Geometrie I
Kiel, Wintersemester 2000/2001

Hauke Klein

Revision 2

Mon May 14 13:52:37 CEST 2001, printed 13. November 2001

```
$Id:  Makefile,v 1.29 2001/05/02 13:30:09 hk Exp$
$Id:  titel.tex,v 1.1 2001/03/13 13:20:32 hk Exp $
$Id:  seite.tex,v 1.1 2000/08/22 09:26:59 hk Exp $
$Id:  standard.tex,v 1.17 2001/05/09 16:14:58 hk Exp $
$Id:  h.tex,v 1.5 2001/05/14 05:59:17 hk Exp $
$Id:  vorwort.tex,v 1.3 2001/05/15 05:52:12 hk Exp $
$Id:  intro.tex,v 1.9 2001/01/03 12:40:28 hk Exp $
$Id:  affin.tex,v 1.10 2001/11/13 12:19:50 hk Exp $
$Id:  projektiv.tex,v 1.9 2001/01/11 10:04:13 hk Exp $
$Id:  isomorphie.tex,v 1.9 2001/01/11 10:07:02 hk Exp $
$Id:  zentral.tex,v 1.8 2001/11/13 12:21:38 hk Exp $
$Id:  desargue.tex,v 1.8 2001/05/15 14:12:24 hk Exp $
$Id:  lenz.tex,v 1.7 2001/05/15 14:02:41 hk Exp $
$Id:  pgammal.tex,v 1.6 2001/02/19 09:56:33 hk Exp $
$Id:  trans.tex,v 1.6 2001/04/05 08:57:47 hk Exp $
$Id:  semi.tex,v 1.7 2001/05/11 12:46:48 hk Exp $
$Id:  mult.tex,v 1.4 2001/05/15 13:58:04 hk Exp $
$Id:  oktaven.tex,v 1.6 2001/05/14 08:47:51 hk Exp $
$Id:  moufang.tex,v 1.3 2001/05/14 10:51:29 hk Exp $
$Id:  barlotti.tex,v 1.3 2001/05/14 11:49:46 hk Exp $
```

Vorwort

Die Vorlesung "Geometrie I" wurde im Wintersemester 2000/2001 vierstündig an der Christian-Albrechts Universität Kiel gehalten. Die Vorlesung behandelt die Theorie der projektiven Ebenen. Es werden keinerlei spezielle Vorkenntnisse benötigt, die Grundvorlesungen über lineare Algebra reichen fast durchgehend völlig aus. Als eine einführende Vorlesung wird nicht angestrebt die behandelten Themen wirklich vollständig zu untersuchen, es sollen nur die Grundlagen für eine tiefergehende Beschäftigung mit diesen Inhalten gelegt werden.

Ein durchgehendes Leitmotiv ist es, möglichst früh und möglichst weitgehend mit Koordinatisierungen zu arbeiten. Die meisten der eingeführten Begriffe werden soweit möglich stets auch in Koordinaten diskutiert. Schließungssätze werden nur am Rande besprochen. Ausnahmen sind §6 in dem der Satz von Desargues untersucht wird, und §11 mit der Behandlung des Satzes von Pappus. In letzterem Paragraphen wird auch, als kleines Kontrastprogramm zum sonstigen Vorgehen, direkt mit inzidenzgeometrischen Schließungssätzen argumentiert.

Die letzten fünf Paragraphen §10, §11, §12, §13 und §14 wurden in der realen Vorlesung nicht mehr behandelt. Diese Abschnitte sind somit noch nicht wirklich getestet, und haben daher eher einen Entwurfscharakter. Im Haupttext finden sich auch nur wenige konkrete Beispiele, diese werden hauptsächlich in den Übungen zu den einzelnen Paragraphen vorgestellt.

Der gesamte Stoff dieser Vorlesung ist natürlich wohlbekannt, und in diversen Lehrbüchern zu finden. Die beiden hauptsächlich verwendeten Quellen sind:

Hughes, Piper: *Projective planes*, Springer,

Pickert: *Projektive Ebenen*, Springer.

Das Kapitel §9 über Translationsebenen orientiert sich teilweise an

Lüneburg: *Translation planes*, Springer.

Weiterhin habe ich auch gerne die Texte

Dembowski: *Finite geometries*, Springer,

Salzmann, Betten, Grundhöfer, Hähl, Löwen, Stroppel: *Compact projective planes*, de Gruyter

konsultiert. Etwas stärker an Schließungssätzen orientiert, aber nicht so umfassend wie das Buch von Pickert, ist noch

Lingenberg: *Grundlagen der Geometrie*, BI.

Die Homepage zu dieser Vorlesung befindet sich (oder befand sich) unter

`http://www.math.uni-kiel.de/geometrie/klein/vorlesungen/geo1`

Inhaltsverzeichnis

§1 **Einleitung** 1
§2 **Affine Ebenen** 8
§3 **Projektive Ebenen** 33
§4 **Isomorphismen affiner und projektiver Ebenen** 54
§5 **Homologien und Elationen** 65
§6 **Der Satz von Desargues** 82
§7 **Die Lenz Klassifikation** 94
§8 **Die Hauptsätze der affinen und projektiven Geometrie** 109
§9 **Translationsebenen** 118
§10 **Projektive Ebenen über Semikörpern** 152
§11 **Homologien und der Satz von Pappus** 173
§12 **Alternativkörper** 197
§13 **Moufang Ebenen** 241
§14 **Die Lenz-Barlotti Klassifikation** 247

§1 Einleitung

In dieser Vorlesung wollen wir uns mit Inzidenzgeometrie beschäftigen, d.h. wir betrachten als Grundobjekte Punkte und Geraden. Andere geometrische Konzepte wie zum Beispiel Kreise, Flächen, Abstände, Winkel und so weiter werden wir also nicht behandeln. Entsprechend werden wir zuerst eine Art Rahmenstruktur zur Behandlung von Inzidenzfragen definieren. Diese Rolle wird von den sogenannten Inzidenzstrukturen ausgefüllt.

Definition 1: Eine Inzidenzstruktur ist ein Tripel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ bestehend aus zwei Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}$ und einer Relation $I \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$.

Die Elemente von $\mathfrak{P}$ werden wir Punkte nennen, und die Elemente von $\mathfrak{L}$ heißen Geraden. Die Relation I heißt die Inzidenzrelation.

Die Relation I soll dabei festlegen welche Punkte auf welchen Geraden liegen. Entsprechend sagen wir für einen Punkt $p \in \mathfrak{P}$ und eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ anstelle von $(p, l) \in I$ auch "Der Punkt p liegt auf der Geraden l" oder "die Gerade l geht durch den Punkt p". Manchmal schreiben wir auch einfach pIl für $(p, l) \in I$.

Wie gesagt ist dies für sich genommen kein sinnvoller Begriff, eine Inzidenzstruktur ist so allgemein das sich keine nicht trivialen Aussagen über Inzidenzstrukturen machen lassen. Wir werden im Laufe der Vorlesung einige zusätzliche Axiome kennenlernen, die dann spezielle und sinnvolle Klassen von Inzidenzstrukturen aussondern. Das wohl

gängigste Beispiel einer Inzidenzstruktur ist die Zeichenebene. Die Punkte der Zeichenebene können wir durch Koordinaten als Paare (x, y) reeller Zahlen schreiben, und die Geraden sind gewissen Mengen von Punkten. Welche "gewissen" Mengen dies sind kann auf vielerlei Arten beschrieben werden. Wir können eine Gerade zum Beispiel durch einen Aufpunkt t und eine Richtung u angeben. Schreiben wir dies explizit hin, so haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &:= \mathbb{R}^2, \\ \mathfrak{L} &:= \{t + \mathbb{R}u : t \in \mathbb{R}^2,\, u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}, \\ I &:= \in . \end{aligned}$$

Hier ist also die Geradenmenge $\mathfrak{L}$ eine Menge von Teilmengen der Punktmenge $\mathfrak{P}$, und die Inzidenzrelation ist einfach die Elementbeziehung. In Wahrheit können wir alle uns interessierenden Geometrien in dieser Art beschreiben, d.h. Geraden sind einfach Teilmengen der Punktmenge. Also warum haben wir in unserer Definition von Inzidenzstruktur dieses I dabei?

Dies geschieht einfach aus praktischen Gründen, in vielen Konstruktionen von Inzidenzgeometrien ist es leichter Punkte und Geraden getrennt anzugeben, und eine Inzidenz I zu konstruieren. Tatsächlich ist es oftmals so, daß Punkt und Geradenmenge überhaupt gleich sind. Wir wollen zum Beispiel einmal eine zweite Beschreibung der Zeichenebene angeben. Diesmal verwenden wir die Darstellung von Geraden in der Form "$y = sx + t$". Formal nehmen wir (s, t) als Gerade, und sagen das (x, y) auf (s, t) liegt, wenn $y = sx + t$ ist. Zusätzlich brauchen wir dann noch die vertikalen Geraden, d.h. wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &:= \mathbb{R}^2, \\ \mathfrak{L} &:= \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}, \\ I &:= \{((x, y), (s, t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : y = sx + t\} \cup \{((x, y), c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : x = c\}. \end{aligned}$$

Hier ist jeder Punkt auch eine Gerade $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{L}$, und um Verwirrung zu vermeiden, schreiben wir die Gerade (s, t) daher mit eckigen Klammern als $[s, t]$. Dies ist nur eine Schreibweise, es handelt sich weiter um das Paar $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Eine derartige Konvention werden wir häufiger verwenden, runde Klammern stehen für Punkte und eckige Klammern für Geraden. Je nach Fragestellung ist die eine oder die andere Beschreibung der Zeichenebene günstiger, schon in der Schule werden ja beide Darstellungen benutzt.

Bleiben wir noch kurz bei unseren beiden Varianten der Zeichenebene. Es handelt sich inhaltlich beidesmal um dieselbe Geometrie, aber trotzdem sind die beiden Inzidenzstrukturen $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{L}, \in)$ und $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}, I)$ ja offenbar nicht gleich. Richtig verschieden sind sie allerdings auch nicht, und wie immer in solchen Situationen wollen wir einen geeigneten Isomorphiebegriff einführen. Isomorphie soll dabei ausdrücken das zwei Inzidenzstrukturen strukturell gleich sind, und dies soll konkret bedeuten, daß sie durch Umbenennen von Punkt und Geradenmengen auseinander hervorgehen. Formal definieren wir:

Definition 2: Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ zwei Inzidenzstrukturen. Ein Isomorphismus von π nach π' ist ein Paar (φ, ψ) von bijektiven Abbildungen $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$, $\psi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ mit $\varphi \times \psi(I) = I'$. Gibt es einen solchen Isomorphismus, so heissen π und π' isomorph. Wir schreiben dann $\pi \simeq \pi'$.

Die Bedingung $\varphi \times \psi(I) = I'$ kann man ausführlicher in der folgenden Form formulieren: Sind $p \in \mathfrak{P}$, $l \in \mathfrak{L}$, so ist genau dann pIl, wenn $\varphi(p) I' \psi(l)$ gilt. Im Beispiel der Zeichenebene ist ein Isomorphismus von $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}, I)$ nach $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{L}, \in)$ durch $\varphi = \mathrm{id}$ und

$$\psi : \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R} \to \mathfrak{L}; \begin{array}{rcl} [s,t] & \mapsto & \{(x, sx+t) : x \in \mathbb{R}\}, \\ [c] & \mapsto & \{(c, y) : y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

gegeben. Anders gesagt wird jede Gerade $l \in \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}$ mit der Menge der mit ihr inzidenten Punkte identifiziert. Diese Konstruktion macht immer Sinn.

Definition 3: Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Ist $l \in \mathfrak{L}$, so heißt

$$\underline{l} := \{p \in \mathfrak{P} : pIl\}$$

die Punktreihe von l, und ist $p \in \mathfrak{P}$, so heißt

$$\mathfrak{L}_p := \{l \in \mathfrak{L} : pIl\}$$

das Geradenbüschel durch p.

Diese Begriffe werden von Isomorphismen respektiert, ist $(\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ eine weitere Inzidenzstruktur, und ist (φ, ψ) ein Isomorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ auf $(\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$, so gilt für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$ die Gleichung

$$\varphi(\underline{l}) = \{\varphi(p) : p \in \mathfrak{P}, pIl\} = \{\varphi(p) : p \in \mathfrak{P}, \varphi(p) I' \psi(l)\} = \{q \in \mathfrak{P}' : qI'\psi(l)\} = \underline{\psi(l)},$$

und analog folgt

$$\psi(\mathfrak{L}_p) = \mathfrak{L}'_{\varphi(p)}$$

für jeden Punkt $p \in \mathfrak{P}$. Die Definition einer Inzidenzstruktur ist noch so allgemein, daß eine Gerade nicht durch ihre Punktreihe bestimmt ist. Allerdings wird dies für alle uns interessierenden Inzidenzstrukturen doch der Fall sein. Wir wollen jetzt gleich eine erste spezielle Klasse von Inzidenzstrukturen benennen, die schon etwas besser aber noch immer zu allgemein ist.

Definition 4: Eine Inzidenzstruktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ heißt ein partieller linearer Raum, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(EV) Sind $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$, so gibt es höchstens eine Gerade die durch p und q geht.

(RL) Auf jeder Geraden $l \in \mathfrak{L}$ liegen mindestens zwei Punkte.

Das erste Axiom (EV) ist die Eindeutigkeit der Verbindungsgerade, wobei eine Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte einfach eine Gerade ist, die durch beide Punkte geht. Das zweite Axiom ist ein sogenanntes Reichhaltigkeitsaxiom, es werden Existenzen gefordert um ungewünschte Effekte auszuschliessen. Das Axiom (EV) gibt uns keinerlei Kontrolle über Geraden, die nur mit einem oder überhaupt keinen Punkt inzidieren. Die Reichhaltigkeit (RL) verbietet derartige Geraden einfach.

Beachte das wir (EV) auch in der Form $|\underline{a} \cap \underline{b}| \leq 1$ für je zwei verschiedene Geraden $a, b \in \mathfrak{L}$ lesen können, die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden ist gleichwertig zur Eindeutigkeit des Schnittpunkts zweier verschiedener Geraden. Daher macht die folgende Notation Sinn:

Definition 5: Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ ein partieller linearer Raum. Eine Menge $M \subseteq \mathfrak{P}$ von Punkten heißt kollinear, wenn es eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ mit $M \subseteq \underline{l}$ gibt, d.h. aller Punkte aus M liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Ebenso heißt eine Menge $N \subseteq \mathfrak{L}$ von Geraden copunktal, wenn es einen Punkt $p \in \mathfrak{P}$ mit $N \subseteq \mathfrak{L}_p$ gibt, d.h. alle Geraden aus N gehen durch einen gemeinsamen Punkt.

Ist $|M| \geq 2$ beziehungsweise $|N| \geq 2$, so sind die Gerade l beziehungsweise der Punkt p eindeutig festgelegt. Für zwei kollineare Punkte $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$ schreiben wir ihre Verbindungsgerade als

$$p \vee q.$$

Für zwei copunktale Geraden $a, b \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq b$ schreiben wir ihren Schnittpunkt als

$$a \wedge b.$$

Als Motivation zum Begriff eines partiellen linearen Raums hatten wir das Problem der Punktreihen benutzt. Dieses wird tatsächlich gelöst, die Konstruktion unseres Isomorphismus bei der Zeichenebene funktioniert für partielle lineare Räume immer.

Satz 1: *Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ ein partieller linearer Raum. Setze*

$$\overline{\mathfrak{L}} := \{\underline{l} : l \in \mathfrak{L}\}.$$

Dann ist $(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{L}}, \in)$ wieder ein partieller linearer Raum. Weiter ist

$$_ : \mathfrak{L} \to \overline{\mathfrak{L}}; l \mapsto \underline{l}$$

eine bijektive Abbildung, und

$$(\mathrm{id}_{\mathfrak{P}}, _) : (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I) \to (\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{L}}, \in)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Zunächst ist $(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{L}}, \in)$ sicherlich eine Inzidenzstruktur, und $_$ ist eine surjektive Abbildung. Wir zeigen das sie auch injektiv ist. Seien also zwei Geraden $a, b \in \mathfrak{L}$ mit

$\underline{a} = \underline{b}$ gegeben. Nach dem Reichhaltigkeitsaxiom (RL) gibt es zwei Punkte $p, q \in \underline{a} = \underline{b}$ mit $p \neq q$. Die Eindeutigkeit der Verbindungsgerade (EV) liefert $a = b$. Also ist unsere Abbildung injektiv.

Die Inzidenz bleibt offensichtlich auch erhalten, denn für $p \in \mathfrak{P}$, $l \in \mathfrak{L}$ gilt ja

$$pIl \Longleftrightarrow p \in \underline{l}$$

nach Definition der Punktreihe $\underline{l}$. Damit liegt tatsächlich ein Isomorphismus vor. Daß $(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{L}}, \in)$ ein partieller linearer Raum ist, gilt da diese Inzidenzstruktur zu einem solchen isomorph ist (dies ist eine leichte Übungsaufgabe).

■

Für partielle lineare Räume können wir uns also stets auf den Fall $I = \in$ beschränken. Da dies ein so häufiger Fall ist, führen wir eine eigene Notation ein und sagen das $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine Inzidenzstruktur ist, wenn $\mathfrak{L}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathfrak{P}$ ist, und als Inzidenz die Elementbeziehung verwendet wird. Auch wird der Begriff eines Isomorphismus leichter, wir müssen keine eigenständige Abbildung der Geradenmenge verwenden.

Lemma 2: *Es gelten:*

(a) *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ partielle lineare Räume und $(\varphi, \psi) : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus. Sind dann $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$ kollinear, so ist $\psi(p \vee q) = \varphi(p) \vee \varphi(q)$, und sind $a, b \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq b$ copunktal, so ist $\varphi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$.*

(b) *Sind $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ partielle lineare Räume, und $(\varphi, \psi_1), (\varphi, \psi_2) : \pi \to \pi'$ zwei Isomorphismen, so ist $\psi_1 = \psi_2$, d.h. die Geradenabbildung eines Isomorphismus ist durch die Punktabbildung eindeutig festgelegt.*

(c) *Sind $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei partielle lineare Räume, und ist $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ die Punktabbildung eines Isomorphismus $\pi \to \pi'$, so ist $\psi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'; a \mapsto \varphi(a)$ die zugehörige Geradenabbildung.*

(d) *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ partielle lineare Räume und $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ eine bijektive Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- **(1)** *Die Abbildung φ ist die Punktabbildung eines Isomorphismus.*
- **(2)** *Ist $a \subseteq \mathfrak{P}$, so gilt genau dann $a \in \mathfrak{L}$, wenn $\varphi(a) \in \mathfrak{L}'$ ist.*
- **(3)** *Sind $p, q, r \in \mathfrak{P}$ so sind p, q, r genau dann kollinear in π, wenn $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ kollinear in π' sind.*

Beweis: **(a)** Es ist $\varphi(p) \neq \varphi(q)$ und $p, q \in \underline{p \vee q}$ ergibt $\varphi(p), \varphi(q) \in \varphi(\underline{p \vee q}) = \underline{\psi(p \vee q)}$, d.h. $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ sind kollinear mit $\varphi(p) \vee \varphi(q) = \psi(p \vee q)$. Die Aussage über Schnittpunkte folgt analog.

(b) Sei $l \in \mathfrak{L}$. Nach dem Reichhaltigkeitsaxiom (RL) gibt es $p, q \in \underline{l}$ mit $p \neq q$. Dann ist $l = p \vee q$ und (a) ergibt $\psi_1(l) = \psi_1(p \vee q) = \varphi(p) \vee \varphi(q) = \psi_2(p \vee q) = \psi_2(l)$. Also ist $\psi_1 = \psi_2$.
(c) Ist $l \in \mathfrak{L}$ so gilt $\psi(l) = \underline{\psi(l)} = \varphi(\underline{l}) = \varphi(l)$.
(d) (1)$\Longrightarrow$(3): Nach (c) ist $\overline{\psi} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'; l \mapsto \varphi(l)$ die zugehörige Geradenabbildung des Isomorphismus. Seien $p, q, r \in \mathfrak{P}$ gegeben. Sind p, q, r kollinear, so existiert $l \in \mathfrak{L}$ mit $p, q, r \in l$, und es folgt $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r) \in \varphi(l) \in \mathfrak{L}'$, d.h. auch $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ sind kollinear.

Jetzt seien umgekehrt $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ als kollinear vorausgesetzt. Dann existiert $l' \in \mathfrak{L}'$ mit $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r) \in l'$. Es existiert $l \in \mathfrak{L}$ mit $l' = \varphi(l)$, und damit ist $p, q, r \in l$, d.h. p, q, r sind kollinear.
(3)$\Longrightarrow$(2): Sei $l \subseteq \mathfrak{P}$ gegeben. Zunächst sei $l \in \mathfrak{L}$. Dann existieren $p, q \in l$ mit $p \neq q$. Da p, q, q kollinear sind, sind $\varphi(p), \varphi(q)$ kollinear, also existiert $a \in \mathfrak{L}'$ mit $\varphi(p), \varphi(q) \in a$. Wir zeigen $\varphi(l) = a$. Ist $r \in l$, so sind p, q, r kollinear, also sind auch $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ kollinear, d.h. $\varphi(r) \in a$. Dies zeigt $\varphi(l) \subseteq a$. Jetzt sei umgekehrt $r \in a$ gegeben. Dann ist $\varphi^{-1}(r) \in \mathfrak{P}$ und $\varphi(p), \varphi(q), r = \varphi(\varphi^{-1}(r))$ sind kollinear, also sind auch $p, q, \varphi^{-1}(r)$ kollinear. Insbesondere ist $\varphi^{-1}(r) \in l$, also $r \in \varphi(l)$. Damit haben wir auch $a \subseteq \varphi(l)$, und $\varphi(l) = a$ ist gezeigt.

Jetzt sei umgekehrt $\varphi(l) \in \mathfrak{L}'$ vorausgesetzt. Wegen $|l| = |\varphi(l)| \geq 2$ existieren wieder $p, q \in l$ mit $p \neq q$. Weiter sind $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(q)$ kollinear, d.h. auch p, q sind kollinear und es existiert $a := p \vee q \in \mathfrak{L}$. Genau wie in der Hinrichtung folgt $\varphi(a) = \varphi(l)$, und somit ist $l = a \in \mathfrak{L}$.
(2)$\Longrightarrow$(1): Offenbar ist $\psi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'; l \mapsto \varphi(l)$ eine bijektive Abbildung. Die Inzidenz, d.h. die Elementbeziehung, wird trivialerweise erhalten.

■

Aufgrund dieses Lemmas macht es Sinn einen Isomorphismus zwischen partiellen linearen Räumen einfach als spezielle Bijektion zwischen den Punktmengen zu betrachten, und so werden wir es in dieser Vorlesung auch halten. Sind also $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ partielle lineare Räume, und ist $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ eine Abbildung, so sagen wir etwas verkürzend "φ ist ein Isomorphismus" anstelle des etwas genaueren "φ ist die Punktabbildung eines Isomorphismus". Die zugehörige Geradenabbildung bezeichnen wir einfach auch mit φ, d.h. wir schreiben $\varphi(l)$ für das Bild einer Geraden $l \in \mathfrak{L}$ unter der Geradenabbildung des Isomorphismus. Aussage (c) unseres Lemmas sagt uns, daß dies im Fall $I = \in$, $I' = \in$ mit der üblichen Notation übereinstimmt. Auf jeden Fall gilt $\underline{\varphi(l)} = \varphi(\underline{l})$. All dies mag an dieser Stelle eher als verwirrend erscheinen, aber im praktischen Einsatz werden wir sehen, daß dies sinnvolle Konventionen sind.

Falls wir bessere Geometrien als partielle lineare Räume betrachten, also Inzidenzstrukturen die noch mehr Axiome erfüllen, so vereinfacht sich häufig die Isomorphiebedingung. Als Beispiel betrachten wir einmal die sogenannten linearen Räume.

Definition 6: Eine Inzidenzstruktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ heißt ein linearer Raum, wenn die beiden folgenden Axiome gelten:

(V) Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathfrak{P}$ haben genau eine Verbindungsgerade $l \in \mathfrak{L}$,

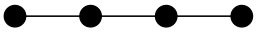
d.h. es gibt genau ein $l \in \mathfrak{L}$ mit p, qIl.

(RL) Auf jeder Geraden $l \in \mathfrak{L}$ liegen mindestens zwei Punkte.

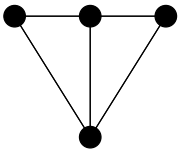
Insbesondere ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ dann ein partieller linearer Raum.

Lineare Räume sind eine gut untersuchte Klasse von Inzidenzstrukturen, vor allen solche mit endlicher Punktmenge werden sehr intensiv studiert. Alle linearen Räume mit einer kleinen endlichen Anzahl von Punkten sind klassifiziert. Wir wollen als Beispiel einmal alle linearen Räume mit 4 Punkten bestimmen. Sei also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ ein linearer Raum mit $|\mathfrak{P}| = 4$. Wir führen eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der Punkte auf der größten Geraden des linearen Raums durch.

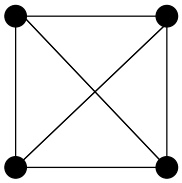
Gibt es eine Gerade mit 4 Punkten, so liegen alle Punkte auf dieser Geraden, und da auf jeder Geraden mindestens zwei Punkte liegen, kann es keine weitere Gerade geben. Nun gebe es eine Gerade mit drei Punkten aber keine Gerade mit vier Punkten. Gäbe es eine zweite Gerade mit drei Punkten, so hätte diese mit der ersten mindestens zwei Punkte gemeinsam, d.h. es gibt genau eine Gerade mit drei Punkten. Die drei Punkte dieser Geraden sind dann mit dem vierten Punkt durch Geraden der Länge 2 verbunden. Im letzten Fall gibt es nur 2-er Geraden. Insgesamt haben wir die folgenden drei linearen Räume auf 4 Punkten erhalten:



Alle Punkte auf einer Geraden



Eine Gerade mit drei Punkten



Nur Geraden mit zwei Punkten

Die Anzahl der Isomorphietypen ist bis zu 12 Punkten bekannt.

Anzahl der Punkte	Isomorphietypen
0	1
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	10
7	24
8	69
9	384
10	5.250
11	232.929
12	28.872.973

In dieser Vorlesung werden wir allerdings keine allgemeinen linearen Räume behandeln, wir wollen nur kurz die folgende vereinfachte Isomorphiebedingung festhalten.

Lemma 3: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei lineare Räume, und $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ eine bijektive Abbildung. Genau dann ist φ ein Isomorphismus, wenn $\varphi(l) \in \mathfrak{L}'$ für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$ gilt.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Dies ist klar nach Lemma 2.(d).
"'$\Longleftarrow$"' Sei $l \subseteq \mathfrak{P}$ eine Menge von Punkten. Ist $l \in \mathfrak{L}$, so gilt $\varphi(l) \in \mathfrak{L}'$. Jetzt sei umgekehrt $\varphi(l) \in \mathfrak{L}'$ vorausgesetzt. Nach dem Reichhaltigkeitsaxiom (RL) ist dann $|l| = |\varphi(l)| \geq 2$, also existieren $p, q \in l$ mit $p \neq q$. Nach dem Verbindungsaxiom (V) gibt es eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ mit $p, q \in a$. Dann ist $\varphi(a) \in \mathfrak{L}'$ mit $\varphi(p), \varphi(q) \in \varphi(l) \cap \varphi(a)$, und die Eindeutigkeit der Verbindungsgerade in π' liefert $\varphi(l) = \varphi(a)$. Also ist auch $l = a \in \mathfrak{L}$. Nach Lemma 2.(d) ist φ ein Isomorphismus.

■

Aufgaben zu §1

(1) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ zwei isomorphe Inzidenzstrukturen. Ist dann π ein (partieller) linearer Raum, so ist auch π' ein (partieller) linearer Raum.

(2) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle linearen Räume mit höchstens fünf Punkten.

(3) Finden Sie zwei partielle lineare Räume $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ mit $\varphi(l) \in \mathfrak{L}'$ für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$ so, daß φ kein Isomorphismus ist.

(4) Finden Sie zwei lineare Räume $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$, die kein Isomorphismus ist, so daß trotzdem für je drei kollineare Punkte $p, q, r \in \mathfrak{P}$ auch $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ kollinear sind.

(5) Sind π, π' und π'' Inzidenzstrukturen, und $(\varphi, \psi) : \pi \to \pi'$, $(\varphi', \psi') : \pi' \to \pi''$ Isomorphismen, so ist auch $(\varphi'\varphi, \psi'\psi) : \pi \to \pi''$ ein Isomorphismus.

(6) Sind π, π' Inzidenzstrukturen und $(\varphi, \psi) : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus, so ist auch $(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) : \pi' \to \pi$ ein Isomorphismus.

§2 Affine Ebenen

In diesem Paragraphen werden wir eine spezielle Klasse linearer Räume näher untersuchen. Wir beginnen mit der Definition dieser Geometrien.

Definition 1: Eine Inzidenzstruktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ heißt affine Ebene, wenn die folgenden drei Axiome gelten:

(V) Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathfrak{P}$ haben eine eindeutige Verbindungsgerade $l \in \mathfrak{L}$.

(P) Sind $l \in \mathfrak{L}$ eine Gerade und $p \in \mathfrak{P}$ ein Punkt nicht auf l (d.h. $(p, l) \notin I$), so existiert genau eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ mit pIa und $\underline{l} \cap \underline{a} = \emptyset$.

(RD) Es gibt drei verschiedene Punkte $p, q, r \in \mathfrak{P}$, die nicht kollinear sind.

Das Verbindungsaxiom (V) kennen wir bereits aus §1. Das letzte Axiom (RD) ist wieder ein Reichhaltigkeitsaxiom, der Name kommt daher das die Existenz eines Dreiecks gefordert wird. Unter einem Dreieck verstehen wir dabei einfach drei nicht kollineare Punkte. Das mittlere Axiom (P) ist das sogenannte Parallelenaxiom. Die Gerade a, deren Existenz von (P) gefordert wird, ist die Parallele zu l durch den Punkt p im Sinne der folgenden Definition:

Definition 2: Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine affine Ebene. Zwei Geraden $a, b \in \mathfrak{L}$ heißen parallel, in Zeichen $a \parallel b$, wenn $a = b$ oder $\underline{a} \cap \underline{b} = \emptyset$ gilt.
Ist $l \in \mathfrak{L}$ eine Gerade, so heißt

$$l \parallel := \{a \in \mathfrak{L} : l \parallel a\},$$

die Parallelschar von l, und Mengen dieser Form heißen Parallelscharen.

Wir beweisen jetzt das folgende Lemma über Parallelität:

Lemma 1: *Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine affine Ebene.*

(a) *Sind $l \in \mathfrak{L}$ und $p \in \mathfrak{P}$, so gibt es genau eine Gerade $a =: pl \in \mathfrak{L}$ mit $l \parallel a$ und pIa.*

(b) *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{L}$.*

(c) *Ist C eine Parallelschar, so ist die Punktmenge die disjunkte Vereinigung $\mathfrak{P} = \bigcup_{l \in C} \underline{l}$.*

Beweis: **(a)** Dies ist klar nach unserem Axiom (P).
(b) Offenbar ist Parallelität reflexiv und symmetrisch. Es bleibt nur die Transitivität einzusehen. Seien also $a, b, c \in \mathfrak{L}$ mit $a \parallel b$ und $b \parallel c$ gegeben. Zu zeigen ist $a \parallel c$. Ist $a = b$ oder $b = c$, so ist dies klar. Also können wir jetzt $a \neq b \neq c$ annehmen. Ist $\underline{a} \cap \underline{c} = \emptyset$, so sind wir wieder fertig. Damit können wir auch $\underline{a} \cap \underline{c} \neq \emptyset$ annehmen. Wähle einen Punkt $p \in \underline{a} \cap \underline{c}$. Wegen $a \parallel b$ ist dann a die Parallele zu b durch p, und wegen $c \parallel b$ ist auch c diese Parallele. Die Eindeutigkeitsaussage in (a) liefert $a = c$, und wir sind fertig.

(c) Nach (b) besteht C aus paarweise parallelen Geraden. Sind also $a, b \in C$ mit $a \neq b$, so ergibt $a \parallel b$ sofort $\underline{a} \cap \underline{b} = \emptyset$. Es bleibt zu zeigen, daß jeder Punkt in einer Geraden aus C liegt. Sei $p \in \mathfrak{P}$. Es ist $C \neq \emptyset$, also existiert ein $l \in C$. Nach (a) existiert $a \in \mathfrak{L}$ mit pIa und $l \parallel a$. Es folgen $a \in C$ und $p \in \underline{a}$.

■

Bevor wir Beispiele diskutieren wollen wir noch ein allgemeines Lemma beweisen. Um dieses Lemma zu verstehen, müssen wir uns kurz an den Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen erinnern. Zwei Mengen A, B heißen bekanntlich gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. Dieses Konzept führt auf den Begriff der Mächtigkeit oder Kardinalität $|A|$ einer Menge A. Daß zwei Mengen gleiche Kardinalität haben bedeutet einfach das sie gleichmächtig sind. Dies klärt natürlich nicht was denn die Kardinalität nun ist, reicht aber für unsere bescheidenen Zwecke völlig aus. Man kann tatsächlich eine spezielle Sorte von Mengen definieren, die sogenannten Kardinalzahlen, so daß jede Menge zu genau einer Kardinalzahl gleichmächtig ist, und diese ist dann die Kardinalität dieser Menge. Zum Beispiel sind die natürlichen Zahlen auch Kardinalzahlen.

Lemma 2: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine affine Ebene.*

(a) *Sind $p, q, r \in \mathfrak{P}$ drei verschiedene, nicht kollineare Punkte, so sind die drei Geraden $p \vee q$, $p \vee r$, $q \vee r$ nicht kopunktal und paarweise nicht parallel.*

(b) *π ist ein linearer Raum.*

(c) *Es gibt genau eine Kardinalzahl $n \geq 2$, genannt die Ordnung von π, mit $|\underline{l}| = |C| = n$ für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$ und jede Parallelschar C von π.*

(d) *Ist $p \in \mathfrak{P}$, so gilt $|\mathfrak{L}_p| = n + 1 \geq 3$.*

Beweis: **(a)** Wären zwei der drei Geraden gleich, so würden alle drei Punkte auf dieser Geraden liegen, also müssen die drei Geraden paarweise verschieden sein. Je zwei der drei Geraden schneiden sich in einem Punkt, und können somit nicht parallel sein. Schließlich ist p der einzige Punkt auf $p \vee q$ und $p \vee r$, und $q \neq p$ ist der einzige Punkt auf $p \vee q$ und $q \vee r$. Also sind unsere Geraden auch nicht kopunktal.
(c) Nach dem Reichhaltigkeitsaxiom (RD) gibt es mindestens drei Punkte, und nach (V) auch mindestens eine Gerade. Damit ist die Eindeutigkeit von n klar. Wir zeigen zunächst die folgende Hilfsaussage: Sind $l \in \mathfrak{L}$, und ist C eine Parallelschar mit $l \notin C$, so ist $|\underline{l}| = |C|$.

Seien also C eine Parallelschar von π und $l \in \mathfrak{L} \backslash C$. Für jeden Punkt $p \in \underline{l}$ gibt es nach Lemma 1.(c) genau eine Gerade $\varphi(p) \in C$ mit $pI\varphi(p)$. Ist $a \in C$, so gilt wegen $l \notin C$ auch $l \not\parallel a$, also schneiden sich l und a, d.h. $\psi(a) := l \wedge a$ existiert. Damit haben wir zwei Abbildungen $\varphi : \underline{l} \to C$ und $\psi : C \to \underline{l}$. Ist $p \in \underline{l}$, so gilt offenbar

$$\psi(\varphi(p)) = l \wedge \varphi(p) = p,$$

da $pI\varphi(p)$ ist. Ist andererseits $a \in C$, so ist $\psi(a) = l \wedge aIa$, d.h. $\varphi(\psi(a)) = a$. Also ist φ bijektiv mit $\varphi^{-1} = \psi$. Insbesondere ist $|\underline{l}| = |C|$.

Jetzt wähle eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ und setze $n := |\underline{l}|$. Wir zeigen, daß n all unsere Bedingungen erfüllt. Sei $a \in \mathfrak{L}$ eine beliebige Gerade. Nach dem Reichhaltigkeitsaxiom (RD) gibt es ein Dreieck in π, und nach (a) gibt es somit drei paarweise nicht parallele Geraden. Insbesondere gibt es mindestens drei Parallelscharen, und somit existiert eine Parallelschar C mit $a, l \notin C$. Unsere Hilfsbehauptung liefert $|\underline{a}| = |C| = |\underline{l}| = n$.

Jetzt sei C eine beliebige Parallelschar. Da es zwei verschiedene Parallelscharen gibt, existiert eine Gerade $a \in \mathfrak{L}\backslash C$, und unsere Hilfsbehauptung ergibt wieder $|C| = |\underline{a}| = n$.

Es bleibt nur noch $n \geq 2$ zu zeigen. Wieder nach dem Reichhaltigkeitsaxiom (RD) gibt es $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$, und somit ist $n = |\underline{p \vee q}| \geq |\{p, q\}| = 2$.

(b) Da das Verbindungsaxiom (V) vorausgesetzt ist, ist nur (RL) zu zeigen, d.h. auf jeder Geraden müssen mindestens zwei Punkte liegen. Dies ist aber klar nach (c).

(d) Sei $p \in \mathfrak{P}$ ein Punkt. Wegen $\mathfrak{L} \neq \emptyset$, ist nach Lemma 1.(c) auch $\mathfrak{L}_p \neq \emptyset$, und es existiert $l \in \mathfrak{L}_p$. Weiter gibt es nach (c) eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ mit $l \neq a$ und $l \parallel a$. Insbesondere liegt p nicht auf a.

Ist $q \in \underline{a}$, so ist $p \neq q$ und wir haben die Gerade $p \vee q$. Wegen $(q, l) \notin I$ ist $p \vee q \in \mathfrak{L}_p\backslash\{l\}$. Also haben wir eine Abbildung $\varphi : \underline{a} \to \mathfrak{L}_p\backslash\{l\}; q \mapsto p \vee q$. Jetzt sei $g \in \mathfrak{L}_p\backslash\{l\}$. Dann ist $g \not\parallel l$, und somit auch $g \not\parallel a$, also existiert $\psi(g) := g \wedge a \in \underline{a}$.

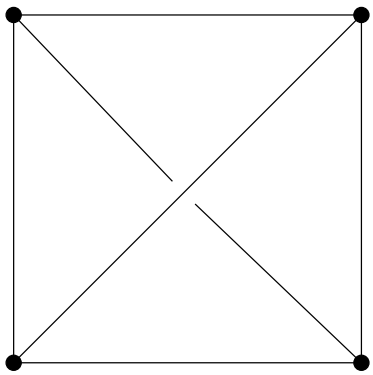
Ist $q \in \underline{a}$, so gilt $\psi(\varphi(q)) = (p \vee q) \wedge a = q$. Ist $g \in \mathfrak{L}_p\backslash\{l\}$, so ist $\psi(g) = g \wedge aIg$ und $\psi(g) \neq pIg$, also $\varphi(\psi(g)) = p \vee (g \wedge a) = g$. Somit ist φ bijektiv mit $\varphi^{-1} = \psi$, und es folgt

$$|\mathfrak{L}_p| = |\mathfrak{L}_p\backslash\{l\}| + 1 = |\underline{a}| + 1 = n + 1.$$

■

Kombinieren wir dieses Lemma mit den Ergebnissen des §1, so sehen wir, daß wir uns bei affinen Ebenen immer auf den Fall $I = \in$ beschränken können. Dies werden wir auch meistens tun. Im Lemma haben wir die Ordnung einer affinen Ebene π als die Anzahl der Punkte auf einer Geraden eingeführt, und festgehalten das diese mindestens 2 ist. Wir wollen uns einmal überlegen wie affine Ebenen der Ordnung 2 aussehen.

Sei also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene der Ordnung 2. Dann ist jede Gerade eine zweielementige Teilmenge von $\mathfrak{P}$, und umgekehrt haben je zwei verschiedene Punkte eine Verbindungsgerade, d.h. jede zweielementige Teilmenge muss eine Gerade sein. Also ist $\mathfrak{L} = \binom{\mathfrak{P}}{2}$ die Menge der zweielementigen Teilmengen von $\mathfrak{P}$. Weiter besteht jede Parallelschar aus 2 Geraden, und jede dieser beiden Geraden hat zwei Punkte. Also hat $\mathfrak{P}$ genau vier Punkte. Damit sieht $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ wie folgt aus:



Ist umgekehrt $\mathfrak{P}$ eine vierelementige Menge, so ist $(\mathfrak{P}, \binom{\mathfrak{P}}{2})$ eine affine Ebene. Damit ist gezeigt, daß es bis auf Isomorphie genau eine affine Ebene der Ordnung 2 gibt. Diese Ebenen nennt man gelegentlich die Minimalmodelle, da sie das kleinste Beispiel einer affinen Ebene sind. Allerdings sind die Minimalmodelle eher eine Randerscheinung, ein wichtigeres Beispiel ist etwa unsere Zeichenebene. Als eine Übungsaufgabe können Sie auch zeigen, daß es genau eine affine Ebene der Ordnung 3 gibt. Für kleine Werte der Ordnung n ist die Anzahl affiner Ebenen der Ordnung n genau bekannt, natürlich bis auf Isomorphie.

Ordnung	Isomorphietypen
2	1
3	1
4	1
5	1
6	0
7	1
8	1
9	7
10	0
11	≥ 1
12	?

Insbesondere gibt es keine affine Ebene der Ordnung 6. Dies ist ein Korollar eines allgemeinen Satzes, der besagt, daß die Ordnung einer endlichen affinen Ebene eine gewisse zahlentheoretische Bedingung erfüllen muss. Daß es für $n \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$ jeweils genau eine affine Ebene gibt, läßt sich noch per Hand nachweisen. Die Eindeutigkeit der affinen Ebene der Ordnung 8 dagegen benötigt momentan die Hilfe eines Computers. Ebenso waren die affinen Ebenen der Ordnung 9 alle bekannt, aber der Nachweis das es keine weiteren gibt ist bislang auch nur mit Unterstützung eines Computers geglückt. Daß es keine affine Ebene der Ordnung 10 gibt, wird leider nicht durch den Satz, der die Ordnung $n = 6$ ausschließt, bewiesen. Die Zahl 10 erfüllt die erwähnte zahlentheoretische Bedingung, und um diese Ordnung trotzdem auszuschließen war ein massiver Rechnereinsatz nötig.

Damit haben wir alle bekannten Tatsachen über die kleinen Ordnungen abgedeckt. Wie wir etwas weiter unten einsehen werden, gibt es eine affine Ebene der Ordnung 11, es ist aber nicht bekannt ob diese eindeutig ist. Völlig offen ist die Frage, ob eine affine Ebene der Ordnung 12 existiert.

Wir wollen jetzt eine allgemeine Klasse affiner Ebenen einführen, nämlich die Ebenen die wir aus zweidimensionalen Vektorräumen gewinnen. Wir fassen dabei den Begriff Vektorraum etwas weiter, als es vielleicht aus den Grundvorlesungen bekannt ist, wir betrachten nicht nur Körper als Skalarenbereich sondern etwas allgemeiner Schiefkörper. Dabei ist ein Schiefkörper genau wie ein Körper, nur die Kommutativität der Multiplikation fehlt.

Ausführlich ist ein Schiefkörper also ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer abelschen Gruppe $(K, +)$ und einer Multiplikation $\cdot : K \times K \to K$ so, daß $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist, und $x(y+z) = xy + xz$, $(x+y)z = xz + yz$ für alle $x, y, z \in K$ gilt. Vektorräume sind wie bei Körpern definiert, und auch die üblichen Sätze aus Lineare Algebra I gelten wie gewohnt, nur die Konstruktion der Determinante funktioniert nicht.

An dieser Stelle der Vorlesung wirkt die Einbeziehung von Schiefkörpern leider etwas willkürlich, aber wir werden später sehen das dies unumgänglich ist. Nach dieser Vorbemerkung wollen wir unsere Beispiele konstruieren.

Satz 3: *Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Setze*

$$\mathfrak{L} := \{t + uK : t \in V, u \in V\backslash\{0\}\}.$$

Dann ist $AG(V) := (V, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene. Für $t, t' \in V$, $u, u' \in V\backslash\{0\}$ gelten

$$\begin{aligned} t + uK = t' + u'K &\iff t - t' \in uK = u'K, \\ t + uK \parallel t' + u'K &\iff uK = u'K, \end{aligned}$$

und für $p, q \in V$ mit $p \neq q$ ist

$$p \vee q = p + (q - p)K.$$

Beweis: Seien $p, t \in V$, $u \in V\backslash\{0\}$. Wir behaupten das genau dann $p \in t + uK$ ist, wenn $t + uK = p + uK$ gilt. Ist $p \in t + uK$, so existiert $\lambda \in K$ mit $p = t + u\lambda$, und es folgt $p + uK = t + u\lambda + uK = p + u(\lambda + K) = p + uK$. Ist umgekehrt $t + uK = p + uK$, so gilt trivialerweise $p = p + u0 \in p + uK = t + uK$. Damit ist diese Hilfsaussage eingesehen.

Seien $t, t' \in V$, $u, u' \in V\backslash\{0\}$. Wir wollen jetzt $t + uK = t' + u'K \iff t - t' \in uK = u'K$ beweisen. Sei zunächst $t - t' \in uK = u'K$ vorausgesetzt. Dann existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $t - t' = u'\lambda$ und $u = u'\mu$. Wegen $u \neq 0$ ist $\mu \neq 0$. Es folgt $t + uK = t' + u'\lambda + u'\mu K = t' + u'(\lambda + \mu K) = t' + u'K$.

Jetzt sei umgekehrt $t + uK = t' + u'K$. Dann ist $t \in t + uK = t' + u'K$, also existiert $\lambda \in K$ mit $t = t' + u'\lambda$, und insbesondere $t - t' = u'\lambda \in u'K$. Weiter folgt

$t' + u'\lambda + uK = t' + u'K$, d.h. $uK = u'K - u'\lambda = u'K$. Damit haben wir diesen Teil des Satzes bewiesen.

Als nächstes weisen wir das Verbindungsaxiom (V) nach. Seien also $p, q \in V$ mit $p \neq q$ gegeben. Dann ist $q - p \in V\backslash\{0\}$, also ist $l := p + (q-p)K \in \mathfrak{L}$ mit $p = p + (q-p)0 \in l$ und $q = p + (q-p)1 \in l$. Sei $a \in \mathfrak{L}$ beliebig mit $p, q \in a$. Es gibt $t \in V$, $u \in V\backslash\{0\}$ mit $a = t + uK$. Wegen $p \in a$ folgt $a = p + uK$. Weiter ist $q \in a = p + uK$, also existiert $\lambda \in K$ mit $q = p + u\lambda$, und somit ist $0 \neq q - p = u\lambda$, also auch $\lambda \neq 0$ und $(q-p)K = u\lambda K = uK$. Es folgt $a = p + uK = p + (q-p)K = l$.

Seien jetzt wieder $t, t' \in V$, $u, u' \in V\backslash\{0\}$ gegeben. Wir wollen

$$t + uK = t' + u'K \text{ oder } (t + uK) \cap (t' + u'K) = \emptyset \Longleftrightarrow uK = u'K$$

einsehen. Zunächst sei $uK = u'K$. Ist dann $t - t' \in uK$, so gilt $t + uK = t' + u'K$. Ist dagegen $t - t' \notin uK$, so folgt $(t + uK) \cap (t' + u'K) = \emptyset$, denn andernfalls gebe es $\lambda, \mu \in K$ mit $t + u\lambda = t' + u\mu$, da $u'K = uK$, und somit $t - t' = u(\mu - \lambda) \in uK$. Jetzt sei umgekehrt $t + uK = t' + u'K$ oder $(t + uK) \cap (t' + u'K) = \emptyset$ vorausgesetzt. Im ersten Fall wissen wir bereits $uK = u'K$. Also können wir jetzt $(t+uK)\cap(t'+u'K) = \emptyset$ annehmen. Angenommen es wäre $uK \neq u'K$. Wegen $u, u' \neq 0$ sind u, u' dann linear unabhängig. Nach Voraussetzung ist $\dim V = 2$, also ist u, u' eine Basis von V. Insbesondere existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $t - t' = u'\lambda - u\mu$, und es folgt $t + u\mu = t' + u'\lambda \in (t+uK)\cap(t'+u'K)$; ein Widerspruch. Also muß auch in diesem Fall $uK = u'K$ gelten.

Jetzt beweisen wir das Parallelenaxiom. Seien also $p, t \in V$, $u \in V\backslash\{0\}$ mit $p \notin t + uK =: l$ gegeben. Wie eben gezeigt, ist $a := p + uK \in \mathfrak{L}$ disjunkt zu l mit $p \in a$. Sei $b \in \mathfrak{L}$ beliebig mit $p \in b$, $l \cap b = \emptyset$. Dann gibt es $u' \in V\backslash\{0\}$ mit $b = p + u'K$, und wir wissen $u'K = uK$, d.h. $b = p + uK = a$.

Es ist nur noch die Reichhaltigkeitsaussage (RD) zu zeigen. Sei dazu u, v eine Basis von V, und betrachte die drei Punkte $0, u, v$. Diese sind verschieden, und es gilt $v \notin uK = 0 \vee u$, d.h. die drei Punkte sind nicht kollinear.

■

Die Ordnung von $\mathrm{AG}(V)$ ist übrigens offenbar gleich $|K|$. Betrachten wir speziell den Vektorraum $V = K^2$, so schreiben wir

Definition 3: Ist K ein Schiefkörper, so setzen wir

$$A_2K := \mathrm{AG}(K^2).$$

Diese affine Ebene heißt die affine Koordinatenebene über K.

Damit sind wir übrigens in der Lage, einige der oben erwähnten affinen Ebenen kleiner Ordnung zu konstruieren. In der Algebra Vorlesung haben Sie wahrscheinlich die folgenden Tatsachen kennengelernt:

- Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper.
- Ist K ein endlicher Körper, so ist $|K|$ eine Primpotenz.

- Ist umgekehrt q eine Primpotenz, so gibt es, bis auf Isomorphie, genau einen Körper K mit $|K| = q$.

Daraus folgt, daß es für jede Primpotenz q eine affine Ebene der Ordnung q gibt, nämlich die affine Koordinatenebene über dem Körper mit q Elementen. Tatsächlich gibt es kein einziges bekanntes Beispiel einer endlichen affinen Ebene, deren Ordnung keine Primpotenz ist. In diesem Zusammenhang gibt es die beiden folgenden (offenen) Vermutungen:

- Die Ordnung einer endlichen affinen Ebene ist stets eine Primpotenz.

- Ist π eine endliche affine Ebene, deren Ordnung eine Primzahl p ist, so ist π zur affinen Koordinatenebene über dem Körper mit p Elementen isomorph.

Der erste offene Fall der ersten Vermutung ist $n = 12$ und bei der zweiten Vermutung ist es $p = 11$.

Unsere Zeichenebene können wir als die Koordinatenebene $A_2\mathbb{R}$ auffassen. Nehmen wir für K den Körper mit zwei Elementen, so erhalten wir ein Minimalmodell. Also sind alle unsere bisherigen Beispiele in Wahrheit affine Koordinatenebenen. Wir wollen an dieser Stelle kurz ein anderes Beispiel einer affinen Ebene vorstellen. In den Übungen zu diesem Paragraphen werden dann noch einige weitere Konstruktionen affiner Ebenen diskutiert.

Als Punktmenge verwenden wir $\mathfrak{P} := \mathbb{R}^2$. Sei $k > 1$ eine feste reelle Zahl. Wir betrachten die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ als Geraden:

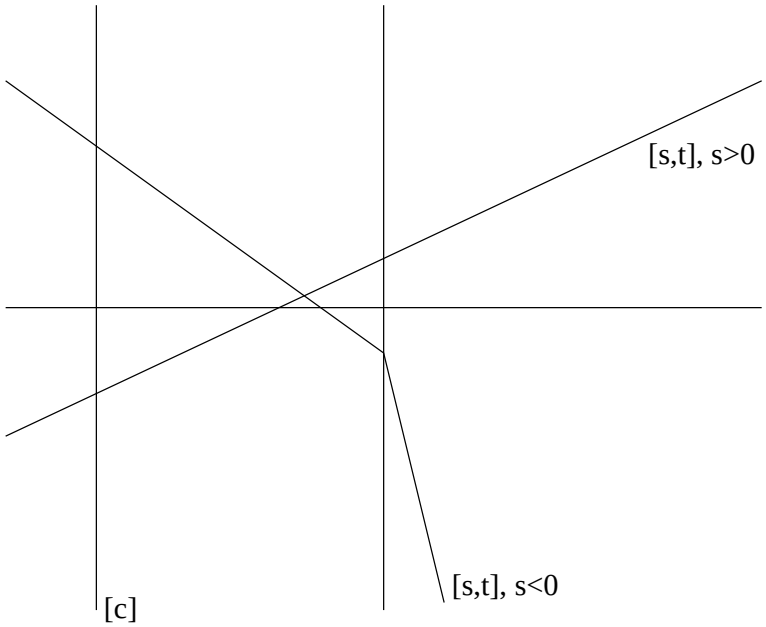
$$[c] := \{(c, y) : y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{für } c \in \mathbb{R}),$$

$$[s, t] := \{(x, sx + t) : x \in \mathbb{R}\} \quad (\text{für } s, t \in \mathbb{R} \text{ mit } s \geq 0)$$

und letztlich

$$[s, t] := \{(x, sx + t) : x \in \mathbb{R}, x < 0\} \cup \{(x, ksx + t) : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$. Anders gesagt verwenden wir die gewöhlichen Geraden nicht negativer Steigung, und die Geraden negativer Steigung werden an der y-Achse um den Faktor k abgeknickt.



Setzen wir

$$\mathfrak{L}_k := \{[c] : c \in \mathbb{R}\} \cup \{[s,t] : s,t \in \mathbb{R}\},$$

so heißt

$$M_k := (\mathbb{R}^2, \mathfrak{L}_k)$$

die Moultonebene zum Knickfaktor k. Als eine Übungsaufgabe können Sie einmal nachrechnen, daß M_k eine affine Ebene ist. Es stellt sich heraus, daß die Moultonebene nicht zu einer affinen Koordinatenebene über einem Schiefkörper isomorph ist. Dies werden wir allerdings erst etwas später bequem beweisen können.

Wie in §1 können wir die affine Koordinatenebene über einem Schiefkörper K alternativ auch durch Steigung und Achsenabschnitt beschreiben. Wir wollen uns einmal überlegen wie das aussieht. Unsere Punktmenge ist $\mathfrak{P} = K^2$. Für eine Gerade $v + Ku$ gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder ist $u = (0, y)$ für ein $y \in K\backslash\{0\}$, und schreiben wir $v = (c, s)$, so folgt

$$v + Ku = (c, s) + (0, y)K = \{c\} \times K.$$

Dies sind die vertikalen Geraden. Die zweite Möglichkeit ist $u = (x, y)$ mit $x \neq 0$. Wegen $ux^{-1} = (1, yx^{-1})$ können wir auch $x = 1$ annehmen, und schreiben $u = (1, s)$. Weiter ist $v + uK$ nicht parallel zu $(0, 1)K$, also existiert $t \in K$ mit $(0, t) \in v + uK$, und es folgt

$$v + uK = (0, t) + (1, s)K = \{(x, sx + t) : x \in K\}.$$

Damit haben wir wie bei der Zeichenebene eine alternative Beschreibung unserer affinen Koordinatenebene gefunden. Explizit haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= K \times K, \\ \mathfrak{L} &= K^2 \cup K, \\ I &= \{((c, y), c) : c, y \in K\} \cup \{((x, sx + t), (s, t)) : s, t, x \in K\}. \end{aligned}$$

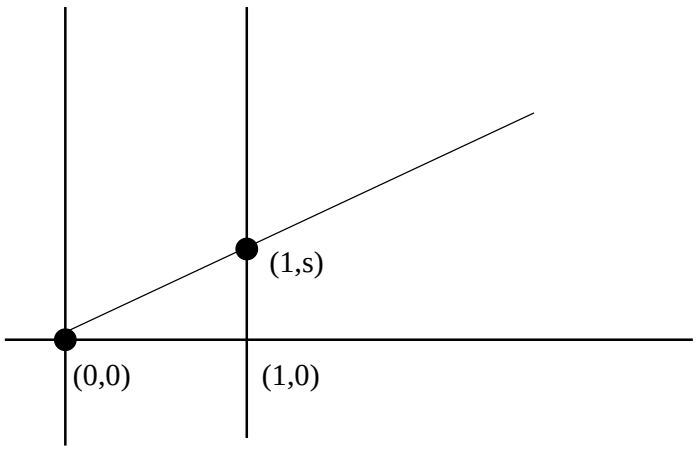
Tatsächlich können wir überhaupt jede affine Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ so darstellen, daß die Punktmenge ein Produkt $K \times K$ ist, und alle Vertikalen Geraden sind. Dies ist leicht zu sehen. Nach Lemma 2 gibt es eine Menge K, die zu jeder Parallelschar und zu jeder Geraden gleichmächtig ist. Wähle irgendeine Parallelschar aus. Für jede Gerade l aus dieser Parallelschar, wählen wir eine Bijektion von K mit l. Auf diese Weise erhalten wir eine Bijektion von $\mathfrak{P}$ auf $K \times K$, und unsere zu Beginn gewählte Parallelschar wird zur Menge $\{\{c\} \times K : c \in K\}$ der Vertikalen.

An dieser Stelle drängt sich eine Frage auf: Wie sehen affine Ebenen aus, deren Punktmenge ein Produkt $\mathfrak{P} = K \times K$ ist, so daß alle Vertikalen $\{c\} \times K$ $(c \in K)$ Geraden sind?

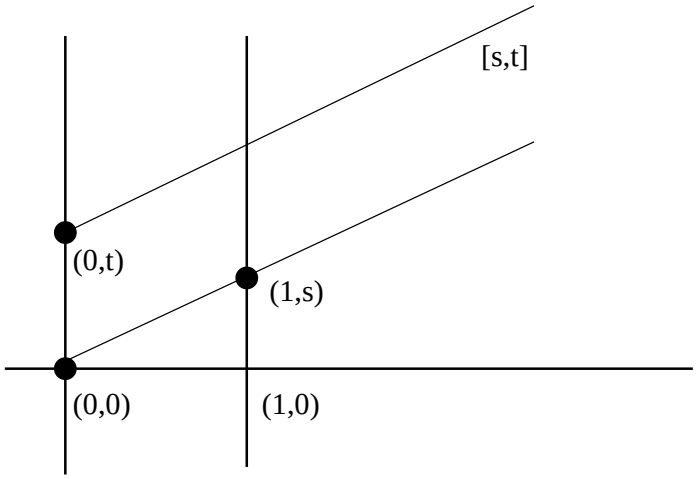
Seien also K eine Menge und $(K \times K, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene mit $\{c\} \times K \in \mathfrak{L}$ für jedes $c \in K$. Da auf jeder Geraden mindestens zwei Punkte liegen, muss zumindest $|K| \geq 2$ sein. Weiter sind die vertikalen Geraden offenbar paarweise parallel, und sie überdecken die ganze Punktmenge. Also muss $\{\{c\} \times K : c \in K\}$ eine Parallelschar sein. Wie sehen jetzt die nicht vertikalen Geraden aus? Ist $l \in \mathfrak{L}$ nicht vertikal, so gilt für jedes $x \in K$ auch $l \not\parallel \{x\} \times K$, d.h. es existiert genau ein $f(x) \in K$ mit $(x, f(x)) \in l$. Anders gesagt ist l der Graph einer Funktion $f : K \to K$, d.h. die nicht vertikalen Geraden sind Graphen von Funktionen. Wir wollen die Gerade l wieder durch Steigung und Achsenabschnitt beschreiben. Hierzu wählen wir zwei Elemente $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$. Diese werden wir zur Normierung der Steigung benötigen.

Wir wollen die nicht vertikalen Geraden parametrisieren. Dies machen wir in zwei Schritten, zuerst parametrisiere die Menge der nicht vertikalen Parallelscharen und anschliessend koordinatisiere die einzelnen Parallelscharen durch. Nach Lemma 1.(c) enthält jede Parallelschar genau eine Gerade, die durch $(0, 0)$ geht. Damit entsprechen die nicht vertikalen Parallelscharen bijektiv den nicht vertikalen Geraden durch $(0, 0)$.

Ist $s \in K$ so ist $(0, 0) \vee (1, s)$ eine nicht vertikale Gerade durch $(0, 0)$, und wir bezeichnen die zugehörige Parallelschar mit C_s. Ist l umgekehrt eine nicht vertikale Gerade mit $(0, 0) \in l$, so wissen wir bereits das genau ein $s \in K$ mit $(1, s) \in l$ existiert, und es ist $l = (0, 0) \vee (1, s)$. Also ist $s \mapsto C_s$ eine bijektive Abbildung von K auf die Menge der nicht vertikalen Parallelscharen. Wir denken uns s als die gemeinsame Steigung der Geraden aus C_s.



Sei jetzt $s \in K$ eine fixierte Steigung. Wir wollen die Geraden der Parallelschar C_s beschreiben. Ist $t \in K$, so gibt es genau eine Gerade $[s,t] \in C_s \subseteq \mathfrak{L}$ mit $(0,t) \in [s,t]$. Umgekehrt ist eine Gerade $l \in C_s$ nicht parallel zu $\{0\} \times K$, und somit existiert genau ein $t \in K$ mit $(0,t) \in l$, d.h. $l = [s,t]$.



Insgesamt haben wir damit eine Bijektion $K^2 \cup K \to \mathfrak{L}$ mit

$$\begin{aligned} c &\mapsto [c] := \{c\} \times K = \{(c,y) : y \in K\}, \\ (s,t) &\mapsto [s,t] := \text{Die Parallele zu } (0,0) \vee (1,s) \text{ durch } (0,t). \end{aligned}$$

Sind $s,t \in K$, so können wir die Gerade $[s,t]$ durch eine Funktion $f_{st} : K \to K$ beschreiben

$$[s,t] = \{(x, f_{st}(x)) : x \in K\},$$

explizit ist einfach

$$f_{st}(x) := \mathrm{pr}_2([s,t] \wedge [x]).$$

Es ist nützlich all die Funktionen f_{st} in einer einzigen Funktion zusammenzufassen, indem wir s,t als Argumente auffassen, d.h. wir betrachten die Abbildung

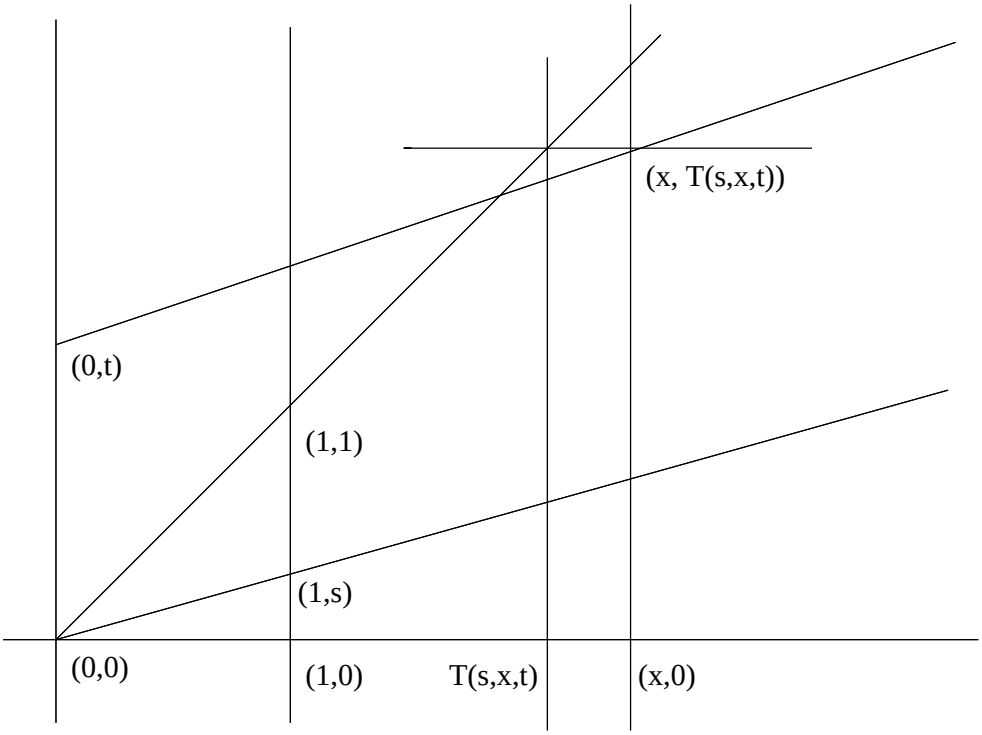
$$T : K^3 \to K; (s,x,t) \mapsto f_{st}(x).$$

In Lemma 1.(a) hatten wir die Parallele zu einer Geraden l durch einen Punkt p mit pl bezeichnet. Damit wird

$$[s,t] = (0,t)((0,0) \vee (1,s)),$$

und es folgt für jedes $x \in K$ die Gleichung

$$T(s,x,t) = \mathrm{pr}_2(((0,t)((0,0) \vee (1,s))) \wedge [x]).$$



Zur späteren Referenz wollen wir diese Überlegungen in einem Lemma zusammenfassen.

Lemma 4: *Seien K eine Menge und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(K \times K)$ mit $\{\{c\} \times K : c \in K\} \subseteq \mathfrak{L}$ so, daß $(K \times K, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene ist. Seien $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$ und definiere*

$$T : K^3 \to K; (s, x, t) \mapsto \mathrm{pr}_2(((0, t)((0, 0) \vee (1, s))) \wedge [x]).$$

Dann ist die Abbildung

$$\psi : K^2 \cup K \to \mathfrak{L}; \begin{array}{l} c \mapsto [c] := \{(c, y) : y \in K\} \quad (c \in K), \\ (s, t) \mapsto [s, t] := \{(x, T(s, x, t)) : x \in K\} \quad (s, t \in K) \end{array}$$

bijektiv. Sind $s, s', t, t' \in K$, so ist genau dann $[s, t] \parallel [s', t']$, wenn $s = s'$ ist. Es gilt

$$\forall (s, t \in K) : T(s, 0, t) = t,\ T(s, 1, 0) = s.$$

Beweis: Bis auf die letzte Behauptung haben wir bereits alles eingesehen. Seien also $s, t \in K$ gegeben. Es ist

$$\begin{array}{rcl} T(s, 0, t) & = & \mathrm{pr}_2(((0, t) \parallel ((0, 0) \vee (1, s))) \wedge [0]) = \mathrm{pr}_2(0, t) = t, \\ T(s, 1, 0) & = & \mathrm{pr}_2(((0, 0) \parallel ((0, 0) \vee (1, s))) \wedge [1]) \\ & = & \mathrm{pr}_2(((0, 0) \vee (1, s)) \wedge [1]) = \mathrm{pr}_2(1, s) = s. \end{array}$$

■

Wir können unsere Beschreibung der affinen Ebene $(K \times K, \mathfrak{L})$ noch etwas weiter normieren. Indem wir jede vertikale Gerade geeignet permutieren können wir $(0,0) \vee (1,0) = K \times \{0\}$ erreichen. Durch weiteres Umbenennen können wir es für jedes $t \in K$ auch einrichten das $K \times \{t\}$ die Parallele zu $K \times \{0\}$ durch $(0,t)$ ist. Tatsächlich haben wir noch Platz für eine weitere Normierung. Betrachte die Gerade $(0,0) \vee (1,1)$. Wir haben eine Abbildung $f : K \to K$ mit

$$(0,0) \vee (1,1) = \{(x, f(x)) : x \in K\},$$

da die nicht vertikalen Geraden Graphen von Funktionen sind. Da auch die waagerechten Geraden $K \times \{c\}$ $(c \in K)$ eine Parallelschar bilden, gibt es zu jedem $y \in K$ genau ein $x \in K$ mit $f(x) = y$, d.h. f ist bijektiv. Weiter ist $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Die bijektive Abbildung $K^2 \to K^2; (x,y) \mapsto (x, f^{-1}(y))$ erhält die waagerechte und die vertikale Parallelschar, und überführt $(0,0) \vee (1,1)$ in die Diagonale $\{(x,x) : x \in K\}$. Also können wir auch $\{(x,x) : x \in K\} \in \mathfrak{L}$ erzwingen. Diese Einschränkungen lassen sich auch gut in Termen von T ausdrücken.

Lemma 5: *Seien K, $\mathfrak{L}$ und T wie in Lemma 4. Dann gelten:*

(a) *Genau dann ist $K \times \{c\} \in \mathfrak{L}$ für jedes $c \in K$ wenn $T(0,x,t) = t$ für alle $t, x \in K$ gilt.*

(b) *Genau dann ist $\{(x,x) : x \in K\} \in \mathfrak{L}$, wenn $T(1,x,0) = x$ für alle $x \in K$ gilt.*

Beweis: **(a)** "$\Longrightarrow$" Seien $x, t \in K$. Dann gilt

$$T(0,x,t) = \mathrm{pr}_2(((0,t)((0,0) \vee (1,0))) \wedge [x]) = \mathrm{pr}_2((K \times \{t\}) \wedge [x]) = \mathrm{pr}_2(x,t) = t.$$

"$\Longleftarrow$" Sei $t \in K$. Dann ist

$$[0,t] = \{(x, T(0,x,t)) : x \in K\} = \{(x,t) : x \in K\} = K \times \{t\},$$

also ist $K \times \{t\} \in \mathfrak{L}$.
(b) "$\Longrightarrow$" Sei $x \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(1,x,0) &= \mathrm{pr}_2(((0,0)((0,0) \vee (1,1))) \wedge [x]) \\ &= \mathrm{pr}_2(((0,0) \vee (1,1)) \wedge [x]) = \mathrm{pr}_2(x,x) = x. \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$" Es ist

$$\{(x,x) : x \in K\} = \{(x, T(1,x,0)) : x \in K\} = [1,0] \in \mathfrak{L}.$$

■

Nicht jedes willkürliche T liefert auch eine affine Ebene. Allerdings lassen sich die notwendigen Bedingungen an T genau angeben, und dies soll im folgenden Satz geschehen.

Satz 6: *Seien K eine Menge, $0,1 \in K$ mit $0 \neq 1$ und $T : K^3 \to K$ eine Abbildung mit*

$$(T0) \quad \forall(s,x,t \in K) : T(0,x,t) = t,\ T(s,0,t) = t,\ T(1,x,0) = x,\ T(s,1,0) = s.$$

Wir definieren eine Inzidenzstruktur

$$A(K,T) := (K^2, K^2 \cup K, I)$$

mit der Inzidenzrelation I definiert durch

$$\begin{array}{ll} (x,y)I[c] \iff x = c & (x,y,c \in K), \\ (x,y)I[s,t] \iff y = T(s,x,t) & (x,y,s,t \in K). \end{array}$$

Dabei schreiben wir wieder $[c]$, $[s,t]$ für Elemente von K beziehungsweise K^2 aufgefasst als Geraden. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) *Die Inzidenzstruktur $A(K,T)$ ist eine affine Ebene mit*

$$\forall(s,s',t,t' \in K) : [s,t] \parallel [s',t'] \iff s = s'.$$

(b) *Die Abbildung T erfüllt die folgenden drei Bedingungen:*

(T1) $\forall(x_1,x_2,y_1,y_2 \in K, x_1 \neq x_2)\exists^1((s,t) \in K^2)\forall(i \in \{1,2\}) : T(s,x_i,t) = y_i.$

(T2) $\forall(s_1,s_2,t_1,t_2 \in K, s_1 \neq s_2)\exists(x \in K) : T(s_1,x,t_1) = T(s_2,x,t_2).$

(T3) $\forall(s,x,y \in K)\exists^1(t \in K) : T(s,x,t) = y.$

Beweis: (a)$\Longrightarrow$(b): Wir weisen die drei Eigenschaften nach.
(T1) Seien also $x_1,x_2,y_1,y_2 \in K$ mit $x_1 \neq x_2$ gegeben. Dann sind $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$ zwei verschiedene Punkte der affinen Ebene $A(K,T)$ und besitzen somit eine eindeutige Verbindungsgerade. Da für jedes $c \in K$ offenbar $((x_1,y_1),[c]) \notin I$ oder $((x_2,y_2),[c]) \notin I$ ist, gibt es genau ein $(s,t) \in K^2$ mit $(x_1,y_1),(x_2,y_2)I[s,t]$. Für $i \in \{1,2\}$ ist $(x_i,y_i)I[s,t]$ gleichbedeutend zu $y_i = T(s,x_i,t)$.
(T2) Seien $s_1,s_2,t_1,t_2 \in K$ mit $s_1 \neq s_2$. Nach unserer Voraussetzung ist dann $[s_1,t_1] \not\parallel [s_2,t_2]$, also existiert $(x,y) \in K^2$ mit $(x,y)I[s_1,t_1],[s_2,t_2]$. Es folgt $T(s_1,x,t_1) = y = T(s_2,x,t_2)$.
(T3) Seien wieder $s,x,y \in K$ gegeben. Dann gibt es genau ein $l \in K^2 \cup K$ mit $(x,y)Il$ und $l \parallel [s,0]$. Ist $c \in K$, so ist $(c,T(s,c,0))I[c],[s,0]$, und insbesondere $[c] \not\parallel [s,0]$. Also ist $l \in K^2$, und damit existiert $t \in K$ mit $l = [s,t]$. Es folgt $T(s,x,t) = y$. Ist $t' \in K$ ebenfalls mit $T(s,x,t') = y$, so ist $(x,y)I[s,t'] \parallel [s,0]$, also $l = [s,t']$ und $t' = t$.
(b)$\Longrightarrow$(a): Wir beginnen mit dem Nachweis des Verbindungsaxioms (V). Seien zunächst x_1, x_2, y_1, $y_2 \in K$ mit $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$ gegeben. Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle.

Fall 1: Sei $x_1 = x_2$. Dann ist $y_1 \neq y_2$. Sind also $s, t \in K$, so gilt $T(s, x_1, t) \neq y_1$ oder $T(s, x_2, t) = T(s, x_1, t) \neq y_2$, d.h. (x_1, y_1) oder (x_2, y_2) liegt nicht auf $[s, t]$. Damit ist $[x_1] = [x_2]$ die eindeutige Verbindungsgerade in $A(K, T)$.
Fall 2: Jetzt sei $x_1 \neq x_2$ vorausgesetzt. Dann liegen die beiden Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) nicht auf einer gemeinsamen vertikalen Geraden. Für $(s, t) \in K^2$ ist genau dann $(x_1, y_1), (x_2, y_2) I [s, t]$, wenn $T(s, x_1, t) = y_1$ und $T(s, x_2, t) = y_2$ gelten, d.h. (T1) liefert die Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgerade in diesem Fall.

Jetzt kommen wir zum Parallelenaxiom (P). Seien $c, s, t \in K$. Dann ist

$$(c, T(s, c, t)) I [c] \quad \text{und} \quad (c, T(s, c, t)) I [s, t],$$

d.h. $[c]$ und $[s, t]$ sind verschieden und schneiden sich. Sind $s_1, s_2, t_1, t_2 \in K$ mit $s_1 \neq s_2$, so gibt es nach (T2) ein $x \in K$ mit $T(s_1, x, t_1) = T(s_2, x, t_2)$, und es ist $(x, T(s_1, x, t_1)) = (x, T(s_2, x, t_2)) I [s_1, t_1], [s_2, t_2]$, d.h. auch $[s_1, t_1]$, $[s_2, t_2]$ sind verschieden aber nicht disjunkt. Sind dagegen $s, t, t' \in K$ mit $t \neq t'$, so ergibt die Eindeutigkeitsaussage in (T3) auch $T(s, x, t) \neq T(s, x t')$ für jedes $x \in K$, d.h. $[s, t]$ und $[s, t']$ haben keinen Schnittpunkt. Seien jetzt $(x, y) \in K^2$ und $l \in K^2 \cup K$ gegeben und (x, y) liege nicht auf l. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.
Fall 1: Sei $l \in K$, d.h. $l = [c]$ für ein $c \in K$. Dann ist $x \neq c$ und $[x]$ ist die eindeutige Gerade durch (x, y) disjunkt zu $[c]$.
Fall 2: Jetzt sei $l \in K^2$, d.h. es gibt $s, t \in K$ mit $l = [s, t]$. Es ist $T(s, x, t) \neq y$. Die einzigen zu l disjunkten Geraden sind die Geraden der Form $[s, t']$ mit $t' \neq t$. Also ist zu zeigen das es genau ein $t' \in K \backslash \{t\}$ mit $T(s, x, t') = y$ gibt. Nach (T3) gibt es genau ein $t' \in K$ mit $T(s, x, t') = y$, und wegen $T(s, x, t) \neq y$ ist auch $t' \neq t$.

Damit ist das Parallelenaxiom gezeigt, es bleibt nur die Reichhaltigkeitsaussage (RD) zu beweisen. Wegen $0 \neq 1$ sind die drei Punkt $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ paarweise verschieden. Es ist $(0, 0) \vee (0, 1) = [0]$ und $(1, 0)$ liegt nicht auf $[0]$, d.h. die drei Punkte sind nicht kollinear.

■

Wir fassen die im Satz genannten vier Bedingungen an T jetzt in einer Definition zusammen.

Definition 4: Ein Ternärkörper (K, T) ist ein Paar bestehend aus einer Menge K und einer dreistelligen Verknüpfung $T : K^3 \to K$, die die folgenden vier Axiome erfüllt:

(T0) Es gibt $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$ so, daß $T(0, x, t) = t$, $T(s, 0, t) = t$, $T(1, x, 0) = x$ und $T(s, 1, 0) = s$ für alle $s, x, t \in K$ gelten.

(T1) $\forall (x_1, x_2, y_1, y_2 \in K, x_1 \neq x_2) \exists^1 ((s, t) \in K^2) \forall (i \in \{1, 2\}) : T(s, x_i, t) = y_i$.

(T2) $\forall (s_1, s_2, t_1, t_2 \in K, s_1 \neq s_2) \exists (x \in K) : T(s_1, x, t_1) = T(s_2, x, t_2)$.

(T3) $\forall (s, x, y \in K) \exists^1 (t \in K) : T(s, x, t) = y$.

Die Elemente 0 und 1 aus (T0) heißen die Null und die Eins des Ternärkörpers.

Mit diesem neuen Begriff fassen wir unsere bisherigen Überlegungen in einem Satz zusammen.

Satz 7: *Seien K eine Menge und $\pi = (K \times K, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene mit*

1. *Für jedes $c \in K$ ist $\{c\} \times K \in \mathfrak{L}$.*
2. *Für jedes $c \in K$ ist $K \times \{c\} \in \mathfrak{L}$.*
3. *Es ist $\{(x,x) : x \in K\} \in \mathfrak{L}$.*

Wähle $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$. Dann wird durch

$$T : K^3 \to K; (s,x,t) \mapsto \mathrm{pr}_2(((0,t)((0,0) \vee (1,s))) \wedge [x])$$

ein Ternärkörper (K,T) mit Null 0 und Eins 1 definiert. Ist

$$\psi : K^2 \cup K \to \mathfrak{L};\ \begin{array}{l}[c] \mapsto \{(c,y) : y \in K\} \quad (c \in K),\\ [s,t] \mapsto \{(x, T(s,x,t)) : x \in K\} \quad (s,t \in K),\end{array}$$

so ist $(\mathrm{id}_{K\times K}, \psi) : A(K,T) \to \pi$ ein Isomorphismus.

Beweis: Nach Lemma 4 gilt $T(s,0,t) = t$ und $T(s,1,0) = s$ für alle $s,t \in K$, und die Abbildung ψ ist bijektiv. Definieren wir die Inzidenz $I \subseteq (K \times K) \times (K^2 \cup K)$ wie in Satz 6, so wird $(\mathrm{id}_{K\times K}, \psi) : A(K,T) = (K \times K, K^2 \cup K, I) \to \pi$ ein Isomorphismus. Nach Lemma 5 gelten auch $T(0,x,t) = t$ und $T(1,x,0) = x$ für $x,t \in K$, d.h. (T0) ist erfüllt. Weiter ist $A(K,T)$ zu einer affinen Ebene isomorph, und ist somit selbst eine affine Ebene. Außerdem gilt für $s,s',t,t' \in K$ noch

$$[s,t] \parallel [s',t'] \iff \psi(s,t) \parallel \psi(s',t') \iff s = s'.$$

Nach Satz 6 gelten (T1,T2,T3), d.h. (K,T) ist ein Ternärkörper.

■

Einen Ternärkörper kann man als eine sehr schwache algebraische Struktur auffassen. Der Begriff ist allerdings nicht ausreichend um eine weiterführende Theorie damit aufzubauen, es gibt einige Arbeiten die tatsächlich von allgemeinen Ternärkörpern handeln, aber dies ist selten, und wird innerhalb dieser Vorlesung auch nicht vorkommen. Wir stellen uns Ternärkörper eher als einen allgemeinen Rahmenbegriff vor, in dem wir nach spezielleren Strukturen suchen.

Was kennen wir bisher überhaupt für Ternärkörper? Nun angefangen hatten wir mit der affinen Koordinatenebene über einem Schiefkörper. Ist K ein Schiefkörper, so hat A_2K die Punktmenge $K \times K$, alle Vertikalen sind Geraden, die Waagerechten $K \times \{c\}$ sind Geraden der Steigung Null, und die Diagonale $\{(x,x) : x \in K\}$ ist eine Gerade mit Steigung 1. Also erhalten wir aus K einen Ternärkörper. Sind $s,t \in K$,

so ist $\{(x, sx + t) : x \in K\}$ die zu $(0,0) \vee (1,s) = \{(x, sx) : x \in K\}$ parallele Gerade durch $(0,t)$, d.h. es ist

$$T(s,x,t) = sx + t$$

für alle $s, x, t \in K$. Auf diese Weise liefert jeder Schiefkörper einen Ternärkörper (K,T) mit $A_2K \simeq A(K,T)$. Da die Punktabbildung dieses Isomorphismus einfach die Identität ist, schreiben wir auch etwas verkürzend $A_2K = A(K,T)$. Wir können die Addition und Multiplikation des Schiefkörpers aus T zurückgewinnen durch

$$x + t = T(1,x,t), \quad sx = T(s,x,0).$$

Wir werden gleich zeigen, daß Null und Eins eines Ternärkörpers eindeutig bestimmt sind, und damit folgt, daß additive und multiplikative Struktur eines Schiefkörpers eindeutig durch die ternäre Verknüpfung T festgelegt. In diesem Sinne können wir davon reden, daß ein Schiefkörper ein spezieller Ternärkörper ist.

Wie bei einem Schiefkörper lassen sich immer Addition und Multiplikation eines allgemeinen Ternärkörpers definieren, allerdings ergeben sich keine Gruppen mehr. Wir erhalten nur noch sogenannte Loops im Sinne der folgenden Definition:

Definition 5: Eine Quasigruppe ist ein Paar $(Q, \cdot)$ bestehend aus einer Menge Q und einer Abbildung $\cdot : Q \times Q \to Q$, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(a) Sind $a, b \in Q$, so existiert genau ein $x \in Q$ mit $ax = b$.

(b) Sind $a, b \in Q$, so existiert genau ein $x \in Q$ mit $xa = b$.

Eine Loop ist eine Quasigruppe $(L, \cdot)$ die ein neutrales Element besitzt, d.h. es soll ein $e \in L$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in L$ geben.

Mit dieser Bezeichnung haben wir das folgende Lemma:

Lemma 8: *Sei (K,T) ein Ternärkörper.*

(a) *Die Null und die Eins von (K,T) sind eindeutig bestimmt.*

(b) *Sind $s_1, s_2, t_1, t_2 \in K$ mit $s_1 \neq s_2$, so existiert genau ein $x \in K$ mit $T(s_1, x, t_1) = T(s_2, x, t_2)$.*

(c) *Definieren wir*

$$+ : K \times K \to K; (x,y) \mapsto T(1,x,y),$$

so ist $(K,+)$ eine Loop mit neutralem Element 0.

(d) *Definieren wir*

$$\cdot : K \times K \to K; (x,y) \mapsto T(x,y,0),$$

so ist $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ eine Loop mit neutralem Element 1, und es gilt $0x = x0 = 0$ für jedes $x \in K$.

Beweis: **(a)** Seien $(0,1)$ und $(0',1')$ zwei Null–Eins Paare, d.h. (T0) soll für beide gelten. Dann haben wir

$$0 = T(0,1',0') = 0',$$

und

$$1 = T(1,1',0') = T(1,1',0) = 1'.$$

(b) Die Existenz eines solchen $x \in K$ ist direkt das Axiom (T2). Ist $x' \in K$ mit $x' \neq x$, so ergeben $(s_1,t_1) \neq (s_2,t_2)$ und die Eindeutigkeitsaussage in (T1), daß $T(s_1,x,t_1) \neq T(s_2,x,t_2)$ oder $T(s_1,x',t_1) \neq T(s_2,x',t_2)$ ist, d.h. es muss $T(s_1,x',t_1) \neq T(s_2,x',t_2)$ gelten. Damit haben wir die Eindeutigkeit von x eingesehen.
(c) Seien $a,b \in K$ gegeben. Wegen $1 \neq 0$ gibt es nach (b) genau ein $x \in K$ mit $T(1,x,a) = T(0,x,b)$. Andererseits ist nach (T0) auch $T(0,x,b) = b$ und für jedes $x \in K$ gilt $x + a = T(1,x,a)$, d.h. es gibt genau ein $x \in K$ mit $x + a = b$.

Ebenso gibt es nach (T3) genau ein $x \in K$ mit $a + x = T(1,a,x) = b$. Also ist $(K,+)$ zumindest eine Quasigruppe.

Schließlich gelten für jedes $x \in K$ noch $0 + x = T(1,0,x) = x$ und $x + 0 = T(1,x,0) = x$ nach (T0).
(d) Zunächst gilt für jedes $x \in K$ wieder nach (T0) $0x = T(0,x,0) = 0$, $x0 = T(x,0,0) = 0$, $1x = T(1,x,0) = x$ und $x1 = T(x,1,0) = x$. Wir müssen insbesondere einsehen, daß $ab \neq 0$ ist, wenn $a,b \in K\backslash\{0\}$ sind. Sei $a \in K$ mit $a \neq 0$ gegeben. Sei $b \in K$. Es ist $a \neq 0$, also existiert nach (b) genau ein $x \in K$ mit $ax = T(a,x,0) = T(0,x,b) = b$. Wegen $a0 = 0$ ergibt die Eindeutigkeitsaussage insbesondere $ab \neq 0$ für $b \in K$ mit $b \neq 0$. Ist $b \in K\backslash\{0\}$, so gibt es genau ein $x \in K$ mit $ax = b$, und wegen $a0 = 0 \neq b$ ist sicher $x \neq 0$.

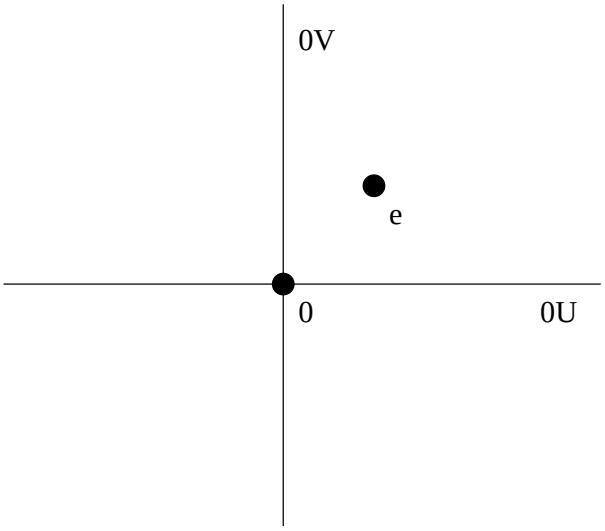
Nun zur Auflösungsbedingung von links. Wegen $a \neq 0$ existiert nach (T1) genau ein Paar $(x,t) \in K^2$ mit $T(x,a,t) = b$ und $T(x,0,t) = 0$. Es ist $0 = T(x,0,t) = t$ nach (T0), also auch $xa = T(x,a,0) = T(x,a,t) = b$. Wegen $b \neq 0$, $0a = 0$ ist auch $x \neq 0$. Ist $y \in K\backslash\{0\}$ ebenfalls mit $ya = b$, so gelten $T(y,a,0) = ya = b$ und $T(y,0,0) = 0$, d.h. $(y,0) = (x,t)$, und somit $y = x$.

■

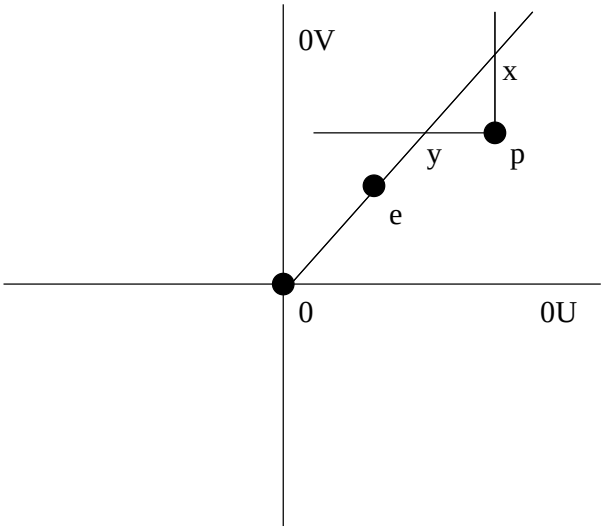
Wir haben jedem Ternärkörper eine affine Ebene zugeordnet, und haben auch gesehen das auf diese Weise jede affine Ebene entsteht, zumindest bis auf Isomorphie. Diesen letzten Punkt wollen jetzt etwas expliziter behandeln, indem wir die Koordinatisierung direkt angeben. Wir beginnen mit einer Definition:

Definition 6: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine affine Ebene. Sind $X \subseteq \mathfrak{L}$ eine Parallelschar und $p \in \mathfrak{P}$ ein Punkt, so schreiben wir $pX \in \mathfrak{L}$ für die Gerade aus X, die durch p geht.

Ein Koordinatensystem von π ist ein Tupel $(0,e,U,V)$ bestehend aus zwei Punkten $0,e \in \mathfrak{P}$ und zwei verschiedenen Parallelscharen $U,V \subseteq \mathfrak{L}$ mit $(e,0U),(e,0V) \notin I$. Wir nennen 0 den Ursprung, U die horizontale und V die vertikale Richtung.



Koordinatensysteme dienen zur Einführung von Koordinaten. Wir verwenden als Koordinatenmenge die Diagonale $0 \vee e$ des Koordinatensystems. Für einen Punkt $p \in \mathfrak{P}$ bilden wir die senkrechte Gerade pV durch p, und schneiden diese mit der Diagonalen. Der Schnittpunkt ist dann die x-Koordinate. Bilden wir analog die waagerechte Gerade pU, so ist ihr Schnittpunkt mit der Diagonalen die y-Koordinate.



Daß dies alles funktioniert ist der Inhalt des folgenden Satzes über die Koordinatisierung affiner Ebenen.

Satz 9: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene. Dann gibt es ein Koordinatensystem in π. Sei $(0, e, U, V)$ ein Koordinatensystem von π. Wir setzen $K := 0 \vee e$. Dann ist $K \notin U$ und $K \notin V$, und die Abbildung*

$$\eta : \mathfrak{P} \to K \times K; p \mapsto (K \wedge pV, K \wedge pU)$$

ist bijektiv. Weiter definiert

$$T : K^3 \to K; (s, x, t) \mapsto (((0V \wedge tU)(0 \vee (eV \wedge sU))) \wedge xV)U \wedge K$$

eine Abbildung und (K, T) *ist ein Ternärkörper mit Null* 0 *und Eins* e*. Die Koordinatenabbildung* $\eta : \pi \to A(K, T)$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Wir beginnen mit der Existenz eines Koordinatensystems. Nach (RD) gibt es überhaupt einen Punkt $0 \in \mathfrak{P}$. Nach Lemma 2.(d) gehen durch 0 mindestens drei Geraden. Also existieren paarweise verschiedene $X, Y, K \in \mathfrak{L}_0$. Seien U die Parallelschar von X und V die von Y. Dann ist $U \neq V$, $0U = X$ und $0V = Y$. Nach Lemma 2.(b) liegen auf K mindestens zwei Punkt, also gibt es einen Punkt $e \in K$ mit $e \neq 0$. Wegen $K \cap X = K \cap Y = \{0\}$ ist $e \notin X \cup Y = 0U \cup 0V$. Also ist $(0, e, U, V)$ ein Koordinatensystem.

Ab jetzt sei ein Koordinatensystem $(0, e, U, V)$ vorgegeben, und setze $K := 0 \vee e$. Wegen $e \notin 0U \cup 0V$ ist $K \neq 0U$ und $K \neq 0V$, also $K \notin U, V$. Ist $p \in \mathfrak{P}$, so ist damit insbesondere $K \not\parallel pV$ und $K \not\parallel pU$, d.h. wir haben eindeutige Schnittpunkte $K \wedge pV$, $K \wedge pU$. Also ist $\eta : \mathfrak{P} \to K \times K$ eine wohldefinierte Abbildung.

Wir konstruieren jetzt die Umkehrabbildung zu η. Sind $x, y \in K$, so ist $xV \not\parallel yU$, da $U \neq V$ ist, und wir erhalten einen eindeutigen Schnittpunkt

$$\psi(x, y) := xV \wedge yU \in \mathfrak{P}.$$

Dies definiert eine Abbildung $\psi : K \times K \to \mathfrak{P}$. Sei $p \in \mathfrak{P}$. Dann ist

$$(K \wedge pV)V = pV, \quad \text{und} \quad (K \wedge pU)U = pU,$$

und es folgt

$$\psi(\eta(p)) = \psi(K \wedge pV, K \wedge pU) = pV \wedge pU = p.$$

Also ist $\psi\eta = \mathrm{id}$. Jetzt seien $x, y \in K$. Dann gilt

$$K \wedge (xV \wedge yU)V = K \wedge xV = x$$

und ebenso $K \wedge (xV \wedge yU)U = y$, d.h.

$$\eta(\psi(x, y)) = (K \wedge (xV \wedge yU)V, K \wedge (xV \wedge yU)U) = (x, y).$$

Also ist auch $\eta\psi = \mathrm{id}$, d.h. η ist bijektiv mit $\eta^{-1} = \psi$.

Definieren wir also

$$\mathfrak{L}' := \{\eta(l) : l \in \mathfrak{L}\},$$

so ist

$$\pi' := (K \times K, \mathfrak{L}')$$

eine affine Ebene, und $\eta : \pi \to \pi'$ ist ein Isomorphismus. Wir zeigen jetzt, daß die affine Ebene π' die Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt. Sei $c \in K$. Für jedes $p \in cV$ gilt

$$\eta(p) = (K \wedge pV, K \wedge pU) = (K \wedge cV, K \wedge pU) = (c, K \wedge pU) \in \{c\} \times K.$$

Ist andererseits $y \in K$, so folgt $\psi(c,y) = cV \wedge yU \in cV$, d.h. $(c,y) = \eta(\psi(c,y)) \in \eta(cV)$. Also ist $\{c\} \times K = \eta(cV) \in \mathfrak{L}'$. Analog folgt $K \times \{c\} = \eta(cU) \in \mathfrak{L}'$. Schließlich gilt für jedes $x \in K$ die Gleichung

$$\eta(x) = (K \wedge xV, K \wedge xU) = (x,x),$$

d.h.

$$\{(x,x) : x \in K\} = \eta(K) \in \mathfrak{L}'.$$

Weiter haben wir die Punkte $0, e \in K$ mit $0 \neq e$. Nach Satz 7 ist

$$T : K^3 \to K; (s,x,t) \mapsto \mathrm{pr}_2(((0,t)((0,0) \vee (e,s))) \wedge [x])$$

eine wohldefinierte Abbildung, (K,T) ist ein Ternärkörper mit Null 0 und Eins e, und die Identität ist die Punktabbildung eines Isomorphismus $\pi' \to A(K,T)$. Es ist also nur noch zu zeigen, daß T die in der Behauptung angegebene Abbildung ist.

Seien $s,x,t \in K$. Es ist $\psi(0,t) = 0V \wedge tU$ und $\psi(e,s) = eV \wedge sU$. Es folgen $\psi((0,0) \vee (1,s)) = 0 \vee (eV \wedge sU)$ und $\psi((0,t)((0,0) \vee (1,s))) = (0V \wedge tU)(0 \vee (eV \wedge sU))$. Weiter ist $\psi([x]) = \psi(\{x\} \times K) = xV$. Insgesamt ist somit

$$\begin{aligned} T(s,x,t) &= \mathrm{pr}_2(\eta(\psi(((0,t)((0,0) \vee (1,s))) \wedge [x]))) \\ &= (((0V \wedge tU)(0 \vee (eV \wedge sU))) \wedge xV)U \wedge K. \end{aligned}$$

■

Wir haben jetzt jedem Ternärkörper (K,T) eine affine Ebene $A(K,T)$ zugeordnet. Umgekehrt wurde zu gegebener affiner Ebene und Koordinatensystem in dieser Ebene ein Ternärkörper (K,T) auf der Diagonale des Koordinatensystems definiert, so daß die Koordinatisierungsabbildung $\mathfrak{P} \to K \times K$ einen Isomorphismus der affinen Ebene mit $A(K,T)$ herstellt. Um diesen Zusammenhang zwischen Ternärkörper und affiner Ebene zu vervollständigen, überlegen wir uns noch kurz wie wir (K,T) aus $A(K,T)$ zurückgewinnen können. Um das entsprechende Lemma auszusprechen, führen wir noch den Isomorphiebegriff für Ternärkörper ein.

Definition 7: Seien (K,T), (K',T') zwei Ternärkörper. Ein Isomorphismus $\varphi : K \to K'$ ist eine bijektive Abbildung mit

$$T'(\varphi(s), \varphi(x), \varphi(t)) = \varphi(T(s,x,t))$$

für alle $s,x,t \in K$. Gibt es solch einen Isomorphismus, so heißen (K,T) und (K',T') isomorph.

Lemma 10: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Seien*

$$\begin{aligned} U &:= \{K \times \{c\} : c \in K\}, \\ V &:= \{\{c\} \times K : c \in K\} \end{aligned}$$

die Parallelscharen der waagerechten beziehungsweise vertikalen Geraden. Dann ist $((0,0),(1,1),U,V)$ *ein Koordinatensystem von* $A(K,T)$*. Weiter ist*

$$\varphi : K \to (0,0) \vee (1,1) = \{(x,x) : x \in K\}; x \mapsto (x,x)$$

ein Isomorphismus von (K,T) *auf den zum Koordinatensystem gehörenden Ternärkörper.*

Beweis: Daß $((0,0),(1,1),U,V)$ ein Koordinatensystem ist und die Abbildung φ bijektiv ist, ist klar. Ist T' die zum Koordinatensystem gehörende ternäre Verknüpfung, so gilt für alle $s,x,t \in K$ die Gleichung

$$\begin{aligned} T'(\varphi(s),\varphi(x),\varphi(t)) &= ((((0,0)V \wedge (t,t)U)((0,0) \vee ((1,1)V \wedge (s,s)U))) \\ &\quad \wedge (x,x)V)U \wedge ((0,0) \vee (1,1)) \\ &= (((0,t)((0,0) \vee (1,s))) \wedge (x,x)V)U \wedge [1,0] \\ &= ([s,t] \wedge [x])U \wedge [1,0] \\ &= (x, T(s,x,t))U \wedge [1,0] \\ &= (T(s,x,t), T(s,x,t)) \\ &= \varphi(T(s,x,t)). \end{aligned}$$

■

Man beachte das das Lemma nur aussagt, daß (K,T) der zu diesem speziellen Koordinatensystem gehörende Ternärkörper von $A(K,T)$ ist. Die Ternärkörper zu anderen Koordinatensystemen sind im allgemeinen nicht zu (K,T) isomorph. Insbesondere sind die zu verschiedenen Koordinatensystemen gehörenden Ternärkörper einer affinen Ebene im Allgemeinen nicht isomorph. Es ist eine interessante Frage für welche affinen Ebenen die Ternärkörper zu beliebigen Koordinatensystemen immer untereinander isomorph sind. Dieses Problem werden wir später in dieser Vorlesung noch in einem etwas anderen Rahmen behandeln. Hier wollen wir den Fall eines Schiefkörpers vollständig ausarbeiten.

