1 y = c_1\} \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a_2 x + b_2 y = c_2\} \end{aligned}$$

in der Ebene. Die Bestimmung ihres Durchschnitts führt auf die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

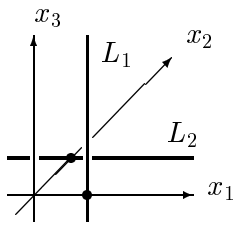
$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Ist die Koeffizientendeterminante $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, so ist das System mit der Cramerschen Regel lösbar:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Ist die Koeffizientendeterminante allerdings $= 0$, so haben wir Probleme: Wir wollen ausschließen, daß einer der Koeffizientenvektoren $(a_\mu, b_\mu) = (0,0)$ ist. Dann verschwindet die Determinante, wenn beide Geraden parallel sind. In diesem Fall ist der Durchschnitt leer, oder beide Geraden stimmen überein.

Allgemein nennt man zwei affine Unterräume $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ *parallel*, wenn ihre zugehörigen parallelen Untervektorräume V_1^0 und V_2^0 gleich sind.
Aber $V_1 \cap V_2$ kann auch dann leer sein, wenn V_1 und V_2 nicht parallel sind. Dann heißen die affinen Unterräume *windschief*. So sind etwa die beiden Geraden $L_1 : x_1 = 1, x_2 = 0$ und $L_2 : x_2 = 1, x_3 = 0$ im $\mathbb{R}^3$ windschief.



Der Verbindungsraum zweier verschiedener Vektoren $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ ist immer eine Gerade, in expliziter Form

$$\{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + c \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) : c \in \mathbb{R}\}$$

oder

$$\{\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + c \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Gerade ist zu unterscheiden von der *Strecke*

$$\overline{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1} = \{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + c \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) : c \in \mathbb{R}, 0 \leq c \leq 1\} = \{\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + c \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) : c \in \mathbb{R}, 0 \leq c \leq 1\}$$

zwischen $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{v}_1$. Diese Strecke kann man auch symmetrisch in $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{v}_1$ schreiben, als die Menge

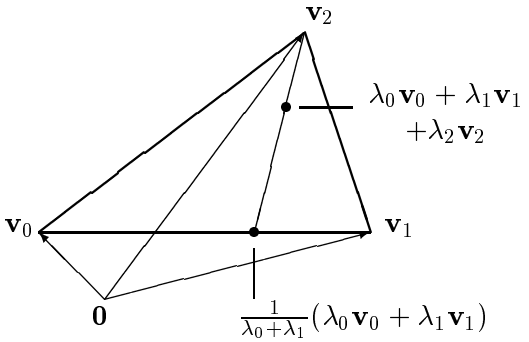
$$\overline{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1} = \{\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}_0 + \lambda_1\mathbf{v}_1 : 0 \leq \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$$

der *Konvexkombinationen* von $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{v}_1$.

Hat man $m+1$ Vektoren $\mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, so heißt die Menge

$$\{\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}_0 + ... + \lambda_m\mathbf{v}_m : \lambda_0 + ... + \lambda_m = 1, \lambda_\mu \geq 0\}$$

der Konvex-Kombinationen, das von $\mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_m$ *aufgespannte Simplex*. Dies Simplex ist ein echtes, m–dimensionales Simplex, wenn die m Vektoren $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, ..., \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_0$ linear unabhängig sind. Ein zweidimensionales Simplex heißt *Dreieck*.



Aufgabe 1.1: Im $\mathbb{R}^2$ seien zwei Geraden gegeben, die Gerade L mit der Gleichung $ax+by = c$, die Gerade M aufgespannt von den Vektoren $(p_1, p_2) \neq (q_1, q_2)$. Wann sind L und M parallel, wann sind sie gleich?

Aufgabe 1.2: Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Geraden gegeben, die Gerade L durch die Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \qquad a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

die Gerade M aufgespannt von den Vektoren $(p_1, p_2, p_3) \neq (q_1, q_2, q_3)$. Wann sind L und M parallel, wann schneiden sie sich?

Aufgabe 1.3: Die n Punkte $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^2$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \leq 2.$$

1.2 Das euklidische Skalarprodukt

Aus der linearen Algebra brauchen wir die Vertrautheit mit dem „euklidischen“ Skalarprodukt auf dem Zahlenraum $\mathbb{R}^n$. Wir benutzen folgende Notation:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \text{ und } \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

ist

$$(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = x_1y_1 + ... + x_ny_n.$$

Die *Länge* oder *Norm* des Vektors $\mathbf{x}$ ist

$$\| \mathbf{x} \| := \ _+\sqrt{(\mathbf{x}.\mathbf{x})}.$$

Die bilinearen Eigenschaften dieses Skalarprodukts sind aus der linearen Algebra wohlbekannt. Damit beweist man sehr schnell die

Polarisationsformel	$2(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 - \| \mathbf{x} \|^2 - \| \mathbf{y} \|^2$
Cauchy–Schwarz–Ungleichung	$\|(\mathbf{x}.\mathbf{y})\| \leq \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|$
Dreiecks–Ungleichung	$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$

Mit dem Skalarprodukt werden die beiden folgenden Grundgrößen definiert:

Der Abstand zwischen zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|,$$

der Cosinus des Winkels $\angle(\mathbf{x},\mathbf{y})$ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$ ist

$$\cos \angle(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{(\mathbf{x}.\mathbf{y})}{\| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|}.$$

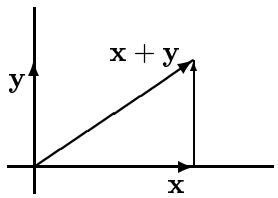
Aufgrund der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist die rechte Seite betragsmäßig immer ≤ 1, und die Definition ist sinnvoll. Im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir daraus (bis aufs Vorzeichen) den aus der Schule bekannten Winkel zwischen zwei Vektoren.

Der Cosinus definiert den Winkel eindeutig bis auf das Vorzeichen. Anders ausgedrückt, wir können mit Hilfe des Skalarprodukts nicht unterscheiden, ob wir den Winkel in Richtung von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$ oder umgekehrt, von $\mathbf{y}$ nach $\mathbf{x}$ messen. Unser Winkel ist „nicht orientiert". Wenn wir wollen, können wir vereinbaren, daß unsere Winkel nur die Werte zwischen 0 und π annehmen.

Der Cosinus ist $= 0$, falls das Skalarprodukt $(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = 0$ ist. In diesem Fall sagt man, die Vektoren stehen aufeinander senkrecht, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind *orthogonal*. Für orthogonale Vektoren gilt der bekannte *Satz von Pythagoras*:

$(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = 0 \implies$

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x}+\mathbf{y} \|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y} \,.\, \mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}.\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}.\mathbf{y}) + (\mathbf{y}.\mathbf{y}) \\ &= \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 \end{aligned}$$



In dieser Form, als Aussage über Zahlen–n–tupel ist dieser Satz natürlich eine Tautologie. Dies entspricht keineswegs der enormen Erkenntnis, die der Satz auf dem Weg zur Entwicklung der Geometrie bedeutete. Bei den Babyloniern und den alten Ägyptern entstand die Geometrie aus der Feldmessung, und es war natürlich von großem praktischen Wert, einen rechten Winkel an einer Ecke eines Feldes herzustellen, und nichts anderes dazu zu benutzen, als eine Schnur, auf der drei, vier, und fünf gleichlange Stücke markiert waren.

Wir können diese Bedeutung des Pythagoras noch am ehesten ermessen, wenn wir sie als eine Bestätigung dafür sehen, daß die euklidische Geometrie die räumlichen Verhältnisse unserer Welt mit ausreichender Präzision wiederspiegelt. Dies gilt natürlich nicht für sehr große Distanzen, wo die relativistische Geometrie zuständig ist, und für sehr kleine Distanzen, wo man - soweit ich weiß - noch nicht über eine zufriedenstellende Theorie des Raums verfügt.

Eine Basis $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ heißt *Orthonormal–Basis* oder *Orthonormal–System* (=ONS), falls

$$(\mathbf{x}_i.\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}.$$

Ein ONS hat große praktische Vorteile gegenüber einer nicht–orthonormalen Basis, denn die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Vektors

$$\mathbf{x} = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \mathbf{x}_\mu$$

berechnen sich einfach als Skalarprodukte

$$(\mathbf{x}.\mathbf{x}_\nu) = (\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \mathbf{x}_\mu.\mathbf{x}_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu (\mathbf{x}_\mu.\mathbf{x}_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \delta_{\mu,\nu} = c_\nu.$$

Jeder Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ besitzt ein orthogonales Komplement

$$V^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w}.\mathbf{v}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V\}.$$

Auch wenn $V \subset \mathbb{R}^n$ ein *affiner* Unterraum ist, kann man ein orthogonales Komplement definieren, allerdings erst nach Auswahl eines Fußpunktes $\mathbf{v}_0 \in V$:

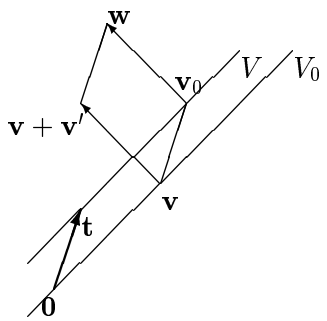
$$V^\perp(\mathbf{v}_0) := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w} - \mathbf{v}_0.\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V\}.$$

Falls $V^0 \subset \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum parallel zu V ist, dann ist $V = \mathbf{v}_0 + V^0$ und $V^\perp(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0 + (V^0)^\perp$.

Behauptung. *Zu jedem affinen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ und jedem Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Fußpunktvektor $\mathbf{v}_0 \in V$ mit $\mathbf{w} \in V^\perp(\mathbf{v}_0)$.*

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $\mathbf{w} \in V^\perp(\mathbf{v}_0)$ und $\mathbf{w} \in V^\perp(\mathbf{v}_1)$. Dann sind $V^\perp(\mathbf{v}_0)$ und $V^\perp(\mathbf{v}_1)$ zwei parallele affine Unterräume (beide sind zum Untervektorraum $(V^0)^\perp$ parallel) und haben nichtleeren Durchschnitt (beide enthalten den Vektor $\mathbf{w}$). Deswegen stimmen sie überein. Daraus folgt

$$\{\mathbf{v}_1\} = V \cap V^\perp(\mathbf{v}_1) = V \cap V^\perp(\mathbf{v}_0) = \{\mathbf{v}_0\}.$$



Existenz: Es sei $V = \mathbf{t} + V^0$ und $\mathbf{w} - \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ mit $\mathbf{v} \in V^0$ und $\mathbf{v}' \in (V^0)^\perp$. Dann ist

$$\mathbf{w} = (\mathbf{t} + \mathbf{v}) + \mathbf{v}' \in V^\perp(\mathbf{v}_0)$$

mit $\mathbf{v}_0 := \mathbf{t} + \mathbf{v}$. □

Durch die soeben bewiesene Behauptung wird also zu jedem Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig ein Vektor $\mathbf{v}_0 \in V$ definiert. Dieser Vektor $\mathbf{v}_0$ hat die Eigenschaft, daß für alle Vektoren $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \| \mathbf{w} - \mathbf{v} \|^2 &= ((\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)).((\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0))) \\ &= \| \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \|^2 - 2\,((\mathbf{w} - \mathbf{v}_0).(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)) + \| \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \|^2 \\ &= \| \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \|^2 + \| \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \|^2 \qquad (\text{ weil } \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \in V^\perp(\mathbf{v}_0) \text{ und } \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in V) \\ &> \| \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \|^2 \qquad \text{falls } \mathbf{v} \neq \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbf{v}_0$ derjenige Vektor in V, der den kleinsten Abstand zu $\mathbf{w}$ hat. Dieser kleinste Abstand $\| \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \|$ heißt der *Abstand des Punktes $\mathbf{w}$ vom affinen Unterraum V.*

Man nennt die Abbildung $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}_0$ auch die *Orthogonalprojektion* des $\mathbb{R}^n$ auf den affinen Raum V.

Beispiele: 1) Wir berechnen die Orthogonalprojektion $\mathbf{v}_0$ eines Vektors $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ auf eine implizit gegebene Hyperebene

$$H: \ (\mathbf{n}.\mathbf{x}) = c$$

des $\mathbb{R}^n$. Das orthogonale Komplement $H^\perp$ wird von $\mathbf{n}$ aufgespannt. Deswegen ist $\mathbf{v}_0 = \mathbf{w} + t\mathbf{n}$, wo der Koeffizient $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{v}_0 \in H, \quad \text{d.h.} \quad (\mathbf{n}.\mathbf{w} + t\mathbf{n}) = c$$

bestimmt ist. Es folgt

$$t = \frac{c - (\mathbf{w}.\mathbf{n})}{\| \mathbf{n} \|^2}$$

und

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{w} + \frac{c - (\mathbf{w}.\mathbf{n})}{\| \mathbf{n} \|^2} \cdot \mathbf{n}.$$

Der Abstand des Vektors $\mathbf{w}$ von der Hyperebene H ist

$$\| \mathbf{v}_0 - \mathbf{w} \| = \frac{|c - (\mathbf{w}.\mathbf{n})|}{\| \mathbf{n} \|}.$$

2) Die Orthogonalprojektion $\mathbf{v}_0$ eines Vektors $\mathbf{w}$ auf eine explizit gegebene Gerade

$$L: \quad \{\lambda \mathbf{v}_1 + (1-\lambda)\mathbf{v}_2, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

kann man wie folgt ausrechnen: Es ist $\mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{v}_1 + (1 - \lambda \mathbf{v}_2)$ mit

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w} - \mathbf{v}_0.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= 0 \\
(\mathbf{w}.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_0.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
&= (\lambda \mathbf{v}_1 + (1-\lambda)\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
&= \lambda(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \lambda(\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
&= (\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
(\mathbf{w} - \mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= \lambda \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2 \\
\lambda &= \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
1 - \lambda &= \frac{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2 - (\mathbf{w} - \mathbf{v}_2.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2} \\
&= \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2} \\
&= \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{\| \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \|^2}.
\end{aligned}$$

(Dies hätte man auch durch Vertauschen von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ gesehen.)

Die Orthogonalprojektion ist also

$$\mathbf{v}_0 = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_2.\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{\| \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \|^2} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{\| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|^2} \cdot \mathbf{v}_2.$$

Speziell für eine Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\mathbf{v}$ wird daraus, indem wir $\mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ setzen

$$\mathbf{v}_0 = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|^2} \cdot \mathbf{v}.$$

Ist $\mathbf{v}_0 \in V$ die Orthogonalprojektion von $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ in den affinen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$, so gehört mit $\mathbf{w} - \mathbf{v}_0$ auch der entgegengesetzte Vektor $-(\mathbf{w} - \mathbf{v}_0)$ zu $V^\perp(\mathbf{v}_0)$. Der Vektor

$$\mathbf{v}_0 - (\mathbf{w} - \mathbf{v}_0) = 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}$$

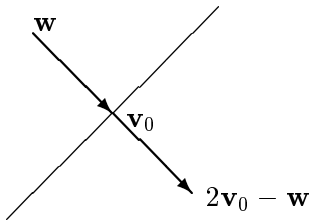
hat von V denselben Abstand $\| \mathbf{w} - \mathbf{v}_0 \|$ wie $\mathbf{w}$. Nur liegt er auf dem Projektionsstrahl von $\mathbf{w}$ nach $\mathbf{v}_0$ „auf der anderen Seite“ von V. Dieser Punkt heißt der *an V gespiegelte* Punkt $\mathbf{w}$ und die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{w} \mapsto 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}$$

heißt die *Spiegelung an dem affinen Unterraum V*.

Beispiel. Die Spiegelung an der Hyperebene $H : \{\mathbf{x} : (\mathbf{n}.\mathbf{x}) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} - 2\frac{(\mathbf{w}.\mathbf{n})}{\| \mathbf{n} \|^2} \cdot \mathbf{n}.$$



Aufgabe 1.4: Bestimmen Sie den Abstand eines Punktes $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ von der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Aufgabe 1.5: Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Geraden gegeben

$$L : (\mathbf{a}_1.\mathbf{x}) - c_1 = (\mathbf{a}_2.\mathbf{x}) - c_2 = 0, \quad M : (\mathbf{b}_1.\mathbf{x}) - d_1 = (\mathbf{b}_2.\mathbf{x}) - d_2 = 0.$$

Bestimmen Sie deren euklidischen Abstand.

Aufgabe 1.6: Bestimmen Sie eine Orthonormal-Basis der Ebene $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 1.7: Bestimmen Sie die Orthogonal-Projektion $\mathbf{v}_0$ des Vektors $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ in den affinen Unterraum

$$V : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2,\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 1.8: Es seien $L_1 = \{t\mathbf{a} : t \in \mathbb{R}\}$ und $L_2 = \{t\mathbf{b} : t \in \mathbb{R}\}$ zwei Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und S_1, bzw. S_2 die Spiegelungen an diesen Geraden. Zeigen Sie:

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{entweder } L_1 = L_2 \text{ oder } (\mathbf{a}.\mathbf{b}) = 0.$$

Aufgabe 1.9: Im $\mathbb{R}^2$ seien drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gegeben. Bestimmen Sie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ so, daß die Summe der Abstandsquadrate

$$s := \| \mathbf{p} - \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{p} - \mathbf{b} \|^2 + \| \mathbf{p} - \mathbf{c} \|^2$$

minimal wird. Zeigen Sie, daß die Mengen $\{s = const\}$ Kreise mit Mittelpunkt $\mathbf{p}$ sind.

1.3 Die Bewegungsgruppe

Eine lineare Abbildung $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *orthogonal*, wenn sie das Skalarprodukt erhält:

$$(U(\mathbf{x}).U(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}.\mathbf{y}).$$

Da sich Längen und Winkel durch das Skalarprodukt ausdrücken lassen, ist eine orthogonale Abbildung U damit auch *längentreu* und *winkeltreu*. Es gelten sogar die Äquivalenzen:

Für eine (nicht notwendig lineare) Abbildung $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ sind äquivalent:

a) U ist orthogonal;

b) U ist linear und längentreu;

c) U erhält die Abstände zwischen zwei Vektoren.

Beweis. Daß b) aus a) folgt, haben wir schon angemerkt.

„b) $\Rightarrow$ c)“: Für je zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} \| U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) \| &= \| U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \| && \text{(Linearität)} \\ &= \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| && \text{(Längentreue).} \end{aligned}$$

„c) $\Rightarrow$ a)“: Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \| U(\mathbf{x}) \| &= \| U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{0}) \| && \text{(weil } U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}) \\ &= \| \mathbf{x} - \mathbf{0} \| && \text{(abstandserhaltend)} \\ &= \| \mathbf{x} \|, \end{aligned}$$

also ist U längentreu. Für je zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} -2(U(\mathbf{x}).U(\mathbf{y})) &= \| U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) \|^2 - \| U(\mathbf{x}) \|^2 - \| U(\mathbf{y}) \|^2 && \text{(Polarisationsformel)} \\ &= \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 - \| \mathbf{x} \|^2 - \| \mathbf{y} \|^2 && \text{(abstandserhaltend und längentreu)} \\ &= -2(\mathbf{x}.\mathbf{y}) && \text{(Polarisationsformel).} \end{aligned}$$

Deswegen erhält U auch das Skalarprodukt. Ist $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ ein ONS, so ist auch $U(\mathbf{x}_1), ..., U(\mathbf{x}_n)$ wieder ein ONS, und deswegen gilt für alle $\mathbf{x} = \sum c_\nu \mathbf{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} (U(\mathbf{x}).U(\mathbf{x}_\nu))U(\mathbf{x}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{x}.\mathbf{x}_\nu)U(\mathbf{x}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu U(\mathbf{x}_\nu).$$

Daraus folgt, daß U linear und somit orthogonal ist. □

Alle orthogonalen Transfomationen $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bilden bezüglich Hintereinanderschaltung eine Gruppe. Man nennt sie die *orthogonale Gruppe* und bezeichnet sie mit $\mathbf{O(n)}$.

Anders als in der linearen Algebra spielen in der Geometrie auch Translationen eine wichtige Rolle. Eine *Translation* ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, zu der es einen Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ („Translationsvektor“) gibt mit

$$T(x) = \mathbf{t} + \mathbf{x}.$$

Eine Translation $T \neq id$ läßt den Nullpunkt nicht fest, denn $T(\mathbf{0}) = \mathbf{t}$.

Auch die Translationen bilden eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderschaltung, die *Translationsgruppe*. Wenn wir wollen, können wir sie mit $\mathbf{T(n)}$ bezeichnen. Sie ist allerdings nicht besonders aufregend, denn sie ist als Gruppe isomorph zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Definition: Eine *Bewegung* ist eine (lineare oder möglicherweise auch nichtlineare) Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die *Abstände* erhält:

$$\| F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| .$$

Beispiele: a) Jede orthogonale Transformation und jede Translation ist eine Bewegung.

b) Die Hintereinanderschaltung $F_2 \circ F_1$ zweier Bewegungen F_1 und F_2 ist offensichtlich eine Bewegung.

c) Jede Bewegung F, die den Nullpunkt festläßt, ist nach der obigen Äquivalenz „c $\Rightarrow$ a“ orthogonal.

Eine Bewegung F braucht den Nullpunkt nicht fest zu lassen. Aber sei etwa $\mathbf{t} := F(\mathbf{0})$ und T die Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + \mathbf{x}$. Ihr Inverses ist $T^{-1} : \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{t} + \mathbf{x}$. Dann ist $U := T^{-1} \circ F$ eine Bewegung mit

$$U(\mathbf{0}) = -\mathbf{t} + F(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

also eine orthogonale Transformation. Somit schreibt sich $F = T \circ U$ als Produkt aus einer orthogonalen Transformation und einer Translation: *Zu jeder Bewegung F gibt es eine orthogonale Transformation U und eine Translation T mit $F = T \circ U$.*

Satz (Bewegungen): *a) Jede Bewegung ist eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

b) Die Umkehrabbildung zu einer Bewegung ist wieder eine Bewegung. Alle Bewegungen bilden bezüglich Hintereinanderschaltung eine Gruppe.

Beweis. a) Sei $F = T \circ U$ eine Bewegung. Weil die orthogonale Transformation U und die Translation T bijektiv sind, ist auch ihre Hintereinanderschaltung F bijektiv.

b) Nach a) existiert $F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Weil F eine Bewegung ist, gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \| F(F^{-1}(\mathbf{x})) - F(F^{-1}(\mathbf{y})) \| = \| F^{-1}(\mathbf{x}) - F^{-1}(\mathbf{y}) \|,$$

also ist auch F^{-1} eine Bewegung. Ähnlich zeigt man, daß $F_2 \circ F_1$ den Abstand zweier Vektoren erhält, wenn F_1 und F_2 Bewegungen sind.

In der Schule behandelt man den zweidimensionalen Spezialfall der Bewegungsgruppe: Dreiecke in der Ebene, oder allgemeiner Polygone, heißen *kongruent*, wenn man sie durch eine Bewegung der Ebene ineinander überführen kann. Eine große Rolle spielt dort auch die Gruppe der *Ähnlichkeiten*. Eine Ähnlichkeitstransformation A setzt sich zusammen aus einer Bewegung $F = T \circ U$ und einer *Streckung* (oder Homothetie)

$$S : \mathbf{x} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}, \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

Auch die Ähnlichkeiten bilden eine Gruppe, sie enthält die Bewegungsgruppe als Untergruppe.

Die Bewegungsgruppe enthält wiederum eine Untergruppe, die auch eine wichtige Rolle spielt: die Gruppe der eigentlichen Bewegungen. Dabei ist eine eigentliche Bewegung der Ebene eine Bewegung, bei der man die Zeichenebene nicht umklappen muß. Allgemeiner ist eine Bewegung $T \circ U$ mit $U \in \mathbf{O(n)}$ eine *eigentliche Bewegung*, falls die Determinante $det(U) = 1$ positiv ist. Für die Gruppe der orthogonalen Transformationen mit positiver Determinante benutzt man auch die Abkürzung

$$\mathbf{SO(n)} := \{U \in \mathbf{O(n)} : det(U) = 1\}.$$

Diese Gruppe heißt *spezielle orthogonale Gruppe*.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO(n)} & \subset & \text{eigentliche Bewegungen} & \subset & \text{orientierungserhaltende Ähnlichkeiten} \\ \bigcap & & \bigcap & & \bigcap \\ \mathbf{O(n)} & \subset & \text{Bewegungsgruppe} & \subset & \text{Ähnlichkeitsgruppe} \end{array}$$

Jede Bewegung F läßt alle Gleichungen zwischen Vektoren unverändert, die aus den folgenden zwei Bausteinen bestehen:

- Affinkombinationen: Wenn
$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu = 1,$$
dann ist
$$F(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{a}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu F(\mathbf{a}_\nu).$$
Dies ist klar für lineare Abbildungen F. Ist aber F die Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + \mathbf{x}$, dann ist
$$F(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{a}_\nu) = \mathbf{t} + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{a}_\nu$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu F(\mathbf{a}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (\mathbf{t} + \mathbf{a}_\nu) = (\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu)\mathbf{t} + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{t} + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{a}_\nu.$$

- Skalarprodukte von Differenzen von Vektoren: Wenn F eine orthogonale Transformation ist, dann ist

$$(F(\mathbf{a}) - F(\mathbf{b}).F(\mathbf{c}) - F(\mathbf{d})) = (F(\mathbf{a} - \mathbf{b}).F(\mathbf{c} - \mathbf{d})) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}.\mathbf{c} - \mathbf{d}).$$

  Und für eine Translation F ist natürlich

$$F(\mathbf{a}) - F(\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Die folgenden geometrischen „Konstruktionen“ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind invariant gegenüber der Bewegungsgruppe der Ebene, und gehören - nach Felix Kleins Prinzip - deshalb zur euklidischen Geometrie:

Konstruktion von	zu gegebenen
Verbindungsgerade	zwei verschiedenen Punkten
Schnittpunkt	zwei verschiedenen, nicht parallelen Geraden
Lot	Punkt und Gerade
Mittelpunkt	zwei verschiedenen Punkten
Winkelhalbierenden	zwei verschiedenen, nicht parallelen Geraden

Das bedeutet, daß zu gegebenen Objekten (z.B. zu zwei verschiedenen Punkten) ein eindeutig bestimmtes Objekt in der Ebene (z.B. die Verbindungsgerade) existiert, und daß die Beziehung zwischen Ausgangsobjekten und konstruiertem Objekt sich unter einer Bewegung nicht ändert.

Bei den ersten vier, oben angegebenen Konstruktionen ist dies klar. So erhält man z.B. das Lot von einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ auf eine Gerade $L \subset \mathbb{R}^2$ als orthogonales Komplement $L^{\perp}(\mathbf{y})$, wo $\mathbf{y} \in L$ das Bild von $\mathbf{x}$ unter der Orthogonalprojektion auf L ist.

Nur bei der Winkelhalbierenden ist dies nicht so ganz klar, vor allem deswegen, weil wir den Winkel zwischen zwei Geraden nur auf dem Umweg über die transzendente cos–Funktion definieren können.

Wir wollen die Winkelhalbierende aber auch nicht über den halben Winkel definieren, sondern wie folgt: Seien $L, M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden mit Schnittpunkt $\mathbf{t}$. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ Vektoren gleicher Länge (z.B. Einheitsvektoren), derart, daß die Punkte $\mathbf{t} + \mathbf{a}$ und $\mathbf{t} + \mathbf{b}$ die beiden Geraden aufspannen:

$$\mathbf{t} + \mathbf{a} \in L, \quad \mathbf{t} + \mathbf{b} \in M.$$

Der Mittelpunkt der Strecke zwischen $\mathbf{t} + \mathbf{a}$ und $\mathbf{t} + \mathbf{b}$ ist dann $\mathbf{t} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$. Und die Verbindungsgerade von $\mathbf{t}$ mit diesem Mittelpunkt soll die Winkelhalbierende sein. Dies ist natürlich die Gerade $\mathbf{t} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

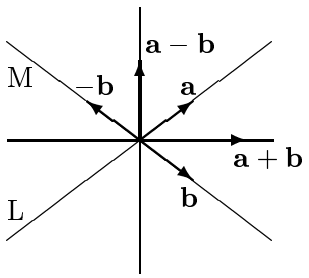
Damit ergeben sich aber sofort zwei Probleme:

a) Existenz: Die Verbindungsgerade existiert nur, wenn $\mathbf{t}$ nicht mit dem Mittelpunkt $\mathbf{t} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ zusammenfällt. Die Konstruktion geht also genau dann schief, wenn $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ ist. Dann fallen aber die beiden Geraden L und M zusammen. Wir können sagen, daß dann die Winkelhalbierende nicht existieren soll. Wir können aber auch den konstruktiveren Standpunkt einnehmen, daß sie dann das orthogonale Komplement $L^{\perp}(\mathbf{t})$ sein soll.

b) Eindeutigkeit: Der Vektor $-\mathbf{b}$ spannt dieselbe Gerade M durch $\mathbf{t}$ auf wie $\mathbf{b}$. Benutzen wir diesen Vektor, so wird die Winkelhalbierende die Verbindungsgerade von $\mathbf{t}$ mit $\mathbf{t} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})/2$. Wegen

$$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\right) = \frac{1}{4}\left(\parallel \mathbf{a} \parallel^2 -(\mathbf{a}.\mathbf{b}) + (\mathbf{b}.\mathbf{a}) - \parallel \mathbf{b} \parallel^2\right) = 0$$

stehen die beiden möglichen Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht. Wieder können wir zwei Standpunkte einnehmen. Entweder sagen wir: So ist es halt im Leben, zu zwei sich schneidenden Geraden gibt es immer zwei Winkelhalbierende. Oder wir sagen, etwas konstruktiver, die Winkelhalbierende ist eben nicht durch die beiden Geraden allein bestimmt, sondern auch durch die Auswahl der aufspannenden Vektoren, die einen *Winkelraum* zwischen den Geraden festlegen.



Behauptung: *Die Vereinigung beider Winkelhalbierenden* $\mathbf{t} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ *und* $\mathbf{t} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *ist der „geometrische Ort" aller Punkte* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$*, die von den beiden Geraden* L *und* M *gleichen Abstand haben.*

Beweis. Da die Aussage unter Bewegungen invariant ist, nehmen wir der Einfachheit halber $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ an. Der Abstand von $\mathbf{w}$ zu L ist der Abstand zur Orthogonalprojektion

$$\mathbf{w}_L = \frac{(\mathbf{w}.\mathbf{a})}{\parallel \mathbf{a} \parallel^2}\mathbf{a},$$

also (Pythagoras)

$$\parallel \mathbf{w} - \mathbf{w}_L \parallel^2 = \parallel \mathbf{w} \parallel^2 - \parallel \mathbf{w}_L \parallel^2 = \parallel \mathbf{w} \parallel^2 - \frac{(\mathbf{w}.\mathbf{a})^2}{\parallel \mathbf{a} \parallel^2}$$

und ähnlich für M. Der Vektor $\mathbf{w}$ hat denselben Abstand zu L und M, falls

$$(\mathbf{w}.\mathbf{a})^2 = (\mathbf{w}.\mathbf{b})^2, \qquad (\mathbf{w}.\mathbf{a}) = \pm(\mathbf{w}.\mathbf{b}), \qquad (\mathbf{w}.(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})) = 0.$$

Dies heißt, $\mathbf{w}$ liegt im orthogonalen Komplement der beiden Geraden, die durch die beiden Vektoren $\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ aufgespannt werden. Dies sind aber gerade die beiden Winkelhalbierenden. Und diese stehen aufeinander senkrecht. □

Aufgabe 1.10: Zeigen Sie:
a) Die Translationen bilden einen Normalteiler in der Gruppe aller Bewegungen.
b) Die eigentlichen Bewegungen bilden einen Normalteiler in der Gruppe aller Bewegungen.

Aufgabe 1.11: Bestimmen sie alle Bewegungen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F \circ F = id_{\mathbb{R}^2}$.

Aufgabe 1.12: Es sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ fest. Zeigen Sie: Die Menge aller Bewegungen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ ist eine zu $\mathbf{O}(2)$ isomorphe Gruppe.

Aufgabe 1.13: Zeigen Sie:
a) Jede eigentliche Bewegung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist entweder eine Translation oder eine Rotation um ein Zentrum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
b) Jede uneigentliche Bewegung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist entweder eine Spiegelung an einer Geraden oder eine Gleitspiegelung (= Spiegelung an einer Geraden gefolgt von Translation in Richtung der Spiegelungsgeraden).

1.4 Volumen, Orientierung, Fläche

Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ haben den Abstand $|y - x|$. Dies ist die Länge $|[x, y]|$ des Intervalls

$$[x, y] = \{r \in \mathbb{R} : \ x \leq r \leq y\},$$

allerdings nur, wenn $x \leq y$ ist. Sonst muß man nämlich das Intervall anders schreiben:

$$[y, x] = \{r \in \mathbb{R} : \ y \leq r \leq x\}.$$

Die Darstellung

$$\{r = (1 - t) \cdot x + t \cdot y : \ 0 \leq t \leq 1\}$$

ist dagegen unabhängig davon, ob $x \leq y$ oder $y \leq x$ ist. Genauso unabhängig davon ist der Abstand $|y - x|$.

Die Differenz (ohne Absolutstriche) $y - x$ hat ein Vorzeichen. Dieses Vorzeichen mißt, in welcher Richtung der Punkt

$$r = x + t \cdot (y - x) = (1 - t) \cdot x + t \cdot y, \quad t \in [0, 1]$$

dieses Intervall durchläuft. Ist $y - x > 0$, so läuft der Punkt r von links nach rechts, andernfalls von rechts nach links. Man nennt diese Durchlaufrichtung eine *Orientierung* des Intervalls und die Zahl $y - x$ die *orientierte Länge* des Intervalls.

Der orientierte Abstand bestimmt die Koeffizienten λ, μ einer Affinkombination

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda + \mu = 1,$$

im folgenden Sinn: Es ist

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = (\lambda - 1)\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} + (\mu - 1)\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Daraus folgt

$$|\lambda| = \frac{\| \mathbf{x} - \mathbf{b} \|}{\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|}, \quad |\mu| = \frac{\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \|}{\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|}.$$

Das Vorzeichen von λ ergibt sich daraus, ob die Strecken $\overline{\mathbf{xb}}$ und $\overline{\mathbf{ab}}$ gleichgerichtet sind oder nicht.

In der Analysis–Vorlesung verallgemeinert man die Länge eines eindimensionalen Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ auf das n–dimensionale Maß (Volumen) einer Menge im $\mathbb{R}^n$. Der Ausgangspunkt ist dabei, daß ein Quader

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, ..., a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

im $\mathbb{R}^n$ das n–dimensionale Volumen

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$$

hat, bzw. haben soll. Andere Mengen als Quader schöpft man irgendwie durch Quader aus, über deren Volumina man dann summiert. Falls diese Mengen krumme, oder auch nur schiefe, Ränder haben, geht das nicht anders als mit einem Grenzprozeß.

Der erste Mathematiker, der Volumina durch Grenzprozesse ausrechnete, war wohl Archimedes. Er tat dies, obwohl Grenzprozesse dem Wesen der griechischen Mathematik total fremd waren, und erst eineinhalb Jahrtausende später langsam hoffähig wurden, nachdem genügend Engel auf einer Nadelspitze getanzt hatten. Jedenfalls rechnete Archimedes die Fläche eines Kreises, und das Volumen einer Kugel mit einer Präzision aus, die allen praktischen Anforderungen genügte. Natürlich ist das euklidische Geometrie, uns führt dies aber zu weit. Wir wollen das Volumen krummliniger Figuren nicht behandeln. Aber das Volumen eines Parallelotops würden wir schon gerne berechnen.

Ein *Parallelotop* im $\mathbb{R}^n$ wird von n Vektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt, es ist die Menge

$$P(\mathbf{a}_1, ...\mathbf{a}_n) = \{\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n,\ 0 \leq \lambda_\nu \leq 1\}.$$

Wegen der schiefen Ränder ist es schwierig, das Volumen durch ein mehrfaches Integral auszurechnen. Es gibt noch zwei andere Methoden:

a) Das Cavalierische Prinzip (siehe z.B. Koecher): Man macht Induktion über die Dimension n. Mit dem Cavalierischen Prinzip zeigt man, daß das n–dimensionale Volumen $|P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|$ das Produkt aus dem $(n-1)$–dimensionalen Volumen $|P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{n-1})|$ mit dem Abstand des Punktes $\mathbf{a}_n$ von der Hyperebene ist, die von den $n-1$ Vektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{n-1}$ aufgespannt wird.

b) Man zeigt, daß das Volumen dieselben Eigenschaften wie der Absolutbetrag $|det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|$ der Determinante aus den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ hat.

Das Resultat ist immer das gleiche:

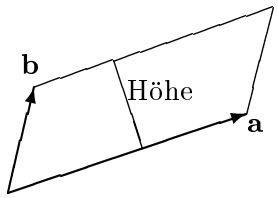
$$|P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)| = |det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|.$$

Beispiel: Das Parallelogramm im $\mathbb{R}^2$, das von zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannt wird, hat nach der Determinantenformel die Fläche

$$|det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Wenn man die Produktformel Grundseite $\times$ Höhe benutzt, erhält man

$$\begin{aligned}
\text{Grundseite} &= \| \mathbf{a} \| \\
\text{Höhe} &= \text{Abstand von } \mathbf{b} \text{ zur Geraden } \mathbb{R} \cdot \mathbf{a} \\
&= \| \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b}.\mathbf{a})}{\| \mathbf{a} \|^2} \mathbf{a} \| \qquad (1.2) \\
&= \sqrt{\| \mathbf{b} \|^2 - \frac{(\mathbf{b}.\mathbf{a})^2}{\| \mathbf{a} \|^2}} \qquad (1.2) \\
&= \| \mathbf{b} \| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{b}.\mathbf{a})^2}{\| \mathbf{b} \|^2 \| \mathbf{a} \|^2}} \\
\text{Fläche} &= \| \mathbf{a} \| \cdot \| \mathbf{b} \| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})}{\| \mathbf{a} \| \cdot \| \mathbf{b} \|} \right)^2}.
\end{aligned}$$



Beide Ergebnisse stimmen überein, dazu quadrieren wir:

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{a} \|^2 \cdot \| \mathbf{b} \|^2 \cdot \left(1 - \frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2}{\| \mathbf{a} \|^2 \cdot \| \mathbf{b} \|^2} \right) &= \| \mathbf{a} \|^2 \cdot \| \mathbf{b} \|^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
&= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.
\end{aligned}$$

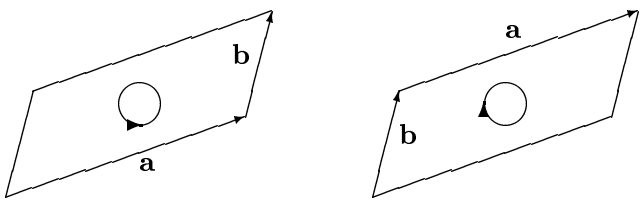
Natürlich müssen wir checken, daß das Volumen des Parallelotops ein Begriff der euklidischen Geometrie, d.h., unter Bewegungen invariant ist. Bei einer Translation ist das klar: Auch wenn der Anfangspunkt des Parallelotops nach einer Translation nicht mehr der Nullvektor ist, sondern irgend ein Verschiebungsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, bleiben die aufspannenden Vektoren doch die gleichen. Bei einer orthogonalen Transformation folgt das einfach aus dem Determinanten–Multipliktionssatz:

$$\begin{aligned}
U(P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)) &= P(U(\mathbf{a}_1), ..., U(\mathbf{a}_n)) \\
|P(U(\mathbf{a}_1), ..., U(\mathbf{a}_n))| &= |det(U(\mathbf{a}_1), ..., U(\mathbf{a}_n))| \\
&= |det(U \cdot (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n))| \\
&= |det(U)| \cdot |det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)| \\
&= |\pm 1| \cdot |P(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)|.
\end{aligned}$$

Jetzt wird es allerdings Zeit, sich einige Gedanken über die Absolutstriche am Volumen zu machen, genauer über die Rolle des Vorzeichens, das aus der Volumenformel $det(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$

kommt, wenn man diese Absolutstriche wegläßt. Wenn wir am Parallelogramm, das von den Vektoren **a** und **b** aufgespannt wird, die Reihenfolge der Vektoren vertauschen, ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$ $\qquad$ $det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) < 0$



positiv orientiert $\qquad$ negativ orientiert

Man interpretiert dies so, daß die Determinante (ohne Absolutstriche) ein *orientiertes Volumen* ist. Was das allerdings sein soll, ist schwer zu erklären. Im Eindimensionalen, bei einer Strecke, ist es die Durchlaufrichtung. Beim Parallelogramm ist es die Durchlaufrichtung des Randes. Die Orientierung eines n–dimensionalen Volumens ist die Orientierung seines Randes, der die Dimension $n-1$ hat. So kann man den Begriff der Orientierung in der Dimension n auf diesen Begriff in Dimension $n-1$ zurückführen.

Obwohl wir hier etwas im Unklaren lassen, was eine Orientierung wirklich ist, ist wohl trotzdem folgendes klar: Eine Translation T ändert das Vorzeichen der Determinante nicht, weil die aufspannenden Vektoren dieselben bleiben. Eine orthogonale Transformation U ändert das Vorzeichen, oder auch nicht, je nachdem ob $det(U) < 0$ oder > 0 ist (Determinanten-Multiplikations-Formel). Wir sehen: Transformationen $U \in \mathbf{SO}(\mathbf{n})$ erhalten die Orientierung, Transformationen $U \in \mathbf{O}(\mathbf{n})$, die nicht zur $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ gehören, tun dies nicht!

Nach diesem Exkurs, der hoffentlich zur Orientierung beigetragen hat, müssen wir noch einmal auf die Flächenformel für das Parallelogramm zurückkommen. Wir schreiben sie

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \| \mathbf{a} \| \cdot \| \mathbf{b} \| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{a}.\mathbf{b})}{\| \mathbf{a} \| \cdot \| \mathbf{b} \|} \right)^2}.$$

Wenn wir an die Definition von $cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ denken, erkennen wir unter der Wurzel den Ausdruck

$$1 - cos^2\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Jeder weiß:

$$\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = sin(\alpha),$$

nur, wie ist es mit dem Vorzeichen? Es stimmt! Wenn die Determinante $det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ positiv ist, dann ist der Winkel $\alpha = \angle(\mathbf{ab})$ mathematisch positiv orientiert. Wir können die Flächenformel für das Parallelogramm also schreiben:

$$F = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \| \mathbf{a} \| \cdot \| \mathbf{b} \| \cdot sin\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Diese Formel können wir auch auffassen als eine Definition von $sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$: Bis auf das Vorzeichen wird $sin(\alpha)$ festgelegt durch

$$sin^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha).$$

Oben haben wir ausgerechnet

$$det(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = \| \mathbf{a} \|^2 \cdot \| \mathbf{b} \|^2 \cdot (1 - cos^2\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})).$$

Und das Vorzeichen von $sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ wird festgelegt durch das Vorzeichen der Determinante $det(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Zu bemerken ist, daß diese Methode, den Sinus zu definieren, nur in der Ebene funktioniert. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ hat eine natürliche Orientierung (die mathematisch positive). Diese vererbt sich auf Winkel zwischen zwei Vektoren in der Ebene. Die Ebene, welche zwei Vektoren $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$, aufspannen hat keine solche natürliche Orientierung. Das äußert sich auch darin, daß $det(\mathbf{a},\mathbf{b})$ für Vektoren im $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, nicht sinnvoll zu definieren ist, jedenfalls nicht mit Vorzeichen.

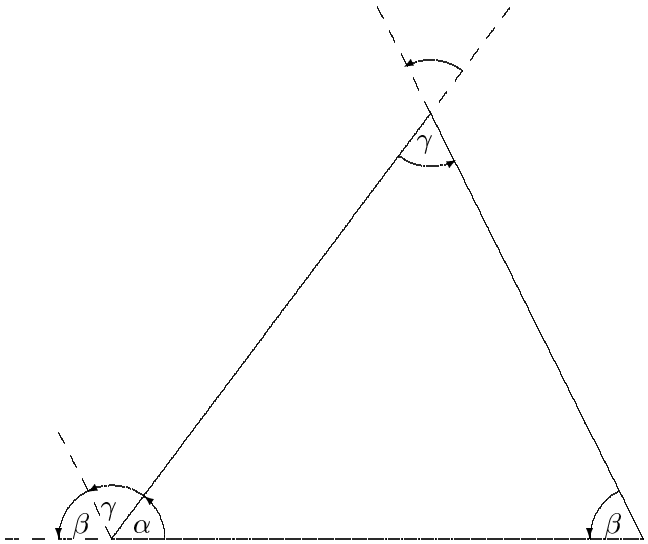
Orientierte Winkel kann man addieren. Und dann kann man den Satz beweisen:

Satz (Winkelsumme im Dreieck): *Die drei Winkel in einem Dreieck addieren sich zu* $\pi = 180^0$.

Beweis. Ein gestreckter Winkel ist ein Winkel ω zwischen einem Vektor $\mathbf{a}$ und dem Vektor $-\mathbf{a}$. Deswegen ist

$$cos(\omega) = -1, \qquad sin(\omega) = 0.$$

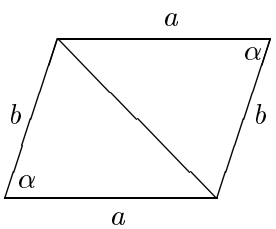
Daraus folgt $\omega = \pi$ für den gestreckten Winkel.
Winkel zwischen parallelen, gleichgerichteten Vektoren sind gleich. Wendet man dies auf die nebenstehende Figur an, so folgt die Behauptung. □



Ein Parallelogramm setzt sich zusammen aus zwei kongruenten Dreiecken mit den Seitenlängen $a = \| \mathbf{a} \|$ und $b = \| \mathbf{b} \|$. Dies führt auf die Formel für die Fläche des Dreiecks

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\alpha),$$

wie sie aus der Schule bekannt ist.



Natürlich ist eine Fläche in der Schule immer positiv, nicht orientiert. Vom Vorzeichen des Sinus in dieser Formel sieht man meist ab.

Wir haben bisher stillschweigend eine Ecke des Dreiecks, oder des Parallelogramms in den Nullpunkt gelegt. Dadurch ist beim Dreieck eine Ecke ausgezeichnet. Man braucht das nicht zu tun. Es gibt für die orientierte Fläche eines Dreiecks $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ im $\mathbb{R}^2$ die folgende, in Bezug auf die Ecken symmetrische Formel

$$F = \frac{1}{2} det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

in Form einer 3×3-Determinante. Zieht man eine Spalte der Determinante, etwa die erste, von den anderen ab, so berechnet man sie zu

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{b}-\mathbf{a} & \mathbf{c}-\mathbf{a} \end{pmatrix} = det\,(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})\,.$$

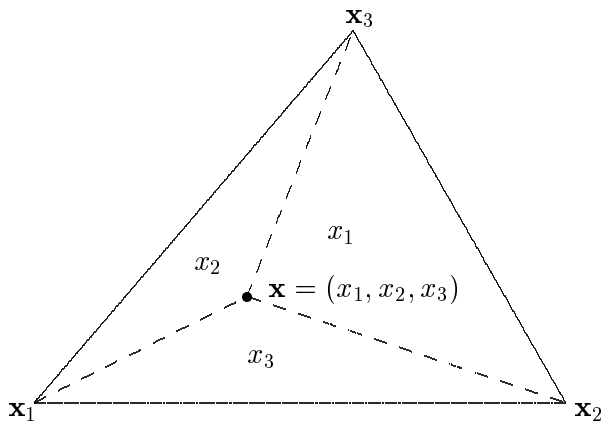
Das ist die alte Formel, wenn man $\mathbf{a}$ als Nullpunkt nimmt.

Für drei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ im $\mathbb{R}^2$ möchte ich jetzt abkürzen

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] := det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix},$$

das ist also die doppelte Fläche des Dreiecks, dessen Ecken diese drei Vektoren sind. Ich möchte nämlich damit die Koeffizienten einer Affinkombination

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{x}_1 + x_2\mathbf{x}_2 + x_3\mathbf{x}_3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$



interpretieren. Dazu bedarf es nur der Rechnung

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] &= det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1\mathbf{x}_1 + x_2\mathbf{x}_2 + x_3\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_1\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]. \end{aligned}$$

Wir sehen

$$x_1 = \frac{[\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]}{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]} = \frac{F_{\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)}}{F_{\Delta(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)}}$$

ist die Fläche des von $\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ aufgespannten Dreiecks ausgeteilt durch die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Und das gilt sogar mit Vorzeichen!

Ich möchte hier noch eine andere elementare Formel für die Dreiecksfläche angeben, weil sie sich sehr leicht auf die Formel

$$4 \cdot F_\Delta^2 = \| \mathbf{a} \|^2 \cdot \| \mathbf{b} \|^2 \, sin^2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

zurückführen läßt. Es ist also eine Formel für das Quadrat der Dreiecksfläche, d.h. für die *nicht-orientierte* Fläche.

Dazu geben wir uns eine Dreieck in der Ebene durch seine drei Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vor und führen die folgenden Konventionen ein:

- Die Länge einer Dreiecksseite bezeichnen wir mit dem Kleinbuchstaben, der zur gegenüberliegenden Ecke gehört, also

$$a = \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \|, \; b = \| \mathbf{c} - \mathbf{a} \|, \; a = \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| .$$

- Die Winkel an den Dreiecksecken bezeichnen wir wie üblich mit den griechischen Kleinbuchstaben, also sind die Winkel α, β, γ der Reihe nach die Winkel bei $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

- Den halben Dreiecksumfang bezeichnen wir wie üblich mit s, also

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Satz (Heronische Formel): *Das Quadrat der Dreiecksfläche ist*

$$\boxed{F_\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).}$$

Beweis. Wir wissen

$$F_\Delta^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot sin^2\gamma = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - cos^2\gamma).$$

Nun gilt der sogenannte Cosinus-Satz

$$c^2 = \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|^2 = \| (\mathbf{a} - \mathbf{c}) - (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \|^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot cos(\gamma),$$

oder

$$a \cdot b \cdot cos\gamma = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - cos^2\gamma) &= a^2 \cdot b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) \\ &= \frac{1}{4}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) \\ &= \frac{1}{4}(-a^2 + (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= 4 \cdot s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.14: Für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ werde definiert: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := a_1b_2 - a_2b_1$. Zeigen sie

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}].$$

Aufgabe 1.15: Die drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ seien nicht kollinear, und die Punkte $\mathbf{a}', \mathbf{b}'\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^2$ seien gegeben als Affinkombinationen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b} + \nu_1\mathbf{c}, \\ \mathbf{b}' &= \lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b} + \nu_2\mathbf{c}, \\ \mathbf{c}' &= \lambda_3\mathbf{a} + \mu_3\mathbf{b} + \nu_3\mathbf{c} \end{aligned}$$

mit $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie

$$\frac{F_{\Delta(\mathbf{a}', \mathbf{b}'\mathbf{c}')}}{F_{\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}} = \left| det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Aufgabe 1.16: Zeigen Sie: Ein Dreieck wird durch jede Seitenhalbierende in zwei Teildreiecke gleicher Fläche zerlegt.

Aufgabe 1.17: Zeigen Sie: Die Fläche eines Polygons im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ ist

$$\frac{1}{2} \left| [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + ... + [\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n] + [\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1] \right|.$$

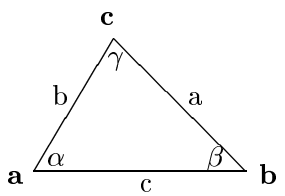
Aufgabe 1.18: Zeigen Sie: Für die Fläche F des Dreiecks mit den Seiten a, b, c gilt

$$F^2 = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Dreiecksgeometrie

Ein Dreieck in der Ebene $\mathbb{R}^2$ wird durch drei Punkte („Ecken“) gegeben. Üblicherweise bezeichnet man diese Punkte mit A, B und C, also nicht mit Kleinbuchstaben, so wie wir Vektoren hier bezeichnen. Ich möchte aber unsere Bezeichnung beibehalten und die Ecken eines Dreiecks meist $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nennen. Wir wollen stets annehmen, daß ein Dreieck nicht entartet ist, d.h., daß die drei Ecken nicht auf einer Geraden liegen (nicht „kollinear“ sind). Die Strecken zwischen diesen Ecken, die Dreiecksseiten, bezeichnet man traditionell mit

$$a = \overline{\mathbf{bc}}, \quad b = \overline{\mathbf{ca}}, \quad c = \overline{\mathbf{ab}}.$$



Das ist alles klar. Was das Dreieck selbst ist, darüber könnte man verschiedener Meinung sein: Man kann darunter die Menge der drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ selbst verstehen, oder die Menge aller affinen Konvexkombinationen

$$\{\mathbf{x} = \lambda A + \mu B + \nu C : \ \lambda + \mu + \nu = 1, \ \lambda, \mu, \nu \geq 0\}.$$

Wenn ich dies meine, nenne ich es meistens das „Innere“ des Dreiecks.

Man kann damit auch die Vereinigung der drei Geraden meinen, welche von den drei verschiedenen Paaren von Ecken aufgespannt wird. Ich glaube, daß es das ist, was ich unter einem Dreieck verstehe.

Euklidische Dreiecksgeometrie ist die Beschreibung aller Eigenschaften eines Dreiecks, die sich bei Bewegungen nicht ändern. Das sind allerdings weniger Eigenschaften der drei Ecken und der drei Seiten, aus denen das Dreieck selbst besteht, sondern es handelt sich darum, sogenannte „merkwürdige“ Punkte und Linien eines Dreiecks $\mathbf{abc}$ zu konstruieren. Das sind Punkte $\mathbf{p}$ oder Geraden, bzw. Strecken l, die unter Bewegungen invariant sind. D.h., für jede Bewegung F der Ebene ist $F(\mathbf{p})$, bzw $F(l)$ der entsprechende Punkt, bzw. die entsprechende Gerade oder Linie des Dreiecks $F(\mathbf{a})F(\mathbf{b})F(\mathbf{c})$.

In der Schule lernt man die einfachsten dieser merkwürdigen Linien kennen. Es sind die Tripel der

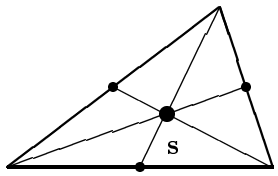
- Seitenhalbierenden: Verbindungsgeraden einer Dreiecksecke mit dem Mittelpunkt der gegenüber liegenden Seite.
- Winkelhalbierenden: Halbierende des Winkelraums zwischen zwei Dreiecksseiten, der durch das Dreieck festgelegt ist.
- Mittelsenkrechten: Lote auf die Dreiecksseiten in deren Mittelpunkten.

- Höhen: Lote auf die Dreiecksseiten aus den gegenüberliegenden Ecken.

In der Schule lernt man auch, daß sich diese Tripel von merkwürdigen Linien des Dreiecks in jeweils einem (merkwürdigen) Punkt schneiden. Wir wollen dies mit den Mitteln der Vektorrechnung beweisen.

Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierende durch die Ecke $\mathbf{a}$ ist die Gerade, aufgespannt von $\mathbf{a}$ und dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$ der Seite a. Auf ihr liegen die Punkte

$$\lambda\mathbf{a} + \frac{1-\lambda}{2}\mathbf{b} + \frac{1-\lambda}{2}\mathbf{c}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Für $\lambda = 1/3$ ist dies insbesondere der Punkt

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}.$$

Dieser Punkt ist eine Affinkombination der Dreiecks-Ecken, dessen Koeffizienten symmetrisch in Bezug auf Vertauschung der Ecken sind. Also liegt er auch auf der Seitenhalbierenden durch die Ecken $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.

Der Punkt $\mathbf{s}$ heißt Schwerpunkt des Dreiecks, weil man in der Analysis oder in der Mechanik zeigt, daß er der Schwerpunkt ist. Dazu muß man sich das Dreieck (-sinnere) aus dünnem, homogenem Blech vorstellen, und den Schwerpunkt seiner Masse ausrechnen.

Winkelhalbierende: Die beiden Winkelhalbierenden zu den Dreiecksseiten c und a sind zwei Geraden durch den Punkt $\mathbf{b}$. Auf ihnen liegen die Punkte, welche zu beiden Seiten denselben Abstand haben. Ebenso haben die Punkte auf den beiden Winkelhalbierenden durch $\mathbf{c}$ denselben Abstand zu den Dreiecksseiten a und b. Ein Schnittpunkt $\mathbf{p}$ einer Winkelhalbierenden durch $\mathbf{b}$ und einer Winkelhalbierenden durch $\mathbf{c}$ hat dann auch von den Seiten b und c denselben Abstand, liegt also auf einer Winkelhalbierenden durch $\mathbf{a}$. Nur gibt es leider zwei Winkelhalbierende durch $\mathbf{b}$ und ebenso zwei Winkelhalbierende durch $\mathbf{c}$, also insgesamt vier derartige Schnittpunkte. Aber nur jeweils eine der Winkelhalbierenden liegt in dem Winkelraum, zu dem das Innere des Dreiecks gehört, und der Schnittpunkt dieser beiden ist der Schnittpunkt $\mathbf{w}$ der Winkelhalbierenden im Dreieck.

Dieser Beweis ging ganz ohne Rechnung. Aber man kann auch einen rechnerischen Beweis geben, ganz ähnlich wie für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, und bekommt dann auch eine Formel für $\mathbf{w}$:

Die Winkelhalbierende durch die Ecke $\mathbf{a}$ ins Innere des Dreiecks hat den Richtungsvektor

$$\frac{1}{c}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \frac{1}{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) \sim b\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + c\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Auf ihr liegen also alle Punkte

$$\mathbf{a} + t\cdot[b\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + c\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})] = (1-t(b+c))\cdot\mathbf{a} + tb\cdot\mathbf{b} + tc\cdot\mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere für

$$t := \frac{1}{a+b+c}$$

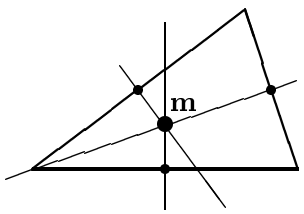
findet man den Punkt

$$\frac{1}{a+b+c}[(a+b+c-b-c)\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}+c\cdot\mathbf{c}] = \frac{1}{a+b+c}(a\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}+c\cdot\mathbf{c}).$$

Dieser Punkt ist symmetrisch in Bezug auf die verwendete Notation. Also liegt er auch auf den beiden anderen Winkelhalbierenden. Es folgt

$$\mathbf{w} = \frac{1}{a+b+c}(a\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}+c\cdot\mathbf{c}).$$

Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte auf der Seite a hat die Gleichung



$$(\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0,$$

anders geschrieben

$$(\mathbf{x}.\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}.\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\parallel\mathbf{b}\parallel^2 - \parallel\mathbf{c}\parallel^2).$$

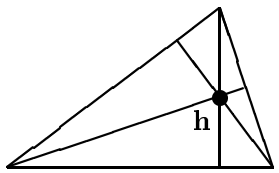
Analog erhält man die Gleichungen der beiden anderen Mittelsenkrechten. Schreibt man diese drei Gleichungen untereinander

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}.\mathbf{b}-\mathbf{c}) &= \frac{1}{2}(\parallel\mathbf{b}\parallel^2 - \parallel\mathbf{c}\parallel^2)\\ (\mathbf{x}.\mathbf{c}-\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}(\parallel\mathbf{c}\parallel^2 - \parallel\mathbf{a}\parallel^2)\\ (\mathbf{x}.\mathbf{a}-\mathbf{b}) &= \frac{1}{2}(\parallel\mathbf{a}\parallel^2 - \parallel\mathbf{b}\parallel^2),\end{aligned}$$

so sieht man, daß die Summe aller drei Gleichungen identisch $= 0$ ist. Daraus folgt: ein Punkt $\mathbf{x}$, der zwei dieser Gleichungen genügt, erfüllt auch die dritte. Anders ausgedrückt: der Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten liegt auch auf der dritten. □

Den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten bezeichnen wir mit $\mathbf{m}$.

Höhen: Die Gleichung der Höhe durch die Ecke $\mathbf{a}$ ist



$$(\mathbf{x}-\mathbf{a}.\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$$

oder

$$(\mathbf{x}.\mathbf{b}-\mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{b}) - (\mathbf{a}.\mathbf{c}).$$

Schreibt man die Gleichungen der drei Höhen untereinander

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}.\mathbf{b}-\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}.\mathbf{b})-(\mathbf{a}.\mathbf{c})\\ (\mathbf{x}.\mathbf{c}-\mathbf{a}) &= (\mathbf{b}.\mathbf{c})-(\mathbf{b}.\mathbf{a})\\ (\mathbf{x}.\mathbf{a}-\mathbf{b}) &= (\mathbf{c}.\mathbf{a})-(\mathbf{c}.\mathbf{b}),\end{aligned}$$

so sieht man wieder, daß die Summe dieser drei Gleichungen identisch $= 0$ ist. Und der Beweis geht weiter, wie bei den Mittelsenkrechten. □

Den Schnittpunkt der Höhen bezeichnen wir mit $\mathbf{h}$.

Der Beweis liefert wieder keine Formel für den Höhenschnittpunkt $\mathbf{h}$ selbst. Aber es gibt eine einfache Formel dafür, welche die Tangenswerte der Dreieckswinkel benützt: Seien etwa c_a und c_b die Abschnitte, in welche der Fußpunkt der Höhe h_c die Seite c teilt. Dann ist

$$tang(\alpha) = \frac{h_c}{c_a}, \quad tang(\beta) = \frac{h_c}{c_b}$$

und

$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{tang(\beta)}{tang(\alpha)}, \quad c_a + c_b = c.$$

Deswegen ist der Höhenfußpunkt auf der Seite c

$$\mathbf{h}_c = \frac{1}{tang(\alpha)+tang(\beta)}(tang(\alpha)\mathbf{a} + tang(\beta)\mathbf{b}).$$

(Diese Formel gilt auch, wenn das Dreieck nicht spitzwinklig, und einer der Tangens-Werte negativ ist.) Die Höhe durch $\mathbf{c}$ ist dann also die Gerade

$$\frac{t}{tang(\alpha)+tang(\beta)}(tang(\alpha)\mathbf{a} + tang(\beta)\mathbf{b}) + (1-t)\cdot\mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere für den Parameter

$$t := \frac{tang(\alpha)+tang(\beta)}{tang(\alpha)+tang(\beta)+tang(\gamma)}$$

ist

$$1-t = \frac{tang(\gamma)}{tang(\alpha)+tang(\beta)+tang(\gamma)}$$

und der zugehörige Punkt

$$\frac{1}{tang(\alpha)+tang(\beta)+tang(\gamma)}\cdot(tang(\alpha)\mathbf{a} + tang(\beta)\mathbf{b} + tang(\gamma)\mathbf{c})$$

liegt auf der Höhe durch $\mathbf{c}$. Wieder aus Symmetriegründen liegt er dann auch auf den Höhen durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Es folgt

$$\mathbf{h} = \frac{1}{tang(\alpha)+tang(\beta)+tang(\gamma)}\cdot(tang(\alpha)\mathbf{a} + tang(\beta)\mathbf{b} + tang(\gamma)\mathbf{c}).$$

Satz von Euler: *Für die Schnittpunkte der Höhen, Mittelsenkrechten und Seitenhalbierenden gilt*

$$\mathbf{h} + 2\mathbf{m} = 3\mathbf{s}.$$

Bemerkung: Die behauptete Gleichung können wir als Affinkombination

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}\mathbf{h} + \frac{2}{3}\mathbf{m}$$

schreiben. Sie ist deswegen unter Bewegungen invariant. Sie zeigt insbesondere daß die drei Punkte $\mathbf{h}$, $\mathbf{m}$ und $\mathbf{s}$ auf einer Geraden liegen, der sogenannten *Euler-Geraden.*

Beweis des Satzes. Die Abstände von $\mathbf{m}$ zu den drei Ecken sind gleich:

$$\| \mathbf{m} - \mathbf{a} \| = \| \mathbf{m} - \mathbf{b} \| = \| \mathbf{m} - \mathbf{c} \| .$$

Die Höhe durch $\mathbf{c}$ hat die Geradengleichung

$$((\mathbf{x} - \mathbf{c}).(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = 0.$$

Der Punkt

$$\mathbf{p} := 3\mathbf{s} - 2\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{m}$$

erfüllt diese Gleichung:

$$((\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{m} - \mathbf{c}).(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = ((\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{m}).(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \| \mathbf{b} \|^2 - \| \mathbf{a} \|^2 - 2(\mathbf{m}.(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = 0,$$

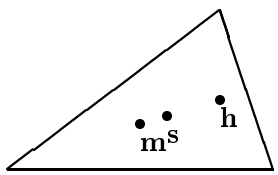
denn

$$\begin{aligned} \| \mathbf{m} - \mathbf{b} \|^2 &= \| \mathbf{m} - \mathbf{a} \|^2, \\ \| \mathbf{m} \|^2 - 2(\mathbf{m}.\mathbf{b}) + \| \mathbf{b} \|^2 &= \| \mathbf{m} \|^2 - 2(\mathbf{m}.\mathbf{a}) + \| \mathbf{a} \|^2, \\ \| \mathbf{b} \|^2 - \| \mathbf{a} \|^2 &= 2(\mathbf{m}.(\mathbf{b} - \mathbf{a})). \end{aligned}$$

Also liegt $\mathbf{p}$ auf der Höhe durch $\mathbf{c}$, und ebenso liegt dieser Punkt auf den anderen Höhen. Deswegen ist $\mathbf{p} = \mathbf{h}$ der Höhenschnittpunkt, und wir haben

$$\mathbf{h} = 3\mathbf{s} - 2\mathbf{m}$$

bewiesen. □



Mit der Eulergleichung können wir schließlich noch $\mathbf{m}$ als Affinkombination der Dreiecksecken schreiben. Und weil die Formel sonst nicht in eine Zeile paßt, kürzen wir ab:

$$t_a := tang(\alpha), \quad t_b := tang(\beta), \quad t_c := tang(\gamma).$$

Dann wird also

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{3}{2}\cdot\mathbf{s}-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{h}\\ &= \frac{1}{2}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\frac{1}{2(t_a+t_b+t_c)}\cdot(t_a\mathbf{a}+t_b\mathbf{b}+t_c\mathbf{c})\\ &= \frac{1}{2(t_a+t_b+t_c)}\cdot((t_b+t_c)\cdot\mathbf{a}+(t_a+t_c)\cdot\mathbf{b}+(t_a+t_b)\cdot\mathbf{c}).\end{aligned}$$

Fassen wir unsere Formeln für die Schnittpunkte der vier Sorten merkwürdiger Linien am Dreieck zusammen:

Seitenhalbierende	$\mathbf{s}$	$\frac{1}{3}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$
Winkelhalbierende	$\mathbf{w}$	$\frac{1}{a+b+c}\cdot(a\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}+c\cdot\mathbf{c})$
Höhen	$\mathbf{h}$	$\frac{1}{t_a+t_b+t_c}\cdot(t_a\cdot\mathbf{a}+t_b\cdot\mathbf{b}+t_c\cdot\mathbf{c})$
Mittelsenkrechte	$\mathbf{m}$	$\frac{1}{2\cdot(t_a+t_b+t_c)}\cdot((t_b+t_c)\cdot\mathbf{a}+(t_a+t_c)\cdot\mathbf{b}+(t_a+t_b)\cdot\mathbf{c}).$

Aufgabe 1.19: Zeigen Sie, daß für ein Dreieck mit den Winkeln α,β,γ gilt:

$$tang(\alpha)+tang(\beta)+tang(\gamma)=tang(\alpha)\cdot tang(\beta)\cdot tang(\gamma).$$

Aufgabe 1.20 (Satz von Stewart): Auf der Seite c des Dreiecks **abc** sei ein Punkt **x** fest gehalten. Weiter sei

$$m:=\parallel\mathbf{a}-\mathbf{x}\parallel,\quad n:=\parallel\mathbf{b}-\mathbf{x}\parallel,\quad p:=\parallel\mathbf{c}-\mathbf{x}\parallel.$$

Zeigen Sie

$$c\cdot(p^2+mn)=a^2\cdot m+b^2\cdot n.$$

Aufgabe 1.21 (Mittendreieck): Es seien

$$\mathbf{a}':=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),\quad \mathbf{b}':=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}),\quad \mathbf{c}':=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

die Seitenmitten des Dreiecks **abc**. Zeigen Sie

a) der Schwerpunkt $\mathbf{s}'$ des Dreiecks $\mathbf{a}'\mathbf{b}\mathbf{c}'$ stimmt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks **abc** überein;

b) der Höhenschnittpunkt $\mathbf{h}'$ des Dreiecks $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ stimmt mit dem Schnittpunkt $\mathbf{m}$ der Mittelsenkrechten im Dreieck $\mathbf{abc}$ überein;

c) die Eulergeraden der Dreiecke $\mathbf{abc}$ und $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ sind gleich.

Aufgabe 1.22: Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stewart die Länge $\| \mathbf{a} - \mathbf{a}' \|$ der Seitenhalbierenden durch $\mathbf{a}$ als Funktion der Dreiecksseiten a, b und c.

Aufgabe 1.23 (Nagel-Punkt): Für das Dreieck $\mathbf{abc}$ mit den Seiten a, b, c werde

$$s := \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$$

gesetzt. Zeigen Sie:

a) Der Punkt

$$\mathbf{n}_a := \frac{s-b}{a}\mathbf{b} + \frac{s-c}{a}\mathbf{c}$$

halbiert den Dreiecksumfang von $\mathbf{a}$ aus gerechnet, d.h.

$$\| \mathbf{n}_a - \mathbf{b} \| + c = \| \mathbf{n}_a - \mathbf{c} \| + b = s.$$

b) Die Punkte $\mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c$ seien analog efiniert. Dann treffen sich die drei Geraden $\mathbf{an}_a$, $\mathbf{bn}_b$ und $\mathbf{cn}_c$ im Nagel-Punkt

$$\mathbf{n} := \frac{1}{s} \cdot ((s-a) \cdot \mathbf{a} + (s-b) \cdot \mathbf{b} + (s-c) \cdot \mathbf{c}).$$

Aufgabe 1.24: Zeigen Sie: Die Winkelhalbierende durch die Ecke $\mathbf{a}$ hat die Länge

$$\sqrt{bc \cdot \left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}.$$

1.6 Kreisgeometrie

Ein *Kreis* in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $\mathbf{m}$ vom Radius r ist der geometrische Ort aller Punkte $\mathbf{x}$, die von $\mathbf{m}$ den Abstand r haben. Seine Gleichung ist $\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| = r$. Wenn wir diese Gleichung quadrieren, ändert sich an ihren reellen Lösungen nichts, aber die häßliche Wurzel bei $\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|$ verschwindet. Die *Kreisgleichung* nimmt dann die bekannte Form an:

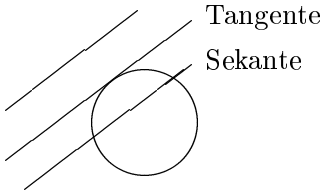
$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Den Schnitt eines solchen Kreises mit einer Geraden L berechnet man am besten, wenn die Gerade explizit gegeben ist: $L: \mathbf{x} = \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b}$. Man erhält dann die quadratische Gleichung

$$\| \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 = s^2 \| \mathbf{b} \|^2 + 2s \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{m}).\mathbf{b}) + \| \mathbf{a} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$((\mathbf{a}-\mathbf{m}).\mathbf{b})^2 - (\parallel \mathbf{a}-\mathbf{m} \parallel^2 - r^2)\cdot \parallel \mathbf{b} \parallel^2 .$$



Ist die Diskriminante > 0, so hat die quadratische Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen $s_{1,2}$.

Diese Parameterwerte bestimmen dann zwei Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis. Ist die Diskriminante negativ, dann hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung, die Gerade schneidet den Kreis nicht. Es bleibt noch der Fall, wenn die Diskriminante verschwindet, und die Gerade nur einen Schnittpunkt mit dem Kreis hat. Solche Geraden heißen *Tangenten* an den Kreis.

Wir wollen diese Bedingung auswerten, aber zuvor der Übersichtlichkeit halber annehmen, daß

- der Kreismittelpunkt $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ ist,
- der Richtungsvektor $\mathbf{b}$ die Länge $\parallel \mathbf{b} \parallel = 1$ hat. Da $\mathbf{b}$ und $-\mathbf{b}$ dieselbe Gerade aufspannen, können wir außerdem o.B.d.A. annehmen $(\mathbf{a}.\mathbf{b}) \leq 0$.

Die Schnittpunktsgleichung wird dann

$$s^2 + 2(\mathbf{a}.\mathbf{b}) \cdot s + \parallel \mathbf{a} \parallel^2 - r^2 = 0.$$

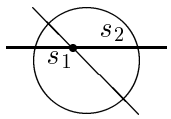
Diese Gleichung ist normiert, ihre beiden Wurzeln $s_{1,2}$ haben das Produkt (Satz von Vieta)

$$s_1 \cdot s_2 = \parallel \mathbf{a} \parallel^2 - r^2.$$

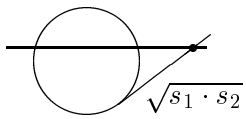
Die rechte Seite ist unabhängig vom Richtungsvektor $\mathbf{b}$ für alle Geraden durch $\mathbf{a}$ konstant. Da $\mathbf{b}$ normiert ist, sind s_1 und s_2 die Entfernungen von $\mathbf{a}$ zu den beiden Schnittpunkten der Geraden mit dem Kreis. Dies ist der

Sekantensatz: *Der Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ sei fest gewählt. Für jede Gerade L durch $\mathbf{a}$, die den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet, ist das Produkt der Entfernungen von $\mathbf{a}$ zu diesen beiden Punkten konstant gleich*

$$\parallel \mathbf{a} \parallel^2 - r^2.$$



Ist L eine Tangente, so wird dieses Produkt das Quadrat t^2 des Tangentenabschnitts t:

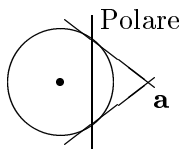


$$t = \sqrt{\parallel \mathbf{a} \parallel^2 - r^2} = -(\mathbf{a}.\mathbf{b}).$$

Für jeden Berührpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\cdot\mathbf{b}$ einer Tangente durch $\mathbf{a}$ an den Kreis ist das Skalarprodukt

$$(\mathbf{a}.\mathbf{x}) = (\mathbf{a}.(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b})) = \parallel \mathbf{a} \parallel^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = r^2.$$

Für $\mathbf{x}$ ist dies die Gleichung einer Geraden, die senkrecht auf der Verbindungslinie von $\mathbf{a}$ mit dem Kreismittelpunkt steht. Diese Gerade $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{a}.\mathbf{x}) = r^2\}$ heißt die *Polare* des Punktes $\mathbf{a}$ in Bezug auf den Kreis.
Auf ihr liegen die Berührpunkte der Tangenten durch $\mathbf{a}$. Damit gibt es höchstens zwei Berührpunkte, und also höchstens zwei Tangenten. Durch einen Punkt $\mathbf{a}$ im Innern des Kreises gibt es keine Tangente. Die beiden Tangenten fallen genau dann zusammen, wenn $\| \mathbf{a} \| = r$, d.h., wenn der Punkt $\mathbf{a}$ auf dem Kreis liegt. Die Polare ist dann die Tangente in diesem Punkt.



Es gibt noch sehr viel schöne Geometrie mit Kreisen, wirklich wunderschöne Sachen. Man kann ganze Vorlesungen darüber halten. Ich möchte es hiermit bewenden lassen. Ich wollte nur ein paar Tatsachen aufzählen, die uns bei Behandlung der Kegelschnitte in anderer Form wieder begegnen werden. Stattdessen wende ich mich den Kreisen am Dreieck zu.

Aufgabe 1.25: a) Ein Viereck **abcd** heißt Sehnen-Viereck, wenn seine Ecken (in dieser Reihenfolge) auf einem Kreis liegen. Zeigen Sie für die Innenwinkel eines Sehnenvierecks

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi.$$

b) Ein Viereck mit den Seiten a, b, c und d heißt Tangentenviereck, wenn seine Seiten (in dieser Reihenfolge) einen Kreis berühren. Zeigen Sie für ein Tangentenviereck

$$a + c = b + d.$$

Aufgabe 1.26: Es sei $L \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $\mathbf{a} \in L$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \notin L$. Zeigen Sie: Es gibt genau einen Kreis durch $\mathbf{b}$, der L in $\mathbf{a}$ berührt.

Aufgabe 1.27 (Satz von Miquel): Auf den Seiten eines Dreiecks **abc** seien Punkte $\mathbf{a}' \in \overline{\mathbf{bc}}$, $\mathbf{b}' \in \overline{\mathbf{ca}}$ und $\mathbf{c}' \in \overline{\mathbf{ab}}$ gewählt, keiner davon eine Dreiecks-Ecke. Es seien K_a der Kreis durch $\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}'$, weiter K_b der Kreis durch $\mathbf{b}, \mathbf{c}', \mathbf{a}'$ und K_c der Kreis durch $\mathbf{c}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$. Zeigen Sie: K_a, K_b und K_c schneiden sich in einem Punkt. (Hinweis: Benutzen Sie die Winkelsumme im Dreieck und den Satz vom Sehnenviereck.)

Aufgabe 1.28: Im $\mathbb{R}^2$ seien der Kreis K mit der Gleichung

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$$

und der Punkt $\mathbf{p} = (6, 6)$ gegeben. Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten von $\mathbf{p}$ an den Kreis K und die Gleichung der Polare von $\mathbf{p}$ bezüglich K.

Aufgabe 1.29: Zeigen Sie: Zwei Kreise

$$\begin{aligned} K_1: &\quad x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ K_2: &\quad x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}$$

berühren sich genau dann, wenn

$$4(c_1 - a_1^2 - b_1^2)(c_2 - a_2^2 - b_2^2) = (c_1 + c_2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2)^2.$$

Aufgabe 1.30: Es seien K und K' zwei konzentrische Kreise mit den Radien $0 < r < r'$. Berechnen Sie die Länge einer Sehne von K', welche K berührt.

Aufgabe 1.31: Im Dreieck **abc** teilt der Höhenschnittpunkt **h** jede Höhe zwischen Ecke und Fußpunkt in zwei Teile. Zeigen Sie: Das Produkt dieser Höhenabschnitte ist für alle drei Höhen gleich. (Hinweis: Benutzen Sie die Kreise, deren Durchmesser die Dreiecksseiten sind und verwenden Sie den Sekantensatz.)

Aufgabe 1.32: Mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ eines Dreiecks als Mittelpunkten werden drei Kreise gezeichnet. Zeigen Sie: Wenn sich diese drei Kreise von außen berühren, dann haben sie die Radien $s - a$, $s - b$ und $s - c$.

1.7 Kreise am Dreieck

Gegeben seien zwei Punkte $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, die zu **a** und **b** den gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ (\mathbf{x}.(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \frac{1}{2}(\| \mathbf{b} \|^2 - \| \mathbf{a} \|^2)\}$$

auf der Strecke $\overline{\mathbf{ab}}$.

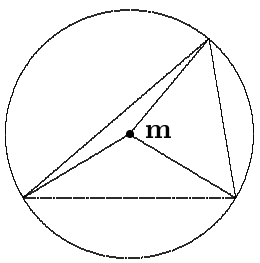
In der Tat, wenn die Abstände gleich sind

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{b} \|,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} - \mathbf{a} \|^2 &= \| \mathbf{x} - \mathbf{b} \|^2 \\ \| \mathbf{x} \|^2 - 2(\mathbf{x}.\mathbf{a}) + \| \mathbf{a} \|^2 &= \| \mathbf{x} \|^2 - 2(\mathbf{x}.\mathbf{b}) + \| \mathbf{b} \|^2 \\ 2(\mathbf{x}.(\mathbf{b} - \mathbf{a})) &= \| \mathbf{b} \|^2 - \| \mathbf{a} \|^2 . \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: *Alle Kreise, die durch* **a** *und* **b** *gehen, haben ihre Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten der Strecke* $\overline{\mathbf{ab}}$. Wenden wir dies auf die drei Seiten eines Dreiecks an, und erinnern wir uns daran, daß sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt **m** schneiden, so finden wir: *Zu drei, nicht kollinearen Punkten der Ebene gibt es genau einen Kreis, der durch alle drei Punkte geht.* Der Kreismittelpunkt **m** ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks. Dieser Kreis durch die drei Ecken eines Dreiecks heißt der *Umkreis des Dreiecks.*

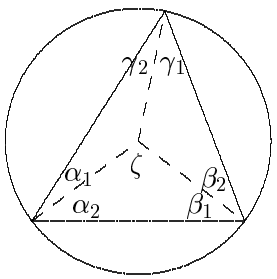


Umkreis

Satz (Peripherie- und Zentriwinkel): *Alle Peripheriewinkel über einer festen Kreissehne sind gleich, und zwar sind sie halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel (in Richtung auf den Mittelpunkt des Kreises, sonst komplementär dazu).*

Beweis: Wegen der gleichseitigen Dreiecke ist in nebenstehender Figur

$$\alpha_2 = \beta_1,\ \beta_2 = \gamma_1,\ \gamma_2 = \alpha_1.$$



Wegen der Winkelsumme im Dreieck ist

$$\zeta = \pi - (\alpha_2 + \beta_1)$$

und

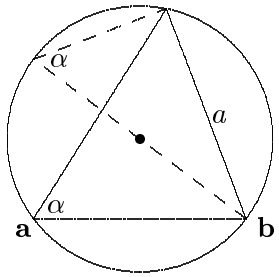
$$\begin{aligned} 2(\gamma_1 + \gamma_2) &= \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \\ &= \pi - (\alpha_2 + \beta_1) \\ &= \zeta. \end{aligned}$$

□

Korollar (Sinus-Satz): *Ist α ein Winkel eines Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite a, und ist R der Umkreis-Radius dieses Dreiecks, so gilt*

$$sin(\alpha) = \frac{a}{2R}.$$

Beweis. Da alle Winkel über der Sekante a gleich sind, können wir die Ecke **a** des Winkels α auf dem Umkreis verschieben, ohne, daß sich dieser Winkel ändert. Verschieben wir die Ecke so, daß **ab** ein Kreisdurchmesser wird, so wird das Dreieck rechtwinklig, mit Hypotenuse $2R$. Daraus folgt die Behauptung. □



Korollar (Umkreisradius): *Der Umkreisradius eines Dreiecks Δ mit den Seiten a, b, c und der Fläche F_Δ ist*

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot F_\Delta}.$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Korollar ist

$$R = \frac{a}{2 \cdot sin(\alpha)}$$

und außerdem wissen wir

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sin(\alpha), \quad \frac{1}{sin(\alpha)} = \frac{b \cdot c}{2 \cdot F_\Delta}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Für später brauchen wir noch eine merkwürdige Abstandsformel.

Satz (Abstand zum Umkreismittelpunkt): *Ein Punkt* $\mathbf{p}$ *der Ebene sei gegeben als Affinkombination*

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

der Dreiecks-Ecken. (α, β, γ *sind hier also nicht die Winkel des Dreiecks.) Dann gilt*

$$\| \mathbf{p} - \mathbf{m} \|^2 = R^2 - \left(\alpha\beta c^2 + \alpha\gamma b^2 + \beta\gamma a^2\right).$$

Beweis. Wir schreiben

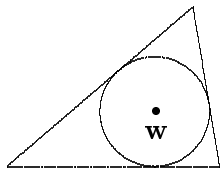
$$\begin{aligned}
\| \mathbf{p} - \mathbf{m} \|^2 &= \| \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} - \mathbf{m} \|^2 \\
&= \| \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{m}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{m}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{m}) \|^2 \\
&= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + 2\alpha\beta((\mathbf{a} - \mathbf{m}).(\mathbf{b} - \mathbf{m})) + 2\alpha\gamma((\mathbf{a} - \mathbf{m}).(\mathbf{c} - \mathbf{m})) \\
&\quad +2\beta\gamma((\mathbf{b} - \mathbf{m}).(\mathbf{c} - \mathbf{m})) \\
&= (\alpha + \beta + \gamma)^2 R^2 + 2 \cdot \alpha\beta[((\mathbf{a} - \mathbf{m}).(\mathbf{b} - \mathbf{m})) - R^2] \\
&\quad +2 \cdot \alpha\gamma[((\mathbf{a} - \mathbf{m}).(\mathbf{c} - \mathbf{m})) - R^2] + 2 \cdot \beta\gamma[((\mathbf{b} - \mathbf{m}).(\mathbf{c} - \mathbf{m})) - R^2]
\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt sofort aus

$$c^2 = \| (\mathbf{a} - \mathbf{m}) - (\mathbf{b} - \mathbf{m}) \|^2 = 2R^2 - 2((\mathbf{a} - \mathbf{m}).(\mathbf{b} - \mathbf{m}))$$

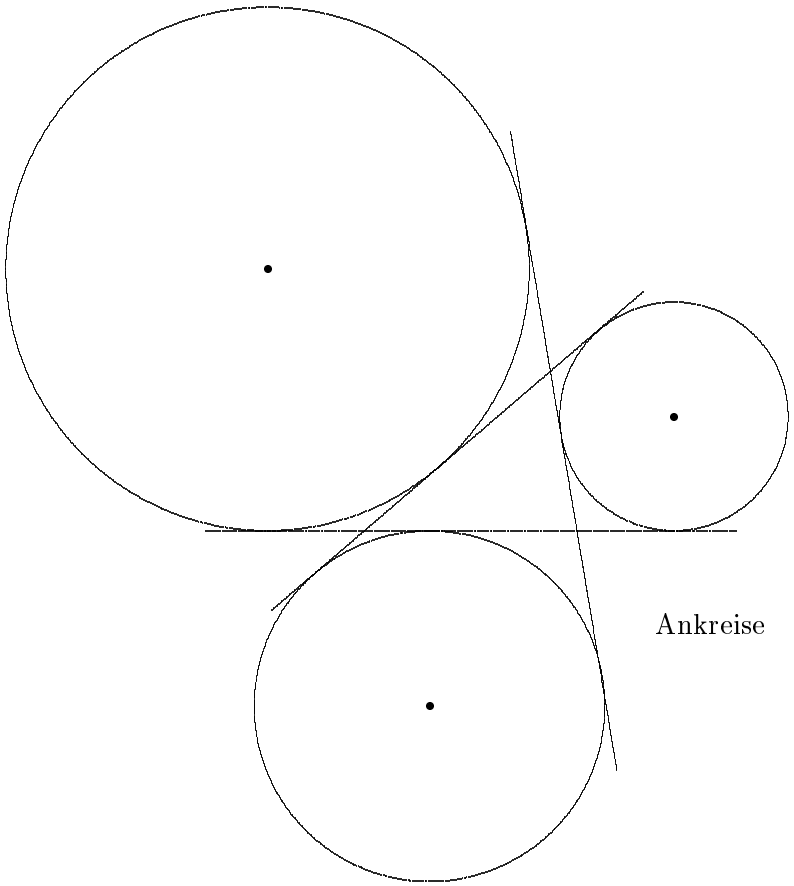
und den entsprechenden Formeln für die anderen Dreiecksseiten. □

In 1.4 haben wir die beiden Winkelhalbierenden zu zwei Geraden $L \neq M \subset \mathbb{R}^2$ charakterisiert als den geometrischen Ort der Punkte $\mathbf{m}$, die von beiden Geraden den gleichen Abstand haben. Anders ausgedrückt: jeder Punkt $\mathbf{m}$ auf einer Winkelhalbierenden ist Mittelpunkt eines Kreises, der L und M berührt. Erinnern wir uns jetzt daran, daß sich die drei Winkelhalbierenden im Dreieck in einem Punkt schneiden, so finden wir: Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden im Dreieck ist der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Seiten berührt. Dieser Kreis heißt *Inkreis des Dreiecks.*



Inkreis

Den Inkreismittelpunkt erhalten wir also als Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden, die von den drei Ecken ins Innere des Dreiecks gehen. Aber in jeder Ecke gibt es noch eine andere Winkelhalbierende. Die beiden anderen Winkelhalbierenden aus den Ecken $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ schneiden sich in einem Punkt $\mathbf{w}_a$, der außerhalb des Dreiecks, auf der anderen Seite der Dreiecksseite a liegt. Dieser Punkt hat zur Seite a denselben Abstand wie zu den Seiten b und c. Er liegt also auf einer Winkelhalbierenden durch $\mathbf{a}$, und zwar auf derjenigen, die von $\mathbf{a}$ aus ins Innere des Dreiecks geht. Damit ist $\mathbf{w}_a$ Mittelpunkt eines Kreises, der wieder alle drei Seiten, und zwar die Seite a von außen, berührt. Dieser Kreis heißt *Ankreis.* Analog gibt es noch zwei andere Ankreise, die jeweils die Seiten b und c von außen berühren.



Die Ankreismittelpunkte $\mathbf{w}_a, \mathbf{w}_b$ und $\mathbf{w}_c$ bestimmt man genauso, wie den Inkreismittelpunkt

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2s} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}).$$

Satz (Ankreismittelpunkte): *Die Mittelpunkte der drei Ankreise sind*

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a &= \frac{1}{2(s-a)} \cdot (-a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}), \\ \mathbf{w}_b &= \frac{1}{2(s-b)} \cdot (a \cdot \mathbf{a} - b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}), \\ \mathbf{w}_c &= \frac{1}{2(s-c)} \cdot (a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} - c \cdot \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Beweis. Die Winkelhalbierende zu $\mathbf{b}$, die durch den Ankreismittelpunkt läuft, wird aufgespannt vom Vektor

$$\frac{1}{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \sim a \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + c \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

Sie ist also die Gerade

$$\mathbf{b} + ta \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + tc \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = -ta \cdot \mathbf{a} + (1 + t(a - c)) \cdot \mathbf{b} + tc \cdot \mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sie enthält also den Punkt $(t = 1/(-a + b + c) = 1/(2s - a))$

$$\frac{1}{2(s-a)} \cdot (-a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}).$$

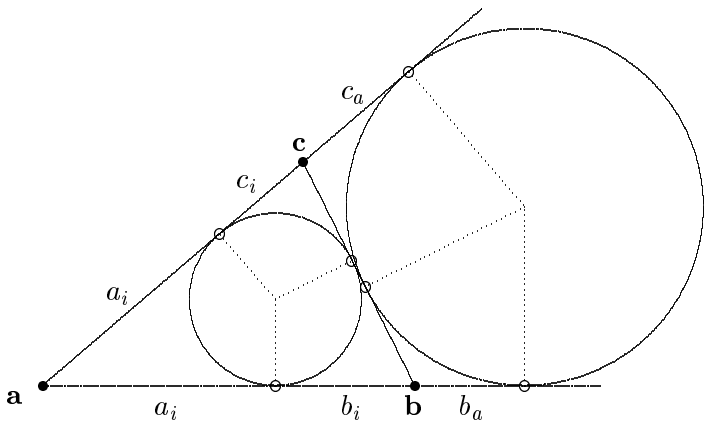
Diese Formel ist symmetrisch in b, $\mathbf{b}$ und $c, \mathbf{c}$. Deswegen liegt dieser Punkt auch auf der entsprechenden Winkelhalbierenden durch die Ecke $\mathbf{c}$. Es muß also der Ankreismittelpunkt außerhalb der Seite a sein. □

Wir bezeichnen jetzt mit a_i, b_i, c_i die Abstände der Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ von den Berührpunkten des Inkreises, sowie mit b_a, c_a die Abstände der Ecken $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ von den Berührpunkten desjenigen Ankreises, der der Ecke $\mathbf{a}$ gegenüber liegt. (Die Abstände c_b, a_b und a_c, b_c seien analog definiert.) Dann gilt für den Inkreis

$$\begin{aligned} b_i + c_i &= a \\ a_i + b_i + c_i &= s \\ a_i &= s - a. \end{aligned}$$

Die Berührpunktsabstände des Inkreises sind also

$$a_i = s - a, \quad b_i = s - b, \quad c_i = s - c.$$



Für den Ankreis haben wir

$$\begin{aligned} b_a + c_a &= a \\ c + b_a &= b + c_a \\ b_a - c_a &= b - c \\ 2b_a &= a + b - c \\ b_a &= s - c. \end{aligned}$$

Die Berührpunktabstände des Ankreises sind also

$$b_a = s - c, \quad c_a = s - b, \quad \text{usw.}$$

Mit diesen Formeln für die Berührpunktsabstände kann man In- und Ankreisradien ausrechnen:

Satz (Radius von In- und Ankreis): *Der Radius des Inkreises ist*

$$r := \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

und der Radius des Ankreises auf der anderen Seite der Seite a ist

$$r_a = \sqrt{\frac{s \cdot (s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

Beweis. Der Inkreismittelpunkt $\mathbf{m}$ zerlegt das Dreieck in drei Teildreiecke mit den Flächen

$$\frac{r \cdot a}{2}, \quad \frac{r \cdot b}{2}, \quad \frac{r \cdot c}{2}.$$

Ihre Summe ist die Dreiecksfläche

$$F_\Delta = r \cdot s.$$

Vergleichen wir diese Formel für die Dreiecksfläche mit der Heronischen Formel, so finden wir die behauptete Formel für r.

Der Ankreismittelpunkt $\mathbf{w}_a$ bestimmt zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Flächen $r_a \cdot s/2$. Die Summe dieser Flächen ist die Dreiecksfläche F_Δ, zusammen mit den Dreiecksflächen

$$\frac{r_a \cdot b_a}{2} = \frac{r_a(s-c)}{2}, \quad \frac{r_a \cdot a}{2}, \quad \frac{r_a \cdot c_a}{2} = \frac{r_a(s-b)}{2}.$$

Daraus folgt

$$F_\Delta = r_a \cdot s - \frac{r_a}{2} \cdot ((s-c) + a + (s-b)) = r_a \cdot (s-a).$$

und wieder liefert die Heronische Formel das behauptete Ergebnis. □

Satz (Euler): *Der Abstand d zwischen den Mitelpunkten $\mathbf{m}$ und $\mathbf{w}$ von Um- und Inkreis eines Dreiecks genügt zusammen mit Um- und Inkreis-Radius der folgenden Bedingung:*

$$d^2 = R(R - 2r).$$

Insbesondere ist $R \geq 2r$.

Beweis. Wir nehmen als Punkt $\mathbf{p}$ in der Abstandsformel den Inkreismittelpunkt

$$\mathbf{w} := \frac{1}{2s}(a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c})$$

und finden

$$\begin{aligned} d^2 &= \| \mathbf{w} - \mathbf{m} \|^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{4s^2}(abc^2 + acb^2 + bca^2) \\ &= R^2 - \frac{abc}{2s} \\ &= R^2 - 2Rr. \end{aligned}$$

□

Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz umkehrbar ist: Genügen die Radien r und R zweier Kreise, sowie der Abstand d von deren Mittelpunkten der Eulerschen Relation, so gibt es ein Dreieck, dessen Inkreis der eine, und dessen Umkreis der andere Kreis ist.

Die drei Seitenmitten des Dreiecks **abc**

$$\mathbf{c}' := \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),\ \mathbf{a}' := \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \text{ und } \mathbf{b}' := \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a})$$

sind die Ecken des sogenannten *Mittendreiecks*. Dieses Mittendreieck ist ähnlich zum Ausgangsdreieck, mit dem Ähnlichkeitsfaktor 1/2. Insbesondere ist sein Umkreisradius

$$R' = \frac{1}{2}R.$$

Der Umkreis des Mittendreiecks heißt in der deutschen Literatur *Feuerbachkreis*, sonst *Neunpunktekreis*.

Satz (Feuerbach, Brianchon, Poncelet): *Für den Mittelpunkt* $\mathbf{f}$ *des Feuerbachkreises gilt*

$$3\mathbf{s} = \mathbf{m} + 2\mathbf{f}.$$

Hier sind $\mathbf{s}$ *und* $\mathbf{m}$ *der Schwerpunkt und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks.*

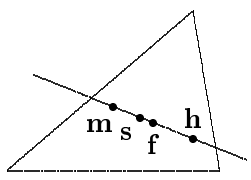
Bemerkung: Die behauptete Gleichung können wir auch

$$\mathbf{f} = \frac{3}{2}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{m}$$

schreiben. Der Mittelpunkt des Feuerbachkreises ist eine Affinkombination der Punkte $\mathbf{s}$ und $\mathbf{m}$ und liegt deswegen auf der Eulergeraden.

Mit der Eulergleichung kannn man hier $\mathbf{s}$ eliminieren:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + 2\mathbf{m}) - \frac{1}{2}\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{m})$$



Eulergerade

und findet: $\mathbf{f}$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathbf{hm}}$.

Beweis des Satzes: Der Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks ist nach unseren Formeln für die merkwürdigen Punkte des Dreiecks

$$\mathbf{f} = \mathbf{m}'$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(t_a+t_b+t_c)} \cdot ((t_b+t_c)\mathbf{a}' + (t_a+t_c)\mathbf{b}' + (t_a+t_b)\mathbf{c}') \\
&= \frac{1}{4(t_a+t_b+t_c)} \cdot ((t_a+t_b)(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (t_a+t_c)(\mathbf{a}+\mathbf{c}) + (t_b+t_c)(\mathbf{b}+\mathbf{c})) \\
&= \frac{1}{4(t_a+t_b+t_c)} \cdot [(2t_a+t_b+t_c)\mathbf{a} + (t_a+2t_b+t_c)\mathbf{b} + (t_a+t_b+2t_c)\mathbf{c})] \\
&= \frac{3}{2}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{m}.
\end{aligned}
$$

□

Der Feuerbachkreis heißt Neunpunkte–Kreis, weil er außer den drei Seitenmitten noch sechs andere merkwürdige Punkte des Dreiecks enthält:

Die drei Höhenfußpunkte: Wir projizieren die drei Punkte $\mathbf{m}, \mathbf{h}$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{m}+\mathbf{h})/2$ auf die Dreiecksseite $c = \mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a})$ unter der Orthogonalprojektion. Mit der Formel für die Orthogonalprojektion in 1.2 erhalten wir die Punkte

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v_m} &= \mathbf{a} + ((\mathbf{m}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}-\mathbf{a})) \cdot \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\| \mathbf{b}-\mathbf{a} \|^2} \\
\mathbf{v_h} &= \mathbf{a} + ((\mathbf{h}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}-\mathbf{a})) \cdot \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\| \mathbf{b}-\mathbf{a} \|^2} \\
\mathbf{v_f} &= \mathbf{a} + ((\mathbf{f}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}-\mathbf{a})) \cdot \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\| \mathbf{b}-\mathbf{a} \|^2} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{v_m} + \mathbf{v_h}).
\end{aligned}
$$

Nun ist $\mathbf{v_m}$ der Seitenmittelpunkt, und $\mathbf{v_h}$ der Höhenfußpunkt auf c. Der Abstand von beiden Punkten zu $\mathbf{v_f}$ ist gleich, also nach Pythagoras auch der Abstand zu $\mathbf{f}$. Mit $\mathbf{v_m}$ liegt dann auch $\mathbf{v_h}$ auf dem Feuerbachkreis um $\mathbf{f}$. □

Die drei Mittelpunkte der Strecken zwischen dem Höhenschnittpunkt $\mathbf{h}$ *und den Ecken:* Wir eliminieren aus der Euler- und der Feuerbachgleichung

$$\mathbf{m} = \frac{3}{2}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{h} = 3\mathbf{s} - 2\mathbf{f}$$

und erhalten

$$2\mathbf{f} = \frac{3}{2}\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{h}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{h}+\mathbf{c}) - \mathbf{f}.$$

Der Mittelpunkt $(\mathbf{h}+\mathbf{c})/2$ der Strecke zwischen $\mathbf{h}$ und $\mathbf{c}$ liegt also auf derselben Geraden durch $\mathbf{f}$ wie der Seitenmittelpunkt $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$, auf der anderen Seite von $\mathbf{f}$ im selben Abstand. Weil $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ auf dem Feuerbachkreis liegt, geht der Kreis auch durch $(\mathbf{h}+\mathbf{c})/2$. □

Die folgende Tatsache geht auf Feuerbach alleine zurück:

Satz (Feuerbach): *Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks.*

Beweis. Ich möchte hier nur die Berühr-Eigenschaft für den Inkreis beweisen. Für die Ankreise geht es ziemlich analog. Ich möchte das nur noch graphisch kontrollieren. Den Beweis für die Ankreise findet man in Koecher-Krieg, wo ich auch den Beweis für den Inkreis abgeschrieben habe.

Wir müssen also

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{m}' \| = \frac{R}{2} - r$$

zeigen. Dazu benützen wir die Abstandsformel für das Mittendreieck, und müssen deswegen erst den Inkreismittelpunkt $\mathbf{w}$ als Affinkombination der Ecken des Mitten-Dreiecks ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \frac{1}{2s} \cdot (a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \left(a\frac{\mathbf{a}}{2} + b\frac{\mathbf{b}}{2} + c\frac{\mathbf{c}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \left((2s-b-c)\frac{\mathbf{a}}{2} + (2s-a-c)\frac{\mathbf{b}}{2} + (2s-a-b)\frac{\mathbf{c}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \left((s-c)\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} + (s-b)\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} + (s-a)\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{s} \cdot ((s-a)\mathbf{a}' + (s-b)\mathbf{b}' + (s-c)\mathbf{c}').
\end{aligned}$$

Die Abstandsformel für das Mittendreieck liefert also

$$\begin{aligned}
\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \| \mathbf{w} - \mathbf{m}' \|^2 &= \frac{1}{s^2} \cdot \left((s-a)(s-b)\frac{c^2}{4} + (s-a)(s-c)\frac{b^2}{4} + (s-b)(s-c)\frac{a^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{16\,s^2} \cdot \Big((a-b+c)(a+b-c)a^2 + (-a+b+c)(a+b-c)b^2 \\
&\quad + (-a+b+c)(a-b+c)c^2 \Big) \\
&= \frac{1}{16\,s^2} \cdot \Big((a^2-(b-c)^2)a^2 + (b^2-(a-c)^2)b^2 + (c^2-(a-b)^2)c^2 \Big) \\
&= \frac{1}{16\,s^2} \cdot \Big(a^4+b^4+c^4 - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + 2(a^2bc+ab^2c+abc^2) \Big).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle denken wir daran, daß beim Beweis der Heronischen Formel einmal die Gleichung

$$16F_\Delta^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

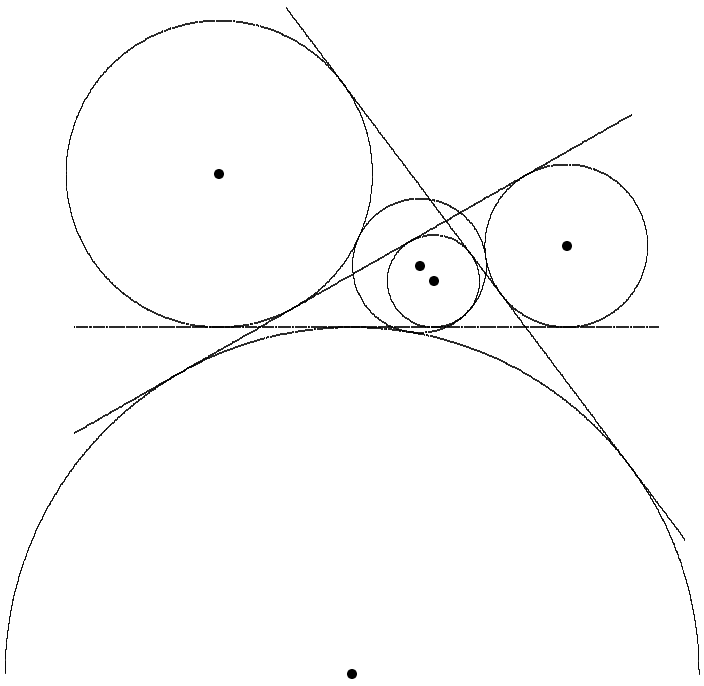
auftauchte, und an

$$\frac{1}{16\,s^2} \cdot 2(a^2bc + ab^2c + abc^2) = \frac{1}{4s} \cdot abc = \frac{abc}{4F_\Delta} \cdot \frac{F_\Delta}{s} = R \cdot r.$$

Die Abstandsformel liefert dann also

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{m}' \|^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot r + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Und wegen $R > 2r$ folgt daraus die Behauptung. □



Aufgabe 1.33: Zeigen Sie

$$4R \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = s.$$

Aufgabe 1.34: Zeigen Sie: Das Dreieck **abc** ist das Höhenfußpunktsdreieck des Dreiecks $\mathbf{w}_a\mathbf{w}_b\mathbf{w}_c$.

Aufgabe 1.35: Für den Inkreisradius r und die Radien der drei Ankreise gilt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Aufgabe 1.36: Zeigen Sie

$$\| \mathbf{w}_a - \mathbf{m} \|^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Aufgabe 1.37: Zeigen Sie

$$\| \mathbf{w}_a - \mathbf{f} \| = \frac{R}{2} + r_a.$$

Aufgabe 1.38: Zeigen Sie: Der Umkreis eines Dreiecks **abc** ist der Feuerbachkreis des Dreiecks $\mathbf{w}_a\mathbf{w}_b\mathbf{w}_c$

2 Affine Geometrie

Wir gehen jetzt von der Bewegungsgruppe über zu einer größeren Gruppe, der affinen Gruppe. Weil diese Gruppe größer ist, gibt es weniger Eigenschaften, die unter dieser Gruppe invariant sind. So sind Abstände und Winkel nicht mehr invariant unter affinen Transformationen. Andererseits sind mehr Objekte unter dieser Gruppe äquivalent. Das heißt, daß mehr Objekte durch affine Transformationen ineinander übergeführt werden können, als durch Bewegungen. So sind z.B. alle nicht entarteten Dreiecke in der Ebene äquivalent unter der affinen Gruppe. In diesem Sinn ist der Übergang von der euklidischen Geometrie zur affinen Geometrie eine Vereinfachung. Häufig nennt man dies auch eine Verallgemeinerung.

Zumindest ist dieser Übergang eine Abstraktion: Es wird von den *metrischen Eigenschaften* geometrischer Figuren abstrahiert. Der erste Mathematiker, der affine Transformationen auf ein Klassifikationsproblem anwandte war Sir Isaac Newton (Enumeratio linearum curvarum tertii ordinis). Der erste Geometer, der die Abstraktion von metrischen Eigenschaften systematisch in die Geometrie einführte, war von Staudt, aus Rothenburg o.T., Professor zu Erlangen. Otto Haupt nannte von Staudt deshalb den ersten modernen Geometer und benannte nach ihm den Preis, den er für herausragende mathematische Leistungen stiftete.

2.1 Die affine Gruppe

Eine Bewegung ist eine Transformation des $\mathbb{R}^n$

$$F = T \circ U, \quad T \in \mathbf{T}(\mathbf{n}),\, U \in \mathbf{O}(\mathbf{n}).$$

Wir definieren: Eine *affine Transformation* des $\mathbb{R}^n$ ist eine Transformation

$$F = T \circ U, \quad T \in \mathbf{T}(\mathbf{n}),\, U \in \mathbf{GL}(\mathbf{n}, \mathbb{R}).$$

Die Gruppe $\mathbf{O}(\mathbf{n})$ der orthogonalen Transformationen wird also ersetzt durch die Gruppe $\mathbf{GL}(\mathbf{n}, \mathbb{R})$ aller invertierbaren linearen Transformationen.

Anders als die orthogonale Gruppe ist die allgemeine lineare Gruppe über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ definiert. Wir können deswegen den Vektorraum $\mathbb{K}^n$, wo $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper ist, als Raum für unsere affine Geometrie zugrunde legen. Das werden wir zunächst auch tun, jedenfalls solange wir keine quadratischen Gleichungen lösen müssen.

Genau wie bei den Bewegungen (1.3), zeigt man auch für die affinen Transformationen, daß sie eine Gruppe bilden. Wir nennen sie $\mathbf{Aff}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$, oder, wenn es uns auf den Grundkörper nicht ankommt, schlicht $\mathbf{Aff}(\mathbf{n})$.

Affine Transformationen F führen affine Unterräume $V \subset \mathbb{K}^n$ wieder in affine Unterräume gleicher Dimension über. (Für Translationen T ist dies klar, ebenso wie für invertierbare lineare Abbildungen $U \subset \mathbf{GL}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$. Deswegen gilt dies für beliebige affine Transformationen

$F = T \circ U$.) Dabei geht der parallele Untervektorraum V_0 in den Untervektorraum $U(V_0)$ über. Daraus folgt: *Zwei parallele affine Unterräume V_1, V_2 gehen unter einer affinen Transformation in parallele affine Unterräume $F(V_1), F(V_2)$ über.* Ebenso *gehen Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ und Verbindungsraum $V_1 + V_2$ in Durchschnitt $F(V_1) \cap F(V_2)$ und Verbindungsraum $F(V_1) + F(V_2)$ der Bildräume über.*

Noch ein Wort zur Notation: Wir unterscheiden den Verbindungsraum im Sinn der affinen Geometrie vom Verbindungsraum aus der linearen Algebra, dem *aufgespannten Vektorraum.* Beispelsweise ist der affine Verbindungsraum zweier Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ die von diesen beiden Vektoren aufgespannte Gerade, während der von den beiden Vektoren aufgespannte Untervektorraum i.a. zweidimensional ist!

