Kreise

Wolf P. Barth

Erlangen, Sommersemester 1997

Version vom 8. April 1997

Mathematisches Institut der Universität
Bismarckstr. 1 1/2, D 91054 Erlangen

Inhaltsverzeichnis

1 Ein Kreis **3**
1.1 Die Kreisgleichung 4
1.2 Peripheriewinkel 12
1.3 Inversion am Kreis 16
1.4 Sehnenvierecke und Tangentenvierecke 25

2 Viele Kreise **35**
2.1 Der Raum der Kreise 35
2.2 Kreisbüschel 41
2.3 Polarität im Raum der Kreise 45
2.4 Kreisscharen 51
2.5 Anhang: Ein durchgerechnetes Beispiel 58

3 Zwei Kreise **66**
3.1 Die beiden Ähnlichkeitszentren 66
3.2 Berührkreis-Scharen 72
3.3 Steinersche Kreisketten 79
3.4 Gestänge 88
3.5 Zickzacks 95
3.6 Poncelet-Polygone 103

Noli turbare circulos meos!
Archimedes, 212 v. Chr.

In dieser Vorlesung möchte ich einige Tatsachen aus der Geometrie der Kreise zusammenstellen, die man in der Schule oder in einer Standardvorlesung selten findet. Es gibt einen großen Schatz mehr oder weniger elementarer, mehr oder weniger klassischer Geometrie am Kreis. Seit etwa 100 Jahren zählt diese Geometrie aber nicht mehr zur Mathematik an der Universität, weil hier der Standpunkt dafür zu hoch ist.

Mir liegt daran, dieses Gebiet vor der Vergessenheit zu bewahren. Es ist für jeden Studenten leicht zugänglich, der die Lineare Algebra verstanden hat. Und es enthält viele wunderschöne Tatsachen, die auf jeden an Geometrie Interessierten, trotz des elementaren Niveaus, einen starken Reiz ausüben.

An Quellen benutze ich die folgenden, z.T. sehr alten Bücher:

Coolidge, J.L.: A Treatise on the Circle and the Sphere. Oxford Univ. Press (1916)

Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L.: Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, 6. Auflage (1967)

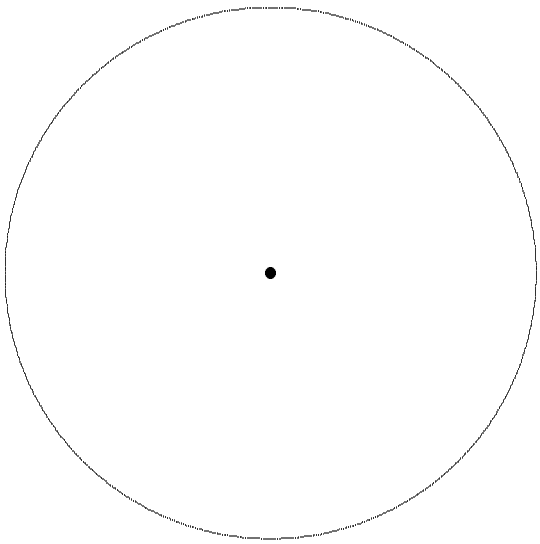
Pedoe, D.: Circles, A Mathematical View. Dover. 2. Auflage (1979)

Salmon, G.: A Treatise on Conic Sections. Longmans, Green and Co. London (1904)

Steiner, J.: Gesammelte Werke. 2. Ausgabe. Chelsea (1971)

Ich habe mir etwas Mühe gegeben, dieses Skriptum auszuarbeiten. Wenn es funktioniert, möchte ich diesen Text gelegentlich als Vorlage für ein Proseminar nutzen. Ich habe nämlich immer große Schwierigkeiten, für Proseminare (auch für Seminare) passende Texte zu finden. Ich wollte auch einmal die neuen Möglichkeiten nützen um vom Computer gezeichnete Bilder in den Text einzuarbeiten. Ich glaube, daß hier noch viel getan werden kann. Ganz habe ich mein Ziel natürlich nicht erreicht. Das anzustrebende Ziel wäre:

In einem Text über Geometrie muß auf jeder Seite ein Bild sein. Jede geometrische Situation muß durch ein gegeignetes Bild illustriert werden. Wenn ich dies hätte verwirklichen wollen, hätte ich viel mehr Zeit gebraucht, als die zwei Monate, die ich mir für dieses Skriptum genommen habe.



1 Ein Kreis

In einer mathematischen Vorlesung, ganz besonders in einer Anfängervorlesung, gibt es eine bestimmte Stoffmenge, die man behandeln muß. Die Reihenfolge, in der man diesen Stoff behandelt, ergibt sich aus der Logik, welche dem Aufbau dieses Gebietes zugrunde liegt. Es gibt Variationsmöglichkeiten: Man kann die Integralrechnung vor der Differentialrechnung behandeln. Man kann die Analysis gleich im $\mathbb{R}^n$ machen oder erst in einer Variablen. Diese Gesichtspunkte ergeben sich meist aus dem persönlichen Verständnis von Didaktik, oder dem Stellenwert, den man der Didaktik im Vergleich zur Reinheit der Lehre beimißt. Ansonsten unterliegt die Reihenfolge des Stoffs, den Erfordernissen des logischen Aufbaus entsprechend strengen Regeln.

Diese Vorlesung verläuft nicht nach dem beschriebenen Schema. Es geht um ein sehr reichhaltiges Stoffgebiet, das meist sehr leicht zu erarbeiten ist. Es gibt unzählig viele Möglichkeiten, diese Art von Geometrie aufzubauen: Ich bevorzuge meist den rechnerischen Zugang. Man könnte genauso gut synthetisch vorgehen, und hier auch wieder das eine oder andere Beweisprinzip bevorzugen, und den Stoff dadurch zu gliedern versuchen. Hier gibt es vielfältige Möglichkeiten, wo man ohne große Schwierigkeiten Individualität demonstrieren kann. So ist denn Geometrie im Lauf der Zeit auch ein Gebiet geworden, bei dem es immer mehr auf den Aufbau und weniger auf die Inhalte ankam. Als Konsequenz wurde das Gebiet immer langweiliger und ist immer mehr aus dem Stoffplan der Schulen verschwunden.

Weil man den Aufbau eh sehr einfach variieren kann, und weil man in dieser Vorlesung sehr oft sagen kann, daß man dies oder jenes ja schon aus der Schule kennt, möchte ich auf den Aufbau des Stoffes hier wenig Wert legen. Deswegen ist mir der logische Aufbau auch für die Gliederung des Vorlesungsinhalts nicht der entscheidende Gesichtspunkt. Wie soll ich

den Vorlesungsinhalt dann aber sonst gliedern? Ich habe mich dafür entschieden, hier nach der Anzahl der Kreise vorzugehen, die bei dem betreffenden Problem interessieren. In diesem ersten Kapitel sammle ich also Material über die Geometrie an *einem* Kreis.

1.1 Die Kreisgleichung

Die euklidische Distanz eines Punktes $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ der Ebene von einem festen Punkt $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ ist

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| = \sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2}.$$

Alle Punkte $\mathbf{x}$, die von $\mathbf{m}$ einen festen Abstand $r > 0$ besitzen, bilden den *Kreis* vom Radius r mit Mittelpunkt $\mathbf{m}$. Weil $r > 0$ und $d(\mathbf{x}, \mathbf{m}) > 0$ positive reelle Zahlen sind, ist die Kreisgleichung

$$\sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2} = r$$

äquivalent mit der quadrierten Gleichung

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2 = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Damit ist der Kreis die Nullstellenmenge des Polynoms

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 - r^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2(m_1 x_1 + m_2 x_2) + m_1^2 + m_2^2 - r^2. \end{aligned}$$

Als erstes stellen wir uns das Problem, die Schnittpunkte des Kreises $K: \ p(\mathbf{x}) = 0$ mit einer Geraden L zu berechnen. Dazu geben wir uns die Gerade in Parameterform

$$L: \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

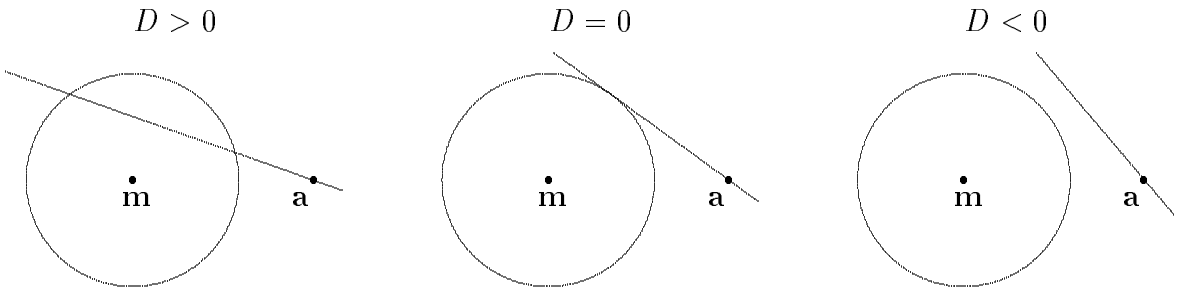
vor. Dann können wir nämlich den Punkt $\mathbf{x} \in L$ einfach in die Kreisgleichung einsetzen. Schnittpunkte sind diejenigen Punkte, deren Parameter t die Gleichung

$$\begin{aligned} p(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) &= \| \mathbf{a} + t\mathbf{v} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 \\ &= t^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 + 2t \cdot (\mathbf{v}.(\mathbf{a} - \mathbf{m})) + \| \mathbf{a} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 \\ &= t^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 + 2t \cdot (\mathbf{v}.(\mathbf{a} - \mathbf{m})) + p(\mathbf{a}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Dies ist eine quadratische Gleichung in t. Sie hat die *Diskriminante*

$$D := (\mathbf{v}.(\mathbf{a} - \mathbf{m}))^2 - p(\mathbf{a}) \cdot \| \mathbf{v} \|^2 .$$

Von der Diskriminante hängt die Anzahl der Lösungen dieser quadratischen Gleichung ab:



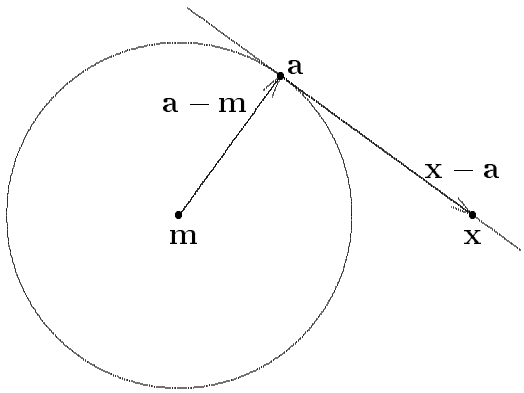
Zwei Schnittpunkte: Sekante | Ein Schnittpunkt: Tangente | Kein Schnittpunkt: Nichts Besonderes

Für einen Punkt $\mathbf{a}$ auf dem Kreis K ist $p(\mathbf{a}) = 0$. Eine Gerade L durch $\mathbf{a} \in K$ mit Richtungsvektor $\mathbf{v}$ ist Tangente, wenn

$$D = (\mathbf{v}.(\mathbf{a} - \mathbf{m})) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{v} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{m}).$$

Durch $\mathbf{a} \in K$ gibt es eine einzige Tangente, und diese steht auf dem Radiusvektor $\mathbf{a} - \mathbf{m}$ senkrecht. Die Gleichung der Tangente an K durch $\mathbf{a} \in K$ ist also

$$((\mathbf{x} - \mathbf{a}).(\mathbf{a} - \mathbf{m})) = 0.$$



Die Gleichung kann man noch etwas übersichtlicher schreiben:

$$\begin{aligned}
((\mathbf{x} - \mathbf{a}).(\mathbf{a} - \mathbf{m})) &= ((\mathbf{x} - \mathbf{m}) - (\mathbf{a} - \mathbf{m}).(\mathbf{a} - \mathbf{m})) \\
&= ((\mathbf{x} - \mathbf{m}).(\mathbf{a} - \mathbf{m})) - \| \mathbf{a} - \mathbf{m} \|^2 \\
&= ((\mathbf{x} - \mathbf{m}).(\mathbf{a} - \mathbf{m})) - r^2 \\
&= (x_1 - m_1)(a_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(a_2 - m_2) - r^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

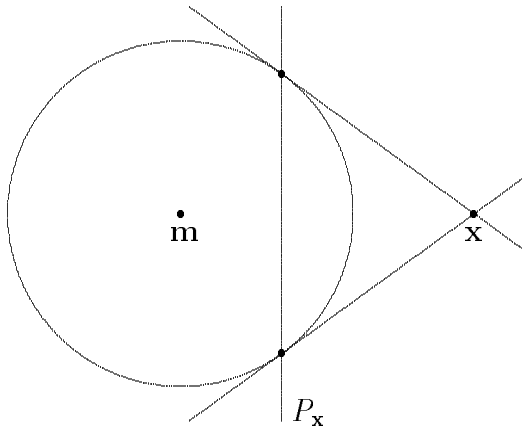
Diese Form der Tangentengleichung

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := (x_1 - m_1)(a_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(a_2 - m_2) - r^2 = 0$$

ist symmetrisch in $\mathbf{x}$ und $\mathbf{a}$. Es liegt nahe, die Rolle von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{a}$ zu vertauschen: Fixieren wir also einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und fassen die letzte Gleichung als Gleichung für $\mathbf{a}$ auf. Die Gleichung ist linear in $\mathbf{a}$ und beschreibt deswegen eine Gerade

$$P_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 0\} \quad \text{mit} \quad P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := ((\mathbf{x}-\mathbf{m}).(\mathbf{y}-\mathbf{m})) - r^2.$$

Diese Gerade heißt die *Polare* des Punktes $\mathbf{x}$ bezüglich des Kreises K. Die Schnittpunkte der Polaren $P_{\mathbf{x}}$ mit K sind genau die Berührpunkte der Tangenten an K durch $\mathbf{x}$.



Wenn $\mathbf{x}$ im Kreisinneren liegt, dann gibt es durch $\mathbf{x}$ keine Tangenten an K. Dann liegt die Polare $P_{\mathbf{x}}$ auch ganz außerhalb des Kreises und schneidet K nicht.

Jede Gerade L, die nicht durch den Kreismittelpunkt geht ist Polare eines eindeutig bestimmten Punktes $\mathbf{p}$: Weil L nicht durch $\mathbf{m}$ geht, können wir die Geradengleichung in der Form

$$c_1(x_1 - m_1) + c_2(x_2 - m_2) - 1 = 0$$

schreiben. Dies ist die Polare des Punktes

$$\mathbf{p} := (m_1 + c_1, m_2 + c_2)/r^2.$$

Die Beziehung zwischen Pol und Polare ist symmetrisch:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (x_1 - m_1)(y_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(y_2 - m_2) - r^2 = P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}).$$

Man kann die Gleichung der Tangenten an den Kreis durch einen Punkt $\mathbf{u}$ außerhalb des Kreises auch explizit angeben. Damit die Formeln nicht zu unübersichtlich werden, möchte ich dies hier aber nur für den Einheitskreis

$$p(\mathbf{x}) = 0, \qquad p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1,$$

machen. Die Polare steht senkrecht auf $\mathbf{u}$, im Abstand $1/\parallel \mathbf{u} \parallel$ vom Kreiszentrum. Um sie zu parametrisieren definieren wir den Vektor

$$\mathbf{u}^{\perp} := (u_2, -u_1).$$

Dann ist

$$P_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|^2} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}^{\perp}.$$

Die Schnittpunkte der Polare mit dem Kreis sind $\mathbf{u}/ \| \mathbf{u} \|^2 + t \cdot \mathbf{u}^{\perp}$ mit

$$\| \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|^2} + t \cdot \mathbf{u}^{\perp} \|^2 = \frac{1}{\| \mathbf{u} \|^2} + t^2 \| \mathbf{u} \|^2 = 1.$$

Also erhalten wir

$$t^2 \| \mathbf{u} \|^2 = 1 - \frac{1}{\| \mathbf{u} \|^2} = \frac{p(\mathbf{u})}{\| \mathbf{u} \|^2}, \quad t = \pm \frac{\sqrt{p(\mathbf{u})}}{\| \mathbf{u} \|^2}$$

und die Berührpunkte der Tangenten sind

$$\frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|^2} \pm \sqrt{p(\mathbf{u})} \frac{\mathbf{u}^{\perp}}{\| \mathbf{u} \|^2}.$$

Die Tangenten, die Geraden durch $\mathbf{u}$ und diese Berührpunkte, haben dann die Gleichungen

$$T^{\pm}(\mathbf{x}) := \left((\mathbf{u} \pm \sqrt{p(\mathbf{u})}) \cdot \mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x} \right) - \| \mathbf{u} \|^2 = 0.$$

Um diese Gleichungen anzugeben, mußten wir eine Wurzel ziehen, was dann auf zwei Vorzeichen und die zwei Tangenten führte. Das kann man vermeiden, wenn man nicht beide Tangenten separat angibt, sondern das Produkt ihrer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
T^{+}(\mathbf{x}) \cdot T^{-}(\mathbf{x}) &= \left((\mathbf{u}.\mathbf{x}) - \| \mathbf{u} \|^2 + \sqrt{p(\mathbf{u})} (\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x}) \right) \cdot \left((\mathbf{u}.\mathbf{x}) - \| \mathbf{u} \|^2 - \sqrt{p(\mathbf{u})} (\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x}) \right) \\
&= \left((\mathbf{u}.\mathbf{x}) - \| \mathbf{u} \|^2 \right)^2 - p(\mathbf{u}) (\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x})^2 \\
&= (\mathbf{u}.\mathbf{x})^2 - (\| \mathbf{u} \|^2 - 1)(\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x})^2 - 2 \| \mathbf{u} \|^2 (\mathbf{u}.\mathbf{x}) + \| \mathbf{u} \|^4 \\
&= \underbrace{(\mathbf{u}.\mathbf{x})^2 + (\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x})^2}_{= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{x} \|^2} - \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \left((\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x})^2 + 2(\mathbf{u}.\mathbf{x}) - \| \mathbf{u} \|^2 \right) \\
&= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \left(\| \mathbf{x} \|^2 - (\mathbf{u}^{\perp}.\mathbf{x})^2 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{x}) + \| \mathbf{u} \|^2 \right) \\
&= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \left(\| \mathbf{x} \|^2 - (\| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{x} \|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{x})^2) - 2(\mathbf{u}.\mathbf{x}) + \| \mathbf{u} \|^2 \right) \\
&= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \left((\mathbf{u}.\mathbf{x})^2 - 2(\mathbf{u}.\mathbf{x}) + 1 - \| \mathbf{u} \|^2 \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{x} \|^2 + 1 \right) \\
&= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \left(((\mathbf{u}.\mathbf{x}) - 1)^2 - (\| \mathbf{u} \|^2 - 1)(\| \mathbf{x} \|^2 - 1) \right) \\
&= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \left(P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{u}) \cdot p(\mathbf{x}) \right).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung

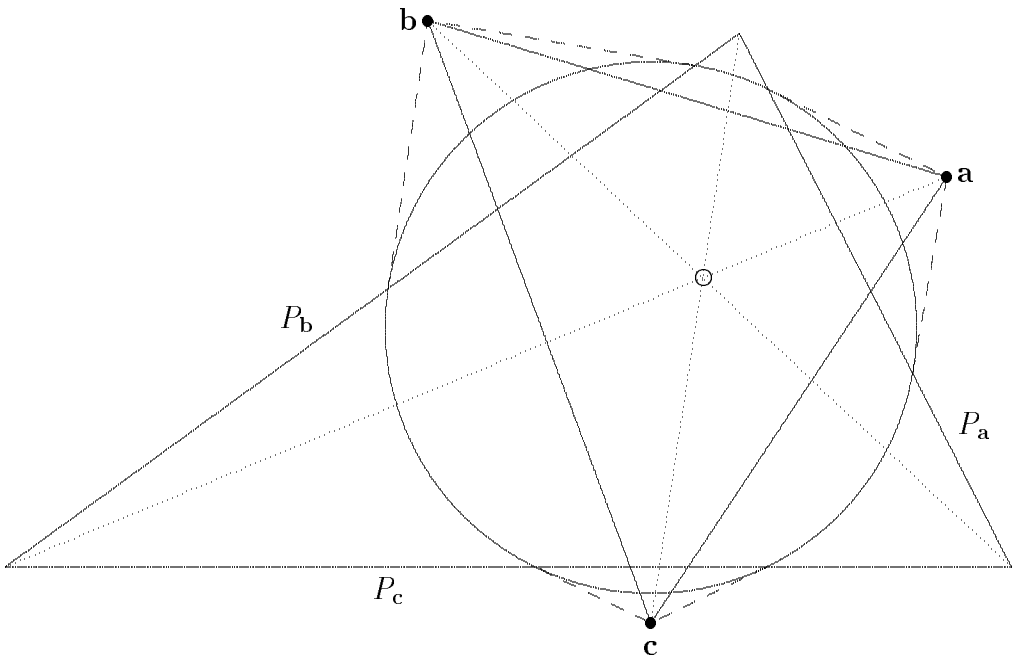
$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{u}) p(\mathbf{x}) = 0$$

für das Produkt der beiden Kreistangenten durch $\mathbf{u}$ hat jetzt eine Form, die sich bei Bewegungen der Ebene und bei Streckungen nicht ändert. Sie ist deswegen gültig für alle Kreise $p(\mathbf{x}) = 0$, nicht notwendig im Ursprung zentriert, und nicht notwendig vom Radius 1.

Ist ein Dreieck mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gegeben, so nennt man das Dreieck mit den Seiten $P_\mathbf{a}, P_\mathbf{b}, P_\mathbf{c}$ das zugehörige *Polardreieck*. Der Eckpunkt $\mathbf{c}' := P_\mathbf{a} \cap P_\mathbf{b}$ des Polardreiecks ist polar zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$:

$$P_\mathbf{a}(\mathbf{c}') = P_\mathbf{b}(\mathbf{c}') = 0.$$

Deswegen ist die Dreiecksseite $\mathbf{ab}$ die Polare $P_{\mathbf{c}'}$. Die Beziehung zwischen Dreieck und Polardreieck ist symmetrisch: Das ursprüngliche Dreieck $\mathbf{abc}$ ist das Polardreieck zu $\mathbf{a'b'c'}$, wo $\mathbf{b}' = P_\mathbf{a} \cap P_\mathbf{c}$ und $\mathbf{a}' = P_\mathbf{b} \cap P_\mathbf{c}$.



Satz (Polardreiecke): *Ein Dreieck und sein Polardreieck sind perspektiv, d.h., die Verbindungsgeraden* $\mathbf{aa}'$, $\mathbf{bb}'$ *und* $\mathbf{cc}'$ *gehen durch einen Punkt.*

Beweis. Jede Gerade durch $\mathbf{c}' = P_\mathbf{a} \cap P_\mathbf{b}$ hat eine Gleichung

$$C(\mathbf{x}) = \lambda P_\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mu P_\mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0.$$

Diese Gerade geht durch $\mathbf{c}$, wenn $C(\mathbf{c}) = 0$. Das ist z.B. für $\lambda := P_\mathbf{b}(\mathbf{c})$ und $\mu := -P_\mathbf{a}(\mathbf{c})$ der Fall. Deswegen ist

$$C(\mathbf{x}) := P_\mathbf{b}(\mathbf{c}) \cdot P_\mathbf{a}(\mathbf{x}) - P_\mathbf{a}(\mathbf{c}) \cdot P_\mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$$

eine Gleichung für die Gerade $\mathbf{cc}'$. Genauso finden wir Gleichungen für die Verbindungsgeraden $\mathbf{aa}'$ und $\mathbf{bb}'$:

$$A(\mathbf{x}) := P_\mathbf{c}(\mathbf{a}) \cdot P_\mathbf{b}(\mathbf{x}) - P_\mathbf{b}(\mathbf{a}) \cdot P_\mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0,$$
$$B(\mathbf{x}) := P_\mathbf{a}(\mathbf{b}) \cdot P_\mathbf{c}(\mathbf{x}) - P_\mathbf{c}(\mathbf{b}) \cdot P_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0.$$

Aus den Symmetrieen

$$P_\mathbf{a}(\mathbf{b}) = P_\mathbf{b}(\mathbf{a}), \quad P_\mathbf{b}(\mathbf{c}) = P_\mathbf{c}(\mathbf{b}), \quad P_\mathbf{c}(\mathbf{a}) = P_\mathbf{a}(\mathbf{c})$$

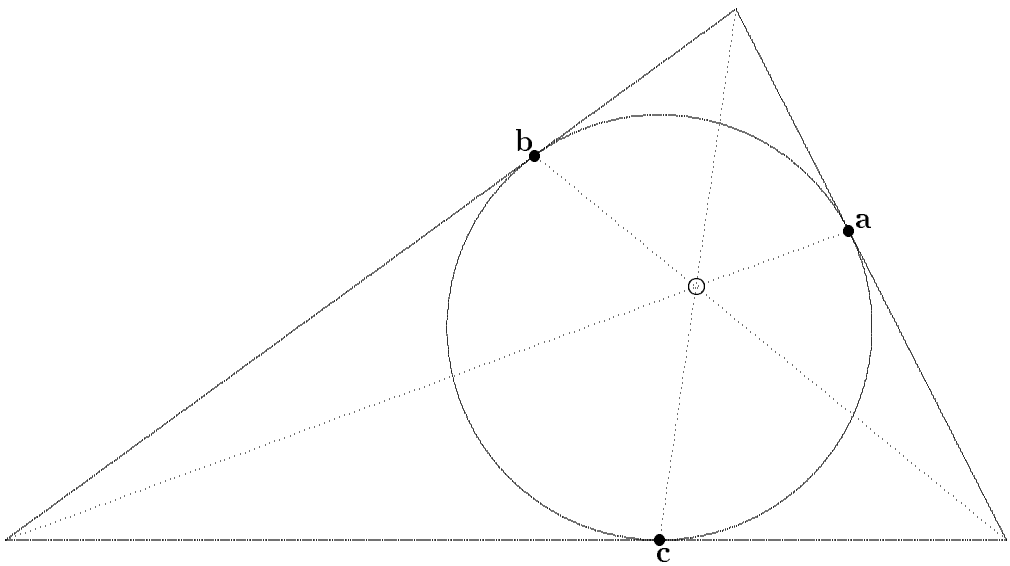
folgt

$$A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

Deswegen geht die Gerade $C(\mathbf{x}) = 0$ durch den Schnittpunkt $A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) = 0$ der beiden anderen Geraden. □

Man kann die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ insbesondere auf dem Kreis K selbst wählen. Die Polaren sind dann die Tangenten an den Kreis, und der Kreis ist der Inkreis des Dreiecks $\mathbf{a'b'c'}$. Man findet den

Satz (Berührpunkte des Inkreises): *Verbindet man jede Ecke eines Dreiecks mit dem Berührpunkt des Inkreises auf der Gegenseite, so treffen sich diese drei Verbindungslinien in einem Punkt.*



Sehen wir uns die Gleichung für die Schnittpunkte des Kreises K mit der Geraden $L: \mathbf{a}+t\cdot\mathbf{v}$ noch einmal an, und zwar für den Fall, daß der Richtungsvektor $\mathbf{v}$ auf Länge $\| \mathbf{v} \| = 1$ normiert ist. Dann lautet diese Gleichung

$$t^2 + 2t \cdot (\mathbf{v}.(\mathbf{a} - \mathbf{m})) + p(\mathbf{a}) = 0.$$

Nach dem Satz von Vieta gilt für ihre beiden Lösungen t_1 und t_2 (falls sie reell sind, aber natürlich auch wenn sie komplex sind, nur interessiert es uns dann nicht):

$$t_1 \cdot t_2 = p(\mathbf{a}) = \| \mathbf{a} - \mathbf{m} \|^2 - r^2.$$

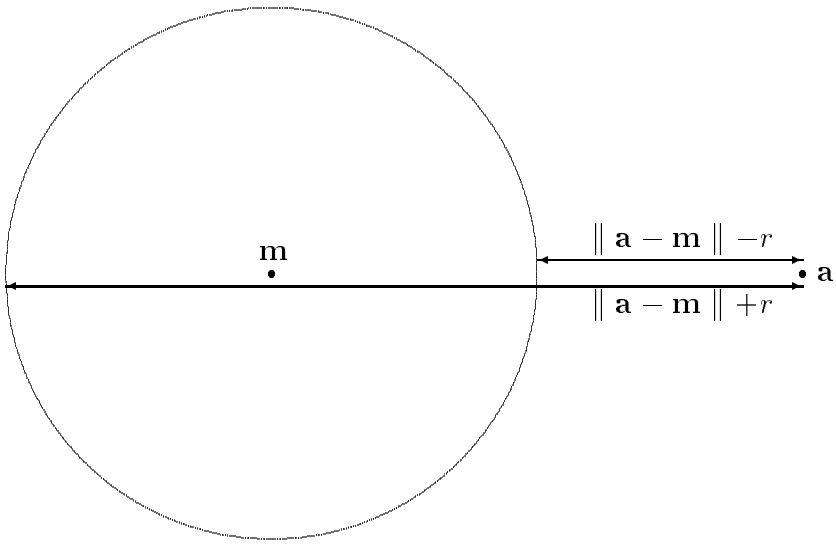
Die Zahlen t_1 und t_2 sind genau die Längen der Vektoren $t_1 \cdot \mathbf{v}$ und $t_2 \cdot \mathbf{v}$, die den festen Punkt $\mathbf{a}$ mit den beiden Schnittpunkten $\mathbf{a} + t_i \cdot \mathbf{v}$ von K und L verbinden. Genauer: Es sind die mit Vorzeichen versehenen Längen: positiv, wenn der Schnittpunkt in Richtung von $\mathbf{v}$ liegt, und negativ, wenn er in der anderen Richtung liegt. Das Produkt der so orientierten *Sekantenabschnitte* ist gleich dem Wert $p(\mathbf{a})$ der Kreisgleichung im Punkt $\mathbf{a}$. Das Bemerkenswerte ist, daß dies gilt unabhängig von der Richtung der Geraden L durch $\mathbf{a}$. Dies ist der

Sekanten-Abschnitts-Satz: *Es sei* $K: p(\mathbf{x}) = 0$ *ein Kreis und* $\mathbf{a}$ *ein fester Punkt. Dann gilt für jede Sekante* L *durch* $\mathbf{a}$*: Das Produkt der (orientierten) Abstände von* $\mathbf{a}$ *zu den beiden Schnittpunkten der Sekante mit* K *ist gleich* $p(\mathbf{a})$*, unabhängig von der Wahl von* L*.*

Dieses Produkt ist negativ, wenn die beiden Schnittpunkte auf L von $\mathbf{a}$ aus gesehen in verschiedener Richtung liegen. Dann ist $p(\mathbf{a}) < 0$ und $\mathbf{a}$ liegt im Inneren des Kreises. Falls $\mathbf{a}$ im Äußeren des Kreises liegt, ist $p(\mathbf{a}) > 0$ und beide Schnittpunkte liegen von $\mathbf{a}$ aus gesehen in der gleichen Richtung.

Am klarsten wird der Sekanten-Abschnitts-Satz in dem Fall, daß die Sekante ein Durchmesser ist, d.h., wenn die Sekante durch den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ des Kreises geht: Die beiden Sekantenabschnitte sind $\| \mathbf{a} - \mathbf{m} \| + r$ und $\| \mathbf{a} - \mathbf{m} \| - r$, und ihr Produkt ist

$$(\| \mathbf{a} - \mathbf{m} \| + r) \cdot (\| \mathbf{a} - \mathbf{m} \| - r) = \| \mathbf{a} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 = p(\mathbf{a}).$$



Für den Fall daß wir keine Sekante, sondern eine Tangente L haben, fallen die beiden Lösungen t_1 und t_2 der quadratischen Gleichung zusammen. Aber auch dann gilt der Satz von Vieta. Daraus erhalten wir den

Sekanten-Tangenten-Abschnitts-Satz: *Es sei* K *ein Kreis und* $\mathbf{a}$ *ein fester Punkt im Äußeren des Kreises. Das Quadrat* t^2 *des Abstands* t *von* $\mathbf{a}$ *zu den beiden Berührpunkten der Tangenten an* K *durch* $\mathbf{a}$ *ist gleich dem Produkt* $p(\mathbf{a})$ *der Sekantenabschnitte auf allen Sekanten durch* $\mathbf{a}$*.*

Der Sekanten-Abschnittssatz und der Sekanten-Tangenten-Abschnittssatz lassen sich folgendermaßen umkehren:

Satz (Vier Punkte auf einem Kreis): *a) Es seien* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1$ *und* $\mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^2$ *vier Punkte. Keine drei davon mögen auf einer Geraden liegen. Die Geraden* $L: \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ *und* $M: \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ *seien nicht parallel. Diese vier Punkte liegen genau dann alle auf einem Kreis, wenn für ihre orientierten Abstände zum Schnittpunkt* $\mathbf{a}$ *der Geraden* L *und* M *gilt:*

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 \| = \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_2 \| .$$

b) Es seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ *und* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ *drei Punkte nicht auf einer Geraden. Weiter sei* M *eine Gerade durch* $\mathbf{y}$*, nicht parallel zur Geraden* $L : \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$*. Der Kreis durch die drei Punkte* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ *und* $\mathbf{y}$ *berührt genau dann die Gerade* M*, wenn für ihre orientierten Abstände zum Schnittpunkt* $\mathbf{a} := L \cap M$ *gilt:*

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 \| = \| \mathbf{a} - \mathbf{y} \|^2 .$$

Beweis. a) Weil $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{y}_1$ nicht auf einer Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis K durch diese drei Punkte. Es sei $\mathbf{y}'$ der zweite Schnittpunkt von K mit der Geraden M. Aus der Voraussetzung und dem Sekanten-Abschnitts-Satz folgt

$$\begin{aligned} \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_2 \| &= \| \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 \| \\ &= \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{y}' \| \\ \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_2 \| &= \| \mathbf{a} - \mathbf{y}' \| \end{aligned}$$

Die Punkte $\mathbf{y}_2$ und $\mathbf{y}'$ auf M haben also von $\mathbf{a} \in M$ denselben Abstand. Weil wir die Abstände mit Vorzeichen genommen haben, liegen diese beiden Punkte auch auf derselben Seite von $\mathbf{a}$. Deswegen müssen beide Punkte übereinstimmen und es folgt $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}' \in K$.

b) In diesem Fall verläuft der Beweis ganz analog zu a), nur wird der Sekanten-Tangenten-Abschnitts-Satz verwendet. □

Definition: Es sei K ein Kreis mit der Gleichung

$$p(\mathbf{x}) = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 - r^2 = 0.$$

Dann heißt die für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ definierte Zahl $p(\mathbf{x})$ die *Potenz* des Punktes $\mathbf{x}$ in Bezug auf den Kreis K.

Die Potenz $p(\mathbf{x})$ ist also nichts anderes, als die Ortsfunktion p, welche den Kreis definiert, ausgewertet im Punkt $\mathbf{x}$. Für diese Funktion gilt die folgende Version der Polarisationsformel:

Satz (Polarisationsformel): $p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 + 2P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$.

Beweis.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 \\ &= \| \mathbf{x} \|^2 - 2(\mathbf{m}, \mathbf{x}) + \| \mathbf{m} \|^2 - r^2, \\ p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}) &= \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 - 2(\mathbf{m}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{m}, \mathbf{y}) + 2(\| \mathbf{m} \|^2 - r^2) \\ &= \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 + 2\left((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{m}, \mathbf{x}) - (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + \| \mathbf{m} \|^2 - r^2\right) \\ &= \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 + 2(\mathbf{x} - \mathbf{m}, \mathbf{y} - \mathbf{m}) - r^2) \\ &= \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 + 2P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

□

Definition. Zwei Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ heißen in Bezug auf den Kreis *konjugiert*, wenn

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Korollar zur Polarisationsformel: *Für zwei konjugierte Punkte* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *ist*

$$p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 .$$

1.2 Peripheriewinkel

Der Peripherie-Winkel-Satz aus der Schule lautet: Über der gleichen Sehne eines Kreises liegen gleiche Winkel. Dieser Satz ist im Wesentlichen nur eine Umformulierung des Sekanten-Abschnitts-Satzes. Formulieren wir diesen Satz etwas ausführlicher:

Satz (Peripherie-Winkel): *Es seien* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2$ *und* $\mathbf{y}_1$ *vier verschiedene Punkte, die (in dieser Reihenfolge) auf einem Kreis liegen. Dann ist*

$$\measuredangle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1 = \measuredangle \mathbf{x}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_1.$$

Beweis. Wenn die Sehnen $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ parallel sind, sind sie Seiten eines Trapezes, das spiegelsymmetrisch zum Kreisdurchmesser liegt, der auf beiden Sehnen senkrecht steht. Dann ist die Aussage ziemlich elementar.

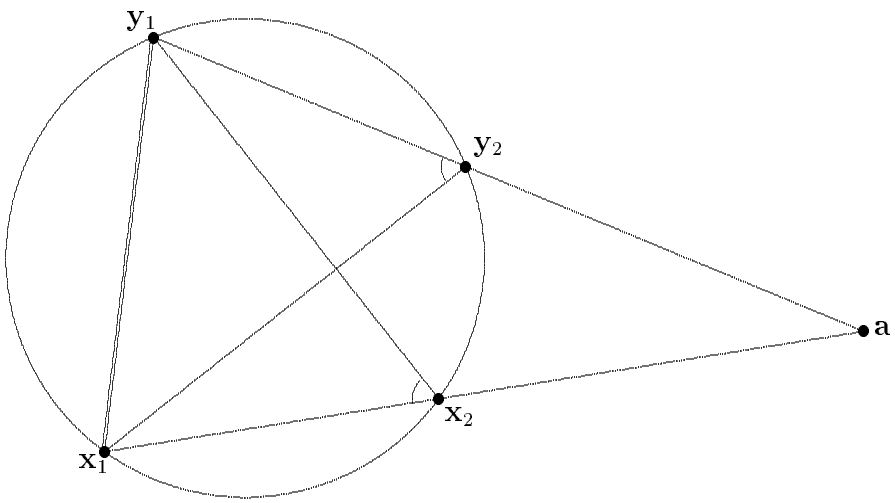
Nehmen wir also an, beide Sehnen seien nicht parallel, und sei $\mathbf{a}$ ihr Schnittpunkt. Die Dreiecke $\Delta\mathbf{x}_1\mathbf{a}\mathbf{y}_2$ und $\mathbf{y}_1\mathbf{a}\mathbf{x}_2$ haben den Winkel bei $\mathbf{a}$ gemeinsam. Aus dem Sekanten-Abschnitts-Satz folgt für ihre Seiten

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 \| = \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_1 \| \cdot \| \mathbf{a} - \mathbf{y}_2 \| .$$

Daraus erhalten wir die Proportionen

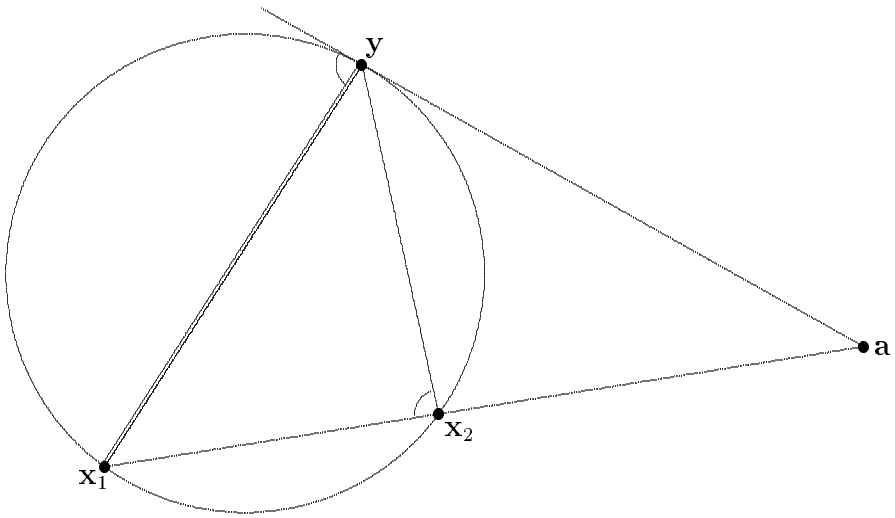
$$\frac{\| \mathbf{a} - \mathbf{x}_1 \|}{\| \mathbf{a} - \mathbf{y}_2 \|} = \frac{\| \mathbf{a} - \mathbf{y}_1 \|}{\| \mathbf{a} - \mathbf{x}_2 \|}.$$

Also sind beide Dreiecke ähnlich. Unter der Ähnlichkeit entsprechen sich die Nebenwinkel unserer beiden Peripherie-Winkel. Also sind beide Peripheriewinkel gleich. □



Fallen die beiden Punkte $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$ zusammen, muß man ihre Sekante durch die Tangente ersetzen:

Satz (Peripherie- und Tangentenwinkel): *Es seien* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ *und* $\mathbf{y}$ *drei verschiedene Punkte auf einem Kreis. Dann ist der Peripheriewinkel* $\angle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}$ *gleich dem Sekanten-Tangentenwinkel an die Sekante* $\mathbf{x}_1\mathbf{y}$ *auf der dem Punkt* $\mathbf{x}_2$ *abgewandten Seite.*



Diese Aussage folgt genauso aus dem Sekanten-Tangenten-Abschnitts-Satz, wie der Peripheriewinkel-Satz aus dem Sekanten-Abschnitts-Satz. □

Eine Sekante teilt den Kreis in zwei komplemetäre Kreisbögen. In jedem der beiden Kreisbögen sind die Peripheriewinkel alle gleich. Und sie sind auch gleich dem entsprechenden Winkel zwischen der Sehne und der Kreistangente im Schnittpunkt von Sehne und Kreis. Die beiden Winkel zwischen Sehne und Tangente sind aber komplementär, sie ergänzen sich zu π (Nebenwinkel). Daraus folgt der

Satz (Komplementäre Peripheriewinkel): *Die Peripheriewinkel in den beiden komplementären Kreisbögen zu einer Sekante ergänzen sich zur Summe* π*.*

Geht die Sekante insbesondere durch den Kreismittelpunkt, so gehen die komplementären Kreisbögen durch Spiegelung an der Sekante ineinander über. Die komplementären Peripheriewinkel müssen also gleich sein. Dann sind sie alle gleich $\pi/2$. Das ist der Satz vom *Thaleskreis*: über einem Durchmesser eines Kreises liegen als Peripheriewinkel lauter rechte Winkel.

Genauso wie den Sekanten-Abschnitts-Satz kann man auch den Peripheriewinkel-Satz umkehren:

Satz (Vier Punkte auf einem Kreis): *a) Es seien* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2$ *und* $\mathbf{y}_1$ *vier Punkte, so, daß die Winkel*

$$\angle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1 = \angle \mathbf{x}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_1$$

übereinstimmen. Dann liegen diese vier Punkte auf einem Kreis.

b) Es seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ *und* $\mathbf{y}$ *drei Punkte, und* L *eine Gerade durch* $\mathbf{y}$ *so, daß der Winkel* $\angle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}$ *mit dem Winkel zwischen den Geraden* $\mathbf{x}_1\mathbf{y}$ *und* L *(auf der dem Punkt* $\mathbf{x}_2$ *abgewandten Seite) übereinstimmt. Dann berührt der Kreis durch* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}$ *die Gerade* L *in* $\mathbf{y}$*.*

Beweis. a) Es sei K der Kreis durch $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{y}_1$. Der zweite Schnittpunkt von K mit der Geraden $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ sei $\mathbf{y}'$. Dann ist der Peripheriewinkel $\mathbf{x}_1\mathbf{y}'\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1$ nach Voraussetzung gleich dem Winkel $\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_1$. Daraus folgt

$$\angle \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2 = \angle \mathbf{y}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}'.$$

Deswegen liegen $\mathbf{y}_2$ und $\mathbf{y}'$ auf derselben Geraden durch $\mathbf{x}_1$. Dann müssen beide Punkte als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ übereinstimmen.

b) Der Beweis dieser Aussage verläuft ähnlich. □

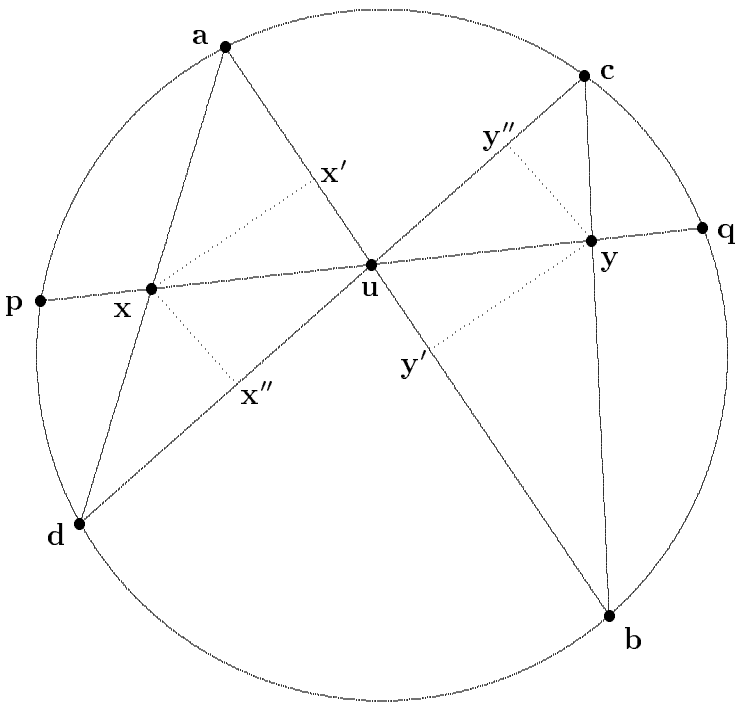
Vier Punkte bilden die Ecken eines Vierecks (ebenso, wie drei Punkte die Ecken eines Dreiecks). Liegen die vier Ecken eines Vierecks auf einem Kreis, so nennt man das Viereck ein *Sehnenviereck*. (Die drei Ecken eines Dreiecks liegen immer auf einem Kreis.) Die Umkehrungen des Sekanten-Abschnitts-Satzes und des Peripheriewinkel-Satzes kann man als Charakterisierungen von Sehnenvierecken auffassen. Viel häufiger trifft man aber auf die folgende Charakterisierung:

Satz (Sehnenvierecke): *Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich die gegenüberliegenden Winkelpaare zur Summe π ergänzen.*

Beweis. Das Viereck werde gebildet von den vier Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ mit ihren Winkeln α, β, γ und δ. Die Voraussetzung ist

$$\alpha + \gamma = \pi.$$

Die drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ können nicht auf einer Geraden liegen. (Denn lägen sie, etwa in dieser Reihenfolge, auf einer Geraden, dann wäre $\beta = \pi$, $\delta = 0$ und irgendwie geht das nicht.) Es gibt also einen Kreis K durch diese drei Punkte. Über der Sehne $\mathbf{ac}$ dieses Kreises liegt auf der Seite von $\mathbf{b}$ der Peripheriewinkel β und auf der anderen Seite der Komplementärwinkel $\pi - \beta = \delta$. Das ist aber auch der Winkel $\mathbf{cda}$. Aus dem letzten Satz folgt, daß dann $\mathbf{d}$ auch auf dem Kreis K legen muß. □



Zum Abschluß dieses Paragraphen möchte ich als Anwendung des Peripheriewinkel-Satzes einen Satz beweisen, der den schönen Namen 'Schmetterlings-Satz' trägt (Coxeter-Greitzer, p.45), mir aber sonst noch nirgends begegnet ist.