Seien also K ein Schiefkörper und W ein zweidimensionaler Vektorraum über K. Nach Satz 3 haben wir die affine Ebene $\mathrm{AG}(W) = (W, \mathfrak{L})$. Was sind die Koordinatensysteme dieser Ebene? Der Satz 3 sagt, daß die Parallelscharen von $\mathrm{AG}(W)$ den eindimensionalen Teilräumen von W entsprechen. Sind $p \in W$ und $u \in W \backslash \{0\}$, so ist $p(uK) = p + uK$, wobei uK auch für die Parallelschar zu diesem eindimensionalen Teilraum steht. Wir brauchen zwei verschiedene eindimensionale Teilräume $U = uK$, $V = vK$, $u,v \in W\backslash\{0\}$, und zwei Punkte $o,e \in W$. Es soll $e \notin o + uK, o + vK$ sein, d.h. $e - o \notin uK \cup vK$. Die Diagonale ist

$$K' := o \vee e = o + (e-o)K.$$

Durch

$$x \in K \longleftrightarrow o + (e-o)x = o(1-x) + ex \in K'$$

identifizieren wir K mit K'. Wie sieht jetzt die Ternäroperation auf K aus? Seien $s, x, t \in K$ gegeben. Wegen $uK \neq vK$ ist u, v eine Basis von V, also können wir

$$e - o = u\lambda + v\mu$$

mit $\lambda, \mu \in K$ schreiben. Weiter ergibt $e - o \notin uK \cup vK$ auch $\lambda, \mu \neq 0$. Ersetzen wir u durch $u\lambda$ und v durch $v\mu$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = \mu = 1$ annehmen. Wir haben

$$T(s,x,t) = (((oV \wedge (o+(e-o)t)U)(o \vee (eV \wedge (o+(e-o)s)U))) \wedge (o+(e-o)x)V)U \wedge K'.$$

Fangen wir an diesen Ausdruck abzuarbeiten. Wir arbeiten dabei der Übersichtlichkeit halber die einzelnen Teilformeln in einer Art Tabelle ab.

(1) $o + (e-o)t$	$o + ut + vt$		(7) $o \vee (6)$	$o + (u + vs)K$
(2) $(1)U$	$o + vt + uK$		(8) $(3)(7)$	$o + vt + (u + vs)K$
(3) $oV \wedge (2)$	$o + vt$		(9) $(o + (e-o)x)V$	$o + ux + vK$
(4) $o + (e-o)s$	$o + us + vs$		(10) $(8) \wedge (9)$	$o + ux + v(sx + t)$
(5) $(4)U$	$o + vs + uK$		(11) $(10)U$	$o + v(sx + t) + uK$
(6) $eV \wedge (5)$	$e + v(s-1)$		(11) $T(s,x,t) = (10) \wedge K'$	$o + (e-o)(sx + t)$

Also haben wir

Lemma 11: *Seien K ein Schiefkörper, W ein zweidimensionaler Vektorraum über K und (o, e, U, V) ein Koordinatensystem der affinen Ebene $\mathrm{AG}(W)$. Sei $K' := o \vee e = o + (e-o)K$, und bezeichne (K', T) den Ternärkörper von $\mathrm{AG}(W)$ zu diesem Koordinatensystem. Dann ist*

$$\varphi : K \to K'; x \mapsto o + (e-o)x$$

ein Isomorphismus von Ternärkörpern.

Aufgaben zu §2

(7) Finden Sie für jedes der drei Axiome (V), (P), (RD) eine Inzidenzstruktur, die dieses Axiom nicht erfüllt und die beiden anderen Axiome erfüllt.

(8) Bestimmen Sie alle Inzidenzstrukturen $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, die die Axiome (V), (P) und

(RD′) Es gibt nicht kollineare Punkte $p, q, r \in \mathfrak{P}$.

erfüllen, aber trotzdem keine affine Ebene sind.

(9) Beschreiben Sie alle Inzidenzstrukturen π, die keine affine Ebene sind, aber die Axiome (V) und (P) erfüllen.

(10) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene von endlicher Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann $|\mathfrak{P}| = n^2$ und $|\mathfrak{L}| = n(n+1)$ gelten.

(11) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei affine Ebenen, und sei $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, daß φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn für je drei kollineare Punkte $p, q, r \in \mathfrak{P}$ auch $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ in π' kollinear sind.

(12) Zeigen Sie, daß eine zu einer affinen Ebene isomorphe Inzidenzstruktur selbst eine affine Ebene ist.

(13) Zeigen Sie, daß es bis auf Isomorphie genau eine affine Ebene der Ordnung 3 gibt.

(14) Seien K ein Schiefkörper und V ein zweidimensionaler Vektorraum über V. Seien $p_1, p_2, p_3, p_4 \in V$ so, daß keine drei dieser Punkte auf einer Geraden von $\mathrm{AG}(V)$ liegen. Es gelte $p_1 \vee p_2 \parallel p_3 \vee p_4$ und $p_1 \vee p_4 \parallel p_2 \vee p_3$. Zeigen Sie das genau dann $p_1 \vee p_3 \parallel p_2 \vee p_4$ ist, wenn $\operatorname{char} K = 2$ ist. Was bedeutet dies anschaulich?

(15) Zeigen Sie, daß die Moultonebene M_k für $k > 1$ tatsächlich eine affine Ebene ist.

(16) Sei G eine abelsche Gruppe. Eine Funktion $f : G \to G$ heißt planar, wenn für jedes $d \in G \backslash \{0\}$ die Abbildung

$$f_d : G \to G; x \mapsto f(x + d) - f(x)$$

bijektiv ist. Sei $f : G \to G$ eine Abbildung. Für $c, s, t \in G$ definieren wir

$$\begin{aligned} [c] &:= \{(c, y) : y \in G\}, \\ [s, t] &:= \{(x, f(x - s) + t) : x \in G\}. \end{aligned}$$

Weiter sei

$$I := \{(x, c) \in G^2 \times G : x \in [c]\} \cup \{(x, (s, t)) \in G^2 \times G^2 : x \in [s, t]\} \subseteq G^2 \times (G^2 \cup G).$$

Zeigen Sie, daß $(G \times G, G^2 \cup G, I)$ genau dann eine affine Ebene ist, wenn die Funktion f planar ist und $|G| \geq 2$ gilt.

(17) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß f genau dann planar ist, wenn die Ableitung f' bijektiv ist.

(18) Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen planar sind.

(a) $x \mapsto |x|^a$ für $a > 1$.

(b) $x \mapsto \cosh x$.

(19) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ ist planar. Zeigen Sie, daß die von f erzeugte affine Ebene zur affinen Koordinatenebene $A_2\mathbb{R}$ isomorph ist.

(20) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto \left(xy - \frac{1}{3}x^3, \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}x^4 \right)$$

planar ist.

(21) Sei $k > 1$ eine reelle Zahl. In der Moulton-Ebene M_k aus Aufgabe (15) betrachten wir die Parallelscharen

$$\begin{aligned} U &:= \{[0, t] : t \in \mathbb{R}\}, \\ V &:= \{[c] : c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $(o = (0, 0), e = (1, 1), U, V)$ ein Koordinatensystem von M_k ist, und berechnen Sie den Ternärkörper von M_k bezüglich dieses Koordinatensystems.

(22) Mit den Bezeichnungen der Aufgabe (21) berechnen Sie auch den Ternärkörper von M_k bezüglich des Koordinatensystems (o, e, V, U).

(23) Seien K eine endliche Menge und $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$. Sei $T : K^3 \to K$ eine Abbildung, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(a) Für alle $s, x, t \in K$ gelten $T(0, x, t) = t$, $T(s, 0, t) = t$, $T(s, 1, 0) = s$ und $T(1, x, 0) = x$.

(b) Sind $s, x, t, t' \in K$ mit $t \neq t'$, so ist $T(s, x, t) \neq T(s, x, t')$.

(c) Sind $s, s', t, t' \in K$ mit $s \neq s'$, so gibt es höchstens ein $x \in K$ mit $T(s, x, t) = T(s', x, t')$.

Dann ist (K, T) ein Ternärkörper.

(24) Seien (K, T) ein Ternärkörper und $\emptyset \neq E \subseteq K$ eine endliche Teilmenge mit $T(E^3) \subseteq E$. Dann ist entweder $E = \{0\}$ oder $(E, T|E^3)$ ist ein Ternärkörper, der Null und Eins von K enthält.

(25) Sei (K, T) ein Ternärkörper. Eine Teilmenge $K' \subseteq K$ heißt ein Unterternärkörper, wenn $T(K'^3) \subseteq K'$ gilt, und $(K', T|K'^3)$ ein Ternärkörper ist. Zeigen Sie: Ist K' ein Unterternärkörper eines Ternärkörpers K, so ist $0, 1 \in K'$.

(26) Seien (K,T) ein Ternärkörper und $K' \subseteq K$. Zeigen Sie, daß K' genau dann ein Unterternärkörper ist, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(a) Es ist $0,1 \in K'$.

(b) Sind $s,x,t \in K'$, so ist auch $T(s,x,t) \in K'$.

(c) Sind $s,t \in K$, $x_1,x_2 \in K'$ mit $x_1 \neq x_2$ und $T(s,x_i,t) \in K'$ für $i = 1,2$, so ist auch $s,t \in K'$.

(d) Sind $s_1,s_2,t_1,t_2 \in K'$ mit $s_1 \neq s_2$ und ist $x \in K$ mit $T(s_1,x,t_1) = T(s_2,x,t_2)$, so ist $x \in K'$.

(e) Sind $s,x \in K'$, $t \in K$ mit $T(s,x,t) \in K'$, so ist auch $t \in K'$.

(27) Sei K ein Schiefkörper. Zeigen Sie, daß die Unterternärkörper von K genau die Unterschiefkörper von K sind.

§3 Projektive Ebenen

Nachdem wir im letzten Paragraphen die affinen Ebenen eingeführt haben, kommen wir jetzt zu projektiven Ebenen. Wir werden im Laufe dieses Abschnitts sehen, daß diese eng mit affinen Ebenen zusammenhängen.

Definition 1: Eine projektive Ebene ist eine Inzidenzstruktur $(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$, die die folgenden drei Axiome erfüllt.

(V) Je zwei verschiedene Punkte haben eine eindeutige Verbindungsgerade.

(S) Je zwei verschiedene Geraden haben einen eindeutigen Schnittpunkt.

(RV) Es gibt vier verschiedene Punkte von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Hier ist (V) wieder unser Verbindungsaxiom, und (RV) ist eine Reichhaltigkeitsforderung. Verlangt wird die Existenz eines Vierecks im Sinne der folgenden Definition:

Definition 2: Sei $(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$ eine projektive Ebene. Ein Viereck in dieser projektiven Ebene ist ein 4-Tupel $(p_1,p_2,p_3,p_4) \in \mathfrak{P}^4$ aus vier verschiedenen Punkten von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Das Axiom (S) verlangt das sich je zwei Geraden schneiden, die Eindeutigkeit des Schnittpunkts ist ja schon in (V) enthalten. Im Unterschied zu affinen Ebenen haben Punkte und Geraden bei projektiven Ebenen denselben Stellenwert. Man sagt die Axiome sind selbstdual, d.h. man kann in ihnen die Rolle von Punkten und Geraden

vertauschen. Um dies begrifflich fassen zu können, führen wir den Begriff der dualen Inzidenzstruktur ein.

Definition 3: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Dann setzen wir

$$I^* := \{(l, p) : (p, l) \in I\} \subseteq \mathfrak{L} \times \mathfrak{P},$$

und

$$\pi^* := (\mathfrak{L}, \mathfrak{P}, I^*)$$

heißt die zu π duale Inzidenzstruktur.

Die Punkte der dualen Struktur sind also die Geraden der Originalstruktur, und ihre Geraden sind die alten Punkte. Ist $p \in \mathfrak{P}$ und $l \in \mathfrak{L}$ so liegt p in π genau dann auf l, wenn in π^* die Gerade p durch l geht. Aus Aussagen über π erhält man Aussagen über π^* indem die Rolle von Punkten und Geraden vertauscht wird. Dieser Vertauschungsprozeß liefert zum Beispiel die folgenden Übersetzungen:

Aussage in π	Aussage in π^*
l ist Verbindungsgerade von p und q	l ist Schnittpunkt von p und q
p ist Schnittpunkt von g und h	p ist Verbindungsgerade von g und h
Punktreihe von l	Geradenbüschel durch l
Geradenbüschel durch p	Punktreihe von p
$\underline{a} \cap \underline{b} = \emptyset$	a und b haben keine Verbindungsgerade

Offenbar ist $\pi^{**} = \pi$. Schauen wir zum Beispiel einmal was es für eine Inzidenzstruktur π bedeutet, daß π^* eine affine Ebene ist. Das Verbindungsaxiom (V) für π^* wird zum Schnittaxiom (S) für π. Anstatt die Reichhaltigkeit (RD) für π^* direkt zu übersetzen, ist leicht zu sehen, daß diese zu (RD) für π gleichwertig ist. Kommen wir zu (P) in π^*. Wir müssen uns eine Gerade l und einen Punkt p nicht auf dieser Geraden vorgeben. In π^* sind l der Punkt und p die Gerade, und es soll genau eine zu p disjunkte Gerade durch l in π^* geben, d.h. in π gibt es genau einen Punkt q auf l, der nicht mit p verbindbar ist.

Projektive Ebenen verhalten sich besser. Die Axiome (V), (S) in π^* werden zu (S) und (V) in π. Wir haben sogar das folgende Lemma:

Lemma 1: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Dann ist π genau dann eine projektive Ebene, wenn π^* eine projektive Ebene ist.*

Beweis: Wegen $\pi^{**} = \pi$ reicht es zu zeigen, daß π^* eine projektive Ebene ist, wenn π dies ist. Sei π also als projektive Ebene vorausgesetzt. Daß die Axiome (V), (S) in π^* gelten, haben wir bereits festgestellt. Es ist also nur noch das Reichhaltigkeitsaxiom (RV) zu zeigen.

Da π eine projektive Ebene ist, gibt es verschiedene Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathfrak{P}$ von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Setze

$$l_1 := p_1 \vee p_2,\ l_2 := p_2 \vee p_3,\ l_3 := p_3 \vee p_4,\ l_4 := p_4 \vee p_1.$$

Da keine drei unserer Punkte auf einer Geraden liegen, sind die Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 paarweise verschieden. Wegen $l_1 \wedge l_2 = p_2 \neq p_3 = l_2 \wedge l_3$ sind l_1, l_2, l_3 nicht copunktal. Analog sind auch die anderen drei 3-er Mengen der Geraden nicht copunktal, d.h. je drei unserer Geraden sind nicht copunktal. In π^* sind damit je drei der Punkte l_1, l_2, l_3, l_4 nicht auf einer gemeinsamen Geraden.

■

Dieses Lemma liefert sofort das folgende nützliche Dualitätsprinzip für projektive Ebenen.

Dualitätsprinzip: *Vertauschen wir in einem Satz über projektive Ebenen Punkte und Geraden, so erhalten wir einen weiteren Satz über allgemeine projektive Ebenen.*

Dies ist nichts geheimnisvolles, wir wenden einfach den gegebenen Satz auf π^* an, und interpretieren ihn in π. Das grundlegende Beispiel einer projektiven Ebene ist die projektive Ebene über einem Vektorraum.

Satz 2: *Seien K ein Schiefkörper und V ein dreidimensionaler Vektorraum über K. Für $i = 1, 2$ sei*

$$T_i V := \{U \leq V : \dim U = i\}.$$

Dann ist

$$\mathrm{PG}(V) := (T_1 V, T_2 V, \subseteq)$$

eine projektive Ebene.

Beweis: Seien $p, q \in T_1 V$ zwei Punkte von $\mathrm{PG}(V)$, d.h. zwei eindimensionale Teilräume von V, mit $p \neq q$. Dann ist $p \cap q = \{0\}$. Setzen wir $l := p + q \leq V$, so folgt

$$\dim l = \dim p + \dim q - \dim(p \cap q) = 2,$$

d.h. $l \in T_2 V$ ist eine Gerade mit $p, q \subseteq l$. Ist $g \in T_2 V$, ebenfalls mit $p, q \subseteq g$, so ist auch $l = p + q \subseteq g$, d.h. $g = l$. Damit ist Axiom (V) in $\mathrm{PG}(V)$ gezeigt.

Jetzt seien $a, b \in T_2 V$ zwei Geraden mit $a \neq b$. Wegen $\dim V = 3$, ist dann $V = a + b$, und es folgt

$$3 = \dim V = \dim(a + b) = \dim a + \dim b - \dim(a \cap b) = 4 - \dim(a \cap b),$$

d.h. $\dim(a \cap b) = 1$. Also ist $a \cap b \in T_1 V$ ein Punkt mit $a \cap b \subseteq a, b$, und a, b haben einen Schnittpunkt. Die Eindeutigkeit des Schnittpunkts ist nach (V) sowieso klar. Damit gilt auch (S) in $\mathrm{PG}(V)$.

Es verbleibt (RV). Hierzu wählen wir eine Basis u, v, w von V. Dann sind

$$p_1 := uK,\ p_2 := vK,\ p_3 := wK,\ p_4 := (u + v + w)K$$

vier verschiedene Punkte von $\mathrm{PG}(V)$. Je drei dieser vier Teilräume erzeugen ganz V, d.h. keine drei der vier Punkte sind kollinear.

■

Insbesondere definieren wir:

Definition 4: Sei K ein Schiefkörper. Dann heißt

$$P_2K := \mathrm{PG}(K^3)$$

die projektive Koordinatenebene über K.

Wir wollen einmal versuchen uns die projektive Koordinatenebene $P_2\mathbb{R}$ über dem Körper der reellen Zahlen vorzustellen. Dies wird ein kleiner topologischer Exkurs, für den weiteren Ausbau unserer allgemeinen Theorie benötigen wir die folgenden Überlegungen nicht. Nach Definition sind die Punkte von $P_2\mathbb{R}$ gerade die eindimensionalen Teilräume des $\mathbb{R}^3$. Jeder solche Teilraum schneidet die Sphäre

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$$

in genau zwei Punkten die sich diametral gegenüberliegen. Wir können uns also die Menge der eindimensionalen Teilräume des $\mathbb{R}^3$ als die Menge aller Paare $\{\{x, -x\} : x \in S^2\}$ diametraler Punkte auf der Sphäre vorstellen. Etwas exakter formuliert definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf S^2 durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow y = x \text{ oder } y = -x \quad (x, y \in S^2),$$

und haben die bijektive Abbildung

$$S^2/\sim \to T_1\mathbb{R}^3; \{x, -x\} \mapsto \mathbb{R}x.$$

Diese Beschreibung können wir weiter vereinfachen. Jedes Paar diametraler Punkte auf S^2 liegt entweder im Äquator

$$S^1 = \{x \in S^2 : x_3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\},$$

oder hat einen Punkt in der nördlichen Hemisphäre

$$S^2_+ := \{x \in S^2 : x_3 \geq 0\}$$

und einen in der südlichen Hemisphäre $S^2_- := -S^2_+$. Führen wir also auf S^2_+ die Äquivalenzrelation

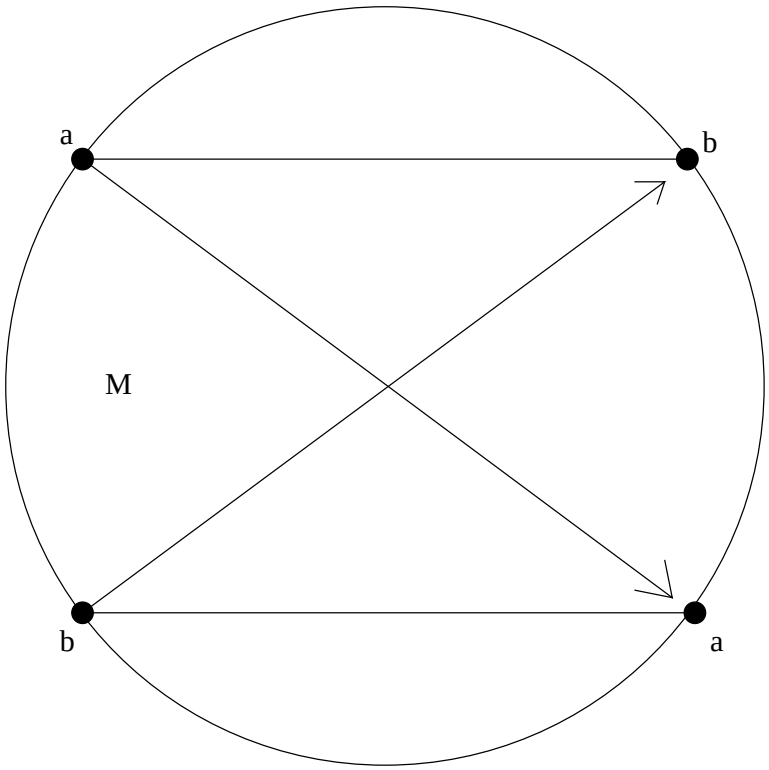
$$x \sim y :\Longleftrightarrow x = y \text{ oder } x_3 = 0,\ y = -x \quad (x, y \in S^2_+)$$

ein, so wird die Abbildung $S^2_+/\sim \to T_1\mathbb{R}^3; x \sim \mapsto \mathbb{R}x$ wiederum bijektiv. Durch die Abbildung $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ können wir S^2_+ mit dem Einheitskreis

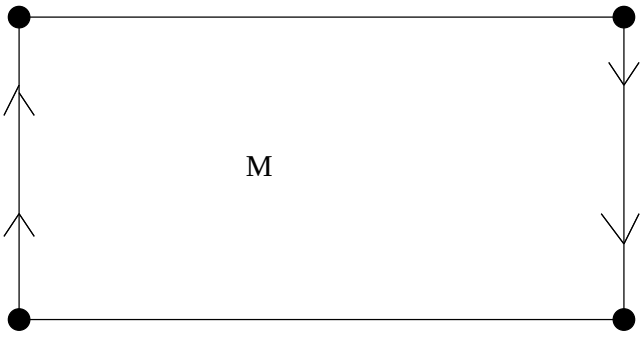
$$B^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$$

identifizieren. Insgesamt können wir uns die Punktmenge der reellen projektiven Ebene also als einen Kreis vorstellen, dessen Randpunkte diametral miteinander identifiziert werden. Wenn Sie zufällig wissen was eine Quotiententopologie ist, so können Sie sich auch leicht davon überzeugen, daß diese Identifikation sogar ein Homöomorphismus ist.

Insbesondere ist $P_2\mathbb{R}$ also eine Art Fläche, tatsächlich handelt es sich um eine zusammenhängende, kompakte topologische 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Wir können dies noch etwas weitertreiben. Hierzu betrachten wir die Teilmenge M von $B^2/\sim$, die durch zwei waagerechte Sehnen begrenzt ist, wie in diesem Bild beschrieben:



Indem wir die Kanten begradigen, können uns M auch als ein Rechteck vorstellen, dessen linker und rechter Rand gegenläufig miteinander identifiziert wird.



Anders gesagt, wir nehmen uns einen Streifen, drehen eine der beiden Kanten einmal herum, und verkleben die beiden Kanten miteinander. Auf diese Art entsteht bekanntlich ein sogenanntes Möbiusband. Der Rand von M ist eine Kreislinie, diese können wir folgendermaßen sehen: Wir laufen zuerst vom Punkt a über die waagerechte Sehne zum Punkt b. Dieser ist mit der anderen Kopie von b in der linken unteren Ecke identifiziert, d.h. wir können auf der unteren Sehne weiter zu a zurücklaufen.

Der Rest $(B^2/\sim)\backslash M$ besteht aus den beiden Kreiskappen. Diese werden entlang ihrer äußeren Ränder miteinander verklebt, und auf diese Art entsteht wieder eine Kreisscheibe K. Der Rand dieser Kreisscheibe ist der Rand des Möbiusbandes M, also $\partial K = \partial M$. Insgesamt entsteht die Punktmenge der reellen projektiven Ebene also indem ein Möbiusband längs seiner berandenden Kreislinie durch eine Kreisscheibe

abgedeckelt wird. Anschaulich kann man sich das schlecht vorstellen, und tatsächlich läßt sich beweisen, daß $P_2\mathbb{R}$ zu keinem Teilraum des $\mathbb{R}^3$ homöomorph sein kann. Wir wollen es hier mit diesen Andeutungen bewenden lassen, eine exakte Durchführung passt eher in eine Vorlesung über Topologie.

Wir setzen jetzt die allgemeine Theorie fort, und beschreiben den Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Ebenen. Hierzu konstruieren wir zuerst zu jeder Geraden einer projektiven Ebene die sogenannte affine Ableitung an dieser Geraden.

Satz 3: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und $l \in \mathfrak{L}$ eine Gerade. Dann ist*

$$\pi_l := (\mathfrak{P}\backslash\underline{l}, \mathfrak{L}\backslash\{l\}, I \cap ((\mathfrak{P}\backslash\underline{l}) \times (\mathfrak{L}\backslash\{l\})))$$

eine affine Ebene, genannt die affine Ableitung von π an der Geraden l.

Beweis: Wir weisen die drei Axiome einer affinen Ebene in π_l nach. Dabei ist (V) trivial, denn sind $p, q \in \mathfrak{P}\backslash\underline{l}$ mit $p \neq q$, so gibt es genau ein $g \in \mathfrak{L}$ mit p, qIg, und da p, q nicht auf l liegen ist sicher $g \neq l$.

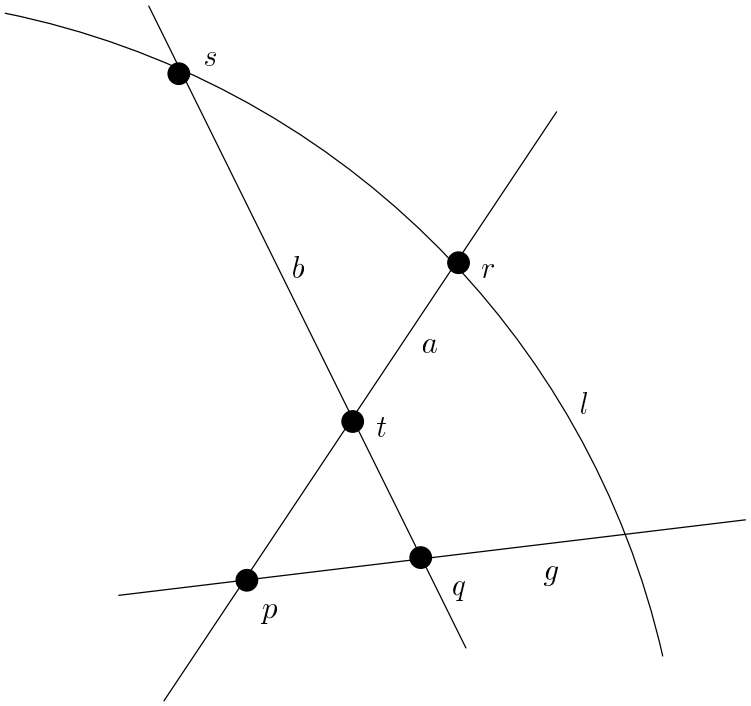
Wir kommen zum Parallelenaxiom. Seien also $g \in \mathfrak{L}\backslash\{l\}$ eine Gerade von π_l, und $p \in \mathfrak{P}\backslash\underline{l}$ ein Punkt, der nicht auf g liegt. Wegen $g \neq l$ existiert in π der Schnittpunkt $u := g \wedge l \in \underline{l}$. Da p nicht auf l liegt ist $p \neq u$, und wir haben $a := p \vee u \in \mathfrak{L}\backslash\{l\}$. Also ist a eine Gerade von π_l durch p. In π gilt $g \neq a$ und $g \wedge a = u \in \underline{l}$, d.h. in π_l haben a und g keinen gemeinsamen Punkt, und a ist eine Parallele zu g durch p.

Sei jetzt umgekehrt $b \in \mathfrak{L}\backslash\{l\}$ eine Gerade durch p, die in π_l keinen Schnittpunkt mit g hat. Dann ist $g \neq b$ und $g \wedge b \in \underline{l}$, d.h. $g \wedge b = g \wedge l = u$. Damit folgt $b = p \vee u = a$.

Zum Schluß müssen wir zeigen, daß es in π_l ein Dreieck gibt. Wegen (RV) gibt es in π vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Insbesondere liegen höchstens zwei der vier Punkte auf l, und damit gibt es mindestens zwei Punkte außerhalb der Geraden l. Wähle also $p, q \in \mathfrak{P}\backslash\underline{l}$ mit $p \neq q$. Sei $g := p \vee q$. Mit genau demselben Argument, gibt es auch zwei Punkte $r, s \in \mathfrak{P}\backslash\underline{g}$ mit $r \neq s$. Insbesondere sind die Punkte p, q, r, s paarweise verschieden.

Fall 1: Sei $r \notin \underline{l}$ oder $s \notin \underline{l}$. Dann ist (p, q, r) oder (p, q, s) ein Dreieck in π_l.

Fall 2: Es verbleibt der Fall $r, s \in \underline{l}$.



Die Geraden $a := p \vee r$, $b := q \vee s$ sind wegen $a, b \neq l, g$ und $a \wedge l = r$, $b \wedge l = s \neq r$ verschieden, und somit existiert $t := a \wedge b$. Wegen $a \wedge l \neq b \wedge l$ liegt t nicht auf l. Aber es ist auch $a \wedge g = p \neq q = b \wedge g$ und t liegt nicht auf g. Also ist (p, q, t) ein Dreieck in π_l.

■

Dem Beweis entnehmen wir noch die folgenden drei Beobachtungen:

- Sind $a, b \in \mathfrak{L}\backslash\{l\}$ zwei Geraden der affinen Ableitung π_l, so ist genau dann $a||b$ in π_l, wenn $a \wedge l = b \wedge l$ in π gilt.
- Die Parallelscharen von π_l sind genau die Mengen der Form $\mathfrak{L}_u\backslash\{l\}$ für $u \in \underline{l}$.
- Sind $a \in \mathfrak{L}\backslash\{l\}$ und $p \in \mathfrak{P}\backslash\underline{l}$, so ist $p \vee (a \wedge l)$ die Parallele zu a durch p in der affinen Ebene π_l.

Wenden wir unser Wissen über affine Ebenen an, so erhalten wir das folgende Lemma über projektive Ebenen.

Lemma 4: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene. Dann gibt es genau eine Kardinalzahl n, genannt die Ordnung von π, so daß für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$ die affine Ableitung π_l die Ordnung n hat. Sind $l \in \mathfrak{L}$, $p \in \mathfrak{P}$, so gelten*

$$|\underline{l}| = |\mathfrak{L}_p| = n + 1 \geq 3.$$

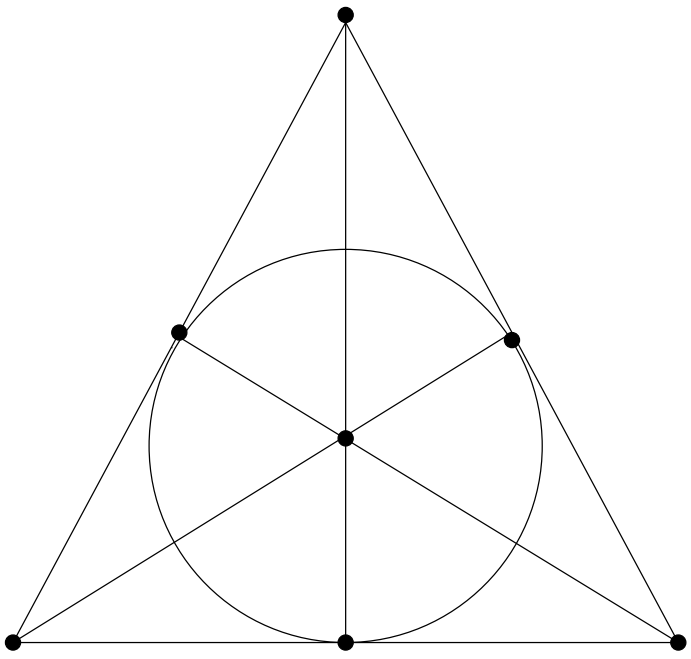
Beweis: Da es überhaupt Geraden gibt, ist die Eindeutigkeit von n klar. Zur Existenz müssen wir einsehen, daß je zwei affine Ableitungen dieselbe Ordnung haben. Seien also a, b zwei Geraden von π mit $a \neq b$. Setze $p := a \wedge b$. Da π_a nach Satz 3 eine affine Ebene ist, gibt es einen Punkt $q \in \mathfrak{P}$ der weder auf a noch auf b liegt. Also ist $l := p \vee q \in \mathfrak{L}$ von a und b verschieden. Damit ist l eine Gerade in beiden affinen Ebenen π_a, π_b, und in beiden Ebenen ist $\underline{l}\backslash\{p\}$ die Punktreihe dieser Geraden. Also haben π_a, π_b dieselbe Ordnung $n = |\underline{l}\backslash\{p\}|$.

Wir kommen zur zweiten Aussage. Sei also $l \in \mathfrak{L}$ eine Gerade. Da π_l eine affine Ebene ist gibt es eine Gerade $g \in \mathfrak{L}\backslash\{l\}$, und wir setzen $p := g \wedge l$. Dann ist $\underline{l}\backslash\{p\}$ die Punktreihe von l in der affinen Ebene π_g, und somit ist $|\underline{l}\backslash\{p\}| = n$, d.h. $|\underline{l}| = n + 1$.

Jetzt sei $p \in \mathfrak{P}$ ein Punkt. Nach Lemma 1 ist π^* eine projektive Ebene, und insbesondere können nicht alle Geraden von π durch p gehen. Also existiert eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ mit $(p, l) \notin I$. Dann ist p ein Punkt der affinen Ebene π_l, und mit §2.Lemma 2 folgt $|\mathfrak{L}_p| = n + 1$.

■

Wir hatten in §2 die Minimalmodelle affiner Ebenen, d.h. die affinen Ebenen der Ordnung 2 bestimmt. Wir wollen jetzt einmal die Minimalmodelle projektiver Ebenen, d.h. projektive Ebenen der Ordnung 2 bestimmen. Sei also $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene der Ordnung 2. Wir wissen, daß auf jeder Geraden genau 3 Punkte liegen, und durch jeden Punkt gehen genau 3 Geraden. Nehmen wir eine Gerade l weg, so erhalten wir eine affine Ebene der Ordnung 2. Diese hat 4 Punkte, und die entfernte Gerade hatte 3 Punkte, d.h. $|\mathfrak{P}| = 4 + 3 = 7$. Die von l verschiedenen Geraden durch einen Punkt auf l sind eine Parallelschar des affinen Minimalmodells, d.h. jede der drei Parallelscharen von π_l wird in einem der Punkte von l gebündelt. Wir erhalten das folgende Bild:



Diese Ebene nennt man auch das Minimalmodell einer projektiven Ebene, oder auch die Fano-Ebene. Insbesondere haben wir übrigens eingesehen, daß es bis auf Isomorphie genau eine projektive Ebene der Ordnung 2 gibt.

Wir wollen einmal die affinen Ableitungen unserer Ebenen $\mathrm{PG}(V)$ berechnen. Seien also K ein Schiefkörper und V ein dreidimensionaler Vektorraum über K. Sei $l \in T_2V$ eine Gerade, d.h. ein zweidimensionaler Teilraum von V. Die Punkte der affinen Ableitung $\mathrm{PG}(V)_l$ sind die eindimensionalen Teilräume von V, die nicht in l enthalten sind. Wir wählen einen Vektor $e \in V\backslash l$, und betrachten die Abbildung

$$\psi : l \to T_1V\backslash\underline{l}; v \mapsto (e+v)K.$$

Sind $v, w \in l$ mit $(e+v)K = (e+w)K$, so existiert $\lambda \in K$ mit $e+v = (e+w)\lambda = e\lambda+w\lambda$, d.h. $e(1-\lambda) = w\lambda - v \in l$, und somit $\lambda = 1$ und $w = v$. Also ist ψ injektiv. Ist $p \in T_1V\backslash\underline{l}$ beliebig, so wähle $u \in p\backslash\{0\}$. Wegen $\dim V = 3$ ist $V = l \oplus eK$, also existieren ein $\lambda \in K$ und $v \in l$ mit $u = v + e\lambda$. Wegen $p \not\subseteq l$ ist $u \notin l$, also $\lambda \neq 0$ und $p = uK = (e + v\lambda^{-1})K = \psi(v\lambda^{-1})$, d.h. ψ ist auch surjektiv. Also ist ψ bijektiv.

Seien $t \in l$ und $u \in l\backslash\{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\psi(t+uK) &= \{(e+t+u\lambda)K : \lambda \in K\}\\ &= \{vK : v \in V\backslash\{0\}, vK \subseteq \langle e+t, u\rangle, vK \not\subseteq l\}\\ &= \underline{\langle e+t, u\rangle}\backslash\underline{l},\end{aligned}$$

d.h. ψ bildet Geraden auf Geraden ab, und ist somit nach §1.Lemma 3 ein Isomorphismus $\psi : \mathrm{AG}(l) \to \mathrm{PG}(V)_l$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5: *Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K und $l \in T_2V$ ein zweidimensionaler Teilraum von V. Weiter sei $e \in V\backslash l$. Dann ist*

$$\psi : l \to T_1V; v \mapsto (e+v)K$$

ein Isomorphismus $\mathrm{AG}(l) \to \mathrm{PG}(V)_l$.

Wir haben jeder Geraden einer projektiven Ebene eine affine Ableitung an dieser Geraden zugeordnet. Tatsächlich erhalten wir jede affine Ebene auf diese Art aus einer projektiven Ebene. Um dies einzusehen, konstruieren wir aus einer gegebenen affinen Ebene heraus eine projektive Ebene, die diese als affine Ableitung enthält.

Definition 5: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine affine Ebene. Es bezeichne $\mathfrak{C}$ die Menge aller Parallelscharen in π. Wir betrachten die erweiterte Punktmenge

$$\overline{\mathfrak{P}} := \mathfrak{P} \cup \mathfrak{C},$$

und die erweiterte Geradenmenge

$$\overline{\mathfrak{L}} := \mathfrak{L} \cup \{l_\infty\}.$$

Dabei ist l_∞ irgendein neues Element das nicht in $\mathfrak{L}$ liegt. Die Inzidenz erweitern wir folgendermaßen

$$\overline{I} := I \cup \{(C, l) : l \in C \in \mathfrak{C}\} \cup (\mathfrak{C} \times \{l_\infty\}).$$

Die Inzidenzstruktur

$$\overline{\pi} := (\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathfrak{L}}, \overline{I})$$

heißt der projektive Abschluß der affinen Ebene π.

Anders gesagt bündeln wir die Geraden einer jeden Parallelschar in einem neuen Punkt, und alle diese neuen Punkte liegen auf einer neuen Geraden. Diese neue Gerade l_∞ wird in diesem Zusammenhang auch die Ferngerade genannt, und die Punkte auf ihr sind die Fernpunkte. Daß wir für die neuen Punkte einfach die Parallelscharen selbst genommen haben dient nur der Bequemlichkeit. Streng genommen ist dies eigentlich etwas problematisch, es wäre denkbar das bereits einer der alten Punkte gleich einer Parallelschar ist, aber dies ist kein echtes Problem. Wir können zum Beispiel anstelle von $\mathfrak{C}$ eine zu $\mathfrak{C}$ gleichmächtige Menge $\mathfrak{C}'$ verwenden, die disjunkt zu $\mathfrak{P}$ ist, und diese Menge identifizieren wir dann mit $\mathfrak{C}$, d.h. wir lassen in unserer Notation die eigentlich auftretende Bijektion zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ einfach weg.

Satz 6: *Sei π eine affine Ebene. Dann ist $\overline{\pi}$ eine projektive Ebene, und ist l_∞ die Ferngerade, so gilt $\overline{\pi}_{l_\infty} = \pi$.*

Beweis: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, und bezeichne $\mathfrak{C}$ die Menge der Parallelscharen von π. Wir müssen die drei Axiome einer projektiven Ebene nachweisen. Wir beginnen mit dem Verbindungsaxiom (V).

Zunächst seien $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$. Da π eine affine Ebene ist, gibt es genau ein $l \in \mathfrak{L}$ mit p, qIl. Offenbar ist l auch die einzige Verbindungsgerade von p und q in $\overline{\mathfrak{L}}$ bezüglich $\overline{I}$, denn die Ferngerade l_∞ enthält weder p noch q.

Jetzt seien $p \in \mathfrak{P}$ und $C \in \mathfrak{C}$. Nach §2.Lemma 1.(c) gibt es genau ein $l \in C$ mit pIl. Es folgt $p, C\overline{I}l$. Ist umgekehrt $a \in \overline{\mathfrak{L}}$ mit $p, C\overline{I}a$, so ist zunächst $a \neq l_\infty$, d.h. $a \in \mathfrak{L}$, und somit ist $pIa \in C$, d.h. $a = l$.

Letztlich seien $A, B \in \mathfrak{C}$ mit $A \neq B$. Dann ist l_∞ eine Verbindungsgerade von A und B. Andererseits gehört jede Gerade aus $\mathfrak{L}$ zu genau einer Parallelschar, d.h. sie inzidiert in $\overline{\pi}$ mit genau einem Fernpunkt, und kann somit keine Verbindungsgerade von A und B sein. Damit ist (V) bewiesen, und wir kommen zu (S).

Ist $l \in \mathfrak{L}$, so liegt l in genau einer Parallelschar C, und C ist der einzige Schnittpunkt von l und l_∞. Jetzt seien $a, b \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq b$. Ist sogar $a \not\parallel b$, so haben a und b keinen gemeinsamen Fernpunkt, und schneiden sich in genau einem Punkt von $\mathfrak{P}$. Ist dagegen $a \parallel b$, so haben a und b keinen gemeinsamen Punkt in $\mathfrak{P}$, aber genau einen gemeinsamen Fernpunkt, nämlich die Parallelschar in der der sie beide liegen. Damit ist auch (S) gezeigt.

Es verbleibt das Reichhaltigkeitsaxiom (RV). Nach §2.Satz 9 gibt es in π ein Koordinatensystem (o, e, U, V). Es sind $o, e, U, V \in \overline{\mathfrak{P}}$ vier verschiedene Punkte. Da U, V zwei verschiedene Parallelscharen sind, ist l_∞ ihre Verbindungsgerade, und weder o noch e liegen auf l_∞. Weiter ist e weder auf der Geraden oU noch auf der Geraden oV,

und dies sind die Verbindungsgeraden von o und U beziehungsweise o und V. Also liegen keine drei der Punkte o, e, U, V auf einer Geraden.

Die Aussage $\overline{\pi}_{l_\infty} = \pi$ ist klar.

■

Insbesondere gibt es genau dann eine affine Ebene der Ordnung n, wenn es eine projektive Ebene der Ordnung n gibt. Bilden wir zum Beispiel den projektiven Abschluß eines affinen Minimalmodells, so erhalten wir ein projektives Minimalmodell. Wir für affine Ebenen sind alle projektiven Ebenen kleiner Ordnung explizit bekannt, wir haben die folgende Liste.

Ordnung	Isomorphietypen
2	1
3	1
4	1
5	1
6	0
7	1
8	1
9	4
10	0
11	≥ 1
12	?

Interessant ist der Fall der Ordnung 9. In §2 hatten wir bemerkt, daß es genau 7 affine Ebenen der Ordnung 9 gibt, während es 4 projektive Ebenen der Ordnung 9 gibt. Da aus jeder affinen Ebene der Ordnung 9 durch Abschluß eine projektive Ebene der Ordnung 9 entsteht, muss es nicht isomorphe affine Ebenen der Ordnung 9 geben, deren projektive Abschlüsse trotzdem isomorph sind. Umgekehrt muss es in einigen der projektiven Ebenen der Ordnung 9 verschiedene Geraden geben, die zu nicht isomorphen affinen Ableitungen führen. Dieses Phänomen werden wir in §4 klären.

Wir werden im folgenden einige Existenz und Eindeutigkeitssätze für gewisse Isomorphismen projektiver Ebenen beweisen. Es ist nützlich diesen Sätzen ein kleines Lemma vorauszuschicken.

Lemma 7: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ zwei projektive Ebenen. Weiter seien $\varphi, \psi : \pi \to \pi'$ zwei Isomorphismen, und es gebe eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ mit $\varphi|\mathfrak{P}\backslash\underline{l} = \psi|\mathfrak{P}\backslash\underline{l}$. Dann gilt bereits $\varphi = \psi$.*

Beweis: Sei $a \in \mathfrak{L}$ eine Gerade mit $a \neq l$. Da auf a nach Lemma 4 mindestens drei Punkte liegen, gibt es $p, q \in \underline{a}$ mit $p, q \notin \underline{l}$ und $p \neq q$. Es folgen $a = p \vee q$ und $\varphi(p) = \psi(p)$, $\varphi(q) = \psi(q)$, d.h. auch $\varphi(a) = \varphi(p) \vee \varphi(q) = \psi(p) \vee \psi(q) = \psi(a)$.

Sei nun $p \in \mathfrak{P}$ beliebig. Wieder nach Lemma 4 gibt es $a, b \in \mathfrak{L}_p\backslash\{l\}$ mit $a \neq b$. Es folgen $p = a \wedge b$ und $\varphi(p) = \varphi(a) \wedge \varphi(b) = \psi(a) \wedge \psi(b) = \psi(p)$.

■

Lemma 8: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und $l \in \mathfrak{L}$ eine Gerade. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\psi : \pi \to \overline{\pi_l}$ mit $\psi|\mathfrak{P}\backslash\underline{l} = \mathrm{id}$.*

Beweis: Für $p \in \mathfrak{P}\backslash\underline{l}$ setzen wir $\psi(p) := p$. Ist $p \in \underline{l}$, so ist

$$\psi(p) := \mathfrak{L}_p\backslash\{l\} \in \overline{\mathfrak{P}\backslash\underline{l}}$$

eine Parallelschar von π_l, d.h. ein Punkt von $\overline{\pi_l}$. Wir zeigen zuerst, daß ψ die Punktabbildung eines Isomorphismus ist. Sei also $g \in \mathfrak{L}$ eine Gerade von π. Ist $g = l$, so ist $\psi(\underline{g})$ die Menge der Fernpunkt von π_l, d.h. genau die Punktreihe der Ferngeraden in $\overline{\pi_l}$. Jetzt sei $g \neq l$, d.h. g ist eine Gerade von π_l. Es ist

$$\begin{aligned} \psi(\underline{g}) &= \psi(\underline{g}\backslash\{g \wedge l\}) \cup \{\psi(g \wedge l)\} \\ &= (\underline{g}\backslash\{g \wedge l\}) \cup \{\psi(g \wedge l)\} \end{aligned}$$

die Punktreihe der Geraden g in $\overline{\pi_l}$. Also ist ψ tatsächlich die Punktabbildung eines Isomorphismus.

Die Eindeutigkeit folgt mit Lemma 7.

■

Die Konstruktion des projektiven Abschluß einer affinen Ebene ist natürlich, d.h. verträglich mit Isomorphismen.

Lemma 9: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ zwei affine Ebenen. Weiter sei $(\varphi, \psi) : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) : \overline{\pi} \to \overline{\pi'}$ mit $\overline{\varphi}|\mathfrak{P} = \varphi$. Dieser bildet die Ferngerade von $\overline{\pi}$ auf die Ferngerade von $\overline{\pi'}$ ab.*

Beweis: Seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ die Mengen der Parallelscharen von π beziehungsweise π'. Ist $C \in \mathfrak{C}$, so ist $\psi(C) = \{\psi(l) : l \in C\}$ offenbar wieder eine Parallelschar von π', und somit induziert ψ eine Bijektion $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$. Wir erhalten die bijektiven Abbildungen

$$\overline{\varphi} : \overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{C} \to \mathfrak{P}' \cup \mathfrak{C}' = \overline{\mathfrak{P}'}; p \mapsto \begin{cases} \varphi(p), & p \in \mathfrak{P}, \\ \psi(p), & p \in \mathfrak{C}, \end{cases}$$

und

$$\overline{\psi} : \overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \cup \{l_\infty\} \to \mathfrak{L}' \cup \{l_\infty\} = \overline{\mathfrak{L}'}; l \mapsto \begin{cases} \psi(l), & l \in \mathfrak{L}, \\ l_\infty, & l = l_\infty. \end{cases}$$

Für $p \in \overline{\mathfrak{P}}$, $l \in \overline{\mathfrak{L}}$ gilt offenbar genau dann $(\overline{\varphi}(p), \overline{\psi}(l)) \in \overline{I'}$, wenn $(p, l) \in \overline{I}$ ist, d.h. $(\overline{\varphi}, \overline{\psi})$ ist ein Isomorphismus.

Die Eindeutigkeit folgt wieder sofort mit Lemma 7.

■

Damit können wir den Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Ebenen als geklärt betrachten. Affine Ebenen sind einfach projektive Ebenen mit einer ausgezeichneten Geraden. Daher werden wir uns in dieser Vorlesung auch hauptsächlich mit projektiven Ebenen befassen.

Wir wollen einmal den projektiven Abschluß einer affinen Ebene $\mathrm{AG}(V)$ über einem Vektorraum V bestimmen. Sei also V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Wir wollen einen Isomorphismus

$$\overline{\mathrm{AG}(V)} \to \mathrm{PG}(V \oplus K)$$

herstellen. Einen solchen Isomorphismus kann man leicht direkt konstruieren, aber wir wollen einmal zur Illustration unsere schon bewiesenen Sätze verwenden. Wir betrachten in $V \oplus K$ den zweidimensionalen Teilraum $V = V \oplus \{0\}$ und den Vektor $e := (0,1) \in (V \oplus K) \backslash V$. Nach Satz 5 haben wir einen Isomorphismus

$$\psi_1 : \mathrm{AG}(V) \to \mathrm{PG}(V \oplus K)_V; v \mapsto (v,1)K.$$

Nach Lemma 9 setzt sich ψ_1 zu einem Isomorphismus

$$\overline{\psi_1} : \overline{\mathrm{AG}(V)} \to \overline{\mathrm{PG}(V \oplus K)_V}$$

fort. Weiter haben wir nach Lemma 8 einen Isomorphismus

$$\psi_2 : \mathrm{PG}(V \oplus K) \to \overline{\mathrm{PG}(V \oplus K)_V},$$

der auf der affinen Punktmenge die Identität ist. Insgesamt erhalten wir den Isomorphismus

$$\psi := \psi_2^{-1}\overline{\psi_1} : \overline{\mathrm{AG}(V)} \to \mathrm{PG}(V \oplus K).$$

Ist $v \in V$, so ist $\psi(v) = \psi_1(v) = (v,1)K$. Die Fernpunkte von $\overline{\mathrm{AG}(V)}$ entsprechen den eindimensionalen Teilräumen von V. Sei $u \in V \backslash \{0\}$. Der Fernpunkt in Richtung u ist der Schnittpunkt der Geraden uK mit der Ferngeraden von $\overline{\mathrm{AG}(V)}$. Die Gerade uK ist die Verbindungsgerade von 0 mit u, also ist $\psi(uK) = (0,1)K \vee (u,1)K = \langle (0,1),(u,1)\rangle = \langle u, e\rangle$, wobei $e = (0,1)$ gesetzt war. Weiter bildet ψ die Ferngerade von $\overline{\mathrm{AG}(V)}$ auf die Gerade V von $\mathrm{PG}(V \oplus K)$ ab, d.h. unser Fernpunkt geht auf $\langle u, e\rangle \cap V = uK$. Also bildet ψ den Fernpunkt uK auf den eindimensionalen Teilraum uK von $V \leq V \oplus K$ ab.

Das ist eine nützliche Tatsache, aber als Ergebnis nicht besonders überraschend. Ein interessanteres Beispiel ist unsere Moulton Ebene. Sei $k > 1$ eine reelle Zahl. In §2 hatten wir die Moulton Ebene M_k zum Knickfaktor k konstruiert. Ihren projektiven Abschluß $\overline{M_k}$ bezeichnen wir als projektive Moulton Ebene.

Wir wollen diese projektive Ebene untersuchen, indem wir sie geschickt an einer Geraden ableiten. Eine sinnvolle Strategie zur affinen Betrachtung einer projektiven Ebene ist es, diese an einer Geraden abzuleiten, die geometrisch in irgendeinem Sinne ausgezeichnet ist. Die Ferngerade von $\overline{M_k}$ sieht nur auf den ersten Blick so aus, es stellt

sich heraus, daß wir diese durch Isomorphismen von $\overline{M_k}$ auf sich selbt auf beliebige andere Geraden durch den waagerechten Fernpunkt abbilden können. Der richtige Kandidat ist die y-Achse [0], an der ja auch das Abknicken stattfindet.

Wir wollen also die affine Ebene $(\overline{M_k})_{[0]}$ betrachten, und hoffen das diese etwas bessere Eigenschaften als die Moulton Ebene selbst hat. Um dies einzusehen, müssen wir allerdings zu einer isomorphen affinen Ebene übergehen, die wir jetzt beschreiben. Als Punktmenge verwenden wir wieder den $\mathbb{R}^2$, d.h. $\mathfrak{P} = \mathbb{R}^2$. Zur Beschreibung der Geradenmenge geben wir erst einmal eine spezielle Gerade an. Hierzu definiere die reelle Zahl $s > 0$ durch

$$k = e^{2\pi s}.$$

Wir betrachten die folgende Menge

$$L := \left\{ \frac{e^{s\phi}}{\cos\phi} e^{i\phi} : -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Die vollständige Geradenmenge erhalten wir durch

$$\mathfrak{L} := \{cL : c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\} \cup \{\mathbb{R}z : z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}.$$

Dann ist $E_s := (\mathbb{R}^2, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene. Diese Ebene ist isomorph zur affinen Ableitung $(\overline{M_k})_{[0]}$ der Moulton Ebene, also ist die projektive Vervollständigung $\overline{E_s}$ isomorph zur projektiven Moulton Ebene. Ein Isomorphismus

$$\psi : E_s \to (\overline{M_k})_{[0]}$$

ist auf $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi\left(re^{i\phi}\right) = \left(\tan\phi, \frac{e^{s\phi}}{r\cos\phi}\right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}, r \in \mathbb{R}\right).$$

Die Ferngerade von $\overline{M_k}$ entspricht der Geraden $i\mathbb{R}$ in E_s. Wir sehen, daß für jedes $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Abbildung $z \mapsto cz$ ein Isomorphismus der affinen Ebene E_s auf sich selbst ist, d.h. die ursprüngliche Ferngerade läßt sich durch Isomorphismen noch bewegen.

Wir wollen noch eine weitere Anwendung skizzieren. Angenommen wir starten mit der reellen affinen Ebene $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2, \mathfrak{L})$. Ihren projektiven Abschluß haben wir bereits als $\overline{\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2)} \simeq \mathrm{PG}(\mathbb{R}^3) = P_2\mathbb{R}$ bestimmt. Der Geradenraum $\mathfrak{L}$ ist also gleich dem Geradenraum von $P_2\mathbb{R}$ minus eine Gerade. Den Geradenraum von $P_2\mathbb{R}$ können wir mit der Punktmenge identifizieren, einfach durch $p \leftrightarrow p^\perp$. Man kann zeigen, daß auf diese Weise ein Homöomorphismus zwischen $\mathfrak{L}$ und $P_2\mathbb{R}\backslash\{*\}$ für einen Punkt $*$ von $P_2\mathbb{R}$ entsteht.

Die Punktmenge von $P_2\mathbb{R}$ ist ein abgedeckeltes Möbiusband, und hieraus folgt, daß $P_2\mathbb{R}\backslash\{*\}$ homöomorph zum Möbiusband ist. Also ist der Raum der Geraden im $\mathbb{R}^2$ ein Möbiusband. Diese Beobachtungen tatsächlich auszuarbeiten, wird eine Übungsaufgabe sein.

Einen wesentlichen Punkt aus §2 haben wir noch nicht auf projektive Ebenen übertragen, nämlich unsere Ternärkörper. Angenommen wir haben einen Ternärkörper (K,T) gegeben. Aus diesem haben wir eine affine Ebene $A(K,T) = (K \times K, K^2 \cup K, I)$ konstruiert. Wir wollen jetzt den projektiven Abschluß dieser affinen Ebene beschreiben. Unsere Konstruktion von $\overline{A(K,T)}$ verlangt, daß wir die Parallelscharen von $A(K,T)$ als neue Punkte hinzufügen. Es gibt einmal die vertikale Parallelschar, und jede andere Parallelschar ist die Menge der Geraden gegebener Steigung, also

$$C_s = \{[s,t] : t \in K\}$$

für jede Steigung $s \in K$. Es ist praktisch nicht diese Parallelscharen selbst als neue Punkte zu verwenden, sondern die Parallelschar C_s durch das Element $s \in K$ zu beschreiben. Die vertikale Parallelschar bezeichnen wir mit dem Symbol ∞. An Geraden kommt nur die Ferngerade hinzu, und diese nennen wir auch ∞. Zur besseren Unterscheidung verwenden wir wieder runde Klammern für Punkte und eckige Klammern für Geraden, d.h. wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= K^2 \cup K \cup \{\infty\} = \{(x,y) : x,y \in K\} \cup \{(s) : s \in K\} \cup \{(\infty)\}, \\ \mathfrak{L} &= K^2 \cup K \cup \{\infty\} = \{[s,t] : s,t \in K\} \cup \{[c] : c \in K\} \cup \{[\infty]\}. \end{aligned}$$

Somit definieren wir

Definition 6: Sei (K,T) ein Ternärkörper. Die projektive Koordinatenebene über (K,T) ist die Inzidenzstruktur

$$P(K,T) = (K^2 \cup K \cup \{\infty\}, K^2 \cup K \cup \{\infty\}, I)$$

mit der folgenden Inzidenzrelation

$$\begin{aligned} (x,y)I[s,t] &\iff y = T(s,x,t) \quad (x,y,s,t \in K), \\ (s)I[s',t] &\iff s = s' \quad (s,s',t \in K), \\ (s)I[\infty], & \\ (\infty)I[c] & \quad (c \in K), \\ (\infty)I[\infty]. & \end{aligned}$$

Andere Inzidenzen als die hier explizit aufgelisteten sollen nicht bestehen.

Wir fassen die Haupteigenschaften der projektiven Koordinatenebene in einem Satz zusammen.

Satz 10: *Sei (K,T) ein Ternärkörper.*

(a) *$P(K,T)$ ist eine projektive Ebene.*

(b) *Die Identität setzt sich zu einem Isomorphismus $\overline{A(K,T)} \to P(K,T)$ fort, der die Ferngerade von $\overline{A(K,T)}$ auf $[\infty]$ abbildet.*

(c) *Es ist* $P(K,T)_{[\infty]} = A(K,T)$.

Beweis: Teil (b) ist nach Konstruktion klar, und insbesondere gilt auch (a). Teil (c) ist nach Definition von $A(K,T)$ und $P(K,T)$ ebenfalls klar.

■

Ist K ein Schiefkörper, so können wir K durch

$$T(s,x,t) = sx + t \quad (s,x,t \in K)$$

nach den Ergebnissen des §2 als einen Ternärkörper auffassen, und es ist $A(K,T) \simeq A_2(K) = \mathrm{AG}(K^2)$, wobei wir als Punktabbildung einfach die Identität verwenden können. Nach Satz 10.(b) setzt sich die Identität zu einem Isomorphismus $\overline{A(K,T)} \to \underline{P(K,T)}$ fort. Mit Lemma 9 erhalten wir auch einen Isomorphismus $\overline{\mathrm{AG}(K^2)} \to \overline{A(K,T)}$, der wiederum die Identität fortsetzt. Weiter haben wir auch einen Isomorphismus $\overline{\mathrm{AG}(K^2)} \to \mathrm{PG}(K^2 \oplus K) = \mathrm{PG}(K^3) = P_2(K)$. Setzen wir all dies zusammen, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\psi : P(K,T) \to P_2(K);\ \begin{array}{l}(x,y) \mapsto (x,y,1)K \quad (x,y \in K),\\ (s) \mapsto (1,s,0)K \quad (s \in K),\\ (\infty) \mapsto (0,1,0)K.\end{array}$$

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch das Konzept der Koordinatensysteme affiner Ebenen auf projektive Ebenen ausdehnen. Sei π eine affine Ebene. Ist (o,e,U,V) ein Koordinatensystem von π, so hatten wir im Beweis von Satz 6 gesehen, daß (o,e,U,V) ein Viereck in $\overline{\pi}$ ist. Diese Beobachtung läßt sich auch umkehren.

Satz 11: *Seien* $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ *eine projektive Ebene und* $(o,e,u,v) \in \mathfrak{P}^4$ *ein Viereck in* π, *d.h. vier verschiedene Punkte von denen keine drei kollinear sind. Sei* $W := u \vee v$. *Sind dann* U, V *die den Punkten* u, v *entsprechenden Parallelscharen der affinen Ableitung* π_W *(d.h.* $U = \mathfrak{L}_u \backslash \{W\}$ *und* $V = \mathfrak{L}_v \backslash \{W\}$*), so ist* (o,e,U,V) *ein Koordinatensystem von* π_W. *Ist* $K := \underline{o \vee e} \backslash \{W \wedge (o \vee e)\}$, *so wird durch*

$$T : K^3 \to K; (s,x,t) \mapsto (((((o \vee v) \wedge (t \vee u)) \vee ((o \vee ((e \vee v) \wedge (s \vee u))) \wedge W)) \wedge (x \vee v)) \vee u) \wedge K$$

eine Abbildung definiert, und (K,T) *ist ein Ternärkörper mit Null* o *und Eins* e *(dabei schreiben wir etwas ungenau* K *für die Gerade* $o \vee e$*). Weiter ist die Abbildung*

$$\eta : \mathfrak{P} \to K^2 \cup K \cup \{\infty\}; p \mapsto \begin{cases} (K \wedge (p \vee v), K \wedge (p \vee u)) \in K^2, & p \in \mathfrak{P} \backslash \underline{W}, \\ (((p \vee o) \wedge (e \vee v)) \vee u) \wedge K \in K, & p \in \underline{W} \backslash \{v\}, \\ (\infty), & p = v \end{cases}$$

ein Isomorphismus $\eta : \pi \to P(K,T)$. *Der Ternärkörper* (K,T) *ist genau der Ternärkörper der affinen Ableitung* π_W *zum Koordinatensystem* (o,e,U,V).

Beweis: Es ist $U \neq V$ und $oU = o \vee u$, $oV = o \vee v$. Da o, e, u und o, e, v nicht kollinear sind, ist auch $e \notin oU \cup oV$. Also ist (o, e, U, V) ein Koordinatensystem von π_W. Die Menge K ist die Punktreihe der Geraden $o \vee e$ in π_W. Definieren wir

$$T : K^3 \to K; (s, x, t) \mapsto (((oV \wedge tU)(o \vee (eV \wedge sU))) \wedge xV)U \wedge K,$$

so ist (K, T) nach §2.Satz 9 ein Ternärkörper mit Null o und Eins e. Für jeden Punkt p der affinen Ableitung π_W haben wir $pU = p \vee u$, $pV = p \vee v$, und ist l eine Gerade von π_W so ist auch $pl = p \vee (l \wedge W)$. Setzen wir diese Formeln in die Gleichung für T ein, so erhalten wir genau die im Satz angegebene Formel. Weiter ist die Abbildung

$$\eta : \mathfrak{P} \backslash \underline{W} \to K \times K; p \mapsto (K \wedge pV, K \wedge pU)$$

wieder nach §2.Satz 9 ein Isomorphismus $\pi_W \to A(K, T)$. Nach Lemma 9 setzt sich η zu einem Isomorphismus $\overline{\eta} : \overline{\pi_W} \to \overline{A(K, T)}$ fort. Nach Lemma 8 und Satz 10.(b) gibt es Isomorphismen $\varphi : \pi \to \overline{\pi_W}$ und $\psi : \overline{A(K, T)} \to P(K, T)$ mit $\varphi | \mathfrak{P} \backslash \underline{W} = \mathrm{id}$ und $\psi | K^2 = \mathrm{id}$. Insgesamt liefert dies den Isomorphismus $\theta := \psi \overline{\eta} \varphi : \pi \to P(K, T)$. Für $p \in \mathfrak{P} \backslash \underline{W}$ gilt $\theta(p) = (K \wedge (p \vee v), K \wedge (p \vee u))$. Jetzt sei $p \in \underline{W} \backslash \{v\}$. Da o nicht auf $e \vee v$ liegt und $p \neq v$ ist, ist $q := (o \vee p) \wedge (e \vee v) \neq o, p, v$. Da θ die Gerade W auf $[\infty]$ abbildet, folgt

$$\begin{aligned}
\theta(p) &= \theta((o \vee p) \wedge W) \\
&= \theta(o \vee q) \wedge [\infty] \\
&= (\theta(o) \vee \theta(q)) \wedge [\infty] \\
&= ((o, o) \vee (K \wedge (q \vee v), K \wedge (q \vee u))) \wedge [\infty] \\
&= ((o, o) \vee (e, K \wedge (q \vee u))) \wedge [\infty] \\
&= (q \vee u) \wedge K \\
&= (((p \vee o) \wedge (e \vee v)) \vee u) \wedge K.
\end{aligned}$$

Da (∞) der letzte verbliebene Punkt von $P(K, T)$ ist, folgt auch $\theta(v) = (\infty)$.

■

Definition 7: Seien π eine projektive Ebene und (o, e, u, v) ein Viereck in π. Dann heißt $W := u \vee v$ die Ferngerade des Vierecks, und der Ternärkörper (K, T) aus Satz 11 heißt der Ternärkörper des Vierecks (o, e, u, v). Den Isomorphismus $\eta : \pi \to P(K, T)$ bezeichnen wir als Koordinatenisomorphismus von π bezüglich des Vierecks (o, e, u, v).

Genau wie im Fall affiner Ebenen, sind die zu verschiedenen Vierecken gehörenden Ternärkörper einer projektiven Ebene im Allgemeinen nicht isomorph. Die Frage für welche projektiven Ebenen doch alle Ternärkörper zueinander isomorph sind, werden wir in §4 behandeln.

Lemma 12: *Sei (K, T) ein Ternärkörper mit Null 0 und Eins 1. Dann ist das 4-Tupel $((0, 0), (1, 1), (0), (\infty))$ ein Viereck der projektiven Ebene $P(K, T)$ und die Abbildung*

$$\phi : K \to \{(x, x) : x \in K\}; x \mapsto (x, x)$$

ist ein Isomorphismus von K auf den Ternärkörper dieses Vierecks.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{(0)}\backslash\{[\infty]\} &= \{[0,t] : t \in K\}, \\ \mathfrak{L}_{(\infty)}\backslash\{[\infty]\} &= \{[c] : c \in K\}, \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt mit §2.Lemma 10.

■

Aufgaben zu §3

(28) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene der endlichen Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann $|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{L}| = n^2 + n + 1$ gelten.

(29) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine Inzidenzstruktur, die die Axiome (V) und (S) erfüllt. Zeigen Sie, daß π genau dann eine projektive Ebene ist, wenn $\mathfrak{P} \neq \emptyset$ ist, und $|\underline{l}| \geq 3$ für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$, sowie $|\mathfrak{L}_p| \geq 3$ für jeden Punkt $p \in \mathfrak{P}$ gelten.

(30) Bestimmen Sie alle Inzidenzstrukturen $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, die die Axiome (V) und (S) erfüllen, aber keine projektiven Ebenen sind.

(31) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ ein endlicher linearer Raum mit $\mathfrak{P} \neq \emptyset$. Sei $n \geq 2$ mit $|l| = |\mathfrak{L}_p| = n + 1$ für alle $l \in \mathfrak{L}$, $p \in \mathfrak{P}$. Zeigen Sie, daß π eine projektive Ebene ist.

(32) Sei G eine abelsche Gruppe. Eine Teilmenge $D \subseteq G$ heißt Differenzenmenge, wenn es für jedes $a \in G\backslash\{0\}$ genau ein Paar $(b, c) \in D \times D$ mit $a = b - c$ gibt.
Sei $D \subseteq G$ eine beliebige Teilmenge, und sei $|G| \geq 4$. Setze

$$I := \{(a, b) \in G \times G : a - b \in D\}.$$

Zeigen Sie, daß (G, G, I) genau dann eine projektive Ebene ist, wenn D eine Differenzenmenge ist.

(33) Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ ein partieller linearer Raum, der vier Punkte enthält von denen keine drei kollinear sind. Setze $\mathfrak{P}_0 := \{0\} \times \mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}_0 := \{0\} \times \mathfrak{L}$ und $I_0 := \{((0,p),(0,l)) : (p,l) \in I\}$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $\mathfrak{P}_n, \mathfrak{L}_n$ und I_n schon konstruiert, so definieren wir

$$\begin{aligned}
A_n &:= \{\{a,b\} : a,b \in \mathfrak{L}_n, a \neq b, a \text{ und } b \text{ ohne Schnittpunkt in } \mathfrak{P}_n\},\\
B_n &:= \{\{p,q\} : p,q \in \mathfrak{P}_n, p \neq q, p \text{ und } q \text{ ohne Verbindungsgerade in } \mathfrak{L}_n\},\\
\mathfrak{P}_{n+1} &:= \mathfrak{P}_n \cup (\{n+1\} \times A_n),\\
\mathfrak{L}_{n+1} &:= \mathfrak{L}_n \cup (\{n+1\} \times B_n),\\
I_{n+1} &:= I_n \cup \{((n+1,p),l) : l \in p \in A_n\} \cup \{(p,(n+1,l)) : p \in l \in B_n\}.
\end{aligned}$$

Schließlich setze

$$\mathfrak{P}^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n, \quad \mathfrak{L}^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}_n, \quad I^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Zeigen Sie, daß $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{L}^*, I^*)$ eine projektive Ebene ist, und das $I^* \cap (\mathfrak{P}_0 \times \mathfrak{L}_0) = I_0$ gilt.

(34) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ ein partieller linearer Raum und $\parallel$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{L}$ mit $\underline{a} \cap \underline{b} = \emptyset$ für $a, b \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq b$ und $a \parallel b$. Zeigen Sie, daß es eine affine Ebene $\pi^* = (\mathfrak{P}^*, \mathfrak{L}^*, I^*)$ mit $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^*$ und $I = I^* \cap (\mathfrak{P} \times \mathfrak{L})$ gibt so, daß je zwei Geraden $a, b \in \mathfrak{L}$ genau dann in π^* parallel sind, wenn $a \parallel b$ ist.

(35) Zeigen Sie, daß es einen Ternärkörper gibt, dessen additive Loop nicht assoziativ ist.

(36) Sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ ein endlicher, partieller linearer Raum, der ein Viereck enthält aber keine projektive Ebene ist. Zeigen Sie, daß die projektive Ebene $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{L}^*, I^*)$ aus Aufgabe (30) nicht endlich ist.

(37) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, und es gebe bis auf Isomorphie genau eine affine Ebene der Ordnung n. Zeigen Sie, daß es dann auch bis auf Isomorphie genau eine projektive Ebene der Ordnung n gibt.

(38) Falls Sie die nötigen topologischen Begriffe kennen zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Menge $P_2\mathbb{R}$ der eindimensionalen Teilräume des $\mathbb{R}^3$ versehen mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Quotiententopologie ist eine zusammenhängende, kompakte topologische 2-Mannigfaltigkeit.

2. $P_2\mathbb{R}$ ist zu $B^2/\sim$ homöomorph, wobei $\sim$ die im Text definierte Äquivalenzrelation ist.

3. Zeigen Sie, daß die Restmenge $\overline{P_2\mathbb{R}\backslash M}$ homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist.

4. Ist l eine Gerade der reellen projektiven Ebene, so ist ihre Punktreihe in $P_2\mathbb{R}$ homöomorph zu S^1, und $P_2\mathbb{R}\backslash l$ ist homöomorph zum $\mathbb{R}^2$.

(39) Zeigen Sie weiter, daß der Geradenraum $\mathfrak{L}$ der reellen affinen Ebene homöomorph zum Möbiusband ist, wobei wir eine Menge $U \subseteq \mathfrak{L}$ offen nennen, wenn die Menge

$$\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : p \neq q, p \vee q \in U\}$$

offen im $\mathbb{R}^4$ ist.

(40) Zeigen Sie, daß die im Text definierte Inzidenstruktur E_s zu $(\overline{M_k})_{[0]}$ isomorph ist. Insbesondere ist E_s tatsächlich eine affine Ebene.

(41) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene. Eine projektive Ebene $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ heißt eine Unterebene von π, wenn $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}$ und $I' = (\mathfrak{P}' \times \mathfrak{L}') \cap I$ gelten. Seien $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}$, wobei $\mathfrak{P}'$ ein Viereck enthalte. Zeigen Sie, daß $(\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I \cap (\mathfrak{P}' \times \mathfrak{L}'))$ genau dann eine Unterebene von π ist, wenn $p \vee q \in \mathfrak{L}'$ für alle $p, q \in \mathfrak{P}'$ mit $p \neq q$ und $a \wedge b \in \mathfrak{P}'$ für alle $a, b \in \mathfrak{L}'$ mit $a \neq b$ gelten.

(42) Seien (K,T) ein Ternärkörper und $K' \subseteq K$ ein Unterternärkörper von (K,T). Setze $T' := T|K'^3$. Zeigen Sie, daß dann $P(K',T')$ eine Unterebene von $P(K,T)$ ist.

(43) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ eine Unterebene von π. Sei (o,e,u,v) ein Viereck von π, und seien (K,T) der zugehörige Ternärkörper sowie $\eta : \pi \to P(K,T)$ der Koordinatenisomorphismus aus Satz 11. Es gelte $o,e,u,v \in \mathfrak{P}'$.
Dann ist (o,e,u,v) auch ein Viereck in π', der zugehörige Ternärkörper (K',T') ist ein Unterternärkörper von (K,T), und ist $\eta' : \pi' \to P(K',T')$ der Koordinatenisomorphismus, so gilt $\eta' = \eta|K'$.

(44) Seien (K,T) ein Ternärkörper und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ eine Unterebene von $P(K,T)$ mit $(0,0),(1,1),(0),(\infty) \in \mathfrak{P}'$. Zeigen Sie, daß dann

$$K' := \{x \in K : (x,x) \in \mathfrak{P}'\}$$

ein Unterternärkörper von K mit $\pi' = P(K',T')$ ist, wobei wieder $T' := T|K'^3$ gesetzt ist.

(45) Seien K ein Schiefkörper und V ein dreidimensionaler Vektorraum über K. Seien K' ein Unterschiefkörper von K und (e_1,e_2,e_3) eine Basis von V. Setze $V' := e_1K' + e_2K' + e_3K'$. Dann ist V' ein dreidimensionaler Vektorraum über K', und sind $i \in \{1,2\}$, $U \in T_i(V')$ bezüglich K', so ist $\psi_i(U) := \langle U \rangle \leq V$ ein Element von $T_i(V)$ mit $\psi_i(U) \cap V' = U$.
Sind

$$\mathfrak{P}' := \psi_1(T_1(V')),\ \mathfrak{L}' := \psi_2(T_2(V')),$$

so ist $\pi := (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', \subseteq)$ eine Unterebene von $\mathrm{PG}(V)$, und $\psi_1 : \mathrm{PG}(V') \to \pi$ ist ein Isomorphismus.

(46) Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Zeigen Sie, daß jede Unterebene von $\mathrm{PG}(V)$ von der in der vorigen Aufgabe beschriebenen Form ist.

(47) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}', I')$ eine Unterebene. Wir nennen π' eine Baer Unterebene von π, wenn $\mathfrak{P}' \neq \mathfrak{P}$ ist, und die beiden folgenden Bedingungen gelten:

(a) $\forall (p \in \mathfrak{P} \backslash \mathfrak{P}') \exists^1 (l \in \mathfrak{L}') : pIl.$

(b) $\forall (l \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{L}') \exists^1 (p \in \mathfrak{P}') : pIl.$

Seien (o,e,u,v) ein Viereck in π mit $o,e,u,v \in \mathfrak{P}'$ und seien (K,T) der zugehörige Ternärkörper sowie K' der zu π' gehörige Unterternärkörper von (K,T). Zeigen Sie, daß π' genau dann eine Baer Unterebene von π ist, wenn $K' \neq K$ ist, und die beiden folgenden Bedingungen gelten:

(a) $\forall (s,t \in K, s \notin K') \exists^1 (x \in K') : T(s,x,t) \in K'.$

(b) $\forall (x,y \in K, x \notin K') \exists^1 ((s,t) \in K' \times K') : T(s,x,t) = y.$

(48) Seien π eine endliche projektive Ebene der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ und π' eine echte Unterebene von π. Sei m die Ordnung von π'. Dann gilt $m^2 \leq n$ und genau dann ist $n = m^2$, wenn π' eine Baer Unterebene von π ist.

(49) Seien K ein Schiefkörper, V ein dreidimensionaler Vektorraum über K, K' ein Unterschiefkörper von K und e_1,e_2,e_3 eine Basis von V. Setze $V' := e_1K' + e_2K' + e_3K'$ und sei π die wie oben gebildete zu $\mathrm{PG}(V')$ isomorphe Unterebene von $\mathrm{PG}(V)$. Zeigen Sie, daß π genau dann eine Baer Unterebene von $\mathrm{PG}(V)$ ist, wenn K sowohl als Links- als auch als Rechtsvektorraum über K' zweidimensional ist.

§4 Isomorphismen affiner und projektiver Ebenen

In den Paragraphen §2, §3 haben wir affine und projektive Ebenen eingeführt und den Zusammenhang zwischen diesen beiden Strukturen studiert. Außerdem haben wir als koordinatisierende algebraische Struktur das Konzept eines Ternärkörpers diskutiert. Wir haben die folgenden Konstruktionen durchgeführt:

- Aus einer affinen Ebene π haben wir als projektiven Abschluß die projektive Ebene $\overline{\pi}$ gewonnen, indem die sogenannte Ferngerade l_∞ hinzugefügt wurde.
- Sind umgekehrt eine projektive Ebene π und eine Gerade l von π gegeben, so haben wir durch Entfernen von l die affine Ableitung π_l konstruiert.
- Ist K ein Ternärkörper, so haben wir eine affine Koordinatenebene $A(K)$ über K und auch eine projektive Koordinatenebene $P(K)$ über K konstruiert.
- Ist π eine affine Ebene versehen mit einem Koordinatensystem, so haben wir aus der Diagonale des Koordinatensystems einen Ternärkörper gemacht.
- Ebenso haben wir aus einer projektiven Ebene mit einem gegeben Viereck einen Ternärkörper hergestellt.

Außerdem haben wir in diversen Lemmata und Sätzen gezeigt, daß alle diese Konstruktionen zusammenpassen, starten wir zum Beispiel mit einer projektiven Ebene π, leiten diese an einer Geraden l ab, und bilden letztlich den projektiven Abschluß $\overline{\pi_l}$ der affinen Ebene π_l, so landen wir wieder bei der projektiven Ebene π mit der alles begonnen hat, zumindest bis auf Isomorphie.

Einige Fragen nach dem Verhalten dieser Konstruktionen haben wir allerdings noch nicht geklärt, zum Beispiel: Was passiert wenn eine projektive Ebene an zwei verschiedenen Geraden abgeleitet wird? Um derartige Probleme wollen wir uns in diesem kurzen Paragraphen kümmern. Nach §3.Lemma 9 wissen wir, daß sich ein Isomorphismus zwischen affinen Ebenen eindeutig zu einem Isomorphismus der projektiven Abschlüsse fortsetzt. Dieses Lemma ist der Kern des folgenden Satzes.

Satz 1: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei projektive Ebenen, und $l \in \mathfrak{L}$, $l' \in \mathfrak{L}'$.*

(a) *Ist $\varphi : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus mit $\varphi(l) = l'$, so ist die Einschränkung $\varphi|\mathfrak{P}\backslash l : \pi_l \to \pi'_{l'}$ ein Isomorphismus affiner Ebenen.*

(b) *Ist $\varphi : \pi_l \to \pi'_{l'}$ ein Isomorphismus affiner Ebenen, so gibt es genau einen Isomorphismus $\overline{\varphi} : \pi \to \pi'$ mit $\overline{\varphi}|\mathfrak{P}\backslash l = \varphi$. Es gilt $\overline{\varphi}(l) = l'$.*

(c) *Genau dann ist $\pi_l \simeq \pi'_{l'}$, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : \pi \to \pi'$ mit $\varphi(l) = l'$ gibt.*

Beweis: **(a)** Dies ist klar.
(b) Nach §3.Lemma 8 gibt es eindeutige Isomorphismen $\theta : \pi \to \overline{\pi_l}$ und $\theta' : \pi' \to \overline{\pi'_{l'}}$ mit $\theta|\mathfrak{P}\backslash l = \mathrm{id}$ und $\theta'|\mathfrak{P}'\backslash l' = \mathrm{id}$, und es ist $\theta(l) = l_\infty$, $\theta'(l') = l_\infty$. Weiter gibt es nach §3.Lemma 9 genau einen Isomorphismus $\widetilde{\varphi} : \overline{\pi_l} \to \overline{\pi'_{l'}}$ mit $\widetilde{\varphi}|\mathfrak{P}\backslash l = \varphi$, und es ist $\widetilde{\varphi}(l_\infty) = l_\infty$. Wir erhalten den Isomorphismus

$$\overline{\varphi} := \theta'^{-1}\widetilde{\varphi}\theta : \pi \to \pi'$$

mit $\overline{\varphi}(l) = l'$. Offenbar ist $\overline{\varphi}|\mathfrak{P}\backslash l = \varphi$. Nach §3.Lemma 7 ist $\overline{\varphi}$ auch eindeutig bestimmt.
(c) Dies ist klar nach (a) und (b).

■

Angenommen wir wollen alle affinen Ebenen einer gegebenen Ordnung n bis auf Isomorphie bestimmen. Jede affine Ebene der Ordnung n ist isomorph zu einer affinen Ableitung einer projektiven Ebene der Ordnung n, und unser Satz sagt unter anderem, daß affine Ableitungen nicht isomorpher projektiver Ebenen niemals isomorph sein können. Also bietet sich die folgende Vorgehensweise an:

1. Bestimme alle projektiven Ebenen der Ordnung n, bis auf Isomorphie.

2. Zu jeder der im ersten Schritt gefundenen projektiven Ebenen bestimme alle affinen Ableitungen. Hierzu nennen wir zwei Geraden äquivalent, wenn sie durch einen Isomorphismus der projektiven Ebene auf sich selbst aufeinander abgebildet werden. Dann sind die Äquivalenzklassen dieser Relation zu bestimmen, idealerweise dadurch das alle Isomorphismen der projektiven Ebene auf sich selbst bestimmt werden.

Praktisch scheitert dieses Verfahren leider schon beim ersten Schritt. Die einzige Ordnung n für die es mehr als einen Isomorphietyp projektiver Ebenen der Ordnung n gibt, und trotzdem alle projektiven Ebenen der Ordnung n bekannt sind, ist $n = 9$.

Wir hatten in §2 und §3 schon erwähnt, daß es vier projektive Ebenen der Ordnung 9 und sieben affine Ebenen der Ordnung 9 gibt. In einer der vier projektiven Ebenen sind alle Geraden äquivalent, nämlich in der projektiven Koordinatenebene $P_2\mathrm{GF}(9)$ über dem Körper mit neun Elementen. In jeder der drei anderen projektiven Ebenen gibt es genau zwei verschiedene Typen von Geraden. Dies führt auf die $1 + 3 \cdot 2 = 7$ affinen Ebenen der Ordnung 9.

Wie sich Isomorphismen von Ternärkörpern zu Isomorphismen affiner und projektiver Ebenen verhalten, wollen wir hier explizit nur für den projektiven Fall vorführen. Die entsprechenden Formulierungen für affine Ebenen werden dann Übungen. Wir benötigen ein kleines Lemma über Isomorphismen von Ternärkörpern.

Lemma 2: *Sei $\varphi : K \to K'$ ein Isomorphismus von Ternärkörpern. Dann gelten $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Weiter ist φ ein Isomorphismus der additiven und multiplikativen Loop von (K, T) und (K', T').*

Beweis: Seien $s', x', t' \in K'$. Da φ bijektiv ist, gibt es $s, x, t \in K$ mit $\varphi(s) = s'$, $\varphi(x) = x'$ und $\varphi(t) = t'$. Es folgt

$$T'(\varphi(0), x', t') = T'(\varphi(0), \varphi(x), \varphi(t)) = \varphi(T(0, x, t)) = \varphi(t) = t',$$

und analog ergeben sich $T'(s', \varphi(0), t') = t'$, $T'(\varphi(1), x', \varphi(0)) = x'$ und die Gleichung $T'(s', \varphi(1), \varphi(0)) = s'$. Also sind $\varphi(0), \varphi(1)$ Null und Eins von K'. Die Eindeutigkeit von Null und Eins (§2.Lemma 8) liefert $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$.

Für $x, y \in K$ folgen damit

$$\varphi(x + y) = \varphi(T(1, x, y)) = T'(\varphi(1), \varphi(x), \varphi(y)) = T'(1, \varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

und ebenso $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

■

Satz 3: *Es gelten:*

(a) *Sind (K, T), (K', T') zwei Ternärkörper und $\varphi : K \to K'$ ein Isomorphismus, so ist $\psi : P(K, T) \to P(K', T')$ definiert durch*

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (\varphi(x), \varphi(y)) \ (x, y \in K) & [s, t] &\mapsto [\varphi(s), \varphi(t)] \ (s, t \in K) \\ (s) &\mapsto (\varphi(s)) \ (s \in K) & [c] &\mapsto [\varphi(c)] \ (c \in K) \\ (\infty) &\mapsto (\infty) & [\infty] &\mapsto [\infty] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus projektiver Ebenen.

(b) *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ projektive Ebenen, und seien $(o, e, u, v) \in \mathfrak{P}^4$ und $(o', e', u', v') \in \mathfrak{P}'^4$ Vierecke in π beziehungsweise π'. Weiter sei $\varphi : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus mit $\varphi(o) = o'$, $\varphi(e) = e'$, $\varphi(u) = u'$ und $\varphi(v) = v'$. Sind dann (K, T), (K', T') die zum jeweiligen Viereck in π beziehungsweise π' gehörenden Ternärkörper, so ist die Einschränkung $\varphi|K : K \to K'$ ein Isomorphismus von Ternärkörpern.*

(c) *Seien π, π', (o, e, u, v), (o', e', u', v'), (K, T), (K', T') wie in (b). Ist dann $\varphi_0 : (K, T) \to (K', T')$ ein Isomorphismus, so existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : \pi \to \pi'$ mit $\varphi(o) = o'$, $\varphi(e) = e'$, $\varphi(u) = u'$ und $\varphi(v) = v'$ so, daß $\varphi|K = \varphi_0$ gilt.*

(d) *Seien π, π', (o, e, u, v), (o', e', u', v'), (K, T), (K', T') wie in (b). Dann ist genau dann $(K, T) \simeq (K', T')$, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : \pi \to \pi'$ mit $\varphi(o) = o'$, $\varphi(e) = e'$, $\varphi(u) = u'$ und $\varphi(v) = v'$ gibt.*

Beweis: **(a)** Da φ bijektiv ist, sind die die angegebenen Abbildungen $\psi : K^2 \cup K \cup \{(\infty)\} \to K'^2 \cup K' \cup \{(\infty)\}$ und $\psi' : K^2 \cup K \cup \{[\infty]\} \to K'^2 \cup K' \cup \{[\infty]\}$ offenbar bijektiv. Für $x, y, s, t \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(x, y) I' \psi'([s, t]) &\iff \varphi(y) = T'(\varphi(s), \varphi(x), \varphi(t)) = \varphi(T(s, x, t)) \\ &\iff y = T(s, x, t) \iff (x, y) I [s, t]. \end{aligned}$$

Die restlichen möglichen Inzidenzen bleiben trivialerweise erhalten.
(b) Es ist $\varphi(o \vee e) = \varphi(o) \vee \varphi(e) = o' \vee e'$, und ebenso folgen $\varphi(u \vee v) = u' \vee v'$ und $\varphi((o \vee e) \wedge (u \vee v)) = (o' \vee e') \wedge (u' \vee v')$. Wegen

$$K = (o \vee e) \backslash \{(o \vee e) \wedge (u \vee v)\},\ K' = (o' \vee e') \backslash \{(o' \vee e') \wedge (u' \vee v')\},$$

induziert φ eine Bijektion $\varphi|K : K \to K'$. Sind $s, x, t \in K$, so gilt nach Definition der Ternärverknüpfung

$$\begin{aligned} T'(\varphi(s), \varphi(x), \varphi(t)) &= (((((o' \vee v') \wedge (\varphi(t) \vee u')) \vee ((o' \vee ((e' \vee v') \wedge (\varphi(s) \vee u'))) \\ &\quad \wedge (u' \vee v'))) \wedge (\varphi(x) \vee v')) \vee u') \wedge K' \\ &= (((((\varphi(o) \vee \varphi(v)) \wedge (\varphi(t) \vee \varphi(u))) \vee ((\varphi(o) \vee ((\varphi(e) \vee \varphi(v)) \\ &\quad \wedge (\varphi(s) \vee \varphi(u)))) \wedge (\varphi(u) \vee \varphi(v)))) \wedge (\varphi(x) \vee \varphi(v))) \vee \varphi(u)) \\ &\quad \wedge \varphi(K) \\ &= \varphi((((((o \vee v) \wedge (t \vee u)) \vee ((o \vee ((e \vee v) \wedge (s \vee u))) \wedge (u \vee v))) \\ &\quad \wedge (x \vee v)) \vee u) \wedge K) \\ &= \varphi(T(s, x, t)), \end{aligned}$$

d.h. $\varphi|K$ ist ein Isomorphismus von Ternärkörpern.
(c) Mit Teil (a) erhalten wir zu φ_0 einen Isomorphismus $\psi : P(K, T) \to P(K', T')$. Seien

$$\eta : \pi \to P(K, T),\ \eta' : \pi' \to P(K', T')$$

die Isomorphismen aus §3.Satz 11. Es gelten $\eta(o) = (o, o)$, $\eta(e) = (e, e)$, $\eta(u) = (o)$, $\eta(v) = (\infty)$, und analog für η'. Also ist $\varphi := \eta'^{-1} \psi \eta : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus mit $\varphi(o) = o'$, $\varphi(e) = e'$, $\varphi(u) = u'$ und $\varphi(v) = v'$ nach Lemma 2. Für $x \in K$ gilt

$$\varphi(x) = \eta'^{-1}(\psi(\eta(x))) = \eta'^{-1}(\psi(x, x)) = \eta'^{-1}(\varphi_0(x), \varphi_0(x)) = \varphi_0(x),$$

d.h. es ist $\varphi|K = \varphi_0$. Wir kommen zur Eindeutigkeit. Sei $\theta : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus mit allen geforderten Eigenschaften. Sei $p \in \mathfrak{P} \backslash (u \vee v)$. Insbesondere ist $p \neq u, v$. Es ist $p \vee u = u \vee ((p \vee u) \wedge K)$, also auch $\theta(p \vee u) = u' \vee \varphi_0((p \vee u) \wedge K)$. Ebenso folgt $\theta(p \vee v) = v' \vee \varphi_0((p \vee v) \wedge K)$, und mit $p = (p \vee u) \wedge (p \vee v)$ ergibt dies $\theta(p) = (u' \vee \varphi_0((p \vee u) \wedge K)) \wedge (v' \vee \varphi_0((p \vee v) \wedge K))$. Ebenso können wir für φ schließen, und erhalten $\theta(p) = \varphi(p)$. Mit §3.Lemma 7 folgt $\theta = \varphi$.
(d) Klar nach (b) und (c).

■

Für die affinen Versionen dieses Satzes wollen wir hier nur ein Beispiel angeben.

Satz 4: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ und $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei affine Ebenen und seien (o, e, U, V) ein Koordinatensystem von π und (o', e', U', V') eines von π'. Seien (K, T) beziehungsweise (K', T') die zu diesen Koordinatensystemen gehörenden Ternärkörper. Ist dann $\varphi : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus mit $\varphi(o) = o'$, $\varphi(e) = e'$, $\varphi(U) = U'$ und $\varphi(V) = V'$, so ist die Einschränkung $\varphi|K : K \to K'$ ein Isomorphismus von Ternärkörpern.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.(b). Alternativ kann man den Satz auch auf den vorigen Satz zurückführen.

■

Wir wollen Satz 3 einmal benutzen um die folgende Frage zu klären: Seien K, K' zwei Schiefkörper, V ein dreidimensionaler Vektorraum über K und V' ein dreidimensionaler Vektorraum über K'. Wann ist $\mathrm{PG}(V) \simeq \mathrm{PG}(V')$?

Ist K ein Schiefkörper, so hatten wir K durch $T(s,x,t) := sx + t$ zu einem Ternärkörper gemacht. Wir wollen uns überlegen, daß zwei Schiefkörper genau dann isomorph sind, wenn sie als Ternärkörper isomorph sind. Es ist nützlich gleich eine ähnliche Frage für allgemeinere Ternärkörper zu behandeln.

Definition 1: Ein Ternärkörper (K,T) heißt linear, wenn $T(s,x,t) = sx + t$ für alle $s,x,t \in K$ gilt. Dabei sind $+$ und $\cdot$ die additive beziehungsweise multiplikative Loop des Ternärkörpers.

Lemma 5: *Seien (K,T), (K',T') zwei lineare Ternärkörper und $\varphi : K \to K'$ eine bijektive Abbildung. Dann ist φ genau dann ein Isomorphismus von Ternärkörpern, wenn $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ und $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ für alle $x, y \in K$ gelten.*

Beweis: Dies ist klar nach Lemma 2.

■

Als nächstes berechnen wir die zu $\mathrm{PG}(V)$ gehörenden Ternärkörper.

Satz 6: *Seien K ein Schiefkörper und V ein dreidimensionaler Vektorraum über K. Sei (o,e,u,v) ein Viereck in $\mathrm{PG}(V)$. Dann existiert eine Basis e_1, e_2, e_3 von V mit*

$$u = e_1K,\ v = e_2K,\ o = e_3K,\ e = (e_1 + e_2 + e_3)K.$$

Weiter ist die Abbildung

$$\varphi : K \to \underline{\langle e_1 + e_2, e_3\rangle}\backslash\{(e_1+e_2)K\}; x \mapsto ((e_1+e_2)x + e_3)K$$

ein Isomorphismus von K auf den Ternärkörper des Vierecks (o,e,u,v).

Beweis: Da u, v, o drei eindimensionale Teilräume von V sind, gibt es in V drei Vektoren $f_1, f_2, f_3 \in V\backslash\{0\}$ mit $u = f_1K$, $v = f_2K$ und $o = f_3K$. Wären f_1, f_2, f_3 linear abhängig, so wäre das Erzeugnis $\langle f_1, f_2, f_3\rangle \leq V$ höchstens zweidimensional, d.h. u, v, o liegen auf einer Geraden von $\mathrm{PG}(V)$; aber (o,e,u,v) ist ein Viereck, und dies ist ein Widerspruch. Also sind f_1, f_2, f_3 linear unabhängig und somit eine Basis von V. Wähle $f \in V\backslash\{0\}$ mit $e = fK$. Dann existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit $f = f_1\lambda_1 + f_2\lambda_2 + f_3\lambda_3$. Wäre $\lambda_1 = 0$, so $f \in \langle f_2, f_3\rangle$ und v, o, e liegen auf der Geraden $\langle f_2, f_3\rangle$; ein Widerspruch. Also ist $\lambda_1 \neq 0$, und analog folgen $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Setzen wir jetzt

$$e_i := f_i\lambda_i \in V \quad \text{für } i = 1,2,3,$$

so ist e_1, e_2, e_3 eine Basis von V mit den verlangten Eigenschaften.

Die Ferngerade des Vierecks ist $W = u \vee v = \langle e_1, e_2\rangle$, und die Diagonale ist $o \vee e = \langle e_1 + e_2, e_3\rangle$. Der Schnittpunkt der Diagonalen mit W ist $(e_1 + e_2)K$, d.h. die Punktmenge des Ternärkörpers zum Viereck (o, e, u, v) ist

$$K' = \underline{\langle e_1 + e_2, e_3\rangle}\backslash\{(e_1 + e_2)K\},$$

wie im Satz angegeben. Nach §3.Satz 5 haben wir den Isomorphismus

$$\psi : \mathrm{AG}(W) \to \mathrm{PG}(V)_W; w \mapsto (w + e_3)K,$$

und nach §3.Satz 11 ist K' auch der Ternärkörper der affinen Ebene $\mathrm{PG}(V)_W$ zum Koordinatensystem (o, e, u, v), wobei wir u, v mit den entsprechenden Parallelscharen identifizieren. Es ist $\psi(0) = e_3K = o$ und $\psi(e_1+e_2) = (e_1+e_2+e_3)K = e$. Weiter seien U die Parallelschar von $\mathrm{AG}(W)$ in Richtung e_1K und U' die Parallelschar in Richtung e_2K. Die Gerade e_1K wird von ψ auf $\langle e_1, e_3\rangle$ abgebildet, d.h. $\psi(U) = u$. Analog folgt $\psi(U') = v$. Nach Satz 4 ist die Einschränkung $\psi : K'' \to K'$ ein Isomorphismus von Ternärkörpern, wobei K'' der Ternärkörper von $\mathrm{AG}(W)$ zum Koordinatensystem $(0, e_1 + e_2, U, U')$ ist.

Nach §2.Lemma 11 ist $x \mapsto (e_1 + e_2)x$ ein Isomorphismus von K auf K''. Durch Zusammensetzen mit ψ erhalten wir den Isomorphismus

$$x \in K \mapsto (e_1 + e_2)x \mapsto \psi((e_1 + e_2)x) = ((e_1 + e_2)x + e_3)K$$

von K auf K'.

■

Damit erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 7: *Seien K, K' zwei Schiefkörper und V, V' dreidimensionale Vektorräume über K beziehungsweise K'. Dann ist genau dann* $\mathrm{PG}(V) \simeq \mathrm{PG}(V')$, *wenn $K \simeq K'$ gilt.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Sei $\varphi : \mathrm{PG}(V) \to \mathrm{PG}(V')$ ein Isomorphismus. Wähle ein Viereck (o, e, u, v) von $\mathrm{PG}(V)$. Dann bilden die Bildpunkte $o' := \varphi(o)$, $e' := \varphi(e)$, $u' := \varphi(u)$ und $v' := \varphi(v)$ ein Viereck von $\mathrm{PG}(V')$. Nach Satz 3.(b) sind die Ternärkörper von $\mathrm{PG}(V)$ und $\mathrm{PG}(V')$ bezüglich dieser Vierecke isomorph. Nach Satz 6 sind diese Ternärkörper ihrerseits zu K beziehungsweise K' isomorph, d.h. $K \simeq K'$ als Ternärkörper. Nach Lemma 5 sind K, K' auch als Schiefkörper isomorph.
"'$\Longleftarrow$"' Wähle Vierecke in $\mathrm{PG}(V)$ und $\mathrm{PG}(V')$. Mit Satz 6 folgt, daß die zugehörigen Ternärkörper isomorph sind, und nach Satz 3.(c) ist auch $\mathrm{PG}(V) \simeq \mathrm{PG}(V')$.