In Koordinaten wird eine affine Transformation $F \in \mathbf{Aff}(\mathbf{n})$ also folgendermaßen beschrieben: Es gibt einen Translationsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^n$ und eine invertierbare Matrix $A \in \mathbf{GL}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$ so, daß für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}.$$

Die Hintereinderausführung zweier affiner Transformationen

$$F_2 \circ F_1(\mathbf{x}) = F_2(\mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot (\mathbf{t}_1 + A_1 \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{t}_1 + A_2 A_1 \cdot \mathbf{x}$$

hat also den Translationsvektor $\mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{t}_1$ und die Matrix $A_2 \cdot A_1$. Wir können die affine Gruppe als abstrakte Gruppe deswegen auch beschreiben durch das kartesische Produkt

$$\mathbf{Aff}(\mathbf{n}) = \mathbb{K}^n \times \mathbf{GL}(\mathbf{n}) = \{(\mathbf{t}, A) : \mathbf{t} \in \mathbb{K}^n, A \in \mathbf{GL}(\mathbf{n})\}.$$

Aber die Gruppenoperation ist nicht komponentenweise die Gruppenoperation der beiden Faktoren, sondern

$$(\mathbf{t}_2, A_2) \cdot (\mathbf{t}_1, A_1) = (\mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{t}_1, A_2 \cdot A_2).$$

Wir wollen die Gruppe $\mathbf{Aff}(\mathbf{n})$ aber nicht als Paare, bestehend aus einem Vektor und einer $n \times n$–Matrix beschreiben, sondern wieder als quadratische Matrizen. Diese Matrizen müssen eine $n \times n$–Matrix A und einen Vektor $\mathbf{t}$ der Länge n enthalten. Das geht, wenn wir dem Paar $(\mathbf{t}, A)$ die $(n+1) \times (n+1)$–Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ t_1 & a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_n & a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

zuordnen. Das Produkt solcher $(n+1) \times (n+1)$–Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_2 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_1 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_2 + A_2 \cdot \mathbf{t}_1 & A_2 \cdot A_1 \end{pmatrix}$$

ist genau die Multiplikation in der Gruppe $\mathbf{Aff(n)}$. Die $(n+1)\times(n+1)$–Matrizen können wir auch auf Vektoren $\mathbf{x}\in\mathbb{K}^n$ loslassen, allerdings können wir sie nicht mit dem Vektor selbst multiplizieren, sondern nur mit dem etwas verlängerten Vektor

$$\mathbf{x}' := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dann wird das Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{t} + A\cdot\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

genau der $(n+1)$–Vektor $F(\mathbf{x})'$, der zum transformierten Vektor $F(\mathbf{x})$ gehört.

Wir fassen zusammen: Die affinen Transformationen können durch Multiplikation mit $(n+1)\times(n+1)$–Matrizen beschrieben werden, die in der ersten Zeile die Einträge $(1,0,...,0)$ haben, wenn man die Vektoren um eine erste Zeile mit dem Eintrag 1 ergänzt. Diese Technik bringt gewisse, wenn auch nicht zu große, Vorteile beim Rechnen. Viel wichtiger ist, daß sie der erste Schritt hin zum Verständnis der projektiven Geometrie ist.

Zum Abschluß dieses Paragraphen möchte ich daran erinnern, daß wir in 1.4 schon einmal die erweiterten Vektoren $\mathbf{x}'$ benutzten: Die Fläche eines Parallelogramms, das von zwei Vektoren $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0$ aufgespannt wird, haben wir als Determinante

$$F = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}\right| = \left|det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0' & \mathbf{x}_1' & \mathbf{x}_2' \end{pmatrix}\right|$$

geschrieben.

Entsprechend kann man das Volumen des Parallelotops

$$\{\mathbf{y}_0+\lambda_1\mathbf{x}_1+...+\lambda_n\mathbf{x}_n, \quad 0\le\lambda_1,...,\lambda_n\le 1\}\subset\mathbb{R}^n$$

mit den $n+1$ Ecken

$$\mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_1 := \mathbf{y}_0+\mathbf{x}_1,\ ...,\ \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0+\mathbf{x}_n.$$

als $(n+1\times n+1)$-Determinante

$$|P| = |det(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)| = |det(\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_0,...,\mathbf{y}_n-\mathbf{y}_0)| = |det(\mathbf{y}_0',...,\mathbf{y}_n')|$$

mit den erweiterten Vektoren schreiben.

Die $n+1$ Vektoren $\mathbf{y}_0,...,\mathbf{y}_n\in\mathbb{R}^n$ spannen genau dann ein Volumen (Parallelotop oder Simplex, ist egal) der Größe Null auf, wenn die Determinante $det(\mathbf{y}_0',...,\mathbf{y}_n')=0$ ist. Genau dann gibt es Zahlen $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$, nicht alle $=0$, mit

$$(a_0,a_1,...,a_n)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & ... & \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \left(a_0+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu y_{k,\nu}\right)_{k=0,...,n} = \mathbf{0}.$$

Also ist

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & ... & \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die $n+1$ Punkte $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^n$ auf einer affinen Hyperebene $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu = -a_0$ liegen. Dies gilt natürlich nicht nur für $n+1$ Punkte im $\mathbb{R}^n$, sondern auch im $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe 2.1: Mit $F(\mathbf{abc})$ werde die Fläche eines Dreiecks $\mathbf{abc}$ in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Zeigen Sie: Bei einer affinen Transformation der Ebene $\mathbb{R}^2$ ändert sich der Quotient

$$\frac{F(\mathbf{a'b'c'})}{F(\mathbf{abc})}$$

nicht.

Aufgabe 2.2: Gegeben seien ein Dreieck $\mathbf{abc}$ in der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ und der Punkt

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}, \quad \text{mit} \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

Zeigen Sie

$$\lambda = \frac{F(\mathbf{pbc})}{F(\mathbf{abc})}.$$

Aufgabe 2.3: Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{K}^2$ sei $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := a_1 b_2 - a_2 b_1$ wie in Aufgabe 1.14 definiert. Zeigen Sie für je drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{bc} \in \mathbb{K}_2$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a} + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 2.4: Für je vier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in K^2$ gilt

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}][\mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}][\mathbf{d}, \mathbf{a}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}][\mathbf{b}, \mathbf{d}] = 0.$$

2.2 Das Teilverhältnis, baryzentrische Koordinaten

Unter einer invertierbaren linearen Abbildung $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bleibt die Länge $\| \mathbf{x} \|$ eines Vektors $\mathbf{x}$ i.a. nicht erhalten. Deswegen erhalten affine Transformationen i.a. auch keine Abstände $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$.

Allerdings bildet eine invertierbare lineare Abbildung $U \in \mathbf{GL}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$ eine Linearkombination $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ wieder in eine Linearkombination der Bildvektoren mit den gleichen Koeffizienten ab:

$$U : \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \quad \mapsto \quad \lambda U(\mathbf{x}) + \mu U(\mathbf{y}).$$

Für eine Translation T mit Verschiebungsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^n$ ist

$$T(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = \mathbf{t}+\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{t})+\mu(\mathbf{y}+\mathbf{t})+(1-\lambda-\mu)\mathbf{t} = \lambda T(\mathbf{x})+\mu T(\mathbf{y})+(1-\lambda-\mu)\mathbf{t}.$$

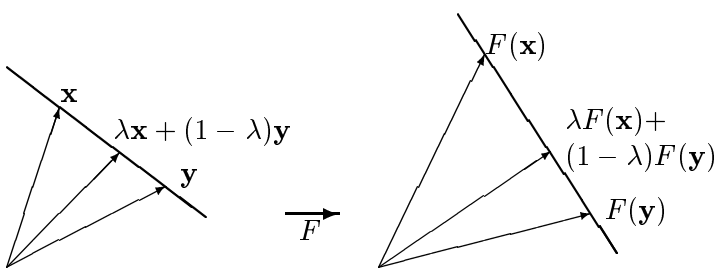
Eine Affinkombination

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}, \quad \lambda+\mu = 1$$

zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ geht deswegen unter einer affinen Transformation F über in

$$F(\mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{x}) + \mu F(\mathbf{y}),$$

die Affinkombination der Bildvektoren $F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})$ mit denselben Koeffizienten.



Beispiel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$): Der Mittelpunkt $(\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$ der Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$ geht über in den Mittelpunkt $(F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y}))/2$ der Bildstrecke $\overline{F(\mathbf{x})F(\mathbf{y})}$. Jeder Punkt

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

der Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$ geht über in einen Punkt

$$F(\mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{x})+(1-\lambda)F(\mathbf{y}), \quad 0 \le \lambda \le 1$$

der Bildstrecke $\overline{F(\mathbf{x})F(\mathbf{y})}$. Dies gilt auch für die Umkehrabbildung F^{-1}. Deswegen bildet F die Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$ auf die Strecke $\overline{F(\mathbf{x})F(\mathbf{y})}$ ab.

Definition. Sei

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$$

eine Affinkombination der Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Dann heißt der Quotient $(\lambda-1)/\lambda$ das *Teilverhältnis*, in dem $\mathbf{v}$ die Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$ teilt:

$$TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

(Ganz streng besehen, kommt für $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, d.h. wenn $\lambda = 0$ ist, keine Zahl heraus, sondern das Symbol ∞. Wird schon keine zu schlimmen Konsequenzen haben.)

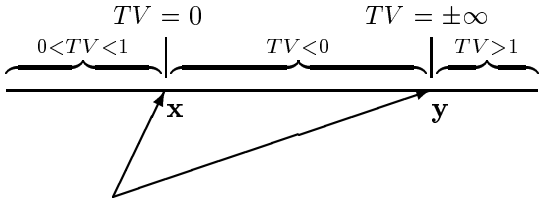
Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die euklidischen Abstände von $\mathbf{v}$ zu den beiden Endpunkten der Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v}-\mathbf{x} \| &= \| (\lambda-1)\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y} \| = |1-\lambda| \cdot \| \mathbf{y}-\mathbf{x} \| \\ \| \mathbf{v}-\mathbf{y} \| &= \| \lambda\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y} \| = |\lambda| \cdot \| \mathbf{y}-\mathbf{x} \|, \end{aligned}$$

und ihr Quotient ist, bis auf das Vorzeichen, das Teilverhältnis:

$$|TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})| = \frac{\| \mathbf{v}-\mathbf{x} \|}{\| \mathbf{v}-\mathbf{y} \|}.$$

Das Vorzeichen des Teilverhältnisses ist positiv, wenn die Strecken $\overline{\mathbf{vx}}$ und $\overline{\mathbf{vy}}$ gleich orientiert sind, sonst, d.h. also zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, ist das Teilverhältnis negativ:



Weil die Abbildung

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

injektiv ist, bestimmt $TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})$ den Koeffizienten λ eindeutig. *Bei festen Punkten* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{K}^2$ *ist* $\mathbf{v} \in \mathbf{xy}$ *durch das Teilverhältnis* $TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})$ *eindeutig festgelegt.*

Wir haben oben gesehen: Obwohl affine Transformationen die Abstände nicht erhalten, erhalten sie Teilverhältnisse, d.h., *Quotienten von Abständen auf derselben Geraden.* Der Begriff *Teilverhältnis* ist deswegen ein Begriff der affinen Geometrie. Das gilt übrigens auch noch für Verhältnisse von Strecken auf verschiedenen, *aber parallelen* Geraden: sei etwa der Richtungsvektor $\mathbf{m} \in \mathbb{K}^n$ und zwei Punktepaare

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{m}, \quad \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mu\mathbf{m}$$

auf zwei parallelen Geraden mit Richtungsvektor $\mathbf{m}$ gegeben. Eine affine Transformation $F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + U(x)$ bildet diese Punktepaare auf die Paare

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1' &= \mathbf{t} + U(\mathbf{a}_1), \\
\mathbf{b}_1' &= \mathbf{t} + U(\mathbf{a}_1) + \lambda U(\mathbf{m}), \\
\mathbf{a}_2' &= \mathbf{t} + U(\mathbf{a}_2), \\
\mathbf{b}_2' &= \mathbf{t} + U(\mathbf{a}_2) + \mu U(\mathbf{m}),
\end{aligned}$$

in zwei parallelen Geraden mit Richtungsvektor $U(\mathbf{m})$ ab. Nach der Abbildung ist

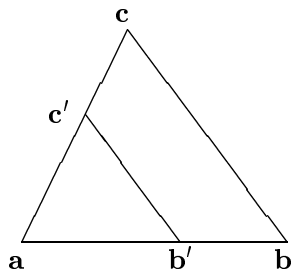
$$\mathbf{b}_1' - \mathbf{a}_1' = \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b}_2' - \mathbf{a}_2'),$$

genau wie vorher

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 = \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2).$$

Unter diesem Gesichtspunkt ist der Strahlensatz aus der Schule ein Satz der affinen Geometrie:

Satz (Strahlensatz): *Gegeben sei ein Dreieck* $\mathbf{abc}$*, und zwei Punkte* $\mathbf{b}' \in \mathbf{ab}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ac}$ *auf den Dreiecksseiten. Dann sind äquivalent:*
a) Die Geraden $\mathbf{bc}$ *und* $\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ *sind parallel.*
b) $TV(\mathbf{b}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{c})$.
c) Es ist $\mathbf{b}' - \mathbf{a} = \rho \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ *und* $\mathbf{c}' - \mathbf{b}' = \rho \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ *mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor* $\rho \in \mathbb{K}$.



Beweis. Am einfachsten geht der Beweis unter Benutzung der zentrischen Streckung

$$F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \rho \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

mit Zentrum $\mathbf{a}$ und dem Proportionalitätsfaktor ρ, der durch $\mathbf{b}' - \mathbf{a} = \rho \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ gegeben ist.

a) $\Rightarrow$ b): F bildet $\mathbf{b}$ auf $\mathbf{b}'$ ab, die Gerade $\mathbf{bc}$ auf ihre Parallele durch $\mathbf{b}'$, also auf die Gerade $\mathbf{b}'\mathbf{c}'$. Weil F die Gerade $\mathbf{ac}$ auf sich selbst abbildet, muß $F(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$ gelten. Daraus folgt $\mathbf{c}' - \mathbf{a} = \rho \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$, und daraus die Gleichheit der Teilverhältnisse.

b) $\Rightarrow$ c): Jetzt ist $F(\mathbf{b}) = \mathbf{b}'$ und $F(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$ vorausgesetzt. Weil F alle Strecken mit dem Faktor ρ multipliziert ist dann auch $\mathbf{c}' - \mathbf{b}' = \rho \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$.

c) $\Rightarrow$ a): Die Aussage c) bedeutet insbesondere, daß die Geraden $\mathbf{bc}$ und $\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ parallel sind. □

Es ist übrigens nicht so furchtbar wichtig, welchen Quotienten man nun als Teilverhältnis $TV(\mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ definiert. Ändert man beispielsweise die Reihenfolge der drei Vektoren in der Definition, so erhält man die sechs Werte

$$\begin{array}{lcccl}
TV(\mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) & = & (\lambda - 1)/\lambda & \text{weil} & \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{x} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{y} \\
TV(\mathbf{v}; \mathbf{y}, \mathbf{x}) & = & \lambda/(\lambda - 1) & '' & \mathbf{v} = (1 - \lambda) \cdot \mathbf{y} + \lambda \cdot \mathbf{x} \\
TV(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \mathbf{v}) & = & 1/(1 - \lambda) & '' & \mathbf{x} = (\lambda - 1)/\lambda \cdot \mathbf{y} + 1/\lambda \cdot \mathbf{v} \\
TV(\mathbf{x}; \mathbf{v}, \mathbf{y}) & = & 1 - \lambda & '' & \mathbf{x} = 1/\lambda \cdot \mathbf{x} + (\lambda - 1)/\lambda \cdot \mathbf{y} \\
TV(\mathbf{y}; \mathbf{v}, \mathbf{x}) & = & \lambda & '' & \mathbf{y} = 1/(1 - \lambda) \cdot \mathbf{v} + \lambda/(\lambda - 1) \cdot \mathbf{x} \\
TV(\mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{v}) & = & 1/\lambda & '' & \mathbf{y} = \lambda/(\lambda - 1) \cdot \mathbf{x} + 1/(1 - \lambda) \cdot \mathbf{v}
\end{array}$$

Wir haben unser Teilverhältnis so justiert, daß der Mittelpunkt $\mathbf{m} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ der Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$ das Teilverhältnis

$$TV(\mathbf{m}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1$$

hat. Dies spart etwas Rechenaufwand, wenn man Teilverhältnisse multipliziert, wie wir es beispielsweise in Paragraph 2.3 tun werden.

Im eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}$ haben wir ein natürliches Koordinatensystem. Dies ist so einfach, daß man es sich kaum anzugeben traut: Ein Punkt $v \in \mathbb{K}$ ist eine Zahl $v \in \mathbb{K}$, und diese Zahl nennen wir die Koordinate des Punktes. Es ist die Koordinate des Punktes in Bezug auf die Basis, die aus dem Vektor $1 \in \mathbb{K}$ besteht. Eine invertierbare lineare Abbildung

$$U : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad v \mapsto u \cdot v$$

bildet die Basis $\{1\}$ von $\mathbb{K}$ auf die Basis $\{u\}$ von $\mathbb{K}$ ab. Der Bildpunkt $U(v) = uv$ hat in Bezug auf diese neue Basis dieselbe Koordinate v, wie der alte Punkt v auf die alte Basis $\{1\}$. Dies gilt natürlich nur für eine lineare Abbildung U, nicht mehr für eine affine Abbildung

$$F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad v \mapsto t + u \cdot v.$$

Wir können allerdings Koordinaten einführen, die sich unter affinen Transformationen nicht ändern: Dazu wählen wir zwei verschiedene Punkte $x \neq y \in \mathbb{K}$. Einem Punkt $v = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbb{K}$ ordnen wir als *affine Koordinaten* das Paar $(\lambda, 1-\lambda)$ zu. Wie wir gerade gesehen haben, bildet eine affine Transformation

$$F : v \mapsto t + u \cdot v$$

den Punkt v auf den Bildpunkt $F(v)$ ab, der in Bezug auf die beiden Punkte $F(x), F(y)$ wieder die affinen Koordinaten $(\lambda, 1-\lambda)$ hat. Der Sinn dieser Übung erschließt sich dem Studenten allerdings noch nicht in der Dimension 1, weil da alles viel zu einfach ist, sondern erst in höheren Dimensionen:

Betrachten wir also die Ebene $\mathbb{K}^2$. Anstatt zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wählen wir jetzt drei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{K}^2$.

Wir nennen diese drei Vektoren eine *affine Basis* des $\mathbb{K}^2$, wenn ihr affiner Verbindungsraum der ganze $\mathbb{K}^2$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ und $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ eine Basis des $\mathbb{K}^2$ im Sinn der linearen Algebra sind. Einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^2$ können wir dann schreiben

$$\mathbf{v} = \mathbf{z} + (\mathbf{v} - \mathbf{z})$$

und $\mathbf{v} - \mathbf{z}$ können wir in der Basis $\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}$ entwickeln

$$\mathbf{v} - \mathbf{z} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{z}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Damit haben wir für $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{z} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + (1 - \lambda - \mu)\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}$$

mit $\lambda + \mu + \nu = 1$. Eine solche Darstellung von $\mathbf{v}$ ist eindeutig: Sei etwa

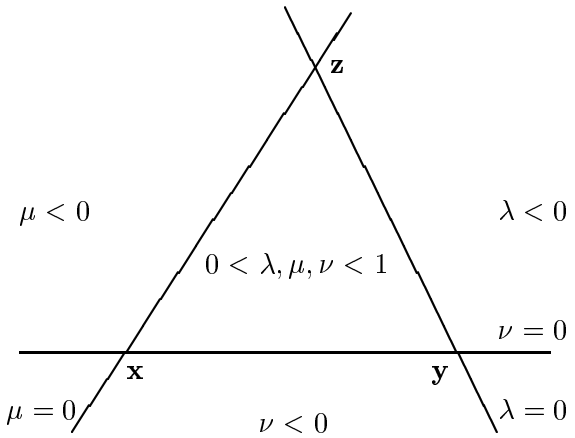
$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} = \lambda'\mathbf{x} + \mu'\mathbf{y} + \nu'\mathbf{z} \quad \text{mit} \quad \lambda + \mu + \nu = \lambda' + \mu' + \nu' = 1.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\lambda - \lambda')\mathbf{x} + (\mu - \mu')\mathbf{y} + (\nu - \nu')\mathbf{z} \\ &= (\lambda - \lambda')\mathbf{x} + (\mu - \mu')\mathbf{y} + (1 - \lambda - \mu - 1 + \lambda' + \mu')\mathbf{z} \\ &= (\lambda - \lambda')(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mu - \mu')(\mathbf{y} - \mathbf{z}), \end{aligned}$$

also $\lambda = \lambda'$ und $\mu = \mu'$, weil $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ und $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ linear unabhängig waren. Wir nennen diese drei Zahlen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda + \mu + \nu = 1$ die *affinen* oder *simplizialen Koordinaten* des Vektors $\mathbf{v}$ in Bezug auf das affine Koordinatensystem, bzw. das Dreieck $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{K}^2$.

Ähnlich wie im eindimensionalen Fall, können wir uns für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Vorzeichenverteilung ansehen:



Diese Koordinaten heißen baryzentrische Koordinaten, weil Baryzentrum ein schönes, akademisches Wort für Schwerpunkt ist, und weil der Schwerpunkt des Dreiecks $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die Koordinaten $(\lambda, \mu, \nu) = (1/3, 1/3, 1/3)$ hat. Der Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten (λ, μ, ν), ist eine Art gewichtetes Baryzentrum, ein Schwerpunkt, bei dem die drei Ecken die verschiedenen Gewichte λ, μ, ν haben.

Das Unschöne an diesen Koordinaten ist, daß wir drei Koordinaten brauchen, um einen Punkt in der (zweidimensionalen) Ebene zu beschreiben. Das ist natürlich eine Koordinate zu viel, weswegen die Relation $\lambda+\mu+\nu = 1$ die Freiheit wieder um eine Dimension erniedrigt. Andererseits haben diese Koordinaten die schöne Eigenschaft, daß sie unter affinen Transformationen erhalten bleiben: Hat

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

die baryzentrischen Koordinaten (λ, μ, ν) in Bezug auf das affine Dreieck $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, so hat sein Bildpunkt $F(\mathbf{v})$ unter der affinen Transformation $F = T \circ U$, also der Punkt

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= \mathbf{t} + U(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}) \\ &= \mathbf{t} + \lambda U(\mathbf{x}) + \mu U(\mathbf{y}) + \nu U(\mathbf{z}) \\ &= \lambda(\mathbf{t} + U(\mathbf{x})) + \mu(\mathbf{t} + U(\mathbf{y})) + \nu(\mathbf{t} + U(\mathbf{z})) \\ &= \lambda F(\mathbf{x}) + \mu F(\mathbf{y}) + \nu F(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

wieder dieselben baryzentrischen Koordinaten in Bezug auf das Bild-Dreieck $F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}), F(\mathbf{z})$.

Wenn man die baryzentrischen Koordinaten in zwei Dimensionen verstanden hat, ist der Übergang zu n Dimensionen einfach: Ein affines Koordinatensystem $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n$ des $\mathbb{K}^n$ besteht aus $n+1$ Vektoren $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{K}^n$. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ läßt sich dann eindeutig schreiben

$$\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{x}_0 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n, \quad \lambda_0 + ... + \lambda_n = 1.$$

Die Zahlen $\lambda_0, ..., \lambda_n$ heißen die baryzentrischen Koordinaten von $\mathbf{v}$ in Bezug auf $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n$. Im $\mathbb{R}^n$ haben ihre Vorzeichen dieselbe geometrische Bedeutung in Bezug auf das Simplex $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n$, wie es λ, μ, ν in der reellen Ebene in Bezug auf das Dreieck $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ hatten.

Aufgabe 2.5: Zeigen Sie

$$TV(\mathbf{a};\mathbf{b},\mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b};\mathbf{c},\mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c};\mathbf{a},\mathbf{b}) = -1$$

für je drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.

Aufgabe 2.6 (Satz von Varignon): Gegeben sei ein Viereck **abcd** in $\mathbb{K}^2$ (d.h., keine drei dieser Punkte seien kollinear). Zeigen sie daß die Mittelpunkte seiner Seiten **ab**, **bc**, **cd** und **da** die Ecken eines Parallelogramms bilden.

Aufgabe 2.7: Zeigen Sie: Genau dann sind die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks parallel, wenn $\mathbb{K}$ die Charakteristik 3 hat.

2.3 Lineare affine Geometrie der Ebene

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit einigen Aussagen der affinen Geometrie in der Ebene $\mathbb{K}^2$, die so elementar sind, daß man sie mit Hilfe von Geraden, ihren Schnittpunkten, usw., also mit linearen Methoden formulieren kann. Dazu sammeln wir zuerst etwas Formalismus zur Behandlung von Punkten und Geraden.

In 1.4 bemerkten wir, drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ sind kollinear (= liegen auf einer Geraden) genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] &= det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (b_1 c_2 - b_2 c_1) + (c_1 a_2 - c_2 a_1) \\
&= [\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}] + [\mathbf{c},\mathbf{a}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ist. In der euklidischen Geometrie waren die vorkommenden Determinanten als Flächen von Parallelogrammen zu interpretieren. In der affinen Geometrie macht der Begriff der Fläche keinen Sinn: bei affinen Transformationen werden Determinanten mit der Determinante der Transformationsmatrix multipliziert. Aber die Eigenschaft, ob eine Determinante $= 0$ ist oder nicht, die bleibt unter affinen Transformationen erhalten. In diesem Sinn gehört also das Kollinearitätskriterium für drei Punkte zur affinen Geometrie.

Aus dem Kollinearitätskriterium gewinnt man sehr schnell die Gleichung der Geraden, welche von zwei Punkten $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{K}^2$ aufgespannt wird. Dazu lassen wir $\mathbf{c} := \mathbf{x}$ im Kollinearitätskriterium laufen. Wir finden: Die Gerade durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ hat die Gleichung

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{b},\mathbf{x}] + [\mathbf{x},\mathbf{a}] = 0.$$

Ähnlich wie für drei Punkte auf einer Geraden brauchen wir ein Kriterium dafür, wann drei Geraden durch einen Punkt gehen. Dazu bestimmen wir zunächst den Schnittpunkt $\mathbf{s}$ zweier

nicht paralleler Geraden

$$L:\ \mathbf{a}+\mathbb{K}\cdot\mathbf{u},\quad M:\ \mathbf{b}+\mathbb{K}\cdot\mathbf{v}.$$

Daß die Geraden nicht parallel sind, bedeutet, ihre Richtungsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind linear unabhängig ($[\mathbf{u},\mathbf{v}]\neq 0$). Deswegen ist der Schnittpunkt $\mathbf{s}$ eine Linearkombination

$$\mathbf{s}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}$$

mit Koeffizienten $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, welche wir ermitteln wollen. Wir wissen

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}\in L &\Rightarrow \mathbf{s}=\mathbf{a}+t\cdot\mathbf{u},\ t\in\mathbb{K},\\
&\Rightarrow [\mathbf{s},\mathbf{u}]=[\mathbf{a},\mathbf{u}]=\mu[\mathbf{v},\mathbf{u}]\\
\mathbf{s}\in M &\Rightarrow \mathbf{s}=\mathbf{b}+t\cdot\mathbf{v},\ t\in\mathbb{K},\\
&\Rightarrow [\mathbf{s},\mathbf{v}]=[\mathbf{b},\mathbf{v}]=\lambda[\mathbf{u},\mathbf{v}]
\end{aligned}$$

$$\lambda=\frac{[\mathbf{b},\mathbf{v}]}{[\mathbf{u},\mathbf{v}]},\quad \mu=\frac{[\mathbf{a},\mathbf{u}]}{[\mathbf{v},\mathbf{u}]}.$$

Somit schreibt sich der Schnittpunkt

$$\mathbf{s}=\frac{1}{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\cdot([\mathbf{b},\mathbf{v}]\cdot\mathbf{u}-[\mathbf{a},\mathbf{u}]\cdot\mathbf{v}).$$

Wenn drei Geraden L,M und $N:\ \mathbf{c}+\mathbb{K}\cdot\mathbf{w}$ durch einen Punkt gehen, dann liegt der Schnittpunkt $\mathbf{s}$ von L und M auf N, der Vektor $\mathbf{s}-\mathbf{c}$ ist linear abhängig von $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{s}-\mathbf{c},\mathbf{w}] &= 0\\
[\mathbf{s},\mathbf{w}] &= [\mathbf{c},\mathbf{w}]\\
[\mathbf{b},\mathbf{v}]\cdot[\mathbf{u},\mathbf{w}]-[\mathbf{a},\mathbf{u}]\cdot[\mathbf{v},\mathbf{w}] &= [\mathbf{c},\mathbf{w}]\cdot[\mathbf{u},\mathbf{v}]\\
[\mathbf{a},\mathbf{u}]\cdot[\mathbf{v},\mathbf{w}]+[\mathbf{b},\mathbf{v}]\cdot[\mathbf{w},\mathbf{u}]+[\mathbf{c},\mathbf{w}]\cdot[\mathbf{u},\mathbf{v}] &= 0.
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt diese letzte Gleichung erfüllt, so gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $[\mathbf{u},\mathbf{v}]\neq 0$, wir können die Gleichungskette umkehren, und finden, daß sich die drei Geraden L,M und N in einem Punkt schneiden. Oder $[\mathbf{u},\mathbf{v}]=0$, etwa $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}$ und

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a},\mathbf{u}]\cdot[\mathbf{v},\mathbf{w}]+[\mathbf{b},\mathbf{v}]\cdot[\mathbf{w},\mathbf{u}] &= 0\\
\lambda\cdot([\mathbf{a},\mathbf{u}]\cdot[\mathbf{u},\mathbf{w}]+[\mathbf{b},\mathbf{u}]\cdot[\mathbf{w},\mathbf{u}]) &=\\
\lambda\cdot[\mathbf{u},\mathbf{w}]\cdot[\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{u}] &= 0.
\end{aligned}$$

Entweder ist auch $[\mathbf{w},\mathbf{u}]=0$, d.h., alle drei Geraden sind parallel, oder $\mathbf{b}$ liegt auf L, die Geraden L und M stimmen überein. Und wenn N nicht parallel zu $L=M$ ist, schneiden sich $L=M$ und N in einem Punkt.

Stellen wir alle Formeln noch einmal übersichtlich zusammen:

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ kollinear	$\Leftrightarrow$	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = 0$
Gerade durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$:		$\{\mathbf{x} : \ [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{a}] = 0\}$
Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{a} + \mathbb{K} \cdot \mathbf{u}$ und $\mathbf{b} + \mathbb{K} \cdot \mathbf{v}$:		$\frac{1}{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \cdot ([\mathbf{b}, \mathbf{v}] \cdot \mathbf{u} - [\mathbf{a}, \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v})$
$\mathbf{a} + \mathbb{K} \cdot \mathbf{u}, \ \mathbf{b} + \mathbb{K} \cdot \mathbf{v}$ und $\mathbf{c} + \mathbb{K} \cdot \mathbf{w}$ kopunktal oder parallel	$\Leftrightarrow$	$[\mathbf{a}, \mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{b}, \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{w}, \mathbf{u}] + [\mathbf{c}, \mathbf{w}] \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0.$

Ein Dreieck geht unter einer affinen Transformation wieder in ein Dreieck über, aber Seitenlängen und Winkel ändern sich im Allgemeinen. Die Winkelhalbierenden, Höhen und Mittelsenkrechten sind deswegen unter affinen Transformationen nicht invariant. Allein die Seitenhalbierenden gehören zur affinen Geometrie. Der Mittelpunkt einer Dreiecksseite ist ein affiner Begriff, ebenso wie die Gerade, die diesen Mittelpunkt mit der gegenüber liegenden Ecke verbindet. Der Satz über den Schwerpunkt des Dreiecks, in dem sich alle drei Seitenhalbierenden schneiden, ist deshalb ein Satz der affinen Geometrie, die anderen drei Schnittpunktsätze am Dreieck nicht! Wir formulieren den Schnittpunktssatz für den Schwerpunkt ein klein wenig präziser:

Satz (Schwerpunkt im Dreieck): *Die drei Seitenhalbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Dreiecksschwerpunkt. Dieser Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis zwei zu eins.*

Beweis. Aus (1.5) wissen wir

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Der Schwerpunkt $\mathbf{s}$ teilt also die Strecke zwischen der Ecke $\mathbf{a}$ und der gegenüberliegenden Seitenmitte $\mathbf{m}_a = (\mathbf{b} + \mathbf{c})/2$ im Verhältnis

$$TV(\mathbf{s}; \mathbf{a}, \mathbf{m}_a) = -2.$$

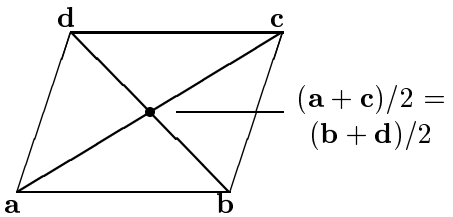
Der Abstand von $\mathbf{s}$ zu $\mathbf{a}$ ist doppelt so groß, wie der Abstand zu $\mathbf{m}_a$. □

Ein ähnlicher Teilungssatz gilt für die Diagonalen im Parallelogramm:

Satz (Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm): *Für ein Viereck* **abcd** *in* $\mathbb{K}^2$ *sind äquivalent:*

a) die Seiten **ab** *und* **cd**, *sowie* **ad** *und* **bc** *sind paarweise parallel,*

b) die Diagonalen **ac** *und* **bd** *halbieren sich gegenseitig.*



Beweis. Sei ein Viereck mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{K}^2$ gegeben.

a) $\Rightarrow$ b): Die Voraussetzung ist

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ \mathbf{d} - \mathbf{a} = \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

oder

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Wenn die Vektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ und $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ linear abhängig wären, hätten wir kein Viereck, sondern einen Strich. Das schließen wir aus. Also folgt aus der letzten Gleichung $\lambda = \mu = 1$ und

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}, \quad \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$

Die Diagonalen schneiden sich in ihren Mittelpunkten.

b) $\Rightarrow$ a): Jetzt ist die Voraussetzung

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$

Daraus folgt $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ oder $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$. Die Seiten $\mathbf{ab}$ und $\mathbf{cd}$ sind parallel und gleich lang. Ebenso ist $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$, auch die beiden anderen Seiten sind parallel und gleich lang. □

Wir wollen noch zwei Aussagen über Teilverhältnisse am Dreieck behandeln, die man in der Schule normalerweise nicht kennenlernt.

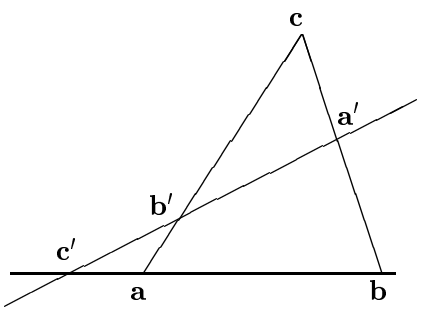
Satz (Menelaos, Ceva): *Auf den Seiten eines Dreiecks* $\mathbf{abc}$ *in* $\mathbb{K}^2$ *seien Punkte* $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}, \mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$ *und* $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ *gewählt, verschieden von den Eckpunkten. Dann gilt:*

a) (Satz von Menelaos:) Die drei Punkte $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ *und* $\mathbf{c}'$ *liegen auf einer Geraden, genau dann wenn*

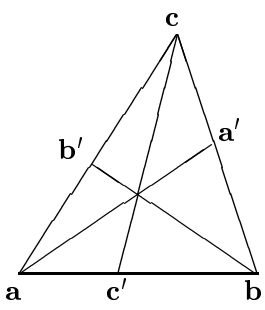
$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1.$$

b) (Satz von Ceva:) Die drei Geraden $\mathbf{aa}', \mathbf{bb}'$ *und* $\mathbf{cc}'$ *schneiden sich in einem Punkt (oder sind parallel), genau dann wenn*

$$TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1.$$



Menelaos



Ceva

Beweis. Die Punkte auf den Dreiecks-Seiten setzen wir an

$$\mathbf{a}' = \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{c}, \quad \mathbf{b}' = \mu\mathbf{c} + (1-\mu)\mathbf{a}, \quad \mathbf{c}' = \nu\mathbf{a} + (1-\nu)\mathbf{b}.$$

a) Satz von Menelaos: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}', \mathbf{b}'] &= [\lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{c}, \mu\mathbf{c} + (1-\mu)\mathbf{a}] \\
&= \lambda\mu[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \lambda(1-\mu)[\mathbf{b}, \mathbf{a}] + (1-\lambda)(1-\mu)[\mathbf{c}, \mathbf{a}] \\
&= \lambda(\mu-1)[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \lambda\mu[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + (1-\lambda)(1-\mu)[\mathbf{c}, \mathbf{a}].
\end{aligned}$$

Entsprechend ist (zylisches Vertauschen der Buchstaben)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{b}', \mathbf{c}'] &= (1-\mu)(1-\nu)[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \mu(\nu-1)[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \mu\nu[\mathbf{c}, \mathbf{a}] \\
[\mathbf{c}', \mathbf{a}'] &= \nu\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + (1-\nu)(1-\lambda)[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \nu(\lambda-1)[\mathbf{c}, \mathbf{a}].
\end{aligned}$$

Die Summe

$$[\mathbf{a}', \mathbf{b}'] + [\mathbf{b}', \mathbf{c}'] + [\mathbf{c}', \mathbf{a}']$$

ist deswegen eine Linearkombination der Determinanten

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \quad \text{und} \quad [\mathbf{c}, \mathbf{a}],$$

wo sich der Koeffizient k bei $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ zu

$$\begin{aligned}
k &= \lambda(\mu-1) + (1-\mu)(1-\nu) + \nu\lambda \\
&= \lambda\mu - \lambda + 1 - \nu - \mu + \mu\nu + \nu\lambda \\
&= 1 + (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) - (\lambda + \mu + \nu)
\end{aligned}$$

ergibt. Dieser Ausdruck ist symmetrisch in λ, μ und ν. Er steht deswegen auch bei $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ und $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$. Mit dem Kollinearitätskriterium vom Anfang dieses Paragraphen sehen wir: Die Punkte $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ und $\mathbf{c}'$ sind kollinear, genau dann, wenn

$$k \cdot ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = 0$$

ist. Weil $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ nicht kollinear sein sollen, ist die Summe in der Klammer $\neq 0$. Die Bedingung für die Kollinearität von $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ ist also $k = 0$.

Andererseits ist das Produkt der Teilverhältnisse

$$\frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \frac{\nu-1}{\nu} = \frac{1}{\lambda\mu\nu} \cdot (\lambda\mu\nu - (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + \lambda + \mu + \nu - 1) = \frac{\lambda\mu\nu - k}{\lambda\mu\nu}.$$

Und dieses Produkt ist genau dann $= 1$, wenn $k = 0$ ist.

b) Satz von Ceva: Nehmen wir erst einmal an, die drei Transversalen $\mathbf{aa}'$, $\mathbf{bb}'$ und $\mathbf{cc}'$ schneiden sich in einem Punkt $\mathbf{p}$. Jetzt wenden wir den Satz von Menelaos zweimal an:

Zuerst auf das Teildreieck $\mathbf{ac}'\mathbf{c}$ und die Gerade $\mathbf{bb}'$. Es folgt

$$TV(\mathbf{b}; \mathbf{a}, \mathbf{c}') \cdot TV(\mathbf{p}; \mathbf{c}', \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) = 1.$$

Und dann auf das Teildreieck $\mathbf{c}'\mathbf{bc}$ mit der Geraden $\mathbf{aa}'$. Jetzt folgt

$$TV(\mathbf{a};\mathbf{c}',\mathbf{b})\cdot TV(\mathbf{a}';\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot TV(\mathbf{p};\mathbf{c},\mathbf{c}')=1.$$

Mit den Regeln für die Änderung des Teilverhältnisses bei Vertauschung der beteiligten Punkte aus 2.2 sehen wir

$$TV(\mathbf{p};\mathbf{c},\mathbf{c}')\cdot TV(\mathbf{p};\mathbf{c}',\mathbf{c})=1.$$

Multiplizieren wir die Menelaos-Gleichungen für die beiden Teildreiecke, so finden wir also

$$[TV(\mathbf{b};\mathbf{a},\mathbf{c}')\cdot TV(\mathbf{a};\mathbf{c}',\mathbf{b})]\cdot TV(\mathbf{a}';\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot TV(\mathbf{b}';\mathbf{c},\mathbf{a})=1.$$

Um das Produkt der beiden Teilverhältnisse in der eckigen Klammer auszuwerten benutzen wir wieder die Vertauschungsregeln aus 2.2:

$$\begin{aligned}
TV(\mathbf{c}';\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{\nu-1}{\nu}\\
TV(\mathbf{b};\mathbf{a},\mathbf{c}') &= \frac{1}{\nu}\\
TV(\mathbf{a};\mathbf{c}',\mathbf{b}) &= 1-\nu\\
TV(\mathbf{b};\mathbf{a},\mathbf{c}')\cdot TV(\mathbf{a};\mathbf{c}',\mathbf{b}) &= \frac{1-\nu}{\nu}\\
&= -TV(\mathbf{c}';\mathbf{a},\mathbf{b}).
\end{aligned}$$

Und mit dem Minus-Zeichen aus der letzten Gleichung folgt die Ceva-Gleichung

$$TV(\mathbf{a}';\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot TV(\mathbf{b}';\mathbf{c},\mathbf{a})\cdot TV(\mathbf{c}';\mathbf{a},\mathbf{b})=-1.$$

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, die Ceva-Gleichung

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}=-1$$

sei erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Entweder sind zwei der Transversalen parallel, etwa $\mathbf{aa}'\parallel\mathbf{bb}'$. Mit dem Strahlensatz sehen wir, daß dies genau dann passiert, wenn

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}=TV(\mathbf{a}';\mathbf{b},\mathbf{c})=TV(\mathbf{a};\mathbf{b}',\mathbf{c})=\mu$$

ist. Aus der Ceva-Gleichung erhalten wir dann für μ und ν die Beziehung

$$\begin{aligned}
(\mu-1)\cdot\frac{\nu-1}{\nu} &= -1\\
1-\frac{1}{\nu} &= \frac{1}{1-\mu}\\
\frac{1}{\nu} &= 1-\frac{1}{1-\mu}\\
&= -\frac{\mu}{1-\mu}\\
\nu &= \frac{\mu-1}{\mu}.
\end{aligned}$$

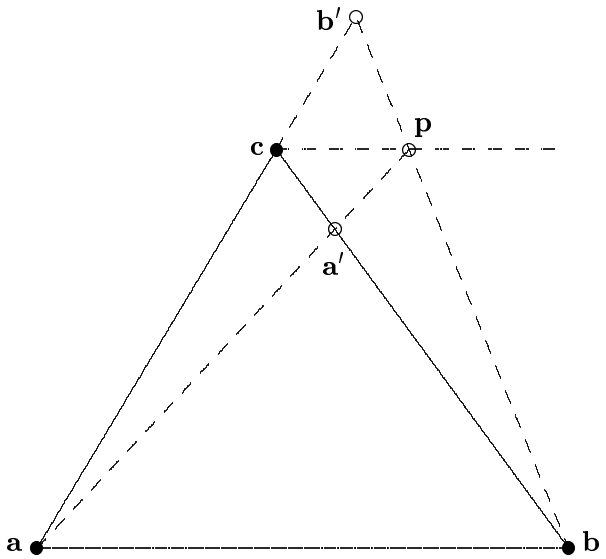
Das bedeutet aber $\mathbf{bb}' \parallel \mathbf{cc}'$. Alle drei Transversalen sind parallel, ok.

Oder, keine zwei der Transversalen sind parallel, je zwei davon schneiden sich. Sei etwa $\mathbf{p}$ der Schnittpunkt von $\mathbf{aa}'$ und $\mathbf{bb}'$. Wir müssen zeigen, die Gerade $\mathbf{cc}'$ geht auch durch $\mathbf{p}$. Oder, äquivalent dazu: Die Gerade $\mathbf{cp}$ trifft die Seite $\mathbf{ab}$ in $\mathbf{c}'$. Sei dazu $\mathbf{c}''$ der Schnittpunkt dieser Geraden $\mathbf{cp}$ mit der Seite $\mathbf{ab}$. Dann gilt nach der Richtung des Satzes, welche wir schon bewiesen haben für $\mathbf{c}''$, und wegen der vorausgesetzten Ceva-Gleichung für $\mathbf{c}'$

$$TV(\mathbf{c}''; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{TV(\mathbf{a}'; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a})} = TV(\mathbf{c}'; \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Weil das Teilverhältnis den zugehörigen Teilungspunkt eindeutig festlegt, folgt $\mathbf{c}' = \mathbf{c}''$ und wir sind fertig.

Fast! Denn ein für die affine Geometrie typisches Problem haben wir leider übersehen: Hat die Gerade $\mathbf{cp}$ denn überhaupt einen Schnittpunkt mit der Seite $\mathbf{ab}$. Warum ist diese Gerade nicht parallel zur Dreiecksseite? Nehmen wir also an, die Gerade $\mathbf{cp}$ sei parallel zur Seite $\mathbf{ab}$:



Dann wenden wir den Strahlensatz auf das Dreieck $\mathbf{abb}'$ an. Dies zeigt

$$TV(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b}') = TV(\mathbf{c}; \mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

Mit dem Satz von Menelaos für das Dreieck $\mathbf{bb}'\mathbf{c}$ und die Gerade $\mathbf{ap}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} TV(\mathbf{c}; \mathbf{a}, \mathbf{b}') \cdot TV(\mathbf{a}; \mathbf{b}', \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{a}'; \mathbf{c}, \mathbf{b}) &= \\ TV(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b}') \cdot TV(\mathbf{a}; \mathbf{b}', \mathbf{c}) \cdot TV(\mathbf{a}'; \mathbf{c}, \mathbf{b}) &= 1. \end{aligned}$$

Nun ist

$$TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad TV(\mathbf{c}; \mathbf{a}, \mathbf{b}') = \frac{1}{1 - \mu}, \quad TV(\mathbf{a}; \mathbf{b}', \mathbf{c}) = \mu,$$

also

$$TV(\mathbf{c}; \mathbf{a}, \mathbf{b}') \cdot TV(\mathbf{a}; \mathbf{b}', \mathbf{c}) = \frac{\mu}{1 - \mu} = -\frac{1}{TV(\mathbf{b}'; \mathbf{c}, \mathbf{a})}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{TV(\mathbf{a}';\mathbf{c},\mathbf{b})}{TV(\mathbf{b}';\mathbf{c},\mathbf{a})} &= 1 \\ \frac{1}{TV(\mathbf{a}';\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot TV(\mathbf{b}';\mathbf{c},\mathbf{a})} &= -1. \end{aligned}$$

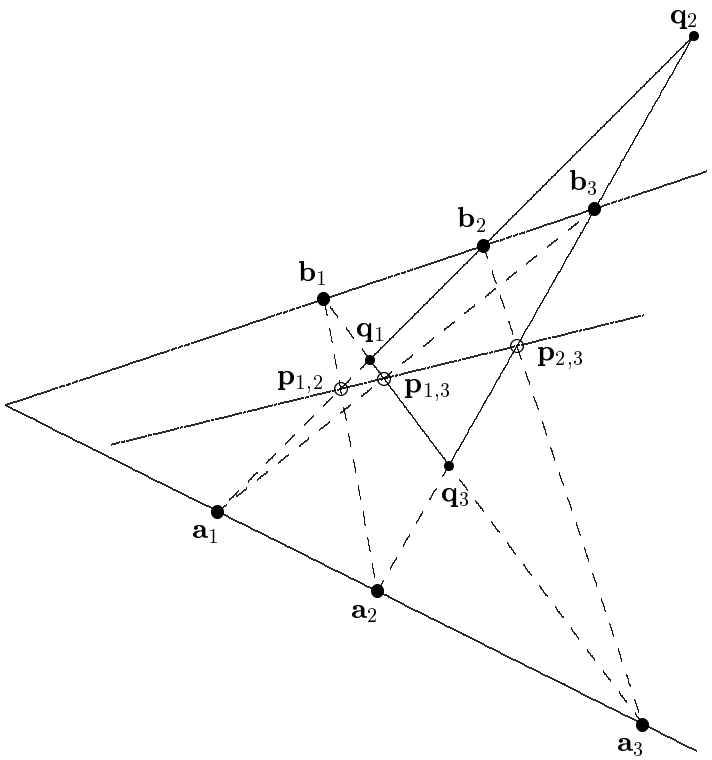
Wegen der Ceva-Gleichung haben wir

$$TV(\mathbf{c}';\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$$

bewiesen. Was ist daran so schlimm? Na ja, ein $TV = (\nu - 1)/\nu = 1$ gibt es nicht, da müßte ja $\nu = \nu - 1$ sein. Widerspruch! □

Wir behandeln noch zwei Sätze, die man eigentlich schon zur projektiven Geometrie zählt:

Satz (Satz von Pappos): *Gegeben seien zwei, sich schneidende Geraden L und $M \subset \mathbb{K}^2$ und darauf zwei Tripel $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in L$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in M$ von Punkten, die alle voneinander und vom Schnittpunkt $L \cap M$ verschieden sein sollen. Wir bilden die sechs Verbindungsgeraden $L_{i,j} := \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j, i \neq j$. Wenn keine der Geradenpaare $L_{1,2}, L_{2,1}$, sowie $L_{1,3}, L_{3,1}$ und $L_{2,3}, L_{3,2}$ parallel sind, liegen ihre drei Schnittpunkte $\mathbf{p}_{i,j} := L_{i,j} \cap L_{j,i}$, $i \neq j$, auf einer Geraden.*



Beweis. Alle beteiligten Punkte liegen auf den drei Geraden $L_{1,2}, L_{2,3}$ und $L_{3,1}$. Diese drei Geraden bilden ein Dreieck, dessen Ecken wir

$$\mathbf{q}_1 := L_{3,1} \cap L_{1,2}, \quad \mathbf{q}_2 := L_{1,2} \cap L_{2,3}, \quad \mathbf{q}_3 = L_{2,3} \cap L_{3,1}$$

nennen wollen. In diesem Dreieck wenden wir jetzt fünfmal den Satz von Menelaos an, und zwar auf die Geraden

$$\begin{array}{ll} L_{2,1}: & TV(\mathbf{p}_{1,2};\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\cdot TV(\mathbf{a}_2;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\cdot TV(\mathbf{b}_1;\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1)=1\\ L_{3,2}: & TV(\mathbf{b}_2;\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\cdot TV(\mathbf{p}_{2,3};\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\cdot TV(\mathbf{a}_3;\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1)=1\\ L_{1,3}: & TV(\mathbf{a}_1;\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\cdot TV(\mathbf{b}_3;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\cdot TV(\mathbf{p}_{1,3};\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1)=1\\ \hline L: & TV(\mathbf{a}_1;\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\cdot TV(\mathbf{a}_2;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\cdot TV(\mathbf{a}_3;\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1)=1\\ M: & TV(\mathbf{b}_2;\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\cdot TV(\mathbf{b}_3;\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\cdot TV(\mathbf{b}_1;\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1)=1. \end{array}$$

Jetzt multiplizieren wir die ersten drei dieser Gleichungen und dividieren durch das Produkt der letzten beiden. Dabei kürzen sich alle Teilverhältnisse heraus, in denen Punkte $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ vorkommen, und übrig bleibt die Gleichung

$$TV(\mathbf{p}_{1,2};\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\cdot TV(\mathbf{p}_{2,3};\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\cdot TV(\mathbf{p}_{1,3};\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_1)=1.$$

mit dem Satz von Menelaos folgt, daß die Punkte $\mathbf{p}_{1,2}, \mathbf{p}_{2,3}$ und $\mathbf{p}_{1,3}$ kollinear sind. □

Diesen wunderschönen, kurzen Beweis habe ich aus dem Buch von Coxeter und Greitzer abgeschrieben. Die Autoren nennen den entscheidenden Beweisschritt 'indulging in a veritable orgy of cancellation'. Wie gesagt, wunderschön. Aber wie steht es mit dem ewigen Problem der affinen Geometrie? Was passiert, wenn zwei der Geraden $L_{1,2}, L_{2,3}, L_{3,1}$ parallel sind? Da müßte man jetzt anfangen, einzelne Spezialfälle zu analysieren. Das ist halt der Preis der Schönheit. Das möchte ich aber nicht tun. Ich möchte den Satz innerhalb der projektiven Geometrie noch einmal behandeln. Dort werden derartige Probleme keine Rolle mehr spielen.

Satz (Satz von Desargues): *Gegeben seien drei Geraden $L, M, N \subset \mathbb{K}^2$, die einen Punkt $\mathbf{o}$ gemeinsam haben mögen, sowie auf diesen Geraden drei Paare von Punkten*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in L, \quad \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in M, \quad \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in N,$$

die voneinander und von $\mathbf{o}$ verschieden sein mögen. Diese drei Punktepaare definieren zwei Dreiecke, deren Seiten

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i,\ \mathbf{b}_i\mathbf{c}_i,\ \mathbf{c}_i\mathbf{a}_i, \quad i=1,2$$

einander entsprechen. Entweder sind dann zwei einander entsprechende Seiten parallel oder die drei Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Seiten liegen auf einer Geraden.

Beweis. Wieder verwenden wir den Satz von Menelaos, und zwar in den folgenden drei Situationen:

Dreieck	Gerade	Relation
$\mathbf{o}\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$	$\mathbf{a}_2\mathbf{p}_{ab}\mathbf{b}_2$	$TV(\mathbf{a}_2;\mathbf{o},\mathbf{a}_1)\cdot TV(\mathbf{p}_{ab};\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1)\cdot TV(\mathbf{b}_2;\mathbf{b}_1,\mathbf{o})=1,$
$\mathbf{o}\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$	$\mathbf{b}_2\mathbf{p}_{bc}\mathbf{c}_2$	$TV(\mathbf{b}_2;\mathbf{o},\mathbf{b}_1)\cdot TV(\mathbf{p}_{bc};\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_1)\cdot TV(\mathbf{c}_2;\mathbf{c}_1,\mathbf{o})=1,$
$\mathbf{o}\mathbf{c}_1\mathbf{a}_1$	$\mathbf{c}_2\mathbf{p}_{ac}\mathbf{a}_2$	$TV(\mathbf{c}_2;\mathbf{o},\mathbf{c}_1)\cdot TV(\mathbf{p}_{ac};\mathbf{c}_1,\mathbf{a}_1)\cdot TV(\mathbf{a}_2;\mathbf{a}_1,\mathbf{o})=1.$

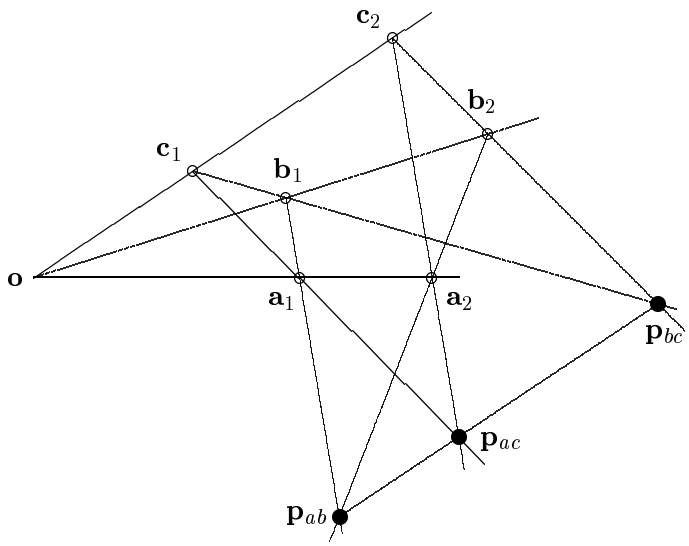
Beim Multiplizieren dieser drei Zeilen kürzen sich die Produkte

$$\begin{aligned} TV(\mathbf{a}_2;\mathbf{o},\mathbf{a}_1)\cdot TV(\mathbf{a}_2;\mathbf{a}_1,\mathbf{o}) &= 1\\ TV(\mathbf{b}_2;\mathbf{o},\mathbf{b}_1)\cdot TV(\mathbf{b}_2;\mathbf{b}_1,\mathbf{o}) &= 1\\ TV(\mathbf{c}_2;\mathbf{o},\mathbf{c}_1)\cdot TV(\mathbf{c}_2;\mathbf{c}_1,\mathbf{o}) &= 1 \end{aligned}$$

heraus. Übrig bleibt

$$TV(\mathbf{p}_{ab};\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1)\cdot TV(\mathbf{p}_{bc};\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_1)\cdot TV(\mathbf{p}_{ac};\mathbf{c}_1,\mathbf{a}_1)=1.$$

Und wieder folgt aus dem Satz von Menelaos (am Dreieck $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$), daß die drei Schnittpunkte $\mathbf{p}_{ab}, \mathbf{p}_{bc}$ und $\mathbf{p}_{ac}$ kollinear sind. □



Wieder ein wunderschöner Beweis. Und wieder habe ich ihn aus Coxeter-Greitzer übernommen.