Satz (vom Schmetterling): *Es seien* $\mathbf{p}$ *und* $\mathbf{q} \in K$ *zwei Punkte auf einem Kreis* K *und* $\mathbf{u}$ *der Mittelpunkt der Sehne* $S = \mathbf{pq}$ *durch diese Punkte. Sind* $\mathbf{ab}$ *und* $\mathbf{cd}$ *zwei weitere Sehnen durch diesen Mittelpunkt* $\mathbf{u}$*, und* $X := \mathbf{ad}$ *sowie* $Y := \mathbf{bc}$ *die Verbindungsgeraden mit den Schnittpunkten* $\mathbf{x} := X \cap S$*, bzw.* $\mathbf{y} := Y \cap S$*, so ist* $\mathbf{u}$ *auch der Mittelpunkt der Strecke* $\mathbf{xy}$*.*

Beweis. Wir fällen Lote

vom Punkt	auf die Gerade	mit Fußpunkt
$\mathbf{x}$	$\mathbf{ab}$	$\mathbf{x}'$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{cd}$	$\mathbf{x}''$
$\mathbf{y}$	$\mathbf{ab}$	$\mathbf{y}'$
$\mathbf{y}$	$\mathbf{cd}$	$\mathbf{y}''$

Die folgenden vier Dreieckspaare sind ähnlich, weil sie gleiche Winkel haben (beim dritten Paar benutzen wir den Peripheriewinkel-Satz in den Punkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$, und beim vierten Paar in den Punkten $\mathbf{d}$ und $\mathbf{b}$):

ähnliche Dreiecke		$\Longrightarrow$	Proportionen
$\mathbf{uxx}'$	$\mathbf{uyy}'$		$\dfrac{\parallel \mathbf{u}-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{u}-\mathbf{y} \parallel} = \dfrac{\parallel \mathbf{x}'-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{y}'-\mathbf{y} \parallel}$
$\mathbf{uxx}''$	$\mathbf{uyy}''$		$\dfrac{\parallel \mathbf{u}-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{u}-\mathbf{y} \parallel} = \dfrac{\parallel \mathbf{x}''-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{y}''-\mathbf{y} \parallel}$
$\mathbf{axx}'$	$\mathbf{cyy}''$		$\dfrac{\parallel \mathbf{x}'-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{y}''-\mathbf{y} \parallel} = \dfrac{\parallel \mathbf{a}-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{c}-\mathbf{y} \parallel}$
$\mathbf{dxx}''$	$\mathbf{byy}'$		$\dfrac{\parallel \mathbf{x}''-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{y}'-\mathbf{y} \parallel} = \dfrac{\parallel \mathbf{d}-\mathbf{x} \parallel}{\parallel \mathbf{b}-\mathbf{y} \parallel}$

Wir setzen zur Abkürzung

$$a := \parallel \mathbf{u}-\mathbf{p} \parallel = \parallel \mathbf{u}-\mathbf{q} \parallel, \quad x := \parallel \mathbf{u}-\mathbf{x} \parallel, \quad y := \parallel \mathbf{u}-\mathbf{y} \parallel$$

und folgern aus den angegebenen Proportionen unter Anwendung des Sekanten-Abschnitts-Satzes

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{\parallel \mathbf{x}-\mathbf{x}' \parallel}{\parallel \mathbf{y}-\mathbf{y}' \parallel} \cdot \frac{\parallel \mathbf{x}-\mathbf{x}'' \parallel}{\parallel \mathbf{y}-\mathbf{y}'' \parallel} \\ &= \frac{\parallel \mathbf{x}-\mathbf{x}' \parallel}{\parallel \mathbf{y}-\mathbf{y}'' \parallel} \cdot \frac{\parallel \mathbf{x}-\mathbf{x}'' \parallel}{\parallel \mathbf{y}-\mathbf{y}' \parallel} \\ &= \frac{\parallel \mathbf{x}-\mathbf{a} \parallel \cdot \parallel \mathbf{x}-\mathbf{d} \parallel}{\parallel \mathbf{y}-\mathbf{c} \parallel \cdot \parallel \mathbf{y}-\mathbf{b} \parallel} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\| \mathbf{x}-\mathbf{p} \| \cdot \| \mathbf{x}-\mathbf{q} \|}{\| \mathbf{y}-\mathbf{p} \| \cdot \| \mathbf{y}-\mathbf{q} \|} \\
&= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} \\
&= \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir mit den Nennern der Brüche erweitern, sehen wir

$$
\begin{aligned}
x^2(a^2-y^2) &= y^2(a^2-x^2) \\
x^2 \cdot a^2 &= y^2 \cdot a^2 \\
x^2 &= y^2.
\end{aligned}
$$

Weil x und $y > 0$ sind, folgt daraus $x = y$. □

1.3 Inversion am Kreis

Die Inversion am Einheitskreis

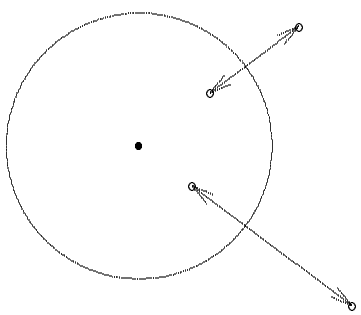
$$E: \; x^2 + y^2 = 1$$

ist die Abbildung

$$I: \; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \frac{1}{\| \mathbf{x} \|^2}\mathbf{x}.$$

Der Bildpunkt $\mathbf{x}'$ liegt auf demselben Strahl $\mathbb{R}^+ \cdot \mathbf{x}$ durch den Nullpunkt, wie der Punkt $\mathbf{x}$. Die Entfernung $\| \mathbf{x}' \|$ des Bildpunkts vom Nullpunkt ist das Inverse $1/\| \mathbf{x} \|$ der Entfernung $\| \mathbf{x} \|$ des Punktes $\mathbf{x}$ vom Nullpunkt:

$$\| \mathbf{x}' \| \cdot \| \mathbf{x} \| = \| \frac{1}{\| \mathbf{x} \|^2}\mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{x} \| = \frac{\| \mathbf{x} \|^2}{\| \mathbf{x} \|^2} = 1.$$



Die Punkte auf dem Einheitskreis sind ihre eigenen Bildpunkte:

$$\| \mathbf{x} \| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}.$$

Der Nullpunkt $\mathbf{0}$ hat unter dieser Inversion kein Bild.

Die Inversion an einem beliebigen Kreis

$$K : \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2 = r^2$$

ist die Abbildung

$$I_K : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{m} + \frac{r^2}{\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}).$$

Die folgenden Eigenschaften der Inversion I_K sind sofort einsichtig:

Satz (Elementare Eigenschaften der Inversion): *a) Die Inversion ist definiert für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{m}$.

b) Die Inversion ist eine Involution: $I_K \circ I_K = id$.

c) Die Halbstrahlen $\mathbf{m} + \mathbb{R}^+(\mathbf{x} - \mathbf{m})$ *durch das Kreiszentrum werden auf sich abgebildet.*

d) Für die Abstände des Punktes $\mathbf{x}$ *und seines Bildpunktes* $\mathbf{x}' = I_K(\mathbf{x})$ *vom Kreiszentrum gilt*

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \| = r^2.$$

e) Die Punkte des Kreises K *werden in sich abgebildet.*

Beweis. Eigenschaft a) ist klar. Als nächstes zeigen wir d):

$$\begin{aligned} \| I_K(\mathbf{x}) - \mathbf{m} \| &= \| \frac{r^2}{\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \| \\ &= \frac{r^2}{\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|} \end{aligned}$$

Zu b):

$$\begin{aligned} I_K(I_K(\mathbf{x})) &= \mathbf{m} + \frac{r^2}{\| I_K(\mathbf{x}) - \mathbf{m} \|^2}(I_K(\mathbf{x}) - \mathbf{m}) \\ &= \mathbf{m} + \frac{r^2}{(r^2/\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|)^2}\left(\frac{r^2}{\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right) \\ &= \mathbf{m} + (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \\ &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

c) ist wieder klar, und e) folgt aus c) und d). □

Statt „$\mathbf{x}'$ ist das Bild von $\mathbf{x}$ unter der Inversion am Kreis K“ sagt man auch: „Die Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ sind bezüglich K zueinander invers“.

Die Inversion ist keine lineare oder affine Abbildung, schon deswegen nicht, weil es einen Punkt der Ebene (das Kreiszentrum) gibt, wo sie nicht definiert ist. Aber sie ist der Geometrie der Kreise im folgenden Sinn besonders gut angepaßt:

Satz (Bilder von Kreisen unter der Inversion): *Die Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt* $\mathbf{m}$ *führt*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{eine Gerade durch } \mathbf{m} \\ \textit{eine Gerade nicht durch } \mathbf{m} \\ \textit{einen Kreis durch } \mathbf{m} \\ \textit{einen Kreis nicht durch } \mathbf{m} \end{array}\right\} \textit{in} \left\{\begin{array}{l} \textit{dieselbe Gerade durch } \mathbf{m} \\ \textit{einen Kreis durch } \mathbf{m} \\ \textit{eine Gerade nicht durch } \mathbf{m} \\ \textit{einen Kreis nicht durch } \mathbf{m} \end{array}\right\} \textit{über.}$$

Beweis. Die Aussage ist invariant gegenüber Translationen und Streckungen. Deswegen nehmen wir (um die Notation zu vereinfachen) o.B.d.A. an, der Kreis sei der Einheitskreis mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius 1. Die Inversion ist also

$$I : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|^2}.$$

Die Behauptung für Geraden durch den Kreismittelpunkt ist nach Teil c) des vorhergehenden Satzes klar. Betrachten wir also eine Gerade

$$L : \ a \cdot x_1 + b \cdot x_2 - 1 = 0$$

nicht durch den Nullpunkt. Weil I eine Involution ist, stimmt das Bild $I(L)$ dieser Geraden mit deren Urbild $I^{-1}(L)$ überein. Wir erhalten $I(L)$ also, indem wir $\mathbf{x}'$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} a \cdot x_1' + b \cdot x_2' - 1 & = & a \cdot \dfrac{x_1}{\| \mathbf{x} \|} + b \cdot \dfrac{x_2}{\| \mathbf{x} \|} - 1 \\ & \sim & a \cdot x_1 + b \cdot x_2 - \| \mathbf{x} \| \\ & = & -\left(x_1^2 + x_2^2 - a x_1 - b x_2\right) \\ & \sim & \left(x_1 - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \dfrac{b}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2 + b^2}{4} \end{array}$$

Die Nullstelle dieses Polynoms ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{m} = (a/2, b/2)$ und Radius $\| \mathbf{m} \|$. Offenbar enthält er den Nullpunkt.

Variiert man in der soeben durchgeführten Rechnung die Konstanten a und b, so kommen als Ergebnis alle Kreise durch den Nullpunkt heraus: Jeder Kreis K durch den Nullpunkt $\mathbf{0}$ ist das Bild $I(L)$ einer Geraden L, die nicht durch $\mathbf{0}$ geht. Weil I eine Involution ist, folgt daraus $I(K) = L$. Das Bild eines Kreises durch den Nullpunkt ist also eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.

Sei jetzt

$$K : \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|^2 - r^2 = 0$$

ein Kreis, der nicht durch den Nullpunkt geht ($p := \| \mathbf{m} \|^2 - r^2 \neq 0$). Wie eben für die Gerade berechnen wir sein Bild(= Urbild), indem wir $\mathbf{x}'$ in die Gleichung von K einsetzen:

$$\| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \|^2 - r^2 \quad = \quad \| \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|^2} - \mathbf{m} \|^2 - r^2$$

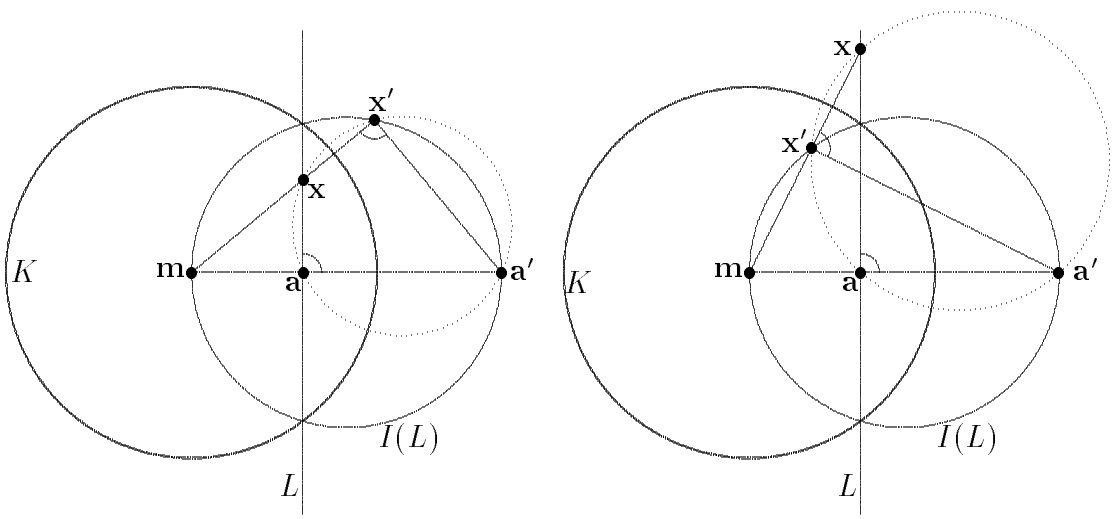
$$
\begin{aligned}
&= \frac{\| \mathbf{x} \|^2}{\| \mathbf{x} \|^4} - \frac{2(\mathbf{x}.\mathbf{m})}{\| \mathbf{x} \|^2} + \| \mathbf{m} \|^2 - r^2 \\
&= \frac{1}{\| \mathbf{x} \|^2} - \frac{2(\mathbf{x}.\mathbf{m})}{\| \mathbf{x} \|^2} + p \\
&\sim 1 - 2(\mathbf{x}.\mathbf{m}) + p \cdot \| \mathbf{x} \|^2 \\
&\sim \| \mathbf{x} \|^2 - \frac{2(\mathbf{x}.\mathbf{m})}{p} + \frac{1}{p} \\
&= \| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{m}}{p} \|^2 - \frac{\| \mathbf{m} \|^2}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \| \mathbf{x} - \frac{1}{p}\mathbf{m} \|^2 - \frac{r^2}{p^2}
\end{aligned}
$$

Dieses Polynom beschreibt einen Kreis mit Zentrum $\mathbf{m}/p$ und Radius r/p. □

Jetzt wollen wir vorübergehend, für einen kurzen Moment, an die komplexen Zahlen denken. Statt des Vektors $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ schreiben wir die komplexe Zahl $z = x_1 + ix_2$. Dann ist die Formel für die Inversion am Einheitskreis

$$I : \; z \mapsto z' = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Sie ist zusammengesetzt aus der holomorphen Kehrwertabbildung $z \mapsto 1/z$ und der komplexen Konjugation $z \mapsto \overline{z}$. Deswegen ist sie konform, und zwar genauer *orientierungsumdrehend* und *winkeltreu*. Die Winkeltreue ist für die Geometrie sehr wichtig. Wir werden sie laufend benutzen. Man kann diese Eigenschaft auch ohne die komplexen Zahlen beweisen, indem man die Funktionalmatrix der Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ ausrechnet. Das ist Analysis. Deswegen wollen wir das hier nicht machen. Stattdessen möchte ich die Winkeltreue geometrisch beweisen. Dabei beweisen wir dann gleich auch noch einmal bisher angegebene Eigenschaften der Inversion auf geometrischem Weg. (Ich halte mich dabei ziemlich wörtlich an Pedoe, p.6-9.)

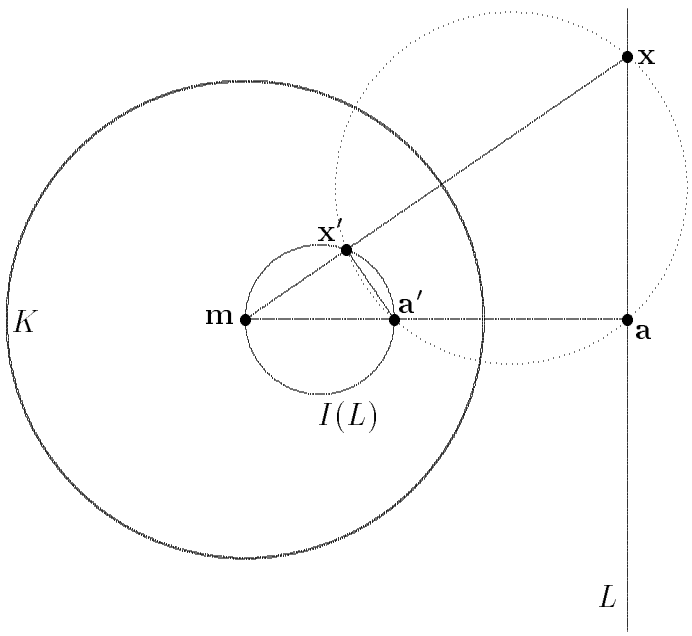


Zunächst bestimmen wir geometrisch die inversen Figuren von Kreisen und Geraden. Betrachten wir zunächst eine Gerade L, die nicht durch den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ des Inversionskreises K geht. $\mathbf{a} \in L$ sei der Fußpunkt des Lotes von $\mathbf{m}$ auf L. Sein Bildpunkt unter der Inversion an K sei $\mathbf{a}'$. Für jeden Punkt $\mathbf{x} \in L$ mit Bildpunkt $\mathbf{x}'$ gilt dann

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \| = r^2 = \| \mathbf{a} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{a}' - \mathbf{m} \| .$$

Nach der Umkehrung des Sekanten-Abschnitts-Satzes liegen die vier Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ auf einem Kreis. Das Sehnenviereck $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{x}', \mathbf{x}$ hat bei $\mathbf{a}$ einen rechten Winkel. Entweder liegt der Punkt $\mathbf{x}'$ auf der anderen Seite der Sehne $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ wie $\mathbf{a}$. Dann ist der Gegenwinkel $\angle \mathbf{a}'\mathbf{x}'\mathbf{x} = \pi - \angle \mathbf{x}\mathbf{a}\mathbf{a}' = \pi/2$. Oder $\mathbf{x}'$ liegt auf derselben Seite wie $\mathbf{a}$. Dann ist $\angle \mathbf{a}'\mathbf{x}'\mathbf{x} = \angle \mathbf{a}'\mathbf{a}\mathbf{x} = \pi/2$ als Peripheriewinkel über derselben Sehne. In beiden Fällen ist $\angle \mathbf{a}'\mathbf{x}'\mathbf{m} = \angle \mathbf{a}'\mathbf{x}'\mathbf{x} = \pi/2$. Deswegen liegt $\mathbf{x}'$ auf dem Thaleskreis über $\mathbf{m}\mathbf{a}'$. Wir haben bewiesen: Das Bild $I(L)$ der Geraden L unter der Inversion ist enthalten im Kreis mit dem Durchmesser $\mathbf{m}\mathbf{a}'$. Die Argumentation ist aber umkehrbar, und so sehen wir: *Eine Gerade L, nicht durch den Mittelpunkt des Inversionskreises ist invers zu einem Kreis $L' = C$ durch den Mittelpunkt $\mathbf{m}$, dessen Tangente $T_{\mathbf{m}}(C)$ in $\mathbf{m}$ parallel zu L ist.*

Wenn die Gerade L den Kreis K schneidet, geht der Kreis $I(L)$ auch durch die Schnittpunkte von L und K. Wenn L den Kreis K aber nicht schneidet, kann der Kreis $I(L)$ den Kreis K auch nicht schneiden, er muß dann ganz im Inneren von K verlaufen:



Jetzt wollen wir uns geometrisch überlegen, was die inverse Figur zu einem Kreis C ist, der nicht durch den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ des Inversionskreises geht. Zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ gibt es einen zweiten Schnittpunkt $\mathbf{y}$ der Verbindungsgerade $\mathbf{m}\mathbf{x}$ mit C. Nach Definition der Potenz ist die Potenz des Inversionszentrums $\mathbf{m}$ bezüglich C

$$p_C(\mathbf{m}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{y} - \mathbf{m} \| .$$

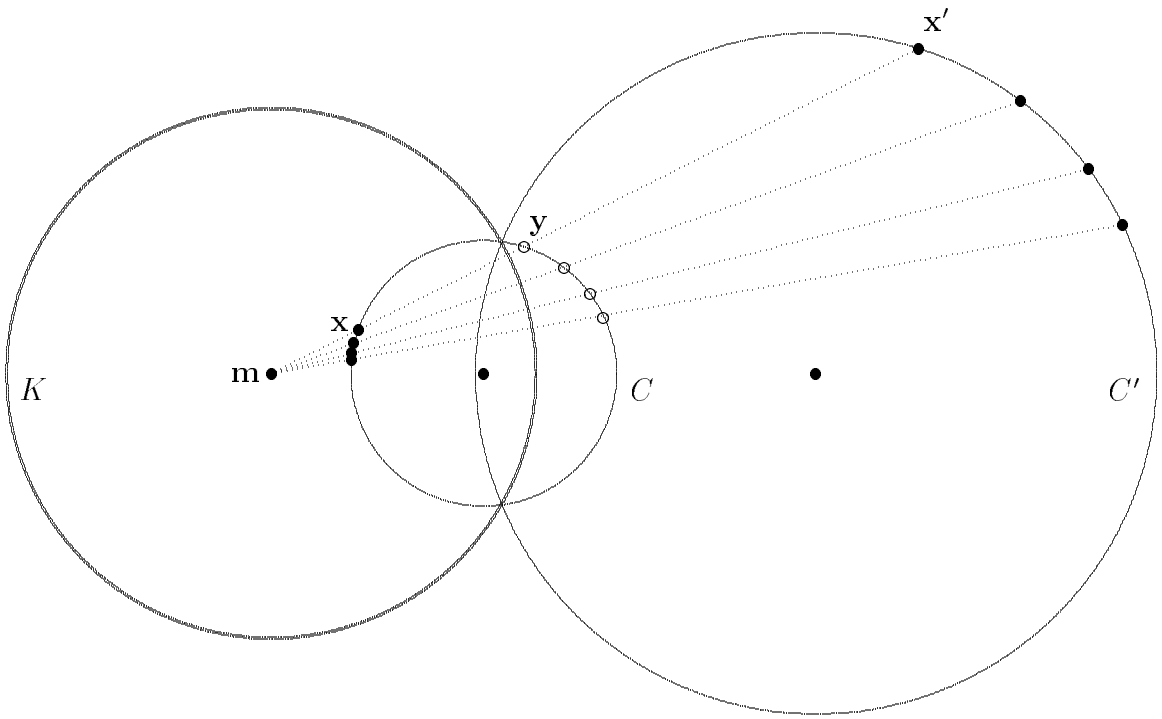
Diese Potenz $p_C(\mathbf{m})$ ist $\neq 0$, weil C nicht durch $\mathbf{m}$ geht. Andererseits ist für den Bildpunkt $\mathbf{x}' = I(\mathbf{x})$

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \| = r^2.$$

Insgesamt folgt

$$\| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \| = \frac{r^2}{p(\mathbf{m})} \cdot \| \mathbf{y} - \mathbf{m} \| .$$

Den Punkt $\mathbf{x}'$ erhält man aus $\mathbf{y}$ durch zentrische Streckung (Zentrum $\mathbf{m}$) mit dem von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ unabhängigen Faktor $r^2/p_C(\mathbf{m})$. Wenn $\mathbf{x}$ den Kreis C durchläuft, so tut dies auch $\mathbf{y}$. Wir sehen: Das Inverse $I(C)$ des Kreises C wird aus C durch eine zentrische Streckung erhalten, und ist deswegen wieder ein Kreis C'.



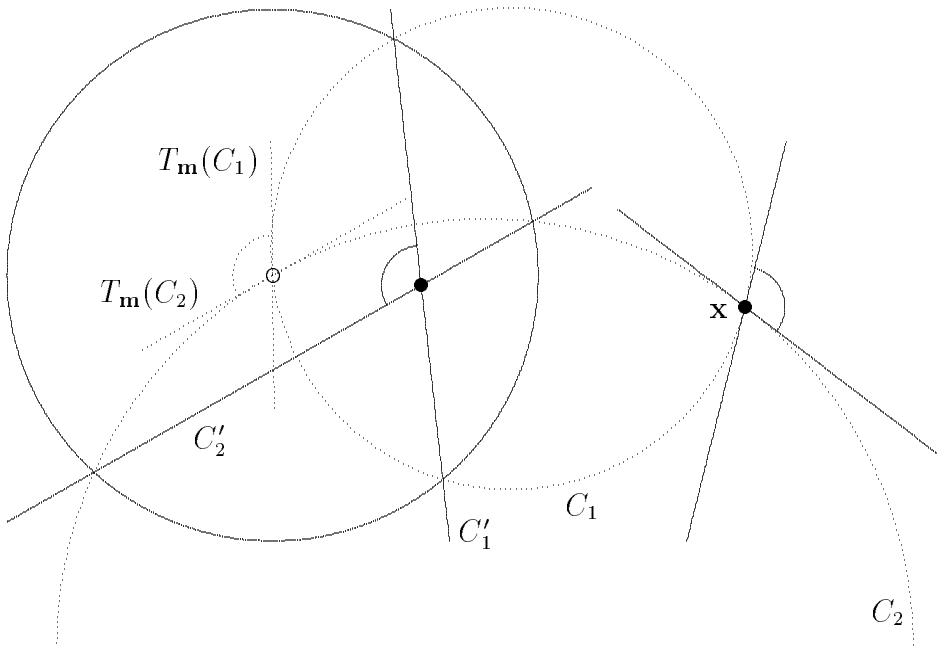
Schließlich wollen wir uns noch mit der Winkeltreue der Inversion befassen. Winkel sind an sich zwischen zwei sich schneidenden Geraden definiert. Die inversen Bilder von Geraden sind aber meistens Kreise. Deswegen müssen wir Winkel zwischen sich schneidenden Kreisen betrachten. Der Winkel zwischen zwei Kreisen C_1 und C_2 in einem Schnittpunkt $\mathbf{x} \in C \cap C'$ ist natürlich der Winkel zwischen ihren Tangenten $T_{\mathbf{x}}(C)$ und $T_{\mathbf{x}}(C')$. Aus Symmetriegründen ist dieser Winkel in beiden Schnittpunkten derselbe.

Zwei Kreise C_1 und C_2 können sich berühren, genauso wie sich Kreis und Gerade berühren können. Sie haben dann nur einen einzigen Schnittpunkt. Weil die Inversion (außerhalb des Inversionszentrums) bijektiv ist, haben dann die inversen Kreise C_1' und C_2' auch genau einen Punkt gemeinsam, in dem sie sich berühren. Daraus folgt: *Schneiden sich zwei Kreise mit dem Winkel* 0 *außerhalb des Inversionszentrums, so schneiden sich auch ihre Bildkreise unter*

dem Winkel 0. Genauso sieht man: *Berühren sich ein Kreis und eine Gerade außerhalb des Inversionszentrums, so gilt dies auch für die inversen Kreise, bzw. Geraden.* Damit haben wir zunächst einmal die Winkeltreue für den Winkel 0.

Satz (Winkeltreue der Inversion): *Die Inversion an einem Kreis ist außerhalb des Inversionszentrums winkeltreu.*

Beweis. Betrachten wir zunächst zwei verschiedene Kreise $C_1 \neq C_2$, die sich in einem Punkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{m}$ unter einem Winkel α schneiden, und die außerdem beide durch das Inversionszentrum $\mathbf{m}$ gehen. Sie schneiden sich dann auch in $\mathbf{m}$ unter demselben Winkel α. Diesen Winkel schließen auch ihre Tangenten $T_{\mathbf{m}}(C_1)$ und $T_{\mathbf{m}}(C_2)$ ein. Das Inverse C_i' des Kreises C_i ist eine Gerade L_i, nicht durch $\mathbf{m}$, aber parallel zur Tangente $T_{\mathbf{m}}(C_i)$. Deswegen schneiden sich diese Geraden $L_i = C_i'$ auch wieder unter demselben Winkel α.



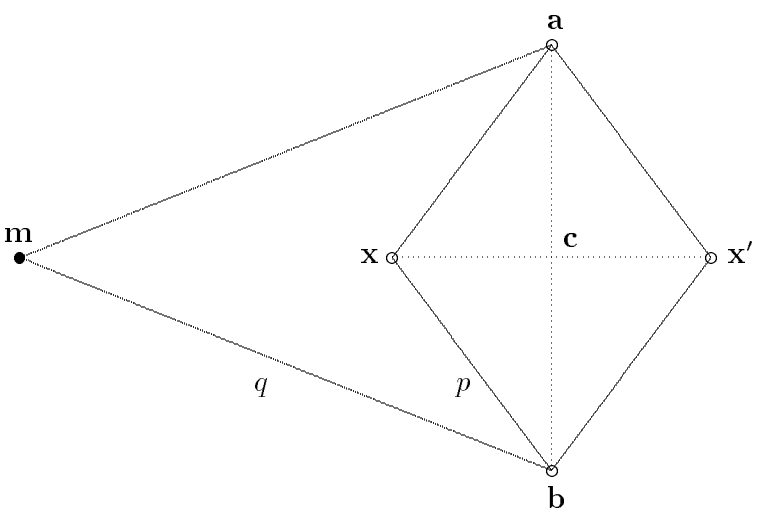
Sei jetzt in einem Punkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{m}$ ein beliebiger Winkel α gegeben, repräsentiert durch zwei sich in $\mathbf{x}$ schneidende Geraden L_1 und L_2. Wenn keine der beiden Geraden durch $\mathbf{m}$ geht, gibt es zwei Kreise C_1 und C_2 durch $\mathbf{m}$, welche auch durch $\mathbf{x}$ gehen und die Geraden L_1 und L_2 dort berühren. Diese Kreise schließen dann in $\mathbf{x}$ den Winkel α ein. Soeben haben wir gesehen, daß ihre inversen Geraden C_1' und C_2' sich im inversen Punkt $\mathbf{x}'$ wieder unter demselben Winkel α schneiden. Die zu L_1 und L_2 inversen Kreise L_1' und L_2' berühren die Geraden C_1' und C_2' in $\mathbf{x}'$, und schneiden sich deswegen auch unter diesem Winkel α.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß eine der beiden Geraden, etwa L_1, aber nicht L_2 durch das Inversionszentrum $\mathbf{m}$ geht. Dann gibt es einen Kreis C_2 durch $\mathbf{m}$, der auch durch $\mathbf{x}$ geht, und L_2 in $\mathbf{x}$ berührt. Er schließt in $\mathbf{x}$ und auch in $\mathbf{m}$ mit L_1 den Winkel α ein. Sein Inverses ist eine Gerade C_2' parallel zur Tangente $T_{\mathbf{m}}(C_2)$. Diese Gerade schneidet also die Bildgerade $L_1' = L_1$ auch wieder unter dem Winkel α. □

Im vergangenen Jahrhundert hatten Geräte zur mechanischen Durchführung der Inversion (sogenannte *Inversoren*) eine gewisse praktische Bedeutung. Es ist nämlich ein nicht-triviales Problem, durch ein Gestänge die geradlinige Bewegung eines Zylinderkolbens in die Kreisbewegung eines Schwungrades zu übersetzen. Dazu konstruierte man mechanische „Geradführungen", die das Gewünschte aber meist (wie etwa in der Wattschen Dampfmaschine) nur näherungsweise leisteten. Inversoren führen einen Kreis durch das Inversionszentrum in eine Gerade über, und sind deswegen ideale Geradführungen. Ich möchte hier zwei derartige Inversoren vorstellen:

Der Inversor von Peaucellier: Zwei gleichlange Stangen der Länge q sind an einem Punkt $\mathbf{m}$ (dem Inversionszentrum) drehbar angebracht. Am anderen Ende der Stangen (Punkte $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$) ist an zwei gegenüberliegenden Ecken eine Raute aus vier gleichlangen Stangen der Länge p befestigt. Die andern beiden gegenüberliegenden Ecken dieser Raute seien $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$. Alle Verbindungen der Stangen sind gelenkig, so daß die Stangen dort beliebige Winkel (innerhalb gewisser Grenzen) bilden können. Insbesondere ist der Punkt $\mathbf{x}$ in einem Kreisring frei zu bewegen. Der innere Radius dieses Kreisrings ist $q-p$. Der Punkt $\mathbf{x}$ liegt auf dem äußeren Rand des Kreisrings, wenn er mit $\mathbf{x}'$ zusammenfällt. Dann bilden die Punkte $\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{x}$ ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei $\mathbf{x}$. Deswegen gilt für den äußeren Radius r dieses Kreisrings nach Pythagoras

$$r^2 = q^2 - p^2.$$



Behauptung: *Der Punkt* $\mathbf{x}'$ *ist invers zu* $\mathbf{x}$ *in Bezug auf den Kreis um* $\mathbf{m}$ *mit Radius* r.
Beweis. Der Mittelpunkt der Raute sei $\mathbf{c}$. Dann gilt nach Pythagoras

$$\begin{aligned} q^2 &= \| \mathbf{ac} \|^2 + \left(\| \mathbf{mx} \| + \frac{1}{2} \| \mathbf{xx}' \| \right)^2 \\ p^2 &= \| \mathbf{ac} \|^2 + \left(\frac{1}{2} \| \mathbf{xx}' \| \right)^2 \\ r^2 &= q^2 - p^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \| \mathbf{mx} \|^2 + \| \mathbf{mx} \| \cdot \| \mathbf{xx'} \| \\
&= \| \mathbf{mx} \| \cdot (\| \mathbf{mx} \| + \| \mathbf{xx'} \|) \\
&= \| \mathbf{mx} \| \cdot \| \mathbf{mx'} \| .
\end{aligned}
$$

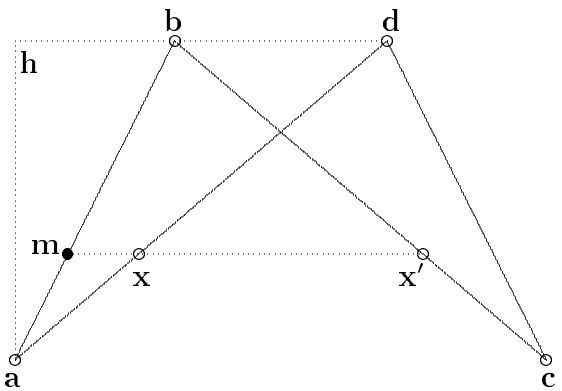
Also sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ tatsächlich invers zueinander

Der Inversor von Hart: Zwei gleichlange Stangen **ab** und **cd** bilden zwei Seiten eines Trapez-Vierecks, zwei andere gleichlange Stangen **ad** und **bc** seine Diagonalen. Wieder sind die Stangen durch Gelenke verbunden und gegeneinader frei drehbar. Aus Symmetriegründen ist das Viereck aber immer ein Trapez, und die Seiten **ac** und **bd** in jeder Lage parallel zueinander. Das Inversionszentrum ist ein fester Punkt **m** auf der Seite **ab**. Dieser ist fixiert, um ihn ist das Gerät drehbar. Die Parallele durch **m** zu den Seiten **ac** und **bd** treffe die Diagonale **ad** im Punkt **x** und die andere Diagonale **bc** im Punkt $\mathbf{x}'$. Weiter sei

$$\mu := \frac{\| \mathbf{am} \|}{\| \mathbf{ab} \|}$$

und

$$r := \sqrt{\mu(1-\mu) \cdot (\| \mathbf{ad} \|^2 - \| \mathbf{ab} \|^2)}.$$



Behauptung: *Der Punkt* $\mathbf{x}'$ *ist invers zum Punkt* $\mathbf{x}'$ *in Bezug auf den Kreis um* **m** *mit diesem Radius* r.

Beweis. Aus dem Strahlensatz am Dreieck **abd** folgt

$$\| \mathbf{mx} \| = \mu \cdot \| \mathbf{bd} \|,$$

und aus dem Strahlensatz am Dreieck **abc**

$$\| \mathbf{mx'} \| = (1-\mu) \cdot \| \mathbf{ac} \| .$$

Nun sei **h** der Fußpunkt des Lotes von **a** auf die Seite **bd**. Dann ist

$$\| \mathbf{ac} \| \;\; = \;\; \| \mathbf{hd} \| + \| \mathbf{hb} \|$$

$$\begin{aligned} \| \mathbf{bd} \| &= \| \mathbf{hd} \| - \| \mathbf{hb} \| \\ \| \mathbf{ac} \| \cdot \| \mathbf{bd} \| &= \| \mathbf{hd} \|^2 - \| \mathbf{hb} \|^2 \\ &= \left(\| \mathbf{ad} \|^2 - \| \mathbf{ah} \|^2 \right) - \left(\| \mathbf{ab} \|^2 - \| \mathbf{ah} \|^2 \right) \\ &= \| \mathbf{ad} \|^2 - \| \mathbf{ab} \|^2 . \end{aligned}$$

(Diese Formel $\| \mathbf{ac} \| \cdot \| \mathbf{bd} \| + \| \mathbf{ab} \|^2 = \| \mathbf{ad} \|^2$ ist ein Spezialfall des Satzes von Ptolemäus, den wir im nächsten Paragraphen behandeln werden).

Nun folgt

$$\| \mathbf{mx} \| \cdot \| \mathbf{mx}' \| = \mu(1-\mu) \cdot \| \mathbf{ac} \| \cdot \| \mathbf{bd} \| = \mu(1-\mu) \cdot \left(\| \mathbf{ad} \|^2 - \| \mathbf{ab} \|^2 \right) = r^2.$$

1.4 Sehnenvierecke und Tangentenvierecke

Jedes Dreieck hat einen Umkreis und einen Inkreis. Bei Vierecken ist das nicht so. Ein Viereck, das einen Umkreis hat, heißt *Sehnenviereck*, ein Viereck, das einen Inkreis hat *Tangentenviereck*. Wir haben schon drei Charakterisierungen von Sehnenvierecken kennen gelernt: Das Viereck **abcd** ist ein Sehnenviereck, wenn

- sich die Seiten **ab** und **cd** in einem Punkt **x** schneiden, und wenn gilt

  $$\| \mathbf{x} - \mathbf{a} \| \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{b} \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{c} \| \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{d} \|$$

  (Sekanten-Abschnitts-Satz);

- die Winkel $\angle\mathbf{acb}$ und $\angle\mathbf{adb}$ gleich sind (Peripheriewinkel-Satz);

- die Winkel $\angle\mathbf{abc}$ und $\angle\mathbf{cda}$ komplementär sind.

Die beiden letzten Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Die erste Bedingung ist hinreichend, und wenn die Seiten nicht parallel sind, auch notwendig.

Diesen drei Charakterisierungen des Sehnenvierecks wollen wir jetzt eine vierte hinzufügen. (Ich folge hier wieder ziemlich wörtlich Pedoe, p.10/11.)

Satz (des Ptolemäus): *Für je vier Punkte* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *und* $\mathbf{d}$ *in der Ebene gilt die Ungleichung*

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{c} - \mathbf{d} \| + \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \| \cdot \| \mathbf{d} - \mathbf{a} \| \geq \| \mathbf{a} - \mathbf{c} \| \cdot \| \mathbf{b} - \mathbf{d} \| .$$

In dieser Ungleichung gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn die vier Punkte in der Reihenfolge $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ *auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegen.*

Beweis. Wir betrachten zuerst ganz allgemein die Auswirkung der Inversion an einem Kreis auf die Längen von Verbindungsgeraden: Es sei K der Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{m}$ und Radius r. Sind $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ zwei Punkte mit den Inversen $\mathbf{p}'$ und $\mathbf{q}'$, dann ist

$$\| \mathbf{p}-\mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{p}'-\mathbf{m} \| = r^2 = \| \mathbf{q}-\mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{q}'-\mathbf{m} \| .$$

Die vier Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{q}$ liegen auf einem Kreis, und die folgenden Winkel sind gleich

$$\angle \mathbf{mpq} = \angle \mathbf{mq'p'}, \quad \angle \mathbf{mp'q'} = \angle \mathbf{mqp}.$$

(Je nach der Reihenfolge, in der diese vier Punkte auf dem Kreis liegen, folgt dies aus dem Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck, oder dem Peripheriewinkel-Satz.) Die Dreiecke $\Delta\mathbf{mpq}$ und $\Delta\mathbf{mq'p'}$ sind also ähnlich. Daraus ergibt sich die Proportion

$$\frac{\| \mathbf{p}'-\mathbf{q}' \|}{\| \mathbf{p}-\mathbf{q} \|} = \frac{\| \mathbf{m}-\mathbf{p}' \|}{\| \mathbf{m}-\mathbf{q} \|} = \frac{\| \mathbf{m}-\mathbf{p} \| \cdot \| \mathbf{m}-\mathbf{p}' \|}{\| \mathbf{m}-\mathbf{p} \| \cdot \| \mathbf{m}-\mathbf{q} \|} = \frac{r^2}{\| \mathbf{m}-\mathbf{p} \| \cdot \| \mathbf{m}-\mathbf{q} \|}$$

und

$$\| \mathbf{p}'-\mathbf{q}' \| = \frac{r^2}{\| \mathbf{m}-\mathbf{p} \| \cdot \| \mathbf{m}-\mathbf{q} \|} \cdot \| \mathbf{p}-\mathbf{q} \| .$$

Jetzt invertieren wir die drei Punkte $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ an einem Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{a}$. Ihre Inversen seien $\mathbf{b}', \mathbf{c}'$ und $\mathbf{d}'$. Für sie gilt die Dreiecksungleichung

$$\| \mathbf{b}'-\mathbf{c}' \| + \| \mathbf{c}'-\mathbf{d}' \| \geq \| \mathbf{b}'-\mathbf{d}' \| .$$

Die Gleichheit gilt hier genau dann, wenn der Punkt $\mathbf{c}'$ auf der Geraden $\mathbf{b'd'}$ zwischen $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{d}'$ liegt. Für die inversen Punkte folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\frac{\| \mathbf{b}-\mathbf{c} \|}{\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{a}-\mathbf{c} \|} + \frac{\| \mathbf{c}-\mathbf{d} \|}{\| \mathbf{a}-\mathbf{c} \| \cdot \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|} \geq \frac{\| \mathbf{b}-\mathbf{d} \|}{\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|},$$

beziehungsweise

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| + \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| \cdot \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| \geq \| \mathbf{a}-\mathbf{c} \| \cdot \| \mathbf{b}-\mathbf{d} \| .$$

Und hier gilt genau dann die Gleichheit, wenn $\mathbf{c}'$ auf der Geraden $\mathbf{b'd'}$ zwischen $\mathbf{b}'$ und $\mathbf{d}'$ liegt. In diesem Fall liegen die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ in dieser Reihenfolge auf einem Kreis oder einer Geraden. □

Wenden wir uns jetzt dem Tangentenviereck zu, d.h., dem Viereck mit einem Inkreis. Wir brauchen dabei aus der Schule bekannte Formeln für die Berührpunkte von Inkreis und Ankreis im Dreieck. Seien dazu wie üblich

$$a := \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \|, \quad b := \| \mathbf{a}-\mathbf{c} \|, \quad c : \| \mathbf{b}-\mathbf{a} \|$$

die Längen der Dreiecksseiten und

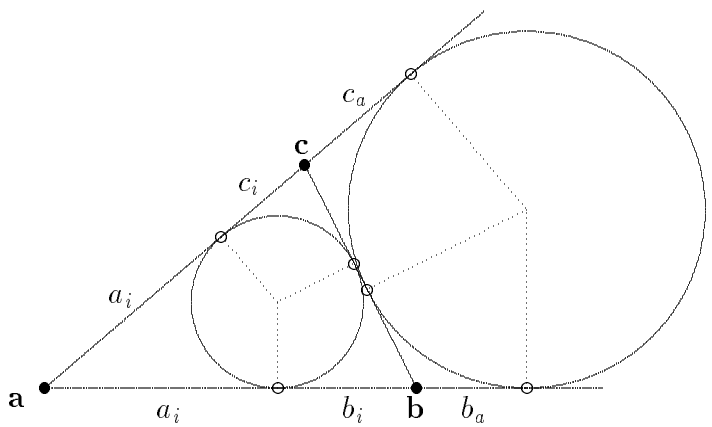
$$s := \frac{1}{2}(a+b+c)$$

der halbe Dreiecksumfang. Wir bezeichnen mit a_i, b_i, c_i die Abstände der Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ von den Berührpunkten des Inkreises, sowie mit b_a, c_a die Abstände der Ecken $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ von den Berührpunkten desjenigen Ankreises, der der Ecke $\mathbf{a}$ gegenüber liegt. (Die Abstände c_b, a_b und a_c, b_c seien analog definiert. Dann gilt für den Inkreis

$$\begin{aligned} b_i + c_i &= a \\ a_i + b_i + c_i &= s \\ a_i &= s - a. \end{aligned}$$

Die Berührpunktsabstände des Inkreises sind also

$$a_i = s - a, \quad b_i = s - b, \quad c_i = s - c.$$



Für den Ankreis haben wir

$$\begin{aligned} b_a + c_a &= a \\ c + b_a &= b + c_a \\ b_a - c_a &= b - c \\ 2b_a &= a + b - c \\ b_a &= s - c. \end{aligned}$$

Die Berührpunktabstände des Ankreises sind also

$$b_a = s - c, \quad c_a = s - b, \quad \text{usw.}$$

Jetzt kommen wir zur Charakterisierung des Tangentenvierecks.