■

Von besonderem Interesse sind die Isomorphismen einer projektiven Ebene auf sich selbst, d.h. die Automorphismen der Ebene. Da dies nach §1.Lemma 2.(d) genau die kollinearitätserhaltenden Bijektion der Ebene sind, spricht man auch von Kollineationen, d.h. eine Kollineation ist einfach ein Automorphismus. Da die Identität

eine Kollineation ist, und Umkehrabbildungen sowie Hintereinanderausführungen von Kollineationen wieder Kollineationen sind, ist die Menge

$$\mathrm{Aut}(\pi)$$

aller Kollineationen einer projektiven Ebene π eine Gruppe, genannt die Kollineations- oder Automorphismengruppe von π. Ebenso definieren wir die Kollineationsgruppe einer affinen Ebene, und die Automorphismengruppe eines Ternärkörpers.

Nach Definition ist die Kollineationsgruppe eine Gruppe bestehend aus Permutationen der Punktmenge, eine sogenannte Permutationsgruppe. Wir brauchen leider noch einen etwas allgemeineren Begriff. Stellen Sie sich einmal vor, eine Untergruppe $G \leq \mathrm{Aut}(\pi)$ fixiert eine Gerade l. Dann ist es oft von Interesse die Wirkung von G auf l zu betrachten, d.h. für jedes $g \in G$ die Einschränkung $g|l : l \to l$ zu nehmen. Dann können wir die Elemente von G zwar als Permutationen auf l wirken lassen, sie sind aber nicht von Haus aus Permutationen der Menge l, sondern nur der grösseren Punktmenge. Im allgemeinen ist G auch nicht isomorph zur Menge der Einschränkungen

$$\{g|l : g \in G\},$$

denn es kann ja passieren, daß es Elemente $g \neq 1$ gibt, die jeden Punkt der Geraden l festlassen. Um derartige Situationen zu erfassen, wird der Begriff einer Transformationsgruppe eingeführt.

Definition 2: Sei G eine Gruppe. Eine Wirkung von G auf einer Menge Ω ist eine Abbildung

$$\omega : \Omega \times G \to \Omega; (x, g) \mapsto x^g (= xg),$$

die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(a) Für alle $x \in \Omega$ ist $x^1 = x$.

(b) Für alle $x \in \Omega$, $a, b \in G$ gilt $(x^a)^b = x^{ab}$.

Eine Transformationsgruppe ist ein Tripel (G, Ω, ω) bestehend aus einer Gruppe G, einer Menge Ω und einer Wirkung ω von G auf Ω. Etwas verkürzend sagen wir auch einfach, daß G auf Ω wirkt.

Sind (G, Ω, ω) eine Transformationsgruppe und $a \in G$, so ist die Abbildung

$$\overline{a} : \Omega \to \Omega; x \mapsto x^a$$

bijektiv mit der Umkehrabbildung $\overline{a^{-1}}$. Nach Bedingung (b) ist die Abbildung

$$\overline{} : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$$

ein Homomorphismus von G in die Gruppe aller Permutationen von Ω. Der Kern dieses Homomorphismus

$$G_{[\Omega]} := \{a \in G : \overline{a} = \mathrm{id}\} = \{a \in G | \forall (x \in \Omega) : x^a = x\}$$

heißt der Ineffektivitätskern von G auf Ω. Wir haben das folgende einfache, aber wichtige, Lemma.

Lemma 8: *Seien (G, Ω, ω) eine Transformationsgruppe und $x \in \Omega$. Dann ist die Standgruppe*

$$G_x := \{a \in G : x^a = x\}$$

eine Untergruppe von G.

Beweis: Offenbar ist $1 \in G_x$. Ist $a \in G_x$, so gilt auch

$$x^{a^{-1}} = (x^a)^{a^{-1}} = x^{aa^{-1}} = x^1 = x,$$

d.h. es ist $a^{-1} \in G_x$. Sind letztlich $a, b \in G_x$, so haben wir

$$x^{ab} = (x^a)^b = x^b = x,$$

d.h. $ab \in G_x$.

■

Dies können wir auch mehrfach anwenden, sind zum Beispiel $x, y \in \Omega$, so haben wir eine Standuntergruppe

$$G_{x,y} := (G_x)_y = (G_y)_x,$$

und so weiter. Ist $\Gamma = \mathrm{Aut}(\pi)$ die Kollineationsgruppe einer projektiven Ebene π, so haben wir zunächst die Wirkung von Γ auf der Punktmenge der projektiven Ebene. Aber wir können Γ auch als eine Transformationsgruppe auf der Geradenmenge $\mathfrak{L}$ auffassen, indem einfach $l^a := a(l)$ für $l \in \mathfrak{L}$, $a \in \Gamma$ gesetzt wird. In derartigen Situationen in denen klar ist welche Wirkung gemeint ist, sagen wir schlicht "Γ wirkt auf $\mathfrak{L}$" ohne die Abbildung ω hinzuschreiben. Entsprechen reden wir von der Standgruppe Γ_l auf einer Geraden, der Standgruppe auf einem Viereck, und so weiter.

Jede Kollineation einer projektiven Ebene π wirkt auch als eine Bijektion auf der Geradenmenge der projektiven Ebene, und somit können wir Kollineationen von π auch als Kollineationen der dualen Ebene π^* auffassen. Wegen $\pi^{**} = \pi$ zeigt dasselbe Argument, daß hiermit alle Kollineationen von π^* beschrieben sind, d.h. wir können identifizieren

$$\mathrm{Aut}(\pi^*) = \mathrm{Aut}(\pi).$$

Wir werden im folgenden Automorphismen immer als Exponenten schreiben, d.h. wir schreiben x^φ anstelle von $\varphi(x)$. Mit diesen Notationen haben wir den folgenden wichtigen Satz.

Satz 9: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene.*

(a) *Ist $l \in \mathfrak{L}$ eine Gerade, so ist die Abbildung*

$$\mathrm{Aut}(\pi)_l \to \mathrm{Aut}(\pi_l); \alpha \mapsto \alpha|\mathfrak{P}\backslash l$$

ein Isomorphismus.

(b) *Sei (o,e,u,v) ein Viereck in π, und bezeichne (K,T) den Ternärkörper bezüglich dieses Vierecks. Dann ist*

$$\mathrm{Aut}(\pi)_{o,e,u,v} \to \mathrm{Aut}(K,T); \alpha \mapsto \alpha|K$$

ein Isomorphismus.

Beweis: **(a)** Ist α eine Kollineation von π mit $l^\alpha = l$, so ist $\alpha|\mathfrak{P}\backslash l$ nach Satz 1.(a) eine Kollineation der affinen Ebene π_l. Offenbar definiert dies einen Homomorphismus, und nach Satz 1.(b) ist dieser bijektiv.
(b) Dies folgt wie (a) mit Satz 3.(b,c).

■

In §3 hatten wir uns bereits gefragt bei welchen projektiven Ebenen die zu beliebigen Vierecken gebildeten Ternärkörper alle isomorph sind. Dies können wir jetzt beantworten, allerdings benötigen wir einen kleinen Begriff um die Bedingung aussprechen zu können.

Definition 3: Sei (G,Ω,ω) eine Transformationsgruppe. Dann wirkt G transitiv auf Ω, wenn es für je zwei Punkte $x,y \in \Omega$ immer ein $a \in G$ mit $y = x^a$ gibt.

Damit haben wir:

Korollar 10: *Sei π eine projektive Ebene. Genau dann sind alle zu beliebigen Vierecken von π gehörenden Ternärkörper zueinander isomorph, wenn die Kollineationsgruppe von π transitiv auf der Menge aller Vierecke von π wirkt.*

Beweis: Dies ist klar nach Satz 3.

■

Mit Satz 6 folgt weiter:

Korollar 11: *Ist V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K, so wirkt die Kollineationsgruppe von* $\mathrm{PG}(V)$ *transitiv auf der Menge aller Vierecke von* $\mathrm{PG}(V)$.

Es ist allerdings etwas gekünstelt, dieses Ergebnis auf dem Umweg über Ternärkörper zu erhalten. Einen direkten Beweis können Sie als eine Übungsaufgabe angeben. Im Zusammenhang mit diesem Thema wollen wir noch kurz Kollineationen der projektiven Ebenen über Vektorräumen konstruieren. Seien also K ein Schiefkörper und V ein dreidimensionaler Vektorraum über K. Ist $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ eine invertierbare lineare Abbildung von V auf sich, so bildet φ ein- beziehungsweise zweidimensionale Teilräume von V wieder auf solche ab. Es folgt, daß die induzierte Abbildung

$$\overline{\varphi} : T_1(V) \to T_1(V)$$

eine Kollineation von $\mathrm{PG}(V)$ ist. Die Abbildung

$$\overline{\ } : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$$

ist offenbar ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild dieses Homomorphismus

$$\mathrm{PGL}(V) := \{\overline{\varphi} : \varphi \in \mathrm{GL}(V)\}$$

ist somit eine Untergruppe der Kollineationsgruppe von $\mathrm{PG}(V)$, genannt die projektiv lineare Gruppe von $\mathrm{PG}(V)$. Im Allgemeinen ist die volle Kollineationsgruppe von $\mathrm{PG}(V)$ allerdings noch etwas größer, aber fürs erste reichen uns diese Automorphismen. Mit Satz 6 ist es leicht, das folgende Lemma einzusehen. Der detaillierte Beweis ist, wie schon gesagt, eine leichte Übungsaufgabe.

Lemma 12: *Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Dann wirkt die Gruppe $\mathrm{PGL}(V)$ transitiv auf der Menge aller Vierecke von $\mathrm{PG}(V)$.*

Aufgaben zu §4

(50) Geben Sie einen Beweis für Satz 4 an.

(51) Seien K, K' zwei Schiefkörper und V, V' zweidimensionale Vektorräume über K beziehungsweise K'. Zeigen Sie, daß genau dann $\mathrm{AG}(V) \simeq \mathrm{AG}(V')$ gilt, wenn $K \simeq K'$ ist.

(52) Die endliche Gruppe G wirke transitiv auf der Menge Ω. Sei $x \in \Omega$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi : G/G_x \to \Omega; G_x a \mapsto x^a$$

bijektiv ist, und folgern sie $|G| = |G_x| \cdot |\Omega|$.

(53) Die Gruppe G wirke auf der Menge Ω. Zeigen Sie, daß die Menge $\{x^G : x \in \Omega\}$ eine Partition von Ω ist. Die Elemente dieser Partition heißen die Bahnen von G auf Ω. Die Gruppe G wirkt auf jeder Bahn transitiv.

(54) Die endliche Gruppe G wirke auf der endlichen Menge Ω. Für jedes $g \in G$ sei

$$f(g) := |\{x \in \Omega : x^g = x\}|.$$

Weiter sei t die Anzahl der Bahnen von G auf Ω. Dann gilt

$$\sum_{g \in G} f(g) = t|G|.$$

(55) Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und φ eine Kollineation von $\mathrm{PG}(V)$, die die vier Punkte eines Vierecks alle festhält. Zeigen Sie, daß dann schon $\varphi = 1$ ist.

(56) Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathrm{PGL}(V)$ transitiv auf der Menge aller Vierecke von $\mathrm{PG}(V)$ wirkt.

(57) Sei π eine affine Ebene der Ordnung 2. Zeigen Sie, daß dann $\mathrm{Aut}(\pi) \simeq S_4$ gilt.

(58) Sei π eine projektive Ebene der Ordnung 2, und sei Γ ihre Kollineationsgruppe. Zeigen Sie, daß dann $|\Gamma| = 168$ gilt.

(59) Sei $k > 1$ eine reelle Zahl und sei M_k wieder die Moultonebene aus §2. Seien $a, b, t \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (ax, by + t)$$

eine Kollineation der Moulton Ebene M_k ist.

(60) Sei jetzt $\overline{M_k}$ die projektive Moultonebene, und bezeichne $u := \{[0, t] : t \in \mathbb{R}\}$ den Fernpunkt in Richtung der x-Achse. Seien a, b zwei Geraden von $\overline{M_k}$ durch u. Zeigen Sie, daß es eine Kollineation φ von $\overline{M_k}$ mit $u^\varphi = u$ und $b = a^\varphi$ gibt.

(61) Sei π eine projektive Ebene. Eine Polarität von π ist ein Isomorphismus $\delta : \pi \to \pi^*$ von π auf die duale Ebene π^* mit $p^{\delta^2} = p$ für jeden Punkt p und $l^{\delta^2} = l$ für jede Gerade l. Ein Punkt p heißt absoluter Punkt der Polarität δ, wenn $p \in p^\delta$ ist.
Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum über eine Körper K und f eine nichtausgeartete, symmetrische Bilinearform über V. Dann ist die Abbildung $\delta : T_1V \to T_2V; p \mapsto p^\perp$ eine Polarität von $\mathrm{PG}(V)$. Genau dann ist f anisotrop, wenn die Polarität δ keine absoluten Punkte hat.

(62) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei projektive Ebenen, und seien $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$, $\psi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ zwei surjektive Abbildungen so, daß für $p \in \mathfrak{P}$, $l \in \mathfrak{L}$ aus $p \in l$ stets $\varphi(p) \in \psi(l)$ folgt. Weiter sei $|\varphi^{-1}(p)| < \infty$ für jeden Punkt $p \in \mathfrak{P}'$. Dann ist (φ, ψ) bereits ein Isomorphismus.

(63) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ ein partieller linearer Raum, der ein Viereck enthält. Sei π^* die projektive Ebene aus den Aufgaben zu §3. Zeigen Sie, daß es einen Gruppenhomomorphismus

$$\overline{\ } : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}(\pi^*)$$

mit $\overline{\varphi}|\mathfrak{P} = \varphi$ für jeden Automorphismus φ von π gibt.

(64) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, daß es eine projektive Ebene π gibt, deren Kollineationsgruppe eine zu G isomorphe Untergruppe enthält.

(65) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und α ein Automorphismus von π, der vier Fixpunkte hat, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann ist

$$\mathrm{Fix}(\alpha) := (\mathrm{Fix}_{\mathfrak{P}}\,\alpha, \mathrm{Fix}_{\mathfrak{L}}\,\alpha, I \cap (\mathrm{Fix}_{\mathfrak{P}}(\alpha) \times \mathrm{Fix}_{\mathfrak{L}}(\alpha)))$$

eine Unterebene von π.

(66) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und (o, e, u, v) ein Viereck von π, dessen zugehörigen Ternärkörper wir mit (K, T) bezeichnen. Sei α eine Kollineation von π, die o, e, u, v fixiert. Dann ist der zur Unterebene $\mathrm{Fix}(\alpha)$ von π gehörende Unterternärkörper von (K, T) genau die Fixpunktmenge des Automorphismus $\alpha|K$ von (K, T).

(67) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \neq 1$ eine Kollineation von π. Dann gelten

$$|\mathrm{Fix}_{\mathfrak{P}}\, \alpha| \leq n + \sqrt{n} + 1 \quad \text{und} \quad |\mathrm{Fix}_{\mathfrak{L}}\, \alpha| \leq n + \sqrt{n} + 1.$$

(68) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ eine projektive Ebene und α eine Kollineation von π mit $\alpha^2 = 1 \neq \alpha$. Es gebe vier Fixpunkte von π, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann ist $\mathrm{Fix}(\alpha)$ eine Baer Unterebene von π. Die Kollineation π heißt eine Baer Involution von π.

(69) Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Körper K und π eine Baer Unterebene von $\mathrm{PG}(V)$. Dann gibt es genau eine Baer Involution α von $\mathrm{PG}(V)$ mit $\pi = \mathrm{Fix}(\alpha)$.

(70) Seien G eine abelsche Gruppe und $D \subseteq G$ eine Differenzenmenge in G. Dann wirkt G durch $x^a := xa$ als Kollineationsgruppe auf der zur Differenzenmenge gehörenden projektiven Ebene (G, G, I). G wirkt scharf transitiv auf Punkt und Geradenmenge.

(71) Sei π eine projektive Ebene und sei $G \leq \mathrm{Aut}(\pi)$ eine abelsche Gruppe, die scharf transitiv auf Punkt und Geradenmenge von π wirkt. Dann gibt es eine Differenzenmenge $D \subseteq G$, so daß π zur zugehörigen projektiven Ebene (G, G, I) isomorph ist.

§5 Homologien und Elationen

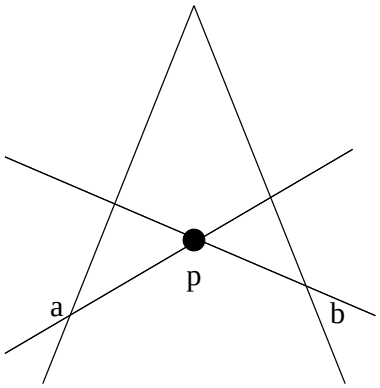
In diesem Abschnitt werden wir spezielle Kollineationen projektiver Ebenen untersuchen. Wir beginnen mit der Hauptdefinition.

Definition 1: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Eine Kollineation α von π heißt axial zur Achse $l \in \mathfrak{L}$, wenn $p^\alpha = p$ für alle $p \in l$ gilt. Die Kollineation α heißt zentral zum Zentrum $z \in \mathfrak{P}$, wenn $l^\alpha = l$ für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}_z$ durch z gilt.

Offenbar ist eine Kollineation α von π genau dann axial mit Achse l, wenn sie eine zentrale Kollineation mit Zentrum l in der dualen Ebene π^* ist. Analog sind zentrale Kollineationen von π auch axiale Kollineationen von π^*. Dies ist eine nützliche Beobachtung, die uns einige Arbeit ersparen wird. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit von Zentrum und Achse.

Lemma 1: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $\alpha \neq 1$ eine nicht-identische Kollineation von π. Dann hat α höchstens ein Zentrum und höchstens eine Achse.*

Beweis: Wir beweisen dies durch Kontraposition. Seien also $a, b \in \mathfrak{L}$ zwei Achsen von α mit $a \neq b$. Sei $p \in \mathfrak{P}$. Ist $p \in a$ oder $p \in b$, so gilt bereits $p^\alpha = p$. Nun gelte $p \notin a$ und $p \notin b$.



Da durch p mindestens drei Geraden gehen, gibt es Geraden $g, h \in \mathfrak{L}_p$ mit $g \neq h$, und $g, h \neq p \vee (a \wedge b)$, d.h. g, h gehen beide nicht durch $a \wedge b$. Insbesondere ist $a \wedge g \neq b \wedge g$, d.h. $g = (a \wedge g) \vee (b \wedge g)$ und somit ist $g^\alpha = (a \wedge g)^\alpha \vee (b \wedge g)^\alpha = (a \wedge g) \vee (b \wedge g) = g$. Analog folgt $h^\alpha = h$. Wegen $p = g \wedge h$ ergibt dies auch $p^\alpha = p$. Also ist $\alpha = 1$.

Hat α zwei verschiedene Zentren, so hat α als Kollineation der dualen Ebene π^* zwei verschiedene Achsen, und somit ist $\alpha = 1$.

■

Also können wir definieren:

Definition 2: Sei $\alpha \neq 1$ eine Kollineation der projektiven Ebene π. Ist α axial, so sei A_α die Achse von α. Ist α zentral, so bezeichne z_α das Zentrum von α.

Eine grundlegende Beobachtung ist das folgende einfache Lemma.

Lemma 2: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und α eine Kollineation von π. Ist α axial und ist $p \in \mathfrak{P}$ mit $p^\alpha \neq p$, so ist $p \vee p^\alpha$ eine Fixgerade von α. Ist α zentral und ist $l \in \mathfrak{L}$ mit $l^\alpha \neq l$, so ist $l \wedge l^\alpha$ ein Fixpunkt von α.*

Beweis: Sei α axial zur Achse $a \in \mathfrak{L}$, und sei $p \in \mathfrak{P}$ mit $p^\alpha \neq p$. Insbesondere ist $p \notin a$. Es ist $l := p \vee p^\alpha \neq a$, und wir haben einen Schnittpunkt $u := l \wedge a$. Wegen $l = p \vee u = p^\alpha \vee u$ und $u^\alpha = u$ folgt $l^\alpha = (p \vee u)^\alpha = p^\alpha \vee u^\alpha = p^\alpha \vee u = l$.

Ist α zentral und $l \in \mathfrak{L}$ mit $l^\alpha \neq l$, so ist α eine axiale Kollineation der dualen Ebene π^*, und der erste Teil liefert, daß $l \wedge l^\alpha$ ein Fixpunkt von α ist.

■

Damit können wir zeigen, daß zentrale und axiale Kollineationen überhaupt dasselbe sind.

Lemma 3: *Sei α eine Kollineation der projektiven Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$. Dann ist α genau dann axial, wenn α zentral ist.*

Beweis: Sei zunächst $a \in \mathfrak{L}$ eine Achse von α. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1: Es gebe ein $z \in \mathfrak{P} \backslash a$ mit $z^\alpha = z$. Wir behaupten, daß dann z ein Zentrum von α ist. Sei also $l \in \mathfrak{L}_z$ eine Gerade durch z. Wegen $z \notin a$ ist sicher $l \neq a$, und es existiert $u := l \wedge a \in a$. Insbesondere ist $u^\alpha = u$, da a eine Achse von α ist, und $u \neq z$. Wegen $l = z \vee u$ folgt $l^\alpha = z^\alpha \vee u^\alpha = z \vee u = l$.
Fall 2: Es gelte $p^\alpha \neq p$ für jeden Punkt $p \in \mathfrak{P} \backslash a$. Wähle ein $p \in \mathfrak{P} \backslash a$. Dann ist $p^\alpha \neq p$, und wir haben die Gerade $l := p \vee p^\alpha \neq a$. Nach Lemma 2 ist $l^\alpha = l$. Setze $z := l \wedge a$. Wir zeigen, daß z ein Zentrum von α ist. Sei also $g \in \mathfrak{L}_z$ eine Gerade durch z. Ist $g = a$, so gilt allemal $g^\alpha = g$. Ist $g = l$, so ist wissen wir bereits $g^\alpha = g$. Also können wir jetzt $g \neq l, a$ annehmen. Wähle einen Punkt $q \in g$ mit $q \neq z$, also auch $q \notin a$. Nach Lemma 2 ist die Gerade $h := q \vee q^\alpha$ unter α invariant. Wegen $g \neq l$ ist $q \notin l$ und damit auch $l \neq h$, d.h. es existiert ein Schnittpunkt $l \wedge h$. Für diesen gilt $(l \wedge h)^\alpha = l^\alpha \wedge h^\alpha = l \wedge h$, d.h. er ist ein Fixpunkt von α, und dies impliziert $g \wedge h \in a$. Also ist $g \wedge h = g \wedge a = z$ und somit ist $z \in h$ und $h = z \vee q = g$. Insbesondere ist $g^\alpha = g$.

Ist α zentral, so ist α eine axiale Kollineation der dualen Ebene π^*, also auch eine zentrale Kollineation von π^*. Damit ist α axial in π.

■

Die zentralen sind also genau die axialen Kollineationen, und daher sprechen wir auch von zentral-axialen Kollineationen. Je nachdem ob Zentrum und Achse einer zentral-axialen Kollineation miteinander inzidieren oder nicht, wird ein unterschiedlicher Name verwendet.

Definition 3: Sei α eine zentral-axiale Kollineation einer projektiven Ebene. Ist $\alpha \neq 1$, so heißt α eine Elation falls $z_\alpha \in A_\alpha$ ist, und eine Homologie falls $z_\alpha \notin A_\alpha$ ist. Die Identität $\alpha = 1$ sei sowohl Homologie als auch Elation.

Wir bestimmen jetzt die Menge der Fixpunkte und Fixgeraden einer zentral-axialen Kollineation.

Lemma 4: *Sei $\alpha \neq 1$ eine zentral-axiale Kollineation der projektiven Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$. Dann gelten*

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}_{\mathfrak{P}}(\alpha) &= A_\alpha \cup \{z_\alpha\}, \\ \mathrm{Fix}_{\mathfrak{L}}(\alpha) &= \mathfrak{L}_{z_\alpha} \cup \{A_\alpha\}. \end{aligned}$$

Beweis: Offenbar ist $A_\alpha \cup \{z_\alpha\} \subseteq \mathrm{Fix}_{\mathfrak{P}}(\alpha)$. Jetzt sei umgekehrt ein Fixpunkt $p \in \mathfrak{P}$ von α gegeben, d.h. $p^\alpha = p$. Ist $p \in A_\alpha$, so sind wir schon fertig, d.h. wir können $p \notin A_\alpha$ annehmen. Sei $l \in \mathfrak{L}_p$ eine Gerade durch p. Wegen $l \neq A_\alpha$ existiert $q := l \wedge A_\alpha$ und es ist $q \neq p$. Also ist $l = p \vee q$, und da q auf der Achse von α liegt ist $q^\alpha = q$. Damit folgt auch $l^\alpha = l$. Also ist p ein Zentrum von α, und es folgt $p = z_\alpha$.

Die Aussage über Fixgeraden folgt durch Anwendung des ersten Teils auf die duale Ebene.

■

Häufig ist auch die affine Interpretation dieser Begriffe von Interesse. Sei π eine affine Ebene. Wir haben den projektiven Abschluß $\overline{\pi}$ von π mit der Ferngeraden l_∞. Eine Kollineation α von π können wir zu einer Kollineation von $\overline{\pi}$ fortsetzen, die wir wieder α nennen. Dann ist $l_\infty^\alpha = l_\infty$. Wann ist jetzt α eine zentral-axiale Kollineation der projektiven Ebene $\overline{\pi}$?

Ist α auf $\overline{\pi}$ zentral-axial und $\alpha \neq 1$, so muß nach Lemma 4 entweder l_∞ die Achse von α sein, oder das Zentrum von α liegt auf l_∞. Wir gehen diese Möglichkeiten einzeln durch.

Was bedeutet es für α das l_∞ eine Achse ist? Die Punkte von l_∞ sind die Parallelscharen von π, d.h. l_∞ ist genau dann eine Achse, wenn α jede Parallelschar auf sich selbst abbildet, beziehungsweise wenn $l^\alpha \parallel l$ für jede Gerade l von π gilt. Derartige Kollineationen affiner Ebenen bezeichnet man auch als Dilatationen.

Ist α jetzt eine Elation, d.h. liegt das Zentrum von α auf l_∞, so ist das Zentrum eine Parallelschar, die von α geradenweise fixiert wird. Ist $\alpha \neq 1$, so hat α nach Lemma 4 keinen Fixpunkt in π. Derartige Dilatationen sowie die Identität nennt man auch Translationen. Beispiele sind die Abbildungen $x \mapsto x + t$ $(t \in \mathbb{R}^2)$ in der reellen affinen Ebene $A_2\mathbb{R}$.

Im anderen Fall ist α eine Homologie und das Zentrum z von α liegt in der affinen Punktmenge. Ist $\alpha \neq 1$, so ist z nach Lemma 4 der eindeutige affine Fixpunkt von α, und alle Geraden durch α werden fixiert. Solche Kollineationen von π, und die Identität, heißen auch Streckungen. In der reellen affinen Ebene sind zum Beispiel die Abbildungen $x \mapsto cx$ $(c \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ Streckungen mit Zentrum 0.

Kommen wir zum zweiten Fall, d.h. α hat eine affine Gerade a als Achse und das Zentrum z liegt auf der Ferngeraden l_∞. Das Zentrum ist dann eine Parallelschar, die von α geradenweise fixiert wird. Liegt das Zentrum auf der Achse, d.h. eine Gerade wird punktweise fixiert, und alle zu ihr parallelen Geraden sind Fixgeraden, so spricht man von einer Scherung. Wieder gibt es in der reellen affinen Ebene Beispiele, etwa die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, x + y)$.

Ist α dagegen eine Homologie, so werden alle Geraden einer die Achse nicht enthaltenden Parallelschar fixiert. Der Name dieser Kollineationen ist nicht so festgelegt wie bei den drei anderen Typen. Wir sprechen hier von Stauchungen oder Quetschungen. In $A_2\mathbb{R}$ haben wir beispielsweise $(x, y) \mapsto (ax, y)$ $(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Insgesamt haben wir also die folgenden Möglichkeiten (für $\alpha \neq 1$):

Lage der Achse	Typ	Affine Beschreibung
l_∞ als Achse	Elation	**Translation:** Jede Gerade wird auf eine Parallele abgebildet, die Fixgeraden bilden eine Parallelschar, und die Abbildung hat keinen Fixpunkt.
	Homologie	**Streckung:** Jede Gerade wird auf eine Parallele abgebildet, es gibt einen eindeutigen Fixpunkt, und alle Geraden durch diesen Punkt werden fixiert. Es gibt keine weiteren Fixgeraden.
Affine Achse a	Elation	**Scherung:** Die Gerade a wird punktweise fixiert, und jede zu a parallele Gerade wird fixiert. Es gibt keine weiteren Fixpunkte oder Fixgeraden.
	Homologie	**Stauchung:** Die Gerade a wird punktweise fixiert, und alle Geraden einer a nicht enthaltenden Parallelschar werden fixiert. Es gibt keine weiteren Fixpunkte oder Fixgeraden bis auf a.

Es ist von Interesse die Menge aller zentral-axialen Kollineationen zu gegebenen Zentrum und Achse zu betrachten.

Definition 4: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Ist $a \in \mathfrak{L}$ eine Gerade, so ist die Menge

$$\Gamma_{[a]} := \{\alpha \in \Gamma : a \text{ ist eine Achse von } \alpha\}$$

offenbar eine Untergruppe von Γ. Ist $z \in \mathfrak{P}$, so ist auch

$$\Gamma_{[z]} := \{\alpha \in \Gamma : z \text{ ist ein Zentrum von } \alpha\}$$

eine Untergruppe. Für eine Gerade a und einen Punkt z, ist somit auch

$$\Gamma_{[a,z]} := \Gamma_{[a]} \cap \Gamma_{[z]} = \{\alpha \in \Gamma : \alpha \text{ hat Achse } a \text{ und Zentrum } z\}$$

eine Untergruppe.

Wir benötigen noch den folgenden Begriff aus der Theorie der Transformationsgruppen.

Definition 5: Eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge Ω heißt frei, wenn $p^a \neq p$ für alle $p \in \Omega$, $a \in G \backslash \{1\}$ gilt. Äquivalent können wir auch $G_p = 1$ für alle $p \in \Omega$ sagen.

Die Wirkung heißt scharf transitiv, wenn sie frei und transitiv ist.

Hiermit haben wir das folgende Lemma.

Lemma 5: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ und $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$. Sei $l \in \mathfrak{L}_z \backslash \{a\}$. Dann wirkt die Gruppe $\Gamma_{[a,z]}$ frei auf $l \backslash \{z, a \wedge z\}$.*

Beweis: Sei $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$. Da l durch das Zentrum z geht, ist überhaupt $l^\alpha = l$. Weiter sind z und $a \wedge l$ Fixpunkte von α, also wirkt α auf der Menge $l \backslash \{z, l \wedge a\}$. Gibt es $p \in l \backslash \{z, a \wedge l\}$ mit $p^\alpha = p$, so ergibt Lemma 4 sofort $\alpha = 1$.

■

Sind also $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$ und $p, q \in \mathfrak{P} \backslash a$ mit $p, q \neq z$ und $p \vee z = q \vee z$, so gibt es höchstens eine zentral-axiale Kollineation α mit Zentrum z und Achse a so, daß $q = p^\alpha$ gilt. Dies führt uns zur folgenden Definition.

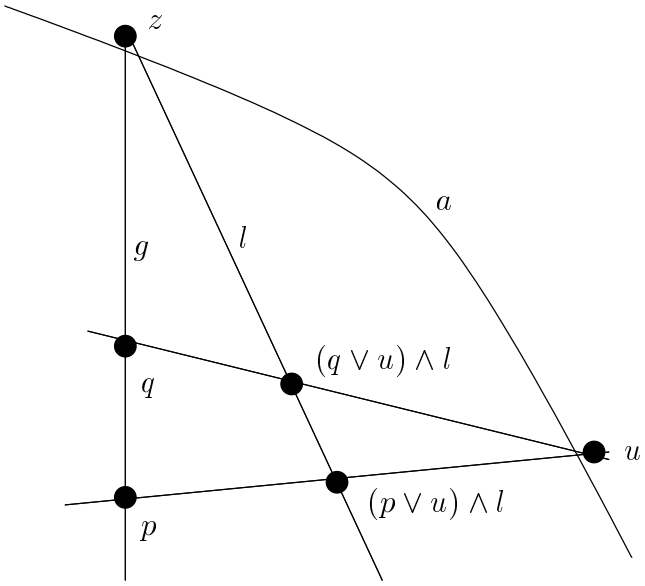
Definition 6: Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ und $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$. Die projektive Ebene π heißt (a, z)-transitiv, wenn es für je zwei Punkte $p, q \in \mathfrak{P} \backslash a$ mit $p, q \neq z$ und $p \vee z = q \vee z$ stets eine Kollineation $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$ mit $q = p^\alpha$ gibt.

Anders gesagt soll für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}_z \backslash \{a\}$ die Gruppe $\Gamma_{[a,z]}$ transitiv auf $l \backslash \{z, l \wedge a\}$ wirken.

In Wahrheit reicht es bereits, die Wirkung auf einer einzigen Geraden durch das Zentrum zu untersuchen.

Lemma 6: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$, $a \in \mathfrak{L}$ und $z \in \mathfrak{P}$. Weiter sei $l \in \mathfrak{L}_z$ mit $l \neq a$. Dann ist π genau dann (a, z)-transitiv, wenn die Gruppe $\Gamma_{[a,z]}$ transitiv auf $l \backslash \{z, a \wedge l\}$ wirkt.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Klar.
"'$\Longleftarrow$"' Seien $p, q \in \mathfrak{P} \backslash a$ mit $p, q \neq z$ und $p \vee z = q \vee z =: g$. Ist $g = l$, so existiert nach Voraussetzung ein $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$ mit $q = p^\alpha$. Jetzt nehmen wir $g \neq l$ an. Dann ist $p, q \notin l$.



Ist $z \in a$, so ist $g \wedge a = z = l \wedge a$, also gibt es stets einen Punkt $u \in a$ mit $u \neq z, g \wedge a, l \wedge a$. Wir haben die beiden Schnittpunkte $p' := (p \vee u) \wedge l$ und $q' := (q \vee u) \wedge l$. Wäre $p' = z$, so ist $p \vee u = p \vee z = g$, d.h. $u = g \wedge a$, ein Widerspruch zur Wahl von u, d.h. $p' \neq z$. Wäre $p' = l \wedge a$, so ist $u = a \wedge (p \vee u) = a \wedge (p \vee p') = a \wedge (p \vee (l \wedge a)) = l \wedge a$, erneut ein Widerspruch zur Wahl von u. Also ist $p' \neq z, l \wedge a$, und ebenso folgt $q' \neq z, l \wedge a$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$ mit $q' = p'^{\alpha}$. Es folgt

$$p^{\alpha} = ((p' \vee u) \wedge g)^{\alpha} = (p'^{\alpha} \vee u) \wedge g = (q' \vee u) \wedge g = q.$$

■

Als nützliches Korollar erhalten wir noch:

Korollar 7: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$, $z \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{L}$. Gegeben seien eine Teilmenge $H \subseteq \Gamma_{[a,z]}$, eine Gerade $l \in \mathfrak{L}_z \backslash \{a\}$ und ein Punkt $o \in l \backslash \{z, l \wedge a\}$ so, daß es für jeden weiteren Punkt $q \in l \backslash \{z, l \wedge a\}$ stets ein $\alpha \in H$ mit $q = o^{\alpha}$ gibt. Dann ist π bereits (a, z)-transitiv, und es gilt $\Gamma_{[a,z]} = H$.*

Beweis: Offenbar ist $\Gamma_{[a,z]}$ transitiv auf der Menge $l \backslash \{z, l \wedge a\}$. Daß π (a, z)-transitiv ist, gilt nach Lemma 6. Sei $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$. Setze $q := o^{\alpha} \in l \backslash \{z, l \wedge a\}$. Es gibt ein $\beta \in H$ mit $q = o^{\beta}$. Dann ist $o^{\beta\alpha^{-1}} = o$, und Lemma 5 liefert $\beta\alpha^{-1} = 1$, d.h. $\alpha = \beta \in H$.

■

Wie sieht das alles für unsere projektiven Koordinatenebenen über Schiefkörpern aus? Seien also K ein Schiefkörper und V ein dreidimensionaler Vektorraum über K. Sei a eine Gerade der projektiven Ebene $\mathrm{PG}(V)$, d.h. ein zweidimensionaler Teilraum von V. Setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$. Wir wollen zunächst genügend Elemente der Gruppe $\Gamma_{[a]}$ bestimmen. Wähle einen Vektor $e \in V \backslash a$. Dann ist $V = a \oplus eK$. Wir suchen nach Kollineationen mit Achse a in der am Ende von §4 konstruierten Untergruppe $\mathrm{PGL}(V) \leq \Gamma$. Hierzu ist es hilfreich die Linearform

$$f : V \to K$$

durch $f|a = 0$ und $f(e) = 1$ zu definieren.

Sei $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ gegeben. Wann ist a eine Achse der Kollineation $\overline{\varphi} \in \mathrm{PGL}(V)$? Offenbar muss dazu $\varphi(a) = a$ sein und φ muss jeden eindimensionalen Teilraum von a invariant lassen. Wir beschränken uns sogar auf $\varphi|a = \mathrm{id}$. Dann ist $w := \varphi(e) \in V \backslash a$. Sei nun $v \in V$ gegeben. Dann existieren $u \in a$ und $\lambda \in K$ mit $v = u + e\lambda$. Es folgt

$$\varphi(v) = u + \varphi(e)\lambda = u + w\lambda.$$

Nun ist

$$f(v) = f(u) + f(e)\lambda = \lambda,$$

und wir können auch

$$\varphi(v) = u + w\lambda = (u + e\lambda) + (w - e)\lambda = v + (w - e)f(v)$$

schreiben. Schreiben wir w für $w - e$, so ist w ein Vektor mit $w + e \notin a$.

Ist umgekehrt $w \in V$ mit $w + e \notin a$, so ist

$$\varphi_w : V \to V; v \mapsto v + wf(v)$$

linear. Für $v \in a$ gilt offenbar $\varphi_w(v) = v + wf(v) = v$, und außerdem ist $\varphi_w(e) = e + wf(e) = w + e \notin a$, d.h. es ist $\varphi_w \in \mathrm{GL}(V)$ und $\overline{\varphi_w} \in \Gamma_{[a]}$.

Wir unterscheiden jetzt zwischen Homologien und Elationen. Zunächst sei $z \subseteq a$ ein eindimensionaler Teilraum. Wähle einen Vektor $u \in z\backslash\{0\}$. Eine von a verschiedene Gerade durch z hat die Form $l = \langle u, e + b\rangle$ mit einem Vektor $b \in a$. Es ist $\varphi_w(u) = u$ und $\varphi_w(e+b) = e+b+wf(e+b) = e+b+w$, und genau dann ist $e+b+w \in \langle u, e+b\rangle$, wenn $w \in \langle u, e + b\rangle$ ist. Dies gilt für alle $b \in a$ sicher wenn $w \in uK = z$ ist. Diese Bedingung stellt zudem $w + e \notin a$ sicher. Diese Beobachtung liefert die erste Hälfte des folgenden Lemmas.

Lemma 8: *Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Seien $a \in T_2(V)$ und $z \in T_1(V)$ mit $z \subseteq a$. Setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$. Dann ist die Abbildung*

$$(z, +) \to \Gamma_{[a,z]}; w \mapsto \overline{\varphi_w}$$

ein Gruppenisomorphismus, wobei φ_w, e und f wie oben sind. Weiter ist die projektive Ebene $\mathrm{PG}(V)$ auch (a, z)-transitiv.

Beweis: Wir haben bereits eingesehen, daß überhaupt eine Abbildung von z nach $\Gamma_{[a,z]}$ vorliegt. Sind $w_1, w_2 \in z$, so gilt für alle $v \in V$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\varphi_{w_2}\varphi_{w_1} v = \varphi_{w_2}(v + w_1 f(v)) = v + w_1 f(v) + w_2 f(v + w_1 f(v))\\ = v + (w_1 + w_2)f(v) = \varphi_{w_1+w_2} v,\end{aligned}$$

da $w_1 f(v) \in z \subseteq a$ ist. Also liegt zumindest ein Gruppenhomomorphismus vor.

Wähle ein $u \in z\backslash\{0\}$, und betrachte die Gerade $l := \langle u, e\rangle \neq a$ durch z. Es ist

$$\underline{l}\backslash\{z\} = \{(u\lambda + e)K : \lambda \in K\},$$

und für jedes $\lambda \in K$ gilt

$$(eK)^{\overline{\varphi_{u\lambda}}} = (e + u\lambda f(e))K = (e + u\lambda)K.$$

Mit Korollar 7 folgt die Behauptung.

■

Wir kommen zu Homologien. Wir geben uns ein Zentrum z, nicht auf der Geraden a vor, und wählen e so, daß $z = eK$ wird. Ist $l \in T_2(V)$ eine Gerade durch z, so ist $l = \langle e, b\rangle$ für ein $b \in a\backslash\{0\}$. Es ist für $w \in V$ mit $w + e \notin a$ auch $\varphi_w(e) = e + w$, d.h. für $\varphi_w(l) = l$ benötigen wir $w \in \langle e, b\rangle$. Dies ist sicher für alle $b \in a\backslash\{0\}$ wahr, wenn $w \in eK$ ist. Wir schreiben w in der Form $w = e(c^{-1} - 1)$ mit $c \neq 0$.

Lemma 9: *Seien V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K, $a \in T_2(V)$ und $z \in T_1(V)$ mit $z \not\subseteq a$. Seien $e \in z\backslash\{0\}$ und $f \in V^*$ eine Linearform mit* $\mathrm{Kern}(f) = a$ *und* $f(e) = 1$. *Setze* $\Gamma := \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$. *Dann ist die Abbildung*

$$(K\backslash\{0\}, \cdot) \to \Gamma_{[a,z]}; c \mapsto \overline{\varphi_{e(c^{-1}-1)}}$$

ein Isomorphismus, wobei die φ_w wieder wie oben definiert sind. Weiter ist die projektive Ebene $\mathrm{PG}(V)$ *auch (a,z)-transitiv.*

Beweis: Ist $c \in K\backslash\{0\}$, so ist zumindest $\gamma_c := \overline{\varphi_{e(c^{-1}-1)}} \in \Gamma_{[a,z]}$. Seien $c_1, c_2 \in K\backslash\{0\}$. Für jedes $v \in V\backslash\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
(vK)^{\gamma_{c_1}\gamma_{c_2}} &= ((v + e(c_1^{-1}-1)f(v))K)^{\gamma_{c_2}} \\
&= (v + e(c_1^{-1}-1)f(v) + e(c_2^{-1}-1)f(v + e(c_1^{-1}-1)f(v)))K \\
&= (v + e((c_1^{-1}-1)f(v) + (c_2^{-1}-1)f(v) + (c_2^{-1}-1)(c_1^{-1}-1)f(v)))K \\
&= (v + e(c_2^{-1}c_1^{-1}-1)f(v))K \\
&= (vK)^{\gamma_{c_1c_2}},
\end{aligned}$$

d.h. es ist $\gamma_{c_1}\gamma_{c_2} = \gamma_{c_1c_2}$.

Jetzt sei $b \in a\backslash\{0\}$ gegeben, und setze $l = \langle e, b\rangle$. Es ist

$$\underline{l}\backslash\{z, bK\} = \{(e + b\lambda)K : \lambda \in K\backslash\{0\}\}.$$

Für $c \in K\backslash\{0\}$ gilt

$$((e+b)K)^{\gamma_c} = (e + b + e(c^{-1}-1))K = (e + bc)K,$$

und mit Korollar 7 folgt die Behauptung.

■

Damit haben wir die zentral-axialen Kollineationen der Ebene über einem Schiefkörper bestimmt, und gesehen das alle möglichen Homologien und Elationen existieren. Wir wollen nun noch eine weitere derartige Rechnung durchführen, und einige ausgewählte Gruppen $\Gamma_{[a,z]}$ für die projektive Ebene über einem Ternärkörper berechnen.

Lemma 10: *Sei (K,T) ein Ternärkörper und setze* $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$. *Dann gelten:*

(a) $\Gamma_{[[\infty],(\infty)]} =$
$\{(x,y) \mapsto (x, y+a) | a \in K, \forall(s,x,t \in K) : T(s,x,t+a) = T(s,x,t) + a\}$.

(b) $\Gamma_{[[\infty],(0)]} =$
$\{(x,y) \mapsto (x+a, y) | a \in K, \forall(s,x,t \in K) : T(s,x+a,t) = T(s,x,T(s,a,t))\}$.

(c) $\Gamma_{[[\infty],(0,0)]} =$
$\{(x,y) \mapsto (xa, ya) | a \in K\backslash\{0\}, \forall(s,x,t \in K) : T(s,xa,ta) = T(s,x,t)a\}$.

Beweis: In allen Fällen betrachten wir Kollineationen von $P(K,T)$ mit Achse $[\infty]$. Angenommen es ist $\alpha \in \Gamma_{[\infty]}$. Dann ist $(\infty)^\alpha = (\infty)$ und $(s)^\alpha = (s)$ für jedes $s \in K$. Also gibt es Bijektionen $\varphi, \theta_s : K \to K$ für jedes $s \in K$ mit $[c]^\alpha = [\varphi(c)]$ und $[s,t]^\alpha = [s, \theta_s(t)]$ für alle $c, s, t \in K$. Schreiben wir $\psi := \theta_0$, so folgt für alle $x, y \in K$ die Gleichung

$$(x,y)^\alpha = ([0,y] \wedge [x])^\alpha = [0,y]^\alpha \wedge [x]^\alpha = [0, \psi(y)] \wedge [\varphi(x)] = (\varphi(x), \psi(y)).$$

Sind weiter $s, t \in K$, so gilt für jedes $x \in K$

$$(\varphi(x), \psi(T(s,x,t))) = (x, T(s,x,t))^\alpha \in [s,t]^\alpha = [s, \theta_s(t)],$$

d.h. es ist

$$\psi(T(s,x,t)) = T(s, \varphi(x), \theta_s(t))$$

für alle $s, x, t \in K$.

Sind umgekehrt $\varphi, \psi : K \to K$ bijektive Abbildungen, und gibt es für $s, t \in K$ stets ein $\theta_s(t) \in K$ mit

$$\psi(T(s,x,t)) = T(s, \varphi(x), \theta_s(t))$$

für alle $x \in K$, so ist die Abbildung

$$\alpha : K^2 \cup K \cup \{\infty\} \to K^2 \cup K \cup \{\infty\}; \begin{cases} (x,y) \mapsto (\varphi(x), \psi(y)), & x, y \in K, \\ (s) \mapsto (s), & s \in K, \\ (\infty) \mapsto (\infty), \end{cases}$$

offenbar bijektiv, und es gelten $\alpha([c]) = [\varphi(c)]$ für $c \in K$ sowie $\alpha([s,t]) = [s, \theta_s(t)]$ für alle $s, t \in K$. Nach §1.Lemma 3 ist $\alpha \in \Gamma$, und es ist weiter $[\infty]$ eine Achse von α.
(a) Sei $\alpha \in \Gamma_{[[\infty],(\infty)]}$ gegeben, und definiere φ, ψ, θ_s wie oben. Da (∞) ein Zentrum von α ist, gilt $[c]^\alpha = [c]$ für alle $c \in K$, d.h. es ist $\varphi = \mathrm{id}$. Weiter gilt

$$\psi(T(s,x,t)) = T(s, x, \theta_s(t))$$

für alle $s, x, t \in K$. Für $s, t \in K$ ist insbesondere

$$\theta_s(t) = T(s, 0, \theta_s(t)) = \psi(T(s,0,t)) = \psi(t),$$

d.h. es ist $\theta_s = \psi$ für jedes $s \in K$, und somit

$$\psi(T(s,x,t)) = T(s, x, \psi(t))$$

für $s, x, t \in K$. Setze jetzt $a := \psi(0) \in K$. Für jedes $x \in K$ gilt

$$\psi(x) = \psi(T(1,x,0)) = T(1, x, \psi(0)) = T(1,x,a) = x + a$$

nach Definition der additiven Loop. Also hat α die angegebene Gestalt, und für $s, x, t \in K$ gilt $T(s,x,t) + a = T(s, x, t+a)$.

Ist umgekehrt $a \in K$ mit dieser Eigenschaft gegeben, so ist die Abbildung $\psi : K \to K; x \mapsto x + a$ nach §2.Lemma 8.(c) bijektiv, und wir erhalten α wie oben mit Achse $[\infty]$. Wegen $\varphi = \mathrm{id}$ ist (∞) ein Zentrum von α.
(b) Sei $\alpha \in \Gamma_{[[\infty],(0)]}$ und definiere φ, ψ, θ_s wie oben. Da (0) ein Zentrum von α ist, gilt $[0,t]^\alpha = [0,t]$ für alle $t \in K$, d.h. es ist $\psi = \theta_0 = \mathrm{id}$. Unsere Bedingung wird zu

$$T(s,x,t) = T(s,\varphi(x),\theta_s(t))$$

für alle $s,x,t \in K$. Wir setzen $a := \varphi(0) \in K$. Sei $s \in K$. Für jedes $t \in K$ gilt $T(s,a,\theta_s(t)) = T(s,\varphi(0),\theta_s(t)) = T(s,0,t) = t$. Insbesondere ist

$$T(s,a,\theta_s(sa)) = sa = T(s,a,0),$$

und Axiom (T3) eines Ternärkörpers liefert $\theta_s(sa) = 0$, und insbesondere ist $\theta_1(a) = \theta_1(1 \cdot a) = 0$. Es folgt für jedes $x \in K$

$$\varphi(x) = T(1,\varphi(x),0) = T(1,\varphi(x),\theta_1(a)) = T(1,x,a) = x + a.$$

Seien $s,x \in K$. Dann gilt für jedes $t \in K$ die Gleichung

$$T(s,\varphi(x),t) = T(s,\varphi(x),\theta_s(\theta_s^{-1}(t))) = T(s,x,\theta_s^{-1}(t)),$$

und insbesondere folgt

$$\theta_s^{-1}(t) = T(s,0,\theta_s^{-1}(t)) = T(s,\varphi(0),t) = T(s,a,t).$$

Als Bedingung ergibt sich

$$T(s,x+a,t) = T(s,x,T(s,a,t))$$

für alle $s,x,t \in K$.

Sei umgekehrt $a \in K$ mit dieser Eigenschaft gegeben, und definiere α wie oben, bezüglich der bijektiven Abbildungen $\varphi(x) = x + a$, $\psi(x) = x$. Seien $s,t \in K$. Nach (T3) gibt es ein t' mit $T(s,a,t') = t$. Für alle $x \in K$ folgt

$$T(s,x,t) = T(s,x,T(s,a,t')) = T(s,x+a,t'),$$

d.h. α ist eine Kollineation mit Achse $[\infty]$. Offenbar ist $[0,t]^\alpha = [0,t]$ für jedes $t \in K$, d.h. (0) ist ein Zentrum von α.
(c) Jetzt sei $\alpha \in \Gamma_{[[\infty],(0,0)]}$. Seien wieder φ, ψ, θ_s wie oben. Dann ist $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Für alle $s,t \in K$ haben wir

$$\psi(t) = \psi(T(s,0,t)) = T(s,\varphi(0),\theta_s(t)) = T(s,0,\theta_s(t)) = \theta_s(t),$$

d.h. es ist $\psi = \theta_s$ für alle $s \in K$. Für $x \in K$ folgt

$$\psi(x) = \psi(T(1,x,0)) = T(1,\varphi(x),\psi(0)) = T(1,\varphi(x),0) = \varphi(x),$$

und somit ist auch $\varphi = \psi$. Die Bedingung wird zu

$$\psi(T(s,x,t)) = T(s,\psi(x),\psi(t))$$

für alle $s,x,t \in K$. Setzen wir $a := \psi(1) \in K\backslash\{0\}$, so ist für jedes $x \in K$

$$\psi(x) = \psi(T(x,1,0)) = T(x,\psi(1),\psi(0)) = T(x,a,0) = xa.$$

Also ist α von der angegebenen Form, und die Bedingung an ψ wird zu

$$T(s,x,t)a = T(s,xa,ta)$$

für alle $s,x,t \in K$.

Sei umgekehrt $a \in K\backslash\{0\}$ mit dieser Eigenschaft gegeben. Die Abbildung $\varphi = \psi : K \to K; x \mapsto xa$ ist wegen $a \neq 0$ bijektiv. Damit wird α wie oben zu einer Kollineation mit Achse $[\infty]$, und wegen $(0,0)^\alpha = (0,0)$ ist $(0,0)$ ein Zentrum von α.

■

Allgemein haben wir das folgende wichtige Lemma.

Lemma 11: *Sei $\pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Sind $a,b \in \mathfrak{L}$ Geraden, so ist*

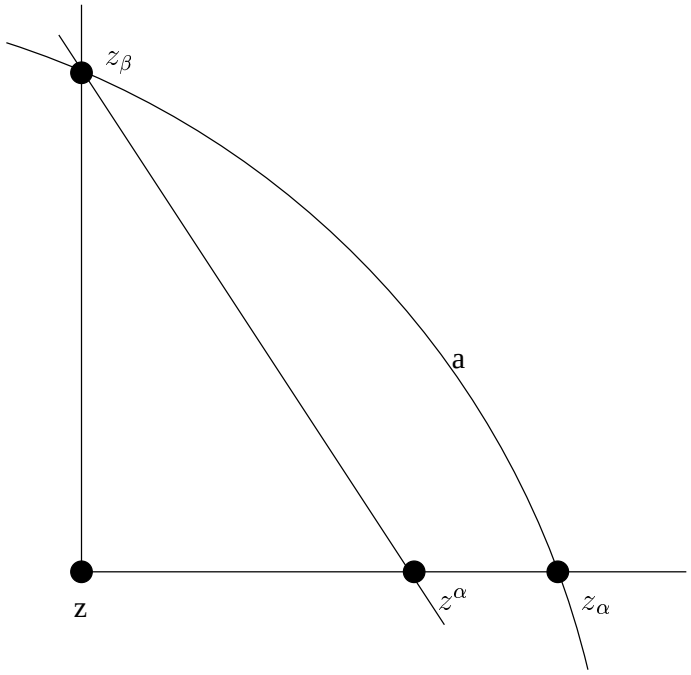
$$\Gamma_{[a,b]} := \bigcup_{z\in b} \Gamma_{[a,z]} \leq \Gamma_{[a]}$$

eine Untergruppe von $\Gamma_{[a]}$, die frei auf $\mathfrak{P}\backslash(a \cup b)$ wirkt. Für $p,q \in \mathfrak{P}$ ist auch

$$\Gamma_{[q,p]} := \bigcup_{a\in\mathfrak{L}_q} \Gamma_{[a,p]}$$

eine Untergruppe von $\Gamma_{[p]}$.

Beweis: Seien $a,b \in \mathfrak{L}$. Wir beginnen mit der Aussage $\Gamma_{[a,b]} \leq \Gamma_{[a]}$. Ist $a \neq b$, so ist nach Lemma 4 $\Gamma_{[a,b]}$ einfach die Standgruppe $\Gamma_{[a,b]} = \Gamma_{[a],b}$, und diese ist nach §4.Lemma 8 eine Untergruppe von $\Gamma_{[a]}$. Wir behandeln jetzt den Fall $a = b$. Offenbar ist nur zu zeigen, daß Produkte von Elementen aus $\Gamma_{[a,a]}$ wieder in $\Gamma_{[a,a]}$ sind. Seien also $\alpha,\beta \in \Gamma_{[a,a]}$. Zu zeigen ist $\alpha\beta \in \Gamma_{[a,a]}$. Ist $\alpha = 1$ oder $\beta = 1$, so ist dies klar, also können wir $\alpha,\beta \neq 1$ annehmen. Auf jeden Fall ist $\alpha\beta \in \Gamma_{[a]}$. Ist $z_\alpha = z_\beta =: z \in a$, so ist auch $\alpha\beta \in \Gamma_{[a,z]} \subseteq \Gamma_{[a,a]}$, und wir sind wieder fertig. Also können wir auch $z_\alpha \neq z_\beta$ annehmen. Insbesondere ist dann $\beta \neq \alpha^{-1}$ und $\alpha\beta \neq 1$. Sei z das Zentrum von $\alpha\beta$. Angenommen es wäre $z \notin a$.



Es ist $z^\alpha \in (z \vee z_\alpha) \backslash \{z, z_\alpha\}$. Weiter ist $z = z^{\alpha\beta} \in z^\alpha \vee z_\beta$, also ist $z^\alpha \vee z_\beta = z \vee z^\alpha = z \vee z_\alpha$, und somit ist $z_\beta = (z^\alpha \vee z_\beta) \wedge a = (z \vee z_\alpha) \wedge a = z_\alpha$; ein Widerspruch. Also ist $z \in a$, und somit gilt $\alpha\beta \in \Gamma_{[a,a]}$.

Offenbar fixiert $\Gamma_{[a,b]}$ die Geraden a und b, und wirkt somit auf $\mathfrak{P} \backslash (a \cup b)$. Nach Lemma 4 ist diese Wirkung frei.

Schließlich seien $p, q \in \mathfrak{P}$. Dann ist $\Gamma_{[q,p]}$ gerade die Gruppe $\Gamma_{[p,q]}$ in der dualen Ebene π^*, und somit ebenfalls eine Untergruppe von Γ.

■

Definition 7: Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma = \mathrm{Aut}(\pi)$ und $a \in \mathfrak{L}$. Dann nennen wir die Gruppe $\Gamma_{[a,a]}$ die Translationsgruppe zur Achse a. Diese Gruppe wirkt frei auf der affinen Ebene π_a.

Im allgemeinen muß die Translationsgruppe zu einer gegebenen Achse nicht abelsch sein. Wir werden gleich zeigen, daß sie immer abelsch ist, wenn es Translationen in verschiedene Richtungen gibt. Es ist für den Beweis nützlich das folgende grundlegende Lemma vorauszuschicken.

Lemma 12: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei projektive Ebenen, und sei $\gamma : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus. Wir setzen $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ und $\Gamma' := \mathrm{Aut}(\pi')$. Weiter seien $z \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{L}$ gegeben. Dann gelten*

$$\begin{aligned} \Gamma'_{[\gamma(a)]} &= \{\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1} : \alpha \in \Gamma_{[a]}\}, \\ \Gamma'_{[\gamma(z)]} &= \{\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1} : \alpha \in \Gamma_{[z]}\}, \\ \Gamma'_{[\gamma(a),\gamma(z)]} &= \{\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1} : \alpha \in \Gamma_{[a,z]}\}. \end{aligned}$$

Weiter ist π genau dann (a,z)-transitiv, wenn π' $(\gamma(a),\gamma(z))$-transitiv ist.

Beweis: Sei $\alpha \in \Gamma_{[a]}$. Sei $p \in \gamma(a)$. Dann existiert ein $q \in a$ mit $p = \gamma(q)$, und es gilt

$$\gamma(\alpha(\gamma^{-1}(p))) = \gamma(\alpha(q)) = \gamma(q) = p$$

da a eine Achse von α ist. Also ist $\gamma(a)$ eine Achse von $\gamma\alpha\gamma^{-1}$, und wir haben $\gamma\Gamma_{[a]}\gamma^{-1} \subseteq \Gamma'_{[\gamma(a)]}$ eingesehen.

Wenden wir dieses Teilergebnis auf die Gerade $\gamma(a)$ und den Isomorphismus γ^{-1} an, so folgt weiter

$$\gamma^{-1}\Gamma'_{[\gamma(a)]}\gamma \subseteq \Gamma_{[\gamma^{-1}\gamma(a)]} = \Gamma_{[a]}, \quad \text{d.h.} \quad \Gamma'_{[\gamma(a)]} \subseteq \gamma\Gamma_{[a]}\gamma^{-1},$$

und wir haben $\Gamma'_{[\gamma(a)]} = \gamma\Gamma_{[a]}\gamma^{-1}$ gezeigt.

Dual folgt auch $\Gamma'_{[\gamma(z)]} = \gamma\Gamma_{[z]}\gamma^{-1}$, und damit ist auch

$$\Gamma'_{[\gamma(a),\gamma(z)]} = \Gamma'_{[\gamma(a)]} \cap \Gamma'_{[\gamma(z)]} = (\gamma\Gamma_{[a]}\gamma^{-1}) \cap (\gamma\Gamma_{[z]}\gamma^{-1}) = \gamma(\Gamma_{[a]} \cap \Gamma_{[z]})\gamma^{-1} = \gamma\Gamma_{[a,z]}\gamma^{-1}.$$

Wir kommen zur letzten Aussage. Offenbar reicht es die Implikation von links nach rechts zu zeigen, die andere folgt dann durch Anwendung von γ^{-1}. Sei also π als (a,z)-transitiv vorausgesetzt. Seien $p,q \in \mathfrak{P}'$ zwei Punkte mit $p,q \notin \gamma(a)$, $p,q \neq \gamma(z)$ und $p \vee \gamma(z) = q \vee \gamma(z)$. Dann folgen $\gamma^{-1}(p),\gamma^{-1}(q) \notin a$, $\gamma^{-1}(p),\gamma^{-1}(q) \neq z$ und $\gamma^{-1}(p) \vee z = \gamma^{-1}(p \vee \gamma(z)) = \gamma^{-1}(q \vee \gamma(z)) = \gamma^{-1}(q) \vee z$. Da π nach Voraussetzung (a,z)-transitiv ist, existiert ein $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$ mit $\gamma^{-1}(q) = \alpha(\gamma^{-1}(p))$. Damit ist $\beta := \gamma\alpha\gamma^{-1} \in \gamma\Gamma_{[a,z]}\gamma^{-1} = \Gamma'_{[\gamma(a),\gamma(z)]}$ und es gilt $\beta(p) = \gamma\alpha\gamma^{-1}(p) = \gamma\gamma^{-1}(q) = q$.

■

Ein wichtiger Spezialfall dieses Lemmas ist $\pi = \pi'$. Da wir Kollineationen als Exponenten schreiben, wird $\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$ zu $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \alpha^\gamma$, und wir erhalten das spezialisierte Lemma:

Lemma 13: *Sei $\pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Sei $\gamma \in \Gamma$ eine Kollineation von π. Weiter seien $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$ gegeben. Dann gelten*

$$\Gamma_{[a^\gamma]} = \Gamma^\gamma_{[a]}, \quad \Gamma_{[z^\gamma]} = \Gamma^\gamma_{[z]}, \quad \textit{und} \quad \Gamma_{[a^\gamma,z^\gamma]} = \Gamma^\gamma_{[a,z]}.$$

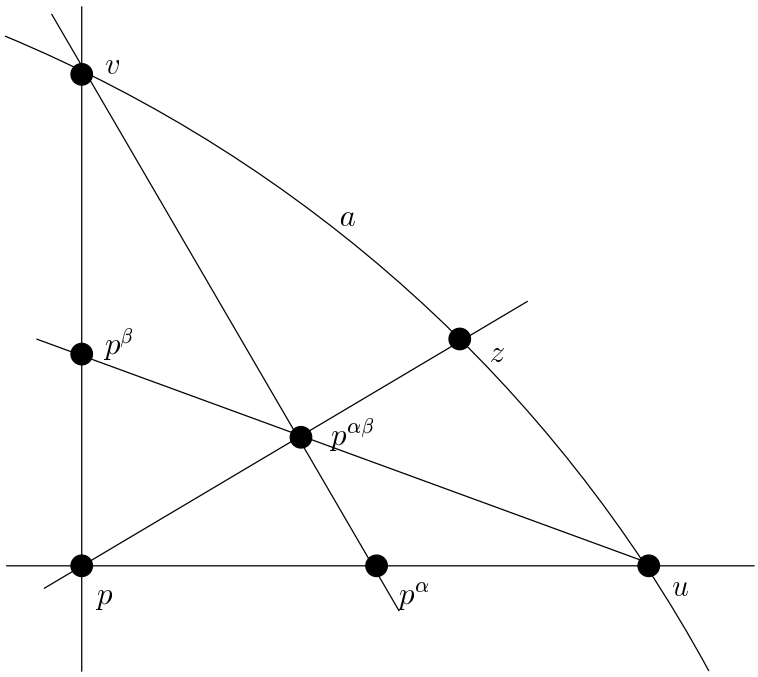
Beweis: Klar nach Lemma 12.

■

Satz 14: *Seien $\pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$, $a \in \mathfrak{L}$ eine Gerade, und bezeichne $T := \Gamma_{[a,a]}$ die Translationsgruppe zur Achse a. Es gebe $p,q \in a$ mit $p \neq q$ und $\Gamma_{[a,p]} \neq 1$, $\Gamma_{[a,q]} \neq 1$. Dann ist T abelsch.*

Beweis: Wir beginnen mit der folgenden Hilfsaussage: Seien $u,v \in a$ mit $u \neq v$, und seien $\alpha \in \Gamma_{[a,u]}$, $\beta \in \Gamma_{[a,v]}$. Dann ist $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Seien also solche u,v,α,β gegeben.



Wegen $v^\alpha = v$ und $u^\beta = u$ haben wir nach Lemma 13 und Lemma 1

$$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = \beta^{-\alpha}\beta = \alpha^{-1}\alpha^\beta \in \Gamma_{[a,u]} \cap \Gamma_{[a,v]} = 1,$$

d.h. $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = 1$ beziehungsweise $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Damit haben wir die Hilfsbehauptung eingesehen, und kommen zur eigentlichen Aussage. Seien also $\alpha, \beta \in \Gamma_{[a,a]}$ gegeben. Wähle $u, v \in a$ mit $\alpha \in \Gamma_{[a,u]}$ und $\beta \in \Gamma_{[a,v]}$. Ist $u \neq v$, so wissen wir bereits, daß $\alpha\beta = \beta\alpha$ ist. Nun sei $u = v$. Nach Voraussetzung existiert ein $w \in a$ mit $w \neq u$ und $\Gamma_{[a,w]} \neq 1$. Wähle $\gamma \in \Gamma_{[a,w]} \backslash \{1\}$. Wir wissen bereits $\alpha\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\alpha$. Weiter ist $\beta\gamma \in \Gamma_{[a,a]}$, d.h. $\beta\gamma \in \Gamma_{[a,z]}$ für ein $z \in a$. Wäre $z = u$, so $\beta, \beta\gamma \in \Gamma_{[a,u]}$, also auch $\gamma = \beta^{-1}(\beta\gamma) \in \Gamma_{[a,u]}$; im Widerspruch zu $w \neq u$. Also ist $z \neq u$, und wir haben $\alpha(\beta\gamma) = (\beta\gamma)\alpha$. Wegen $\beta = (\beta\gamma)\gamma^{-1}$ folgt auch $\alpha\beta = \beta\alpha$.

■

Definition 8: Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a \in \mathfrak{L}$ eine Gerade von π. Die Gerade a heißt eine Translationsachse von π, wenn die Gruppe $\Gamma_{[a,a]}$ transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash a$ wirkt. Gibt es eine Translationsachse a in π, so heißt π eine Translationsebene, beziehungsweise eine Translationsebene zur Translationsachse a.

Schließlich heißt π eine Moufang Ebene, falls jede Gerade von π eine Translationsachse ist. Alternativ sagen wir auch, daß die Ebene π moufangsch ist.

Wir können diese Begriffe auch in Termen der (a, z)-Transitivität formulieren.

Lemma 15: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene.*

(a) *Sei $a \in \mathfrak{L}$ eine Gerade von π. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

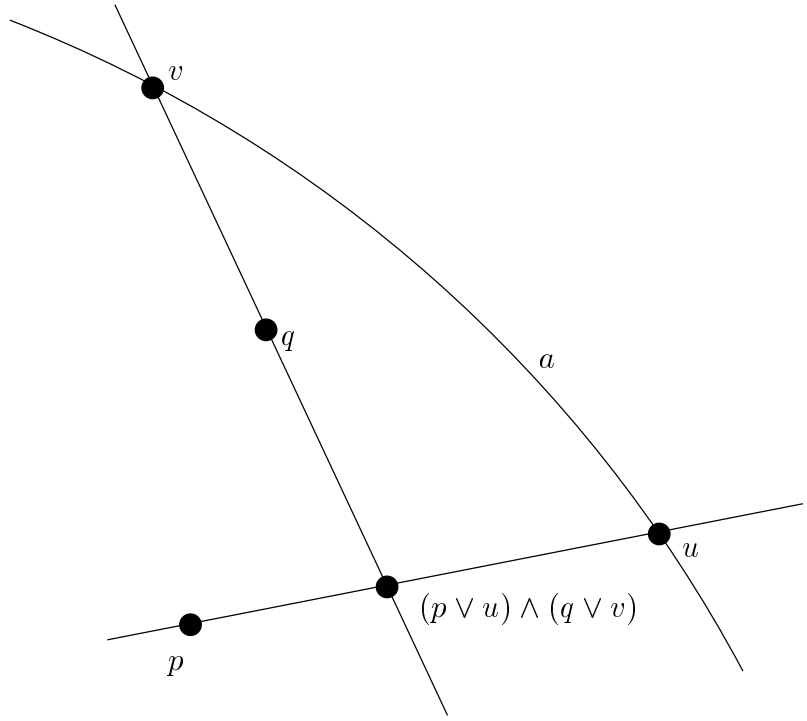
(i) *Die Ebene π ist eine Translationsebene zur Translationsachse a.*

(ii) *Für jeden Punkt $z \in a$ ist π (a,z)-transitiv.*

(iii) *Es gibt zwei Punkte $p,q \in a$ mit $p \neq q$ so, daß π sowohl (a,p)- als auch (a,q)-transitiv ist.*

(b) *Die Ebene π ist genau dann eine Moufang Ebene, wenn π (a,z)-transitiv ist für alle $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$ mit $z \in a$.*

Beweis: Setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$.
(a) (i)$\Longrightarrow$(ii): Sei $z \in a$ gegeben. Seien $p,q \in \mathfrak{P}\backslash a$ mit $p \vee z = q \vee z$. Wir können auch noch $p \neq q$ annehmen. Da die Translationsgruppe $\Gamma_{[a,a]}$ transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash a$ ist, existiert ein $\alpha \in \Gamma_{[a,a]}$ mit $q = p^\alpha$. Also ist die Gerade $p \vee z = p \vee q = p \vee p^\alpha$ nach Lemma 2 invariant unter α, und nach Lemma 4 geht sie durch das Zentrum von α, d.h. $z_\alpha = (p \vee z) \wedge a = z$. Also ist $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): Dies ist klar, da es auf a zwei verschiedene Punkte gibt.
(iii)$\Longrightarrow$(i): Wähle $u,v \in a$ mit $u \neq v$ so, daß π sowohl (a,u)- als auch (a,v)-transitiv ist. Seien $p,q \in \mathfrak{P}\backslash a$. Wegen $p \notin a = u \vee v$ ist $p \vee u \neq q \vee v$, und wir haben den Punkt $r := (p \vee u) \wedge (q \vee v)$. Wäre $r \in a$, so folgt $r = (p \vee u) \wedge a = u$, also $q \in r \vee v = u \vee v = a$; ein Widerspruch, d.h. es ist $r \notin a$ mit $r \vee u = p \vee u$ und $r \vee v = q \vee v$. Also existieren $\alpha \in \Gamma_{[a,u]}$, $\beta \in \Gamma_{[a,v]}$ mit $r = p^\alpha$ und $q = r^\beta$. Damit ist $\alpha\beta \in \Gamma_{[a,a]}$ mit $q = p^{\alpha\beta}$.



(b) Dies ist klar nach Teil (a).

■

Aufgaben zu §5

(72) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$, $a \in \mathfrak{L}$ eine Translationsachse von π und $T := \Gamma_{[a,a]}$. Seien $u, v \in a$ mit $u \neq v$. Zeigen Sie, daß dann $T = \Gamma_{[a,u]} \times \Gamma_{[a,v]}$ und $\Gamma_{[a,u]} \simeq \Gamma_{[a,v]}$ gelten.

(73) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $a \in \mathfrak{L}$, $T := \Gamma_{[a,a]}$ und es gebe $u, v \in a$ mit $u \neq v$ und $\Gamma_{[a,u]} \neq 1$, $\Gamma_{[a,v]} \neq 1$. Zeigen Sie, daß entweder alle $\alpha \in T \backslash \{0\}$ unendliche Ordnung haben, oder es gibt eine Primzahl p so, daß alle $\alpha \in T \backslash \{0\}$ die Ordnung p haben.

(74) Sei π eine endliche Translationsebene zur Translationsachse a. Setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Dann gibt es eine Primzahl p und ein $n \geq 1$ so, daß π die Ordnung p^n hat und $\Gamma_{[a,a]}$ eine elementarabelsche p-Gruppe der Ordnung p^{2n} ist.

(75) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $\Lambda \leq \Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Die Gruppe Λ bestehe aus zentral-axialen Kollineation, und Λ sei zyklisch oder $\Lambda \simeq (\mathbb{Q}, +)$. Zeigen Sie, daß es dann eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ und einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$ mit $\Lambda \leq \Gamma_{[a,z]}$ gibt.

(76) Seien π eine projektive Ebene und $\alpha \in \mathrm{Aut}(\pi)$ mit $\alpha^2 = 1 \neq \alpha$. Dann ist α entweder zentral-axial oder eine Baer Involution, d.h. $\mathrm{Fix}(\alpha)$ ist eine Baer Unterebene von π.

(77) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, und seien $\alpha, \beta \neq 1$ zwei involutorische Homologien mit gleicher Achse W und $z_\alpha \neq z_\beta$. Dann ist $\alpha\beta$ eine Elation.

(78) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann heißt π fanosch (antifanosch), wenn für jedes Viereck (p_1, p_2, p_3, p_4) in π, die drei Diagonalenschnittpunkte $(p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_4)$, $(p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee p_4)$ und $(p_1 \vee p_4) \wedge (p_2 \vee p_3)$ kollinear (nicht kollinear) sind. Sei τ eine Elation von π. Zeigen Sie:

(a) Ist π fanosch, so ist $\tau^2 = 1$.

(b) Ist π antifanosch und $\tau^2 = 1$, so ist schon $\tau = 1$.

(79) Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Zeigen Sie, daß $\mathrm{PG}(V)$ genau dann fanosch (antifanosch) ist, wenn $\mathrm{char}(K) = 2$ ($\mathrm{char}(K) \neq 2$) gilt.

(80) Zeigen Sie, daß es eine projektive Ebene gibt, die weder fanosch noch antifanosch ist.

(81) Sei π eine endliche projektive Ebene der Ordnung n.

(a) Besitzt π eine nicht-identische, involutorische Elation, so ist n gerade.

(b) Besitzt π eine nicht-identische, involutorische Homologie, so ist n ungerade.

(82) Sei $k > 1$, und bezeichne M_k die Moulton Ebene zum Knickfaktor k.

(a) Sind $a, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$, so ist

$$\delta_{c,a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (cx, cy + a)$$

eine Dilatation von M_k.

(b) Ist δ eine Dilatation von M_k, so gibt es $a, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ und $\delta = \delta_{c,a}$.

(83) Sei wieder $k > 1$.

(a) Bestimmen Sie alle Translationen der Moulton Ebene M_k.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Zentren nicht-identischer Homologien von M_k.

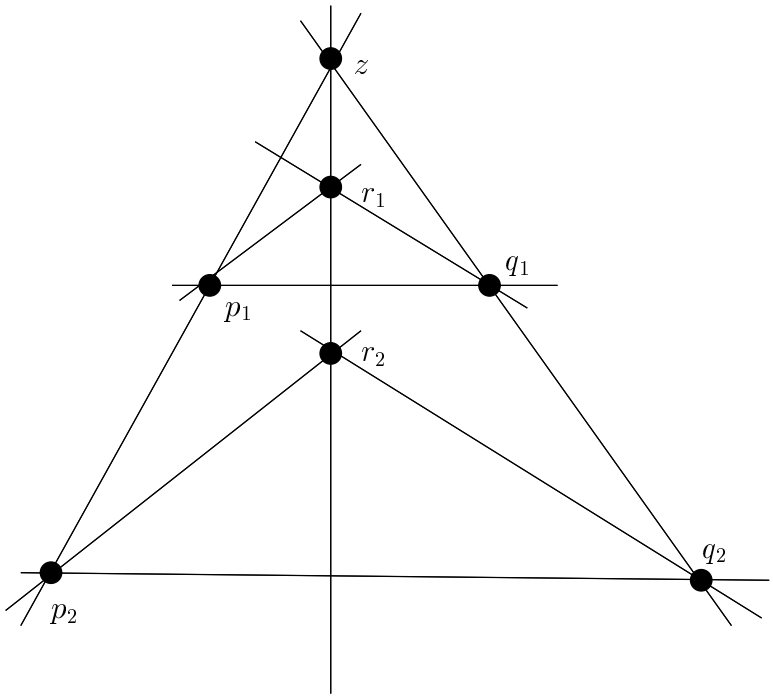
(c) Zeigen Sie $[0]^\alpha = [0]$ für jede Kollineation α von M_k.

(84) Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$. Seien a eine Gerade von $\mathrm{PG}(V)$ und $\Delta \leq \Gamma_{[a]}$ sei eine nur aus Homologien bestehende Untergruppe. Zeigen Sie, daß es einen Punkt z von $\mathrm{PG}(V)$ mit $\Delta \leq \Gamma_{[a,z]}$ gibt.

§6 Der Satz von Desargues

In §5 haben wir Homologien und Elationen eingeführt, und insbesondere den Begriff der (a, z)-Transitivität einer projektiven Ebene definiert. Wie alle Begriffe in allgemeinen projektiven Ebenen läßt sich dieser Begriff in Termen von Punkten und Geraden formulieren, allerdings ist diese Formulierung durch das Auftauchen von Kollineationen etwas indirekt. Wir werden zeigen, daß es auch eine direkte inzidenzgeometrische Formulierung der (a, z)-Transitivität gibt.

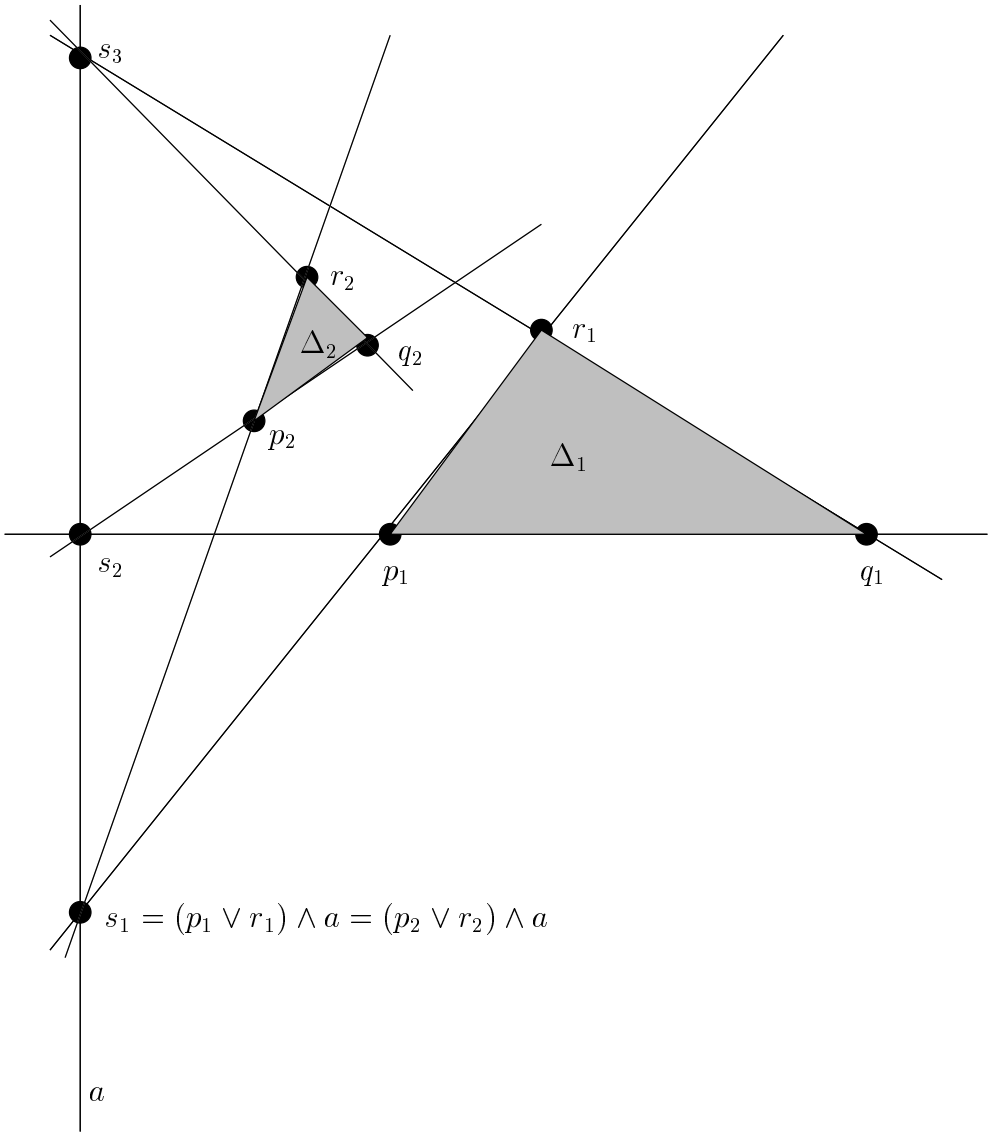
Definition 1: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Sind $\Delta_1 = (p_1, q_1, r_1)$ und $\Delta_2 = (p_2, q_2, r_2)$ zwei Dreiecke, d.h. zwei Tripel nicht-kollinearer Punkte, so sagen wir, daß Δ_1 und Δ_2 zentral zum Punkt $z \in \mathfrak{P}$ liegen, wenn $p_i, q_i, r_i \neq z$ für $i = 1, 2$ ist, $p_1 \vee z = p_2 \vee z$, $q_1 \vee z = q_2 \vee z$, $r_1 \vee z = r_2 \vee z$ gelten und diese drei Geraden paarweise verschieden sind, und außerden $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$, $r_1 \neq r_2$ ist. Wir sagen, daß Δ_1 und Δ_2 zentral liegen, wenn sie zu irgendeinem Punkt zentral sind.



Dual wird der Begriff der axialen Lage zweier Dreiecke definiert.

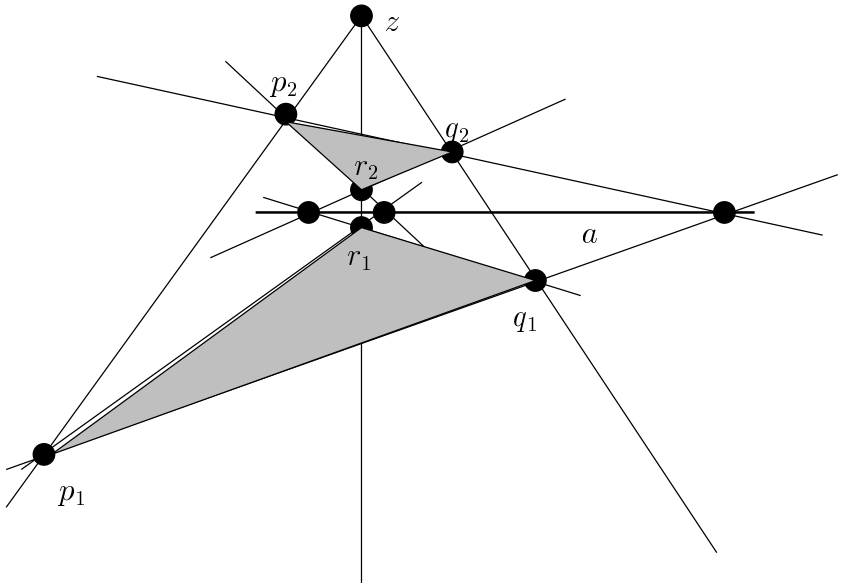
Definition 2: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Sind $\Delta_1 = (p_1, q_1, r_1)$ und $\Delta_2 = (p_2, q_2, r_2)$ zwei Dreiecke in π, so sagen wir, daß Δ_1 und Δ_2 axial zur Geraden $a \in \mathfrak{L}$ liegen, wenn $p_i \vee q_i$, $p_i \vee r_i$, $q_i \vee r_i \neq a$ für $i = 1, 2$ sind, $(p_1 \vee q_1) \wedge a = (p_2 \vee q_2) \wedge a$, $(p_1 \vee r_1) \wedge a = (p_2 \vee r_2) \wedge a$, $(q_1 \vee r_1) \wedge a = (q_2 \vee r_2) \wedge a$ gelten und diese drei Punkte paarweise verschieden sind, sowie $p_1 \vee q_1 \neq p_2 \vee q_2$, $p_1 \vee r_1 \neq p_2 \vee r_2$ und $q_1 \vee r_1 \neq q_2 \vee r_2$ ist.

Die beiden Dreiecke liegen axial, wenn sie zu irgendeiner Geraden axial liegen.



Als den Satz von Desargues bezeichnet man die folgende Aussage über eine projektive Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$.

Satz von Desargues:
Liegen zwei Dreiecke der projektiven Ebene zentral zueinander, so sind sie auch axial zueinander.



Um einzusehen, daß alle in der folgenden Definition auftauchenden Schnittpunkte tatsächlich wohldefiniert sind, und die Verschiedenheitsbedingungen in der Definition axialer Dreiecke gelten, verwenden wir das folgende kleine Lemma.

Lemma 1: *Seien* $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ *eine projektive Ebene,* $z \in \mathfrak{P}$ *ein Punkt, und* $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ *(*$i = 1, 2$*) zwei Dreiecke, die zentral zu* z *liegen. Dann gelten*

$$p_1 \vee q_1 \neq p_2 \vee q_2,\ p_1 \vee r_1 \neq p_2 \vee r_2,\ q_1 \vee r_1 \neq q_2 \vee r_2,$$
$$z \notin p_i \vee q_i, p_i \vee r_i, q_i \vee r_i \quad (i = 1, 2),$$
$$p_i \notin p_j \vee q_j,\ p_i \notin p_j \vee r_j,\ q_i \notin p_j \vee q_j,\ q_i \notin q_j \vee r_j,$$
$$r_i \notin p_j \vee r_j,\ r_i \notin q_j \vee r_j \quad \textit{(für } \{i, j\} = \{1, 2\}\textit{)}.$$

Setzen wir

$$s := (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2),\ t := (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2),\ u := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2),$$

so ist

$$s \neq t \neq u \neq s,$$
$$s, t, u \neq z, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2,$$
$$s \notin p_1 \vee z,\ s \notin q_1 \vee z,\ t \notin p_1 \vee z,\ t \notin r_1 \vee z,\ u \notin q_1 \vee z,\ u \notin r_1 \vee z,$$
$$s \notin p_i \vee r_i,\ q_i \vee r_i,\ t \notin p_i \vee q_i,\ q_i \vee r_i,\ u \notin p_i \vee q_i,\ p_i \vee r_i \quad (i = 1, 2).$$

Ist $a := s \vee t$*, so gelten*

$$p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 \notin a.$$

Beweis: Wäre $p_1 \vee q_1 = p_2 \vee q_2$, so wäre $p_1 \vee z = p_1 \vee p_2 = q_1 \vee q_2 = q_1 \vee z$; ein Widerspruch. Ebenso folgen $p_1 \vee r_1 \neq p_2 \vee r_2$ und $q_1 \vee r_1 \neq q_2 \vee r_2$. Wäre $z \in p_1 \vee q_1$, so folgte sofort der Widerspruch $p_1 \vee z = q_1 \vee z$, d.h. $z \notin p_1 \vee q_1$. Ebenso folgt, daß z auf keiner der anderen fünf angegebenen Geraden liegt.

Wäre $p_1 \in p_2 \vee q_2$, so hätten wir $z \in p_2 \vee z = p_1 \vee p_2 = p_2 \vee q_2$; ein Widerspruch. Analog folgen die anderen elf Nicht-Inzidenzen.

Wäre $s = t$, so folgte $p_1 = (p_1 \vee q_1) \wedge (p_1 \vee r_1) = s = (p_2 \vee q_2) \wedge (p_2 \vee r_2) = p_2$; ein Widerpruch. Also ist $s \neq t$, und ebenso folgen $t \neq u \neq s$. Wegen $z \notin p_1 \vee q_1, p_1 \vee r_1, q_1 \vee r_1$ folgt auch $z \neq s, t, u$.

Wäre $s \in p_1 \vee r_1$, so folgte $s = (p_1 \vee r_1) \wedge (p_1 \vee q_1) = p_1$, und somit ist $p_1 \in p_2 \vee q_2$; ein Widerspruch. Also ist $s \notin p_1 \vee r_1$. Ebenso folgen die anderen elf Nicht-Inzidenzen. Weiter folgt sofort $s, t, u \neq p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$.

Wäre $p_1 \in a$, so folgt wegen $t \notin p_1 \vee q_1$ auch $a \neq p_1 \vee q_1$ und $p_1 = a \wedge (p_1 \vee q_1) = s$; ein Widerspruch. Ebenso folgt $p_2 \notin a$. Aus $q_1 \in a$ folgte $q_1 = a \wedge (p_1 \vee q_1) = s$; erneut ein Widerspruch. Ebenso folgen $q_2, r_1, r_2 \notin a$.

Weiter haben wir $z \notin p_1 \vee q_1 = p_1 \vee s$, und damit auch $s \notin p_1 \vee z$. Ebenso folgen die restlichen fünf Nicht-Inzidenzen.

■

Wir definieren:

Definition 3: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, und seien $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$. Die Ebene π heißt (a, z)-desarguesch, wenn in ihr die folgende Aussage gilt:

Sind $\Delta_1 = (p_1, q_1, r_1)$ und $\Delta_2 = (p_2, q_2, r_2)$ zwei Dreiecke, die zentral zu z liegen mit

$$(p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a \quad \text{und} \quad (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a,$$

so liegen die beiden Dreiecke auch axial zu a (dies ist nach Lemma 1 gleichbedeutend mit $(q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) \in a$).

Definition 4: Eine projektive Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ heißt desarguesch, wenn sie (a, z)-desarguesch für jedes Paar $(a, z) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{P}$ ist.

Offenbar ist eine projektive Ebene genau dann desarguesch, wenn in ihr der Satz von Desargues gilt. Von Interesse ist auch noch die folgende Abschwächung des Satzes von Desargues in einer projektiven Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$:

> *Kleiner Satz von Desargues:*
> *Liegen zwei Dreiecke $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ zentral zu einem Zentrum z, und ist a eine Gerade durch z mit $(p_1 \vee q_1) \wedge a = (p_2 \vee q_2) \wedge a$ und $(p_1 \vee r_1) \wedge a = (p_2 \vee r_2) \wedge a$, so ist auch $(q_1 \vee r_1) \wedge a = (q_2 \vee r_2) \wedge a$.*

Offenbar gilt der kleine Satz von Desargues genau dann in einer projektiven Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, wenn π (a, z)-desarguesch ist, für alle $z \in a \in \mathfrak{L}$.

Zum Beispiel sind unsere Ebenen $\mathrm{PG}(V)$ desarguesch. Dies folgt aus dem folgenden wichtigen Lemma.

Lemma 2: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $z \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{L}$. Sei π als (a,z)-transitiv vorausgesetzt. Dann ist π auch (a,z)-desarguesch.*

Beweis: Seien $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ für $i = 1, 2$ zwei Dreiecke, die zentral zu z liegen, und es gelte $s := (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a$, $t := (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a$. Setze $u := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2)$. Zu zeigen ist $u \in a$.

Es ist $p_1, p_2 \neq z$, $p_1 \vee z = p_2 \vee z$ und nach Lemma 1 ist auch $p_1, p_2 \notin a$. Da π als (a,z)-transitiv vorausgesetzt ist, existiert eine Kollineation α von π mit Zentrum z, Achse a und $p_2 = p_1^\alpha$. Nach Lemma 1 ist $z \notin p_1 \vee q_1$, also auch $z \vee q_1 \neq p_1 \vee q_1$ und $q_1 = (q_1 \vee z) \wedge (p_1 \vee q_1) = (q_1 \vee z) \wedge (p_1 \vee s)$, da wieder nach Lemma 1 $p_1 \neq s$ ist. Es folgt

$$q_1^\alpha = ((q_1 \vee z) \wedge (p_1 \vee s))^\alpha = (q_1 \vee z) \wedge (p_1^\alpha \vee s) = (q_2 \vee z) \wedge (p_2 \vee s) = (q_2 \vee z) \wedge (p_2 \vee q_2) = q_2.$$

Ebenso ergibt sich $r_1^\alpha = r_2$. Es folgt weiter $(q_1 \vee r_1)^\alpha = q_1^\alpha \vee r_1^\alpha = q_2 \vee r_2 \neq q_1 \vee r_1$ nach Lemma 1, und nach §5.Lemma 2 ist $u = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_1 \vee r_1)^\alpha$ ein Fixpunkt von α. Wieder nach Lemma 1 ist $u \neq z$, und mit §5.Lemma 4 folgt $u \in a$.

■

Insbesondere haben wir damit das folgende Lemma:

Lemma 3: *Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Dann ist die projektive Ebene $\mathrm{PG}(V)$ desarguesch.*

Beweis: Nach §5.Lemma 8 und §5.Lemma 9 ist $\mathrm{PG}(V)$ (a,z)-transitiv für jeden Punkt z und jede Gerade a von $\mathrm{PG}(V)$. Mit Lemma 2 folgt die Behauptung.

■

Wir werden im folgenden auch die Umkehrung von Lemma 2 beweisen, d.h. ist eine projektive Ebene π (a,z)-desarguesch, so ist sie auch (a,z)-transitiv. Hierzu werden wir explizit Kollineationen von π konstruieren müssen. Um von einer gegebenen Bijektion nachzuweisen, daß sie eine Kollineation ist, haben wir bisher meist §1.Lemma 3 verwendet. Für die Zwecke dieses Abschnitts ist ein anderes Kriterium nützlicher. Wir hatten in §1.Lemma 2 gesehen, daß die Isomorphismen genau die kollinearitätstreuen Bijektionen sind. Für projektive Ebenen läßt sich dieses Kriterium nochmals verbessern.

Lemma 4: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$, $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ zwei projektive Ebenen. Sei $\varphi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ bijektiv. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *φ ist ein Isomorphismus.*

(b) *Sind $p, q, r \in \mathfrak{P}$ paarweise verschieden und kollinear, so sind auch $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ kollinear.*

(c) *Ist $l \in \mathfrak{L}$, so ist die Menge $\varphi(l) \subseteq \mathfrak{P}'$ kollinear.*

Beweis: **(a)$\Longrightarrow$(b):** Klar.
(b)$\Longrightarrow$(c): Sei $l \in \mathfrak{L}$. Wähle $p, q \in l$ mit $p \neq q$, und setze $l' := \varphi(p) \vee \varphi(q) \in \mathfrak{L}'$. Sei $r \in l$. Ist $r = p$ oder $r = q$, so ist sicher $\varphi(r) \in l'$. Ist $r \neq p, q$, so sind p, q, r kollinear, d.h. auch $\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r)$ sind kollinear, und somit ist $\varphi(r) \in \varphi(p) \vee \varphi(q) = l'$. Dies zeigt $\varphi(l) \subseteq l'$.
(c)$\Longrightarrow$(a): Sei $l \in \mathfrak{L}$. Es gibt eine Gerade $l' \in \mathfrak{L}'$ mit $\varphi(l) \subseteq l'$. Angenommen es wäre $\varphi(l) \neq l'$. Dann existiert ein Punkt $p' \in l'$ mit $p' \notin \varphi(l)$. Sei $p \in \mathfrak{P}$ mit $p' = \varphi(p)$. Es ist $p \notin l$. Sei $q \in \mathfrak{P}$. Ist $q = p$, so gilt $\varphi(q) = p' \in l'$. Jetzt sei $q \neq p$. Dann ist die Menge $\varphi(p \vee q)$ in π' kollinear, d.h. es existiert $l'' \in \mathfrak{L}'$ mit $\varphi(p \vee q) \subseteq l''$. Weiter ist $(p \vee q) \wedge l \neq p$ und $\varphi((p \vee q) \wedge l), \varphi(p) = p' \in l' \cap l''$, d.h. $|l' \cap l''| \geq 2$, und somit ist $l'' = l'$. Es folgt $\varphi(q) \in \varphi(p \vee q) \subseteq l'$. Insgesamt folgt $\mathfrak{P}' = \varphi(\mathfrak{P}) \subseteq l'$, d.h. ganz $\mathfrak{P}'$ ist kollinear; ein Widerspruch.

Dieser Widerspruch zeigt $\varphi(l) = l' \in \mathfrak{L}'$. Mit §1.Lemma 3 folgt, daß φ ein Isomorphismus ist.

■

Angenommen wir haben ein vorgegebenes Zentrum z und eine vorgegebene Achse a, sowie zwei Punkte p, q mit $p, q \notin a$, $p, q \neq z$ und $p \vee z = q \vee z$, und wollen eine Kollineation α mit Zentrum z, Achse a und $q = p^\alpha$ konstruieren. Aus §5.Lemma 5 wissen wir, daß es höchstens eine solche Kollineation α geben kann. Im wesentlichen können wir sogar sagen wie α aussehen muss. Ist nämlich x ein Punkt nicht auf $p \vee z$, so ist $s = (p \vee x) \wedge a$ auf der Achse, also ein Fixpunkt, und wegen $x = (s \vee p) \wedge (z \vee x)$ folgt

$$x^\alpha = (s \vee p^\alpha) \wedge (z \vee x) = (s \vee q) \wedge (z \vee x).$$

In diesem Sinne sind zentral-axiale Kollineationen so etwas wie innere Automorphismen, sie lassen sich fast aus der geometrischen Struktur selbst konstruieren. Jetzt können wir die durch die obige Formel gegebene Abbildung in jeder projektiven Ebene zumindest hinschreiben. Im folgenden Lemma führen wir hierfür eine Bezeichnung ein, und stellen einige nützliche Tatsachen zusammen.

Lemma 5: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Seien $a \in \mathfrak{L}$, $p, q, z \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q \neq z \neq p$, $p, q \notin a$ und $p \vee z = q \vee z$. Wir betrachten die Abbildung*

$$\alpha := \alpha_{pq}^{az} : (\mathfrak{P} \backslash (p \vee z)) \cup \{z\} \to (\mathfrak{P} \backslash (p \vee z)) \cup \{z\};$$
$$x \mapsto \begin{cases} (((p \vee x) \wedge a) \vee q) \wedge (x \vee z), & x \neq z, \\ z, & x = z. \end{cases}$$

Dann gelten:

(a) *α ist bijektiv mit $\alpha^{-1} = \alpha_{qp}^{az}$.*

(b) *Ist $l \in \mathfrak{L}_z$ mit $l \neq a, p \vee z$, so ist $\alpha(l \backslash \{z\}) = l \backslash \{z\}$, und für $x \in l \backslash \{z, a \wedge l\}$ gilt $\alpha(x) \neq x$.*

(c) *Ist $x \in a$ mit $x \notin p \vee z$, so ist $\alpha(x) = x$.*

Beweis: Sei $l \in \mathfrak{L}_z$ mit $l \neq p \vee z$. Sei $x \in l \backslash \{z\}$. Wegen $p \notin a$ ist sicher $p \vee x \neq a$, und $y := (p \vee x) \wedge a$ ist definiert. Wegen $q \notin a$ ist auch $y \neq q$, und wir haben $y \vee q \in \mathfrak{L}$. Wäre $y \vee q = x \vee z = l$, so ist $q \in x \vee z$, also $l = x \vee z = q \vee z = p \vee z$; ein Widerspruch. Also ist $y \vee q \neq x \vee z$, und $\alpha(x) \in l$ ist überhaupt wohldefiniert. Wäre $\alpha(x) = z$, so hätten wir $z \in y \vee q$, d.h. $y \in q \vee z = p \vee z$, und somit ist $y = (p \vee x) \wedge (p \vee z) = p$ da wegen $x \notin p \vee z$ ja $p \vee x \neq p \vee z$ ist. Somit ist $p = y \in a$; ein Widerspruch. Also ist tatsächlich $\alpha(x) \neq z$, und wir haben $\alpha(l \backslash \{z\}) \subseteq l \backslash \{z\}$.