Aufgabe 2.8: Auf den Seiten eines Dreiecks **abc** seien Punkte $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ (keine Eckpunkte) so ausgewählt, daß sich die Verbindungsgeraden in einem Punkt schneiden. Die Punkte $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c$ seien die Mitten der Strecken $\overline{\mathbf{aa}'}$, $\overline{\mathbf{bb}'}$, $\overline{\mathbf{cc}'}$. Weiter seien $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$ die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $\overline{\mathbf{bc}}$, $\overline{\mathbf{ca}}$, $\overline{\mathbf{ab}}$. Zeigen Sie, daß sich die Verbindungsgeraden $\mathbf{m}_a\mathbf{q}_a$, $\mathbf{m}_b\mathbf{q}_b$ und $\mathbf{m}_c\mathbf{q}_c$ in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2.9: Ein Kreis berühre die drei Seiten eines Dreiecks in den Punkten $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$. Zeigen Sie, daß sich die drei Verbindungsgeraden $\mathbf{aa}'$, $\mathbf{bb}'$ und $\mathbf{cc}'$ in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2.10: Es seien $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$ und $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$ die Berührpunkte der drei Ankreise des Dreiecks **abc**. Zeigen Sie, daß sich die drei Verbindungsgeraden $\mathbf{aa}'$, $\mathbf{bb}'$ und $\mathbf{cc}'$ in einem Punkt treffen.

Aufgabe 2.11: In einem nicht-gleichschenkligen Dreieck trifft die äußere Winkelhalbierende einer jeden Ecke die gegenüberliegende Seite. Die drei Schnittpunkte seien $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$ usw. Zeigen Sie, daß diese drei Punkte $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{c}'$ kollinear sind.

Aufgabe 2.12: In einem Dreieck **abc** möge die Winkelhalbierende zur Ecke **a** die Seite **bc** in $\mathbf{a}'$ schneiden, die Winkelhalbierende zur Ecke **b** die Seite **ca** im Punkt $\mathbf{b}'$. Die äußere

Winkelhalbierende der Ecke **c** treffe die Seite **ab** im Punkt $\mathbf{c}'$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{c}'$ kollinear sind.

2.4 Ellipsen

Was wäre die euklidische Geometrie ohne Kreise? Langweilig! Leider gehören Kreise nicht zu den Gegenständen der affinen Geometrie. Betrachten wir etwa das Bild des Kreises

$$K: \quad x^2 + y^2 = 1$$

unter der linearen Abbildung

$$U : (x, y) \mapsto (a \cdot x, b \cdot y).$$

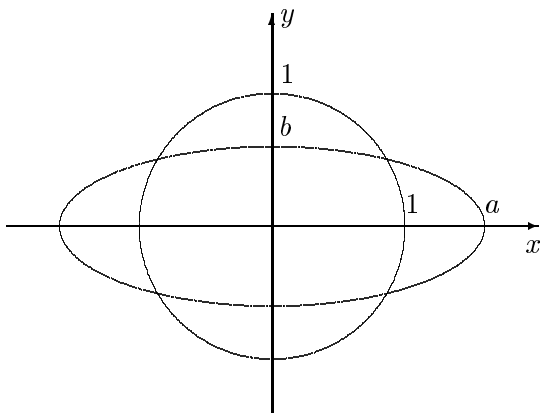
Das ist also die Menge

$$U(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U^{-1}(x, y) \in K\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}.$$

Es ist ein Kreis, der in x–Richtung mit dem Streckungsfaktor a und in y–Richtung mit dem Streckungs- faktor b gedehnt wurde. So ein verdehnter Kreis heißt (achsenparallele) *Ellipse* mit den Halbachsen a und b, ihre Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und sie sieht so aus:



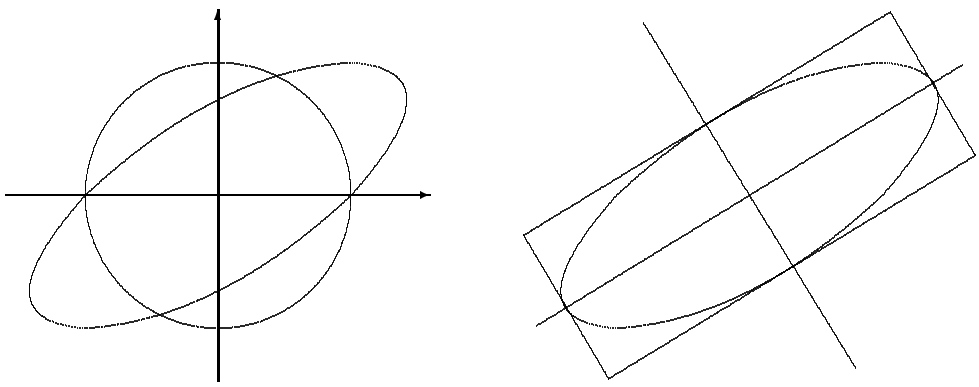
Nun war unsere lineare Abbildung U noch ziemlich moderat. Dem Kreis kann noch viel schlimmeres passieren, etwa unter der linearen Abbildung

$$U : (x, y) \mapsto (x + y, y).$$

Jetzt ist $U^{-1}(x,y) = (x-y, y)$, das Bild $U(K)$ hat die Gleichung

$$(x-y)^2 + y^2 = x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$$

und sieht so aus:



Das sieht eigentlich immer noch wie eine Ellipse aus, nur keine achsenparallele! Der Grund ist einfach: Jede affine Transformation der Ebene bildet Kreise immer auf Ellipsen ab. Genauer gesagt: Unter einer Ellipse verstehen wir das Bild einer achsenparallelen Ellipse unter einer *Bewegung*. Dann gilt:

Satz 7 (Affine Bilder von Kreisen): *Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Transformation. Dann ist das Bild $F(K)$ des Kreises unter F eine Ellipse.*

Beweis. Translationen T sind Bewegungen, deshalb ist das Bild einer Ellipse unter einer Translation immer wieder eine Ellipse. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $F = U$ eine invertierbare lineare Abbildung ist.

$$K: \ \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x} = 1$$

die Gleichung

$$(U^{-1} \cdot \mathbf{x})^t \cdot (U^{-1} \cdot \mathbf{x}) == \mathbf{x}^t \cdot (U^{-1})^t U^{-1} \cdot \mathbf{x} = 1.$$

Die Matrix $(U^{-1})^t U^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit. Nach dem Satz von der Hauptachsentransformation gibt es also eine orthogonale Matrix S derart, daß

$$S \cdot (U^{-1})^t U^{-1} \cdot S^{-1} == ((SU)^{-1})^t \cdot (SU)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\alpha, \beta > 0$ ist. Dazu gehört die achsenparallele Ellipse

$$E: \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 1.$$

Und wir haben die Beziehung

$$S(U(K)) = E, \quad U(K) = S^{-1}(E).$$

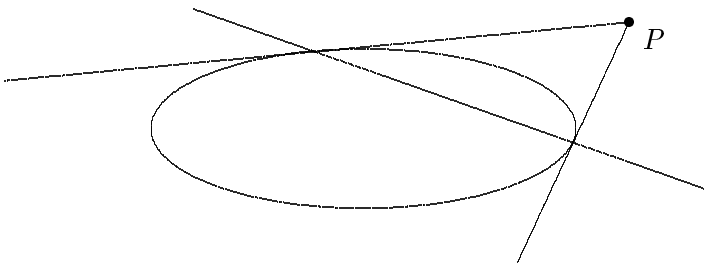
Mit der Hauptachsentransformation ist alles bewiesen. □

Natürlich folgt aus diesem Satz, durch Hintereinanderanwendung der linearen Transformationen, daß jedes affine Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse ist. Damit sind Ellipsen Objekte der affinen Geometrie des $\mathbb{R}^2$ und wir dürfen sie uns anschauen.

Wir listen jetzt noch einige geometrische Eigenschaften von Ellipsen auf, die sich vom Kreis auf seine affinen Bilder übertragen:

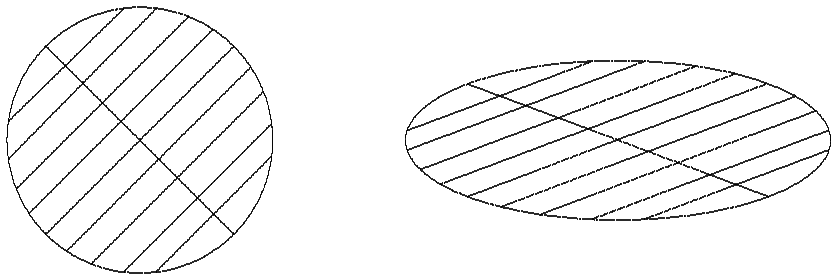
Eine Gerade kann zum Kreis drei verschiedene Beziehungen haben. Entweder schneidet sie ihn nicht, oder sie schneidet ihn in zwei Punkten (Sekante), oder sie berührt ihn in einem Punkt (Tangente). Eine affine Transformation ändert daran nichts. Also kann eine Gerade eine gegebene Ellipse entweder nicht schneiden, in zwei Punkten schneiden (Sekante der Ellipse) oder in einem Punkt berühren (Tangente an die Ellipse). Ist die Ellipse $E = F(K)$ ein affines Bild des Kreises K, so sind die Tangenten an E gerade die affinen Bilder $F(L)$ der Tangenten L an den Kreis K.

Durch einen Punkt P, der außerhalb der Ellipse E liegt, gibt es genau zwei verschiedene Tangenten an E. Die Verbindungsgerade der beiden zugehörigen Berührpunkte heißt die *Polare* von P bezüglich E.



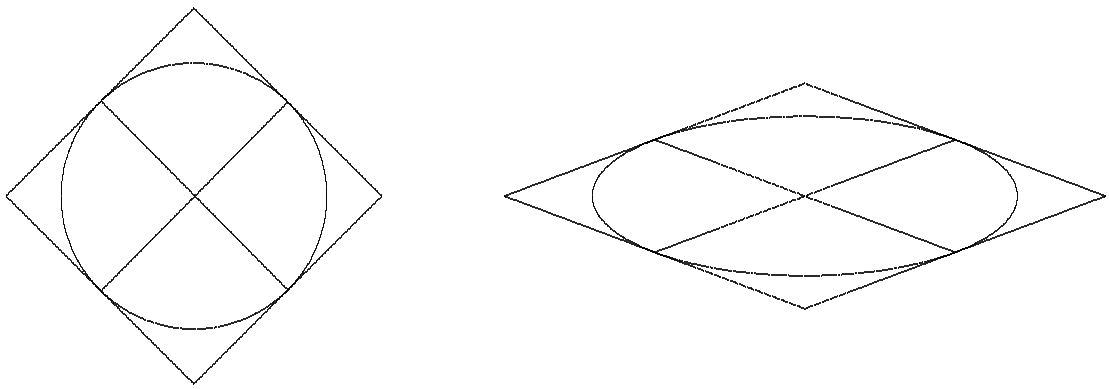
Ein Kreis hat einen Mittelpunkt. Unter der affinen Abbildung F geht der Mittelpunkt des Kreises K auf den Mittelpunkt der Ellipse $F(K)$. Wie kann man den Mittelpunkt der Ellipse mit den Spielregeln der affinen Geometrie definieren? Dazu müßte man den Mittelpunkt des Kreises affin definieren: Der Mittelpunkt des Kreises ist der Punkt, wo sich alle Durchmesser treffen. Was ist ein Durchmesser? Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt geht. So geht's nicht. Probieren wir es anders:

Betrachten wir eine Schar paralleler Sekanten. Ihre Mittelpunkte liegen alle auf einer Geraden, und die ist ein Durchmesser! So geht's. Wenn wir jetzt die affine Abbildung F anwenden, bekommen wir eine Schar paralleler Sekanten der Ellipse. Ihre Mittelpunkte liegen alle auf einer Geraden. So eine Gerade heißt *Durchmesser* der Ellipse. Alle Durchmesser der Ellipse treffen sich in einem Punkt (weil sie das im Kreis tun), dieser Punkt heißt *Mittelpunkt* der Ellipse.



Im Bild des Kreises sieht man ganz deutlich, daß der Durchmesser, der von den Mittelpunkten der parallelen Sekanten überstrichen wird, senkrecht auf diesen Sekanten steht. (Beweisen kann man dies, nachdem man den Kreis so dreht, daß die Sekanten z.B. die Parallelen zur x–Achse sind. Der Durchmesser ist dann die y–Achse.) In der Parallelschar gibt es natürlich auch einen Durchmesser, und der steht auf dem anderen Durchmesser senkrecht.

Die Bilder zweier aufeinander senkrecht stehenden Durchmesser des Kreises stehen in der Ellipse i.a. nicht mehr senkrecht aufeinander. Trotzdem gibt man ihnen einen besonderen Namen: Zwei Durchmesser der Ellipse heißen *konjugiert*, wenn sie Bilder zweier aufeinander senkrecht stehender Durchmesser des Kreises sind. Sie haben ein besonderes Verhältnis zueinander: *Die beiden Tangenten der Ellipse, in den zwei Punkten, wo der Durchmesser die Ellipse schneidet, sind parallel zum konjugierten Durchmesser.* Das ist so, weil es am Kreis so ist, und weil sich diese Eigenschaft bei affinen Transformationen nicht ändert.



Was wir hier in Worten gesagt haben, kann man natürlich auch alles in Formeln ausrechnen. Wir wollen dies hier aber noch nicht tun, weil wir in einer allgemeineren Situation noch einmal darauf zurück kommen werden.

Aufgabe 2.13: Eine Ellipse berühre die drei Seiten eines Dreiecks. Zeigen Sie, daß die drei Verbindungsgeraden der Ecken des Dreiecks mit den Berührpunkten auf den gegenüberliegenden Seiten sich in einem Punkt treffen.

Aufgabe 2.14: Gegeben sei eine Ellipse E. Berechnen Sie die Fläche eines Quadrats, dessen Seiten parallel zu den Achsen der Ellipse sind, und dessen Ecken auf E liegen.

Aufgabe 2.15: Bestimmen sie die maximale Fläche eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Achsen einer Ellipse E sind, und dessen Ecken auf E liegen.

2.5 Kegelschnitte

In diesem Paragraphen wird es ziemlich auf Vorzeichen ankommen. Wir setzen deshalb $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ voraus.

Die Gleichung einer Ellipse erhält man aus einer quadratischen Funktion $q(x, y)$ der Variablen x und y. Im einfachsten Fall, achsenparallel und mit Mittelpunkt im Ursprung, sieht die Gleichung so aus:

$$q(x, y) = \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 - 1 = 0.$$

In diesem Paragraphen wollen wir ganz allgemein solche quadratischen Ausdrücke

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad a, b, ..., f \in \mathbb{R}$$

betrachten und fragen:

- Wann ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) = 0\}$ eine Ellipse?
- Wenn sie keine Ellipse ist, was ist sie dann?

Wenn $d = e = 0$ ist, hat q die schöne Symmetrie $q(-x, -y) = q(x, y)$. Solche Gleichungen wollen wir zuerst behandeln.

Wir gehen genauso vor, wie bei den Ellipsen: Die Matrix der quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

können wir, nach dem Satz über die Hauptachsentransformation, durch eine orthogonale Matrix U diagonalisieren:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Matrix U kann eine Drehmatrix sein ($det(U) = 1$) oder eine Drehspiegelung ($det(U) = -1$). Wem eine Drehspiegelung zu unheimlich ist, der kann von U übergehen zu

$$U' := U \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Falls $det(U) = -1$ war, dann ist $det(U') = 1$, und U' ist eine Drehung. Die Matrix U' diagonalisiert unsere quadratische Form genauso wie es die Matrix U tat. Wir können also annehmen, daß die Hauptachsentransformation durch eine Drehung U geschieht. Nach der Drehung ist die Form diagonali- siert. Bis auf diese Drehung haben wir es also mit einer Funktion

$$q(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + f = 0$$

zu tun.

Wir müssen jetzt eine ganze Menge von Fällen unterscheiden. Um deren Anzahl möglichst klein zu halten, werden wir die Fälle nicht unterscheiden, die durch Vertauschen von x und y auseinader hervorgehen. Dieses Vertauschen kann man ja durch eine Drehung $(x, y) \mapsto (y, -x)$ um 90 Grad erreichen. Außerdem kommt es uns nicht auf die Gleichung, sondern auf deren Nullstellenmenge an. Wir können deshalb die Gleichung mit einem beliebigen Skalar $\neq 0$ durchmultiplizieren, und falls $f \neq 0$ ist z.B. $f = 1$ annehmen. Außerdem wollen wir α und β stets ≥ 0 annehmen, und die quadratische Form dafür mit Vorzeichen

$$\pm\alpha x^2 \pm \beta y^2$$

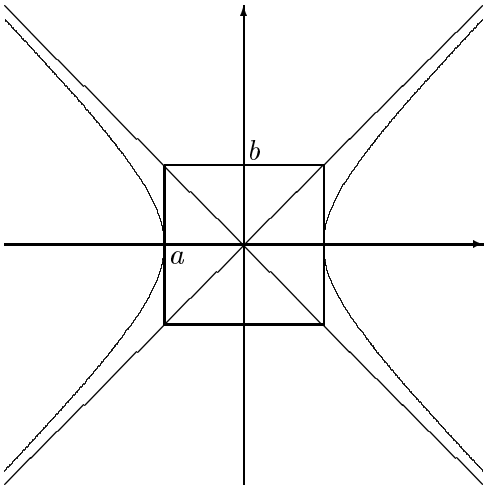
schreiben. Es gibt dann die folgenden Fälle:

Fall		Gleichung	Nullstellenmenge
f	q		
0	0	$0 = 0$	die ganze Ebene
0	Rang 1	$x^2 = 0$	eine Gerade
0	positiv definit	$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$	ein Punkt
0	indefinit vom Rang 2	$\alpha x^2 - \beta y^2 = 0$	zwei schneidende Geraden
1	0	$0 = 1$	die leere Menge
1	Rang 1	$\alpha x^2 = 1$	zwei parallele Geraden
1		$-\alpha x^2 = 1$	die leere Menge
1	positiv definit	$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$	Ellipse
1	indefinit vom Rang 2	$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	Hyperbel
1	negativ definit	$-\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	die leere Menge

Das sind insgesamt neun Fälle. Wirklich interessant für uns sind nur die echten, nicht entarteten Kegelschnitte. Außer der Ellipse, die wir schon kennen, ist das nur die Hyperbel. In Analogie zur Ellipse schreiben wir ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sie sieht so aus:



Es bleiben noch die Fälle, wo die Konstanten d und e nicht beide $= 0$ sind. Die Behandlung dieser Fälle wird etwas übersichtlicher, wenn wir die Funktion $q(x, y)$ in Matrixschreibweise angeben. Dazu kürzen wir ab:

$$\begin{aligned} Q &:= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\ ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^t \\ \mathbf{u} &:= (d, e) \\ dx + ey &= (\mathbf{u}.\mathbf{x}) \\ q(x, y) &= \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^t + 2(\mathbf{u}.\mathbf{x}) + f. \end{aligned}$$

Wir versuchen den Vektor $\mathbf{u}$ durch eine Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{t} + \mathbf{x}$ zu beseitigen. Unsere Funktion wird dann

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}') &= (\mathbf{x}' - \mathbf{t}) \cdot Q \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{t})^t + 2(\mathbf{u}.\mathbf{x}' - \mathbf{t}) + f \\ &= \mathbf{x}' \cdot Q \cdot \mathbf{x}'^t + 2(\mathbf{u} - Q \cdot \mathbf{t}.\mathbf{x}') + f + \mathbf{t} \cdot Q \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Wir sehen: Der lineare Anteil hebt sich weg, und wir sind in einem der schon behandelten Fälle, wenn es uns gelingt, $\mathbf{t}$ so zu wählen, daß

$$Q \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}.$$

Das geht sicher immer dann, wenn die Matrix Q invertierbar ist: $\mathbf{t} := Q^{-1} \cdot \mathbf{u}$. Aber das braucht die Matrix Q ja nicht zu sein! Den Fall der Nullmatrix $Q = 0$ wollen wir weglassen, weil dann die Funktion $q(x, y)$ nur den Grad eins hat. Es bleibt also zu untersuchen:

$$Rang(Q) = 1.$$

Nach einer Drehung können wir annehmen

$$\mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x} = \alpha x^2, \quad \alpha \neq 0.$$

Wenn wir die Gleichung durch α dividieren, und die Koeffizienten neu benennen, haben wir

$$q(x, y) = x^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Hier machen wir die quadratische Ergänzung mit $x' = x + d$. Dann wird

$$q(x', y) = (x')^2 + 2ey + f' = 0, \text{ mit } f' = f - d^2.$$

Wir können $e \neq 0$ annehmen. Wenn wir durch e teilen, und die Koeffizienten wieder ein wenig umbenennen, erhalten wir schließlich die *Parabelgleichung*

$$y = \alpha x^2 + \beta.$$

Wir fassen zusammen:
Satz 8 (Klassifikation der reellen Kegelschnitte): *Es sei*

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in der reellen Ebene. Durch eine Bewegung *kann die Gleichung in eine der oben erwähnten entarteten Gleichungen oder in eine der drei folgenden Gleichungen transformiert werden:*

Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabel	$y = a \cdot x^2.$

Kegelschnitte heißen Kegelschnitte, weil man sie erhalten kann, indem man einen Kegel im dreidimensionalen Raum mit einer Ebene schneidet. Das hat schon ein alter Grieche herausgefunden. Folgendes ist darunter zu verstehen: Nehmen wir etwa den Rotationskegel

$$C: \quad z^2 = x^2 + y^2$$

her und schneiden ihn mit einer Ebene

$$E: \quad z = u \cdot x + v \cdot y + w.$$

Die Schnittkurve hat dann die Gleichung

$$\begin{aligned} (u \cdot x + v \cdot y + w)^2 &= x^2 + y^2 \\ (u^2 - 1) \cdot x^2 + 2uv \cdot xy + (v^2 - 1) \cdot y^2 + 2uw \cdot x + 2vw \cdot y + w^2 &= 0. \end{aligned}$$

Wir wissen, die Art des erhaltenen Kegelschnittes hängt ganz wesentlich von der Definitheit der symmetrischen Matrix

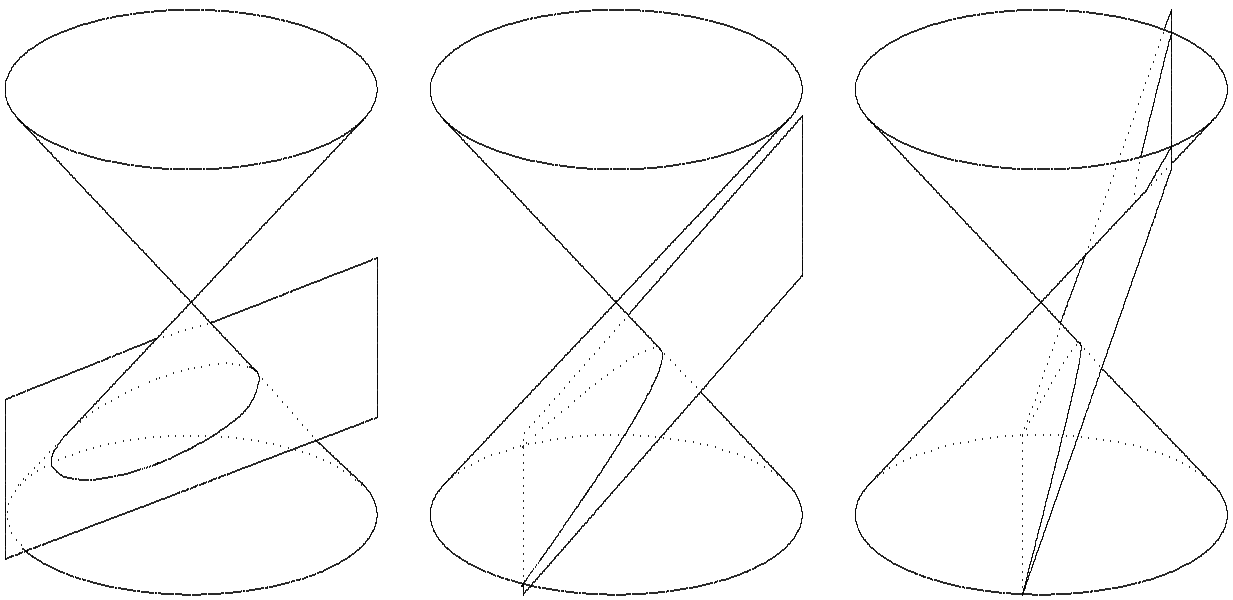
$$Q := \begin{pmatrix} u^2 - 1 & uv \\ uv & v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

ab. Ihre Determinante ist

$$det(Q) = (u^2 - 1)(v^2 - 1) - (uv)^2 = 1 - u^2 - v^2.$$

Der Kegelschnitt kann einer der Entartungsfälle sein, oder er ist eine

$$\begin{array}{llllll} \text{Ellipse} & \Rightarrow & Q \text{ definit} & \Rightarrow & det(Q) > 0 & \Leftrightarrow & u^2 + v^2 < 1 \\ \text{Hyperbel} & \Rightarrow & Q \text{ indefinit} & \Rightarrow & det(Q) < 0 & \Leftrightarrow & u^2 + v^2 > 1 \\ \text{Parabel} & \Rightarrow & Rang(Q) = 1 & \Rightarrow & det(Q) = 0 & \Leftrightarrow & u^2 + v^2 = 0. \end{array}$$



Aufgabe 2.16: Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$ fünf Punkte der affinen Ebene. Zeigen Sie: Es gibt einen Kegelschnitt, der durch diese fünf Punkte geht.

Aufgabe 2.17: Es seien $\mathbf{a} = (a_1, a_2), ..., \mathbf{f} = (f_1, f_2)$ sechs Punkte der affinen Ebene. Zeigen Sie: Diese sechs Punkte liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn

$$det \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & 1 \\ a_1 & & & & & f_1 \\ a_2 & & & & & f_2 \\ a_1^2 & & & & & f_1^2 \\ a_1 a_2 & . & . & . & . & f_1 f_2 \\ a_2^2 & & & & & f_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 2.18: Welche Kegelschnitte (Ellipsen, Hyperbeln, ...) werden durch folgende Gleichungen gegeben:

a) $x^2 + 4xy + y^2 + 3x + 3y + 1 = 0$,
b) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 6y - 15 = 0$,
c) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 6y - 13 = 0$,
d) $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$,
e) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y = 0$.

Aufgabe 2.19 (Gärtnerkonstruktion): Es seien $\mathbf{f}_1 = (d, 0)$ und $\mathbf{f}_2 = (-d, 0)$ mit $0 < d \in \mathbb{R}$ zwei Punkte der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Für $0 < a \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} E_a &:= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \| \mathbf{p} - \mathbf{f}_1 \| + \| \mathbf{p} - \mathbf{f}_2 \| = a\}, \\ H_a &:= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : \| \mathbf{p} - \mathbf{f}_1 \| - \| \mathbf{p} - \mathbf{f}_2 \| = a\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für $a > 2d$ ist E_a eine Ellipse, für $a < 2d$ ist H_a Ast einer Hyperbel.

Aufgabe 2.20: Es sei $\mathbf{f} = (d, 0)$ mit $0 < d \in \mathbb{R}$ ein Punkt der euklidischen Ebene. Für $0 < a \in \mathbb{R}$ sei $D_a \subset \mathbb{R}^2$ der geometrische Ort der Punkte $\mathbf{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\| \mathbf{p} - \mathbf{f} \| = a \cdot x.$$

Zeigen Sie: D_a ist eine

$$\begin{array}{lcl} \text{Ellipse} & \Leftrightarrow & a < 1 \\ \text{Parabel} & \Leftrightarrow & a = 1 \\ \text{Hyperbel} & \Leftrightarrow & a > 1. \end{array}$$

Aufgabe 2.21: Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$(x + a)(y + b) = c$$

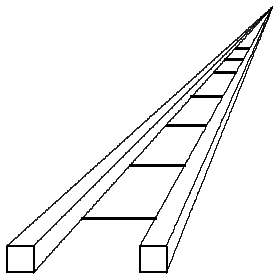
die Gleichung einer Hyperbel ist. Bestimmen Sie deren Mittelpunkt und ihre Halbachsen.

3 Projektive Geometrie

3.1 Die projektive Ebene

Dieser Abschnitt dient vor allem der Motivierung. Die exakten Definitionen kommen im nächsten Abschnitt.

Seit der Renaissance gibt es in der Malerei eine Theorie der Perspektive. An einem Griechischen Tempel, beispielsweise, gibt es jede Menge paralleler Mauerkanten (jedenfalls dann, wenn der Tempel noch gut erhalten ist). Will man den Tempel zeichnen, so erhöht es den räumlichen Eindruck, wenn sich auf dem Papier die Bilder dieser Linien in einem „Fluchtpunkt“ schneiden. Man stellt sich dabei vor, daß das Bild aus dem dreidimensionalen Gegenstand durch eine richtige schöne, geometrische Projektion entstanden ist. Will man Eisenbahnschienen zeichnen, so sieht das Resultat vielleicht so aus:



(Ganz stimmen kann das nicht, denn auch die Schwellen sind Teile paralleler Geraden, die sich in einem Fluchtpunkt schneiden sollen. Und der Fluchtpunkt kann nicht in der Richtung liegen, wie sie die von mir gezeichneten Schwellen haben, er muß irgendwie senkrecht zum Fluchtpunkt der Schienen liegen. Wie man solche Fluchtpunkte ausrechnet, das ist ein Teil der Theorie der Perspektive. Hierzu gibt es in der Bibliothek des Mathematischen Instituts das schöne Buch:

F. Rehbock, Geometrische Perspektive, Springer 1979.

Darin findet sich auch, auf p. 17, ein Bild mit Eisenbahnschwellen, korrekt gezeichet.)

Auf dem Papier kann man die Fluchtpunkte einzeichnen, in der dreidimensionalen Realität gibt es sie nicht, denn überall sind da ja schon die richtigen Punkte. Wenn man also mit den Fluchtpunkten arbeiten möchte, dann muß man sie zum vorhandenen Raum hinzufügen. Man nennt die hinzugefügten Fluchtpunkte das „Unendliche“ . Das hat nichts mit Spiritismus zu tun, sondern es ist nur so eine mathematische Redensart (Definition).

In diesem Abschnitt wollen wir uns genau überlegen, wie man die Ebene $\mathbb{R}^2$ durch Punkte im Unendlichen zur *projektiven Ebene* ergänzt. Es kommen also unendlich–ferne Punkte hinzu. Und zwar sollen dies die Schnittpunkte aller parallelen Geraden gleicher Richtung sein. Hier könnte man verschiedener Meinung sein, und sagen, jede Gerade hat zwei Enden, sie geht in zwei Richtungen nach Unendlich, sie hat zwei Schnittpunkte im Unendlichen mit allen ihren parallelen Mitgeraden. Diese Meinung hat sich nicht durchgesetzt. Man möchte, daß sich je zwei verschiedene Geraden, parallel oder nicht, in genau einem einzigen Punkt schneiden. Also soll es im Unendlichen für jede Sorte paralleler Geraden nur einen einzigen Schnittpunkt geben.

Geht man auf einer Geraden nach Unendlich, erreicht man ihren Fluchtpunkt, geht man weiter, kommt man auf der gleichen Geraden, aus der anderen Richtung aus dem Unendlichen zurück.

Es hat große praktische Vorteile, wenn sich zwei parallele Geraden in einem Punkt im Unendlichen schneiden. Beispielsweise haben wir bei der Formulierung der Sätze von

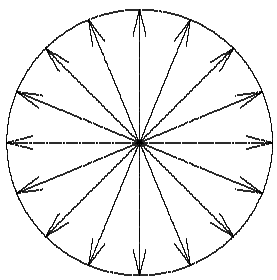
- Ceva,
- Pappos,
- Desargues

immer auf Ausnahmen Rücksicht nehmen müssen, die sich aus der Parallelität von Geraden ergaben. Diese Sätze werden eine projektive Version haben, wo parallele Geraden keine Sonderrolle mehr spielen werden. (Deswegen habe ich den Fällen paralleler Geraden beim Beweis der affinen Version dieser Sätze auch keine zu große Aufmerksamkeit geschenkt.)

Wir wollen die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ nennen. Man kann sich davon ein toplogisches Modell machen, das allerdings ein wenig kompliziert ist. Es gibt eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ auf die Kreisscheibe:

$$(x, y) \mapsto \frac{arctg(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x, y).$$

Geraden durch den Nullpunkt gehen bei dieser Abbildung in Kreisdurchmesser über, und treffen dann in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten auf den Kreisrand. Das topologische Modell der reellen projektiven Ebene ist also die Kreisscheibe, auf deren Rand man diametral gegenüberliegende Punkte identifizieren muß.



Diese Beschreibung der projektiven Ebene ist uns zu qualitativ, wir müssen rechnen. Dazu brauchen wir Koordinaten. Ausgangspunkt sind die baryzentrischen Koordinaten aus §2.2. Wir haben drei Koordinaten (x, y, z) mit $x + y + z = 1$ zur Beschreibung eines Punktes $\mathbf{x}$ der Ebene benutzt. Wenn wir diese drei Koordinaten im (x, y, z)–Raum $\mathbb{R}^3$ auftragen, erhalten wir alle Punkte der Ebene $x + y + z = 1$. Jeder Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dieser Ebene liegt auf einer Geraden $\mathbb{R}\cdot\mathbf{x}$ durch den Nullpunkt. Und umgekehrt: Jede Gerade $L \subset \mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt schneidet diese Ebene in genau einem Punkt. D.h., alle Geraden L tun dies, bis auf diejenigen, die es nicht tun und parallel zur Ebene $x+y+z = 1$ liegen. Dies sind die Geraden in der Ebene $x+y+z = 0$. Jede dieser Geraden gehört aber zu einer Richtung in der Ebene $x+y+z = 1$ und definiert dort einen Punkt im Unendlichen.

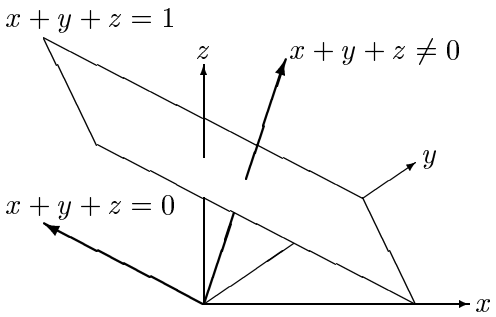
Jeder Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bestimmt eine Gerade $L = \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$. Und jede dieser Geraden bestimmt einen Punkt der projektiven Ebene:

- Entweder ist $x + y + z \neq 0$, dann ist es der Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten

$$\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z},$$

  also der Schnittpunkt von L mit der Ebene $x + y + z = 1$,

- oder es gilt $x + y + z = 0$, und dann ist es ein unendlich ferner Punkt.



Auf diese Weise parametrisieren die Geraden des $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt alle Punkte der projektiven Ebene, endliche oder unendlich ferne, je nachdem, ob sie die Ebene $x + y + z = 1$ schneiden, oder dazu parallel sind.

Wir haben gesehen: Die Geraden im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt kann man benutzen, um alle Punkte der projektiven Ebene zu parametrisieren. Geraden haben aber keine Koordinaten, und somit haben wir noch keine Koordinaten auf der projektiven Ebene, in denen wir rechnen können. Jetzt geben wir den Geraden $L \subset \mathbb{R}^3$, und damit den Punkten der projektiven Ebene, Koordinaten: Eine Gerade wird aufgespannt durch einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, es ist $L = \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$. Wir nehmen einfach die drei Koordinaten x, y, z von $\mathbf{x}$ als Koordinaten von L. Richtige Koordinaten sind dies aber eigentlich nicht, denn das Tripel (x, y, z) ist durch die Gerade L nicht eindeutig festgelegt. Jedes andere Tripel

$$(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) \text{ mit } \lambda \neq 0$$

reeller Zahlen gehört zur selben Geraden. Wir drücken dies so aus, daß wir das Tripel nicht (x, y, z) sondern $(x : y : z)$ schreiben. Damit meinen wir nicht nur das Tripel (x, y, z), sondern die Menge aller Tripel $(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z)$ mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Die Doppelpunkte stehen da, weil nicht die Werte x, y, z der einzelnen Koordinaten wichtig sind, sie ändern sich ja beim Multiplizieren mit λ, sondern ihre gegenseitigen Quotienten, die sich dabei nicht ändern. Diese Koordinaten, bei denen nicht die Zahlenwerte wichtig sind, sondern deren gegenseitige Proportionen, heißen *homogene Koordinaten.*

Die homogenen Koordinaten auf der reellen projektiven Ebene sind also Zahlentripel

$$(x : y : z) \text{ mit } (x, y, z) \neq \mathbf{0} \text{ und } (\lambda x : \lambda y : \lambda z) = (x : y : z) \text{ für } \lambda \neq 0.$$

Sie hängen mit baryzentrischen Koordinaten der affinen Ebene folgendermaßen zusammen:

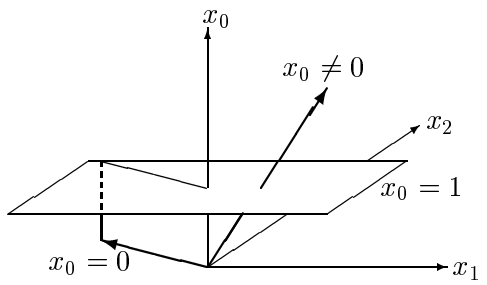
- Wenn $x + y + z \neq 0$ ist, dann ist $(x : y : z)$ der Punkt in der affinen Ebene mit den baryzentrischen Koordinaten

$$\frac{x}{x + y + z}, \frac{y}{x + y + z}, \frac{z}{x + y + z}.$$

- Wenn $x+y+z=0$ ist, dann bedeutet $(x:y:z)$ einen unendlichfernen Punkt. Und zwar bedeutet dies den Punkt in Richtung der vom Vektor (x,y,z) aufgespannten Geraden parallel zur Ebene $x+y+z=1$.

Ich habe versucht, den Übergang von baryzentrischen zu homogenen Koordinaten zu erklären, denn schon in Dimension zwei sind die baryzentrischen Koordinaten drei Koordinaten. Weil die benutzte Ebene $x+y+z=1$ nicht parallel zu einer Koordinatenebene ist, ist die Geometrie der Situation aber etwas unübersichtlich. Insbesondere sollte ein Student in einer mündlichen Prüfung nicht diese Einführung der homogenen Koordinaten erklären, sondern die folgende, weil sie geometrisch übersichtlicher ist:
Wie in Abschnitt 2.1 ergänzen wir Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ rein formal um einen nullten Eintrag $= 1$ zu Vektoren $\mathbf{x}' = (1, x_1, x_2)$. In diesem Fall gehört ein Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

- zum Vektor $\mathbf{x}' = (1, x_1/x_0, x_2/x_0)$, d.h. zum Punkt $\mathbf{x} = (x_1/x_0, x_2/x_0)$ der affinen Ebene, *falls* $x_0 \neq 0$,
- zum unendlich fernen Punkt in Richtung der Geraden $\mathbb{R} \cdot (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2$, *falls* $x_0 = 0$.



Aufgabe 3.1: In der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ mit den homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ seien

a) zwei verschiedene Punkte $\mathbf{p}_1 = (a_1 : b_1 : c_1) \neq \mathbf{p}_2 = (a_2 : b_2 : c_2)$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung ihrer Verbindungsgeraden.

b) zwei verschiedene Geraden $L_1 : \alpha_1 x_0 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = 0$ und $L_2 : \alpha_2 x_0 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$ gegeben. Bestimmen sie deren Schnittpunkt.

Aufgabe 3.2: a) Es seien $\mathbf{p}_i = (a_i : b_i : c_i)$, $i = 1, 2, 3$, drei Punkte in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Zeigen Sie: diese drei Punkte sind genau dann kollinear, wenn es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ gibt mit

$$\lambda_1 \hat{\mathbf{p}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{p}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{0}.$$

(Hier meine ich mit $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{K}^3$ einen Vektor, der zum Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ gehört.)

b) Es seien

$$L_i : \ \alpha_i x_0 + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2 = 0, \ i = 1, 2, 3,$$

drei Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Zeigen Sie: diese drei Geraden haben genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ gibt mit

$$\lambda_1 L_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 L_2(\mathbf{x}) + \lambda_3 L_3(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

3.2 Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$

Im letzten Abschnitt haben wir eingesehen, daß man die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ erklären kann als die Menge der eindimensionalen Untervektorräume im $\mathbb{R}^3$. Diese Einsicht bestand aus drei Schritten, die wir allerdings nicht in der folgenden Reihenfolge ausführten:

1. Der Definition von $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ als diese Menge;
2. der Einführung von homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ auf dieser Menge;
3. der Deutung von Punkten $(x_0 : x_1 : x_2)$ mit $x_0 \neq 0$ als Punkte $(x_1/x_0, x_2/x_0)$ der affinen Ebene und von Punkten $(0 : x_1 : x_2)$ als unendlich ferne Punkte.

Diese drei Schritte führen wir jetzt in beliebiger Dimension n und über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ durch.

1. Definition des n–dimensionalen projektiven Raums $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$: Der n–dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist die Menge aller eindimensionalen Unterräume L (= Geraden L durch den Nullpunkt) im $(n+1)$–dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^{n+1}$.

2. Einführung homogener Koordinaten auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$: Jeder eindimensionale Unterraum $L \subset \mathbb{K}^n$ wird aufgespannt durch einen Vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Wir nennen $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ die homogenen Koordinaten des Punktes in $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, der von L repräsentiert wird. Weil $\lambda \cdot \mathbf{x}$ dieselbe Gerade L aufspannt, gilt

$$(x_0 : x_1 : ... : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : ... : \lambda x_n)$$

für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$. Natürlich gibt es keinen Punkt im projektiven Raum mit homogenen Koordinaten $(0 : 0 : ... : 0)$, *der projektive Raum hat keinen Nullpunkt.*

Noch eine Notation: Später werde ich, wenn sich alle an diese Notation gewöhnt haben, keinen so großen Unterschied mehr zwischen der Bezeichnung für den Vektor $(x_0, ..., x_n) \in K^{n+1}$ und dem Punkt $(x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ machen. Vorläufig will ich versuchen, mich an folgende Regelung zu halten:

$$\begin{array}{ll} \text{Vektor} & \hat{\mathbf{x}} = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \\ \text{Punkt} & \mathbf{x} = (x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}). \end{array}$$

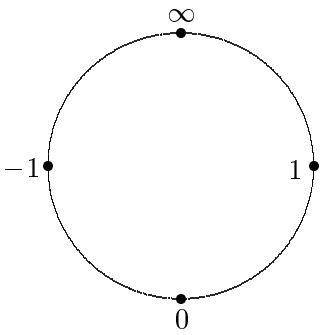
3. Affine und unendlich ferne Punkte: Die Menge der Punkte $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ mit $x_0 \neq 0$ nennen wir den *affinen Teil* des projektiven Raums. Dieser affine Teil kann mit dem affinen Raum $\mathbb{K}^n$ identifiziert werden durch die bijektive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & & \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \\ \hline (x_1, ..., x_n) & \to & (1 : x_1 : ... : x_n) \\ \left(\dfrac{x_1}{x_0}, ..., \dfrac{x_n}{x_0}\right) & \leftarrow & (x_0 : x_1 : ... : x_n). \end{array}$$

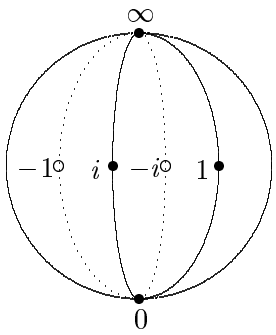
Die Menge der Punkte $\mathbf{x} = (0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ nennen wir die *unendlich ferne Hyperebene.* Was eine Hyperebene im projektiven Raum ist, erklären wir gleich. Der Punkt $\mathbf{x}$ repräsentiert im $\mathbb{K}^n$ den Fluchtpunkt aller Geraden, die zur Geraden $\mathbb{K} \cdot (x_1, ..., x_n) \subset \mathbb{K}^n$ parallel sind.

Beispiel: $n = 1$. Der eindimensionale projektive Raum über $\mathbb{K}$ heißt *projektive Gerade*. Er besteht aus allen Punkten $\mathbf{x} = (x_0 : x_1)$. Darunter gibt es einen einzigen Punkt $\infty := (0 : x_1) = (0 : 1)$ mit $x_0 = 0$. Dies ist der *unendlich ferne Punkt*. Die projektive Gerade $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ besteht also aus der affinen Geraden $\mathbb{K}$, an die der unendlich ferne Punkt angefügt wurde:

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \infty.$$



$\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$



$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Die projektive Gerade $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$ heißt auch Riemannsche Zahlenkugel.

Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ verallgemeinert den affinen Raum $\mathbb{K}^n$ im folgenden Sinn:

- Jeder affine Unterraum $A \subset \mathbb{K}^n$ läßt sich fortsetzen zu einem projektiven Unterraum $\bar{A} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.
- Jede affine Transformation $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ läßt sich fortsetzen zu einer projektiven Transformation $\bar{F} : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

Natürlich müssen wir erst noch definieren, was ein projektiver Unterraum und was eine projektive Transformation ist.

Definition: Ein *projektiver Unterraum* $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist eine Menge von Geraden $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ derart, daß es einen Untervektorraum $\hat{U} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ gibt mit $U = \{L \subset \hat{U}\}$. Die Dimension von U ist

$$dim(U) = dim(\hat{U}) - 1.$$

Beispiele: a) jede Gerade $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ repräsentiert einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Punkte sind also 0–dimensionale projektive Unterräume.

b) Eine nicht–triviale Linearform $\sum_0^n a_\nu x_\nu$ definiert eine Hyperebene $\hat{H} = \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^{n+1} : \sum a_\nu x_\nu = 0\}$ in $\mathbb{K}^{n+1}$. Die Dimension dieser Hyperebene ist n. Die in dieser Hyperebene $\hat{H}$ liegenden Geraden bilden einen projektiven Raum der Dimension $n-1$ im $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Dieser projektive Unterraum heißt projektive Hyperebene. Ist insbesondere die Linearform gerade x_0, so erhält man die unendlich ferne Hyperebene $x_0 = 0$.

Satz (Projektiver Abschluß affiner Unterräume): *Jeder affine Unterraum $A \subset \mathbb{K}^n$ ist fortsetzbar zu einem projektiven Unterraum $\bar{A} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ gleicher Dimension. Es ist $\bar{A} \cap \mathbb{K}^n = A$.*

Beweis: Es sei $d := dim(A)$ und $A \subset \mathbb{K}^n$ definiert durch $n-d$ linear unabhängige Gleichungen

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n : \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu,\ \mu = 1, ..., n-d\}.$$

Dieselben Gleichungen, gelesen als homogene Gleichungen für Vektoren $\mathbf{x}' = (1, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, nämlich

$$-b_\mu x_0 + a_{\mu,1} x_1 + ... + a_{\mu,n} x_n = 0,\ \mu = 1, ..., n-d$$

definieren einen Untervektorraum $\hat{U} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ der Codimension $n-d$, also von der Dimension $d+1$. $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ sei der zugehörige projektive Unterraum. Er hat Dimension d.

Nach Definition ist

$$U = \{(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) : \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} x_\nu = b_\mu x_0,\ \mu = 1, ..., n-d\}.$$

Die Punkte von $U \cap \mathbb{K}^n$ haben $x_0 \neq 0$, und die zugehörigen affinen Punkte $(x_1/x_0, ..., x_n/x_0) \in \mathbb{K}^n$ bilden gerade den Lösungsraum der gegebenen $n-d$ Gleichungen. □

Beispiel: Eine Gerade in der affinen Ebene hat die Gleichung $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$. Die entsprechende Gerade in der projektiven Ebene hat die Gleichung $-bx_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Wenn wir zwei Geraden in der projektiven Ebene schneiden wollen, etwa

$$\{a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} \cap \{b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0\}$$

berechnen wollen, dann müssen wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 &= 0 \\ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Falls die Gleichungen linear unabhängig sind (d.h., falls die Geraden verschieden sind), wird der Lösungsraum aufgespannt vom Kreuzprodukt der Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden hat also die homogenen Koordinaten

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1 : a_2 b_0 - a_0 b_2 : a_0 b_1 - a_1 b_0).$$

Der Vorteil der projektiven Theorie ist, daß alle Gleichungen homogen werden, und man keinen Unterschied zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungen zu machen braucht. Natürlich ist die triviale Lösung homogener Gleichungen immer verboten.

Ein projektiver Unterraum $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist für sich selbst genommen wieder ein d–dimensionaler projektiver Raum. Es gibt ja einen Untervektorraum $\hat{U} \subset \mathbb{K}^{n+1}$, derart, daß U aus allen

Geraden $L \subset \hat{U}$ besteht. In $\hat{U}$ kann man eine Basis $\hat{\mathbf{u}}_0, ..., \hat{\mathbf{u}}_d \in \hat{U}$ wählen. Diese definiert einen Vektorraum–Isomorphismus $\mathbb{K}^{d+1} \to \hat{U}$ und damit eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}_d(\mathbb{K}) \to U$. Hätten wir eine andere Basis in $\hat{U}$ gewählt, so hätten wir einen anderen Vektorraum–Isomorphismus erhalten. Doch beide Isomorphismen unterscheiden sich nur um einen Vektorraum–Automorphismus des $\mathbb{K}^{d+1}$.

Der Begriff des *Verbindungsraums* verallgemeinert sich wörtlich vom Affinen ins Projektive: Ist $M \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ eine beliebige Menge, so sei $span(M)$ der Durchschnitt aller projektiven Unterräume, die M enthalten. Ist $\hat{M} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die zu M gehörende Menge im Vektorraum $\mathbb{K}^{n+1}$, so ist $span(M)$ der projektive Raum zum Untervektorraum $span(\hat{M})$. Insbesondere ist für zwei projektive Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ der Verbindungsraum $U_1 + U_2 := span(U_1 \cup U_2)$ definiert.

Es gibt auch die Möglichkeit, $span(\hat{M})$ zu definieren als die Menge

$$\{\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \hat{\mathbf{v}}_\nu : \; c_\nu \in \mathbb{K}, \hat{\mathbf{v}}_\nu \in \hat{M}\}$$

aller Linearkombinationen von Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_\nu \in \hat{M}$. Deswegen besteht der projektive Unterraum $span(M)$ in $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ aus allen Punkten $\mathbf{x} = (x_0 : ... : x_n)$ derart, daß der Vektor $\hat{\mathbf{x}} = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ eine Linearkombination

$$\hat{\mathbf{x}} = c_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + ... + c_k \hat{\mathbf{v}}_k$$

von Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_\nu \in \mathbb{K}^{n+1}$ ist, die zu Punkten $\mathbf{v}_\nu \in M$ gehören. Wir wollen uns Schreibarbeit sparen, und auch die Punkte $\mathbf{x}$ im projektiven Raum als Linearkombinationen schreiben.

Beispiel: Seien $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ zwei verschiedene Punkte mit den homogenen Koordinaten $(x_0 : ... : x_n)$ und $(y_0 : ... : y_n)$. Sie spannen eine projektive Gerade $L \subset \mathbb{P}_n(K)$ auf. Die Punkte dieser Geraden sind die Linearkombinationen

$$s \cdot (x_0 : ... : x_n) + t \cdot (y_0 : ... : y_n) = (sx_0 + ty_0 : ... : sx_n + ty_n), \; s, t \in \mathbb{K}.$$

Hätten wir andere homogene Koordinaten $(\lambda x_0 : ... : \lambda x_n)$ für den Punkt $\mathbf{x}$ genommen, so hätten wir genau dieselbe Menge von Linearkombinationen bekommen, nur in anderer Reihenfolge.

Mit dem Begriff des Verbindungsraums können wir folgenden Satz formulieren, der die Tatsache verallgemeinert, daß sich zwei Geraden in der projektiven Ebene unter allen Umständen schneiden.

Satz (Dimensionssatz): *Für zwei projektive Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ gilt*

$$dim(U_1) + dim(U_2) = dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis. Es seien $\hat{U}_1, \hat{U}_2 \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die zugehörigen Vektorräume. Zum projektiven Unterraum $U_1 + U_2$ gehört nach Definition der Untervektorraum $\hat{U}_1 + \hat{U}_2$ und zu $U_1 \cap U_2$ der Untervektorraum $\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$. Wir haben

$$dim(\hat{U}_i) \quad = \quad dim(U_i) + 1$$

$$\begin{aligned}
dim(\hat{U_1} + \hat{U_2}) &= dim(U_1 + U_2) + 1 \\
dim(\hat{U_1} \cap \hat{U_2}) &= dim(U_1 \cap U_2) + 1 \\
dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2) &= dim(\hat{U_1} + \hat{U_2}) + dim(\hat{U_1} \cap \hat{U_2}) - 2 \\
&= dim(\hat{U_1}) + dim(\hat{U_2}) - 2 \\
&= dim(U_1) + dim(U_2).
\end{aligned}$$

□

Damit dieser Satz auch wirklich in allen Fällen stimmt, muß man für die leere Menge $\emptyset \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ setzen:

$$\begin{aligned}
\hat{\emptyset} &:= \{\mathbf{0}\} \\
dim(\emptyset) &:= -1.
\end{aligned}$$

Dann hat man beispielsweise für zwei Geraden $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
dim(L_1 + L_2) &\leq dim(\mathbb{P}_2) \\
&= 2 \\
dim(L_1 \cap L_2) &= dim(L_1) + dim(L_2) - dim(L_1 + L_2) \\
&= 2 - dim(L_1 + L_2) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Also ist der Durchschnitt zweier Geraden in der projektiven Ebene nie leer.

Einen Punkt $\mathbf{x} = (x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ kann man der Multiplikation mit einer $(n+1) \times (n+1)$–Matrix unterziehen:

$$M \in M((n+1) \times (n+1), \mathbb{K}): \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Wenn man alle homogenen Koordinaten von $\mathbf{x}$ mit einem gemeinsamen Faktor $\lambda \in \mathbb{K}$ durchmultipliziert, werden die Einträge von $M \cdot \hat{\mathbf{x}}$ mit demselben Faktor λ multipliziert. Multiplikation mit der Matrix M bildet den Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ wieder auf einen Punkt $M \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ab.