Satz (Tangentenviereck): *Ein Viereck* **abcd** *besitzt genau dann einen Inkreis, wenn die Summen der Längen gegenüberliegender Seiten übereinstimmen:*

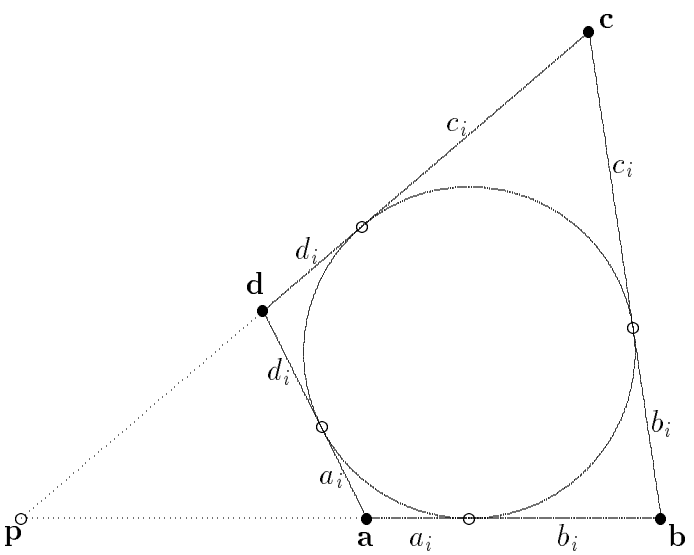
$$\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{d} \| = \| \mathbf{a} - \mathbf{d} \| + \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \|$$

Beweis. Nehmen wir zunächst an, unser Viereck besitze einen Inkreis Wir bezeichnen jetzt mit $a_i, ..., d_i$ die Abstände der Ecken von den Berührpunkten dieses Kreises. Dann ist also

$$\begin{aligned} \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| &= a_i + b_i, \\ \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \| &= b_i + c_i, \\ \| \mathbf{c} - \mathbf{d} \| &= c_i + d_i, \\ \| \mathbf{d} - \mathbf{a} \| &= d_i + a_i. \end{aligned}$$

Und daraus folgt sofort

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{d} \| = a_i + b_i + c_i + d_i = \| \mathbf{a} - \mathbf{d} \| + \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \| .$$



Sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, daß die Summen gegenüberliegender Seiten in unserem Viereck gleich sind. Wir können annehmen, daß die Seiten **ab** und **cd** nicht parallel sind. (Wenn beide Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, liegt ein Parallelogramm vor, und wegen der Voraussetzung über die Seitenlängen ist es gleichseitig. So ein Parallelogramm hat aus Symmetriegründen einen Inkreis). Sei weiter **p** der Schnittpunkt der beiden Seiten **ab** und **cd**. Dann hat das Dreieck Δ**pad** einen Ankreis K gegenüber der Ecke **p** und das Dreieck Δ**pbc** hat einen Inkreis K'. Wir müssen zeigen: $K = K'$. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Berührpunkte der Kreise mit der Seite **ab** übereinstimmen. Das folgt aus den Formeln für In- und Ankreis des Dreiecks:

Sei dazu s der halbe Umfang des Dreiecks Δ**pad**. Dann hat der Berührpunkt mit K von **p** den Abstand s. Weiter sei s' der halbe Umfang des Dreiecks **pbc**. Er hängt sehr einfach mit s zusammen:

$$\begin{aligned} s' &= \frac{1}{2} (\| \mathbf{p} - \mathbf{b} \| + \| \mathbf{b} - \mathbf{c} \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{p} \|) \\ &= \frac{1}{2} (\| \mathbf{p} - \mathbf{a} \| + \| \mathbf{a} - \mathbf{d} \| + \| \mathbf{d} - \mathbf{p} \|) + \end{aligned}$$

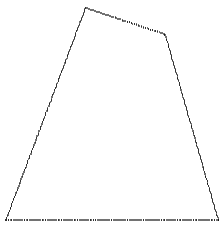
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| + \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| + \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| - \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|\right) \\ = \;& s + \frac{1}{2}\left(\| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| + \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| + \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| - \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|\right) \\ = \;& s + \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| . \end{aligned}$$

Der Berührpunkt des Kreises K' hat dann von $\mathbf{p}$ den Abstand

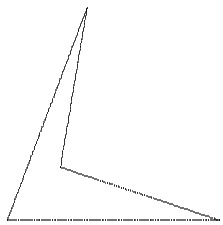
$$s' - \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| = s.$$

□

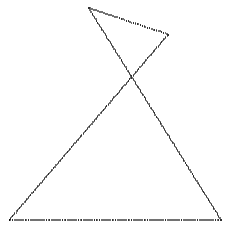
Was ich bisher behandelte ist alles richtig, aber nur unter einer Vereinbarung, die ich nicht explizit erwähnte: Ein Viereck soll so aussehen, wie es sich gehört: Keiner der vier Eckpunkte soll im Inneren des Dreiecks liegen, das von den drei anderen gebildet wird. Solche Vierecke heißen *konvex*. Es gibt aber noch zwei andere Sorten von Vierecken:



konvexes Viereck



konkaves Viereck



überschlagenes Viereck

Mit dieser Terminologie halte ich mich an Steiner (s. Ges. Werke II, p. 381-388). Es ist klar, daß ein konkaves Viereck nie als Sehnenviereck vorkommen kann. Einer der Punkte liegt ja im Inneren des Kreises durch die drei anderen Punkte. Aber als Tangentenviereck kann es auftreten, sogar auf zwei verschiedene Weisen (s. die beiden nächsten Zeichnungen). Und wenn wir da die Tangentenabschnitte vergleichen, erhalten wir folgende Bedingungen:

Erster Typ:

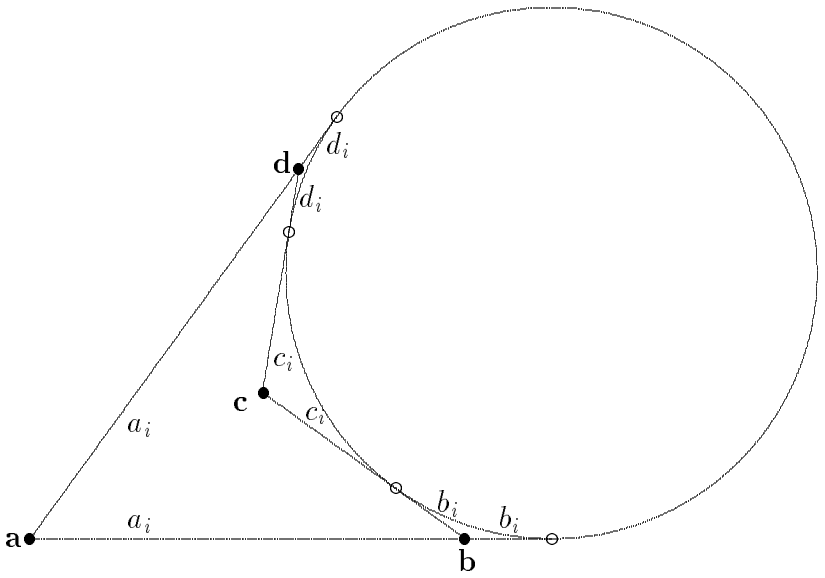
$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| = a_i - b_i, \quad \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| = b_i + c_i, \quad \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = c_i + d_i, \quad \| \mathbf{d}-\mathbf{a} \| = a_i - d_i,$$

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| - \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = a_i - b_i - c_i - d_i = \| \mathbf{d}-\mathbf{a} \| - \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| .$$

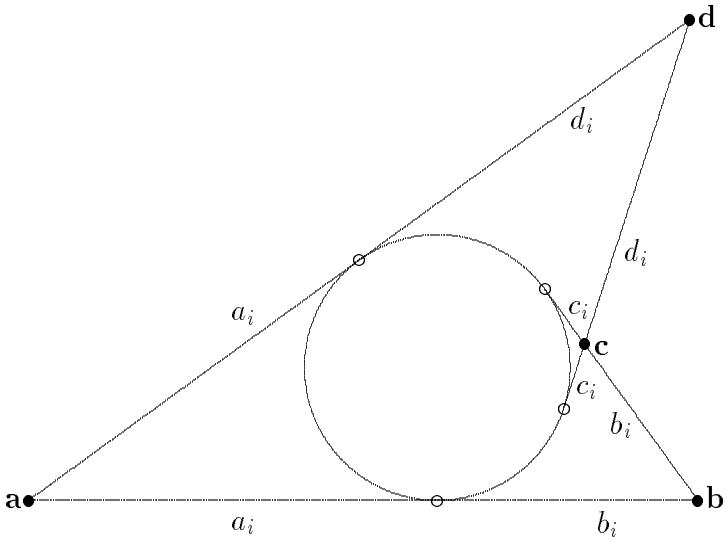
Zweiter Typ:

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| = a_i + b_i, \quad \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| = b_i - c_i, \quad \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = d_i - c_i, \quad \| \mathbf{d}-\mathbf{a} \| = a_i + d_i,$$

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| + \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = a_i + b_i - c_i + d_i = \| \mathbf{d}-\mathbf{a} \| + \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| .$$



konkaves
Tangentenviereck
erster Typ



konkaves
Tangentenviereck
zweiter Typ

Das überschlagene Viereck kann allerdings als Sehnenviereck auftreten. Seine Ecken sind ja die Ecken eines konvexen Vierecks, nur anders verbunden. Aus einem konvexen Viereck **abcd** entsteht ein überschlagenes, indem man ersetzt

konvexes Viereck	überschlagenes Viereck
a	**a**
b	**b**
c	**d**
d	**c**

Die Winkel

	sind	im
$\angle$**abc** und $\angle$**cda**	Gegenwinkel gleiche Peripheriewinkel	konvexen Viereck überschlagenen Viereck
$\angle$**abd** und $\angle$**acd**	gleiche Peripheriewinkel Gegenwinkel	konvexen Viereck überschlagenen Viereck

Im Vergleich zwischen konvexem und überschlagenem Viereck tauschen Gegenwinkel und Peripheriewinkel ihre Namen. Entsprechend sind der Peripheriewinkelsatz, der Gegenwinkelsatz und deren Umkehrungen, die Kriterien dafür, daß das Viereck ein Sehnenviereck ist, einfach zu modifizieren. Auch der Satz des Ptolemäus ist einfach zu modifizieren: Ein überschlagenens Viereck **abcd** ist Sehnenviereck, genau dann wenn

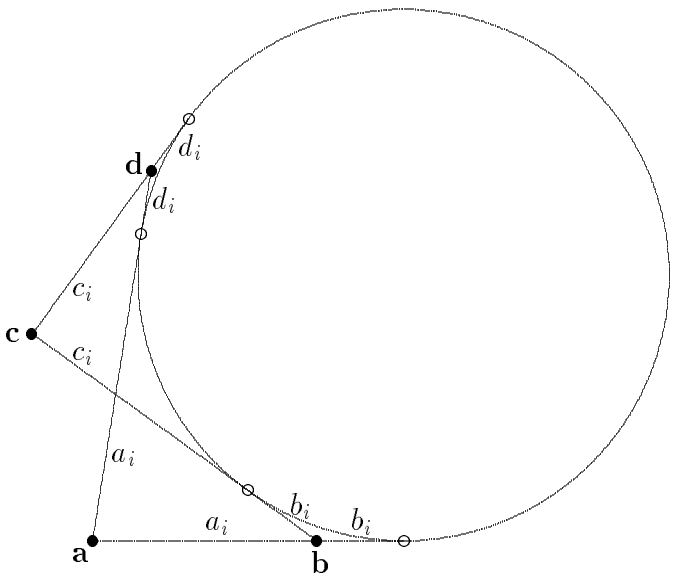
$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| - \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| \cdot \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| = \| \mathbf{a}-\mathbf{c} \| \cdot \| \mathbf{b}-\mathbf{d} \| .$$

Schauen wir uns schließlich noch die überschlagenen Tangentenvierecke an. Es gibt wieder zwei Typen. Hier erfüllen die Tangentenabschnitte folgende Gleichungen:

Erster Typ:

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| = a_i - b_i, \quad \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| = b_i + c_i, \quad \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = c_i - d_i, \quad \| \mathbf{d}-\mathbf{a} \| = d_i + a_i,$$

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| - \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = a_i - b_i - c_i + d_i = \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| - \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| .$$

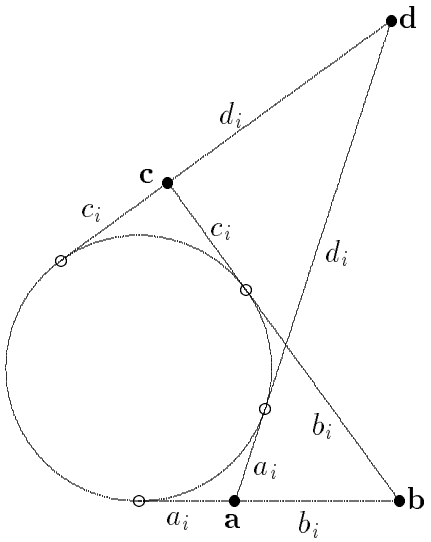


überschlagenes Tangentenviereck erster Typ

Zweiter Typ:

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| = b_i - a_i, \quad \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| = b_i + c_i, \quad \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = d_i - c_i, \quad \| \mathbf{d}-\mathbf{a} \| = d_i + a_i,$$

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| - \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| = -a_i + b_i + c_i - d_i = \| \mathbf{b}-\mathbf{c} \| - \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| .$$



überschlagenes
Tangentenviereck
zweiter Typ

Wir haben hier die notwendigen Bedingungen dafür zusammengestellt, daß konkave und überschlagenen Vierecke Tangentenvierecke sind. Man kann wohl davon ausgehen, daß diese notwendigen Bedingungen, genauso wie beim konvexen Viereck, auch hinreichend sind. Das möchte ich hier aber nicht mehr näher untersuchen. Dem interessierten Studenten soll es als Übunsaufgabe dienen.

Ich möchte diesen Abschnitt beschließen mit einer sehr bemerkenswerten Eigenschaft von Tangentenvierecken:

Satz: *In einem Tangentenviereck schneiden sich die folgenden vier Geraden in einem Punkt:*
die beiden Diagonalen,
die beiden Verbindungsgeraden der Berührpunkte gegenüberliegender Seiten.

Beweis. Wir wollen annehmen, daß kein Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist. Dann sei $\mathbf{u}$ der Schnittpunkt eines dieser Paare und $\mathbf{v}$ der Schnittpunkt des anderen Paares gegenüberliegender Seiten. Die vier Seiten unseres Vierecks sind dann die Tangentenpaare an den Kreis aus den beiden Punkten $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. In 1.1 haben wir die Gleichungen dieser Tangenten bei gegebenem $\mathbf{u}$, bzw. $\mathbf{v}$ angegeben. Das Produkt der beiden Tangentengleichungen hatte dabei die besonders einfache Form

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{u})p(\mathbf{x}),$$

bzw. derselbe Ausdruck für $\mathbf{v}$. Die vier Ecken des Tangentenvierecks sind dann die gemeinsamen Nullstellen der beiden quadratischen Gleichungen

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{u})p(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{v})p(\mathbf{x}) = 0.$$

In diesen vier Ecken verschwindet deswegen auch die folgende Linearkombination der beiden quadratischen Gleichungen

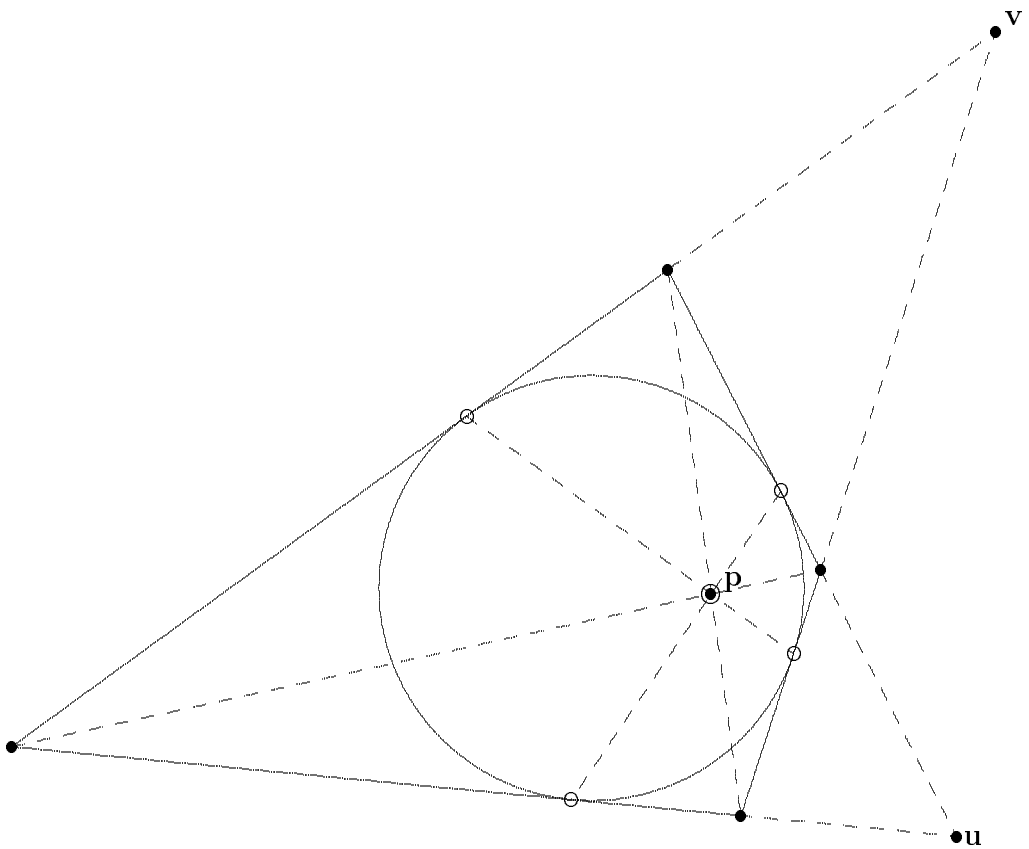
$$\begin{aligned} & p(\mathbf{v}) \cdot (P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{u})p(\mathbf{x})) - p(\mathbf{u}) \cdot (P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{v})p(\mathbf{x})) \\ = \quad & p(\mathbf{v}) \cdot P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^2 - p(\mathbf{u}) \cdot P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{p(\mathbf{v})}\cdot P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sqrt{p(\mathbf{u})}\cdot P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right)\cdot\left(\sqrt{p(\mathbf{v})}\cdot P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \sqrt{p(\mathbf{u})}\cdot P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right)\\
&=: L^{+}(\mathbf{x})\cdot L^{-}(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

Man sieht, diese Linearkombination ist wieder ein Produkt zweier Geradengleichungen L^{+} und L^{-}. Die beiden dadurch definierten Geraden $L^{\pm}$ schneiden sich im Schnittpunkt $\mathbf{p}$ der Polaren

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0.$$

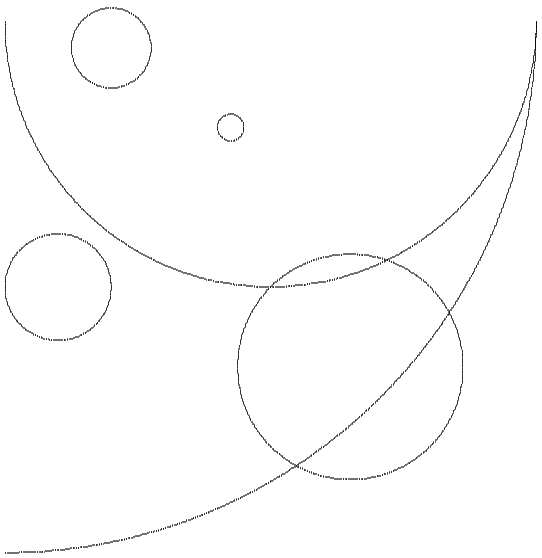
Dieser Schnittpunkt ist der Pol der von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Geraden.



Wäre $L^{\pm}$ eine Seite des Vierecks, so wäre $L^{\mp}$ die gegenüberliegende und ihr Schnittpunkt $\mathbf{p}$ wäre einer der Punkte $\mathbf{u}$ oder $\mathbf{v}$. Dieser Punkt läge somit auf seiner eigenen Polaren, er wäre ein Punkt des Kreises, also ein Berührpunkt einer Viereckssseite. Das geht nicht. Weil die Menge $L^{+}\cup L^{-}$ aber die vier Ecken des Tangentenvierecks enthält, müssen die beiden Geraden $L^{\pm}$ die Diagonalen des Tangentenvierecks sein. Ihr Schnittpunkt $\mathbf{p}$ ist auch der Schnittpunkt der beiden Polaren $P_{\mathbf{u}}$ und $P_{\mathbf{v}}$. Diese beiden Polaren sind aber die Verbindungslinien der Berührpunkte gegenüberliegender Seiten. □

Vom algebraischen Standpunkt aus ist der Beweis sehr zufriedenstellend. Er beruht auf einer Dreizeilen-Identität. Vom geometrischen Standpunkt aus ist dies keineswegs der Fall: man sieht keinen geometrischen Grund für das Resultat. Ich kenne dummerweise keinen geometrischen Beweis für den Satz. Ich habe lange probiert einen solchen zu finden. Es ist mir nicht gelungen.

Und das ist einer der Gründe dafür, daß ich den Satz so bemerkenswert finde. (Mit den Mitteln der projektiven Geometrie ist der Satz sehr einfach einzusehen: Er ist ein Spezialfall des Satzes von Brianchon für Kegelschnitte. Aber dieser Satz ist auch wieder nicht ganz einfach zu beweisen.)



2 Viele Kreise

2.1 Der Raum der Kreise

Bisher haben wir uns auf einen Kreis konzentriert. Ich hoffe, in dieser Vorlesung auf die Beziehungen mehrerer Kreise zueinander eingehen zu können. Der moderne Gesichtspunkt dafür besteht in der Untersuchung des Raums aller Kreise. Dieser Raum hat nämlich wieder eine Geometrie. An sich interessiert uns natürlich die Geometrie in diesem ätherischen Raum von Kreisen nicht. Die Beziehungen verschiedener Kreise zueinander werden aber wesentlich durchsichtiger, wenn man sich erst einmal einige Gedanken über die Menge aller Kreise in der Ebene macht. Als erstes führen wir in dieser Menge Koordinaten ein.

Ein Kreis ist festgelegt durch die Koordinaten seines Mittelpunktes und seinen Radius. Wenn der Kreis die Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

hat, sind dies die drei reellen Zahlen a, b und r. Daraus sehen wir schon einmal, daß der Kreis von drei Parametern abhängt. *Der Raum aller Kreise hat Dimension drei.* Die drei Parmeter a, b und r nehmen wir aber nicht als die Koordinaten für unseren Kreis, sondern wir formen seine Gleichung um

$$x^2+y^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y+a^2+b^2-r^2=x^2+y^2-2\cdot\xi\cdot x-2\cdot\eta\cdot y+\zeta$$

und nehmen die drei Koeffizienten

$$\xi=a,\quad \eta=b,\quad \zeta=a^2+b^2-r^2$$

als Parameter.

Die Koordinaten (ξ, η) sind die Koordinaten des Kreismittelpunktes und können beliebige reelle Werte annehmen. Anders ist es mit ζ. Damit ein richtiger Kreis (Radius reell und $\neq 0$) herauskommt, muß

$$\zeta < \xi^2 + \eta^2$$

sein. Wenn

$$\zeta = \xi^2 + \eta^2$$

ist, beschreibt die zugehörige Gleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 0$$

einen Kreis vom Radius = 0. Das ist ein Punkt, mit den Koordinaten (ξ, η). Soetwas wollen wir als Grenzfall ansehen, und einen *Nullkreis* nennen. Wenn

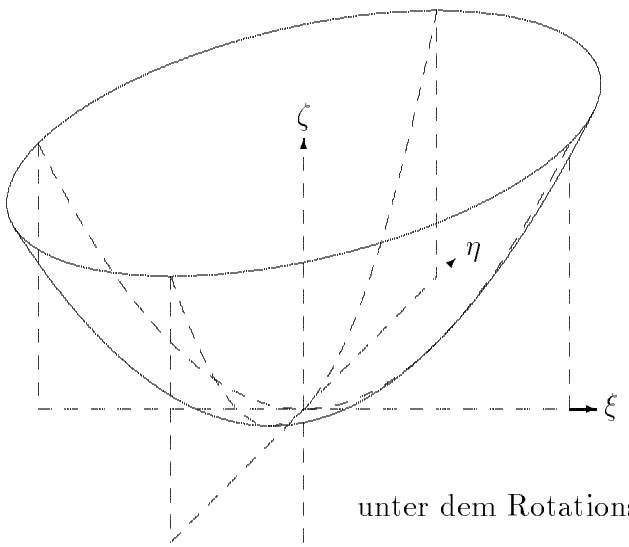
$$\zeta > \xi^2 + \eta^2$$

ist, hat die zugehörige Kreisgleichung keine reellen Nullstellen. Wir könnten den Kreis dann als imaginären Kreis auffassen. Aber weil wir den in der reellen Ebene nicht sehen können, tun wir das nicht, sondern schließen solche Kreise von unseren Betrachtungen aus.

Damit haben wir auf dem Raum aller Kreise die drei Koordinaten ξ, η, ζ, an welche die Bedingung

$$\boxed{\zeta \leq \xi^2 + \eta^2}$$

gestellt wird. Was ist das für eine Bedingung?



unter dem Rotationsparaboloid

Die Grenzfälle, die Nullkreise, sind Kreise mit den Koordinaten ξ, η, ζ, welche der Gleichung $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ genügen. Diese Gleichung beschreibt im $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten ξ, η, ζ ein nach oben geöffnetes *Rotationsparaboloid*

$$\Pi: \quad \zeta = \xi^2 + \eta^2$$

mit der ζ-Achse als Rotationsachse. Echte Kreise gehören zu Punkten ξ, η, ζ unter dem Rotationsparaboloid Π.

Dieses Rotationsparaboloid $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ ist für unsere Zwecke fundamental. Zu ihm gehört nicht so furchtbar viel Geometrie, aber doch ein bißchen was. Und dieses bißchen Geometrie hat sehr weitreichende Konsequenzen.

Wir wollen uns den ξ, η, ζ–Raum als über der x, y–Ebene liegend vorstellen, vermöge der Projektion $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y) = (\xi, \eta)$ auf die beiden ersten Koordinaten. Der Punkt ξ, η, ζ liegt also über dem Mittelpunkt des Kreises $K_{\xi,\eta,\zeta}$, der durch diesen Punkt beschrieben wird. Aber auch den Kreis selbst kann man im ξ, η, ζ–Raum sehen:

Es sei $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ein Parameterpunkt, der den Kreis

$$K_{\mathbf{p}}: \quad x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + c$$

beschreibt, $c \leq a^2 + b^2$. Dann ist dieser Kreis das Bild des Durchscnitts

$$\Pi \cap E_{\mathbf{p}}, \qquad E_{\mathbf{p}}: \quad 2 \cdot a \cdot \xi + 2 \cdot b \cdot \eta - \zeta - c = 0$$

des Rotationsparaboloids Π mit der Ebene $E_{\mathbf{p}}$ unter der Projektion auf die ersten beiden Koordinaten.

Beweis: Das Bild des Durchschnitts unter der Projektion erhalten wir, wenn wir ζ aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \Pi: &\quad \zeta = \xi^2 + \eta^2 \\ E_{\mathbf{p}}: &\quad \zeta = 2 \cdot a \cdot \xi + 2 \cdot b \cdot \eta - c \end{aligned}$$

eliminieren. Das Resultat ist

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 \cdot a \cdot \xi - 2 \cdot b \cdot \eta + c = 0,$$

die Gleichung unseres Kreises $K_{\mathbf{p}}$. □

Es sieht so aus, als ob der Nullpunkt auf dem Rotationsparaboloid eine Sonderrolle spielt. Er liegt ja auf dem Paraboloid am niedrigsten. Aber das sieht nur so aus. Er gehört zum Nullkreis im Nullpunkt. Durch Transformationen in der (x, y)-Ebene können wir den in jeden anderen Nullkreis transformieren. Weil wir in der (x, y)-Ebene oft transformieren werden (meistens ohne das explizit zu sagen, z.B. mit einer Formulierung wie „o.B.d.A. nehmen wir den Mittelpunkt dieses Kreises als Nullpunkt unseres Kordinatensytems"), wollen wir die vorkommenden Transformationen jetzt auf den Raum der Kreise wirken lassen.

Translationen: Eine Translation

$$x = x' + u, \quad y = y' + v$$

transformiert unseren Standardkreis

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y + \zeta = 0$$

in den Kreis

$$\begin{aligned} & (x'+u)^2 + (y'+v)^2 - 2\xi(x'+u) - 2\eta(y'+v) + \zeta \\ = \; & (x')^2 + (y')^2 + 2ux' + 2vy' + u^2 + v^2 - 2\xi x' - 2\eta y' - 2\xi u - 2\eta v + \zeta \\ = \; & (x')^2 + (y')^2 - 2(\xi - u)x' - 2(\eta - v)y' + \zeta + u^2 + v^2 \\ = \; & (x')^2 + (y')^2 - 2\xi' x' - 2\eta' y' + \zeta' \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

mit

$$\xi' = \xi - u, \quad \eta' = \eta - v, \quad \zeta' = \zeta - 2\xi u - 2\eta v + u^2 + v^2.$$

Diese affine Transformation liegt im ξ, η, ζ-Raum über der betrachteten Translation im (x, y)-Raum. Wie man sofort verifiziert, bildet sie das Rotationsparaboloid II auf das Paraboloid $\zeta' = (\xi')^2 + (\eta')^2$ ab.

Orthogonale Transformationen: Eine orthogonale Transformation

$$x = ux' - vy', \quad y = vx' + uy', \quad (u^2 + v^2 = 1)$$

bzw., wenn sie eine uneigentliche Drehung ist

$$x = ux' + vy', \quad y = vx' - uy'$$

erhält die quadratische Form und transformiert den Standardkreis in den Kreis mit der Gleichung

$$\begin{aligned} & (x')^2 + (y')^2 - 2\xi(ux' - vy') - 2\eta(vx' + uy') + \zeta \\ = \; & (x')^2 + (y')^2 - 2\xi ux' + 2\xi vy' - 2\eta vx' - 2\eta vy' + \zeta \\ = \; & (x')^2 + (y')^2 - 2\xi' x' - 2\eta' x' + \zeta' \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

mit

$$\xi' = u\xi + v\eta, \quad \eta' = -v\xi + u\eta, \quad \zeta' = \zeta,$$

(bzw., wenn sie uneigentlich ist

$$\xi' = u\xi + v\eta, \quad \eta' = v\xi - u\eta, \quad \zeta' = \zeta).$$

Die Translationen und die orthogonalen Transformationen erzeugen die *Bewegungsgruppe*. Wir haben diese Gruppe jetzt auch als Transformationsgruppe auf unserem Raum der Kreise. Aber es gibt noch mehr lineare Transformationen, welche Kreise in Kreise überführen, nämlich die

Streckungen: Eine Streckung

$$x = ux', \quad y = uy', \quad u \neq 0,$$

führt unseren Standardkreis über in den Kreis mit der Gleichung

$$\begin{aligned} & (ux')^2 + (uy')^2 - 2\xi ux' - 2\eta uy' + \zeta \\ = \;& u^2 \cdot [(x')^2 + (y')^2 - 2\frac{\xi}{u}x' - 2\frac{\eta}{u}y' + \frac{\zeta}{u^2} \\ \sim \;& (x')^2 + (\eta')^2 - 2\xi' x' - 2\eta' y' + \zeta' \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

mit

$$\xi' = \frac{\xi}{u}, \quad \eta' = \frac{\eta}{u}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{u^2}.$$

Die Streckungen und Bewegungen zusammen erzeugen eine Gruppe, die wir die konforme Gruppe nennen wollen Sie führt Kreise in Kreise über und erhält die Winkel.

Inversionen: Auch die Inversion an einem Kreis führt (die meisten) Kreise in Kreise über. Wir wollen uns das Resultat einer Inversion im Raum der Kreise ansehen. Mit einer Transformation der konformen Gruppe können wir den Inversionskreis in den Einheitskreis transformieren. Deswegen brauchen wir uns nur die Inversion

$$x = \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2}, \quad y = \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2}$$

am Einheitskreis ansehen. Sie führt unseren Standardkreis über in den Kreis mit der Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{(x')^2 + (y')^2}{((x')^2 + (y')^2)^2} - 2\xi\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} - 2\eta\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} + \zeta \\ \sim \;& 1 - 2\xi x' - 2\eta y' + \zeta((x')^2 + (y')^2) \\ \sim \;& (x')^2 + (y')^2 - 2\frac{\xi}{\zeta}x' - 2\frac{\eta}{\zeta}y' + \frac{1}{\zeta} \\ = \;& (x')^2 + (y')^2 - 2\xi' x' - 2\eta' y' + \zeta' \end{aligned}$$

mit

$$\xi' = \frac{\xi}{\zeta}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\zeta}, \quad \zeta' = \frac{1}{\zeta}.$$

Für $\zeta = 0$ ist diese Transformation nicht definiert. Aber das wissen wir ja schon. Dann geht unser Kreis durch das Inversionszentrum und sein inverses Bild ist eine Gerade, und kein Kreis.

Die Inversion an Kreisen ist mit konformen Abbildungen im folgenden Sinn verträglich:

Satz (Inversion und konforme Abbildungen): *Es sei K ein Kreis und I_K die Inversion an K. Dann gilt für jede konforme Abbildung T:*

$$I_{T(K)} \circ T = T \circ I_K.$$

Beweis. Der Kreis K habe den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ und den Radius r. Der Punkt $\mathbf{x}'$ ist invers zu $\mathbf{x}$, wenn er auf demselben Halbstrahl durch $\mathbf{m}$ liegt, wie $\mathbf{x}$, und wenn

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \| = r^2.$$

Das Bild $T(K)$ von K unter der konformen Abbildung T ist ein Kreis mit Mittelpunkt $T(\mathbf{m})$ und Radius $c \cdot r$, wo $c \in \mathbb{R}^*$ der Faktor ist, um den T alle Entfernugen streckt. Weil T Halbstrahlen in Halbstrahlen überführt, liegen $T(\mathbf{x})$ und $T(\mathbf{x}')$ auf demselben Halbstrahl durch $T(\mathbf{m})$. Außerdem ist

$$\| T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{m}) \| \cdot \| T(\mathbf{x}') - T(\mathbf{m}) \| = c^2 \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \| \cdot \| \mathbf{x}' - \mathbf{m} \| = (c \cdot r)^2.$$

Also ist $T(\mathbf{x}')$ invers zu $T(\mathbf{x})$ bezüglich $T(K)$. In Formeln heißt das

$$I_{T(K)}(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}') = T(I_K(\mathbf{x})).$$

Und weil dies für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{m}$ gilt, folgt $T \circ I_K = I_{T(K)} \circ T$. □

Damit können wir Eigenschaften der Inversion beweisen, wenn wir sie nur am Einheitskreis nachprüfen. Die Eigenschaft um die es mir hier geht ist folgende: Es sei $\mathbf{c} = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$ der Parameterpunkt eines Kreises C. Wir haben soeben gesehen: der Kreis C' invers zu C in Bezug auf den Einheitskreis hat den Parameterpunkt $\mathbf{c}' = (\xi/\zeta, \eta/\zeta, 1/\zeta)$. Die beiden Punkte $\mathbf{c}$ und $\mathbf{c}'$ sind kollinear mit dem Parameterpunkt $\mathbf{e} = (0, 0, -1)$ des Einheitskreises, denn

$$\left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) \cdot \mathbf{e} + \frac{1}{\zeta}\mathbf{c} = \mathbf{c}'.$$

Weil wir Kreise mit Translationen hin- und herschieben können, gilt diese Eigenschaft nicht nur für die Inversion am Einheitskreis E, sondern auch für die Inversion an einem beliebigen Kreis $T(E)$. Damit haben wir:

Satz: *Es sei K ein Kreis mit Parameterpunkt $\mathbf{k}$ und C ein beliebiger Kreis nicht durch den Mittelpunkt von K, mit Parameterpunkt $\mathbf{c}$. Ist $\mathbf{c}'$ der Parameterpunkt des zu C bezüglich K inversen Kreises, so sind $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ und $\mathbf{k}$ kollinear.*

Das kann man insbesondere auf Nullkreise anwenden. Ein Nullkreis ist ein Punkt mit Parameterpunkt $\mathbf{p} \in \Pi$. Der inverse Nullkreis ist der bezüglich K inverse Punkt. Ist also $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, nicht der Mittelpunkt von K, so suchen wir den Punkt $\mathbf{p} = (x, y, x^2 + y^2) \in \Pi$ über $\mathbf{x}$. Ist $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ die Verbindungsgerade von $\mathbf{p}$ mit $\mathbf{k}$, so schneidet Λ das Paraboloid Π in einem weiteren Punkt $\mathbf{p}'$, der über dem (bezüglich K) inversen Punkt $\mathbf{x}'$ liegt.

Das Rotationsparaboloid ist eine quadratische Fläche. Und die Geometrie quadratischer Flächen entsteht aus der Aufgabe, solche Flächen mit Geraden zu schneiden. Wir wollen deswegen zuerst die (eindimensionalen) Mengen von Kreisen verstehen, welche durch Geraden im drei-dimensionalen ξ, η, ζ-Raum parametrisiert werden.

2.2 Kreisbüschel

Definition: Ein Keisbüschel ist eine Menge $\{K_{\mathbf{p}},\ \mathbf{p} \in \Lambda\}$ von Kreisen $K_{\mathbf{p}}$, welche durch eine Gerade Λ im ξ, η, ζ–Raum parametrisiert wird.

Unsere erste Aufgabe ist die Klassifikation solcher Kreissysteme.

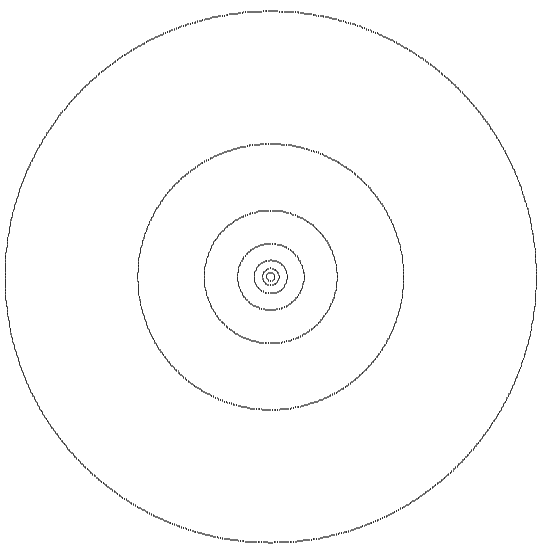
Zunächst handeln wir den einfachsten Fall ab, den Fall nämlich, wo die Parametergerade Λ parallel zur ζ–Achse liegt. Wir können dann

$$\Lambda: \quad \xi = a,\ \eta = b$$

schreiben. Die Punkte $(\xi, \eta, \zeta) \in \Lambda$ parametrisieren also Kreise mit dem festen Mittelpunkt (a, b). Ein Kreis mit diesem Mittelpunkt und Radius r gehört zum Punkt $(\xi, \eta, \zeta) \in \Lambda$ mit

$$\zeta = a^2 + b^2 - r^2 < a^2 + b^2.$$

Das sind alle Punkte auf Λ unterhalb des Durchstoßpunktes dieser Geraden durch das Rotationsparaboloid Π. Der Durchstoßpunkt selbst parametrisiert den Nullkreis mit Zentrum (a, b), und die Punkte über dem Durchstoßpunkt zählen nicht, sie parametrisieren imaginäre Kreise. Wir nennen ein solches Kreisbüschel *konzentrisches Büschel*.



Konzentrische Büschel werden nicht oft auftreten.

Betrachten wir jetzt eine beliebige Gerade Λ im $\mathbb{R}^3$ der Kreise. Punkte $\mathbf{p} \in \Lambda$ gehören zu einem richtigen Kreis, wenn sie unterhalb des Paraboloids Π liegen. Als erstes überlegen wir uns, daß jede Gerade Λ solche Punkte enthält:

Wenn die Gerade Λ nicht parallel zur ξ, η–Ebene ist, schneidet sie diese Ebene. Dann enthält sie auch Punkte $\mathbf{p}$ unterhalb dieser Ebene. Diese liegen dann auch unterhalb von Π. Wenn aber Λ in einer Ebene $\zeta = c$ parallel zu dieser Koordinatenebene liegt, dann liegen nur die Punkte (ξ, η, c) mit $c > \xi^2 + \eta^2$ oberhalb Π. Das sind die Punkte im Inneren eines Kreises. Und Λ kann natürlich nicht ganz im Inneren des Kreises liegen, muß also auch in diesem Fall Punkte unterhalb Π enthalten.

Wir können also annehmen,

$$\Lambda = \{\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{p}',\ \lambda + \mu = 1\}$$

wird von zwei Punkten $\mathbf{p} = (a, b, c)$ und $\mathbf{p}' = (a', b', c')$ unterhalb Π aufgespannt. Diese gehören zu zwei echten Kreisen

$$\begin{aligned} K: &\quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \\ K': &\quad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0. \end{aligned}$$

Der allgemeine Punkt $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{p}' \in \Lambda$ gehört zum Kreis mit der Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2(\lambda a + (1-\lambda)a') \cdot x - 2(\lambda b + (1-\lambda)b') \cdot y + \lambda c + (1-\lambda)c' &= \\ \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) + (1-\lambda) \cdot (x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c') &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist eine Linearkombination der Gleichungen von K und K'. Daraus ziehen wir eine erste Folgerung:

Spannen die Kreise K und K' ein Kreisbüschel auf, so gehen alle Kreise des Büschels durch die Schnittpunkte von K und K'.

Die Schnittpunkte von K und K' heißen *Basispunkte* des Kreisbüschels. Das ist schön, nur brauchen die Kreise K und K' ja gar keine Schnittpunkte zu besitzen! Unsere Klassifikation der Kreisbüschel wird auf die Klassifikation der möglichen Mengen von Basispunkten hinauslaufen.

Die Schnittpunkte von K und K' könnte man berechnen, indem man x (oder y) aus der Gleichung für K' berechnet, und dann in die Gleichung für K einsetzt. Man hat dann noch eine Gleichung für eine Unbekannte y (oder x). Das macht man aber nicht. Man geht über zu der linearen Gleichung

$$A := K - K': \quad 2(a' - a) \cdot x + 2(b' - b) \cdot y + c - c' = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden A. Sie heißt die *Achse* der beiden Kreise K und K'. Man kann sie charakterisieren als die Menge der Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, die bezüglich K und K' dieselbe Potenz besitzen. Die Potenz $p(\mathbf{x})$ eines Punktes $\mathbf{x}$ erhält man ja, indem man $\mathbf{x}$ in die Kreisgleichung einsetzt. Die beiden Kreisgleichungen sind also $p(\mathbf{x}) = 0$ und $p'(\mathbf{x}) = 0$. Und ihre Differenz $p(\mathbf{x}) - p'(\mathbf{x})$ verschwindet, wenn $\mathbf{x}$ bezüglich K und K' dieselbe Potenz besitzt. Daraus folgt insbesondere: Für Punkte $\mathbf{x} \in A$ auf der Achse sind die Abschnitte der Tangenten an K und K' gleich lang.

Die Achse geht durch die Schnittpunkte von K und K', und umgekehrt: Jeder Schnittpunkt von K und A gehört auch zu K'. Um die Schnittpunkte der beiden Kreise K und K' zu finden, muß man also einen der Kreise mit der Achse A schneiden. Wir wissen, was dabei passieren kann (Abschnitt 1.1). Die Achse A kann eine Sekante oder eine Tangente sein, oder überhaupt keine Schnittpunkte haben. Entsprechend gibt es für das Büschel zwei, einen oder keinen Basispunkt.

Wir wollen die Schnittpunkte nicht in der ganz allgemeinen Situation anschauen, sondern die Koordinaten so wählen, daß die Achse A die y-Achse ist. Das ist äquivalent mit

$$b = b', \quad c = c'.$$

Die Kreismittelpunkte $\mathbf{m}$ und $\mathbf{m}'$ besitzen dann dieselben y-Koordinaten. Durch eine Translation in y-Richtung können wir diese auf 0 normieren:

$$b = b' = 0.$$

Dann sind die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0.$$

Und das Büschel besteht aus den Kreisen

$$x^2 + y^2 - 2(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot a') \cdot x + c = 0.$$

Hier ist $t := \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot a'$ die x-Koordinate des Büschelkreismittelpunktes. Wenn λ alle reellen Zahlen durchläuft, durchläuft auch diese x-Koordinate alle reellen Werte. Wir können sie gleich als Büschelaprameter wählen. Dann nimmt unser Kreisbüschel die Normalform

$$x^2 + y^2 - 2t \cdot x + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

an. Diese Normalform enthält noch einen Parameter c.

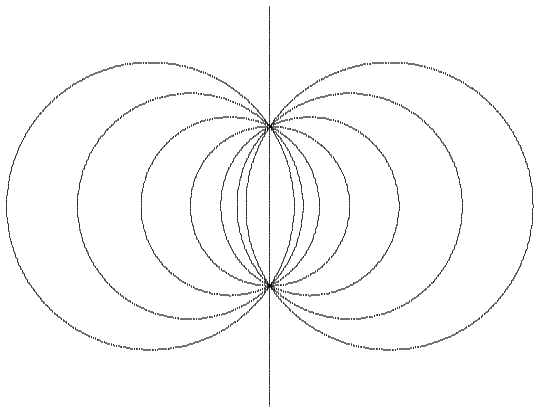
Der Parameter c hat folgende Bedeutung: Die Basispunkt des Büschels sind die Schnittpunkte der Büschelkreise mit der Achse $x = 0$. Für ihre y-Koordinaten folgt

$$y^2 + c = 0.$$

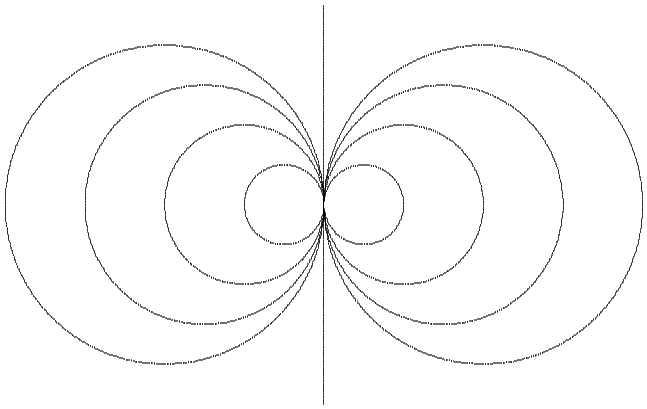
Das Büschel hat also

zwei Basispunkte	$(0, \pm\sqrt{-c})$	falls	$c < 0$
einen Basispunkt	$(0, 0)$	falls	$c = 0$
keinen Basispunkt		falls	$c > 0$

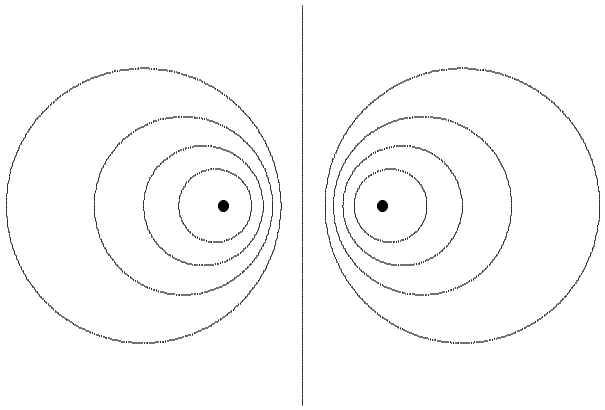
$x^2 + y^2 - 2tx - 1 = 0$
Kreisradius $\sqrt{t^2 + 1}$
zwei Basispunkte
kein Nullkreis



$x^2 + y^2 - 2tx = 0$
Kreisradius t
ein Basispunkt
ein Nullkreis



$x^2 + y^2 - 2tx + 1 = 0$
Kreisradius $\sqrt{t^2 - 1}$
kein Basispunkt
zwei Nullkreise



Die Achse A ist Achse für je zwei Kreise K und K' des Büschels. Die Punkte $\mathbf{a} \in A$ haben also dieselbe Potenz für alle Kreise des Büschels. Insbesondere sind also die Längen der Tangentenabschnitte auf den von ihnen aus an alle Büschelkreise gezogenenen Tangenten gleich. Man nennt diese Gerade A auch die *Achse des Kreisbüschels* und die drei Typen von Kreisbüscheln mit Achse auch koaxiale Büschel oder koaxiale Systeme von Kreisen.

Wenn man von den konzentrischen Kreisbüscheln absieht, gibt es also drei verschiedene Sorten von Büscheln. Sie unterscheiden sich in Bezug auf ihre Basispunkte. Aber auch in Bezug auf die im Büschel enthaltenen Nullkreise. Diese Nullkreise gehören zu den Schnittpunkten der Parametergeraden Λ mit dem Rotationsparaboloid Π. Es kann zwei, einen oder keinen dieser Schnittpunkte geben. Entsprechend ist Λ eine Sekante, Tangente oder nichts Besonderes in Bezug auf das Paraboloid:

Λ	$\Lambda \cap \Pi$	Nullkreise	Basispunkte
Sekante	2	2	0
Tangente	1	1	1
nichts Besonderes	0	0	2

2.3 Polarität im Raum der Kreise

Wie zu jeder Quadrik, gibt es auch zum Rotationsparaboloid Π eine Polarität. Wir wollen uns dieser vorsichtig nähern, indem wir zuerst die Tangentialebene $T_{\mathbf{p}}(\Pi)$ an das Rotationsparaboloid in einem Punkt

$$\mathbf{p} = (\xi, \eta, \zeta), \quad \zeta = \xi^2 + \eta^2$$

berechnen. Das können wir wie in der Analysis machen: Wir fassen Π als den Graphen der Funktion $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ auf und differenzieren partiell:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 2\xi, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 2\eta.$$

Die Tangentialebene besteht also aus allen Punkten $\mathbf{p}' = (\xi', \eta', \zeta')$ mit

$$\begin{aligned} \zeta' - \zeta &= 2\xi \cdot (\xi' - \xi) + 2\eta \cdot (\eta' - \eta) \\ &= 2\xi\xi' + 2\eta\eta' - 2(\xi^2 + \eta^2) \\ &= 2\xi\xi' + 2\eta\eta' - 2\zeta. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') := 2\xi\xi' + 2\eta\eta' - \zeta - \zeta'$$

und haben dann als Gleichung unserer Tangentialebene $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0$. Jede Gerade Λ durch $\mathbf{p}$ und und einen anderen Punkt $\mathbf{p}' \in T_{\mathbf{p}}(\Pi)$ berührt das Paraboloid Π in $\mathbf{p}$.

Was bedeutet die Bedingung $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0$ für die Kreise $K_{\mathbf{p}'}$? Wenn wir $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ in diese Bedingung einsetzen, finden wir

$$-P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi'\xi - 2\eta'\eta + \zeta' = 0.$$

Diese Bedingung bedeutet gerade, daß im Punkt (ξ, η) die Gleichung des Kreises $K_{\mathbf{p}'}$ verschwindet, der Kreis $K_{\mathbf{p}'}$ geht durch den Punkt (ξ, η). Wir sehen: Ist $\mathbf{p} \in \Pi$ der Parameterpunkt eines Nullkreises zum Punkt $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, so parametrisiert die Tangentialebene gerade die Menge aller Kreise, welche durch diesen Punkt (ξ, η) gehen.

Jetzt vertauschen wir die Rolle von $\mathbf{p} \in \Pi$ und $\mathbf{p}'$. Wir halten $\mathbf{p}'$ fest. Die Punkte $\mathbf{p} \in \Pi$ mit $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0$ sind dann die Berührpunkte von Tangenten an Π, die man durch $\mathbf{p}'$ legen kann. Die Menge dieser Berührpunkte ist der Durchschnitt

$$\Pi \cap P_{\mathbf{p}'}(\Pi)$$

des Paraboloids mit der Ebene

$$P_{\mathbf{p}'} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \ P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0\}.$$

Diese Ebene heißt die *Polarebene* des Punktes $\mathbf{p}'$ in Bezug auf das Paraboloid.

Die Funktion $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ der beiden Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3$ ist symmetrisch in $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}'$. Der Punkt $\mathbf{p}$ liegt also genau dann auf der Polarebene des Punktes $\mathbf{p}'$, wenn $\mathbf{p}'$ auf der Polarebene

des Punktes $\mathbf{p}$ liegt. Dies ist der Fall wenn $P(\mathbf{p},\mathbf{p}')=0$, und die beiden Punkte heißen dann *konjugiert*. Wes bedeutet diese Konjugiertheit

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}')=2\xi\xi'+2\eta\eta'-\zeta-\zeta'=0$$

für die zugehörigen Kreise $K_{\mathbf{p}}$ und $K_{\mathbf{p}'}$?

Satz (Orthogonale Kreise): *Zwei Kreise K und K' stehen genau dann aufeinander senkrecht (in ihren zwei Schnittpunkten), wenn die zugehörigen Parameterpunkte konjugiert sind:*

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}')=0 \quad \Longleftrightarrow K_{\mathbf{p}} \perp K_{\mathbf{p}'}.$$

Beweis. Es seien K, K' zwei Kreise mit den Mittelpunkten $\mathbf{m},\mathbf{m}'$ und den Radien r, r'. Ist $\mathbf{a} \in K \cap K'$ ein Schnittpunkt, und stehen die Kreise dort aufeinander senkrecht, dann stehen auch die zu diesem Punkt gehörigen Radiusvektoren $\mathbf{a}-\mathbf{m}$ und $\mathbf{a}-\mathbf{m}'$ aufeinander senkrecht. Nach Pythagoras gilt dann

$$\parallel \mathbf{m}-\mathbf{m}' \parallel^2 = r^2+(r')^2.$$

Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt, so ist

$$(r-r')^2 = r^2+(r')^2-2rr' < \parallel \mathbf{m}-\mathbf{m}' \parallel^2 < r^2+(r')^2+2rr' = (r+r')^2.$$

Die Distanz der Kreismittelpunkte ist größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien. Beide Kreise schneiden sich. Und wenn $\mathbf{a}$ ein Schnittpunkt ist, so muß das Dreieck $\Delta\mathbf{mam}'$ nach Pythagoras bei $\mathbf{a}$ einen rechten Winkel haben, die Kreise schneiden sich orthogonal.

Jetzt brauchen wir die Pythagorasbedingung nur noch umzuschreiben:

$$\begin{aligned} & \parallel \mathbf{m}-\mathbf{m}' \parallel^2 - r^2-(r')^2 \\ = \;& (\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2-(\xi^2+\eta^2-\zeta)-((\xi')^2+(\eta')^2-\zeta') \\ = \;& -2\xi\xi'-2\eta\eta'+\zeta+\zeta' \\ = \;& -P(\mathbf{p},\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

□

Die Polarebene $P_{\mathbf{p}}$ parametrisiert also alle Kreise, die auf dem Kreis $K_{\mathbf{p}}$ senkrecht stehen. Diese Polarebene haben wir in 2.1 schon einmal betrachtet und dort $E_{\mathbf{p}}$ genannt. Dort haben wir gesehen: $P_{\mathbf{p}} \cap \Pi$ besteht aus allen Parameterpunkten von Nullkreisen, die über den Punkten des Kreises $K_{\mathbf{p}}$ liegen. Konsequenterweise müssen wir diese Nullkreise auch als Kreise auffassen, die auf $K_{\mathbf{p}}$ senkrecht stehen. Ist speziell $\mathbf{p} \in \Pi$, so ist $K_{\mathbf{p}}$ ein Nullkreis, so ist $P_{\mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}}$ die Tangentialebene und parametrisiert alle Kreise durch den zu $\mathbf{p}$ gehörigen Punkt der Ebene. Dies fällt jetzt auch unter den Begriff „orthogonale Kreise“.