Weiter gilt für jedes $x \in l \backslash \{z\}$ auch

$$\begin{aligned} \alpha_{qp}^{az}(\alpha(x)) &= (((q \vee ((((p \vee x) \wedge a) \vee q) \wedge l)) \wedge a) \vee p) \wedge l \\ &= (((((p \vee x) \wedge a) \vee q) \wedge a) \vee p) \wedge l \\ &= (((p \vee x) \wedge a) \vee p) \wedge l \\ &= (p \vee x) \wedge l \\ &= x. \end{aligned}$$

Vertauschen wir p, q so erhalten wir ebenso $\alpha(\alpha_{qp}^{az}(x)) = x$. Also ist $\alpha | l \backslash \{z\}$ bijektiv mit $(\alpha | l \backslash \{z\})^{-1} = \alpha_{qp}^{az} | l \backslash \{z\}$. Damit haben wir $\alpha(l \backslash \{z\}) = l \backslash \{z\}$ und Behauptung (a).

Jetzt seien $l \in \mathfrak{L}_z$ mit $l \neq a, p \vee z$ und $x \in l \backslash \{z, l \wedge a\}$. Wir wollen $\alpha(x) \neq x$ einsehen. Setze $y := (p \vee x) \wedge a$. Es ist $x, \alpha(x) \notin p \vee z$, also ist $y \vee x, y \vee \alpha(x) \neq p \vee z$. Ist jetzt $y \notin l$, so ist $x, \alpha(x) \neq y$, und wir haben $(y \vee x) \wedge (p \vee z) = (p \vee x) \wedge (p \vee z) = p \neq q = (q \vee y) \wedge (p \vee z) = (y \vee \alpha(x)) \wedge (p \vee z)$, also ist $y \vee x \neq y \vee \alpha(x)$, und somit auch $x \neq \alpha(x)$. Wäre also $\alpha(x) = x$, so folgte $y \in l$, also $y = (p \vee x) \wedge l = x$, und somit ist $x = y \in a$, d.h. $x = l \wedge a$; ein Widerspruch. Damit ist (b) vollständig bewiesen.

Wir kommen zu (c). Sei also $x \in a$ mit $x \notin p \vee z$ gegeben. Insbesondere ist $x \neq z$, und wir haben

$$\alpha(x) = (((p \vee x) \wedge a) \vee q) \wedge (x \vee z) = (x \vee q) \wedge (x \vee z) = x.$$

■

Im allgemeinen projektiven Ebenen sind die α_{pq}^{az} leider keine Einschränkungen von Kollineationen. Wir wollen uns jetzt klarmachen wir wir ein α_{pq}^{az} auf die gesamte Punktmenge ausdehnen können. Zunächst ist α_{pq}^{az} außerhalb der Geraden $l = p \vee z$ definiert. Um auf l fortzusetzen, wählen wir einen weiteren Punkt r außerhalb von l und der Achse a, und verwenden auf l die Abbildung $\alpha_{r, \alpha_{pq}^{az}(r)}^{az}$. Diese beiden Abbildungen sind außerhalb von $l \cup (r \vee z)$ beide definiert, und wir werden jetzt zeigen, daß sie dort übereinstimmen, wenn π (a, z)-desarguesch ist.

Lemma 6: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$. Weiter seien $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$, $p, q \neq z$, $l := p \vee z = q \vee z$ und $p, q \notin a$. Weiter sei $r \in \mathfrak{P} \backslash (l \cup a)$, und setze*

$$\mathfrak{P}^* := ((\mathfrak{P} \backslash l) \cup \{z\}) \cap ((\mathfrak{P} \backslash (r \vee z)) \cup \{z\}) = (\mathfrak{P} \backslash (l \cup (r \vee z))) \cup \{z\}.$$

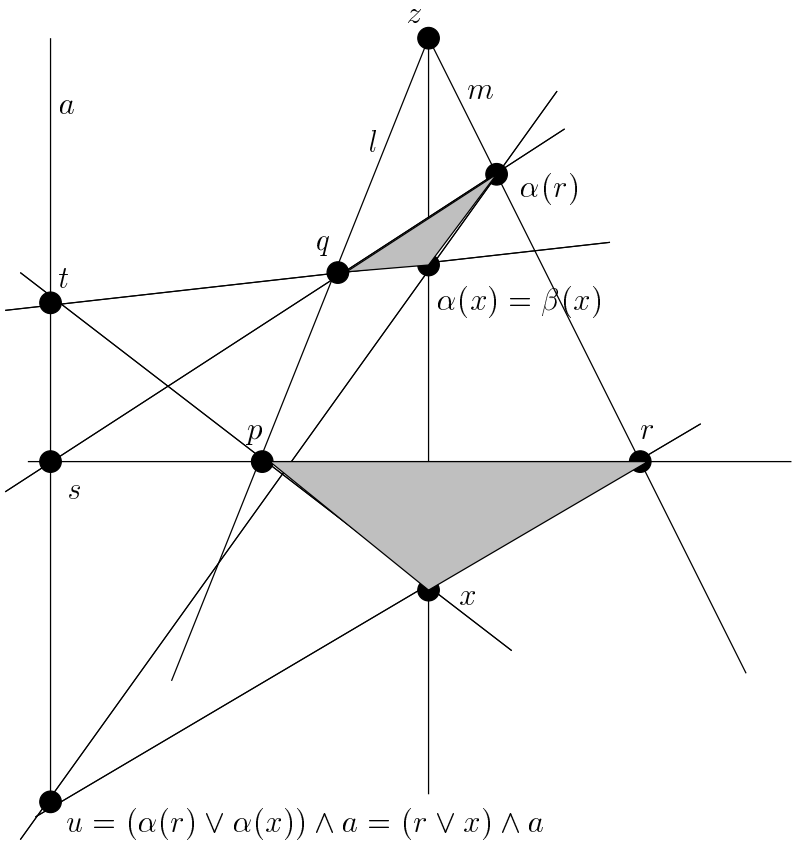
Sei $\alpha := \alpha_{pq}^{az}$. *Ist* π (a,z)*-desarguesch, so gelten*

$$\alpha_{r,\alpha(r)}^{az}|\mathfrak{P}^* = \alpha|\mathfrak{P}^*$$

und $\alpha_{r,\alpha(r)}^{az}(p) = q$.

Beweis: Nach Lemma 5.(b) ist $\alpha(r) \neq r, z$, und ebenfalls nach Lemma 5 ist $\alpha(r) \vee z = r \vee z =: m$ und $\alpha(r) \neq m \wedge a$, d.h. $\alpha(r) \notin a$. Damit ist $\beta := \alpha_{r,\alpha(r)}^{az}$ überhaupt wohldefiniert, und $\mathfrak{P}^*$ ist der Durchschnitt der Definitionsbereiche von α und β.

Sei jetzt $x \in \mathfrak{P}^*$ gegeben. Zu zeigen ist $\alpha(x) = \beta(x)$, und für $x = z$ ist dies klar, d.h. wir können $x \neq z$ annehmen. Ist $x \in a$, so haben wir nach Lemma 5.(c) ebenfalls $\alpha(x) = x = \beta(x)$, d.h. wir können auch $x \notin a$ annehmen.



Ist $s := (p \vee r) \wedge a$, so gilt $\alpha(r) = (q \vee s) \wedge m$, d.h. $(q \vee \alpha(r)) \wedge a = (q \vee s) \wedge a = s$. Mit $t := (x \vee p) \wedge a$, haben wir ebenso $\alpha(x) = (q \vee t) \wedge (x \vee z)$ und $(q \vee \alpha(x)) \wedge a = t$. Wir betrachten zunächst den Sonderfall $x \in r \vee p$. In diesem Fall ist

$$\beta(x) = (((r \vee x) \wedge a) \vee \alpha(r)) \wedge (x \vee z) = (s \vee \alpha(r)) \wedge (x \vee z) =$$
$$(s \vee ((s \vee q) \wedge m)) \wedge (x \vee z) = (s \vee q) \wedge (x \vee z) = (((p \vee x) \wedge a) \vee q) \wedge (x \vee z) = \alpha(x).$$

Damit können wir im folgenden $x \notin r \vee p$ annehmen, d.h. $\Delta_1 := (p, r, x)$ ist ein Dreieck. Es ist $p \vee z = l \neq m = r \vee z$ und $x \vee z \neq p \vee z, r \vee z$. Weiter haben wir $q \neq p$ mit

$q \vee z = p \vee z$ und $\alpha(r) \neq r$ mit $\alpha(r) \vee z = r \vee z$. Es ist $p, q, r, \alpha(r), x, \alpha(x) \neq z$. Wäre $\alpha(x) = (q \vee t) \wedge (x \vee z) \in q \vee \alpha(r)$, so wäre $\alpha(x) \vee q = \alpha(r) \vee q = s \vee q$, d.h. $t = (q \vee \alpha(x)) \wedge a = (s \vee q) \wedge a = s$, und somit $x \in p \vee t = s \vee p = p \vee r$; ein Widerspruch. Also ist $\alpha(x) \notin q \vee \alpha(r)$, und wir haben das Dreieck $\Delta_2 := (q, \alpha(r), \alpha(x))$. Dann liegen Δ_1 und Δ_2 zentral zu z, denn wegen $x \notin a$ haben wir nach Lemma 5.(b) auch $\alpha(x) \neq x$. Es ist $(p \vee r) \wedge (q \vee \alpha(r)) = s \in a$ und $(p \vee x) \wedge (q \vee \alpha(x)) = t \in a$. Da π als (a, z)-desarguesch vorausgesetzt ist, folgt auch

$$u := (r \vee x) \wedge (\alpha(r) \vee \alpha(x)) \in a.$$

Also ist

$$\beta(x) = (((r \vee x) \wedge a) \vee \alpha(r)) \wedge (x \vee z) = (u \vee \alpha(r)) \wedge (x \vee z) = (\alpha(x) \vee \alpha(r)) \wedge (x \vee z) = \alpha(x).$$

Es bleibt nur noch $\beta(p) = q$ zu zeigen. Setze wieder $s := (p \vee r) \wedge a$. Dann ist

$$\beta(p) = (((r \vee p) \wedge a) \vee \alpha(r)) \wedge l = (s \vee \alpha(r)) \wedge l = (s \vee q) \wedge l = q.$$

■

Damit ist die eigentliche Arbeit getan, und wir können den Hauptsatz dieses Paragraphen beweisen. Wir werden den Satz von Desargues nicht mehr direkt verwenden müssen, sondern können uns immer auf unser Lemma 6 zurückziehen.

Satz 7: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $z \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{L}$. Dann ist π genau dann (a, z)-transitiv, wenn π (a, z)-desarguesch ist.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Klar nach Lemma 2.
"'$\Longleftarrow$"' Hat π die Ordnung 2, so ist π_a ein affines Minimalmodell, und die Behauptung ist trivial zu verifizieren. Also können wir im folgenden annehmen, daß π mindestens die Ordnung 3 hat.

Seien $p, q \in \mathfrak{P} \backslash a$ mit $p, q \neq z$ und $p \vee z = q \vee z$. Wir müssen eine Kollineation α von π mit Zentrum z und Achse a konstruieren, für die $q = p^\alpha$ gilt. Für $p = q$ ist dies trivial, d.h. wir können $p \neq q$ annehmen. Setzen wir $l := p \vee z$, $\mathfrak{P}_1 := (\mathfrak{P} \backslash l) \cup \{z\}$, so haben wir die bijektive Abbildung $\alpha_1 := \alpha_{pq}^{az} : \mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_1$. Wähle einen weiteren Punkt $r \in \mathfrak{P} \backslash (l \cup a)$, und setze $m := r \vee z$, $\mathfrak{P}_2 := (\mathfrak{P} \backslash m) \cup \{z\}$. Nach Lemma 6 haben wir die bijektive Abbildung $\alpha_2 := \alpha_{r,\alpha_1(r)}^{az} : \mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_2$ mit $\alpha_2(p) = q$ und $\alpha_1 | \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = \alpha_2 | \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$. Wir erhalten die bijektive Abbildung

$$\alpha : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}; x \mapsto \begin{cases} \alpha_1(x), & x \in \mathfrak{P}_1, \\ \alpha_2(x), & x \in \mathfrak{P}_2 \end{cases}$$

mit $\alpha(p) = q$, $\alpha | a = \mathrm{id}$ und $\alpha(g) = g$ für jede Gerade $g \in \mathfrak{L}_z$. Es bleibt nur zu zeigen, daß α eine Kollineation ist. Wir zeigen zunächst die folgende Hilfsaussage: Ist

$s \in \mathfrak{P}$ mit $s \notin a$ und $s \neq z$, so ist $\alpha(s) \neq z, s$, $\alpha(s) \notin a$, $\alpha(s) \vee z = s \vee z$ und $\alpha|(\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\} = \alpha^{az}_{s,\alpha(s)}$.

Sei also $s \in \mathfrak{P}\backslash a$ mit $s \neq z$ gegeben. Ist $s \notin l \cup m$, so haben wir nach Lemma 6

$$\alpha^{az}_{s,\alpha(s)}|((\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}) \cap \mathfrak{P}_1 = \alpha^{az}_{s,\alpha_1(s)}|((\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}) \cap \mathfrak{P}_1 = \alpha_1|((\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}) \cap \mathfrak{P}_1 = \alpha|((\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}) \cap \mathfrak{P}_1,$$

und ebenso

$$\alpha^{az}_{s,\alpha(s)}|((\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}) \cap \mathfrak{P}_2 = \alpha|((\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}) \cap \mathfrak{P}_2,$$

also auch $\alpha^{az}_{s,\alpha(s)} = \alpha|(\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\}$. Ist dagegen $s \in m$, so ist $s \notin l$, $\alpha(s) = \alpha_1(s)$, und eine erneute Anwendung von Lemma 6 liefert $\alpha^{az}_{s,\alpha(s)}|\mathfrak{P}_1 \cap ((\mathfrak{P}\backslash m) \cup \{z\}) = \alpha|\mathfrak{P}_1 \cap ((\mathfrak{P}\backslash m) \cup \{z\})$. Da π mindestens die Ordnung 3 hat, können wir eine weitere Gerade $g \in \mathfrak{L}_z$ mit $g \neq l, m, a$ wählen. Wähle außerdem einen Punkt $t \in g$ mit $t \neq z, g \wedge a$. Wenden wir jetzt erneut Lemma 6 und den bereits bewiesenen Fall an, so folgt

$$\alpha^{az}_{s,\alpha(s)}|l = \alpha^{az}_{t,\alpha^{az}_{s,\alpha(s)}(t)}|l = \alpha^{az}_{t,\alpha(t)}|l = \alpha|l.$$

Damit ist insgesamt $\alpha^{az}_{s,\alpha(s)} = \alpha|(\mathfrak{P}\backslash m) \cup \{z\}$. Der letzte verbliebene Fall $s \in l$ ist analog.

Damit haben wir unsere Hilfsbehauptung eingesehen, und kommen zum eigentlichen Beweis. Seien $s, t, u \in \mathfrak{P}$ paarweise verschieden und kollinear. Wir zeigen, daß $\alpha(s), \alpha(t), \alpha(u)$ wieder kollinear sind. Sei $g \in \mathfrak{L}$ die Gerade mit $s, t, u \in g$.

Fall 1: Sei $z \in g$. Dann gilt $\alpha(s), \alpha(t), \alpha(u) \in \alpha(g) = g \in \mathfrak{L}$.

Fall 2: Jetzt sei $g = a$. Dann sind $\alpha(s) = s$, $\alpha(t) = t$ und $\alpha(u) = u$ wieder kollinear.

Fall 3: Es sei $z \notin g$ und $g \neq a$. Dann ist $|\{s, t, u\} \cap a| \leq 1$, also können wir $s \notin a$ annehmen. Nach unserer Hilfsbehauptung ist $\alpha|(\mathfrak{P}\backslash(s \vee z)) \cup \{z\} = \alpha^{az}_{s,\alpha(s)}$. Wegen $z \notin g$ ist $t, u \notin s \vee z$. Ist $v := g \wedge a$, so folgt für $x \in \{t, u\}$

$$\alpha(x) = \alpha^{az}_{s,\alpha(s)}(x) = (((s \vee x) \wedge a) \vee \alpha(s)) \wedge (x \vee z) = (v \vee \alpha(s)) \wedge (x \vee z) \in v \vee \alpha(s),$$

d.h. $\alpha(s), \alpha(t), \alpha(u)$ liegen auf der Geraden $v \vee \alpha(s)$, und sind somit kollinear.

Nach Lemma 4 ist α eine Kollineation von π.

■

Dieser Satz impliziert sofort die folgende rein inzidenzgeometrische Kennzeichnung der Moufang-Ebenen.

Korollar 8: *Eine projektive Ebene π ist genau dann eine Moufang Ebene, wenn in ihr der kleine Satz von Desargues gilt.*

Beweis: Dies ist klar nach §5.Lemma 15.(b) und Satz 7.

■

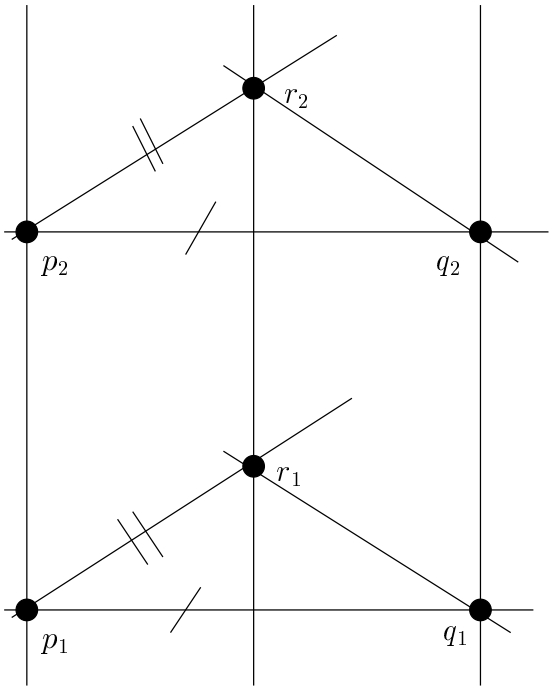
Der Satz von Desargues gestattet diverse affine Versionen, Zentrum und Achse können eigentlich sein, die Ferngerade kann als Achse dienen, und so weiter. Wir wollen dies

hier nicht systematisch untersuchen, sondern nur die folgende Kennzeichnung affiner Translationsebenen festhalten. Dabei definieren wir:

Definition 5: Eine affine Ebene π heißt affine Translationsebene, wenn ihr projektiver Abschluß $\overline{\pi}$ eine Translationsebene mit der Ferngeraden l_∞ als Translationsachse ist.

Korollar 9: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene. Genau dann ist π eine affine Translationsebene, wenn in π die folgende Aussage gilt: Sind (p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) zwei Dreiecke in π mit $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$, $r_1 \neq r_2$, für die die drei Geraden $p_1 \vee p_2$, $q_1 \vee q_2$ und $r_1 \vee r_2$ paarweise parallel und verschieden sind, und gelten $p_1 \vee q_1 \parallel p_2 \vee q_2$ sowie $p_1 \vee r_1 \parallel p_2 \vee r_2$, so ist auch $q_1 \vee r_1 \parallel q_2 \vee r_2$.*

Beweis: Sei l_∞ die Ferngerade zu π. Die Voraussetzungen an die beiden Dreiecke bedeuten genau, daß die beiden Dreiecke im projektiven Abschluß $\overline{\pi}$ zentral zum Fernpunkt z der Geraden $p_1 \vee p_2$ liegen, und das zwei der Seitenschnittpunkte auf l_∞ liegen.



Also besagt die angegebene Bedingung an π genau, daß die projektive Ebene $\overline{\pi}$ (l_∞, z)-desarguesch ist, für jeden Fernpunkt $z \in l_\infty$. Nach Satz 7 und §5.Lemma 15.(a) ist dies genau dann der Fall, wenn $\overline{\pi}$ eine Translationsebene zur Translationsachse l_∞ ist. ■

Zum Abschluß wollen wir noch definieren was eine desarguesche affine Ebene ist.

Definition 6: Eine affine Ebene π heißt desarguesch, wenn ihr projektiver Abschluß $\overline{\pi}$ desarguesch ist.

In §11 werden wir eine etwas direktere Kennzeichnung desarguescher affiner Ebenen angeben.

Aufgaben zu §6

(85) Sei $k > 1$ eine reelle Zahl. Finden Sie in der Moulton Ebene M_k ein Paar zentral gelegener Dreiecke, das nicht auch axial liegt.

(86) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $n \geq 5$. Seien $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin a$. Dann gibt es in π zwei Dreiecke Δ_1, Δ_2, die zentral zu z und axial zu a liegen.

(87) Sei (K, T) ein Ternärkörper. Zeigen Sie, daß (K, T) genau dann linear ist, wenn in der projektiven Ebene $P(K, T)$ die folgende Aussage gilt: Sind $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ zwei Dreiecke, die zentral zu (∞) liegen, und gelten $p_1, p_2 \in [0]$ und $s := (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in [\infty]$, $t := (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in [\infty]$, und ist $(0) \in q_1 \vee r_1$, so ist auch $(q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) = (0)$.

(88) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a \in \mathfrak{L}$. Zeigen Sie, daß a genau dann eine Translationsachse von π ist, wenn für jedes Viereck (o, e, u, v) von π mit $u, v \in a$ der zugehörige Ternärkörper linear ist.

(89) Sei π eine projektive Ebene. Zeigen Sie, daß π genau dann eine Moufang Ebene ist, wenn alle zu beliebigen Vierecken in π gehörenden Ternärkörper linear sind.

§7 Die Lenz Klassifikation

Die Lenz Klassifikation unterscheidet projektive Ebenen danach wie viele transitive Elationsgruppen sie besitzen. Die grundlegende Definition ist die sogenannte Lenz Figur einer projektiven Ebene.

Definition 1: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann heißt

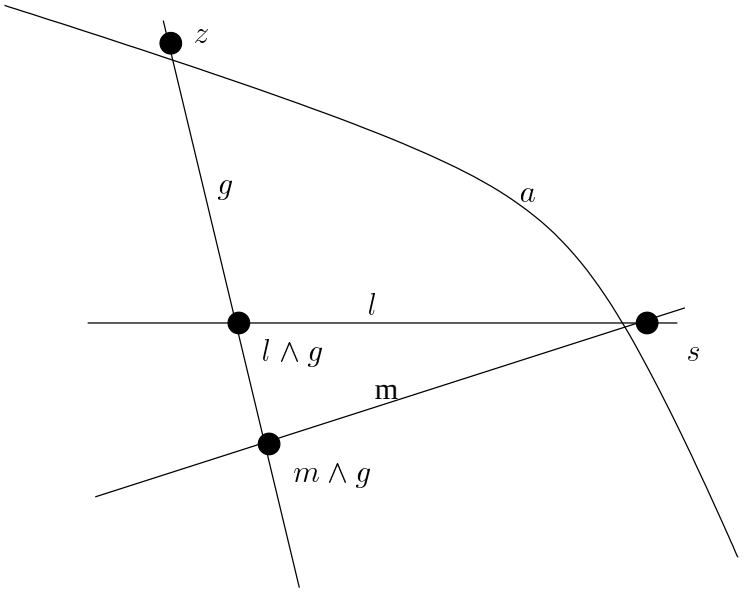
$$\mathfrak{E}_\pi := \{(a, z) : z \in a \in \mathfrak{L},\ \pi \text{ ist } (a, z)\text{-transitiv}\}$$

die Lenz Figur von π.

Es wird für unsere Zwecke sehr nützlich sein, das Verhalten der Lenz Figur beim Übergang zur dualen Ebene zu kennen. Hierzu haben wir das folgende kleine Lemma.

Lemma 1: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$. Dann ist π genau dann (a, z)-transitiv, wenn die duale Ebene π^* (z, a)-transitiv ist.*

Beweis: Sei π als (a, z)-transitiv vorausgesetzt. Identifizieren wir wie üblich $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi) = \mathrm{Aut}(\pi^*)$, so ist $\Gamma_{[a,z]}$ die Gruppe der Kollineation von π^* mit Zentrum a und Achse z. Seien $l, m \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{L}_z$ mit $l, m \neq a$ und $l \wedge a = m \wedge a =: s$.



Wegen $z \notin l$ ist sicher $z \neq s$, und wir wählen eine Gerade $g \in \mathfrak{L}_z$ mit $g \neq z \vee s$. Es ist $g \neq l, m$, d.h. wir haben die Punkte $p := l \wedge g$, $q := m \wedge g$. Wäre $p \in a$, so $s = l \wedge a = p \in g$, d.h. $g = z \vee s$; ein Widerspruch, d.h. $p \notin a$ und analog $q \notin a$. Weiter ist $p, q \neq z$ und $p \vee z = g = q \vee z$, d.h. es existiert ein $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$ mit $q = p^\alpha$. Es folgt

$$l^\alpha = (p \vee s)^\alpha = p^\alpha \vee s = q \vee s = m.$$

Also ist π^* tatsächlich (z, a)-transitiv.

Ist umgekehrt π^* als (z, a)-transitiv vorausgesetzt, so ergibt die bereits bewiesene Implikation auch, daß $\pi = \pi^{**}$ (a, z)-transitiv ist.

■

Wir wollen im folgenden alle möglichen Lenz Figuren, die überhaupt auftauchen können beschreiben. Hierzu wollen wir zunächst einige offensichtliche Tatsachen zusammenstellen. Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Ist $z \in \mathfrak{P}$ ein Punkt, so nennen wir z eine duale Translationsachse, wenn die duale Ebene π^* eine Translationsebene zur Translationsachse z ist.

- Sind π' eine weitere projektive Ebene und $\gamma : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus, so gilt $\gamma(\mathfrak{E}_\pi) = \mathfrak{E}_{\pi'}$. Dies ist klar nach §5.Lemma 12.
- Ist $\gamma \in \mathrm{Aut}(\pi)$, so gilt $\mathfrak{E}_\pi^\gamma = \mathfrak{E}_\pi$. Dies ist ein Spezialfall der obigen Aussage.
- Sind $(a, z), (a, z') \in \mathfrak{E}_\pi$ mit $z \neq z'$, so ist $\{a\} \times a \subseteq \mathfrak{E}_\pi$. Außerdem ist $a \in \mathfrak{L}$ genau dann eine Translationsachse, wenn $\{a\} \times a \subseteq \mathfrak{E}_\pi$ ist. Dies ist beides klar nach §5.Lemma 15.(a).
- Es ist
$$\mathfrak{E}_{\pi^*} = \{(z, a) : (a, z) \in \mathfrak{E}_\pi\},$$
wobei π^* die duale Ebene zu π ist. Dies ist nach Lemma 1 klar.

- Sind $(a,z),(a',z) \in \mathfrak{E}_\pi$ mit $a \neq a'$, so ist $\mathfrak{L}_z \times \{z\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$, und dies ist genau dann der Fall, wenn z eine duale Translationsachse ist. Dies folgt sofort aus den beiden obenstehenden Aussagen.

Die nächsten beiden Lemmata liefern weitere Einschränkungen für das Aussehen der Lenz Figur.

Lemma 2: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine Translationsebene zur Achse $a \in \mathfrak{L}$. Es gebe eine weitere Gerade $g \in \mathfrak{L}\backslash\{a\}$ und einen Punkt $u \in g\backslash\{a \wedge g\}$ mit $(g,u) \in \mathfrak{E}_\pi$. Setze $z := g \wedge a$. Dann ist jede Gerade $l \in \mathfrak{L}_z$ eine Translationsachse von π, und es ist*

$$\{(l,v) : v \in l \in \mathfrak{L}_z\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi.$$

Beweis: Wähle einen Punkt $u' \in g\backslash\{u,z\}$. Da π (a,z)-transitiv ist, gibt es eine Kollineation α mit Zentrum z und $u' = u^\alpha$. Insbesondere ist $g^\alpha = g$, und somit ist auch $(g,u') \in \mathfrak{E}_\pi$. Also ist g auch eine Translationsachse von π. Sei jetzt $l \in \mathfrak{L}_z$ beliebig. Ist $l = a$, so ist l eine Translationsachse. Ist $l \neq a$, so gibt es ein eine Elation α mit Achse a und $l = g^\alpha$. Damit ist auch l eine Translationsachse. Die letzte Aussage ist eine unmittelbare Folgerung.

■

Lemma 3: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $(a,u),(b,v) \in \mathfrak{E}_\pi$ mit $u \notin b$ und $v \notin a$. Offenbar ist dann $u \neq v$, $a \neq b$, und wir setzen $l := u \vee v \in \mathfrak{L}$ und $z := a \wedge b \in \mathfrak{P}$. Dann ist $z \notin l$ und*

$$\{(p \vee z, p) : p \in l\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi.$$

Beweis: Wegen $u \notin b$, $v \notin a$ ist $z \neq u, v$. Wäre $z \in l = u \vee v$, so $a = z \vee u = z \vee v = b$, d.h. $z \notin l$. Sei $p \in l$. Ist $p = u$, so ist $p \vee z = a$ und nach Voraussetzung ist $(a,u) \in \mathfrak{E}_\pi$. Jetzt sei $p \neq u$. Wegen $v \notin a$ ist $l \neq a$ und $l \wedge a = u$, d.h. $p \notin a$. Weiter ist $p \vee u = l = v \vee u$, und da π ja (a,u)-transitiv ist, existiert eine Kollineation α mit Zentrum u und Achse a für die $p = v^\alpha$ gilt. Es folgt $b^\alpha = (z \vee v)^\alpha = z \vee p$, und somit ist $(p \vee z, p) = (b^\alpha, v^\alpha) \in \mathfrak{E}_\pi$.

■

Damit haben wir bereits alles zusammen, um alle Möglichkeiten für die Struktur der Lenz Figur anzugeben.

Satz 4: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(I) *Es ist $\mathfrak{E}_\pi = \emptyset$.*

(II) *Es gibt* $z \in a \in \mathfrak{L}$ *mit* $\mathfrak{E}_\pi = \{(a, z)\}$.

(III) *Es gibt einen Punkt* $z \in \mathfrak{P}$ *und eine Gerade* $l \in \mathfrak{L}$ *mit* $z \notin l$ *und* $\mathfrak{E}_\pi = \{(p \vee z, p) : p \in l\}$.

(IVa) *Es gibt eine Gerade* $a \in \mathfrak{L}$ *mit* $\mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$.

(IVb) *Es gibt einen Punkt* $z \in \mathfrak{P}$ *mit* $\mathfrak{E}_\pi = \mathfrak{L}_z \times \{z\}$.

(V) *Es gibt* $z \in a \in \mathfrak{L}$ *mit* $\mathfrak{E}_\pi = (\{a\} \times a) \cup (\mathfrak{L}_z \times \{z\})$.

(VIa) *Es gibt eine Gerade* $a \in \mathfrak{L}$ *mit* $\mathfrak{E}_\pi = \{(l, z) : z \in a, l \in \mathfrak{L}_z\}$.

(VIb) *Es gibt einen Punkt* $z \in \mathfrak{P}$ *mit* $\mathfrak{E}_\pi = \{(a, u) : u \in a \in \mathfrak{L}_z\}$.

(VII) *Es ist* $\mathfrak{E}_\pi = \{(a, z) : z \in a \in \mathfrak{L}\}$.

Beweis: Offenbar schließen die verschiedenen Fälle sich gegenseitig aus. Wir müssen also nur zeigen, daß immer einer der neun Fälle eintritt. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.
Fall 1: Ist $\mathfrak{E}_\pi = \emptyset$, so sind wir in Fall (I).
Fall 2: Ist $|\mathfrak{E}_\pi| = 1$, so sind wir offenbar in Fall (II).
Fall 3: Jetzt gebe es eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ und zwei Punkte $u, v \in a$ mit $u \neq v$ und $(a, u), (a, v) \in \mathfrak{E}_\pi$. Dann ist sogar $\{a\} \times a \subseteq \mathfrak{E}_\pi$. Wir betrachten die möglichen Unterfälle.
Fall 3.a: Ist $\mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$, so haben wir Fall (IVa).
Fall 3.b: Es gibt ein Element $(b, w) \in \mathfrak{E}_\pi$ mit $w \notin a$. Insbesondere ist $b \neq a$ und $w \neq a \wedge b$. Mit Lemma 2 folgt mit $z := a \wedge b$, daß $\{(l, p) : p \in l \in \mathfrak{L}_z\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$ ist. Gilt sogar die Gleichheit, so sind wir in Fall (VIb). Andernfalls gibt es eine weitere Gerade $c \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin c$ und einen Punkt $s \in c$ mit $(c, s) \in \mathfrak{E}_\pi$. Wir zeigen dann $\mathfrak{L}_t \times \{t\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$ für jeden Punkt $t \in \mathfrak{P}$. Für $t = z$ ist dies klar, d.h. wir können $t \neq z$ annehmen. Dann gibt es eine Gerade $d \in \mathfrak{L}_z$ und einen Punkt $y \in d$ mit $s, t \notin d$, $y \vee s = y \vee t$. Also existiert eine Elation α mit Achse d und Zentrum y so, daß $t = s^\alpha$ ist. Folglich ist auch $(c^\alpha, t) = (c^\alpha, s^\alpha) \in \mathfrak{E}_\pi$ und $z = z^\alpha \notin c^\alpha$. Insbesondere ist $c^\alpha \neq t \vee z$ aber π ist (c^α, t)- und $(t \vee z, t)$-transitiv, und somit ist $\mathfrak{L}_t \times \{t\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$. Also ist $\mathfrak{E}_\pi = \{(d, t) : t \in d \in \mathfrak{L}\}$, d.h. wir sind in Fall (VII).
Fall 3.c: Jetzt nehmen wir an, daß weder Fall 3.a noch Fall 3.b vorliegt. Dann gibt es einen Punkt $z \in a$ und eine Gerade $b \in \mathfrak{L}_z$ mit $b \neq a$ und $(b, z) \in \mathfrak{E}_\pi$. Es folgt $\mathfrak{L}_z \times \{z\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$, d.h. $(\{a\} \times a) \cup (\mathfrak{L}_z \times \{z\}) \subseteq \mathfrak{E}_\pi$. Liegt sogar Gleichheit vor, so haben wir Fall (V). Andernfalls gibt es einen weiteren Punkt $z' \in a$ und eine Gerade $b' \in \mathfrak{L}_{z'}$ mit $z' \neq z$, $b' \neq a$ und $(b', z') \in \mathfrak{E}_\pi$. Dann ist $z \notin b'$, d.h. in der dualen Ebene π^* haben wir den Fall 3.b. Wegen $z \vee z' = a$, ist somit entweder $\mathfrak{E}_\pi = \{(l, p) : p \in a, l \in \mathfrak{L}_a\}$ oder $\mathfrak{E}_\pi = \{(l, p) : p \in l \in \mathfrak{L}\}$. Letzteres ist nicht möglich, da wir nicht Fall 3.b haben, d.h. (VIa) liegt vor.

Fall 4: Jetzt gebe es einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$ und zwei Geraden $a, b \in \mathfrak{L}_z$ mit $a \neq b$ und $(a, z), (b, z) \in \mathfrak{E}_\pi$. In der dualen Ebene π^* haben wir dann Fall 3, d.h. in π^* gilt eine der Aussagen (IVa), (V), (VIa), (VIb) oder (VII). Damit erfüllt π eine der Aussagen (IVb), (V), (VIa), (VIb) oder (VII).

Fall 5: Es liege keiner der Fälle (1-4) vor. Dann ist $|\mathfrak{E}_\pi| \geq 2$, also gibt es $a, b \in \mathfrak{L}$, $s, t \in \mathfrak{P}$ mit $(a, s), (b, t) \in \mathfrak{E}_\pi$ und $(a, s) \neq (b, t)$. Da wir weder in Fall 3 noch in Fall 4 sind, ist auch $a \neq b$ und $s \neq t$.

Angenommen es wäre $s \in b$. Dann ist $s = a \wedge b$ und wegen $t \neq s$ ist $t \notin a$. Wähle einen Punkt $t' \in b$ mit $t' \neq t, s$. Wegen $s = a \wedge b$ ist dann $t' \notin a$, und da π (a, s)-transitiv ist, existiert eine Kollineation α mit Zentrum s, Achse a und $t^\alpha = t'$. Wegen $s \in b$ ist dann $b^\alpha = b$, d.h. wir haben $(b, t') \in \mathfrak{E}_\pi$ und sind im Fall 3; ein Widerspruch. Dies zeigt $s \notin b$, und analog folgt $t \notin a$.

Setzen wir jetzt $z := a \wedge b$, $l := s \vee t$, so gilt nach Lemma 3 auch $z \notin l$ und $\{(p \vee z, p) : p \in l\} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$. Angenommen es wäre $\mathfrak{E}_\pi \neq \{(p \vee z, p) : p \in l\}$. Dann gibt es ein Element $(c, u) \in \mathfrak{E}_\pi$ mit $u \notin l$ oder $u \in l$, $c \neq u \vee z$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle.

Fall a: Es ist $u \notin l$. Dann ist $c \neq l$, und wir haben $p := c \wedge l$. Wäre $u \in p \vee z$, so sind wir wegen $p \neq u$ und $c = p \vee u = p \vee z$ in Fall 3; ein Widerspruch. Also ist $u \notin p \vee z$. Es ist $c \neq p \vee z$ und $(p \vee z) \wedge c = p$, d.h. wählen wir einen Punkt $v \in c$ mit $v \neq u, p$, so ist $v \notin p \vee z$ und $v \vee p = c = u \vee p$, d.h. es gibt eine Kollineation α mit Zentrum p, Achse $p \vee z$ und $v = u^\alpha$. Es folgt $(c, v) \in \mathfrak{E}_\pi$, und wir sind erneut in Fall 3; ein Widerspruch.

Fall b: Nun sei $u \in l$ und $c \neq u \vee z$. Dann ist (c, u), $(u \vee z, u) \in \mathfrak{E}_\pi$, d.h. diesmal sind wir in Fall 4; erneut ein Widerspruch.

Also ist tatsächlich $\mathfrak{E}_\pi = \{(p \vee z, p) : p \in l\}$, und es liegt Fall (III) vor.

■

Anstelle von "π erfüllt Aussage (X)" in Satz 4 sagt man, daß π den Lenz Typ X hat. Wir sagen das π mindestens Lenz Typ X hat, wenn der Lenz Typ Y von π gleich X ist, oder eine echt größere Zahl aufweist. Zum Beispiel bedeutet "π ist vom Lenz Typ mindestens II", daß es überhaupt eine transitive Gruppe von Elationen mit festem Zentrum und Achse gibt. Oder π ist vom Lenz Typ mindestens IVa, wenn π einen der Lenz Typen IVa, V, VIa, VIb oder VII hat. Da die Lenz Figur unter Isomorphismen wieder auf die Lenz Figur der Bildebene abgebildet wird, ist der Lenz Typ einer projektiven Ebene invariant unter Isomorphismen. Alle Lenz Typen ab IVa sind Translationsebenen, und alle Typen ab IVb sind duale Translationsebenen. Übersetzen wir diese Typen in die Sprache der Translationsachsen, so ergibt sich die folgende Tabelle.

Lenz Typ	Bedeutung
$\geq$IVa	Translationsebene
$\geq$IVb	Duale Translationsebene
$\geq$V	Es gibt eine Gerade a und einen Punkt $z \in a$ so, daß π sowohl Translationsebene zur Translationsachse a ist, als auch duale Translationsebene zur dualen Translationsachse z ist.
$\geq$VIa	π ist Translationsebene mit einer Translationsachse a, so daß π für jeden Punkt z auf a auch eine duale Translationsebene zur dualen Translationsachse z ist.
$\geq$VIb	Es gibt einen Punkt z so, daß jede Gerade durch z eine Translationsachse ist, und π eine duale Translationsebene zur dualen Translationsachse z ist.
VII	Moufang Ebene

Die Typen VIa und VIb sehen sehr stark aus, und tatsächlich existieren sie überhaupt nicht. Hat eine projektive Ebene mindestens einen der Lenz Typen VIa oder VIb, so ist sie bereits eine Moufang Ebene. Dies können wir an dieser Stelle allerdings noch nicht einsehen, daher müssen wir diese beiden Lenz Typen noch als eigene Fälle betrachten.

Die allermeisten projektiven Ebenen werden natürlich den Lenz Typ I haben, aber wir sind hier hauptsächlich an besonders homogenen Ebenen interessiert, d.h. an Ebenen die zu einem der oberen Lenz Typen gehören. An dieser Stelle werden unsere Ternärkörper sehr nützlich. Allgemeine Ternärkörper sind ja deshalb so unangenehm zu behandeln, weil sie überhaupt keine Rechenregeln erfüllen, es stehen nur Auflösungsbedingungen zur Verfügung. Wir werden sehen, daß bei jedem Aufstieg zu einer höheren Lenz Klasse im koordinatisierenden Ternärkörper eine oder mehrere Rechenregeln hinzukommen. Dieses Phänomen tritt bereits beim kleinsten nicht trivialen Lenz Typ II auf. Wir beginnen mit einer Definition.

Definition 2: Eine cartesische Gruppe ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+, \cdot : K \times K \to K$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(C1) $(K, +)$ ist eine Gruppe mit Null 0.

(C2) Für alle $x \in K$ gilt $0x = x0 = 0$, und es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $1x = x1 = x$ für alle $x \in K$.

(C3) $\forall(a, b, c \in K, a \neq b)\exists^1(x \in K) : xa - xb = c$.

(C4) $\forall(a, b, c \in K, a \neq b)\exists(x \in K) : -ax + bx = c$.

Die Elemente $0, 1$ aus (C1,C2) heißen die Null und die Eins der cartesischen Gruppe K.

Cartesische Gruppen können wir als spezielle Ternärkörper auffassen.

Lemma 5: *Ist $(K, +, \cdot)$ eine cartesische Gruppe mit Null 0 und Eins 1, so definiert $T : K^3 \to K; (s, x, t) \mapsto sx + t$ einen linearen Ternärkörper mit Null 0 und Eins 1, dessen Addition und Multiplikation mit $+$ und $\cdot$ übereinstimmen. Weiter sind Null und Eins von K eindeutig bestimmt, und sind $a, b, c \in K$ mit $a \neq b$, so existiert genau ein $x \in K$ mit $-ax + bx = c$.*

Ist umgekehrt (K, T) ein linearer Ternärkörper mit assoziativer Addition, so ist $(K, +, \cdot)$ eine cartesische Gruppe.

Beweis: Sei $(K, +, \cdot)$ eine cartesische Gruppe und definiere T wie angegeben. Wir weisen die Axiome eines Ternärkörpers nach.
(T0) Es ist $0 \neq 1$ und für $s, x, t \in K$ gelten $T(0, x, t) = 0x + t = 0 + t = t$, $T(s, 0, t) = s0 + t = 0 + t = t$, $T(1, x, 0) = 1x + 0 = x$ und $T(s, 1, 0) = s1 + 0 = s$ nach (C1) und (C2).
(T1) Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$ mit $x_1 \neq x_2$ gegeben. Nach (C3) gibt es genau ein $s \in K$ mit $sx_1 - sx_2 = y_1 - y_2$. Setze $t := -sx_2 + y_2$. Dann gelten $T(s, x_1, t) = sx_1 + t = sx_1 - sx_2 + y_2 = y_1 - y_2 + y_2 = y_1$ und $T(s, x_2, t) = sx_2 + t = sx_2 - sx_2 + y_2 = y_2$. Seien umgekehrt $s', t' \in K$ mit $T(s', x_i, t') = y_i$ für $i = 1, 2$ gegeben. Dann ist $y_2 = T(s', x_2, t') = s'x_2 + t'$, d.h. $t' = -s'x_2 + y_2$. Es folgt $y_1 = T(s', x_1, t') = s'x_1 + t' = s'x_1 - s'x_2 + y_2$, d.h. $s'x_1 - s'x_2 = y_1 - y_2$. Die Eindeutigkeit von s liefert $s' = s$, und damit ist auch $t' = -sx_2 + y_2 = t$.
(T2) Seien $s_1, s_2, t_1, t_2 \in K$ mit $s_1 \neq s_2$ gegeben. Nach (C4) existiert ein $x \in K$ mit $-s_1x + s_2x = t_1 - t_2$. Es folgt $T(s_1, x, t_1) = s_1x + t_1 = s_1x - s_1x + s_2x + t_2 = s_2x + t_2 = T(s_2, x, t_2)$.
(T3) Seien $s, x, y \in K$. Da $(K, +)$ eine Gruppe ist, existiert genau ein $t \in K$ mit $T(s, x, t) = sx + t = y$.

Also ist (K, T) ein Ternärkörper mit Null 0 und Eins 1. Für $x, y \in K$ haben wir $T(1, x, y) = 1x + y = x + y$ und $T(x, y, 0) = xy + 0 = xy$, d.h. Addition und Multiplikation von (K, T) sind die Addition und Multiplikation der cartesischen Gruppe. Insbesondere ist (K, T) linear.

Die Eindeutigkeit von Null und Eins folgt jetzt mit §2.Lemma 8.(a).

Jetzt sei umgekehrt (K, T) ein linearer Ternärkörper mit assoziativer Addition. Null und Eins von (K, T) bezeichnen wir wieder mit $0, 1$. Wir weisen die Eigenschaften einer cartesischen Gruppe nach.
(C1) Nach §2.Lemma 8.(c) ist $(K, +)$ eine Loop, d.h. $(K, +)$ ist eine Gruppe, und 0 ist ihr neutrales Element.
(C2) Dies gilt nach §2.Lemma 8.(d).
(C3) Seien $a, b, c \in K$ mit $a \neq b$. Nach (T1) existiert genau ein $(x, t) \in K^2$ mit $T(x, a, t) = c$ und $T(x, b, t) = 0$. Es folgt $xb + t = T(x, b, t) = 0$, d.h. $t = -xb$. Dies ergibt $xa - xb = xa + t = T(x, a, t) = c$. Ist $y \in K$ mit $ya - yb = c$, so haben wir

$(y, -yb) \in K^2$ mit $T(y, a, -yb) = ya - yb = c$ und $T(y, b, -yb) = yb - yb = 0$, d.h. $y = x$.
(C4) Seien $a, b, c \in K$ mit $a \neq b$. Nach (T2) existiert ein $x \in K$ mit $T(a, x, c) = T(b, x, 0)$, d.h. $ax+c = T(a, x, c) = T(b, x, 0) = bx+0 = bx$, und somit ist $-ax+bx = c$.
Mit §2.Lemma 8.(b) liefert der Beweis von (C4) auch die behauptete Eindeutigkeit.

■

Damit können wir cartesische Gruppen als spezielle Ternärkörper auffassen, genauso wie wir dies für Schiefkörper getan haben. Der nächste Satz liefert uns die geometrische Bedeutung cartesischer Gruppen.

Satz 6: *Sei (K, T) ein Ternärkörper. Dann ist die projektive Ebene $P(K, T)$ genau dann $([\infty], (\infty))$-transitiv, wenn (K, T) eine cartesische Gruppe ist.*

Beweis: Setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K, T))$. Nach §5.Lemma 10.(a) ist $\Gamma_{[[\infty],(\infty)]}$ genau die Gruppe

$$\{(x, y) \mapsto (x, y + a) | a \in K, \forall (s, x, t \in K) : T(s, x, t + a) = T(s, x, t) + a\}.$$

Mit §5.Lemma 6 folgt, daß $P(K, T)$ genau dann $([\infty], (\infty))$-transitiv ist, wenn $T(s, x, t+a) = T(s, x, t) + a$ für alle $s, x, t, a \in K$ gilt. Jetzt kommen wir zur eigentlichen Behauptung.
"'$\Longleftarrow$"' Ist (K, T) eine cartesische Gruppe, so haben wir für alle $s, x, t, a \in K$ die Gleichung

$$T(s, x, t + a) = sx + (t + a) = (sx + t) + a = T(s, x, t) + a.$$

"'$\Longrightarrow$"' Für $s, x, t \in K$ gilt

$$T(s, x, t) = T(s, x, 0 + t) = T(s, x, 0) + t = sx + t,$$

d.h. (K, T) ist linear. Weiter haben wir für alle $x, y, z \in K$

$$(x + y) + z = T(1, x, y) + z = T(1, x, y + z) = x + (y + z),$$

d.h. die Addition ist assoziativ.

■

Insbesondere ist die projektive Ebene $P(K)$ über einer cartesischen Gruppe $(K, +, \cdot)$ mindestens von Lenz Typ II. Ist umgekehrt π eine projektive Ebene mit Lenz Typ $\geq$II, so können wir ein Viereck (o, e, u, v) in π wählen so, daß π $(u \vee v, v)$-transitiv ist. Nach §3.Satz 11 ist $\pi \simeq P(K, T)$ für einen Ternärkörper (K, T) so, daß v dem Punkt (∞) und u dem Punkt (0) entsprechen. Also ist $P(K, T)$ $([\infty], (\infty))$-transitiv und (K, T) ist eine cartesische Gruppe nach Satz 6. Also haben wir:

Korollar 7: *Eine projektive Ebene ist genau dann von Lenz Typ mindestens II, wenn sie isomorph zur einer projektiven Ebene $P(K)$ über einer cartesischen Gruppe $(K, +, \cdot)$ ist.*

In diesem Paragraphen wollen wir die verschiedenen Lenz Typen nicht systematisch untersuchen, sondern wollen schnell zu den projektiven Ebenen mit sehr vielen zentralaxialen Kollineationen kommen. Daher machen wir jetzt einen Sprung zum Lenz Typ IVa, d.h. wir betrachten Translationsebenen. Wir geben wieder zuerst die entstehende algebraische Struktur an, interpretieren sie als spezielle Ternärkörper und beweisen dann eine geometrische Charakterisierung.

Definition 3: Ein Quasikörper ist ein Tripel $(K,+,\cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+,\cdot : K\times K\to K$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(Q1=C1) $(K,+)$ ist eine Gruppe mit Null 0.

(Q2) Für alle $x\in K$ ist $0x=0$, und es gibt ein $1\in K$ mit $1\neq 0$ und $1x=x1=x$ für alle $x\in K$.

(Q3) $\forall(a,b\in K, a\neq 0)\exists^1(x\in K): xa=b$.

(Q4=C4) $\forall(a,b,c\in K, a\neq b)\exists(x\in K): -ax+bx=c$.

(Q5) $\forall(a,b,c\in K): a(b+c)=ab+ac$.

Die Elemente $0,1$ aus (Q1,Q2) heißen die Null und die Eins des Quasikörpers K.

Lemma 8: *Ist $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper mit Null 0 und Eins 1, so ist $(K,+,\cdot)$ auch eine cartesische Gruppe mit Null 0 und Eins 1. Für alle $a,b\in K$ gilt $a(-b)=-ab$. Umgekehrt ist eine cartesische Gruppe $(K,+,\cdot)$, die das Rechtsdistributivgesetz (Q5) erfüllt, auch ein Quasikörper.*

Beweis: Sei $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper. Die Axiome (C1) und (C4) einer cartesischen Gruppe sind genau (Q1) und (Q4). Für (C2) ist nach (Q2) nur noch $x0=0$ für $x\in K$ zu zeigen. Tatsächlich haben wir für jedes $x\in K$ nach (Q5) $x0=x(0+0)=x0+x0$, d.h. $x0=0$. Weiter können wir jetzt für $a,b\in K$ schließen, daß $0=a0=a(b-b)=ab+a(-b)$ ist, d.h. $a(-b)=-ab$. Es verbleibt nur noch (C3). Seien $a,b,c\in K$ mit $a\neq b$. Eine Anwendung von (Q5) ergibt $xa-xb=xa+x(-b)=x(a-b)$ für jedes $x\in K$. Wegen $a-b\neq 0$ gibt es nach (Q3) genau ein $x\in K$ mit $x(a-b)=c$, und wir haben (C3) eingesehen.

Jetzt sei umgekehrt $(K,+,\cdot)$ eine cartesische Gruppe, die (Q5) erfüllt. Dann gelten die Axiome (Q1), (Q2), (Q4) und (Q5). Sind $a,b\in K$ mit $a\neq 0$, so gibt es nach (C3) und (C2) genau ein $x\in K$ mit $c=xa-x0=xa-0=xa$, d.h. auch (Q3) gilt.

■

Satz 9: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Dann ist $P(K,T)$ genau dann eine Translationsebene zur Translationsachse $[\infty]$, wenn (K,T) ein Quasikörper ist.*

Beweis: Nach §5.Lemma 15.(a) ist $P(K,T)$ genau dann eine Translationsebene zur Translationsachse $[\infty]$, wenn $P(K,T)$ $([\infty],(\infty))$- und $([\infty],(0))$-transitiv ist. Ist $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$, so haben wir nach §5.Lemma 10.(b), daß $\Gamma_{[[\infty],(0)]}$ genau die Menge

$$\{(x,y)\mapsto(x+a,y)|a\in K,\forall(s,x,t\in K):T(s,x+a,t)=T(s,x,T(s,a,t))\}$$

ist, d.h. $P(K,T)$ ist genau dann $([\infty],(0))$-transitiv, wenn

$$\forall(s,x,t,a\in K):T(s,x+a,t)=T(s,x,T(s,a,t))$$

gilt. Jetzt kommen wir zum eigentlichen Beweis.
"'$\Longrightarrow$"' Nach Satz 6 ist (K,T) eine cartesische Gruppe. Für $s,x,a\in K$ folgt

$$s(x+a)=T(s,x+a,0)=T(s,x,T(s,a,0))=sx+T(s,a,0)=sx+sa,$$

d.h. K erfüllt das Rechtsdistributivgesetz, und ist nach Lemma 8 ein Quasikörper.
"'$\Longleftarrow$"' Nach Lemma 8 ist K auch eine cartesische Gruppe, und $P(K,T)$ ist nach Satz 6 $([\infty],(\infty))$-transitiv. Für $s,x,t,a\in K$ gilt

$$T(s,x+a,t)=s(x+a)+t=sx+sa+t=sx+T(s,a,t)=T(s,x,T(s,a,t)),$$

d.h. $P(K,T)$ ist auch $([\infty],(0))$-transitiv.

■

Analog zu Korollar 7 folgt weiter:

Korollar 10: *Eine projektive Ebene π ist genau dann von Lenz Typ mindestens IVa, wenn sie isomorph zur projektiven Ebene $P(K)$ über einem Quasikörper $(K,+,\cdot)$ ist.*

Quasikörper sind zwar noch immer deutlich schwächer als Schiefkörper, aber sie sind bereits einer mehr algebraischen Behandlung zugänglich. Wir wollen an dieser Stelle nur zeigen, daß die additive Gruppe eines Quasikörpers abelsch ist. Dies kann man rein algebraisch aus den Axiomen eines Quasikörpers ableiten, aber wir wollen hier einen geometrischen Beweis angeben.

Satz 11: *Sei $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K))$. Für $a,b\in K$ ist die Abbildung*

$$\tau(a,b):K\times K\to K\times K;(x,y)\mapsto(x+a,y+b)$$

eine Translation der affinen Ebene $A(K)$, und die Abbildung

$$\tau:(K,+)\times(K,+)\to\Gamma_{[[\infty],[\infty]]}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: Wir haben bereits eingesehen, daß für $a,b\in K$ die beiden Abbildungen $\tau(a,0)\in\Gamma_{[[\infty],(0)]}$, $\tau(0,b)\in\Gamma_{[[\infty],(\infty)]}$ sind. Für $x,y\in K$ ist

$$(x,y)^{\tau(a,0)\tau(0,b)}=(x+a,y)^{\tau(0,b)}=(x+a,y+b),$$

d.h. $\tau(a,b) = \tau(a,0)\tau(0,b) \in \Gamma_{[[\infty],[\infty]]}$. Sind $a, a', b, b' \in K$, so liefert die Assoziativität der Addition für alle $x, y \in K$ die Gleichung

$$(x,y)^{\tau(a,b)\tau(a',b')} = (x+a, y+b)^{\tau(a',b')} = (x+a+a', y+b+b') = (x,y)^{\tau(a+a',b+b')},$$

d.h. $\tau(a,b)\tau(a',b') = \tau(a+a', b+b')$. Also ist die Abbildung τ ein Gruppenhomomorphismus. Für $a, b \in K$ ist $(0,0)^{\tau(a,b)} = (a,b)$, und insbesondere ist τ injektiv. Ist $\alpha \in \Gamma_{[[\infty],[\infty]]}$ beliebig, so definiere $a, b \in K$ durch $(0,0)^{\alpha} = (a,b)$. Dann ist $(0,0)^{\alpha} = (0,0)^{\tau(a,b)}$, und mit §5.Lemma 11 folgt $\alpha = \tau(a,b)$, d.h. τ ist auch surjektiv. ■

Korollar 12: *Die additive Gruppe eines Quasikörpers ist kommutativ.*

Beweis: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Quasikörper. Ist $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K))$, so ist nach Satz 11 $\Gamma_{[[\infty],[\infty]]} \simeq (K,+) \times (K,+)$, und nach §5.Satz 14 ist $\Gamma_{[[\infty],[\infty]]}$ kommutativ. Also sind auch $(K,+) \times (K,+)$ und $(K,+)$ kommutativ. ■

Nun kommen wir zum Hauptergebnis dieses Paragraphen, der Kennzeichnung der projektiven Ebenen über Schiefkörpern.

Satz 13: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Genau dann ist K ein Schiefkörper, wenn $[\infty]$ eine Translationsachse der projektiven Ebene $P(K,T)$ ist, und $P(K,T)$ zusätzlich $([\infty],(0,0))$-transitiv ist.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Ist K ein Schiefkörper, so haben wir nach den Ergebnissen des §3 auch $P(K,T) \simeq \mathrm{PG}(K^3)$, und mit §5.Lemma 8, §5.Lemma 9, §5.Lemma 12, §5.Lemma 15.(a) folgt die Behauptung.
"'$\Longleftarrow$"' Nach Satz 9 ist K zumindest ein Quasikörper. Nach Korollar 12 ist $(K,+)$ eine abelsche Gruppe. Ist $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$, so ist die Gruppe $\Gamma_{[[\infty],(0,0)]}$ nach §5.Lemma 10.(c) genau

$$\{(x,y) \mapsto (xa, ya) | a \in K \backslash \{0\}, \forall (s,x,t \in K) : T(s,xa,ta) = T(s,x,t)a\}.$$

Ist also $P(K,T)$ $([\infty],(0,0))$-transitiv, so gilt $T(s,xa,ta) = T(s,x,t)a$ für alle $s,x,t,a \in K$ mit $a \neq 0$. Für $s,x,t \in K$ gilt immer $T(s,x0,t0) = T(s,0,0) = 0 = T(s,x,t)0$, d.h. wir haben $T(s,xa,ta) = T(s,x,t)a$ für alle $s,x,t,a \in K$.

Für $a,b,c \in K$ folgt insbesondere

$$(ab)c = T(a,b,0)c = T(a,bc,0c) = T(a,bc,0) = a(bc),$$

d.h. die Multiplikation von K ist assoziativ. Außerdem haben wir für $a,b,c \in K$ noch

$$(a+b)c = T(1,a,b)c = T(1,ac,bc) = ac + bc,$$

d.h. es gilt auch das Linksdistributivgesetz. Damit ist K ein Schiefkörper. ■

Satz 14: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *π ist desarguesch.*

(b) *Für alle $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$ ist π (a,z)-transitiv.*

(c) *Es gibt eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ und drei Punkte $u, v, o \in \mathfrak{P}$ mit $u, v \in a$, $u \neq v$, $o \notin a$ so, daß π (a,u)-, (a,v)- und (a,o)-transitiv ist.*

(d) *Es gibt ein Viereck in π, dessen zugehöriger Ternärkörper ein Schiefkörper ist.*

(e) *Alle zu beliebigen Vierecken in π gehörenden Ternärkörper sind Schiefkörper.*

(f) *Es gibt einen dreidimensionalen Vektorraum V über einem Schiefkörper K mit $\pi \simeq \mathrm{PG}(V)$.*

Beweis: **(a)$\Longrightarrow$(b):** Dies ist klar nach §6.Satz 7.
(b)$\Longrightarrow$(c): Klar.
(c)$\Longrightarrow$(d): Wähle a, u, v, o mit diesen Eigenschaften. Wähle einen Punkt $e \in \mathfrak{P}$ mit $e \notin a$ und $e \notin o \vee u, o \vee v$. Dann ist (o, e, u, v) ein Viereck in π. Bezeichne (K, T) den zugehörigen Ternärkörper. Nach §3.Satz 11 gibt es einen Isomorphismus $\varphi : \pi \to P(K,T)$ mit $\varphi(o) = (o,o)$, $\varphi(u) = (o)$ und $\varphi(v) = (\infty)$, und $\varphi(a) = [\infty]$. Also ist $P(K,T)$ $([\infty],(\infty))$-, $([\infty],(o))$- und $([\infty],(o,o))$-transitiv. Nach §5.Lemma 15.(a) ist $[\infty]$ eine Translationsachse von $P(K,T)$, und nach Satz 13 ist K ein Schiefkörper.
(d)$\Longrightarrow$(f): Nach §3.Satz 11 gibt es einen Schiefkörper K mit $\pi \simeq P(K) \simeq \mathrm{PG}(K^3)$.
(f)$\Longrightarrow$(a): Klar nach §6.Lemma 3.
(e)$\Longrightarrow$(d): Klar.
(f)$\Longrightarrow$(e): Klar nach §4.Satz 6.

■

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir auch noch die algebraische Entsprechung des Lenz Typs V angeben. Wir beginnen mit der Berechnung einiger spezieller zentralaxialer Kollineationen. Wir geben jeweils nur die affine Abbildung an, nach §3.Lemma 7 ist hierdurch bereits alles eindeutig festgelegt.

Lemma 15: *Sei (K,T) ein Ternärkörper und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$. Dann gelten:*

(a) *Es ist*

$$\Gamma_{[[0],(\infty)]} = \left\{ (x,y) \mapsto (x, T(a,x,y)) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in K, \\ \forall (s,x,t \in K) : T(a,x,T(s,x,t)) = T(T(a,1,s),x,t) \end{array} \right\}.$$

(b) *Ist $a \in K\backslash\{0\}$, so existiert nach §2.Lemma 8.(d) genau ein $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ mit $aa^{-1} = 1$. Mit dieser Notation ist* $\Gamma_{[[0],(0)]} =$
$\{(x,y) \mapsto (ax,y) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : T(s,x,t) = T(sa^{-1}, ax, t)\}$.

Beweis: Sei $\alpha \in \Gamma_{[[0]]}$ mit $[\infty]^\alpha = [\infty]$ gegeben, d.h. α hat Achse $[0]$ und ein Zentrum in $[\infty]$. Da (∞) auf $[0]$ liegt, erhalten wir zwei bijektive Abbildungen $\varphi, \psi : K \to K$ mit $\varphi(0) = 0$, $[c]^\alpha = [\varphi(c)]$ für jedes $c \in K$ und $(s)^\alpha = (\psi(s))$ für jedes $s \in K$. Sind $s,t \in K$, so ist $(0,t)$ auf der Achse $[0]$ von α, und somit folgt

$$[s,t]^\alpha = ((s) \vee (0,t))^\alpha = (s)^\alpha \vee (0,t) = (\psi(s)) \vee (0,t) = [\psi(s), t].$$

Für $x, y \in K$ ist damit

$$(x,y)^\alpha = ([x] \wedge [0,y])^\alpha = [x]^\alpha \wedge [0,y]^\alpha = [\varphi(x)] \wedge [\psi(0), y] = (\varphi(x), T(\psi(0), \varphi(x), y)).$$

Für $s, x, t \in K$ ergibt sich

$$(\varphi(x), T(\psi(0), \varphi(x), T(s,x,t))) = (x, T(s,x,t))^\alpha \in [s,t]^\alpha = [\psi(s), t],$$

d.h. es ist

$$T(\psi(s), \varphi(x), t) = T(\psi(0), \varphi(x), T(s,x,t)).$$

Setzen wir $a := \psi(0)$, $b := \varphi^{-1}(1) \in K\backslash\{0\}$, so folgt für $s \in K$

$$\psi(s) = T(\psi(s), 1, 0) = T(\psi(s), \varphi(b), 0) = T(\psi(0), \varphi(b), T(s,b,0)) = T(a, 1, sb).$$

Unsere Bedingung wird zu

$$T(T(a,1,sb), \varphi(x), t) = T(a, \varphi(x), T(s,x,t))$$

für alle $s, x, t \in K$.

Sind umgekehrt $\varphi : K \to K$ bijektiv mit $\varphi(0) = 0$, und $a \in K$ gegeben, so ist $(x,y) \mapsto (\varphi(x), T(a, \varphi(x), y))$ nach Axiom (T3) eines Ternärkörpers bijektiv, und gilt die obige Formel mit $b := \varphi^{-1}(1)$, so bildet die Abbildung Geraden auf Geraden ab, d.h. sie ist ein Automorphismus der affinen Ebene $A(K,T)$. Wegen $\varphi(0) = 0$ und $T(a,0,y) = y$ für $y \in K$, setzt sich dieser Automorphismus zu einer Kollineation von $P(K,T)$ mit Achse $[0]$ fort, die $[\infty]$ fixiert.
(a) Sei $\alpha \in \Gamma_{[[0],(\infty)]}$ gegeben. Definiere φ, a, b wie oben. Da (∞) ein Zentrum von α ist, gilt $\varphi = \mathrm{id}$ und $b = 1$. Für $s, x, t \in K$ folgt

$$T(T(a,1,s), x, t) = T(a, x, T(s,x,t)).$$

Ist umgekehrt $a \in K$ mit $T(T(a,1,s), x, t) = T(a, x, T(s,x,t))$ für alle $s, x, t \in K$ gegeben, so ist $(x,y) \mapsto (x, T(a,x,y))$ eine Kollineation mit Achse $[0]$, und offenbar bleibt jede Gerade durch (∞) fest, d.h. (∞) ist ein Zentrum.

(b) Sei $\alpha \in \Gamma_{[[0],(0)]}$ und definiere φ, ψ, a, b wie oben. Dann ist $0 = \psi(0) = a$, d.h. wir haben

$$T(sb, \varphi(x), t) = T(T(a, 1, sb), \varphi(x), t) = T(a, \varphi(x), T(s, x, t)) = T(s, x, t)$$

für alle $s, x, t \in K$. Nach §2.Lemma 8.(d) gibt es ein $c \in K\backslash\{0\}$ mit $cb = 1$, d.h. $b = c^{-1}$. Für jedes $x \in K$ folgt

$$\varphi(x) = T(1, \varphi(x), 0) = T(cb, \varphi(x), 0) = T(c, x, 0) = cx.$$

Für $x, y \in K$ ist damit

$$(x, y)^\alpha = (\varphi(x), T(a, \varphi(x), y)) = (cx, y),$$

und für $s, x, t \in K$ gilt

$$T(sc^{-1}, cx, t) = T(sb, cx, t) = T(s, x, t).$$

Jetzt sei umgekehrt $c \in K\backslash\{0\}$ mit $T(sc^{-1}, cx, t) = T(s, x, t)$ für alle $s, x, t \in K$ gegeben. Wegen $c \neq 0$ ist dann $\varphi : K \to K; x \mapsto cx$ bijektiv, und es ist $\varphi(0) = 0$, $\varphi(c^{-1}) = cc^{-1} = 1$. Für $s, x, t \in K$ gilt $T(T(0, 1, sc^{-1}), cx, t) = T(sc^{-1}, cx, t) = T(s, x, t) = T(0, cx, T(s, x, t))$. Also ist $(x, y) \mapsto (cx, y)$ eine Kollineation mit Achse $[0]$ und Zentrum auf $[\infty]$. Wegen $[0, 0]^\alpha = [0, 0]$ ist (0) das Zentrum von α.

■

Nun führen wir die algebraische Entsprechung zum Lenz Typ V ein.

Definition 4: Ein Semikörper (oder Divisionsring) ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Abbildungen $+, \cdot : K \times K \to K$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(S1=Q1) $(K, +)$ ist eine Gruppe mit Null 0.

(S2) Es gibt ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $1x = x1 = x$ für alle $x \in K$.

(S3=Q3) $\forall(a, b \in K, a \neq 0)\exists^1(x \in K) : xa = b$.

(S4) $\forall(a, b \in K, a \neq 0)\exists(x \in K) : ax = b$.

(S5) Für alle $a, b, c \in K$ gelten $a(b + c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$.

Lemma 16: *Ist $(K, +, \cdot)$ ein Semikörper, so ist $(K, +, \cdot)$ auch ein Quasikörper. Sind $a, b \in K$ mit $a \neq 0$, so existiert genau ein $x \in K$ mit $ax = b$. Weiter ist auch $a + b = b + a$ und $(-a)b = a(-b) = -ab$ für alle $a, b \in K$.*

Ist umgekehrt $(K, +, \cdot)$ ein Quasikörper, der das Linksdistributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in K$ erfüllt, so ist $(K, +, \cdot)$ ein Semikörper.

Beweis: Sei $(K,+,\cdot)$ ein Semikörper. Dann erfüllt $(K,+,\cdot)$ offenbar die Axiome (Q1)=(S1), (Q3)=(S3) und (Q5). Weiter gibt es nach (S2) ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $1x = x1 = x$ für alle $x \in K$. Ist $x \in K$, so folgt mit (S5) auch $0x = (0+0)x = 0x + 0x$, d.h. $0x = 0$, und (Q2) ist gezeigt. Analog zum Fall eines Quasikörpers folgt jetzt $0 = 0b = (a-a)b = ab + (-a)b$, d.h. $(-a)b = -ab$ für alle $a, b \in K$. Es verbleibt nur noch (Q4). Seien also $a, b, c \in K$ mit $a \neq b$ gegeben. Wir haben $-ax + bx = (-a+b)x$ für jedes $x \in K$, und wegen $-a + b \neq 0$ existiert nach (S4) ein $x \in K$ mit $-ax + bx = (-a+b)x = c$. Also ist $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper. Nach Lemma 8 ist $(K,+,\cdot)$ insbesondere eine cartesische Gruppe. Sind also $a, b \in K$ mit $a \neq 0$, so existiert nach Lemma 5 genau ein $x \in K$ mit $ax = -0x + ax = b$. Die Kommutativität der Addition folgt aus Korollar 12.

Jetzt sei $(K,+,\cdot)$ umgekehrt ein linksdistributiver Quasikörper. Offenbar erfüllt $(K,+,\cdot)$ die Axiome (S1), (S2), (S3) und (S5). Sind $a, b \in K$ mit $a \neq 0$, so existiert nach (Q4) ein $x \in K$ mit $c = -0x + ax = ax$. Damit gilt auch (S4).

■

Nun beweisen wir die geometrische Kennzeichnung der Semikörper.

Satz 17: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Genau dann sind $[\infty]$ eine Translationsachse und (∞) eine duale Translationsachse von $P(K,T)$, wenn (K,T) ein Semikörper ist.*

Beweis: Nach Satz 9 ist $[\infty]$ genau dann eine Translationsachse von $P(K,T)$, wenn (K,T) ein Quasikörper ist. Nach Lemma 16 können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (K,T) ein Quasikörper ist.

Da $P(K,T)$ insbesondere $([\infty],(\infty))$-transitiv ist, ist (∞) nach §5.Lemma 15.(a) und Lemma 1 genau dann eine duale Translationsachse, wenn $P(K,T)$ auch $([0],(\infty))$-transitiv ist. Nach Lemma 15.(a) ist

$$\Gamma_{[[0],(\infty)]} = \{(x,y) \mapsto (x, ax+y) | a \in K, \forall (s, x \in K) : ax + sx = (a+s)x\},$$

und insbesondere ist $P(K,T)$ genau dann $([0],(\infty))$-transitiv, wenn $(a+s)x = ax + sx$ für alle $a, s, x \in K$ gilt.

Insgesamt ist (∞) genau dann eine duale Translationsachse, wenn $(K,+,\cdot)$ das Linksdistributivgesetz erfüllt, und nach Lemma 16 ist dies genau dann der Fall, wenn $(K,+,\cdot)$ ein Semikörper ist.

■

Korollar 18: *Eine projektive Ebene ist genau dann vom Lenz Typ mindestens V, wenn sie zu einer projektiven Ebene $P(K)$ über einem Semikörper K isomorph ist.*

Aufgaben zu §7

(90) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $z \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{L}$. Zeigen Sie, daß π genau dann (a,z)-desarguesch ist, wenn die duale Ebene π^* (z,a)-desarguesch ist.

(91) Zeigen Sie, daß eine projektive Ebene π genau dann desarguesch ist, wenn die duale Ebene π^* desarguesch ist.

(92) Sei $k > 1$ eine reelle Zahl, und bezeichne M_k die Moultonebene zum Knickfaktor k. Sei (K, T) der Ternärkörper von M_k zum Viereck $((0,0),(1,1),(0),(\infty))$. Zeigen Sie, daß (K, T) eine cartesische Gruppe, aber kein Quasikörper ist.

(93) Seien K ein Körper und $a, b \in K$ so, daß das Polynom $f(x) := x^2 - ax - b \in K[x]$ über K irreduzibel ist. Betrachte $H := K^2$ versehen mit der gewöhnlichen Addition und der folgenden Multiplikation $(x, y, u, v \in K)$:

$$(x,y)\cdot(u,v) := \begin{cases} (xu - y^{-1}vf(x), yu - xv + av), & y \neq 0, \\ (xu, xv), & y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $(H, +, \cdot)$ ein Quasikörper ist.

(94) Seien K, a, b, f, H wie in Aufgabe (93). Zeigen Sie, daß $(H, +, \cdot)$ genau dann ein Semikörper ist, wenn $|K| = 2$ gilt.

(95) Seien K, a, b, f, H wieder wie in Aufgabe (93). Dann ist die Multiplikation in H genau dann assoziativ, wenn $|K| = 2$ gilt oder $|K| = 3$ und $a = 0$, $b = -1$ ist.

§8 Die Hauptsätze der affinen und projektiven Geometrie

In §7 haben wir gezeigt, daß die desargueschen projektiven Ebenen genau die projektiven Ebenen $\mathrm{PG}(V)$ über Schiefkörpern sind. Das Anliegen dieses Paragraphen ist es die volle Kollineationsgruppe dieser Ebenen zu bestimmen. Der sich ergebende Satz wird traditionell als Hauptsatz der projektiven Geometrie bezeichnet. Der Hauptsatz der affinen Geometrie ist dann die Bestimmung der Kollineationsgruppe von $\mathrm{AG}(V)$. Alle erforderlichen Hilfsmittel stehen uns bereits seit §4 zur Verfügung, allerdings hatten wir dort noch keinen rechten Anlaß, die volle Kollineationsgruppe zu berechnen.

Allerdings hatten wir bereits in §4 die projektiv lineare Gruppe $\mathrm{PGL}(V)$ als Untergruppe der vollen Automorphismengruppe definiert. Die Elemente dieser Gruppe werden durch Elemente der $\mathrm{GL}(V)$ induziert, und wir erweitern jetzt $\mathrm{GL}(V)$ zu einer größeren Gruppe, die noch immer Kollineationen von $\mathrm{PG}(V)$ liefert.

Definition 1: Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt semilinear, wenn $(v+w)^\varphi = v^\varphi + w^\varphi$ für alle $v, w \in V$ gilt, und es einen Automorphismus $\gamma \in \mathrm{Aut}(K)$ mit

$$(va)^\varphi = v^\varphi a^\gamma$$

für alle $v \in V$, $a \in K$ gibt.

In diesem Paragraphen benötigen wir semilineare Abbildungen nur für Vektorräume V mit $\dim V \in \{2, 3\}$. In §9 werden wir allerdings semilineare Abbildungen beliebiger Vektorräume verwenden, daher betrachten wir hier gleich den allgemeinen Fall. Insbesondere müssen unsere Vektorräume nicht endlichdimensional sein. Wir haben die folgenden grundlegenden Aussagen:

Lemma 1: *Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Sei*

$$\Gamma\mathrm{L}(V) := \{\varphi : V \to V | \varphi \text{ ist semilinear}\}.$$

Dann gelten:

(a) *Die Menge $\Gamma\mathrm{L}(V)$ ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe von V.*

(b) *Ist $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$, so ist der Automorphismus $\gamma = \gamma_\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$ mit $(va)^\varphi = v^\varphi a^\gamma$ für alle $v \in V$, $a \in K$ eindeutig bestimmt.*

(c) *Die Abbildung $\gamma : \Gamma\mathrm{L}(V) \to \mathrm{Aut}(K); \varphi \mapsto \gamma_\varphi$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathrm{GL}(V)$.*

(d) *Ist $E \subseteq V$ linear unabhängig und $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$, so ist auch E^φ linear unabhängig.*

(e) *Ist $U \leq V$ ein Teilraum, so ist auch $U^\varphi \leq V$ ein Teilraum mit $\dim U^\varphi = \dim U$.*

Beweis: **(b)** Sei $\varphi : V \to V$ semilinear und seien γ, γ' zwei zugehörige Automorphismen von K. Wegen $V \neq 0$ existiert ein Vektor $v \in V \backslash \{0\}$. Da $0^\varphi = 0$ gilt und φ bijektiv ist, gilt $v^\varphi \neq 0$. Für jedes $a \in K$ folgt $v^\varphi a^\gamma = (va)^\varphi = v^\varphi a^{\gamma'}$, d.h. $a^\gamma = a^{\gamma'}$. Also ist $\gamma' = \gamma$.
(a,c) Offenbar ist $\mathrm{id}_V \in \Gamma\mathrm{L}(V)$. Sind $\varphi \in V$, $\gamma = \gamma_\varphi$, so ist φ^{-1} wieder additiv, und für alle $v \in V$, $a \in K$ gilt

$$(va)^{\varphi^{-1}} = \left(\left(v^{\varphi^{-1}}\right)^\varphi \left(a^{\gamma^{-1}}\right)^\gamma\right)^{\varphi^{-1}} = \left(\left(v^{\varphi^{-1}} a^{\gamma^{-1}}\right)^\varphi\right)^{\varphi^{-1}} = v^{\varphi^{-1}} a^{\gamma^{-1}},$$

und somit ist $\varphi^{-1} \in \Gamma\mathrm{L}(V)$. Schließlich seien $\varphi, \psi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$. Dann ist $\varphi\psi$ wieder bijektiv und additiv, und für alle $v \in V$, $a \in K$ gilt

$$(va)^{\varphi\psi} = (v^\varphi a^{\gamma_\varphi})^\psi = v^{\varphi\psi} a^{\gamma_\varphi \gamma_\psi},$$

d.h. $\varphi\psi$ ist semilinear mit $\gamma_{\varphi\psi} = \gamma_\varphi \gamma_\psi$.
(d) Sei $f : E \to K$ eine Abbildung mit $f(v) \neq 0$ nur für endlich viele $v \in E$ so, daß

$$\sum_{v \in E} v^\varphi f(v) = 0$$

ist. Dann folgt mit $\gamma = \gamma_\varphi$

$$0 = \sum_{v \in E} v^\varphi f(v)^{\gamma^{-1}\gamma} = \sum_{v \in E} \left(v f(v)^{\gamma^{-1}} \right)^\varphi = \left(\sum_{v \in E} v f(v)^{\gamma^{-1}} \right)^\varphi,$$

und da φ bijektiv ist, ergibt dies

$$\sum_{v \in E} v f(v)^{\gamma^{-1}} = 0,$$

d.h. für jedes $v \in E$ ist $f(v)^{\gamma^{-1}} = 0$ und somit auch $f(v) = 0$.
(e) Offenbar gelten $0 \in U^\varphi$ und $U^\varphi + U^\varphi \subseteq U^\varphi$. Setze $\gamma := \gamma_\varphi$. Sind $v \in U$, $a \in K$, so haben wir

$$v^\varphi a = v^\varphi a^{\gamma^{-1}\gamma} = \left(v a^{\gamma^{-1}} \right)^\varphi \in U^\varphi,$$

da $U \leq V$ ist. Also ist $U^\varphi \leq V$. Sei E eine Basis von U. Nach (d) ist $E^\varphi \subseteq U^\varphi$ linear unabhängig. Sei $v \in U$. Dann existiert eine Abbildung $f : E \to K$ mit $f(u) \neq 0$ nur für endlich viele $u \in E$ so, daß $v = \sum_{u \in E} u f(u)$ ist. Es folgt $v^\varphi = \sum_{u \in E} u^\varphi f(u)^\gamma$, d.h. E^φ erzeugt U^φ, und ist somit eine Basis von U^φ. Also ist

$$\dim U^\varphi = |E^\varphi| = |E| = \dim U.$$

■

Es ist sehr einfach semilineare, aber nicht lineare, Abbildungen zu konstruieren.

Lemma 2: *Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K, und sei E eine Basis von V.*

(a) *Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ ein Automorphismus von K. Für jedes $v \in V$ haben wir eine eindeutig bestimmte Abbildung $f_v : E \to K$ mit $f_v(u) \neq 0$ nur für endlich viele $u \in E$ so, daß $v = \sum_{u \in E} u f_v(u)$ gilt. Wir definieren die Abbildung*

$$\theta(\alpha) : V \to V; v \mapsto \sum_{u \in E} u f_v(u)^\alpha.$$

Dann ist $\theta(\alpha)$ semilinear mit $\gamma_{\theta(\alpha)} = \alpha$.

(b) *Die Abbildung $\theta : \mathrm{Aut}(K) \to \Gamma\mathrm{L}(V)$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus mit $\gamma\theta = \mathrm{id}$.*

(c) *Ist $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$, so existieren eindeutig bestimmte $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$, $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\varphi = \theta(\alpha)\psi$.*

Beweis: **(a)** Daß $\theta(\alpha)$ bijektiv und additiv ist, ist klar. Sind $v \in V$, $a \in K$, so gilt $f_{va}(u) = f_v(u)a$ für jedes $u \in E$, und wir haben

$$(va)^{\theta(\alpha)} = \sum_{u \in E} u\,(f_v(u)a)^\alpha = \sum_{u \in E} u f_v(u)^\alpha a^\alpha = \left(\sum_{u \in E} u f_v(u)^\alpha\right) a^\alpha = v^{\theta(\alpha)} a^\alpha,$$

d.h. $\theta(\alpha)$ ist semilinear mit $\gamma_{\theta(\alpha)} = \alpha$.
(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K)$. Dann gilt für jedes $v \in V$ die Gleichung

$$v^{\theta(\alpha)\theta(\beta)} = \left(\sum_{u \in E} u f_v(u)^\alpha\right)^{\theta(\beta)} = \sum_{u \in E} u f_v(u)^{\alpha\beta} = v^{\theta(\alpha\beta)},$$

d.h. es ist $\theta(\alpha\beta) = \theta(\alpha)\theta(\beta)$. Die Aussage $\gamma\theta = \mathrm{id}$ gilt nach (a), und insbesondere ist θ injektiv.
(c) Sei eine semilineare Abbildung $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$ gegeben. Setze $\alpha := \gamma_\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$. Dann ist $\psi := \theta(\alpha^{-1})\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$ mit $\gamma_\psi = \gamma_{\theta(\alpha^{-1})}\gamma_\varphi = \alpha^{-1}\alpha = \mathrm{id}$ nach (a), also ist $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ und es gilt $\theta(\alpha)\psi = \theta(\alpha\alpha^{-1})\varphi = \varphi$ nach (b). Dies zeigt die Existenzaussage.

Jetzt seien $\beta \in \mathrm{Aut}(K)$, $\zeta \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\varphi = \theta(\beta)\zeta$ gegeben. Es folgt zuerst $\alpha = \gamma_\varphi = \gamma_{\theta(\beta)}\gamma_\zeta = \beta$, und damit ist auch $\theta(\alpha)\psi = \varphi = \theta(\beta)\zeta = \theta(\alpha)\zeta$, d.h. $\zeta = \psi$. ∎

Dieses Lemma ist viel einfacher als es zunächst aussieht. Betrachten wir einmal den konkreten Fall $V = K^n$ versehen mit der Standardbasis. Ist $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ ein Automorphismus von K, so ist die semilineare Abbildung $\theta(\alpha)$ einfach

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \vdots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$$

Damit hat eine allgemeine semilineare Abbildung die Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \vdots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren $n \times n$ Matrix (a_{ij}).

Wir beschreiben jetzt die von semilinearen Abbildungen induzierten Kollineationen.

Definition 2: Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Ist $\varphi : V \to V$ eine semilineare Abbildung, so bildet φ nach Lemma 1.(e) eindimensionale Teilräume von V wieder auf solche ab, und induziert somit eine bijektive Abbildung

$$\overline{\varphi} : T_1(V) \to T_1(V).$$

Da φ auch zweidimensionale Teilräume wieder auf zweidimensionale Teilräume abbildet, ist $\overline{\varphi}$ eine Kollineation der projektiven Ebene $\mathrm{PG}(V)$. Dies liefert offenbar einen Gruppenhomomorphismus

$$\overline{\ }: \Gamma\mathrm{L}(V) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V)),$$

dessen Bild wir mit

$$\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V) := \{\overline{\varphi} : \varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)\}$$

bezeichnen. Es ist $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V) \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$.

Wir wollen einmal die semilinearen Abbildungen φ mit $\overline{\varphi} = 1$ bestimmen. Dazu benötigen wir noch eine kleine Definition.

Definition 3: Sei K ein Schiefkörper. Ist $a \in K\backslash\{0\}$, so ist die Abbildung

$$i_a : K \to K; x \mapsto a^{-1}xa$$

offenbar ein Automorphismus von K, genannt der innere Automorphismus zu a. Weiter heißt

$$Z(K) := \{a \in K\backslash\{0\} : i_a = \mathrm{id}\} \cup \{0\} = \{a \in K | \forall (x \in K) : ax = xa\}$$

das Zentrum von K. Es ist eine Übungsaufgabe zu zeigen, daß $Z(K)$ ein Unterkörper von K ist.

Lemma 3: *Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K mit $\dim V \geq 2$. Dann gelten:*

(a) *Ist $a \in K\backslash\{0\}$, so ist die Abbildung*

$$\varrho_a : V \to V; v \mapsto va$$

semilinear mit $\gamma_{\varrho_a} = i_a$.

(b) *Ist $a \in K\backslash\{0\}$, so ist ϱ_a genau dann linear, wenn $a \in Z(K)$ ist.*

(c) *Ist $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$, so gilt genau dann $U^\varphi = U$ für jeden eindimensionalen Teilraum U von V, wenn es ein $a \in K\backslash\{0\}$ mit $\varphi = \varrho_a$ gibt.*

Beweis: **(a)** Offenbar ist ϱ_a bijektiv und additiv. Sind $v \in V$ und $x \in K$, so haben wir

$$(vx)^{\varrho_a} = vxa = vaa^{-1}xa = v^{\varrho_a}x^{i_a}.$$

(b) Klar wegen $\gamma_{\varrho_a} = i_a$.
(c) "'$\Longleftarrow$"' Klar.

"$\Longrightarrow$" Wähle eine Basis E von V. Setze $\alpha = \gamma_\varphi$. Sei $u \in E$. Dann gilt $u^\varphi \in uK$, d.h. es existiert ein $a(u) \in K\backslash\{0\}$ mit $u^\varphi = ua(u)$. Seien $u, v \in E$ mit $u \neq v$. Dann ist

$$ua(u) + va(v) = u^\varphi + v^\varphi = (u+v)^\varphi \in (u+v)K,$$

also ist $ua(u)+va(v) = (u+v)x = ux+vx$ für ein $x \in K$, und die lineare Unabhängigkeit von u, v ergibt $a(u) = x = a(v)$. Also gibt es ein $a \in K\backslash\{0\}$ mit $a(u) = a$ für jedes $u \in E$, d.h. $u^\varphi = ua$ für alle $u \in E$.

Wegen $|E| = \dim V \geq 2$ gibt es $u, v \in E$ mit $u \neq v$. Sei $x \in K$. Dann gilt

$$(ux+v)^\varphi = (ux)^\varphi + v^\varphi = u^\varphi x^\alpha + v^\varphi = uax^\alpha + va.$$

Andererseits ist $(ux+v)^\varphi \in (ux+v)K$, also existiert ein $y \in K$ mit $(ux+v)^\varphi = (ux+v)y = uxy + vy$. Die lineare Unabhängigkeit von u, v liefert $y = a$ und $xa = xy = ax^\alpha$, d.h. $x^\alpha = a^{-1}xa$. Also ist $\alpha = i_a$.

Sei $v \in V$. Sei $f : E \to K$ mit $f(u) \neq 0$ nur für endlich viele $u \in E$ definiert durch $v = \sum_{u\in E} uf(u)$. Dann folgt

$$v^\varphi = \left(\sum_{u\in E} uf(u)\right)^\varphi = \sum_{u\in E} u^\varphi f(u)^\alpha = \sum_{u\in E} uaa^{-1}f(u)a = \left(\sum_{u\in E} uf(u)\right)a = va,$$

d.h. es ist $\varphi = \varrho_a$.

■

Bevor wir zum Hauptsatz kommen benötigen wir noch ein kleines Lemma.

Lemma 4: *Sei (G, Ω, ω) eine Transformationsgruppe. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe, die transitiv auf Ω wirkt. Weiter sei $x \in \Omega$ mit $G_x \subseteq H$. Dann ist $H = G$.*

Beweis: Sei $g \in G$. Da H transitiv auf Ω ist, existiert ein $h \in H$ mit $x^g = x^h$. Es folgt $x^{gh^{-1}} = x$, d.h. $gh^{-1} \in G_x \subseteq H$. Also ist $g = (gh^{-1})h \in H$.

■

Dieses Lemma, beziehungsweise sein Beweis, wird gelegentlich als Rückholargument bezeichnet, da das Bild x^g durch ein Element von H nach x zurückgeholt wird. In der Gruppentheorie werden dieses, und diverse ähnliche Lemmata, auch als Frattini-Argument bezeichnet.

Satz 5: *Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Dann gilt*

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V)) = \mathrm{P\Gamma L}(V).$$

Beweis: Nach §4.Lemma 12 wirkt die Gruppe $\mathrm{PGL}(V) \leq \mathrm{P\Gamma L}(V)$ transitiv auf der Menge aller Vierecke von $\mathrm{PG}(V)$. Sei (o, e, u, v) ein Viereck von $\mathrm{PG}(V)$. Nach §4.Satz 6 existiert eine Basis e_1, e_2, e_3 von V mit $u = e_1K$, $v = e_2K$, $o = e_3K$ und $e =$

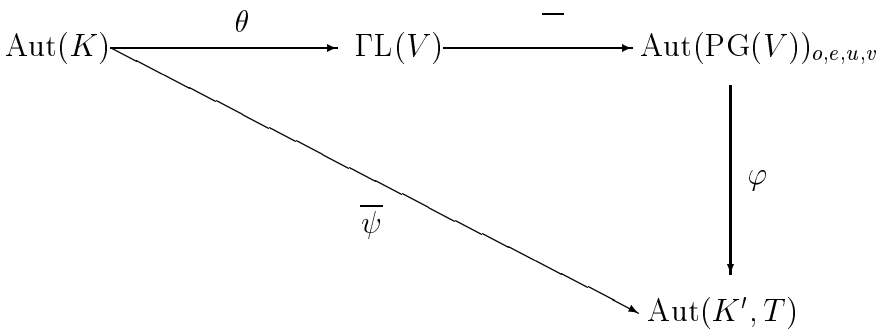
$(e_1 + e_2 + e_3)K$, und ist (K', T) der zu (o, e, u, v) gehörende Ternärkörper von $\mathrm{PG}(V)$, so ist die Abbildung

$$\psi : K \to K'; x \mapsto ((e_1 + e_2)x + e_3)K$$

ein Isomorphismus von Ternärkörpern. Weiter ist nach §4.Satz 9.(b) die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))_{o,e,u,v} \to \mathrm{Aut}(K', T); \alpha \mapsto \alpha | K'$$

ein Isomorphismus.



Dieser liefert uns einen Gruppenisomorphismus

$$\overline{\psi} : \mathrm{Aut}(K) \to \mathrm{Aut}(K', T); \alpha \mapsto \psi^{-1}\alpha\psi.$$

Weiter sei $\theta : \mathrm{Aut}(K) \to \Gamma\mathrm{L}(V)$ der Homomorphismus aus Lemma 2.(b) bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 von V. Ist $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$, so ist $e_i^{\theta(\alpha)} = e_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $(e_1 + e_2 + e_3)^{\theta(\alpha)} = e_1 + e_2 + e_3$, d.h. wir haben $\overline{\theta(\alpha)} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))_{o,e,u,v}$.

Wir zeigen jetzt, daß für jeden Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ von K die Gleichung $\varphi(\overline{\theta(\alpha)}) = \overline{\psi}(\alpha)$ gilt. Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$. Sei $y \in K'$ und setze $x := \psi^{-1}(y) \in K$, d.h. $y = ((e_1 + e_2)x + e_3)K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(\alpha)(y) = y^{\psi^{-1}\alpha\psi} = x^{\alpha\psi} = ((e_1 + e_2)x^\alpha + e_3)K = (((e_1 + e_2)x + e_3)^{\theta(\alpha)})K \\ = (((e_1 + e_2)x + e_3)K)^{\overline{\theta(\alpha)}} = \varphi(\overline{\theta(\alpha)})(y),\end{aligned}$$

und diese Zwischenbehauptung ist gezeigt.

Jetzt sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))_{o,e,u,v}$ gegeben. Es gibt $\beta \in \mathrm{Aut}(K)$ mit

$$\varphi(\alpha) = \overline{\psi}(\beta) = \varphi(\overline{\theta(\beta)}),$$

und somit folgt

$$\alpha = \overline{\theta(\beta)} \in \mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V).$$

Dies zeigt $\mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))_{o,e,u,v} \subseteq \mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V)$, und Lemma 4 ergibt die Behauptung.

■

Dies war schon der Hauptsatz der projektiven Geometrie, zumindest der ebene Fall. Wir wollen jetzt auch noch den entsprechenden affinen Satz nachweisen. Zunächst schreiben wir alle offensichtlichen Kollineationen hin, und weisen dann nach, daß wir tatsächlich bereits alle Kollineationen erwischt haben. In §5 hatten wir Translationen in einer affinen Ebene definiert. Dies waren einfach Kollineationen der affinen Ebene π, deren Fortsetzung auf den projektiven Abschluß $\overline{\pi}$ eine Elation mit der Ferngeraden l_∞ als Achse ist. Die Menge aller Translationen von π ist damit die Gruppe $\mathrm{Aut}(\overline{\pi})_{[l_\infty,l_\infty]}$, wenn wir $\mathrm{Aut}(\pi)$ nach §4.Satz 9.(a) mit $\mathrm{Aut}(\overline{\pi})_{l_\infty}$ identifizieren. Insbesondere wirkt die Translationsgruppe von π frei auf den Punkten der affinen Ebene.

Lemma 6: *Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K.*

(a) *Die Gruppe*

$$T := \{v \mapsto v^t := v + t : t \in V\}$$

ist die Gruppe aller Translationen von $\mathrm{AG}(V)$.

(b) *Es ist* $\Gamma\mathrm{L}(V) \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V))$.

(c) *Es gilt*

$$\mathrm{A}\Gamma\mathrm{L}(V) := \Gamma\mathrm{L}(V) \cdot T = \{v \mapsto v^\varphi + t : \varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V), t \in V\} \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V)).$$

Beweis: **(a)** Sei $t \in V$. Die Abbildung $V \to V; v \mapsto v + t$ ist bijektiv, und für $u \in V\backslash\{0\}$, $s \in V$ gilt $(s + uK) + t = (s + t) + uK$, d.h. sie ist nach §1.Lemma 3 eine Kollineation. Dies zeigt $T \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V))$. Weiter zeigt diese Rechnung, daß die Elemente von T jede Gerade auf eine parallele Gerade abbilden, d.h. sie sind Dilatationen von $\mathrm{AG}(V)$. Schließlich ist jedes Element von T identisch oder fixpunktfrei, d.h. T besteht aus Translationen von $\mathrm{AG}(V)$. Da T offenbar transitiv auf V ist, ist T sogar die volle Translationsgruppe von $\mathrm{AG}(V)$.
(b) Sei $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$. Sind $u \in V\backslash\{0\}$ und $t \in V$, so haben wir mit $\alpha := \gamma_\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$

$$(t + uK)^\varphi = t^\varphi + u^\varphi K^\alpha = t^\varphi + u^\varphi K,$$

d.h. φ ist nach §1.Lemma 3 eine Kollineation von $\mathrm{AG}(V)$.
(c) Nach (a,b) ist nur noch zu zeigen, daß $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{L}(V)$ überhaupt eine Gruppe ist, und hierfür reicht es $T \cdot \Gamma\mathrm{L}(V) \subseteq \mathrm{A}\Gamma\mathrm{L}(V)$ zu zeigen. Seien also $t \in V$ und $\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$ gegeben. Für alle $v \in V$ gilt dann

$$v^{t\varphi} = (v + t)^\varphi = v^\varphi + t^\varphi,$$

und diese Abbildung liegt wieder in $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{L}(V)$.

■

Tatsächlich ist dies bereits die volle Kollineationsgruppe von $\mathrm{AG}(V)$, dies ist der sogenannte Hauptsatz der affinen Geometrie.

Satz 7: *Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Dann gilt*

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V)) = \mathrm{A\Gamma L}(V).$$

Beweis: Nach Lemma 6 wissen wir bereits, daß $\mathrm{A\Gamma L}(V) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V))$ ist. Sei jetzt umgekehrt ein $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V))$ gegeben. Nach §3.Lemma 9 setzt sich ψ zu einer Kollineation $\overline{\psi} \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathrm{AG}(V)})$ fort, die die Ferngerade von $\overline{\mathrm{AG}(V)}$ fixiert. Nach den Ergebissen des §3 haben wir weiter einen Isomorphismus

$$\theta : \overline{\mathrm{AG}(V)} \to \mathrm{PG}(V \oplus K)$$

mit $\theta(v) = (v + e)K$ für jedes $v \in V$, wobei wir $e := (0, 1) \in V \oplus K$ schreiben. Dabei bildet θ die Ferngerade von $\overline{AG(V)}$ auf die Gerade $V \leq V \oplus K$ von $\mathrm{PG}(V \oplus K)$ ab. Dies liefert die Kollineation

$$\widetilde{\psi} := \theta \circ \overline{\psi} \circ \theta^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V \oplus K)),$$

und diese fixiert die Gerade V von $\mathrm{PG}(V \oplus K)$. Nach Satz 5 gibt es ein $\zeta \in \Gamma\mathrm{L}(V \oplus K)$ mit $\widetilde{\psi} = \overline{\zeta}$. Es ist $V^\zeta = V$, und wir erhalten $\varphi := \zeta|V \in \Gamma\mathrm{L}(V)$. Weiter gibt es $t \in V$, $\lambda \in K$ mit $e^\zeta = t + e\lambda$. Wegen $e^\zeta \notin V^\zeta = V$ ist $\lambda \neq 0$.

Sei jetzt $v \in V$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} v^\psi = v^{\theta\theta^{-1}\overline{\psi}\theta\theta^{-1}} = v^{\theta\widetilde{\psi}\theta^{-1}} = ((v+e)K)^{\overline{\zeta}\theta^{-1}} = ((v^\zeta + e^\zeta)K)^{\theta^{-1}} = ((v^\varphi + t + e\lambda)K)^{\theta^{-1}} \\ = ((v^\varphi\lambda^{-1} + t\lambda^{-1} + e)K)^{\theta^{-1}} = v^\varphi\lambda^{-1} + t\lambda^{-1}, \end{aligned}$$

und Lemma 3.(a) ergibt $\psi \in \mathrm{A\Gamma L}(V)$.