Etwas kann dabei allerdings schiefgehen: $\hat{\mathbf{x}}$ könnte im Kern der Matrix M liegen und $M \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ sein. Wenn das passiert ist der Bildpunkt $M \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ nicht definiert. Aber falls die Matrix $M \in GL(n, \mathbb{K})$ invertierbar ist, kann das ja nicht passieren!

Definition: Eine *projektive Abbildung* (oder *Projektivität*) $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist eine Abbildung, die auf den homogenen Koordinaten durch Multiplikation mit einer *invertierbaren* $(n+1) \times (n+1)$–Matrix definiert ist.

Eine Projektivität wird also durch einen Automorphismus $\hat{\mathbf{x}} \mapsto M \cdot \hat{\mathbf{x}}$ des $\mathbb{K}^{n+1}$ induziert. Weil Automorphismen bijektiv sind, sind auch Projektivitäten bijektiv. Weil Automorphismen Untervektorräume des $\mathbb{K}^{n+1}$ auf Untervektorräume gleicher Dimension abbilden, bilden Projektivitäten projektive Unterräume des $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ wieder auf projektive Unterräume derselben Dimension ab.

Satz (Projektive Fortsetzung affiner Transformationen): *Jede affine Transformation* $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *läßt sich zu einer projektiven Transformation* $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ *fortsetzen.*

Beweis. Die affine Transformation sei

$$F : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t} + A \cdot \mathbf{x}$$

mit der invertierbaren Matrix $A \in GL(n, \mathbb{K})$. In (2.1) sahen wir bereits, daß die $(n+1) \times (n+1)$–Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & A \end{pmatrix}$$

diese affine Transformation durch Multiplikation auf den trivial um den Eintrag 1 verlängerten Vektoren $\mathbf{x}'$ beschreibt. Weil A invertierbar ist, ist auch die $(n+1) \times (n+1)$–Matrix M invertierbar. Multiplikation mit M definiert also eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Auf den Punkten $(1 : x_1 : ... : x_n)$ des affinen Teils von $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist dies genau die gegebene affine Transformation. □

Alle projektiven Transformationen $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ bilden eine Gruppe, die *projektive Gruppe* $\mathbf{PGL}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$. Diese Gruppe $\mathbf{PGL}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$ enthält die affine Gruppe $\mathbf{Aff}(\mathbf{n}, \mathbb{K})$, aber sie enthält noch weit mehr Transformationen.

Beispiel: Die projektive Gruppe $\mathbf{PGL}(\mathbf{1}, \mathbb{K})$ in Dimension 1. Seien $(x_0 : x_1)$ homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, die affinen Punkte also $(x_0 : x_1) = x_1/x_0$ mit $x_0 \neq 0$ und $\infty = (0 : x_1)$. Eine Projektivität P des $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ wird definiert durch eine invertierbare 2×2–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Auf den homogenen Koordinaten ist $P : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ mit

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0 + bx_1 \\ y_1 &= cx_0 + dx_1 \end{aligned}$$

Falls $ax_0 + bx_1 \neq 0$, ist der Bildpunkt

$$P(x_1/x_0) = y_1/y_0 = \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1} = \frac{c + d \cdot \frac{x_1}{x_0}}{a + b \cdot \frac{x_1}{x_0}}$$

affin. Die Projektivität ist also eine ganz gewöhnliche gebrochen rationale Funktion

$$x \mapsto \frac{c + dx}{a + bx}$$

mit zwei Ausnahmewerten wegen Unendlich:

$$\begin{aligned} \infty &\mapsto d/b \\ -a/b &\mapsto \infty \end{aligned}$$

Ähnlich wie im Eindimensionalen, kann man auch in beliebiger Dimension n projektive Transformationen als rationale Abbildungen in affinen Koordinaten schreiben:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1,0} + a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n}{a_{0,0} + a_{0,1}x_1 + ... + a_{0,n}x_n} \\ y_2 &= \frac{a_{2,0} + a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,n}x_n}{a_{0,0} + a_{0,1}x_1 + ... + a_{0,n}x_n} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{a_{n,0} + a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,n}x_n}{a_{0,0} + a_{0,1}x_1 + ... + a_{0,n}x_n}. \end{aligned}$$

Schließlich sei noch daran erinnert, daß projektive Transformationen, genau wie lineare Transformationen in Vektorräumen, ein Janus–Gesicht haben: Man kann sie einerseits auffassen als eine Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, wo Vektoren (bzw. Punkte des projektiven Raums) wirklich bewegt und abgebildet werden, es passiert was. Das ist der „aktive Standpunkt". Man kann mit derselben Formel aber auch eine Koordinatentransformation meinen. Alle Vektoren (bzw. Punkte des projektiven Raums) bleiben, wo sie waren, nur ihre Koordinaten ändern sich. Das ist der „passive Standpunkt". Dieser passive Standpunkt wird vor allem von Anwendern der Mathematik (z.B. in der Physik) eingenommen. Für einen Mathematiker gibt es aber keinen so großen Unterschied zwischen diesen beiden Standpunkten. Koordinaten auf einem Vektorraum sind ja Linearformen, also Elemente im Dualraum, und damit wieder irgendwo Vektoren. Diese Sichtweise in der projektiven Geometrie heißt „Dualitätsprinzip" und wird noch eine große Rolle spielen.

Aufgabe 3.3 (Stereographische Projektion): Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi : \ (u, v) \mapsto \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$$

die komplexe Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bijektiv auf die Riemannsche Zahlenkugel $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ohne den Nordpol $(0, 0, 1)$ abbildet.

Aufgabe 3.4: a) Setzen Sie die affinen Transformationen $\varphi_i : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit

$$\varphi_1(x) = x + c, \quad \varphi_2(x) = c \cdot x \, (c \neq 0)$$

zu projektiven Transformationen $\phi_i : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ fort und geben Sie zugehörige 2×2-Matrizen an.

b) Finden Sie 2×2-Matrizen zu den rationalen Funktionen

$$z \mapsto \frac{-1}{z}, \quad 1 + \frac{1}{z}, \quad \frac{z}{z - 1}.$$

Bestimmen sie jedesmal den Bildpunkt des Punktes ∞.

Aufgabe 3.5: Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ heißt Fixpunkt der projektiven Transformation $P : \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, wenn $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ gilt.

a) Zeigen Sie: $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ist genau dann Fixpunkt einer Projektivität mit der $(n+1)\times(n+1)$-Matrix A, wenn $\hat{\mathbf{x}}$ ein Eigenvektor der Matrix A ist.

b) Zeigen Sie: Eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $P \neq id$, hat entweder einen oder zwei Fixpunkte, eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ hat entweder einen oder zwei, oder gar keinen Fixpunkt.

Aufgabe 3.6: Bestimmen sie die Fixpunkte der Projektivität

$$y_0 = x_0 + 2x_1, \quad y_1 = 2x_0 - x_1$$

in $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Welche rationale Funktion wird durch diese Projektivität beschrieben?

Aufgabe 3.7: Eine Projektivität P hat die Ordnung $k \in \mathbb{N}$, wenn $P^k = id$ gilt (und k mit dieser Eigenschaft minimal ist). Sei $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ eine Projektivität mit Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P hat die Ordnung 2 (ist eine *Involution*), genau dann, wenn $a + d = 0$.

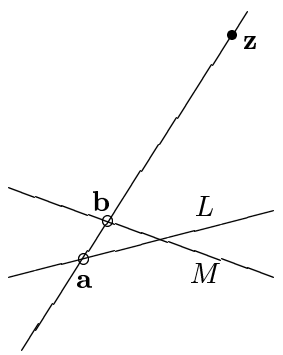
b) P hat die Ordnung 3, genau dann, wenn $a^2 + d^2 + ad + bc = 0$.

3.3 Projektivitäten

Der Begriff der Projektivität hat sich historisch aus dem Begriff der Perspektivität entwickelt. Eine Perspektivität in der Ebene ist folgendes:

Es seien zwei Geraden $L, M \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ und ein Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ in der projektiven Ebene gegeben. Wir nennen $\mathbf{z}$ das *Perspektivitäts–Zentrum* und die Geraden $S \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ durch $\mathbf{z}$ die *Perspektivitäts–Strahlen*. Jeder Strahl S schneidet die Geraden L und M in genau einem Punkt. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in L$ genau einen Strahl $S_\mathbf{a}$, nämlich die von $\mathbf{z}$ und $\mathbf{a}$ aufgespannte Gerade. Dieser Strahl schneidet die Gerade M im Punkt $\mathbf{b} = S_\mathbf{a} \cap M$. Dadurch ist eine Abbildung

$$L \to M, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} = S_\mathbf{a} \cap M$$



definiert. Sie heißt die *Perspektivität mit Zentrum* $\mathbf{z}$.

Diese Definition der Perspektivität geht genauso für zwei Hyperebenen $L, M \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ im n–dimensionalen Raum. Man muß nur darauf achten, daß das Perspektivitäts–Zentrum auf keiner dieser beiden Hyperebenen liegt.

Satz: *Jede Perspektivität $L \to M$ zwischen zwei Hyperebenen ist eine projektive Transformation*

$$\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = L \to M = \mathbb{P}_{n-1}(K).$$

Beweis. Es seien $\hat{L}, \hat{M} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ die zu den Hyperebenen $L, M \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ gehörenden n–dimensionalen Unterräume und $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{K}^{n+1}$ ein Vektor zum Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Wir wählen eine Basis $\hat{\mathbf{z}}_1, ..., \hat{\mathbf{z}}_n \in \hat{M}$. Dann sind $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}_1, ..., \hat{\mathbf{z}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ linear unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{K}^{n+1}$. Wir benutzen die Koordinaten zu dieser Basis als unsere Koordinaten, mit denen wir arbeiten. Dann hat $\mathbf{z}$ die homogenen Koordinaten $\mathbf{z} = (1 : 0 : ... : 0)$ und M hat die Gleichung $z_0 = 0$.

Jede Basis von $\hat{L}$ definiert eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{K}^n \to \hat{L}, \quad (u_1, ..., u_n) \mapsto (x_0, ..., x_n)^t = (\sum p_{\mu,\nu} u_\nu)_{\mu=0,...,n}$$

mit einer $(n+1) \times n$–Matrix

$$P = (p_{\mu,\nu})_{\mu=0,...,n,\nu=1,...,n}.$$

Weil $\hat{\mathbf{z}} = (1, 0, ..., 0)$ nicht zu $\hat{L}$ gehört, gibt es keinen Vektor $(u_1, ..., u_n) \neq (0, ..., 0)$ mit

$$\sum p_{\mu,\nu} u_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, ..., n.$$

Die Teilmatrix

$$P' := (p_{\mu,\nu})_{\mu,\nu=1,...,n}$$

hat also maximalen Rang $= n$.

Ist $\mathbf{x} \in L$, so ist $\lambda\mathbf{x} + \mu(1 : 0 : ... : 0)$ die von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ aufgespannte Gerade. Sie schneidet $M = \{x_0 = 0\}$ in

$$\mathbf{x} - x_0 \cdot \mathbf{z} = (0 : x_1 : ... : x_n).$$

Also ist die Perspektivität

$$P : L \to M, \quad (x_0 : ... : x_n) \mapsto (x_1 : ... : x_n).$$

Die Abbildung $\mathbb{P}_{n-1} = L \to M$ schreibt sich in Koordinaten

$$(u_1, ..., u_n) \mapsto (\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu,\nu} u_\nu)_{\mu=1,...,n}.$$

Sie gehört also zur linearen Abbildung mit der Matrix P' und ist deswegen eine Projektivität. □

In der linearen Algebra gibt es folgendes Prinzip der linearen Ausdehnung: Sei $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, ..., \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ eine Basis und seien $\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1, ..., \hat{\mathbf{y}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ beliebige Vektoren. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ mit $\phi(\hat{\mathbf{x}}_\nu) = \hat{\mathbf{y}}_\nu$ für $\nu = 0, ..., n$. Diese Abbildung ϕ gehört zur Matrix

$$(\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1, ..., \hat{\mathbf{y}}_n) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, ..., \hat{\mathbf{x}}_n)^{-1}.$$

(Die Vektoren sind hier als Spaltenvektoren in die Matrizen geschrieben.) Wir wollen uns jetzt mit der projektiven Version dieses Prinzips beschäftigen.

Zuerst müssen wir klären, wann Punkte $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{P}_n$ zu einer Basis $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ gehören:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{K}^{n+1} \text{ bilden eine Basis} &\Leftrightarrow \\ \hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n \text{ spannen den } \mathbb{K}^{n+1} \text{ auf} &\Leftrightarrow \\ \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n \text{ spannen den } \mathbb{P}_n \text{ auf.} & \end{aligned}$$

Definition. Ein $(n+1)$–Tupel von Punkten $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{P}_n$ heißt *projektiv unabhängig*, wenn diese Punkte den Raum $\mathbb{P}_n$ aufspannen.

Weiter müssen wir beachten, daß eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ nur dann eine Projektivität definiert, wenn sie invertierbar ist. Wir erhalten folgendes *Prinzip der projektiven Ausdehnung*:

Die Punkte $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{P}_n$ seien projektiv unabhängig, ebenso die Punkte $\mathbf{y}_0, ..., \mathbf{y}_n \in \mathbb{P}_n$. Dann existiert eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, die für $\nu = 0, .., n$ den Punkt $\mathbf{x}_\nu$ auf den Punkt $\mathbf{y}_\nu$ abbildet.

Beweis. Wir wählen Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{y}}_0, ..., \hat{\mathbf{y}}_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu den Punkten $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_0, ..., \mathbf{y}_n$. Wegen der Voraussetzung der projektiven Unabhängigkeit bilden die beiden $(n+1)$–tupel $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n$ und $\hat{\mathbf{y}}_0, ..., \hat{\mathbf{y}}_n$ Basen des $\mathbb{K}^{n+1}$. Also gibt es eine invertierbare lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ mit $\phi(\hat{\mathbf{x}}_\nu) = \hat{\mathbf{y}}_\nu$ für $\nu = 1, ..., n$. Diese lineare Abbildung ϕ definiert eine Projektivität $P : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 1, ..., n$. □

Die eben bewiesene Aussage ist eine reine Existenz–Aussage: Die Eindeutigkeit gilt nicht! Das liegt daran, daß wir statt der Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_0, ..., \hat{\mathbf{y}}_n$ auch beliebige Vielfache $\lambda_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}_0, ..., \lambda_n \cdot \hat{\mathbf{y}}_n$ mit $\lambda_0, ..., \lambda_n \neq 0$ hätten nehmen können.

Beispiel $(n = 1)$: Es seien

$$\mathbf{x}_0 = (a : b), \quad \mathbf{x}_1 = (c : d) \quad \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$$

und

$$\mathbf{y}_0 = (t : u), \quad \mathbf{y}_1 = (v : w) \quad \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$$

Paare projektiv unabhängiger Vektoren. Zu ihnen gehören Basen

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\mathbf{y}}_0 = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}}_1 = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{K}^2$. Weil die Determinante $ad - bc \neq 0$ ist, können wir $\hat{\mathbf{x}}_0$ durch diese Determinante dividieren und deswegen o.B.d.A. annehmen: $ad - bc = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1)^{-1} &= \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} td - vb & -tc + va \\ ud - wb & -uc + wa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Matrix einer Projektivität mit $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_1 \mapsto \mathbf{y}_1$.

Wählen wir andere Vektoren $\lambda_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}_0, \quad \lambda_1 \cdot \hat{\mathbf{y}}_1$ statt $\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1$, so erhalten wir eine andere Projektivität. So wird beispielsweise der Vektor $\hat{\mathbf{x}}_2 := \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_1$ zunächst auf den Vektor $\hat{\mathbf{y}}_0 + \hat{\mathbf{y}}_1$ abgebildet, aber nach der Multiplikation auf den Vektor $\hat{\mathbf{y}}_2 := \lambda_0\hat{\mathbf{y}}_0 + \lambda_1\hat{\mathbf{y}}_1$. Für $(\lambda : \mu) \neq (1 : 1)$ ist dieser Bildvektor kein Vielfaches von $\hat{\mathbf{y}}_0 + \hat{\mathbf{y}}_1$.

Wir sehen: Man kann noch einen dritten Punkt $\mathbf{x}_2$, bzw. $\mathbf{y}_2$ wählen, und dann immer noch eine Projektivität $P : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ finden mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2$. Man muß nur sicherstellen, daß $\lambda_0 \neq 0$ und $\lambda_1 \neq 0$, d.h., nicht nur $\mathbf{y}_0$ und $\mathbf{y}_1$ müssen projektiv unabhängig sein, sondern auch noch die beiden Punktepaare $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_2$, sowie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$.

Satz (Prinzip der projektiven Ausdehnung): *Es seien* $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_{n+1}$ *und* $\mathbf{y}_0, ..., \mathbf{y}_{n+1}$ *zwei* $(n+2)$*–tupel von Punkten im* $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ *mit der Eigenschaft, daß in jedem* $(n+2)$*–tupel jedes* $(n+1)$*–tupel projektiv unabhängig ist. Dann existiert eine Projektivität* $P : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ *mit* $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ *für* $\nu = 0, ..., n+1$*, und hierdurch ist diese Projektivität eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir wählen Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \hat{\mathbf{y}}_0, ..., \hat{\mathbf{y}}_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ zu den gegebenen Punkten. Weil $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n$ eine Basis des $\mathbb{K}^{n+1}$ ist, haben wir

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = c_0\hat{\mathbf{x}}_0 + ... + c_n\hat{\mathbf{x}}_n.$$

Hier ist jedes $c_\nu \neq 0$, denn jedes $(n+1)$–tupel $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_{\nu-1}, \hat{\mathbf{x}}_{\nu+1}, ..., \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}$ ist nach Voraussetzung linear unabhängig. Ohne die Punkte $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n$ zu ändern, ersetzen wir nun die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n$ durch die Vektoren $c_0\hat{\mathbf{x}}_0, ..., c_n\hat{\mathbf{x}}_n$. Dadurch erreichen wir

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_0 + ... + \hat{\mathbf{x}}_n.$$

Diese $n+1$ Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0, ..., \hat{\mathbf{x}}_n$ nehmen wir als neue Basis. In den zugehörigen Koordinaten haben wir

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \hat{\mathbf{x}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen zu Projektivitäten P mit $P(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, ..., P(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$ sind in diesem Koordinatensystem gerade diejenigen Matrizen mit den Spaltenvektoren

$$\lambda_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}_0, ..., \lambda_n \cdot \hat{\mathbf{y}}_n, \quad 0 \neq \lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Der Bildpunkt von $\mathbf{x}_{n+1}$ ist dabei der Punkt $\lambda_0\mathbf{y}_0 + ... + \lambda_n\mathbf{y}_n$.

Jetzt schreiben wir auch

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1} = b_0\hat{\mathbf{y}}_0 + ... + b_n\hat{\mathbf{y}}_n,$$

wobei aus der Voraussetzung wieder folgt $b_0, ..., b_n \neq 0$. Wenn $P(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1}$ gelten soll, dann müssen die beiden Vektoren

$$b_0\hat{\mathbf{y}}_0 + ... + b_n\hat{\mathbf{y}}_n \text{ und } \lambda_0\hat{\mathbf{y}}_0 + ... + \lambda_n\hat{\mathbf{y}}_n$$

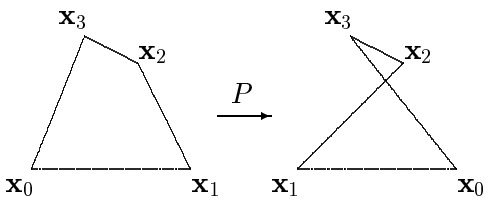
dieselbe Gerade im $\mathbb{K}^{n+1}$ aufspannen. Weil die Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_0, ..., \hat{\mathbf{y}}_n$ linear unabhängig sind, ist dies genau dann der Fall, wenn

$$(\lambda_0 : ... : \lambda_n) = (b_0 : ... : b_n).$$

Dadurch sind die Faktoren $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt. Also sind die Spalten der Abbildungsmatrix, d.h., es ist die ganze Matrix bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Dieser Faktor ändert die zugehörige Projektivität nicht. □

Wir wollen dieses Prinzip der projektiven Ausdehnung an einem einfachen Beispiel in der Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ demonstrieren, das uns noch öfter beschäftigen wird: Vier Punkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ erfüllen die Voraussetzung von Satz 4, wenn keine drei davon projektiv abhängig sind, d.h., wenn keine drei kollinear sind. Seien also $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3$ so gewählt. Dann bilden sie die vier Ecken eines ebenen *Vierecks*. Satz 4 sagt, daß alle derartigen Vierecke durch projektive Transformationen ineinander überführt werden können. Bis auf projektive Äquivalenz gibt es nur ein einziges ebenes Viereck!

Insbesondere ist unser Viereck $\mathbf{x}_0...\mathbf{x}_3$ projektiv äquivalent zum Viereck $\mathbf{x}_{\sigma(0)}...\mathbf{x}_{\sigma(3)}$, wo wir die Ecken mit einer Permutation $\sigma \in \Sigma_4$ vertauscht haben. Zu jeder Permutation $\sigma \in \Sigma_4$ gibt es genau eine Projektivität $P \in \mathbf{PGL}(\mathbf{2}, \mathbb{K})$, die die vier Ecken genau wie σ vertauscht. Z.B. für $\sigma = (0, 1)$ sieht das so aus:



Aus einem Viereck entsteht ein *vollständiges Viereck*, wenn man es durch die beiden Geraden $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$ vervollständigt. Das vollständige Viereck besteht aus sechs Geraden, aus allen sechs Verbindungsgeraden zweier Ecken. Diese sechs Geraden kann man in drei Paare *gegenüberliegender* Seiten einteilen:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1 & \text{und} & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_0\mathbf{x}_2 & \text{und} & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_0\mathbf{x}_3 & \text{und} & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \end{array}$$

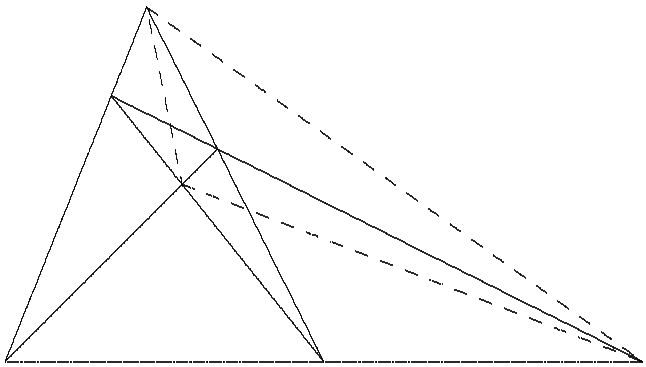
Diese drei Paare gegenüberliegender Seiten haben drei Schnittpunkte, die sogenannten *Diagonalpunkte* des vollständigen Vierecks.

Jede Projektivität P, welche die vier Ecken ineinander abbildet, bildet auch das vollständige Viereck auf sich ab, und damit auch die drei Diagonalpunkte auf sich. P bewirkt eine Permutation der drei Diagonalpunkte. Lassen wir P die Gruppe Σ_4 durchlaufen, welche die vier Ecken permutiert, so erhalten wir eine Abbildung von Σ_4 in die Permutationsgruppe Σ_3 der drei Diagonalpunkte. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\Sigma_4 \to \Sigma_3.$$

Sein Kern ist die *Kleinsche Vierergruppe*

$$V_4 = \{id,\ (01)(23),\ (02)(13),\ (03)(12)\}.$$



Aufgabe 3.8: Bestimmen sie eine Projektivität $F : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, welche

$$1 \mapsto \infty, \quad 2 \mapsto 2, \quad \infty \mapsto 1$$

abbildet. Geben Sie die Abbildung in homogenen Koordinaten und als rationale Funktion an.

Aufgabe 3.9: Finden sie die Fixpunkte der Projektivität

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3.10: Bestimmen Sie eine Projektivität des $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, die den Fixpunkt $(1:1)$ hat und die Punkte $(0:1)$ und $(2:0)$ vertauscht.

Aufgabe 3.11: Die Involution $z \mapsto z'$ auf der projektiven Geraden sei definiert durch

$$z \cdot z' + 1 = 0.$$

Zeigen Sie, daß alle Projektivitäten, die mit dieser Involution kommutieren, von der Form

$$zz' + b(z + z') - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad zz' + b(z - z') + 1 = 0$$

sind.

Aufgabe 3.12: Gegeben seien die Projektivitäten P_1, $P_2 : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, daß es Involutionen $I, I_1, I_2 : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ gibt mit

$$P_1 = I_1 \circ I, \quad P_2 = I \circ I_2.$$

Aufgabe 3.13: $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ sei eine Projektivität mit zwei verschiedenen Fixpunkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Zeigen Sie: Es gibt genau zwei Projektivitäten S_1, S_2 mit $S_i^2 = P$. Und $S_1 \circ S_2^{-1}$ ist eine Involution mit den Fixpunkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

3.4 Das Doppelverhältnis

In Dimension 1 sagt der soeben bewiesene Satz: Es seien $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Projektivität $P : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit $P(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2$. Zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte auf der projektiven Geraden sind also immer *projektiv äquivalent*. Wir wollen jetzt untersuchen, wann zwei *Quadrupel* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ und $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ projektiv äquivalent sind.

Das Teilverhältnis $TV(\mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist nur eine affine, aber keine projektive Invariante. Aber der folgende Quotient zweier Teilverhältnisse wird sich als eine solche projektive Invariante herausstellen:

$$DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{TV(\mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{y})}{TV(\mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Diesen Quotienten nennt man das *Doppelverhältnis* der vier Punkte $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Dieses Doppelverhältnis ist definiert für vier Punkte auf einer (affinen) Geraden. Es ist eine Zahl aus dem Grundkörper $\mathbb{K}$, falls nicht $TV(\mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ist, d.h., wenn $\mathbf{w} \neq \mathbf{x}$ ist. In diesem Fall können wir die vier Punkte durch ihre affinen Koordinaten v, w, x, y geben. Unter Benützung von

$$TV(\mathbf{v}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{v - x}{v - y}$$

wird das Doppelverhältnis

$$\boxed{DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{v - x}{v - y} : \frac{w - x}{w - y}}$$

Natürlich sieht man dieser Formel nicht an, daß das Doppelverhältnis unter projektiven Transformationen invariant ist. Dazu geben wir uns die Punkte $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ durch ihre homogenen Koordinaten

$$\mathbf{v} = (v_0 : v_1),\ \mathbf{w} = (w_0 : w_1),\ \mathbf{x} = (x_0 : x_1),\ \mathbf{y} = (y_0 : y_1).$$

Solange diese Punkte im affinen Teil der Geraden liegen, können wir

$$v_0 = w_0 = x_0 = y_0 = 1, \quad v_1 = v,\ w_1 = w,\ x_1 = x,\ y_1 = y$$

normieren. Dann können wir die Differenzen als 2×2-Determinanten

$$v - x = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & v \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x_0 & v_0 \\ x_1 & v_1 \end{pmatrix}, \quad v - y = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & v \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} y_0 & v_0 \\ y_1 & v_1 \end{pmatrix},$$
$$w - x = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & w \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x_0 & w_0 \\ x_1 & w_1 \end{pmatrix}, \quad w - y = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & w \end{pmatrix}, = det \begin{pmatrix} y_0 & w_0 \\ y_1 & w_1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Und wenn wir in all diesen Determinanten die beiden Spalten vertauschen - dabei einen Faktor -1 in Kauf nehmen, der sich natürlich herauskürzt - wird

$$DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{det(\mathbf{v}, \mathbf{x})}{det(\mathbf{v}, \mathbf{y})} : \frac{det(\mathbf{w}, \mathbf{x})}{det(\mathbf{w}, \mathbf{y})}.$$

Zunächst können wir mit dieser homogenen Schreibweise die Definition des Doppelverhältnisses so erweitern, daß wir auch den Punkt $\infty = (0 : 1)$ einsetzen können. So wird z.B. mit $\mathbf{v} = \infty$

$$\begin{aligned} det(\infty, \mathbf{x}) &= det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \\ &= -1 \\ det(\infty, \mathbf{y}) &= -1 \\ DV(\infty, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{-1}{-1} : \frac{w - x}{w - y} \\ &= \frac{w - y}{w - x}. \end{aligned}$$

Satz (Doppelverhältnis und Projektivitäten): *Zwei Quadrupel* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ *und* $\mathbf{v}', \mathbf{w}', \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ *von paarweise verschiedenen Punkten der projektiven Geraden sind genau dann unter der Gruppe* $\mathbf{PGL}(\mathbf{1}, \mathbb{K})$ *äquivalent, wenn*

$$DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = DV(\mathbf{v}', \mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

Beweis. Seien zunächst die beiden Quadrupel als projektiv äquivalent vorausgesetzt:

$$\mathbf{v}' = A \cdot \mathbf{v}, \ \mathbf{w}' = A \cdot \mathbf{w}, \ \mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}, \ \mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$$

mit einer invertierbaren 2×2-Matrix A. Wegen des Determinanten-Multiplikations-Satzes nehmen alle gestrichenen Determinanten den Faktor $det(A)$ auf, z.B.

$$det(\mathbf{v}', \mathbf{x}') = det(A \cdot \mathbf{v}, A \cdot \mathbf{x}) = det(A \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{x})) = det(A) \cdot det(\mathbf{v}, \mathbf{x}).$$

Und diese vier Faktoren $det(A)$ in $DV(\mathbf{v}', \mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}')$ kürzen sich heraus, das Doppelverhältnis bleibt unverändert:

$$DV(\mathbf{v}', \mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}') = DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, diese beiden Doppelverhältnisse seien gleich. Nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung existiert eine Projektivität $F : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ mit

$$F(\mathbf{w}) = \mathbf{w}', \ F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}', \ F(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'.$$

Der Bildpunkt von $\mathbf{v}$ unter dieser Projektivität sei $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}''$. Wir müssen $\mathbf{v}' = \mathbf{v}''$ zeigen. Wegen der soeben bewiesenen Invarianz des Doppelverhältnisses unter der Projektivität F und wegen der vorausgesetzten Gleichheit des gestrichenen und des ungestrichenen Doppelverhältnisses ist

$$DV(\mathbf{v}', \mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}') = DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = DV(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

Wählen wir die Koordinaten so, daß keiner der beteiligten Punkte der Punkt ∞ ist (wegen der schon bewiesenen Invarianz des Doppelverhältnissen dürfen wir das tun), so finden wir für die Teilverhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{TV(\mathbf{v}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}')}{TV(\mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}')} &= \frac{TV(\mathbf{v}''; \mathbf{x}', \mathbf{y}')}{TV(\mathbf{w}'; \mathbf{x}', \mathbf{y}')} \\ TV(\mathbf{v}'; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= TV(\mathbf{v}''; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

und $\mathbf{v}' = \mathbf{v}''$, weil ein Punkt durch sein Teilverhältnis eindeutig festgelegt ist. □

Schließlich wollen wir uns von der Einschränkung befreien, daß alle vier Punkte voneinander verschieden sein sollen. Wenn zwei (*aber nicht mehr*) zusammenfallen, kann folgendes passieren:

a) $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ oder $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dann ist $DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$.

b) $\mathbf{v} = \mathbf{x}$ oder $\mathbf{w} = \mathbf{y}$. Dann ist eine Determinante im Zähler $= 0$ und $DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

c) $\mathbf{v} = \mathbf{y}$ oder $\mathbf{w} = \mathbf{x}$. Dann ist eine Determinante im Nenner $= 0$. Das ist kein allzu großes Unglück. Wir setzen $DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \infty$. Jetzt ist unser Doppelverhältnis allerdings keine Zahl $\in \mathbb{K}$ mehr, sondern ein Punkt in $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$.

Mit diesen Vereinbarungen ist das Doppelverhältnis auch für vier Punkte auf einer Geraden $L \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ in einem projektiven Raum definiert: Es gibt ja eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to L$. Wir nehmen einfach das Doppelverhältnis der vier Urbilder unter dieser Abbildung. Je zwei solche Abbildungen unterscheiden sich um eine Projektivität von $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$. Deswegen hängt das Doppelverhältnis nicht von der Wahl der Abbildung $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to L$ ab.

Das Doppelverhältnis $DV(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ hängt, ähnlich wie das Teilverhältnis in 2.2, von der Reihenfolge der vier beteiligten Punkte ab. Wir wollen uns jetzt überlegen, wie es davon abhängt. Dazu wenden wir Permutationen $\sigma \in \Sigma_4$ auf die vier beteiligten Punkte an. Am einfachsten geht das, wenn wir die Punkte umbenennen

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3,$$

durch vier Indizes unterscheiden, und die Permutationen $\sigma \in \Sigma_4$ auf die vier Indizes $0, 1, 2, 3$ anwenden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\mapsto \mathbf{x}_{\sigma(i)} \\ DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_3} : \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \\ &\mapsto \frac{x_{\sigma(0)} - x_{\sigma(2)}}{x_{\sigma(0)} - x_{\sigma(3)}} : \frac{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}}{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)}} \end{aligned}$$

Man sieht, daß die folgenden vier Permutationen das Doppelverhältnis nicht ändern:

$$id,\ (01)(23),\ (02)(13),\ (03)(12).$$

Diese vier Permutationen bilden die Kleinsche Vierer–Gruppe V_4, einen Normalteiler in der Σ_4 mit Restklassengruppe $\Sigma_4/V_4 \simeq \Sigma_3$. Die Restklassenabbildung $\Sigma_4 \to \Sigma_3$ haben wir am Ende des Abschnitts 3.3 geometrisch beschrieben.

Wegen des Satzes über das Doppelverhältnis und Projektivitäten hat diese Invarianz des Doppelverhältnisses unter der Kleinschen Vierer–Gruppe folgende bemerkenswerte Konsequenz: *Es seien* $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ *vier verschiedene Punkte. Weiter sei* σ *eine Permutation, die diese vier Punkte paarweise vertauscht. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) Projektivität* $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ *mit* $P(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_{\sigma(i)}$ *für* $i = 0, .., 3$.

Zu jeder Permutation $\tau \in \Sigma_4$ gibt es ein $\sigma \in V_4$ mit $\tau(0) = \sigma(0)$. Dann hat die Permutation $\tau' := \tau \circ \sigma = \tau \circ \sigma^{-1}$ die Eigenschaften:

1. $\tau'(0) = 0$,
2. τ' ändert das Doppelverhältnis genauso wie τ.

Wir brauchen also nur Permutationen $\tau' \in \Sigma_4$ zu untersuchen, welche die Zahl 0 fest lassen. Diese Permutationen bilden eine Gruppe Σ_3 der Ordnung sechs mit den Elementen

$$id,\ (12),\ (23),\ (31),\ (123),\ (132).$$

Bevor wir uns ansehen, was die fünf nicht–trivalen Permutationen hieraus mit dem Doppelverhältnis von vier Punkten $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3$ machen, vereinfachen wir uns das Leben etwas, indem wir die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}_1$ so wählen, daß

$$\mathbf{x}_1 = 1, \quad \mathbf{x}_2 = 0, \quad \mathbf{x}_3 = \infty.$$

Setzen wir $\lambda := \mathbf{x}_0$, dann wird

$$DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{\lambda}{\lambda - \infty} : \frac{1}{1 - \infty} = \lambda.$$

Jetzt wenden wir der Reihe nach unsere Permutationen an:

Permutation	permutierte Punkte	geändertes Doppelverhältnis
(12)	$\lambda, 0, 1, \infty$	$\frac{\lambda - 1}{\lambda - \infty} : \frac{-1}{-\infty} = 1 - \lambda$
(23)	$\lambda, 1, \infty, 0$	$\frac{\lambda - \infty}{\lambda} : \frac{1 - \infty}{1} = 1/\lambda$
(31)	$\lambda, \infty, 0, 1$	$\frac{\lambda}{\lambda - 1} : \frac{\infty}{\infty - 1} = \lambda/(\lambda - 1)$
(123)	$\lambda, 0, \infty, 1$	$\frac{\lambda - \infty}{\lambda - 1} : \frac{\infty}{-1} = 1/(1 - \lambda)$
(132)	$\lambda, \infty, 1, 0$	$\frac{\lambda - 1}{\lambda} : \frac{\infty - 1}{\infty} = (\lambda - 1)/\lambda$

Dies sind genau die sechs Werte, wie beim Teilverhältnis in 2.2! (Ich weiß allerdings momentan hierfür keinen theoretischen Beweis.)

Die sechs erhaltenen Werte sind übrigens nicht immer voneinander verschieden. Es kann vorkommen, daß einige übereinstimmen. Das geschieht bei Quadrupeln von Punkten, die außer der Kleinschen Vierergruppe noch mehr Projektivitäten zulassen. Das ist interessant, und wir wollen es uns genau ansehen. Wir stellen eine Liste der Möglichkeiten dafür auf, daß λ mit einem der angegebenen fünf Werte übereinstimmt:

zusätzliche Permutation	Bedingung	Doppelverhältnis
(12)	$\lambda = 1 - \lambda$	$\lambda = \frac{1}{2}$
(23)	$\lambda = 1/\lambda, \lambda^2 = 1$	$\lambda = \pm 1$
(31)	$\lambda = \lambda/(\lambda - 1)$	$\lambda = 0$ oder 2
(123)	$\lambda = 1/(1 - \lambda), \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$	$\lambda = e^{2\pi i/6}$ oder $e^{-2\pi i/6}$
(132)	$\lambda = (\lambda - 1)/\lambda, \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$	$\lambda = e^{2\pi i/6}$ oder $e^{-2\pi i/6}$

Die beiden letzten Fälle können wir so nur behandeln, wenn unser Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. Die quadratische Gleichung hat die beiden primitiven sechsten Einheitswurzeln

$$\omega := e^{2\pi i/6} \text{ und } \omega^{-1} = e^{-2\pi i/6}$$

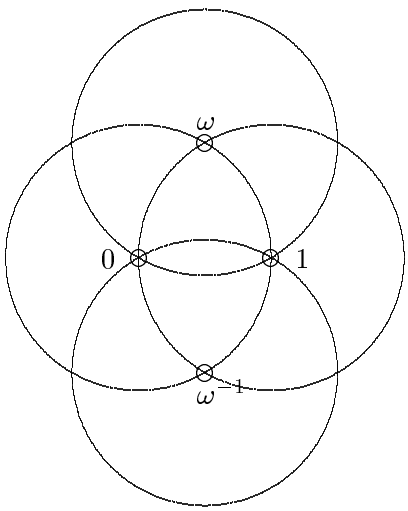
als Lösungen. Ob es Lösungen der quadratischen Gleichung gibt, hängt vom Körper $\mathbb{K}$ ab. In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es z.B. keine.

Wir fassen jetzt noch die Doppelverhältnisse aus der erhaltenen Tabelle zusammen, die sich nur um Permutationen der vier Punkte unterscheiden:

Doppelverhältnisse	Quadrupel
$-1, \frac{1}{2}, 2$	harmonisch
$0, 1, \infty$	entartet
ω, ω^2	äqui–anharmonisch

Es gibt also drei wesentlich voneinander verschiedene Fälle. Davon interessiert uns der Entartungsfall, wo zwei Punkte zusammenfallen am wenigsten, wir haben ihn ja oben schon abgehandelt.

Der *äqui-anharmonische* Fall liegt vor, wenn man im Quadrupel $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3$ drei Punkte durch eine Projektivität zyklisch vertauschen kann. Dann kann man *je drei* Punkte zyklisch vertauschen. Die Untergruppe von $\mathbf{PGL}(\mathbf{1}, \mathbb{C})$, welche eine solche Konfiguration von Punkten permutiert, ist die Untergruppe $A_4 \subset \Sigma_4$ der Ordnung zwölf. Die Punkte $0, 1, \omega, \infty \in \mathbb{C}$ z.B. liegen äqui–anharmonisch:



Der wichtigste Fall ist allerdings der eines *harmonischen* Quadrupels $DV(\mathbf{v},\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y}) = -1, \frac{1}{2}$ oder 2. Wir sagen, die Punktepaare $\mathbf{v},\mathbf{w}$ und $\mathbf{x},\mathbf{y}$ *trennen sich harmonisch*, wenn

$$DV(\mathbf{v},\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})}{TV(\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y})} = -1.$$

In diesem Fall trennt $\mathbf{v}$ die Strecke $\overline{\mathbf{xy}}$ im (bis auf das Vorzeichen) gleichen Verhältnis, wie $\mathbf{w}$. Nur, der eine Punkt liegt im Innern der Strecke, der andere im Äußeren. Wenn wir $\mathbf{v}$ mit $\mathbf{w}$ vertauschen, ändert sich das Doppelverhältnis nicht:

$$DV(\mathbf{w},\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{TV(\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y})}{TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Und umgekehrt: Ändert sich beim Vertauschen von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ das Doppelverhältnis nicht, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})}{TV(\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y})} &= \frac{TV(\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y})}{TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})} \\
\frac{TV(\mathbf{v};\mathbf{x},\mathbf{y})^2}{TV(\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y})^2} &= 1 \\
DV(\mathbf{v},\mathbf{w};\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \pm 1
\end{aligned}$$

Wenn alle vier Punkte verschieden sind, kann das Doppelverhältnis nicht $= 1$ sein, so daß es also $= -1$ ist. Hieraus folgt der

Satz (Harmonie–Kriterium): *Es seien* $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ *vier verschiedene Punkte. Das Paar* $\mathbf{v},\mathbf{w}$ *trennt das Paar* $\mathbf{x},\mathbf{y}$ *harmonisch, genau dann, wenn es eine Projektivität* $P : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ *gibt, die* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *fest läßt, und* $\mathbf{v},\mathbf{w}$ *vertauscht.*

Beweis. Die Punktepaare trennen sich harmonisch, genau dann wenn Vertauschen von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ das Doppelverhältnis nicht ändert. Wegen des Satzes über das Doppelverhältnis ist dies aber

genau dann der Fall, wenn es eine Projektivität gibt, die dieses Vertauschen bewirkt, und $\mathbf{x}, \mathbf{w}$ fest läßt. □

Eine Anwendung ist der

Satz (Doppelverhältnis am vollständigen Viereck): *Auf jeder Seite eines vollständigen Vierecks trennen sich*

- *die beiden Ecken des Vierecks sowie*
- *der Diagonalpunkt auf dieser Seite, und der Schnittpunkt der Seite mit der gegenüberliegenden Diagonale*

harmonisch.

Beweis. Die Ecken des vollständigen Vierecks seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und seine Diagonalpunkte

$$\mathbf{x} := \mathbf{ab} \cap \mathbf{cd},\ \mathbf{y} := \mathbf{bc} \cap \mathbf{da},\ \mathbf{z} := \mathbf{ac} \cap \mathbf{bd}.$$

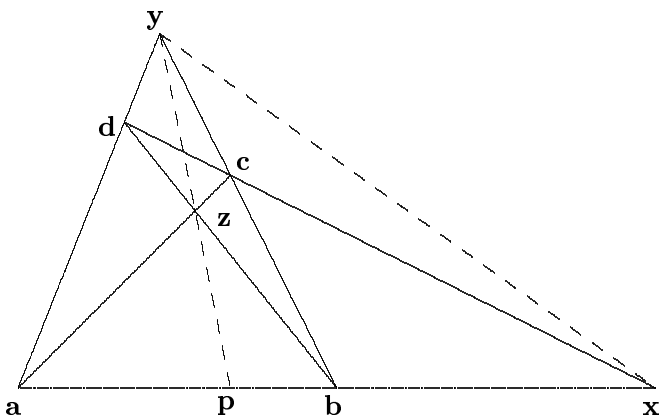
Der Schnittpunkt von $\mathbf{ab}$ und $\mathbf{yz}$ sei $\mathbf{p}$. Die Behauptung ist, daß sich die Punktepaare $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ harmonisch trennen. Dazu betrachten wir die beiden Perspektivitäten mit Zentrum $\mathbf{y}$ und mit Zentrum $\mathbf{z}$. Beide definieren projektive Abbildungen $\phi : \mathbf{ab} \to \mathbf{cd}$ (Zentrum $\mathbf{y}$) und $\psi : \mathbf{ab} \to \mathbf{cd}$ (Zentrum $\mathbf{z}$) der Seiten des Vierecks. Wir verfolgen die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{x}$ unter der Projektivität $\psi^{-1} \circ \phi$:

$$\phi : \begin{cases} \mathbf{a} & \mapsto & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mapsto & \mathbf{c} \\ \mathbf{p} & \mapsto & \mathbf{q} := \mathbf{cd} \cap \mathbf{yz} \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \end{cases} \qquad \psi^{-1} : \begin{cases} \mathbf{d} & \mapsto & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mapsto & \mathbf{a} \\ \mathbf{q} & \mapsto & \mathbf{p} \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \end{cases}$$

Wir sehen: Die Projektivität $\psi^{-1} \circ \phi$ läßt $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ fest, und vertauscht $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{b}$. Es folgt

$$DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{p}, \mathbf{x}) = -1.$$

□



Aus diesem Satz erhält man folgende *Konstruktion des vierten harmonischen Punktes:* Es sei eine Strecke **ab** gegeben, und darauf ein Punkt **p**. Gesucht ist der Punkt **x**, der zusammen mit **p** die Strecke **ab** harmonisch teilt.

Lösung: Wir wählen einen beliebigen Punkt **y** in der Ebene, der nicht auf der Geraden **ab** liegt, und verbinden **a**, **b** und **p** mit **y**. Weiter legen wir eine Gerade durch **a**, nicht die Gerade **ab** oder **ay**. Es sei **c** der Schnittpunkt dieser Geraden mit **by** und **z** der Schnittpunkt mit **py**. **d** sei der Schnittpunkt $\mathbf{ay} \cap \mathbf{bz}$. Dann ist $\mathbf{x} = \mathbf{ab} \cap \mathbf{cd}$.

In der Tat: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ sind die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den Diagonalpunkten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Nach dem Satz trennt das Paar $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ die beiden Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ harmonisch.

Aufgabe 3.14: Zeigen sie für sechs Punkte $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_6 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$:
a) $DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \cdot DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5) = DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5)$.
b) $DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6) \quad \Rightarrow \quad DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5) = DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6)$.

Aufgabe 3.15: Es seien $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_4$ vier verschiedene Punkte der affinen Geraden $\mathbb{K}$ mit den Koordinaten $x_1, ..., x_4$. Zeigen Sie:
a) $DV(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4)$.
b) Es seien x_1, x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ und x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$. Dann gilt

$$DV(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2bb' - ac' - a'c = 0.$$

Aufgabe 3.16: Es seien $P_1, P_2 : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ Projektivitäten mit $P_1, P_2 \neq id$. Zeigen Sie: Es ist $P_1 P_2 = P_2 P_1$ genau dann, wenn gilt
entweder: P_1 und P_2 haben dieselben Fixpunkte,
oder: P_1 und P_2 sind Involutionen, deren Paare von Fixpunkten sich harmonisch trennen.

Aufgabe 3.17: Es sei **abc** ein Dreieck in $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ und **p** ein Punkt, der auf keiner Dreiecks-Seite liegt. Weiter seien

$$\mathbf{a}' := \mathbf{ap} \cap \mathbf{bc}, \quad \mathbf{b}' := \mathbf{bp} \cap \mathbf{ca}, \quad \mathbf{c}' := \mathbf{cp} \cap \mathbf{ab}.$$

Der Punkt $\mathbf{a}'' \in \mathbf{bc}$ (bzw. $\mathbf{b}'' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}'' \in \mathbf{ab}$) sei harmonisch konjugiert zu $\mathbf{a}'$ (bzw. $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$) bezüglich **b** und **c** (bzw. **c** und **a**, **a** und **b**).
a) Zeigen Sie: $\mathbf{a}''$, $\mathbf{b}''$, $\mathbf{c}''$ liegen auf einer Geraden (der sogenannten *harmonischen Polare* des Punktes **p** in Bezug auf das Dreieck **abc**.
b) Berechnen Sie die harmonische Polare des Punktes $\mathbf{p} = (a : b : c)$ in Bezug auf das Koordinatendreieck mit den Ecken $\mathbf{a} = (1 : 0 : 0), \mathbf{b} = (0 : 1 : 0), \mathbf{c} = (0 : 0 : 1)$.

Aufgabe 3.18: Die Gerade **uv** treffe die Seiten des Dreiecks **abc** in den Punkten $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$. Die Punkte $\mathbf{a}'', \mathbf{b}'', \mathbf{c}''$ seien harmonisch konjugiert zu $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ bezüglich **u** und **v**. Zeigen Sie, daß sich die Geraden $\mathbf{aa}''$, $\mathbf{bb}''$ und $\mathbf{cc}''$ in einem Punkt treffen.

Aufgabe 3.19: Es seien $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_4$ vier verschiedene Punkte auf der projektiven Geraden mit $DV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \lambda$. Zeigen Sie:
a) $\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) := \dfrac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^2}$ ändert sich nicht bei Permutationen der vier Punkte $\mathbf{x}_i$.

b) Es gibt genau dann eine Projektivität P mit

$$P(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4\},$$

wenn $\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \sigma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)$.

Aufgabe 3.20: Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, sowie $\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ vier kollineare Punkte. Zeigen Sie: Die Geraden $\mathbf{bb}'$, $\mathbf{cc}'$, $\mathbf{dd}'$ treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn

$$DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}, \mathbf{d}) = DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}'; \mathbf{c}', \mathbf{d}').$$

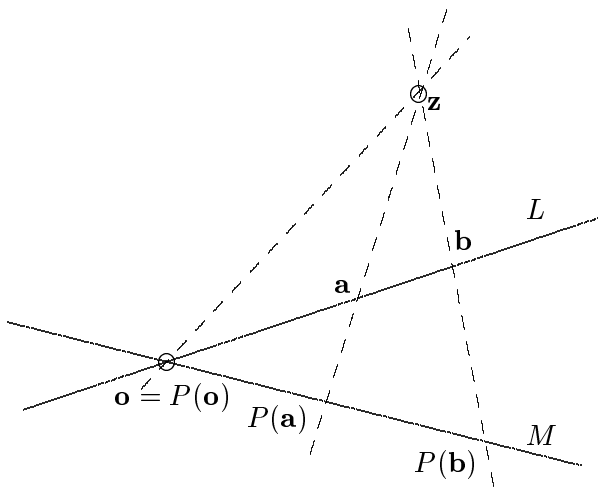
3.5 Lineare Geometrie der projektiven Ebene

Zunächst wollen wir Projektivitäten $P : L \to M$ zwischen zwei Geraden $L, M \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, setzen wir $L \neq M$ voraus. Dann nennen wir den Schnittpunkt $L \cap M = \mathbf{o}$.

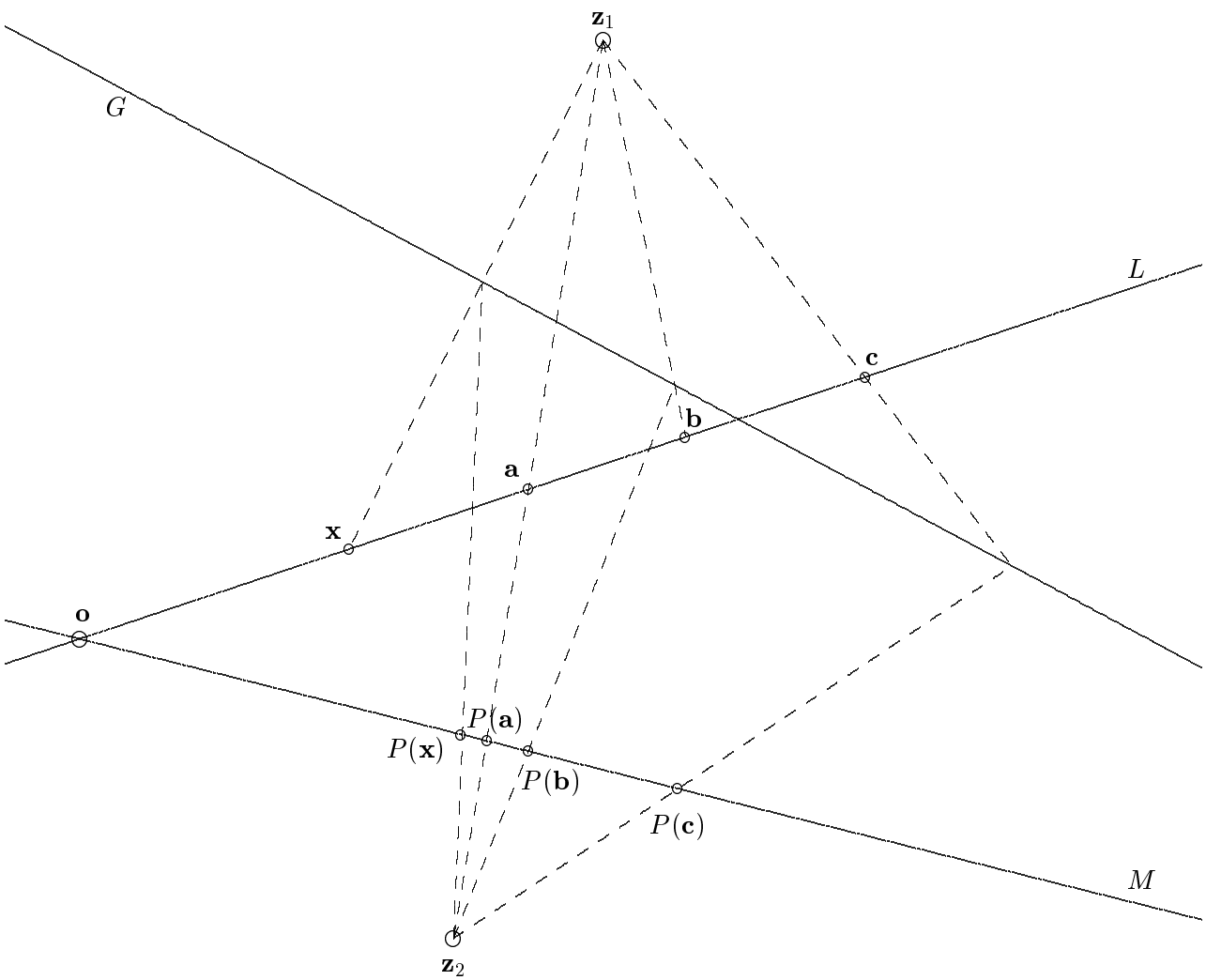
Satz (Projektivitäten und Perspektivitäten): *a) Eine Projektivität $P : L \to M$ ist eine Perspektivität genau dann, wenn $P(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$.*

b) Jede Projektivität $P : L \to M$ ist ein Produkt von höchstens zwei (falls $L \neq M$) oder drei (falls $L = M$) Perspektivitäten.