Die Konjugiertheitsbeziehung zwischen Punkten im dreidimensionalen Raum kann man auf Geraden ausdehnen: Zwei Geraden Λ und $\Lambda' \subset \mathbb{R}^3$ heißen konjugiert, wenn alle Punkte $\mathbf{p} \in \Lambda$ zu allen Punkten $\mathbf{p}' \in \Lambda'$ konjugiert sind. Und das passiert folgendermaßen: Sei Λ eine Gerade, aufgespannt von zwei Punkten $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$. Dazu gehören zwei Polarebenen

$$E_1:\ 2\xi_1\xi'+2\eta_1\eta'-\zeta_1-\zeta'=0, \quad E_2:\ 2\xi_2\xi'+2\eta_2\eta'-\zeta_2-\zeta'=0.$$

Wären diese beiden Ebenen parallel, so wären ihre Koeffizientenvektoren linear abhängig:

$$(2\xi_1, 2\eta_1, 1) \sim (2\xi_2, 2\eta_2, 1).$$

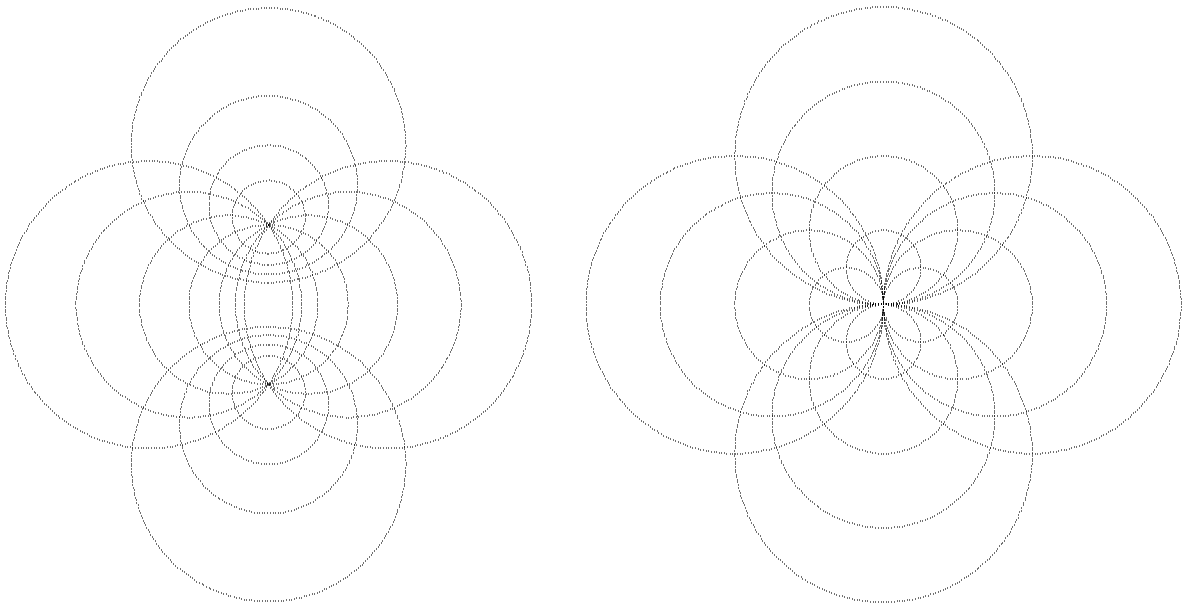
Daraus würde $\xi_1 = \xi_2$, $\eta_1 = \eta_2$ folgen. Die zugehörigen Kreise wären konzentrisch und die Gerade Λ würde ein konzentrisches Büschel parametrisieren. Diesen Fall wollen wir ausschließen.

Wenn also Λ kein konzentrisches Kreisbüschel parametrisiert, schneiden sich die beiden Ebenen E_1 und E_2 in einer Geraden Λ'. Alle Punkte $\mathbf{p}' \in \Lambda'$ sind konjugiert zu $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$. Die Polarebene $P_{\mathbf{p}'}$ enthält $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ und deswegen auch die ganze Gerade Λ. Alle Punkte $\mathbf{p}' \in \Lambda'$ sind also zu allen Punkten $\mathbf{p} \in \Lambda$ konjugiert.

Zu jeder Geraden Λ, die kein konzentrisches sondern ein koaxiales Büschel parametrisiert, gibt es also eine eindeutig bestimmte konjugierte Gerade Λ'. Alle Kreise K des Büschels Λ stehen senkrecht auf allen Kreisen K' des konjugierten Büschels Λ'.

Satz (Zu zwei Kreisen orthogonale Kreise): *Alle Kreise, die auf zwei festen Kreisen senkrecht stehen, bilden ein Kreisbüschel.*

Beweis. Die Parameterpunkte $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ der festen Kreise K_1 und K_2 spannen ein Büschel $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ auf. Die Kreise des konjugierten Büschels Λ' stehen senkrecht auf allen Kreisen des Büschels Λ, also auch auf K_1 und K_2. Und umgekehrt: Ein Kreis $K_{\mathbf{p}}$, der auf K_1 und K_2 senkrecht steht, gehört zu einem Parameter $\mathbf{p}$ im Durchschnitt der beiden Polarebenen $P_{\mathbf{p}_1}$ und $P_{\mathbf{p}_2}$. Wenn die Kreise K_1 und K_2 verschieden sind, sind auch diese Polarebenen voneinander verschieden, ihr Durchschnitt ist eine Gerade, und muß mit Λ' übereinstimmen. □



Satz (Konjugierte Kreisbüschel): *a) Hat das Kreisbüschel Λ zwei Basispunkte, so hat das konjugierte Büschel Λ' keine Basispunkte (und umgekehrt). Die Mittelpunkte der Kreise im konjugierten Büschel Λ' liegen auf der Achse des Büschels Λ. Die Nullkreise des Büschels Λ' sind die Basispunkte von Λ.*

b) Hat das Kreisbüschel Λ nur einen Basispunkt und die Achse A, so hat das konjugierte Büschel Λ' auch nur einen Basispunkt, und seine Achse A' steht auf A senkrecht.

Beweis. a) Wir nehmen das Büschel Λ in Normalform

$$x^2 + y^2 - 2t \cdot x - 1 = 0$$

an. Die Gerade Λ besteht dann aus allen Punkten $(t, 0, 1)$. Die Polarebenen der Punkte $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 1)$ und $\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 1)$ sind

$$E_1 : 2\xi' - 1 - \zeta' = 0, \quad E_2 : -2\xi' - 1 - \zeta' = 0.$$

Ihre Schnittgerade ist $\Lambda : \ \xi' = 0, \zeta' = -1$ und dazu gehört das Büschel

$$x^2 + y^2 - 2ty + 1 = 0.$$

Daraus folgen alle Aussagen in a).

b) Jetzt nehmen wir

$$\Lambda : \quad x^2 + y^2 - 2t \cdot x = 0$$

an. Diese Gerade wird aufgespannt von den beiden Punkten $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)$ und $\mathbf{p}_2 = (-1, 0, 0)$ mit den Polarebenen $E_1 : \ 2\xi' - \zeta' = 0$ und $E_2 : \ -2\xi' - \zeta' = 0$. Die konjugierte Gerade ist $\xi' = \zeta' = 0$ und parametrisiert das Büschel $\Lambda' : \ x^2 + y^2 - 2t \cdot y = 0$. □

Die Achsen konjugierter Kreisbüschel stehen aufeinander senkrecht. In 2.2 haben wir schon gesehen, daß auf der Achse eines Büschels lauter Punkt $\mathbf{x}$ liegen, von denen aus der Tangentenabschnitt an alle Kreise des Büschels gleich ist. Der Kreis um $\mathbf{x}$ mit dem Radius gleich diesem Tangentenabschnitt steht also auf allen Kreisen des Büschels senkrecht, er gehört zum konjugierten Büschel.

Die Funktion

$$P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 2\xi\xi' + 2\eta\eta' - \zeta - \zeta'$$

auf dem Raum der Kreise ist eine symmetrische Bilinearform. Wir haben gesehen, es ist $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0$ genau dann, wenn die Kreise $K_{\mathbf{p}}$ und $K_{\mathbf{p}'}$ orthogonal sind. Aber auch wenn $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \neq 0$ ist, hat der Wert dieser Bilinearform eine geometrische Bedeutung für die Kreise. Dazu schreiben wir

$$P(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = [\xi^2 + \eta^2 - \zeta] + [(\xi')^2 + (\eta')^2 - \zeta'] - [(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2].$$

In dieser Form treten die Radien r und r' der Kreise $K_{\mathbf{p}}$ und $K_{\mathbf{p}'}$ auf:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 - \zeta &= r^2 \\ (\xi')^2 + (\eta')^2 - \zeta' &= (r')^2. \end{aligned}$$

Und die dritte auftretende Klammer ist der quadrierte Abstand $d := \| \mathbf{m} - \mathbf{m}' \|$ der Kreismittelpunkte:

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = \| \mathbf{m} - \mathbf{m}' \|^2 = d^2.$$

Die Bedeutung der Bilinearform ist also

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}') = r^2 + (r')^2 - d^2.$$

Die beiden Kreise schneiden sich genau dann, wenn

$$\begin{gathered}
|r - r'| \leq d \leq r + r' \\
(r - r')^2 \leq d^2 \leq (r + r')^2 \\
r^2 + (r')^2 - 2rr' \leq d^2 \leq r^2 + (r')^2 + 2rr' \\
-2rr' \leq d^2 - r^2 - (r')^2 \leq 2rr'
\end{gathered}$$

$$-1 \leq \frac{d^2 - r^2 - (r')^2}{2rr'} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')}{2rr'} \leq 1.$$

Unter Verwendung der zur Bilinearform P gehörenden quadratischen Form

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}) = 2\xi^2 + 2\eta^2 - 2\zeta = 2r^2$$

können wir die Bedingung für reelle Schnittpunkte der beiden Kreise auch

$$\frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2}{4r^2(r')^2} = \frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2}{P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}')} \leq 1$$

schreiben, also

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 \leq P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}').$$

Und wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann haben wir den

Satz (Schnittwinkel von Kreisen): *Schneiden sich die Kreise $K_{\mathbf{p}}$ und $K_{\mathbf{p}'}$, so gilt für ihren Schnittwinkel α:*

$$cos(\alpha)^2 = \frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2}{P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}')}.$$

Beweis. Sei $\mathbf{a} \in K_{\mathbf{p}} \cap K_{\mathbf{p}'}$ ein Schnittpunkt beider Kreise. Der Schnittwinkel α der Kreislinien stimmt überein dem Winkel zwischen den Radiusvektoren $\measuredangle(\mathbf{m}-\mathbf{a}, \mathbf{m}'-\mathbf{a})$. Deswegen ist

$$cos(\alpha) = \frac{(\mathbf{m}-\mathbf{a}, \mathbf{m}'-\mathbf{a})}{rr'}.$$

Das Skalarprodukt berechnen wir mit der Polarisationsformel

$$\begin{aligned}
-2 \cdot (\mathbf{m}-\mathbf{a}.\mathbf{m}'-\mathbf{a}) &= \| (\mathbf{m}-\mathbf{a}) - (\mathbf{m}'-\mathbf{a}) \|^2 - \| \mathbf{m}-\mathbf{a} \|^2 - \| \mathbf{m}'-\mathbf{a} \|^2 \\
&= \| \mathbf{m}-\mathbf{m}' \|^2 - r^2 - (r')^2 \\
&= -P(\mathbf{p},\mathbf{p}').
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$cos(\alpha) = -\frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')}{2 \cdot r \cdot r'}$$

und

$$cos(\alpha)^2 = \frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2}{4 \cdot r^2 \cdot (r')^2} = \frac{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2}{P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}')}.$$

□

In diesem Satz kommt nicht $cos(\alpha)$ sondern das Quadrat $cos(\alpha)^2$ vor. Das macht nichts. Wenn

$$cos(\alpha_1)^2 = cos(\alpha_2)^2$$

für zwei Winkel α_1, α_2 gilt, dann bedeutet das für die Winkel

$$\alpha_2 = \pm\alpha_1 \text{ oder } \pi \pm \alpha_1.$$

Für die Kreise bedeutet das genau dasselbe, welchen dieser Winkel man als den Winkel zwischen den Kreisen ansieht, ist nur eine Vereinbarungssache.

Die Kreise $K_{\mathbf{p}'}$, welche einen festen Kreis $K_{\mathbf{p}}$ unter einem festen Winkel α mit $cos(\alpha)^2 = c$ schneiden, gehören zu Parameterpunkten $\mathbf{p}'$, welche der Gleichung

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 - c \cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') = 0$$

genügen. Diese Bedingung enthält als Spezialfälle

α	c	Bedingung	Kreise
$\pm\pi/2$	0	$P(\mathbf{p},\mathbf{p}') = 0$	orthogonal
$0,\ \pi$	1	$P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 - P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') = 0$	berühren sich

Was für eine Menge wird nun durch obige Bedingung im $\mathbb{R}^3$ der Kreise definiert? Sie ist eine quadratische Gleichung für $\mathbf{p}' = (\xi', \eta', \zeta')$, definiert also eine Quadrik im Raum der Kreise. Der affine Typ dieser Quadrik ist unabhängig von dem fest gewählten Kreis $K_{\mathbf{p}}$. Wir wollen diesen Typ bestimmen, indem wir $K_{\mathbf{p}}$ als Einheitskreis und also $\mathbf{p} = (0, 0, -1)$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{p},\mathbf{p}') &= 1 - \zeta' \\
P(\mathbf{p},\mathbf{p}) &= 2 \\
P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') &= 2((\xi')^2 + (\eta')^2 - \zeta') \\
P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 - c \cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') &= (1-\zeta')^2 - 4c \cdot ((\xi')^2 + (\eta')^2 - \zeta') \\
&= 1 + (4c-2)\zeta' + (\zeta')^2 - 4c(\xi')^2 - 4c(\eta')^2 \\
&= (\zeta' + 2c - 1)^2 + 1 - (2c-1)^2 - 4c((\xi')^2 + (\eta')^2).
\end{aligned}$$

Dies ist ein Rotationshyperboloid mit Mittelpunkt in $(0, 0, 1-2c)$. Wegen $0 \leq (2c-1)^2 \leq 1$ ist es einschalig. Als Spezialfälle erhalten wir

für $c = 0$ die Ebene $\zeta' = 1$, die Polarebene des Punktes $\mathbf{p} = (0, 0, -1)$,

für $c = 1$ einen Kreiskegel

$$(\zeta' + 1)^2 = 4((\xi')^2 + (\eta')^2)$$

mit Spitze im Punkt $\mathbf{p}$.

(Hätten wir einen anderen Kreis genommen, nicht mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt, hätten wir natürlich eine andere Quadrik bekommen. Es wäre immer noch ein einschaliges Hyperboloid gewesen, ob es ein Rotationshyperboloid sein wird, weiß ich nicht.)

Die Schnittpunkte des Hyperboloids $P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 = c \cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}')$ mit dem Rotationsparaboloid $\Pi : \; P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') = 0$ sind leicht zu finden: Es sind genau die Schnittpunkte von Π mit der Polarebene $P_{\mathbf{p}} : \; P(\mathbf{p},\mathbf{p}') = 0$, sie bilden also einen Kreis, den Kreis über $K_{\mathbf{p}}$, der uns schon öfter begegnete. In diesen Schnittpunkten berührt das Hyperboloid das Paraboloid Π: Die Tangentialebenen des Hyperboloids in diesen Punkten sind orthogonal zum Gradienten

$$\begin{aligned} & grad_{\mathbf{p}'}(P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 - c \cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') \\ = \; & 2\underbrace{P(\mathbf{p},\mathbf{p}')}_{=0} \cdot grad_{\mathbf{p}'} P(\mathbf{p},\mathbf{p}') - c \cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot grad_{\mathbf{p}'} P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') \\ = \; & -c \cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot grad_{\mathbf{p}'} P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') \\ \sim \; & grad_{\mathbf{p}'} P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') \end{aligned}$$

und stimmen mit den Tangentialebenen von Π überein.

Die *Berührbedingung*

$$P(\mathbf{p},\mathbf{p}')^2 - P(\mathbf{p},\mathbf{p}) \cdot P(\mathbf{p}',\mathbf{p}') = 0$$

wird uns später noch beschäftigen. Beim Einheitskreis $K_{\mathbf{p}}$ sahen wir, daß alle Kreise $K_{\mathbf{p}'}$ sie erfüllen, wenn $\mathbf{p}'$ auf dem Kreiskegel liegt, der das Rotationsparaboloid Π in seinem Schnittkreis mit der Polarebene $P_{\mathbf{p}}$ berührt. Die Mantellinien dieses Kegels sind genau die Tangenten, welche man von $\mathbf{p}$ aus an Π legen kann. Ist $K_{\mathbf{p}}$ ein beliebiger anderer Kreis, so wird durch die Berührbedingung (wahrscheinlich) kein Kreiskegel mehr definiert, aber immer noch ein Kegel (als affines Bild des Kreiskegels zum Einheitskreis). Die Mantellinien dieses Kegels sind immer noch die Tangenten von $\mathbf{p}$ aus an Π. Man nennt den Kegel den *Tangentialkegel* von $\mathbf{p}$ an Π. Die Mantellinien parametrisieren natürlich Kreisbüschel. Diese Büschel enthalten genau einen Nullkreis zu einem Punkt auf der Peripherie des Kreises $K_{\mathbf{p}}$. So ein Büschel ist also das Büschel der Kreise, welche $K_{\mathbf{p}}$ in einem festen seiner Punkte berühren.

2.4 Kreisscharen

Unter einer Kreisschar verstehen wir eine Menge von Kreisen, die durch eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ im Raum der Kreise parametrisiert wird. Unter einer Kurve wollen wir dabei eine differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^3$ verstehen. Die einfachsten Kurven sind Geraden Λ und parametrisieren Kreisbüschel. Die haben wir im letzten Abschnitt betrachtet.

Aber Kreisbüschel sind sehr spezielle Kreisscharen. Betrachten wir etwa die Schar der Kreise

$$(x-t)^2 + y^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

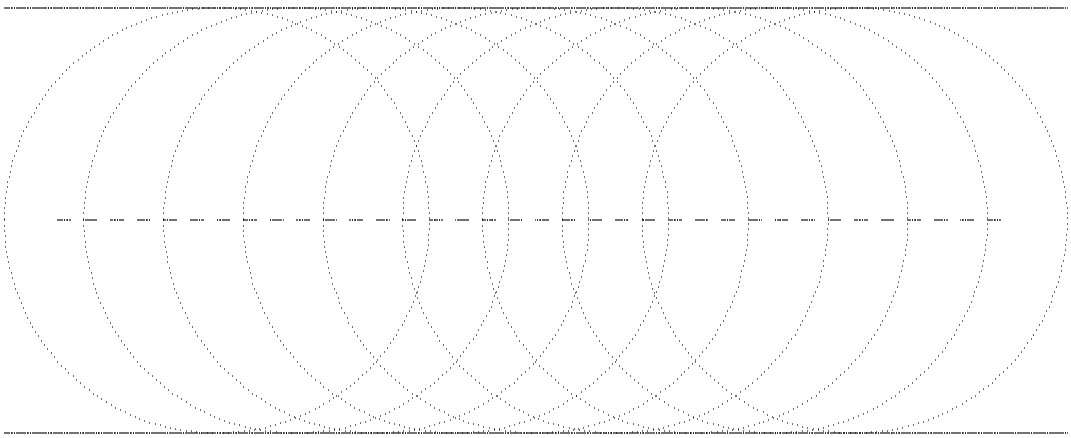
Dies sind alle Kreise vom Radius 1 mit Mittelpunkt auf der x-Achse. Die zugehörigen Parameterpunkte bekommen wir aus der umgeformten Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2t \cdot x + t^2 - 1 = 0.$$

Es sind die Punkte der nach oben geöffneten Parabel

$$\Gamma : \quad t \mapsto (\xi, \eta, \zeta) = (t, 0, t^2 - 1).$$

Die Kreise dieser Schar Γ überstreichen, anders als die Kreise eines Büschels, nicht die ganze Ebene, sondern nur einen Teil davon. Dieser Teil der Ebene wird von den beiden Geraden $y = \pm 1$ begrenzt.



Dies ist eine für Kreisscharen typische Situation: Die Kreise der Schar überstreichen einen Teil der Ebene, der von einer Kurve begrenzt wird. Man nennt diese Kurve die *Hüllkurve* der Schar. Unser erstes Ziel ist die Bestimmung dieser Hüllkurve.

Dazu geben wir uns die Kreise der Schar erst einmal naiv durch ihre Mittelpunkte $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ und ihre Radien $r(t)$ vor. Die von der Schar überstrichene Fläche ist das Bild der differenzierbaren Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, \varphi) & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) + r(t)cos(\varphi) \\ y(t) + r(t)sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir bezeichnen die Ableitungen von x, y, r nach dem Scharparameter t mit $\dot{x}, \dot{y}$ und $\dot{r}$. Wo die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{r}cos(\varphi) & -rsin(\varphi) \\ \dot{y} + \dot{r}sin(\varphi) & rcos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Maximalrang hat, dort liegen die Bildpunkte im Inneren des überstrichenen Gebietes (Satz von der Umkehrabbildung aus der Analysis). Wenn Parameter t, φ in die Hüllkurve abgebildet werden, muß die Funktionaldeterminante

$$\begin{array}{rl} & (\dot{x} + \dot{r}cos(\varphi)) \cdot rcos(\varphi) + (\dot{y} + \dot{r}sin(\varphi)) \cdot rsin(\varphi) \\ = & r\dot{x}cos(\varphi) + r\dot{r}cos^2(\varphi) + r\dot{y}sin(\varphi) + r\dot{r}sin^2(\varphi) \\ = & \dot{x}rcos(\varphi) + \dot{y}rsin(\varphi) + r\dot{r} \end{array}$$

verschwinden. Das geschieht in den Punkten, wo der Bildkreis

$$K(t): \quad (x-x(t))^2+(y-y(t))^2-r(t)^2=0$$

die Gerade

$$\dot{x}\cdot(x-x(t))+\dot{y}(y-y(t))+r\dot{r}=0$$

schneidet.

Jetzt übersetzen wir die Charakterisierung dieser Punkte in die ξ,η,ζ Koordinaten. Unsere Kreisschar sei also

$$\Gamma: \quad t\mapsto(\xi(t),\eta(t),\zeta(t)).$$

Dann ist

$$\begin{array}{rclcrcl} x(t) &=& \xi(t) & & \dot{x} &=& \dot{\xi} \\ y(t) &=& \eta(t) & & \dot{y} &=& \dot{\eta} \\ r^2(t) &=& \xi(t)^2+\eta(t)^2-\zeta(t) & & r\dot{r} &=& \xi\dot{\xi}+\eta\dot{\eta}-\frac{1}{2}\dot{\zeta}. \end{array}$$

Und die Gleichung der soeben berechneten Geraden ist

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(x-\xi(t))+\dot{\eta}(y-\eta(t))+\xi(t)\dot{\xi}+\eta(t)\dot{\eta}-\frac{1}{2}\dot{\zeta} &= \\ \dot{\xi}\cdot x+\dot{\eta}\cdot y-\frac{1}{2}\dot{\zeta} &\sim \\ 2\dot{\xi}\cdot x+2\dot{\eta}\cdot y-\dot{\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Geradengleichung ist die Differenz der Kreisgleichungen

$$\begin{array}{lcrcl} & & & & \text{Parameter} \\ K: & & x^2+y^2-2\xi x-2\eta y+\zeta=0 & \mathbf{p}(t) &= (\xi,\eta,\zeta) \\ K': & x^2+y^2-2(\xi+\dot{\xi})x-2(\eta+\dot{\eta})y+\zeta+\dot{\zeta}=0 & & \mathbf{p}(t)+\dot{\mathbf{p}} &= (\xi,\eta,\zeta)+(\dot{\xi},\dot{\eta},\dot{\zeta}) \end{array}$$

Das heißt, daß die Gerade die Achse der Kreise K und K' ist. Die beiden Kreise erzeugen das Kreisbüschel

$$\Lambda: \quad \mathbf{p}(t)+s\cdot\dot{\mathbf{p}},\ s\in\mathbb{R}.$$

Diese Gerade $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$ ist die *Tangente* $T_{\mathbf{p}(t)}(\Gamma)$ an die Kurve Γ im Punkt $\mathbf{p}(t)$.

Satz (Hüllkurve): *Ein Kreis der Schar Γ zum Parameter $\mathbf{p}(t)\in\Gamma$ schneidet die Hüllkurve in den Basispunkten des Kreisbüschels, das durch die Tangente $T_{\mathbf{p}(t)}(\Gamma)$ parametrisiert wird.*

Natürlich braucht dieses Büschel nicht immer Basispunkte zu besitzen. Die Bedingung dafür ist, daß sich die Kreise $K_{\mathbf{p}(t)}$ und $K_{\mathbf{p}(t)+\dot{\mathbf{p}}}$ schneiden, also

$$\begin{aligned} P(\mathbf{p},\mathbf{p}+\dot{\mathbf{p}})^2 &\le P(\mathbf{p},\mathbf{p})\cdot P(\mathbf{p}+\dot{\mathbf{p}},\mathbf{p}+\dot{\mathbf{p}}) \\ P(\mathbf{p},\mathbf{p})^2+2P(\mathbf{p},\mathbf{p})P(\mathbf{p},\dot{\mathbf{p}})+P(\mathbf{p},\dot{\mathbf{p}})^2 &\le P(\mathbf{p},\mathbf{p})^2+2P(\mathbf{p},\mathbf{p})P(\mathbf{p},\dot{\mathbf{p}})+P(\mathbf{p},\mathbf{p})P(\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}) \\ P(\mathbf{p},\dot{\mathbf{p}})^2 &\le P(\mathbf{p},\mathbf{p})P(\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Mit diesem Satz kann man die Hüllkurve auch praktisch ausrechnen: Für jeden Parameter t der Schar $\Gamma=\{\mathbf{p}(t)\}$ bestimme man die Tangente $T(t):=T_{\mathbf{p}(t)}(\Gamma)$ und die zu dieser Tangente

konjugierte Gerade $T'(t)$. Die Basispunkte des Kreisbüschels $T(t)$ sind die Nullkreise im konjugierten Büschel $T'(t)$. Ihre Parameterpunkte sind die Schnittpunkte der Geraden $T'(t)$ mit dem Paraboloid Π. Wenn t variiert, variieren diese Schnittpunkte auf einer Kurve, die auf dem Paraboloid Π liegt. Die Hüllkurve ist das Bild dieser Kurve in der x, y-Ebene.

Betrachten wir zunächst ein weiteres, sehr einfaches Beispiel, wo die Hüllkurve wieder aus zwei Geraden besteht, die sich aber nun schneiden sollen. Durch eine Bewegung können wir die beiden Geraden auf die Geraden durch den Nullpunkt mit den Gleichungen

$$y = \pm m \cdot x$$

transformieren. Kreise, welche diese beiden Geraden berühren, haben ihre Zentren auf den Koordinatenachsen. Betrachten wir etwa die Schar der Kreise

$$K: \quad (x-t)^2 + y^2 - r(t)^2 = 0$$

mit Mittelpunkten auf der x-Achse, wo wir $r(t)$ so bestimmen wollen, daß die Kreise unsere beiden vorgegebenen Geraden berühren. Für die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Kreise und der beiden Geraden haben wir

$$(x-t)^2 + m^2x^2 - r^2 = (1+m^2) \cdot x^2 - 2t \cdot x + t^2 - r^2 = 0.$$

Die Kreise berühren die Geraden, wenn die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung

$$D = t^2 - (1+m^2)(t^2 - r^2) = (1+m^2)r^2 - m^2t^2$$

verschwindet. Daraus erhalten wir

$$r(t)^2 = \frac{m^2}{1+m^2}t^2.$$

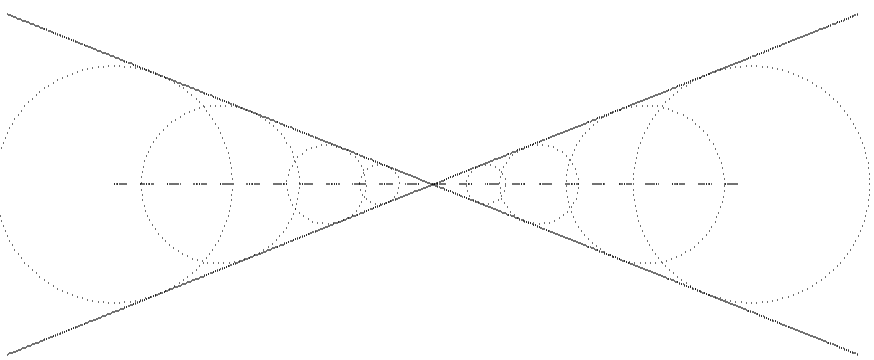
Die Kreisschar wird also parametrisiert durch die Kurve

$$\Gamma: \quad \mathbf{p}(t) = (t, 0, \zeta(t))$$

mit

$$\zeta(t) = t^2 - \frac{m^2}{1+m^2}t^2 = \frac{1}{1+m^2}t^2.$$

Wieder ist Γ eine nach oben geöffnete Parabel, in einer senkrechten Ebene, die aber jetzt das Paraboloid Π in einem Punkt berührt. Dieser Punkt ist natürlich der Nullkreis zum Schnittpunkt der beiden Geraden.



Die beiden Geraden bilden die Hüllkurve der Kreisschar. Sie sind gleichzeitig die Hüllkurve einer zweiten Schar von Kreisen mit den Mittelpunkten auf der y-Achse.

Schließlich wollen wir noch ein nicht-triviales Beispiel diskutieren. Und zwar nehmen wir für $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Ellipse. Die Ellipse liegt in einer Ebene $W \subset \mathbb{R}^3$. Bei den beiden bisher diskutierten Scharen war Γ auch ein Kegelschnitt, und zwar beide male eine Parabel in einer senkrechten Ebene. Jezt wollen wir annehmen, die Ebene W sei nicht senkrecht. Dann hat sie also eine Gleichung $a\xi + b\eta + c\zeta = w$ mit $c \neq 0$. Um eine möglichst übersichtliche Situation zu haben, wollen wir diese Ebene transformieren. Und zwar mit einer Translation

$$x = x' + u, \quad y = y' + v$$

wie in 2.1. Die Gleichung der transformierten Ebene ist dann

$$a(\xi' + u) + b(\eta' + v) + c(\zeta' + 2u\xi' + 2v\eta' - u^2 - v^2) = e.$$

Wählen wir $u := -a/2c$, $v = -b/2c$, so wird diese Gleichung unabhängig von ξ und η. Wir können nach einer solchen Transformation o.B.d.A. die Ebene

$$W: \quad \zeta = w$$

parallel zur ξ, η-Ebene annehmen.

Durch eine Rotation um die ζ-Achse können wir die Ellipse auf eine achsenparallele Normalform

$$\Gamma: \quad \frac{(\xi - u)^2}{a^2} + \frac{(\eta - v)^2}{b^2} = 1$$

transformieren. Diese Ellipse müßten wir jetzt mit Winkelfunktionen parametrisieren

$$\Gamma: \ \mathbf{p}(t) = (u + a\cos(t), v + b\sin(t), w)$$

und die Tangente $T_{\mathbf{p}(t)}$ ausrechnen. Für einen Punkt $\mathbf{p}_0 = (\xi_0, \eta_0, w) \in \Gamma$ kommt dabei

$$T_{\mathbf{p}_0}: \ \frac{(\xi_0 - u)(\xi - u)}{a^2} + \frac{(\eta_0 - v)(\eta - v)}{b^2} = 1, \qquad \zeta = w$$

heraus. Das weiß man entweder (aus der Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie), oder man schägt in einer Formelsammlung nach, oder man rechnet es aus. Jedenfalls ist diese Berechnung der Tangente nicht die Schwierigkeit, auf die wir uns hier konzentrieren wollen. Wir wollen die dazu konjugierte Gerade T' bestimmen.

Dazu können wir zwei Punkte auf T wählen, und T' als Schnitt von deren Polarebenen bestimmen. Ein Punkt, $\mathbf{p}_0$, bietet sich an, aber welchen Punkt nehmen wir als den zweiten? Einfacher ist es, zwei Ebenen anzugeben, deren Durchschnitt die Tangente T ist, und T' als die Verbindungsgerade der beiden zugehörigen Pole zu berechnen. Zwei Ebenen bieten sich nämlich an:

1) Die Ebene $W: \zeta = w$. Ihr Pol $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ist bestimmt durch

$$P(\mathbf{w}, (\xi, \eta, \zeta)) = 2w_1\xi + 2w_2\eta - w_3 - \zeta \sim \zeta - w.$$

Es ist der Punkt

$$\mathbf{w} = (0, 0, -w).$$

2) Die Ebene H, die von $\mathbf{w}$ und T aufgespannt wird. (Damit $H \neq W$ ist, müssen wir hier $w \neq 0$ annehmen. Aber wenn $w = 0$ wäre, würde sowieso eine Katastrophe passieren. Welche?) Um nicht zuviel schreiben zu müssen, und dabei die Übersicht zu verlieren, kürzen wir ab:

$$T: \ \alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$$

mit

$$\alpha = \frac{\xi_0 - u}{a^2}, \quad \beta = \frac{\eta_0 - v}{b^2}, \quad \gamma = -\alpha u - \beta v - 1.$$

Die Ebene H hat dann die Gleichung

$$H: \quad \alpha\xi + \beta\eta + \frac{\gamma}{2w}\zeta + \frac{\gamma}{2} = 0$$

Der Pol $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ zu H ist festgelegt durch

$$P(\mathbf{h}, (\xi, \eta, \zeta)) = 2h_1\xi + 2h_2\eta - h_3 - \zeta \sim \alpha\xi + \beta\eta + \frac{\gamma}{2w}\zeta + \frac{\gamma}{2}.$$

Es folgt (zumindest wenn $\gamma \neq 0$)

$$h_1 = -\frac{\alpha w}{\gamma}, \quad h_2 = -\frac{\beta w}{\gamma}, \quad h_3 = w.$$

Der Pol $\mathbf{h}$ liegt auf der Ebene W. (Das gehört sich auch so, weil die Ebene H den Pol $\mathbf{w}$ enthält.)

Der Punkt $\mathbf{w}$ ist parameterunabhängig immer derselbe. Der Punkt $\mathbf{h}$ variiert auf einer Kurve in $\Gamma^* \subset W$. Die Gleichung dieser Kurve bestimmen wir folgendermaßen: Zuerst drücken wir α und β in h_1 und h_2 aus.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\gamma}{w}h_1 &&= \frac{1}{w}(\alpha u + \beta v + 1)h_1 \\ \beta &= -\frac{\gamma}{w}h_2 &&= \frac{1}{w}(\alpha u + \beta v + 1)h_2. \end{aligned}$$

Dies liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (w - uh_1)\cdot\alpha \ &- \ vh_1\cdot\beta &&= h_1 \\ -uh_2\cdot\alpha \ &+ \ (w - vh_2)\cdot\beta &&= h_2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen (Kramersche Regel)

$$\alpha = \frac{h_1}{D}, \quad \beta = \frac{h_2}{D} \quad \text{wo} \quad D := w - (uh_1 + vh_2).$$

Nun waren α und β so bestimmt, daß

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2}(a^2h_1^2 + b^2h_2^2) &= 1 \\
a^2h_1^2 + b^2h_2^2 &= D^2 \\
w^2 - 2w(uh_1 + vh_2) + (u^2h_1^2 + 2uvh_1h_2 + v^2h_2^2) &= D^2 \\
&= a^2h_1^2 + b^2h_2^2 \\
(a^2 - u^2)h_1^2 + (b^2 - v^2)h_2^2 - 2uvh_1h_2 + 2uwh_1 + 2vwh_2 &= w^2.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung in $\mathbf{h}$ beschreibt wieder einen Kegelschnittgleichung. Auch die Kurve Γ^* ist also wieder ein Kegelschnitt. (Wenn man weiß was ein dualer Kegelschnitt ist, und die Polarität am Kegelschnitt $\Pi \cap W$ kennt, hat man dies auch erwartet.) Der Kegelschnitt Γ^* definiert einen Kegel Ω mit Spitze $\mathbf{w}$. Die Mantellinien dieses Kegels sind die gesuchten konjugierten Geraden T'. Die Gerade durch $\mathbf{w}$ und $\mathbf{h}$ ist

$$2w\xi = h_1(\zeta + w),\ 2w\eta = h_2(\zeta + w) \quad \text{i.e.,} \quad h_1 = \frac{2w\xi}{\zeta + w}\ h_2 = \frac{2w\eta}{\zeta + w},$$

und deswegen hat der Kegel Ω die Gleichung

$$\begin{aligned}
(a^2 - u^2) \cdot 4w^2\xi^2 + (b^2 - v^2) \cdot 4w^2\eta^2 - 2uv \cdot 4w^2\xi\eta & \\
+2uw \cdot 2w\xi(\zeta + w) + 2vw \cdot 2w\eta(\zeta + w) &= w^2(\zeta + w)^2,
\end{aligned}$$

bzw.

$$4(a^2 - u^2) \cdot \xi^2 + 4(b^2 - v^2) \cdot \eta^2 - 8uv \cdot \xi\eta + 4u \cdot \xi\zeta + 4v \cdot \eta\zeta + 4uw \cdot \xi + 4vw \cdot \eta - \zeta^2 - 2w\zeta - w^2 = 0.$$

Diesen Kegel Ω muß man mit dem Paraboloid Π schneiden. Die Hüllkurve ist das Bild dieser Schnittkurve $\Omega \cap \Pi$ in der x, y-Ebene. Praktisch kann man dieses Bild jetzt sehr einfach berechnen, indem man $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ eliminiert, und dann $x = \xi$, $y = \eta$ setzt. Man erhält

$$\begin{aligned}
& (x^2 + y^2)^2 - 4(ux + vy)(x^2 + y^2) \\
+ \ & (2w + 4u^2 - 4a^2)x^2 + (2w + 4v^2 - 4b^2)y^2 \\
+ \ & 8uvxy \\
- \ & 4uwx - 4vwy + w^2 \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Diese Hüllkurve ist kein Kegelschnitt mehr, denn die Variablen x und y kommen hier bis zur vierten Potenz vor. Man nennt soetwas eine *Kurve vierten Grades*.

Was wir hier für eine Ellipse durchgerechnet haben, geht für eine Hyperbel ganz genau so: Wir müssen nur im Endergebnis b^2 durch $-b^2$ ersetzen. Auch für die Parabel wird es ganz ähnlich gehen.

2.5 Anhang: Ein durchgerechnetes Beispiel

Es gibt eine sehr inhaltsreiche und klassische Theorie über die Schnittkurven von zwei Quadriken im Raum. Ich möchte hier nur auf eine Tatsache hinweisen: Die Schnittkurve $\Omega \cap \Pi$ ist nicht nur der Schnitt von Ω und Π, sondern ein ganzes Büschel von Quadriken geht durch diese Kurve, nämlich jede Quadrik $\Omega + \mu\Pi$, deren Gleichung eine Linearkombination der Gleichungen von Ω und Π ist. Ich möchte diese Gleichungen jetzt nicht explizit hinschreiben, sondern die zugehörigen (erweiterten) 4×4 - Koeffizientenmatrizen:

$$\Omega: \quad \begin{pmatrix} 4(a^2-u^2) & -4uv & 2u & 2uw \\ -4uv & 4(b^2-v^2) & 2v & 2vw \\ 2u & 2v & -1 & -w \\ 2uw & 2vw & -w & -w^2 \end{pmatrix}$$

$$2\Pi: \quad \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}$$

$$\Omega + 2\mu\Pi: \quad \begin{pmatrix} 4(a^2-u^2)+2\mu & -4uv & 2u & 2uw \\ -4uv & 4(b^2-v^2)+2\mu & 2v & 2vw \\ 2u & 2v & -1 & -w-\mu \\ 2uw & 2vw & -w-\mu & -w^2 \end{pmatrix}$$

Die Einträge dieser Matrix sind vom Grad ≤ 1 in μ. Die Determinante

$$det(\Omega + \mu\Pi) = -4\mu^4 \pm ...$$

ist deswegen ein Polynom vom Grad vier in μ und hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra vier Nullstellen. Im Allgemeinen werden diese verschieden sein. Wenn sie reell sind, gehören dazu vier entartete Quadriken (d.h. Kegel) $\Omega_1, ..., \Omega_4$ durch die Schnittkurve $\Omega \cup \Pi$. Einer davon ist Ω. Die Rechnungen, die uns die Gleichung von Ω lieferten, kann man umkehren, und auch den drei anderen Kegeln Kegelschnitte Γ_i zuordnen. Insgesamt erhält man so vier Kegelschnitte im Raum der Kreise, also vier Scharen von Kreisen. Diese haben alle dieselbe Hüllkurve. Das ist doch phantastisch!

Selbst wenn die vier obigen Nullstellen reell sind, und die Gleichungen der Kegel reell sind, brauchen diese vier Kegel außer der Kegelspitze keine reellen Punkte zu haben. Der Kegelschnitt $x^2 + y^2 = -1$ ist ja auch reell und hat keine reellen Punkte. Stellen Sie sich einen Kegel über diesem Kegelschnitt mit einer reellen Spitze vor. Außer der Spitze sehen Sie da nichts.

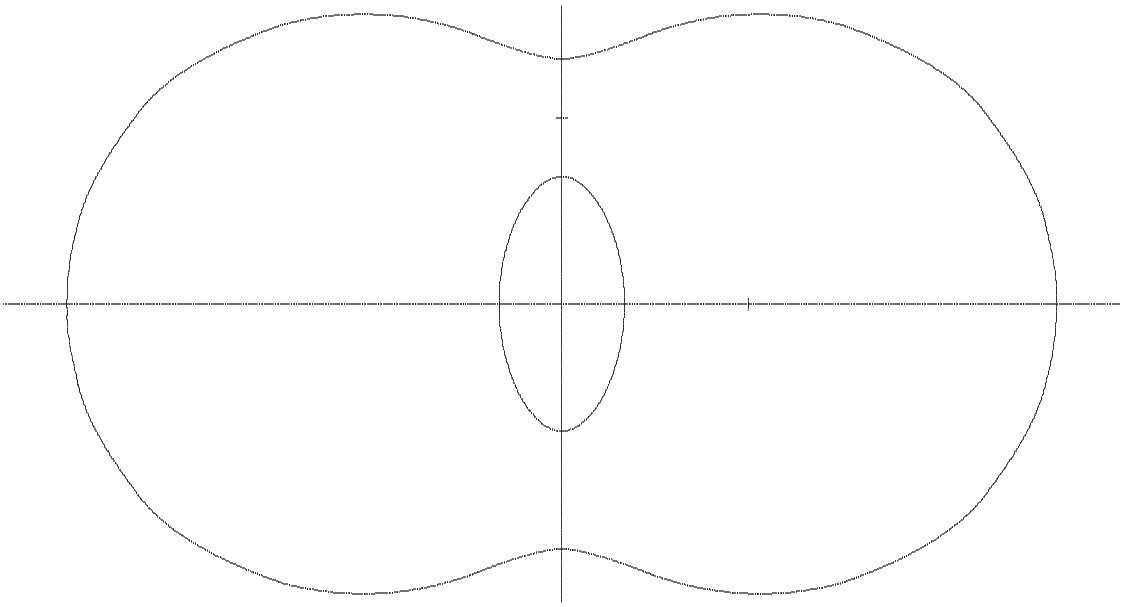
Diesen Phänomenen möchte ich hier aber nicht weiter nachspüren. Ich möchte ganz einfach mal ein Beipiel sehen für eine Hüllkurve und vier Kreisscharen, die diese Hüllkurve berühren. Die Hüllkurve gebe ich mir möglichst einfach, im Nullpunkt zentriert, vor (u=v=0):

$$H: \qquad (x^2+y^2)^2 + 2(w-2a^2)x^2 + 2(w-2b^2)y^2 + w^2 = 0.$$

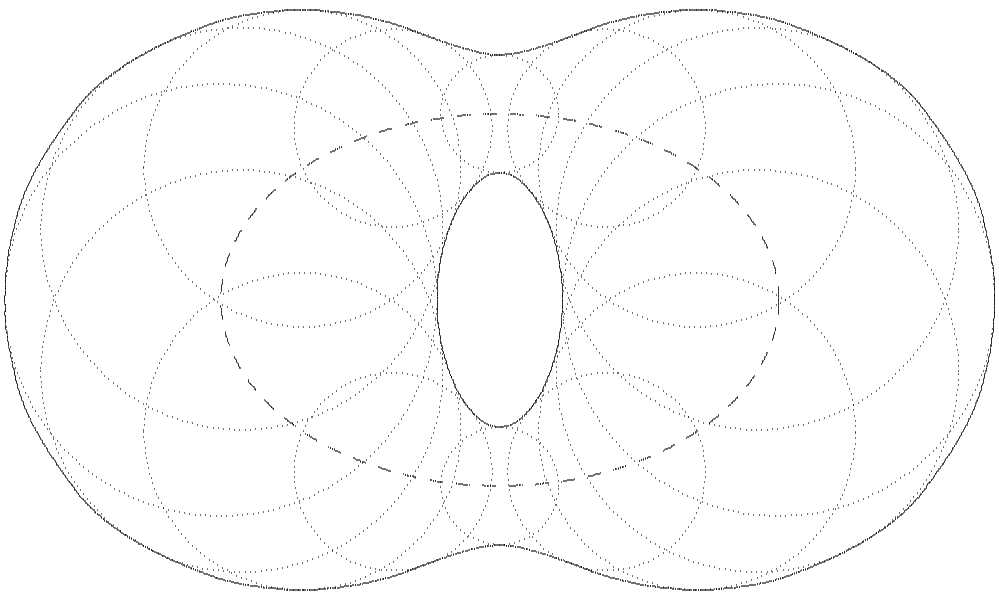
Nach den Rechnungen des vorigen Paragraphen ist sie die Hüllkurve der Kreisschar

$$\Gamma_1: \qquad \zeta = w, \ \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Die Parameterkurve ist eine Ellipse. (Für die Bilder habe ich die Parameter $a = 1.5$, $b = 1$, $w = 0.9$ gewählt).



Hüllkurve $\qquad (x^2 + y^2)^2 - 7.2x^2 - 2.2y^2 + 0.81 = 0$



Kreisschar Γ_1 : $\qquad \zeta = 0.9, \quad \dfrac{\xi^2}{1.5^2} + \eta^2 = 1.$

Es liegt nun nahe, eine Ellipse Γ_2 in der Ebene $\eta = -w$ zu suchen, welche dieselbe Hüllkurve hat, denn dafür funktioniert unser Formalismus. Wenn die Halbachsen dieser zweiten Ellipse

a_2 und b_2 sind, so finden wir

$$\begin{aligned} -w - 2a_2^2 &= w - 2a^2 \\ 2a_2^2 &= 2a^2 - 2w \\ a_2 &= \sqrt{a^2 - w} \end{aligned}$$

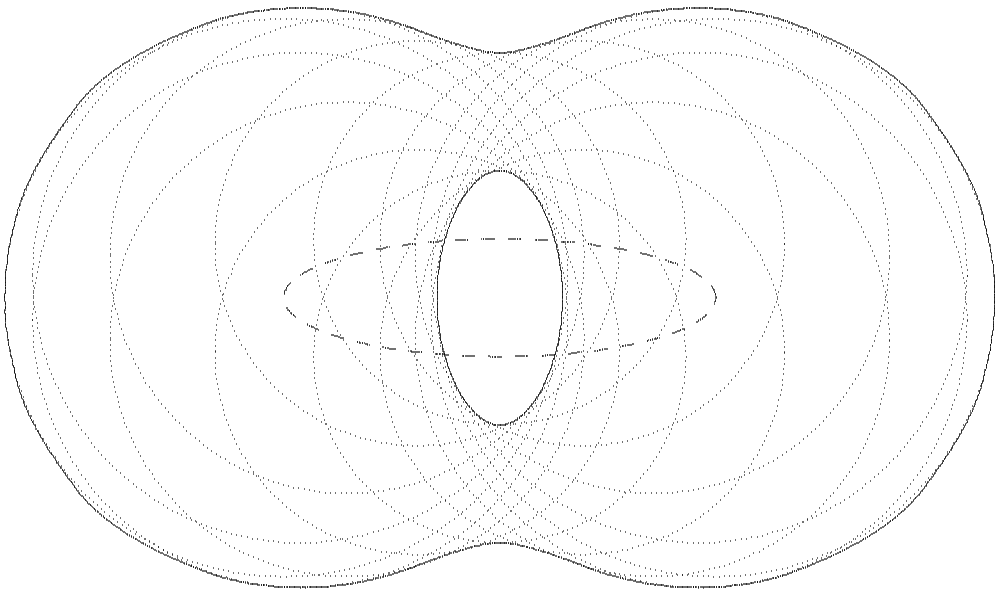
und entsprechend

$$b_2 = \sqrt{b^2 - w}.$$

Der Kegelschnitt

$$\Gamma_2 : \qquad \zeta = -w, \ \frac{\xi^2}{a^2 - w} + \frac{\eta^2}{b^2 - w} = 1$$

parametrisiert eine zweite Kreisschar mit derselben Hüllkurve H. Ob er eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, hängt vom Vorzeichen der Größen $a^2 - w$ und $b^2 - w$ ab. Und ob der Kegelschnitt (wenigstens zum Teil) unterhalb des Paraboloids Π liegt, und deswegen reelle Kreise parametrisiert, ist noch eine ganz andere Frage. Und eine noch ganz ganz andere Frage ist, ob die Bedingung $P(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})^2 \leq P(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \cdot P(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}})$ erfüllt ist, die darüber entscheidet, ob die Kreise überhaupt eine Hüllkurve haben.