■

Aufgaben zu §8

(96) Zeigen Sie, daß das Zentrum eines Schiefkörpers immer ein Unterkörper ist.

(97) Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}(V) \trianglelefteq \Gamma\mathrm{L}(V)$ und $\Gamma\mathrm{L}(V)/\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{Aut}(K)$ gelten.

(98) Sei K ein Schiefkörper. Dann ist

$$\mathrm{Inn}(K) := \{i_a : a \in K\backslash\{0\}\} \trianglelefteq \mathrm{Aut}(K),$$

und es gilt $\mathrm{Inn}(K) \simeq K^*/Z(K)^*$. Die Gruppe $\mathrm{Out}(K) := \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Inn}(K)$ heißt die äußere Automorphismengruppe von K.

(99) Sei $V \neq 0$ ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Zeigen Sie, daß dann $\mathrm{PGL}(V) \trianglelefteq \mathrm{P\Gamma L}(V)$ und $\mathrm{P\Gamma L}(V)/\mathrm{PGL}(V) \simeq \mathrm{Out}(K)$ gelten.

(100) Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Zeigen Sie, daß genau dann $\mathrm{PGL}(V)$ die volle Kollineationsgruppe von $\mathrm{PG}(V)$ ist, wenn K nur innere Automorphismen besitzt.

(101) Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Sind $U, W \leq V$ mit $V = U \oplus W$, so ist $\epsilon := \epsilon_{U,W} : V \to V$ definiert durch $\epsilon(u + w) = u$ für $u \in U$, $w \in W$ linear. Wir nennen ϵ eine Projektion, beziehungsweise eine Projektion auf U.

(102) Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K mit $\dim V \geq 2$. Sei $\epsilon : V \to V$ eine Projektion auf einen eindimensionalen Teilraum von V. Dann gibt es $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\epsilon = \varphi - \psi$.

(103) Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K, $U, W \leq V$ mit $V = U \oplus W$ und setze $\epsilon := \epsilon_{U,W}$. Sei $\psi \in \Gamma\mathrm{L}(V)$. Dann ist genau dann $\epsilon\psi = \psi\epsilon$, wenn $\psi(U) \subseteq U$ und $\psi(W) \subseteq W$ gelten.

(104) Sei V ein mindestens zweidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Für $a \in K\backslash\{0\}$ sei ϱ_a wie in Lemma 3.(a) definiert. Dann gilt

$$C_{\Gamma\mathrm{L}(V)}\mathrm{GL}(V) = C_{\Gamma\mathrm{L}(V)}\mathrm{End}(V) = \{\varrho_a : a \in K\backslash\{0\}\}.$$

(105) Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K mit $\dim V \geq 2$. Dann ist

$$Z(\mathrm{GL}(V)) = \{\varrho_a : a \in Z(K)\backslash\{0\}\}.$$

(106) Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K mit $\dim V \geq 2$. Dann ist

$$Z(\Gamma\mathrm{L}(V)) = \{\varrho_a | a \in Z(K)\backslash\{0\}, \forall(\alpha \in \mathrm{Aut}(K)) : a^\alpha = a\}.$$

§9 Translationsebenen

In §5 hatten wir eine Translationsebene definiert als eine projektive Ebene π, die eine Translationsachse a besitzt. Eine Translationsachse war dabei einfach eine Gerade, deren zugehörige Translationsgruppe transitiv auf der affinen Punktmenge π_a wirkt. Es ist naheliegend die affine Ableitung π_a zu betrachten, diese hatten wir in §6 als eine affine Translationsebene bezeichnet, und wir kennen mit §6.Korollar 9 auch eine direkte Kennzeichnung dieser affinen Ebenen. Schließlich haben wir in §7 eingesehen, daß Translationsebenen durch Quasikörper koordinatisiert werden. Daher beginnen wir diesen Abschnitt mit der algebraischen Untersuchung von Quasikörpern. Wir starten etwas allgemeiner als eigentlich nötig und bestimmen einige Kollineationen mit Achse $[0, 0]$ in der projektiven Ebene über einem allgemeinen Ternärkörper.

Lemma 1: *Sei (K,T) ein Ternärkörper, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$. Dann gilt*

$$\Gamma_{[[0,0],(\infty)]} = \{(x,y) \mapsto (x,ay) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : T(as,x,at) = aT(s,x,t)\}.$$

Beweis: Sei $\alpha \in \Gamma_{[[0,0],(\infty)]}$ gegeben. Dann ist $[c]^\alpha = [c]$ für jedes $c \in K$, da (∞) ein Zentrum von α ist. Weiter liegt (0) auf $[0,0]$, d.h. $(0)^\alpha = (0)$. Wegen $[0,0]^\alpha = [0,0]$ und $[\infty]^\alpha = [\infty]$ erhalten wir eine bijektive Abbildung $\psi : K \to K$ mit $\psi(0) = 0$ und $[0,t]^\alpha = [0,\psi(t)]$ für alle $t \in K$. Für $x,y \in K$ folgt

$$(x,y)^\alpha = ([x] \wedge [0,y])^\alpha = [x] \wedge [0,\psi(y)] = (x,\psi(y)).$$

Es folgt für jedes $s \in K$

$$[s,0]^\alpha = ((0,0) \vee (1,s))^\alpha = (0,0) \vee (1,\psi(s)) = [\psi(s),0],$$

und somit auch

$$(s)^\alpha = ([s,0] \wedge [\infty])^\alpha = [\psi(s),0] \wedge [\infty] = (\psi(s)).$$

Für $s,t \in K$ folgt

$$[s,t]^\alpha = ((s) \vee (0,t))^\alpha = (\psi(s)) \vee (0,\psi(t)) = [\psi(s),\psi(t)].$$

Seien $s,x,t \in K$. Dann gilt

$$(x,\psi(T(s,x,t))) = (x,T(s,x,t))^\alpha \in [s,t]^\alpha = [\psi(s),\psi(t)],$$

d.h.

$$\psi(T(s,x,t)) = T(\psi(s),x,\psi(t)).$$

Setze $a := \psi(1) \in K\backslash\{0\}$. Für jedes $x \in K$ gilt dann

$$\psi(x) = \psi(T(1,x,0)) = T(\psi(1),x,\psi(0)) = T(a,x,0) = ax,$$

d.h. $(x,y)^\alpha = (x,ay)$ für alle $x,y \in K$ und sind $s,x,t \in K$ so haben wir

$$aT(s,x,t) = \psi(T(s,x,t)) = T(\psi(s),x,\psi(t)) = T(as,x,at).$$

Jetzt sei umgekehrt $a \in K\backslash\{0\}$ mit dieser Eigenschaft gegeben. Nach §2.Lemma 8.(b) ist die angegebene Abbildung $\alpha : K^2 \to K^2; (x,y) \mapsto (x,ay)$ bijektiv. Für $c \in K$ gilt $[c]^\alpha = [c]$, und für $s,t \in K$ liefert unsere Bedingung an a auch $[s,t]^\alpha = [as,at]$. Nach §1.Lemma 3 ist α eine Kollineation der affinen Ebene $A(K,T)$. Nach §3.Lemma 9 setzt sich α zu einer Kollineation von $P(K,T)$ mit $[\infty]^\alpha = [\infty]$ fort. Offenbar ist (∞) ein Zentrum, und wegen $a0 = 0$ ist $[0,0]$ eine Achse.

■

Wir wollen jetzt die verschiedenen Gruppen von Homologien beziehungsweise Elationen im Fall der projektiven Ebene über einem Quasikörper auswerten.

Definition 1: Sei $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} D(K) &:= \{a \in K | \forall (b,c \in K) : (a+b)c = ac+bc\}, \\ N_r(K) &:= \{c \in K | \forall (a,b \in K) : (ab)c = a(bc)\}, \\ N_m(K) &:= \{b \in K | \forall (a,c \in K) : (ab)c = a(bc)\}, \\ N_l(K) &:= \{a \in K | \forall (b,c \in K) : (ab)c = a(bc)\}. \end{aligned}$$

Dabei heißt $D(K)$ der Distributor von K und $N_r(K)$, $N_m(K)$, $N_l(K)$ sind der rechte, mittlere und linke Nukleus von K. Der Kern von K ist die Menge

$$\mathrm{Kern}(K) := \{c \in N_r(K) | \forall (a,b \in K) : (a+b)c = ac+bc\}.$$

Diese Mengen lassen sich auch geometrisch interpretieren.

Lemma 2: *Sei $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K))$. Dann gelten:*

(a) $\Gamma_{[[\infty],(0,0)]} = \{(x,y) \mapsto (xa, ya) : a \in \mathrm{Kern}(K) \backslash \{0\}\}$.

(b) $\Gamma_{[[0],(\infty)]} = \{(x,y) \mapsto (x, ax+y) | a \in D(K)\}$.

(c) $\Gamma_{[[0],(0)]} = \{(x,y) \mapsto (ax, y) : a \in N_m(K) \backslash \{0\}\}$.

(d) $\Gamma_{[[0,0],(\infty)]} = \{(x,y) \mapsto (x, ay) | a \in N_l(K) \backslash \{0\}\}$.

Beweis: **(a)** Nach §5.Lemma 10.(c) ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{[[\infty],(0,0)]} &= \{(x,y) \mapsto (xa,ya) | a \in K \backslash \{0\}, \forall (s,x,t \in K) : T(s,xa,ta) = T(s,x,t)a\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (xa,ya) | a \in K \backslash \{0\}, \forall (s,x,t \in K) : s(xa) + ta = (sx+t)a\}. \end{aligned}$$

Ist $a \in \mathrm{Kern}(K)$, so gilt für $s,x,t \in K$ offenbar $s(xa)+ta = (sx)a+ta = (sx+t)a$. Ist umgekehrt $a \in K$ mit $s(xa)+ta = (sx+t)a$ für alle $s,x,t \in K$, so folgt für alle $x,y \in K$ zunächst $xa+ya = 1(xa)+ya = (1x+y)a = (x+y)a$ und $x(ya) = x(ya)+0a = (xy+0)a = (xy)a$, d.h. es ist $a \in \mathrm{Kern}(K)$.
(b) Nach §7.Lemma 15.(a) ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{[[0],(\infty)]} &= \{(x,y) \mapsto (x, T(a,x,y)) | a \in K, \\ &\qquad \forall (s,x,t \in K) : T(a,x,T(s,x,t)) = T(T(a,1,s),x,t)\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x, ax+y) | a \in K, \\ &\qquad \forall (s,x,t \in K) : ax+sx+t = (a+s)x+t\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x, ax+y) | a \in K, \forall (s,x \in K) : ax+sx = (a+s)x\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x, ax+y) | a \in D(K)\}. \end{aligned}$$

(c) Für $a \in K\backslash\{0\}$ definieren wir $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ durch $aa^{-1} = 1$. Nach §7.Lemma 15.(b) gilt

$$\begin{aligned}\Gamma_{[[0],(0)]} &= \{(x,y) \mapsto (ax,y) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : T(s,x,t) = T(sa^{-1}, ax, t)\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (ax,y) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : sx + t = (sa^{-1})(ax) + t\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (ax,y) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x \in K) : sx = (sa^{-1})(ax)\}.\end{aligned}$$

Sei $a \in N_m(K)\backslash\{0\}$. Seien $s, x \in K$. Dann gilt

$$sa^{-1} = (sa^{-1})1 = (sa^{-1})(aa^{-1}) = ((sa^{-1})a)a^{-1},$$

also $(sa^{-1})a = s$ nach §2.Lemma 8.(b). Weiter folgt $(sa^{-1})(ax) = ((sa^{-1})a)x = sx$.

Jetzt sei umgekehrt $a \in K\backslash\{0\}$ mit $(sa^{-1})(ax) = sx$ für alle $s, x \in K$. Wir wollen $a \in N_m(K)$ zeigen. Für $x \in K$ gilt $(xa^{-1})a = (xa^{-1})(a1) = x1 = x$. Weiter ist $((xa)a^{-1})a = xa$, und es folgt wieder $(xa)a^{-1} = x$. Schließlich seien $x, y \in K$ gegeben. Dann ist

$$x(ay) = ((xa)a^{-1})(ay) = (xa)y,$$

d.h. $a \in N_m(K)$.

(d) Nach Lemma 1 ist

$$\begin{aligned}\Gamma_{[[0,0],(\infty)]} &= \{(x,y) \mapsto (x,ay) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : T(as,x,at) = aT(s,x,t)\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x,ay) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : (as)x + at = a(sx + t)\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x,ay) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x,t \in K) : (as)x + at = a(sx) + at\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x,ay) | a \in K\backslash\{0\}, \forall (s,x \in K) : (as)x = a(sx)\} \\ &= \{(x,y) \mapsto (x,ay) | a \in N_l(K)\backslash\{0\}\}.\end{aligned}$$

■

Die drei Nuklei sind im folgenden Sinne multiplikativ abgeschlossen.

Lemma 3: *Seien K ein Quasikörper und $M \in \{N_l(K), N_m(K), N_r(K)\}$. Für jedes $a \in K\backslash\{0\}$ gibt es nach (Q3) genau ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}a = 1$.*

(a) *Es ist $0, 1 \in M$.*

(b) *Sind $a, b \in M$, so ist auch $ab \in M$.*

(c) *Ist $a \in M\backslash\{0\}$, so gelten $a^{-1} \in M$ und $aa^{-1} = 1$.*

Beweis: Wir beginnen mit dem Fall $M = N_r(K)$. Die Aussage (a) ist dann klar. Sind $a, b \in N_r(K)$, so gilt für alle $u, v \in K$

$$(uv)(ab) = ((uv)a)b = (u(va))b = u((va)b) = u(v(ab)),$$

d.h. es ist $ab \in N_r(K)$. Schließlich sei $a \in N_r(K)\backslash\{0\}$. Für alle $u, v \in K$ gilt dann

$$(u(va^{-1}))a = u((va^{-1})a) = u(v(a^{-1}a)) = u(v1) = uv$$
$$= (uv)1 = (uv)(a^{-1}a) = ((uv)a^{-1})a,$$

und wegen $a \neq 0$ folgt $u(va^{-1}) = (uv)a^{-1}$, d.h. es ist $a^{-1} \in N_r(K)$. Weiter gilt

$$(aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = a1 = a = 1a,$$

d.h. $aa^{-1} = 1$.

Jetzt kommen wir zum Fall $M = N_l(K)$. Genau wie oben folgen (a,b). Ist $a \in N_l(K)\backslash\{0\}$, und definieren wir $a' \in K$ durch $aa' = 1$, so folgt genau wie oben $a' \in N_l(K)$ und $a'a = 1$, d.h. $a' = a^{-1}$.

Es verbleibt der Fall $M = N_m(K)$. Dabei ist (a) wieder klar. Seien $a, b \in N_m(K)$. Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so ist $ab = 0 \in N_m(K)$. Jetzt sei $a, b \neq 0$. Dann ist nach Lemma 2.(c) die Abbildung

$$(x, y) \mapsto (bx, y) \mapsto (a(bx), y) = ((ab)x, y)$$

in $\mathrm{Aut}(P(K))_{[[0],(0)]}$, und Lemma 2.(c) ergibt $ab \in N_m(K)$. Schließlich sei $a \in N_m(K)$ mit $a \neq 0$. Dann ist die Abbildung α definiert durch $(x, y)^\alpha = (ax, y)$ wieder nach Lemma 2.(c) eine Kollineation von $P(K)$ mit Achse $[0]$ und Zentrum (0). Da dies auch auf α^{-1} zutrifft, erhalten wir nach Lemma 2.(c) ein $b \in N_m(K)\backslash\{0\}$ mit $(x, y)^{\alpha^{-1}} = (bx, y)$ für $x, y \in K$. Für $x, y \in K$ folgen

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x, y)^{\alpha\alpha^{-1}} = (ax, y)^{\alpha^{-1}} = (b(ax), y) = ((ba)x, y),\\ (x, y) &= (x, y)^{\alpha^{-1}\alpha} = (bx, y)^{\alpha} = (a(bx), y) = ((ab)x, y).\end{aligned}$$

Es folgt $ab = ba = 1$, d.h. $a^{-1} = b \in N_m(K)$ und $aa^{-1} = 1$.

■

Den letzten Teil dieses Beweises hätten wir auch wieder direkt durchrechnen können, dies wäre sogar etwas kürzer. Aber das geometrische Argument sollte man auch einmal gesehen haben. Den Beweis für $N_l(K)$ hätten wir analog zu $N_m(K)$ führen können, nur der rechte Nukleus $N_r(K)$ fällt aus diesem Schema heraus, da wir für diesen keine direkte geometrische Interpretation haben.

Zur Konstruktion von Beispielen ist es hilfreich den Begriff des Kerns noch auf etwas allgemeinere Strukturen auszudehnen.

Definition 2: Ein schwacher Quasikörper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+, \cdot : K \times K \to K$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(W1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralen Element 0.

(W2=Q2) Für alle $x \in K$ ist $0x = 0$ und es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $1x = x1 = x$ für alle $x \in K$.

(W3=Q3) $\forall(a,b \in K, a \neq 0)\exists^1(x \in K) : xa = b.$

(W4=Q5) $\forall(a,b,c \in K) : a(b+c) = ab + ac.$

Wir lassen also die Bedingung (Q4) eines Quasikörpers weg, fordern aber dafür in (W1) von vornherein, daß die Addition abelsch ist. Mit §7.Korollar 12 folgt sofort, daß jeder Quasikörper auch ein schwacher Quasikörper ist. Umgekehrt ist ein schwacher Quasikörper offenbar genau dann ein Quasikörper, wenn die fehlende Bedingung (Q4) erfüllt ist. Den Kern können wir auch für schwache Quasikörper definieren.

Definition 3: Sei $(K,+,\cdot)$ ein schwacher Quasikörper. Dann heißt

$$\mathrm{Kern}(K) := \left\{ a \in K \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall(x,y \in K) : (xy)a = x(ya), \\ \forall(x,y \in K) : (x+y)a = xa + ya \end{array} \right\}$$

der Kern von K.

Wir haben den folgenden grundlegenden, wenn auch einfachen, Satz.

Satz 4: *Sei $(K,+,\cdot)$ ein schwacher Quasikörper. Dann ist der Kern von K ein Unterschiefkörper von K, und bezüglich der Multiplikation von K wird K ein Rechtsvektorraum über* $\mathrm{Kern}(K)$. *Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung*

$$L_a : K \to K; x \mapsto ax$$

eine über $\mathrm{Kern}(K)$ *lineare Abbildung, und für $a \neq 0$ ist* $\mathrm{Kern}\, L_a = 0$.

Beweis: Offenbar ist $0,1 \in \mathrm{Kern}(K)$. Seien $a,b \in \mathrm{Kern}(K)$. Dann gelten für alle $x,y \in K$

$$(xy)(a+b) = (xy)a + (xy)b = x(ya) + x(yb) = x(ya+yb) = x(y(a+b)),$$

$$(x+y)(a+b) = (x+y)a+(x+y)b = xa+ya+xb+yb = xa+xb+ya+yb = x(a+b)+y(a+b),$$

$$(x+y)(ab) = ((x+y)a)b = (xa+ya)b = (xa)b + (ya)b = x(ab) + y(ab),$$

und wie im Beweis von Lemma 3 ist auch $(xy)(ab) = x(y(ab))$, d.h. es ist $a+b, ab \in \mathrm{Kern}(K)$. In $\mathrm{Kern}(K)$ gelten nach Definition des Kerns auch das Linksdistributivgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation. Wir benötigen also nur noch additive und multiplikative Inverse in $\mathrm{Kern}(K)$. Ist $a \in \mathrm{Kern}(K)$, so gilt für alle $x,y \in K$ aufgrund des Rechtsdistributivgesetzes

$$(xy)(-a) = -(xy)a = -x(ya) = x(-ya) = x(y(-a))$$

und

$$(x+y)(-a) = -(x+y)a = -(xa+ya) = -xa - ya = x(-a) + y(-a),$$

d.h. es ist $-a \in \mathrm{Kern}(K)$. Schließlich sei $a \in \mathrm{Kern}(K)\backslash\{0\}$. Nach (W3) gibt es $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ mit $a^{-1}a = 1$. Seien $x, y \in K$. Wie im Beweis von Lemma 3 ist $x(ya^{-1}) = (xy)a^{-1}$. Weiter ist

$$\begin{aligned}((x+y)a^{-1})a &= (x+y)(a^{-1}a) = (x+y)1 = x+y \\ &= x1 + y1 = x(a^{-1}a) + y(a^{-1}a) = (xa^{-1})a + (ya^{-1})a = (xa^{-1} + ya^{-1})a,\end{aligned}$$

d.h. es ist auch $(x+y)a^{-1} = xa^{-1} + ya^{-1}$ nach (W3), und somit ist $a^{-1} \in \mathrm{Kern}(K)$. Also ist $\mathrm{Kern}(K)$ tatsächlich ein Unterschiefkörper von K.

Daß K ein Vektorraum über $\mathrm{Kern}(K)$ ist, ist nach Definition des Kerns klar. Ebenso ist klar, daß L_a für $a \in K$ linear ist. Für $a \in K\backslash\{0\}$ gilt nach (W3) auch sofort $\mathrm{Kern}\, L_a = 0$.

■

Korollar 5: *Sei $(K, +, \cdot)$ ein schwacher Quasikörper, der als Vektorraum über seinem Kern endlichdimensional ist. Dann ist $(K, +, \cdot)$ bereits ein Quasikörper.*

Beweis: Wir müssen die Bedingung (Q4) nachweisen. Seien also $a, b, c \in K$ mit $a \neq b$ gegeben. Die Abbildung $A : K \to K; x \mapsto -ax + bx$ ist wegen $A = -L_a + L_b$ nach Satz 4 linear. Ist $x \in K$ mit $Ax = 0$, so gilt $ax = bx$ und wegen $a \neq b$ folgt mit (W3) sofort $x = 0$. Also ist A injektiv, und da K endlichdimensional ist, auch surjektiv. Insbesondere existiert $x \in K$ mit $c = Ax = -ax + bx$.

■

Korollar 6: *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Quasikörper. Für jedes $a \in K\backslash\{0\}$ ist dann $L_a \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Kern}(K)}(K)$ und sind $a, b \in K$ mit $a \neq b$, so ist $L_a - L_b \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Kern}(K)}(K)$.*

Beweis: Seien $a, b \in K$ mit $a \neq b$. Die Abbildung $A = L_a - L_b$ ist nach Satz 4 linear. Wie im Beweis von Korollar 5 ist A injektiv, und nach (Q4) ist A auch surjektiv, d.h. $L_a - L_b = A \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Kern}(K)}(K)$. Wegen $L_0 = 0$ folgt auch die erste Behauptung.

■

Dieses Korollar führt uns auf die folgende Definition.

Definition 4: Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Ein Spreadset in V ist eine Menge $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ mit den folgenden Eigenschaften

(T1) $0, 1 = \mathrm{id} \in \mathfrak{T}$.

(T2) $A - B \in \mathrm{GL}(V)$ für alle $A, B \in \mathfrak{T}$ mit $A \neq B$.

(T2) Sind $v, w \in V$ mit $v \neq 0$, so existiert ein $A \in \mathfrak{T}$ mit $Av = w$.

Weiter wird für uns der folgende Begriff eine Rolle spielen:

Definition 5: Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Ein Spread in V ist eine Menge $\mathfrak{S}$ von Teilräumen von V mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) Es ist $|\mathfrak{S}| \geq 3$.

(S2) Sind $U, W \in \mathfrak{S}$ mit $U \neq W$, so ist $U + W = V$.

(S3) Für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ existiert genau ein $U \in \mathfrak{S}$ mit $v \in U$.

Beachte das für $U, W \in \mathfrak{S}$ mit $U \neq W$ nach (S2) und (S3) offenbar sogar $V = U \oplus W$ gilt. Wir haben die folgenden Grundkonstruktionen, die alle diese Begriffe miteinander verbinden.

Lemma 7: *Die folgenden Aussagen gelten:*

(a) *Ist $(K, +, \cdot)$ ein Quasikörper, so ist*

$$\mathfrak{T}(K) := \{L_a : a \in K\}$$

ein Spreadset im $\mathrm{Kern}(K)$*-Vektorraum K.*

(b) *Sind V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V, so ist*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{T}) := \{\{0\} \times V\} \cup \{\{(v, Av) : v \in V\} : A \in \mathfrak{T}\} = \{\{0\} \times V\} \cup \mathfrak{T}$$

ein Spread in $V \times V$.

(c) *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{S}$ ein Spread in V. Setze*

$$\mathfrak{L} := \{v + U : U \in \mathfrak{S}, v \in V\}.$$

Dann ist

$$\pi(\mathfrak{S}) := (V, \mathfrak{L})$$

eine affine Translationsebene mit $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{S}$, deren Translationsgruppe genau die additive Gruppe des Vektorraums V ist. Für $U, W \in \mathfrak{S}$, $v, w \in V$ ist genau dann $v + U \parallel w + W$, wenn $U = W$ ist.

Beweis: **(a)** Wegen $1 \neq 0$ ist sicher $K \neq 0$. Wir weisen die Axiome eines Spreadsets nach.
(T1) Es ist $0 = L_0 \in \mathfrak{T}(K)$ und $1 = L_1 \in \mathfrak{T}(K)$.
(T2) Dies gilt nach Korollar 6.
(T3) Seien $v, w \in K$ mit $v \neq 0$. Nach (Q3) existiert genau ein $a \in K$ mit $av = w$. Also ist $L_a \in \mathfrak{T}(K)$ mit $L_a v = av = w$.
(b) Wir weisen die Axiome eines Spreads nach.

(S1) Wegen $V \neq 0$ ist $\mathrm{id} \neq 0$ und somit auch $|\mathfrak{S}(\mathfrak{T})| \geq 3$.
(S2) Seien $U, W \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})$ mit $U \neq W$. Ist $U = \{0\} \times V$, so ist $W \in \mathfrak{T}$. Sind $v, w \in V$, so haben wir $(v, w) = (v, Wv) + (0, w - Wv) \in U + W$, d.h. es ist $U + W = V \times V$.

Es verbleibt der Fall $U, W \in \mathfrak{T}$. Seien wieder $v, w \in V$. Nach (T2) ist $U - W \in \mathrm{GL}(V)$, also existiert ein $x \in V$ mit $(U - W)x = w - Wv$. Setze noch $y := v - x \in V$. Dann gilt $Ux + Wy = (U - W)x + Wv = w$, und somit ist $(v, w) = (x, Ux) + (y, Wy) \in U + W$, und wir haben $U + W = V \times V$ eingesehen.
(S3) Seien $v, w \in V$ mit $(v, w) \neq (0, 0)$. Ist $v = 0$, so ist $w \neq 0$ und es gelten $(v, w) \in \{0\} \times V$, $(v, w) \notin A$ für jedes $A \in \mathfrak{T}$. Jetzt sei $v \neq 0$. Dann ist $(v, w) \notin \{0\} \times V$. Nach (T3) existiert ein $A \in \mathfrak{T}$ mit $Av = w$, d.h. $(v, w) \in A$. Ist $B \in \mathfrak{T}$ mit $(v, w) \in B$, so gelten $Bv = w = Av$ und $(A - B)v = 0$, und wegen $v \neq 0$ ergibt (T2) jetzt $A = B$.
(c) Offenbar ist $(V, \mathfrak{L})$ eine Inzidenzstruktur, und es gilt $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{L}_0$. Ist umgekehrt $U \in \mathfrak{L}_0$, so existieren $v \in V$, $W \in \mathfrak{S}$ mit $0 \in U = v + W$, d.h. $-v \in W$, und somit ist $U = v + W = W \in \mathfrak{S}$. Also ist $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{S}$.

Wir zeigen, daß $\pi(\mathfrak{S})$ eine affine Ebene ist. Sind $U \in \mathfrak{S}$, $v, w \in V$, so gilt $v + U = w + U$ oder $(v + U) \cap (w + U) = \emptyset$, da U ein Teilraum von V ist. Sind $U, W \in \mathfrak{S}$, $v, w \in V$ mit $U \neq W$, so ist $V = U + W$ nach (S2), also existieren $t \in U$, $s \in W$ mit $v - w = t + s$, d.h. $x := v - t = w + s \in (v + U) \cap (w + W)$. Jetzt sei $y \in (v + U) \cap (w + W)$. Dann existieren $c \in U$, $d \in W$ mit $y = v + c = w + d$, d.h. $v - w = -c + d$, und wegen $V = U \oplus W$ folgt $t = -c$, d.h. $y = v + c = v - t = x$. Dies zeigt $|(v + U) \cap (w + W)| = 1$.

Insbesondere schneiden sich je zwei verschiedene Geraden in höchstens einem Punkt, d.h. wir haben die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden. Sind $v, w \in V$ mit $v \neq w$, so gibt es nach (S3) ein $U \in \mathfrak{S}$ mit $w - v \in U$, d.h. $v, w = v + (w - v) \in v + U$. Dies zeigt die Existenz einer Verbindungsgerade, und wir haben das Axiom (V) einer affinen Ebene eingesehen.

Wir kommen zum Parallelenaxiom (P). Seien $U \in \mathfrak{S}$, $v, w \in V$ mit $w \notin v + U$. Dann zeigt unsere Rechnung, daß $w + U$ die eindeutige Parallele zu $v + U$ durch w ist.

Es verbleibt das Reichhaltigkeitsaxiom (RD). Wegen $|\mathfrak{S}| \geq 3$ ist sicher $V \neq 0$. Also gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$. Nach (S3) existiert genau ein $U \in \mathfrak{S}$ mit $v \in U$. Es ist $0 \vee v = U$. Wäre $U = V$, so folgt mit (S3) sofort $\mathfrak{S} \subseteq \{\{0\}, V\}$; im Widerspruch zu (S1). Also ist $U \neq V$, und es gibt $w \in V \backslash U$. Damit sind $0, v, w$ drei verschiedene, nicht kollineare Punkte.

Also ist $\pi(\mathfrak{S})$ tatsächlich eine affine Ebene. Die Wirkung der additiven Gruppe von V bildet offenbar jede Gerade von $\pi(\mathfrak{S})$ auf eine parallele Gerade ab, d.h. sie besteht aus Translationen, wie wir in §5 eingesehen haben. Da die Wirkung von V auf V transitiv ist, ist V nach §5.Lemma 11 die volle Translationsgruppe, und $\pi(\mathfrak{S})$ ist eine affine Translationsebene.

■

Die beiden Konstruktionen (a) und (b) in diesem Lemma lassen sich recht leicht auch in die andere Richtung durchführen.

Lemma 8: *Seien $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V. Wähle einen Vektor $0 \neq e \in V$. Dann existiert für jedes $a \in V$ genau ein*

$\varphi(a) \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi(a)e = a$, und durch

$$\cdot : V \times V \to V; (a,b) \mapsto \varphi(a)b$$

wird $(V, +, \cdot)$ ein Quasikörper mit Null 0 und Eins e so, daß $\mathfrak{T}(V) = \mathfrak{T}$ ist.

Beweis: Sei $v \in V$. Nach (T3) existiert ein $A \in \mathfrak{T}$ mit $Ae = v$. Ist $B \in \mathfrak{T}$ ebenfalls mit $Be = v$, so ist $e \in \mathrm{Kern}(A - B)$ und wegen $e \neq 0$ ergibt (T2) sofort $B = A$. Wegen $0, \mathrm{id} \in \mathfrak{T}$ ist offenbar $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(e) = \mathrm{id}$.

Wir weisen jetzt die Axiome eines Quasikörpers nach.

(Q1) Daß $(V, +)$ eine Gruppe ist, ist klar.

(Q2) Für $x \in K$ gelten $0x = \varphi(0)x = 0$, $ex = \varphi(e)x = x$ und $xe = \varphi(x)e = x$.

(Q3) Seien $a, b \in V$ mit $a \neq 0$. Dann ist $\varphi(a)e = a \neq 0$, d.h. $\varphi(a) \neq 0$, und somit ist $\varphi(a) \in \mathrm{GL}(V)$, d.h. es existiert genau ein $x \in V$ mit $ax = \varphi(a)x = b$.

(Q4) Seien $a, b, c \in V$ mit $a \neq b$. Wegen $\varphi(a)e = a \neq b = \varphi(b)e$ ist $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, also $-\varphi(a) + \varphi(b) \in \mathrm{GL}(V)$ nach (T2), und somit existiert $x \in V$ mit $c = -\varphi(a)x + \varphi(b)x = -ax + bx$.

(Q5) Seien $a, b, c \in V$. Dann ist $\varphi(a) \in \mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}(V)$, d.h. $a(b + c) = \varphi(a)(b + c) = \varphi(a)b + \varphi(a)c = ab + ac$.

Also ist $(V, +, \cdot)$ ein Quasikörper. Für $a \in V$ gilt offenbar $L_a = \varphi(a)$, d.h. $\mathfrak{T}(V) \subseteq \mathfrak{T}$. Ist umgekehrt $A \in \mathfrak{T}$, so ist $A = \varphi(Ae) = L_{Ae} \in \mathfrak{T}(V)$, d.h. es gilt auch $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}(V)$.

■

Lemma 9: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K, und sei $\mathfrak{S}$ ein Spread in V. Wähle $X, Y \in \mathfrak{S}$ mit $X \neq Y$. Dann ist $V = X \oplus Y$, und wir bezeichnen die Projektionen mit $\pi : V \to X$, $\pi' : V \to Y$.*

Sei $U \in \mathfrak{S}$. Ist $U \neq Y$, so ist $\pi|U : U \to X$ ein Isomorphismus, und ist $U \neq X$, so ist $\pi'|U : U \to Y$ ein Isomorphismus. Wähle $W \in \mathfrak{S} \backslash \{X, Y\}$. Dann ist

$$\theta : W \times W \to V; (v, w) \mapsto \pi(v) + \pi'(w)$$

ein Isomorphismus, und

$$\mathfrak{T} := \{(\pi'|W)^{-1} \circ (\pi'|U) \circ (\pi|U)^{-1} \circ (\pi|W) : U \in \mathfrak{S} \backslash \{Y\}\}$$

ist ein Spreadset in W mit

$$\mathfrak{S} = \{\theta(A) : A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})\}.$$

Beweis: Sei $U \in \mathfrak{S}$ mit $U \neq Y$. Dann ist $V = U \oplus Y$, also insbesondere $\mathrm{Kern}(\pi|U) = \mathrm{Kern}(\pi) \cap U = Y \cap U = 0$. Ist $v \in X \subseteq V$, so existieren $w \in Y$, $u \in U$ mit $v = w + u$,

und es folgt $v = \pi(v) = \pi(w) + \pi(u) = \pi(u)$. Also ist $\pi|U : U \to X$ ein Isomorphismus. Ist $U \in \mathfrak{S}$ mit $U \neq X$, so folgt analog, daß $\pi'|U : U \to Y$ ein Isomorphismus ist.

Die Abbildung θ ist offenbar linear. Ist $(v, w) \in \mathrm{Kern}(\theta)$, so gilt $\pi(v) = -\pi'(w) \in X \cap Y = 0$, d.h. $\pi(v) = \pi'(w) = 0$, und die bereits bewiesene Aussage liefert $v = w = 0$. Ist $v \in V$ beliebig, so existieren $x \in X$, $y \in Y$ mit $v = x + y$. Weiter existieren $u, w \in W$ mit $x = \pi(u)$ und $y = \pi'(w)$, d.h. $\theta(u, w) = x + y = v$. Also ist θ ein Isomorphismus.

Sei $U \in \mathfrak{S}\backslash\{Y\}$. Wegen $U \neq Y$ ist $\pi|U : U \to X$ ein Isomorphismus, und wegen $W \neq X$ ist auch $\pi'|W : W \to Y$ ein Isomorphismus. Wir erhalten die lineare Abbildung

$$\Phi_U : W \xrightarrow{\pi|W} X \xrightarrow{(\pi|U)^{-1}} U \xrightarrow{\pi'|U} Y \xrightarrow{(\pi'|W)^{-1}} W.$$

Es gilt

$$\Phi_X = (\pi'|W)^{-1} \circ (\pi'|X) \circ (\pi|X)^{-1} \circ (\pi|W) = 0,$$

da $\pi'|X = 0$ ist. Weiter ist

$$\Phi_W = (\pi'|W)^{-1} \circ (\pi'|W) \circ (\pi|W)^{-1} \circ (\pi|W) = \mathrm{id}_W \circ \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_W.$$

Also erfüllt $\mathfrak{T}$ die Bedingung (T1) eines Spreadsets. Jetzt seien $U, T \in \mathfrak{S}\backslash\{Y\}$ mit $U \neq T$ gegeben. Setze $\Psi := \Phi_U - \Phi_T$. Wir wollen $\Psi \in \mathrm{GL}(W)$ zeigen. Sei $v \in V$ mit $\Psi v = 0$. Dann ist

$$\pi'\left((\pi|U)^{-1}(\pi(v))\right) - \pi'\left((\pi|T)^{-1}(\pi(v))\right) = 0,$$

d.h.

$$(\pi|U)^{-1}(\pi(v)) - (\pi|T)^{-1}(\pi(v)) \in \mathrm{Kern}(\pi') = X.$$

Andererseits ist

$$\pi\left((\pi|U)^{-1}(\pi(v)) - (\pi|T)^{-1}(\pi(v))\right) = \pi(v) - \pi(v) = 0,$$

d.h. $(\pi|U)^{-1}(\pi(v)) - (\pi|T)^{-1}(\pi(v)) = 0$, und somit ist $(\pi|U)^{-1}(\pi(v)) = (\pi|T)^{-1}(\pi(v)) \in U \cap T = 0$, d.h. $\pi(v) = 0$. Da $\pi|W$ ein Isomorphismus ist, folgt $v = 0$.

Jetzt sei $w \in W$. Setze $z := \pi'(w) \in Y$. Wegen $T \neq U$ ist $V = U \oplus T$, also existieren $u \in U$, $t \in T$ mit $z = u - t$. Setze $x := \pi(t) \in X$. Schließlich sei $v := (\pi|W)^{-1}(x) \in W$. Es ist $t + z = u \in U$ mit $\pi(t + z) = \pi(t) = x$, also

$$\begin{aligned}
\Psi v &= (\pi'|W)^{-1}\left(\pi'\left((\pi|U)^{-1}(\pi(v)) - (\pi|T)^{-1}(\pi(v))\right)\right) \\
&= (\pi'|W)^{-1}\left(\pi'\left((\pi|U)^{-1}(x) - (\pi|T)^{-1}(x)\right)\right) \\
&= (\pi'|W)^{-1}\left(\pi'\left(t + z - t\right)\right) \\
&= (\pi'|W)^{-1}(\pi'(z)) \\
&= (\pi'|W)^{-1}(z) \\
&= w.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\Psi \in \mathrm{GL}(V)$, also erfüllt $\mathfrak{T}$ auch (T2). Schließlich seien $v, w \in W$ mit $v \neq 0$. Nach Bedingung (S3) eines Spreads gibt es ein $U \in \mathfrak{S}$ mit $\pi(v) + \pi'(w) \in U$. Wäre

$U = Y$, so ist $\pi(v) = (\pi(v) + \pi'(w)) - \pi'(w) \in Y$, d.h. $\pi(v) \in X \cap Y = 0$, und somit ist $\pi(v) = 0$ und $v = 0$; ein Widerspruch. Also ist $U \neq Y$. Es folgt

$$\Phi_U v = (\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|U)^{-1}(\pi(v)))) = (\pi'|W)^{-1}(\pi'(\pi(v) + \pi'(w))) \\ = (\pi'|W)^{-1}(\pi'(w)) = w,$$

d.h. $\mathfrak{T}$ erfüllt auch (T3), und ist somit ein Spreadset.

Schließlich sei $U \in \mathfrak{S}\backslash\{Y\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \theta(\Phi_U) &= \{\pi(v) + \pi'(\Phi_U v) : v \in W\} \\ &= \{\pi(v) + \pi'((\pi|U)^{-1}(\pi(v))) : v \in W\} \\ &= \{v + \pi'((\pi|U)^{-1}v) : v \in X\} \\ &= \{\pi(v) + \pi'(v) : v \in U\} \\ &= U, \end{aligned}$$

und $\theta(\{0\} \times W) = \pi'(W) = Y$. Dies zeigt $\theta(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) = \mathfrak{S}$.

■

Mit unseren bisherigen Ergebnissen können wir leicht nachweisen, daß jede affine Translationsebene zu einer Translationsebene der Form $\pi(\mathfrak{S})$ isomorph ist.

Lemma 10: *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Quasikörper. Dann haben wir nach Lemma 7 den Spread*

$$\mathfrak{S}(K) := \mathfrak{S}(\mathfrak{T}(K))$$

im Vektorraum $K \times K$ über $\mathrm{Kern}(K)$. *Es gilt*

$$\pi(\mathfrak{S}(K)) = A(K).$$

Beweis: Seien $\mathfrak{L}$ die Geradenmenge von $\pi(\mathfrak{S}(K))$ und $\mathfrak{L}'$ die Geradenmenge von $A(K)$. Die affinen Ebenen $A(K)$ und $\pi(\mathfrak{S}(K))$ haben beide $K \times K$ als Punktmenge. Ist $c \in K$, so gilt

$$[c] = \{c\} \times K = (c, 0) + (\{0\} \times K) \in \mathfrak{L}.$$

Jetzt seien $s, t \in K$. Dann ist ebenfalls

$$[s, t] = \{(x, sx + t) : x \in K\} = (0, t) + \{(x, L_s x) : x \in K\} = (0, t) + L_s \in \mathfrak{L}.$$

Damit haben wir $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}$ eingesehen, und die Eindeutigkeit der Verbindungsgerade in $\pi(\mathfrak{S}(K))$ ergibt $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.

■

Satz 11: *Sei π eine affine Translationsebene. Dann existieren ein Schiefkörper K, ein Vektorraum V über K und ein Spread $\mathfrak{S}$ in V mit $\pi \simeq \pi(\mathfrak{S})$.*

Beweis: Nach §7.Satz 9 gibt es einen Quasikörper K mit $\pi \simeq A(K)$. Mit Lemma 10 folgt die Behauptung.

■

Ist K ein Quasikörper, so können wir nach Lemma 10 die affine Ebene $A(K)$ über K auch als $\pi(\mathfrak{S}(K))$ auffassen, wobei $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(K)$ ein Spread im Kern(K)-Vektorraum $V = K \times K$ ist. Gehen wir zu einem Unterschiefkörper $L \leq \text{Kern}(K)$ über, so wird $\mathfrak{S}$ offenbar auch zu einem Spread im L-Vektorraum V. Ist umgekehrt $\mathfrak{S}$ ein Spread in einem Vektorraum V über einem Schiefkörper L, so kann es vorkommen, daß L gar nicht der wirkliche Koordinatenbereich zu $\mathfrak{S}$ ist, d.h. es kann sein, daß L wie oben in einem größeren Schiefkörper enthalten ist so, daß V auch ein Vektorraum über dem größeren Schiefkörper ist und $\mathfrak{S}$ auch ein Spread in diesem Vektorraum ist. Um zu sehen, wie wir aus $\mathfrak{S}$ den natürlichen Schiefkörper ablesen können, wollen wir uns überlegen wie wir den Kern Kern(K) eines Quasikörpers aus dem Spread $\mathfrak{S}(K)$ rekonstruieren können.

Wir wollen uns dabei an Lemma 2.(a) orientieren. Hierzu bestimmen wir zunächst die Automorphismengruppe von $\pi(\mathfrak{S})$.

Satz 12: *Seien K, K' zwei Schiefkörper, V, V' Vektorräume über K beziehungsweise K' und $\mathfrak{S}$ ein Spread in V, $\mathfrak{S}'$ ein Spread in V'. Dann gelten:*

(a) *Eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V'$ mit $\varphi(0) = 0$ ist genau dann ein Isomorphismus $\pi(\mathfrak{S}) \to \pi(\mathfrak{S}')$, wenn $\varphi : (V, +) \to (V', +)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen mit $\varphi(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$ ist.*

(b) *Genau dann ist $\pi(\mathfrak{S}) \simeq \pi(\mathfrak{S}')$, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : (V, +) \to (V', +)$ mit $\varphi(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$ gibt.*

(c) *Ist $\Gamma := \text{Aut}(\pi(\mathfrak{S}))$, so ist*

$$\Gamma_0 = \{\varphi \in \text{Aut}(V, +) | \mathfrak{S}^\varphi = \mathfrak{S}\}.$$

Beweis: **(a)** "'$\Longrightarrow$"' Seien $v, w \in V$. Dann ist $\tau : V \to V; x \mapsto v + x$ nach Lemma 7.(c) eine Translation von $\pi(\mathfrak{S})$. Also ist auch $\psi := \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ eine Translation von $\pi(\mathfrak{S}')$, und wieder nach Lemma 7.(c) existiert $u \in V'$ mit $\psi(x) = u + x$ für alle $x \in V'$. Es folgt

$$u = u + 0 = \psi(0) = \varphi(\tau(\varphi^{-1}(0))) = \varphi(\tau(0)) = \varphi(v),$$

und weiter

$$\varphi(v) + \varphi(w) = u + \varphi(w) = \psi(\varphi(w)) = \varphi(\tau(w)) = \varphi(v + w).$$

Also ist $\varphi : (V, +) \to (V', +)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Da $\mathfrak{S}$ beziehungsweise $\mathfrak{S}'$ nach Lemma 7.(c) die Menge der Geraden durch 0 in $\pi(\mathfrak{S})$ beziehungsweise $\pi(\mathfrak{S}')$ ist, folgt auch $\varphi(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$.

"$\Longleftarrow$" Seien $U \in \mathfrak{S}$, $v \in V$. Dann gelten $\varphi(U) \in \mathfrak{S}'$ und $\varphi(v+U) = \varphi(v) + \varphi(U)$, d.h. φ bildet Geraden von $\pi(\mathfrak{S})$ auf Geraden von $\pi(\mathfrak{S}')$ ab. Nach §1.Lemma 3 ist $\varphi : \pi(\mathfrak{S}) \to \pi(\mathfrak{S}')$ ein Isomorphismus.
(b) "$\Longrightarrow$" Sei $\psi : \pi(\mathfrak{S}) \to \pi(\mathfrak{S}')$ ein Isomorphismus. Dann ist $\tau : V' \to V'; x \mapsto x - \psi(0)$ eine Translation von $\pi(\mathfrak{S}')$, und somit ist $\varphi := \tau \circ \psi : \pi(\mathfrak{S}) \to \pi(\mathfrak{S}')$ ein Isomorphismus mit $\varphi(0) = \psi(0) - \psi(0) = 0$. Nach (a) ist $\varphi : (V,+) \to (V',+)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen mit $\varphi(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$.
"$\Longleftarrow$" Dies ist klar nach (a).
(c) Dies ist wieder klar nach (a).

■

Beachte das in diesem Satz die Vektorraumstruktur von V und V' nicht verwendet wird. Dies ist auch nicht zu erwarten, da wir oben schon gesehen haben, daß die Wahl von K beziehungsweise K' als Skalarenbereich etwas willkürlich ist. Allerdings respektieren Isomorphismen $\pi(\mathfrak{S}) \to \pi(\mathfrak{S}')$ die natürliche Vektorraumstruktur von V und V'. Um diese zu bestimmen, denken wir uns einen Quasikörper K gegeben, und wie schon erwähnt wollen wir versuchen den Kern von K aus dem Spread $\mathfrak{S}(K)$ abzulesen. Dies führt auf das folgende Lemma, in dem der Endomorphismenring einer abelschen Gruppe eine Rolle spielt. Dieser Ring ist folgendermaßen definiert.

Sei A eine abelsche Gruppe, und betrachte die Menge

$$\mathrm{End}(A) := \{\varphi : A \to A | \varphi \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus}\}$$

aller Endomorphismen von A. Da A abelsch ist, ist die punktweise Summe zweier Endomorphismen wieder ein Endomorphismus, und $\mathrm{End}(A)$ wird so selbst zu einer abelschen Gruppe. Versehen wir $\mathrm{End}(A)$ noch mit der Hintereinanderausführung als Multiplikation, so wird $\mathrm{End}(A)$ offenbar ein Ring. Durch $a\varphi := a^{\varphi} = \varphi(a)$ ($a \in A$, $\varphi \in \mathrm{End}(A)$) können wir A als einen Modul über dem Ring $\mathrm{End}(A)$ auffassen.

Lemma 13: *Sei $(K,+,\cdot)$ ein Quasikörper, und sei $V := K \times K$ aufgefasst als Vektorraum über $\mathrm{Kern}(K)$. Dann ist die Abbildung*

$$R : \mathrm{Kern}(K) \to \mathrm{End}(V,+); a \mapsto R_a : V \to V; v \mapsto va$$

ein injektiver Ringhomomorphismus, dessen Bild genau

$$\{\varphi \in \mathrm{End}(V,+) \,|\forall (U \in \mathfrak{S}(K)) : U^{\varphi} \subseteq U\}$$

ist. Ist $\Gamma = \mathrm{Aut}(A(K))$, so ist

$$\mathrm{Bild}(R)\backslash\{0\} = \Gamma_{[[\infty],(0,0)]}.$$

Beweis: Da V ein Vektorraum über $\mathrm{Kern}(K)$ ist, ist $R : \mathrm{Kern}(K) \to \mathrm{End}(V,+)$ ein Ringhomomorphismus. Für $a \in \mathrm{Kern}(K)$ gilt $R_a(1,1) = (1,1)a = (a,a)$, und insbesondere ist R injektiv.

Setze

$$E := \{\varphi \in \mathrm{End}(V,+) | \forall (U \in \mathfrak{S}(K)) : \varphi(U) \subseteq U\}.$$

Dann müssen wir noch $\mathrm{Bild}(R) = E = \Gamma_{[[\infty],(0,0)]} \cup \{0\}$ zeigen.
$(\mathrm{Bild}(R) \subseteq E)$ Sei $a \in \mathrm{Kern}(K)$. Offenbar gilt $R_a(\{0\} \times K) \subseteq \{0\} \times K$. Ist $c \in K$, so haben wir

$$R_a(L_c) = R_a(\{(x, cx) : x \in K\}) = \{(xa, (cx)a) : x \in K\} = \{(xa, c(xa)) : x \in K\} \subseteq L_c.$$

Also ist $R_a(U) \subseteq U$ für jedes $U \in \mathfrak{S}(K)$, d.h. $R_a \in E$.
$(E \subseteq \Gamma_{[[\infty],(0,0)]} \cup \{0\})$ Sei $\varphi \in E$. Wegen $K \times \{0\} = L_0 \in \mathfrak{S}(K)$ ist $\varphi(1,0) \in \varphi(K \times \{0\}) \subseteq K \times \{0\}$, d.h. es existiert ein $a \in K$ mit $\varphi(1,0) = (a,0)$. Sei $y \in K$. Wegen $\{0\} \times K \in \mathfrak{S}(K)$ ist auch $\varphi(0,y) \in \{0\} \times K$, d.h. $\varphi(0,y) = (0,z)$ für ein $z \in K$. Weiter haben wir

$$(a,z) = (a,0) + (0,z) = \varphi(1,0) + \varphi(0,y) = \varphi(1,y) = \varphi(1,y1) \in \varphi(L_y) \subseteq L_y,$$

d.h. $z = ya$. Dies zeigt $\varphi(0,y) = (0,ya)$. Sei $x \in K$. Dann existiert wieder ein $z \in K$ mit $\varphi(x,0) = (z,0)$ und

$$(z, xa) = \varphi(x,0) + \varphi(0,x) = \varphi(x,x) \in \varphi(L_1) \subseteq L_1,$$

d.h. $xa = z$ und somit $\varphi(x,0) = (xa,0)$. Für $x,y \in K$ folgt somit $\varphi(x,y) = \varphi(x,0) + \varphi(0,y) = (xa,0) + (0,ya) = (xa,ya)$. Ist $a = 0$, so ist auch $\varphi = 0$. Jetzt sei $a \neq 0$. Nach Axiom (Q3) eines Quasikörpers ist φ dann bijektiv, d.h. $\varphi \in \mathrm{Aut}(V,+)$ und somit $\varphi \in \Gamma_{(0,0)}$ nach Satz 12.(c). Da die Geraden durch 0 genau die Elemente von $\mathfrak{S}(K)$ sind, hält φ jede Gerade durch 0 fest, d.h. $\varphi \in \Gamma_{[[\infty],(0,0)]}$.
$(\Gamma_{[[\infty],(0,0)]} \cup \{0\} \subseteq \mathrm{Bild}(R))$ Dies ist klar nach Lemma 2.(a).

■

Dieses Lemma läßt sich nun leicht auf allgemeine Spreads ausdehnen.

Satz 14: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{S}$ ein Spread in V. Dann ist*

$$\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) := \{\varphi \in \mathrm{End}(V,+) | \forall (U \in \mathfrak{S}) : U^\varphi \subseteq U\} \subseteq \mathrm{Aut}(V,+) \cup \{0\}$$

ein Unterschiefkörper von $\mathrm{End}(V,+)$. *Durch $v\varphi := v^\varphi$ wird V ein Vektorraum über* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ *und $\mathfrak{S}$ ist auch ein Spread in diesem Vektorraum. Die natürliche Einbettung $K \to \mathrm{End}(V,+)$ macht K zu einem Unterschiefkörper von* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$. *Ist $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi(\mathfrak{S}))$, so ist die multiplikative Gruppe von* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ *genau $\Gamma_{[[\infty],0]}$, und es gilt*

$$\Gamma_0 = \{\varphi \in \Gamma\mathrm{L}_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})}(V) : \mathfrak{S}^\varphi = \mathfrak{S}\}$$

Sind V' ein weiterer Vektorraum über einem Schiefkörper K' und sind $\mathfrak{S}'$ ein Spread in V' und $\varphi : \pi(\mathfrak{S}) \to \pi(\mathfrak{S}')$ ein Isomorphismus mit $\varphi(0) = 0$, so existiert ein Isomorphismus $\gamma : \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}')$ von Schiefkörpern mit $\varphi(va) = \varphi(v)\gamma(a)$ für alle $v \in V$, $a \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$.

Beweis: Nach Lemma 9 gibt es einen Vektorraum L über K, ein Spreadset $\mathfrak{T}$ in L und einen Vektorraumisomorphismus $\theta : L \times L \to V$ mit $\mathfrak{S} = \theta(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}))$. Weiter gibt es nach Lemma 8 eine Multiplikation $\cdot : L \times L \to L$ so, daß $(L, +, \cdot)$ ein Quasikörper mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(L)$ ist. Da $\theta : (L \times L, +) \to (V, +)$ insbesondere ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist, ist

$$\psi : \mathrm{End}(L \times L, +) \to \mathrm{End}(V, +); \varphi \mapsto \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}$$

ein Ringisomorphismus, und $\theta : \pi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) \to \pi(\mathfrak{S})$ ist nach Satz 12.(a) ein Isomorphismus affiner Ebenen. Für $\varphi \in \mathrm{End}(L \times L, +)$ ist

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi) \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) &\iff \forall (U \in \mathfrak{S}) : U^{\psi(\varphi)} \subseteq U \\
&\iff \forall (U \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})) : \theta(U)^{\psi(\varphi)} \subseteq \theta(U) \\
&\iff \forall (U \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})) : \theta(\varphi(\theta^{-1}(\theta(U)))) \subseteq \theta(U) \\
&\iff \forall (U \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})) : \theta(U^{\varphi}) \subseteq \theta(U) \\
&\iff \forall (U \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})) : U^{\varphi} \subseteq U,
\end{aligned}$$

d.h. $\psi(\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}))) = \mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$.

Nach Lemma 13 ist $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ ein zum Kern von L isomorpher Schiefkörper und es gilt $\Gamma_{[[\infty],0]} = \mathrm{Kern}(\mathfrak{S})\backslash\{0\}$. Daß V ein Vektorraum über $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ wird und $\mathfrak{S}$ ein Spread in diesem Vektorraum ist, ist klar. Da $\mathfrak{S}$ aus K-Teilräumen besteht, wird K auch ein Unterschiefkörper von $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$.

Wir kommen jetzt zur Aussage über Isomorphismen. Seien also $V', K', \mathfrak{S}', \varphi$ wie im Satz. Nach Satz 12.(a) ist $\varphi : (V, +) \to (V', +)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen mit $\varphi(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$. Genau wie oben θ induziert φ einen Ringisomorphismus $\mathrm{End}(V, +) \to \mathrm{End}(V', +)$ und die Einschränkung $\gamma : \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}')$ ist ein Isomorphismus von Schiefkörpern. Für $v \in V$, $a \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ gilt

$$\varphi(va) = \varphi(a(v)) = \varphi(a(\varphi^{-1}(\varphi(v)))) = \gamma(a)(\varphi(v)) = \varphi(v)\gamma(a).$$

Zusammen mit Satz 12.(c) folgt schließlich

$$\Gamma_0 = \{\varphi \in \Gamma\mathrm{L}_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})}(V) : \mathfrak{S}^{\varphi} = \mathfrak{S}\}.$$

■

Insbesondere können wir in Termen des Kerns eines Spreads leicht entscheiden, ob die affine Ebene $\pi(\mathfrak{S})$ desarguesch ist.

Korollar 15: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{S}$ ein Spread in V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die affine Ebene $\pi(\mathfrak{S})$ ist desarguesch.*

(b) *V ist als Vektorraum über* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ *zweidimensional.*

(c) *Jedes* $U \in \mathfrak{S}$ *ist über* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ *eindimensional.*

Beweis: **(a)$\Longrightarrow$(c):** Sei $U \in \mathfrak{S}$. Dann ist U eine Gerade durch Null in $\pi(\mathfrak{S})$ und nach §6.Satz 7 ist $\overline{\pi(\mathfrak{S})}$ $([\infty], 0)$-transitiv. Nach Satz 14 ist $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})\backslash\{0\}$ genau die Gruppe der Kollineationen von $\pi(\mathfrak{S})$ mit Zentrum 0, und diese wirkt transitiv auf $U\backslash\{0\}$. Also wird U über $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ von einem Element erzeugt, d.h. $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})} U = 1$.
(c)$\Longrightarrow$(b): Sind $X, Y \in \mathfrak{S}$ mit $X \neq Y$, so ist $V = X \oplus Y$ über $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$, d.h. $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})} V = 1 + 1 = 2$.
(b)$\Longrightarrow$(a): Für $U \in \mathfrak{S}$ gilt $0 \neq U \neq V$, d.h. $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})} U = 1$. Es folgt $\pi(\mathfrak{S}) = \mathrm{AG}_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})}(V)$, d.h. $\overline{\pi(\mathfrak{S})} \simeq \overline{\mathrm{AG}_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})}(V)} \simeq \mathrm{PG}(V \oplus \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}))$ ist desarguesch nach §6.Lemma 3.

■

Mit diesem Korollar erhält man auch leicht die folgende Aussage. Der eigentliche Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Korollar 16: *Sei* π *eine endliche Translationsebene, deren Ordnung eine Primzahl ist. Dann ist* π *desarguesch.*

Wie in den Aufgaben zu diesem Paragraphen festgehalten, ist die Ordnung einer endlichen Translationsebene immer eine Primpotenz. Wie sehen endliche Translationsebenen aus? Durch Ableiten an einer Translationsachse können wir genausogut endliche affine Translationsebenen betrachten. Nach Satz 11 haben solche Ebenen, bis auf Isomorphie, die Form $\pi(\mathfrak{S})$ wobei $\mathfrak{S}$ ein Spread in einem Vektorraum V über einem Schiefkörper K ist. Nun ist V die Punktmenge von $\pi(\mathfrak{S})$, also ist V eine endliche Menge von Primpotenzordnung. Damit muß auch der Schiefkörper K endlich sein, und nach dem Satz von Wedderburn ist K ein Körper, also $K = \mathrm{GF}(q)$ für eine Primpotenz q. In den Aufgaben wird gezeigt, daß die Dimension von V gerade ist, also $\dim V = 2n$ für ein $n \geq 1$ und $\mathfrak{S}$ besteht aus n-dimensionalen Teilräumen von V. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind die Geraden von $\pi := \pi(\mathfrak{S})$ durch 0, also hat π die Ordnung q^n. Ebenfalls in den Aufgaben wird $|\mathfrak{S}| = q^n + 1$ gezeigt.

Was können wir nun über $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ beziehungsweise Γ_0 sagen? Nach Satz 14 sind die Elemente von Γ_0 semilinear über dem Kern von $\mathfrak{S}$, aber im endlichen Fall können wir mehr aussagen.

Lemma 17: *Seien* q *eine Primpotenz,* $n \geq 1$ *und* V *ein Vektorraum über* $\mathrm{GF}(q)$ *mit* $\dim V = 2n$. *Sei* $\mathfrak{S}$ *ein Spread in* V, *und setze* $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi(\mathfrak{S}))$. *Dann ist*

$$\Gamma_0 = \{\varphi \in \Gamma\mathrm{L}(V) : \mathfrak{S}^\varphi = \mathfrak{S}\},$$

und es ist $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) \simeq \mathrm{GF}(q^m)$ *für* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m|n$.

Beweis: Ist $L := \mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$, so wird V nach Satz 14 ein Vektorraum über L, $\mathfrak{S}$ ist ein Spread in diesem Vektorraum und $\Gamma_0 = \{\varphi \in \Gamma\mathrm{L}_L(V) : \mathfrak{S}^\varphi = \mathfrak{S}\}$. Weiter wird $\mathrm{GF}(q)$

ein Unterkörper von L. Da V endlich ist, ist L ein endlicher Körper, der $\mathrm{GF}(q)$ als Unterkörper enthält, also $L = \mathrm{GF}(q^m)$ für ein $m \geq 1$. Wegen

$$q^{2n} = |V| = |L|^{\dim_L V} = q^{m \dim_L V}$$

ist $m \dim_L V = 2n$. Nun ist auch $\dim_L V$ gerade, d.h. $m|n$. Schließlich ist $\mathrm{GF}(q) = \{a \in \mathrm{GF}(q^m) : a^q = a\}$ invariant unter allen Automorphismen von $\mathrm{GF}(q^m)$, und somit sind die Elemente von Γ_0 auch semilinear über $\mathrm{GF}(q)$.

■

Ein schon seit langem verfolgtes Projekt ist der Versuch alle endlichen Translationsebenen π zu klassifizieren, deren Ordnung q^2 ist und deren Kern $\mathrm{GF}(q)$ enthält, wobei q eine Primpotenz ist. Eine solche Ebene ist isomorph zu einer Ebene $\pi(\mathfrak{S})$ wobei $\mathfrak{S}$ ein Spread in einem vierdimensionalen Vektorraum über $\mathrm{GF}(q)$ ist. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind dann zweidimensional. Dies ist bislang nicht vollständig gelungen, und es scheint auch zu viele derartige Ebenen zu geben, so daß eine vollständige Klassifikation wahrscheinlich nicht zu erreichen ist. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an die volle Kollineationsgruppe gibt es durchaus positive Ergebnisse.

Insbesondere stellt sich dieses Problem wenn $q = p$ eine Primzahl ist. Ist π eine Translationsebene der Ordnung p^2, so können wir nach Satz 11 gleich $\pi = \pi(\mathfrak{S})$ für einem Spread $\mathfrak{S}$ in einem Vektorraum V annehmen. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind Vektorräume über $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S})$ und haben p^2 Elemente. Also ist $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) = \mathrm{GF}(p^2)$ oder $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}) = \mathrm{GF}(p)$. Im ersten Fall ist π nach Korollar 15 desarguesch. Also interessieren wir uns für Spreads in einem vierdimensionalen Vektorraum über $\mathrm{GF}(p)$, deren Elemente zweidimensional sind, und deren Kern genau $\mathrm{GF}(p)$ ist. Auch diese Problem ist nicht vollständig gelöst.

Wir wollen uns einmal den kleinsten Fall $p = 2$ anschauen, d.h. wir betrachten Translationsebenen der Ordnung 4. Sei also $K = \mathrm{GF}(2)$, $V = K^4$. Ein Spread $\mathfrak{S}$ in V hat genau $|\mathfrak{S}| = 5$ Elemente. Nach Lemma 9 können wir die Basis von V so legen, daß

$$\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_3, e_4\rangle, \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4\rangle \in \mathfrak{S}$$

ist. Der Vektor $e_1 + e_4$ liegt in keinem dieser drei Teilräume, also gibt es ein weiteres Element U von $\mathfrak{S}$ mit $e_1 + e_4 \in U$. Da $U \cap \langle e_3, e_4\rangle = 0$ ist, können wir $U = \langle e_1 + e_4, e_2 + ae_3 + be_4\rangle$ mit $a, b \in \mathrm{GF}(2)$ schreiben. Wegen $U \cap \langle e_1, e_2\rangle = 0$ sind $(0, 1)$ und (a, b) linear unabhängig, d.h. $a \neq 0$ und somit ist $a = 1$. Wegen $U \cap \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4\rangle = 0$ ist $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \notin U$, also $b \neq 0$ und somit ist auch $b = 1$. Also haben wir

$$\langle e_1 + e_4, e_2 + e_3 + e_4\rangle \in \mathfrak{S}.$$

Ebenso folgt $\langle e_2 + e_3, e_1 + e_3 + e_4\rangle \in \mathfrak{S}$, d.h. wir haben

$$\mathfrak{S} = \{\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_3, e_4\rangle, \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4\rangle, \langle e_1 + e_4, e_2 + e_3 + e_4\rangle, \langle e_2 + e_3, e_1 + e_3 + e_4\rangle\}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß es bis auf Äquivalenz unter $\mathrm{GL}(4, 2) := \mathrm{GL}_4(\mathrm{GF}(2))$ genau einen solchen Spread gibt. Insbesondere muß dies der Spread sein, der zur desargueschen Ebene führt, d.h. Translationsebenen der Ordnung 4 sind desarguesch.

Wie schon in §3 bemerkt, sind sogar alle projektiven Ebenen der Ordnung 4 desarguesch. In den Aufgaben zu §11 ist übrigens ein einfacher Beweis dieser Tatsache enthalten.

Schon der nächste Fall $p = 3$ ist schwerer. Es ist sinnvoll anstelle von Spreads Spreadsets zu betrachten. In der Tat sind Spreadsets rechnerisch häufig leichter zu behandeln als Spreads, da es sich im endlichdimensionalen Fall ja einfach um Mengen von Matrizen handelt. Allerdings wird das Isomorphieproblem etwas unhandlicher. Dies ist auch von vornherein zu erwarten, da wir bei unserer Konstruktion eines Spreadsets aus einem gegebenen Spread heraus in Lemma 9 schon gesehen haben, daß dies die Wahl dreier Elemente des Spreads erfordert. Insbesondere haben wir nur Isomorphismen gut im Griff, die diese getroffene Auswahl respektieren. Wir beginnen mit einem nützlichen kleinen Lemma. Dabei schreiben wir

$$\Delta_X := \mathrm{id}_X = \{(x,x) : x \in X\}$$

für jede Menge X.

Lemma 18: *Seien V, W zwei abelsche Gruppen. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi_{VW} : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V \oplus V, W \oplus W); \varphi \mapsto \varphi \oplus \varphi$$

ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen mit

$$\mathrm{Bild}(\Phi_{VW}) = \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}(V \oplus V, W \oplus W) : \begin{array}{l} \varphi(V \times \{0\}) \subseteq W \times \{0\},\ \varphi(\Delta_V) \subseteq \Delta_W \\ \textit{und } \varphi(\{0\} \times V) \subseteq \{0\} \times W, \end{array} \right\}.$$

Weiter ist $\Phi_V := \Phi_{VV} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V \oplus V)$ auch ein Ringhomomorphismus.

Beweis: Daß Φ_{VW} ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen ist, dessen Bild in der angegebenen Menge liegt, ist klar. Ist umgekehrt $\theta : V \oplus V \to W \oplus W$ ein Homomorphismus mit $\theta(V \times \{0\}) \subseteq W \times \{0\}$, $\theta(\{0\} \times V) \subseteq \{0\} \times W$ und $\theta(\Delta_V) \subseteq \Delta_W$, so haben wir zwei Homomorphismen $\varphi, \psi : V \to W$ mit $(\varphi(v), 0) = \theta(v, 0)$ und $(0, \psi(v)) = \theta(0, v)$ für alle $v \in V$. Für $v, w \in V$ gilt jetzt

$$(\varphi(v), \psi(w)) = (\varphi(v), 0) + (0, \psi(w)) = \theta(v,0) + \theta(0,w) = \theta(v,w),$$

d.h. $\theta = \varphi \oplus \psi$. Weiter folgt für jedes $v \in V$

$$(\varphi(v), \psi(v)) = \theta(v,v) \in \theta(\Delta_V) \subseteq \Delta_W,$$

d.h. $\varphi(v) = \psi(v)$, und somit sind $\psi = \varphi$ und $\theta = \varphi \oplus \varphi = \Phi_{VW}(\varphi)$. Damit ist die erste Hälfte des Lemmas bewiesen. Daß Φ_V sogar ein Ringhomomorphismus ist, ist wieder klar.

■

Ist $\mathfrak{T}$ ein Spreadset, so schreiben wir

$$\pi(\mathfrak{T}) := \pi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}))$$

für die zugehörige affine Translationsebene. Für $v \in V$ schreiben wir $[v] := \{v\} \times V$, und für $\alpha \in \mathfrak{T}$, $v \in V$ sei

$$[\alpha, v] := (0, v) + \alpha = \{(w, w^\alpha + v) : w \in V\}.$$

Dann ist offenbar

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{T}) := \{[v] : v \in V\} \cup \{[\alpha, v] : \alpha \in \mathfrak{T}, v \in V\}$$

die Geradenmenge der affinen Ebene $\pi(\mathfrak{T})$. Die Ferngerade des projektiven Abschluß $\overline{\pi(\mathfrak{T})}$ sei wieder $[\infty]$, und es seien (∞) der Fernpunkt auf der Geraden $\{0\} \times V = [0]$ sowie (α) der Fernpunkt der Geraden $\alpha = [\alpha, 0]$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{T}$.

Wir hatten den Begriff des Kerns eines Quasikörpers in Satz 14 für Spreads interpretiert, und wollen diesen Kern nun aus einem Spreadset ablesen. Beachte hierzu das wir die Algebra der Endomorphismen eines Vektorraums auch als Unterring des Endomorphismenrings der dem Vektorraum unterliegenden abelschen Gruppe auffassen können.

Satz 19: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V. Dann ist*

$$\mathrm{Kern}(\mathfrak{T}) := C_{\mathrm{End}(V,+)}\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{Aut}(V,+) \cup \{0\}$$

ein Unterschiefkörper des Endomorphismenrings $\mathrm{End}(V,+)$*, und die Abbildung* $\Phi_V : \mathrm{End}(V,+) \to \mathrm{End}(V \oplus V,+)$ *aus Lemma 18 induziert einen Isomorphismus*

$$\Phi_V : \mathrm{Kern}(\mathfrak{T}) \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})).$$

Weiter ist V ein Vektorraum über $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$*, und es ist*

$$\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})}(V),$$

d.h. $\mathfrak{T}$ ist auch ein Spreadset im $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$*-Vektorraum V. Die natürliche Einbettung $K \to \mathrm{End}(V,+)$ macht K zu einem Unterschiefkörper von* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$.

Beweis: Nach Lemma 18 ist $\Sigma := \mathrm{Bild}(\Phi_V)$ ein Unterring von $\mathrm{End}(V \oplus V,+)$ und $\Phi_V : \mathrm{End}(V,+) \to \Sigma$ ist ein Ringisomorphismus. Wegen $0, 1 \in \mathfrak{T}$ ist $V \times \{0\}, \{0\} \times V, \Delta_V \in \mathfrak{S}(\mathfrak{T})$, d.h. es ist $\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) \subseteq \Sigma$ nach Definition des Kerns von $\mathfrak{S}(\mathfrak{T})$. Also ist nach Satz 14 nur zu zeigen, daß $\Phi_V^{-1}(\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})))$ genau die angegebene Menge ist.

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V,+)$. Sei $\alpha \in \mathfrak{T}$. Dann gilt

$$\Phi_V(\varphi)(\alpha) = (\varphi \oplus \varphi)(\{(v, \alpha(v)) : v \in V\}) = \{(\varphi(v), \varphi(\alpha(v))) : v \in V\}.$$

Also ist genau dann $\Phi_V(\varphi)(\alpha) \subseteq \alpha$, wenn $\varphi(\alpha(v)) = \alpha(\varphi(v))$ für alle $v \in V$ gilt, d.h. wenn $\varphi\alpha = \alpha\varphi$ ist. Damit ist genau dann $\Phi_V(\varphi) \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}))$, wenn φ den Spreadset $\mathfrak{T}$ zentralisiert.

Da V ein Modul über $\mathrm{End}(V,+)$ ist, wird V zu einem Vektorraum über $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$. Die restlichen Aussagen sind klar.

■

Korollar 20: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V. Dann wirkt die multiplikative Gruppe* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})\backslash\{0\}$ *frei auf* $V\backslash\{0\}$. *Weiter sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Gruppe* $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})\backslash\{0\}$ *wirkt transitiv auf* $V\backslash\{0\}$.

(b) *Es ist* $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})} V = 1$.

(c) *Die affine Ebene $\pi(\mathfrak{T})$ ist desarguesch.*

Beweis: Die erste Aussage ist klar, da V ein Vektorraum über dem Schiefkörper $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$ ist.
(a)$\Longleftrightarrow$(b): Klar nach Definition der $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$-Vektorraumstruktur.
(b)$\Longleftrightarrow$(c): Genau dann ist $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})} V = 1$ wenn $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})}(V \oplus V) = 2$ ist, und dies ist nach Satz 19 gleichwertig zu $\dim_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}))}(V \oplus V) = 2$. Mit Korollar 15 folgt die Behauptung.

■

Korollar 21: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V. Ist $\mathfrak{T}$ kommutativ, so ist $\mathfrak{T} = \mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$ ein Unterkörper von $\mathrm{End}_K(V)$, K ist ein Körper und die affine Ebene $\pi(\mathfrak{T})$ ist desarguesch.*

Beweis: Da $\mathfrak{T}$ kommutativ ist, haben wir $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$. Nach Bedingung (T3) eines Spreadsets ist schon die Menge $\mathfrak{T}\backslash\{0\}$ transitiv auf $V\backslash\{0\}$, also wirkt auch $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})\backslash\{0\} \supseteq \mathfrak{T}\backslash\{0\}$ transitiv auf $V\backslash\{0\}$. Nach Korollar 20 ist $\pi(\mathfrak{T})$ desarguesch und $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})\backslash\{0\} = \mathfrak{T}\backslash\{0\}$, da die Wirkung von $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})\backslash\{0\}$ auf $V\backslash\{0\}$ frei ist. Insbesondere ist $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$ kommutativ, und da K nach Satz 19 isomorph zu einem Unterschiefkörper von $\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$ ist, ist auch K kommutativ.

■

Jetzt bestimmen wir Isomorphismen, die unsere drei ausgezeichneten Geraden durch den Nullpunkt respektieren.

Satz 22: *Seien V, V' Vektorräume über Schiefkörpern K, K' und seien $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V und $\mathfrak{T}'$ eines in V'. Ist $\varphi : (V,+) \to (V',+)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen mit*

$$\mathfrak{T}' = \{\varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1} : \alpha \in \mathfrak{T}\},$$

so ist $\psi := \Phi_{VV'}(\varphi) : \pi(\mathfrak{T}) \to \pi(\mathfrak{T}')$ ein Isomorphismus mit $\psi(0,0) = (0,0)$, $\psi(0) = (0)$, $\psi(1) = (1)$ und $\psi(\infty) = (\infty)$. Weiter gibt es einen Isomorphismus $\gamma : \mathrm{Kern}(\mathfrak{T}) \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{T}')$ mit $\varphi(va) = \varphi(v)\gamma(a)$ für alle $v \in V$, $a \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$. Umgekehrt ist jeder Isomorphismus $\psi : \pi(\mathfrak{T}) \to \pi(\mathfrak{T}')$ mit $\psi(0,0) = (0,0)$, $\psi(0) = (0)$, $\psi(1) = (1)$ und $\psi(\infty) = (\infty)$ von dieser Gestalt.

Ist $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi(\mathfrak{T}))$*, so gilt*

$$\Gamma_{(0,0),(0),(1),(\infty)} = \left\{\Phi_V(\varphi) : \varphi \in N_{\Gamma\mathrm{L}_{\mathrm{Kern}(\mathfrak{T})}(V)}\mathfrak{T}\right\}.$$

Beweis: Sei $\varphi : (V,+) \to (V',+)$ ein Isomorphismus mit der angegebenen Eigenschaft. Dann ist $\psi : (V \oplus V,+) \to (V' \oplus V',+)$ ein Gruppenisomorphismus mit $\psi([0]) = [0]$, $\psi([0,0]) = [0,0]$ und $\psi([1,0]) = [1,0]$. Für jedes $\alpha \in \mathfrak{T}$ gilt

$$\psi(\alpha) = \{(\varphi(v), \varphi(\alpha(v))) : v \in V\} = \{(v, \varphi(\alpha(\varphi^{-1}(v)))) : v \in V'\} = \varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1},$$

d.h. es ist $\psi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{T}')$. Nach Satz 12.(a) ist $\psi : \pi(\mathfrak{T}) = \pi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) \to \pi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}')) = \pi(\mathfrak{T}')$ ein Isomorphismus affiner Ebenen, und offenbar gelten $\psi(0) = (0)$, $\psi(1) = (1)$ und $\psi(\infty) = (\infty)$.

Nach Satz 14 haben wir einen Isomorphismus $\delta : \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}'))$ mit $\psi(va) = \psi(v)\delta(a)$ für alle $v \in V \oplus V$, $a \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{S}(\mathfrak{T}))$. Mit Satz 19 erhalten wir den Isomorphismus

$$\gamma := \Phi_{V'}^{-1} \circ \delta \circ \Phi_V : \mathrm{Kern}(\mathfrak{T}) \to \mathrm{Kern}(\mathfrak{T}'),$$

Für $v \in V$, $a \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{T})$ haben wir

$$\begin{aligned}(\varphi(v)\gamma(a), \varphi(v)\gamma(a)) = \Phi_{V'}(\gamma(a))(\psi(v,v)) = \psi(v,v)\delta(\Phi_V(a)) = \psi((v,v)\Phi_V(a)) \\ = \psi(va,va) = (\varphi(va), \varphi(va)),\end{aligned}$$

d.h. $\varphi(va) = \varphi(v)\gamma(a)$.

Sei jetzt umgekehrt $\psi : \pi(\mathfrak{T}) \to \pi(\mathfrak{T}')$ ein Isomorphismus mit $\psi(0,0) = (0,0)$, $\psi(0) = (0)$, $\psi(1) = (1)$ und $\psi(\infty) = (\infty)$. Nach Satz 12 ist $\psi : (V \oplus V,+) \to (V' \oplus V',+)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen mit $\psi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{T}')$. Wegen $[0] = (0,0) \vee (\infty)$, $[0,0] = (0,0) \vee (0)$ und $[1,0] = (0,0) \vee (1)$ ist $\psi([0]) = [0]$, $\psi([0,0]) = [0,0]$ und $\psi([1,0]) = [1,0]$, und mit Lemma 18 erhalten wir einen Isomorphismus $\varphi : (V,+) \to (V',+)$ mit $\psi = \Phi_{VV'}(\varphi)$. Wegen

$$\{\varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1} : \alpha \in \mathfrak{T}\} \cup \{\{0\} \times V'\} = \psi(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{T}') = \mathfrak{T}' \cup \{\{0\} \times V'\},$$

ist auch $\{\varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1} : \alpha \in \mathfrak{T}\} = \mathfrak{T}'$.

Die letzte Aussage ist gerade der Spezialfall $K = K'$, $V = V'$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$.

■

Damit haben wir Isomorphismen im Griff, die die drei Geraden $[0]$, $[0,0]$ und $[1,0]$ erhalten. Insbesondere liefern zwei Spreadsets in einem Vektorraum V, die in $\Gamma\mathrm{L}(V)$ konjugiert sind, stets isomorphe affine Translationsebenen. Wir wollen jetzt noch einige Transformationen eines Spreadsets anführen, die zu isomorphen Translationsebenen führen aber diese drei Geraden nicht fixieren. Wir geben uns dazu ein Spreadset $\mathfrak{T}$ vor, konstruieren aus diesem mit Lemma 7.(b) einen Spread $\mathfrak{S}$, und erhalten schließlich nach Auswahl dreier verschiedener Elemente $X, Y, W \in \mathfrak{S}$ mit Lemma 9 ein neues Spreadset

$\mathfrak{T}'$. Mit Lemma 9 und Satz 12.(b) haben wir dann $\pi(\mathfrak{T}) \simeq \pi(\mathfrak{T}')$, d.h. wir erhalten Konstruktionen, aus einem gegebenen Spreadset ein neues herzustellen, das dann zu einer isomorphen affinen Translationsebene führt. Wir gehen nicht alle Möglichkeiten für die Wahl von X, Y, W durch, sondern führen nur einige ausgewählte Beispiele auf.

Lemma 23: *Seien V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in V. Sei $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}(\mathfrak{T})$ und seien $X, Y, W \in \mathfrak{S}$ paarweise verschieden. Bezeichne $\mathfrak{T}'$ den zugehörigen Spreadset aus Lemma 9. Dann gelten:*

(a) *Ist $X = [0] = \{0\} \times V$, $Y = [0,0] = V \times \{0\}$ und $W = [1,0] = \Delta_V$, und identifizieren wir V mit W durch $v \equiv (v,v)$ $(v \in V)$, so ist $\mathfrak{T}' = (\mathfrak{T}\backslash\{0\})^{-1} \cup \{0\}$.*

(b) *Ist $X = [1,0]$, $Y = [0]$ und $W = [0,0]$, und identifizieren wir V mit W durch $v \equiv (v,0)$ $(v \in V)$, so ist $\mathfrak{T}' = 1 - \mathfrak{T}$.*

(c) *Ist $X = [0,0]$, $Y = [0]$ und $W = \alpha \in \mathfrak{T}\backslash\{0\}$, und identifizieren wir V mit W durch $v \equiv (v, v^\alpha)$ $(v \in V)$, so ist $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}\alpha^{-1}$.*

Beweis: In allen drei Fällen müssen wir die Konstruktion aus Lemma 9 durchführen. Sei $\beta \in \mathfrak{T}$. Wir wollen das zugehörige Element von $\mathfrak{T}'$ berechnen. Seien dazu π, π' wie in diesem Lemma definiert, und verwende das Element $\beta \in \mathfrak{S}$ als U.
(a) Für $v, w \in V$ ist $(v,w) = (0,w) + (v,0)$, d.h. $\pi(v,w) = (0,w)$ und $\pi'(v,w) = (v,0)$. Für $U \neq Y$ müssen wir $\beta \neq 0$ annehmen. Es gilt für jedes $v \in V$

$$(\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|\beta)^{-1}(\pi(v,v)))) = (\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|\beta)^{-1}(0,v))) = \\ (\pi'|W)^{-1}(\pi'(v^{\beta^{-1}},v)) = (\pi'|W)^{-1}(v^{\beta^{-1}},0) = v^{\beta^{-1}}.$$

Es verbleibt $[0] \in \mathfrak{S}$. Da $0 \in \mathfrak{T}'$ ist, und 0 bisher nicht als Element von $\mathfrak{T}'$ aufgetaucht ist, muß $[0]$ die $0 \in \mathfrak{T}'$ ergeben.
(b) Diesmal haben wir für $v, w \in V$ die Zerlegung $(v,w) = (v,v) + (0, w-v)$, d.h. $\pi(v,w) = (v,v)$ und $\pi'(v,w) = (0, w-v)$. Für $v \in V$ gilt

$$(\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|\beta)^{-1}(\pi(v,0)))) = (\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|\beta)^{-1}(v,v))) = \\ (\pi'|W)^{-1}(\pi'(v,v^\beta)) = (\pi'|W)^{-1}(0, v^\beta - v) = v - v^\beta,$$

d.h. wir erhalten $1 - \beta$.
(c) In diesem Fall haben wir für $v, w \in V$ $\pi(v,w) = (v,0)$ und $\pi'(v,w) = (0,w)$. Für $v \in V$ gilt letztlich

$$(\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|\beta)^{-1}(\pi(v,v^\alpha)))) = (\pi'|W)^{-1}(\pi'((\pi|\beta)^{-1}(v,0))) = \\ (\pi'|W)^{-1}(\pi'(v,v^\beta)) = (\pi'|W)^{-1}(0,v^\beta) = v^{\beta\alpha^{-1}}$$

d.h. wir erhalten $\beta\alpha^{-1}$.

■

Wir wollen jetzt als ein Beispiel zur Verwendung von Spreadsets die Translationsebenen der Ordnung 9 bestimmen. Allerdings werden die meisten rechnerischen Details als Übungsaufgaben gestellt. Wir wissen bereits, daß jede Translationsebene der Ordnung 9 isomorph zu einer Ebene $\pi(\mathfrak{T})$ ist, wobei $\mathfrak{T}$ ein Spreadset im zweidimensionalen Vektorraum $V(2,3)$ über GF(3) ist. Wegen $1 \in \mathfrak{T}$ ist $1-\alpha \in \mathrm{GL}(2,3)$ für $\alpha \in \mathfrak{T}^\sharp := \mathfrak{T}\backslash\{0,1\}$, d.h. $\mathfrak{T}^\sharp$ besteht aus fixpunktfreien Elementen von GL(2,3). Mittels der Theorie der Normalformen linearer Abbildungen, erhalten wir das folgende Lemma:

Lemma 24: *Es gibt genau* 27 *fixpunktfreie Elemente in* GL(2,3)*, die sich auf genau* 5 *Konjugiertenklassen verteilen. Diese Konjugiertenklassen sind wie folgt:*

(C_1) *Die Konjugiertenklasse* C_1 *besteht nur aus dem Element* $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ *von Ordnung* 2*, und es ist* $C_1^{-1} = C_1$*.*

(C_2) *Die fixpunktfreien Elemente von Ordnung* 4 *bilden eine Konjugiertenklasse*

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und es ist $C_2^{-1} = C_2$*.*

(C_3) *Weiter ist*

$$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right\}$$

eine Konjugiertenklasse bestehend aus fixpunktfreien Elementen der Ordnung 8*, und es ist* $C_3^{-1} = C_4$*.*

(C_4) *Die restlichen fixpunktfreien Elemente der Ordnung* 8 *bilden die Konjugiertenklasse*

$$C_4 = \left\{ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

mit $C_4^{-1} = C_3$*.*

(C_5) *Die fixpunktfreien Elemente von Ordnung* 6 *bilden die Konjugiertenklasse*

$$C_5 = \left\{ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

mit $C_5^{-1} = C_5$.

Beweis: Dies ist eine Übungsaufgabe.

■

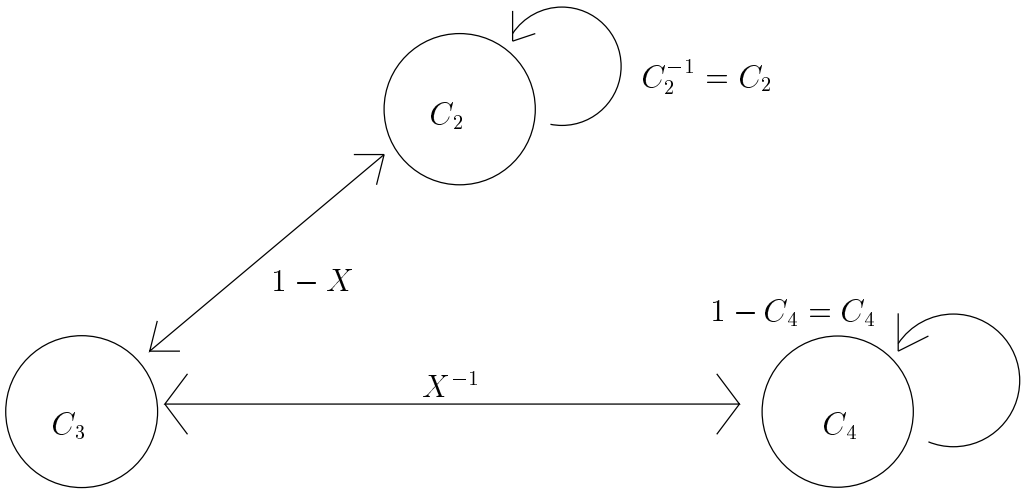
Im Hinblick auf Lemma 23 ist es nützlich das Verhalten dieser Konjugiertenklassen unter der Transformation $\alpha \mapsto 1-\alpha$ zu untersuchen. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$ haben wir $1-\beta^{-1}\alpha\beta = \beta^{-1}(1-\alpha)\beta$, d.h. es werden Konjugiertenklassen auf Konjugiertenklassen abgebildet. Wir haben

$$1 - \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in C_1,$$
$$1 - \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in C_3,$$
$$1 - \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in C_2,$$
$$1 - \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in C_4, \text{ und}$$
$$1 - \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \in C_5,$$

und damit gilt das folgende Lemma:

Lemma 25: *Es gelten* $1 - C_1 = C_1$, $1 - C_2 = C_3$, $1 - C_3 = C_2$, $1 - C_4 = C_4$ *und* $1 - C_5 = C_5$.

Unter den beiden Transformationen $X \mapsto X^{-1}$ und $X \mapsto 1 - X$ verhalten sich die drei Konjugiertenklassen C_2, C_3, C_4 also wie im folgenden Diagramm:



Dies können wir verwenden um mittels Lemma 23 geeignete Normierungen unserer Spreadsets zu wählen. Nun fragen wir uns welche verschiedenen Elemente einer unserer

Konjugiertenklassen gemeinsam in einem Spreadset vorkommen können. Dies läßt sich leicht beantworten.

Lemma 26: *Seien $i \in \{2,3,4,5\}$ und $\alpha, \beta \in C_i$ mit $\alpha \neq \beta$.*

(a) *Ist $i \neq 5$, so ist $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$.*

(b) *Ist $i = 5$, so ist genau dann $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$, wenn $\beta \neq \alpha^{-1}$ ist.*

Beweis: **(a)** Der Fall $i = 2$ ergibt sich durch eine direkte Rechnung. Ist $i = 3$, so haben wir nach Lemma 25 auch $1-\alpha, 1-\beta \in C_2$, also $\alpha - \beta = (1-\beta) - (1-\alpha) \in \mathrm{GL}(2,3)$. Ist letztlich $i = 4$, so ist $\alpha^{-1}, \beta^{-1} \in C_3$, also $\alpha - \beta = \alpha(\beta^{-1} - \alpha^{-1})\beta \in \mathrm{GL}(2,3)$.
(b) Dies läßt sich durch eine direkte Rechnung überprüfen.

■

Als nächstes können wir die folgenden Aussagen nachrechnen:

Lemma 27: *Seien $i \in \{2,4\}$, $\alpha \in C_3$ und $\beta \in C_i$.*

(a) *Ist $i = 2$, so ist genau dann $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$, wenn $\beta \in \{\alpha^2, \alpha^6\}$ ist.*

(b) *Ist $i = 4$, so ist genau dann $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$, wenn $\beta \in \{\alpha^5, \alpha^7\}$ ist.*

Eine weitere einfache Beobachtung ist das folgende Lemma:

Lemma 28: *Sei $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in $V(2,3)$. Dann ist entweder $-1 \in \mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{T} \cap C_5 \neq \emptyset$.*

Beweis: Wegen

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3)$$

folgt $-1 - \alpha \notin \mathrm{GL}(2,3)$ für jedes $\alpha \in C_5$, d.h. es kann nicht $-1 \in \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T} \cap C_5 \neq \emptyset$ sein. Weiter gibt es ein $\alpha \in \mathfrak{T}$ mit $(1,0)\alpha = (-1,0)$, d.h. ein Element in $\mathfrak{T}$, dessen erste Zeile $(-1,0)$ ist. Ein Vergleich mit Lemma 24 ergibt, daß $\mathfrak{T}$ eines der drei Elemente

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in C_5, \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in C_5$$

enthalten muß.

■

Wieder durch direkte Rechnung erhalten wir noch:

Lemma 29: *Seien $\alpha, \beta \in C_3$. Dann ist genau dann $\beta\alpha^{-1} \notin C_5$, wenn $\beta \in \{\alpha, \alpha^3\}$ ist.*

Damit können wir bereits einen ersten wichtigen Zwischenschritt durchführen.

Lemma 30: *Sei $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in $V(2,3)$, und es gebe kein Spreadset $\mathfrak{T}'$ in $V(2,3)$ mit $\mathfrak{T}' \cap C_5 \neq \emptyset$ und $\pi(\mathfrak{T}) \simeq \pi(\mathfrak{T}')$. Dann ist $\pi(\mathfrak{T})$ desarguesch.*

Beweis: Mit Lemma 28 und Lemma 25 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $-1 \in \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T} \cap C_3 \neq \emptyset$ annehmen. Wähle $\alpha \in \mathfrak{T} \cap C_3$. Mit Lemma 29 und Lemma 27 folgen dann $\mathfrak{T} \cap C_3 \subseteq \{\alpha, \alpha^3\}$, $\mathfrak{T} \cap C_2 \subseteq \{\alpha^2, \alpha^6\}$ und $\mathfrak{T} \cap C_4 \subseteq \{\alpha^5, \alpha^7\}$. Wegen $\alpha^4 = -1$ und $|\mathfrak{T}| = 9$ folgt $\mathfrak{T} = \{0\} \cup \langle\alpha\rangle$. Insbesondere ist $\mathfrak{T}$ kommutativ, und nach Korollar 21 ist $\pi(\mathfrak{T})$ desarguesch.

■

Wir müssen also im Folgenden nur noch Spreadsets betrachten, die Elemente der Ordnung 6 enthalten, und solche Spreadsets können -1 nicht enthalten. Wir können weiter nach Lemma 25 noch $\mathfrak{T} \cap C_2 \neq \emptyset$ annehmen. Nun gilt:

Lemma 31: *Sei $\mathfrak{T}$ ein Spreadset in $V(2,3)$ mit $\mathfrak{T} \cap C_5, \mathfrak{T} \cap C_2 \neq \emptyset$. Dann ist $|\mathfrak{T} \cap C_2| = 1$.*

Beweis: Sei $\alpha \in \mathfrak{T} \cap C_2$. Wir wollen $\alpha^{-1} \notin \mathfrak{T}$ zeigen. Durch Konjugation können wir annehmen, daß

$$\alpha = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}$$

ist. Wegen

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3),$$

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3),$$

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3),$$

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3)$$

ist

$$\mathfrak{T} \cap C_5 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Inversen dieser vier Elemente sind

$$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ & -1 \end{pmatrix},$$

und insbesondere gilt für $\beta \in \mathfrak{T} \cap C_5$ stets $\alpha - \beta^{-1} \notin \mathrm{GL}(2,3)$, also $\alpha^{-1} - \beta = \alpha^{-1}(\beta^{-1} - \alpha)\beta \notin \mathrm{GL}(2,3)$, und damit ist $\alpha^{-1} \notin \mathfrak{T}$, da $\mathfrak{T} \cap C_5 \neq \emptyset$ ist.

Insbesondere ist $|\mathfrak{T} \cap C_2| \leq 3$. Angenommen es wäre $|\mathfrak{T} \cap C_2| \geq 2$. Wäre $\mathfrak{T} \cap C_3 \neq \emptyset$, so wähle $\alpha \in C_3 \cap \mathfrak{T}$. Nach Lemma 27.(a) ist dann $\mathfrak{T} \cap C_2 \subseteq \{\alpha^2, \alpha^6\}$, d.h. es ist $\mathfrak{T} \cap C_2 = \{\alpha^2, \alpha^6\}$ im Widerspruch zu $(\alpha^2)^{-1} = \alpha^6$. Also ist $\mathfrak{T} \cap C_3 = \emptyset$.

Ist $\alpha \in C_4$, $\beta \in C_2$ mit $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$, so ist auch $\alpha^{-1} \in C_3$, $\beta^{-1} \in C_2$ und $\alpha^{-1} - \beta^{-1} = \alpha^{-1}(\beta - \alpha)\beta^{-1} \in \mathrm{GL}(2,3)$, d.h. $\beta^{-1} \in \{\alpha^{-2}, \alpha^{-6}\}$, und somit ist $\beta \in \{\alpha^2, \alpha^6\}$. Also folgt wie oben auch $\mathfrak{T} \cap C_4 = \emptyset$.

Wegen $|\mathfrak{T}| = 9$ ist damit $|\mathfrak{T} \cap C_2| = 3$ und $|\mathfrak{T} \cap C_5| = 4$. Mittels Konjugation können wir

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}$$

annehmen, und unsere obige Rechung zeigt

$$\mathfrak{T} \cap C_5 = \left\{ \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da $\mathfrak{T}$ ein Element enthält, dessen erste Zeile $(1,1)$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{T},$$

aber es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3);$$

ein Widerspruch. Also ist tatsächlich $|\mathfrak{T} \cap C_2| = 1$.

■

Damit können wir den Hauptsatz über Translationsebenen von Ordnung 9 beweisen.

Satz 32: *Die Menge*

$$\mathfrak{T} := \{0\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist ein Spreadset in $V(2,3)$, und die affine Translationsebene $\pi(\mathfrak{T})$ ist nicht desarguesch. Ist umgekehrt π eine nicht desarguesche, affine Translationsebene von Ordnung 9, so ist $\pi \simeq \pi(\mathfrak{T})$.

Beweis: Sei π eine nicht-desarguesche, affine Translationsebene der Ordnung 9. Dann gibt es ein Spreadset $\mathfrak{T}$ in $V(2,3)$ mit $\mathfrak{T} \cap C_5, \mathfrak{T} \cap C_2 \neq \emptyset$ und $\pi \simeq \pi(\mathfrak{T})$. Nach Lemma 31 ist $|\mathfrak{T} \cap C_2| = 1$, und durch Konjugation können wir auch

$$\alpha = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}$$

annehmen. Die Rechnung im Beweis von Lemma 31 zeigt

$$\mathfrak{T} \cap C_5 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wegen $|\mathfrak{T}| = 9$ folgt $|(C_3 \cup C_4) \cap \mathfrak{T}| \geq 2$. Ist $\beta \in \mathfrak{T} \cap C_3$, so ist $\alpha = \beta^2$ oder $\alpha = \beta^6 = -\beta^2$ nach Lemma 27.(a), und ist $\beta \in C_4$, so haben wir im Beweis von Lemma 31 ebenfalls $\alpha \in \{\beta^2, \beta^6\}$ eingesehen. Nun ist

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathfrak{T} \cap C_3 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und mit $C_4 = C_3^{-1}$ ergibt dies auch

$$\mathfrak{T} \cap C_4 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun enthält $\mathfrak{T}$ eine Matrix, deren erste Zeile $(-1, 0)$ ist, und dies ergibt

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{T},$$

und wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3),$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,3),$$

folgt sogar

$$\mathfrak{T} \cap (C_3 \cup C_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wegen $|\mathfrak{T}| = 9$ müssen damit alle vier der möglichen Elemente von $\mathfrak{T} \cap C_5$ tatsächlich in $\mathfrak{T}$ liegen, und somit ist $\mathfrak{T}$ die in der Behauptung angegebene Menge.

Umgekehrt ist es eine leichte Übung zu beweisen, daß $\mathfrak{T}$ tatsächlich ein Spreadset ist. Sei jetzt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(\mathfrak{T}).$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{pmatrix} & a \\ & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ & \end{pmatrix},$$

also $c = 0$ und $a = d$. Weiter ist auch

$$\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} b & \\ d & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix},$$

d.h. $b = 0$. Es folgt

$$\mathrm{Kern}(\mathfrak{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} : a \in \mathrm{GF}(3) \right\},$$

und nach Korollar 20 ist $\pi(\mathfrak{T})$ nicht desarguesch.