Beweis. a) Sei $P(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Wir wählen zwei Punkte $\mathbf{o} \neq \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ auf der Geraden L. Dann sind ihre Bilder $P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b}) \in M$ voneinander und von $\mathbf{o}$ verschieden. Als Projektionszentrum wählen wir den Schnittpunkt $\mathbf{z}$ der Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{a})$ und $\mathbf{b}P(\mathbf{b})$. Die Perspektivität mit Zentrum $\mathbf{z}$ bildet, ebenso wie die Projektivität P, die drei Punkte $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ auf $\mathbf{o}, P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b})$ ab. Aus der Eindeutigkeit im Prinzip der projektiven Ausdehnung folgt, daß P die Perspektivität mit Zentrum $\mathbf{z}$ ist.



b) Auf L wählen wir drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, die untereinander und von $\mathbf{o}$, sowie $P^{-1}(\mathbf{o})$ verschieden seien. Dann sind ihre Bildpunkte $P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b}), P(\mathbf{c}) \in M$ voneinander und von $\mathbf{o}$ verschieden. Auf der Verbindungsgeraden von $\mathbf{a}$ und $P(\mathbf{a})$ wählen wir zwei beliebige Punkte $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2$, die von $\mathbf{a}$ und $P(\mathbf{a})$ verschieden sein sollen. Weil die Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}, P(\mathbf{b})$ und $P(\mathbf{c})$ nicht auf der Verbindungsgeraden von $\mathbf{a}$ und $P(\mathbf{a})$ liegen, sind die Geraden $\mathbf{z}_1\mathbf{b}$ und $\mathbf{z}_2P(\mathbf{b})$, sowie $\mathbf{z}_1\mathbf{c}$ und $\mathbf{z}_2P(\mathbf{c})$ verschieden, und schneiden sich jeweils in einem Punkt. Die Gerade durch diese beiden Schnittpunkte nennen wir G. Sei $P_1 : L \to G$ durch die Perspektivität mit Zentrum $\mathbf{z}_1$ gegeben und $P_2 : G \to M$ durch die Perspektivität mit Zentrum $\mathbf{z}_2$. Wir verfolgen die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ unter $P_2 \circ P_1$:



$$P_1: \begin{cases} \mathbf{a} & \mapsto & G \cap \mathbf{a}P(\mathbf{a}) \\ \mathbf{b} & \mapsto & G \cap \mathbf{z}_1\mathbf{b} = G \cap \mathbf{z}_2 P(\mathbf{b}) \\ \mathbf{c} & \mapsto & G \cap \mathbf{z}_1\mathbf{c} = G \cap \mathbf{x}_2 P(\mathbf{c}) \end{cases} \qquad P_2: \begin{cases} G \cap \mathbf{a}P(\mathbf{a}) & \mapsto & P(\mathbf{a}) \\ G \cap \mathbf{z}_2 P(\mathbf{b}) & \mapsto & P(\mathbf{b}) \\ G \cap \mathbf{z}_2 P(\mathbf{c}) & \mapsto & P(\mathbf{c}) \end{cases}$$

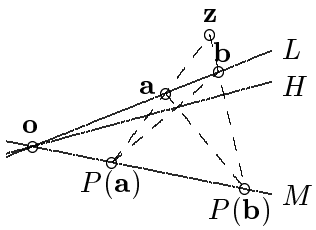
Wir sehen: Die Projektivität $P_2 \circ P_1$ bildet die drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ genauso ab, wie P. Wieder muß nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung die Projektivität P mit $P_2 \circ P_1$ übereinstimmen.

Falls $L = M$ gewesen sein sollte, bilden wir zuerst L auf eine Gerade $L' \neq L$ durch eine Perspektivität ab, und dann $L' \to M$ durch ein Produkt von zwei Perspektivitäten. □

Satz (Achsensatz): *Es seien $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden und $P : L \to M$ eine Projektivität. Dann gibt es eine Gerade $H \subset \mathbb{P}_2$ (die Achse), auf der, für alle Punkte $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in L$, die Schnittpunkte der Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{b})$ und $\mathbf{b}P(\mathbf{a})$ liegen.*

Beweis. Sei $\mathbf{o} = L \cap M$ der Schnittpunkt der beiden Geraden.

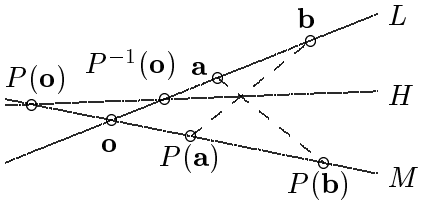
Fall 1: Sei $P(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, also P eine Perspektivität mit einem Zentrum $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$. Die Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{b})$ und $\mathbf{b}P(\mathbf{a})$ sind dann Diagonalen im Viereck $\mathbf{a}, \mathbf{b}, P(\mathbf{b}), P(\mathbf{a})$. Ihr Schnittpunkt ist also ein Diagonalpunkt dieses Vierecks. Die Gerade H durch $\mathbf{o}$ und diesen Schnittpunkt trifft deswegen die Seite $\mathbf{a}P(\mathbf{a})$ in einem Punkt, der zusammen mit $\mathbf{z}$ die Ecken $\mathbf{a}$ und $P(\mathbf{a})$ harmonisch trennt. Deswegen hängt dieser Punkt nicht von der Wahl von $\mathbf{b} \in M$ ab. Für alle $\mathbf{b} \in M$ liegen also die Schnittpunkte $\mathbf{a}P(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}P(\mathbf{a})$ auf der Geraden H.



Genauso sieht man, daß für jede Wahl des Punktes $\mathbf{b}$ die Verbindungsgerade von $\mathbf{o}$ mit $\mathbf{b}P(\mathbf{a}) \cap \mathbf{a}P(\mathbf{b})$ unabhängig von $\mathbf{a}$ ist, und deswegen $= H$ ist. Daraus folgt die Behauptung in diesem Fall.

Fall 2: Sei $P(\mathbf{o}) \neq \mathbf{o}$. Dann ist natürlich auch $P^{-1}(\mathbf{o}) \neq \mathbf{o}$. Die Transformation P bildet die vier verschiedenen Punkte $P^{-1}(\mathbf{o}), \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ auf das Viertupel $\mathbf{o}, P(\mathbf{o}), P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b})$ ab. Also gilt

$$DV(P^{-1}(\mathbf{o}), \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = DV(\mathbf{o}, P(\mathbf{o}), P(\mathbf{a}), P(\mathbf{b})) = DV(P(\mathbf{o}), \mathbf{o}, P(\mathbf{b}), P(\mathbf{a})).$$



Es gibt daher eine projektive Abbildung $P' : L \to M$ mit $P'P^{-1}(\mathbf{o}) = P(\mathbf{o})$, $P'(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, $P'(\mathbf{a}) = P(\mathbf{b})$, $P'(\mathbf{b}) = P(\mathbf{a})$. Wegen $P'(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ ist diese eine Perspektivität mit einem Zentrum $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$. Die drei Geraden $\mathbf{a}P(\mathbf{b})$, $\mathbf{b}P(\mathbf{a})$ und $P^{-1}(\mathbf{o})P(\mathbf{o})$ gehen durch dieses Zentrum. Anders ausgedrückt: der Schnittpunkt $\mathbf{a}P(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}P(\mathbf{a})$ liegt auf der Geraden $H := P^{-1}(\mathbf{o})P(\mathbf{o})$. Diese Gerade ist unabhängig von der Wahl der Punkte $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b} \in L$. Dies ist die Behauptung. □

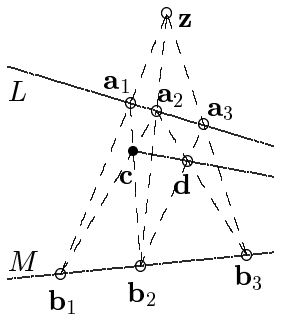
Korollar 1 (Satz von Pappos): *Es seien $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden. Die drei Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in L$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in M$ seien voneinander und vom Schnittpunkt $L \cap M$ verschieden. Dann sind die drei Schnittpunkte $\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j \cap \mathbf{a}_j\mathbf{b}_i$, $i \neq j = 1, 2, 3$ kollinear.*

Beweis. Nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung gibt es eine Projektivität $P : L \to M$ mit $P(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$. Die Achse dieser Projektivität enthält alle Punkte $\mathbf{a}P(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}P(\mathbf{a})$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$, und damit auch unsere drei Schnittpunkte. □

Dieses Korollar ist genau der Satz von Pappos aus dem letzten Kapitel, nur, daß parallele Geraden jetzt keine Ausnahmefälle mehr sind, weil sie sich im Unendlichen schneiden.

Korollar 2 (Zwei Geraden schneiden sich außerhalb des Zeichenblattes): *Es seien zwei Geraden $L \neq M$ gezeichnet, deren Schnittpunkt außerhalb des Zeichenblattes liegt. Es sei die Verbindungslinie eines gegebenen Punktes* $\mathbf{c}$ *mit diesem Schnittpunkt zu zeichnen.*

Lösung: Durch den Punkt $\mathbf{c}$ werden zwei Geraden gezeichnet, die L in zwei Punkten $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, sowie M in zwei Punkten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ schneiden. Dies soll so geschehen, daß sich diese beiden Geraden in einem Punkt $\mathbf{z}$ des Zeichenblattes schneiden. Durch $\mathbf{z}$ werde eine dritte Gerade gezeichnet, die L in $\mathbf{a}_3$ und M in $\mathbf{b}_3$ trifft. Die Perspektivität mit Zentrum $\mathbf{z}$ bildet dann $\mathbf{a}_i \mapsto \mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3$ ab. Ihre Achse ist die Verbindungslinie von $\mathbf{c}$ mit dem Schnittpunkt $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2$. Da die Achse einer Perspektivität durch den Schnittpunkt $L \cap M$ geht, ist sie die Verbindungsgerade von $\mathbf{c}$ mit diesem Schnittpunkt. □



Satz (von Desargues): *Die Dreiecke* $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *und* $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ *seien perspektiv, d.h., es gebe eine Perspektivität mit Zentrum* $\mathbf{z} \neq \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}_3$, *welche für* $i = 1, 2, 3$ *die Ecken* $\mathbf{a}_i$ *auf die Ecken* $\mathbf{b}_i$ *abbildet. Dann sind die Schnittpunkte*

$$\mathbf{t}_1 := \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 \cap \mathbf{b}_2\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{t}_2 := \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{b}_3\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{t}_3 := \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cap \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$$

kollinear.

Beweis. Falls zwei der Ecken $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{b}_i$ zusammenfallen, wird die Aussage trivial: Sei etwa $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$. Dann wird

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 = \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$$

.

Deswegen können wir o.B.d.A. $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$ annehmen. Wir bezeichnen mit $\hat{\mathbf{o}} \neq \hat{\mathbf{a}}_1, ..., \hat{\mathbf{b}}_3, \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{K}^3$ Vektoren, die zu den Punkten $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}_3, \mathbf{z} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ gehören. Weil $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ und $\mathbf{z}$ kollinear sind, sind die Vektoren $\hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{b}}_i$ und $\hat{\mathbf{z}}$ linear abhängig. Es gibt deswegen Zahlen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ mit $\hat{\mathbf{z}} = \lambda_i\hat{\mathbf{a}}_i + \mu_i\hat{\mathbf{b}}_i$ für $i = 1, 2, 3$. Aus

$$\hat{\mathbf{z}} = \lambda_1\hat{\mathbf{a}}_1 + \mu_1\hat{\mathbf{b}}_1 = \lambda_2\hat{\mathbf{a}}_2 + \mu_2\hat{\mathbf{b}}_2 = \lambda_3\hat{\mathbf{a}}_3 + \mu_3\hat{\mathbf{b}}_3$$

folgen die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda_1\hat{\mathbf{a}}_1 - \lambda_2\hat{\mathbf{a}}_2 & = & \mu_2\hat{\mathbf{b}}_2 - \mu_1\hat{\mathbf{b}}_1 & =: & \hat{\mathbf{t}}_3 \\ \lambda_2\hat{\mathbf{a}}_2 - \lambda_3\hat{\mathbf{a}}_3 & = & \mu_3\hat{\mathbf{b}}_3 - \mu_2\hat{\mathbf{b}}_2 & =: & \hat{\mathbf{t}}_1 \\ \lambda_3\hat{\mathbf{a}}_3 - \lambda_1\hat{\mathbf{a}}_1 & = & \mu_1\hat{\mathbf{b}}_1 - \mu_3\hat{\mathbf{b}}_3 & =: & \hat{\mathbf{t}}_2. \end{array}$$

Weil $\hat{\mathbf{a}}_i$ und $\hat{\mathbf{a}}_j$ für $i \neq j$ linear unabhängig sind, sind die Vektoren $\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\mathbf{t}}_3 \in \mathbb{K}^3$ nicht $\mathbf{0}$. Sie sind deshalb Vektoren zu den Schnittpunkten $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ der Geraden $\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$. Nun sind die drei Vektoren $\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\mathbf{t}}_3$ linear abhängig, denn

$$\hat{\mathbf{t}}_1 + \hat{\mathbf{t}}_2 + \hat{\mathbf{t}}_3 = (\lambda_1\hat{\mathbf{a}}_1 - \lambda_2\hat{\mathbf{a}}_2) + (\lambda_2\hat{\mathbf{a}}_2 - \lambda_3\hat{\mathbf{a}}_3) + (\lambda_3\hat{\mathbf{a}}_3 - \lambda_1\hat{\mathbf{a}}_1) = \mathbf{0}.$$

Deswegen sind die drei Punkte $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ kollinear. □

Aufgabe 3.21: Gegeben sei ein Dreieck mit den Ecken

$$\mathbf{p} = (1 : p : p'),\ \mathbf{q} = (q' : 1 : q),\ \mathbf{r} = (r : r' : 1) \quad \text{wobei} \quad p \cdot p' \cdot q \cdot q' \cdot r \cdot r' \neq 0.$$

Zeigen Sie:
a) Dieses Dreieck liegt genau dann perspektiv zum Koordinatendreieck $\mathbf{a} = (1 : 0 : 0),\ \mathbf{b} = (0 : 1 : 0),\ \mathbf{c} = (0 : 0 : 1)$, wenn

$$pqr = p'q'r'.$$

b) Ist das Dreieck **abc** perspektiv mit **pqr** und **qrp**, dann auch mit **rpq**.

Aufgabe 3.22: Das Dreieck $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ sei dem Dreieck **abc** einbeschrieben (d.h., $\mathbf{a}' \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{b}' \in \mathbf{ca}$, $\mathbf{c}' \in \mathbf{ab}$, aber keine Ecken fallen zusammen) und das Dreieck $\mathbf{a}''\mathbf{b}''\mathbf{c}''$ sei dem Dreieck **abc** umbeschrieben (d.h., das Dreieck **abc** sei dem Dreieck $\mathbf{a}''\mathbf{b}''\mathbf{c}''$ einbeschrieben). Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ und $\mathbf{a}''\mathbf{b}''\mathbf{c}''$ beide zum Dreieck **abc** perspektiv sind, dann sind sie auch zueinander perspektiv.

Aufgabe 3.23: Gegeben seien zwei Dreiecke **abc** und $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ so, daß sich die Geraden $\mathbf{aa}'$ und **bc**, $\mathbf{bb}'$ und **ca**, sowie $\mathbf{cc}'$ und **ab** in drei kollinearen Punkten treffen. Zeigen Sie daß sich die drei Verbindungsgeraden von

$$\mathbf{a}' \text{ mit } \mathbf{bc} \cap \mathbf{b}'\mathbf{c}',\ \mathbf{b}' \text{ mit } \mathbf{ca} \cap \mathbf{c}'\mathbf{a}',\ \mathbf{c}' \text{ mit } \mathbf{ab} \cap \mathbf{a}'\mathbf{b}'$$

in einem Punkt treffen.

Aufgabe 3.24: Drei Dreiecke seien zueinander paarweise perspektiv, mit demselben Perspektivitätszentrum. Zeigen Sie, daß sich dann die drei Perspektivitäts-Achsen (Desargues-Geraden) in einem Punkt treffen.

3.6 Das Dualitätsprinzip

Wir kommen jetzt zu einem ganz wichtigen Prinzip der projektiven Geometrie, dem *Dualitätsprinzip*. Ausgangspunkt ist folgende Bemerkung: Genauso, wie ein Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$ durch seine drei homogenen Koordinaten $(a_0 : a_1 : a_2)$ festgelegt ist, so ist auch eine Gerade

$$L: \quad \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

durch drei Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ festgelegt. Und ändert man diese drei Zahlen um einen gemeinsamen Faktor $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ ab, so ändert sich zwar die Geradengleichung (um ebendiesen Faktor), aber nicht die Gerade selbst. Man kann also auch die Gerade L durch ein Tripel $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ homogener Koordinaten charakterisieren. Die Inzidenz eines Punktes $\mathbf{a}$ mit der Geraden L kann man den homogenen Koordinaten von $\mathbf{a}$ und L ansehen:

$$\mathbf{a} \in L \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0.$$

In dieser Inzidenz–Gleichung kann man die Rollen des Punktes $\mathbf{a}$ und der Geraden L vertauschen:

Nimmt man die Koordinaten des Punktes $\mathbf{a}$, um eine Gerade

$$\mathbf{a}^* : \quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad \subset \mathbb{P}_2$$

zu definieren, und die Koordinaten von L, um einen Punkt

$$L^* := (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}_2$$

zu definieren, so gilt

$$\mathbf{a} \in L \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}^* \ni L^*.$$

Man nennt $\mathbf{a}^* \subset \mathbb{P}_2$ die *duale Gerade* zum Punkt $\mathbf{a}$ und $L^* \in \mathbb{P}_2$ den dualen Punkt zur Geraden L. Diese Dualitätsbeziehung ist symmetrisch:

$$L = \mathbf{a}^* \quad \Leftrightarrow \quad L^* = \mathbf{a}.$$

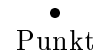
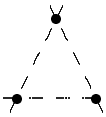
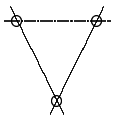
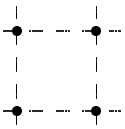
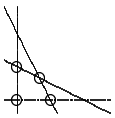
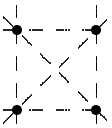
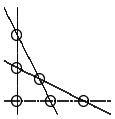
Weil man die Rollen von Punkt und Gerade bei der Inzidenz vertauschen kann, bleibt eine Inzidenz zwischen einem Punkt und einer Geraden beim Übergang zur dualen Geraden und dem dualen Punkt erhalten. Dies ist das

Dualitätsprinzip: *Gilt eine Aussage über Punkte und Geraden, die nur mit Hilfe von Inzidenzen formuliert ist (z.B. der Satz von Pappos, der Satz von Desargues), so gilt auch die duale Aussage, die man erhält, wenn man alle*

Punkte	*durch*	*die dualen Geraden*
Geraden	*durch*	*die dualen Punkte*
Inzidenzen	*durch*	*die Inzidenzen zwischen den dualen Objekten*

ersetzt.

Als Beispiele stellen wir eine kleine Liste der einfachsten Figuren in der projektiven Ebene und ihrer dualen Figuren zusammen:

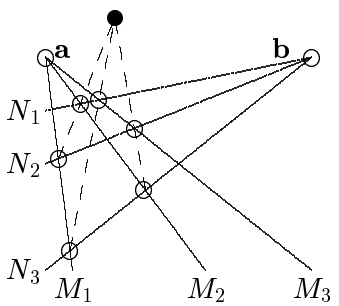
Figur	Dual
 Punkt	Gerade
Punkt auf einer Geraden	Gerade durch einen Punkt
zwei Punkte auf einer Geraden	zwei Geraden durch einen Punkt
 Dreieck	 Dreiseit
 Viereck	 Vierseit
 volständiges Viereck	 vollständiges Vierseit

Als Beispiel einer nicht ganz trivialen Aussage dualisieren wir den Satz von Pappos:

Satz (Dual zum Satz von Pappos): *Es seien* **a** *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_2$ *zwei verschiedene Punkte. Durch jeden der Punkte seien drei Geraden* $M_1, M_2, M_3 \ni \mathbf{a}$ *und* $N_1, N_2, N_3 \ni \mathbf{b}$ *gewählt, die voneinander und von der Verbindungsgeraden* **ab** *verschieden sein mögen. Dann treffen sich die drei Verbindungsgeraden der Punktepaare*

$$M_i \cap N_j \text{ und } N_i \cap M_j, \quad i \neq j = 1, 2, 3$$

in einem Punkt.



Diesen Satz brauchen wir nicht zu beweisen. Er gilt, weil er durch das Dualitätsprinzip aus dem Satz von Pappos hervorgeht.

Durch das Dualitätsprinzip entsteht allerdings nicht immer etwas neues. So ist die duale Fi-

gur zu einem Dreieck $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ ein Dreieck mit den Seiten $\mathbf{a}_1^*\mathbf{a}_2^*\mathbf{a}_3^*$. Sind zwei Dreiecke $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ perspektiv mit dem Zentrum $\mathbf{z}$ (wie im Satz von Desargues), so liegen die Schnittpunkte $\mathbf{a}_i^* \cap \mathbf{b}_i^*$ korrespondierender Seiten der dualen Dreiecke auf der Geraden $\mathbf{z}^*$. Dual zu den Schnittpunkten $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \cap \mathbf{b}_i\mathbf{b}_j$ korrespondierender Seiten sind die Verbindungsgeraden von Paaren $\mathbf{a}_i^* \cap \mathbf{a}_j^*$ und $\mathbf{b}_i^* \cap \mathbf{b}_j^*$ korrespondierender Eckpunkte. Und dual zur Aussage des Satzes von Desargues ist die Tatsache, daß diese drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt gehen.

Die Figur zum dualen Satz von Desargues ist die gleiche wie die zum Satz von Desargues selbst, denn die duale Aussage ist nichts anderes, als die Umkehrung des Satzes von Desargues:

Satz (Dual und Umkehrung des Satzes von Desargues): *Liegen die drei Schnittpunkte der drei Paare korrespondierender Seiten in zwei Dreiecken auf einer Geraden, so sind die Dreiecke perspektiv.*

In der Koordinaten–gebundenen Form, in der ich das Dualitätsprinzip bis jetzt erklärt habe, ist es nicht verträglich mit Koordinatentransformationen oder Projektivitäten. Aber man kann das Dualitätsprinzip auch koordinatenfrei formulieren. Dazu braucht man allerdings zwei *wesentlich verschiedene* Exemplare der projektiven Ebene:

Wir ersetzen den Vektorraum $\mathbb{K}^3$ durch einen koordinatenfreien drei–dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ und unsere bisher definierte Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ durch die projektive Ebene $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2(V)$ der Geraden in V. Diese neue Ebene sieht nicht viel anders aus als die alte projektive Ebene, wir haben bloß keine homogenen Koordinaten. Wenn wir welche wollen, müssen wir einen Isomorphismus $V \simeq \mathbb{K}^3$ *auswählen.*

Die projektive Ebene $\mathbb{P}_2^* := \mathbb{P}_2(V^*)$, die zum dualen Vektorraum V^* gehört, nennt man *die duale projektive Ebene.* Was sind die Punkte der dualen projektiven Ebene? Sie werden repräsentiert durch Geraden im dualen Vektorraum V^*. Was aber ist eine Gerade in V^*? So eine Gerade wird aufgespannt durch ein Element $0 \neq l \in V^*$, d.h. durch eine Linearform $0 \neq l : V \to \mathbb{K}$. Diese Linearform verschwindet auf der Ebene $\{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^3 : l(\hat{\mathbf{x}}) = 0\}$ und definiert eine Gerade $L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2 : l(\hat{\mathbf{x}}) = 0\}$ in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$. Ersetzt man die Linearform l durch ein Vielfaches $\lambda \cdot l, \lambda \neq 0$, so ändert dies weder die Ebene in V, noch die Gerade $L \subset \mathbb{P}_2$. Jeder Punkt $\{\lambda \cdot l\} \in \mathbb{P}_2^*$ definiert auf diese Weise eine Gerade $L \subset \mathbb{P}_2$. Die Linearform ist durch die Ebene in V eindeutig bestimmt, bis auf konstante Faktoren. Damit haben wir eine Bijektion

$$\text{Geraden } L = \{l(\mathbf{x}) = 0\} \subset \mathbb{P}_2 \quad \leftrightarrow \quad \text{Punkte } L^* = \mathbb{K} \cdot l \in \mathbb{P}_2^*.$$

Die Geraden L der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ sind genau die Punkte L^* der dualen projektiven Ebene $\mathbb{P}_2^*$.

Diese Dualität ist im folgenden Sinn verträglich mit Projektivitäten: sei eine Projektivität $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gegeben. Dazu gehört eine invertierbare lineare Abbildung $\Phi : V \to V$. Wie das in der projektiven Geometrie halt so ist, ist diese lineare Abbildung Φ nur bis auf einen konstanten Faktor durch P eindeutig bestimmt. Zu Φ gehört kanonisch eine transponierte Abbildung $\Phi^t : V^* \to V^*$. Diese Abbildung ist durch die Formel

$$l(\Phi(\mathbf{x})) = (\Phi^t(l))(\mathbf{x}) \text{ für alle } l \in V^*, \mathbf{x} \in V$$

definiert. Bezeichnet man die Auswertung der Linearform l auf dem Vektor $\mathbf{x}$ mit $(l.\mathbf{x})$, so nimmt diese Gleichung die etwas vertrautere Form

$$(l.\Phi(\mathbf{x})) = (\Phi^t(l).\mathbf{x})$$

an. Wir möchten aber gerne eine *duale Abbildung* $\Phi^* : \mathbb{P}_2^* \to \mathbb{P}_2^*$, für die gilt

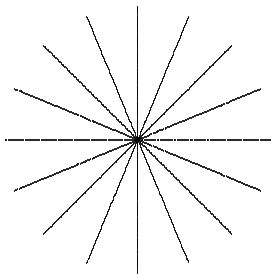
$$(\Phi^*(l).\Phi(\mathbf{x})) = (l.\mathbf{x}).$$

Inzidenzen sollen erhalten bleiben. Dies bedeutet nämlich gerade: Wenn die Punkte der Geraden $l(\mathbf{x}) = 0$ mit Φ abgebildet werden, dann transformiert sich diese Geradengleichung $l = 0$ in die Gleichung $\Phi^*(l) = 0$. Also müssen wir halt

$$\Phi^* := (\Phi^t)^{-1}$$

definieren!

Was gehört nun zu einer Geraden in der dualen Ebene, was ist eine duale Gerade? Dazu sei die duale Gerade aufgespannt durch zwei linear unabhängige Linearformen $l, m : V \to \mathbb{K}$. Ihre Punkte werden also repräsentiert durch die Linearformen $\lambda l + \mu m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Die Nullstellen dieser Linearformen sind Geraden in der richtigen Ebene $\mathbb{P}_2$. Sei etwa L die Gerade $\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2 : l(\mathbf{x}) = 0\}$ und M die Gerade $\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2 : m(\mathbf{x}) = 0\}$. Dann schreiben wir die Gerade mit der Gleichung $\lambda \cdot l(\mathbf{x}) + \mu \cdot m(\mathbf{x}) = 0$, etwas symbolisch, als $\lambda L + \mu M$. Alle diese Geraden gehen durch den Schnittpunkt $L \cap M$. Tatsächlich schreibt sich jede Gerade durch $L \cap M$ in der Form $\lambda l + \mu m = 0$. Wir sehen: Eine Gerade in $\mathbb{P}_2^*$ besteht genau aus allen Geraden in $\mathbb{P}_2$, die durch einen festen Punkt gehen. Eine solche Menge von Geraden in $\mathbb{P}_2$ heißt ein *Geradenbüschel*.



Der Punkt $\mathbf{z} = L \cap M \in \mathbb{P}_2$, in dem sich alle Geraden eines Geradenbüschels $\lambda L + \mu M$ schneiden, heißt *Zentrum* des Büschels. Die Büschelgeraden sind dann genau die Projektionsstrahlen der Perspektivität mit Zentrum $\mathbf{z}$. Ist $N \subset \mathbb{P}_2$ eine feste Gerade, nicht durch $\mathbf{z}$, so schneidet jede Büschelgerade auf N genau einen Punkt aus. Dadurch ist eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{P}_1^* = \{\lambda L + \mu M : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\} \quad \to \quad N$$

definiert.

Satz: *Diese Abbildung ist eine Projektivität.*

Beweis. Seien $l, m, n \in V^*$ Linearformen, welche die Geraden L, M, N als Nullstellenmengen haben. Weil L, M und N keinen Punkt gemeinsam haben, sind l, m und n linear unabhängig. Sie bilden also eine Basis von V^*, d.h., ein Koordinatensystem auf V. Wir wählen l und m als Koordinaten auf der Ebene $\{n = 0\} \subset V$, d.h. als homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}_1 \simeq N$. In diesen Kordinaten schreibt sich unsere Abbildung

$$(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda L + \mu M) \cap N = \{\lambda l + \mu m | N = 0\} = (-\mu : \lambda).$$

Dies ist eine lineare Abbildung in diesen homogenen Koordinaten. □

Weil V^* genau so ein drei–dimensionaler Vektorraum wie V ist, ist das Doppelverhältnis $DV(L_1, L_2, M_1, M_2)$ auch für vier Punkte $L_1, L_2, M_1, M_2 \in \mathbb{P}_2^*$ auf einer dualen Geraden definiert. (Daß die vier Geraden L_1, L_2, M_1, M_2 zu einer dualen Geraden gehören, bedeutet, daß

sie zu einem Geradenbüschel gehören, d.h., daß sie einen Punkt gemeinsam haben.) Aus dem letzten Satz folgt dann der

Satz (Doppelverhältnisse von Geraden und Punkten): *Es seien L_1, L_2, M_1, M_2 vier Geraden eines Geradenbüschels in $\mathbb{P}_2$. Ist $N \subset \mathbb{P}_2$ eine Gerade, welche nicht zu diesem Büschel gehört, so gilt*

$$DV(L_1, L_2, M_1, M_2) \;=\; DV(L_1 \cap N, L_2 \cap N, M_1 \cap N, M_2 \cap N).$$

Insbesondere trennen sich die Geradenpaare L_1, L_2 und M_1, M_2 harmonisch, genau dann, wenn sich die von ihnen auf der Geraden N ausgeschnittenen Punktepaare harmonisch trennen. Der Satz über harmonische Quadrupel am vollständigen Vierseit kann dann auch so formuliert werden:

Satz (Doppelverhältnis am vollständigen Viereck): *In jedem Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks trennen sich die beiden dort hindurchgehenden Seiten und die beiden Verbindungslinien mit den zwei anderen Diagonalpunkten harmonisch.*

Aufgabe 3.25: Dualisieren Sie den Achsensatz.

Aufgabe 3.26: Dualisieren Sie Aufgabe 3.17 (harmonische Polare).

Aufgabe 3.27: Dualisieren Sie Aufgabe 3.24 (drei perspektive Dreiecke).

4 Kegelschnitte in der projektiven Ebene

4.1 Projektive Klassifikation der Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt in der affinen Ebene $\mathbb{K}^2$ mit den Koordinaten x, y wird gegeben durch eine Gleichung

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad a, b, ..., f \in \mathbb{K}.$$

Genau wie Geraden in der affinen Ebene kann man auch Kegelschnitte aus der affinen Ebene in die projektive Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ fortsetzen:

Sei etwa

$$Q(x_0, x_1, x_2) := ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2$$

ein *homogenes* Polynom zweiten Grades in den drei Variablen x_0, x_1, x_2. Dann gilt also für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, x_2),$$

und die Menge

$$C := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \; Q(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

ist wohldefiniert. Denn, wenn $Q(x_0, x_1, x_2) = 0$ ist, dann ist auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Also hängt es nur vom Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ ab, ob $Q(x_0, x_1, x_2) = 0$ ist oder nicht.

Der Durchschnitt von C mit der affinen Ebene $\{(1 : x : y)\}$ ist die Menge der Punkte (x, y) mit

$$\begin{aligned} Q(1, x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= q(x, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D.h., der Durchschnitt von $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ mit der affinen Ebene ist gerade der affine Kegelschnitt $q(x, y) = 0$. Dies ist der Grund für folgende

Definition: Sei $Q(x_0, x_1, x_2)$ ein *homogenes* Polynom zweiten Grades, nicht das Null–Polynom. Dann heißt die Menge

$$C := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \; Q(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$$

ein *Kegelschnitt*.

Ein homogenes Polynom zweiten Grades kann auch in Matrix–Form, als quadratische Form

$$\begin{aligned} Q(x_0, x_1, x_2) &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2 \\ &= (x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x}^t \cdot A_Q \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Das Polynom Q transformiert sich wie eine Bilinearform: Ist

$$\mathbf{x} = T \cdot \mathbf{y}$$

eine Koordinatentransformation, so transformiert sich Q in

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot A_Q \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^t \cdot T^t A_Q T \cdot \mathbf{y}.$$

Aus der linearen Algebra weiß man, daß quadratische Formen diagonalisiert werden können: Es gibt eine invertierbare 3×3–Matrix T derart, daß $T^t A_Q T$ eine Diagonalmatrix ist. Unter der projektiven Klassifikation der Kegelschnitte versteht man die Einteilung der Kegelschnitte in Äquivalenzklassen bezüglich derartiger Transformationen. Jeder Kegelschnitt ist deswegen äquivalent zu einem mit einer Gleichung in Diagonalform

$$q_0 x_0^2 + q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 = 0.$$

Jetzt kann man immer noch weiter transformieren. Die Diagonalform zerstört man nicht, wenn man mit diagonalen Transformationsmatrizen

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & & \\ & t_1 & \\ & & t_2 \end{pmatrix}$$

transformiert. Dabei wird der Eintrag q_i mit dem Quadrat $t_i^2 \in \mathbb{K}$ multipliziert. Was man dabei erreichen kann, hängt sehr stark vom Körper $\mathbb{K}$ ab. In $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ beispielsweise ist jede Zahl ein Quadrat, und man kann jedes q_i auf 0 oder 1 transformieren. In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind nur die Zahlen ≥ 0 Quadrate. Hier kann man jedes q_i auf $0, 1$ oder -1 transformieren.

Satz (Projektive Klasssifikation der Kegelschnitte über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$): *Durch eine projektive Koordinatentransformation kann die Gleichung eines Kegelschnitts in der projektiven Ebene auf eine der folgenden Normalformen gebracht werden:*

			Rang	
über $\mathbb{C}$:	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	nicht–entartet	3	
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Geradenpaar	2	
	$x_0^2 = 0$	Doppelgerade	1	
				Signatur
über $\mathbb{R}$:	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	$\emptyset$	3	3,0
	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	nicht–entartet	3	2,1
	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Punkt	2	2,0
	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	Geradenpaar	2	1,1
	$x_0^2 = 0$	Doppelgerade	1	1

Beweis: Über $\mathbb{C}$ ist die Anzahl der Diagonal–Einträge $= 1$ gerade der Rang der Matrix A_Q. Es gibt deswegen genau die drei angegebenen Fälle $Rang(A_Q) = 3, 2$ oder 1.

Über $\mathbb{R}$ ist $Rang(A_Q)$ die Anzahl der Einträge $= \pm 1$. Weil man die Gleichung mit -1 durchmultiplizieren kann, ohne die Menge $C : Q(\mathbf{x}) = 0$ zu ändern, gibt es genau die fünf angegebenen Fälle. $\square$

Bemerkungen: 1) Der Rang der Matrix A_Q heißt *Rang* des Kegelschnittes $Q(\mathbf{x}) = 0$. Die Normalformen über $\mathbb{C}$ sind durch den Rang eindeutig bestimmt. Über $\mathbb{R}$ ist die Normalform eindeutig durch den Rang und die Signatur von A_Q bestimmt (Sylvesterscher Trägheitssatz).

2) Die Gleichungen $x_0^2 + x_1^2 = 0$ über $\mathbb{C}$ und $x_0^2 - x_1^2 = 0$ über $\mathbb{R}$ sind tatsächlich die Gleichung von zwei verschiedenen Geraden, weil man sie auch $(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$, bzw. $(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$ schreiben kann. Die Rang–1–Gleichung $x_0^2 = 0$ dagegen beschreibt nur die einzige Gerade $x_0 = 0$, allerdings verschwindet sie dort von zweiter Ordnung. Dies rechtfertigt den Namen Doppelgerade.

Kegelschnitte vom Rang drei heißen *nicht–entartet*, oder glatt, oder nicht–singulär. Kegelschnitte vom Rang ≤ 2 heißen *entartet*.

Satz (Entartete Kegelschnitte über $\mathbb{C}$): *Für einen Kegelschnitt in der komplex–projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ sind äquivalent:*

1) *Der Kegelschnitt C ist entartet.*

2) *Der Kegelschnitt C spaltet in Geraden, d.h., es gibt Linearformen $L(\mathbf{x})$, $L'(\mathbf{x})$ mit $Q(\mathbf{x}) \equiv L(\mathbf{x}) \cdot L'(\mathbf{x})$.*

3) *Es gibt eine Gerade $L \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ mit $L \subset C$.*

Die Richtung 3) $\Rightarrow$ 1) gilt nicht nur über $\mathbb{C}$, sondern über jedem Körper $\mathbb{K}$ mit unendlich vielen Elementen.

Beweis: Die Richtung „1) $\Rightarrow$ 2)“ ist klar, weil dann die Gleichung $Q(\mathbf{x}) = 0$ auf die Form

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$$

oder

$$x_0^2 = 0$$

gebracht werden kann. Auch „2 $\Rightarrow$ 3)“ ist klar.

„3) $\Rightarrow$ 1)“: Nach einer Koordinatentransformation können wir $L : x_0 = 0$ annehmen. Das Polynom

$$Q|L = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

verschwindet nach Voraussetzung identisch. Wenn $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente enthält, folgt daraus $a = b = c = 0$, und zu C gehört eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang ≤ 2. $\square$

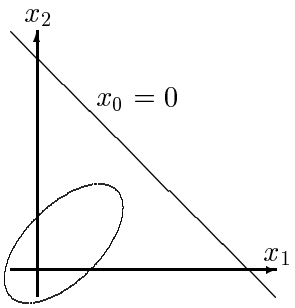
In der reellen projektiven Ebene gibt es außer Entartungsfällen nur eine einzige Klasse von Kegelschnitten. In der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ gab es deren drei: Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln. Wie kommt das? Bzw., wie unterscheiden sich Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln projektiv?

Um das herauszufinden schreiben wir die Gleichungen der affinen reellen Kegelschnitte projektiv:

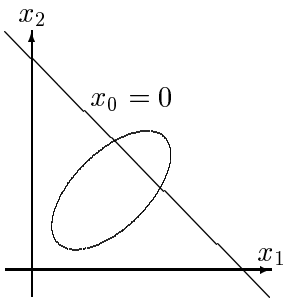
	affin	projektiv
Ellipse	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$
Hyperbel	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	$-(-x_1^2 + x_2^2 + x_0^2) = 0$
Parabel	$4y - x^2 = 0$	$4x_0x_2 - x_1^2 =$ $(x_0 + x_2)^2 - (x_0 - x_2)^2 - x_1^2 = 0$

In allen drei Fällen ist die projektive Normalform gleich. (Sonst wäre der Klassifikationssatz ja auch in Zweifel zu ziehen.) Aber die drei Klassen affiner reeller Kegelschnitte unterscheiden sich durch ihre Beziehung zur unendlich fernen Geraden. Der Durchschnitt mit der Geraden $x_0 = 0$ ist in den drei Fällen:

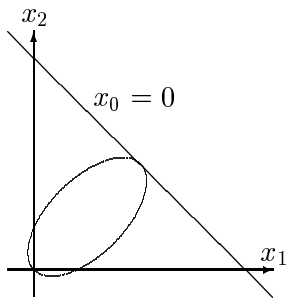
Ellipse	$x_0 = x_1^2 + x_2^2 = 0$	$\emptyset$
Hyperbel	$x_0 = x_1^2 - x_2^2 = 0$	zwei Punkte $(0 : 1 : \pm 1)$
Parabel	$x_0 = x_1 = 0$	ein Punkt $(0 : 0 : 1)$



Ellipse



Hyperbel



Parabel

Aufgabe 4.1: a) Bestimmen sie den Rang der Kegelschnitte

$$
\begin{aligned}
C_1: &\quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_0x_2 + 2x_0x_1 = 0,\\
C_2: &\quad 4x_0^2 + 6x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2 - 7x_0x_2 + 14x_0x_1 = 0,\\
C_3: &\quad x_0^2 + 3x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 - 13x_0x_2 + 8x_0x_1 = 0.
\end{aligned}
$$

b) Geben Sie Gleichungen für die Geraden an, aus denen die Kegelschnitte C_1 und C_2 bestehen.
c) Finden sie eine Koordinatentransformation $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ so, daß C_3 in den Koordinaten y_1, y_2, y_3 durch eine Diagonalmatrix gegeben wird.

Aufgabe 4.2: Es seien $\mathbf{u} = (u_0 : u_1 : u_2)$ und $\mathbf{v} = (v_0 : v_1 : v_2) \in \mathbb{P}_2$. Zeigen Sie: Die Geraden $L : (\mathbf{u}.\mathbf{x}) = 0$ und $M : (\mathbf{v}.\mathbf{x}) = 0$ schneiden sich genau dann auf dem Kegelschnitt $\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0$ wenn

$$det \begin{pmatrix} A & \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \mathbf{u}^t & 0 & 0 \\ \mathbf{v}^t & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 4.3: In der projektiven Ebene seien ein Dreieck **abc** und zwei Geraden L, M, die durch keine Ecke des Dreiecks gehen, gegeben. Zeigen Sie: Die Ecke $\mathbf{x}$ eines jeden Dreiecks **xyz**, bei dem

- die Ecke $\mathbf{y}$ auf L, die Ecke $\mathbf{z}$ auf M liegt,
- die Seite **xy** durch **a**, die Seite **yz** durch **b** und die Seite **zx** durch **c** geht,

liegt auf einem Kegelschnitt C. Wann ist C entartet?

4.2 Sekanten, Tangenten und Polaren

In diesem Abschnitt wollen wir nur nicht–entartete Kegelschnitte betrachten, also Kegelschnitte

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0\},$$

deren Matrix A den Rang drei hat.

Meistens werden wir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ voraussetzen müssen, weil sonst nicht sicher ist, daß unser Kegelschnitt nicht vielleicht leer ist. Aber, nachzuschauen, welche Voraussetzungen an den Körper $\mathbb{K}$ jetzt wirklich notwendig sind, das hat weniger mit Geometrie, mehr mit Zahlentheorie zu tun. Für uns ist der *geometrische Fall* der Körper $\mathbb{C}$. Weil $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für die Veranschaulichung unendlich wichtig ist, interessiert uns natürlich auch dieser Körper.

Wir gehen aus von dem Problem, die Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt zu berechnen. Ähnlich wie in 1.5 parametrisieren wir die Gerade

$$L : \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},\ (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K}).$$

Jetzt sind allerdings $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ Punkte in der projektiven Ebene, und für den Parameter $(\lambda : \mu)$ ist auch der Wert $(0 : 1) = \infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ zugelassen. (Dazu gehört der Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{b}$.) Setzen wir $\mathbf{x}$ in die Gleichung von C ein, so erhalten wir

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})^t \cdot A \cdot (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda^2 \cdot \mathbf{a}^t A\mathbf{a} + 2\lambda\mu \cdot \mathbf{a}^t A\mathbf{b} + \mu^2 \cdot \mathbf{b}^t A\mathbf{b} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für die Parameter $(\lambda : \mu)$, die zu den Schnittpunkten von L und C gehören.

Ob diese quadratische Gleichung Wurzeln in $\mathbb{K}$ hat, hängt vom Körper $\mathbb{K}$ ab. In $\mathbb{C}$ gibt es immer Wurzeln, in $\mathbb{R}$ nicht immer. Über dem Körper $\mathbb{C}$ gibt es die folgenden drei Möglichkeiten:

- Die Gleichung hat zwei verschiedene Wurzeln.
- Die Gleichung hat nur eine, doppelte, Wurzel.
- Die Gleichung hat unendlich viele Wurzeln, aber dann ist L eine Teilmenge von C und nach dem letzten Satz aus 4.1 ist C entartet.

Die beiden Wurzeln fallen zusammen (und ihr gemeinsamer Wert liegt in $\mathbb{K}$), genau dann, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung

$$(\mathbf{a}^t A\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}^t A\mathbf{a})(\mathbf{b}^t A\mathbf{b}) = 0$$

ist. In diesem Fall ist die Gerade L eine *Tangente* an den Kegelschnitt C.

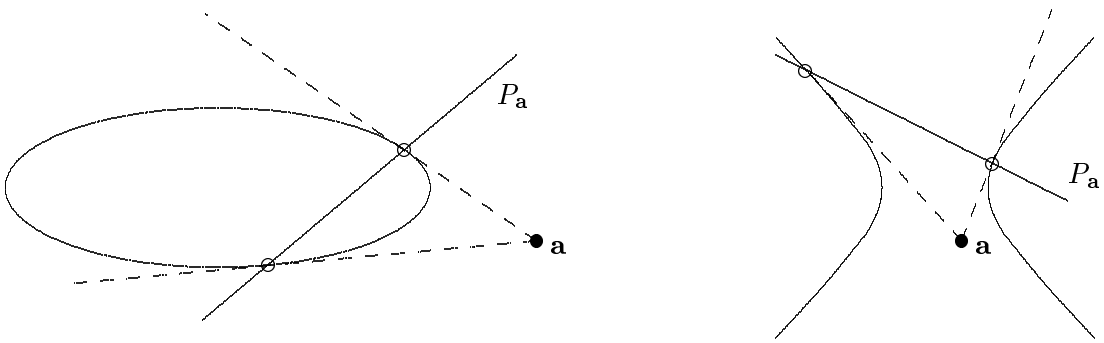
Jetzt fixieren wir $\mathbf{a}$ und suchen die Berührpunkte $\mathbf{b} \in C$ aller Tangenten an C durch $\mathbf{a}$. Weil dann $\mathbf{b}^t A\mathbf{b} = 0$ ist, wird die Diskriminante einfach

$$\mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Dies ist eine lineare Gleichung in $\mathbf{b}$: Die Berührpunkte $\mathbf{b}$ der Tangenten an C durch $\mathbf{a}$ liegen auf der Geraden

$$P_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K}) : \ \mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0\}.$$

Diese Gerade heißt die *Polare* des Punktes $\mathbf{a}$ bezüglich des Kegelschnittes C. Ihre Schnittpunkte mit C sind die Berührpunkte der Tangenten durch $\mathbf{a}$. Ob sie Schnittpunkte hat, hängt wieder vom Körper $\mathbb{K}$ ab. Die Berechnung der Schnittpunkte $P_{\mathbf{a}} \cap C$ ist das praktischste Verfahren, um die Tangenten von $\mathbf{a}$ an den Kegelschnitt C zu ermitteln.



Als Beispiele berechnen wir die Polare eines Punktes $\mathbf{a} = (1 : c_1 : c_2)$ der affinen Ebene zu den nicht–entarteten affinen Kegelschnitten in Normalform:

Ellipse/Hyperbel:	affine Gleichung	$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$
	homogene Gleichung	$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} - x_0^2 = 0$
	Matrix A	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/a^2 & \\ & & \pm 1/b^2 \end{pmatrix}$
	Polare $P_{\mathbf{a}}$	$-x_0 + c_1 x_1/a^2 \pm c_2 x_2/b^2 = 0$
	affine Form	$\frac{c_1 x}{a^2} \pm \frac{c_2 y}{b^2} = 1$
Parabel :	affine Gleichung	$y = px^2$
	homogene Gleichung	$px_1^2 - x_0 x_2 = 0$
	Matrix A	$\begin{pmatrix} & & -1/2 \\ & p & \\ -1/2 & & \end{pmatrix}$
	Polare $P_{\mathbf{a}}$	$-c_2 x_0/2 + pc_1 x_1 - x_2/2$
	affine Form	$y = 2pc_1 x - c_2$

Wir sehen insbesondere: Die Polare des Nullpunkts $(1:0:0)$ bei der Ellipse und der Hyperbel ist die unendlich ferne Gerade $x_0 = 0$, während sie bei der Parabel die Tangente $x_2 = 0$ ist. Die Polare für den Kreis vom Radius r stimmt mit der Gleichung $(\mathbf{a}.\mathbf{x}) = r^2$ von p.32 überein.

Satz (Polare und Harmonie): *Die Polare $P_{\mathbf{a}}$ eines Punktes $\mathbf{a}$ zum Kegelschnitt C ist der geometrische Ort aller Punkte $\mathbf{b}$, die zusammen mit $\mathbf{a}$ die beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathbf{ab}$ mit dem Kegelschnitt C harmonisch trennen.*

Beweis. Wir parametrisieren die Gerade $\mathbf{ab}$ wieder durch $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Wenn $\mathbf{b} \in P_{\mathbf{a}}$, also $\mathbf{a}^t A\mathbf{b} = 0$ gilt, dann ist die Gleichung für die Parameter der Schnittpunkte

$$\lambda^2 \cdot \mathbf{a}^t A\mathbf{a} + \mu^2 \cdot \mathbf{b}^t A\mathbf{b} = 0.$$

Sie hat zwei Lösungen $(\lambda : \pm\mu)$, die sich um das Vorzeichen unterscheiden. Also vertauscht die Involution

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \mapsto \lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}$$

die beiden Schnittpunkte, während sie die Punkte $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ fest läßt. Nach dem Harmonie-Kriterium in 3.4 trennen sich die beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathbf{ab}$ mit C und die beiden

Punkte **a** und **b** harmonisch.

Ist umgekehrt **b** ein Punkt, der zusammen mit **a** die beiden Schnittpunkte harmonisch trennt, so ist (nach dem soeben Bewiesenen) der Schnittpunkt von **ab** mit der Polaren $P_{\mathbf{a}}$ auch so ein Punkt. Da es nur einen einzigen solchen Punkt gibt, muß **b** auf der Polaren liegen. □

Einschränkung: Die Koordinaten der Schnittpunkte von C mit der Geraden **ab** brauchen nicht immer in $\mathbb{K}$ zu liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, macht der Satz natürlich keine Aussage. Außerdem darf **a** nicht auf C und **b** nicht auf einer der beiden Tangenten von **a** an C gewählt werden, weil sonst zu viele Punkte zusammenfallen.

Die Abbildung, die jedem $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$ seine Polare $P_{\mathbf{a}}$ zuordnet, ist in der Tat für alle **a** ohne Ausnahme definiert, auch wenn über $\mathbb{K}$ die Tangenten von **a** an C nicht existieren. Diese Abbildung bildet $\mathbb{P}_2$ *bijektiv* auf $\mathbb{P}_2^*$ ab, denn sie wird durch die invertierbare Matrix von C gegeben. Sie ist also so etwas ähnliches, wie eine Projektivität, nur, daß Urbild- und Bildebene dual zueinander sind. Dies stimmt mit folgender Tatsache aus der linearen Algebra überein: Eine Bilinearform $Q(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ auf einem Vektorraum V kann man auch auffassen als eine lineare Abbildung

$$\begin{cases} \mathbf{v} \mapsto Q(\mathbf{v}, -) \\ V \to V^* \end{cases}$$

Diese Projektivität $\mathbf{a} \mapsto P_{\mathbf{a}}$ von $\mathbb{P}_2$ auf $\mathbb{P}_2^*$ heißt die *durch C definierte Polarität.*

Weil die Abbildung $\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2^*$, $\mathbf{a} \mapsto P_{\mathbf{a}}$ bijektiv ist, gibt es zu jeder Geraden $L \subset \mathbb{P}_2$ genau einen Punkt **a**, dessen Polare die Gerade L ist. Dieser Punkt heißt *Pol* der Geraden L bezüglich C. Hat beispielsweise L die Gleichung $(\mathbf{u}.\mathbf{x}) = u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, so hat der Pol **a** die homogenen Koordinaten $A^{-1} \cdot \mathbf{u}$.

Definition: Zwei Punkte **a** und $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ heißen *konjugiert* in Bezug auf den (nicht–entarteten) Kegelschnitt C mit der (invertierbaren) Matrix A, wenn $\mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{b} = 0$. Dies ist also genau dann der Fall, wenn der eine Punkt auf der Polaren des anderen liegt.

Weil die Matrix A symmetrisch ist, ist auch die Konjugiertheits–Relation symmetrisch: **a** ist konjugiert zu **b**, genau dann, wenn **b** konjugiert zu **a** ist. Die Polare $P_{\mathbf{a}}$ geht durch den Punkt **b**, genau dann, wenn **a** auf der Polaren $P_{\mathbf{b}}$ liegt. Den Satz über Polare und Harmonie können wir auch so formulieren: Zwei in Bezug auf den Kegelschnitt C konjugierte Punkte $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ trennen die beiden Schnittpunkte der Geraden **ab** mit dem Kegelschnitt (falls diese existieren) harmonisch.

Der Punkt **a** liegt auf seiner eigenen Polaren $P_{\mathbf{a}}$, genau dann, wenn $\mathbf{a}^t \cdot A \cdot \mathbf{a} = 0$, d.h., wenn **a** auf dem Kegelschnitt C liegt. In diesem Fall ist eine Gerade $L : \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ Tangente, falls die Diskriminante $(\mathbf{a}^tA\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}^tA\mathbf{a})(\mathbf{b}^tA\mathbf{b})$ verschwindet. Weil $\mathbf{a}^tA\mathbf{a} = 0$ ist, bedeutet dies: $\mathbf{a}^tA\mathbf{b} = \mathbf{a}^tA(\mathbf{a} + s\mathbf{b}) = 0$. Wir sehen: Die Tangente an C in einem Punkt $\mathbf{a} \in C$ ist gerade die Polare $P_{\mathbf{a}}$ von **a**.

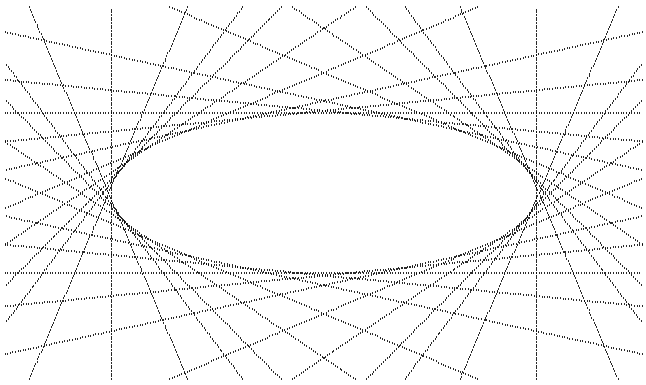
Alle Tangenten T an C stimmen überein mit allen Polaren $P_{\mathbf{a}}$ von Punkten $\mathbf{a} \in C$. Eine Geradengleichung $L : \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} = 0$ beschreibt eine Tangente, genau dann wenn ein $\mathbf{a} \in C$ existiert mit $\mathbf{u}^t = \mathbf{a}^tA$, d.h., $\mathbf{u} = A\mathbf{a}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{u} \in C$, also wenn

$$(A^{-1}\mathbf{u})^t \cdot A \cdot A^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}^t \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dies ist wieder eine Kegelschnitt-Gleichung. Die symmetrische 3×3–Matrix ist A^{-1}. Der Kegelschnitt liegt im Raum der Geraden, d.h. in der dualen projektiven Ebene $\mathbb{P}_2^*$. Er heißt der *duale Kegelschnitt* C^*.