Kreisschar Γ_2 : $\qquad \zeta = -0.9, \quad \dfrac{\xi^2}{1.16^2} + \dfrac{\eta^2}{0.32^2} = 1$

Natürlich habe ich das Problem - mit viel Mühe - allgemein durchgerechnet und festgestellt, daß die beiden anderen Kegelschnitte Γ_3 und Γ_4 in den Symmetrieebenen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ der Kurve H liegen. Diese Rechnung möchte ich hier nicht reproduzieren, sondern ganz einfach Kegelschnitte in diesen Ebenen suchen, welche Kreisscharen mit derselben Hüllkurve H parametrisieren. Weil die Ebenen nicht parallel zur Koordinatenebene $\zeta = 0$ liegen, funktioniert die

Methode aus dem vorigen Paragraphen jetzt nicht, wir müssen alles noch einmal durchrechnen. Aber das ist nicht so furchtbar schwierig:

Setzen wir einen Kegelschnitt

$$\Gamma_3 : \qquad \xi = 0,\ \frac{\eta^2}{\alpha^2} + \frac{(\zeta - v)^2}{\beta^2} = 1.$$

an, der symmetrisch zur $\eta = 0$-Ebene liegt. (Weil die Hüllkurve dazu symmetrisch ist, sollte auch die Parameterkurve dazu symmetrisch sein, oder?). Ich habe Γ_3 als Ellipse angesetzt. Wenn α^2 oder β^2 negativ herauskommen sollten, dann wird es halt eine Hyperbel.

Die Tangente T an Γ_3 in einem Punkt $(0, \eta_0, \zeta_0) \in \Gamma_3$ hat die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0\eta}{\alpha^2} + \frac{(\zeta_0 - v)(\zeta - v)}{\beta^2} - 1 &= \\ \frac{\eta_0}{\alpha^2}\eta + \frac{\zeta_0 - v}{\beta^2}\zeta - \left(1 + \frac{(\zeta_0 - v)v}{\beta^2}\right) &\sim \\ \frac{\beta^2\eta_0}{\alpha^2(\zeta_0 - v)}\eta + \zeta - \left(v + \frac{\beta^2}{\zeta_0 - v}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Tangentengleichung können wir auffassen als eine Ebenengleichung, unabhängig von der Variablen ξ. Sie beschreibt deswegen eine Ebene parallel zur ξ-Achse. Der Pol $\mathbf{h} = (0, h_2, h_3)$ ergibt sich aus

$$P(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 2h_2\eta - \zeta - h_3 \equiv \frac{\beta^2\eta_0}{\alpha^2(\zeta_0 - v)}\eta + \zeta - \left(v + \frac{\beta^2}{\zeta_0 - v}\right).$$

Wir finden

$$h_2 = -\frac{\beta^2}{2\alpha^2} \cdot \frac{\eta_0}{\zeta_0 - v}, \quad h_3 = -v - \frac{\beta^2}{\zeta_0 - v}.$$

Diese Gleichungen lösen wir nach η_0 und ζ_0 auf:

$$\begin{aligned} \zeta_0 - v &= -\frac{\beta^2}{h_3 + v}, \\ \eta_0 &= -\frac{2\alpha^2}{\beta^2}(\zeta_0 - v) \\ &= \frac{2\alpha^2}{h_3 + v}h_2. \end{aligned}$$

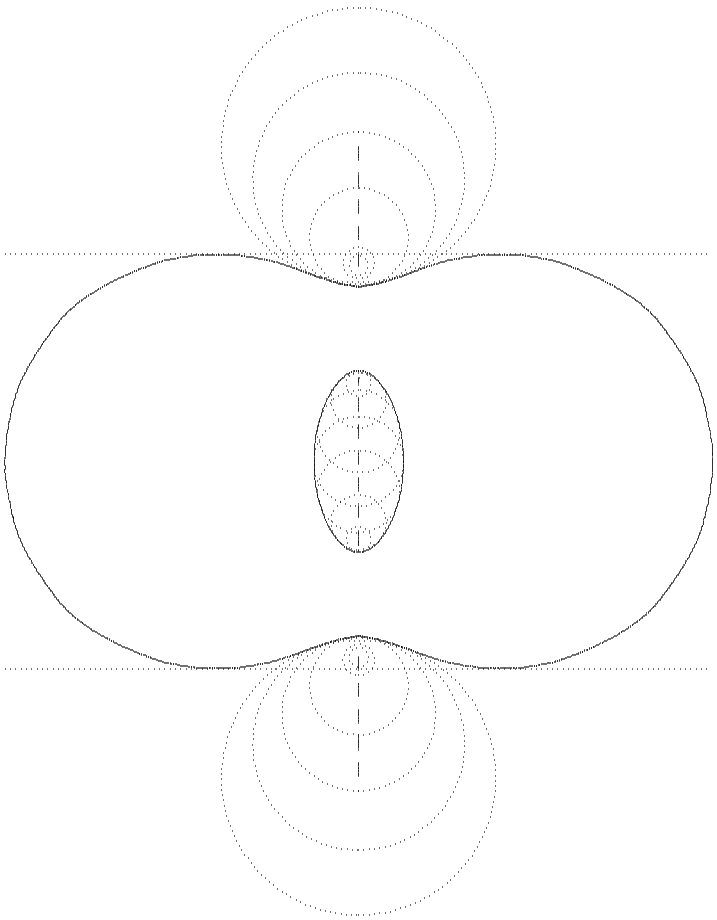
Weil $(0, \eta_0, \zeta_0)$ auf Γ_3 liegt, finden wir für $\mathbf{h}$:

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha^2 h_2^2}{(h_3 + v)^2} + \frac{\beta^2}{(h_3 + v)^2} &= 1 \\ 4\alpha^2 h_2^2 + \beta^2 &= (h_3 + v)^2 \\ (h_3 + v)^2 - 4\alpha^2 h_2^2 - \beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die zur Tangente T konjugierte Gerade T' wird von dem Punkt $\mathbf{h}$ und dem Pol $\mathbf{w}$ zur Ebene $\xi = 0$ aufgespannt. Dieser Pol $\mathbf{w}$ ist schwer zu ermitteln, weil er

$$2w_1\xi + 2w_2\eta - w_3 - \zeta \sim \xi$$

erfüllen muß. Kein Punkt $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ kann diese Bedingung erfüllen. Wenn man projektive Geometrie kennt, weiß man, daß man für $\mathbf{w}$ den unendlich fernen Punkt in Richtung der ξ-Achse nehmen muß. (Weil ich projektive Geometrie in dieser Vorlesung nicht voraussetze, ist dieser Paragraph auch kein richtiger Teil der Vorlesung, sondern nur ein Anhang.)



Kreisschar Γ_3 : $\qquad \xi = 0, \quad \dfrac{(\zeta + 3.6)^2}{12.15} - \dfrac{\eta^2}{1.25} = 1$

Oberer Ast der Hyperbel

Wir nehmen also für T' die Gerade durch $\mathbf{h}$ parallel zur ξ-Achse

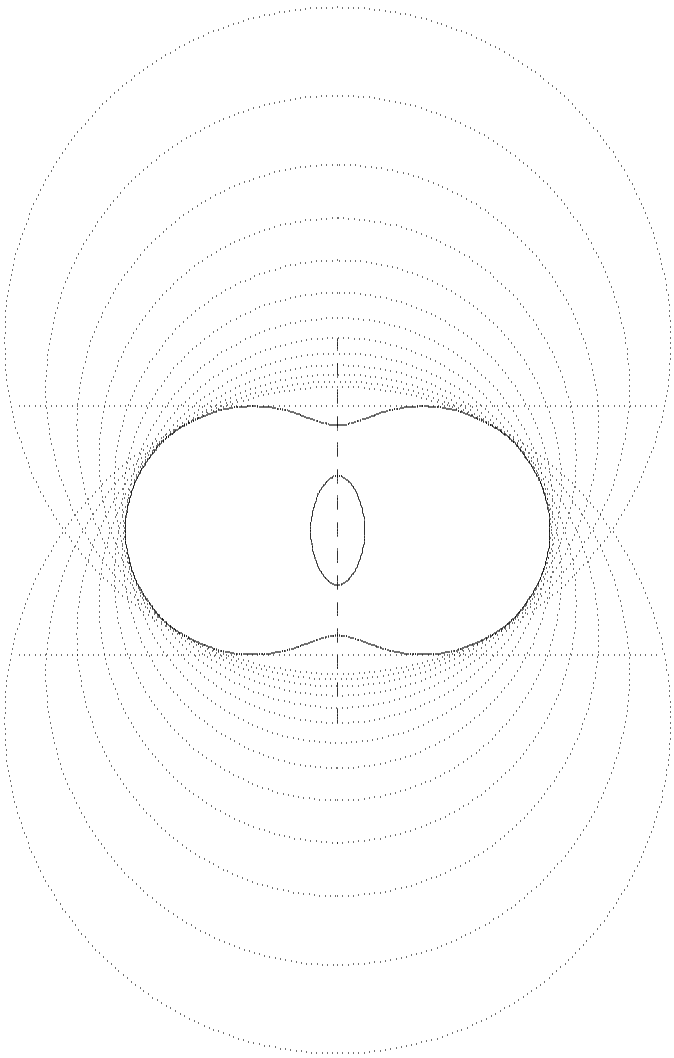
$$T' : \qquad (0, h_2, h_3) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, 0).$$

Die Vereinigung dieser Geraden überstreicht den parabolischen Zylinder

$$\Omega_3 : \qquad (\zeta + v)^2 - 4\alpha^2\eta^2 - \beta^2 = 0.$$

Die Hüllkurve zur Schar Γ_3 ist die Projektion der Schnittkurve $\Omega_3 \cap \Pi$. Wir erhalten sie, indem wir $x^2 + y^2 = \zeta$, $y = \eta$ in die letzte Gleichung einsetzen. Das Resultat ist

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + v)^2 - 4\alpha^2 y^2 - \beta^2 &= \\ (x^2 + y^2)^2 + 2v \cdot x^2 + (2v - 4\alpha^2) \cdot y^2 + v^2 - \beta^2 &= 0. \end{aligned}$$



Kreisschar Γ_3 : $\qquad \xi = 0, \quad \dfrac{(\zeta + 3.6)^2}{12.15} - \dfrac{\eta^2}{1.25} = 1$

Unterer Ast der Hyperbel

Diese Kurve stimmt mit H überein, wenn

$$v = w - 2a^2, \qquad v - 2\alpha^2 = w - 2b^2, \qquad v^2 - \beta^2 = w^2.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} v &= w - 2a^2 \\ \alpha^2 &= b^2 - a^2 \\ \beta^2 &= v^2 - w^2 \\ &= -4wa^2 + 4a^4 \\ &= 4a^2(a^2 - w). \end{aligned}$$

Die dritte Kreisschar mit Hüllkurve H wird also parametrisiert durch

$$\Gamma_3 : \qquad \xi = 0,\ \frac{\eta^2}{b^2 - a^2} + \frac{(\zeta - w + 2a^2)^2}{4a^2(a^2 - w)} = 1.$$

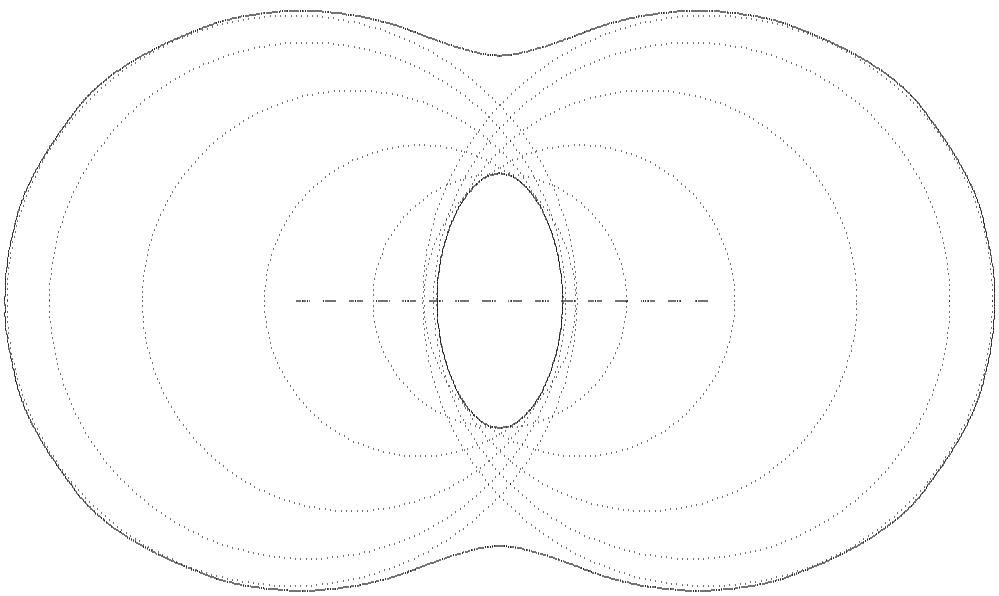
Die vierte Kreisschar möchte ich jetzt nicht mehr ausrechnen. Sie wird parametrisiert durch

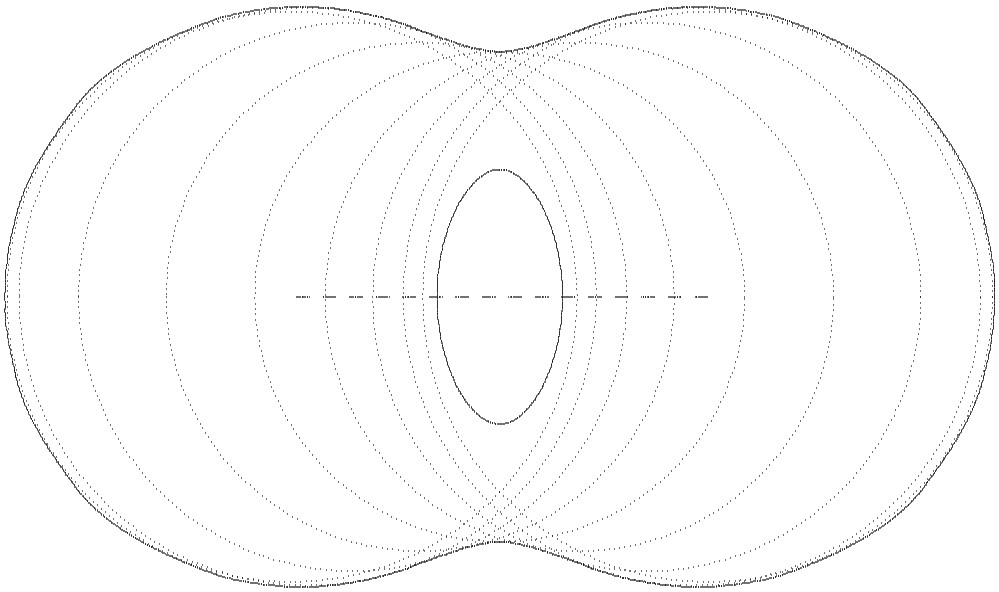
$$\Gamma_4 : \qquad \eta = 0,\ \frac{\xi^2}{a^2 - b^2} + \frac{(\zeta - w + 2b^2)^2}{4b^2(b^2 - w)} = 1.$$

Die Rechnung geht ganz genauso wie für Γ_3. Man kann Γ_4 aber auch aus Γ_3 durch die Symmetrie

$$\xi \leftrightarrow \eta, \quad a \leftrightarrow b$$

erhalten.





Kreisschar Γ_4 : $\quad \eta = 0, \quad \dfrac{\xi^2}{1.25} + \dfrac{(\zeta + 1.1)^2}{0.4} = 1$

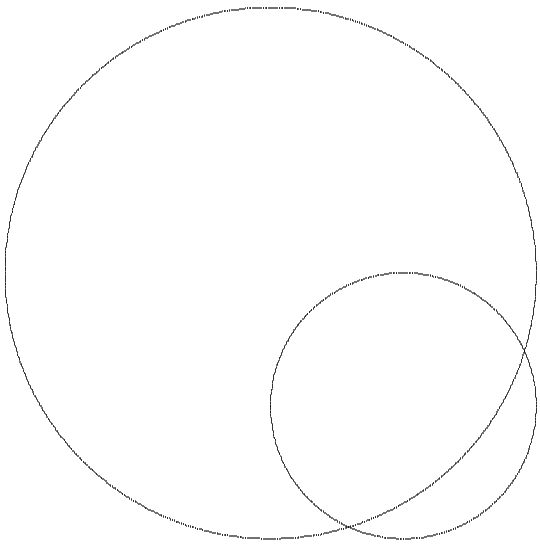
Obere und untere Hälfte der Ellipse

Die ganzen Rechnungen mögen wenig überzeugen. Viel überzeugender, viel schöner und didaktisch wichtiger ist, daß man die Ergebnisse visualisieren (= zeichnen) kann. Und da stimmt es! Fassen wir das Ergebnis noch einmal zusammen: Die vier Kegelschnitte

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma_1: & \zeta = w, & \dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} = 1 \\[2ex]
\Gamma_2: & \zeta = -w, & \dfrac{\xi^2}{a^2 - w} + \dfrac{\eta^2}{b^2 - w} = 1 \\[2ex]
\Gamma_3: & \xi = 0, & \dfrac{\eta^2}{b^2 - a^2} + \dfrac{(\zeta - w + 2a^2)^2}{4a^2(a^2 - w)} = 1 \\[2ex]
\Gamma_4: & \eta = 0, & \dfrac{\xi^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{(\zeta - w + 2b^2)^2}{4b^2(b^2 - w)} = 1
\end{array}
$$

parametrisieren vier Kreisscharen mit derselben Hüllkurve

$$H: \qquad (x^2 + y^2)^2 + 2(w - 2a^2)x^2 + 2(w - 2b^2)y^2 + w^2 = 0.$$



3 Zwei Kreise

3.1 Die beiden Ähnlichkeitszentren

Zwei Kreise sind ähnliche Figuren: Durch eine Translation kann man ihre beiden Mittelpunkte zur Deckung bringen, und durch eine anschließende Streckung kann man die beiden konzentrischen Kreise ineinander überführen. Das kann man auch hinschreiben: Die beiden Kreise seien K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten $\mathbf{m}_1$ und $\mathbf{m}_2$, ihre Radien seien r_1 und r_2. Die Translation

$$T:\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)$$

verschiebt den Mittelpunkt $\mathbf{m}_2$ nach $\mathbf{m}_1$. Die anschließende Streckung

$$S:\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{m}_1 + \frac{r_1}{r_2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_1)$$

identifiziert beide Kreise. Die zusammengesetzte Abbildung ist

$$S \circ T:\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{m}_1 + \frac{r_1}{r_2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_2) = \frac{r_1}{r_2}\mathbf{x} + \frac{1}{r_2}(r_2\mathbf{m}_1 - r_1\mathbf{m}_2).$$

Sie bildet K_2 auf K_1 ab. Statt des Faktors r_1/r_2 hätte man bei S auch den Faktor $-r_1/r_2$ nehmen können. Die zusammengesetzte Abbildung wäre dann

$$S' \circ T:\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{m}_1 - \frac{r_1}{r_2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_2) = -\frac{r_1}{r_2}\mathbf{x} + \frac{1}{r_2}(r_2\mathbf{m}_1 + r_1\mathbf{m}_2)$$

geworden.

Jede aus einer Translation und einer echten Streckung (Ähnlichkeitsfaktor $\neq 1$) zusammengesetzte Abbildung ist wieder eine zentrische Streckung der Form

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} + c \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}) = c \cdot \mathbf{x} + (1 - c) \cdot \mathbf{z}.$$

Im Falle der Abbildung $S \circ T$ muß $c = r_1/r_2$ und

$$(1 - \frac{r_1}{r_2}) \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{r_2}(r_2\mathbf{m}_1 - r_1\mathbf{m}_2)$$

sein, also ist das Ähnlichkeitszentrum

$$\mathbf{z} := \frac{1}{r_2 - r_1}(r_2\mathbf{m}_1 - r_1\mathbf{m}_2).$$

Das geht nur dann gut, wenn $r_1 \neq r_2$ ist, aber wenn die beiden Radien gleich sind, ist die Ähnlichkeitsabbildung auch eine reine Translation und keine zentrische Streckung.

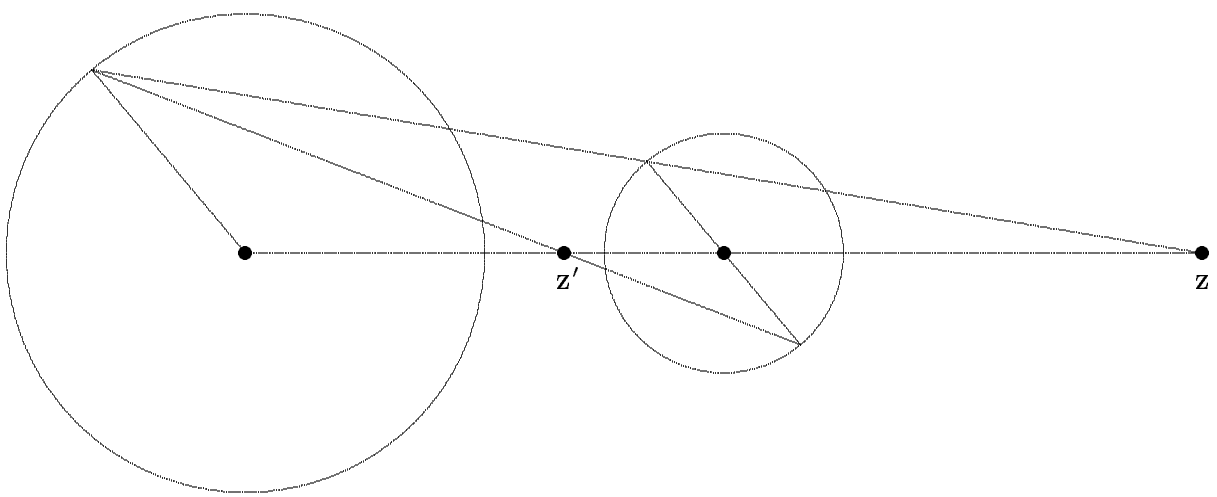
Im Falle der Abbildung $S' \circ T$ ist der Streckungsfaktor $c = -r_1/r_2$ und

$$(1 + \frac{r_1}{r_2}) \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{r_2}(r_2\mathbf{m}_1 - r_1\mathbf{m}_2).$$

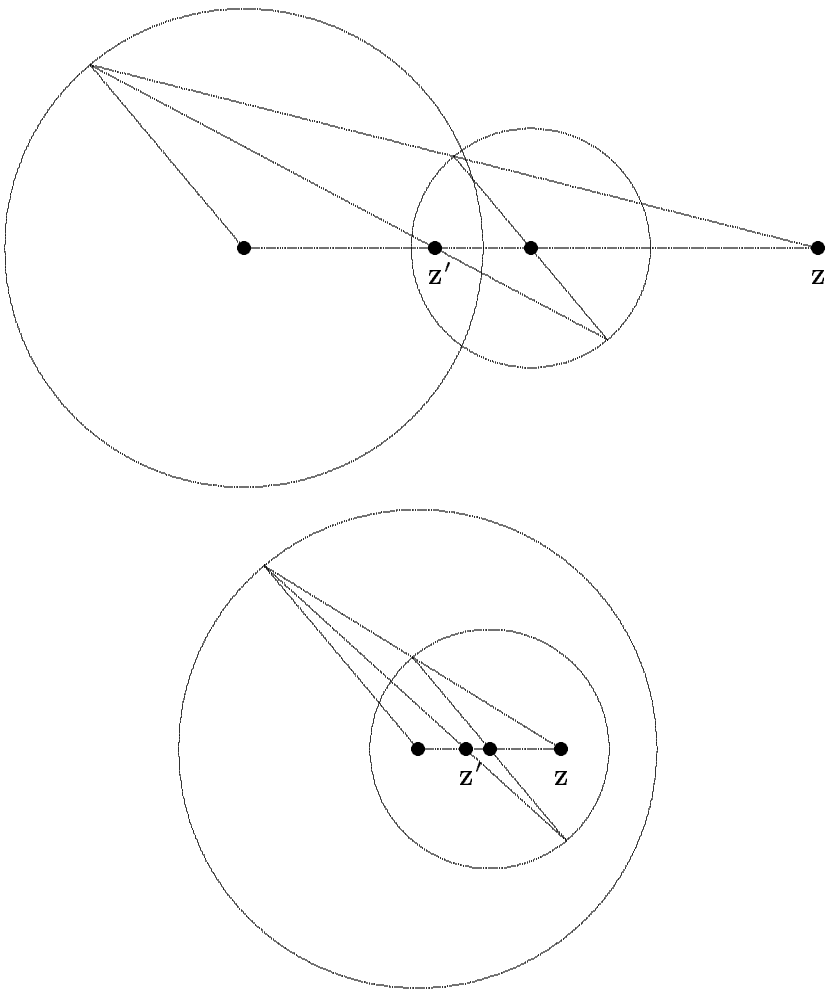
Das Ähnlichkeitszentrum wird

$$\mathbf{z}' := \frac{1}{r_2 + r_1}(r_2\mathbf{m}_1 + r_1\mathbf{m}_2).$$

Es gibt also i.a. zwei zentrische Streckungen, die zwei Kreise ineinander überführen. Die beiden Ähnlichkeitszentren liegen auf der Geraden $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2$ durch die beiden Kreismittelpunkte. Und zwar liegt $\mathbf{z}'$ auf der Strecke zwischen $\mathbf{m}_1$ und $\mathbf{m}_2$, man nennt es das *innere Ähnlichkeitszentrum*, wohingegen $\mathbf{z}$ nicht zwischen den Kreismittelpunkten, sondern außerhalb liegt. Man nennt diesen Punkt deshalb das *äußere Ähnlichkeitszentrum*.



Die beiden Ähnlichkeitszenteren sind leicht geometrisch zu konstruieren. Beide liegen auf der Verbindungsgeraden M der beiden Kreismittelpunkte. Man braucht deswegen nur eine Gerade L zu finden, welche zwei Punkte $P_1 \in K_1$ und $P_2 \in K_2$ verbindet, die sich unter der zentrischen Streckung entsprechen. Man findet solche Punkte als Schnittpunkte der beiden Kreise mit zwei parallelen Durchmessern.



Aus den Bildern sehen wir: Je nach der gegenseitigen Lage der beiden Kreise liegen die Ähnlichkeitszentren außerhalb oder innerhalb der Kreise, und zwar jedesmal außerhalb *beider* Kreise oder innerhalb *beider* Kreise. Das kann man auch nachrechnen: Die Potenz $p_1(\mathbf{z})$ des Ähnlichkeitszentrums $\mathbf{z}$ in Bezug auf den Kreis K_1 ist

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{z}) &= \| \mathbf{z} - \mathbf{m}_1 \|^2 - r_1^2 \\ &= \| \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} - 1 \right) \mathbf{m}_1 - \frac{r_1}{r_2 - r_1} \mathbf{m}_2 \|^2 - r_1^2 \\ &= \| \frac{r_1}{r_2 - r_1} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \|^2 - r_1^2 \\ &= \frac{r_1^2}{(r_2 - r_1)^2} \cdot \left(\| \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \|^2 - (r_2 - r_1)^2 \right) \end{aligned}$$

Diese Potenz ist > 0, wenn der Abstand der Kreismittelpunkte größer ist als die Differenz der Radien. Das ist der Fall, wenn die Kreise nicht ineinander liegen. Dann liegt das Zentrum $\mathbf{z}$ außerhalb des Kreises K_1. Dieselbe Rechnung hätten wir mit demselben Ergebnis auch mit

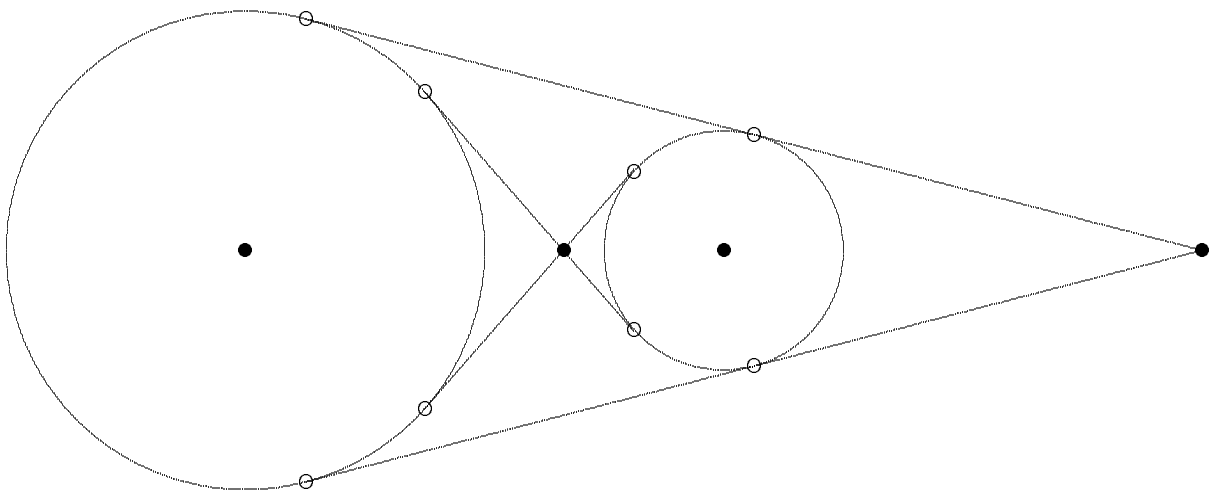
dem Kreis K_2 machen können. Das äußere Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}$ liegt außerhalb beider Kreise, wenn diese nicht ineinander liegen, sonst liegt es im Inneren beider Kreise.

Die analoge Rechnung mit dem inneren Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}'$ liefert

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{z}') &= \| \mathbf{z}' - \mathbf{m}_1 \|^2 - r_1^2 \\ &= \| \left(\frac{r_2}{r_2 + r_1} - 1 \right) \mathbf{m}_1 + \frac{r_1}{r_2 + r_1} \mathbf{m}_2 \|^2 - r_1^2 \\ &= \| \frac{r_1}{r_2 + r_1} (-\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) \|^2 - r_1^2 \\ &= \frac{r_1^2}{(r_2 + r_1)^2} \cdot \left(\| \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \|^2 - (r_2 + r_1)^2 \right) \end{aligned}$$

Diese Potenz ist positiv, wenn der Abstand der Kreismittelpunkte größer als die Summe der Radien ist, d.h., wenn die Kreise außerhalb voneinander liegen. Dann liegt das innere Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}'$ außerhalb beider Kreise, sonst im Inneren beider Kreise.

Liegt ein Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}$ außerhalb der beiden Kreise, so kann man von $\mathbf{z}$ aus an jeden der beiden Kreise zwei Tangenten ziehen. Bei der zentrischen Streckung werden die Tangenten an K_1 auf die an K_2 abgebildet. Andererseits bleiben diese Tangenten aber fest, weil sie Geraden durch das Ähnlichkeitszentrum sind. Wir sehen: Die beiden Tangenten aus $\mathbf{z}$ an K_1 und K_2 stimmen überein.



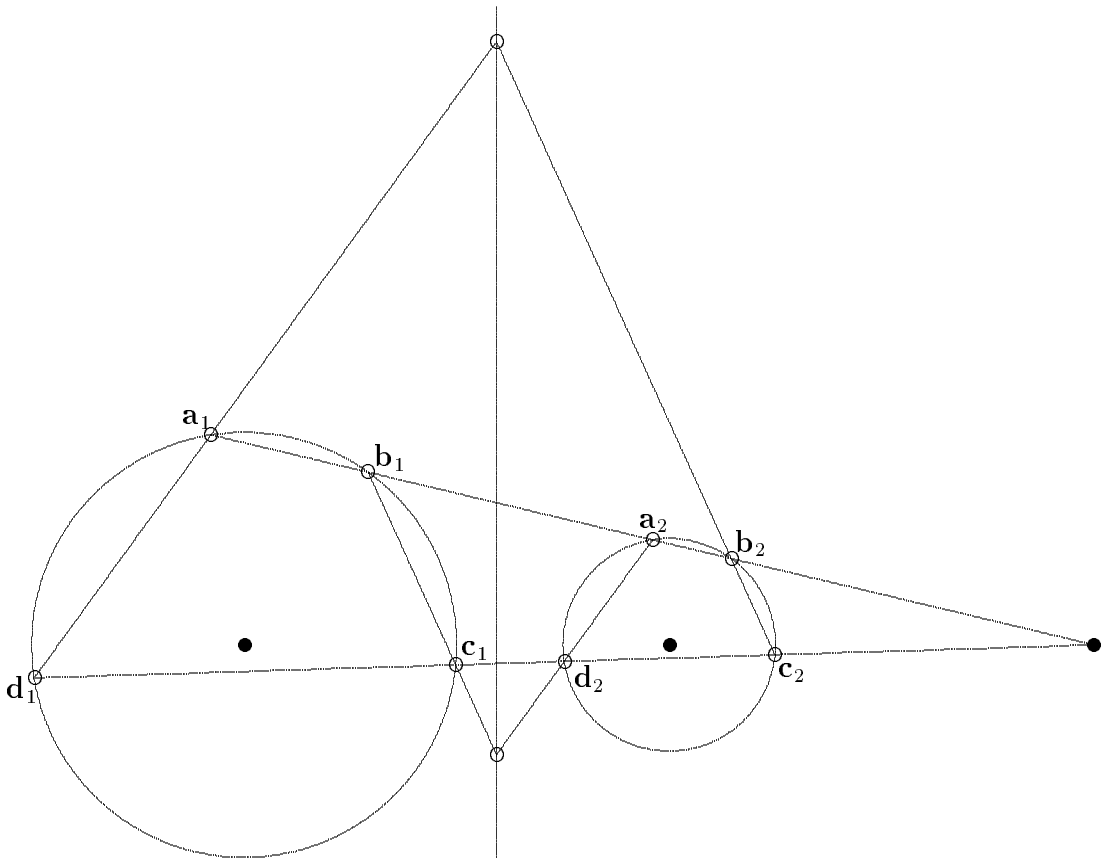
Satz (Ähnlichkeitszentren und Tangenten): *Liegen die beiden Kreise außerhalb voneinander, so besitzen sie vier gemeinsame Tangenten, die paarweise durch die beiden Ähnlichkeitszentren gehen.*

Schneiden sich beide Kreise, so gibt es zwei gemeinsame Tangenten, die sich im äußeren Ähnlichkeitszentrum treffen.

Wir müssen noch zeigen, daß es nicht mehr als die im Satz beschriebenen Tangenten gibt, daß also jede gemeinsame Tangente T an K_1 und K_2 durch ein Ähnlichkeitszentrum geht. Seien $\mathbf{a}_1 \in K_1$ und $\mathbf{a}_2 \in K_2$ die Berührpunkte der Tangente T. Die Radiusvektoren $\mathbf{a}_1 - \mathbf{m}_1$

und $\mathbf{a}_2 - \mathbf{m}_2$ stehen beide auf der Tangente T senkrecht. Sie haben also beide dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung. Wenn sie dieselbe Richtung haben, bildet die zentrische Streckung am äußeren Ähnlichkeitszentrum den Radiusvektor $\mathbf{a}_2 - \mathbf{m}_2$ auf den Radiusvektor $\mathbf{a}_1 - \mathbf{m}_1$ ab. Die Verbindungsgerade der Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, d.h. also die Tangente T, geht deswegen durch das äußere Ähnlichkeitszentrum.

Sind die Radiusvektoren entgegengesetzt gerichtet, so werden sie durch die zentrische Strekkung am inneren Ähnlichkeitszentrum ineinander übergeführt. Ihre Verbindungsgerade, die Tangente, geht dann durch das innere Ähnllichkeitszentrum.



Satz (Ähnlichkeitszentren und Achse): *Zwei Geraden durch ein Ähnlichkeitszentrum* $\mathbf{z}$ *mögen beide Kreise schneiden. Die Schnittpunkte mit dem Kreis* K_1 *seien* $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ *auf der einen Geraden und* $\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1$ *auf der anderen. Die korrespondierenden Punkte auf* K_2 *seien* $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2$ *und* $\mathbf{d}_2$*. Die Sekanten zu korrespondierenden Punktepaaren, etwa* $\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1$ *und* $\mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2$ *sind parallel, die Sekanten zu komplementären Punktepaaren, etwa* $\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1$ *und* $\mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2$ *schneiden sich, und zwar auf der Achse der beiden Kreise.*

Beweis. Es ist (wegen des Sekantenabschnittsatzes am Kreis K_2)

$$\| \mathbf{z} - \mathbf{b}_2 \| \cdot \| \mathbf{z} - \mathbf{a}_1 \| \quad = \quad \| \mathbf{z} - \mathbf{b}_2 \| \cdot \| \mathbf{z} - \mathbf{a}_2 \| \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \| \mathbf{z} - \mathbf{c}_2 \| \cdot \| \mathbf{z} - \mathbf{d}_2 \| \cdot \frac{r_1}{r_2} \\
&= \| \mathbf{z} - \mathbf{c}_2 \| \cdot \| \mathbf{z} - \mathbf{d}_1 \| .
\end{aligned}
$$

Nach der Umkehrung des Sekantenabschnittssatzes liegen also die vier Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2, \mathbf{d}_1$ auf einem Kreis. Wegen des Sekantenabschnittssatzes für diesen Kreis gilt für den Schnittpunkt $\mathbf{x}$ der Geraden $\mathbf{a}_1\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2$

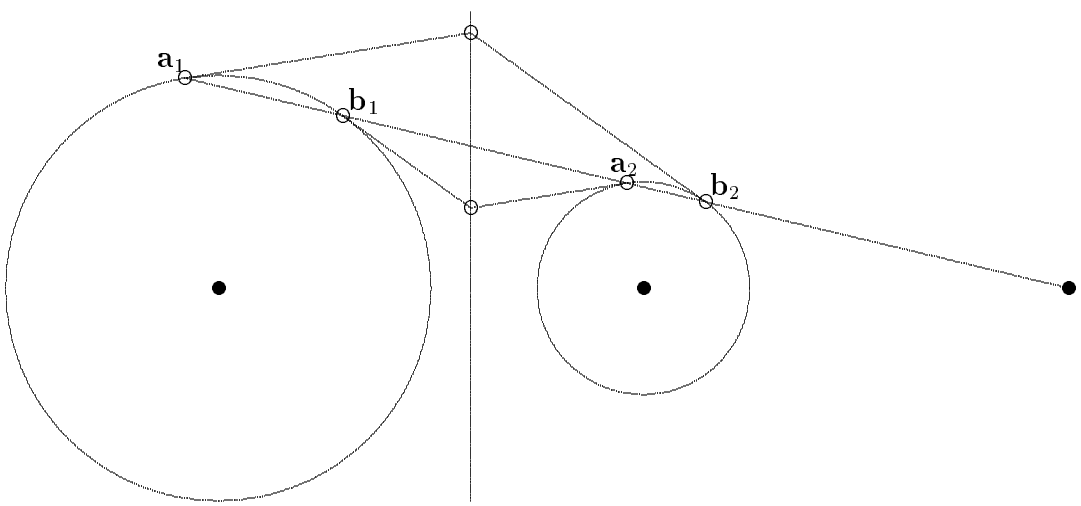
$$p_1(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{a}_1 \| \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{d}_1 \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{b}_2 \| \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{c}_2 \| = p_2(\mathbf{x}).$$

Der Schnittpunkt $\mathbf{x}$ hat also dieselbe Potenz in Bezug auf beide Kreise, er liegt auf der Achse. □

Wenn man eine der beiden Geraden gegen die andere konvergieren läßt, konvergieren die Sekanten gegen die Tangenten in den Schnittpunkten der Geraden. Man erhält also aus dem eben bewiesenen Satz das folgende Ergebnis als Grenzfall:

Satz: *Eine Gerade durch ein Ähnlichkeitszentrum* $\mathbf{z}$ *schneide den Kreis* K_1 *in den Punkten* $\mathbf{a}_1$ *und* $\mathbf{b}_1$ *und den Kreis* K_2 *in den korrespondierenden Punkten* $\mathbf{a}_2$ *und* $\mathbf{b}_2$*. Dann sind die Kreistangenten in korrespondierenden Punkten parallel, und diejenigen in komplementären Punkten, etwa* $T_{\mathbf{a}_1}(K_1)$ *und* $T_{\mathbf{b}_2}(K_2)$ *schneiden sich auf der Achse der beiden Kreise.*

Man kann diesen Satz auch unabhängig vom vorhergehenden beweisen: Der Tangenteschnittpunkt sei $\mathbf{x} := T_{\mathbf{a}_1}(K_1) \cap T_{\mathbf{b}_2}(K_2)$. Wegen der Ähnlichkeit sind die Sehnentangentenwinkel bei $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ gleich. Dann ist der Sehnentangentenwinkel bei $\mathbf{a}_1$ aber auch gleich dem Sehnentangentenwinkel bei $\mathbf{b}_2$. Das Dreieck $\mathbf{x}\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2$ ist also gleichwinklig und die Tangenabschnitte $\| \mathbf{x} - \mathbf{a}_1 \|$, sowie $\| \mathbf{x} - \mathbf{b}_2 \|$ sind gleich. □



3.2 Berührkreis-Scharen

Der letzte Satz des letzten Abschnitts hat eine sehr bemerkenswerte Konsequenz: Seien $\mathbf{a}_1 \in K_1$ und $\mathbf{b}_2 \in K_2$ zwei komplementäre Punkte auf einer Geraden L durch ein Ähnlichkeitszentrum. (D.h. also, unter der zu diesem Zentrum gehörenden zentrischen Streckung entsprechen sich beide Punkte *nicht*!) Die Tangenten $T_{\mathbf{a}_1}(K_1)$ und $T_{\mathbf{b}_2}(K_2)$ treffen sich in einem Punkt $\mathbf{x}$ auf der Achse der beiden Kreise. Die Strecken $\| \mathbf{x} - \mathbf{a}_1 \|$ und $\| \mathbf{x} - \mathbf{b}_2 \|$ sind gleichlang. Die Radiusvektoren $\mathbf{a}_1 - \mathbf{m}_1$ und $\mathbf{b}_2 - \mathbf{m}_2$ stehen auf den Tangenten senkrecht. Sie spannen zwei Geraden L_1 und L_2, eine durch den Mittelpunkt eines jeden der beiden Kreise, auf. Wenn $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_2$ nicht zufällig die Berührpunkte einer Doppeltangente waren, schneiden sich L_1 und L_2. Ihr Schnittpunkt sei $\mathbf{y}$.

Die beiden Dreiecke $\mathbf{xa_1y}$ und $\mathbf{xb_2y}$ sind rechtwinklig mit derselben Hypothenuse $\mathbf{xy}$. Die Katheten $\mathbf{xa}_1$ und $\mathbf{xb}_1$ sind gleich lang. Dann müssen nach Pythagoras auch die Katheten $\mathbf{ya}_1$ und $\mathbf{yb}_2$ gleich lang sein. Es gibt also einen Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{y}$, der durch $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_2$ geht, und in diesen Punkten den Kreis K_1 bzw. K_2 berührt.

Jede Gerade L durch ein Ähnlichkeitszentrum der beiden Kreise K_1 und K_2, welche beide Kreise schneidet, bestimmt zwei Paare komplementärer Schnittpunkte mit den Kreisen, und auf die soeben beschriebene Weise zwei gemeinsame *Berührkreise* der Kreise K_1 und K_2. Variiert man die Gerade L, so erhält man auf diese Weise eine ganze Schar von Berührkreisen an K_1 und K_2.

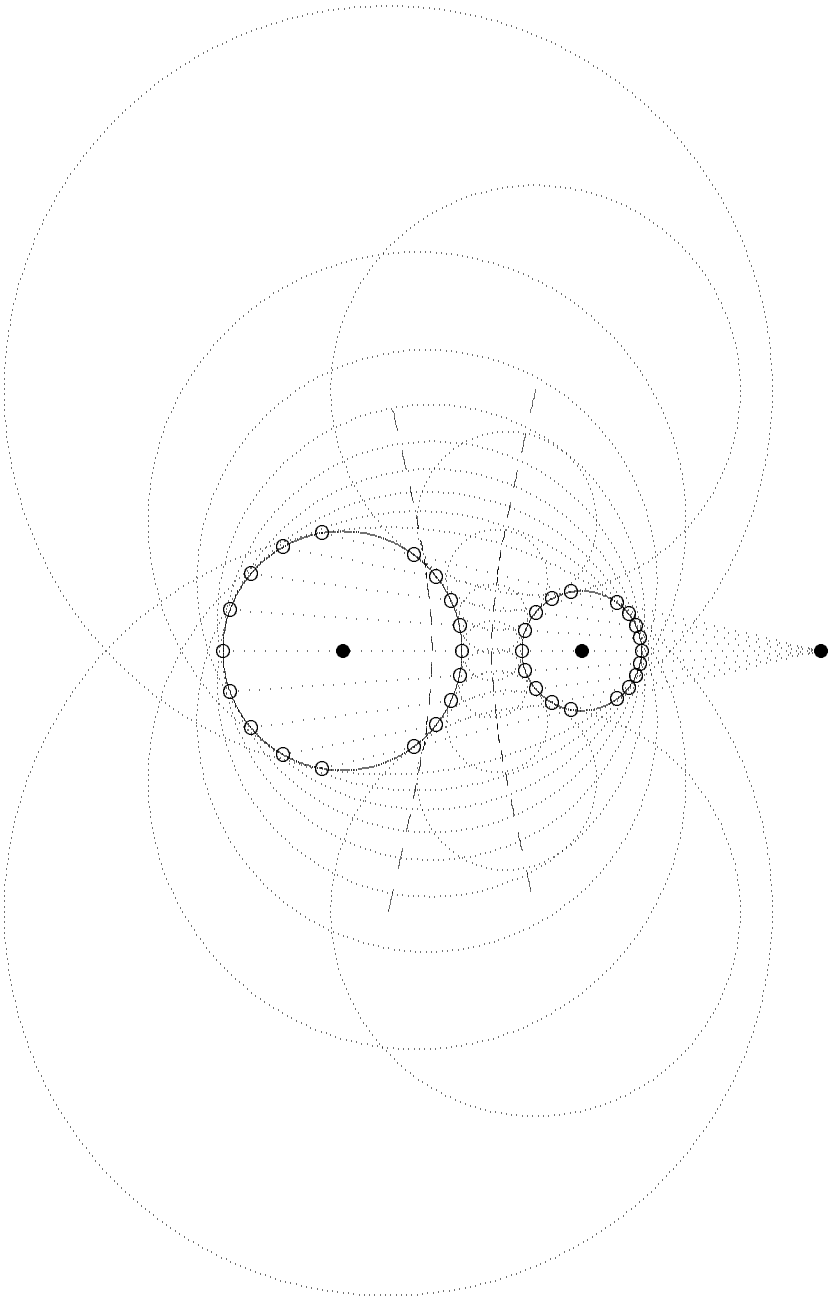
Satz (Berührkreise): *Zu zwei Kreisen (die sich nicht berühren mögen) gibt es zwei Scharen von Berührkreisen. Die Berührpunkte der Kreise einer Schar liegen auf Geraden durch ein Ähnlichkeitszentrum. Auf diese Weise erhält man alle Berührkreise an die beiden gegebenen Kreise.*

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen: Ist K ein Berührkreis an K_1 und K_2, so sind die Berührpunkte $\mathbf{a}_1 \in K_1$ und $\mathbf{b}_2 \in K_2$ zwei komplementäre Punkte auf einer Geraden L durch ein Ähnlichkeitszentrum.

Sei $\mathbf{y}$ der Mittelpunkt des Berührkreises K. Die Winkel $\angle \mathbf{ya_1b}_2$ und $\angle \mathbf{yb_2a}_1$ sind (entgegengesetzt) gleich. Sei L die Gerade durch $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_2$, und $\mathbf{b}_1$ ihr zweiter Schnittpunkt mit dem Kreis K_1. Dann sind die Tangenten $T_{\mathbf{b}_1}(K_1)$ und $T_{\mathbf{b}_2}(K_2)$ parallel. Nun gibt es aber genau zwei zu $T_{\mathbf{b}_1}(K_1)$ parallele Tangenten an K_2. Die Verbindungsgeraden von $\mathbf{b}_1$ mit den Berührpunkten dieser Tangenten an K_2 gehen jede durch ein Ähnlichkeitszentrum. Also war auch L eine Gerade durch ein Ähnlichkeitszentrum. □

Auf den folgenden Seiten habe ich diese Berührkreisscharen zu beiden Ähnlichkeitszentren und in den drei möglichen gegenseitigen Lagen der Kreise gezeichnet, bzw. zu zeichnen versucht. Eine der dabei auftretenden Schwierigkeiten ist folgende: Liegt eine Schar (zumindest zum Teil) außerhalb der beiden Kreise, so gehören auch zwei gemeinsame Tangenten durch das Ähnlichkeitszentrum mit zur Schar. Genauer: Wenn man die Gerade L durch das Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}$ gegen eine Tangente durch $\mathbf{z}$ konvergieren läßt, dann werden die zugehörigen Berührkreise immer größer, die Kreismittelpunkte gehen ins Unendliche, die Kreisbögen werden immer flacher, und gehen im Grenzfall gegen die Tangente. Auf den Zeichnungen ist das nur zu ahnen, weil ich ein Problem mit dem Zeichnen sehr großer Kreise habe: ich habe einfach keine

Lust, auszurechnen, wo ich mit dem Zeichnen eines Kreises aufhören muß, der über das Papier hinausreicht.