■

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch ein paar Kleinigkeiten über die volle Kollineationsgruppe einer affinen Translationsebene festhalten. Seien π eine affine Translationsebene und $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Nach §4.Satz 9.(a) können wir Γ mit der Untergruppe $\mathrm{Aut}(\overline{\pi})_{l_\infty}$ der Kollineationsgruppe des projektiven Abschluß von π identifizieren, und insbesondere haben wir eine Wirkung von Γ auf der Ferngeraden l_∞. Wir werden noch zeigen, daß die Existenz zweier verschiedener Translationsachsen in einer projektiven Ebene impliziert, daß diese eine Moufang Ebene ist. Ist also $\overline{\pi}$ keine Moufang Ebene, so ist die Translationsachse eindeutig, und es folgt $\Gamma = \mathrm{Aut}(\overline{\pi})$. Der Fall einer Moufang Ebene wird völlig anders behandelt, und dort ist auch der affine Standpunkt nicht angemessen, da es keine ausgezeichnete Gerade in einer Moufang Ebene gibt.

Wir können uns bis auf Isomorphie auf den Fall $\pi = \pi(\mathfrak{S})$ für einen Spread $\mathfrak{S}$ beschränken, und in dieser Situation haben wir die Standgruppe Γ_0 bereits bestimmt. Um einzusehen, daß wir damit bereits Γ kennen, wollen wir uns an einen kleinen Begriff aus den Anfängervorlesungen erinnern.

Definition 6: Sei G eine Gruppe. Sind $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $H \leq G$ eine Untergruppe, so heißt G ein semidirektes Produkt von N und H, wenn $N \cap H = 1$ und $G = HN$ gelten. Wir schreiben dann auch $G = H \ltimes N$.

Ist $G = H \ltimes N$, so können wir jedes Element $g \in G$ eindeutig in der Form $g = hn$ mit $h \in H$, $n \in N$ schreiben. Für $h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in N$ haben wir

$$(h_1 n_1) \cdot (h_2 n_2) = h_1 h_2 h_2^{-1} n_1 h_2 n_2 = h_1 h_2 n_1^{h_2} n_2$$

mit $h_1 h_2 \in H$ und $n_1^{h_2} n_2 \in N$ da $N \trianglelefteq G$ ist. Also können wir identifizieren

$$G = H \times N$$

mit der Multiplikation

$$(h_1, n_1) \cdot (h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1^{h_2} n_2).$$

Für jedes $h \in H$ ist die Abbildung $n \mapsto n^h$ ein Automorphismus von N, und dies liefert einen Homomorphismus $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$.

Diese Konstruktion läßt sich auch umkehren. Seien also G, H zwei Gruppen und $\phi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus. Dann definieren wir auf der Menge $H \times G$ wie oben eine Multiplikation

$$(h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2) := (h_1 h_2, g_1^{\phi(h_2)} g_2)$$

für $h_1, h_2 \in H$, $g_1, g_2 \in G$, und eine leichte Rechnung zeigt, daß $H \times G$ mit dieser Multiplikation eine Gruppe wird. Identifizieren wir $H = H \times \{1\}$, $G = \{1\} \times G$, so ist $G \cap H = 1$, $HG = H \times G$, $H \leq H \times G$ und $G \trianglelefteq H \times G$, und für jedes $h \in H$, $g \in G$ ist $h^{-1}gh = g^{\phi(h)}$, d.h. die Konjugation mit Elementen aus H auf G ist gerade durch ϕ gegeben. Daher nennt man auch $H \times G$ ein semidirektes Produkt von H und G und schreibt wieder $H \ltimes G$.

Für uns ist die folgende Anwendung dieser Begriffe auf die Theorie der Transformationsgruppen von Interesse.

Definition 7: Eine Transformationsgruppe (G, Ω, ω) heißt effektiv, wenn es für jedes $a \in G \backslash \{1\}$ ein $x \in \Omega$ mit $x^a \neq x$ gibt.

Lemma 33: *Sei (G, Ω, ω) eine Transformationsgruppe, und sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, der scharf transitiv auf Ω wirkt. Sei $e \in \Omega$ und setze $H := G_e \leq G$. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi : N \to \Omega; n \mapsto e^n$$

bijektiv, und es ist $G = H \ltimes N$. Für $n, m \in N$, $h \in H$ gelten $\varphi(n)^m = \varphi(nm)$ und $\varphi(n)^h = \varphi(n^h)$. Ist G effektiv auf Ω, so ist $C_H N = 1$, d.h. der Homomorphismus $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ist injektiv.

Beweis: Daß φ bijektiv ist, ist genau die scharfe Transitivität von N auf Ω. Es ist $H \cap N = N_e = 1$. Ist $g \in G$, so gibt es ein $n \in N$ mit $e^g = e^n$. Setzen wir $h := gn^{-1}$, so ist $e^h = e^{gn^{-1}} = e^{nn^{-1}} = e$, d.h. $h \in G_e = H$ und $g = hn$. Also ist auch $G = HN$ und somit $G = H \ltimes N$.

Jetzt seien $n, m \in N$, $h \in H$. Dann gelten $\varphi(n)^m = (e^n)^m = e^{nm} = \varphi(nm)$ und

$$\varphi(n)^h = e^{nh} = e^{h^{-1}nh} = \varphi(h^{-1}nh) = \varphi(n^h),$$

da $e^{h^{-1}} = e$ ist.

Schließlich sei G effektiv. Ist dann $h \in C_H N$, so folgt $\varphi(n)^h = \varphi(n^h) = \varphi(n)$ für jedes $n \in N$, d.h. $h = 1$. Also ist $C_H N = 1$.

■

Die Situation des Lemmas, also das es einen scharf transitiven Normalteiler gibt, wird gelegentlich als RNS-Fall bezeichnet, dies steht für regular normal subgroup. Dann können wir, wie gesehen, die Punktmenge Ω mit dem Normalteiler N identifizieren, und die Wirkung von N wird zur Gruppenmultiplikation, und die Wirkung der Standgruppe $H = G_e = G_1$ wird zur Konjugation. Im effektiven Fall können wir dann $H \leq \mathrm{Aut}(N)$ identifizieren. Für Translationsebenen erhalten wir die folgende Aussage:

Lemma 34: *Seien π eine affine Translationsebene, o ein Punkt von π und $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Weiter sei T die Translationsgruppe von π. Dann ist $T \trianglelefteq \Gamma$ und $\Gamma = \Gamma_o \ltimes T$.*

Beweis: Nach §5.Lemma 13 ist $T \trianglelefteq \Gamma$. Da T scharf transitiv auf der affinen Punktmenge wirkt, ergibt Lemma 33 die Behauptung.

■

Also kennen wir die volle Gruppe Γ sobald wir Γ_0 kennen. Ist speziell $\pi = \pi(\mathfrak{S})$ für einen Spread $\mathfrak{S}$ in einem Vektorraum V, so können wir die Translationsgruppe mit $(V, +)$ identifizieren. Die Wirkung von Γ_0 auf V durch Konjugation ist dann nach Lemma 33 genau die gewöhnliche Wirkung von Γ_0 auf V. Insbesondere erhalten wir erneut $\Gamma_0 \leq \mathrm{Aut}(V, +)$.

Aufgaben zu §9

(107) Sei K ein Quasikörper. Zeigen Sie, daß für $a, b \in D(K)$ auch $a + b, -a \in D(K)$ sind. Außerdem ist stets $0 \in D(K)$.

(108) Seien $V \neq 0$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{T}$ genau dann ein Spreadset ist, wenn $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (T1) und

(T2′) Sind $A, B \in \mathfrak{T}$ mit $A \neq B$, so ist $A - B$ surjektiv,

(T3′) Sind $v, w \in V$ mit $v \neq 0$, so existiert genau ein $A \in \mathfrak{T}$ mit $Av = w$,

erfüllt.

(109) Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Dann ist eine Menge $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ genau dann ein Spreadset, wenn $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (T1) und (T3′) erfüllt.

(110) Seien q ein Primpotenz, $K = \mathrm{GF}(q)$, $n \geq 1$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Die Menge $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ erfülle (T1) und (T2). Zeigen Sie, daß $\mathfrak{T}$ genau dann ein Spreadset ist, wenn $|\mathfrak{T}| = q^n$ ist.

(111) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K. Sei $\mathfrak{S}$ eine Menge von Teilräumen von V, die (S1) und (S3) erfüllt. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}$ genau dann ein Spread ist, wenn $\dim U = \frac{1}{2} \dim V$ für jedes $U \in \mathfrak{S}$ gilt.

(112) Seien q eine Primpotenz, $n \geq 1$ und V ein Vektorraum über $\mathrm{GF}(q)$ mit $\dim V = 2n$. Sei $\mathfrak{S}$ eine Menge von n-dimensionalen Teilräumen von V mit $U \cap U' = 0$ für alle $U, U' \in \mathfrak{S}$ mit $U \neq U'$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}$ genau dann ein Spread ist, wenn $|\mathfrak{S}| = q^n + 1$ gilt.

(113) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}\, K \neq 3$, in dem die Abbildung $x \mapsto x^3$ bijektiv ist. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathfrak{T} := \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ -\frac{s^3}{3} & s^2 + t \end{pmatrix} : s, t \in K \right\}$$

ein Spreadset ist.

(114) Seien K ein Quasikörper und $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(K)$ der zugehörige Spreadset. Zeigen Sie, daß K genau dann ein Semikörper ist, wenn $\alpha + \beta \in \mathfrak{T}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathfrak{T}$ gilt.

(115) Seien $K, \mathfrak{T}$ wie in Aufgabe (113). Zeigen Sie, daß die Ebene $\pi(\mathfrak{T})$ genau dann desarguesch ist, wenn $|K| = 2$ gilt. Bestimmen Sie den Kern von $\mathfrak{T}$.

(116) Seien K, a, b, f, H wie in Aufgabe (93) mit $|K| > 2$. Bestimmen sie den Kern von H, und geben Sie den Spreadset $\mathfrak{T}(H)$ als eine Menge von 2×2-Matrizen über K an.

(117) Seien wieder K, a, b, f, H wie in Aufgabe (93). Seien L ein Quasikörper mit $K \subseteq \mathrm{Kern}(L)$, $xy = yx$ für alle $x \in K$, $y \in L$, $\dim_K L = 2$ und $L \backslash K = \{x \in L : f(x) = 0\}$. Sei $e \in L \backslash K$ und sei $\varphi : L \to H$ der Vektorraumisomorphismus definiert durch $\varphi(1) = (1, 0)$ und $\varphi(e) = (0, 1)$. Zeigen Sie, daß φ ein Isomorphismus von Quasikörpern ist.

(118) Seien K, a, b, f, H wie in Aufgabe (93) und setze $\Delta := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(H) : \alpha | K = \mathrm{id}\}$. Zeigen Sie, daß Δ scharf transitiv auf $H \backslash K$ wirkt.

(119) Seien L ein Quasikörper und $K \subseteq \mathrm{Kern}(L)$ ein Unterschiefkörper des Kerns von L mit $\dim_K L = 2$ so, daß die Gruppe $\Delta := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(L) : \alpha | K = \mathrm{id}\}$ transitiv auf $L \backslash K$ wirkt. Zeigen Sie, daß $ab = ba$ für alle $a \in K$, $b \in L$ gilt, und daß L zu einem der in Aufgabe (93) konstruierten Quasikörper isomorph ist.

(120) Seien K ein Körper und $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(K)$ endlich. Zeigen Sie, daß $F := \{a \in K | \forall (\gamma \in \Gamma) : a^\gamma = a\}$ ein Unterkörper von K mit $\dim_F K \leq |\Gamma| < \infty$ ist. Weiter ist

$$N : K^* \to F^*; a \mapsto \prod_{\gamma \in \Gamma} a^\gamma$$

ein Gruppenhomomorpismus mit $N \circ \gamma = N$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

(121) Seien K, Γ, F, N wie in Aufgabe (120). Setze $P := \mathrm{Bild}(N)$ und sei $\phi : P \to \Gamma$ eine Abbildung mit $\phi(1) = 1 \in \Gamma$. Definiere eine neue Multiplikation auf K durch $(a, b \in K)$:

$$a \otimes b := \begin{cases} ab^{\phi(N(a))}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $K_\phi := (K, +, \otimes)$ ein Quasikörper ist, und das $F \subseteq \mathrm{Kern}(K_\phi)$ gilt.

(122) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe (121) ist K_ϕ genau dann assoziativ, wenn $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$ für alle $a, b \in P$ gilt.

(123) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe (121) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) K_ϕ ist ein Semikörper.

(b) K_ϕ ist ein Körper.

(c) $K_\phi \simeq K$.

(d) Es ist $\phi(a) = 1$ für jedes $a \in P$.

(124) Zeigen Sie, daß die Ordnung einer endlichen Translationsebene stets eine Primpotenz ist.

(125) Beweisen Sie Korollar 16: Ist π eine endliche Translationsebene, deren Ordnung eine Primzahl ist, so ist π desarguesch.

(126) Konstruieren Sie ein Beispiel eines Spreads $\mathfrak{S}$ in einem Vektorraum V über einem Schiefkörper K so, daß es Automorphismen von $\pi(\mathfrak{S})$ gibt, die 0 fixieren aber nicht semilinear über K sind.

(127) Sei V ein vierdimensionaler Vektorraum über GF(2). Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}(V)$ transitiv auf der Menge aller Spreads von V wirkt, und bestimmen Sie die Anzahl dieser Spreads.

(128) Beweisen Sie Lemma 24.

(129) Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 26, d.h. sind $\alpha, \beta \in C_2$ mit $\alpha \neq \beta$, so ist $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$, und sind $\alpha, \beta \in C_5$ mit $\alpha \neq \beta$, so ist genau dann $\alpha - \beta \in \mathrm{GL}(2,3)$ wenn $\beta \neq \alpha^{-1}$ ist.

(130) Beweisen Sie Lemma 27.

(131) Beweisen Sie Lemma 29.

(132) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathfrak{T}$ in Satz 32 tatsächlich ein Spreadset ist.

(133) Seien G, H zwei Gruppen und $\phi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homorphismus. Zeigen Sie, daß $H \times G$ mit der Multiplikation $(h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2) := (h_1 h_2, g_1^{h_2} g_2)$ eine Gruppe wird. Weiter sind $H = H \times \{1\} \leq H \times G$, $G = \{1\} \times G \trianglelefteq H \times G$ und $H \times G$ ist semidirektes Produkt von G und H. Für $g \in G$, $h \in H$ ist $g^h = g^{\phi(h)}$.

(134) Sei $\mathfrak{S}$ ein Spread in einem Vektorraum V. Bezeichne l_∞ die Ferngerade zu $\pi(\mathfrak{S})$. Für jedes $U \in \mathfrak{S}$ sei $\varphi(U) \in l_\infty$ die Parallelschar von $\pi(\mathfrak{S})$ die U enthält. Schließlich sei $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi(\mathfrak{S}))$. Dann ist φ bijektiv, und sind $U, U' \in \mathfrak{S}$, so sind U, U' genau dann in derselben Bahn von Γ_0 auf $\mathfrak{S}$, wenn $\varphi(U), \varphi(U')$ in derselben Bahn von Γ auf l_∞ sind.

(135) Sei $\mathfrak{S}$ ein Spread und $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi(\mathfrak{S}))$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Γ_0 wirkt transitiv auf $\mathfrak{S}$.

(b) Γ wirkt transitiv auf der Ferngeraden von $\pi(\mathfrak{S})$.

(c) Γ ist fahnentransitiv, d.h. sind v, w zwei Punkte von $\pi(\mathfrak{S})$ und g, h zwei Geraden von $\pi(\mathfrak{S})$ mit $v \in g$, $w \in h$, so existiert ein $\alpha \in \Gamma$ mit $w = v^\alpha$ und $h = g^\alpha$.

§10 Projektive Ebenen über Semikörpern

Dieser kurze Paragraph ist eine Ergänzung zum Paragraphen §9 über Translationsebenen. In §7 hatten wir eingesehen, daß die Translationsebenen die Ebenen vom Lenz-Typ mindestens IVa sind, und daß diese auch genau die durch Quasikörper koordinatisierten projektiven Ebenen sind. Spezielle Translationsebenen sind die Ebenen vom Lenz-Typ mindestens V, d.h. die zugleich Translationsebene und duale Translationsebene bezüglich eines inzidenten Punkt-Geraden Paars sind. In §7.Satz 17 haben wir diese Ebenen dann als die Ebenen über Semikörpern charakterisiert.

Semikörper sind insbesondere Quasikörper, und die Ergebnisse des §9 können in diesem speziellen Fall noch verbessert werden. Wir wollen mit der Untersuchung der Nuklei beginnen. Hierzu ist es nützlich zunächst die folgende Symmetrie in den Axiomen eines Semikörpers festzuhalten.

Lemma 1: *Sei K ein Semikörper. Sei $\tau : K \times K \to K \times K; (a, b) \mapsto (b, a)$. Dann ist auch $K^t := (K, +, \cdot \circ \tau)$ ein Semikörper.*

Beweis: Ist $\otimes := \cdot \circ \tau$, so ist $a \otimes b = ba$ für $a, b \in K$. Wir weisen die Axiome eines Semikörpers in K^t nach. Dabei sind (S1,S2,S5) klar. Weiter folgt (S4) sofort aus der Gültigkeit von (S3) in K. Schließlich ist (S3) in §7.Lemma 16 enthalten.

■

Lemma 2: *Sei K ein Semikörper. Dann sind die drei Nuklei $N_l(K)$, $N_m(K)$ und $N_r(K)$ Unterschiefkörper von K, und es ist $N_r(K) = \mathrm{Kern}(K)$. Weiter wird K ein Rechtsvektorraum über $N_r(K)$ und $N_m(K)$ und ein Linksvektorraum über $N_l(K)$ und $N_m(K)$. Es ist $N_l(K^t) = N_r(K)$, $N_r(K^t) = N_l(K)$ und $N_m(K^t) = N_m(K)$.*

Beweis: Offenbar gelten $N_l(K^t) = N_r(K)$, $N_r(K^t) = N_l(K)$ und $N_m(K^t) = N_m(K)$. Da in K das Linksdistributivgesetz gilt, ist auch $N_r(K) = \mathrm{Kern}(K)$, und dies ist nach §9.Satz 4 ein Unterschiefkörper von K über dem K ein Rechtsvektorraum ist.

Also ist $N_l(K)$ ein Unterschiefkörper von K^t über dem K^t ein Rechtsvektorraum ist, und damit ist $N_l(K)$ ebenfalls ein Unterschiefkörper von K über dem K ein Linksvektorraum ist.

Wir kommen jetzt zum mittleren Nukleus. Nach §9.Lemma 3 ist $0, 1 \in N_m(K)$, $N_m(K)N_m(K) \subseteq N_m(K)$ und für jedes $a \in N_m(K)\backslash\{0\}$ gibt es $a^{-1} \in N_m(K)$ mit $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Seien $a, b \in N_m(K)$. Für alle $u, v \in K$ gelten dann

$$(u(a+b))v = (ua+ub)v = (ua)v + (ub)v = u(av) + u(bv) = u(av+bv) = u((a+b)v$$

und

$$(u(-a))v = (-ua)v = -(ua)v = -u(av) = u(-av) = u((-a)v),$$

d.h. $a+b, -a \in N_m(K)$. Da die Multiplikation in $N_m(K)$ assoziativ ist, ist $N_m(K)$ ein Unterschiefkörper von K. Daß K ein Links- und ein Rechtsvektorraum über $N_m(K)$ ist, ist klar.

■

Den Semikörper K^t aus Lemma 1 bezeichnen wir auch als den dualen Semikörper zu K. Dieser ist nicht nur ein Rechentrick, sondern er hat auch eine geometrische Interpretation, die wir jetzt herleiten.

Lemma 3: *Sei (K, T) ein Ternärkörper und sei $\pi = P(K, T)$. In der dualen Ebene π^* ist $([0,0], [1,0], [1], [\infty])$ ein Viereck, dessen zugehörigen Ternärkörper wir mit $(\widetilde{K}, \widetilde{T})$ bezeichnen. Es ist $\widetilde{K} = \mathfrak{L}_{(0,0)}\backslash\{[0]\}$, und diese Menge identifizieren wir durch $s \mapsto [s, 0]$ $(s \in K)$ mit K.*

Seien $s, x, t \in K$. Definiere $\phi(s), \psi(s) \in K$ durch $1 + \phi(s) = s$ und $\psi(s) + \phi(s) = 0$. Nach Axiom (T3) eines Ternärkörpers erhalten wir $T'(s, x, t) \in K$ mit $T(x, \psi(s), T'(s, x, t)) = t$. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\widetilde{T}(s, x, t) = T(x, 1, T'(s, x, t)).$$

Beweis: Es ist $[1] \wedge [\infty] = (\infty)$ und $[0,0]$, $[1,0]$ gehen nicht durch (∞), sowie $[0,0] \wedge [1,0] = (0,0)$ und $[1], [\infty]$ gehen nicht durch $(0,0)$. Also ist $([0,0], [1,0], [1], [\infty])$ ein Viereck in π^*, dessen Ferngerade (∞) ist, und wegen $(0,0) \vee (\infty) = [0]$ ist $\widetilde{K} = \mathfrak{L}_{(0,0)}\backslash\{[0]\}$ die Diagonale. Es verbleibt nur die Formel einzusehen.

Seien also $s, x, t \in K$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}([s,0],[x,0],[t,0]) &= (((((([0,0] \wedge [\infty]) \vee ([t,0] \wedge [1])) \wedge (([0,0] \wedge (([1,0] \wedge [\infty]) \\
&\quad \vee([s,0] \wedge [1]))) \vee (\infty))) \vee ([x,0] \wedge [\infty])) \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= (((((0) \vee (1,t)) \wedge (([0,0] \wedge ((1) \vee (1,s))) \vee (\infty))) \vee (x)) \\
&\quad \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= ((([0,t] \wedge (([0,0] \wedge [1,\phi(s)]) \vee (\infty))) \vee (x)) \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= ((([0,t] \wedge ((\psi(s),0) \vee (\infty))) \vee (x)) \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= ((([0,t] \wedge [\psi(s)]) \vee (x)) \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= (((\psi(s),t) \vee (x)) \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= ([x, T'(s,x,t)] \wedge [1]) \vee (0,0) \\
&= (1, T(x,1,T'(s,x,t))) \vee (0,0) \\
&= [T(x,1,T'(s,x,t)),0].
\end{aligned}$$

■

Im Fall eines Semikörpers vereinfacht sich diese etwas unübersichtliche Formel.

Lemma 4: *Sei K ein Semikörper. Dann ist $([0,0],[1,0],[1],[\infty])$ ein Viereck in $P(K,T)^*$. Ist $(\mathfrak{L}_{(0,0)} \backslash \{[0]\}, \widetilde{T})$ der zugehörige Ternärkörper, dessen Punktmenge wie in Lemma 3 mit K identifiziert wird, so ist $\widetilde{T}(s,x,t) = xs + t$ für alle $s, x, t \in K$.*

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen aus Lemma 3. Seien $s, x, t \in K$. Es ist $\phi(s) = s - 1$ und $\psi(s) = -\phi(s) = 1 - s$. Damit ist $t = x\psi(s) + T'(s,x,t) = x(1-s) + T'(s,x,t)$, d.h. $T'(s,x,t) = t + x(s-1) = xs + t - x$. Es folgt $\widetilde{T}(s,x,t) = x + T'(s,x,t) = xs + t$.

■

Ist also K ein Semikörper, so koordinatisiert der duale Semikörper K^t gerade die duale projektive Ebene $P(K)^*$. Wir setzen jetzt die algebraische Beschreibung von K fort.

Definition 1: Sei K ein Semikörper. Dann heißt $N(K) := N_l(K) \cap N_m(K) \cap N_r(K)$ der Nukleus von K. Weiter ist

$$Z(K) := \{a \in N(K) | \forall (b \in K) : ab = ba\}$$

das Zentrum von K.

Lemma 5: *Sei K ein Semikörper.*

(a) *Der Nukleus $N(K)$ ist ein Unterschiefkörper von K und K ist ein Links- und ein Rechtsvektorraum über $N(K)$.*

(b) *Das Zentrum $Z(K)$ ist ein Unterkörper von K und K ist eine Divisionsalgebra über $Z(K)$.*

Beweis: **(a)** Nach Lemma 2 ist $N(K)$ ein Durchschnitt von Unterschiefkörpern von K, und damit selbst ein Unterschiefkörper. Weiter ist $N(K) \subseteq N_m(K)$ und da K nach Lemma 2 Links- und Rechtsvektorraum über $N_m(K)$ ist, gilt dies auch für $N(K)$.
(b) Offenbar ist $0, 1 \in Z(K)$. Seien $a, b \in Z(K)$. Dann ist nach (a) $a+b, ab, -a \in N(K)$, und für alle $u \in K$ gelten $(a+b)u = au + bu = ua + ub = u(a+b)$, $(-a)u = -au = -ua = u(-a)$ und $(ab)u = a(bu) = a(ub) = (au)b = (ua)b = u(ab)$, d.h. $a+b, ab, -a \in Z(K)$. Schließlich sei $a \in Z(K)\backslash\{0\}$. Dann gibt es $a^{-1} \in N(K)$ mit $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Für alle $b \in K$ haben wir

$$a^{-1}b = (a^{-1}b)(aa^{-1}) = ((a^{-1}b)a)a^{-1} = (a^{-1}(ba))a^{-1} = (a^{-1}(ab))a^{-1} \\ = ((a^{-1}a)b)a^{-1} = ba^{-1},$$

d.h. es ist $a^{-1} \in Z(K)$. Da $Z(K)$ offenbar kommutativ ist, ist $Z(K)$ somit ein Unterkörper von K. Wegen $Z(K) \subseteq N(K)$ ist K nach (a) ein Vektorraum über $Z(K)$. Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß K eine Algebra über $Z(K)$ ist. Für $a \in Z(K)$, $u, v \in K$ gilt

$$a(uv) = (au)v = (ua)v = u(av).$$

■

Wir hatten schon bei der Definition eines Semikörpers angemerkt, daß diese auch als Divisionsringe bezeichnet werden. Aufgrund des eben bewiesenen Lemmas wird gelegentlich auch von vornherein von Divisionsalgebren gesprochen. Wir wollen jetzt die Kollineationsgruppe von $P(K)$ für einen Semikörper K untersuchen. Wie schon in §9 bemerkt, sind die Translationsachse und dual die duale Translationsachse eindeutig, außer falls $P(K)$ eine Moufang Ebene ist. Um diesen Fall hier noch nicht auszuschließen betrachten wir die Standgruppe auf $[\infty]$ und (∞), außer für Moufang Ebenen ist dies wie gesagt die volle Kollineationsgruppe.

Lemma 6: *Sei K ein Semikörper und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K))_{[\infty],(\infty)}$. Dann ist*

$$\Gamma_{[[0],(\infty)]} = \{(x, y) \mapsto (x, ax + y) : a \in K\} \simeq (K, +)$$

und es ist

$$\Sigma := \Gamma_{[[0],(\infty)]}T = \{(x, y) \mapsto (x + u, ax + y + v) : a, u, v \in K\} \trianglelefteq \Gamma,$$

wobei T die Translationsgruppe von $A(K)$ ist.

Beweis: Die erste Aussage ist klar nach §9.Lemma 2.(b), wobei der Isomorphismus $(K, +) \to \Gamma_{[[0],(\infty)]}$ jedem $a \in K$ die Scherung $(x, y) \mapsto (x, ax + y)$ zuordnet. Weiter ist nach §5.Lemma 13 auch $T \trianglelefteq \Gamma$. Insbesondere ist $\Sigma \leq \Gamma$ zumindest eine Untergruppe.

Seien $c \in K$ und $\alpha \in \Gamma_{[[c],(\infty)]}$. Sei $\tau \in T$ die Translation $(x,y) \mapsto (x-c,y)$. Dann ist $[c]^\tau = [0]$, und §5.Lemma 13 ergibt $\alpha^\tau \in \Gamma_{[[0],(\infty)]}$, also existiert ein $a \in K$ mit $(x,y)^{\tau^{-1}\alpha\tau} = (x, ax+y)$ für alle $x,y \in K$. Für $x,y \in K$ folgt

$$(x,y)^\alpha = (x,y)^{\tau\tau^{-1}\alpha\tau\tau^{-1}} = (x-c,y)^{\tau^{-1}\alpha\tau\tau^{-1}} = (x-c, ax+y-ac)^{\tau^{-1}} = (x, ax+y-ac),$$

und somit ist $\alpha \in \Sigma$. Dies zeigt $\Gamma_{[[c],(\infty)]} \subseteq \Sigma$.

Jetzt sei $\alpha \in \Gamma$. Wegen $(\infty)^\alpha = (\infty)$, $[\infty]^\alpha = [\infty]$ existiert $c \in K$ mit $[0]^\alpha = [c]$. Mit §5.Lemma 13 folgt $\Gamma^\alpha_{[[0],(\infty)]} = \Gamma_{[[c],(\infty)]} \subseteq \Sigma$, also

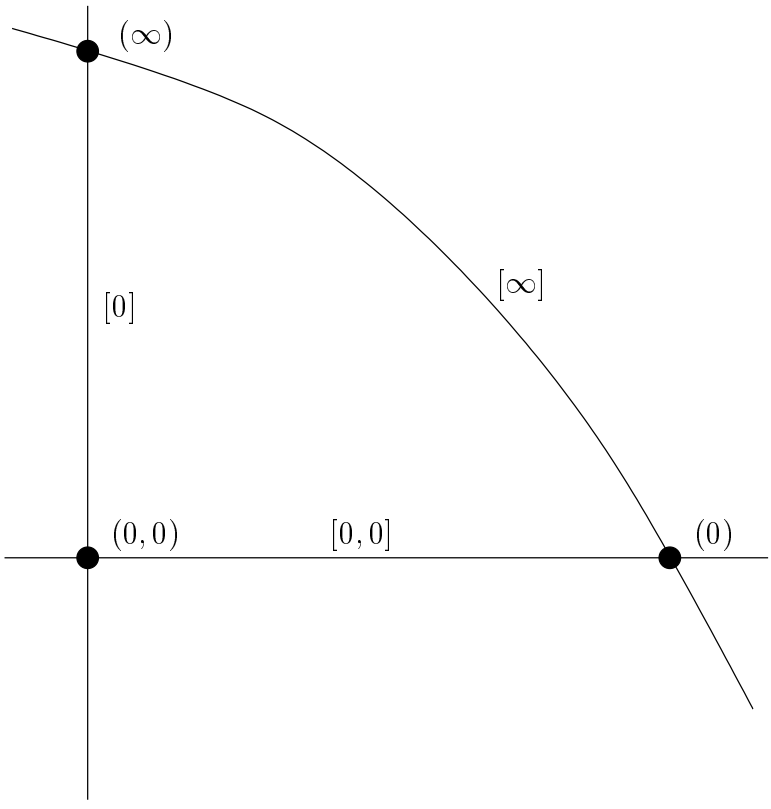
$$\Sigma^\alpha = \Gamma^\alpha_{[[0],(\infty)]} T^\alpha \subseteq \Sigma T = \Sigma.$$

Dies zeigt $\Sigma \trianglelefteq \Gamma$.

■

Wir wollen jetzt zeigen, daß sogar $\Gamma = \Lambda \ltimes \Sigma$ für eine geeignete Untergruppe $\Lambda \leq \Gamma$ ist. Hierzu wollen wir eine Menge suchen auf der Γ mit Σ als scharf transitiven Normalteiler wirkt. Zu diesem Zweck definieren wir:

Definition 2: Sei K ein Semikörper. Ein Autotopismendreieck in $P(K)$ ist ein Dreieck der Form $(z,(s),(\infty))$ mit $z \in K^2$, $s \in K$, d.h. Dreiecke (p,q,r) mit $r = (\infty)$ und $q \in [\infty]$.



Satz 7: *Sei K ein Semikörper, und seien Γ, Σ wie in Lemma 6. Dann wirkt Γ effektiv auf der Menge aller Autotopismendreiecke und Σ wirkt scharf transitiv auf dieser Menge. Ist*

$$\Lambda := \Gamma_{(0,0),(0)} = \mathrm{Aut}(P(K))_{(0,0),(0),(\infty)},$$

so gilt $\Gamma = \Lambda \ltimes \Sigma$.

Beweis: Da Γ den Punkt (∞) und die Gerade $[\infty]$ fixiert, wirkt Γ offenbar auf der Menge der Autotopismendreiecke, und diese Wirkung ist effektiv. Nun ist $((0,0),(0),(\infty))$ ein Autotopismendreieck. Für $a,u,v \in K$ sei $\sigma(a,u,v) \in \Sigma$ definiert durch $(x,y)^{\sigma(a,u,v)} = (x+u, ax+y+v)$ für $x,y \in K$. Dann ist

$$((0,0),(0),(\infty))^{\sigma(a,u,v)} = ((u,v),(a),(\infty)),$$

und damit wirkt Σ scharf transitiv auf den Autotopismendreiecken. Mit §9.Lemma 33 folgt die Behauptung.

■

Die Gruppe Σ haben wir in Lemma 6 explizit angegeben. Um die Gruppe Γ zu untersuchen, müssen wir also nur noch die Standgruppe Λ auf dem Dreieck $((0,0),(0),(\infty))$ betrachten. Nach Möglichkeit wollen wir diese direkt in Termen des Semikörpers K beschreiben. Hierzu beginnen wir mit dieser Untersuchung für allgemeine Ternärkörper.

Lemma 8: *Sei (K,T) ein Ternärkörper und seien $\alpha, \beta \in K\backslash\{0\}$. Dann ist das Tupel $((0,0),(\alpha,\beta),(0),(\infty))$ ein Viereck in der projektiven Ebene $P(K,T)$, dessen Ternärkörper wir mit (K',T') bezeichnen. Es gibt genau ein $\sigma \in K\backslash\{0\}$ mit $\sigma\alpha = \beta$ und es gilt $K' = [\sigma,0]\backslash\{(\sigma)\}$. Für jedes $s \in K$ existiert genau ein $\phi(s) \in K$ mit $\phi(s)\alpha = \sigma s$. Identifizieren wir K' durch $x \mapsto (x,\sigma x)$ mit K, so gilt*

$$\sigma T'(s,x,t) = T(\phi(s),x,\sigma t)$$

für alle $s,x,t \in K$. Bezeichnen schließlich $\oplus$ und $\otimes$ die Addition und Multiplikation in (K',T'), so gelten

$$\sigma(a \oplus b) = T(\sigma, a, \sigma b) \quad \textit{und} \quad \sigma(a \otimes b) = \phi(a)b$$

für alle $a,b \in K$.

Beweis: Daß $((0,0),(\alpha,\beta),(0),(\infty))$ ein Viereck ist, ist wegen $\alpha,\beta \neq 0$ klar. Da $(K\backslash\{0\},\cdot)$ nach §2.Lemma 8.(d) eine Loop ist, sind Existenz und Eindeutigkeit von σ und ϕ klar. Wegen $(0,0) \vee (\alpha,\beta) = [\sigma,0]$ und $[\sigma,0] \wedge [\infty] = (\sigma)$ ist K' die angegebene Menge. Wir müssen also nur noch T' berechnen.

Seien $s, x, t \in K$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
T'((s,\sigma s),(x,\sigma x),(t,\sigma t)) &= ((((((0,0)\vee(\infty))\wedge((t,\sigma t)\vee(0)))\vee(((0,0)\\
&\quad\vee(((\alpha,\beta)\vee(\infty))\wedge((s,\sigma s)\vee(0))))\wedge[\infty]))\\
&\quad\wedge((x,\sigma x)\vee(\infty)))\vee(0))\wedge[\sigma,0]\\
&= (((([0]\wedge[0,\sigma t])\vee(((0,0)\vee([\alpha]\wedge[0,\sigma s]))\wedge[\infty]))\\
&\quad\wedge[x])\vee(0))\wedge[\sigma,0]\\
&= ((((0,\sigma t)\vee(((0,0)\vee(\alpha,\sigma s))\wedge[\infty]))\wedge[x])\vee(0))\\
&\quad\wedge[\sigma,0]\\
&= ((((0,\sigma t)\vee([\phi(s),0]\wedge[\infty]))\wedge[x])\vee(0))\wedge[\sigma,0]\\
&= ((((0,\sigma t)\vee(\phi(s)))\wedge[x])\vee(0))\wedge[\sigma,0]\\
&= (([\phi(s),\sigma t]\wedge[x])\vee(0))\wedge[\sigma,0]\\
&= ((x,T(\phi(s),x,\sigma t))\vee(0))\wedge[\sigma,0]\\
&= [0,T(\phi(s),x,\sigma t)]\wedge[\sigma,0],
\end{aligned}$$

und dies ist gerade die Behauptung über T'.

Schließlich seien $a, b \in K$ gegeben. Es ist $\phi(\alpha) = \sigma$, also

$$\sigma(a \oplus b) = \sigma T'(\alpha, a, b) = T(\phi(\alpha), a, \sigma b) = T(\sigma, a, \sigma b)$$

und

$$\sigma(a \otimes b) = \sigma T'(a, b, 0) = T(\phi(a), b, \sigma 0) = T(\phi(a), b, 0) = \phi(a)b.$$

■

Definition 3: Seien (K,T), (K',T') zwei Ternärkörper. Eine Isotopie von (K,T) nach (K',T') ist ein Tripel (ξ,ψ,ζ) bijektiver Abbildungen $\xi,\psi,\zeta : K \to K'$ mit $\zeta(0) = 0$ so, daß

$$T'(\xi(s),\psi(x),\zeta(t)) = \zeta(T(s,x,t))$$

für alle $s, x, t \in K$ gilt. Die Ternärkörper heißen isotop, wenn es eine Isotopie zwischen ihnen gibt.

Es ist eine leichte Übungsaufgabe einzusehen, daß die komponentenweise Hintereinanderausführung zweier Isotopien und die komponentenweise Inverse einer Isotopie wieder Isotopien sind. Insbesondere bildet die Menge $\mathrm{Iso}(K,T)$ aller Isotopien von K auf sich eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(K)^3$, genannt die Autotopismengruppe des Ternärkörpers (K,T). Eine weitere leichte Übungsaufgabe ist, daß eine Bijektion $\psi : K \to K'$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn (ψ,ψ,ψ) eine Isotopie ist. Insbesondere können wir $\mathrm{Aut}(K) \leq \mathrm{Iso}(K)$ identifizieren. Den Zusammenhang zwischen Isotopien und Isomorphismen projektiver Ebenen werden wir im Folgenden herstellen. Aber zuvor wollen wir noch unser Lemma 8 in Termen des Isotopiebegriffs auswerten.

Lemma 9: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und (o, e, u, v), (o, e', u, v) zwei Vierecke in π, deren zugehörige Ternärkörper wir mit (K, T) und (K', T') bezeichnen. Dann sind (K, T) und (K', T') isotop.*

Beweis: Nach §3.Satz 11 haben wir einen Isomorphismus $\eta : \pi \to P(K, T)$. Wegen $e' \notin u \vee v, o \vee u, o \vee v$ ist $\eta(e') = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta \in K \backslash \{0\}$. Nun ist $((0,0), (\alpha, \beta), (0), (\infty))$ ein Viereck in $P(K, T)$, und nach §4.Satz 3.(b) induziert η einen Isomorphismus von (K', T') auf den Ternärkörper (K'', T'') von $P(K, T)$ bezüglich dieses Vierecks. Also reicht es zu zeigen, daß (K, T) und (K'', T'') isotop sind.

Definieren wir $\sigma \in K \backslash \{0\}$ durch $\sigma\alpha = \beta$, so ist nach Lemma 8 $K'' = [\sigma, 0] \backslash \{(\sigma)\}$, und somit ist die Abbildung $\zeta_1 : K \to K''; x \mapsto (x, \sigma x)$ bijektiv. Weiter ist wegen $\sigma \neq 0$ auch $\zeta_2 : K \to K; x \mapsto \sigma x$ bijektiv. Ist $\phi : K \to K$ die Abbildung aus Lemma 8, so haben wir wegen $\alpha \neq 0$ die Bijektion $r : K \to K; x \mapsto x\alpha$, und es gilt $r \circ \phi = \zeta_2$, d.h. $\phi = r^{-1} \circ \zeta_2$ ist bijektiv. Wir erhalten drei bijektive Abbildungen

$$\zeta := \zeta_1 \circ \zeta_2^{-1},\ \xi := \zeta_1 \circ \phi^{-1},\ \psi := \zeta_1,$$

mit $\zeta(0) = \zeta_1(\zeta_2^{-1}(0)) = \zeta_1(0) = (0,0)$, und für $s, x, t \in K$ gilt nach Lemma 8 die Gleichung

$$\begin{aligned}
\zeta(T(s,x,t)) &= \zeta_1(\zeta_2^{-1}(T(s,x,t))) \\
&= \zeta_1(\zeta_2^{-1}(T(\phi(\phi^{-1}(s)), x, \sigma\zeta_2^{-1}(t)))) \\
&= \zeta_1(\zeta_2^{-1}(\sigma T'(\phi^{-1}(s), x, \zeta_2^{-1}(t)))) \\
&= \zeta_1(T'(\phi^{-1}(s), x, \zeta_2^{-1}(t)) \\
&= T''(\zeta_1(\phi^{-1}(s)), \zeta_1(x), \zeta_1(\zeta_2^{-1}(t))) \\
&= T''(\xi(s), \psi(x), \zeta(t)),
\end{aligned}$$

wobei T' jetzt die Abbildung aus Lemma 8 bezeichnet.

■

Definition 4: Seien (K, T), (K, T') zwei Ternärkörper auf derselben Menge K. Eine Isotopie $(\xi, \psi, \zeta) : (K, T) \to (K, T')$ heißt Hauptisotopie wenn $\zeta = \mathrm{id}$ ist, d.h. $\xi, \psi : K \to K$ sind Bijektionen mit $T'(\xi(s), \psi(x), t) = T(s, x, t)$ für alle $s, x, t \in K$. Gibt es eine solche Hauptisotopie, so heißt (K, T') ein Hauptisotop von (K, T).

Es ist leicht explizit Hauptisotope zu konstruieren.

Lemma 10: *Seien (K, T) ein Ternärkörper und $a, b \in K \backslash \{0\}$. Dann sind die Abbildungen $l_a : K \to K; x \mapsto ax$ und $r_a : K \to K; x \mapsto xb$ bijektiv. Sei*

$$T' : K^3 \to K; (s, x, t) \mapsto T(r_b^{-1}(s), l_a^{-1}(x), t).$$

Dann ist $K_{ab} := (K, T')$ ein Ternärkörper mit Null 0 und Eins ab, und $(r_b, l_a, \mathrm{id}) : K \to K_{ab}$ ist eine Hauptisotopie.

Beweis: Dies ist eine leichte Übungsaufgabe.

■

Es ist beweistechnisch gelegentlich nützlich, die Konstruktion eines Hauptisotops in zwei Teilschritte aufzuteilen, bei denen jeweils einer der beiden Parameter die Eins des Ternärkörpers ist. Bilden wir zuerst ein Hauptisotop $K_{a,1}$, so hat dieses die Eins a, und wir fragen uns was $(K_{a,1})_{a,b}$ ist. Etwas allgemeiner bestimmen wir gleich eine Formel für iterierte Hauptisotope.

Lemma 11: *Seien (K,T) ein Ternärkörper und $a_1,a_2,b_1,b_2 \in K\backslash\{0\}$. Dann ist*

$$(K_{a_1,b_1})_{a_2,b_2} = K_{r_{b_1}^{-1}(a_2),l_{a_1}^{-1}(b_2)}.$$

Beweis: Schreibe $K_{a_1,b_1} = (K,T')$ und $(K_{a_1,b_1})_{a_2,b_2} = (K,T'')$. Ist $\otimes$ die Multiplikation in K_{a_1,b_1}, so haben wir für alle $u,v \in K$

$$u \otimes v = T'(u,v,0) = T(r_{b_1}^{-1}(u), l_{a_1}^{-1}(v), 0) = r_{b_1}^{-1}(u) l_{a_1}^{-1}(v),$$

d.h. bezeichnen l'_a und r'_a die Links- und Rechtsmultiplikation mit $a \in K$ in K_{a_1,b_1}, so haben wir

$$l'_a = l_{r_{b_1}^{-1}(a)} \circ l_{a_1}^{-1}, \quad r'_a = r_{l_{a_1}^{-1}(a)} \circ r_{b_1}^{-1}.$$

Für $s,x,t \in K$ folgt

$$\begin{aligned} T''(s,x,t) &= T'\left(r'^{-1}_{b_2}(s), l'^{-1}_{a_2}(x), t\right) \\ &= T'\left(r_{b_1}(r^{-1}_{l_{a_1}^{-1}(b_2)}(s)), l_{a_1}(l^{-1}_{r_{b_1}^{-1}(a_2)}(x)), t\right) \\ &= T\left(r^{-1}_{l_{a_1}^{-1}(b_2)}(s), l^{-1}_{r_{b_1}^{-1}(a_2)}(x), t\right), \end{aligned}$$

und dies ist gerade die Behauptung.

■

Damit können wir nun den Hauptsatz über die Isotopie von Ternärkörpern behandeln.

Satz 12: *Seien (K,T), (K',T') zwei Ternärkörper.*

(a) *Ist $(\xi,\psi,\zeta) : K \to K'$ eine Isotopie, so gilt $\xi(0) = \psi(0) = 0$, und die Abbildung*

$$\begin{array}{llll} (x,y)\mapsto(\psi(x),\zeta(y)) & (x,y\in K), & [s,t]\mapsto[\xi(s),\zeta(t)] & (s,t\in K), \\ (s)\mapsto(\xi(s)), & (s\in K), & [c]\mapsto[\psi(c)] & (c\in K), \\ (\infty)\mapsto(\infty), & & [\infty]\mapsto[\infty] & \end{array}$$

ist ein Isomorphismus $\alpha : P(K,T) \to P(K',T')$ mit $(0,0)^\alpha = (0,0)$, $(0)^\alpha = (0)$ und $(\infty)^\alpha = (\infty)$.

(b) *Jeder Isomorphismus* $\alpha : P(K,T) \to P(K',T')$ *mit* $(0,0)^\alpha = (0,0)$, $(0)^\alpha = (0)$ *und* $(\infty)^\alpha = (\infty)$ *läßt sich eindeutig in der in (a) beschriebenen Form schreiben.*

(c) *Ist* $\gamma : K \to K'$ *eine Isotopie, so existieren ein Hauptisotop* K_0 *von* K, *eine Hauptisotopie* $\gamma_0 : K \to K_0$ *und ein Isomorphismus* $\psi : K_0 \to K'$ *mit* $\gamma = \psi \circ \gamma_0$.

(d) *Ist* (K,T'') *ein Hauptisotop von* K *und* $\gamma : (K,T) \to (K,T'')$ *eine Hauptisotopie, so existieren* $a,b \in K\backslash\{0\}$ *mit* $(K,T'') = K_{ab}$ *und* $\gamma = (r_b, l_a, \mathrm{id})$.

Beweis: (a) Da ξ bijektiv ist, gibt es ein $s \in K$ mit $\xi(s) \neq 0$. Wir haben $\xi(s)\psi(0) = T'(\xi(s), \psi(0), \zeta(0)) = \zeta(T(s,0,0)) = \zeta(0) = 0$, und es folgt $\psi(0) = 0$. Da auch ψ bijektiv ist, folgt $\psi(1) \neq \psi(0) = 0$ und $\xi(0)\psi(1) = T'(\xi(0), \psi(1), \zeta(0)) = \zeta(T(0,1,0)) = \zeta(0) = 0$, und wieder folgt $\xi(0) = 0$.

Die angegebenen Abbildungen $K^2 \cup K \cup \{\infty\} \to K^2 \cup K \cup \{\infty\}$ sind offenbar bijektiv, und erhalten die Inzidenzrelationen auf $P(K,T)$ und $P(K',T')$. Wegen $\zeta(0) = \psi(0) = \xi(0) = 0$ sind $(0,0)^\alpha = (0,0)$, $(0)^\alpha = (0)$ und $(\infty)^\alpha = (\infty)$ klar.
(b) Sei α ein Isomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften. Wegen $(1,1) \notin [0] = (0,0) \vee (\infty)$, $(1,1) \notin [0,0] = (0,0) \vee (0)$ und $(1,1) \notin [\infty] = (0) \vee (\infty)$ ist $(1,1)^\alpha = (\beta, \gamma)$ mit $\beta, \gamma \neq 0$. Definieren wir $\sigma \in K'\backslash\{0\}$ durch $\sigma\beta = \gamma$ und $\phi : K' \to K'$ durch $\phi(s)\beta = \sigma s$ für alle $s \in K'$, so können wir nach Lemma 8 den Ternärkörper von $P(K',T')$ bezüglich des Vierecks $((0,0),(\beta,\gamma),(0),(\infty))$ als (K',T'') mit $\sigma T''(s,x,t) = T'(\phi(s), x, \sigma t)$ für alle $s,x,t \in K'$ schreiben.

Nach §4.Satz 3.(b) ist die Einschränkung $\psi := \alpha|K : (K,T) \to (K',T'')$ ein Isomorphismus von Ternärkörpern, wobei wir auch den Ternärkörper zu $P(K,T)$ durch $x \mapsto (x,x)$ mit (K,T) identifizieren. Explizit bedeutet dies

$$(x,x)^\alpha = (\psi(x), \sigma\psi(x))$$

für jedes $x \in K$. Die Linksmultiplikation $l_\sigma : K' \to K'; x \mapsto \sigma x$, und die Rechtsmultiplikation $r_\beta : K' \to K'; x \mapsto x\beta$ sind wegen $\sigma, \beta \neq 0$ bijektiv. Wir definieren die bijektiven Abbildungen

$$\xi := \phi \circ \psi = r_\beta^{-1} \circ l_\sigma \circ \psi : K \to K', \quad \zeta := l_\sigma \circ \psi : K \to K'.$$

Für $s,x,t \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\psi(T(s,x,t)) = T''(\psi(s),\psi(x),\psi(t)) &= l_\sigma^{-1}(\sigma T''(\psi(s),\psi(x),\psi(t))) \\ &= l_\sigma^{-1}(T'(\phi(\psi(s)),\psi(x),\sigma\psi(t))),\end{aligned}$$

d.h. $\zeta(T(s,x,t)) = T'(\xi(s),\psi(x),\zeta(t))$, und somit ist $(\xi,\psi,\zeta) : (K,T) \to (K',T')$ eine Isotopie. Nach (a) induziert diese einen Isomorphismus $\alpha' : P(K,T) \to P(K',T')$, und für $x \in K$ gilt

$$(x,x)^{\alpha'} = (\psi(x),\zeta(x)) = (\psi(x),\sigma\psi(x)) = (x,x)^\alpha.$$

Mit §4.Satz 3.(c) folgt $\alpha = \alpha'$. Dies zeigt die Existenzaussage. Die Eindeutigkeit ist klar, da in (a) die Abbildungen ψ, ζ durch die Punktabbildung und ξ durch die Geradenabbildung von α eindeutig bestimmt sind.
(c) Sei $\gamma = (\xi, \psi, \zeta)$. Nach (a) induziert γ^{-1} einen Isomorphismus $\alpha : P(K', T') \to P(K, T)$. Für diesen Isomorphismus gilt $(x, x)^\alpha = (\psi^{-1}(x), \zeta^{-1}(x))$ für jedes $x \in K'$ und definieren wir $b := \psi^{-1}(1)$ und $a \in K$ durch $ab = \zeta^{-1}(1)$, so liefert uns der Beweis von Teil (b) einen Ternärkörper (K, T'') mit $aT''(s, x, t) = T(r_b^{-1}(l_a(s)), x, l_a(t))$ für alle $s, x, t \in K$ so, daß $\psi^{-1} : (K', T') \to (K, T'')$ ein Isomorphismus ist, und $\xi^{-1} = r_b^{-1} \circ l_a \circ \psi^{-1}$, $\zeta^{-1} = l_a \circ \psi^{-1}$ gelten.

$$\begin{array}{ccc} (K,T) & \xrightarrow{\gamma} & (K',T') \\ \downarrow{\scriptstyle (r_b, l_a, \mathrm{id})} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ K_{ab} & \xrightarrow{l_a^{-1}} & (K,T'') \end{array}$$

Nach Lemma 10 haben wir eine Hauptisotopie $\gamma_0 := (r_b, l_a, \mathrm{id}) : (K, T) \to K_{ab}$ auf das Hauptisotop K_{ab} von K, und da für $s, x, t \in K$

$$l_a^{-1}(T(r_b^{-1}(s), l_a^{-1}(x), t)) = l_a^{-1}(aT''(l_a^{-1}(s), l_a^{-1}, l_a^{-1}(t))) = T''(l_a^{-1}(s), l_a^{-1}(x), l_a^{-1}(t))$$

gilt, ist $l_a^{-1} : K_{ab} \to (K, T'')$ ein Isomorphismus. Also ist $\varrho := \psi \circ l_a^{-1} : K_{ab} \to (K', T')$ ein Isomorphismus mit $\varrho \circ \gamma_0 = (\psi \circ l_a^{-1} \circ r_b, \psi \circ l_a^{-1} \circ l_a, \psi \circ l_a^{-1}) = (\xi, \psi, \zeta) = \gamma$.
(d) Wir wenden den Beweis von (c) für $(K', T') = (K, T'')$ an. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen ist wegen $\zeta = \mathrm{id}$ auch $\psi \circ l_a^{-1} = \mathrm{id}$, d.h. $\psi = l_a$. Weiter folgt $(K, T'') = K_{ab}$ und $\xi = \psi \circ l_a^{-1} \circ r_b = r_b$.

■

Korollar 13: *Sei K ein Ternärkörper. Dann ist jeder zu K isotope Ternärkörper zu einem Hauptisotop von K isomorph.*

Beweis: Klar nach Satz 12.(c).

■

Weiter erhalten wir die folgende Umkehrung von Lemma 9.

Korollar 14: *Seien π eine projektive Ebene und (o, e, u, v) ein Viereck in π mit zugehörigen Ternärkörper (K, T). Sei (K', T') ein zu (K, T) isotoper Ternärkörper. Dann gibt es ein Viereck (o, e', u, v) in π, dessen Ternärkörper zu (K', T') isomorph ist.*

Beweis: Nach §3.Satz 11 haben wir einen Isomorphismus $\eta : \pi \to P(K, T)$ mit $\eta(o) = (0, 0)$, $\eta(e) = (1, 1)$, $\eta(u) = (0)$ und $\eta(v) = (\infty)$. Mit Satz 12.(a) gibt es weiter einen Isomorphismus $\alpha : P(K', T') \to P(K, T)$ mit $\alpha(0, 0) = (0, 0)$, $\alpha(0) = (0)$ und $\alpha(\infty) = (\infty)$. Damit erhalten wir den Isomorphismus $\gamma := \eta^{-1} \circ \alpha : P(K', T') \to \pi$ mit $\gamma(0, 0) = o$, $\gamma(0) = u$ und $\gamma(\infty) = v$. Setzen wir also $e' := \gamma(1, 1)$, so ist (o, e', u, v) ein

Viereck in π, und nach §4.Satz 3.(b) ist der Ternärkörper zu diesem Viereck isomorph zum Ternärkörper von $P(K',T')$ bezüglich $((0,0),(1,1),(0),(\infty))$. Aber letzterer ist nach §3.Lemma 12 isomorph mit (K',T').

■

Korollar 15: *Seien (K,T) ein Ternärkörper, $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$ und $\Lambda := \Gamma_{(0,0),(0),(\infty)}$. Dann ergibt die Konstruktion in Satz 12.(a) einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Iso}(K,T) \simeq \Lambda$.*

Beweis: Die angegebene Abbildung $\mathrm{Iso}(K,T) \to \Lambda$ ist offenbar ein Gruppenhomomorphismus, und nach Satz 12.(b) ist sie auch bijektiv.

■

Wir kehren jetzt zu unserem Ausgangspunkt zurück, und betrachten wieder die projektive Ebene über einem Semikörper.

Lemma 16: *Seien K ein Semikörper, K' ein Ternärkörper und $(\xi,\psi,\zeta) : K \to K'$ eine Isotopie. Dann ist auch K' ein Semikörper und $\xi,\psi,\eta : (K,+) \to (K',+)$ sind Gruppenhomomorphismen mit $\zeta(ab) = \xi(a)\psi(b)$ für alle $a,b \in K$.*

Sind umgekehrt K, K' zwei Semikörper, und $\xi,\psi,\zeta : (K,+) \to (K',+)$ Gruppenisomorphismen mit $\zeta(ab) = \xi(a)\psi(b)$ für alle $a,b \in K$, so ist $(\xi,\psi,\zeta) : K \to K'$ eine Isotopie.

Beweis: Seien also K ein Semikörper, K' ein Ternärkörper und $(\xi,\psi,\zeta) : K \to K'$ eine Isotopie. Nach Satz 12.(a) gibt es einen Isomorphismus $\alpha : P(K) \to P(K')$ mit $[\infty]^\alpha = [\infty]$ und $(\infty)^\alpha = (\infty)$. Nach §7.Satz 17 sind $[\infty]$ eine Translationsachse und (∞) eine duale Translationsachse von $P(K)$, und damit auch von $P(K')$. Eine erneute Anwendung von §7.Satz 17 liefert, daß auch K' ein Semikörper ist.

Nach Satz 12.(c,d) gibt es $a,b \in K\backslash\{0\}$, und einen Isomorphismus $\gamma : K_{ab} \to K'$ mit $(\xi,\psi,\zeta) = (r_b, l_a, \mathrm{id}) \circ \gamma$. Nach §4.Lemma 2 reicht es einzusehen, daß $r_b, l_a : (K,+) \to (K_{ab},+)$ additiv sind. Die Addition in K_{ab} ist für $x,y \in K$ gegeben durch

$$T(r_b^{-1}(ab), l_a^{-1}(x), y) = a l_a^{-1}(x) + y = x + y,$$

d.h. sie stimmt mit der Addition in K überein. Da K links- und rechtsdistributiv ist, folgt die Additivität von l_a und r_b.

Schließlich folgt für $a,b \in K$ noch

$$\zeta(ab) = \zeta(T(a,b,0)) = T'(\xi(a),\psi(b),\zeta(0)) = \xi(a)\psi(b),$$

da $\zeta(0) = 0$ ist.

Sind umgekehrt Gruppenisomorphismen $\xi,\psi,\zeta : (K,+) \to (K',+)$ mit $\zeta(ab) = \xi(a)\psi(b)$ für alle $a,b \in K$ gegeben, so folgen $\zeta(0) = 0$ und

$$\zeta(T(s,x,t)) = \zeta(sx+t) = \zeta(sx) + \zeta(t) = \xi(s)\psi(x) + \zeta(t) = T'(\xi(s),\psi(t),\zeta(t))$$

für alle $s, x, t \in K$.

■

Wir wollen noch kurz das Verhalten unserer Konstruktion von Hauptisotopen bei Übergang zum dualen Semikörper festhalten.

Lemma 17: *Sei K ein Semikörper und seien $a, b \in K\backslash\{0\}$. Dann ist $K_{a,b}$ wieder ein Semikörper, dessen Addition mit der Addition in K übereinstimmt, und dessen Multiplikation $\otimes$ durch $u \otimes v = r_b^{-1}(u) l_a^{-1}(v)$ gegeben ist. Weiter gilt $(K^t)_{a,b} = (K_{b,a})^t$.*

Beweis: Dies ist eine leichte Übungsaufgabe.

■

Sei K ein Semikörper. Wir hatten bereits eingesehen, daß unsere Standgruppe $\Gamma = \mathrm{Aut}(P(K))_{(\infty),[\infty]}$ ein semidirektes Produkt $\Gamma = \Lambda \ltimes \Sigma$ ist, wobei wir den Normalteiler Σ explizit kennen. Mit Korollar 15 folgt, daß die Gruppe Λ zur Autotopismengruppe $\mathrm{Iso}(K)$ des Semikörpers K isomorph ist. Damit haben wir Γ in Termen des Semikörpers K beschrieben. Dieses Ergebnis kann man als Startpunkt für die weitergehende Untersuchung der Gruppe Γ verwenden. Zum Beispiel ist es ein offenes Problem, ob die Automorphismengruppe einer nicht desargueschen, endlichen projektiven Ebene über einem Semikörper stets auflösbar ist. Es ist leicht zu sehen, daß unsere Gruppe Γ genau dann auflösbar ist, wenn die Autotopismengruppe Λ auflösbar ist, d.h. wenn $\mathrm{Iso}(K)$ auflösbar ist.

Wir kommen jetzt zum letzten Thema dieses Paragraphen. Wir wollen die Koordinatisierung der projektiven Ebenen vom Lenz Typ mindestens VIb beschreiben. Solche Ebenen sind insbesondere von Lenz Typ mindestens V, d.h. sie sind Ebenen über Semikörpern. Lenz Typ mindestens VIb bedeutet, daß es einen Punkt v gibt, so daß jede Gerade durch v eine Translationsachse ist, und dieser Punkt v ist dann eine duale Translationsachse. Also müssen wir klären für welche Semikörper K jede Gerade durch (∞) eine Translationsachse von $P(K)$ ist. Hierzu starten wir wieder ganz allgemein, und bestimmen die Gruppe $\mathrm{Aut}(P(K,T))_{[[0],(0,0)]}$ in der Ebene über einem beliebigen Ternärkörper.

Lemma 18: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Sei $a \in K\backslash\{0\}$. Es existiert genau ein $\overline{a} \in K$ mit $a + \overline{a} = 0$. Weiter existiert für jedes $t \in K$ genau ein $\theta_a(t) \in K$ mit*

$$T(\theta_a(t), a, t) = 0.$$

Die Abbildung $\theta_a : K \to K$ ist bijektiv mit $\theta_a(0) = 0$ und $\theta_a(\overline{a}) = 1$. Ist weiter $x \in K\backslash\{\overline{a}\}$, so existiert genau ein $\varphi_a(x) \in K$ mit

$$T(\theta_a(x), \varphi_a(x), x) = \varphi_a(x).$$

Es ist $\varphi_a(x) \neq a$, $\varphi_a(0) = 0$ und $\varphi_a : K\backslash\{\overline{a}\} \to K\backslash\{a\}$ ist bijektiv.

Weiter definiert die folgende Abbildung α_a

$$\begin{aligned}
(x,y) &\mapsto (\varphi_a(x), T(\theta_a(y), \varphi_a(x), y)),\ (x,y \in K,\ x \neq \overline{a}),\\
(\overline{a},y) &\mapsto (\theta_a(y)),\ (y \in K),\\
(s) &\mapsto (a, sa),\ (s \in K),\\
(\infty) &\mapsto (\infty),\\
[s,t] &\mapsto [\theta_a(T(s,\overline{a},t)), t],\ (s,t \in K),\\
[c] &\mapsto [\varphi_a(c)],\ (c \in K,\ c \neq \overline{a}),\\
[\overline{a}] &\mapsto [\infty],\\
[\infty] &\mapsto [a]
\end{aligned}$$

Permutationen der Punkt und Geradenmengen von $P(K,T)$.

Beweis: Die Aussage über $\overline{a}$ ist klar, da $(K,+)$ eine Loop ist. Sei $t \in K$. Nach den Axiomen (T0) und (T1) eines Ternärkörpers existiert genau ein Paar $(\theta_a(t), u) \in K^2$ mit

$$\begin{aligned}
T(\theta_a(t), a, u) &= 0,\\
u = T(\theta_a(t), 0, u) &= t,
\end{aligned}$$

und dies ergibt Existenz und Eindeutigkeit von $\theta_a(t)$. Wegen $T(0,a,0) = 0$ ist $\theta_a(0) = 0$ und wegen $T(1,a,\overline{a}) = a + \overline{a} = 0$ ist auch $\theta_a(\overline{a}) = 1$. Die Abbildung θ_a ist auch bijektiv, denn ist $x \in K$, so gibt es nach Axiom (T3) eines Ternärkörpers genau ein $t \in K$ mit $T(x,a,t) = 0$, und dies ist gleichwertig zu $\theta_a(t) = x$. Damit sind die Aussagen über θ_a bewiesen.

Sei $x \in K\backslash\{\overline{a}\}$. Wir wissen bereits $\theta_a(x) \neq \theta_a(\overline{a}) = 1$. Nach §2.Lemma 8.(b) gibt es somit genau ein $\varphi_a(x) \in K$ mit

$$T(\theta_a(x), \varphi_a(x), x) = T(1, \varphi_a(x), 0) = \varphi_a(x),$$

d.h. Existenz und Eindeutigkeit von $\varphi_a(x)$ sind gezeigt. Wegen $T(\theta_a(0), 0, 0) = 0$ ist auch $\varphi_a(0) = 0$. Wäre $\varphi_a(x) = a$, so hätten wir

$$a = \varphi_a(x) = T(\theta_a(x), \varphi_a(x), x) = T(\theta_a(x), a, x) = 0$$

nach Definition von $\theta_a(x)$; ein Widerspruch, d.h. es ist $\varphi_a(x) \neq a$. Wir müssen jetzt zeigen, daß $\varphi_a : K\backslash\{\overline{a}\} \to K\backslash\{a\}$ bijektiv ist.

Sei also $y \in K\backslash\{a\}$ gegeben. Nach Axiom (T1) eines Ternärkörpers gibt es genau ein $(s,t) \in K^2$ mit

$$\begin{aligned}
T(s,y,t) &= y,\\
T(s,a,t) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $T(s,a,t) = 0$ ist gleichwertig zu $\theta_a(t) = s$, d.h. es gibt genau ein $t \in K$ mit

$$T(\theta_a(t), y, t) = y.$$

Es ist $\overline{a} \neq 0$, also auch

$$T(\theta_a(\overline{a}), y, \overline{a}) = T(1, y, \overline{a}) = y + \overline{a} \neq y,$$

d.h. es gibt genau ein $t \in K\backslash\{\overline{a}\}$ mit $T(\theta_a(t), y, t) = y$, und dies ist gleichwertig zu $\varphi_a(t) = y$. Also ist $\varphi_a : K\backslash\{\overline{a}\} \to K\backslash\{a\}$ tatsächlich bijektiv.

Wir kommen jetzt zur Abbildung α_a. Wir zeigen, daß α_a auf Punkt und Geradenmenge jeweils bijektiv ist, und beginnen mit der Punktmenge. Sei $x \in K\backslash\{\overline{a}\}$. Ist $u \in K$, so gibt es wegen $\varphi_a(x) \neq a$ genau ein $(s,t) \in K^2$ mit

$$T(s, \varphi_a(x), t) = u,\ T(s, a, t) = 0,$$

d.h. es gibt genau ein $t \in K$ mit $T(\theta_a(t), \varphi_a(x), t) = u$. Also bildet α_a die Menge $\{x\} \times K$ bijektiv auf $\{\varphi_a(x)\} \times K$ ab. Damit folgt, daß α_a auch $(K\backslash\{\overline{a}\}) \times K$ bijektiv auf $(K\backslash\{a\}) \times K$ abbildet. Weiter wird $\{\overline{a}\} \times K$ bijektiv auf K abgebildet, und da $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ eine Loop ist, wird auch K bijektiv auf $\{a\} \times K$ abgebildet. Damit ist α_a eine Permutation der Punktmenge.

Wir kommen jetzt zur Geradenmenge. Sei $t \in K$. Ist dann $y \in K$, so existiert wegen $\overline{a} \neq 0$ nach (T1) genau ein $(s,u) \in K^2$ mit $T(s, \overline{a}, u) = y$ und $u = T(s, 0, u) = t$, d.h. es gibt genau ein $s \in K$ mit $T(s, \overline{a}, t) = y$. Also wird $K \times \{t\}$ bijektiv auf sich selbst abgebildet, und damit wird insgesamt K^2 bijektiv auf K^2 abgebildet. Die Bijektivität von φ_a ergibt, daß die Geradenabbildung auch $K \cup \{\infty\}$ permutiert.

■

Nach dieser technischen Vorbereitung können wir jetzt unsere Kollineationen mit Achse [0] und Zentrum $(0,0)$ explizit angeben.

Lemma 19: *Sei (K,T) ein Ternärkörper und definiere $\overline{a}, \theta_a, \varphi_a, \alpha_a$ für $a \in K\backslash\{0\}$ wie in Lemma 18. Wir schreiben*

$$M := \left\{ a \in K\backslash\{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall (s,t \in K, x \in K\backslash\{\overline{a}\}) : T(\theta_a(T(s,x,t)), \varphi_a(x), T(s,x,t)) \\ \qquad\qquad = T(\theta_a(T(s,\overline{a},t)), \varphi_a(x), t), \\ \forall (s,t \in K) : T(\theta_a(T(s,\overline{a},t)), a, t) = sa \end{array} \right\}.$$

Sei weiter $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$. Ist dann $a \in M$, so gelten $\theta_a(s\overline{a}) = s$ für alle $s \in K$ und $\alpha_a \in \Gamma_{[[0],(0,0)]}$. Ist umgekehrt $a \in K\backslash\{0\}$ mit $\alpha_a \in \Gamma$, so gilt $a \in M$. Es ist

$$\Gamma_{[[0],(0,0)]} = \{\alpha_a : a \in M\} \cup \{1\}$$

und $P(K,T)$ ist genau dann $([0],(0,0))$-transitiv, wenn $M = K\backslash\{0\}$ ist.

Beweis: Sei $a \in K\backslash\{0\}$. Wir wollen zeigen, daß genau dann $\alpha_a \in \Gamma$ ist, wenn $a \in M$ gilt. Da α_a nach Lemma 18 bijektiv auf Punkt- und Geradenmenge ist, ist nach §6.Lemma 4 genau dann $\alpha_a \in \Gamma$, wenn für Punkte $p \in K^2 \cup K \cup \{\infty\}$ und Geraden $l \in K^2 \cup K \cup \{\infty\}$ aus pIl stets $\alpha_a(p) I \alpha(l)$ folgt, wobei I die Inzidenz in $P(K,T)$ bezeichnet.

Gehen wir also die Liste der möglichen Inzidenzen durch. Sind $p = (x, y)$, $l = [s, t]$ mit $x, y, s, t \in K$, $x \neq \overline{a}$, so besagt pIl gerade $y = T(s, x, t)$, und es ist $\alpha_a(p) = (\varphi_a(x), T(\theta_a(y), \varphi_a(x), y)$, $\alpha_a(l) = [\theta_a(T(s, \overline{a}, t)), t]$, d.h. es muss

$$T(\theta_a(T(s, x, t)), \varphi_a(x), T(s, x, t)) = T(\theta_a(T(s, \overline{a}, t)), \varphi_a(x), t)$$

gelten. Dies ist gerade die erste Bedingung in der Definition von M.

Jetzt betrachten wir $p = (\overline{a}, y)$, $l = [s, t]$ mit $y, s, t \in K$. Die Inzidenz pIl besagt wieder $y = T(s, \overline{a}, t)$ und es ist $\alpha_a(p) = (\theta_a(y))$, $\alpha_a(l) = [\theta_a(T(s, \overline{a}, t)), t]$, und wegen $\theta_a(y) = \theta_a(T(s, \overline{a}, t))$ gilt immer $\alpha_a(p) I \alpha_a(l)$.

Nun kommen wir zum Fall $p = (s)$, $l = [s', t]$ mit $s, s', t \in K$. Dann besagt pIl gerade $s' = s$ und es ist $\alpha_a(p) = (a, sa)$, $\alpha_a(l) = [\theta_a(T(s, \overline{a}, t)), t]$, d.h. $\alpha_a(p) I \alpha_a(l)$ bedeutet $sa = T(\theta_a(T(s, \overline{a}, t)), a, t)$, und dies ist gerade die zweite Bedingung in der Definition von M.

Jetzt kommen wir zum Fall $p = (x, y)$, $l = [c]$ mit $x, y, c \in K$, $x, c \neq \overline{a}$. Dann besagt pIl genau $c = x$, und wir haben $\alpha_a(p) = (\varphi_a(x), T(\theta_a(y), \varphi_a(x), y))$, $\alpha_a(l) = [\varphi_a(x)]$, also ist stets $\alpha_a(p) I \alpha_a(l)$. Ist $p = (\infty)$, $l = [c]$ mit $c \in K \backslash \{\overline{a}\}$, so gilt ebenfalls immer $\alpha_a(p) = (\infty) I [\varphi_a(c)] = \alpha_a(l)$.

Die Fälle $p = (\overline{a}, y)$ $(y \in K)$ oder $p = (\infty)$, $l = [\overline{a}]$ sowie $p = (s)$, $l = [\infty]$ $(s \in K \cup \{\infty\})$ werden offenbar auch erhalten.

Also ist tatsächlich genau dann α_a in Γ, wenn $a \in M$ ist. Jetzt sei $a \in M$ gegeben. Ist dann $s \in K$, so gilt

$$\theta_a(s\overline{a})a = T(\theta_a(T(s, \overline{a}, 0)), a, 0) = sa,$$

und wegen $a \neq 0$ folgt $\theta_a(s\overline{a}) = s$. Für $y \in K$ gilt

$$(0, y)^{\alpha_a} = (\varphi_a(0), T(\theta_a(y), \varphi_a(0), y)) = (0, T(\theta_a(y), 0, y)) = (0, y),$$

und für jedes $s \in K$ ist

$$[s, 0]^{\alpha_a} = [\theta_a(T(s, \overline{a}, 0)), 0] = [\theta_a(s\overline{a}), 0] = [s, 0]$$

sowie $[0]^{\alpha_a} = [\varphi_a(0)] = [0]$. Also hat α_a Achse $[0]$ und Zentrum $(0, 0)$, d.h. $\alpha_a \in \Gamma_{[[0],(0,0)]}$.

Jetzt sei umgekehrt $\alpha \in \Gamma_{[[0],(0,0)]}$ gegeben. Ist $\alpha = 1$, so sind wir fertig, d.h. wir nehmen $\alpha \neq 1$ an. Nach §5.Lemma 4 ist dann $[\infty]^\alpha \neq [\infty]$. Andererseits ist wegen $(\infty) I [0]$ auch $(\infty) = (\infty)^\alpha I [\infty]^\alpha$, d.h. es existiert ein $a \in K$ mit $[\infty]^\alpha = [a]$. Wegen $[0]^\alpha = [0]$ ist $a \neq 0$. Nach Voraussetzung haben wir $(0, y)^\alpha = (0, y)$ für $y \in K$ und $[s, 0]^\alpha = [s, 0]$ für $s \in K$, sowie $[0]^\alpha = [0]$, $(\infty)^\alpha = (\infty)$. Für jedes $s \in K$ folgt

$$(s)^\alpha = ([s, 0] \wedge [\infty])^\alpha = [s, 0] \wedge [\infty]^\alpha = [s, 0] \wedge [a] = (a, sa).$$

Insbesondere haben wir damit $(0)^\alpha = (a, 0)$ und somit gilt für jedes $t \in K$

$$[0, t]^\alpha = ((0, t) \vee (0))^\alpha = (0, t) \vee (a, 0) = [\theta_a(t), t].$$

Ist jetzt $x \in K\backslash\{\overline{a}\}$, so ist $\theta_a(x) \neq \theta_a(\overline{a}) = 1$, und wegen $[x] = (x,x) \vee (\infty) = ([1,0] \wedge [0,x]) \vee (\infty)$ folgt

$$[x]^\alpha = ([1,0] \wedge [0,x]^\alpha) \vee (\infty) = ([1,0] \wedge [\theta_a(x), x]) \vee (\infty) = (\varphi_a(x), \varphi_a(x)) \vee (\infty) = [\varphi_a(x)].$$

Daher muss dann auch $[\overline{a}]^\alpha = [\infty]$ sein. Für $x, y \in K$ mit $x \neq \overline{a}$ folgen jetzt

$$\begin{aligned} (x,y)^\alpha &= ([x] \wedge [0,y])^\alpha = [\varphi_a(x)] \wedge [\theta_a(y), y] = (\varphi_a(x), T(\theta_a(y), \varphi_a(x), y)), \\ (\overline{a},y)^\alpha &= ([\overline{a}] \wedge [0,y])^\alpha = [\infty] \wedge [\theta_a(y), y] = (\theta_a(y)), \end{aligned}$$

d.h. es ist $\alpha = \alpha_a$ und insbesondere $a \in M$.

Es ist $(0)I[0,0]$ nicht auf der Achse $[0]$ und für jedes $a \in M$ gilt $(0)^\alpha = (a,0)$. Nach §5.Lemma 6 ist $P(K,T)$ somit genau dann $([0],(0,0))$-transitiv, wenn $M = K\backslash\{0\}$ ist.

■

Für allgemeine Ternärkörper ist die Bedingung für $([0],(0,0))$-Transitivität aus Lemma 19 leider etwas unübersichtlich. In dem uns interessierenden Fall eines Semikörpers, läßt sich die Bedingung jedoch leicht auswerten. Hierzu definieren wir:

Definition 5: Sei K ein Semikörper. Dann heißt K rechtsinvers, wenn es für jedes $a \in K\backslash\{0\}$ ein $a^{-1} \in K$ mit $(ba)a^{-1} = b$ für alle $b \in K$ gibt. Analog heißt K linksinvers, wenn es für $a \in K\backslash\{0\}$ stets ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}(ab) = b$ für alle $b \in K$ gibt, d.h. wenn der duale Semikörper K^t rechtsinvers ist. Schließlich heißt K invers, wenn K links- und rechtsinvers ist.

In §12 wird sich herausstellen, daß diese drei Bedingungen alle äquivalent sind.

Lemma 20: *Sei K ein Semikörper.*

(a) *Ist K rechtsinvers und definieren wir für $a \in K\backslash\{0\}$ $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ durch $aa^{-1} = 1$, so ist $(ba)a^{-1} = (ba^{-1})a = b$ für alle $b \in K$. Weiter ist $(a^{-1})^{-1} = a$ für jedes $a \in K\backslash\{0\}$.*

(b) *Ist K linksinvers und definieren wir für $a \in K\backslash\{0\}$ $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ durch $a^{-1}a = 1$, so ist $a^{-1}(ab) = a(a^{-1}b) = b$ für alle $b \in K$. Weiter ist $(a^{-1})^{-1} = a$ für jedes $a \in K\backslash\{0\}$.*

(c) *Sei K invers. Dann sind für jedes $a \in K\backslash\{0\}$ die über (a) beziehungsweise (b) definierten Elemente $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ gleich.*

Beweis: **(a)** Sei $a \in K\backslash\{0\}$. Es existiert $a' \in K$ mit $(ba)a' = b$ für alle $b \in K$, und da K ein Semikörper ist existiert genau ein $a^{-1} \in K\backslash\{0\}$ mit $aa^{-1} = 1$. Es folgt $aa' = (1a)a' = 1 = aa^{-1}$, d.h. $a' = a^{-1}$ und somit $(ba)a^{-1} = b$ für alle $b \in K$. Für $b \in K$ folgt weiter $((ba^{-1})a)a^{-1} = ba^{-1}$, also auch $(ba^{-1})a = b$. Insbesondere ist $a^{-1}a = (1a^{-1})a = 1$, d.h. $(a^{-1})^{-1} = a$.
(b) Dies folgt durch Anwendung von (a) auf K^t.

(c) Klar nach (a).

■

Damit erreichen wir jetzt unsere gewünschte Kennzeichnung der projektiven Ebenen vom Lenz Typ mindestens VIb.

Satz 21: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Dann ist genau dann jede Gerade durch (∞) eine Translationsachse von $P(K,T)$, wenn K ein rechtsinverser Semikörper ist.*

Beweis: Nach §7.Lemma 2 ist genau dann jede Gerade durch (∞) eine Translationsachse von $P(K,T)$, wenn $[\infty]$ und $[0]$ Translationsachsen sind, und nach §5.Lemma 15.(a) ist dies genau dann der Fall, wenn $[\infty]$ eine Translationsachse und (∞) eine duale Translationsachse von $P(K,T)$ ist, und $P(K,T)$ zusätzlich $([0],(0,0))$-transitiv ist.

Definieren wir also $\overline{a},\theta_a,\varphi_a$ für $a\in K\backslash\{0\}$ und M wie in Lemma 19, so folgt mit §7.Satz 17 und Lemma 19, daß genau dann jede Gerade durch (∞) eine Translationsachse von $P(K,T)$ ist, wenn K ein Semikörper mit $M=K\backslash\{0\}$ ist.

Sei also K ein Semikörper. Wir müssen zeigen, daß K genau dann rechtsinvers ist, wenn $M=K\backslash\{0\}$ ist. Zunächst sei K als rechtsinvers vorausgesetzt. Sei $a\in K\backslash\{0\}$. Wegen $a+\overline{a}=0$ ist $\overline{a}=-a$. Für $t\in K$ gilt $\theta_a(t)a+t=T(\theta_a(t),a,t)=0$, d.h.

$$\theta_a(t)=-ta^{-1}$$

da K rechtsinvers ist. Jetzt sei $x\in K\backslash\{0,-a\}$. Wegen $x^{-1}\neq(-a)^{-1}=-a^{-1}$ ist $x^{-1}+a^{-1}\neq 0$. Es gilt nach Definition von $\varphi_a(x)$ zunächst

$$\varphi_a(x)=T(\theta_a(x),\varphi_a(x),x)=\theta_a(x)\varphi_a(x)+x=x-(xa^{-1})\varphi_a(x),$$

also

$$x=\varphi_a(x)+(xa^{-1})\varphi_a(x)=(1+xa^{-1})\varphi_a(x)=(xx^{-1}+xa^{-1})\varphi_a(x)$$
$$=\left(x\left(x^{-1}+a^{-1}\right)\right)\varphi_a(x).$$

Da K rechtsinvers ist, folgt weiter

$$\left(x\left(x^{-1}+a^{-1}\right)\right)\varphi_a(x)=x=\left(x\left(x^{-1}+a^{-1}\right)\right)\left(x^{-1}+a^{-1}\right)^{-1},$$

und wegen $x(x^{-1}+a^{-1})\neq 0$ besagt dies

$$\varphi_a(x)=\left(x^{-1}+a^{-1}\right)^{-1}.$$

Seien $s,x,t\in K$ mit $x\neq 0,-a$. Die Rechtsinversenbedingung ergibt

$$(s(x+a))a^{-1}=(sx)a^{-1}+(sa)a^{-1}=s+(sx)a^{-1}=(sx)x^{-1}+(sx)a^{-1}$$
$$=(sx)(x^{-1}+a^{-1}),$$

und eine erneute Anwendung liefert

$$\left((sx+t)a^{-1}-(t-sa)a^{-1}\right)\left(x^{-1}+a^{-1}\right)^{-1}=\left((s(x+a))a^{-1}\right)\left(x^{-1}+a^{-1}\right)^{-1}=sx.$$

Diese Gleichung besagt gerade

$$\begin{aligned}T(\theta_a(T(s,x,t)),\varphi_a(x),T(s,x,t)) &= -((sx+t)a^{-1})\left(x^{-1}+a^{-1}\right)^{-1}+sx+t\\ &= -((t-sa)a^{-1})\left(x^{-1}+a^{-1}\right)^{-1}+t=T(\theta_a(T(s,-a,t)),\varphi_a(x),t),\end{aligned}$$

und für $x=0$ ist dies ebenfalls klar. Außerdem ist nach Lemma 20.(a)

$$T(\theta_a(T(s,-a,t)),a,t)=-((t-sa)a^{-1})a+t=-t+sa+t=sa,$$

und wir haben $a\in M$ eingesehen.

Jetzt sei umgekehrt $M=K\backslash\{0\}$ vorausgesetzt, also insbesondere $-1\in M$. Für $t\in K$ gilt

$$0=T(\theta_{-1}(t),-1,t)=-\theta_{-1}(t)+t,$$

d.h. $\theta_{-1}(t)=t$. Weiter ist $\overline{-1}=-(-1)=1$ und für $x\in K\backslash\{1\}$ ist

$$\varphi_{-1}(x)=T(\theta_{-1}(x),\varphi_{-1}(x),x)=x\varphi_{-1}(x)+x,$$

also

$$(1-x)\varphi_{-1}(x)=x.$$

Sei $x\in K\backslash\{0\}$. Es ist $1-x\neq 1$, und definieren wir $x^{-1}\in K\backslash\{0\}$ durch $xx^{-1}=1$, so folgt $x\varphi_{-1}(1-x)=1-x=xx^{-1}-x=x(x^{-1}-1)$, und wegen $x\neq 0$ ergibt dies

$$\varphi_{-1}(1-x)=x^{-1}-1.$$

Wegen $-1\in M$ folgt weiter für jedes $s\in K$

$$\begin{aligned}&sx^{-1}-s=s(x^{-1}-1)=T(\theta_{-1}(T(s,1,0)),\varphi_{-1}(1-x),0)\\ &=T(\theta_{-1}(T(s,1-x,0)),\varphi_{-1}(1-x),T(s,1-x,0))=(s(1-x))(x^{-1}-1)+s(1-x)\\ &\qquad=sx^{-1}-(sx)x^{-1}-s(1-x)+s(1-x)=sx^{-1}-(sx)x^{-1},\end{aligned}$$

d.h. $(sx)x^{-1}=s$ und K ist rechtsinvers.

■

Aufgaben zu §10

(136) Zeigen Sie, daß die komponentenweise Hinterausführung sowie die komponentenweise Inverse von Isotopien wieder eine Isotopie ist.

(137) Seien K,K' zwei Ternärkörper. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $\psi:K\to K'$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn (ψ,ψ,ψ) eine Isotopie ist.

(138) Konstruieren Sie Ternärkörper K, K' und bijektive Abbildungen $\xi, \psi, \zeta : K \to K'$ mit $\zeta(T(s,x,t)) = T'(\xi(s), \psi(x), \zeta(t))$ für alle $s, x, t \in K$ so, daß $\zeta(0) \neq 0$ ist.

(139) Beweisen Sie Lemma 10.

(140) Seien (K,T) ein Ternärkörper, $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$, $\Lambda := \Gamma_{(0,0),(0),(\infty)}$. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathrm{Iso}_0(K)$ aller Hauptautotopismen von (K,T) ein Normalteiler der Autotopismengruppe $\mathrm{Iso}(K,T)$ ist. Zeigen Sie weiter, daß unter dem Isomorphismus aus Korollar 15 gerade $\mathrm{Iso}_0(K) \simeq \Gamma_{[[0],(0)]}$ ist.

(141) Sei K ein Semikörper. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Iso}_0(K)$ dann zur multiplikativen Gruppe des Schiefkörpers $N_m(K)$ isomorph ist.

(142) Seien (K,T) ein Ternärkörper, $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K,T))$ und $\Lambda := \Gamma_{(0,0),(0),(\infty)}$. Seien $u, v, p, q \in K\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, daß genau dann

$$K_{r_u^{-1}(v),u} \simeq K_{r_p^{-1}(q),p}$$

ist, wenn es ein $\alpha \in \Lambda$ mit $(p,q) = (u,v)^\alpha$ gibt. Folgern Sie, daß die Isomorphietypen der zu (K,T) isotopen Ternärkörper bijektiv den Bahnen von Λ auf $(K\backslash\{0\})^2$ entsprechen.

(143) Seien K ein Ternärkörper, $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K))$ und $\Lambda := \Gamma_{(0,0),(0),(\infty)}$. Zeigen Sie, daß genau dann jeder zu K isotope Ternärkörper auch zu K isomorph ist, wenn Λ transitiv auf $(K\backslash\{0\})^2$ wirkt.

(144) Seien K ein linearer Ternärkörper und K_0 ein Hauptisotop von K. Zeigen Sie, daß auch K_0 linear ist, und das die additive Loop von K und K_0 gleich sind.

(145) Beweisen Sie Lemma 17.

(146) Ein zu einem linearen Ternärkörper isotoper Ternärkörper ist selbst linear.

(147) Seien K ein Schiefkörper und K' ein zu K isotoper Ternärkörper. Zeigen Sie, daß K' ein zu K isomorpher Schiefkörper ist.

(148) Seien K ein Semikörper und $\Gamma = \mathrm{Aut}(P(K))_{[\infty],(\infty)}$. Zeigen Sie, daß Γ genau dann auflösbar ist, wenn $\mathrm{Iso}(K)$ auflösbar ist.

(149) Sei $0 < \theta \leq \pi$ gegeben, und setze $\epsilon := e^{i\theta}$. Wir definieren auf $\mathbb{C}^2$ die folgende Multiplikation

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac + \epsilon b\overline{d}, ad + b\overline{c}).$$

Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}^2$ so zu einem Semikörper wird, und bestimmen Sie die drei Nuklei.

(150) Seien K ein Schiefkörper, θ ein Antiautomorphismus von K und $a, b \in K$. Es gelte:

1. $\dim_{Z(K)} K < \infty$.
2. Es gibt ein $m \geq 1$ mit $\theta^m = 1$.
3. Es ist $xx^\theta \in Z(K)$ für jedes $x \in K$.
4. Es gilt $xx^\theta + xb \neq a$ für alle $x \in K$.

Dann ist $xx^\theta = x^\theta x$ für jedes $x \in K$. Betrachte $L := K^2$ mit der gewöhnlichen Addition und der folgenden Multiplikation ($x, y, u, v \in K$):

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu + avy^\theta, uy + x^\theta v + y^\theta bv).$$

Zeigen Sie, daß $(L, +, \cdot)$ ein Semikörper ist.

(151) Finden Sie ein Beispiel für die Situation in Aufgabe (150).

(152) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe (150) sei zusätzlich K ein endlicher Körper und $\theta \neq \mathrm{id}$. Durch $x \mapsto (x, 0)$ fassen wir K als eine Teilmenge von L auf. Zeigen Sie, daß dann $N_r(L) = N_m(L) = K$ gilt.

(153) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe (150) sei zusätzlich K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, daß L genau dann assoziativ ist, wenn $\theta = 1$ ist.

(154) Seien p eine ungerade Primzahl, $n \geq 2$ und $1 \leq r < n$. Sei $a \in \mathrm{GF}(q)$ kein Quadrat. Betrachte $K := \mathrm{GF}(q)^2$ mit $q := p^n$ versehen mit der gewöhnlichen Addition und der folgenden Multiplikation ($x, y, u, v \in \mathrm{GF}(q)$):

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu + ay^{p^r} v^{p^r}, yu + xv).$$

Weiter sei $F := \{x \in \mathrm{GF}(q) : x^{p^r} = x\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $m := (n, r)$ der größte gemeinsame Teiler von n und r, so ist $F = \mathrm{GF}(q^m)$.

(b) K ist ein kommutativer Semikörper.

(c) Durch $x \mapsto (x, 0)$ wird $\mathrm{GF}(q)$ ein Unterkörper von K.

(155) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe (154) ist $N_r(K) = N_l(K) = N(K) = Z(K) = F$. Insbesondere ist K nicht assoziativ.

(156) Sei (K, T) ein Ternärkörper. Zeigen Sie, daß genau dann jeder Punkt auf $[\infty]$ eine duale Translationsachse von $P(K, T)$ ist, wenn K ein linksinverser Semikörper ist.

§11 Homologien und der Satz von Pappus

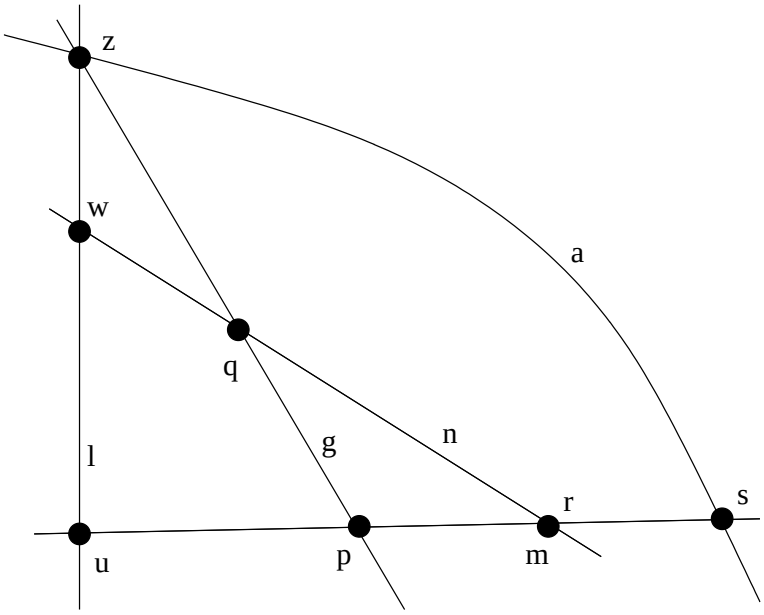
In den Abschnitten §7, §9 und §10 haben wir uns mit transitiven Gruppen von Elationen beschäftigt. Dies sind in gewissem Sinne Fragen der additiven Struktur, unsere expliziten Beschreibungen verschiedener Elationsgruppen in den projektiven Ebenen $P(K,T)$ über Ternärkörpern sowie in der projektiven Ebene $\mathrm{PG}(V)$ über einem Vektorraum legen diese Vorstellung zumindest nahe. Die Formeln für Homologien dagegen betreffen stärker die multiplikative Struktur im jeweiligen Ternärkörper. Dies ist natürlich nur eine Art grobes Leitmotiv, aber zur Einordnung ganz nützlich.

In diesem Paragraphen werden wir uns nun etwas stärker der Untersuchung von Homologien zuwenden. Wir beginnen dabei mit einigen Lemmata, die analog zu den Ergebnissen des §7 zu sehen sind. Ein Analogon der Lenz Figur wollen wir an dieser Stelle allerdings noch nicht einführen, dies wird auf einen späteren Paragraphen verschoben.

Lemma 1: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a, l \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq l$ zwei verschiedene Geraden. Es gebe zwei Punkte $u, v \in l$ mit $u \neq v$ so, daß π sowohl (a,u)- als auch (a,v)-transitiv ist. Dann ist π auch (a,z)-transitiv für jedes $z \in l$.*

Beweis: In §3 hatten wir eingesehen, daß es bis auf Isomorphie genau eine projektive Ebene der Ordnung 2 gibt, nämlich die Ebene über dem Körper GF(2), und diese ist (a,z)-transitiv für alle a, z. Also können wir annehmen, daß die Ordnung von π mindestens 3 ist, d.h. durch jeden Punkt gehen mindestens vier Geraden.

Setze $z := l \wedge a$. Wir zeigen zuerst, daß π zumindest (a,z)-transitiv ist. Es gibt $u, v \in l$ mit $u \neq v$ so, daß π (a,u)- und (a,v)-transitiv ist. Ist $z \in \{u, v\}$, so sind wir bereits fertig, d.h. wir können $z \neq u, v$ annehmen.



Wähle eine Gerade $g \in \mathfrak{L}_z$ mit $g \neq a, l$. Wir zeigen, daß $\Gamma_{[a,z]}$ transitiv auf $g\backslash\{z\}$ wirkt, wobei $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ ist. Seien also $p, q \in g\backslash\{z\}$ gegeben. Wir können auch $p \neq q$ annehmen. Dann ist $p, q \notin a, l$, also auch $p \neq u$ und $m := p \vee u \neq a, g, l$. Setze noch $s := a \wedge m$. Wähle nun eine Gerade $n \in \mathfrak{L}_q$ mit $n \neq g, q \vee s, q \vee u$, also $s, u \notin n$. Wegen $q \notin l$ ist $n \neq l$ und wir setzen $w := l \wedge n$. Wegen $n \neq g = q \vee z$ ist $z \notin n$, und somit $w \neq z$. Wegen $u \notin n$ ist auch $w \neq u$, und aus $q \notin l$ folgt $w \neq q$. Da π als (a, u)-transitiv vorausgesetzt ist, gibt es ein $\delta \in \Gamma_{[a,u]}$ mit $w = v^\delta$, und nach §5.Lemma 12 ist π auch $(a, w) = (a^\delta, v^\delta)$-transitiv.

Wegen $u \in m$, $u \notin n$ ist $m \neq n$ und $r := m \wedge n \neq u$. Wegen $m \wedge l = u \neq w$ ist auch $r \neq w$. Wäre $r \in a$, so $r = a \wedge m = s$, aber $s \notin n$, also ist auch $r \notin a$. Wir erhalten $\alpha \in \Gamma_{[a,u]}$, $\beta \in \Gamma_{[a,w]}$ mit $r = p^\alpha$ und $q = r^\beta$. Also ist $\gamma := \alpha\beta \in \Gamma_{[a]}$ mit $p^\gamma = p^{\alpha\beta} = r^\beta = q \neq p$. Nach §5.Lemma 2 ist $g = p \vee q$ eine Fixgerade von γ. Wegen $l^\gamma = l^{\alpha\beta} = l^\beta = l$ ist auch l eine Fixgerade von γ. Damit ergibt §5.Lemma 4 auch $z_\gamma = g \wedge l = z$, d.h. $\gamma \in \Gamma_{[a,z]}$. Nach §5.Lemma 6 ist π damit (a, z)-transitiv.

Also können wir annehmen, daß π schon (a, z)-transitiv ist. Insbesondere wirkt $\Gamma_{[a,z]}$ transitiv auf $l\backslash\{z\}$, und mit §5.Lemma 12 folgt die Behauptung.

■

Diese schlichte Beobachtung hat starke Konsequenzen.

Satz 2: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a \in \mathfrak{L}$ eine Gerade. Dann ist π genau dann desarguesch, wenn π (a, z)-transitiv für jedes $z \in \mathfrak{P}\backslash a$ ist.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Klar nach §7.Satz 14.
"'$\Longleftarrow$"' Ist $z \in a$, so wähle eine Gerade $l \in \mathfrak{L}_z\backslash\{a\}$. Dann gibt es $u, v \in l\backslash\{z\}$ mit $u \neq v$ und nach Voraussetzung ist π (a, u)- und (a, v)-transitiv. Nach Lemma 1 ist π auch (a, z)-transitiv. Nach §7.Satz 14 ist π desarguesch.

■

In §6 hatten wir eine affine Ebene desarguesch genannt, wenn ihr projektiver Abschluß desarguesch ist. Jetzt sind wir in der Lage eine weniger künstliche Beschreibung desarguescher affiner Ebenen anzugeben. Wir sagen, daß in einer affinen Ebene $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ der affine Satz von Desargues gilt, wenn die folgende Aussage in π wahr ist:

> *Affiner Satz von Desargues:*
> *Liegen zwei Dreiecke $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ zentral zu einem Punkt z, und ist $p_1 \vee q_1 \parallel p_2 \vee q_2$ und $p_1 \vee r_1 \parallel p_2 \vee r_2$, so ist auch $q_1 \vee r_1 \parallel q_2 \vee r_2$.*

Dabei ist der Begriff "zentral" genau wie im Fall projektiver Ebenen definiert. Damit haben wir dann das folgende Korollar:

Korollar 3: *Eine affine Ebene ist genau dann desarguesch, wenn in ihr der affine Satz von Desargues gilt.*

Beweis: Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine affine Ebene und $\overline{\pi}$ ihr projektiver Abschluß, dessen Ferngerade wir mit l_∞ bezeichnen. Offenbar gilt in π genau dann der affine Satz von

Desargues, wenn $\overline{\pi}$ für jedes $z \in \mathfrak{P}$ stets (l_∞, z)-desarguesch ist. Mit §6.Satz 7 und Satz 2 folgt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn $\overline{\pi}$ desarguesch ist, d.h. wenn die affine Ebene π desarguesch ist.

■

Dualisieren wir Lemma 1, so erhalten wir die folgende Aussage: Sind z, u zwei verschiedene Punkte, und gibt es zwei verschiedene Geraden $g, h \in \mathfrak{L}_u$ für die π (g, z)- und (h, z)-transitiv ist, so ist π auch (l, z)-transitiv für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}_u$. Diese Situation wollen wir nun in der projektiven Ebene über einem Ternärkörper untersuchen. Zur Formulierung des entsprechenden Satzes benötigen wir noch eine kleine Definition.