Damit haben wir den

Satz (Dualer Kegelschnitt): *Die Tangenten an den nicht–entarteten Kegelschnitt C sind genau die Geraden $\mathbf{u} \in \mathbb{P}_2^*$, die auf dem* dualen Kegelschnitt *C^* mit der Matrix A^{-1} liegen.*



Dualer Kegelschnitt

Bemerkung 1: Die Inverse Matrix zu A^{-1} ist $(A^{-1})^{-1} = A$. Deswegen ist der duale Kegelschnitt $(C^*)^* \subset \mathbb{P}_2$ zum dualen Kegelschnitt $C^* \subset \mathbb{P}_2^*$ wieder der Ausgangskegelschnitt C:

$$C^{**} = C.$$

Bemerkung 2: Die durch C definierte Polarität $\mathbf{a} \mapsto P_\mathbf{a}$, die jeden Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$ auf seine Polare bezüglich C abbildet, bildet jeden Punkt $\mathbf{a} \in C$ auf seine Tangente an C ab. Also ist das Bild von $C \subset \mathbb{P}_2$ unter dieser Polarität der duale Kegelschnitt $C^* \subset \mathbb{P}_2^*$.

Bei der kanonischen Dualität zwischen $\mathbb{P}_2$ und $\mathbb{P}_2^*$ dualisiert sich die Beziehung zwischen einem Punkt $\mathbf{c} \in \mathbb{P}_2$, den beiden Tangenten T_1 und T_2 an C durch $\mathbf{c}$ und der Polaren $P_\mathbf{c}$ wie folgt:

Aus	wird (werden)
dem Punkt $\mathbf{c} \in \mathbb{P}_2$	die Gerade $\mathbf{c}^* \subset \mathbb{P}_2^*$,
den Tangenten T_i an C durch $\mathbf{c}$	die Punkte $T_i^* \in c^* \cap C^*$,
den Berührpunkten $\mathbf{t}_i = C \cap T_i$	die Tangenten $\mathbf{t}_i^*$ an C^* in T_i^*,
der Polaren $P_\mathbf{c}$	der Schnittpunkt $t_1^* \cap t_2^*$ der Tangenten.

Die entstehende, duale Figur im $\mathbb{P}_2^*$ ist jedoch wieder die gleiche: Ein Punkt, mit den beiden Tangenten an den Kegelschnitt und seine Polare.

Wir sehen insbesondere: Eine Gerade $L: \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} = 0$ ist die Polare eines Punktes $\mathbf{c}$ bezüglich C, genau dann, wenn der Punkt $L^* \in \mathbb{P}_2^*$ der Pol der Geraden $\mathbf{c}^* \subset \mathbb{P}_2^*$ bezüglich C^* ist. Dies sieht man auch einfach aus der Matrix–Gleichung für die homogenen Koordinaten der Geraden L (aufgefaßt als Spaltenvektor):

$$\mathbf{u}^t = (A \cdot \mathbf{c})^t \Leftrightarrow \mathbf{u}^t = \mathbf{c}^t \cdot A \Leftrightarrow \mathbf{c}^t = \mathbf{u}^t \cdot A^{-1}.$$

Auch die Beziehung zwischen zwei konjugierten Punkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ läßt sich dualisieren:

Aus	wird (werden)
den Punkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$	Geraden $\mathbf{a}^* \text{ und } \mathbf{b}^* \subset \mathbb{P}_2^*$,
der Verbindungsgeraden $L = \mathbf{ab}$	der Schnittpunkt $L^* = \mathbf{a}^* \cap \mathbf{b}^*$,
den Schnittpunkten von L mit C	die Tangenten durch L^* an C^*.

Daß die Punkte $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die beiden Schnittpunkte $\mathbf{ab} \cap C$ harmonisch trennen, diese Eigenschaft dualisiert sich in die folgende Eigenschaft: Die beiden Geraden $\mathbf{a}^*$ und $\mathbf{b}^*$ im Geradenbüschel mit Zentrum L^* trennen die beiden Tangenten an C^* durch dieses Zentrum harmonisch. Sehen wir jetzt C^* als den ursprünglichen Kegelschnitt an, so werden wir auf den Begriff der konjugierten Geraden geführt:

Definition: Zwei Geraden $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ heißen *konjugiert* in Bezug auf den (nicht–entarteten) Kegelschnitt C, wenn ihr Schnittpunkt $\mathbf{c}$ nicht auf C liegt, und die beiden Tangenten durch $\mathbf{c}$ an C im Geradenbüschel mit Zentrum $\mathbf{c}$ die beiden Geraden L und M harmonisch trennen.

Haben die Geraden L und M die Gleichungen $(\mathbf{u}.\mathbf{x}) = 0$ und $(\mathbf{v}.\mathbf{x}) = 0$, so sind sie konjugiert, genau dann, wenn $\mathbf{u}^t \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{v} = 0$. Weil $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{u}$ der Pol der Geraden L ist, ist die Konjugiertheit von L und M damit äquivalent, daß der Pol der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt.

Satz (Konjugierte Geraden und Tangenten): *Es seien $C \subset \mathbb{P}_2$ ein nicht–entarteter Kegelschnitt und $L \neq M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden, keine Tangenten an C. Dann sind äquivalent:*

1) *L und M sind konjugiert bezüglich C.*

2) *Die beiden Tangenten an C in den Schnittpunkten $L \cap C$ treffen sich in einem Punkt auf M.*

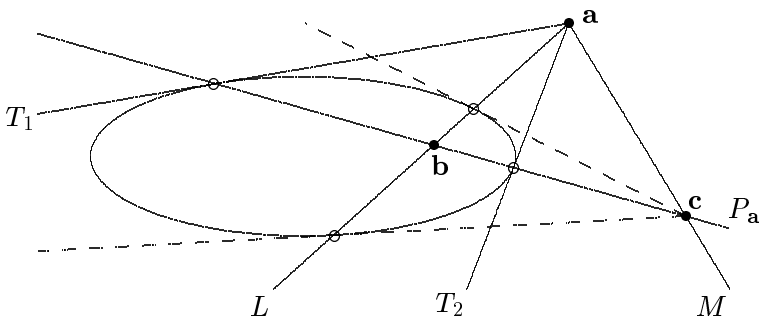
3) *Die beiden Tangenten an C in den Schnittpunkten $M \cap C$ treffen sich in einem Punkt auf L.*

Beweis. Weil die Bedingung 1) symmetrisch in L und M ist, brauchen wir nur die Äquivalenz von 1) und 2) zu zeigen.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{a}$ den Schnittpunkt $L \cap M$, mit $P_\mathbf{a}$ die Polare von $\mathbf{a}$ bezüglich C, mit $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ die Schnittpunkte $P_\mathbf{a} \cap C$, d.h. also die Berührpunkte der beiden Tangenten T_1, T_2 aus $\mathbf{a}$ an C, mit $\mathbf{b}$ den Schnittpunkt $L \cap P_\mathbf{a}$ und mit $\mathbf{c}$ den Schnittpunkt $M \cap P_\mathbf{a}$.

„1) $\Rightarrow$ 2)“ : Nach Voraussetzung trennen sich die Geradenpaare L, M und T_1, T_2 durch $\mathbf{a}$ harmonisch. Also trennen $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ die Berührpunkte $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ harmonisch. Somit liegt $\mathbf{b}$ auf der Polaren $P_\mathbf{c}$ des Punktes $\mathbf{c}$. Weil $\mathbf{c}$ konjugiert zu $\mathbf{a}$ ist, liegt auch $\mathbf{a}$ auf dieser Polaren. Deswegen ist $L = \mathbf{ab}$ die Polare $P_\mathbf{c}$. Also treffen sich die beiden Tangenten an C zu den beiden Schnittpunkten $L \cap C$ im Punkt $\mathbf{c} \in M$.

„1) $\Leftarrow$ 2)“ : Nach Voraussetzung liegt jetzt der Schnittpunkt $\mathbf{c}$ der beiden Tangenten an C zu den Schnittpunkten $L \cap C$ auf M. Deswegen ist $\mathbf{c}$ der Pol zu L und L die Polare $P_\mathbf{c}$. Also trennen $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ die Schnittpunkte $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ von $P_\mathbf{a}$ mit C harmonisch. Dann trennen auch die Geraden $L = \mathbf{ab}$ und $M = \mathbf{ac}$ die beiden Tangenten $T_1 = \mathbf{at}_1$ und $T_2 = \mathbf{at}_2$ harmonisch. Dies heißt, die Geraden L und M sind konjugiert. □



Als Beispiel betrachten wir zwei Durchmesser L, M einer Ellipse C, die in affinen Koordinaten x, y durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

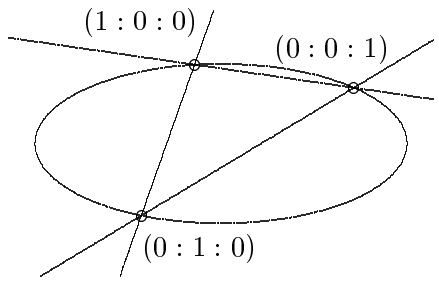
gegeben ist. Die unendlich ferne Gerade ist die Polare des Nullpunkts $L \cap M$. Die Tangenten an C in den beiden Schnittpunkten $L \cap C$ treffen M auf dieser unendlich fernen Geraden genau dann, wenn sie parallel zu M sind. Es folgt: Die beiden Durchmesser sind konjugiert genau dann, wenn sie im Sinn von Paragraph 2.4 konjugiert sind.

Gelegentlich ist es vorteilhaft, die homogenen Koordinaten so zu wählen, daß ein gegebener Kegelschnitt durch eine besonders einfache, dem jeweiligen Problem angepaßte Gleichung gegeben wird. Wir wollen diese Fälle diskutieren. Dabei erinnern wir uns an das Prinzip der projektiven Ausdehnung: Sind $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3 \in \mathbb{P}_2$ vier Punkte der Ebene derart, daß keine drei auf einer Geraden liegen, dann gibt es ein homogenes Koordinatensystem, in dem

$$\mathbf{x}_0 = (1:0:0),\ \mathbf{x}_1 = (0:1:0),\ \mathbf{x}_2 = (0:0:1),\ \mathbf{x}_3 = (1:1:1).$$

Wir nennen $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$ das *Koordinatendreieck* und den Punkt $(1:1:1)$ den *Einheitspunkt*.

Fall 1: Koordinatendreieck auf dem Kegelschnitt.
In diesem Fall gilt für die drei Koordinatenpunkte $\mathbf{x}_i^t \cdot A \cdot \mathbf{x}_i = 0$. Dies ist äquivalent damit, daß die Matrix A die Form



$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

hat und der Kegelschnitt die Gleichung

$$2 \cdot (a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{20}x_2x_0) = 0$$

besitzt.

Fall 2: Koordinatendreieck selbst–polar.

Dies bedeutet, daß für die Koordinatenpunkte gilt $\mathbf{x}_i^t \cdot A \cdot \mathbf{x}_j = 0$, $(i \neq j = 0, 1, 2)$. Es ist äquivalent damit, daß in der Matrix A alle Einträge a_{ij}, $i \neq j$ verschwinden, d.h., daß A eine Diagonalmatrix ist. Die Gleichung des Kegelschnitts ist dann

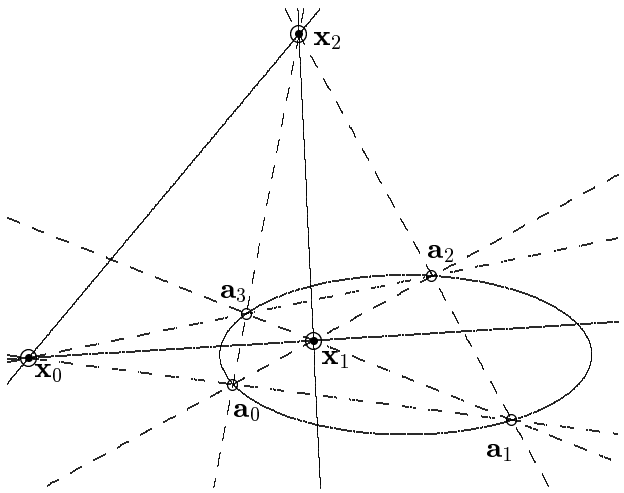
$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Diese Situation ist beispielsweise folgendermaßen zu erreichen: Es seien $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vier verschiedene Punkte auf dem Kegelschnitt, und als Koordinatenpunkte $\mathbf{x}_i$ wählen wir die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks mit den Ecken $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_3$. Dann ist nämlich $\mathbf{x}_i$ konjugiert zu $\mathbf{x}_j$ für $i \neq j$.

Beweis: Sei etwa

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3,\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_2 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3,\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_3 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2.$$

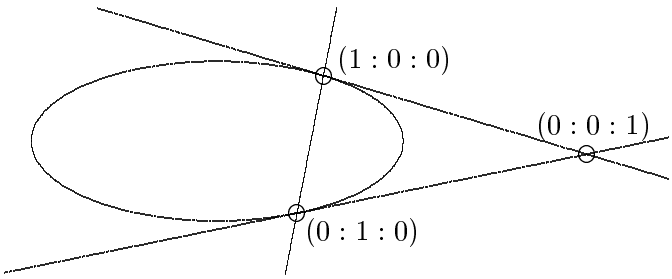
Nach dem Satz über das Doppelverhältnis am vollständigen Viereck aus Kapitel 3 werden die Punkte $\mathbf{a}_0$ und $\mathbf{a}_1$ harmonisch getrennt durch $\mathbf{x}_0$ und den Schnittpunkt der Seite $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$ mit der Geraden $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Ebenso werden $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ harmonisch getrennt durch $\mathbf{x}_0$ und den Schnittpunkt der Seite $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ mit der Geraden $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Es folgt, daß $\mathbf{x}_0$ der Pol zur Geraden $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ ist, und daß $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_1$, sowie $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_2$ konjugiert sind. □



Fall 3: Die Koordinatenpunkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ liegen auf dem Kegelschnitt und $\mathbf{x}_2$ ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in diesen Punkten.

Wegen $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ verschwinden in der Matrix A die Diagonaleinträge a_{00} und a_{11}. Weil $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_1$ zu $\mathbf{x}_2$ konjugiert sind, verschwinden außerdem die Einträge a_{02} und a_{12}. Der Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_{01}x_0x_1 + a_{22}x_2^2 = 0.$$



Fall 4: Die Koordinatenpunkte wie in Fall 3, aber zusätzlich der Einheitspunkt $\mathbf{x}_3 \in C$.

Jetzt folgt, daß in der letzten Gleichung $a_{01} + a_{22} = 0$ ist. Der Kegelschnitt hat die besonders einfache (kanonische) Gleichung

$$x_0 x_1 - x_2^2 = 0.$$

Aufgabe 4.4: Bestimmen Sie die Tangenten an den Kegelschnitt

$$C: \quad x^2 + 2y^2 + z^2 + yz + 3xz + xy = 0$$

durch den Punkt $(1:1:1)$, sowie deren Berührpunkte.

Aufgabe 4.5: Bestimmen Sie einen Kegelschnitt, für den das Dreieck $(1:0:1)$, $(0:1:1)$, $(1:1:1)$ selbstpolar ist (d.h., jede Dreiecksseite ist Polare der gegenüberliegenden Ecke), und der die Geraden $x_0 = 2x_2$, $x_1 = 2x_2$ berührt.

Aufgabe 4.6: Gegeben sei der nicht-entartete Kegelschnitt $C: \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0$ und ein Punkt $\mathbf{p}$. Zeigen Sie: die beiden Tangenten von $\mathbf{p}$ aus an C bilden einen entarteten Kegelschnitt mit der Gleichung

$$(\mathbf{p}^t \cdot A \cdot \mathbf{x})^2 - (\mathbf{p}^t \cdot A \cdot \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

Aufgabe 4.7: Gegeben seien ein nicht-entarteter Kegelschnitt C und ein vollständiges Vierseit in der projektiven Ebene, so, daß zwei Paare gegenüberliegender Ecken des Vierseits bezüglich C konjugiert sind. Zeigen Sie: Auch das dritte Paar gegenüberliegender Ecken des Vierseits ist bezüglich C konjugiert.

Aufgabe 4.8 (Satz von Hesse): a) Gegeben sei ein nicht-entarteter Kegelschnitt C und ein Dreieck **abc** in der projektiven Ebene. Zeigen Sie: das Dreieck mit den Seiten $P_{\mathbf{a}}(C), P_{\mathbf{b}}(C)$ und $P_{\mathbf{c}}(C)$ ist perspektiv zum Dreieck **abc**.
b) Zeigen Sie: Zu zwei Dreiecken in perspektiver Lage gibt es immer einen nicht-entarteten Kegelschnitt C, so daß beide Dreiecke bezüglich C zueinander polar sind.

4.3 Parametrisierung von Kegelschnitten

Geraden im $\mathbb{P}_2$ kann man implizit, durch ihre Gleichung beschreiben, aber auch explizit, durch eine Parametrisierung. Kegelschnitte haben wir bisher nur implizit, durch ihre Gleichung beschrieben. Man kann aber auch Kegelschnitte explizit beschreiben, und zwar kann man einen Kegelschnitt durch die Punkte einer projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$ parametrisieren. Das bekannteste Beispiel dafür ist die *stereographische Projektion*:

Betrachten wir den Einheitskreis $S: \{x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$. (Man kann das folgende auch mit der Sphäre im $\mathbb{R}^3$, oder mit der $n-1$-dimensionalen Sphäre im $\mathbb{R}^n$ machen.) Auf S fixieren wir einen Punkt $\mathbf{p}=(0,1)$ (den "Nordpol"). Jede Gerade L durch $\mathbf{p}$ schneidet den Kreis S in $\mathbf{p}$ und in einem weiteren Punkt $\mathbf{x}$. Das gilt ausnahmslos für alle Geraden L durch $\mathbf{p}$ und über jedem Körper $\mathbb{K}$: Die quadratische Gleichung, welche die Schnittpunkte von S und L beschreibt, hat eine Nullstelle, für den Punkt $\mathbf{p} \in S \cap L$, und muß deswegen auch eine zweite Nullstelle in $\mathbb{K}$ haben. Natürlich kann der dazu gehörende zweite Schnittpunkt mit dem ersten Schnittpunkt $\mathbf{p}$ zusammenfallen. Und zwar genau dann, wenn L die Tangente an S in $\mathbf{p}$ ist.

Um Formeln zu bekommen, parametriseren wir die Geraden L durch $\mathbf{p}$ mit Hilfe ihrer Schnittpunkte $(u,0)$ mit der x-Achse. Dann hat L also die Gleichung

$$\frac{x}{u}+y=1, \qquad \text{bzw. } y=1 \text{ für } u=\infty \text{ (Tangente)}.$$

Eliminieren wir $y=1-x/u$ aus der Kreisgleichung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2+(1-\frac{x}{u})^2 &= 1, \\ x^2-\frac{2x}{u}+\frac{x^2}{u^2} &= 0, \\ x\cdot(1+\frac{1}{u^2}) &= \frac{2}{u}, \end{aligned}$$

und daraus

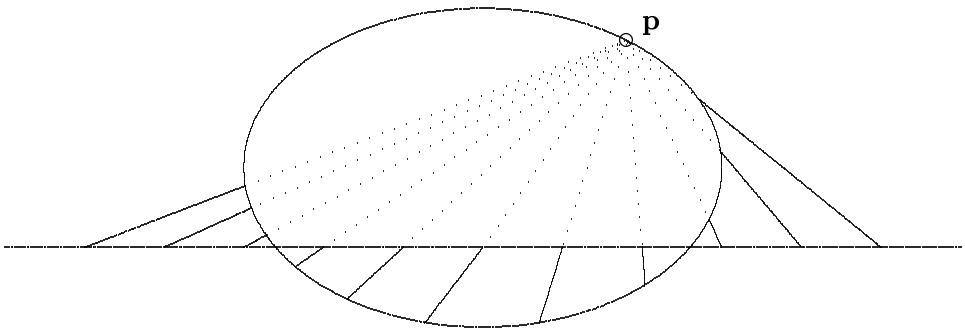
$$x=\frac{2u}{u^2+1}, \quad y=\frac{u^2-1}{u^2+1}.$$

Diese Formeln für die stereographische Projektion sind ziemlich geläufig. (Für $u \to \infty$ bekommen wir tatsächlich $(x,y)=(0,1)=\mathbf{p}$.)

Die stereographische Projektion ist eine bijektive Abbildung des Einheitskreises auf die x-Achse, letztere aufgefaßt als projektive Gerade. Ihre Umkehrung ist die Parametrisierung des Einheitskreises durch die Punkte der projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$

$$(u_0:u_1) \mapsto (u_0^2+u_1^2 : 2u_0u_1 : u_1^2-u_0^2).$$

Und all das liegt nicht am Einheits-Kreis. Die stereographische Projektion funktioniert genauso bei jedem nicht-entarteten Kegelschnitt C, auf dem ein Punkt $\mathbf{p} \in C$ gegeben ist:



Schauen wir uns das noch einmal für den Kegelschnitt in Normalform

$$x_0 x_1 - x_2^2 = 0$$

vom Ende des letzten Abschnitts, und den Punkt $\mathbf{p} = (1 : 0 : 0)$ an. (Wir haben dort gesehen, daß man die Koordinaten für einen Punkt $\mathbf{p}$ auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt C immer so wählen kann.) Die Geraden L durch $\mathbf{p}$ parametrisieren wir durch ihren Schnittpunkt $(0 : \mu : \lambda)$ mit der Geraden $x_0 = 0$. Dann ist

$$\mathbb{K} \ni s \mapsto (s : \mu : \lambda) \in L$$

eine Parametrisierung der Geraden L, wobei $s = \infty$ dem festen Punkt $\mathbf{p}$ entspricht. Die Schnittpunktsgleichung für $C \cap L$ ist

$$s \cdot \mu = \lambda^2, \quad s = \frac{\lambda^2}{\mu},$$

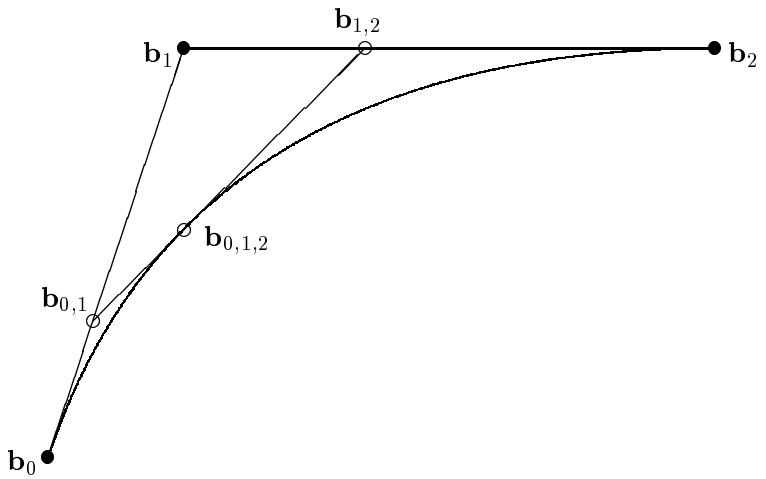
und dazu gehört der Schnittpunkt

$$(\frac{\lambda^2}{\mu} : \mu : \lambda) = (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C.$$

(Für $\mu = 0$ bekommen wir hier auch wieder den Punkt $\mathbf{p}$.) Projektiv geschrieben ist unsere Parametrisierung für den Kegelschnitt in Normalform

$$\mathbb{P}_1 \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C.$$

Auf im Wesentlichen dieselbe Parametrisierung führt ein Problem der graphischen Datenverarbeitung: Man soll zwei Punkte $\mathbf{b}_0$ und $\mathbf{b}_2$ durch eine (schöne) Kurve verbinden, deren Richtung in $\mathbf{b}_0$ und $\mathbf{b}_2$ vorgegeben ist. Die Richtung sei durch einen dritten Punkt $\mathbf{b}_1$ bestimmt, so wie in der Abbildung.



Mit einem Hilfspunkt

$$\mathbf{b}_{0,1} = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

durchläuft man die Strecke $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, während gleichzeitig ein zweiter Hilfspunkt

$$\mathbf{b}_{1,2} = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

die Strecke $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ durchläuft. Die Kurve wird dann definiert durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} t &\mapsto (1-t)\mathbf{b}_{0,1} + t\mathbf{b}_{1,2} \\ &= (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2(1-t)t\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

Dies ist der einfachste Fall einer sogenannten Bézier-Kurve (zu den Kontroll-Punkten $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$). Transformieren wir

$$\mathbf{b}_0 = (1:0:0),\ \mathbf{b}_2 = (0:1:0),\ \mathbf{b}_1 = (0:0:\frac{1}{2}), \quad (1-t) = \lambda,\ t = \mu,$$

so wird dies genau unsere Parametrisierung für einen Teilbogen unseres Standard-Kegelschnitts $x_0x_1 = x_2^2$.

Erinnern wir uns jetzt an den Begriff des Geradenbüschels aus 3.6. Sind $L \neq M$ zwei verschiedene Geraden eines Geradenbüschels, so besteht das Büschel genau aus allen Geraden $\lambda L + \mu M$ mit $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$. Die Gerade $\mathbb{P}_1$, mit der wir oben den Kegelschnitt C parametrisierten, war ziemlich beliebig gewählt. Sie durfte nur nicht durch das Projektionszentrum $\mathbf{p} \in C$ gehen. Wir hätten sie auch gar nicht zu spezifizieren brauchen, statt ihrer hätten wir das Geradenbüschel $\mathbf{p}^*$ mit Zentrum $\mathbf{p}$ nehmen können. Dieses Büschel ist auch eine Kopie der projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$, und jede Büschelgerade entspricht genau einem Punkt von C, ihrem zweiten Schnittpunkt mit C, wobei die Tangente $T_{\mathbf{p}}(C) \in \mathbf{p}^*$ dem Zentrum $\mathbf{p} \in C$ entspricht. So ist die Parametrisierung

$$\mathbb{P}_1 = \mathbf{p}^* \to C$$

kanonisch. Außer dem Projektionszentrum $\mathbf{p}$ brauchen wir nichts mehr zu wählen, keine Hilfsgerade.

Also: Jeder Punkt $\mathbf{p}$ auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt C definiert eine Identifikation $\mathbb{P}_1 = \mathbf{p}^* \simeq C$ des Kegelschnitts mit der projektiven Geraden. Wir können also auch nicht-entartete Kegelschnitte als Kopien der projektiven Geraden ansehen. Das ist schön! Jeder andere Punkt $\mathbf{q} \in C$ definiert aber auch eine Identifikation $\mathbb{P}_1 = \mathbf{q}^* \simeq C$. Die Aussage des folgenden Satzes ist, daß sich beide Identifikationen $\mathbb{P}_1 \simeq C$ nur unwesentlich, d.h., um eine Projektivität, unterscheiden. Das ist noch schöner!

Fixieren wir also jetzt folgende Situation: *Es seien C ein nicht-entarteter Kegelschnitt und $\mathbf{p} \neq \mathbf{q} \in C$ zwei Punkte auf diesem Kegelschnitt. Der Kegelschnitt C definiert folgendermaßen eine Abbildung $F : \mathbf{p}^* \to \mathbf{q}^*$ des Geradenbüschels mit Zentrum $\mathbf{p}$ in das Geradenbüschel mit Zentrum $\mathbf{q}$: Sei $L \in \mathbf{p}^*$ eine Gerade durch $\mathbf{p}$. Sie schneidet C in einem zweiten Punkt $\mathbf{c}_L$ (bzw. zweimal in $\mathbf{p}$, falls L die Tangente an C in $\mathbf{p}$ ist). $F(L) \in \mathbf{q}^*$ sei die Verbindungsgerade von $\mathbf{q}$ mit $\mathbf{c}_L$ (bzw. die Tangente an C in $\mathbf{q}$, falls $\mathbf{c}_L = \mathbf{q}$).*

Satz : *Diese Abbildung $F : \mathbf{p}^* \to \mathbf{q}^*$ ist eine Projektivität.*

Beweis: Wir rechnen die Aussage ganz einfach in Koordinaten nach.

Dazu wählen wir homogene Koordinaten wie am Ende des letzten Abschnitts so, daß $\mathbf{p} = (1:0:0)$ und $\mathbf{q} = (0:1:0)$. Außerdem soll $(0:0:1)$ der Schnittpunkt der Tangenten an C in den Punkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ sein, und der Einheitspunkt $(1:1:1)$ auf C liegen. Der Kegelschnitt C hat dann die Gleichung $x_0x_1 = x_2^2$. Die Geraden $L \in \mathbf{p}^*$ parametrisieren wir durch ihren Schnittpunkt $(0:\mu:\lambda)$ mit der Geraden $x_0 = 0$. Oben haben wir gesehen, daß eine solche Gerade den Kegelschnitt C, außer in $\mathbf{p}$, noch im Punkt $(\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu)$ trifft. Die zugehörige Gerade $F(L) \in \mathbf{q}^*$ ist die Verbindungsgerade

$$(\lambda^2 t : \mu^2 t + s : \lambda\mu t),\ (s:t) \in \mathbb{P}_1$$

dieses Punktes mit $\mathbf{q} = (0:1:0)$. Ihren Parameter in $\mathbf{q}^*$ bestimmen wir als den Schnittpunkt mit der Geraden $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \mu^2 t + s &= 0 \\ (s:t) &= (\mu^2 : -1) \\ F(L) \cap \{x_1 = 0\} &= (-\lambda^2 : 0 : -\lambda\mu) \\ &= (\lambda : 0 : \mu) \end{aligned}$$

Die Abbildung F wird also in den gewählten Koordinaten durch $(\lambda:\mu) \mapsto (\lambda:\mu)$ gegeben und ist deswegen eine Projektivität. □

Aus diesem Satz ziehen wir zunächst eine Folgerung (den Satz von Chasles), dann kehren wir ihn um, und dann dualisieren wir ihn.

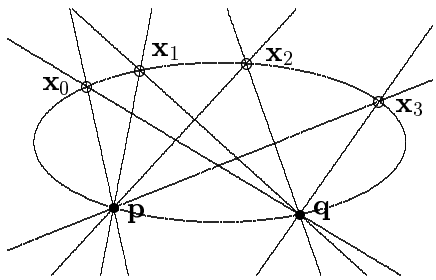
Zu je vier Punkten $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3 \in C$ auf dem nicht–entarteten Kegelschnitt C ist ein Doppelverhältnis $DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ wie folgt definiert: Wir parametrisieren C durch die Geraden eines Büschels $\mathbf{p}^*$ mit Zentrum $\mathbf{p} \in C$. Zu den vier Punkten $\mathbf{x}_i$ gehören vier Verbindungsgeraden $L_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i \in \mathbf{p}^*$. Wir definieren

$$DV(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) := DV(L_0, L_1; L_2, L_3).$$

Jede andere Parametrisierung hätte sich wegen unseres letzten Satzes davon nur um eine Projektivität unterschieden, und das Doppelverhältnis wäre gleich gewesen. Dies kann man auch als Satz formulieren:

Satz (von Chasles): *Es seien C ein nicht–entarteter Kegelschnitt und $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3 \in C$ vier Punkte, von denen nicht mehr als zwei zusammenfallen mögen. Für $\mathbf{p} \in C$ und $\mathbf{q} \in C$ seien $L_i := \mathbf{p}\mathbf{x}_i$ und $M_i := \mathbf{q}\mathbf{x}_i$ die Verbindungsgeraden (bzw. die Tangente, falls $\mathbf{p}$ oder $\mathbf{q}$ mit einem der $\mathbf{x}_i$ zusammenfällt). Dann gilt*

$$DV(L_0, L_1; L_2, L_3) = DV(M_0, M_1; M_2, M_3).$$



Jetzt zur Umkehrung des letzten Satzes. Das ist die sogenannte

Steinersche Erzeugung eines Kegelschnitts: *Es seien $\mathbf{p}^* = \{\lambda L + \mu M\}$ und $\mathbf{q}^* = \{\lambda' L' + \mu' M'\}$ zwei verschiedene Geradenbüschel in der projektiven Ebene. Weiter sei eine Projektivität $(\lambda' : \mu') = F(\lambda : \mu)$ gegeben. Dann ist die Menge der Punkte $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$, in denen sich eine Gerade des ersten Büschels mit der ihr unter F entsprechenden Geraden des zweiten Büschels schneidet, ein Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt geht durch die Zentren beider Büschel.*

Der Kegelschnitt ist genau dann entartet, wenn die Verbindungsgerade $\mathbf{pq}$ der Zentren beider Büschel unter F auf sich selbst abgebildet wird.

Beweis. Wir ändern die homogenen Koordinaten $(\lambda' : \mu')$ des zweiten Büschels so, daß die Projektivität F durch die Einheitsmatrix gegeben wird, d.h. $F(\lambda : \mu) = (\lambda : \mu)$. Wir sind interessiert an der Menge der Punkte $\mathbf{a} \in \mathbb{P}_2$, in denen sich eine Gerade $\lambda L + \mu M$ des ersten Büschels mit einer Geraden $\lambda L' + \mu M'$ des zweiten Büschels schneidet. Das ist die Menge der Punkte $\mathbf{a}$, wo das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L(\mathbf{a}) \cdot \lambda + M(\mathbf{a}) \cdot \mu &= 0 \\ L'(\mathbf{a}) \cdot \lambda + M'(\mathbf{a}) \cdot \mu &= 0 \end{aligned}$$

eine nicht–triviale Lösung $(\lambda : \mu)$ besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Determinante

$$L(\mathbf{a}) \cdot M'(\mathbf{a}) - M(\mathbf{a}) \cdot L'(\mathbf{a}) = 0$$

ist. Die Funktion

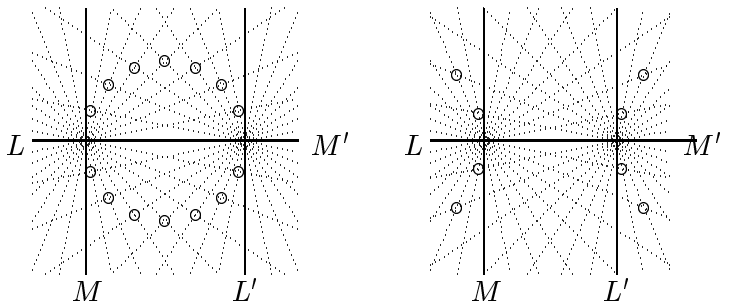
$$Q(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}) \cdot M'(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}) \cdot L'(\mathbf{x})$$

ist homogen vom Grad zwei in $\mathbf{x}$ und ihre Nullstellenmenge ist deswegen eine Kegelschnitt. Er enthält die Zentren $L(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) = 0$ und $L'(\mathbf{x}) = M'(\mathbf{x}) = 0$ beider Büschel.

Wenn die Verbindungsgerade der Zentren beider Büschel unter der Projektivität auf sich selbst abgebildet wird, so können wir die Koordinaten $(\lambda : \mu)$ derart abändern, daß $L = L'$ diese Verbindungsgerade ist. Die Gleichung des Kegelschnitts ist dann

$$Q(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \cdot (M(\mathbf{x}) - M'(\mathbf{x})) = 0$$

und der Kegelschnitt spaltet als Produkt von Geradengleichungen.



$(\lambda' : \mu') = (\lambda : \mu)$ $\qquad$ $(\lambda' : \mu') = (\lambda : -\mu)$

Steinersche Erzeugung von Kegelschnitten

Spaltet umgekehrt die Kegelschnittgleichung die Gleichung $N(\mathbf{x}) = 0$ einer Geraden ab, dann bedeutet dies, daß durch jeden Punkt dieser Geraden eine Gerade $\lambda L + \mu M$ des ersten Büschels und die entsprechende Gerade $\lambda L' + \mu M'$ des zweiten Büschels geht.

Falls N selbst eine Gerade im ersten Büschel ist, so ändern wir die Büschelkoordinaten derart, daß $M = N$ ist. Wegen $Q|N \equiv 0$ und $L \neq N$ folgt daraus $N = M'$. Also muß N auch zum zweiten Büschel gehören, d.h. die Büschelzentren verbinden, und enspricht sich selbst unter F.

Falls N keine Büschelgerade ist, so wird die Abbildung F wie folgt gegeben. Jeder Geraden $\lambda L + \mu M$ des ersten Büschels ordnet man den Schnittpunkt $N \cap (\lambda L + \mu M)$ zu, und $F(\lambda L + \mu M)$ ist die Verbindungsgerade dieses Schnittpunkts mit dem Zentrum des zweiten Büschels. (Die Projektivität F ist eine Perspektivität in der dualen Ebene $\mathbb{P}_2^*$.) Aber dann bildet P offensichtlich die Verbindungsgerade der Büschelzentren auf sich selbst ab. □

Die beiden letzten Sätze lassen sich wie folgt dualisieren:

Satz a) (Dual zur Parametrisierung): *Die Gerade T sei Tangente an einen nicht-entarteten Kegelschnitt C. Dann ist die Abbildung*

$$C \ni \mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{x}}(C) \mapsto T_{\mathbf{x}}(C) \cap T \in T$$

bijektiv. (Der Berührpunkt $\mathbf{x}_0 \in C$ von T wird dabei auf $\mathbf{x}_0 \in T$ abgebildet.) Sind T, T' zwei verschiedene Tangenten an C, so ist die Zusammensetzung der entsprechenden Bijektionen

$$T \mapsto C \mapsto T'$$

eine Projektivität.

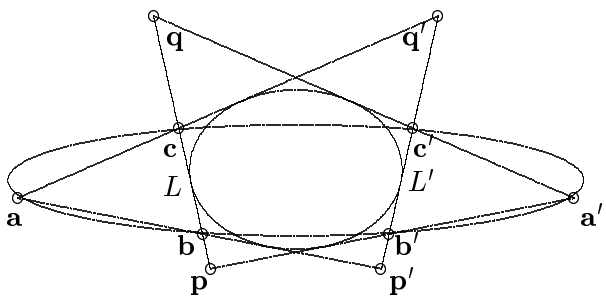
b) (Dual zur Steinerschen Erzeugung): *Gegeben sei eine Projektivität $F : T \to T'$ zwischen zwei Geraden $T \neq T' \subset \mathbb{P}_2$, welche den Schnittpunkt $T \cap T'$ nicht auf sich abbildet. Dann bilden die Verbindungsgeraden $\mathbf{a}F(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in T$, einen dualen Kegelschnitt, der T und T' enthält. Anders ausgedrückt: Es gibt einen nicht-entarteten Kegelschnitt, welcher alle Verbindungsgeraden $\mathbf{a}F(\mathbf{a})$ berührt.*

Korollar: *Der nicht–entartete Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2$ enthalte die Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ zweier Dreiecke. Dann gibt es einen nicht–entarteten Kegelschnitt D, der die sechs Seiten dieser beiden Dreiecke berührt.*

Beweis (trickreich). Wir bezeichnen die Seite $\mathbf{bc}$ mit L und die Seite $\mathbf{b'c'}$ mit L' und betrachten die Hintereinander–Ausführung von Perspektivitäten

$$L \to (\mathbf{a}')^* \to C \to \mathbf{a}^* \to L'.$$

Unter diesen Perspektivitäten verfolgen wir die vier Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p} := \mathbf{a'b'} \cap L$ und $\mathbf{q} := \mathbf{a'c'} \cap L$ aus L. Diese vier Punkte werden folgendermaßen abgebildet:



$$\begin{aligned}
\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in L \quad &\mapsto \quad \mathbf{a'b}, \mathbf{a'c}, \mathbf{a'p}, \mathbf{a'q} \in (\mathbf{a}')^* \\
&\mapsto \quad \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}', \mathbf{c}' \in C \\
&\mapsto \quad \mathbf{ab}, \mathbf{ac}, \mathbf{ab}', \mathbf{ac}' \in \mathbf{a}^* \\
&\mapsto \quad \mathbf{p}' := \mathbf{ab} \cap L' \\
&\qquad\quad \mathbf{q}' := \mathbf{ac} \cap L', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \in L'
\end{aligned}$$

Nach dem Dual zur Steinerschen Erzeugung gibt es einen nicht–entarteten Kegelschnitt D, der die vier Verbindungslinien $\mathbf{bp}'$, $\mathbf{cq}'$, $\mathbf{pb}'$, $\mathbf{qc}'$ sowie die beiden Geraden L und L' berührt. Dies sind die sechs Seiten beider Dreiecke. □

Zwei Punkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ auf einem Kegelschnitt bestimmen eine Gerade, und diese Gerade schneidet jede feste Gerade L in einem durch $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ bestimmten Punkt $\mathbf{y}$. Die Koordinaten dieses Punktes $\mathbf{y}$ wollen wir jetzt ausrechnen. Dazu wählen wir die homogenen Koordinaten so, daß die Rechnung besonders einfach wird.

Satz (Kollinearitätskriterium): *Auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt* $C : x_0x_1 = x_2^2$ *seien zwei Punkte*

$$\mathbf{x}_1 = (\lambda_1^2 : \mu_1^2 : \lambda_1\mu_1) \neq \mathbf{x}_2 = (\lambda_2^2 : \mu_2^2 : \lambda_2\mu_2)$$

gegeben.

a) *Auf der Geraden* $L : x_2 = 0$, *welche* C *in den Koordinatenpunkten* $\mathbf{a} = (1 : 0 : 0)$ *und* $\mathbf{b} = (0 : 1 : 0)$ *schneidet, ist der Punkt*

$$\mathbf{y}_L := (\lambda_1\lambda_2 : -\mu_1\mu_2 : 0) = (-1 : \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2} : 0)$$

mit $\mathbf{x}_1$ *und* $\mathbf{x}_2$ *kollinear.*

b) *Auf der Geraden* $M : x_0 = 0$, *welche* C *in* $\mathbf{b}$ *berührt, ist der Punkt*

$$\mathbf{y}_M := (0 : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 : \lambda_1\lambda_2) = (0 : \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} : 1)$$

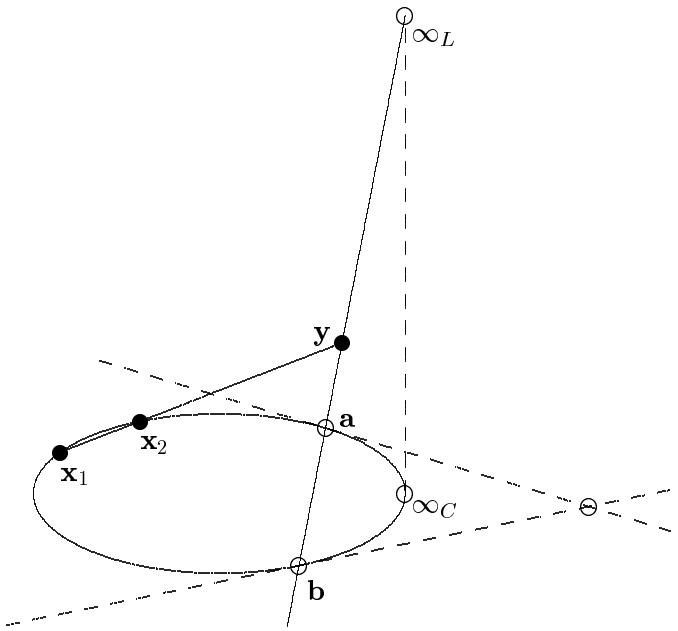
mit $\mathbf{x}_1$ *und* $\mathbf{x}_2$ *kollinear.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\lambda_2\mu_2\mathbf{x}_1 - \lambda_1\mu_1\mathbf{x}_2 &= (\lambda_2\mu_2\lambda_1^2 - \lambda_1\mu_1\lambda_2^2 : \lambda_2\mu_2\mu_1^2 - \lambda_1\mu_1\mu_2^2 : 0) \\
&= (\lambda_1\lambda_2 \cdot (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) : \mu_1\mu_2 \cdot (\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2) : 0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{y}_L, \\
\lambda_2^2\mathbf{x}_1 - \lambda_1^2\mathbf{x}_2 &= (0 : \lambda_2^2\mu_1^2 - \lambda_1^2\mu_2^2 : \lambda_2^2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1^2\lambda_2\mu_2) \\
&= (0 : (\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2)(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2) : \lambda_1\lambda_2(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)) \\
&= \mathbf{y}_M.
\end{aligned}
$$

□



Diese Formeln sehen sehr technisch aus, man kann sie aber verstehen, und als eine Art von Menelaos-Satz am Kegelschnitt auffassen. Natürlich dürfen wir jetzt kein Teilverhältnis mehr verwenden, sondern müssen alles mit Doppelverhältnissen ausdrücken. Dazu erinnern wir uns an

$$DV(\mathbf{x}, \infty; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v})}{TV(\infty; \mathbf{u}, \mathbf{v})} = TV(\mathbf{x}; \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

wegen $TV(\infty; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$. Bezeichnen wir die drei unendlichfernen Punkte auf den Dreiecks-Seiten a, b, c mit $\infty_a, \infty_b, \infty_c$, so wird die Menelaos-Bedingung am Dreieck

$$DV(\mathbf{a}', \infty_a; \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot DV(\mathbf{b}', \infty_b; \mathbf{c}, \mathbf{a}) \cdot DV(\mathbf{c}', \infty_c; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1.$$

Um die Aussage des letzten Satzes in eine Menelaos-ähnliche Form zu bringen, brauchen wir eine Gerade, welche die Rolle der unendlich-fernen Gerade übernehmen muß. Nehmen wir dafür die Tangente an C im Punkt $\infty_C := (1 : 1 : 1)$. Sie hat die Gleichung $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ und schneidet die Gerade L in $\infty_L := (1 : -1 : 0)$. Setzen wir noch $\mathbf{a} := (1 : 0 : 0)$ und $\mathbf{b} = (0 : 1 : 0)$, so wird

$$
\begin{aligned}
DV(\mathbf{x}_1; \infty_C; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= DV\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{-\mu_1}{\lambda_1} : \frac{-1}{1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_1}{\lambda_1},\\
DV(\mathbf{x}_2;\infty_C;\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{\mu_2}{\lambda_2},\\
DV(\mathbf{y},\infty_L;\mathbf{a},\mathbf{b}) &= DV(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \mu_1\mu_2/\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{-\mu_1\mu_2/\lambda_1\lambda_2}{-1} : \frac{1}{1}\\
&= \frac{\mu_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\mu_2}{\lambda_2}.
\end{aligned}
$$

Als Kollinearitätsbedingung haben wir dann die Gleichung

$$DV(\mathbf{x}_1,\infty_C;\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot DV(\mathbf{x}_2,\infty_C;\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot DV(\mathbf{y},\infty_L;\mathbf{b},\mathbf{a}) = 1.$$

Hier kommen jetzt keine Koordinaten mehr explizit vor. In dieser Form ist sie also eine Kollinearitätsbedingung für jede Sekante L eines nicht-entarteten Kegelschnitts C, wo eine „unendlichferne“ Hilfs-Gerade festgehalten ist, welche C im Punkt ∞_C berührt, und L im Punkt $\infty_L \notin C$ schneidet.

Natürlich kann man auch noch die Kollinearitätsbedingung für eine Tangente M (Fall b)) mit Doppelverhältnissen formulieren. Da muß man dann sicher addieren, statt multiplizieren. Das möchte ich hier aber nicht mehr tun.

Aufgabe 4.9: Parametrisieren Sie den Kegelschnitt

$$C:\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0) = 0$$

durch $(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}_1$ derart, daß $(1:0:1)\in C$ den Parameter $(1:0)$ und $(1:1:0)\in C$ den Parameter $(0:1)$ hat.

Aufgabe 4.10: Bestimmen Sie das Doppelverhältnis der vier Punkte $(-1:-1:1)$, $(-3:13:4)$, $(5:3:4)$ und $(6:-5:7)$ auf dem Kegelschnitt

$$C:\ 3x_0^2 + x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_1x_2 + x_0x_2 = 0.$$

4.4 Projektivitäten auf Kegelschnitten

Im letzten Abschnitt sahen wir, wie man nicht-entartete Kegelschnitte C als (zugegeben, etwas gekrümmte) projektive Geraden $\mathbb{P}_1$ auffassen kann. Deswegen gibt es auf C auch Projektivitäten

$$P : C \simeq \mathbb{P}_1 \xrightarrow{p} \mathbb{P}_1 \simeq C.$$

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit derartigen Projektivitäten $P : C \to C$ befassen.

Wir parametrisieren den Kegelschnitt C etwa wie oben

$$\mathbb{P}_1 \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C$$

und wenden auf $(\lambda : \mu)$ eine Projektivität

$$p: \quad \lambda' = a\lambda + b\mu,\ \mu' = c\lambda + d\mu$$

an. Zum Parameter $(\lambda' : \mu')$ gehört auf C der Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{array}{rcccl} x_0 & = & \lambda'^2 & = & a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + 2ab\lambda\mu, \\ x_1 & = & \mu'^2 & = & c^2\lambda^2 + d^2\mu^2 + 2cd\lambda\mu, \\ x_2 & = & \lambda'\mu' & = & ac\lambda^2 + bd\mu^2 + (ad+bc)\lambda\mu. \end{array}$$

Dies ist genau der Punkt mit dem Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 2ab \\ c^2 & d^2 & 2cd \\ ac & bd & ad+bc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \mu^2 \\ \lambda\mu \end{pmatrix}.$$

Das heißt also, *jede Projektivität p auf C wird durch eine Projektivität P des $\mathbb{P}_2$ induziert.* Gehört zu p die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dann wird (in den oben gewählten Koordinaten) P durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 2ab \\ c^2 & d^2 & 2cd \\ ac & bd & ad+bc \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit haben wir insbesondere den Existenz-Teil des folgenden Satzes bewiesen:

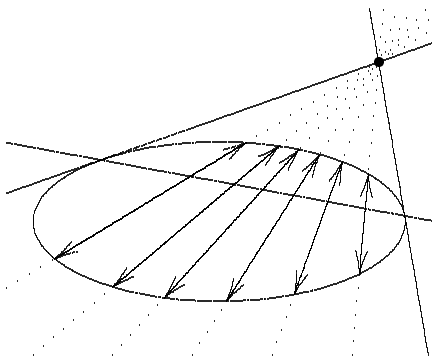
Satz (Projektivitäten auf Kegelschnitten): *Es sei $C \subset \mathbb{P}_2$ ein nicht–entarteter Kegelschnitt. Jede Projektivität $p : C \to C$ auf C wird dann durch genau eine Projektivität P des $\mathbb{P}_2$ induziert.*

Beweis. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß eine Projektivität $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ mit $P(C) = C$ eindeutig durch $P|C = p$ bestimmt ist. Dazu fixieren wir vier verschiedene Punkte $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_3$ auf C. (Damit es auf C Punkte gibt, müssen wir eventuell $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ voraussetzen.) Wären drei dieser Punkte kollinear, so würde ihre Gerade L den Kegelschnitt in ≥ 3 Punkten schneiden. Daraus würde $L \subset C$ folgen, und C wäre entartet, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind je drei der vier Punkte projektiv unabhängig, und nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung ist P eindeutig festgelegt durch die vier Bildpunkte $p(\mathbf{x}_i)$, d.h., durch p. □

Wir betrachten nun insbesondere eine Involution $p : C \to C$. Wegen der Eindeutigkeit im vorangehenden Satz (angewendet auf $p^2 = id_C$) ist die Fortsetzung $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ auch wieder eine Involution.

Jede Involution $p : C \to C$ hat zwei Fixpunkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in C$. Auch unter der projektiven Fortsetzung P von p bleiben diese beiden Punkte invariant. Dann bildet P außerdem die beiden Tangenten $T_1 := T_{\mathbf{x}_1}(C)$ und $T_2 := T_{\mathbf{x}_2}(C)$ in sich ab. Deren Schnittpunkt $\mathbf{z} := T_1 \cap T_2$ ist dann ein weiterer Fixpunkt von P.

Sei Z die Verbindungsgerade der beiden Fixpunkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, die Polare $P_{\mathbf{z}}(C)$. Dann ist $P(Z) = Z$. Wählen wir zwei Punkte $\mathbf{x} \neq p(\mathbf{x}) \in C$, die sich unter der Involution p entsprechen, so ist auch deren Verbindungsgerade L unter P invariant. Sie schneidet Z in einem Fixpunkt von P, der weder $\mathbf{x}_1$ noch $\mathbf{x}_2$ sein kann. Damit hat $P|Z$ mindestens drei Fixpunkte, und muß $= id_Z$ sein. Die ganze Gerade Z besteht aus Fixpunkten. Dann bleibt auch jede Gerade $L \neq T_i$ durch $\mathbf{z}$ unter P fest. (Sie enthält ja die zwei Fixpunkte $\mathbf{z}$ und $L \cap Z$.) Damit schneidet L den Kegelschnitt C in zwei Punkten, die sich unter der Involution p entsprechen, und die beiden Schnittpunkte werden von den beiden Fixpunkten harmonisch getrennt.



Satz (Involutionen auf Kegelschnitten): *Jede Involution $p : C \to C$ auf einem (nicht–entarteten) Kegelschnitt C ist die Einschränkung einer Involution $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, welche eine Gerade Z von Fixpunkten und einen isolierten Fixpunkt $\mathbf{z}$ besitzt. Die Geraden durch $\mathbf{z}$ schneiden auf C genau die Punktepaare aus, welche sich unter der Involution p entsprechen.*

Satz (Nocheinmal konjugierte Geraden): *Es seien C ein nicht–entarteter Kegelschnitt und $L, M \subset \mathbb{P}_2$ zwei Geraden, keine Tangenten an C. Dann ist äquivalent:*

1) *Die Geraden L und M sind bezüglich C konjugiert.*

2) *Die Geraden L und M schneiden auf C zwei Punkte–Paare aus, die sich auf C harmonisch trennen.*

Beweis. Die Paare der Schnittpunkte seien $L \cap C = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ und $M \cap C = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

„1) $\Rightarrow$ 2)“: Wenn L und M konjugiert sind, liegt der Pol $\mathbf{z}$ von L bezüglich C auf M. Sei $P : C \to C$ eine Involution mit den Fixpunkten $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$. Sie wird induziert durch die Involution $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ mit Fixpunkt $\mathbf{z}$ und Fixgerade L. Weil M durch $\mathbf{z}$ geht, ist $P(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2$. Die Involution p hat also die Fixpunkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und vertauscht die Punkte $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Es folgt $DV(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = -1$.

„2) $\Rightarrow$ 1)“: Weil sich die Paare $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ harmonisch trennen, gibt es eine Involution $p : C \to C$ mit den Fixpunkten $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $p(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2$. Die zugehörige Involution $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ hat als Fixpunkt $\mathbf{z}$ den Pol von L, und L als Fixgerade. Wegen $P(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2$ geht die Gerade M durch diesen Pol. Also sind L und M konjugiert. □

Falls der Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, hat jede Projektivität $id \neq p : \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ entweder zwei Fixpunkte oder einen Fixpunkt (Aufgabe 3.5). Im ersten Fall können wir homogene Koordinaten $(x_0 : x_1)$ so wählen, daß $p(x_0 : x_1) = (x_0 : k \cdot x_1)$, und im zweiten Fall so, daß

$p(x_0 : x_1) = (x_0 : x_1 + k \cdot x_0)$. Wir wenden dies jetzt auf Projektivitäten $p : C \to C$ auf einem Kegelschnitt an. Dazu definieren wir die *Achse der Projektivität* als die Verbindungsgerade der beiden Fixpunkte, falls p zwei Fixpunkte hat, und wenn p nur einen Fixpunkt hat, als die Tangente in diesem Fixpunkt an C.