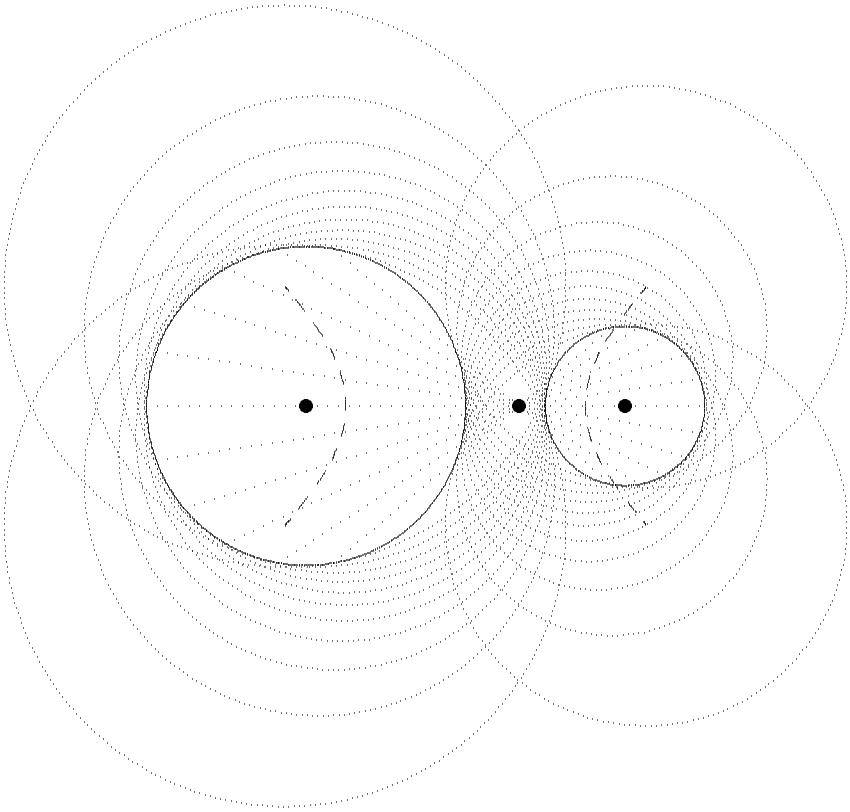
Auseinanderliegende Kreise
Berührkreisschar zum äußeren Ähnlichkeitszentrum

In den Zeichnungen habe ich außerdem gestrichelte Linien eingezeichnet. Das sind die Kurven, welche die Mittelpunkte der Berührkreise durchlaufen. Diese Kurven könnten Kegelschnitte sein. Das wollen wir jetzt beweisen. Man kann das völlig elementar durchrechnen: Ein Punkt $\mathbf{x}$

ist Mittelpunkt eines Berührkreises, wenn

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{m}_1 \| - r_1 = \| \mathbf{x} - \mathbf{m}_2 \| - r_2 > 0.$$

Diese Differenz ist dann der Radius eines Berührkreises, der beide Kreise von außen berührt. Wenn man die Wurzeln ausquadriert, und lange genug durchhält, kommt man irgend wann auf eine Kegelschnittgleichung für $\mathbf{x}$. (Das war sogar einmal eine Aufgabe im schriftlichen Staatsexamen im nichtvertieften Fach.) Wenn man in der obigen Gleichung Vorzeichen abändert bekommt man so auch alle möglichen Berührkreise.

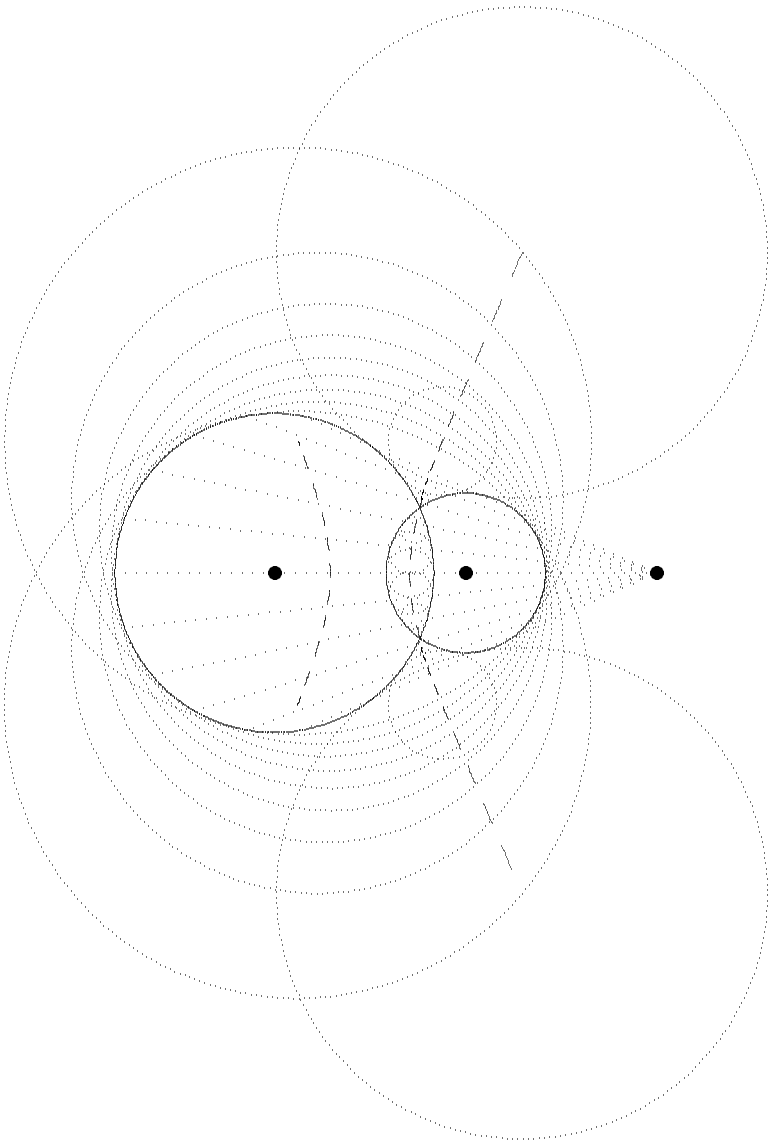


Auseinanderliegende Kreise
Berührkreisschar zum inneren Ähnlichkeitszentrum

So möchte ich hier aber nicht vorgehen, sondern ich möchte im drei-dimensionalen Raum rechnen, dessen Punkte $\mathbf{p} = (\xi, \eta, \zeta)$ alle Kreise parametrisieren (Kapitel 2). Am Ende des Abschnitts 2.3 sahen wir: Zwei Kreise $K_{\mathbf{p}}$ und $K_{\mathbf{p}_1}$ berühren sich, wenn

$$P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p})^2 - P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) \cdot P(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0.$$

Bei festem $\mathbf{p}_1$ beschreibt diese Gleichung ein quadratische Fläche im drei-dimensionalen Raum der Kreise. Diese Fläche ist ein Kegel mit seiner Spitze im Punkt $\mathbf{p}_1$. Die Mantellinien des Kegels sind genau die Tangenten von $\mathbf{p}_1$ aus an das Rotationsparaboloid Π.

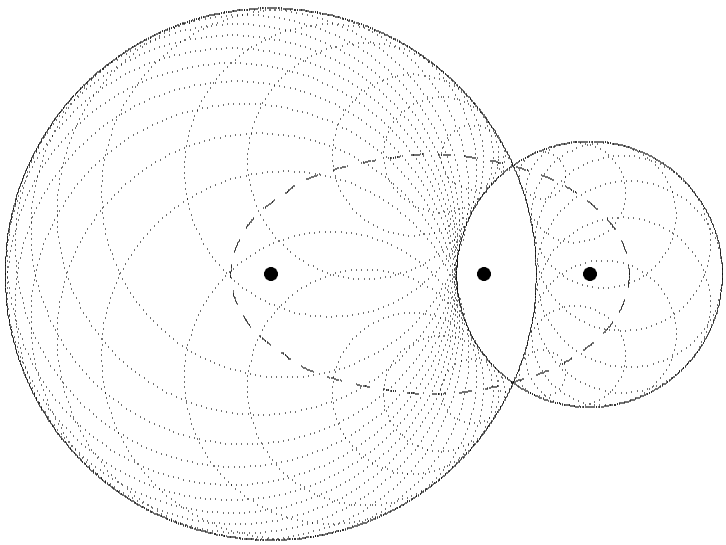


Schneidende Kreise
Berührkreisschar zum äußeren Ähnlichkeitszentrum

Die Berührkreise $K_{\mathbf{p}}$ an zwei gegebene feste Kreise $K_{\mathbf{p}_1}$ und $K_{\mathbf{p}_2}$ werden durch diejenigen Parameter $\mathbf{p}$ parametrisiert, welch den beiden Gleichungen

$$P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p})^2 - P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) = P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p})^2 - P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)\cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p}) = 0$$

genügen. Sie liegen auf der Schnittkurve zweier quadratischer Kegel im dreidimensionalen Raum. Im Allgemeinen kann man über die Schnittkurve zweier Quadriken im Raum wenig ausrechnen, aber viel Theorie machen. In diesem Fall ist das anders. Die Tatsache, daß die Menge der Berührkreise aus zwei verschiedenen Scharen besteht, kann man sehr schön im dreidimensionalen Parameterraum sehen:



Schneidende Kreise
Berührkreisschar zum inneren Ähnlichkeitszentrum

Dazu betrachten wir folgende Linearkombination der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
& P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)\cdot\Big(P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p})^2 - P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p})\Big) \\
& -P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\cdot\Big(P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p})^2 - P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)\cdot P(\mathbf{p},\mathbf{p})\Big) \\
= \;& P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)\cdot P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p})^2 - P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\cdot P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p})^2 \\
= \;& \Big(\sqrt{P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)}\cdot P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p})\Big)^2 - \Big(\sqrt{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)}\cdot P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p})\Big)^2
\end{aligned}$$

Dies ist das Produkt der beiden Ebenen-Gleichungen

$$E: \qquad \sqrt{P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)}\cdot P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}) - \sqrt{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)}\cdot P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}) = 0$$

und

$$E': \qquad \sqrt{P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)}\cdot P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}) + \sqrt{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)}\cdot P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}) = 0$$

für $\mathbf{p}$. Die Schnittkurve der beiden Berührkegel ist also die Vereinigung von zwei ebenen Kurven $\Gamma \subset E$ und $\Gamma' \subset E'$.

Die Kurven Γ und Γ' werden in ihren Ebenen E und E' durch die quadratischen Kegel ausgeschnitten, mit denen wir oben angefangen haben. Die Kurven Γ und Γ' sind also Kegelschnitte (im wahrsten Sinne des Wortes).

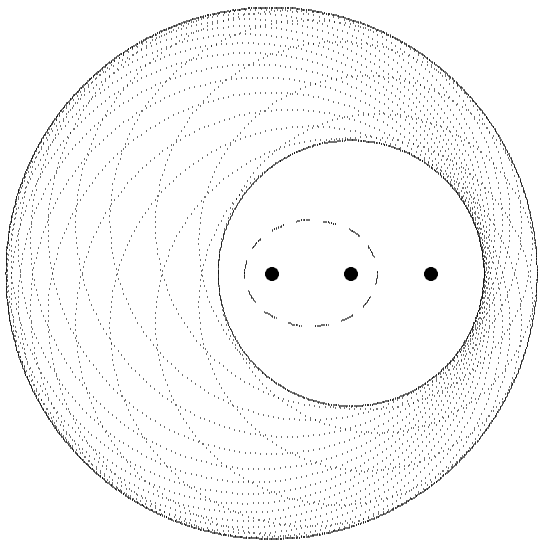
Dieses rechnerische Ergebnis möchte ich jetzt interpretieren. Dazu schreibe ich die beiden Ebenen als Polaren $E = P_{\mathbf{q}}(\Pi)$ und $E' = P_{\mathbf{q}'}(\Pi)$ zweier Punkte $\mathbf{q} = (z_1, z_2, c)$ und $\mathbf{q}' = (z_1', z_2', c_2)$. Die Gleichung für E als lineare Gleichung in $\mathbf{p} = (\xi, \eta, \zeta)$ ist

$$\sqrt{P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)}\cdot P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}) - \sqrt{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)}\cdot P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}) \;\; =$$

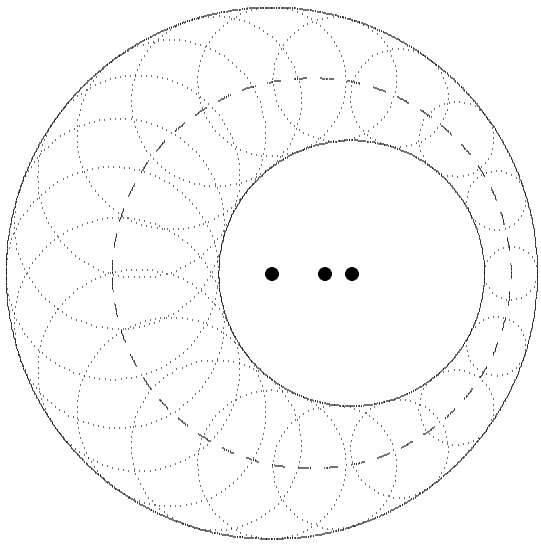
$$
\begin{aligned}
r_2 \cdot (2\xi_1\xi + 2\eta_1\eta - \zeta_1 - \zeta) - r_1 \cdot (2\xi_2\xi + 2\eta_2\eta - \zeta_2 - \zeta) &= \\
2(r_2\xi_1 - r_1\xi_2)\xi + 2(r_2\eta_1 - r_1\eta_2)\eta - (r_2\zeta_1 - r_1\zeta_2) - (r_2 - r_1)\zeta &= \\
(r_2 - r_1) \cdot \left[2\frac{r_2\xi_1 - r_1\xi_2}{r_2 - r_1} \cdot \xi + 2\frac{r_2\eta_1 - r_1\eta_2}{r_2 - r_1} \cdot \eta - \frac{r_2\zeta_1 - r_1\zeta_2}{r_2 - r_1} - \zeta \right] &= \\
(r_2 - r_1) \cdot P(\mathbf{q}, \mathbf{p})
\end{aligned}
$$

mit

$$
\mathbf{q} = \left(\frac{r_2\xi_1 - r_1\xi_2}{r_2 - r_1}, \frac{r_2\eta_1 - r_1\eta_2}{r_2 - r_1}, \frac{r_2\zeta_1 - r_1\zeta_2}{r_2 - r_1} \right) = (\mathbf{z}, c).
$$



Ineinanderliegende Kreise
Berührkreisschar zum äußeren
Ähnlichkeitszentrum



Ineinanderliegende Kreise
Berührkreisschar zum inneren
Ähnlichkeitszentrum

Der Punkt $\mathbf{q}$ gehört also zu einem Kreis K mit dem äußeren Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}$ als Mittelpunkt. Der Radius r dieses Kreises K ist festgelegt durch

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \| \mathbf{z} \|^2 - c \\
&= \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \cdot \Big((r_2\xi_1 - r_1\xi_2)^2 + (r_2\eta_1 - r_1\eta_2)^2 - (r_2 - r_1)(r_2\zeta_1 - r_1\zeta_2) \Big) \\
&= \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \cdot \Big(r_2^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 - \zeta_1) + r_1^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 - \zeta_2) - r_1 r_2(2\xi_1\xi_2 + 2\eta_1\eta_2 - \zeta_1 - \zeta_2) \Big) \\
&= \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \cdot \Big(2r_1^2 r_2^2 - r_1 r_2(r_1^2 + r_2^2 - d^2) \Big) \\
&= \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)^2} \cdot \Big(2r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2 + d^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)^2}\left(d^2 - (r_1 - r_2)^2\right)$$

Hier ist $d := \| \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \|$ der Abstand der beiden Kreismittelpunkte. Das Ergebnis für r^2 ist psitiv, und es handelt sich deswegen um einen echten, reellen Kreis, wenn

$$d^2 > (r_1 - r_2)^2.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Kreise nicht ineinander liegen.

Die Gleichung für die Ebene E' entsteht aus der für E, indem man bei r_1 oder r_2 (aber nicht bei beiden) das Vorzeichen ändert. Die Rechnung für die Ebene E' geht ganz genauso, und liefert dasselbe Ergebnis, nur ist bei r_1 oder r_2 das Vorzeichen anders: Die Ebene E' ist die Polarebene zu

$$\mathbf{q}' = \left(\frac{r_2\xi_1 + r_1\xi_2}{r_2 + r_1}, \frac{r_2\eta_1 + r_1\eta_2}{r_2 + r_1}, \frac{r_2\zeta_1 + r_1\zeta_2}{r_2 + r_1}\right) = (\mathbf{z}', c')$$

Hierzu gehört ein Kreis mit dem inneren Ähnlichkeitszentrum als Mittelpunkt, und einem Radius r', der

$$(r')^2 = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}\left((r_1 + r_2)^2 - d^2\right)$$

erfüllt. Dies ist > 0, und es handelt sich um einen echten Kreis, wenn

$$d^2 < (r_1 + r_2)^2.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Kreise K_1 und K_2 nicht außerhalb voneinander liegen.

Kreise	r^2	$(r')^2$
auseinander	> 0	< 0
schneiden	> 0	> 0
ineinander	< 0	> 0

Was ist die Bedeutung dieser beiden Kreise K und K' um die Ähnlichkeitszentren $\mathbf{z}$ und $\mathbf{z}'$ für die jeweiligen Berührkreisscharen? Die Kreisscharen werden parametrisiert durch Kegelschnitte $\Gamma \subset E$, bzw. $\Gamma' \subset E'$ in den Polarebenen $E = P_{\mathbf{q}}$, bzw. $E' = P_{\mathbf{q}'}$. Nach 2.3 bedeutet dies: Alle Kreise $K_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \Gamma$ sind orthogonal zu K, alle Kreise $K_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \Gamma'$ sind orthogonal zu K'. Wenn man die Zeichnungen ansieht, scheint das sinnvoll zu sein.

Durch einen Punkt $\mathbf{x}$ des Gebietes, das von der Berührkreisschar überstrichen wird, gehen immer zwei Kreise der Schar. Wenn jetzt $\mathbf{x} \in K$ (oder $\in K'$), dann müssen diese beiden Kreise, orthogonal zu K (oder K'), sich berühren. Mit etwas Wohlwollen kann man das eben noch aus den Zeichnungen ablesen. Und berühren können sich zwei Kreise derselben Schar nur, wenn sie nicht den Kreis K_1 oder K_2 in Ihrem Inneren enthalten. Das sind genau die Fälle, wo unsere Rechnung $r^2 > 0$, bzw. $(r')^2 > 0$ ergibt.

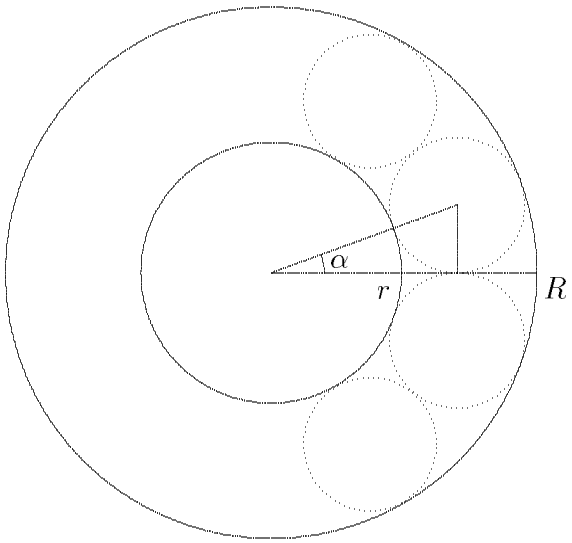
Satz (Berührung von Berührkreisen): *Es seien K_1 und K_2 zwei Kreise, nicht konzentrisch, nicht mit demselben Radius, mit äußerem bzw. inneren Ähnlichkeitszentrum $\mathbf{z}$, bzw. $\mathbf{z}'$.*

Dann gibt es einen Kreis K bzw. K' um $\mathbf{z}$, bzw. $\mathbf{z}'$, in dessen Punkten sich je zwei Kreise der betreffenden Schar berühren, falls

K und K'	Zentrum
auseinander	äußeres
schneiden	beide
ineinander	inneres

3.3 Steinersche Kreisketten

Obwohl es uns hier vor allem auf den Fall ankommt, wo zwei Kreise nicht konzentrisch liegen, beginnen wir mit zwei konzentrischen Kreisen. Der Radius des kleineren Kreises sei r, der des größeren R. Wir betrachten die Familie der Berührkreise, die zwischen den beiden Kreisen liegen, den kleineren also nicht umfassen. Wir beginnen mit einem dieser Berührkreise, zeichnen einen zweiten, der den ersten berührt, einen dritten, der den zweiten berührt, und so weiter. Was entsteht ist eine *Kreiskette*, eine Kette von einander paarweise berührenden Kreisen.



Der Radius der Berührkreise ist

$$\rho := \frac{R-r}{2},$$

und zwischen den Mittelpunkten zweier benachbarter Berührkreise liegt ein Kreisbogen zum Winkel 2α, wo

$$sin(\alpha) = \frac{\rho}{r+\rho} = \frac{(R-r)/2}{r+(R-r)/2} = \frac{R-r}{R+r}.$$

Nach r aufgelöst wird diese Beziehung

$$r = \frac{1 - sin(\alpha)}{1 + sin(\alpha)} \cdot R.$$

Wenn man einmal angefangen hat, kann man so beliebig viele Kreise zeichnen, auch noch in der entgegengesetzten Richtung. Im Allgemeinen wird so eine Kreiskette unendlich viele Kreise enthalten. Aber es kann passieren, daß sich die Kette schließt: Der nächste Berührkreis, den man zeichnen will, ist der, mit dem man angefangen hat. Wenn man mit n Kreisen zum Ausgangspunkt zurückkommt, ist die Bedingung dafür

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}.$$

Das stimmt nicht ganz, sondern nur, wenn man während der Kreise-Zeichnerei den inneren Kreis ein einziges mal unrundet hat. Es kann aber auch passieren, daß die Kreiskette sich nicht schon beim ersten mal schließt, sondern erst wenn man k Umläufe gemacht hat. Die Bedingung dafür ist

$$\alpha = \frac{k \cdot \pi}{n}.$$

Es ist klar, daß der Kreisbogen $2\alpha < \pi$ sein muß, daß also hier $0 < k < n/2$ gelten muß.

Es ist auch klar, daß sich (bei festem R) die Radien r, ρ und der Winkel α gegenseitig bestimmen. Die Bedingung dafür, daß es zwischen zwei konzentrischen Kreisen der Radien $r < R$ eine geschlossene Berührkreiskette der Länge n mit k Umläufen gibt, ist also

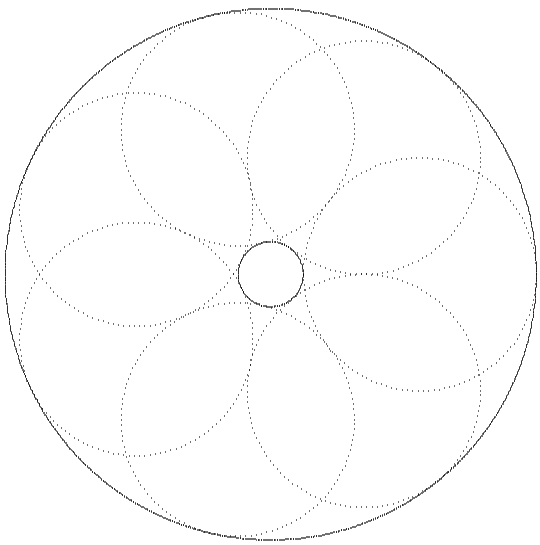
$$\frac{r}{R} = \frac{1 - sin(\alpha)}{1 + sin(\alpha)}, \quad \alpha = \frac{k \cdot \pi}{n}, \quad 0 < k < \frac{n}{2}.$$

Wenn hier k und n nicht teilerfremd sind, wird dieselbe Kreiskette einer Länge $< n$ mehrmals durchlaufen. Deswegen können wir k und n immer als teilerfremd voraussetzen. Ich möchte die ersten Fälle ($n \leq 8$) in einer kleinen Tabelle zusammenfassen:

n	k	$sin(k\pi/n)$	numerisch	r/R	numerisch
2	1	0	0	0	0
3	1	$\sqrt{3}/2$	0.866	$7 - 4\sqrt{3}$	0.0718
4	1	$\sqrt{2}/2$	0.707	$3 - 2\sqrt{2}$	0.1716
5	1	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}/4$	0.588		0.2596
5	2	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$	0.951		0.0251
6	1	1/2	0.5	1/3	0.3333
7	1		0.434		0.3948
	2		0.782		0.1224
	3		0.975		0.0127
8	1	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$	0.383		0.4465
	1	$\sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$	0.924		0.0396

Die in dieser Tabelle auftretenden sinus-Werte sind immer algebraische Zahlen. Sie sind die Imaginärteile von komplexen n-ten Einheitswurzeln, oder anders ausgedrückt, die halbe Kantenlänge des regulären n-Ecks vom Durchmesser 1. Man kann sie nicht immer nur mit Hilfe von Quadratwurzeln hinschreiben. In der Algebra beweist man, daß das z.B. schon bei $n = 7$ nicht mehr geht. Äquivalent dazu ist, daß man das reguläre 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Als Probe für die Tabelle möchte ich die Kreiskette für $n = 7$ und $k = 2$ zeichnen:



Es paßt.

So, jetzt wollen wir uns dieselben Kreisketten bei nicht-konzentrischen Kreisen ansehen. Ob sie ineinanderliegen oder nicht, ist nicht so wichtig, die beiden Kreise sollen sich nur nicht schneiden. Eine der beiden zugehörigen Berührkreisscharen besteht aus Kreisen, die einen unserer beiden festen Kreise umschließen, die andere Schar hat diese Eigenschaft nicht. Die nehmen wir. Wenn die Kreise außerhalb voneinander liegen gehört sie zum äußeren, wenn sie ineinander liegen zum inneren Ähnlichkeitszentrum. Kreise der Schar berühren sich auf einem der beiden Kreise K oder K', die am Ende des letzten Abschnitts angegeben wurden.

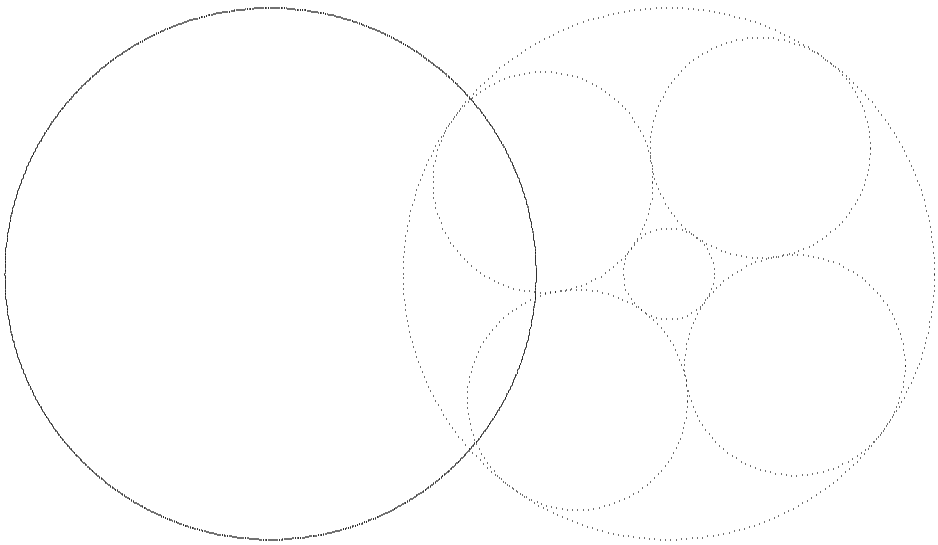
Man kann jetzt genauso wie bei konzentrischen Kreisen mit einem Berührkreis der Schar anfangen, einen zweiten Kreis derselben Schar wählen, der den ersten berührt, und so weitermachen. Jetzt ist es eine interessante Frage, ob sich die entstehende Kreiskette nach endlich vielen Schritten schließt, oder nicht. Die Antwort scheint viel schwerer zu sein, als bei konzentrischen Kreisen.

Ist sie aber nicht. Das ist eine Anwendung der Inversion am Kreis und hat folgenden Grund:

Lemma: *Zu zwei gegebenen, sich nicht schneidenden Kreisen K_1 und K_2 gibt es immer einen Kreis K, so daß bei Inversion an diesem Kreis K, die Kreise K_1 und K_2 in zwei konzentrische Kreise übergehen.*

Beweis. Die Kreise K_1 und K_2 spannen ein Kreisbüschel Λ ohne Basispunkte, also mit zwei Nullkreisen auf. Wir wählen einen dieser Nullkreise, sein Punkt sei $\mathbf{x}$, und nehmen als K einen Kreis mit dem Mittelpunkt $\mathbf{x}$.

Das zu Λ konjugierte Kreisbüschel sei Λ'. Alle seine Kreise stehen auf K_1 und K_2 senkrecht und gehen durch $\mathbf{x}$. Bei der Inversion an K gehen diese Kreise aus Λ' deswegen auf die Geraden durch $\mathbf{x}$. Die Kreise aus Λ gehen unter der Inversion auf Kreise, die auf allen diesen Geraden senkrecht stehen. Das sind genau die Kreise mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$. Insbesondere haben die Bildkreise K_1' und K_2' von K_1 und K_2 unter der Inversion auch den Mittelpunkt $\mathbf{x}$. Dann sind sie also konzentrisch. □



Kreiskette der Länge vier zwischen zwei konzentrischen Kreisen

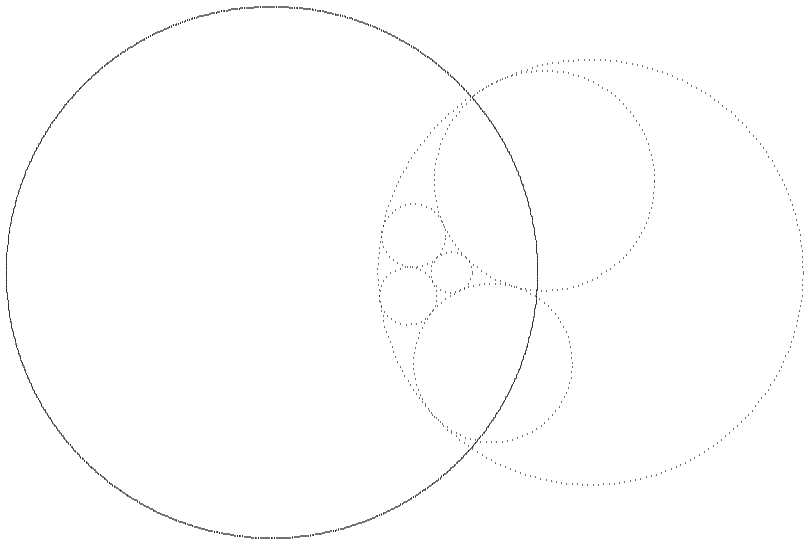


Bild der Kreiskette unter einer Inversion

Bei der Inversion an einem Kreis, die K_1 und K_2 auf die Kreise K_1' und K_2' abbildet, gehen Berührkreise an K_1 und K_2 auf Berührkreise an K_1' und K_2'. Sich gegenseitig berührende Berührkreise gehen wieder auf berührende Berührkreise. Eine Steinersche Kreiskette zu K_1 und K_2 der Länge n geht deswegen wieder auf eine Steinersche Kreiskette zu K_1' und K_2' der Länge n. Und auch die Zahl k der Umläufe ändert sich nicht. Damit ist die Frage der Existenz einer Kreiskette zu den Kreisen K_1 und K_2 zurückgeführt auf die Frage der Existenz einer ebensolchen Kette zu zwei konzentrischen Kreisen K_1' und K_2', welche die Bilder von K_1 und K_2 unter der Inversion an einem Kreis sind.

Als erste Anwendung ziehen wir daraus die Folgerung

Satz (Porismus für Kreisketten): *Gegeben seien zwei disjunkte Kreise K_1 und K_2. Wenn es eine Steinersche Kreiskette der Länge n und Umlaufzahl k für diese Kreise gibt, dann gibt es unendlich viele solcher Ketten. Jeder Berührkreis an K_1 und K_2 (der keinen der beiden Kreise umschließt) gehört zu einer solchen Kreiskette.*

Bweis. Für konzentrische Kreise K_1 und K_2 ist die Aussage wegen der Rotationssymmetrie völlig klar, so klar, daß ich sie nicht einmal eigens erwähnte. Aber mit Hilfe einer geeigneten Inversion (s. Lemma) ist die Aussage auf konzentrische Kreise zurückzuführen. □

Dieser Satz ist wunderschön. Insbesondere kann man ihn wunderschön am Computer visualisieren.

Ich möchte jetzt der Frage nachgehen, ob man ähnlich wie bei konzentrischen Kreisen, auch eine algebraische Bedingung dafür angeben kann, daß eine solche Steinersche Kreiskette zu zwei gegebenen Kreisen K_1 und K_2 existiert. Die Bedingung ist natürlich, daß sie in konzentrische Kreise K_1' und K_2' invertiert werden können, für deren Radien r_1 und r_2

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - sin(k\pi/n)}{1 + sin(k\pi/n)}$$

gilt. Die Kreise K_1 und K_2 sind durch ihre beiden Radien r_1 und r_2 und den Abstand d ihrer Mittelpunkte in ihrer Lage eindeutig bestimmt, bis auf Bewegungen. Dummerweise ändern sich diese drei Größen r_1, r_2 und d bei Inversionen. Aber es gibt eine Invariante, welche sich nicht ändert. Das ist

$$\frac{P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)^2}{P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) \cdot P(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2)},$$

die Zahl aus 2.3, welche den Schnittwinkel der Kreise zu den Parameterpunkten $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ bestimmt. Der Schnittwinkel zweier Kreise ist ja eine Invariante unter der Inversion, also wird auch diese Zahl (als cos^2 des Schnittwinkels) invariant sein. Richtig, wenn sich die Kreise schneiden! Aber das tun sie jetzt gerade nicht. Trotzdem ist die Zahl eine Invariante unter der Inversion:

Zunächst ist klar, daß sich

$$\frac{P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)^2}{P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) \cdot P(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2)} = \frac{(r_1^2 + r_2^2 - d^2)^2}{4 r_1^2 r_2^2}$$

bei Bewegungen, ja auch bei Streckungen, nicht ändert. Deswegen genügt es, die Invarianz des Ausdrucks bei Inversion am Einheitskreis zu beweisen.

Satz (Invariante): *Zwei Kreise mit den Parameterpunkten* $\mathbf{p}_1$ *und* $\mathbf{p}_2$ *mögen unter der Inversion am Einheitskreis in zwei Kreise mit den Parameterpunkten* $\mathbf{p}_1'$ *und* $\mathbf{p}_2'$ *übergehen. Dann gilt*

$$\frac{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)^2}{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\cdot P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)} = \frac{P(\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2')^2}{P(\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_1')\cdot P(\mathbf{p}_2',\mathbf{p}_2')}.$$

Beweis. Es sei $\mathbf{p}_i = (\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ und $\mathbf{p}_i' = (\xi_i',\eta_i',\zeta_i')$ für $i = 1,2$. Wenn der Inversionskreis als Einheitskreis gewählt wird, haben wir in 2.1

$$\mathbf{p}_i' = \left(\frac{\xi_i}{\zeta_i},\frac{\eta_i}{\zeta_i},\frac{1}{\zeta_i}\right)$$

bewiesen. Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{P(\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2')^2}{P(\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_1')P(\mathbf{p}_2',\mathbf{p}_2')} &= \frac{(2\xi_1'\xi_2'+2\eta_1'\eta_2'-\zeta_1'-\zeta_2')^2}{((\xi_1')^2+\eta_1')^2-\zeta_1')((\xi_2')^2+(\eta_2')^2-\zeta_2')} \\
&= \frac{\left(\frac{2\xi_1\xi_2}{\zeta_1\zeta_2}+\frac{2\eta_1\eta_2}{\zeta_1\zeta_2}-\frac{1}{\zeta_1}-\frac{1}{\zeta_2}\right)^2}{\left((\frac{\xi_1}{\zeta_1})^2+(\frac{\eta_1}{\zeta_1})^2-(\frac{1}{\zeta_1})^2\right)\left((\frac{\xi_2}{\zeta_2})^2+(\frac{\eta_2}{\zeta_2})^2-(\frac{1}{\zeta_2})^2\right)} \\
&= \frac{(2\xi_1\xi_2+2\eta_1\eta_2-\zeta_2-\zeta_1)^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2-\zeta_1)\,(\xi_2^2+\eta_2^2-\zeta_2)} \\
&= \frac{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)^2}{P(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)P(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)}.
\end{aligned}$$

□

Wir wissen also jetzt: Die Zahl

$$I^2, \qquad \text{wo} \qquad I := \frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2},$$

ändert sich nicht bei konformen Abbildungen und bei Inversionen an Kreisen. Wenn $I^2 \le 1$ ist, dann schneiden sich die beiden Kreise (Abschnitt 2.3). Uns interessiert deswegen nur $I^2 > 1$, also $I > 1$ oder $I < -1$. Der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen ist folgender:

- $I > 1$: In diesem Fall ist

  $$r_1^2+r_2^2-d^2 > 2r_1r_2, \quad (r_1-r_2)^2-d^2 > 0, \quad d < |r_1-r_2|,$$

  die Kreise liegen ineinander.

- $I < -1$: Jetzt ist

  $$r_1^2+r_2^2-d^2 < -2r_1r_2, \quad (r_1+r_2)^2-d^2 < 0, \quad d > r_1+r_2,$$

  die Kreise liegen außerhalb voneinander.

Das Vorzeichen von I entscheidet also darüber, ob die Kreise ineinander liegen oder nicht. Das ist sehr lustig, denn bei einer Inversion können ineinanderliegende Kreise auf Kreise abgebildet werden, die außerhalb voneinander liegen. Die Zahl I selbst ist also keine Invariante unter Inversionen, nur ihr Betrag, bzw. das Quadrat I^2.

Für konzentrische Kreise ist $d = 0$ und

$$I = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right).$$

Damit ist I durch das Verhältnis $q := r_1/r_2$ festgelegt. Umgekehrt legt I auch dieses Verhältnis im wesentlichen fest. Denn wenn

$$I = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right),$$

dann folgt aus der quadratischen Gleichung

$$q^2 - 2Iq + 1 = 0$$

für q, daß q einer der beiden Werte

$$q_{1,2} = I \pm \sqrt{I^2 - 1}$$

ist. Diese beiden q-Werte sind invers zueinander. Wenn einer $q = r_1/r_2$ ist, dann ist der andere $1/q = r_2/r_1$. Damit ist dieser Quotient der beiden Radien durch I festgelegt, bis auf die Reihenfolge der beiden Kreise. Aber natürlich ist klar, daß $q = r/R$ für $q < 1$ und $q = R/r$ für $q > 1$ gilt.

Wenn es zu zwei konzentrischen Kreisen eine Steinersche Kreiskette aus n Kreisen mit k Umläufen gibt, dann ist

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-s}{1+s} + \frac{1+s}{1-s}\right) = \frac{1+s^2}{1-s^2}$$

mit $s := sin(k\pi/n)$. Und umgekehrt: Wenn diese Beziehung gilt, dann ist entweder r_1/r_2 oder r_2/r_1 gleich dem Quotienten

$$\frac{1-s}{1+s},$$

je nachdem welcher Kreis größer ist, und eine Steinersche Kreiskette existiert.

Satz (Steinersche Kreisketten): *Gegeben seien die beiden Kreise K_1 und K_2 mit*

$$I = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Es gibt zwischen ihnen genau dann eine Berührkreiskette aus n Kreisen mit k Umläufen, wenn

$$|I| = \frac{1+s^2}{1-s^2}, \qquad s := sin(\frac{k\pi}{n}).$$

Beweis. Wegen $|s| < 1$ ist $|I| > 1$ und die beiden Kreise schneiden sich nicht. Wir invertieren K_1 und K_2 auf zwei konzentrische Kreise K_1' und K_2'. Dabei ändert sich $|I|$ nicht. Also gibt es zwischen K_1' und K_2' eine Kreiskette der beschriebenen Art. Das Bild dieser Kreiskette unter der Inversion ist eine Kreiskette zwischen K_1 und K_2. □

Die Bedingung dafür, daß zwischen zwei Kreisen eine Steinersche Berührkreiskette exisitiert, kann man graphisch darstellen. Dafür normieren wir den Radius R eines der beiden Ausgangskreise auf $R = 1$. Dann haben wir zwei Parameter r und d, welche die Situation beschreiben. Wir können sie als Koordinaten in einer Ebene nehmen. Zu jedem Punkt (r, d) im rechten oberen Quadranten dieser Ebene gehört ein Kreispaar. Die zugehörige Invariante ist jetzt

$$I = \pm\frac{r^2 + 1 - d^2}{2r}.$$

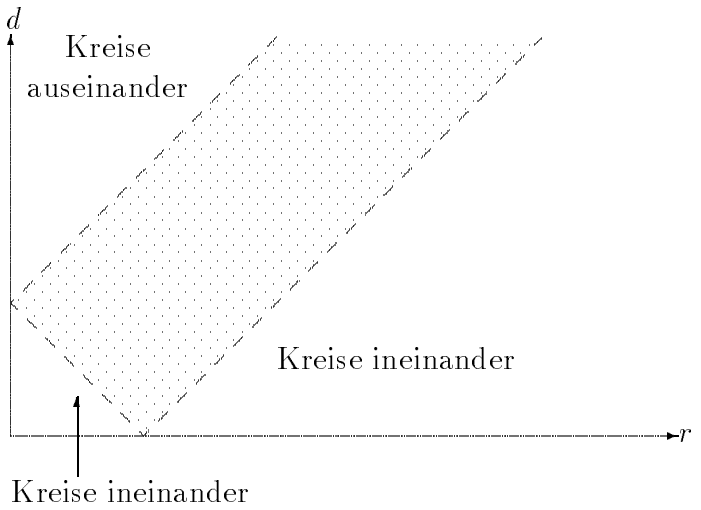
Die Bedingung dafür, daß die Kreise ineinander liegen ist

$$\frac{r^2 + 1 - d^2}{2r} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad d < |1 - r|,$$

und dafür daß sie außerhalb voneinander liegen

$$\frac{r^2 + 1 - d^2}{2r} < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad d > 1 + r.$$

In der (r, d)-Ebene sind das folgende Gebiete:

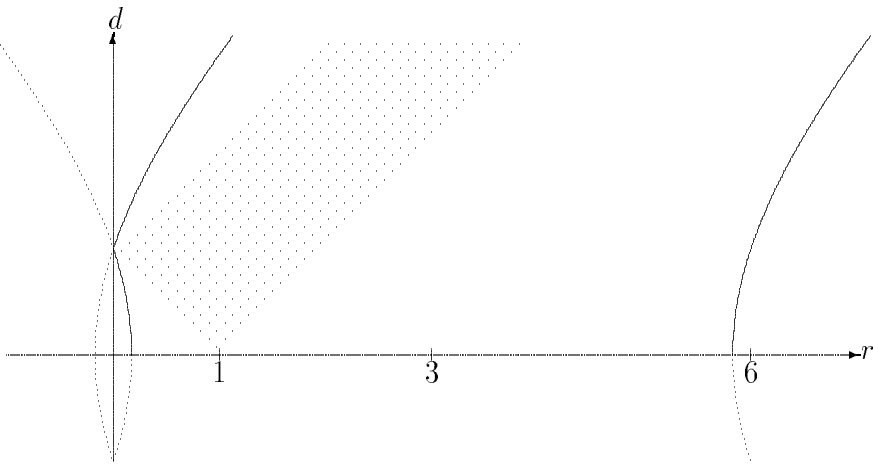


Das schattierte Gebiet ist hier für uns verboten, seine Punkte entsprechen sich schneidenden Kreispaaren. Man kann nun in diese Ebene die Kurven eintragen, wo I konstant ist. Sie haben eine Gleichung

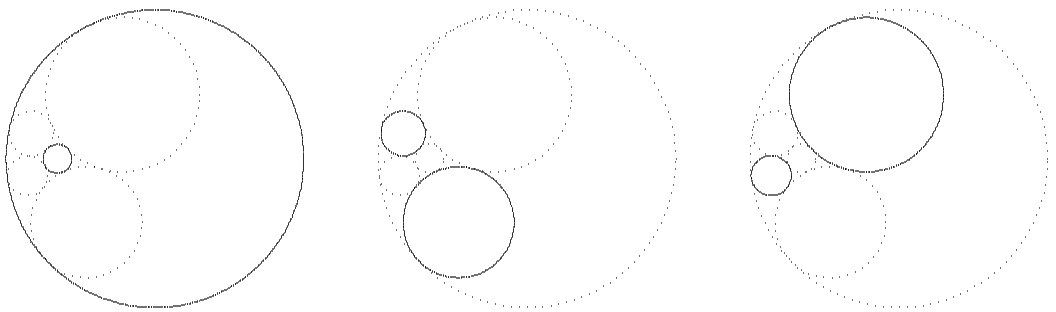
$$\frac{r^2 + 1 - d^2}{2r} \quad = \quad I$$

$$\begin{aligned} r^2 + 1 - d^2 &= 2rI \\ r^2 - 2rI - d^2 &= -1 \\ (r-I)^2 - d^2 &= I^2 - 1 \\ \frac{(r-I)^2}{I^2-1} - \frac{d^2}{I^2-1} &= 1. \end{aligned}$$

So eine Gleichung beschreibt eine gleichseitige Hyperbel mit den Halbachsen $\sqrt{I^2-1}$, die um I auf der r-Achse nach rechts verschoben ist. Für positives I gehören zu Punkten (r,d) auf dieser Hyperbel zwei Kreise, die ineinander liegen, für negatives I liegen sie außerhalb voneinander. Ich habe diese Hyperbeläste für Kreisketten der Länge $n = 4$, also $sin(\alpha) = \sqrt{2}/2$ und $I = 3$ einmal geplottet:

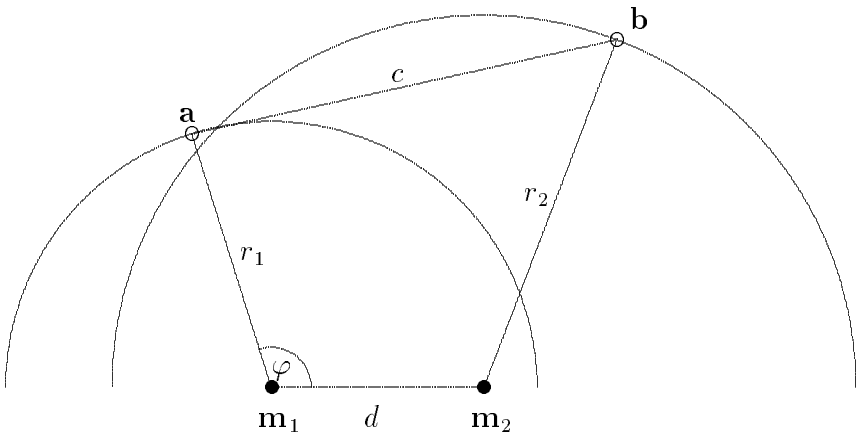


Kreisketten der Länge vier bilden eine sehr bemerkenswerte geometrische Konfiguration: Nimmt man die beiden Ausgangskreise noch hinzu, so haben wir insgesamt sechs Kreise. Von diesen Kreisen berührt jeder vier andere, und einen anderen nicht. Die vier, welche er berührt bilden eine Kreiskette. Insgesamt haben wir da drei, ineinander verschlungene Kreisketten:



3.4 Gestänge

Es seien - wie immer - K_1 und K_2 zwei Kreise mit den Radien r_1, r_2, den Mittelpunkten $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ und dem Abstand d zwischen ihren Mittelpunkten. Wir betrachten hier Paare von Punkten $\mathbf{a} \in K_1$ und $\mathbf{b} \in K_2$, welche einen festen Abstand c voneinander haben. Man kann sich das vorstellen als ein *Gestänge* bestehend aus vier Stangen der festen Längen d, r_1, r_2, c, die durch Gelenke verbunden sind, so, daß die Stange der Länge d fest ist.



Wir wollen die Bedingung an die vier Längen r_1, r_2, c, d dafür finden, daß es möglich ist, das Gestänge so zu bewegen, daß der Punkt $\mathbf{a}$ auf seinem Kreis K_1 eine ganze Drehung ausführt. (Ich halte mich hier and die Seiten 61 f. des Buches 'Leitfaden der technisch wichtigen Kurven' von F. Ebner, Teubner, Leipzig, 1906.)