Definition 1: Ein Fastkörper ist ein Quasikörper $(K, +, \cdot)$ mit assoziativer Multiplikation.

Satz 4: *Sei (K, T) ein Ternärkörper. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$P(K, T)$ ist $(l, (\infty))$-transitiv für jede Gerade l durch (0).*

(b) *$P(K, T)$ ist $([\infty], (\infty))$- und $([0, 0], (\infty))$-transitiv.*

(c) *(K, T) ist ein Fastkörper.*

Ist (K, T) ein Fastkörper, so ist $[\infty]$ eine Translationsachse von $P(K, T)$ und $P(K, T)$ ist $(l, (0))$-transitiv für jede Gerade l durch (∞).

Beweis: Die Äquivalenz von (a) und (b) ist klar nach Lemma 1. Nach §7.Satz 6 gilt genau dann (b), wenn (K, T) eine cartesische Gruppe ist und $P(K, T)$ auch $([0, 0], (\infty))$-transitiv ist. Da ein Fastkörper nach §7.Lemma 8 insbesondere eine cartesische Gruppe ist, ist zur Äquivalenz von (b) und (c) nur zu zeigen, daß eine cartesische Gruppe $(K, +, \cdot)$ genau dann ein Fastkörper ist, wenn $P(K, T)$ $([0, 0], (\infty))$-transitiv ist. Wir setzen $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(K, T))$.

Sei also $(K, +, \cdot)$ eine cartesische Gruppe. Nach §9.Lemma 1 ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{[[0,0],(\infty)]} &= \{(x, y) \mapsto (x, ay) | a \in K \backslash \{0\}, \forall (s, x, t \in K) : T(as, x, at) = aT(s, x, t)\} \\ &= \{(x, y) \mapsto (x, ay) | a \in K \backslash \{0\}, \forall (s, x, t \in K) : (as)x + at = a(sx + t)\}. \end{aligned}$$

Also ist $P(K, T)$ genau dann $([0, 0], (\infty))$-transitiv, wenn $(as)x + at = a(sx + t)$ für alle $a, s, x, t \in K$ mit $a \neq 0$ gilt. Für $a = 0$ gilt diese Gleichung immer. Ist K ein Fastkörper, so haben wir für $a, s, x, t \in K$ sofort

$$(as)x + at = a(sx) + at = a(sx + t).$$

Jetzt sei dies umgekehrt vorausgesetzt. Sind $a, b, c \in K$, so haben wir $a(b+c) = a(1b+c) = (a1)b + ac = ab + ac$, d.h. das Rechtsdistributivgesetz gilt, und nach §7.Lemma 8 ist K ein Quasikörper. Weiter haben wir $(ab)c = (ab)c + a0 = a(bc + 0) = a(bc)$, d.h. die Multiplikation ist assoziativ und K ist ein Fastkörper.

Damit ist die erste Aussage bewiesen, und wir nehmen jetzt an, daß K ein Fastkörper ist. Nach §7.Satz 9 ist $[\infty]$ eine Translationsachse von $P(K,T)$, und insbesondere ist $P(K,T)$ auch $([\infty],(0))$-transitiv. Da die Multiplikation assoziativ ist, ist $N_m(K) = K$ und §9.Lemma 2.(c) ergibt

$$\Gamma_{[[0],(0)]} = \{(x,y) \mapsto (ax,y) | a \in K \backslash \{0\}\},$$

und damit ist $P(K,T)$ auch $([0],(0))$-transitiv. Nach Lemma 1 ist $P(K,T)$ jetzt $(l,(0))$-transitiv für jede Gerade l durch (∞).

■

Fastkörper sind auch von Interesse in der Theorie der Transformationsgruppen, da sie scharf zweifach transitive Wirkungen liefern. Dies wird in den Aufgaben zu diesem Paragraphen diskutiert. Als eine unmittelbare geometrische Anwendung erhalten wir die folgende Aussage:

Korollar 5: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a, b \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq b$ zwei verschiedene Geraden. Für jedes $z \in b$ sei π (a,z)-transitiv. Dann ist π auch für jeden Punkt $z \in a$ (b,z)-transitiv und $a \wedge b$ ist eine duale Translationsachse von π.*

Beweis: Wähle ein Viereck (o,e,b,a) in der dualen Ebene π^*, und sei (K,T) der zugehörige Ternärkörper von π^*. Da π^* nach Voraussetzung (l,a)-transitiv für jede Gerade l von π^* durch b ist, ist $P(K,T)$ $(l,(\infty))$-transitiv für jede Gerade l durch (0). Nach Satz 4 ist π^* auch (l,b)-transitiv für jede Gerade l durch a und $a \wedge b$ ist eine Translationsachse von π^*, d.h. π ist (b,z)-transitiv für jedes $z \in a$ und $a \wedge b$ ist eine duale Translationsachse von π.

■

In §5 hatten wir für je zwei Geraden a, b die Gruppe $\Gamma_{[a,b]}$ als die Menge aller zentralaxialen Kollineationen definiert, die a als Achse und ein Zentrum in b haben. Der Fall $a = b$ waren dabei gerade die Translationsgruppen. Mit diesem Begriff können wir unser Korollar auch in der folgenden Form aussprechen.

Korollar 6: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $a, b \in \mathfrak{L}$ und $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *$\Gamma_{[a,b]}$ wirkt transitiv auf $\mathfrak{P} \backslash (a \cup b)$.*

(b) *Für jeden Punkt $z \in b$ ist π (a,z)-transitiv.*

(c) *$\Gamma_{[b,a]}$ wirkt transitiv auf $\mathfrak{P} \backslash (a \cup b)$.*

(d) *Für jeden Punkt $z \in a$ ist π (b,z)-transitiv.*

Beweis: Ist $a = b$, so ist dies gerade §5.Lemma 15.(a). Also können wir im folgenden auch $a \neq b$ annehmen.
(b)$\Longleftrightarrow$(d): Klar nach Korollar 5.

(a)$\Longrightarrow$(b): Sei $z \in b$. Wähle eine Gerade $l \in \mathfrak{L}_z$ mit $l \neq b, a$. Seien $p, q \in l$ mit $p \neq q$, $p, q \notin a$ und $p, q \neq z$. Dann ist $p, q \notin a \cup b$, also existiert ein $\alpha \in \Gamma_{[a,b]}$ mit $q = p^\alpha$. Wegen $p \neq q$ folgt mit §5.Lemma 2 und §5.Lemma 4 sofort $l = p \vee q \in \mathrm{Fix}_{\mathfrak{L}}(\alpha) = \mathfrak{L}_{z_\alpha} \cup \{a\}$, d.h. $z_\alpha = l \wedge b = z$, also $\alpha \in \Gamma_{[a,z]}$. Nach §5.Lemma 6 ist π nun (a, z)-transitiv.

(b)$\Longrightarrow$(a): Seien $p, q \in \mathfrak{P} \backslash (a \cup b)$ mit $p \neq q$. Dann ist $l := p \vee q \neq b$, und wir haben $z := b \wedge l$ mit $p \vee z = q \vee z = l$, $p, q \neq z$ und $p, q \notin a$. Da π (a, z)-transitiv ist, existiert $\alpha \in \Gamma_{[a,z]} \subseteq \Gamma_{[a,b]}$ mit $q = p^\alpha$.

(c)$\Longleftrightarrow$(d): Dies folgt durch Anwendung der schon bewiesenen Äquivalenz von (a) und (b).

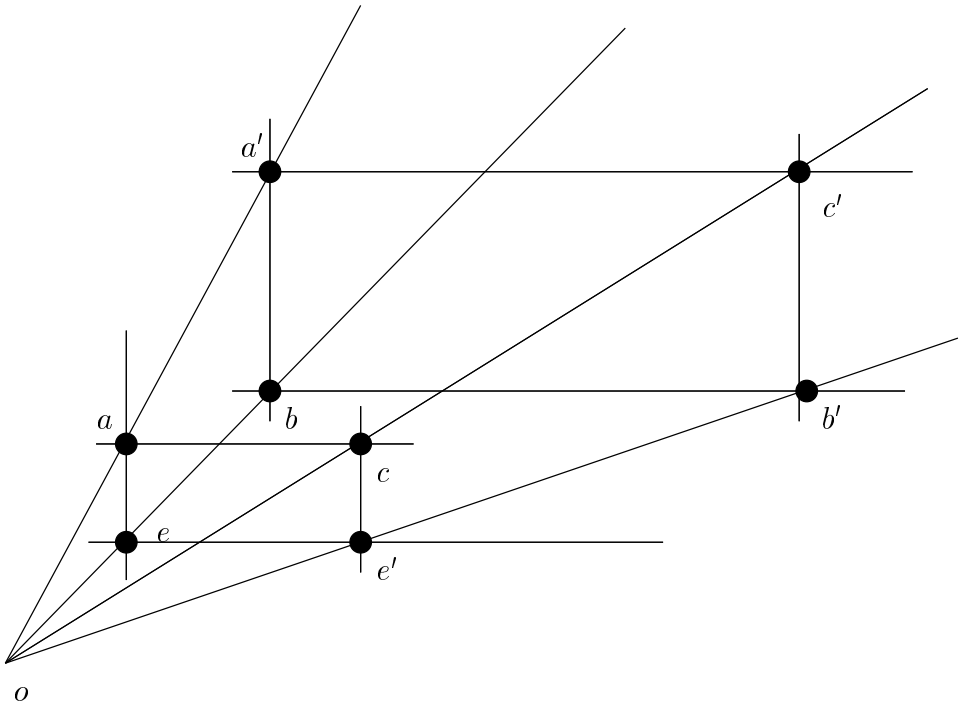
■

Wie eingangs erwähnt soll in diesem Paragraphen die multiplikative Struktur untersucht werden. Nach unseren bisherigen Aussagen über Homologien wollen wir nun die Assoziativität der multiplikativen Loop des Ternärkörpers einer projektiven Ebene untersuchen. Wir hatten in §7.Satz 14 unter anderem gezeigt, daß eine projektive Ebene π genau dann desarguesch ist, wenn alle ihre Ternärkörper Schiefkörper sind. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß es in Wahrheit schon ausreicht, daß die Multiplikation in jedem dieser Ternärkörper assoziativ ist.

Wir hatten sogar bewiesen, daß π desarguesch ist, wenn nur ein Ternärkörper von π ein Schiefkörper ist. Tatsächlich war dies sogar unser Zugang zum Beweis dieses Satzes, wir haben in einem einzigen koordinatisierenden Ternärkörper gearbeitet. Dagegen reicht es nicht aus, wenn die Multiplikation nur in einem einzigen Ternärkörper assoziativ ist. Wir benötigen tatsächlich das alle, oder zumindest sehr viele, Ternärkörper assoziative Multiplikation haben, und dementsprechend werden wir auch nicht in einem festen Koordinatensystem arbeiten. Wir beginnen mit der sogenannten Reidemeister Bedingung.

Definition 2: Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und (o, e, u, v) ein Viereck in π. Wir sagen, daß für (o, e, u, v) die Reidemeister-Bedingung gilt, wenn die folgende Aussage erfüllt ist:

Seien $e' \in (e \vee u) \backslash \{u, (e \vee u) \wedge (o \vee v)\}$, $a \in (e \vee v) \backslash \{v\}$ und setze $c := (a \vee u) \wedge (e' \vee v)$. Wegen $e' \notin o \vee v$ ist $c \neq o$. Weiter sei $b \in (o \vee e) \backslash \{(o \vee e) \wedge (u \vee v)\}$, also insbesondere $b \notin u \vee v$. Wegen $e \notin o \vee v$ ist $a \notin o \vee v$ also auch $o \vee a \neq b \vee v$ und wir können $a' := (o \vee a) \wedge (b \vee v)$ setzen und haben $a' \notin u \vee v$. Wegen $e' \notin o \vee u$ ist auch $o \vee e' \neq b \vee u$ und wir haben $b' := (b \vee u) \wedge (o \vee e')$ mit $b' \notin u \vee v$. Schließlich können wir $c' := (a' \vee u) \wedge (b' \vee v)$ setzen, und haben wieder $c' \notin u \vee v$. Die Reidemeister Bedingung fordert jetzt, daß $c' \in o \vee c$ ist.



Anschaulich kann man sich die Reidemeister-Bedingung in der folgenden Form merken. Wir haben ein Parallelogramm e, e', c, a mit Seiten durch die beiden Fernpunkte u, v. Dieses strecken wir vom Zentrum o aus, indem zunächst der Punkt b gewählt wird und sich dann die Punkte b', a' und c' ergeben. Die Reidemeister Bedingung fordert dann, daß sich diese Konstruktion schließt, d.h. das c' tatsächlich zu o, c kollinear ist.

Lemma 7: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und (o, e, u, v) ein Viereck in π. Die Multiplikation des zugehörigen Ternärkörpers sei assoziativ. Dann erfüllt π die Reidemeister-Bedingung für (o, e, u, v).*

Beweis: Sei (K, T) der zugehörige Ternärkörper. Dann können wir $\pi = P(K, T)$ mit $o = (0, 0)$, $e = (1, 1)$, $u = (0)$ und $v = (\infty)$ annehmen. Seien jetzt e', a, b wie in der Reidemeister Bedingung gegeben. Wegen $e' \in [0, 1] \backslash \{(0), (0, 1)\}$, $a \in [1] \backslash \{(\infty)\}$, $b \in [1, 0] \backslash \{(1)\}$ können wir $e' = (x_1, 1)$, $a = (1, s_1)$ und $b = (x_2, x_2)$ mit $x_1, x_2, s_1 \in K$, $x_1 \neq 0$ schreiben. Es sind $o \vee e' = [x_1^{-1}, 0]$ und $o \vee a = [s_1, 0]$. Für den Punkt c ergibt sich $c = [0, s_1] \wedge [x_1] = (x_1, s_1)$, und somit ist $o \vee c = [s_1 x_1^{-1}, 0]$. Für die drei restlichen Punkte in der Reidemeister Bedingung folgen

$$\begin{aligned} a' &= [x_2] \wedge [s_1, 0] = (x_2, s_1 x_2), \\ b' &= [0, x_2] \wedge [x_1^{-1}, 0] = (x_1 x_2, x_2), \\ c' &= [0, s_1 x_2] \wedge [x_1 x_2] = (x_1 x_2, s_1 x_2), \end{aligned}$$

und insbesondere ist $c' \in [s_1 x_1^{-1}, 0] = o \vee c$.

■

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung dieses Lemmas, d.h. die Reidemeister Bedingung impliziert die Assoziativität der Multiplikation. Diese Tatsache werden wir aber nicht benötigen. Es gibt auch eine analoge additive Reidemeister Bedingung, die dann die Assoziativität der Addition kennzeichnet. Anschaulich handelt diese von der Parallelverschiebung von Parallelogrammen, Details werden in den Übungen zu diesem Paragraphen besprochen.

Wir werden beweisen, daß die Reidemeister Bedingung für jedes Viereck einer projektiven Ebene den Satz von Desargues in dieser Ebene impliziert. Es ist technisch günstig einige Spezialfälle im Satz von Desargues gesondert zu behandeln. Hierzu beweisen wir jetzt drei Lemmata, die es jeweils erlauben einige Spezialfälle im Satz von Desargues von vornherein auszuschließen. Die Beweise dieser Lemmata sind einfache Umgehungskonstruktionen, nur die Notwendigkeit jedesmal die Voraussetzungen des Satzes von Desargues nachzuweisen, läßt diese einfachen Beweise komplizierter aussehen als sie sind.

Lemma 8: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin a$. Für je zwei Dreiecke $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ in π, die zentral zu z liegen mit $s := (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a$, $(p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a$ und $s \notin z \vee r_1$ gelte auch $(q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) \in a$. Dann ist π bereits (a, z)-desarguesch.*

Beweis: Seien $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei Dreiecke in π, die zentral zu z liegen mit

$$\begin{aligned} s &:= (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a, \\ t &:= (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, daß auch

$$u := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2)$$

auf a liegt. Setze $l_1 := z \vee p_1$, $l_2 := z \vee q_1$ und $l_3 := z \vee r_1$. Ist $s \notin l_3$, so ergibt die Voraussetzung bereits $u \in a$. Also können wir im folgenden $s \in l_3$ annehmen, d.h. $s = l_3 \wedge a$. Nach §6.Lemma 1 ist $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \notin a$. Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} q_2' &:= (((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2) \wedge l_2, \\ q_1' &:= (((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1) \wedge l_2. \end{aligned}$$

Wäre $q_2' \in a$, so $q_2' = (((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2) \wedge a = (q_1 \vee r_1) \wedge a \in q_1 \vee r_1$, und es folgt $q_2' = (q_1 \vee r_1) \wedge l_2 = q_1$, und damit ist $q_1 \in a$; ein Widerspruch. Also ist auf jeden Fall $q_2' \notin a$. Angenommes es wäre $u \notin a$. Dann ist auch $q_2' \neq q_2$, denn wäre $q_2' = q_2$, so $q_2 \in ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2$, also $(q_1 \vee r_1) \wedge a \in q_2 \vee r_2$ und somit $u = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) = (q_1 \vee r_1) \wedge a \in a$; ein Widerspruch. Daraus folgt weiter, daß auch $q_1' \neq q_1$ ist, denn wäre $q_1' = q_1$, so $q_1 \in ((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1$, also $(p_2 \vee q_2') \wedge a \in p_1 \vee q_1$ und somit $(p_2 \vee q_2') \wedge a = (p_1 \vee q_1) \wedge a = s$, d.h. $s \in p_2 \vee q_2'$ und $q_2' \in s \vee p_2 = p_2 \vee q_2$, und somit ergibt sich der Widerspruch $q_2' = (p_2 \vee q_2) \wedge l_2 = q_2$.

Wir zeigen jetzt, daß

$$\Delta_1' := (p_1, q_1', r_1),\ \Delta_2' := (p_2, q_2', r_2)$$

zwei Dreiecke sind, die zentral zu z liegen. Wäre $q_2' = z$, so $z \in ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2$, d.h. $(q_1 \vee r_1) \wedge a \in z \vee r_2 = l_3$, und somit $(q_1 \vee r_1) \wedge a = l_3 \wedge a = s$, d.h. $s \in q_1 \vee r_1$; im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist $q_2' \neq z$.

Wäre $q_1' = z$, so $z \in ((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1$, d.h. $(p_2 \vee q_2') \wedge a \in p_1 \vee z = l_1$, und somit $(p_2 \vee q_2') \wedge a = (p_2 \vee q_2') \wedge l_1 = p_2$ da wegen $q_2' \neq z$ auch $q_2' \notin l_1$ ist. Damit ist $p_2 \in a$; ein Widerspruch, und somit ist $q_1' \neq z$ gezeigt.

Wäre $q_1' = q_2'$, so $q_2' \in ((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1$, d.h. $(p_2 \vee q_2') \wedge a \in p_1 \vee q_2'$. Weiter ist $q_2' \notin l_1 = p_1 \vee p_2$, d.h. $p_2 \vee q_2' \neq p_1 \vee q_2'$ und somit $(p_2 \vee q_2') \wedge a = (p_2 \vee q_2') \wedge (p_1 \vee q_2') = q_2'$, und somit ist $q_2' \in a$, im Widerspruch zu $q_2' \notin a$. Also ist tatsächlich $q_1' \neq q_2'$.

Wegen $q_1', q_2' \neq z$ sind p_1, q_1', r_1 und p_2, q_2', r_2 jeweils paarweise verschieden. Hätten wir $((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2 = p_2 \vee r_2$, so $(q_1 \vee r_1) \wedge a \in p_2 \vee r_2$ also $(q_1 \vee r_1) \wedge a = (p_2 \vee r_2) \wedge a = t$, d.h. $t \in q_1 \vee r_1$ und somit $q_1 \in r_1 \vee t = p_1 \vee r_1$; ein Widerspruch, d.h. $((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2 \neq p_2 \vee r_2$. Wären nun p_2, q_2', r_2 kollinear, so $q_2' = (((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2) \wedge (p_2 \vee r_2) = r_2 \in l_3$; ein Widerspruch. Damit ist Δ_2' ein Dreieck.

Aus $((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1 = p_1 \vee r_1$ folgte $(p_2 \vee q_2') \wedge a \in p_1 \vee r_1$, d.h. $(p_2 \vee q_2') \wedge a = (p_1 \vee r_1) \wedge a = t$, und somit $t \in p_2 \vee q_2'$ und $q_2' \in p_2 \vee t = p_2 \vee r_2$, aber wir haben schon gezeigt, daß p_2, q_2', r_2 nicht kollinear sind. Also ist $((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1 \neq p_1 \vee r_1$ und aus $q_1' \in p_1 \vee r_1$ folgte $q_1' = (((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1) \wedge (p_1 \vee r_1) = p_1 \in l_1$; erneut ein Widerspruch. Also ist $q_1' \notin p_1 \vee r_1$ und p_1, q_1', r_1 sind nicht kollinear.

Damit ist diese Zwischenbehauptung bewiesen. Es ist

$$\begin{aligned} (p_1 \vee q_1') \wedge (p_2 \vee q_2') &= (((p_2 \vee q_2') \wedge a) \vee p_1) \wedge (p_2 \vee q_2') = (p_2 \vee q_2') \wedge a \in a, \\ (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) &= t \in a \end{aligned}$$

und wäre $(p_2 \vee q_2') \wedge a \in l_3$, so $(p_2 \vee q_2') \wedge a = l_3 \wedge a = s$, also $s \in p_2 \vee q_2'$ und somit $q_2' \in s \vee p_2 = p_2 \vee q_2$, also $q_2' = (p_2 \vee q_2) \wedge l_2 = q_2$, aber wir haben oben schon $q_2' \neq q_2$ festgestellt. Damit ist $(p_2 \vee q_2') \wedge a \notin l_3$, und wir können auf Δ_1', Δ_2' unsere Voraussetzung anwenden. Also ist

$$u' := (q_1' \vee r_1) \wedge (q_2' \vee r_2) \in a.$$

Wegen $q_2' \vee r_2 = ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2$ folgt $u' = (((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2) \wedge a = (q_1 \vee r_1) \wedge a$. Wäre $q_1' \vee r_1 \neq q_1 \vee r_1$, so folgte $u' = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_1' \vee r_1) = r_1$, aber $r_1 \notin a$, d.h. es ist $q_1' \in q_1' \vee r_1 = q_1 \vee r_1$ und somit $q_1' = (q_1 \vee r_1) \wedge l_2 = q_1$, aber wir haben oben schon $q_1' \neq q_1$ gezeigt.

Damit haben wir einen endgültigen Widerspruch erhalten, und somit gilt $u \in a$. ■

Lemma 9: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$ mit $z \notin a$. Für je zwei Dreiecke $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ in π, die zentral zu z liegen und für die $(p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a$ und $(p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a$ sowie $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ gelten sei auch $(q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) \in a$. Dann ist π (a, z)-desarguesch.*

Beweis: Seien $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei Dreiecke in π, die zentral zu z liegen, und es gelte

$$\begin{aligned} s &:= (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a, \\ t &:= (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a. \end{aligned}$$

Setze

$$u := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2),\ l_1 := p_1 \vee z,\ l_2 := q_1 \vee z,\ l_3 := r_1 \vee z.$$

Sei zusätzlich $s \notin l_3$ vorausgesetzt. Wir nehmen an, daß $u \notin a$ ist, und wollen einen Widerspruch erhalten. Wäre $l_3 \wedge a \in p_1 \vee q_1, p_2 \vee q_2$, so folgte $s = (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) = l_3 \wedge a \in l_3$; ein Widerspruch, d.h. nach eventuellen Vertauschen von Δ_1, Δ_2 können wir $l_3 \wedge a \notin p_1 \vee q_1$ annehmen. Nach §6.Lemma 1 haben wir $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 \notin a$ also auch $q_1 \vee r_1 \neq a$ und $(q_1 \vee r_1) \wedge a \neq r_2$. Wegen $r_2 \notin l_2$ ist auch $((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2 \neq l_2$, und wir können

$$q_2' := (((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2) \wedge l_2$$

definieren. Wir behaupten jetzt, daß

$$\Delta_3 := (p_2, q_2', r_2)$$

ein Dreieck ist, und das Δ_1, Δ_3 zentral zu z liegen. Wäre $q_2' = z$, so $z \in ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2$, d.h. $(q_1 \vee r_1) \wedge a \in r_2 \vee z = l_3$, und da wegen $q_1 \notin l_3$ auch $q_1 \vee r_1 \neq l_3$ ist, folgt $(q_1 \vee r_1) \wedge a = (q_1 \vee r_1) \wedge l_3 = r_1$, d.h. $r_1 = (q_1 \vee r_1) \wedge a \in a$; ein Widerspruch. Also ist $q_2' \neq z$. Wäre $q_2' = q_1$, so $q_1 \in ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2$, d.h. $r_2 \in ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2 = q_1 \vee ((q_1 \vee r_1) \wedge a) = q_1 \vee r_1$, also $q_1 \in r_1 \vee r_2 = l_3$; ein Widerspruch. Also ist $q_2' \neq q_1$. Weiter sind p_2, q_2', r_2 paarweise verschieden, und wäre $p_2 \vee r_2 = q_2' \vee r_2 = ((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2$, d.h. $(q_1 \vee r_1) \wedge a = (p_2 \vee r_2) \wedge a = t$, und somit ist $t \in q_1 \vee r_1$ im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist $p_2 \vee r_2 \neq q_2' \vee r_2$ und p_2, q_2', r_2 sind nicht kollinear.

Damit haben wir die Zwischenbehauptung über Δ_3 eingesehen. Es ist

$$\begin{aligned} (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) &= t \in a, \\ u' := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2' \vee r_2) &= (q_1 \vee r_1) \wedge (((q_1 \vee r_1) \wedge a) \vee r_2) = (q_1 \vee r_1) \wedge a \in a. \end{aligned}$$

Der verbleibende Seitenschnittpunkt ist

$$s' := (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2').$$

Angenommen es wäre $s' \in a$. Dann ist $s' = (p_1 \vee q_1) \wedge a = s \in p_2 \vee q_2$. Wäre also $p_2 \vee q_2' \neq p_2 \vee q_2$, so $s' = (p_2 \vee q_2) \wedge (p_2 \vee q_2') = p_2$ aber $p_2 \notin a$; ein Widerspruch. Also ist $p_2 \vee q_2' = p_2 \vee q_2$ und somit $q_2' = (p_2 \vee q_2') \wedge l_2 = (p_2 \vee q_2) \wedge l_2 = q_2$. Damit folgt der Widerspruch $u = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2' \vee r_2) \in a$.

Also ist $s' \notin a$. Wir haben $l_3 \wedge a \notin p_1 \vee q_1$ vorausgesetzt, und mit der Kontraposition der Voraussetzung dieses Lemmas folgt $l_3 \wedge a \in p_2 \vee q_2'$. Wäre $s' \in l_3$, so folgte $s' = (p_2 \vee q_2') \wedge l_3 = l_3 \wedge a \in a$, d.h. es ist $s' \notin l_3$. Weiter haben wir nach §6.Lemma 1

auch $s' \neq z$ und $s' \notin l_1, l_2$. Insbesondere ist $s' \notin l_3 = z \vee r_2$ also $((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2 \neq z \vee s'$, und wir können den folgenden Punkt definieren:

$$x := (((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2) \wedge (z \vee s').$$

Dann gelten

$$x \neq z, s'.$$

Wäre $x = z$, so $z \in ((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2$, also $(r_1 \vee s') \wedge a \in z \vee r_2 = l_3$, und damit $(r_1 \vee s') \wedge a = l_3 \wedge a \in p_2 \vee q_2'$, und somit $s' = (r_1 \vee s') \wedge (p_2 \vee q_2') = (r_1 \vee s') \wedge a \in a$ da wegen $(p_2 \vee q_2') \wedge l_3 = l_3 \wedge a \neq r_1$ ja $r_1 \notin p_2 \vee q_2'$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $s' \notin a$, und wir haben $x \neq z$. Wäre $x = s'$, so $s' \in ((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2$ und somit $((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2 = r_1 \vee s'$, d.h. $s' \in r_1 \vee r_2 = l_3$; ein Widerspruch. Also ist auch $x \neq s'$.

Wir behaupten jetzt, daß

$$\begin{aligned} \Delta_1^1 &:= (r_1, p_1, s'), & \Delta_1^2 &:= (r_1, q_1, s'), \\ \Delta_2^1 &:= (r_2, p_2, x), & \Delta_2^2 &:= (r_2, q_2', x) \end{aligned}$$

vier Dreiecke sind, und das Δ_1^1, Δ_2^1 und Δ_1^2, Δ_2^2 jeweils zentral zu z liegen.

Wir beginnen mit Δ_1^1, Δ_2^1. Wir haben bereits $z \neq x, s'$, $x \neq s'$ und $z \vee x = z \vee s'$. Wegen $s' \notin l_1, l_2, l_3$ ist auch $z \vee s' \neq l_1, l_2, l_3$. Also ist nur noch zu zeigen, daß Δ_1^1, Δ_2^1 wirklich Dreiecke sind. Wäre $r_2 \vee p_2 = ((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2$, so ist $t = (r_2 \vee p_2) \wedge a = (r_1 \vee s') \wedge a \in r_1 \vee s'$, also $s' \in r_1 \vee t = p_1 \vee r_1$ im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist $r_2 \vee p_2 \neq ((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2$. Wären also r_2, p_2, x kollinear, so $x = (r_2 \vee p_2) \wedge (((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2) = r_2$, also auch $r_2 = x \in z \vee s'$ und $s' \in z \vee r_2 = l_3$; ein Widerspruch. Also ist Δ_1^1 tatsächlich ein Dreieck. Wegen $r_1 \notin p_1 \vee q_1 = p_1 \vee s'$ sind auch r_1, p_1, s' nicht kollinear, d.h. Δ_2^1 ist ein Dreieck.

Wäre $r_2 \vee q_2' = ((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2$, so $u' = (r_2 \vee q_2') \wedge a = (r_1 \vee s') \wedge a \in r_1 \vee s'$, also $s' \in u' \vee r_1 = q_1 \vee r_1$, d.h. $s' = (p_1 \vee q_1) \wedge (q_1 \vee r_1) = q_1 \in l_2$; ein Widerspruch. Also ist $r_2 \vee q_2' \neq ((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2$, und wären r_2, q_2', x kollinear, so folgte $x = (r_2 \vee q_2') \wedge (((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2) = r_2$, d.h. $r_2 = x \in z \vee s'$ und somit $s' \in z \vee r_2 = l_3$; ein Widerspruch. Somit ist auch Δ_1^2 ein Dreieck. Wären schließlich r_1, q_1, s' kollinear, so hätten wir den Widerspruch $r_1 \in q_1 \vee s' = p_1 \vee q_1$, d.h. auch Δ_2^2 ist ein Dreieck.

Damit ist die Zwischenbehauptung über diese Dreiecke eingesehen. Wir rechnen nun einige der Seitenschnittpunkte aus:

$$\begin{aligned} (r_1 \vee p_1) \wedge (r_2 \vee p_2) &= t \in a, \\ (r_1 \vee s') \wedge (r_2 \vee x) &= (r_1 \vee s') \wedge (((r_1 \vee s') \wedge a) \vee r_2) = (r_1 \vee s') \wedge a \in a, \\ (r_1 \vee q_1) \wedge (r_2 \vee q_2') &= u' \in a. \end{aligned}$$

Außerdem ist $l_3 \wedge a \notin p_1 \vee q_1 = p_1 \vee s' = q_1 \vee s'$. Wegen $x \in z \vee s' \neq p_2 \vee q_2'$ und $x \neq s' = (p_2 \vee q_2') \wedge (z \vee s')$ ist $x \notin p_2 \vee q_2'$. Wir haben $l_3 \wedge a \in p_2 \vee q_2'$. Wäre also $l_3 \wedge a \in p_2 \vee x$, so folgte $p_2 \vee x = p_2 \vee (l_3 \wedge a) = p_2 \vee q_2'$, d.h. p_2, q_2', x sind kollinear, im Widerspruch zu $x \notin p_2 \vee q_2'$. Also ist $l_3 \wedge a \notin p_2 \vee x$ und ebenso folgt $l_3 \wedge a \notin q_2' \vee x$.

Also können wir auf Δ_1^1, Δ_2^1 und Δ_1^2, Δ_2^2 jeweils die Voraussetzung des Lemmas anwenden, und erhalten

$$\begin{aligned} u_1 &:= (p_1 \vee s') \wedge (p_2 \vee x) = (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee x) \in a, \\ u_2 &:= (q_1 \vee s') \wedge (q_2' \vee x) = (p_1 \vee q_1) \wedge (q_2' \vee x) \in a. \end{aligned}$$

Also ist

$$u_1 = u_2 = (p_1 \vee q_1) \wedge a = s,$$

Nach §6.Lemma 1 ist $u_1 = u_2 \neq x$, also muss $p_2 \vee x = q_2' \vee x$ sein, d.h. p_2, q_2', x sind kollinear, und dies ein Widerspruch zu $x \notin p_2 \vee q_2'$.

Also muss im Fall $s \notin l_3$ stets $u \in a$ gelten. Mit Lemma 8 folgt, daß π tatsächlich (a, z)-desarguesch ist.

■

Lemma 10: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$ mit $z \notin a$. Für je zwei Dreiecke $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ in π, die zentral zu z liegen und für die $(p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a$ und $(p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a$ sowie $(q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) \notin z \vee p_1$, $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ gelten sei auch $(q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) \in a$. Dann ist π (a, z)-desarguesch.*

Beweis: Seien $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei Dreiecke die zentral zu z liegen, und es gelte

$$\begin{aligned} s &:= (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a, \\ t &:= (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a. \end{aligned}$$

Ist

$$u := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2),$$

so ist $u \in a$ zu zeigen. Wir setzen $l_1 := p_1 \vee z$, $l_2 := q_1 \vee z$ und $l_3 := r_1 \vee z$. Nach Voraussetzung gilt $u \in a$ wenn $u \notin l_1$, $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ ist. Wir zeigen daß auf die Bedingung $u \notin l_1$ verzichtet werden kann.

Zusätzlich zu $s, t \in a$ sei also $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ vorausgesetzt. Im Fall $u \notin l_1$ können wir unsere Voraussetzung anwenden, d.h. wir können $u \in l_1$ annehmen. Wir nehmen jetzt $u \notin a$ an, und wollen einen Widerspruch erhalten. Nach §6.Lemma 1 ist $u \neq z, s, t$ und $s \notin l_2$, $t \notin l_3$ und somit $s \vee u \neq l_2$, $t \vee u \neq l_3$. Also können wir die folgenden drei Punkte definieren:

$$\begin{aligned} p_3 &:= u \in l_1, \\ q_3 &:= (s \vee u) \wedge l_2 \in l_2, \\ r_3 &:= (t \vee u) \wedge l_3 \in l_3. \end{aligned}$$

Es ist $p_3 = u \neq z$. Wäre $q_3 = z$, so $z \in s \vee u$ und somit $s \in z \vee u = l_1$; im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist $q_3 \neq z$ und ebenso folgt $r_3 \neq z$. Wieder nach §6.Lemma 1

ist $p_3 = u \neq p_1$. Wäre $q_3 = q_1$, so $q_1 \in s \vee u$, also $u \in s \vee u = s \vee q_1 = p_1 \vee q_1$ im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist $q_3 \neq q_1$ und ebenso folgt $r_3 \neq r_1$. Analog erhalten wir auch $p_2 \neq p_3$, $q_2 \neq q_3$ und $r_2 \neq r_3$. Wegen $l_1 \wedge l_2 = l_1 \wedge l_3 = l_2 \wedge l_3 = z$ sind p_3, q_3, r_3 paarweise verschieden und es ist $p_3 \vee q_3 = s \vee u$, $p_3 \vee r_3 = t \vee u$. Wegen $u \notin a = s \vee t$ ist $s \vee u \neq t \vee u$ und somit ist $p_3 \vee q_3 \neq p_3 \vee r_3$ und p_3, q_3, r_3 sind nicht kollinear.

Also ist $\Delta_3 := (p_3, q_3, r_3)$ ein Dreieck und sowohl Δ_1, Δ_3 als auch Δ_2, Δ_3 liegen zentral zu z. Wir haben

$$\begin{aligned}(p_i \vee q_i) \wedge (p_3 \vee q_3) &= (p_i \vee q_i) \wedge (s \vee u) = s \in a,\\ (p_i \vee r_i) \wedge (p_3 \vee r_3) &= (p_i \vee r_i) \wedge (t \vee u) = t \in a,\end{aligned}$$

für $i = 1, 2$, und wäre $u_i := (q_i \vee r_i) \wedge (q_3 \vee r_3) \in l_1$, so folgt mit $l_1 \wedge (q_i \vee r_i) = u$ auch $p_3 = u = u_i \in q_3 \vee r_3$; ein Widerspruch, d.h. $u_i \notin l_1$ für $i = 1, 2$. Nach §6.Lemma 1 ist auch $q_3, r_3 \notin a$. Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Fall 1: Sei $l_1 \wedge a \notin q_3 \vee r_3$. Da wir auch $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ angenommen haben ergibt unsere Voraussetzung jetzt $u_1, u_2 \in a$, d.h. $u_1 = u_2 = (q_3 \vee r_3) \wedge a$, und somit ist auch $u = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) = u_1 \in a$; ein Widerspruch.

Fall 2: Wir kommen nun zum Fall $l_1 \wedge a \in q_3 \vee r_3$. Wäre $u_1 \in a$, so $u_1 = (q_3 \vee r_3) \wedge a = l_1 \wedge a \in l_1$ im Widerspruch zu $u_1 \notin l_1$. Ebenso folgt $u_2 \notin a$. Wegen $u_1 \notin l_1$ ist auch $p_1 \neq u_1$ und $p_1 \notin a$ ergibt $p_1 \vee u_1 \neq a$. Weiter ist $u \notin a$, also $(p_1 \vee u_1) \wedge a \neq u$. Nach §6.Lemma 1 ist $z \neq u_1$ und wäre $z \vee u_1 = ((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u$, so folgt $(p_1 \vee u_1) \wedge a \in u_1 \vee u$ da wegen $u \in l_1$ sicher $u \neq u_1$ ist, und wegen $p_1 \notin q_1 \vee r_1 = u \vee u_1$ ist $p_1 \vee u_1 \neq u \vee u_1$ also $u_1 = (u_1 \vee u) \wedge (u_1 \vee p_1) = (p_1 \vee u_1) \wedge a \in a$; ein Widerspruch, d.h. es ist $z \vee u_1 \neq ((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u$. Also können wir

$$u_3 := (((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u) \wedge (z \vee u_1)$$

setzen. Wir behaupten jetzt, daß

$$\Delta' := (p_1, u_1, r_1),\ \Delta'' := (p_3, u_3, r_3)$$

zwei Dreiecke sind, die zentral zu z liegen.

Wir haben bereits $z \neq u_1$ festgestellt. Nach §6.Lemma 1 ist $u_1 \neq r_1$ und wir haben $p_1 \notin q_1 \vee r_1 = u_1 \vee r_1$, d.h. p_1, u_1, r_1 sind nicht kollinear. Wäre $u_3 = z$, so $z \in ((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u$ und wegen $z \neq u \in l_1$ folgt $(p_1 \vee u_1) \wedge a \in u \vee z = l_1$, d.h. $l_1 \wedge a = (p_1 \vee u_1) \wedge a$ und wegen $u_1 \notin l_1$ folgt weiter $p_1 \vee u_1 \neq l_1$ und $p_1 = (p_1 \vee u_1) \wedge l_1 = l_1 \wedge a \in a$ im Widerspruch zu §6.Lemma 1.

Also ist $u_3 \neq z$ und offenbar $u_3 \vee z = z \vee u_1$. Wir haben $u_1 \notin l_1$ und wäre $u_1 \in l_3$, so $u_1 = (q_1 \vee r_1) \wedge l_3 = r_1$ im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist $u_1 \notin l_1, l_3$ und somit $z \vee u_1 \neq l_1, l_3$. Wäre $u_1 = u_3$, so $u_1 \in ((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u$ und wegen $u_1 \notin a$ ist $(p_1 \vee u_1) \wedge a \neq u_1$, d.h. $u \in ((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u_1 = p_1 \vee u_1$, und da wegen $u_1 \notin l_1$ ja $p_1 \vee u_1 \neq l_1$ ist, folgt mit $u \in l_1$ auch $p_1 = (p_1 \vee u_1) \wedge l_1 = u$; im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Also ist auch $u_3 \neq u_1$. Wegen $z \vee u_1 \neq l_1, l_3$ sind p_3, u_3, r_3 paarweise

verschieden, und wären $p_3 = u, u_3, r_3$ kollinear, so $r_3 \in u \vee u_3 = ((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u$, also $(p_1 \vee u_1) \wedge a \in u \vee r_3 = t \vee u$, da nach §6.Lemma 1 $u \notin l_3$ also $r_3 \neq u$ ist, und somit $(p_1 \vee u_1) \wedge a = (t \vee u) \wedge a = t$ da $u \notin a$ und damit $t \vee u \neq a$ ist. Weiter folgen $t \in p_1 \vee u_1$ und $u_1 \in p_1 \vee t = p_1 \vee r_1$, d.h. p_1, u_1, r_1 sind kollinear; ein Widerspruch da wir schon gezeigt haben, daß Δ' ein Dreieck ist. Damit haben wir die Zwischenbehauptung über Δ', Δ'' eingesehen.

Wir haben

$$\begin{aligned}(p_1 \vee u_1) \wedge (p_3 \vee u_3) &= (p_i \vee u_1) \wedge (((p_1 \vee u_1) \wedge a) \vee u) = (p_1 \vee u_1) \wedge a \in a,\\ (p_1 \vee r_1) \wedge (p_3 \vee r_3) &= t \in a.\end{aligned}$$

Sei weiter

$$v := (u_1 \vee r_1) \wedge (u_3 \vee r_3).$$

Nach Voraussetzung ist $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1 = u_1 \vee r_1$. Wäre nun $l_1 \wedge a \in u_3 \vee r_3$, so folgt mit $l_1 \wedge a \in q_3 \vee r_3$ auch $u_3 \in (l_1 \wedge a) \vee r_3 = q_3 \vee r_3$, da wegen $r_3 \notin l_1$ auch $r_3 \neq l_1 \wedge a$ ist. Weiter ist nach §6.Lemma 1 auch $z \notin q_3 \vee r_3$ also $z \vee u_1 \neq q_3 \vee r_3$ und somit $u_3 = (q_3 \vee r_3) \wedge (z \vee u_1) = u_1$, also $u_1 = u_3$; ein Widerspruch. Damit ist $l_1 \wedge a \notin u_3 \vee r_3$. Wäre schließlich $v \in l_1$, so folgte $v = (u_1 \vee r_1) \wedge l_1 = (q_1 \vee r_1) \wedge l_1 = u = p_3$ im Widerspruch zu §6.Lemma 1, d.h. $v \notin l_1$.

Also können wir auf Δ', Δ'' die Voraussetzung dieses Lemmas anwenden, und erhalten $v \in a$. Dies ergibt $(u_3 \vee r_3) \wedge a = (u_1 \vee r_1) \wedge a = (q_1 \vee r_1) \wedge a$. Ebenso folgt mit q und r vertauscht, daß auch $(u_3 \vee q_3) \wedge a = (q_1 \vee r_1) \wedge a$ ist, d.h. $(u_3 \vee r_3) \wedge a = (u_3 \vee q_3) \wedge a$. Nach §6.Lemma 1 ist $u_3 \notin a$, und damit folgt $u_3 \vee r_3 = u_3 \vee q_3$. Dies ergibt auch $u_3 \in q_3 \vee r_3$ und wegen $q_3 \vee z = l_2 \neq l_3 = r_3 \vee z$ ist $z \notin q_3 \vee r_3$ also $z \vee u_1 \neq q_3 \vee r_3$ und somit $u_3 = (q_3 \vee r_3) \wedge (z \vee u_1) = u_1$; im Widerspruch zu $u_1 \neq u_3$.

Damit sind beide Fälle behandelt, und wir haben somit eingesehen, daß bereits aus $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ immer $u \in a$ folgt. Nach Lemma 9 ist π jetzt (a, z)-desarguesch.

■

Um aus der Reidemeister Bedingung für jedes Viereck den Satz von Desargues zu beweisen, ist es hilfreich eine weitere Hilfsaussage einzuführen.

Definition 3: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Wir sagen, daß in π der Satz vom Viereckschnitt gilt, wenn die folgende Aussage wahr ist:

Sind $l, m, n \in \mathfrak{L}$ drei Geraden und

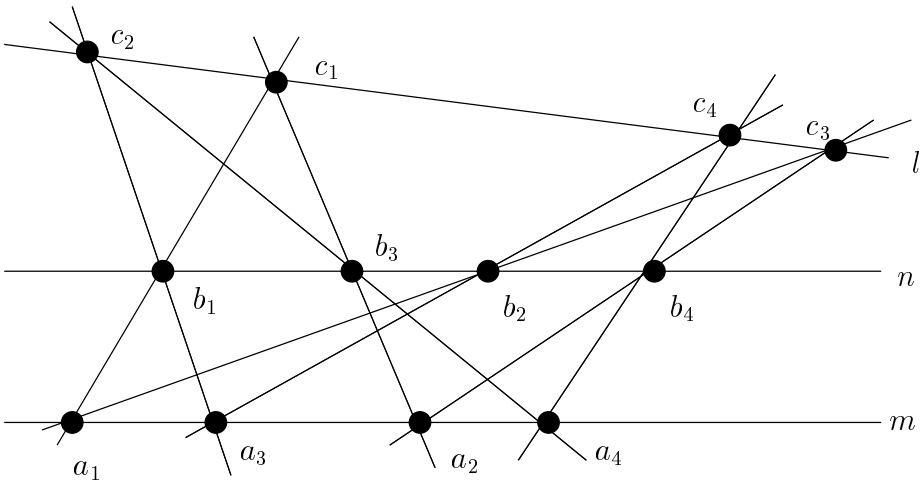
$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, a_4 \in m, \qquad & a_1, a_2, a_3, a_4 \notin l, n,\\ b_1, b_2, b_3, b_4 \in n, \qquad & b_1, b_2, b_3, b_4 \notin l, m,\\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in l, \qquad & c_1, c_2, c_3, c_4 \notin m, n\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}&a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1,\ a_1 \vee b_2 = a_1 \vee c_3,\ a_2 \vee b_3 = a_2 \vee c_1,\ a_2 \vee b_4 = a_2 \vee c_3,\\ &a_3 \vee b_1 = a_3 \vee c_2,\ a_3 \vee b_2 = a_3 \vee c_4,\ a_4 \vee b_3 = a_4 \vee c_2,\end{aligned}$$

so ist auch $a_4 \vee b_4 = a_4 \vee c_4$.

Weiter sagen wir, daß in π der spezielle Satz vom Viereckschnitt gilt, wenn die obige Aussage für je drei nicht kopunktale Geraden l, m, n wahr ist.



Der spezielle Satz vom Viereckschnitt ist ein technischer Hilfsbegriff für die Zwecke dieses Paragraphen. In den Übungen zu diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß der spezielle Satz vom Viereckschnitt zum vollen Satz vom Viereckschnitt äquivalent ist. Wir zeigen jetzt, daß der spezielle Satz vom Viereckschnitt den Satz von Desargues impliziert.

Lemma 11: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, in der der spezielle Satz vom Viereckschnitt gilt. Dann ist π desarguesch.*

Beweis: Seien $z \in \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin a$. Wir zeigen, daß π dann (a, z)-desarguesch ist. Seien dazu $\Delta_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei Dreiecke, die zentral zu z liegen und es gelte

$$\begin{aligned} s &:= (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \in a, \\ t &:= (p_1 \vee r_1) \wedge (p_2 \vee r_2) \in a. \end{aligned}$$

Wir setzen $l_1 := p_1 \vee z$, $l_2 := q_1 \vee z$ und $l_3 := r_1 \vee z$. Weiter wollen wir $u := (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) \notin l_1$ und $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ annehmen. Unter diesen Voraussetzungen werden wir $u \in a$ zeigen.

Angenommen es ist $u \notin a$. Es ist $l_1, l_2, l_3 \neq a$, $a \wedge l_2 \neq u$ da $u \notin a$ und $(a \wedge l_2) \vee u \neq l_1$ sowie $s \vee u \neq l_1$ da $u \notin l_1$. Also können wir die beiden folgenden Punkte definieren:

$$\begin{aligned} w_1 &:= ((a \wedge l_2) \vee u) \wedge l_1, \\ w_2 &:= (s \vee u) \wedge l_1. \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß dann

$$w_1, w_2 \notin a, q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$$

gilt. Nach §6.Lemma 1 ist $p_i, q_i, r_i \notin a$ für $i = 1, 2$. Hätten wir $q_1 \vee r_1 = (a \wedge l_2) \vee u$, so folgte $a \wedge l_2 = l_2 \wedge (q_1 \vee r_1) = q_1$ im Widerspruch zu $q_1 \notin a$, also ist $q_1 \vee r_1 \neq (a \wedge l_2) \vee u$. Wäre also $w_1 \in q_1 \vee r_1$, so $w_1 = (q_1 \vee r_1) \wedge ((a \wedge l_2) \vee u) = u$, d.h. $u \in l_1$; ein Widerspruch. Damit ist $w_1 \notin q_1 \vee r_1$ und ebenso folgt $w_1 \notin q_2 \vee r_2$.

Wegen $u \notin a$ ist $(a \wedge l_2) \vee u \neq a$, wäre also $w_1 \in a$, so $w_1 = ((a \wedge l_2) \vee u) \wedge a = a \wedge l_2 \in l_2$, d.h. $w_1 = l_1 \wedge l_2 = z$ und somit $z = w_1 \in a$; ein Widerspruch. Also ist $w_1 \notin a$.

Nach §6.Lemma 1 ist $s \notin q_1 \vee r_1$ also $s \vee u \neq q_1 \vee r_1$. Wäre also $w_2 \in q_1 \vee r_1$, so $w_2 = (s \vee u) \wedge (q_1 \vee r_1) = u$, d.h. $u \in l_1$; ein Widerspruch. Also ist $w_2 \notin q_1 \vee r_1$ und ebenso folgt $w_2 \notin q_2 \vee r_2$.

Wäre schließlich $w_2 \in a$, so folgt mit $u \notin a$, $s \vee u \neq a$ auch $w_2 = (s \vee u) \wedge a = s$, d.h. $s \in l_1$ erneut im Widerspruch zu §6.Lemma 1. Damit ist auch $w_2 \notin a$ und unsere Zwischenbehauptung ist gezeigt.

Insbesondere ist $w_1 \neq a \wedge l_3$ und $(a \wedge l_3) \vee w_1 \neq q_i \vee r_i$ für $i = 1, 2$ und wir können die beiden folgenden Punkte definieren:

$$\begin{aligned} x_1 &:= (q_1 \vee r_1) \wedge ((a \wedge l_3) \vee w_1), \\ x_2 &:= (q_2 \vee r_2) \wedge ((a \wedge l_3) \vee w_1). \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß dann

$$x_1, x_2 \notin l_1, a, \quad x_1 \notin q_2 \vee r_2,\ x_2 \notin q_1 \vee r_1$$

gelten. Wegen $l_1 \wedge l_3 = z \notin a$ ist $a \wedge l_3 \notin l_1$ und damit $(a \wedge l_3) \vee w_1 \neq l_1$. Wäre $x_1 \in l_1$, so folgte $x_1 = ((a \wedge l_3) \vee w_1) \wedge l_1 = w_1$ und somit $w_1 \in q_1 \vee r_1$; ein Widerspruch, d.h. $x_1 \notin l_1$. Ebenso folgt $x_2 \notin l_1$.

Wegen $w_1 \notin a$ ist sicher $(a \wedge l_3) \vee w_1 \neq a$. Wäre also $x_1 \in a$, so $x_1 = ((a \wedge l_3) \vee w_1) \wedge a = a \wedge l_3$, und somit $x_1 = (q_1 \vee r_1) \wedge l_3 = r_1$ aber $r_1 \notin a$; ein Widerspruch. Also ist $x_1 \notin a$ und ebenso folgt $x_2 \notin a$.

Jetzt nehmen wir $x_1 \in q_2 \vee r_2$ an. Dann ist $x_1 = (q_1 \vee r_1) \wedge (q_2 \vee r_2) = u$, d.h. $u \in (a \wedge l_3) \vee w_1$. Wegen $w_1 \notin q_1 \vee r_1$ ist $w_1 \neq u$ und somit $a \wedge l_3 \in u \vee w_1 = (a \wedge l_2) \vee u$, d.h. $u \in (a \wedge l_2) \vee (a \wedge l_3) = a$; ein Widerspruch. Also ist $x_1 \notin q_2 \vee r_2$ und ebenso folgt $x_2 \notin q_1 \vee r_1$.

Nach §6.Lemma 1 haben wir außerdem $z \notin q_1 \vee r_1$, $s, t \notin l_1, q_1 \vee r_1$. Wäre $l_2 \wedge a \in q_1 \vee r_1$, so $l_2 \wedge a = (q_1 \vee r_1) \wedge l_2 = q_1$ aber $q_1 \notin a$. Also ist $l_2 \wedge a \notin q_1 \vee r_1$ und ebenso folgt $l_3 \wedge a \notin q_1 \vee r_1$. Wir wollen den speziellen Satz vom Vierecksschnitt jetzt auf die drei Geraden $a, l_1, q_1 \vee r_1$ und die Punkte

$$\begin{aligned} z, w_1, p_1, w_2 &\in l_1, & z, w_1, p_1, w_2 &\notin a, q_1 \vee r_1, \\ q_1, r_1, u, x_1 &\in q_1 \vee r_1, & q_1, r_1, u, x_1 &\notin a, l_1, \\ l_2 \wedge a, s, l_3 \wedge a, t &\in a, & l_2 \wedge a, s, l_3 \wedge a, t &\notin l_1, q_1 \vee r_1 \end{aligned}$$

anwenden. Wegen $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1$ sind die drei Geraden $a, l_1, q_1 \vee r_1$ nicht kopunktal.

Wir haben

$$\begin{aligned} z \vee q_1 &= l_2 = (l_2 \wedge a) \vee z, \\ z \vee r_1 &= l_3 = (l_3 \wedge a) \vee z, \\ w_1 \vee u &= (a \wedge l_2) \vee u = w_1 \vee (l_2 \wedge a), \\ w_1 \vee x_1 &= (a \wedge l_3) \vee w_1, \\ p_1 \vee q_1 &= p_1 \vee s, \\ p_1 \vee r_1 &= p_1 \vee t, \\ w_2 \vee u &= s \vee u = w_2 \vee s. \end{aligned}$$

Also sind alle Voraussetzungen des speziellen Satzes vom Viereckschnitt erfüllt, und wir erhalten $w_2 \vee x_1 = w_2 \vee t$, d.h. $x_1 \in w_2 \vee t$. Ebenso ergibt sich $x_2 \in w_2 \vee t$. Wegen $x_1 \in q_1 \vee r_1$, $x_2 \notin q_1 \vee r_1$ ist $x_1 \neq x_2$, also

$$(a \wedge l_3) \vee w_1 = x_1 \vee x_2 = w_2 \vee t.$$

Nach §6.Lemma 1 ist $t \notin l_3$ also auch $t \neq a \wedge l_3$ und somit $w_1 \in (a \wedge l_3) \vee t = a$; ein Widerspruch.

Also gilt im Fall $u \notin l_1$, $l_1 \wedge a \notin q_1 \vee r_1, q_2 \vee r_2$ stets $u \in a$. Nach Lemma 10 ist π (a, z)-desarguesch. Also ist π (a, z)-desarguesch für alle $(a, z) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{P}$ mit $z \notin a$. Mit Satz 2 und §6.Satz 7 folgt, daß π desarguesch ist.

■

Wie schon angekündigt wird sich letztlich herausstellen, daß die Reidemeister Bedingung für alle Vierecke, der spezielle Satz vom Viereckschnitt und der Satz von Desargues alle äquivalent sind. Um dieses Resultat zu erhalten, müssen wir noch den Zusammenhang des speziellen Satzes vom Viereckschnitt mit der Reidemeister Bedingung herstellen. Dies ist die Aufgabe des nächsten Lemmas.

Lemma 12: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene in der für jedes Viereck die Reidemeister Bedingung gilt. Dann gilt in der dualen Ebene π^* der spezielle Satz vom Viereckschnitt.*

Beweis: Seien also drei nicht kollineare Punkte $p, q, r \in \mathfrak{P}$ und Geraden

$$\begin{aligned} l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathfrak{L}_p, \qquad & q, r \notin l_1, l_2, l_3, l_4, \\ m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathfrak{L}_q, \qquad & p, r \notin m_1, m_2, m_3, m_4, \\ n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathfrak{L}_r, \qquad & p, q \notin n_1, n_2, n_3, n_4 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} l_1 \wedge m_1 = l_1 \wedge n_1, \qquad & l_1 \wedge m_2 = l_1 \wedge n_3, \\ l_2 \wedge m_3 = l_2 \wedge n_1, \qquad & l_2 \wedge m_4 = l_2 \wedge n_3, \\ l_3 \wedge m_1 = l_3 \wedge n_2, \qquad & l_3 \wedge m_2 = l_3 \wedge n_4, \\ l_4 \wedge m_3 = l_4 \wedge n_2 & \end{aligned}$$

gegeben. Zu zeigen ist $l_4 \wedge m_4 = l_4 \wedge n_4$. Offenbar sind p, q, r paarweise verschieden und $l_i \neq m_j$, $l_i \neq n_j$ und $m_i \neq n_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Also können wir die folgenden acht Punkte definieren

$$\begin{aligned} e &:= l_1 \wedge m_1, & e' &:= l_1 \wedge m_2, \\ a &:= l_2 \wedge m_3, & a' &:= l_4 \wedge m_3, \\ b &:= l_3 \wedge m_1, & b' &:= l_3 \wedge m_2, \\ c &:= l_2 \wedge m_4, & c' &:= l_4 \wedge n_4. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind p, q, r nicht kollinear. Wäre $e \in p \vee q$, so $e = (p \vee q) \wedge l_1 = p \notin m_1$, also $e \notin p \vee q$, und ebenso folgen $e \notin p \vee r, q \vee r$. Also ist (q, e, p, r) ein Viereck in π für das dann nach Voraussetzung die Reidemeister Bedingung gilt.

Es ist $e' \in l_1 = e \vee p$ und wegen $p \notin m_2$ ist $e' \neq p$, und wäre $e' \in q \vee r$, so $e' = (q \vee r) \wedge m_2 = q \notin e \vee p$, d.h. $e' \neq (e \vee p) \wedge (q \vee r)$.

Weiter ist $a = l_2 \wedge m_3 = l_2 \wedge n_1 \in n_1 = e \vee r$, da $e = l_1 \wedge m_1 = l_1 \wedge n_1$ ist, und wegen $r \notin l_2$ ist auch $a \neq r$. Mit $e' = l_1 \wedge m_2 = l_1 \wedge n_3$ folgt

$$(a \vee p) \wedge (e' \vee r) = l_2 \wedge n_3 = l_2 \wedge m_4 = c.$$

Es ist $b = l_3 \wedge m_1 \in m_1 = q \vee e$ und wäre $b \in p \vee r$, so $b = (p \vee r) \wedge l_3 = p \notin m$, d.h. $b \notin p \vee r$ und $b \neq (q \vee e) \wedge (p \vee r)$. Weiter erhalten wir mit $b = l_3 \wedge m_1 = l_3 \wedge n_2$ und $l_4 \wedge m_3 = l_4 \wedge n_2$

$$(q \vee a) \wedge (b \vee r) = m_3 \wedge n_2 = l_4 \wedge m_3 = a'.$$

Als nächstes folgt

$$(b \vee p) \wedge (q \vee e') = l_3 \wedge m_2 = b'$$

und mit $b' = l_3 \wedge m_2 = l_3 \wedge n_4$ ergibt sich

$$(a' \vee p) \wedge (b' \vee r) = l_4 \wedge n_4 = c'.$$

Die Reidemeister Bedingung liefert letztlich

$$l_4 \wedge n_4 = c' \in q \vee c = m_4,$$

d.h. $l_4 \wedge n_4 = l_4 \wedge m_4$.

■

Damit haben wir alles beisammen um den Hauptsatz über die Assoziativität der Multiplikation zu beweisen.

Satz 13: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Ebene π ist desarguesch.*

(b) *Für jedes Viereck in π ist die Multiplikation im zugehörigen Ternärkörper assoziativ.*

(c) *Für jedes Viereck in π gilt die Reidemeister-Bedingung.*

(d) *In π gilt der spezielle Satz vom Viereckschnitt.*

Beweis: **(a)$\Longrightarrow$(b):** Klar nach §7.Satz 14.

(b)$\Longrightarrow$(c): Klar nach Lemma 7.

(c)$\Longrightarrow$(a): Nach Lemma 12 gilt in der dualen Ebene π^* der Satz vom Viereckschnitt und nach Lemma 11 ist π^* desarguesch. Damit ist auch π desarguesch.

(d)$\Longrightarrow$(a): Dies ist Lemma 11.

(a)$\Longrightarrow$(d): Da auch π^* desarguesch ist, gilt aufgrund der schon bewiesenen Äquivalenz von (a) und (c) die Reidemeister Bedingung für jedes Viereck in π^*. Nach Lemma 12 gilt in $\pi = \pi^{**}$ der spezielle Satz vom Viereckschnitt.

■

Es gilt auch noch eine affine Version dieses Satzes, d.h. es reicht die Reidemeister Bedingung für alle Vierecke (o, e, u, v) mit $u, v \in l$ für eine feste Gerade l zu fordern. Dies impliziert, daß aus der Assoziativität der Multiplikation für jeden Ternärkörper einer affinen Ebene der affine Satz von Desargues folgt. Aber all diese Dinge wollen wir in diesem Skript nicht weiter ausführen.

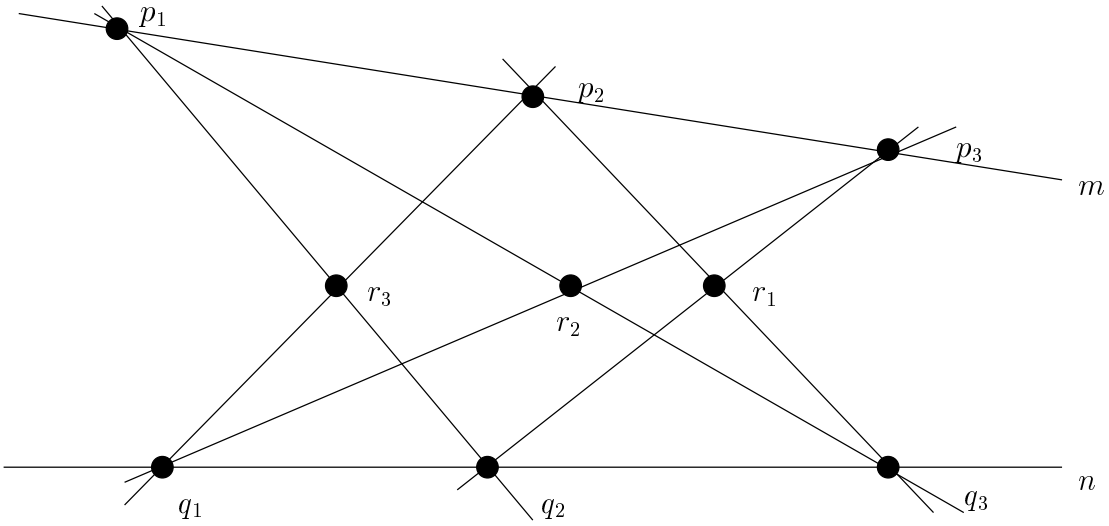
In §7 haben wir eingesehen, daß die projektiven Ebenen über Schiefkörpern bis auf Isomorphie genau die projektiven Ebenen sind, in denen der Satz von Desargues gilt. Im restlichen Teil dieses Paragraphen wollen wir eine Bedingung untersuchen, die bis auf Isomorphie genau die projektiven Ebenen über Körpern beschreibt. Es handelt sich dabei um den sogenannten Satz von Pappus.

Definition 4: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Wir sagen, daß in π der Satz von Pappus gilt, wenn die folgende Aussage wahr ist:

Sind $m, n \in \mathfrak{L}$ mit $m \neq n$ zwei verschiedene Geraden und $p_1, p_2, p_3 \in m$, $q_1, q_2, q_3 \in n$ jeweils paarweise verschieden mit $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \neq m \wedge n$, und setzen wir für $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$ jeweils

$$r_i = (p_j \vee q_k) \wedge (p_k \wedge q_j),$$

so sind r_1, r_2, r_3 kollinear. Wegen $p_i, q_j \neq m \wedge n$ ist tatsächlich $p_i \neq q_j$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, und ist $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$, so ist wegen $p_j \neq p_k$, $q_j \neq q_k$ auch $p_j \vee p_k = m \neq n = q_j \vee q_k$ also $p_j \vee q_k \neq p_k \vee q_j$, d.h. r_1, r_2, r_3 sind immer sinnvoll definiert.



Wie in §6 beginnen wir die Behandlung des Satzes von Pappus mit einem kleinen technischen Lemma, um sicherzustellen das keine unerwünschten Inzidenzen auftreten.

Lemma 14: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $m, n \in \mathfrak{L}$ mit $m \neq n$ und $p_1, p_2, p_3 \in m$, $q_1, q_2, q_3 \in n$ jeweils paarweise verschieden mit $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \neq m \wedge n$. Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ setze $r_i = (p_j \vee q_k) \wedge (p_k \vee q_j)$. Dann sind r_1, r_2, r_3 paarweise verschieden mit $r_1, r_2, r_3 \notin m, n$. Sind $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$, so ist $p_k, q_k \notin r_i \vee r_j$.*

Beweis: Ist $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, so gilt wegen $q_j, q_k \notin m$ sicher $p_j \vee q_k, p_k \vee q_j \neq m$. Wäre also $r_i \in m$, so folgte der Widerspruch $p_j = (p_j \vee q_k) \wedge m = r_i = (p_k \vee q_j) \wedge m = p_k$, d.h. $r_i \notin m$, und analog folgt $r_i \notin n$.

Jetzt seien $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ gegeben. Definiere k durch $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$. Es ist

$$\begin{aligned} r_i &= (p_j \vee q_k) \wedge (p_k \vee q_j), \\ r_j &= (p_i \vee q_k) \wedge (p_k \vee q_i), \end{aligned}$$

und wegen $r_i \notin m, n$ ist sicher $p_k \neq r_i$ und $p_k \vee r_i \neq n$ also $q_j = (p_k \vee q_j) \wedge n = (p_k \vee r_i) \wedge n$, und analog folgt $q_i = (p_k \vee r_j) \wedge n$. Also folgt aus $q_i \neq q_j$ auch $p_k \vee r_i \neq p_k \vee r_j$, und insbesondere $r_i \neq r_j$ und $p_k \notin r_i \vee r_j$. Ebenso folgt $q_k \notin r_i \vee r_j$.

Wäre schließlich $p_i \in r_i \vee r_j$, so folgt $r_i \in p_i \vee r_j = p_i \vee q_k$, also $q_k \in p_i \vee r_i = r_i \vee r_j$; ein Widerspruch da wir schon $q_k \notin r_i \vee r_j$ gezeigt haben. Ebenso folgen $p_j \notin r_i \vee r_j$ und $q_i, q_j \notin r_i \vee r_j$.

■

Dieses Lemma ermöglicht übrigens einen einfachen Beweis, daß es für $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ genau eine projektive Ebene der Ordnung n gibt, wie in den Aufgaben zu diesem Paragraphen ausgeführt wird. Wir wollen jetzt zeigen, daß in der projektiven Ebene

über einem Körper der Satz von Pappus gilt. Hierzu werden wir das folgende Lemma verwenden.

Lemma 15: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine desarguesche projektive Ebene und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Für alle $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$ sei die Gruppe $\Gamma_{[a,z]}$ kommutativ. Dann gilt in π der Satz von Pappus.*

Beweis: Seien $m, n \in \mathfrak{L}$ zwei Geraden mit $m \neq n$ und seien $p_1, p_2, p_3 \in m$, $q_1, q_2, q_3 \in n$ jeweils paarweise verschieden mit $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \neq m \wedge n$. Für $\{1,2,3\} = \{i,j,k\}$ setze $r_i = (p_j \vee q_k) \wedge (p_k \vee q_j)$. Nach Lemma 14 ist $r_1 \neq r_3$ und $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \notin a := r_1 \vee r_3$. Setze noch $z := m \wedge n$. Da π desarguesch ist, gibt es nach §6.Satz 7 zwei Kollineationen $\alpha, \beta \in \Gamma_{[a,z]}$ mit $p_1^\alpha = p_2$ und $p_2^\beta = p_3$. Es folgt $\gamma := \alpha\beta \in \Gamma_{[a,z]}$ und $p_1^\gamma = p_3$.

Da nach Lemma 14 $r_1, r_3 \notin m, n$ gilt ist $q_3 = (p_2 \vee r_1) \wedge n$ und $q_2 = (p_1 \vee r_3) \wedge n$, also

$$q_3^\beta = (p_2^\beta \vee r_1) \wedge n = (p_3 \vee r_1) \wedge n = q_2,\ q_2^\alpha = (p_1^\alpha \vee r_3) \wedge n = (p_2 \vee r_3) \wedge n = q_1.$$

Nach Voraussetzung ist $\Gamma_{[a,z]}$ kommutativ, und damit gilt $\beta\alpha = \alpha\beta$ und $q_3^\gamma = q_3^{\beta\alpha} = q_1$. Es folgt $(p_1 \vee q_3)^\gamma = p_3 \vee q_1 \neq p_1 \vee q_3$, und wegen $r_2 = (p_1 \vee q_3) \wedge (p_3 \vee q_1)$ ergibt sich $r_2^\gamma = r_2$ nach §5.Lemma 2. Wegen $r_2 \notin m$ ist auch $r_2 \neq z$ und §5.Lemma 4 liefert $r_2 \in a = r_1 \vee r_3$, d.h. r_1, r_2, r_3 sind kollinear.

■

Umgekehrt erhalten wir mit dem Satz von Pappus die Kommutativität der Multiplikation.

Lemma 16: *Sei (K, T) ein Ternärkörper und in der projektiven Ebene $P(K, T)$ gelte der Satz von Pappus. Dann ist die Multiplikation in (K, T) kommutativ.*

Beweis: Seien $a, b \in K$. Ist $a = 0$, so gilt $ab = ba = 0$ und ist $a = 1$ so $ab = ba = b$. Also können wir im folgenden $a \neq 0, 1$, und ebenso $b \neq 1$ annehmen. Im Fall $a = b$ ist wieder $ab = ba$, d.h. wir können auch $a \neq b$ voraussetzen.

Setze $m := [a]$ und $n := [0, b]$. Dann ist $m \neq n$ und $m \wedge n = (a, b)$. Weiter setzen wir

$$\begin{array}{ll} p_1{:=}(\infty), & q_1{:=}(0), \\ p_2{:=}(a,a), & q_2{:=}(1,b), \\ p_3{:=}(a,ba), & q_3{:=}(b,b). \end{array}$$

Es ist $p_1, p_2, p_3 \in m$ und wegen $b \neq 1$ ist $ba \neq a$ also $p_2 = (a,a) \neq (a,ba) = p_3$. Wegen $a \neq b, 1$ ist auch $a, ba \neq b$ und somit $p_1, p_2, p_3 \neq (a,b)$. Weiter ist auch $q_1, q_2, q_3 \in n$ und wegen $b \neq 1$ ist $q_2 \neq q_3$, und weiter ergibt $a \neq 1, b$ auch $q_1, q_2, q_3 \neq (a,b)$. Damit können wir den Satz von Pappus anwenden, d.h. die Punkte

$$\begin{aligned} r_1 &:= (p_2 \vee q_3) \wedge (p_3 \vee q_2) = ((a,a) \vee (b,b)) \wedge ((a,ba) \vee (1,b)) = [1,0] \wedge [b,0] = (0,0), \\ r_2 &:= (p_1 \vee q_3) \wedge (p_3 \vee q_1) = ((\infty) \vee (b,b)) \wedge ((a,ba) \vee (0)) = [b] \wedge [0,ba] = (b,ba), \\ r_3 &:= (p_1 \vee q_2) \wedge (p_2 \vee q_1) = ((\infty) \vee (1,b)) \wedge ((a,a) \vee (0)) = [1] \wedge [0,a] = (1,a) \end{aligned}$$

sind kollinear, und dies ergibt

$$(b, ba) = r_2 \in r_1 \vee r_3 = (0,0) \vee (1,a) = [a,0],$$

also $ba = ab$.

■

Insbesondere erhalten wir eine erste Charakterisierung der projektiven Ebenen über Körpern.

Satz 17: *Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K, und setze $\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *In der projektiven Ebene $\mathrm{PG}(V)$ gilt der Satz von Pappus.*

(b) *K ist ein Körper.*

(c) *Für jede Gerade a und jeden Punkt z von $\mathrm{PG}(V)$ ist $\Gamma_{[a,z]}$ kommutativ.*

Beweis: (a)⟹(b): In $P(K) \simeq P_2(K) \simeq \mathrm{PG}(V)$ gilt der Satz von Pappus, und nach Lemma 16 ist die Multiplikation in K kommutativ.
(b)⟹(c): Seien a eine Gerade und z ein Punkt von $\mathrm{PG}(V)$. Nach §5.Lemma 8 und §5.Lemma 9 haben wir

$$\Gamma_{[a,z]} \simeq \begin{cases} (K,+), & \text{falls } z \in a, \\ (K\backslash\{0\},\cdot), & \text{falls } z \notin a, \end{cases}$$

und in beiden Fällen ist $\Gamma_{[a,z]}$ kommutativ.
(c)⟹(a): Nach §6.Lemma 3 ist $\mathrm{PG}(V)$ desarguesch, und nach Lemma 15 gilt in $\mathrm{PG}(V)$ der Satz von Pappus.

■

Insgesamt sind die projektiven Ebenen über Körpern somit bis auf Isomorphie genau die Ebenen in denen die Sätze von Desargues und Pappus gelten. Es wird sich jetzt herausstellen, daß der Satz von Desargues hier in Wahrheit überflüssig ist, er folgt bereits aus dem Satz von Pappus. Dies kann man direkt beweisen, aber wir geben hier einen etwas indirekten Beweis, der auf Satz 13 beruht.

Satz 18: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *In π gilt der Satz von Pappus.*

(b) *Die Ebene π ist desarguesch und für alle $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$ ist $\Gamma_{[a,z]}$ kommutativ.*

(c) *Alle zu beliebigen Vierecken in π gehörenden Ternärkörper haben kommutative Multiplikation.*

(d) *Alle zu beliebigen Vierecken in π gehörenden Ternärkörper sind Körper.*

(e) *Es gibt ein Viereck in π, dessen zugehöriger Ternärkörper ein Körper ist.*

(f) *Es gibt einen dreidimensionalen Vektorraum V über einem Körper K so, daß $\pi \simeq \mathrm{PG}(V)$ ist.*

Beweis: (a)$\Longrightarrow$(c): Sei (o,e,u,v) ein Viereck in π und bezeichne (K,T) den zugehörigen Ternärkörper. Nach §3.Satz 11 ist $\pi \simeq P(K,T)$, und damit gilt in $P(K,T)$ der Satz von Pappus. Nach Lemma 16 ist die Multiplikation in (K,T) kommutativ.
(c)$\Longrightarrow$(d): Sei (o,e,u,v) ein Viereck in π und bezeichne (K,T) den zugehörigen Ternärkörper. Nach Voraussetzung ist die Multiplikation in K kommutativ, und wir zeigen jetzt, daß sie auch assoziativ ist. Seien $a,b,c \in K$. Ist $b = 0$, so ist $(ab)c = 0 = a(bc)$, d.h. wir können im folgenden $b \neq 0$ annehmen.

Wir betrachten die Abbildungen $l : K \to K; x \mapsto bx = xb$, und $T' : K^3 \to K; (s,x,t) \mapsto T(l^{-1}(s),x,t)$. Nach §10.Lemma 10 ist $(K,T') = K_{1,b}$ ein Hauptisotop von (K,T), und nach §10.Korollar 14 gibt es ein Viereck (o,e',u,v) in π so, daß $K_{1,b}$ zum Ternärkörper von π bezüglich dieses Vierecks isomorph ist. Insbesondere ist die Multiplikation $\otimes$ in $K_{1,b}$ kommutativ. Es folgt

$$a(bc) = l^{-1}(ab)(bc) = (ab) \otimes (bc) = (bc) \otimes (ab) = l^{-1}(bc)(ab) = c(ab) = (ab)c,$$

d.h. die Multiplikation in (K,T) ist assoziativ. Nach Satz 13 ist π desarguesch, und nach §7.Satz 14 ist jeder zu π gehörige Ternärkörper ein Schiefkörper, und somit sogar ein Körper.
(d)$\Longrightarrow$(e): Klar.
(e)$\Longrightarrow$(f): Sei (o,e,u,v) ein Viereck in π, dessen zugehöriger Ternärkörper K ein Körper ist. Nach §3.Satz 11 gilt $\pi \simeq P(K) \simeq P_2(K) = \mathrm{PG}(K^3)$.
(f)$\Longrightarrow$(b): Die Ebene $\mathrm{PG}(V)$ ist nach §6.Lemma 3 desarguesch, und nach Satz 17 ist $\mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V))_{[a,z]}$ für alle Geraden a und Punkte z von $\mathrm{PG}(V)$ kommutativ. Damit folgen diese Aussagen auch für die isomorphe Ebene π.
(b)$\Longrightarrow$(a): Klar nach Lemma 15.

■

Wie schon bei Satz 13 ist es nicht wirklich nötig die Aussage des Satzes von Pappus für alle Geraden m,n zu fordern. Es reicht zum Beispiel aus, den Satz für ein einziges festes Geradenpaar m,n zu verlangen, und daraus folgt bereits der volle Satz von Pappus. Aber dies wollen wir in diesem Skript nicht mehr behandeln.

Aufgaben zu §11

(157) Seien K ein Quasikörper und $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(K)$ der zugehörige Spreadset. Zeigen Sie, daß K genau dann ein Fastkörper ist, wenn $\mathfrak{T}\backslash\{0\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_{\mathrm{Kern}(K)}(K)$ ist. In diesem Fall wirkt $\mathfrak{T}\backslash\{0\}$ scharf transitiv auf $K\backslash\{0\}$.

(158) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Schiefkörper K und sei $G \leq \mathrm{GL}(V)$ eine Untergruppe, die scharf transitiv auf $V\backslash\{0\}$ wirkt. Wähle ein $e \in V\backslash\{0\}$. Für $a \in V\backslash\{0\}$ definiere $\varrho(a) \in G$ durch $\varrho(a)e = a$. Weiter sei

$$\cdot : K \times K \to K; (a,b) \mapsto \begin{cases} \varrho(a)b, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein Fastkörper mit Eins e.

(159) Wir betrachten den Körper $K := \mathrm{GF}(5)$ und den Vektorraum $V := K^2$. Setze

$$\varrho := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $G := \langle \varrho, \sigma \rangle$ scharf transitiv auf $V\backslash\{0\}$ wirkt, und das die Konstruktion in Aufgabe (158) Fastkörper der Ordnung 25 liefert, die keine Schiefkörper sind.

(160) Sei K ein Fastkörper. Zeigen Sie, daß die Menge

$$G := \{x \mapsto ax + t : a \in K\backslash\{0\}, t \in K\}$$

eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe von K ist, die scharf zweifach transitiv auf K wirkt.

(161) Sei G eine endliche Gruppe, die scharf zweifach transitiv auf einer Menge Ω wirkt. Zeigen Sie, daß es einen endlichen Fastkörper K gibt so, daß die Wirkung von G auf Ω zur Wirkung aus Aufgabe (160) isomorph ist. (Verwenden Sie zum Beispiel den folgenden Satz von Frobenius: Ist G eine endliche Gruppe, die transitiv auf einer Menge M wirkt, mit $G_x \neq 1$ und $G_{xy} = 1$ für $x, y \in M$ mit $x \neq y$, so ist die Menge K der identischen oder fixpunktfreien Elemente von G ein Normalteiler von G, der scharf transitiv auf M wirkt).

(162) Seien K ein endlicher Körper und $\varrho : K\backslash\{0\} \to \mathrm{Aut}(K)$ eine Abbildung mit $\varrho(1) = 1$. Definiere $* : K \times K \to K$ durch $a * b := ab^{\varrho(a)}$ für $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ und $0 * b := 0$ für $b \in K$. Zeigen Sie, daß $(K, +, *)$ ein Quasikörper ist. Weiter ist $(K, +, *)$ genau dann ein Fastkörper, wenn $\varrho : K\backslash\{0\} \to \mathrm{Aut}(K)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(163) Seien q eine Primpotenz und $n \in \mathbb{N}$ mit $n|q-1$. Sei $K := \mathrm{GF}(q^n)$ und sei $\omega \in K$ ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe K^* von K. Weiter sei U die Untergruppe von K^* der Ordnung $(q^n-1)/n$. Dann ist K^* die disjunkte Vereinigung der Nebenklassen

$$K^* = \bigcup_{1 \le i \le n} \omega^{\frac{q^i-1}{q-1}} U.$$

Ist $a \in K \backslash \{0\}$, so gibt es also genau ein $1 \le i \le n$ mit $a \in \omega^{(q^i-1)/(q-1)}U$, und wir definieren $\varrho(a) \in \mathrm{Aut}(K)$ durch $x^{\varrho(a)} = x^{q^i}$ für jedes $x \in K$. Zeigen Sie, daß die Konstruktion in Aufgabe (162) einen Fastkörper der Ordnung q^n liefert. Ist $n \ge 2$, so ist dieser kein Schiefkörper.

(164) Sei $r > 0$ eine reelle Zahl. Für $a, b \in \mathbb{H}$ definieren wir

$$a * b := \begin{cases} ab^{ir\log(|a|)}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}_r = (\mathbb{H}, +, *)$ ein Fastkörper ist, und das $\mathrm{Kern}(\mathbb{H}_r) = \mathbb{R}$ gilt.

(165) Sei (o, e, u, v) ein Viereck in einer projektiven Ebene π und bezeichne (K, T) den zugehörigen Ternärkörper. Zeigen Sie, daß die Multiplikation in (K, T) genau dann assoziativ ist, wenn π die Reidemeister Bedingung für das Viereck (o, e, u, v) erfüllt.

(166) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene und (o, e, u, v) ein Viereck in π mit zugehörigen Ternärkörper (K, T). Zeigen Sie, daß die Addition in (K, T) genau dann assoziativ ist, wenn π die folgende additive Reidemeister Bedingung für (o, e, u, v) erfüllt:
Seien $W := u \vee v$, $K := o \vee e$ und $w := W \wedge K$. Sind dann $o' \in (o \vee u)\backslash\{u\}$, $a \in (o \vee v)\backslash\{v\}$ und $b \in K\backslash\{w\}$, so gilt für $c := (a \vee u) \wedge (o' \vee v)$, $b' := (b \vee u) \wedge (o' \vee w)$, $a' := (b \vee v) \wedge (a \vee w)$, $c' := (a' \vee u) \wedge (b' \vee v)$ stets $c' \in c \vee w$.

(167) Sei π eine projektive Ebene. Zeigen Sie, daß in π genau dann der spezielle Satz vom Viereckschnitt gilt, wenn der volle Satz vom Viereckschnitt wahr ist.

(168) Sei π eine projektive Ebene der Ordnung $n \le 5$. Zeigen Sie, daß in π der Satz von Pappus gilt.

(169) Sei $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Zeigen Sie, daß es genau eine affine und genau eine projektive Ebene der Ordnung n gibt, jeweils bis auf Isomorphie.

(170) Geben Sie in der projektiven Ebene $P_2(\mathbb{H})$ über den Quaternionen explizit ein Gegenbeispiel zum Satz von Pappus an.

§12 Alternativkörper

Am Ende von §10 hatten wir die projektiven Ebenen von Lenz Typ mindestens VIb als die Ebenen $P(K)$ über rechtsinversen Semikörpern beschrieben. In diesem Paragraphen wollen wir die algebraische Theorie dieser Semikörper entwickeln. Wir beginnen mit einer technischen Definition.

Definition 1: Sei K ein Semikörper. Ist $a \in K$, so schreiben wir $l_a : K \to K; x \mapsto ax$ für die Linksmultiplikation mit a, und $r_a : K \to K; x \mapsto xa$ für die Rechtsmultiplikation. Weiter sei für $a, b \in K$

$$[a,b] := ab - ba = (l_a - r_a)b = (r_b - l_b)a$$

der Kommutator von a und b, und für $a, b, c \in K$ sei

$$[a,b,c] := (ab)c - a(bc)$$

der Assoziator von a, b, c.

Für $a, b, c \in K$ können wir auch schreiben

$$[a,b,c] = (r_c r_b - r_{bc})a = (l_{ab} - l_a l_b)c = (r_c l_a - l_a r_c)b = [r_c, l_a]b,$$

wobei für je zwei Endomorphismen $\phi, \psi \in \mathrm{End}(K,+)$ wie üblich $[\phi,\psi] := \phi\psi - \psi\phi$ ist. Wir haben die folgenden einfachen Rechenregeln:

Lemma 1: *Sei K ein Semikörper und seien $a, b, c, d \in K$. Dann gelten die beiden folgenden Gleichungen:*

(a) $[da,b,c] = [d,ab,c] - [d,a,bc] + d[a,b,c] + [d,a,b]c,$

(b) $[a,b,c] - [a,c,b] + [c,a,b] = [ab,c] - a[b,c] - [a,c]b.$

Setzen wir weiter für $a, b \in K$ noch $A(a,b) := r_b r_a - r_{ab}$, so haben wir weiter:

(c) $A(b,c)r_a - r_c A(a,b) = A(ab,c) - A(a,bc) + r_{[a,b,c]}$ *für alle $a, b, c \in K$.*

(d) $A(b,c) - A(c,b) = [r_c, r_b] - r_{[b,c]}$ *für alle $b, c \in K$.*

Beweis: Sind $a, b, c \in K$, so gilt

$$\begin{aligned}[a,b,c] - [a,c,b] + [c,a,b] &= (ab)c - a(bc) - (ac)b + a(cb) + (ca)b - c(ab)\\ &= (ab)c - c(ab) - a(bc - cb) - (ac - ca)b = [ab,c] - a[b,c] - [a,c]b,\end{aligned}$$

und (b) ist bewiesen. Teil (c) ergibt sich aus der folgenden Rechnung

$$\begin{aligned}A(b,c)r_a - r_c A(a,b) &= r_c r_b r_a - r_{bc} r_a - r_c r_b r_a + r_c r_{ab}\\ &= r_c r_{ab} - r_{(ab)c} - r_{bc} r_a + r_{a(bc)} + r_{(ab)c} - r_{a(bc)} = A(ab,c) - A(a,bc) + r_{[a,b,c]}.\end{aligned}$$

Wenden wir diese Gleichung auf $d \in K$ an, so erhalten wir gerade (a).

Es verbleibt nur noch (d) zu zeigen. Seien $b, c \in K$. Dann läßt sich (b) schreiben als

$$A(b,c) - A(c,b) + [r_b, l_c] = (r_c - l_c)r_b - r_{[b,c]} - r_b(r_c - l_c).$$

Andererseits haben wir

$$(r_c - l_c)r_b - r_{[b,c]} - r_b(r_c - l_c) = [r_c, r_b] + [r_b, l_c] - r_{[b,c]},$$

und es folgt (d).

■

Sei K ein Semikörper. Nach §10.Lemma 5.(b) ist das Zentrum $Z(K)$ von K ein Unterkörper von K, und K ist eine Divisionsalgebra über $Z(K)$. Wir versehen K im folgenden immer mit dieser Algebrenstruktur. Dann ist die Kommutatorabbildung $[\,,\,] : K \times K \to K$ offenbar bilinear, und der Assoziator $[\,,\,,\,] : K \times K \times K \to K$ ist trilinear.

Weiter wollen wir uns an eine Kleinigkeit aus der linearen Algebra erinnern. Sind V, W zwei Vektorräume über einem Körper K, und ist $f : V^n \to W$ eine n-fach lineare Abbildung, so heißt f alternierend, wenn für alle $1 \leq i < n$, $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+2}, \ldots, v_n, v \in V$ stets

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v, v_{i+2}, \ldots, v_n) = 0$$

ist. Es folgt dann

$$f(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = (-1)^\pi f(v_1, \ldots, v_n)$$

für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ und jede Permutation $\pi \in S_n$. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen. Ist $n = 2$, so haben wir für $v, w \in V$ einfach

$$0 = f(v+w, v+w) = f(v,v) + f(v,w) + f(w,v) + f(w,w) = f(v,w) + f(w,v),$$

d.h. $f(v,w) = -f(w,v)$. Damit gilt unsere Gleichung falls $\pi \in S_n$ eine Transposition zweier benachtbarter Indizes ist. Aber diese Transpositionen erzeugen bereits die symmetrische Gruppe S_n, und damit gilt die Formel für beliebige Permutationen $\pi \in S_n$. Für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ist die obige Bedingung offenbar genau dann erfüllt wenn f alternierend ist, aber für $\mathrm{char}(K) = 2$ ist der Begriff "alternierend" echt stärker. Die Unterscheidung $\mathrm{char}(K) = 2$ oder $\mathrm{char}(K) \neq 2$ wird auch bei uns noch eine gewisse Rolle spielen, und wir definieren die Charakteristik eines Semikörpers wie folgt:

Definition 2: Sei K ein Semikörper. Dann heißt $\mathrm{char}(K) := \mathrm{char}(Z(K))$ die Charakteristik von K. Ist K ein Schiefkörper, so stimmt dies mit der üblichen Charakteristik überein.

Ist K ein Semikörper, so haben wir nach §9.Lemma 7.(a) den Spreadset $\mathfrak{T}(K) = \{l_a : a \in K\}$, und da auch das Linksdistributivgesetz gilt ist $l_a + l_b = l_{a+b}$ für alle $a, b \in K$, d.h. $\mathfrak{T}(K)$ ist eine additive Untergruppe von $\mathrm{End}(K, +)$. Ebenso können wir dies auf den Semikörper K^t anwenden, und erhalten den Spreadset $\mathfrak{T}(K^t) = \{r_a : a \in K\}$, jeweils im $Z(K)$-Vektorraum K.

Nun wollen wir allmählich zur Behandlung rechtsinverser Semikörper kommen. Wir schicken noch ein kleines technisches Lemma voraus.

Lemma 2: *Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gelten:*

(a) *Ist* $\mathrm{char}(K) \neq 2$, *und sind* $1-\phi, 1+\phi \in \mathrm{GL}(V)$, *so ist auch* $(1+\phi)^{-1}+(1-\phi)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$, *und es gilt*

$$\phi^2 = 1 - 2\left((1+\phi)^{-1} + (1-\phi)^{-1}\right)^{-1}.$$

(b) *Ist* $\mathrm{char}(K) = 2$, *und sind* $\phi, 1+\phi \in \mathrm{GL}(V)$, *so ist auch* $\phi^{-1}+(1+\phi)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$, *und es gilt*

$$\phi^2 = \phi + \left(\phi^{-1} + (1+\phi)^{-1}\right)^{-1}.$$

Beweis: **(a)** Es ist

$$\begin{aligned}(1-\phi^2)\left((1+\phi)^{-1}+(1-\phi)^{-1}\right) &= (1+\phi)(1-\phi)\left((1+\phi)^{-1}+(1-\phi)^{-1}\right)\\ &= 1-\phi+1+\phi = 2 \in \mathrm{GL}(V).\end{aligned}$$

Dies ergibt $(1+\phi)^{-1}+(1-\phi)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$, und die Formel für ϕ^2 ist klar.
(b) Diesmal rechnen wir

$$(\phi^2+\phi)\left(\phi^{-1}+(1+\phi)^{-1}\right) = \phi(1+\phi)\left(\phi^{-1}+(1+\phi)^{-1}\right) = 1+\phi+\phi = 1,$$

und es folgen $\phi^{-1}+(1+\phi)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ sowie die Formel für ϕ^2.

■

Lemma 3: *Sei K ein rechtsinverser Semikörper. Dann gilt $r_b r_c r_b = r_{(bc)b}$ für alle $b, c \in K$, d.h. $((ab)c)b = a((bc)b)$ für alle $a, b, c \in K$. Weiter sind $r_a^2 = r_{a^2}$ für alle $a \in K$ und $r_a^{-1} = r_{a^{-1}}$ für $a \in K\backslash\{0\}$. Insbesondere gilt $(ba)a = ba^2$ für alle $a, b \in K$.*

Beweis: Sei $a \in K\backslash\{0\}$. Da K rechtsinvers ist, ist dann nach §10.Lemma 20.(a) $(ba)a^{-1} = (ba^{-1})a = b$ für jedes $b \in K$, d.h. $r_{a^{-1}} r_a = r_a r_{a^{-1}} = \mathrm{id}$, und somit $r_a^{-1} = r_{a^{-1}}$.

Sei $a \in K$. Wir wollen jetzt $r_a^2 = r_{a^2}$ zeigen. Für $a \in \{0, 1, -1\}$ ist dies klar, d.h. wir können $a \neq 0, 1, -1$ annehmen. Sei $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(K^t)$ der Spreadset der Rechtsmultiplikationen. Dann ist $\mathfrak{T}+\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}$ und $(\mathfrak{T}\backslash\{0\})^{-1} \subseteq \mathfrak{T}$, d.h. Lemma 2 liefert $r_a^2 \in \mathfrak{T}$, d.h. es gibt ein $c \in K$ mit $r_a^2 = r_c$. Also $c = r_c(1) = r_a^2(1) = a^2$, und somit ist $r_a^2 = r_{a^2}$. Wenden wir dies auf $b \in K$ an, so ergibt sich $(ba)a = ba^2$.

Wir kommen jetzt zum Beweis der Formel $((ab)c)b = a((bc)b)$ für $a, b, c \in K$. Seien also $a, b, c \in K$ gegeben. Für $a = 0$ oder $c = 0$ ist die Behauptung klar, d.h. wir können $a, c \neq 0$ annehmen. Nach §10.Lemma 10 haben wir das Hauptisotop $K_{a,c^{-1}}$, und nach §3.Lemma 12, §10.Korollar 14 gibt es ein $e \in (K\backslash\{0\})^2$ so, daß $K_{a,c^{-1}}$ isomorph zum

Ternärkörper von $P(K)$ bezüglich des Vierecks $((0,0),e,(0),(\infty))$ ist. Nach §10.Satz 21 ist somit auch $K_{a,c^{-1}}$ ein rechtsinverser Semikörper, dessen Multiplikation wir mit $\otimes$ bezeichnen. Für $u,v \in K$ ist dann

$$u \otimes v = r_{c^{-1}}^{-1}(u) l_a^{-1}(v) = r_c(u) l_a^{-1}(v) = (uc) l_a^{-1}(v).$$

Wenden wir unsere bereits bewiesene Gleichung auf $K_{a,c^{-1}}$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(bc)b = (((c^{-1}c)l_a^{-1}(ab))c)l_a^{-1}(ab) &= ((c^{-1}c)l_a^{-1}(ab)) \otimes (ab) = (c^{-1} \otimes (ab)) \otimes (ab) \\ = c^{-1} \otimes ((ab) \otimes (ab)) &= c^{-1} \otimes (((ab)c)l_a^{-1}(ab)) = c^{-1} \otimes (((ab)c)b) \\ &= (c^{-1}c)l_a^{-1}(((ab)c)b) = l_a^{-1}(((ab)c)b),\end{aligned}$$

also

$$((ab)c)b = l_a((bc)b) = a((bc)b).$$

■

Die Bedingung $(ba)a = ba^2$ hat einen eigenen Namen, den wir nun einführen wollen.

Definition 3: Sei K ein Semikörper. Dann heißt K ein Rechtsalternativkörper, wenn $(ba)a = ba^2$ für alle $a,b \in K$ gilt. Analog heißt K ein Linksalternativkörper wenn $a(ab) = a^2b$ für alle $a,b \in K$ gilt. Schließlich heißt K ein Alternativkörper, wenn K ein Links- und ein Rechtsalternativkörper ist.

Zum Beispiel ist jeder Schiefkörper auch ein Alternativkörper, es gibt allerdings auch andere Beispiele. Wir werden noch einsehen, daß es andererseits nicht sehr viele Alternativkörper gibt, die keine Schiefkörper sind. Unser Lemma 3 besagt insbesondere, daß jeder rechtsinverse Semikörper ein Rechtsalternativkörper ist. Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so gilt auch die Umkehrung dieser Tatsache, tatsächlich sind bei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ die Begriffe Alternativkörper, (Links-), Rechtsalternativkörper und (links-), rechtsinverser Semikörper alle äquivalent. Diese Tatsache benötigen wir allerdings nicht, und werden sie auch nicht beweisen. Für $\mathrm{char}(K) = 2$ gibt es Rechtsalternativkörper, die keine Alternativkörper sind.

Wir werden zeigen, daß die rechtsinversen Semikörper genau die Alternativkörper sind, und zwar bei beliebiger Charakteristik. Hierzu benötigen wir einige Formeln. Zur Zeit wissen wir nur, daß sowohl rechtsinverse Semikörper als auch Alternativkörper stets Rechtsalternativkörper sind.

Lemma 4: *Sei K ein Rechtsalternativkörper.*

(a) *Es gilt $[a,b,c] = -[a,c,b]$ für alle $a,b,c \in K$, d.h. $A(b,c) = -A(c,b)$ für $b,c \in K$.*

(b) *Für $a,b,c \in K$ gilt $[a,b,c^2] = [a,bc,c]+[a,b,c]c$, d.h. $A(b,c^2) = A(bc,c)+r_cA(b,c)$.*

(c) *Für $a,b \in K$ gilt $r_ar_b + r_br_a = r_{ab+ba}$.*

(d) *Für $a,b \in K$ gilt $2A(a,b) = [r_b,r_a] - r_{[a,b]}$.*

(e) *Es ist* $N_r(K) = N_m(K)$.

Beweis: **(a)** Da K rechtsalternativ ist, gilt $[b,a,a] = (ba)a - ba^2 = 0$ für alle $a,b \in K$, d.h. $A(a,a) = 0$ für jedes $a \in K$. Also ist A alternierend, und (a) ist gezeigt.
(b) Mit Lemma 1.(c) folgt für $b,c \in K$ wegen $A(c,c) = 0$ sofort $-r_c A(b,c) = A(bc,c) - A(b,c^2)$, d.h. $A(b,c^2) = A(bc,c) + r_c A(b,c)$.
(c) Nach (a) ist $r_b r_a - r_{ab} = A(a,b) = -A(b,a) = -r_a r_b + r_{ba}$.
(d) Klar nach Lemma 1.(d) und (a).
(e) Dies ist klar nach (a).

■

Lemma 5: *Sei K ein rechtsinverser Semikörper. Dann gelten die folgenden Formeln in K:*

(a) *Für $a,b,c \in K$ gilt $[a,b,bc] = [a,b,c]b$, d.h. $A(b,bc) = r_b A(b,c)$.*

(b) *Für $a,b,c,d \in K$ gilt*

$$[d,a,bc] + [d,b,ac] - [d,a,c]b - [d,b,c]a = 0,$$

d.h. $A(a,bc) + A(b,ac) - r_b A(a,c) - r_a A(b,c) = 0$.

(c) *Für $a,b,c,d \in K$ gilt*

$$[da,b,c] + [d,a,[b,c]] - d[a,b,c] - [d,b,c]a = 0,$$

d.h. $[A(b,c), r_a] = r_{[a,b,c]} - A(a,[b,c])$.