Damit ist, streng genommen, die Achse nur definiert, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nehmen. Aber falls $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ein reeller Kegelschnitt und $p : C \to C$ eine reelle Projektivität ist, dann ist das charakteristische Polynom der Matrix zu p reell. Wenn es keine reelle Nullstelle hat, dann besitzt es zwei konjugiert-komplexe Nullstellen. Dazu gehören dann zwei, voneinander verschiedene, konjugiert-komplexe Eigenvektoren, etwa

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2) \text{ und } \overline{\mathbf{v}} = (\overline{v_0}, \overline{v_1}, \overline{v_2}).$$

Deren Verbindungsgerade hat eine Gleichung

$$(v_1\overline{v_2} - v_2\overline{v_1})x_0 + (v_2\overline{v_0} - v_0\overline{v_2})x_1 + (v_0\overline{v_1} - v_1\overline{v_0})x_2 = 0$$

mit rein imaginären Koeffizienten. Teilt man diese Gleichung durch i, so wird sie reell, und definiert eine relle Gerade als Achse.

Satz (Achsensatz für Kegelschnitte): *Es sei $id \neq p : C \to C$ eine Projektivität auf dem nicht–entarteten Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Dann gilt für je zwei Punkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, p(\mathbf{x}_2), p^{-1}(\mathbf{x}_2) \in C$, die keine Fixpunkte von p sind: Die Verbindungsgeraden $\mathbf{x}_1p(\mathbf{x}_2)$ und $\mathbf{x}_2p(\mathbf{x}_1)$ treffen sich auf der Achse von p.*

Beweis. Wir bringen den Kegelschnitt in Normalform

$$x_0x_1 = x_2^2$$

und unterscheiden dann zwei Fälle, je nachdem ob p zwei oder einen Fixpunkt hat.

Fall 1: Die Projektivität p habe zwei verschiedene Fixpunkte auf C. Wir wählen die Koordinaten so, daß dies die Koordinatenpunkte $(1 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : 0)$ sind. Die Achse ist dann die Gerade $L : x_2 = 0$.

Wie üblich parametrisieren wir die Punkte von C durch

$$\mathbb{P}_1 \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu).$$

Die Abbildung p wird dann durch $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda : k \cdot \mu)$ gegeben. Bezeichnen wir mit $(\lambda_i : \mu_i)$ den Parameterpunkt zu $\mathbf{x}_i$, so haben wir also folgende Punkte auf C mit ihren Parametern:

$$\begin{array}{rlrl} \mathbf{x}_1 : & (\lambda_1 : \mu_1) & \mathbf{x}_2 : & (\lambda_2 : \mu_2) \\ p(\mathbf{x}_1) : & (\lambda_1 : k \cdot \mu_1) & p(\mathbf{x}_2) : & (\lambda_2 : k \cdot \mu_2) \end{array}$$

Im Kollinearitätskriterium am Ende des Abschnitts 4.3 haben wir in dieser Situation den Schnittpunkt einer Verbindungsgerade zweier Punkte auf C mit der Geraden L berechnet. Wir finden

$$\overline{\mathbf{x}_1p(\mathbf{x}_2)} \cap L = (\lambda_1\lambda_2 : -k \cdot \mu_1\mu_2 : 0) = \overline{\mathbf{x}_2p(\mathbf{x}_1)} \cap L.$$

Der Schnittpunkt beider Verbindungsgeraden liegt also auf der Achse $x_2 = 0$.

Fall 2: Die Projektivität p habe nur einen Fixpunkt auf C. Wir wählen ihn als Koordinatenpunkt $(0:1:0)$. Die Achse ist dann also die Gerade $M:\ x_0 = 0$.

Die Koordinaten $(\lambda:\mu)$ wählen wir so, daß die Projektivität p durch $p(\lambda:\mu) = (\lambda:\mu + k\lambda)$ gegeben wird. Wir haben dann auf C die Punkte

$$\begin{array}{llll} \mathbf{x}_1: & (\lambda_1:\mu_1) & \mathbf{x}_2: & (\lambda_2:\mu_2) \\ p(\mathbf{x}_1): & (\lambda_1:\mu_1+k\lambda_1) & p(\mathbf{x}_2): & (\lambda_2:\mu_2+k\lambda_2) \end{array}$$

Auch für diesen Fall haben wir im Kollinearitätskriterium berechnet

$$\overline{\mathbf{x}_1 p(\mathbf{x}_2)} \cap M = (0:\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + k\lambda_1\lambda_2 : \lambda_1\lambda_2) = \overline{\mathbf{x}_2 p(\mathbf{x}_1)} \cap M.$$

Und wieder liegt der Schnittpunkt beider Verbindungsgeraden auf der Achse. □

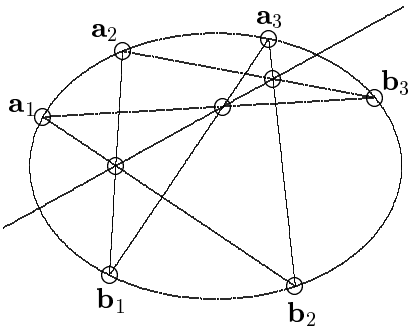
Als Anwendung des Achsensatzes beweisen wir jetzt den Satz von Pascal, der - nicht zu Unrecht - als der schönste Satz der elementaren projektiven Geometrie gilt:

Satz (Hexagramma mysticum): *Es seien* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *und* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in C$ *sechs verschiedene Punkte auf dem nicht–entarteten Kegelschnitt* C*. Dann liegen die drei Schnittpunkte der drei Geradenpaare*

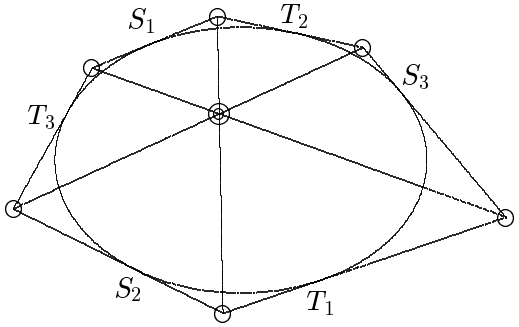
$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$$

auf einer Geraden (der Pascal–Geraden).

Beweis: Nach dem Prinzip der projektiven Ausdehnung gibt es eine Projektivität $p: C \to C$ mit $p(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i, i = 1,2,3$. Die Pascal–Gerade ist nichts anderes als die Achse dieser Projektivität. □



Pascal



Brianchon

Der Satz von Pascal dualisiert sich folgendermaßen:

Satz (von Brianchon): *Es seien* S_1, S_2, S_3 *und* $T_1, T_2, T_3 \in C^*$ *sechs verschiedene Tangenten an den nicht–entarteten Kegelschnitt* C*. Dann gehen die drei Verbindungsgeraden der drei Punktepaare*

$$S_1 \cap T_2 \text{ und } S_2 \cap T_1, \quad S_2 \cap T_3 \text{ und } S_3 \cap T_2, \quad S_3 \cap T_1 \text{ und } S_1 \cap T_3$$

durch einen Punkt.

Der Satz von Pascal ist ein ziemlich zentraler Satz, von ihm ausgehend kann man ziemlich interessante mathematische Fäden spinnen. Eine Richtung, die ich hier nicht weiter verfolgen möchte, beginnt mit der Bemerkung, daß sechs Punkte auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt ja nicht nur auf eine Weise ein Sechseck bilden. Unser Wahl der Verbindungsgeraden gehört zum Sechseck

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3.$$

Ich habe diese Bezeichnungen für die Punkte, und ihre Reihenfolge auf dem Kegelschnitt so gewählt, um die Analogie zum Satz von Pappos deutlich zu machen, und damit die Pascal-Gerade schön im Bild liegt.

Man kann die sechs Punkte aber in jeder anderen Reihenfolge als ein Sechseck auffassen. Und jedesmal gibt es eine Pascal-Gerade, auf der sich die drei Paare gegenüberliegender Sechsecks-Seiten schneiden. Insgesamt gibt es $6! = 720$ Permutationen der sechs Punkte. Aber eine Diedergruppe der Ordnung 12 (erzeugt von einer zyklischen Vertauschung der Ordnung sechs und einer Spiegelung) läßt das Sechseck invariant. Damit gibt es

$$\frac{6!}{12} = 60$$

wesentlich verschiedene Sechsecke, und 60 verschiedene Pascal-Geraden. Die Konfiguration dieser 60 Pascal-Geraden hat sehr viel mit der Permutationsgruppe S_6 zu tun. Es gibt darüber eine sehr umfangreiche Literatur (aus dem letzten Jahrhundert). Die wesentlichen Resultate sind in dem wunderschönen, aber leider auch ziemlich unlesbaren Buch „Geometrische Konfigurationen“ von F. Levi (Verlag Hirzel, Leipzig, 1929) zu finden.

Eine andere Bemerkung ist folgende: Der Punkt $\mathbf{b}_3$ auf dem Kegelschnitt ist festgelegt durch die anderen fünf Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und die Gerade $L := \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3$. Sind nämlich die anderen fünf Punkte gegeben, und eine Gerade L durch $\mathbf{a}_2$ (und keinen anderen der gegebenen Punkte), so sind dadurch eindeutig festgelegt:

- der Schnittpunkt $\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1$,
- der Schnittpunkt $\mathbf{p}_{2,3} = \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 \cap L$,
- die Pascalgerade $\mathbf{p}_{1,2}\mathbf{p}_{2,3}$,
- der Schnittpunkt $\mathbf{p}_{1,3}$ der Pascalgeraden mit der Geraden $\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1$,
- die Verbindungsgerade $M := \mathbf{a}_1\mathbf{p}_{1,3}$,
- und schließlich $\mathbf{b}_3$ selbst als Schnittpunkt $L \cap M$.

Dies liefert eine *Konstruktion des sechsten Punktes* auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt, auf dem schon fünf Punkte gegeben sind. Über den Pascalschen Satz legen diese fünf Punkte einen sechsten Punkt fest auf jeder Geraden L durch $\mathbf{a}_3$. Im Prinzip liefert dies eine Konstruktion aller Punkte des Kegelschnitts. Ich möchte daraus eine Folgerung ziehen:

Satz (Fünf Punkte auf einem Kegelschnitt): *Ein nicht-entarteter Kegelschnitt ist durch fünf seiner Punkte eindeutig festgelegt.*

Eine dritte Gedankenrichtung möchte ich aber noch etwas weiter verfolgen: Was passiert, wenn zwei der Punkte unseres Sechsecks zusammenfallen? Darauf gibt es eine triviale Antwort: Nichts! Wir haben ein Fünfeck, kein Sechseck mehr, und auch keinen Satz von Pascal.

Weitaus kreativer ist aber folgende Antwort: Sehen wir es uns doch einmal an! Nehmen wir also sechs Punkte auf dem Kegelschnitt C, der Übersichtlichkeit möchte ich sie jetzt $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_6$ nennen, so daß auf der Pascalgeraden also die Schnittpunkte

$$\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{p}_4\mathbf{p}_5,\ \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \cap \mathbf{p}_5\mathbf{p}_6,\ \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 \cap \mathbf{p}_6\mathbf{p}_1$$

liegen. So, jetzt fixieren wir die ersten fünf Punkte, und bewegen den Punkt $\mathbf{p}_6$ auf dem Kegelschnitt. Dabei verändert sich das Sechseck, und auch die Pascalgerade bewegt sich (sie dreht sich um den Punkt $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{p}_4\mathbf{p}_5$), aber alle Inzidenzen bleiben erhalten. So, und jetzt lassen wir $\mathbf{p}_6$ gegen $\mathbf{p}_1$ konvergieren! Aus der Analysis weiß man, daß dabei die Verbindungsgerade $\mathbf{p}_6\mathbf{p}_1$ gegen die Tangente $T_{\mathbf{p}_1}(C)$ konvergiert. Weil alle Inzidenzen erhalten bleiben (??), folgt im Grenzfall der

Satz (von Pascal, für fünf Punkte und eine Tangente): *auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt seien fünf verschiedene Punkte* $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_5$ *gegeben. Dann sind die folgenden drei Punkte kollinear:*

$$\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap \mathbf{p}_4\mathbf{p}_5,\ \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \cap \mathbf{p}_5\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 \cap T_{\mathbf{p}_5}(C).$$

Dieser Satz stimmt, mein Beweis ist aber nicht wasserdicht. Irgend ein Stetigkeitsargument wird benutzt, das nicht explizit formuliert ist, und keineswegs bewiesen. Mit viel mehr Aufwand, als es in dieser Vorlesung möglich ist, kann man es wasserdicht machen. Einfacher dürfte es sein, den Beweis des Achsensatzes so zu modifizieren, daß auch Punktepaare zusammenfallen dürfen. Das möchte ich hier aber auch nicht tun. In diesem Sinn beweise ich diese Aussage (und die hier noch folgenden Aussagen) also nicht, sondern motiviere sie nur. (Natürlich sind sie richtig, ich erzähle doch nichts Falsches.)

Was man einmal geglaubt hat, muß man auch ein zweites Mal glauben. Ich kann also nochmal zwei Punkte zusammenfallen lassen, etwa $\mathbf{p}_4$ und $\mathbf{p}_5$. Oder $\mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_3$? Das scheint zwei verschiedene Aussagen zu ergeben. Damit hatte ich nicht gerechnet. Ich wollte alle Entartungsfälle des Pascalschen Satzes hier anführen. Nun wird mir deren Systematik etwas zu unübersichtlich. Lassen wir es sein. Nur auf den allerspeziellsten Fall möchte ich noch hinweisen: Wenn das Sechseck zu einem Dreieck und drei Tangenten entartet.

Satz (von Pascal, für Dreieck und Tangenten): *Auf einem nicht-entarteten Kegelschnitt seien drei verschiedene Punkte* $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ *gegeben. Dann sind die folgenden drei Schnittpunkte kollinear:*

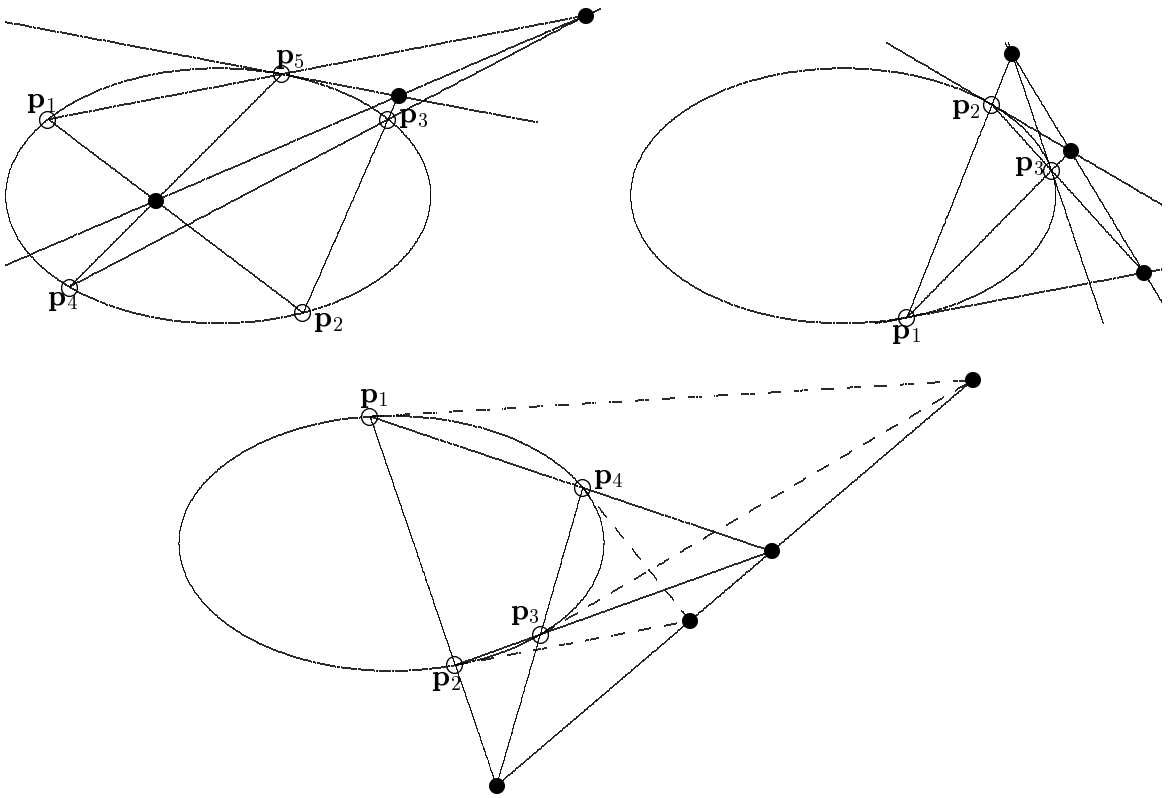
$$\mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \cap T_{\mathbf{p}_1}(C), \quad \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 \cap T_{\mathbf{p}_2}(C), \quad \mathbf{p}_3' = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \cap T_{\mathbf{p}_3}(C).$$

Das muß doch was mit dem Satz von Menelaos zu tun haben? Oder? Dann müßte doch eigentlich auch der folgende Satz am Dreieck richtig sein: Es seien $T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}, T_{\mathbf{c}}$ die Tangenten an den Umkreis eines Dreiecks $\mathbf{abc}$ in den Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Dann sind die Punkte

$$T_{\mathbf{a}} \cap \mathbf{bc}, \quad T_{\mathbf{b}} \cap \mathbf{ca}, \quad T_{\mathbf{c}} \cap \mathbf{ab}$$

kollinear.

Variationen des Satzes von Pascal:



Das Zusammenfallen von Punkten kann man natürlich auch dualisieren und erhält Entartungsfälle des Satzes von Brianchon: Sei also ein Tangenten-Sechseck $T_1, ..., T_6$ an den Kegelschnitt gegeben. Nach Brianchon laufen dann die Verbindungsgeraden der folgenden Punktepaare (gegenüberliegende Ecken des Sechsecks) durch einen Punkt:

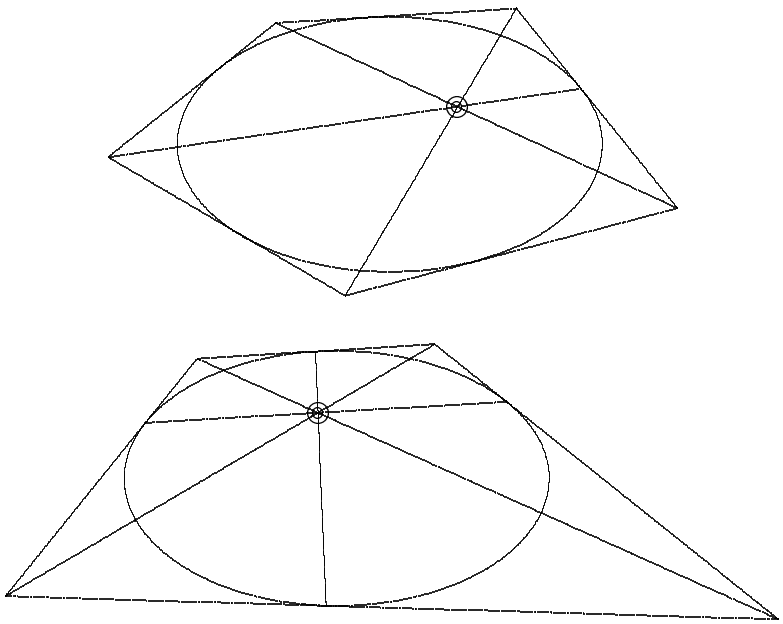
$$T_1 \cap T_2 \text{ und } T_4 \cap T_5, \quad T_2 \cap T_3 \text{ und } T_5 \cap T_6, \quad T_3 \cap T_4 \text{ und } T_6 \cap T_1.$$

Wenn hier die Tangente T_6 gegen T_1 konvergiert, konvergiert der Schnittpunkt $T_6 \cap T_1$ offenbar gegen den Berührpunkt $\mathbf{p}_1$ der Tangente $T_6 = T_1$. Jetzt laufen die Verbindungsgeraden der folgenden Punktepaare durch einen Punkt:

$$T_1 \cap T_2 \text{ und } T_4 \cap T_5, \quad T_2 \cap T_3 \text{ und } T_5 \cap T_1, \quad T_3 \cap T_4 \text{ und } \mathbf{p}_1.$$

Das kann man jetzt auch noch iterieren, keine Ahnung, wieviel verschiedene Fälle das liefert.

Variationen zum Satz von Brianchon:



Der Extremfall ist der eines Tangentendreiecks mit seinen Berührpunkten:

Satz (von Brianchon, für Tangentendreieck): *Auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt seien drei verschiedene Punkte* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *gegeben. Dann laufen die Verbindungsgeraden der folgenden drei Punktepaare durch einen Punkt*

$$\mathbf{a} \text{ und } T_{\mathbf{b}}(C) \cap T_{\mathbf{c}}(C), \quad \mathbf{b} \text{ und } T_{\mathbf{c}}(C) \cap T_{\mathbf{a}}(C), \quad \mathbf{c} \text{ und } T_{\mathbf{a}}(C) \cap T_{\mathbf{b}}(C).$$

Das ist Aufgabe 2.13, etwas anders eingekleidet.

Aufgabe 4.11: Es sei C ein nicht-entarteter Kegelschnitt in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ein Punkt nicht auf C. Zeigen Sie: Es gibt eine Involution $p : C \to C$ so, daß die Geraden des Büschels $\mathbf{p}^*$ genau die Paare $\mathbf{x}, p(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in C$ ausschneiden.

Aufgabe 4.12: Zwei Involutionen $p_1, p_2 : C \to C$ auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C kommutieren genau dann, wenn die Paare ihrer Fixpunkte zwei bezüglich C konjugierte Geraden aufspannen.

Aufgabe 4.13: Es seien $p_1, p_2, p_3 : C \to C$ drei Involutionen auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C, welche eine Kleinsche Vierergruppe erzeugen. Zeigen Sie: die isolierten Fixpunkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ der zugehörigen Involutionen $P_1, P_2, P_3 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ sind die Ecken eines bezüglich C selbstpolaren Dreiecks.

Aufgabe 4.15: a) Gegeben seien zwei Tripel $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ paarweise verschiedener Punkte auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt C. Konstruieren Sie die Fixpunkte der Projektivität $p : C \to C$ mit $p(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Gegeben seien zwei Paare $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$ von Punkten auf C. Konstruieren Sie die Fixpunkte der Involution $p : C \to C$ mit $p(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ und $p(\mathbf{b}_i) = \mathbf{a}_i$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe 4.16: Auf dem nicht-entarteten Kegelschnitt liegen die Ecken zweier Dreiecke $\mathbf{abc}$ und $\mathbf{a'b'c'}$. Daraus werden zwei weitere Dreiecke gebildet, das erste mit den Seiten $\mathbf{aa'}, \mathbf{bb'}, \mathbf{cc'}$ und das zweite mit den Ecken $\mathbf{ab} \cap \mathbf{a'b'}, \mathbf{bc} \cap \mathbf{b'c'}, \mathbf{ca} \cap \mathbf{c'a'}$. Zeigen Sie, daß diese beiden Dreiecke zueinander perspektiv sind. (Hinweis: Satz von Pascal für das Sechseck $\mathbf{ab'ca'bc'}$.)

Aufgabe 4.17: Der Kegelschnitt C sei parametrisiert durch $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu)$. Bestimmen Sie die Projektivitäten $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, welche die folgenden Projektivitäten auf C induzieren:
a) $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda : -\mu)$,
b) $(\lambda : \mu) \mapsto (\mu : \lambda)$,
c) $(\lambda : \mu) \mapsto (\lambda + \mu : \lambda - \mu)$.

4.5 Systeme von Kegelschnitten

Bisher haben wir immer nur einen einzelnen Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ betrachtet. Jetzt wollen wir uns mit zwei oder mehreren simultan befassen.

Betrachten wir zunächst einmal die *Menge aller Kegelschnitte*. Was das ist, wissen wir noch nicht so recht. Aber wir wissen, daß die homogenen Polynome zweiten Grades in den Variablen x_0, x_1, x_2

$$Q(x_0, x_1, x_2) = a_{0,0}x_0^2 + a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + 2(a_{0,1}x_0x_1 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,0}x_2x_0)$$

einen sechs–dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bilden. Natürlich definiert ein Polynom Q den gleichen Kegelschnitt, wie das Polynom $c \cdot Q$ mit $0 \neq c \in \mathbb{K}$. Die Polynome $c \cdot Q, c \in \mathbb{K}$, bilden eine Gerade im sechs–dimensionalen Vektorraum aller homogenen Polynome vom Grad zwei. Schon diese Gerade bestimmt den Kegelschnitt $Q = 0$.

Das ist bemerkenswert, weil die Menge aller Kegelschnitte offenbar weniger mit dem sechs–dimensionalen Vektorraum zu tun hat, als mit dem fünf–dimensionalen projektiven Raum, der dazu gehört. *Jeder Punkt im $\mathbb{P}_5$ mit den homogenen Koordinaten $a_{0,0} : ... : a_{2,0}$ bestimmt einen Kegelschnitt.* Der kann, abhängig vom Grundkörper $\mathbb{K}$, bisweilen leer sein, aber:

Satz (Gleichung des Kegelschnittes): *Ein Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ bestimmt seine Gleichung eindeutig bis auf einen skalaren Faktor.*

Beweis. Falls C entartet ist, also aus zwei oder einer Geraden besteht, sind die Linearformen, welche auf diesen Geraden verschwinden, bis auf einen Skalarfaktor eindeutig. Damit ist auch das Produkt dieser beiden Geradengleichungen bis auf einen Skalarfaktor eindeutig bestimmt.

Sei also jetzt C nicht–entartet. Wir schneiden C mit einer Geraden L. Weil der Grundkörper als $\mathbb{C}$ vorausgesetzt ist, hat die entsprechende quadratische Gleichung immer eine Lösung, und es gibt immer einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in C$. Durch $\mathbf{x}_0$ gibt es auch immer eine Gerade M, die von der

Tangente an C in $\mathbf{x}_0$ verschieden ist. Auf M gibt es dann immer noch einen zweiten Schnittpunkt $\mathbf{x}_1 \in M \cap C$. Wir wählen jetzt die homogenen Koordinaten wie in 4.2, Fall 4: In diesen Koordinaten hat C die Gleichung $x_0x_1 - x_2^2 = 0$. Wie in 4.3 parametrisieren wir C durch

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \ni (\lambda : \mu) \mapsto (\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) \in C.$$

Sei jetzt

$$P(x_0, x_1, x_2) = (x_0 : x_1 : x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ein homogenes Polynom zweiten Grades, das auf C verschwindet. Dann ist also $P(\lambda^2, \mu^2, \lambda\mu) = 0$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Setzen wir $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ oder $(0, 1)$ ein, so finden wir schon einmal $a_{0,0} = a_{1,1} = 0$. Dann kann $a_{0,1}$ nicht auch $= 0$ sein, denn sonst wäre der Kegelschnitt C entartet. Indem wir P mit einem Faktor durchmultiplizieren, können wir $a_{0,1} = 1/2$ erreichen. Jetzt setzen wir die beiden etwas komplizierteren Parameter $(\lambda : \mu) = (1 : \pm i)$ ein und finden:

$$\pm 2i(a_{0,2} - a_{1,2}) = 1 + a_{2,2}.$$

Es folgt $a_{0,2} = a_{1,2}$ und $a_{2,2} = -1$. Schließlich nehmen wir noch $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ und finden

$$a_{0,2} + a_{1,2} = a_{0,2} + a_{1,2} + 1 + a_{2,2} = 0.$$

Dies zeigt, daß $a_{0,2} = a_{1,2} = 0$, und P ein Vielfaches der Kegelschnittgleichung $x_0x_1 - x_2^2$ ist. □

Der soeben bewiesene Satz sagt, zumindest über dem Grundkörper $\mathbb{C}$, daß die Menge aller Kegelschnitte $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ein bijektives Bild des $\mathbb{P}_5$ ist, der zum Vektorraum der homogenen Polynome zweiten Grades gehört. Wir können die Menge aller Kegelschnitte als einen $\mathbb{P}_5$ auffassen! (Man sollte dies als Verallgemeinerung der Tatsache sehen, daß man die Menge aller Geraden $L \subset \mathbb{P}_2$ als einen $\mathbb{P}_2$, nämlich den dualen $\mathbb{P}_2^*$ auffassen kann.)

Ein Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$ bestimmt einen projektiven Unterraum $\mathbf{z}^* \subset \mathbb{P}_2^*$ der Dimension eins im $\mathbb{P}_2^*$ aller Geraden, nämlich das Geradenbüschel der Geraden die $\mathbf{z}$ enthalten. Ähnlich bestimmt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$ im $\mathbb{P}_5$ der Kegelschnitte einen projektiven Unterraum, allerdings jetzt von Dimension vier, nämlich

$$\{C \in \mathbb{P}_5 : \mathbf{z} \in C\}.$$

In der Tat, wenn $\mathbf{z} = (z_0 : z_1 : z_2)$, dann ist die Bedingung, daß $\mathbf{z} \in C$ liegt, eine homogene lineare Gleichung für die Koeffizienten $a_{0,0}, ..., a_{2,0}$ von C:

$$z_0^2 \cdot a_{0,0} + z_1^2 \cdot a_{1,1} + z_2^2 \cdot a_{2,2} + 2z_0z_1 \cdot a_{0,1} + 2z_1z_2 \cdot a_{1,2} + 2z_2z_0 \cdot a_{0,2} = 0.$$

Man kann mehr als eine solche Bedingung an Kegelschnitte stellen. Wählt man k Punkte $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_k \in \mathbb{P}_2$, so sind die k Bedingungen $\mathbf{z}_1 \in C, ..., \mathbf{z}_k \in C$ jetzt k homogene lineare Gleichungen für die Koeffizienten von C. *Wenn* diese Gleichungen linear unabhängig sind, ist die Menge der Kegelschnitte, welche diesen k Bedingungen genügt, ein projektiver Unterraum des $\mathbb{P}_5$ der Codimension k, also der Dimension $5 - k$. Wann die linearen Gleichungen linear unabhängig sind, das ist nicht ganz einfach zu entscheiden. Wir benötigen in dieser Richtung nur folgenden

Satz a) (Vier Punkte): *Es seien* $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_4 \in \mathbb{P}_2$ *vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann bildet die Menge der Kegelschnitte* C*, die durch* $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_4$ *gehen einen projektiven Raum der Dimension eins.*

b) (Fünf Punkte): *Es seien* $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_5 \in \mathbb{P}_2$ *fünf Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann gibt es genau einen Kegelschnitt* C*, der durch diese fünf Punkte geht. (Den Eindeutigkeitsteil dieser Aussage haben wir schon im Zusammenhang mit Pascals Satz bemerkt.)*

Beweis. a) Die vier Punkte $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_4$ erfüllen die Voraussetzung von Satz 4 in 3.4. Wir können also die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}_2$ so wählen, daß

$$\mathbf{z}_1 = (1:0:0),\ \mathbf{z}_2 = (0:1:0),\ \mathbf{z}_3 = (0:0:1),\ \mathbf{z}_4 = (1:1:1).$$

Die drei Punkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ liegen genau dann auf dem Kegelschnitt C, wenn in seiner symmetrischen Matrix $A = (a_{i,j})$ die drei Diagonaleinträge $a_{i,i}$ verschwinden. Und der Punkt $\mathbf{z}_4$ liegt auch noch auf C, wenn gilt

$$a_{0,0} = a_{1,1} = a_{2,2} = a_{0,1} + a_{1,2} + a_{2,0} = 0.$$

Dies sind vier linear unabhängige Gleichungen in den $a_{i,j}$.

b) Sei jetzt noch ein fünfter Punkt $\mathbf{z}_5 \neq \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_4$ festgehalten. Wir wählen die Koordinaten wie in a), so, daß $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_4$ die angegebenen Koordinaten haben. Die Gerade im Raum aller Kegelschnitte, welche durch die vier Bedingungen $\mathbf{z}_i \in C, i = 1, ..., 4$ definiert wird, wird aufgespannt durch die beiden Kegelschnitte

$$\begin{array}{lllll} C_1: & a_{0,1} + a_{1,2} = a_{2,0} = 0 & Q_1(\mathbf{x}) = a_{0,1}x_0x_1 + a_{1,2}x_1x_2 & \sim & x_1 \cdot (x_0 - x_2) = 0 \\ C_2: & a_{0,1} = a_{1,2} + a_{2,0} = 0 & Q_2(\mathbf{x}) = a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,0}x_2x_0 & \sim & x_2 \cdot (x_0 - x_1) = 0. \end{array}$$

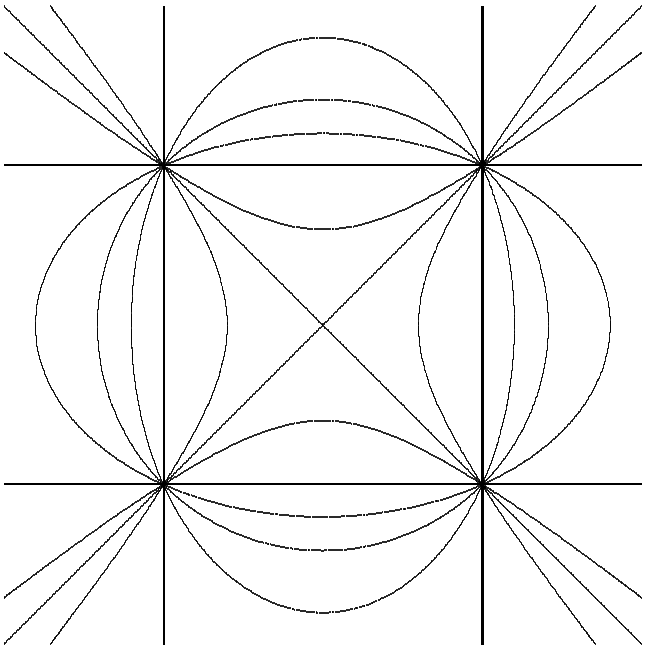
Der Durchschnitt $C_1 \cap C_2$ besteht genau aus den vier Punkten $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_4$. Jeder Kegelschnitt, der durch diese vier Punkte und durch $\mathbf{z}_5$ geht, hat eine Gleichung $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$, wenn $Q_i = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes C_i ist. Weil $\mathbf{z}_5$ nicht zu $C_1 \cap C_2$ gehört, gilt nicht $Q_1(\mathbf{z}_5) = Q_2(\mathbf{z}_5) = 0$. Deswegen ist $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$ durch

$$(\lambda Q_1 + \mu Q_2)(\mathbf{z}_5) = \lambda Q_1(\mathbf{z}_5) + \mu Q_2(\mathbf{z}_5) = 0$$

eindeutig bestimmt, nämlich als $(\lambda : \mu) = (Q_2(\mathbf{z}_5) : -Q_1(\mathbf{z}_5))$, und damit der Kegelschnitt durch $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_5$. □

Einen projektiven Raum der Dimension eins in $\mathbb{P}_2^*$ haben wir ein Geradenbüschel genannt. Ebenso nennen wir einen eindimensionalen projektiven Raum im $\mathbb{P}_5$ aller Kegelschnitte ein *Büschel von Kegelschnitten.* Jeder Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2$ bestimmt ein Geradenbüschel, nämlich das Büschel mit dem Zentrum $\mathbf{z}$. Genau so bestimmen vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, nach dem letzten Satz, Teil a) ein Büschel von Kegelschnitten, das genau alle Kegelschnitte durch diese vier Punkte enthält.

Von Kegelschnittbüscheln kann man am Computer recht schöne Bilder machen:



Die vier Punkte, in denen sich alle Kegelschnitte schneiden, heißen *die Basispunkte* des Büschels. Jedes Büschel besteht aus allen Kegelschnitten der Form $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$. Die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $Q_1 = 0$ und $Q_2 = 0$ liegen dann auf allen Kegelschnitten des Büschels. Sie sind die Basispunkte. Aber das können weniger als vier sein:

Satz (Schnitt zweier Kegelschnitte): *Es seien C_1 ein nicht–entarteter Kegelschnitt, o.B.d.A. $= \{(\lambda^2 : \mu^2 : \lambda\mu) : (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$, und C_2 ein davon verschiedener Kegelschnitt. Dann gibt es ein homogenes Polynom vierten Grades*

$$p(\lambda, \mu) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3\mu + a_2\lambda^2\mu^2 + a_3\lambda\mu^3 + a_4\mu^4,$$

dessen Wurzeln die Parameter $(\lambda_i : \mu_i)$ der Schnittpunkte $C_1 \cap C_2$ sind. Jedes homogene Polynom $p \neq 0$ vierten Grades tritt hierbei auf.

Beweis. Wenn C_2 die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(dxy + exz + fyz) = 0$$

hat, dann sind die Parameter $(\lambda_i : \mu_i)$ der Schnittpunkte $C_1 \cap C_2$ genau die Wurzeln der Gleichung vierten Grades

$$\begin{aligned} a\lambda^4 + b\mu^4 + c\lambda^2\mu^2 + 2(d\lambda^2\mu^2 + e\lambda^3\mu + f\lambda\mu^3) &= \\ a\lambda^4 + e\lambda^3\mu + (c + 2d)\lambda^2\mu^2 + f\lambda\mu^3 + b\mu^4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Polynoms p sind also

$$a_0 = a, \quad a_1 = e, \quad a_2 = c + 2d, \quad a_3 = f, \quad a_4 = b.$$

Es ist klar, daß man durch gegeignete Wahl der $a, ..., f$ alle möglichen Koeffizienten $a_0, ..., a_4$ erhält. □

Dieser, zugegeben etwas simplistische, fast philosophische Satz hat jedoch zwei erstaunliche Konsequenzen, die ich hier erwähnen möchte:

1. Das Prinzip des Zusammenfallens: Ein Polynom vierten Grades hat immer vier komplexe Wurzeln. Diese können jedoch zusammenfallen. Für die Vielfachheiten des Zusammenfallens gibt es folgende fünf Möglichkeiten:

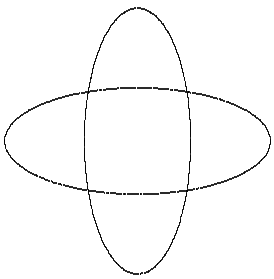
$$1,1,1,1; \quad 2,1,1; \quad 2,2; \quad 3,1; \quad 4;$$

Was bedeutet Zusammenfallen der Wurzeln für die beiden Kegelschnitte C_1 und C_2? Betrachten wir einen Punkt auf C_1, o.B.d.A. den Punkt $(1:0:0)$, der zum Parameter $(\lambda:\mu) = (1:0)$ gehört. Das Polynom $p(\lambda,\mu)$ hat in diesem Punkt eine Nullstelle, genau dann, wenn $a_0 = a = 0$. Und die Nullstelle ist doppelt, wenn auch $a_1 = e = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für die Matrix A von C_2 gilt

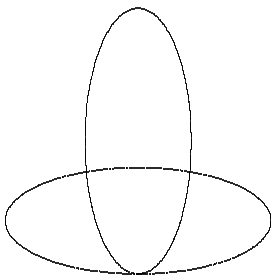
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h., wenn die Tangente an C_2 in diesem Punkt die Gerade $x_1 = 0$ ist, und mit der Tangente in C_1 zusammenfällt.

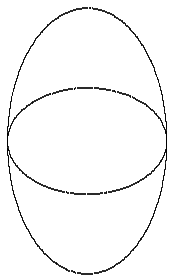
Zusammenfallen höherer Ordnung wollen wir nicht mehr formal untersuchen, sondern nur graphisch andeuten, wie man sich diese fünf Fälle vorstellen muß:



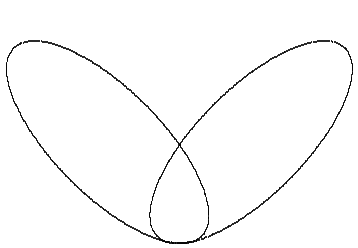
$1,1,1,1$



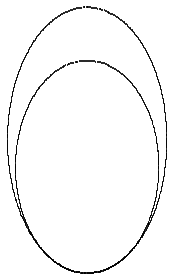
$2,1,1$



$2,2$



3, 1



4

2. Die Gleichung vierten Grades. Nach obigem Satz führt die Berechnug der (i.a. vier) Schnittpunkte zweier nicht–entarteter Kegelschnitte auf das Lösen einer Gleichung vierten Grades. Da bei geeigneter Wahl der Kegelschnitte jedes Polynom vierten Grades auftritt, ist das geometrische Problem, die zwei Kegelschnitte zu schneiden, sogar äquivalent mit dem Lösen der Gleichungen vierten Grades.

Es ist mathematische Folklore (und wird in der Vorlesung Algebra bewiesen), daß man Gleichungen dritten und vierten Grades noch durch Formeln (d.h. Ziehen von Wurzeln) lösen kann. Der wesentliche Schritt beim Lösen der Gleichung vierten Grades besteht im Zurückführen des Problems auf eine Gleichung dritten Grades. Dies kann man sehr schön an den beiden Kegelschnitten sehen.

Die Idee besteht darin, im Büschel $\lambda C_1 + \mu C_2$ nach einem entarteten Kegelschnitt $C_0 = L \cup M$ zu suchen. Die Schnittpunkte in $C_1 \cap C_2$ sind ja genau die gleichen, wie die Punkte in

$$C_1 \cap C_0 \;=\; C_1 \cap (L \cup M) \;=\; (C_1 \cap L) \cup (C_1 \cap M).$$

Und die Schnittpunkte von C_1 mit den Geraden L und M sind durch quadratische Gleichungen zu ermitteln.

Wie finde ich praktisch einen entarteten Kegelschnitt $C_0 = \lambda C_1 + \mu C_2$? Nun, sei A die Matrix zu C_1 und B die Matrix zu C_2. Dann hat der Kegelschnitt $\lambda C_1 + \mu C_2$ die Matrix

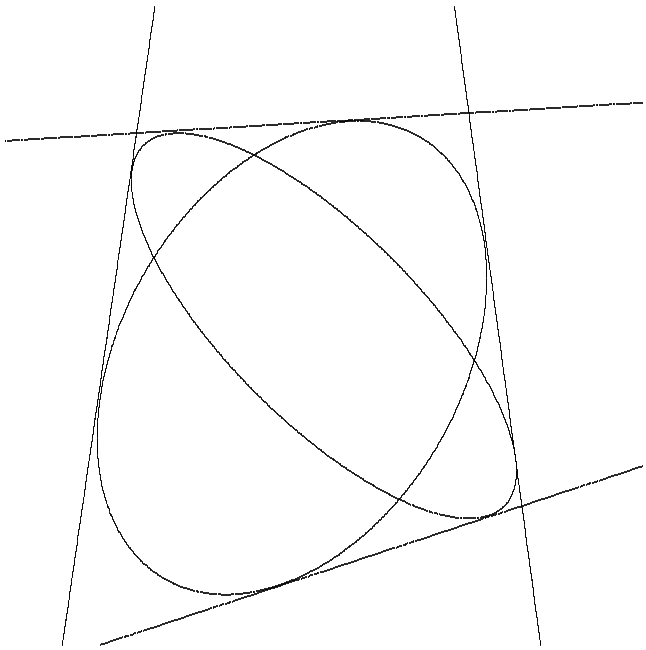
$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{0,0} + \mu b_{0,0} & \lambda a_{0,1} + \mu b_{0,1} & \lambda a_{0,2} + \mu b_{0,2} \\ \lambda a_{1,0} + \mu b_{1,0} & \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} & \lambda a_{1,2} + \mu b_{1,2} \\ \lambda a_{2,0} + \mu b_{2,0} & \lambda a_{2,1} + \mu b_{2,1} & \lambda a_{2,2} + \mu b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen bloß die Determinante dieser 3×3–Matrix auszurechnen. Diese ist eine Art homogen gemachtes charakteristisches Polynom, auf jeden Fall ist sie homogen vom Grad drei in λ, μ. Und wenn wir die Determinante $= 0$ setzen, dann haben wir die versprochene Gleichung dritten Grades.

Den letzten Satz kann man auch dualisieren, falls beide Kegelschnitte C_1 und C_2 nicht entartet sind: Die dualen Kegelschnitte C_1^* und C_2^* im $\mathbb{P}_2^*$ haben dort vier Schnittpunkte, wovon natürlich einige zusammenfallen können. Ein Punkt $L^* \in \mathbb{P}_2^*$ im Durchschnitt $C_1^* \cap C_2^*$ ist dual zu einer Geraden $L \subset \mathbb{P}_3$, die sowohl C_1 als auch C_2 berührt. (Wenn zwei ihrer Schnittpunkte zusammenfallen, berühren sich dort die dualen Kegelschnitte C_1^* und C_2^*. Dual: Die Kegelschnitte

C_1 und C_2 schneiden sich in einem Punkt auf der gemeinsamen Tangente L, d.h., berühren sich in einem Schnittpunkt.) Daraus folgt:

Satz (Doppeltangenten): *Es seien $C_1 \neq C_2 \subset \mathbb{P}_2$ nicht–entartete Kegelschnitte, die sich in vier verschiedenen Punkten schneiden. Dann gibt es vier gemeinsame Tangenten an beide Kegelschnitte.*



Wir ziehen jetzt noch zwei (typische) Folgerungen aus dem Satz über die fünf Punkte.

Satz (Umkehrung des Satzes von Pascal): *Gegeben seien sechs Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{P}_2$, keine drei auf einer Geraden, so, daß die drei Schnittpunkte*

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$$

auf einer Geraden L liegen. Dann gibt es einen Kegelschnitt C, der durch diese sechs Punkte $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}_3$ geht.

Beweis: Nach dem Satz über fünf Punkte gibt es einen Kegelschnitt C, der durch die fünf Punkte $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}_2$ geht. C schneidet die Gerade $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$ in $\mathbf{a}_1$ und in einem weiteren Punkt $\mathbf{b}_3'$. Zu den sechs Punkten $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3' \in C$ gibt eine Pascal–Gerade, auf der die drei Schnittpunkte

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \cap \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3' \cap \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3'$$

Weil $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_3' = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3$ ist, liegen der erste und der dritte dieser Punkte auf der Geraden L. Die Pascal–Gerade stimmt daher mit L überein. Weil $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3'$ die Gerade $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3$ auf L schneidet, stimmt auch $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3'$ mit $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3$ überein, und es ist

$$\mathbf{b}_3' = \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3' \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3' = \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \cap \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3.$$

□

Dual zum Satz über fünf Punkte ist folgende Aussage:

Satz (Fünf Geraden): *Es seien $L_1, ..., L_5 \subset \mathbb{P}_2$ fünf Geraden, keine drei davon durch einen Punkt. Dann gibt es genau einen nicht–entarteten Kegelschnitt C, der diese fünf Geraden berührt.*

Hieraus folgern wir den

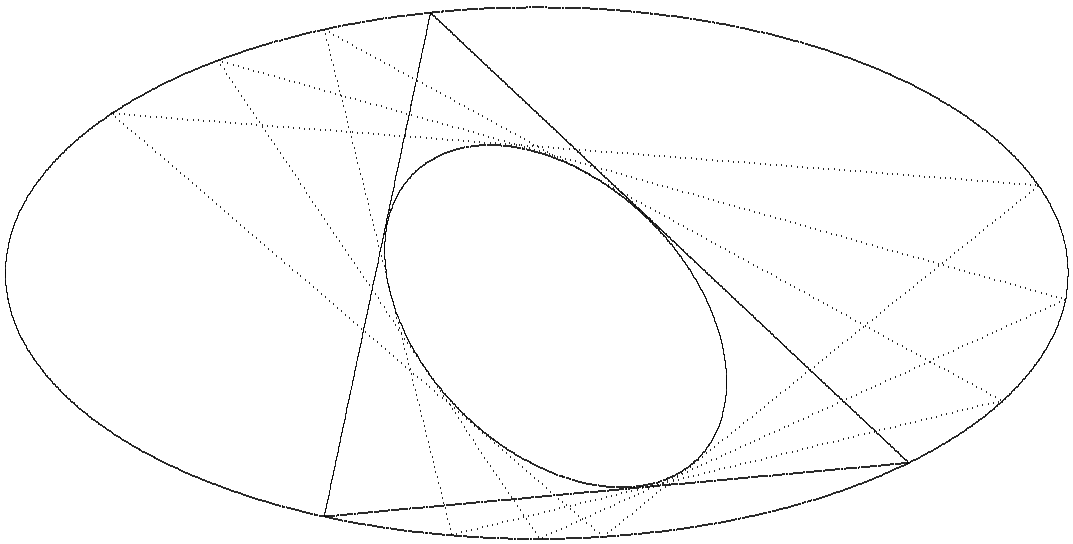
Satz (Porismus von Poncelet): *Das Dreieck $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ sei dem nicht–entarteten Kegelschnitt C einbeschrieben, und dem nicht–entarteten Kegelschnitt D umbeschrieben. (D.h.: die drei Ecken $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ liegen auf C, und die drei Seiten des Dreiecks sind Tangenten an D.) Dann gibt es nicht nur ein einziges solches Dreieck, sondern zu jeden Punkt $\mathbf{b}_1 \in C$ mit*

$\mathbf{b}_1 \notin C \cap D$,

$\mathbf{b}_1$ *nicht auf einer gemeinsamen Tangente von C und D,*

zwei Punkte $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in C$, so, daß das C einbeschriebene Dreieck $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ dem Kegelschnitt D umbeschrieben ist.

Beweis. Sei $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ auf C ein beliebiger Punkt, nicht aus $C \cap D$. Dann gibt es durch $\mathbf{b}_1$ zwei Tangenten an D. Wenn davon keine auch C berührt, hat jede noch einen weiteren Schnittpunkt mit C. Wir nennen diese Punkte $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$. Die beiden Dreiecke $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ sind dem Kegelschnitt C einbeschrieben. Nach dem Korollar am Ende von 4.3 gibt es einen nicht–entarteten Kegelschnitt D', der alle sechs Seiten beider Dreiecke berührt. Fünf davon berührt schon der Kegelschnitt D. Wegen der Eindeutigkeit im Satz über fünf Geraden muß $D = D'$ sein, und D berührt auch die Seite $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$. □



Poncelet bewies diesen Satz in seinem Lehrbuch der Projektiven Geometrie: Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822). An diesem Buch begann er in russischer Kriegsgefangenschaft (in Saratow) zu schreiben. Er war einer der Ingenieure, welche Napoleon auf seinem Rußlandfeldzug begleitet hatten. Er gelangte aber nach Frankreich zurück, und hatte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts großen Einfluß auf die Entwicklung der Projektiven Geometrie. Man kann ihn getrost einen ihrer Väter nennen.

Der Ponceletsche Satz gilt nicht nur für Dreiecke, sondern für Polygone (mit beliebig vielen Ecken), deren Ecken auf einem nichtentarteten Kegelschnitt liegen, und deren Seiten einen anderen nichtentarteten Kegelschnitt berühren. Der Beweis dafür ist allerdings wesentlich tiefer als für Dreiecke. Der Kampf um einen (korrekten) Beweis für diesen allgemeineren Satz war wohl Poncelets mathematisches Lebensthema.

Zwei Umstände machten zur damaligen Zeit das Verständnis dieses Satzes besonders schwer:

1) Oft schneiden sich ja die Polygon-Seiten und der Kegelschnitt nicht, d.h. nicht im Reellen. Für ein systematisches Verständnis der Situation war es unerläßlich, auch Punkte mit komplexen Koordinaten zuzulassen. Und es war damals gar nicht klar, ob das in der Geometrie legitim war. Naja, Poncelet hat es gewagt, und das hat der Geometrie nicht geschadet.

2) Hinter dem Ponceletschen Satz steckt ein Mechanismus, den man mit Methoden der Linearen oder bilinearen Algebra (wie wir heute sagen würden - damals gab es diese Begrife ja nicht) nicht verstehen kann. Im wesentlichen ist der Ponceletsche Satz äquivalent zur Theorie der elliptischen Funktionen. Diese Funktionen kann man ansehen als die allereinfachsten, nichtelementaren Funktionen. Sie wurden um diese Zeit gerade erfunden. Erst 30-40 Jahre später erkannte Cayley den Zusammenhang dieser Funktionen mit Poncelet-Polygonen. Und daß nichttriviale, transzendente Funktionen mit geometrischen Situationen zusammenhängen können, das war eine Erkenntnis, die über Plücker, Riemann, Clebsch, Max Noether und Felix Klein zur Entwicklung der Algebraischen Geometrie führte. Für mich sind deswegen Poncelet-Polygone (oder auch andere geometrische Situationen, welche mit elliptischen Funktionen behandelt werden können) so ziemlich der faszinierendste Teil der Mathematik.

Außerdem kann man Poncelet-Polygone so schön visualisieren. Auf meiner Home-Page können Sie ein Poncelet-Fünfeck zwischen zwei Kreisen laufen sehen. (Natürlich nur wenn es funktioniert.) Ich habe dazu mehrere Diplomanden gebraucht.

Vor drei Jahren habe ich an diese Vorlesung einen zweiten Teil angeschlossen, der die eben angerissenen Gedanken etwas weiter in Richtung Algebraische Geometrie verfolgte. Diese Vorlesung wurde eine ziemliche Katastrophe. Ein guter Grund es jetzt, drei Jahre später nochmal zu versuchen. Ich hatte vor, im Sommer-Semester 1998 eine vierstündige Vorlesung 'Ebene Algebraische Kurven' abzuhalten. (Eine Vorlesung dieses Titels war die erste Vorlesung, welche ich in Erlangen hielt, als ich im Sommer-Semester 1976 hierher kam.) Naja, es kam anders.

Aufgabe 4.18: a) (Desargues, ein weiterer Satz.) Die Punktepaare, in denen die Kegelschnitte eines Büschels eine feste Gerade (nicht durch einen Basispunkt des Büschels) treffen, sind die Paare von Punkten und Bildpunkten einer Involution auf dieser Geraden.
b) Es sei **abcd** ein Viereck in $\mathbb{P}_2$ und $L \subset \mathbb{P}_2$ eine Gerade, nicht durch eine Ecke des Vierecks. Die Paare von Schnittpunkten dieser Geraden mit gegenüberliegenden Seiten des Vierecks seien

$$\begin{array}{ll} \mathbf{p} := L \cap \mathbf{ab} & \mathbf{p}' := L \cap \mathbf{cd} \\ \mathbf{q} := L \cap \mathbf{ac} & \mathbf{q}' := L \cap \mathbf{bd} \\ \mathbf{r} := L \cap \mathbf{ad} & \mathbf{r}' := L \cap \mathbf{bc}. \end{array}$$

Zeigen Sie: Es gibt eine Involution p auf L mit

$$p(\mathbf{p}) = \mathbf{p}', \quad p(\mathbf{q}) = \mathbf{q}', \quad p(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'.$$

Aufgabe 4.19: In jedem Büschel von Kegelschnitten gibt es zwei Kegelschnitte, welche eine feste Gerade (nicht durch einen Basispunkt des Büschels) berühren.

Aufgabe 4.20: Es seien vier Geraden in $\mathbb{P}_2$ gegeben, wovon sich keine drei in einem Punkt schneiden mögen. Zeigen Sie: Die Menge der Kegelschnitte, welche diese vier Geraden berührt, ist im $\mathbb{P}_5$ der Kegelschnitte ein Kegelschnitt. (Soetwas heißt ein duales Büschel. Es macht viel Spaß, wenn man einen Computer dazu bringen kann, Kegelschnitte eines solchen dualen Büschels zu zeichnen.)