Ein Punkt $\mathbf{a} \in K_1$ ist durch das Gestänge genau dann erreichbar, wenn der Kreis um $\mathbf{a}$ vom Radius c den Kreis K_2 schneidet, d.h., genau dann, wenn

$$|c - r_2| \leq \| \mathbf{a} - \mathbf{m}_2 \| \leq c + r_2.$$

Wegen

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{m}_2 \|^2 = r_1^2 + d^2 - 2(\mathbf{a}.\mathbf{m}_2) = r_1^2 + d^2 - 2r_1 d cos(\varphi)$$

ist dies äquivalent mit

$$\begin{array}{rcccl} (c-r_2)^2 & \leq & r_1^2 + d^2 - 2r_1 d cos(\varphi) & \leq & (c+r_2)^2 \\ (c-r_2)^2 - (d^2 + r_1^2) & \leq & -2r_1 d cos(\varphi) & \leq & (c+r_2)^2 - (d^2 + r_1^2) \\ \dfrac{d^2 + r_1^2 - (c+r_2)^2}{2r_1 d} & \leq & cos(\varphi) & \leq & \dfrac{d^2 + r_1^2 - (c-r_2)^2}{2r_1 d}. \end{array}$$

Genau dann sind hier alle Winkel φ möglich, wenn

$$\frac{d^2 + r_1^2 - (c+r_2)^2}{2r_1 d} \leq -1 \quad \text{und} \quad 1 \leq \frac{d^2 + r_1^2 - (c-r_2)^2}{2r_1 d}$$

$$(d + r_1)^2 - (c + r_2)^2 \leq 0 \leq (d - r_1)^2 - (c - r_2)^2$$

$$(d + r_1 + c + r_2)(d + r_1 - c - r_2) \leq 0 \leq (d - r_1 + c - r_2)(d - r_1 - c + r_2).$$

Weil $d + r_1 + c + r_2 > 0$ ist, bedeutet dies

$$r_1 + d - r_2 - c \leq 0 \leq (r_1 - d + r_2 - c)(r_1 - d - r_2 + c).$$

Um diese Bedingungen auszuwerten, machen wir vier Fallunterscheidungen nach dem Größenverhältnis zwischen r_1 und d, bzw. r_2 und c:

$\underline{r_1 > d \text{ und } r_2 > c}$: Wegen $r_1 - d + r_2 - c > 0$ sind die Bedingungen

$$r_1 + d - r_2 - c \leq 0 \leq r_1 - d - r_2 + c.$$

Daraus folgt zunächst $d - c \leq -d + c$, d.h., $d \leq c$. Damit ist die feste Stange d die kürzeste aller vier Stangen. Je nachdem, wie sich r_1 und r_2 zueinander verhalten, sehen wir

wenn	Bedingung
$r_1 < r_2$	$r_2 + d \leq r_1 + c,$
$r_2 < r_1$	$r_1 + d \leq r_2 + c.$

Das sieht furchtbar unübersichtlich aus, vor allem weil noch drei andere Fälle zu diskutieren sind. Trotzdem steckt System darin: *Die kürzeste Stange ist d und die Summe dieser kleinsten Länge und der jeweils größten ist $\leq$ der Summe der beiden anderen Längen.*

$\underline{r_1 > d \text{ und } r_2 < c}$: Wegen $r_1 - d - r_2 + c > 0$ sind die Bedingungen

$$r_1 + d - r_2 - c \leq 0 \leq r_1 - d + r_2 - c.$$

Es folgt $d \leq r_2$, also ist wieder d die kleinste Länge, und

wenn	Bedingung
$r_1 > c$	$r_1 + d \leq r_2 + c$
$r_1 < c$	$c + d \leq r_1 + r_2.$

Das ist wörtlich dieselbe Bedingung, wie im ersten Fall.

$\underline{r_1 < d \text{ und } r_2 > c}$: Wegen $r_1 - d - r_2 + c < 0$ haben wir jetzt

$$r_1 + d - r_2 - c \leq 0 \leq -(r_1 - d + r_2 - c).$$

Daraus folgt $r_1 \leq c$, also ist nun r_1 die kleinste der vier Längen, und

wenn	Bedingung
$r_2 > d$	$r_1 + r_2 \leq c + d$
$r_2 < d$	$r_1 + d \leq r_2 + c.$

Es ist r_1 die kleinste der vier Längen und die Summe der kleinsten und der größten ist $\leq$ der Summe der beiden anderen.

$\underline{r_1 < d \text{ und } r_2 < c}$: Wegen $r_1 - d + r_2 - c < 0$ finden wir

$$r_1 + d - r_2 - c \leq 0 \leq -(r_1 - d - r_2 + c)$$

und daraus zunächst $r_1 \leq r_2$. Wieder ist r_1 die kleinste der vier Längen, und

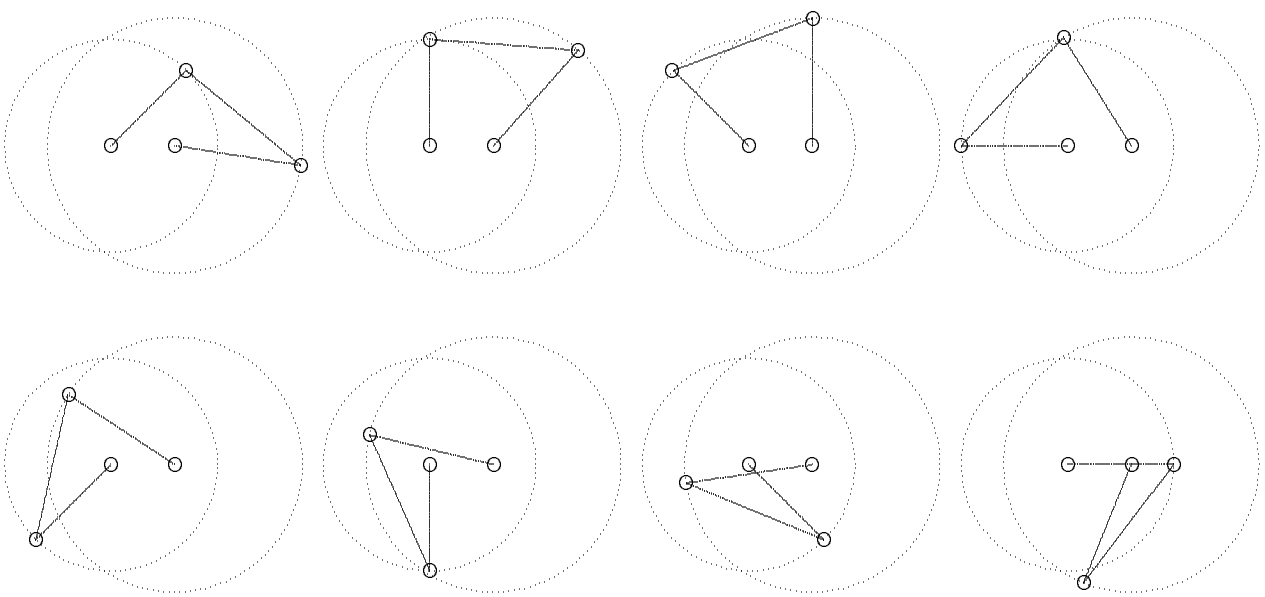
wenn	Bedingung
$c > d$	$r_1 + c \leq r_2 + d$
$c < d$	$r_1 + d \leq r_2 + c.$

Wörtlich dieselbe Bedingung wie im vorhergehenden Fall!

Fassen wir zusammen:

Satz: *In dem Gestänge vermag der Punkt* **a** *genau dann den gesamten Kreis* K_1 *zu durchlaufen, wenn entweder* d *oder* r_1 *die kleinste der vier Längen, und die Summe aus der kleinsten und der größten Länge* $\leq$ *der Summe der beiden anderen Längen ist (Grashof-Bedingung).*

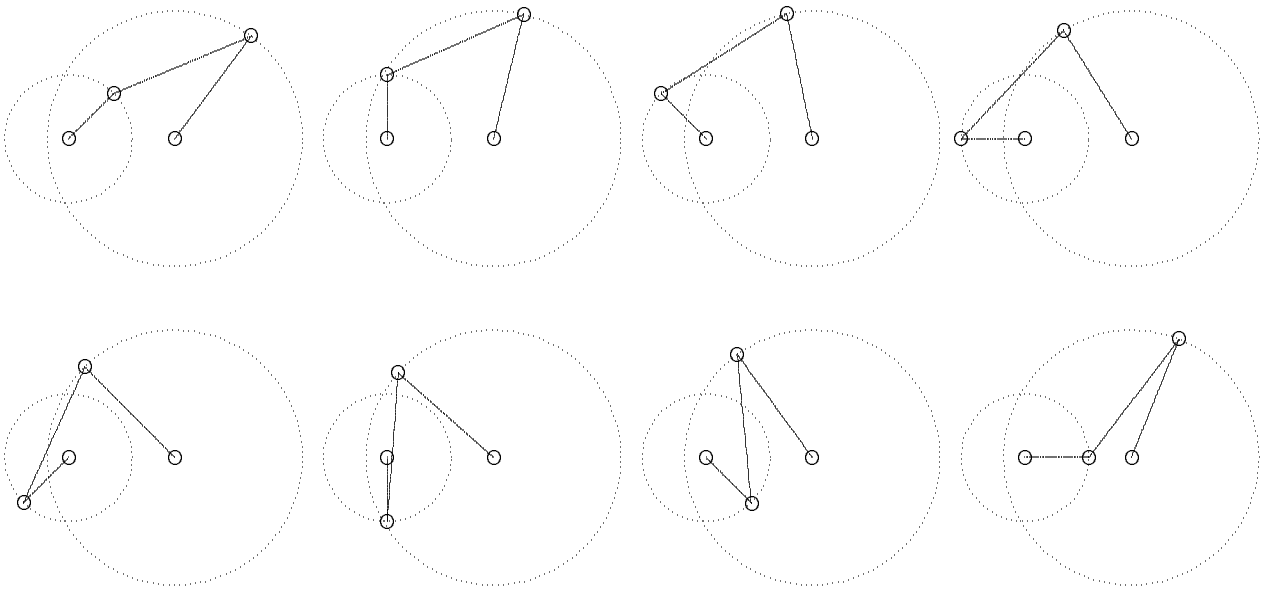
Diese Aussage stammt aus dem Buch 'Theoretische Maschinenlehre, Band II' von Grashof. Mehr als diesen Titel, und daß es vor dem Jahre 1906 erschienen ist, weiß ich nicht über dieses Buch, und ich bin auch nicht sicher, ob sich der Autor Grashof oder Grashoff schrieb.



Doppelkurbel

Mit diesem Satz kann man jetzt die Bewegungsmöglichkeiten unseres Gestänges klassifizieren. Dabei nennt man eine Stange, die eine volle Kreisbewegung durchführen kann, eine *Kurbel*, eine der das nicht möglich ist eine *Schwinge*.

Grashofbedingung	minimale Länge	Gestänge
erfüllt	d	Doppelkurbel
erfüllt	r_1 oder r_2	Kurbelschwinge (oder Schwingkurbel)
erfüllt	c	Doppelschwinge
nicht erfüllt		Doppelschwinge



Kurbelschwinge

Die Doppelschwinge möchte ich nicht auch noch zeichnen. Das ist nämlich etwas schwieriger: Bei den Bildern der Doppelkurbel und der Kurbelschwinge habe ich den Punkt $\mathbf{a}$ einfach den kleinen Kreis K_1 in Schritten von 45^o durchlaufen lassen, und die beiden Punkte auf dem anderen Kreis K_2 ausgerechnet, die von $\mathbf{a}$ den Abstand c haben. Den richtigen habe ich gezeichnet. Bei der Doppelschwinge durchlaufen beide Punkte, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, nur Teile ihrer Kreise, und ich müßte erst ausrechnen, welche Bögen das sind, und dann einen Punkt auf seinem Bogen variieren lassen. Das ist mir aber jetzt zu aufwendig.

Man würde feststellen, daß sich die Gestänge, welche der Grashof-Bedingung genügen, qualitativ von denen unterscheiden, die es nicht tun: Ist die Grashof-Bedingung erfüllt, kann das Gestänge zwei verschiedene Bewegungsabläufe ausführen, die man nicht stetig miteinander in Verbindung bringen kann. Bei der Doppelkurbel, die ich gezeichnet habe, zieht der Punkt $\mathbf{a}$ auf K_1 den Punkt $\mathbf{b} \in K_2$ *hinter* sich her. Er könnte ihn auch *vor* sich herschieben. Bei der Kurbelschwinge findet die Schwingung auf dem oberen Teil des Kreises K_2 statt, sie könnte auch im unteren Teil stattfinden. In diesen Fällen ist der Raum der Positionen des Gestänges *nicht zusammenhängend.*

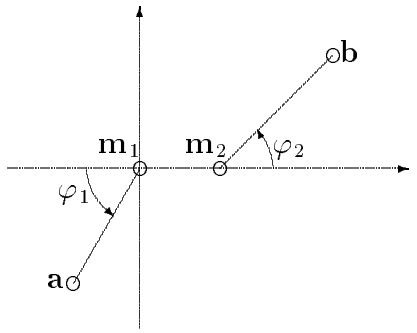
Ich möchte jetzt den Raum aller Lagen, welche das Gestänge einnehmen kann durch eine Gleichung beschreiben. Natürlich kann man sagen, dieser Raum ist die Menge

$$\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in K_1 \times K_2 :\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| = c\}.$$

Diese Beschreibung ist für meine Zwecke zu unübersichtlich, weil es rechnerisch unangenehm ist, zu einem festen Punkt $\mathbf{a} \in K_1$ die beiden Punkte $\mathbf{b} \in K_2$ zu finden, welche den Abstand c haben (wenn sie reell sind). Die folgende Beschreibung ist dafür viel besser geeignet. Der Nachteil ist, daß die metrische Gestalt der beiden Kreise verloren geht.

Bei den Rechnungen, die jetzt folgen, halte ich mich an den Artikel 'Ein Schliessungssatz für zwei Kreise' von O. Bottema in den Elementen der Mathematik XX, p.1-24. Die Lagen der Punkte **a** und **b** beschreibt er durch zwei Winkel φ_1 und φ_2, und zwar normiert er die Winkel so, daß

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -r_1 \cdot cos(\varphi_1) \\ -r_1 \cdot sin(\varphi_1) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} d + r_2 \cdot cos(\varphi_2) \\ r_2 \cdot sin(\varphi_2) \end{pmatrix}.$$



Die Punkte **a** und **b** haben den Abstand c, wenn

$$\begin{aligned} \| \mathbf{b} - \mathbf{a} \|^2 &= (d + r_1 \cdot cos(\varphi_1) + r_2 \cdot cos(\varphi_2))^2 + (r_1 \cdot sin(\varphi_1 + r_2 \cdot sin(\varphi_2))^2 \\ &= d^2 + r_1^2 \cdot cos^2(\varphi_1) + r_2^2 \cdot cos^2(\varphi_2) \\ &\quad +2dr_1 \cdot cos(\varphi_1) + 2dr_2 \cdot cos(\varphi_2) + 2r_1 r_2 \cdot cos(\varphi_1) cos(\varphi) 2) \\ &\quad +r_1^2 \cdot sin^2(\varphi_1) + r_2^2 \cdot sin^2(\varphi_2) + 2r_1 r_2 \cdot sin(\varphi_1) sin(\varphi_2) \\ &= d^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 d \cdot cos(\varphi_1) + 2r_2 d \cdot cos(\varphi_2) \\ &\quad +2r_1 r_2 \left(cos(\varphi_1) cos(\varphi_2) + sin(\varphi_1) sin(\varphi_2)\right) \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Das ist eine Gleichung für vier Variable, nämlich die beiden Winkelfunktionen der beiden Winkel φ_1 und φ_2. Man kann eine Gleichung für zwei Variable $u, v \in \mathbb{R}$ daraus machen, indem man die clevere Substitution

$$u := cotang\left(\frac{\varphi_1}{2}\right), \qquad v := cotang\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)$$

durchführt. Damit wird

$$\begin{aligned} 1 + u^2 &= 1/cos^2(\varphi_1/2) & 1 + v^2 &= 1/cos^2(\varphi_2/2) \\ 1 - u^2 &= \frac{cos^2(\varphi_1/2) - sin^2(\varphi_1/2)}{cos^2(\varphi_1/2)} & 1 - v^2 &= \frac{cos^2(\varphi_2/2) - sin^2(\varphi_2/2)}{cos^2(\varphi_2/2)} \\ &= \frac{cos(\varphi_1)}{cos^2(\varphi_1/2)} & &= \frac{cos(\varphi_2)}{cos^2(\varphi_2/2)}. \end{aligned}$$

Und wegen

$$cos(\varphi_i) = cos\left(\frac{\varphi_i}{2} + \frac{\varphi_i}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= cos^2(\varphi_i/2) - sin^2(\varphi_i/2) \\
sin(\varphi_i) &= sin\left(\frac{\varphi_i}{2} + \frac{\varphi_i}{2}\right) \\
&= 2cos(\varphi_i/2)sin(\varphi_i/2) \\
(1+u^2)(1+v^2)cos(\varphi_1) &= (1+v^2)(1-u^2) \\
(1+u^2)(1+v^2)cos(\varphi_2) &= (1+u^2)(1-v^2) \\
(1+u^2)(1+v^2)cos(\varphi_1)cos(\varphi_2) &= (1-u^2)(1-v^2) \\
(1+u^2)(1+v^2)sin(\varphi_1)sin(\varphi_2) &= 4uv
\end{aligned}
$$

wird aus unserer Gleichung

$$
\begin{aligned}
d^2 + r_1^2 + r_2^2 - c^2 + 2r_1 d \cdot cos(\varphi_1) + 2r_2 d \cdot cos(\varphi_2) & \\
+2r_1 r_2 \left(cos(\varphi_1)cos(\varphi_2) + sin(\varphi_1)sin(\varphi_2)\right) &= 0,
\end{aligned}
$$

nachdem wir sie mit $(1+u^2)(1+v^2)$ durchmultiplizieren, die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(r_1^2 + r_2^2 + d^2 - c^2)(1+u^2)(1+v^2) + 2r_1 d(1-u^2)(1+v^2) & \\
+2r_2 d(1+u^2)(1-v^2) + 2r_1 r_2 \Big((1-u^2)(1-v^2) + 4uv\Big) &= \\
(r_1^2 + r_2^2 + d^2 - c^2 - 2r_1 d - 2r_2 d + 2r_1 r_2) \cdot u^2 v^2 & \\
+(r_1^2 + r_2^2 + d^2 - c^2 - 2r_1 d + 2r_2 d - 2r_1 r_2) \cdot u^2 & \\
+(r_1^2 + r_2^2 + d^2 - c^2 + 2r_1 d - 2r_2 d - 2r_1 r_2) \cdot v^2 & \\
+8r_1 r_2 \cdot uv & \\
+r_1^2 + r_2^2 + d^2 - c^2 + 2r_1 d + 2r_2 d + 2r_1 r_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Das sieht natürlich viel schlimmer aus, als die Ausgangsgleichung. Aber mit den cleveren Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
p_1 &:= -r_1 + r_2 + d + c, & p_2 &:= r_1 - r_2 + d + c, \\
p_3 &:= r_1 + r_2 - d + c, & p_4 &:= r_1 + r_2 + d - c, \\
q_1 &:= r_1 - r_2 - d + c, & q_2 &:= -r_1 + r_2 - d + c, \\
q_3 &:= -r_1 - r_2 + d + c, & q_4 &:= r_1 + r_2 + d + c
\end{aligned}
$$

schrumpft die Gleichung auf die übersichtliche Form

$$
f(u,v) := \quad p_3 q_3 \cdot u^2 v^2 + p_1 q_1 \cdot u^2 + p_2 q_2 \cdot v^2 - 8 r_1 r_2 \cdot uv - p_4 q_4 = 0.
$$

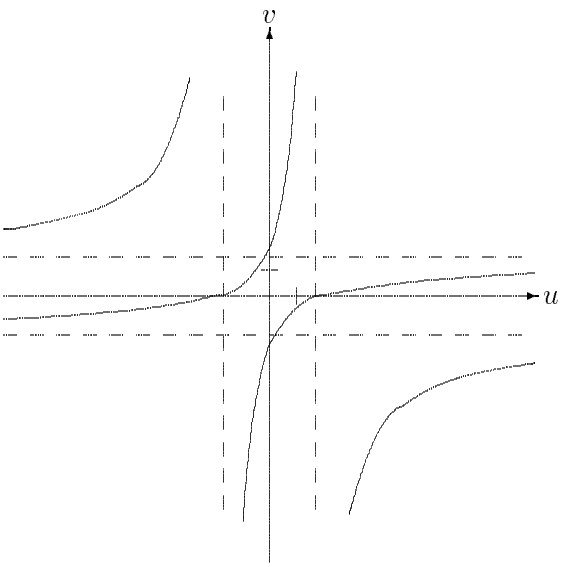
Das ist jetzt eine Gleichung für zwei Variable u, v, die beide quadratisch vorkommen. Das ist wieder eine Kurve vom Grad vier. Das wesentliche ist folgendes: gehört der Punkt (u,v) zu einem Paar $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in K_1 \times K_2$ mit dem Abstand $\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \| = c$, so gehört das Paar $(\mathbf{a},\mathbf{b}')$ zum Punkt (u,v') mit derselben u-Koordinate und das Paar $(\mathbf{a}',\mathbf{b})$ mit demselben Abstand zum Punkt (u',v) mit derselben v-Koordinate. Weil die Gleichung in u und in v jeweils vom Grad

zwei ist, schneidet jede achsenparallele Gerade $u = u_0$ oder $v = v_0$ die Kurve in zwei Punkten (wenn diese reell sind).

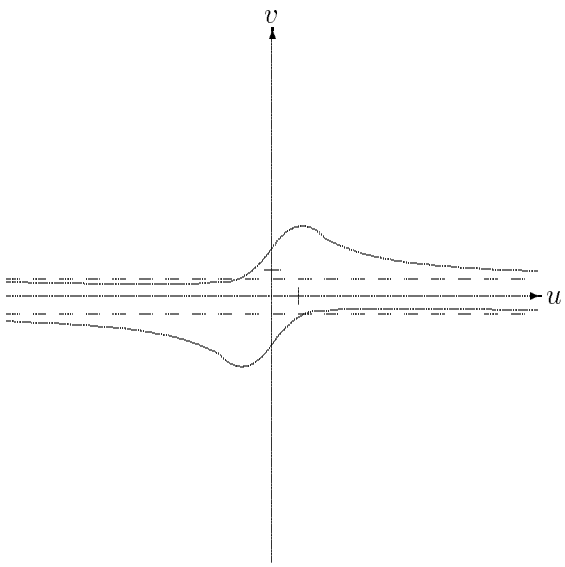
Im Prinzip können wir die Gleichung deswegen nach u oder v auflösen. Theoretisch hilft das nicht viel weiter, aber für die folgenden graphischen Darstellungen habe ich genau das gemacht. Und zwar habe ich die folgenden vier Fälle betrachtet:

	Grashofbedingung			
	erfüllt			nicht erfüllt
	Doppelkurbel	Kurbelschwinge	Doppelschwinge	Doppelschwinge
r_1	0.5	0.3	0.5	0.4
r_2	0.6	0.6	0.6	0.6
d	0.3	0.5	0.7	0.3
c	0.7	0.7	0.3	0.8
p_1q_1	0.33	-0.15	-0.55	0.39
p_2q_2	0.45	0.45	-0.27	0.63
p_3q_3	-0.15	0.33	-0.07	0.15
p_4q_4	1.47	1.47	3.15	1.05
$8r_1r_2$	2.4	1.44	2.4	1.92

Die ersten beiden Beispiele sind die, für welche ich die Bewegungsabläufe oben skizziert habe. Die u, v-Kurven sehen folgendermaßen aus:

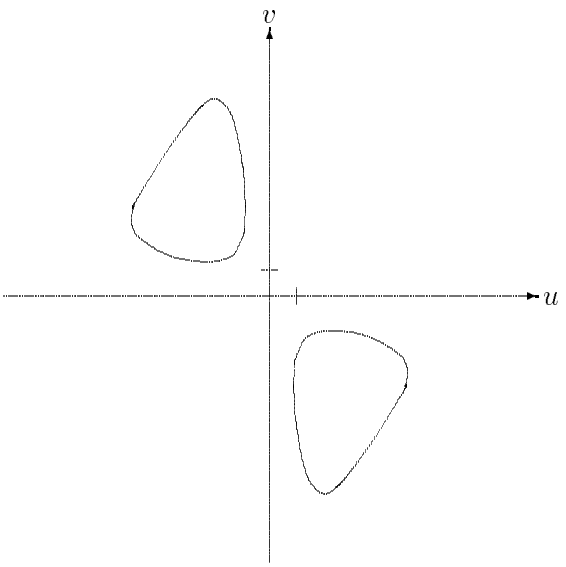


Doppelkurbel

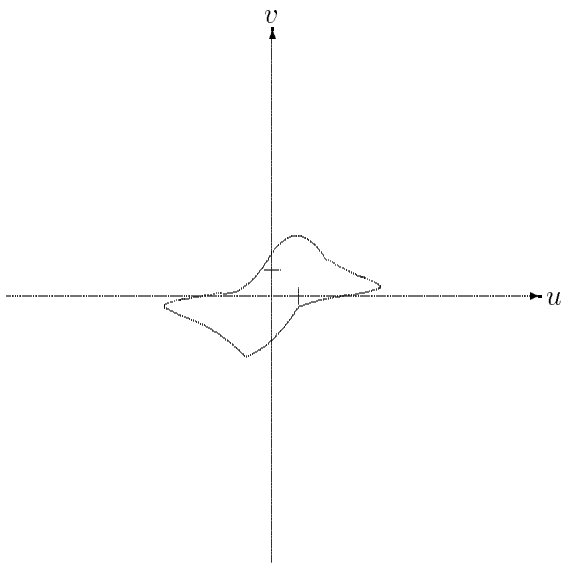


Kurbelschwinge

Dieser Abschnitt über Gestänge war nur eine Vorbereitung für den nächsten Abschnitt. Eigentlich sollten 3.4 und 3.5 zusammen ein Abschnitt sein, aber der wäre viel zu lang geworden.



Doppelschwinge
(Grashofbedingung erfüllt)



Doppelschwinge
(Grashofbedingung nicht erfüllt)

3.5 Zickzacks

Jetzt machen wir Zickzacks: wir beginnen mit einem Paar $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \in K_1 \times K_2$ von Punkten, die den Abstand $\| \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \| = c$ haben. Dann sei $\mathbf{b}_2 \in K_2$ der andere Punkt, der von $\mathbf{a}_1$ diesen Abstand hat, und $\mathbf{a}_2 \in K_1$ sei der andere Punkt, der von $\mathbf{b}_2$ den Abstand c besitzt. Wenn wir so weitermachen, entstehen zwei Folgen von Punkten $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ... \in K_1$ und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ... \in K_2$ derart, daß stets

$$\| \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i \| = \| \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_{i+1} \| = c.$$

Jezt gibt es dieselben zwei Fälle, wie bei den Steinerschen Kreisketten: Entweder bekommen wir unendlich viele verschieden Punkte $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{b}_i$, oder wir kommen irgend wann wieder an den Anfangspunkt zurück: $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_1$. Dann wollen wir diese Folge einen *Zickzack* der Länge n nennen (zum Abstand c).

Zickzack-Satz: *Zwischen den Kreisen K_1 und K_2 gebe es einen Zickzack der Länge n zum Abstand c. Dann gibt es unendlich viele solche Zickzacks der Länge n zwischen diesen Kreisen. Jedes Punktepaar $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in K_1 \times K_2$ vom Abstand c ist Startpaar für einen Zickzack.*

Beweis. Obwohl der Satz so stimmt, wie ich ihn formuliert habe, möchte ich den Beweis nur für den Doppelkurbel-Fall führen. In diesem Fall hat die Gleichung

$$f(u, v) = au^2v^2 + bu^2 + cv^2 + duv + e = 0$$

nämlich die Eigenschaft, daß für keine ihrer Lösungen (u, v)

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0$$

gilt. Für alle $u \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung lokal nach v auflösbar, ergibt lokal zwei differenzierbare Funktionen $v_1(u)$ und $v_2(u)$ mit $f(u, v_i(u)) \equiv 0$, und ebenso ist sie für alle $v \in \mathbb{R}$ lokal nach u auflösbar mit zwei differenzierbaren Funktionen $u_1(v), u_2(v)$. (In den anderen Fällen gibt es Punkte (u, v), die man beim Beweis ausschließen muß.) Streng genommen müßte auch man die zwei u-Werte ausschließen wo ein v-Wert ∞ wird, und die zwei v-Werte, wo das mit einem u-Wert passiert.

Wir nehmen also an, es gebe ein geschlossenes Zickzack

$$(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_2), ...(u_n, v_{n+1}), (u_{n+1}, v_{n+1}) = (u_1, v_1)$$

mit $f(u_i, v_i) = f(u_i, v_{i+1}) = 0$. Jetzt verändern wir den Anfangspunkt $u_1 \in \mathbb{R}$ differenzierbar in Abhängigkeit von einem reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$: Wir bekommen differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned}
u_1(t), & \\
v_1(t) &= v_1(u_1(t)), \\
v_2(t) &= v_2(u_1(t)), \\
u_2(t) &= u_2(v_2(t)), \\
&\vdots \\
v_{n+1}(t) &= v_{n+1}(u_n(t)). \\
u_{n+1}(t) &= u_{n+1}(v_{n+1}(t)),
\end{aligned}$$

Wir wissen $u_{n+1}(0) = u_1(0)$, weil das Ausgangs-Zickzack geschlossen ist. Wir zeigen, daß bei dieser Änderung gilt

$$u_{n+1}(t) \equiv u_1(t), \ t \in \mathbb{R},$$

und haben dann die Behauptung gezeigt.

Der Beweis geht analytisch. Er vergleicht die Ableitungen

$$\begin{aligned}
dv_1/dt \quad &\text{und} \quad dv_2/dt \\
du_1/dt \quad &\text{und} \quad du_2/dt \\
dv_2/dt \quad &\text{und} \quad dv_3/dt \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zuerst vergeleichen wir die Ableitungen von u und v im gleichen Punkt (u_i, v_i). Wenden wir die Kettenregel auf $f(u_i(t), v_i(t)) \equiv 0$ an, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_i, v_i)\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}(u_i, v_i)\frac{dv_i}{dt} \equiv 0,$$

und ebenso erhält man aus $f(u_i(t), v_{i+1}(t)) \equiv 0$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_i, v_{i+1})\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}(u_i, v_{i+1})\frac{dv_{i+1}}{dt} \equiv 0.$$

Um die Ableitungen von $v_1(t)$ und $v_2(t)$ zu vergleichen, schreiben wir mit dem Satz von Vieta

$$f(u,v) = (au^2 + c)v^2 + duv + bu^2 + e = (au^2 + c) \cdot (v_1(u) - v) \cdot (v_2(u) - v).$$

Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= 2au \cdot (v_1(u) - v) \cdot (v_2(u) - v) \\
&\quad + (au^2 + c) \cdot \left(\frac{dv_1}{du}(v_2(u) - v) + \frac{dv_2}{du}(v_1(u) - v) \right) \\
\frac{\partial f}{\partial u}(u, v_1(u)) &= (au^2 + c) \cdot \frac{dv_1}{du}(v_2(u) - v_1(u)) \\
\frac{\partial f}{\partial u}(u, v_2(u)) &= (au^2 + c) \cdot \frac{dv_2}{du}(v_1(u) - v_2(u)) \\
\frac{dv_1/dt}{\partial f/\partial u(u_1(t), v_1(t))} &= \frac{(du_1/dv_1)(dv_1/dt)}{(au_1^2 + c)(v_2(t) - v_1(t))} \\
&= \frac{du_1/dt}{(au_1^2 + c)(v_2 - v_1)} \\
\frac{dv_2/dt}{\partial f/\partial u(u_1(t), v_2(t))} &= \frac{du_1/dt}{(au_1^2 + c)(v_1 - v_2)}.
\end{aligned}$$

Für die zwei Funktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ zum gleichen u_1 gilt also

$$\frac{dv_1/dt}{\partial f/\partial u(u_1, v_1)} = -\frac{dv_2/dt}{\partial f/\partial u(u_1, v_2)},$$

und ebenso für die zwei Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ zum gleichen v_2

$$\frac{du_1/dt}{\partial f/\partial v(u_1, v_2)} = -\frac{du_2/dt}{\partial f/\partial v(u_2, v_2)}.$$

Zusammen mit

$$\frac{du_1/dt}{\partial f/\partial v(u_1, v_1)} = -\frac{dv_1/dt}{\partial f/\partial u(u_1, v_1)}, \quad \frac{du_1/dt}{\partial f/\partial v(u_1, v_2)} = -\frac{dv_2/dt}{\partial f/\partial u(u_1, v_2})$$

folgt daraus

$$\frac{du_1/dt}{\partial f/\partial v(u_1, v_1)} = -\frac{dv_1/dt}{\partial f/\partial u(u_1, v_1)} = \frac{dv_2/dt}{\partial f/\partial u(u_1, v_2)} = -\frac{du_1/dt}{\partial f/\partial v(u_1, v_2)} = \frac{du_2/dt}{\partial f/\partial v(u_2, v_2)}.$$

Die Ableitungen von u_1 und u_2, gewichtet mit den Faktoren $\partial f/\partial v(u_1, v_1)$ und $\partial f/\partial v(u_2, v_2)$ stimmen überein. Die analoge Gleichung gilt für u_2 und u_3, für u_3 und u_4, ..., für u_n und u_{n+1}. Und aus der ganzen Gleichungskette sehen wir

$$\frac{du_1/dt}{\partial f/\partial v(u_1, v_1)} = \frac{du_{n+1}/dt}{\partial f/\partial v(u_{n+1}, v_{n+1})}.$$

Für u_{n+1} als Funktion von u_1 ist dies die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{du_{n+1}}{du_1} = \frac{\partial f}{\partial v}(u_1, v_1(u_1))/\frac{\partial f}{\partial v}(u_{n+1}, v_{n+1}(u_{n+1})) =: \frac{F(u_1)}{F(u_{n+1})}.$$

Weil sich nach Voraussetzung für $t = 0$ der Zickzack schließt, ist $u_{n+1}(u_1(0))) = u_1(0)$. Die Differentialgleichung hat trivialerweise die Lösung $u_{n+1}(u_1) = u_1$ zur selben Anfangswertbedingung. Aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt deswegen $u_{n+1} \equiv u_1$ auf dem gesamten Definitionsbereich. □

(Das sieht natürlich etwas nach Zauberei aus, oder wenn man kritisch gestimmt ist, nach Mogelei. Ist es aber nicht. Hinter der Rechnung steckt *das elliptische Differential*. Die Kurve $f(u, v) = 0$ ist eine sogenannte elliptische Kurve. Sie läßt eine einparametrige Transformationsgruppe zu, die von diesem Differential in infinitesimaler Form beschrieben wird.)

Jetzt möchte ich gerne die Bedingung dafür wissen, daß es zwischen zwei Kreisen K_1 und K_2 ein Zickzack der Länge n gibt. Diese Bedingung ist nicht mehr so einfach, wie es bei den Steinerschen Kreisketten der Fall war. Deswegen möchte ich sie auch nur in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ angeben. Weil man ein geschlossenes Zichzack zwischen den Kreisen verschieben kann, kann man jeden beliebigen Punkt eines Kreises als Anfangspunkt nehmen. Etwa einen Punkt $\mathbf{a}_1 \in K_1$, der auf der Symmetrieachse liegt, welche die beiden Kreismittelpunkte enthält. Dann wird auch das ganze Zickzack symmetrisch, und die Rechnung wesentlich einfacher.

Für die Rechnung legen wir wie oben den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreises K_1, und nehmen als Mittelpunkt des Kreises K_2 den Punkt $\mathbf{m}_2 = (d, 0)$. Als Anfangspunkt des Zickzacks nehmen wir den Punkt

$$\mathbf{a}_1 = (d + r_2, 0)$$

auf der x-Achse.

Der Fall $n = 2$: Aus Symmetriegründen ist $\mathbf{a}_2 = (d - r_2, 0)$, der andere Punkt von K_2 auf der x-Achse. Und die beiden Punkte $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ liegen auf der Parallelen zur y-Achse durch $\mathbf{m}_2$. Sei etwa $\mathbf{b}_1 = (d, y_1)$ Dann ist

$$\begin{aligned} d^2 + y_1^2 &= r_1^2 \\ r_2^2 + y_1^2 &= c^2 \end{aligned}$$

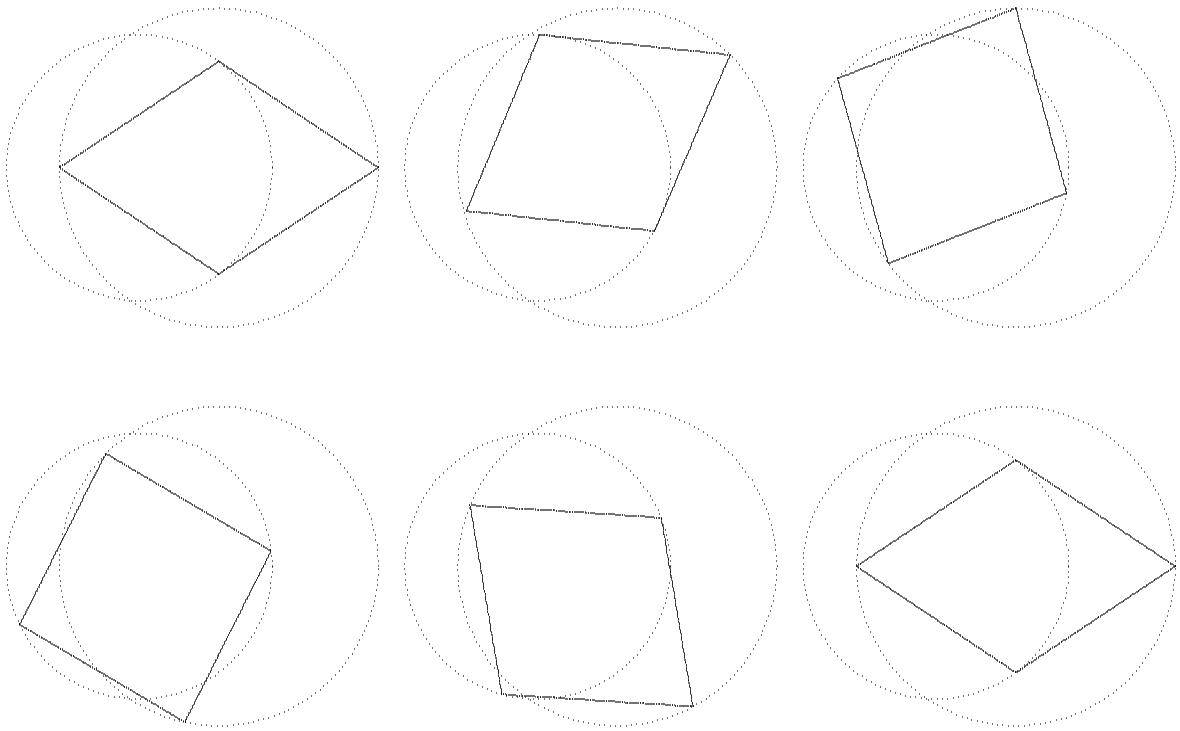
und wenn wir beide Gleichungen voneinander subtrahieren, erhalten wir

$$d^2 - r_2^2 = r_1^2 - c^2,$$

oder

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - d^2$$

Immer, wenn $d^2 < r_1^2 + r_2^2$ ist, existiert ein solches Zickzack der Länge zwei. Man muß nur die Strecke c entsprechend dieser Formel wählen.



Der Fall $n = 3$: Wir beginnen wieder mit $\mathbf{a}_1 = (r_2 + d, 0)$. Der Punkt $\mathbf{b}_1 = (x_1, x_2)$ liegt auf K_1, der Punkt $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)$ wieder auf K_2. Weil das Zickzack zur x-Achse symmetrisch liegt, ist $\mathbf{b}_2 = (r_1, 0)$ oder $(-r_1, 0)$. Das sind zwei verschiedene Fälle. Wir rechnen den Fall $\mathbf{b}_2 = (-r_1, 0)$ durch, und wenn wir im Ergebnis das Vorzeichen von r_1 ändern bekommen wir den anderen Fall.

Zuerst berechnen wir die Koordinaten von $\mathbf{a}_2$. Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} (x_2 - d)^2 + y_2^2 &= r_2^2 \\ (x_2 + r_1)^2 + y_2^2 &= c^2 \end{aligned}$$

bekommen wir durch Subtraktion

$$-2dx_2 + d^2 - 2r_1x_2 - r_1^2 = r_2^2 - c^2,$$

oder

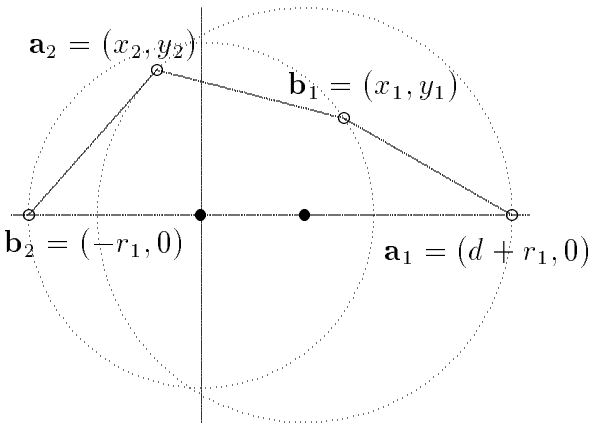
$$(d + r_1)x_2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2 - r_1^2 - r_2^2) =: f.$$

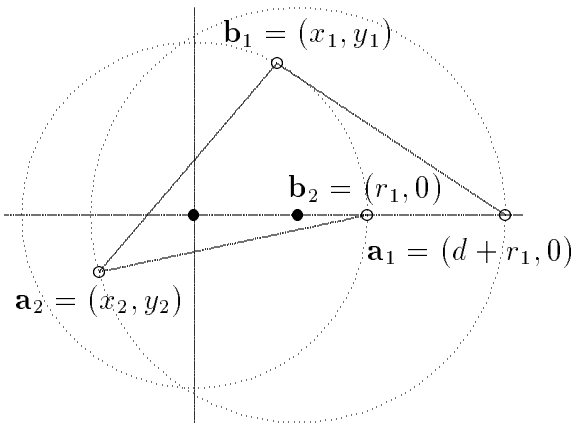
Es ist also

$$x_2 = \frac{f}{d + r_1},$$

und für y_2 folgt daraus

$$\begin{aligned} y_2^2 &= r_2^2 - (x_2 - d)^2 \\ &= (r_2 + d - x_2)(r_2 - d + x_2) \\ &= -(d + r_2 - \frac{f}{d + r_1})(d - r_2 - \frac{f}{d + r_1}) \\ (d + r_1)^2 y_2^2 &= -((d + r_1)(d + r_2) - f)((d + r_1)(d - r_2) - f). \end{aligned}$$





Nun ist

$$\begin{aligned} (d + r_1)(d + r_2) - f &= \frac{1}{2}(2d^2 + 2dr_1 + 2dr_2 + 2r_1r_2 - c^2 - d^2 + r_1^2 + r_2^2) \\ &= \frac{1}{2}((d + r_1 + r_2)^2 - c^2), \end{aligned}$$

und, wenn wir hier r_2 durch $-r_2$ ersetzen

$$(d + r_1)(d - r_2) - f = \frac{1}{2}((d + r_1 - r_2)^2 - c^2).$$

Für y_2 erhalten wir schließlich die Bedingung

$$(d + r_1)^2 y_2^2 = -\frac{1}{4}((d + r_1 + r_2)^2 - c^2)((d + r_1 - r_2)^2 - c^2).$$

Jetzt behandeln wir analog den Punkt $\mathbf{b}_1$: Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= r_1^2 \\ (x_1 - (d + r_2))^2 + y_1^2 &= c^2 \end{aligned}$$

folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned} 2(d+r_2)x_1-(d+r_2)^2 &= r_1^2-c^2 \\ 2(d+r_2)x_1 &= 2d(d+r_2)-2f \\ x_1 &= d-\frac{f}{d+r_2}. \end{aligned}$$

Für y_1 folgt daraus

$$\begin{aligned} y_1^2 &= r_1^2-x_1^2 \\ &= -(x_1+r_1)(x_1-r_1) \\ &= -(d+r_1-\frac{f}{d+r_2})(d-r_1-\frac{f}{d+r_2}). \end{aligned}$$

Das ist genau dieselbe Gleichung wie die für y_2, nur sind r_1 und r_2 hier vertauscht. Deswegen finden wir hier

$$(d+r_2)^2y_1^2=-\frac{1}{4}((d+r_1+r_2)^2-c^2)((d-r_1+r_2)^2-c^2).$$

Unsere vier Punkte bilden ein Zickzack, wenn

$$\parallel \mathbf{b}_1-\mathbf{a}_2 \parallel = \parallel (x_1-x_2,y_1-y_2) \parallel = c.$$

Nach Quadrieren ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2x_1x_2-2y_1y_2 &= c^2 \\ r_1^2+(r_2^2+2dx_2-d^2)-2x_1x_2-2y_1y_2 &= c^2 \\ -2f+2x_2(d-x_1) &= 2y_1y_2 \\ x_2(d-x_1)-f &= y_1y_2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung müssen wir quadrieren, und weil wir Formeln für $(d+r_2)^2y_1^2$, bzw. $(d+r_1)^2y_2^2$ haben, multiplizieren wir sie vorher noch mit $(d+r_1)(d+r_2)$. Das Resultat ist

$$((d+r_1)(d+r_2)\cdot(x_2(d-x_1)-f))^2=(d+r_2)^2y_1^2\cdot(d+r_1)^2y_2^2.$$

Auf der linken Seite steht das Quadrat von

$$\begin{aligned} (d+r_1)(d+r_2)(x_2(d-x_1)-f) &= f^2-(d+r_1)(d+r_2)f \\ &= \frac{1}{2}f\cdot(c^2+d^2-r_1^2-r_2^2-2d^2-2dr_1-2dr_2-2r_1r_2) \\ &= \frac{1}{2}f\cdot(c^2-(d+r_1+r_2)^2) \end{aligned}$$

Unsere quadrierte Gleichung lautet also

$$\frac{1}{4}f^2(c^2-(d+r_1+r_2)^2)^2=\frac{1}{16}(c^2-(d+r_1+r_2)^2)^2(c^2-(d+r_1-r_2)^2)(c^2-(d-r_1+r_2)^2).$$

Hier kürzen wir natürlich den quadratischen Faktor. Kann der $= 0$ sein? Sicherlich! Aber das würde $c = d + r_1 + r_2$ bedeuten. Die erste Strecke des Zickzack würde quer vom rechten Ende des Kreises K_2 zum linken Ende von K_1 gehen, die zweite wieder zurück, und immer so hin und her. Das ist ein sehr degenerierter Zickzack. Den schließen wir aus und kürzen. Das Resultat ist

$$4f^2 = (c^2 - (d + r_1 - r_2)^2)(c^2 - (d - r_1 + r_2)^2).$$

Hier ist die linke Seite

$$4f^2 = c^4 + 2c^2(d^2 - r_1^2 - r_2^2) + (d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2,$$

und die rechte

$$\begin{aligned} & c^4 - c^2\left((d + r_1 - r_2)^2 + (d - r_1 + r_2)^2\right) + (d + r_1 - r_2)^2(d - r_1 + r_2)^2 \\ = \;& c^4 - c^2 \cdot 2(d^2 + (r_1 - r_2)^2) + (d^2 - (r_1 - r_2)^2)^2. \end{aligned}$$

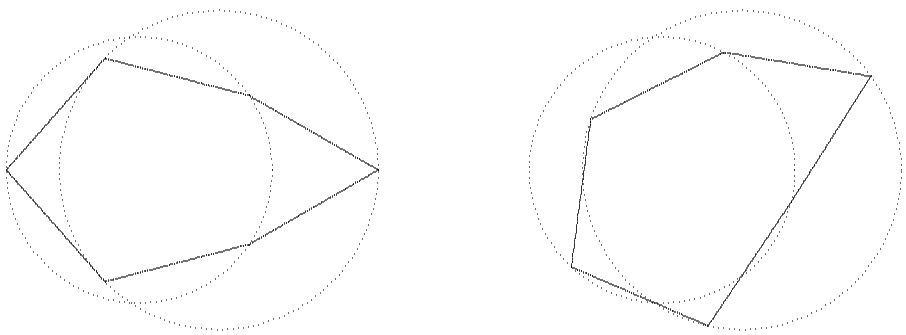
Wir finden schließlich für c:

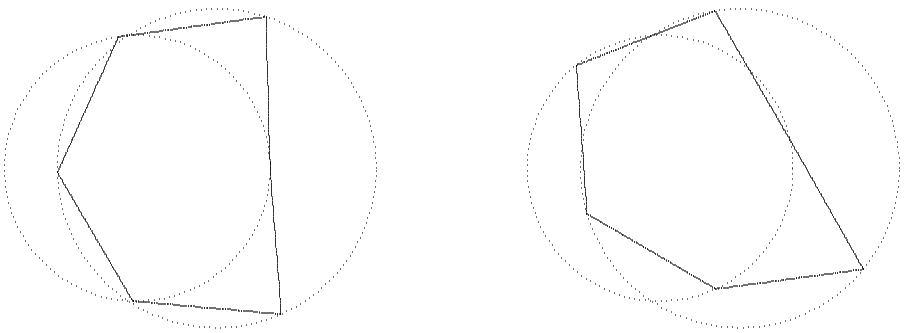
$$\begin{aligned} 2c^2 \cdot \left(d^2 - r_1^2 - r_2^2 + d^2 + (r_1 - r_2)^2\right) &= (d^2 - (r_1 - r_2)^2)^2 - (d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 \\ 2c^2 \cdot (2d^2 - 2r_1 r_2) &= (2d^2 - 2r_1^2 - 2r_2^2 + 2r_1 r_2) \cdot 2r_1 r_2 \\ c^2 &= \frac{r_1 r_2(d^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_1 r_2)}{d^2 - 2r_1 r_2}, \end{aligned}$$

ein Ergebnis, das angesichts der langen Rechnung doch bemerkenswert einfach ist. Schreiben wir das Eregbnis nocheinmal schön hin, und zwar beide Fälle:

$$\boxed{\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{r_1 r_2(d^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_1 r_2)}{d^2 - r_1 r_2} \\ c_2^2 &= \frac{-r_1 r_2(d^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_1 r_2)}{d^2 + r_1 r_2} \end{aligned}}$$

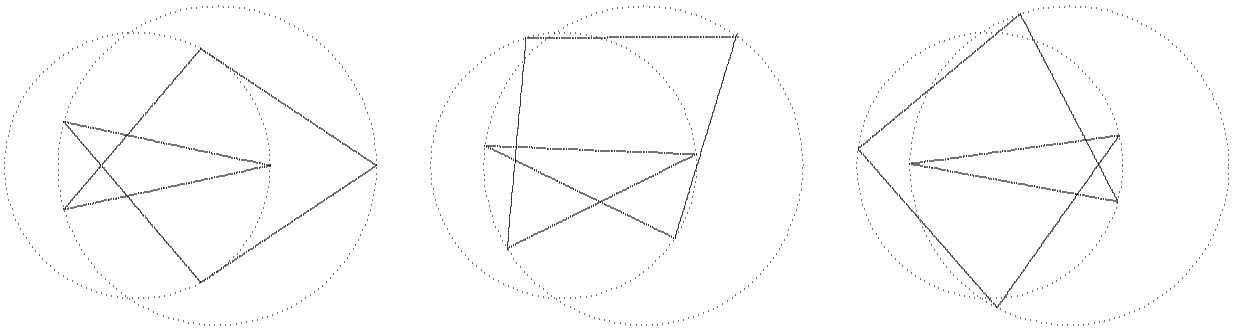
An dem Beispiel $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.6$, $d = 0.3$, aus 3.4 habe ich die Zickzacks für c_1 und c_2 gezeichnet:





Hier ist ein Unglück passiert: Aus Gründen, die mir nicht klar sind, stoßen fast immer zwei Strecken an einer Ecke auf K_1 in einem gestreckten Winkel zusammen. Es sieht dann aus, als ob der Zickzack eine Ecke zu wenig hätte. Künstlerpech.

Dafür ist der zweite Zickzack umso schöner:

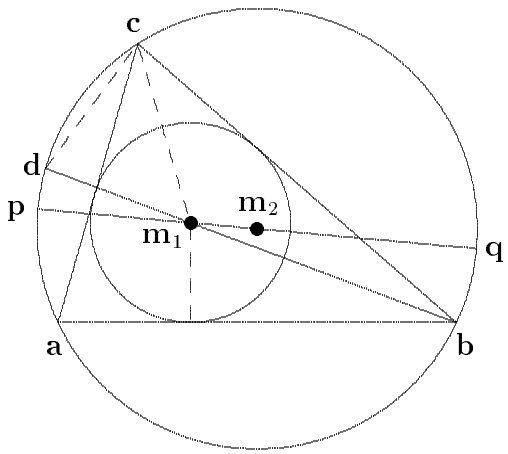


3.6 Poncelet-Polygone

Jedes Dreieck besitzt einen Inkreis K_1 und einen Umkreis K_2. Es ist ziemlich klar, daß zwei ineinanderliegende Kreise K_1 und K_2 nicht immer In- und Umkreis eines Dreiecks sein können. Wenn sie z.B. konzentrisch liegen, dann müßte das Dreieck gleichseitig sein, und bei gegebenem Umkreis K_2 gibt es nur eine einzige Möglichkeit für K_1. Von Euler stammt die Bedingung dafür, daß zwei Kreise In- und Umkreis eines Dreiecks sind:

Satz (Euler-Bedingung): *Es seien K_1 und K_2 zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und mit dem Abstand d zwischen ihren Mittelpunkten. Es gibt genau dann ein Dreieck, das K_1 als Inkreis, und K_2 als Umkreis hat, wenn*

$$r_2^2 - d^2 = 2r_1r_2.$$



Beweis. Ich halte mich hier an das Buch 'Mathematische Juwelen' von R. Honsberger, (Vieweg 1982), Seiten 45-47. Der dort wiedergegebene Beweis ist sehr schön kurz und geometrisch. Er benutzt den Sinus-Satz: Liegt in einem Dreieck mit dem Umkreis-Radius R der Seite a der Winkel α gegenüber, so ist

$$sin(\alpha) = \frac{a}{2R}.$$

Aber wie die meisten geometrischen und schön kurzen Beweise hat dieser Beweis den Nachteil, daß man ihn selber nicht findet, wenn man nicht weiß wie er geht.

Wir beginnen also mit einem Dreieck $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und seinem Umkreis mit Radius r_2 und Mittelpunkt $\mathbf{m}_2$. Auf der Halbierenden des Winkels $\beta := \angle\mathbf{b}$ wählen wir einen Punkt $\mathbf{m}_1$, und zeichnen um ihn einen Kreis K_1 vom Radius r_1, der die Dreiecksseiten $\mathbf{ab}$ und $\mathbf{cb}$ berührt. Wir wollen zeigen: Genau dann berührt dieser Kreis die Seite $\mathbf{ac}$ von innen, wenn die Eulersche Beziehung erfüllt ist.

Der Abstand der Mittelpunkte $\mathbf{m}_1$ und $\mathbf{m}_2$ sei wie immer $= d$. Die Gerade durch diese beiden Mittelpunkte schneidet den Kreis K_2 in den Punkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$. Dann ist die Potenz des Punktes $\mathbf{m}_1$ in Bezug auf K_2

$$\| \mathbf{d} - \mathbf{m}_1 \| \cdot \| \mathbf{b} - \mathbf{m}_1 \| = \| \mathbf{p} - \mathbf{m}_1 \| \cdot \| \mathbf{q} - \mathbf{m}_1 \| = (r_2 - d)(r_2 + d) = r_2^2 - d^2.$$

Diese Größe steht auf der linken Seite der Eulerbeziehung.

Es ist klar, daß

$$sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r_1}{\| \mathbf{b} - \mathbf{m}_1 \|},$$

oder

$$\| \mathbf{b} - \mathbf{m}_1 \| = \frac{r_1}{sin(\beta/2)}.$$

Nach dem Peripheriewinkel-Satz ist

$$\angle\mathbf{dca} = \angle\mathbf{dba} = \frac{\beta}{2}$$

und nach dem Sinus-Satz für das Dreieck **bcd**

$$\| \mathbf{d} - \mathbf{c} \| = 2r_2 \cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Damit ist die Eulersche Beziehung äquivalent mit

$$\| \mathbf{d} - \mathbf{m}_1 \| = \| \mathbf{d} - \mathbf{c} \|,$$

also damit, daß das Dreieck $\mathbf{cdm}_1$ gleichschenklig ist.

Seien nun

$$\gamma_1 := \angle \mathbf{m}_1\mathbf{cb} \quad \text{und} \quad \gamma_2 := \angle \mathbf{m}_1\mathbf{ca}$$

die beiden Winkel, in welche die Verbindungslinie $\mathbf{m}_1\mathbf{c}$ den Winkel $\gamma := \angle \mathbf{acb}$ zerlegt. Als Anwinkel des Dreiecks $\mathbf{m}_1\mathbf{bc}$ ist

$$\angle \mathbf{dm}_1\mathbf{c} = \frac{\beta}{2} + \gamma_1.$$

Außerdem ist

$$\angle \mathbf{dcm}_1 = \frac{\beta}{2} + \gamma_2.$$

Somit ist die Eulerbedingung (Dreieck $\mathbf{cdm}_1$ gleichwinklig) äquivalent mit

$$\frac{\beta}{2} + \gamma_1 = \frac{\beta}{2} + \gamma_2, \quad \text{i.e.} \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Dies nun bedeutet, daß $\mathbf{m}_1$ auf der Halbierenden des Winkels γ liegt, und somit der Inkreismittelpunkt des Dreiecks **abc** ist. Weil K_1 zwei Seiten des Dreiecks schon berührt, ist dieser Kreis der Inkreis des Dreiecks.

Einerseits sehen wir nun: In- und Umkreis unseres (beliebigen) Dreiecks erfüllen die Eulerbedingung. Erfüllen umgekehrt zwei Kreise K_1 und K_2 diese Bedingung, so ist

$$d^2 = r_2^2 - 2r_1r_2 < (r_2 - r_1)^2.$$

Die Kreise liegen deswegen ineinander. Und weil

$$r_2(r_2 - r_1) = d^2 + r_1r_2 > 0$$

ist, muß K_1 der kleinere der beiden Kreise sein und im Inneren von K_2 liegen. Wir können nun einen beliebigen Punkt $\mathbf{b} \in K_2$ wählen, und als die anderen Punkte des Ausgangsdreiecks die Schnittpunkte **a** und **b** der beiden Tangenten aus **b** an K_1 mit dem Kreis K_2. K_1 ist dann der Inkreis dieses Dreiecks. □

Korollar zum Beweis des Satzes: *Sind K_1 und K_2 In- und Umkreis eines Dreiecks, so gibt es unendlich viele Dreiecke dieser Art, nämlich zu jedem Punkt $\mathbf{b} \in K_2$ ein Dreieck mit diesem Punkt als Ecke.*

Schon wieder ein Porismus! Es ist der einfachste Spezialfall des *Porismus von Poncelet*. Um den zu formulieren zuerst Definitionen:

Ein Polygon mit den Ecken $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ heißt einem Kreise K *einbeschrieben*, wenn alle seine Ecken auf dem Kreis K liegen.

Das Polygon heißt einem Kreise K *umbeschrieben*, wenn alle seine Seiten $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n\mathbf{a}_1$ den Kreis K berühren.

Ein *Poncelet-Polygon* ist ein Polygon, das einem Kreis K_1 umbeschrieben und einem zweiten Kreis K_2 einbeschrieben ist. In der Literatur heißt ein solches Polygon auch *Sehnen-Tangenten-Polygon* oder *bizentrisches* Polygon. Das einfachste Poncelet-Polygon ist ein Dreieck. Es ist seinem Inkreis umbeschrieben, und seinem Umkreis einbeschrieben.

Man kann n die Länge des Poncelet-Polygons nennen. Und wieder kann das Polygon seinen Inkreis K_1 mehrmals umlaufen.

Satz (Porismus von Poncelet): *Zu zwei Kreisen K_1 und K_2 gebe es ein Poncelet-Polygon der Länge n, das seinen Inkreis K_1 k-mal umläuft. Dann gibt es unendlich viele derartige Poncelet-Polygone zu K_1 und K_2. Jeder Punkt $\mathbf{a} \in K_2$, der nicht im Inneren von K_1 liegt ist Eckpunkt eines derartigen Polygons.*

Dieser Satz von Poncelet gilt sogar allgemeiner für Kegelschnitte. Ich möchte den Satz hier für Kreise beweisen, und zwar mit genau derselben Methode, wie den Zickzack-Satz. (Bottema führt in seiner oben zitierten Arbeit den Zickzack-Satz auf den Poncelet-Satz für Kegelschnitte zurück. Beide Sätz hängen also sehr eng zusammen.)

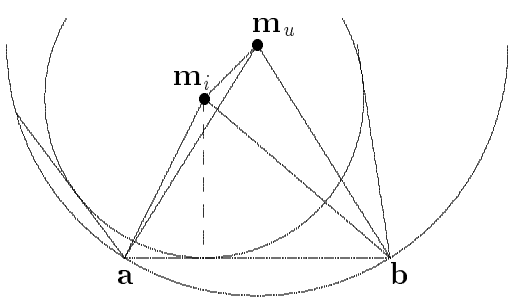
Genauso, wie ich beim Zickzack-Satz die konkreten Rechnungen (in 3.4) vom eigentlichen theoretischen Beweis (in 3.5) abgetrennt habe, möchte ich auch hier den konkreten rechnerischen Teil zuerst abhandeln, und zwar in Form eines Lemmas.

Lemma von M.J. Mention (1860): *Es seien K_1 und K_2 zwei Kreise mit den Radien r und R und dem Abstand d zwischen ihren Mittelpunkten. $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in K_2$ seien zwei Punkte, deren Verbindungsgerade $\mathbf{ab}$ den Kreis K_1 berührt. Weiter sei α der Winkel bei $\mathbf{a}$ zwischen der Geraden $\mathbf{ab}$ und der zweiten Tangente an K_1 durch $\mathbf{a}$. Ebenso sei β der Winkel bei $\mathbf{b}$ zwischen der Geraden $\mathbf{ab}$ und der zweiten Tangente an K_1 durch $\mathbf{b}$. Für die Zahlen*

$$a := cotang\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad b := cotang\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

gilt dann:

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 2\frac{d^2 - R^2}{r^2}ab + \frac{(r^2 + R^2 - d^2)^2}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} = 0.$$



Beweis. Die Radien habe ich hier r und R genannt, weil ich mir K_1 als einen Inkreis, und K_2 als einen Umkreis vorstelle. Deswegen bezeichne ich mit $\mathbf{m}_i$ auch den Mittelpunkt von K_1

und mit $\mathbf{m}_u$ den von K_2. Es ist

$$\begin{aligned} d^2 &= \| \mathbf{m}_i - \mathbf{m}_u \|^2 \\ &= \| (\mathbf{m}_i - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{m}_u) \|^2 \\ &= \| \mathbf{m}_i - \mathbf{a} \|^2 + 2 (\mathbf{m}_i - \mathbf{a}.\mathbf{a} - \mathbf{m}_u) + \| \mathbf{a} - \mathbf{m}_u \|^2 \\ &= \left(\frac{r}{sin(\alpha/2)} \right)^2 - 2 (\mathbf{m}_i - \mathbf{a}.\mathbf{m}_u - \mathbf{a}) + R^2 \\ &= \frac{r^2}{sin^2(\alpha/2)} + R^2 - \frac{2rR}{sin(\alpha/2)} cos \left(\angle \mathbf{bam}_u - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

(Weil der Cosinus eine symmetrische Funktion ist, ist es hier egal, ob $\angle \mathbf{bam}_u$ kleiner oder größer als $\alpha/2$ ist.) Mit dem Cosinus-Additionstheorem

$$cos \left(\angle \mathbf{bam}_u - \frac{\alpha}{2} \right) = cos(\angle \mathbf{bam}_u) cos(\frac{\alpha}{2}) + sin(\angle \mathbf{bam}_u) sin(\frac{\alpha}{2})$$

und der Formel

$$\frac{1}{sin^2(\alpha/2)} = 1 + cotang^2(\alpha/2)$$

wird daraus

$$\begin{aligned} d^2 &= r^2 (1 + cotang^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)) + R^2 - 2rRcos(\angle \mathbf{bam}_u) cotang \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 2rRsin(\angle \mathbf{bam}_u) \\ &= R^2 + r^2(1 + a^2) - 2rRacos(\angle \mathbf{bam}_u) + 2rRsin(\mathbf{bam}_u). \end{aligned}$$

An der Ecke $\mathbf{b}$ hätten wir die analoge Gleichung

$$d^2 = R^2 + r^2(1 + b^2) - 2rRbcos(\angle \mathbf{abm}_u) + 2rRsin(\angle \mathbf{abm}_u)$$

herleiten können. Weil das Dreieck $\mathbf{am}_u\mathbf{b}$ gleichseitig ist, gilt

$$\angle \mathbf{bam}_u = \angle \mathbf{abm}_u.$$

Wir subtrahieren nun die beiden Gleichungen und finden

$$r^2(a^2 - b^2) = 2rR(a - b)cos(\angle \mathbf{bam}_u).$$

Jetzt kommt eine etwas unschöne Stelle des Beweises: Wir dividieren die Gleichung durch $(a-b)$. Leider kann $a = b$ vorkommen. Trotzdem habe ich $a \neq b$ nicht vorausgesetzt. Ich brauche das Lemma nämlich auch in diesem Fall. Aber es gibt auf dem Kreis K_2 höchstens zwei Punktepaare $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, wo $\alpha = \beta$ ist. Das sind die Paare, wo die Tangente $\mathbf{ab}$ senkrecht auf der Verbindungsgerade $\mathbf{m}_i\mathbf{m}_u$ der Kreismittelpunkte steht. Wenn wir das Lemma für alle anderen Punktepaare $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ beweisen, dann folgt es aus Stetigkeitsgründen auch für diese Paare.

So, jetzt dürfen wir dividieren und erhalten

$$cos(\angle \mathbf{bam}_u) = \frac{r}{2R}(a + b).$$

Damit können wir aus einer der beiden obigen Gleichungen, etwa der ersten, auch den Sinus des Winkels $\angle\mathbf{bam}_u$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} 2rRsin(\angle\mathbf{bam}_u) &= d^2 - R^2 - r^2(1+a^2) + 2rRacos(\angle\mathbf{bam}_u) \\ &= d^2 - R^2 - r^2(1+a^2) + r^2a(a+b) \\ &= d^2 + R^2 - r^2 + r^2ab \\ sin(\angle\mathbf{bam}_u) &= \frac{d^2 - R^2 - r^2}{2rR} + \frac{r}{2R}ab. \end{aligned}$$

Wegen $cos^2 + sin^2 \equiv 1$ folgt nun nach quadrieren

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{4R^2}(a+b)^2 + \frac{(R^2+r^2-d^2)^2}{4r^2R^2} - \frac{r^2+R^2-d^2}{2R^2}ab + \frac{r^2}{4R^2}a^2b^2 &= 1 \\ \frac{r^2}{4R^2}(a^2b^2+a^2+b^2) + \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2+R^2-d^2}{2R^2}\right)ab + \frac{(R^2+r^2-d^2)^2}{4r^2R^2} &= 1 \\ a^2b^2 + a^2 + b^2 - 2\frac{R^2-d^2}{r^2} + \frac{(r^2+R^2-d^2)^2}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} &= 0. \end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes: Sei also ein Polygon $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ dem Kreis K_1 umbeschrieben und dem Kreis K_2 einbeschrieben. Der Innenwinkel des Polygons bei $\mathbf{a}_i$ sei α_i und es werde $u_i := cotang(\alpha_i/2)$ gesetzt. Die Konstanten

$$J := 2\frac{d^2 - R^2}{r^2} \quad \text{und} \quad K := \frac{(R^2+r^2-d^2)^2}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}$$

hängen nur von den beiden Kreisen, nicht vom Polygon ab. Nach dem soeben bewiesenen Lemma ist für alle i

$$f(u_i, u_{i+1}) := u_i^2u_{i+1}^2 + u_i^2 + u_{i+1}^2 + Ju_iu_{i+1} + K = 0.$$

Wenn $i = n$ ist, muß hier $i + 1 = 1$ eingesetzt werden.

Das Polynom $f(u_i, u_{i+1})$ ist wieder, genau wie das Polynom f beim Zickzack-Satz, quadratisch in seinen beiden Argumenten. Man kann den Beweis des Zickzack-Satzes deswegen jetzt fast wörtlich übernehmen. Es gibt nur zwei, nicht besonders gravierende Unterschiede:

1) Beim Zickzacksatz benutzten wir eine Folge $f(u_1, v_1), f(u_1, v_2), f(u_2, v_2), ..$, wo die u_i und v_i Cotangens-Werte zu Punkten auf zwei verschiedenen Kreisen waren. Hier liegen alle Punkte auf demselben Kreis und wir benutzen halt die Folge $f(u_1, u_2), f(u_2, u_3), ...$. Am Schluß bekommen wir genauso eine Differentialgleichung

$$\frac{du_{n+1}/dt}{du_1/dt} = \frac{F(u_n+1)}{F(u_1)}.$$

2) Beim Zickzacksatz haben die Winkel, deren Cotangense die u_i und v_i waren, die Punkte $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{b}_i$ eindeutig bestimmt. Es waren ja die Zentrumswinkel zu diesen Punkten. Hier sind die

Winkel die Innenwinkel des Polygons. Wenn man $u_{i+1}(u_i)$ hinschreibt, muß man diese Winkel als Parameter nehmen. Das ist leider eine etwas seriösere Komplikation. Die Frage ist: Bestimmt der Winkel α_i die Ecke $\mathbf{a}_i \in K_2$?

Es ist klar, daß wir hier den Fall konzentrischer Kreise ausschließen müssen. Aber für konzentrische Kreise K_1 und K_2 ist der Satz sowieso klar, das tut also nicht weh. Um die Abhängigkeit des Punktes $\mathbf{a} \in K_2$ von seinem Innenwinkel α zu verstehen, berechnen wir den Abstand eines Punktes $\mathbf{a} \in K_2$ vom Mittelpunkt $\mathbf{m}_i$ des Kreises K_1 auf zwei Weisen:

a) Der Innenwinkel α ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten an K_1 durch $\mathbf{a}$. Daraus folgt

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_1}{\parallel \mathbf{a} - \mathbf{m}_i \parallel},$$

bzw. mit $u := cotang(\alpha/2)$

$$\parallel \mathbf{a} - \mathbf{m}_i \parallel^2 = \frac{r_1^2}{sin^2(\alpha/2)} = r^2(1+u^2).$$

b) Außerdem gilt natürlich

$$\begin{aligned} \parallel \mathbf{a} - \mathbf{m}_i \parallel^2 &= \parallel (\mathbf{a} - \mathbf{m}_u) + (\mathbf{m}_u - \mathbf{m}_i) \parallel^2 \\ &= R^2 + d^2 + 2Rdcos(\angle \mathbf{m}_i \mathbf{m}_u \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Also, wegen $d \neq 0$

$$cos(\angle \mathbf{m}_i \mathbf{m}_u \mathbf{a}) = \frac{r^2 - R^2 - d^2}{2Rd} + \frac{r^2}{2Rd}u^2.$$

Damit ist der Cosinus eine differenzierbare Funktion von u. Der Cosinus seinerseits bestimmt $\mathbf{a}$ bis auf die Spiegelsymmetrie an der Verbindungsgeraden der beiden Kreiszentren.

Wir müssen also ausschließen, daß das Polygon spiegelsymmetrisch ist, daß einer seiner Eckpunkte auf der Verbindungslinie der Kreismittelpunkte liegt. Dann bestimmen die Zahlen u_i, wenigstens lokal, die Punkte $\mathbf{a}_i$.

Jetzt verändern wir, wie beim Beweis des Zickzack-Satzes, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(t)$ diferenzierbar in Abhängigkeit von einem Parameter t, bekommen differenzierbare Funktionen $u_i(t) = u_i(u_{i-1}(t))$ und folgern aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen $u_{n+1}(t) = u_1(t)$. Das Polygon bleibt also bei kleinen Veränderungen geschlossen. 'Klein' bedeutet hier, daß keine seiner Ecken die Symmetriegerade überschreitet. Aber aus Stetigkeitsgründen schließt sich das Polygon auch in einer solchen Lage. □

Historisch war es so, daß Nicolaus Fuss, ein Zeitgenosse und Feund Eulers, als erster Bedingungen dafür angab, daß zu zwei Kreisen ein Sehnen-Tangenten-n-Eck existiert mit $n = 4, ..., 8$. Seine Beweise waren elementar-geometrisch, ähnlich wie der oben gegebene Beweis der Euler-Beziehung für das Dreieck. Gegen 1860 entwickelte M.J. Mention, ausgehend von dem oben bewiesenen, von mir nach ihm benannten Lemma, eine allgemeine rechnerische Methode, mit der er, zumindest im Prinzip, Sehnen-Tangenten-n-Ecke für beliebiges n behandeln konnte. Die relevanten Arbeiten sind:

Fuss, N.: De polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis, Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae XII, S^t Petersburg (1802)
Mention, M.J.: Essai sur le probleme de Fuss, Bulletin de l'Academie imperiale des Sciences de S^t Petersbourg 1 (1860)
Mention, M.J.: Sur la serie du probleme de Fuss, ebenda.

Diese Referenzen verdanke ich Frau E. Glemser. In ihrer Zulassungsarbeit hat sie auch dankenswerterweise Mentions Originalbeweis für sein Lemma soweit aufbereitet, daß ich ihn verstehen konnte.

Dabei ist mir allerdings nicht klar, ob diesen Autoren die Porismus-Eigenschaft bekannt war.

Ich möchte jetzt noch in den einfachsten Fällen die Bedingung dafür herleiten, daß zu zwei Kreisen ein Sehnen-Tangenten-n-Eck existiert. Und zwar werde ich dieses n-Eck symmetrisch annehmen. Dann sind die Rechnungen ziemlich einfach. Eigentlich ist ausgerechnet das nach meinem Beweis für den Porismus nicht erlaubt. Aber es kommt richtig heraus.

Der Fall $n = 3$: Ich wähle die Koordinaten so, daß K_2 seinen Mittelpunkt $\mathbf{m}_u = (0,0)$ im Ursprung und K_1 seinen Mittelpunkt $\mathbf{m}_i = (d,0)$ auf der x-Achse hat. Die Gleichung von K_1 ist also

$$(x-d)^2 + y^2 = r^2.$$

Mit $\mathbf{c}$ bezeichne ich den Punkt $(-R,0) \in K_2$ auf der x-Achse. Das Tangentenpaar von $\mathbf{c}$ aus an K_1 hat die Gleichung (s. 1.1)

$$\Big((x-d)(-R-d) - r^2\Big)^2 - \Big((x-d)^2 + y^2 - r^2\Big)\Big((-R-d)^2 - r^2\Big) = 0.$$

Das Tangentenpaar schneidet K_2 in $\mathbf{c}$ und in zwei weiteren Punkten, die zur x-Achse symmetrisch liegen. Den gemeinsamen x-Wert dieser beiden Punkte erhalten wir, wenn wir aus der Tangentenpaar-Gleichung $y^2 = R^2 - x^2$ eliminieren:

$$\begin{aligned}\Big(-(x-d)(R+d) - r^2\Big)^2 - \Big(x^2 - 2dx + d^2 + R^2 - x^2 - r^2\Big)\Big((R+d)^2 - r^2\Big) &= \\ \Big(-(x-d)(R+d) - r^2\Big)^2 - \Big(-2dx + R^2 + d^2 - r^2\Big)\Big((R+d)^2 - r^2\Big) &= 0.\end{aligned}$$

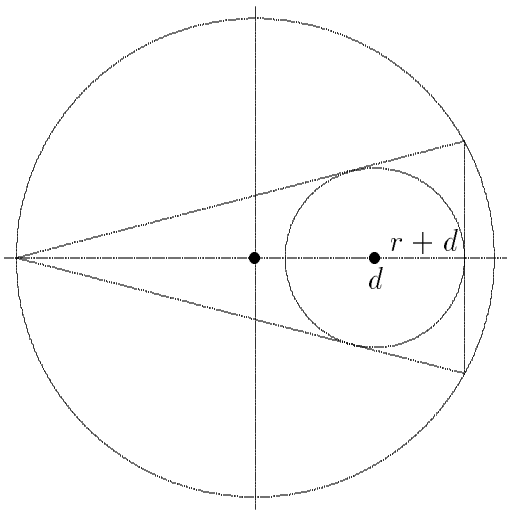
Das ist eine quadratische Gleichung für x mit zwei Lösungen: eine ist $x = -R$, die andere ist der Wert, den wir suchen. Die Gleichung muß also durch $x + R$ teilbar sein. Diesen Faktor spalten wir nun ziemlich brutal ab:

$$\begin{aligned}\Big(-(x+R-R-d)(R+d) - r^2\Big)^2 - \Big(-2d(x+R) + 2Rd + R^2 + d^2 - r^2\Big)\Big((Rd)^2 - r^2\Big) &= \\ \Big(-(x+R)(R+d) + (R+d)^2 - r^2\Big)^2 - \Big(-2d(x+R) + (R+d)^2 - r^2\Big)\Big((R+d)^2 - r^2\Big) &= \\ (x+R)^2(R+d)^2 - 2(x+R)(R+d)\Big((R+d)^2 - r^2\Big) + 2d(x+R)\Big((R+d)^2 - r^2\Big) &= 0, \\ (x+R)\cdot[(x+R)(R+d)^2 - 2R\Big((R+d)^2 - r^2\Big)] &= \\ (x+R)\cdot[(x-R)(R+d)^2 + 2Rr^2] &= 0.\end{aligned}$$

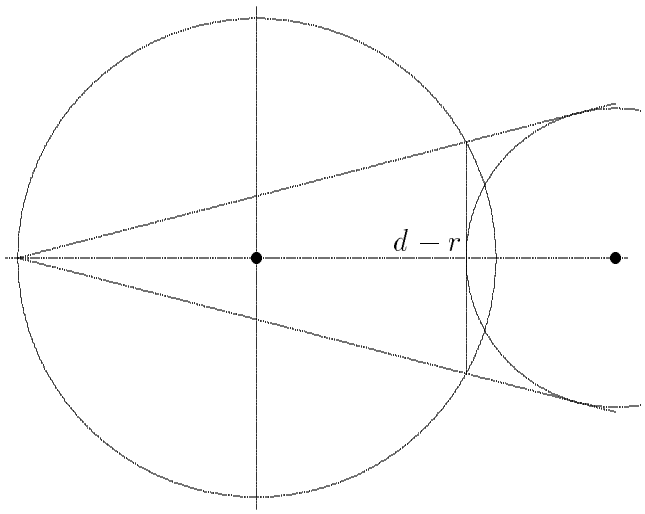
Der x-Wert, der sich aus dieser Gleichung ergibt, bestimmt die dritte, zur x-Achse senkrechte Seite des Dreiecks. Wenn diese Seite den Kreis K_1 berühren soll, folgt also $x = d + r$ und

$$\begin{aligned}
(d + r - R)(R + d)^2 + 2Rr^2 &= \\
(R + d + r)(R + d)^2 - 2R\left((R + d)^2 - r^2\right) &= \\
(R + d + r)(R + d)^2 - 2R(R + d + r)(R + d - r) &= \\
(R + d + r)\left((R + d)^2 - 2R^2 - 2Rd + 2Rr\right) &= \\
-(R + r + d)(R^2 - 2Rr - d^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Das ist die Eulersche Bedingung bis auf den Faktor $R + r + d$. Aber der ist > 0 und kürzt sich raus.



$R = 1,\ r = 0.375,\ d = 0.5$



$R = 1,\ r = 0.625,\ d = 1.5$

Das war der Fall, daß K_1 der Inkreis des Dreiecks ist. Man bekommt aber fast dasselbe Ergebnis, wenn K_1 ein Ankreis ist. Jetzt ist der x-Wert nicht mehr $d + r$, sondern $d - r$. Wo wir den x-Wert in die Gleichung einsetzen, ist das Vorzeichen von r geändert. Sonst kommt r nur quadratisch vor, also wird bei der folgenden Rechnung nur das Vorzeichen von r anders, und das Ergebnis ist folglich

$$R^2 + 2Rr - d^2 = 0.$$

Der Faktor, den wir wegkürzen ist jetzt $R - r + d$. Wenn der $= 0$ wäre, würden sich die Kreise berühren, das schließen wir aus.

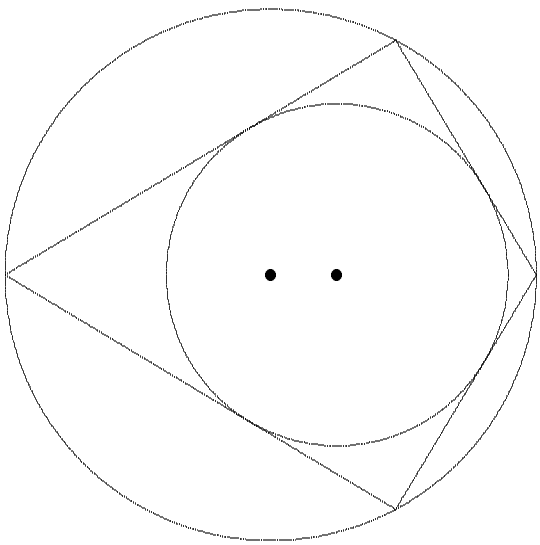
Jetzt noch ein wenig Philosophie: Alles, was man über zwei Kreise sinnvoll sagen kann, muß man in R^2, r^2 und d^2 ausdrücken können. (Wie gesagt, Philosophie!) Das ist weder für die Inkreis-Bedingung, noch für die Ankreisbedingung so:

$$\begin{array}{ll} \text{Inkreis:} & R^2 - d^2 - 2Rr = 0 \\ \text{Ankreis:} & R^2 - d^2 + 2Rr = 0 \end{array}$$

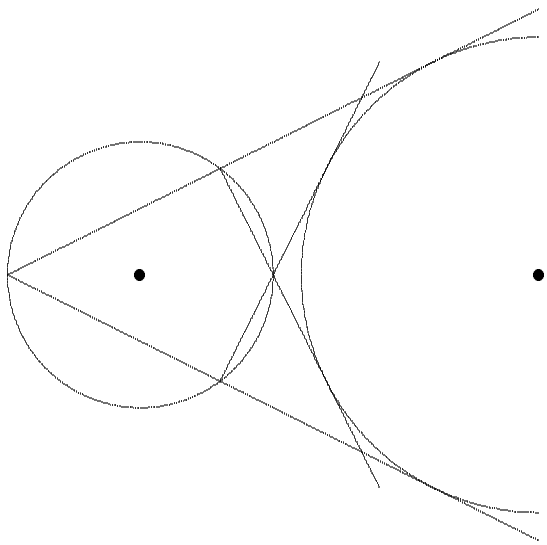
Es kommen R und r, nicht nur R^2 und r^2 vor. Anders ist das beim Produkt der beiden Gleichungen:

$$(R^2 - d^2)^2 - 4R^2r^2 = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, daß ein Dreieck existiert, welches dem Kreis K_1 umbeschrieben ist und dem Kreis K_2 einbeschrieben. Zwischen In- und Ankreis wird dabei nicht mehr unterschieden. Aber diese Unterscheidung zwischen dem Inneren und dem Äußeren eines Dreiecks ist ja eh eine gefährliche Sache.



$R = 1,\ r = 0.6431,\ d = 0.25$



$R = 0.5,\ r = 0.8944,\ d = 1.5$

Der Fall $n = 4$: Wir legen die Kreise wieder so wie im Fall $n = 3$. Aber jetzt betrachten wir zwei Paare von Tangenten an K_1: die beiden Tangenten von $\mathbf{c}_1 := (-R, 0)$ und $\mathbf{c}_2 := (R, 0) \in K_2$ aus. Wie wir eben schon ausgerechnet haben schneidet das erste Tangentenpaar den Kreis K_2 in Punkten, deren x-Werte die Gleichung

$$(x - R)(d + R)^2 + 2Rr^2 = 0$$

erfüllen. Dieselbe Rechnung beim zweiten Tangentenpaar unterscheidet sich von der durchgeführten Rechnung nur durch das Vorzeichen bei R. Die x-Werte der Schnittpunkte dieses Tangentenpaars mit K_2 erfüllen deswegen

$$(x + R)(d - R)^2 - 2Rr^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, daß beide Tangentenpaare die Seiten eines dem Kreis K_2 einbeschriebenen Vierecks sind, ist, daß beide Gleichungen denselben x-Wert liefern. Wir erhalten diese Bedingung, indem wir x aus beiden Gleichungen eliminieren (nachdem wir die erste mit $(d-R)^2$ und die zweite mit $(d+R)^2$ multiplizieren):

$$\begin{aligned} -R(d+R)^2(d-R)^2 + 2Rr^2(d-R)^2 &= R(d-R)^2(d+R)^2 - 2Rr^2(d+R)^2 \\ 2R(d^2-R^2)^2 &= 2Rr^2\left((d-R)^2+(d+R)^2\right) \\ (d^2-R^2)^2 &= 2r^2(d^2+R^2) \end{aligned}$$

Das ist die Bedingung dafür, daß es ein dem Kreis K_1 umbeschriebenes und dem Kreis K_2 einbeschriebenes Viereck gibt. Es fällt auf, daß hier r und R nur quadratisch vorkommen. Das scheint darauf hinzudeuten, daß dieselbe Bedingung In- und Ankreis beschreibt. Probieren wir es mal graphisch aus (s. oben). Es könnte stimmen.

Es gibt noch eine Art von Sehnen-Tangenten-Viereck: auch ein überschlagenes Viereck **abcd** kann Sehnen-Tangenten-Viereck sein. Analysieren wir die Situation. Nahmen wir an:

- Das überschlagenen Viereck **abcd** sei einem Kreis K_2 einbeschrieben, und
- es habe einen Ankreis und zwar so, wie wir das in 1.4 ein 'überschlagenes Tangentenviereck, erster Typ' nannten.

Für dieses Tangentenviereck haben wir in 1.4 bewiesen

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| + \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| = \| \mathbf{c}-\mathbf{b} \| + \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| := s.$$

Weil es ein Sehnenviereck ist muß gelten:

$$\begin{aligned} \angle\mathbf{bad} = \angle\mathbf{bcd} &=: \alpha \\ \angle\mathbf{abc} = \angle\mathbf{adc} &=: \beta \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \| \mathbf{b}-\mathbf{d} \|^2 &= \| \mathbf{b}-\mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|^2 + 2(\mathbf{b}-\mathbf{a}.\mathbf{a}-\mathbf{d}) \\ &= \| \mathbf{b}-\mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|^2 + -2 \| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| \cdot cos(\alpha) \\ &= (\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| + \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|)^2 - 2 \| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| \cdot (1+cos(\alpha)) \end{aligned}$$

Genauso sieht man

$$\| \mathbf{b}-\mathbf{d} \|^2 = (\| \mathbf{c}-\mathbf{b} \| + \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \|)^2 - 2 \| \mathbf{c}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| \cdot (1+cos(\alpha)).$$

Weil $cos(\alpha)$ nicht $= -1$ sein kann, ist

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| = \| \mathbf{c}-\mathbf{b} \| \cdot \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \| =: p.$$

Die beiden Abstände $\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \|$ und $\| \mathbf{a}-\mathbf{d} \|$ sind damit Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - s \cdot x + p = 0,$$

genauso, wie die beiden Abstände $\| \mathbf{c}-\mathbf{b} \|$ und $\| \mathbf{c}-\mathbf{d} \|$. Deswegen sind diese beiden Zahlenpaare gleich. Wenn $\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| = \| \mathbf{c}-\mathbf{b} \|$ und $\| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| = \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \|$ wäre, dann würden die Punkte **b** und **d** beide auf der Mittelsenkrechten der Strecke **ac** liegen, wir hätten kein überschlagenes Viereck. Es folgt also:

$$\| \mathbf{a}-\mathbf{b} \| = \| \mathbf{c}-\mathbf{d} \|, \qquad \| \mathbf{a}-\mathbf{d} \| = \| \mathbf{c}-\mathbf{b} \| .$$

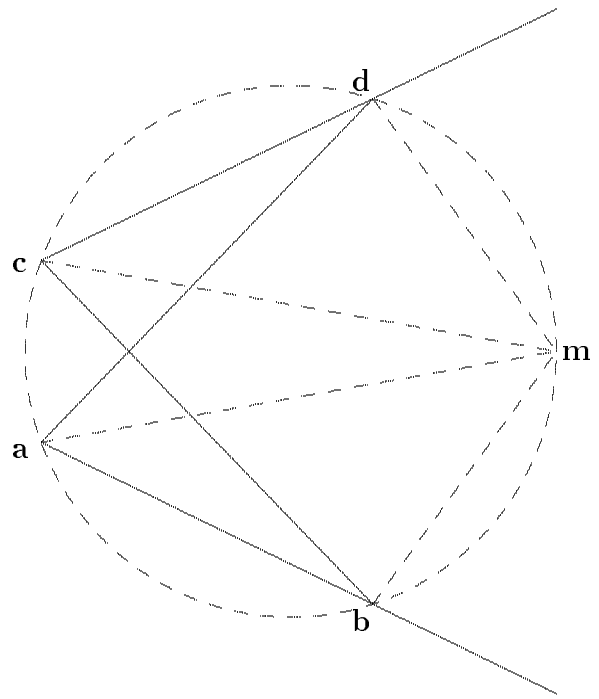
Damit liegen die beiden Punkte **b** und **c** symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke **ac**. Das ganze Viereck ist dann *spiegelsymmetrisch* in Bezug auf diese Mittelsenkrechte. Damit haben wir den folgenden Satz schon in einer Richtung bewiesen.

Satz (Überschlagene Sehnen-Tangentenvierecke): *Ein überschlagenes Viereck besitzt genau dann einen Ankreis K_1 und einen Umkreis K_2, wenn es spiegelsymmetrisch ist.*

Beweis der anderen Richtung: Es sei **m** der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der beiden Winkel **bad** und **bcd**. Es gibt einen Kreis K_1 mit Mittelpunkt **m**, der die Seiten **ab** und **ad** berührt. Wegen der Symmetrie stimmt er mit dem Kreis um **m** überein, der die Seiten **cb** und **cd** berührt, er ist also ein Ankreis.

Sei K_2 der Kreis durch die drei Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Sein Mittelpunkt liegt auf der Symmetrie-Achse. Wegen der Symmetrie enthält K_2 dann auch die Ecke **d**, er ist also ein Umkreis. □

.



Jetzt wollen wir noch die Kreis-Paare K_1 und K_2 charakterisieren, die An- und Umkreis eines überschlagenen Vierecks sind. Die Bedingung dafür ist bestürzend einfach:

$$d = r_2, \qquad r_1 < 2r_2,$$

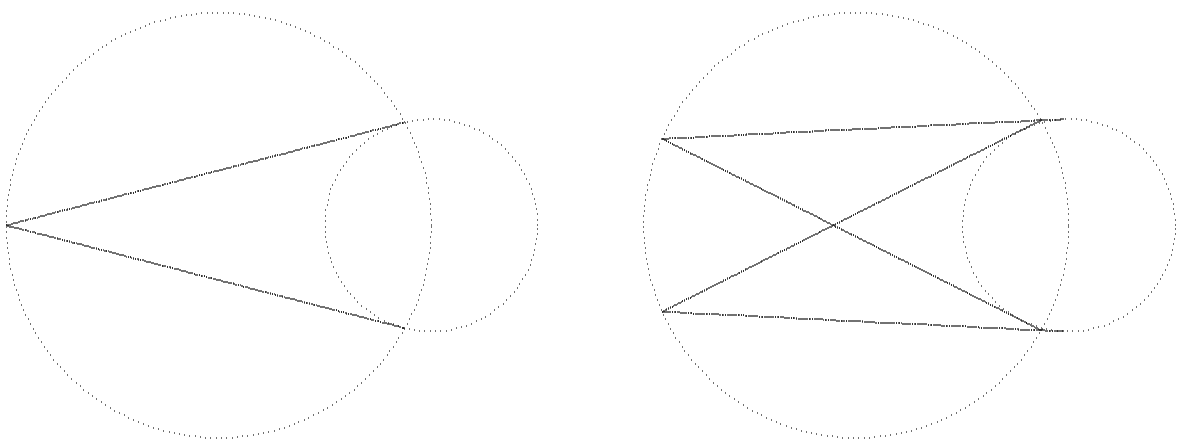
d.h., der Mittelpunkt $\mathbf{m}_1$ des Ankreises liegt auf dem Umkreis und der Ankreis enthält den Umkreis nicht.

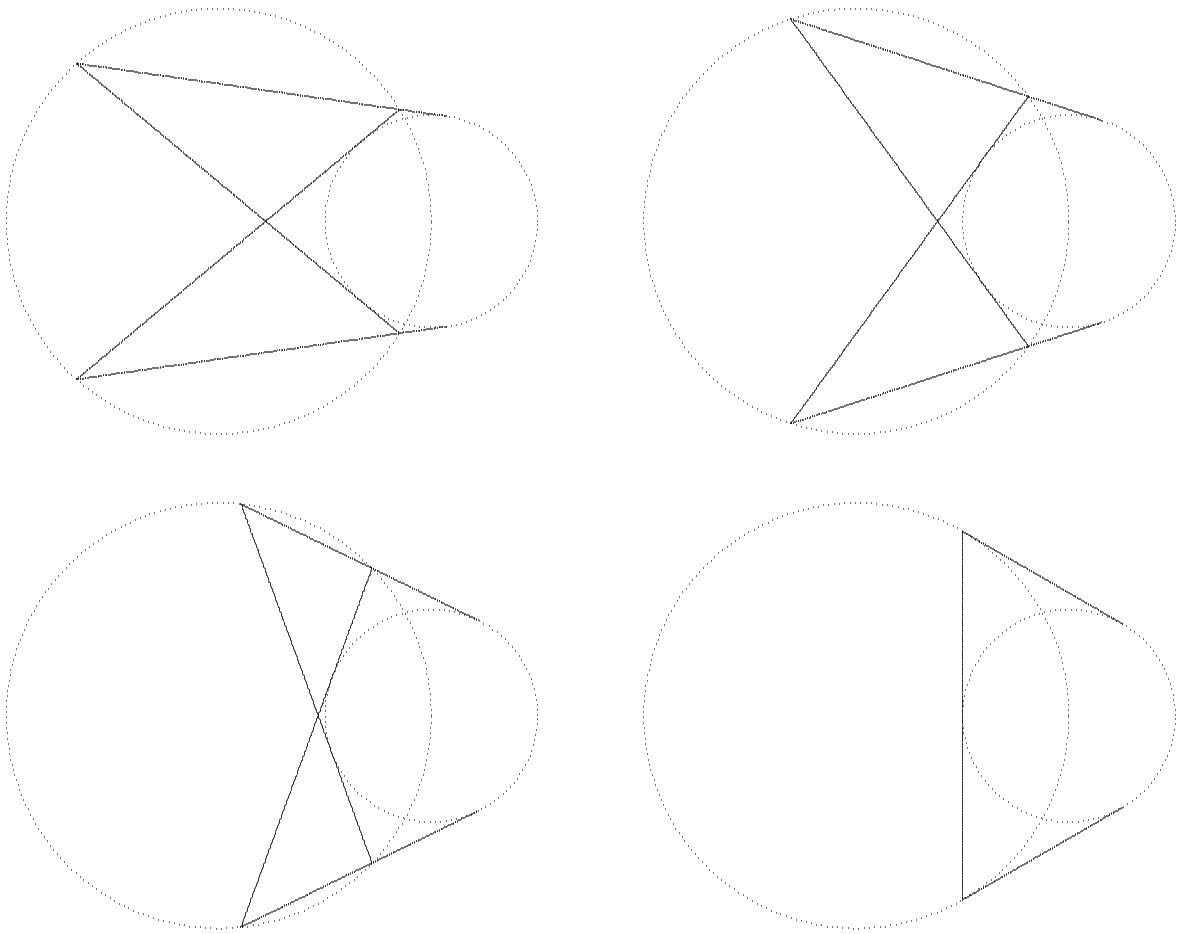
Beweis: Sei zuerst **abcd** ein überschlagenes Viereck, das dem Kreis K_1 umbeschrieben, und dem Kreis K_2 einbeschrieben ist. Der Mittelpunkt $\mathbf{m} := \mathbf{m}_1$ des Ankreises K_1 ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der zwei Winkel $\angle\mathbf{bad}, \mathbf{bcd}$ und der beiden Anwinkel zu $\angle\mathbf{abc}$ und $\angle\mathbf{adc}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\angle\mathbf{adm} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \\
\angle\mathbf{amd} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \\
\angle\mathbf{cmd} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \\
&= \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \\
\angle\mathbf{amc} &= \beta.
\end{aligned}$$

Nach dem Peripheriewinkel-Satz liegt also $\mathbf{m}$ auf dem Kreis durch $\mathbf{a}, \mathbf{d}$ und $\mathbf{c}$, d.h., auf dem Umkreis K_2.

Sei jetzt umgekehrt K_1 ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{m}_1 \in K_2$. Weil es Punkte $\mathbf{a} \in K_2$ gibt, die nicht im Inneren von K_1 liegen, können wir von einem solchen Punkt $\mathbf{a}$ eine Tangente an K_1 ziehen. $\mathbf{b} \in K_2$ sei der zweite Schnittpunkt dieser Tangente mit K_2. Die Punkte $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d} \in K_2$ seien spiegelsymmetrisch zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in Bezug auf die Symmetrie-Achse. Dann ist **abcd** ein überschlagenes Viereck, dem Kreis K_2 einbeschrieben, dessen Seiten **ab** und **cd** den Kreis K_1 berühren. Das Viereck ist symmetrisch, und besitzt deswegen einen Ankreis K. Soeben haben wir gezeigt, das dessen Mittelpunkt ein Schnittpunkt der Symmetrieachse mit dem Umkreis K_2 ist. Also haben die Kreise K_1 und K denselben Mittelpunkt und berühren dieselbe Gerade **ab**. Dann muß $K_1 = K$ sein, d.h., das Viereck ist dem Kreis K_1 umbeschrieben. □





Wahrscheinlich habe ich in diesen drei Kapiteln schon mehr Stoff über Kreise zusammengetragen, als ich in einem Sommeresemester in einer zweistündigen Vorlesung behandeln kann. Deswegen möchte ich hier lieber Schluß machen. Das ist schade. Denn ich hätte gerne noch mehr über Poncelet-Polygone aufgeschrieben. Z.B. hätte ich gerne auch noch die Bedingung für Sehnen-Tangenten-Fünfecke hergeleitet. Aber der Abschnitt 3.6 ist auch so schon viel zu lang geworden. Und weiter hätte ich gerne ein viertes Kapitel in Angriff genommen, das dann natürlich 'Drei Kreise' heißen sollte. Dahin gehören so schöne klassische Probleme wie

- *Das Problem des Appolonius:* Finde alle Kreise, die drei gegebene Kreise berühren! (Im allgemeinen gibt es acht solche Kreise.)
- Das Problem des Malfatti: Gegeben sei ein Dreieck. Finde drei Kreise so, daß jeder zwei Dreiecksseiten und die beiden anderen Kreise berührt!

Auch kann man die Steinerschen Kreisketten und die Poncelet-Polygone sinnvoll auf drei Kreise erweitern. Das steht nirgends so richtig aufgeschrieben, und es wäre spannend, zu untersuchen, was da genau gilt, und ob man es relativ elementar beweisen kann.

Vielleicht ein andermal!