(d) *Für $a,b,c \in K$ ist $[a,b,c^2] = [a,bc+cb,c]$, d.h. $A(b,c^2) = A(bc+cb,c)$.*

(e) *Für $a,b \in K$ ist $r_{ab}A(a,b) = r_a A(ba,b) = r_a r_b A(a,b)$.*

Beweis: **(a)** Seien $b,c \in K$. Dann gilt nach Lemma 3 und Lemma 4.(a)

$$r_b A(b,c) = r_b r_c r_b - r_b r_{bc} = r_{(bc)b} - r_b r_{bc} = -A(bc,b) = A(b,bc).$$

(b) Sei $c \in K$. Die bilineare Abbildung $(a,b) \mapsto A(a,bc) - r_a A(b,c)$ ist nach (a) alternierend, und damit folgt $A(a,bc) - r_a A(b,c) = -A(b,ac) + r_b A(a,c)$ für alle $a,b \in K$.
(c) Mit Lemma 1.(c), Lemma 4.(a) und (b) haben wir

$$\begin{aligned}[A(b,c), r_a] &= A(b,c)r_a - r_a A(b,c) = r_c A(a,b) + A(ab,c) - A(a,bc) + r_{[a,b,c]} - r_a A(b,c) \\ &= r_c A(a,b) + r_a A(c,b) + A(ab,c) - A(a,bc) + r_{[a,b,c]} \\ &= A(a,cb) + A(c,ab) + A(ab,c) - A(a,bc) + r_{[a,b,c]} = r_{[a,b,c]} - A(a,[b,c]).\end{aligned}$$

(d) Nach Lemma 4.(a,b) und (a) gilt

$$A(b,c^2) = A(bc,c) + r_c A(b,c) = A(bc,c) - r_c A(c,b) = A(bc,c) - A(c,cb) = A(bc+cb,c).$$

(e) Wir haben

$$\begin{aligned} r_a A(ba,b) &= r_a A(ab+ba,b) - r_a A(ab,b) \\ &\overset{\text{(d)}}{=} r_a A(a,b^2) - r_a A(ab,b) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} A(a,ab^2) - r_a A(ab,b) \\ &\overset{\text{(Lemma 3)}}{=} A(a,(ab)b) - r_a A(ab,b) \\ &\overset{\text{(b)}}{=} -A(ab,ab) + r_{ab} A(a,b) \\ &= r_{ab} A(a,b), \end{aligned}$$

und nach (a) ist auch $A(ba,b) = -A(b,ba) = -r_b A(b,a) = r_b A(a,b)$, d.h. $r_a A(ba,b) = r_a r_b A(a,b)$.

■

Lemma 6: *Sei K ein rechtsinverser Semikörper. Für $a,b \in K$ setzen wir $B(a,b) := r_b r_a - r_{ba}$. Dann gelten:*

(a) *Für $a,b \in K$ gilt $B(a,b) = A(a,b) + r_{[a,b]} = -(A(a,b) + [r_a, r_b])$.*

(b) *Sind $a,b \in K$, so ist $B(a,b)x = [x,a,b] + x[a,b]$ für jedes $x \in K$ und*

$$\mathrm{Kern}(B(a,b)) = \{x \in K : [x,a,b] = x[b,a]\} = \{x \in K : (xa)b = x(ba)\}.$$

(c) *Für $a,b \in K$ gilt $B(b,a) = -B(a,b)$ und $B(a,a) = 0$.*

(d) *Sind $a,b \in K$, so gelten $B(a,b)A(a,b) = 0$ und $B(a,b)r_a A(a,b) = 0$.*

(e) *Für $a,b \in K$ gilt $B(a,b)r_a = B(b,a^2) - B(ba,a)$.*

(f) *Für $a,b \in K$ gelten $B(a,ab) = B(a,b)r_a$ und $B(a,[a,b]) = B(b,a^2)$.*

(g) *Für $a,b \in K$ gelten $A(a,b)^2 = -r_{[a,b]}A(a,b)$ und $B(a,b)r_{[a,b]}A(a,b) = 0$.*

(h) *Für alle $a,b,c,d \in K$ gilt*

$$[d,a,b](cb) + [d,c,b](ab) = ([d,a,b]b)c + ([d,c,b]b)a,$$

d.h. $r_{cb}A(a,b) + r_{ab}A(c,b) = r_c r_b A(a,b) + r_a r_b A(c,b)$.

(i) *Für alle $a,b,c,d \in K$ gilt*

$$[d,a,b](ac) + [d,a,c](ab) = ([d,a,b]c)a + ([d,a,c]b)a,$$

d.h. $r_{ac}A(a,b) + r_{ab}A(a,c) = r_a r_c A(a,b) + r_a r_b A(a,c)$.

(j) *Für alle $d, a, b, u, v \in K$ gilt*

$$[d,a,b](uv) + [d,a,v](ub) + [d,u,b](av) + [d,u,v](ab) \\ = ([d,a,b]v)u + ([d,a,v]b)u + ([d,u,b]v)a + ([d,u,v]b)a,$$

d.h.

$$r_{uv}A(a,b) + r_{ub}A(a,v) + r_{av}A(u,b) + r_{ab}A(u,v) \\ = r_u r_v A(a,b) + r_u r_b A(a,v) + r_a r_v A(u,b) + r_a r_b A(u,v).$$

Beweis: (a) Es ist $B(a,b) = r_b r_a - r_{ba} = r_b r_a - r_{ab} + r_{ab-ba} = A(a,b) + r_{[a,b]}$. Mit Lemma 4.(d) folgt weiter $B(a,b) = A(a,b) + r_{[a,b]} = [r_b, r_a] - A(a,b) = -(A(a,b) + [r_a, r_b])$.
(c) Dies ist klar wegen $A(a,a) = 0$ und $A(b,a) = -A(a,b)$.
(b) Klar nach (a).
(d) Nach Lemma 5.(e) ist

$$B(a,b)A(a,b) = r_b r_a A(a,b) - r_{ba}A(a,b) = -(r_b r_a A(b,a) - r_{ba}A(b,a)) = 0.$$

Damit haben wir die erste Gleichung bewiesen. Mit Lemma 5.(a) gilt $A(ba, ba^2) = A(ba, (ba)a) = r_{ba}A(ba,a)$, und nach Lemma 3 ist $(ba)a^2 = ((ba)a)a = b(a^2a) = ba^3$, also auch $A(b,(ba)a^2) = A(b,ba^3) = r_b A(b,a^3)$. Nach Lemma 5.(b) und Lemma 5.(d) haben wir weiter

$$0 = A(ba,ba^2) + A(b,(ba)a^2) - r_b A(ba,a^2) - r_{ba}A(b,a^2) \\ = r_{ba}A(ba,a) + r_b A(b,a^3) - r_b A(ba,a^2) - r_{ba}A(ba+ab,a) \\ = r_b A(b,a^3) - r_b A(ba,a^2) - r_{ba}A(ab,a).$$

Mit einer weiteren Anwendung von Lemma 5.(b) ergibt sich aufgrund der Gleichung $A(a^2,a) = -A(a,a^2) = -r_a A(a,a) = 0$ weiter

$$0 = r_b A(b,a^2a) + r_b A(a^2,ba) - r_b r_{a^2}A(b,a) - r_b^2 A(a^2,a) \\ = r_b A(b,a^3) - r_b A(ba,a^2) - r_b r_{a^2}A(b,a) = r_{ba}A(ab,a) - r_b r_{a^2}A(b,a),$$

d.h. $r_{ba}A(ab,a) = r_b r_a^2 A(b,a)$ und somit $r_b r_a^2 A(a,b) = r_{ba}A(a,ab) = r_{ba}r_a A(a,b)$. Damit ist wie gewünscht

$$B(a,b)r_a A(a,b) = r_b r_a^2 A(a,b) - r_{ba}r_a A(a,b) = 0.$$

(e) Wir haben

$$B(a,b)r_a = r_b r_a^2 - r_{ba}r_a \overset{\text{(Lemma 3)}}{=} r_b r_{a^2} - (r_{ba}r_a - r_{(ba)a}) - r_{(ba)a} \\ \overset{\text{(Lemma 3)}}{=} r_b r_{a^2} - r_{ba^2} - B(ba,a) = B(b,a^2) - B(ba,a).$$

(f) Zunächst haben wir nach Lemma 3

$$B(a,ab) = r_{ab}r_a - r_{(ab)a} = r_{ab}r_a - r_a r_b r_a = (r_{ab} - r_a r_b)r_a = -B(b,a)r_a = B(a,b)r_a.$$

Mit (e) folgt weiter

$$B(b,a^2) = B(a,b)r_a + B(ba,a) = B(a,ab) - B(a,ba) = B(a,[a,b]).$$

(g) Nach (a,d) ist

$$A(a,b)^2 = (B(a,b) - r_{[a,b]})A(a,b) = -r_{[a,b]}A(a,b),$$

und damit folgt wieder nach (d)

$$B(a,b)r_{[a,b]}A(a,b) = -B(a,b)A(a,b)^2 = 0.$$

(h) Wegen $B(x,y)A(y,x) = -B(x,y)A(x,y) = 0$ für alle $x, y \in K$ folgt $B(b,c)A(a,b) = -B(b,a)A(c,b)$, d.h. $(r_c r_b - r_{cb})A(a,b) = (-r_a r_b + r_{ab})A(c,b)$ und somit gilt (h).
(i) Es ist $B(c,a)A(a,b) = B(a,c)A(b,a) = -B(a,b)A(c,a) = -B(b,a)A(a,c)$, und somit $(r_a r_c - r_{ac})A(a,b) = (-r_a r_b + r_b)A(a,c)$, und wir haben (i) eingesehen.
(j) Seien $a, u \in K$. Nach (h) ist die bilineare Abbildung

$$(b,v) \mapsto r_{ub}A(a,v) + r_{ab}A(u,v) - r_u r_b A(a,v) - r_a r_b A(u,v)$$

alternierend, und somit folgt

$$\begin{aligned} r_{ub}A(a,v) + r_{ab}A(u,v) - r_u r_b A(a,v) - r_a r_b A(u,v) \\ = -r_{uv}A(a,b) - r_{av}A(u,b) + r_u r_v A(a,b) + r_a r_v A(u,b). \end{aligned}$$

■

Lemma 7: *Sei K ein rechtsinverser Semikörper.*

(a) *Für alle $a, b \in K$ gilt $[[a,b],a,b] = 0$.*

(b) *Für $a, b, c \in K$ gilt $[[a,b],a,c] = -[[a,c],a,b]$.*

(c) *Für $x, a, b \in K$ gilt $[x[a,b],a,b] = [x,a,b][a,b]$, d.h. $A(a,b)r_{[a,b]} = r_{[a,b]}A(a,b)$.*

(d) *Für $a, b \in K$ gilt $A(a,b)B(a,b) = 0$.*

Beweis: Nach Lemma 5.(c) ist

$$[A(a,b), r_{[a,b]}] = r_{[[a,b],a,b]} - A([a,b],[a,b]) = r_{[[a,b],a,b]},$$

und mit Lemma 6.(d,g) ergibt sich

$$B(a,b)r_{[[a,b],a,b]} = B(a,b)[A(a,b), r_{[a,b]}] = B(a,b)A(a,b)r_{[a,b]} - B(a,b)r_{[a,b]}A(a,b) = 0.$$

Damit folgt weiter

$$A(a,b)r_{[[a,b],a,b]} = (B(a,b) - r_{[a,b]})r_{[[a,b],a,b]} = -r_{[a,b]}r_{[[a,b],a,b]}.$$

Weiter ist nach Lemma 6.(g) $[[[a,b],a,b],a,b] = A(a,b)^2[a,b] = -[[a,b],a,b][a,b]$, und eine erneute Anwendung von Lemma 5.(c) liefert

$$\begin{aligned} -r_{[a,b]}r_{[[a,b],a,b]} - r_{[[a,b],a,b]}A(a,b) &= A(a,b)r_{[[a,b],a,b]} - r_{[[a,b],a,b]}A(a,b) \\ &= [A(a,b), r_{[[a,b],a,b]}] \\ &= r_{[[[a,b],a,b],a,b]} - A([[a,b],a,b],[a,b]) \\ &= -r_{[[a,b],a,b][a,b]} - r_{[a,b]}r_{[[a,b],a,b]} + r_{[[a,b],a,b][a,b]} \\ &= -r_{[a,b]}r_{[[a,b],a,b]}, \end{aligned}$$

d.h. $r_{[[a,b],a,b]}A(a,b) = 0$. Wenden wir dies auf $[a,b]$ an, so folgt $[[a,b],a,b]^2 = 0$, d.h. $[[a,b],a,b] = 0$ und (a) ist gezeigt. Wegen $[A(a,b), r_{[a,b]}] = r_{[[a,b],a,b]} = 0$ haben wir auch (c). Für fixiertes $a \in K$ ist die bilineare Funktion $(b,c) \mapsto [[a,b],a,c]$ somit alternierend, und damit gilt auch (b). Schließlich folgt wegen $B(a,b) = A(a,b) + r_{[a,b]}$ mit Lemma 6.(d) auch $A(a,b)B(a,b) = B(a,b)A(a,b) = 0$.

■

Damit haben wir genügend Formeln beisammen, um das erste Hauptergebnis einsehen zu können.

Satz 8: *Ein rechtsinverser Semikörper ist ein Alternativkörper.*

Beweis: Sei K ein rechtsinverser Semikörper. Nach Lemma 3 ist K ein Rechtsalternativkörper, d.h. es bleibt nur zu zeigen, daß K auch ein Linksalternativkörper ist. Wir nehmen jetzt an, daß K kein Linksalternativkörper ist, und werden in mehreren Schritten einen Widerspruch erhalten.

(1) Für $a,b \in K$ gilt $r_aB(a,b) = B(a,ba) - r_{[a,a,b]}$.

Seien also $a,b \in K$ gegeben. Dann gilt nach Lemma 3

$$\begin{aligned} r_aB(a,b) = r_ar_br_a - r_ar_{ba} = r_{(ab)a} - r_{a(ba)} - (r_ar_{ba} - r_{a(ba)}) \\ = r_{[a,b,a]} - B(ba,a) = B(a,ba) - r_{[a,a,b]}. \end{aligned}$$

(2) Sind $a,b \in K$ mit $[a,a,b] \neq 0$, so ist $\mathrm{Kern}(B(a,b)) \cap \mathrm{Kern}(B(a,ba)) = 0$.

Seien also $a,b \in K$ mit $[a,a,b] \neq 0$. Ist dann $x \in \mathrm{Kern}(B(a,b)) \cap \mathrm{Kern}(B(a,ba))$, so folgt mit Schritt (1)

$$x[a,a,b] = B(a,ba)x - (B(a,b)x)a = 0,$$

d.h. $x = 0$.

(3) Sind $a, b \in K$ mit $[a, b] = 0$, so ist $[a, a, b] = 0$.
Seien $a, b \in K$ mit $[a, b] = 0$. Mit (1) und Lemma 6.(f) folgt

$$r_{[a,a,b]} = B(a, ba) - r_a B(a, b) = B(a, ab) - r_a B(a, b) = B(a, b)r_a - r_a B(a, b),$$

und Lemma 6.(d) liefert

$$r_{[a,a,b]} A(a, b) = B(a, b)r_a A(a, b) - r_a B(a, b)A(a, b) = 0.$$

Wenden wir dies auf a an, so haben wir $[a, a, b]^2 = 0$, d.h. $[a, a, b] = 0$.
(4) Für $a, b \in K$ gelten

$$[[a, a, b]^2, a, [a, b]] = [[a, a, b]^2, a, ab] = [[a, a, b]^2, a, ba] = 0.$$

Seien wieder $a, b \in K$. Nach Lemma 6.(b,d) haben wir

$$[[a, a, b]a, a, b] = -([a, a, b]a)[a, b],\ [[a, a, b], a, b] = -[a, a, b][a, b],$$

und mit Lemma 5.(c) ergibt sich

$$\begin{aligned}[a, a, b]^2 - ([a, a, b]a)[a, b] + [a, a, b](a[a, b]) &= [a, a, b]^2 - [[a, a, b], a, [a, b]] \\ &= (r_{[a,a,b]} - A(a, [a, b]))[a, a, b] = [A(a, b), r_a]([a, a, b]) \\ &= [[a, a, b]a, a, b] - [[a, a, b], a, b]a = -([a, a, b]a)[a, b] + ([a, a, b][a, b])a,\end{aligned}$$

d.h.

$$[a, a, b]^2 = ([a, a, b][a, b])a - [a, a, b](a[a, b]) = B([a, b], a)[a, a, b].$$

Jetzt liefert Lemma 7.(d)

$$[[a, a, b]^2, a, [a, b]] = A(a, [a, b])B([a, b], a)[a, a, b] = 0.$$

Nach Lemma 6.(b,d) ist auch $([a, a, b]a)b = [a, a, b](ba)$ und mit Lemma 3 ergibt sich

$$\begin{aligned}[a, a, b]^2 = -[a, a, b][a, b, a] &= -[a, a, b]((ab)a) + [a, a, b](a(ba)) \\ = -(([a, a, b]a)b)a + [a, a, b](a(ba)) &= -([a, a, b](ba))a + [a, a, b](a(ba)) \\ &= B(ba, a)[a, a, b],\end{aligned}$$

und somit liefert Lemma 7.(d)

$$[[a, a, b]^2, a, ba] = A(a, ba)B(ba, a)[a, a, b] = 0.$$

Damit folgt schließlich

$$[[a, a, b]^2, a, ab] = [[a, a, b]^2, [a, b] + ba] = 0.$$

(5) Wir wählen jetzt $a, b \in K$ mit $[a, a, b] \neq 0$. Nach Schritt (3) ist dann auch $[a, b] \neq 0$.
(6) Es gelten $[[a, b], a, [a, b]] = [[a, b], a, ba] = 0$.

Nach Lemma 6.(d) ist $[[a,b],a,ba] \in \operatorname{Kern} B(a,ba)$, und nach Lemma 7.(b) haben wir

$$[[a,b],a,ba] = -[[a,ba],a,b] \in \operatorname{Kern} B(a,b),$$

und mit Schritt (2) ergibt sich $[[a,b],a,ba] = 0$. Andererseits ist nach Lemma 7.(a) auch

$$[[a,b],a,[a,b]] = [[a,b],a,ab] - [[a,b],a,ba] = [[a,b],a,b]a = 0.$$

(7) Es ist $[[a,b],[a,a,b]] = 0$.

Nach Lemma 7.(a), Schritt (6) und Lemma 5.(c) gilt

$$0 = [[a,b]a,a,b] + [[a,b],a,[a,b]] - [a,b][a,a,b] - [[a,b],a,b]a = [[a,b]a,a,b] - [a,b][a,a,b],$$

d.h. $[a,b][a,a,b] = [[a,b]a,a,b]$. Nach Lemma 7.(c) ist auch $[a,a,b][a,b] = [a[a,b],a,b]$. Eine weitere Anwendung von Lemma 7.(b) und Schritt (6) liefern damit

$$\begin{aligned}[[a,b],[a,a,b]] &= [a,b][a,a,b] - [a,a,b][a,b] = [[a,b]a,a,b] - [a[a,b],a,b] \\ &= [[[a,b],a],a,b] = -[[a,[a,b]],a,b] = [[a,b],a,[a,b]] = 0.\end{aligned}$$

(8) Es gilt $\operatorname{char}(K) = 2$.

Es ist

$$[[a,a,b]^2,a,b]a \overset{\text{(Lemma 5.(a))}}{=} [[a,a,b]^2,a,ab] \overset{(4)}{=} 0,$$

und da wegen $[a,b] \neq 0$ auch $a,b \neq 0$ ist, folgt $[[a,a,b]^2,a,b] = 0$. Wieder nach Lemma 6.(b,d) ist $[[a,a,b],a,b] = -[a,a,b][a,b]$, und Lemma 5.(c) ergibt

$$\begin{aligned}0 &= [[a,a,b]^2,a,b] + [[a,a,b],[a,a,b],[a,b]] - [a,a,b][[a,a,b],a,b] \\ &\quad -[[a,a,b],a,b][a,a,b] \\ &= -[[a,a,b],[a,b],[a,a,b]] + [a,a,b]([a,a,b][a,b]) + ([a,a,b][a,b])[a,a,b] \\ &= [a,a,b]([a,b][a,a,b] + [a,a,b][a,b]) \\ &\overset{(7)}{=} 2[a,a,b]([a,b][a,a,b]).\end{aligned}$$

Wegen $[a,b] \neq 0$ und $[a,a,b] \neq 0$ folgt somit $2 = 0$, d.h. $\operatorname{char}(K) = 2$.

(9) Sind $u,v,w \in K$ mit $[[a,b],w,v] = 0$, so ist $[[a,b],w,u] \in \operatorname{Kern} B(w,v)$.

Seien also $u,v,w \in K$ mit $[[a,b],w,v] = 0$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}[[a,b],w,u](wv) &= [[a,b],w,v](wu) + [[a,b],w,u](wv) \\ &\overset{\text{(Lemma 6.(i))}}{=} ([[a,b],w,v]u)w + ([[a,b],w,u]v)w = ([[a,b],w,u]v)w,\end{aligned}$$

und mit Lemma 6.(b,c) folgt $[[a,b],w,u] \in \operatorname{Kern} B(v,w) = \operatorname{Kern} B(w,v)$.

(10) Es ist $[[a,b],a,u] = 0$ für jedes $u \in K$.

Sei $u \in K$. Wir haben $[[a,b],a,b] = 0$ nach Lemma 7.(a) und $[[a,b],a,ba] = 0$ nach Schritt (6), und mit den Schritten (9) und (2) folgt $[[a,b],a,u] \in \operatorname{Kern}(B(a,b)) \cap \operatorname{Kern}(B(a,ba)) = 0$.

(11) Es ist $[[a,b],u,ba] = [[a,b],u,b] = 0$ für jedes $u \in K$.

Sei $u \in K$. Mit Lemma 5.(b) und Schritt (10) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= [[a,b],u,ba][[a,b],b,ua] - [[a,b],u,a]b - [[a,b],b,a]u \\ &= [[a,b],u,ba] + [[a,b],b,ua] + [[a,b],a,u]b + [[a,b],a,b]u \\ &= [[a,b],u,ba] + [[a,b],b,ua] = [[a,b],ba,u] + [[a,b],b,ua], \end{aligned}$$

und wegen $[[a,b],b,a] = [[a,b],a,b] = 0$ und $[[a,b],ba,a] = [[a,b],a,ba] = 0$ nach Schritt (10), liefern (9) und (2)

$$[[a,b],ba,u] = [[a,b],b,ua] \in \operatorname{Kern}(B(ba,a)) \cap \operatorname{Kern}(B(b,a)) = 0.$$

Insbesondere ist damit $[[a,b],u,ba] = [[a,b],ba,u] = 0$ für jedes $u \in K$. Weiter $[[a,b],ua,b] = [[a,b],b,ua] = 0$ für jedes $u \in K$, und wegen $a \neq 0$ haben wir (11).

(12) Es ist $[a,b] \in N_l(K)$.

Zu zeigen ist $[[a,b],u,v] = 0$ für alle $u,v \in K$. Seien also $u,v \in K$. Sei $w \in \{b, ba\}$.

$$\begin{aligned} [[a,b],u,v](aw) &\overset{(10,11)}{=} [[a,b],a,w](uv) + [[a,b],a,v](uw) \\ &\quad + [[a,b],u,w](av) + [[a,b],u,v](aw) \\ &\overset{(\text{Lemma 6.(j)})}{=} ([[a,b],a,w]v)u + ([[a,b],a,v]w)u \\ &\quad + ([[a,b],u,w]v)a + ([[a,b],u,v]w)a \\ &\overset{(10,11)}{=} ([[a,b],u,v]w)a, \end{aligned}$$

also $[[a,b],u,v] \in \operatorname{Kern} B(w,a) = \operatorname{Kern} B(a,w)$ nach Lemma 6.(b,c). Jetzt ergibt Schritt (2) wieder $[[a,b],u,v] = 0$.

(13) Es ist $K = \operatorname{Kern}(A(a,b)) + \operatorname{Kern}(B(a,b))$.

Sei $x \in K$. Wegen $[a,b] \neq 0$ können wir $u := [x,a,b][a,b]^{-1} \in K$ setzen. Mit Lemma 3 und Lemma 7.(c) haben wir

$$A(a,b)r_{[a,b]^{-1}} = A(a,b)r_{[a,b]}^{-1} = r_{[a,b]}^{-1}A(a,b) = r_{[a,b]^{-1}}A(a,b).$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} [u,a,b] &= [[x,a,b][a,b]^{-1},a,b] \\ &= [[x[a,b]^{-1},a,b],a,b] \\ &\overset{(\text{Lemma 6.(b,d)})}{=} [x[a,b]^{-1},a,b][a,b] \\ &= ([x,a,b][a,b]^{-1})[a,b] \\ &= u[a,b], \end{aligned}$$

und nach Lemma 6.(b) ist $u \in \operatorname{Kern}(B(a,b))$. Außerdem zeigt diese Rechnung $[u,a,b] = ([x,a,b][a,b]^{-1})[a,b] = [x,a,b]$. Weiter ist

$$[x+u,a,b] = [x,a,b] + [u,a,b] = 2[x,a,b] = 0,$$

d.h. $x+u \in \operatorname{Kern} A(a,b)$ und $x = (x+u)+u$.
(14) Es gilt $(\operatorname{Kern} A(a,b)) \cdot (\operatorname{Kern} B(a,b)) = \operatorname{Kern} B(a,b)$.

Wegen $1 \in \operatorname{Kern} A(a,b)$ ist $\operatorname{Kern} B(a,b) \subseteq (\operatorname{Kern} A(a,b))(\operatorname{Kern} B(a,b))$ klar. Seien umgekehrt $u \in \operatorname{Kern} A(a,b)$ und $v \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ gegeben. Dann gelten $[u,a,b]=0$ und $[v,a,b] = v[b,a] = v[a,b]$. Mit Lemma 5.(c) folgt

$$[uv,a,b] = [u,v,[a,b]]+u[v,a,b]+[u,a,b]v = (uv)[a,b]+u(v[a,b])+u(v[a,b]) = (uv)[a,b],$$

und dies ergibt $uv \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ nach Lemma 6.(b).
(15) Für jedes $u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ gilt

$$\begin{aligned}([a,a,b][a,b])([a,b]u+u[a,b]) = \\ [[a,a,b]([a,b]u+u[a,b]),a,b] + ([a,a,b]u)[a,b]^2 + (([a,a,b][a,b])u)[a,b].\end{aligned}$$

Sei also $u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$, d.h. nach Lemma 6.(b) $[u,a,b] = u[a,b]$, $(ua)b = u(ba)$. Nach Lemma 7.(a) ist $[a,b] \in \operatorname{Kern} A(a,b)$, also $[a,b]u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ nach (14). Dies bedeutet $[[a,b]u,a,b] = ([a,b]u)[a,b]$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}[[a,a,b]([a,b]u),a,b] &\overset{\text{(Lemma 5.(c))}}{=} [[a,a,b],[a,b]u,[a,b]] + [a,a,b][[a,b]u,a,b] \\ &\quad +[[a,a,b],a,b]([a,b]u) \\ &\overset{\text{(Lemma 5.(a))}}{=} [[a,a,b],u,[a,b]][a,b] + [a,a,b](([a,b]u)[a,b]) \\ &\quad +([a,a,b][a,b])([a,b]u) \\ &\overset{\text{(Lemma 3)}}{=} [[a,a,b],u,[a,b]][a,b] + (([a,a,b][a,b])u)[a,b] \\ &\quad +([a,a,b][a,b])([a,b]u),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[[a,a,b](u[a,b]),a,b] &\overset{\text{(Lemma 5.(c))}}{=} [[a,a,b],u[a,b],[a,b]] + [a,a,b][u[a,b],a,b] \\ &\quad +[[a,a,b],a,b](u[a,b]) \\ &\overset{\text{(Lemma 7.(c))}}{=} [[a,a,b],u[a,b],[a,b]] + [a,a,b]([u,a,b][a,b]) \\ &\quad +([a,a,b][a,b])(u[a,b]) \\ &= [[a,a,b],u[a,b],[a,b]] + [a,a,b]((u[a,b])[a,b]) \\ &\quad +([a,a,b][a,b])(u[a,b]).\end{aligned}$$

Fassen wir diese beiden Gleichungen zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&[[a,a,b]([a,b]u+u[a,b]),a,b] \\ &\quad = [[a,a,b],u,[a,b]][a,b] + (([a,a,b][a,b])u)[a,b] + ([a,a,b][a,b])([a,b]u) \\ &\qquad +[[a,a,b],u[a,b],[a,b]] + [a,a,b]((u[a,b])[a,b]) + ([a,a,b][a,b])(u[a,b]) \\ &\quad = ([a,a,b][a,b])([a,b]u+u[a,b]) \\ &\qquad +(([a,a,b]u)[a,b])[a,b] + ([a,a,b](u[a,b]))[a,b] + (([a,a,b][a,b])u)[a,b] \\ &\qquad +([a,a,b](u[a,b]))[a,b] + [a,a,b]((u[a,b])[a,b]) + [a,a,b]((u[a,b])[a,b]) \\ &\quad = ([a,a,b][a,b])([a,b]u+u[a,b]) \\ &\qquad +([a,a,b]u)[a,b]^2 + (([a,a,b][a,b])u)[a,b].\end{aligned}$$

(16) Für jedes $u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ gilt

$$([a,a,b]([a,b]u + u[a,b]))[a,b] = [[a,a,b]([a,b]u + u[a,b]), a, b].$$

Sei wieder $u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[[a,a,b]u,a,b] &\overset{\text{(Lemma 5.(c))}}{=} [[a,a,b],u,[a,b]] + [a,a,b][u,a,b] + [[a,a,b],a,b]u \\
&\overset{\text{(Lemma 6.(b,d))}}{=} [[a,a,b],[a,b],u] + [a,a,b](u[a,b]) + ([a,a,b][a,b])u \\
&= ([a,a,b][a,b])u + [a,a,b]([a,b]u) \\
&\quad + [a,a,b](u[a,b]) + ([a,a,b][a,b])u \\
&= [a,a,b]([a,b]u + u[a,b]).
\end{aligned}$$

Wir schließen weiter

$$\begin{aligned}
([a,a,b]([a,b]u + u[a,b]))[a,b] &= [[a,a,b]u,a,b][a,b] \\
&\overset{\text{(Lemma 6.(b,d))}}{=} [[[a,a,b]u,a,b],a,b] \\
&= [[a,a,b]([a,b]u + u[a,b]),a,b].
\end{aligned}$$

(17) Für jedes $u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ ist $[u,[a,b]] = 0$.

Sei $u \in \operatorname{Kern} B(a,b)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
([a,a,b][a,b])([a,b]u + u[a,b]) &\overset{(15)}{=} [[a,a,b]([a,b]u + u[a,b]),a,b] + ([a,a,b]u)[a,b]^2 \\
&\quad + (([a,a,b][a,b])u)[a,b] \\
&\overset{(16)}{=} ([a,a,b]([a,b]u + u[a,b]))[a,b] + \\
&\quad (([a,a,b]u)[a,b])[a,b] + (([a,a,b][a,b])u)[a,b] \\
&= ([[a,a,b],u,[a,b]] + [[a,a,b],[a,b],u])[a,b] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und wegen $[a,a,b][a,b] \neq 0$ folgt $[a,b]u + u[a,b] = 0$, d.h. $[a,b]u = u[a,b]$ und $[u,[a,b]] = 0$.

(18) Für jedes $u \in \operatorname{Kern} A(a,b)$ ist $[u,[a,b]] = 0$.

Sei $u \in \operatorname{Kern} A(a,b)$, d.h. $[u,a,b] = 0$. Nach Schritt (14) ist wegen $[a,a,b] \in \operatorname{Kern} B(a,b)$ auch $u[a,a,b] \in \operatorname{Kern} B(a,b)$, und (17) liefert die Formel $[[a,a,b],[a,b]] = [u[a,a,b],[a,b]] = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
[u,[a,b]][a,a,b] &= [u[a,a,b],[a,b]] + u[[a,a,b],[a,b]] + [u,[a,b]][a,a,b] \\
&\overset{\text{(Lemma 1.(b))}}{=} [u,[a,a,b],[a,b]] + [u,[a,b],[a,a,b]] + [[a,b],u,[a,a,b]] \\
&= [[a,b],u,[a,a,b]] \\
&\overset{(12)}{=} 0,
\end{aligned}$$

und wegen $[a,a,b] \neq 0$ ist damit $[u,[a,b]] = 0$.

(19) Für alle $u \in K$ ist $[u,[a,b]] = 0$.

Dies ist klar nach (13,17,18).

(20) Nun wollen wir zum endgültigen Widerspruch kommen. Nach Schritt (19) gilt $[a,[a,b]] = 0$, und nach (3) ist damit auch $[a,a,ab] - [a,a,ba] = [a,a,[a,b]] = 0$, d.h. $[a,a,ab] = [a,a,ba] \in \operatorname{Kern} B(a,ba)$ nach Lemma 6.(d). Außerdem ist nach Lemma 5.(a) und Lemma 6.(d) auch $[a,a,ab] = [a,a,b]a \in \operatorname{Kern} B(a,b)$. Mit Schritt (2) folgt $[a,a,ab] \in \operatorname{Kern} B(a,b) \cap \operatorname{Kern} B(a,ba) = 0$, also auch $[a,a,b]a = [a,a,ab] = 0$ im Widerspruch zu $a, [a,a,b] \neq 0$.

■

Umgekehrt ist auch jeder Alternativkörper ein links- und rechtsinverser Semikörper.

Satz 9: *Sei K ein Alternativkörper.*

(a) *Die Abbildung $[\ ,\ ,\ ] : K^3 \to K$ ist alternierend.*

(b) *Die Abbildung*

$$f : K^4 \to K; (x,y,u,v) \mapsto [xy,u,v] - [y,u,v]x - y[x,u,v]$$

ist alternierend, und für $x,y,u,v \in K$ gilt

$$3f(x,y,u,v) = [x,[y,u,v]] - [y,[u,v,x]] + [u,[v,x,y]] - [v,[x,y,u]].$$

(c) *Der Semikörper K ist links- und rechtsinvers.*

(d) *Es ist $N_l(K) = N_m(K) = N_r(K) = N(K)$.*

Beweis: **(a)** Nach Definition eines Alternativkörpers gelten $[a,a,b] = [a,b,b] = 0$ für alle $a,b \in K$.

(b) Für $x,y,u \in K$ haben wir $f(x,y,u,u) = [xy,u,u] - [y,u,u]x - y[x,u,u] = 0$. Wir zeigen jetzt

$$f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}) = (-1)^\pi f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

für jede Permutation $\pi \in S_4$ und jedes $x \in K^4$. Für die Transposition $\pi = (3\,4)$ wissen wir dies bereits. Wir betrachten als nächstes den Viererzykel $\pi = (1\,2\,3\,4)$. Es ist $(-1)^\pi = -1$. Wir definieren die folgende Abbildung

$$g : K^4 \to K; (x,y,u,v) \mapsto f(x,y,u,v) - f(y,u,v,x) + f(u,v,x,y).$$

Für $x, y, u, v \in K$ haben wir dann

$$\begin{aligned}
g(x,y,u,v) &= [xy,u,v] - [y,u,v]x - y[x,u,v] \\
&\quad -[yu,v,x] + [u,v,x]y + u[y,v,x] \\
&\quad +[uv,x,y] - [v,x,y]u - v[u,x,y] \\
&\overset{\text{(Lemma 1.(a))}}{=} [x,yu,v] - [x,y,uv] + x[y,u,v] \\
&\quad +[x,y,u]v - [y,u,v]x - y[x,u,v] \\
&\quad -[yu,v,x] + [u,v,x]y + u[y,v,x] \\
&\quad +[uv,x,y] - [v,x,y]u - v[u,x,y] \\
&\overset{(a)}{=} x[y,u,v] + [x,y,u]v - [y,u,v]x - y[x,u,v] \\
&\quad +[x,u,v]y + u[x,y,v] - [x,y,v]u - v[x,y,u] \\
&= [x,[y,u,v]] + [[x,y,u],v] + [[x,u,v],y] + [u,[x,y,v]].
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$g(v,x,y,u) = [v,[x,y,u]] + [[v,x,y],u] + [[v,y,u],x] + [y,[v,x,u]] \overset{(a)}{=} -g(x,y,u,v).$$

Dies besagt

$$f(x,y,u,v) - f(y,u,v,x) + f(u,v,x,y) = -f(v,x,y,u) + f(x,y,u,v) - f(y,u,v,x),$$

d.h. $f(u,v,x,y) = -f(v,x,y,u)$. Also ist die Behauptung für $\pi = (1\,2\,3\,4)$ gezeigt. Konjugieren wir die Transposition $(3\,4)$ mit den Potenzen von $(1\,2\,3\,4)$, so erhalten wir insbesondere alle Transpositionen benachtbarter Indizes, und diese erzeugen S_4. Also wird S_4 auch von $(3\,4)$ und $(1\,2\,3\,4)$ erzeugt, und die Zwischenbehauptung ist eingesehen. Da $f(x,y,u,u) = 0$ für $x, y, u \in K$ ist, folgt daß f alternierend ist.

Wenden wir dies auf die Funktion g an, so erhalten wir mit (a)

$$\begin{aligned}
3f(x,y,u,v) &= g(x,y,u,v) \\
&= [x,[y,u,v]] + [[x,y,u],v] + [[x,u,v],y] + [u,[x,y,v]] \\
&= [x,[y,u,v]] - [y,[u,v,x]] + [u,[v,x,y]] - [v,[x,y,u]].
\end{aligned}$$

(c) Sei $a \in K\backslash\{0\}$, und definiere $a^{-1} \in K$ durch $aa^{-1} = 1$. Sei $b \in K$. Wir wollen $(ba)a^{-1} = b$ zeigen. Nach (b) gilt

$$\begin{aligned}
0 = f(a,a^{-1},b,a) &= [aa^{-1},b,a] - [a^{-1},b,a]a - a^{-1}[a,b,a] \\
&\overset{(a)}{=} [1,b,a] - [b,a,a^{-1}]a + a^{-1}[a,a,b] = [a^{-1},a,b]a,
\end{aligned}$$

d.h. $[b,a,a^{-1}] = 0$. Damit folgt

$$(ba)a^{-1} = b(aa^{-1}) = b.$$

Also ist K rechtsinvers. Wenden wir dies auf den Alternativkörper K^t an, so folgt daß K^t rechtsinvers ist, d.h. K ist linksinvers.
(d) Nach Lemma 4.(e) ist $N_r(K) = N_m(K)$. Damit folgt auch $N_l(K) = N_r(K^t) = N_m(K^t) = N_m(K)$.

■

Insgesamt sind die Alternativkörper somit genau die rechtsinversen Semikörper. Insbesondere können wir unsere bisherigen Lemmata über rechtsinverse Semikörper auf Alternativkörper anwenden. Außerdem können wir zum dualen Alternativkörper K^t wechseln, und alle bisherigen Lemmata stehen auch für diesen zur Verfügung. Wie sehen jetzt der Kommutator und der Assoziator in K^t konkret aus? Seien also $a, b, c \in K$ und schreibe das Produkt in K^t als $\otimes$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} [a,b]^t &= a \otimes b - b \otimes a = ba - ab = -[a,b], \\ [a,b,c]^t &= (a \otimes b) \otimes c - a \otimes (b \otimes c) = c(ba) - (cb)a = -[c,b,a] = [a,b,c]. \end{aligned}$$

Als erste Anwendung dieser Tatsachen haben wir damit das folgende Lemma.

Lemma 10: *Sei K ein Alternativkörper, und seien $a, b, c \in K$. Dann gelten:*

(a) *Es ist*

$$\begin{array}{llll} [a,b,xc] = [a,b,c]x, & [a,b,cx] = x[a,b,c] & \text{für } x \in \{a,b\}, \\ [a,xb,c] = [a,b,c]x, & [a,bx,x] = x[a,b,c] & \text{für } x \in \{a,c\}, \\ [xa,b,c] = [a,b,c]x, & [ax,b,c] = x[a,b,c] & \text{für } x \in \{b,c\}. \end{array}$$

(b) *Es ist $[a^2,b,c] = a[a,b,c] + [a,b,c]a$.*

(c) *Es ist $[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b + 3[a,b,c]$.*

Beweis: **(a)** Die erste Aussage der ersten Zeile gilt nach Satz 9.(a) und Lemma 5.(a), und die zweite Aussage folgt durch Anwendung auf K^t. Die restlichen Zeilen folgen mit Satz 9.(a) aus der ersten.
(b) Wir haben

$$[a^2,b,c] \overset{\text{(Satz 9.(a))}}{=} [b,c,a^2] \overset{\text{(Lemma 4.(b))}}{=} [b,ca,a] + [b,c,a]a \overset{\text{(a)}}{=} a[b,c,a] + [b,c,a]a \overset{\text{(Satz 9.(a))}}{=} a[a,b,c] + [a,b,c]a.$$

(c) Klar nach Lemma 1.(b) und Satz 9.(a).

■

Weiter erhalten wir aus unseren Lemmata durch Übergang zum dualen Alternativkörper noch die folgenden Formeln:

Lemma 11: *Sei K ein Alternativkörper und seien $a, b, x \in K$. Dann gelten $[x[a,b],a,b] = [x,a,b][a,b]$ und $[[a,b]x,a,b] = [a,b][x,a,b]$. Weiter ist*

$$[a,b][x,a,b] = -[x,a,b][a,b] = [[x,a,b],a,b],$$

und insbesondere

$$[[[a,b],x],a,b] = 2[a,b][x,a,b].$$

Beweis: Nach Lemma 6.(b,d) haben wir $[[x,a,b],a,b] = [x,a,b][b,a] = -[x,a,b][a,b]$. Wenden wir dies auf K^t an, so ergibt sich auch $[[x,a,b],a,b] = [a,b][x,a,b]$. Weiter ist nach Lemma 7.(c) $[x[a,b],a,b] = [x,a,b][a,b]$ und Anwendung auf K^t ergibt $[[a,b]x,a,b] = [a,b][x,a,b]$. Insgesamt folgt

$$[[[a,b],x],a,b] = [[a,b]x,a,b] - [x[a,b],a,b] = [a,b][x,a,b] - [x,a,b][a,b] = 2[a,b][x,a,b].$$

■

Es ist nützlich noch einige Eigenschaften der Funktion f aus Satz 9.(b) festzuhalten.

Lemma 12: *Sei K ein Alternativkörper, und definere die Funktion $f : K^4 \to K$ wie in Satz 9.(b). Dann gelten:*

(a) *Für alle $a,b,c,d \in K$ ist*

$$2f(a,b,c,d) = [[a,b],c,d] - [b,[a,c,d]] + [a,[b,c,d]].$$

(b) *Für alle $a,b,c,d \in K$ gilt*

$$f(a,b,c,d) = [[a,b],c,d] + [[c,d],a,b].$$

(c) *Für alle $a,b,c,d \in K$ gilt*

$$f(ab,a,c,d) = af(b,a,c,d) + [a,c,d][b,a].$$

(d) *Sind $a,b,c,d \in K$ mit $\{a,b,c,d\} \cap N(K) \neq \emptyset$, so ist $f(a,b,c,d) = 0$.*

Beweis: **(d)** Sind $a,b,c \in K$, $d \in N(K)$, so ist $f(a,b,c,d) = [ab,c,d] - [b,c,d]a - b[a,c,d] = 0$. Da f nach Satz 9.(b) alternierend ist, ergibt dies sofort (d).
(a) Da f alternierend ist, haben wir

$$\begin{aligned} 2f(a,b,c,d) &= f(a,b,c,d) - f(b,a,c,d) \\ &= [ab,c,d] - [b,c,d]a - b[a,c,d] \\ &\quad -[ba,c,d] + [a,c,d]b + a[b,c,d] \\ &= [[a,b],c,d] - [b,[a,c,d]] + [a,[b,c,d]]. \end{aligned}$$

(b) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &\overset{\text{(Satz 9.(b))}}{=} 2f(a,b,c,d)+2f(c,d,a,b)-3f(a,b,c,d)\\
&\overset{\text{(a, Satz 9.(b))}}{=} [[a,b],c,d]-[b,[a,c,d]]+[a,[b,c,d]]\\
&\quad +[[c,d],a,b]-[d,[c,a,b]]+[c,[d,a,b]]\\
&\quad -[a,[b,c,d]]+[b,[c,d,a]]-[c,[d,a,b]]+[d,[a,b,c]]\\
&\overset{\text{(Satz 9.(a))}}{=} [[a,b],c,d]-[b,[a,c,d]]+[a,[b,c,d]]\\
&\quad +[[c,d],a,b]-[d,[a,b,c]]+[c,[a,b,d]]\\
&\quad -[a,[b,c,d]]+[b,[a,c,d]]-[c,[a,b,d]]+[d,[a,b,c]]\\
&= [[a,b],c,d]+[[c,d],a,b].
\end{aligned}$$

(c) Es ist $[ba,a]=(ba)a-a(ba)=(ba)a-(ab)a+(ab)a-a(ba)=(ba-ab)a+[a,b,a]=[b,a]a$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(ba,a,c,d) &\overset{(b)}{=} [[ba,a],c,d]+[[c,d],ba,a]\\
&= [[b,a]a,c,d]+a[[c,d],b,a]\\
&= [[b,a]a,c,d]-[a,c,d][b,a]-a[[b,a],c,d]\\
&\quad +[a,c,d][b,a]+a[[b,a],c,d]+a[[c,d],b,a]\\
&\overset{(b)}{=} f([b,a],a,c,d)+[a,c,d][b,a]+af(b,a,c,d)\\
&= f(ba,a,c,d)-f(ab,a,c,d)+[a,c,d][b,a]+af(b,a,c,d),
\end{aligned}$$

d.h. (c) ist bewiesen.

■

Weiter können wir die Formel $((xa)b)a=x((ab)a)$ aus Lemma 3 zu den folgenden sogenannten Moufang Identitäten verallgemeinern.

Lemma 13: *Sei K ein Alternativkörper. Dann gelten für alle $a,b,c\in K$ die folgenden Formeln:*

(a) $(ab)(ca)=a((bc)a)$,

(b) $((ab)a)c=a(b(ac))$,

(c) $(ab)(ca)=(a(bc))a$,

(d) $((ab)c)b=a(b(cb))$.

Beweis: **(d)** Klar nach Satz 9.(c) und Lemma 3.
(b) Klar durch Anwendung von (d) auf K^t.

(a) Wir haben

$$(ab)(ca) = (ab)(ca) - a(b(ca)) + a(b(ca)) = [a,b,ca] + a(b(ca)) = a[a,b,c] + a(b(ca))$$
$$= a([b,c,a] + b(ca)) = a((bc)a - b(ca) + b(ca)) = a((bc)a).$$

(c) Dies folgt durch Anwendung von (a) auf K^t.

■

Als nächstes beweisen wir den folgenden Satz, der es ermöglicht große assoziative Unteralgebren in einem Alternativkörper zu finden.

Lemma 14: *Sei K ein Alternativkörper und seien $A, B, C \subseteq K$ drei Teilmengen so, daß für alle $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $c, c' \in C$, $x \in K$ stets*

$$[a, a', x] = [b, b', x] = [c, c', x] = [a, b, c] = 0$$

gilt. Dann ist die über $Z(K)$ von $A \cup B \cup C$ erzeugte Unteralgebra von K assoziativ.

Beweis: Sei f die Abbildung aus Satz 9.(b). Sind $a, b \in X \in \{A, B, C\}$, $x, y \in K$, so gilt

$$f(a,b,x,y) = f(x,y,a,b) = [xy,a,b] - [y,a,b]x - y[x,a,b]$$
$$= [a,b,xy] - [a,b,y]x - y[a,b,x] = 0.$$

Setze jetzt $U := A \cup B \cup C \subseteq K$. Seien $a, b, c \in U$. Wir behaupten, daß dann $[a,b,c] = 0$ ist. Seien also $X, Y, Z \in \{A, B, C\}$ mit $a \in X$, $b \in Y$, $c \in Z$. Ist $|\{X, Y, Z\}| \leq 2$, so ergeben die Voraussetzung und Satz 9.(a) sofort $[a,b,c] = 0$. Sonst sind X, Y, Z paarweise verschieden, und erneut liefert die Voraussetzung des Lemmas mit Satz 9.(a) $[a,b,c] = 0$.

Weiter folgt für $a, b, c, d \in U$ ebenfalls $f(a,b,c,d) = 0$. Denn es gibt $X, Y, Z, T \in \{A, B, C\}$ mit $a \in X$, $b \in Y$, $c \in Z$, $d \in T$, und da mindestens zwei der X, Y, Z, T gleich sind, folgt mit Satz 9.(b) und unserer obigen Rechnung sofort $f(a,b,c,d) = 0$. Wir setzen jetzt

$$L := \{x \in K | \forall (a, b \in U) : [a,b,x] = 0 \text{ und } \forall (a \in A, b \in B, c \in C) : f(a,b,c,x) = 0\}.$$

Offenbar ist L ein Teilraum des $Z(K)$-Vektorraums K. Weiter haben wir bereits $U \subseteq L$ gezeigt, und nach Lemma 12.(d) ist auch $N(K) \subseteq L$. Ist $x \in L$, so gilt sogar $f(a,b,c,x) = 0$ für alle $a, b, c \in U$. Es gibt ja $X, Y, Z \in \{A, B, C\}$ mit $a \in X$, $b \in Y$, $c \in Z$. Ist dann $|\{X, Y, Z\}| \leq 2$, so liefert die Rechnung zu Beginn dieses Beweises sofort $f(a,b,c,x) = 0$ da f alternierend ist. Sind andererseits X, Y, Z paarweise verschieden, so ist $f(a,b,c,x) = 0$ nach Definition von L klar, wieder da f alternierend ist.

Wir zeigen jetzt $UL \subseteq L$. Sind $a, b, c \in U$, $x \in L$, so haben wir zunächst

$$[a,b,ux] = [ux,a,b] = f(u,x,a,b) + [x,a,b]u + x[u,a,b] = f(u,a,b,x) + [a,b,x]u = 0,$$

und es gelten

$$\begin{aligned}[ab,c,x] &= f(a,b,c,x)+[b,c,x]a+b[a,c,x]=0,\\ [ax,b,c] &= f(a,x,b,c)+[x,b,c]a+x[a,b,c]=f(a,b,c,x)+[b,c,x]a+x[a,b,c]=0.\end{aligned}$$

Für $a,b\in X\in\{A,B,C\}$, $u,v\in U$, $x\in L$ folgt wegen $U\subseteq L$ weiter

$$\begin{aligned}[ax,b,uv] &= f(a,x,b,uv)+[x,b,uv]a+x[a,b,uv]\\ &= -f(a,b,x,uv)-[uv,b,x]a+x[uv,a,b]=0,\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}f(u,v,b,ax) &= [uv,b,ax]-[v,b,ax]u-v[u,b,ax]\\ &= -[ax,b,uv]-[ax,v,b]u-v[ax,u,b]=0.\end{aligned}$$

Da f alternierend ist, ergibt dies $f(a,b,c,ux)=0$ für $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $u\in U$, $x\in L$. Damit haben wir $UL\subseteq L$ eingesehen.

Weiter sind auch die Mengen

$$\begin{aligned}M &:= \{x\in L|\forall(a\in U,u\in L):[a,u,x]=0 \text{ und } xL\subseteq L\},\\ N &:= \{x\in M|\forall(a\in L,b\in M):[a,b,x]=0\}\end{aligned}$$

Teilräume von K über $Z(K)$. Ist $x\in U$, so gilt $xL\subseteq UL\subseteq L$, und für $a\in U$, $u\in L$ ist $[a,u,x]=-[a,x,u]=0$ nach Definition von L, d.h. $U\subseteq M$. Ist $x\in U\subseteq M$, so gilt für $a\in L$, $b\in M$ weiter $[a,b,x]=[x,a,b]=0$, d.h. es ist auch $x\in N$, und somit $U\subseteq N$.

Seien $x,y\in N$. Für $a\in M$, $b\in L$ gilt $ab\in aL\subseteq L$ und

$$f(a,b,x,y)=[ab,x,y]-[b,x,y]a-b[a,x,y]=0,$$

also

$$[xy,b,a]=f(x,y,b,a)+[y,b,a]x+y[x,b,a]=-f(a,b,x,y)+[b,a,y]x+y[b,a,x]=0.$$

Weiter ist $xy\in xL\subseteq L$, und für $u\in L$ gilt $(xy)u=(xy)u-x(yu)+x(yu)=[x,y,u]+x(yu)=[u,x,y]+x(yu)=x(yu)\in x(yL)\subseteq xL\subseteq L$, d.h. $(xy)L\subseteq L$. Schließlich ist für $a\in U$, $u\in L$ auch $[a,u,xy]=[xy,a,u]=f(x,y,a,u)+[y,a,u]x+y[x,a,u]=f(a,u,x,y)-[u,a,y]x-y[u,a,x]=0$ da $a\in U\subseteq M$ ist. Dies zeigt $xy\in M$, und für $a\in L$, $b\in M$ gilt $[a,b,xy]=[xy,a,b]=0$, d.h. es ist sogar $xy\in N$. Damit haben wir $NN\subseteq N$ gezeigt.

Letztlich ist $1\in N(K)\subseteq L$, $1\in M$ und somit auch $1\in N$, d.h. N ist eine Unteralgebra von K, die A,B,C enthält. Wegen $N\subseteq M\subseteq L$ ist $[a,b,c]=0$ für $a,b,c\in N$, d.h. N ist assoziativ.

■

Korollar 15: *Seien K ein Alternativkörper, $A \subseteq K$, $a \in K$ mit $[u, v, x] = 0$ für alle $u, v \in A$, $x \in K$. Dann ist die von $A \cup \{a\}$ über $Z(K)$ erzeugte Unteralgebra von K assoziativ.*

Beweis: Setze $B := C := \{a\}$. Da $[a, a, x] = [x, a, a] = 0$ für alle $x \in K$ gilt, ergibt Lemma 14 die Behauptung.

■

Korollar 16: *Sei K ein Alternativkörper. Dann ist K biassoziativ, d.h. sind $a, b \in K$, so ist die von a, b über $Z(K)$ erzeugte Unteralgebra von K assoziativ.*

Beweis: Da $[b, b, x] = 0$ für alle $x \in K$ gilt, können wir Korollar 15 mit $A = \{b\}$ anwenden.

■

Das Zentrum eines Alternativkörpers, beziehungsweise eines allgemeinen Semikörpers, haben wir als die Menge aller Elemente definiert, die mit allen anderen Elementen kommutieren und assoziieren. Wir werden jetzt einsehen, daß im Fall eines Alternativkörpers bereits die erste Bedingung ausreicht.

Satz 17: *Sei K ein Alternativkörper. Dann gilt*

$$Z(K) = \{a \in K | \forall (x \in K) : ax = xa\}.$$

Beweis: Aus $a \in Z(K)$ folgt nach Definition $ax = xa$ für alle $x \in K$. Sei umgekehrt $a \in K$ mit $ax = xa$ für jedes $x \in K$ gegeben. Dann ist $a \in N(K)$ zu zeigen. Definiere f wie in Satz 9.(b).

Wir behandeln zuerst den Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Seien $x, y \in K$. Angenommen es wäre $[a, x, y] \neq 0$. Mit Lemma 11 folgt

$$2[x, y][a, x, y] = [[[x, y], a], x, y] = 0,$$

d.h. es ist $[x,y]=0$. Insbesondere ist $[[a,x,y],x,y]=[x,y][a,x,y]=0$. Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}
[a,x,y]^2 &= [a,x,y][a,x,y]+[[a,x,y],x,y]a \\
&\quad -[a[a,x,y],x,y]+[a[a,x,y],x,y] \\
&= [a[a,x,y],x,y]-f(a,[a,x,y],x,y) \\
&\overset{\text{(Lemma 12.(b))}}{=} [a[a,x,y],x,y]-[[a,[a,x,y]],x,y]-[[x,y],a,[a,x,y]] \\
&= [a[a,x,y],x,y] \\
&= \frac{1}{2}[a[a,x,y]+[a,x,y]a,x,y] \\
&= \frac{1}{2}[[a^2,x,y],x,y] \\
&= -\frac{1}{2}[a^2,x,y][x,y] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also ist $[a,x,y]=0$, d.h. $a\in N_l(K)=N(K)$.

Wir kommen jetzt zum Fall $\mathrm{char}(K)=2$. Seien wieder $x,y\in K$. Nach Lemma 10.(c) haben wir dann

$$[x,y,a]=[xy,a]-x[y,a]+[x,a]y=0,$$

d.h. $a\in N_r(K)=N(K)$.

■

Korollar 18: *Ein kommutativer Alternativkörper ist ein Körper.*

Beweis: Ist K ein kommutativer Alternativkörper, so ist nach Satz 17 auch $N(K)=Z(K)=K$, d.h. K ist auch assoziativ, und somit ein Körper.

■

Lemma 19: *Sei K ein Alternativkörper. Dann ist $[a,b]^2\in N(K)$ für alle $a,b\in K$.*

Beweis: Seien $a,b\in K$ gegeben. Im Fall $[a,b]=0$ ist die Behauptung klar, d.h. wir können $[a,b]\neq 0$ annehmen. Seien $x\in K$ und $u\in\{a,b\}$. Sei die Funktion f wie in Satz 9.(b) definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[[a,b],u,x] &= [[a,b],u,x]+[[u,x],a,b]-[[u,x],a,b] \\
&\overset{\text{(Lemma 12.(b))}}{=} f(a,b,u,x)-[[u,x],a,b] \\
&\overset{\text{(Satz 9.(b))}}{=} -[[u,x],a,b] \\
&\overset{\text{(Satz 9.(a))}}{=} [b,a,[u,x]],
\end{aligned}$$

und weiter folgt

$$\begin{aligned}
[[a,b]^2,u,x] &\overset{\text{(Lemma 10.(b))}}{=} [a,b][[a,b],u,x]+[[a,b],u,x][a,b]\\
&= [a,b][b,a,[u,x]]+[b,a,[u,x]][a,b]\\
&\overset{\text{(Satz 9.(a))}}{=} -[a,b][[u,x],a,b]-[[u,x],a,b][a,b]\\
&\overset{\text{(Lemma 11)}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Jetzt seien $x,y\in K$ und weiter $u\in\{a,b\}$. Die Definition von f ergibt mit Satz 9.(a)

$$\begin{aligned}
f(x,y,[a,b]^2,u) &= [xy,[a,b]^2,u]-[y,[a,b]^2,u]x-y[x,[a,b]^2,u]\\
&= [[a,b]^2,u,xy]-[[a,b]^2,u,y]x-y[[a,b]^2,u,x]=0.
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir für jedes $x\in K$

$$\begin{aligned}
[ab,[a,b]^2,x] &= [ab,[a,b]^2,x]-[b,[a,b]^2,x]a-b[a,[a,b]^2,x]=f(a,b,[a,b]^2,x)\\
&= f(x,a,[a,b]^2,a)=0,
\end{aligned}$$

und somit für $x,y\in K$

$$f(x,y,[a,b]^2,ab)=[xy,[a,b]^2,ab]-[y,[a,b]^2,ab]x-y[x,[a,b]^2,ab]=0.$$

Seien $x,y\in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}
[b,[x,y,[a,b]^2],a] &= (b[x,y,[a,b]^2])a-b([x,y,[a,b]^2]a)\\
&= \quad([xb,y,[a,b]^2]-[b,y,[a,b]^2]x-f(x,b,y,[a,b]^2))a\\
&\quad -b([ax,y,[a,b]^2]-x[a,y,[a,b]^2]-f(a,x,y,[a,b]^2))\\
&= [xb,y,[a,b]^2]a-b[ax,y,[a,b]^2]\\
&= \quad[a(xb),y,[a,b]^2]-(xb)[a,y,[a,b]^2]\\
&\quad -f(a,xb,y,[a,b]^2)-[(ax)b,y,[a,b]^2]\\
&\quad +[b,y,[a,b]^2](ax)+f(ax,b,y,[a,b]^2)\\
&= [a(xb)-(ax)b,y,[a,b]^2]\\
&= [[a,b]^2,[a,x,b],y]\\
&\overset{\text{(Lemma 10.(b))}}{=} [a,b][[a,b],[a,x,b],y]+[[a,b],[a,x,b],y][a,b]\\
&\overset{\text{(Lemma 10.(a))}}{=} [[a,b],[a,x,b][a,b]+[a,b][a,x,b],y]\\
&\overset{\text{(Lemma 11)}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
[x,y,[a,b]^2][a,b] &= [x,y,[a,b]^2](ab) - [x,y,[a,b]^2](ba) \\
&= [x,y,[a,b]^2](ab) + [[x,y,[a,b]^2],b,a] - ([x,y,[a,b]^2]b)a \\
&= [x,y,[a,b]^2](ab) - ([x,y,[a,b]^2]b)a \\
&= \quad [(ab)x,y,[a,b]^2] - x[ab,y,[a,b]^2] - f(ab,x,y,[a,b]^2) \\
&\quad -([bx,y,[a,b]^2] - x[b,y,[a,b]^2] - f(b,x,y,[a,b]^2))a \\
&= [(ab)x,y,[a,b]^2] - [bx,y,[a,b]^2]a \\
&= \quad [(ab)x,y,[a,b]^2] - [a(bx),y,[a,b]^2] + (bx)[a,y,[a,b]^2] \\
&\quad +f(a,bx,y,[a,b]^2) \\
&= [[a,b,x],y,[a,b]^2] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und wegen $[a,b] \neq 0$ ist somit $[x,y,[a,b]^2] = 0$. Also gilt $[a,b]^2 \in N_r(K) = N(K)$. ■

Damit haben wir jetzt eine große Zahl von Formeln in einem Alternativkörper zur Verfügung. Nur leider kennen wir bisher ausser Schiefkörpern keine Beispiele von Alternativkörpern. Tatsächlich wird sich herausstellen, daß nicht assoziative Alternativkörper recht selten sind. Der entscheidende Schlüssel zur Bestimmung der Struktur nicht assoziativer Alternativkörper wird der folgende Satz sein. Wir schicken zwei Definitionen voran.

Definition 4: Ein Alternativkörper heißt echt, wenn er kein Schiefkörper ist, d.h. wenn die Multiplikation nicht assoziativ ist.

Definition 5: Eine Algebra A über einem Körper K heißt quadratisch, wenn es für jedes $a \in A$ stets $\lambda, \mu \in K$ mit $a^2 = \lambda a - \mu$ gibt.

Satz 20: *Sei K ein echter Alternativkörper. Dann ist $Z(K) = N(K)$, und K ist eine quadratische Algebra über dem Zentrum $Z(K)$. Sind $a, b \in K$ mit $[a,b,x] = 0$ für alle $x \in K$, so ist $[a,b] = 0$.*

Beweis: Seien $a, b \in K$ mit $a \notin N(K)$ und $[a,b,x] = 0$ für alle $x \in K$. Wir wollen $[a,b] = 0$ zeigen. Sei f wieder wir in Satz 9.(b) definiert. Für $x, y \in K$ haben wir dann

$$\begin{aligned}
[[a,b],x,y] \overset{\text{(Lemma 12.(b))}}{=} f(a,b,x,y) - [[x,y],a,b] &= f(x,y,a,b) \\
&= [xy,a,b] - [y,a,b]x - y[x,a,b] = 0,
\end{aligned}$$

d.h. $[a,b] \in N_l(K) = N(K)$. Weiter ist auch für jedes $x \in K$ $[a,ba,x] = a[a,b,x] = 0$, d.h. es folgt ebenso $[a,ba] \in N(K)$. Andererseits gilt wegen $(ab)a = [a,b,a] + a(ba) =$

$a(ba)$ auch $[a,ba] = a(ba) - (ba)a = (ab)a - (ba)a = [a,b]a$. Wäre also $[a,b] \neq 0$, so folgte mit der Linksinversenbedingung $a = [a,b]^{-1}([a,b]a) = [a,b]^{-1}[a,ba] \in N(K)$ da $N(K)$ ein Unterschiefkörper von K ist, im Widerspruch zu $a \notin N(K)$. Also ist tatsächlich $[a,b] = 0$.

Nach Definition ist $Z(K) \subseteq N(K)$. Wir müssen also $N(K) \subseteq Z(K)$ beweisen. Sei also $a \in N(K)$. Zu zeigen ist $[a,b] = 0$ für jedes $b \in K$. Wir können offenbar $a \neq 0$ annehmen. Sei $b \in K$ gegeben. Wegen $a \in N(K)$ ist $[b,a,x] = 0$ für jedes $x \in K$, ist also $b \notin N(K)$, so haben wir bereits $[a,b] = 0$ eingesehen. Jetzt sei $b \in N(K)$. Da K nicht assoziativ ist, ist $N(K) \neq K$, also existiert ein $c \in K \backslash N(K)$. Wegen $c = a^{-1}(ac)$ ist auch $ac \notin N(K)$. Also wissen wir bereits $[b,c] = [b,ac] = 0$, da ja $b \in N(K)$ ist. Mit Lemma 10.(c) folgt

$$0 = [ac,b] = a[c,b] + [a,b]c + 3[a,c,b] = [a,b]c,$$

und wegen $c \neq 0$ ist damit $[a,b] = 0$. Dies zeigt $a \in Z(K)$.

Damit ist $Z(K) = N(K)$ bewiesen. Sind $a,b \in K$ mit $[a,b,x] = 0$ für alle $x \in K$, so haben wir im Fall $a \notin N(K)$ bereits $[a,b] = 0$ gezeigt. Im Fall $a \in N(K) = Z(K)$ ist ebenfalls $[a,b] = 0$.

Also ist nur noch zu zeigen, daß K quadratisch über $Z(K)$ ist. Sei $a \in K$ gegeben. Zu zeigen ist die Existenz von $\lambda, \mu \in Z(K)$ mit $a^2 = \lambda a - \mu$. Für $a \in Z(K)$ ist dies klar, d.h. wir können $a \notin Z(K)$ annehmen.

Sei $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$. Nach Korollar 16 gibt es eine assoziative Unteralgebra A von K über $Z(K)$ mit $a,b \in A$. Insbesondere ist

$$[a,b]a + a[a,b] = aba - ba^2 + a^2b - aba = [a^2,b].$$

Multiplikation mit $[a,b]$ von links ergibt

$$[a,b]^2a + [a,b]a[a,b] = [a,b][a^2,b],$$

und eine weitere Multiplikation mit a von rechts liefert weiter

$$[a,b]^2a^2 + ([a,b]a)^2 = [a,b][a^2,b]a.$$

Wir haben $[a,ba] = aba - ba^2 = [a,b]a$ und $[a+a^2,b] = [a,b] + [a^2,b]$, d.h. nach Lemma 19 ist

$$[a,b]^2, [a^2,b]^2, ([a,b]a)^2, ([a,b] + [a^2,b])^2 \in N(K) = Z(K).$$

Weiter folgt mit der obigen Formel und dieser Beobachtung

$$([a,b][a^2,b]a)a = ([a,b]^2a^2 + ([a,b]a)^2)a = a([a,b]^2a^2 + ([a,b]a)^2) = a([a,b][a^2,b]a).$$

Andererseits ist

$$[a,b][a^2,b] = [a,b]^2a + [a,b]a[a,b] = a[a,b]^2 + [a,b]a[a,b] = (a[a,b] + [a,b]a)[a,b] \\ = [a^2,b][a,b],$$

und damit

$$([a,b][a^2,b]a)^2 = [a,b][a^2,b]a([a,b][a^2,b]a) = [a,b][a^2,b][a,b][a^2,b]a^2 = [a,b]^2[a^2,b]^2a^2.$$

Wir behandeln zunächst den Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Nach Satz 17 gibt es überhaupt ein $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$. Wegen

$$([a,b] + [a^2,b])^2 = [a,b]^2 + [a^2,b]^2 + 2[a,b][a^2,b]$$

ist dann

$$[a,b][a^2,b] = \frac{1}{2}(([a,b] + [a^2,b])^2 - [a,b]^2 - [a^2,b]^2) \in Z(K),$$

und damit sind

$$\lambda := ([a,b]^2)^{-1}([a,b][a^2,b]) \in Z(K),\ \mu := ([a,b]^2)^{-1}([a,b]a)^2 \in Z(K)$$

mit $a^2 = \lambda a - \mu$. Also können wir im folgenden $\mathrm{char}(K) = 2$ annehmen.

Sei wieder $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$ beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
[a,b]^2[a^2,b]^2a^2 &= ([a,b][a^2,b]a)^2 \\
&= ([a,b]^2a^2 + ([a,b]a)^2)^2 \\
&= ([a,b]^2a^2)^2 + ([a,b]a)^4 + 2[a,b]^2a^2([a,b]a)^2 \\
&= [a,b]^4a^4 + ([a,b]a)^4,
\end{aligned}$$

d.h. definieren wir

$$\begin{aligned}
\lambda(b) &:= ([a,b]^2)^{-1}[a^2,b]^2 \in Z(K), \\
\mu(b) &:= ([a,b]^4)^{-1}([a,b]a)^4 \in Z(K),
\end{aligned}$$

so ist

$$a^4 = \lambda(b)a^2 + \mu(b).$$

Wir betrachten jetzt den Fall, daß es $b_1, b_2 \in K$ mit $[a,b_1], [a,b_2] \neq 0$ und $\lambda(b_1) \neq \lambda(b_2)$ gibt. Dann gilt

$$(\lambda(b_1) + \lambda(b_2))a^2 + \mu(b_1) + \mu(b_2) = 0,$$

d.h. es ist

$$\mu := (\lambda(b_1) + \lambda(b_2))^{-1}(\mu(b_1) + \mu(b_2)) \in Z(K)$$

mit $a^2 = \mu$. Damit ist dieser Fall vollständig behandelt.

Es verbleibt nur noch die Möglichkeit, daß die Funktion $\lambda : \{b \in K : [a,b] \neq 0\} \to Z(K)$ konstant ist. Diesen konstanten Wert bezeichnen wir mit $\lambda \in Z(K)$. Für $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$ ist $\mu(b) = a^4 + \lambda a^2$, d.h. auch μ ist konstant. Für $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$ ist $\mu(b) = (([a,b]^2)^{-1}([a,b]a)^2)^2$ da $[a,b]^2, [a,b]a \in Z(K)$ ist, und damit existiert ein $c \in Z(K)$ mit $(([a,b]^2)^{-1}([a,b]a)^2)^2 = c^2$ für alle $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$. Da $Z(K)$ ein

Körper von Charakteristik 2 ist, ist die Abbildung $x \mapsto x^2$ von $Z(K)$ auf sich injektiv, und somit ist sogar

$$([a,b]a)^2 = c[a,b]^2$$

für jedes $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$. Für $b \in K$ mit $[a,b] = 0$ gilt dies ebenfalls. Wegen $a \neq 0$ und da es $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$ gibt, ist sicher $c \neq 0$. Ist wieder $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$, so ist $\mu(b) = ([a,b]^4)^{-1}c^2[a,b]^4 = c^2$. Insbesondere ist $c^2 = \mu(b) = a^4 + \lambda a^2 = (a^3 + \lambda a)a$. Wir haben $[a,b]a[a,b]a = ([a,b]a)^2 = c[a,b][a,b] = [a,b]c[a,b]$, und wegen $[a,b] \neq 0$ folgt $a[a,b]a = c[a,b]$. Damit folgt weiter

$$c^{-1}(a^3 + \lambda a)[a,b] = ca^{-1}[a,b] = a^{-1}(a[a,b]a) = [a,b]a,$$

und somit ist

$$\begin{aligned} ba^2 = (ab + ba + ab)a = ([a,b] + ab)a = aba + [a,b]a = a(ba + ab + ab) + [a,b]a \\ = a([a,b] + ab) + [a,b]a = a^2b + a[a,b] + c^{-1}(a^3 + \lambda a)[a,b] \\ = a^2b + (a + c^{-1}(a^3 + \lambda a))[a,b] = a^2b + c^{-1}(a^3 + (\lambda + c)a)[a,b]. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $c^{-1}[a,b]a = ([a,b]a)^{-1}[a,b]^2$ gilt, und wegen $[a,b]^2 \in Z(K)$, ist somit $([a,b]a])^{-1} \in A$, wobei A die gewählte assoziative Unteralgebra mit $a, b \in A$ war. Weiter ist $1 = [a,b]a([a,b]a)^{-1}$, d.h. auch $[a,b]^{-1} = a([a,b]a)^{-1} \in A$. Ebenso ist $([a,b]a)^{-1}[a,b]a = 1$, also $a^{-1} = ([a,b]a)^{-1}[a,b] \in A$. Damit liegen alle auftretenden Elemente in unserer assoziativen Unteralgebra, und wir können weiter rechnen

$$\begin{aligned} ba^3 = (ba^2)a = a^2ba + c^{-1}(a^3 + (\lambda + c)a)[a,b]a \\ = a^2(ba + ab + ab) + (a^3 + (\lambda + c)a)([a,b]a)^{-1}[a,b]^2 \\ = a^2[a,b] + a^3b + (a^2 + \lambda + c)aa^{-1}[a,b]^{-1}[a,b]^2 \\ = a^2[a,b] + a^3b + (a^2 + \lambda + c)[a,b] = a^3b + (\lambda + c)[a,b], \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} b(a^3 + (\lambda + c)a) = ba^3 + b(\lambda + c)a = a^3b + (\lambda + c)[a,b] + (\lambda + c)ba \\ = a^3b + (\lambda + c)ab = (a^3 + (\lambda + c)a)b. \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $b \in K$ mit $[a,b] \neq 0$. Ist dagegen $b \in K$ mit $[a,b] = 0$, also $ab = ba$, so ist trivialerweise $b(a^3 + (\lambda + c)a) = (a^3 + (\lambda + c)a)b$. Nach Satz 17 ist damit $\zeta := a^3 + (\lambda + c)a \in Z(K)$. Nun ist

$$\zeta a = a^4 + (\lambda + c)a^2 = \lambda a^2 + c^2 + (\lambda + c)a^2 = ca^2 + c^2,$$

d.h. $a^2 = c^{-1}\zeta a + c$, und der Beweis ist abgeschlossen.

■

Definition 6: Sei K eine quadratische Algebra über einem Körper F. Ist $a \in K\backslash F$, so sind $1, a$ offenbar über F linear unabhängig, und damit existieren eindeutig bestimmte Elemente $\mathrm{tr}(a), N(a) \in F$ mit

$$a^2 = (\mathrm{tr}\, a)a - N(a)$$

genannt die Spur und die Norm von a. Für $a \in F$ setzen wir $\mathrm{tr}\, a := 2a$ und $N(a) := a^2$, und haben ebenfalls $(\mathrm{tr}\, a)a - N(a) = 2a^2 - a^2 = a^2$. Weiter sei

$$\overline{a} := (\mathrm{tr}\, a) - a \in \langle 1, a\rangle$$

das zu a konjugierte Element.

Korollar 21: *Sei K ein echter Alternativkörper und sei $a \in K\backslash Z(K)$. Dann ist $F := \langle 1, a\rangle$ ein Unterkörper von K. Weiter ist F invariant unter Konjugation und $\overline{\ }$ ist ein involutorischer Automorphismus von F. Es ist $N(a) \neq 0$, $a^{-1} = N(a)^{-1}\overline{a}$, $\mathrm{tr}\,\overline{a} = \mathrm{tr}\, a$ und $N(\overline{a}) = N(a)$. Außerdem ist entweder $\mathrm{Fix}_F(\overline{\ }) = Z(K)$ oder $\mathrm{char}(K) = 2$ und $\overline{b} = b$, $b^2 \in Z(K)$ für jedes $b \in F$.*

Beweis: Nach Satz 20 ist $a^2 \in \langle 1, a\rangle$, und damit ist F eine Unteralgebra von K. Nach Korollar 16 ist F assoziativ und offenbar auch kommutativ. Es ist

$$((\mathrm{tr}\, a) - a)a = (\mathrm{tr}\, a)a - a^2 = N(a) \in Z(K).$$

Wegen $a \notin Z(K)$ ist $\mathrm{tr}\, a \neq a \neq 0$, und damit auch $N(a) = ((\mathrm{tr}\, a) - a)a \neq 0$, d.h. $N(a)^{-1}((\mathrm{tr}\, a) - a)a = 1$. Dies zeigt

$$a^{-1} = N(a)^{-1}((\mathrm{tr}\, a) - a) = N(a)^{-1}\overline{a}.$$

Ist $b \in F\backslash Z(K)$, so folgt durch Anwendung dieser Formel auf b auch $N(b) \neq 0$ und $b^{-1} = N(b)^{-1}\overline{b} \in \langle 1, b\rangle = F$. Ist $b \in Z(K)\backslash\{0\}$, so ist ebenfalls $b^{-1} \in Z(K) \subseteq F$, d.h. F ist ein Unterkörper von K.

Für $b \in F$ haben wir $\overline{b} \in \langle 1, b\rangle \subseteq F$, d.h. F ist unter Konjugation invariant. Seien $t, s \in Z(K)$ mit $s \neq 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}(t + sa)^2 &= t^2 + 2sta + s^2a^2 = t^2 + 2sta + s^2(\mathrm{tr}\, a)a - s^2N(a)\\ &= (2t + s\,\mathrm{tr}\, a)sa + t^2 - s^2N(a) = (2t + s\,\mathrm{tr}\, a)(t + sa) - 2t^2 - st\,\mathrm{tr}\, a + t^2 - s^2N(a)\\ &= (2t + s\,\mathrm{tr}\, a)(t + sa) - (t^2 + st\,\mathrm{tr}\, a + s^2N(a)),\end{aligned}$$

d.h.

$$\mathrm{tr}(t + sa) = 2t + s\,\mathrm{tr}\, a,\ N(t + sa) = t^2 + st\,\mathrm{tr}\, a + s^2N(a).$$

Außerdem ist $\mathrm{tr}(t) = 2t$ und $N(t) = t^2$, d.h. die Formeln gelten auch im Fall $s = 0$. Insbesondere ist für $s, t \in Z(K)$ stets

$$\overline{t + sa} = \mathrm{tr}(t + sa) - (t + sa) = 2t + s\,\mathrm{tr}\, a - t - sa = t + s\overline{a},$$

und die Konjugation ist in F über $Z(K)$ linear. Wegen $a = (\operatorname{tr} a) - \overline{a}$ ist sicher $\overline{a} \notin Z(K)$, und wir haben

$$\begin{aligned}\overline{a}^2 = ((\operatorname{tr} a) - a)^2 = (\operatorname{tr} a)^2 - 2(\operatorname{tr} a)a + a^2 = (\operatorname{tr} a)^2 - (\operatorname{tr} a)a - N(a)\\ = (\operatorname{tr} a)((\operatorname{tr} a) - a) - N(a) = (\operatorname{tr} a)\overline{a} - N(a),\end{aligned}$$

d.h. es ist $\operatorname{tr}\overline{a} = \operatorname{tr} a$ und $N(\overline{a}) = N(a)$. Insbesondere ist damit $\overline{\overline{a}} = (\operatorname{tr}\overline{a}) - \overline{a} = (\operatorname{tr} a) - (\operatorname{tr} a) + a = a$. Da für $t \in Z(K)$ auch $\overline{t} = (\operatorname{tr} t) - t = 2t - t = t$ gilt, ist $\overline{}$ auf F involutorisch, und es ist $Z(K) \subseteq \operatorname{Fix}(\overline{})$. Weiter gilt

$$\overline{a^2} = \overline{(\operatorname{tr} a)a - N(a)} = (\operatorname{tr} a)\overline{a} - N(a) = (\operatorname{tr}\overline{a})\overline{a} - N(\overline{a}) = \overline{a}^2,$$

und zusammen mit der Linearität der Konjugation auf F folgt $\overline{bc} = \overline{b}\overline{c}$ für alle $b, c \in F$.

Es verbleibt nur noch die letzte Aussage des Korollars einzusehen. Da $\overline{}$ über $Z(K)$ linear ist, ist $C := \operatorname{Fix}_F(\overline{})$ ein Teilraum von F mit $Z(K) \leq C$. Wegen $\dim_{Z(K)} F = 2$ gibt es somit zwei Fälle.

Fall $\dim_{Z(K)} C = 1$**:** Dann ist $\operatorname{Fix}_F(\overline{}) = Z(K)$, und wir sind fertig.

Fall $\dim_{Z(K)} C = 2$**:** In diesem Fall haben wir $C = F$, d.h. $\overline{b} = b$ für jedes $b \in F$. Für $b \in F$ folgen $\operatorname{tr} b = b + \overline{b} = 2b$ und $N(b) = (\operatorname{tr} b)b - b^2 = 2b^2 - b^2 = b^2$, und insbesondere ist $b^2 \in Z(K)$. Für $b \in F \backslash Z(K)$ ergibt sich damit $\operatorname{tr} b = 0$ und $N(b) = -b^2$. Wegen $F \neq Z(K)$ ist damit $2 = 0$, d.h. $\operatorname{char} K = 2$.

■

Korollar 22: *Sei K ein echter Alternativkörper, und sei $a \in K$. Dann ist $\operatorname{tr}\overline{a} = \operatorname{tr} a$, $N(\overline{a}) = N(a)$ und $\overline{\overline{a}} = a$. Ist $a \neq 0$, so ist auch $N(a) \neq 0$ und $a^{-1} = N(a)^{-1}\overline{a}$.*

Beweis: Für $a \notin Z(K)$ gilt dies alles nach Korollar 21. Ist $a \in Z(K)$, so ist die Behauptung direkt nach Definition klar.

■

Korollar 23: *Seien K ein echter Alternativkörper und F eine Unteralgebra von K über $Z(K)$. Dann ist F ein unter Konjugation invarianter Unteralternativkörper von K.*

Beweis: Daß F unter Konjugation invariant ist, ist klar. Für $a \in F \backslash \{0\}$ folgt nach Korollar 22 auch $a^{-1} = N(a)^{-1}\overline{a} \in F$. Da in K nach Satz 9 beide Inversenbedingungen gelten, ist F somit ein Semikörper, und damit auch ein Alternativkörper.

■

Wir kommen zum Hauptsatz über die Konjugation.

Satz 24: *Sei K ein echter Alternativkörper. Dann gelten:*

(a) *Die Konjugation ist ein involutorischer Antiautomorphismus der $Z(K)$-Algebra K.*

(b) *Die Spur* $\mathrm{tr} : K \to Z(K)$ *ist über* $Z(K)$ *linear.*

(c) *Die Norm* $N : K \to Z(K)$ *ist eine quadratische Form mit zugehöriger Bilinearform*

$$< a, b >= \overline{a}b + \overline{b}a.$$

(d) *Für* $a, b \in K$ *gelten* $N(ab) = N(a)N(b)$, $< \overline{a}, \overline{b} >=< a, b >$ *und*

$$\mathrm{tr}(ab) = (\mathrm{tr}\, a)(\mathrm{tr}\, b) - < a, b > .$$

(e) *Für* $a, b \in K$ *gilt*

$$ab + ba = (\mathrm{tr}\, b)a + (\mathrm{tr}\, a)b - < a, b > .$$

(f) *Sind* $a, b \in K$ *so, daß* $1, a, b$ *linear unabhängig sind, so ist die von* a, b *erzeugte Unteralgebra von* K *ein Schiefkörper mit Basis* $1, a, b, ab$ *über* $Z(K)$.

Beweis: Für $a, b \in K$ definiere $< a, b >:= N(a + b) - N(a) - N(b) \in Z(K)$.
(b,e,f) Seien $a, b \in K$. Sind $1, a, b$ nicht über $Z(K)$ linear unabhängig, so existiert ein $c \in K \backslash Z(K)$ mit $a, b \in \langle 1, c \rangle$ und wegen $\mathrm{tr}\, x = x + \overline{x}$ für $x \in K$ folgt mit Korollar 21 auch $\mathrm{tr}(a + b) = \mathrm{tr}(a) + \mathrm{tr}(b)$.

Nun seien $1, a, b$ linear unabhängig. Nach Korollar 16 erzeugen a und b eine assoziative Unteralgebra H von K, und insbesondere gilt

$$\begin{aligned} ab + ba &= (a + b)^2 - a^2 - b^2 \\ &= \mathrm{tr}(a + b)(a + b) - N(a + b) - (\mathrm{tr}\, a)a + N(a) - (\mathrm{tr}\, b)b + N(b) \\ &= (\mathrm{tr}(a + b) - \mathrm{tr}(a))a + (\mathrm{tr}(a + b) - \mathrm{tr}(b))b - < a, b > . \end{aligned}$$

Ist also $V := \langle 1, a, b, ab \rangle$, so ist auch $ba \in V$. Weiter ist nach Satz 20 auch $a^2, b^2, (ab)^2 \in V$, und es gelten $a(ab) = a^2 b = (\mathrm{tr}\, a)ab - N(a)b \in V$ sowie $(ab)a = a(ba) = a(ab + ba) - a(ab) \in V$, da $a(ab + ba) = (\mathrm{tr}(a + b) - \mathrm{tr}(a))a^2 + (\mathrm{tr}(a + b) - \mathrm{tr}(b))ab - < a, b > a \in V$ ist. Ebenso folgen $(ab)b, b(ab) \in V$, d.h. V ist eine Unteralgebra von K und somit $H = V$. Nach Korollar 23 ist H ein Unteralternativkörper, und da H assoziativ ist, sogar ein Unterschiefkörper von K.

Jetzt zeigen wir, daß $1, a, b, ab$ linear unabhängig sind. Da $1, a, b$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, ist nur noch $ab \notin \langle 1, a, b \rangle$ zu zeigen. Andernfalls gibt es $s, t, r \in Z(K)$ mit $ab = sa + tb + r$, d.h. $a(b - s) = tb + r$. Nach Korollar 21 ist $\langle 1, b \rangle$ ein Unterkörper von K, und somit folgt $a = (tb + r)(b - s)^{-1} \in \langle 1, b \rangle$; ein Widerspruch. Damit ist (f) bewiesen.

Für $s, t \in Z(K)$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(sa + tb)sa + \mathrm{tr}(sa + tb)tb - N(sa + tb) &= \mathrm{tr}(sa + tb)(sa + tb) - N(sa + tb) \\ &= (sa + tb)^2 \\ &= s^2 a^2 + t^2 b^2 + st(ab + ba) \\ &= (s\, \mathrm{tr}(a) + t(\mathrm{tr}(a + b) - \mathrm{tr}(a)))sa \\ &\quad + (t\, \mathrm{tr}(b) + s(\mathrm{tr}(a + b) - \mathrm{tr}(b)))tb \\ &\quad - s^2 N(a) - t^2 N(b) - st < a, b >, \end{aligned}$$

d.h. für $s,t \in Z(K)\backslash\{0\}$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(sa+tb) &= (s-t)\operatorname{tr}(a)+t\operatorname{tr}(a+b), \\ \operatorname{tr}(sa+tb) &= (t-s)\operatorname{tr}(b)+s\operatorname{tr}(a+b), \\ N(sa+tb) &= s^2N(a)+t^2N(b)+st<a,b>. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$(s-t)(\operatorname{tr}(a)+\operatorname{tr}(b)) = (s-t)\operatorname{tr}(a+b)$$

für alle $s,t \in Z(K)K\backslash\{0\}$. Wäre $|Z(K)| = 2$, so erzeugen a,b nach dem schon bewiesenen (f) einen Unterschiefkörper H von K mit $\dim_{Z(K)} H = 4$, d.h. $|H| = 16$. Insbesondere ist H ein Körper, dies kann man aus dem Satz von Wedderburn folgern oder aus der einfacheren Tatsache, daß eine Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist. Nach Satz 20 erfüllt jedes Element $x \in H\backslash Z(K)$ eine normierte quadratische Gleichung über $Z(K)$, und dies ist ein Widerspruch. Also ist $|Z(K)| > 2$ und es gibt $s,t \in Z(K)$ mit $s,t \neq 0$ und $s \neq t$, und somit folgt $\operatorname{tr}(a+b) = \operatorname{tr}(a)+\operatorname{tr}(b)$. Insbesondere ist (b) gezeigt, da $\operatorname{tr}(sa) = s\operatorname{tr}(a)$ für $a \in K$, $s \in Z(K)$ nach Korollar 21 klar ist.

Setzen wir die Additivität von tr in die obige Formel für $ab+ba$ ein, so ensteht (e).
(c) Seien $a \in K$, $s \in Z(K)$. Ist $a \in Z(K)$ oder $s = 0$ ist $N(sa) = s^2N(a)$ klar. Ist $a \notin Z(K)$, $s \neq 0$, so ist auch $sa \notin Z(K)$ und $(sa)^2 = s^2a^2 = s(\operatorname{tr} a)sa - s^2N(a)$, d.h. es ist wieder $N(sa) = s^2N(a)$. Weiter ist für $a,b \in K$, da a,b wieder in einer assoziativen Unteralgebra liegen

$$\begin{aligned} N(a+b)-N(a)-N(b) &= \operatorname{tr}(a+b)(a+b)-(a+b)^2-(\operatorname{tr} a)a+a^2-(\operatorname{tr} b)b+b^2 \\ &= \quad (\operatorname{tr}(a)+\operatorname{tr}(b))(a+b)-a^2-b^2-(ab+ba) \\ &\quad -(\operatorname{tr} a)a-(\operatorname{tr} b)b+a^2+b^2 \\ &= (\operatorname{tr} a)b+(\operatorname{tr} b)a-(ab+ba) \\ &= (a+\overline{a})b+(b+\overline{b})a-(ab+ba) \\ &= \overline{a}b+\overline{b}a, \end{aligned}$$

und da mit tr auch $\overline{\ }$ linear ist, ist dies eine symmetrische Bilinearform auf K.
(d) Seien $a,b \in K$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= a(ba)b \\ &= a(ab+ba)b-a^2b^2 \\ &= \operatorname{tr}(b)a^2b+\operatorname{tr}(a)ab^2-<a,b>ab-(\operatorname{tr}(a)a-N(a))(\operatorname{tr}(b)b-N(b)) \\ &= \quad \operatorname{tr}(a)\operatorname{tr}(b)ab-\operatorname{tr}(b)N(a)b+\operatorname{tr}(a)\operatorname{tr}(b)ab-\operatorname{tr}(a)N(b)a-<a,b>ab \\ &\quad -\operatorname{tr}(a)\operatorname{tr}(b)ab+\operatorname{tr}(a)N(b)a+\operatorname{tr}(b)N(a)b-N(a)N(b) \\ &= (\operatorname{tr}(a)\operatorname{tr}(b)-<a,b>)ab-N(a)N(b). \end{aligned}$$

Im Fall $ab \notin Z(K)$ zeigt dies $\operatorname{tr}(ab) = (\operatorname{tr} a)(\operatorname{tr} b)-<a,b>$ und $N(ab) = N(a)N(b)$. Andernfalls ist $ab \in Z(K)$. Ist sogar $a = 0$, so sind beide Gleichungen klar. Nun sei $a \neq 0$. Da K nicht assoziativ ist, ist auch $K \neq Z(K)$, d.h. K ist mindestens

zweidimensional über $Z(K)$. Damit existiert ein $c \in K$ mit $c \notin Z(K)a^{-1}$. Wegen $b \in Z(K)a^{-1}$ ist dann auch $b + c \notin Z(K)a^{-1}$, und somit liefert der bereits bewiesene Fall die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(a(b+c)) &= (\operatorname{tr} a)\operatorname{tr}(b+c) - < a, b+c >, \\ \operatorname{tr}(ac) &= (\operatorname{tr} a)\operatorname{tr}(c) - < a, c >, \end{aligned}$$

und durch Subtraktion dieser Gleichungen folgt mit (b,c) auch $\operatorname{tr}(ab) = (\operatorname{tr} a)(\operatorname{tr} b) - < a, b >$. Damit ist dann auch $N(ab) = \operatorname{tr}(ab)ab - (ab)^2 = ((\operatorname{tr} a)(\operatorname{tr} b) - < a, b >)ab - (ab)^2 = N(a)N(b)$.

Schließlich folgt mit Korollar 22 für beliebige $a, b \in K$ die Gleichung

$$\begin{aligned} < \overline{a}, \overline{b} > = N(\overline{a} + \overline{b}) - N(\overline{a}) - N(\overline{b}) = N(\overline{a+b}) - N(a) - N(b) \\ = N(a+b) - N(a) - N(b) = < a, b >, \end{aligned}$$

da mit tr auch $\overline{}$ linear ist.

(a) Wie gesagt ist nach (b) die Konjugationsabbildung zumindest linear über $Z(K)$. Nach Korollar 22 ist die Konjugation auch involutorisch und insbesondere bijektiv. Seien $a, b \in K$. Dann ergeben unsere schon bewiesenen Formeln:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \operatorname{tr}(ab) - ab \\ &\overset{(d)}{=} (\operatorname{tr} a)(\operatorname{tr} b) - < a, b > -ab \\ &\overset{(e)}{=} (\operatorname{tr} a)(\operatorname{tr} b) + ba - (\operatorname{tr} b)a - (\operatorname{tr} a)b \\ &= (\operatorname{tr} b)(\operatorname{tr} a) + ba - (\operatorname{tr} b)a - b(\operatorname{tr} a) \\ &= (\operatorname{tr}(b) - b)(\operatorname{tr}(a) - a) \\ &= \overline{b}\overline{a}. \end{aligned}$$

■

Korollar 25: *Sei K ein echter Alternativkörper. Seien $a, u, v \in K$. Dann gelten*

$$< au, v > = < u, \overline{a}v > \quad \textit{und} \quad < ua, v > = < u, v\overline{a} > .$$

Beweis: Wir beginnen mit der Gleichung $< au, v > = < u, \overline{a}v >$. Für $a = 0$ ist diese klar, d.h. wir können $a \neq 0$ annehmen. Setze $w := a^{-1}v \in K$. Da K nach Satz 9

linksinvers ist, gilt $aw = v$. Es folgt

$$\begin{aligned}
< au, v > &= < au, aw > \\
&= N(au + aw) - N(au) - N(aw) \\
&\overset{\text{(Satz 24.(d))}}{=} N(a)(N(u + w) - N(u) - N(w)) \\
&= N(a) < u, w > \\
&= < u, N(a)w > \\
&= < u, (N(a)a^{-1})v > \\
&\overset{\text{(Korollar 22)}}{=} < u, \overline{a}v > .
\end{aligned}$$

Damit folgt weiter mit Satz 24.(a,d)

$$< ua, v >=< \overline{ua}, \overline{v} >=< \overline{a}\,\overline{u}, \overline{v} >=< \overline{u}, \overline{\overline{a}}\,\overline{v} >=< \overline{u}, v\overline{a} >=< u, v\overline{a} > .$$

■

Lemma 26: *Seien K ein echter Alternativkörper und $a, b, c \in K$. Dann gelten $a(\overline{a}b) = \overline{a}(ab) = (ba)\overline{a} = (b\overline{a})a = N(a)b$ und*

$$\begin{aligned}
a(\overline{b}c) + b(\overline{a}c) &= < a, b > c, \\
(c\overline{a})b + (c\overline{b})a &= < a, b > c.
\end{aligned}$$

Beweis: Nach Korollar 16 erzeugen a, b eine assoziative Unteralgebra von K, und nach Korollar 23 ist diese unter Konjugation invariant. Mit Korollar 21 folgt $a(\overline{a}b) = (a\overline{a})b = N(a)b$, und die anderen drei Gleichungen folgen ebenso.

Insbesondere folgt damit

$$\begin{aligned}
N(a + b)c &= (a + b)((\overline{a + b})c) \\
&= (a + b)(\overline{a}c + \overline{b}c) \\
&= a(\overline{a}c) + a(\overline{b}c) + b(\overline{a}c) + b(\overline{b}c) \\
&= N(a)c + N(b)c + a(\overline{b}c) + b(\overline{a}c),
\end{aligned}$$

d.h.

$$a(\overline{b}c) + b(\overline{a}c) = (N(a + b) - N(a) - N(b))c =< a, b > c.$$

Die zweite Gleichung folgt analog.

■

Nun können wir einen weiteren entscheidenden Schritt durchführen, der uns endlich auch eine Methode zur Konstruktion von Beispielen an die Hand geben wird.

Satz 27: *Sei K ein echter Alternativkörper und versehe den $Z(K)$-Vektorraum K nach Satz 24.(c) mit der quadratischen Form N. Dann gelten:*

(a) *Es ist* $\mathrm{tr} \neq 0$ *und* $P := \mathrm{Kern}(\mathrm{tr})$ *ist eine Hyperebene von* K. *Weiter gilt*

$$P = 1^{\perp} = \{a \in K : \overline{a} = -a\},$$

und $< , >$ *ist nicht ausgeartet.*

(b) *Für* $a \in K \backslash Z(K)$ *ist genau dann* $a \in P$, *wenn* $a^2 \in Z(K)$ *ist.*

(c) *Genau dann ist* $Z(K) \subseteq P$ *wenn* $\mathrm{char}(K) = 2$ *ist.*

(d) *Sind* $a, b \in P$, *so ist*

$$ab \in P \Longleftrightarrow ab = -ba \Longleftrightarrow < a, b >= 0.$$

(e) *Sind* H *eine Unteralgebra von* K *und* $e \in K \backslash H$, *so ist* He *ein Teilraum von* K *mit* $H \cap He = 0$.

(f) *Ist* H *eine Unteralgebra von* K *mit* $H \subseteq P$, *so ist* H *kommutativ und* $\overline{a} = a$, $a^2 \in Z(K)$ *für jedes* $a \in H$. *Es ist* $\mathrm{char}(K) = 2$.

(g) *Ist* H *eine echte Unteralgebra von* K *mit* $\dim_{Z(K)} H < \infty$ *und* $H \not\subseteq P$, *so ist* $H^{\perp} \cap H = 0$ *und* $0 \neq H^{\perp} \subseteq P$. *Ist* $0 \neq e \in H^{\perp}$, *so ist* $L := H + He = H \oplus He$ *wieder eine Unteralgebra von* K, *und für jedes* $a \in H$ *gilt* $ae = e\overline{a}$. *Weiter ist für alle* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$ *auch*

$$(u_1 + v_1 e)(u_2 + v_2 e) = u_1 u_2 - N(e)\overline{v_2} v_1 + (v_2 u_1 + v_1 \overline{u_2})e,$$

und $\overline{u_1 + v_1 e} = \overline{u_1} - v_1 e$.

Beweis: **(a)** Angenommen es wäre $\mathrm{tr}\, a = 0$ für jedes $a \in K$. Dann ist inbesondere $2 = \mathrm{tr}\, 1 = 0$, d.h. $\mathrm{char}(K) = 2$. Für $a, b \in K$ folgt damit

$$ab + ba \overset{\text{(Satz 24.(e))}}{=} (\mathrm{tr}\, b)a + (\mathrm{tr}\, a)b + < a, b > \overset{\text{(Satz 24.(d))}}{=} (\mathrm{tr}\, b)a + (\mathrm{tr}\, a)b + (\mathrm{tr}\, a)(\mathrm{tr}\, b) + \mathrm{tr}(ab) = 0,$$

d.h. $ab = ba$ und K ist kommutativ, im Widerspruch zu Korollar 18.

Also ist $\mathrm{tr} \neq 0$, und damit ist $P = \mathrm{Kern}(\mathrm{tr})$ eine Hyperebene von K. Für $a \in K$ ist nach Satz 24.(c) $< 1, a >= a + \overline{a} = \mathrm{tr}\, a$, d.h. $P = 1^{\perp}$. Außerdem ist für $a \in K$ genau dann $a \in P$, wenn $a + \overline{a} = \mathrm{tr}\, a = 0$ ist, d.h. wenn $\overline{a} = -a$ gilt.

Schließlich sei $a \in K$ mit $< a, b >= 0$ für alle $b \in K$. Dann ist insbesondere $\mathrm{tr}\, a =< a, 1 >= 0$, und für jedes $b \in K$ haben wir nach Satz 24.(d) auch $\mathrm{tr}(ab) = (\mathrm{tr}\, a)(\mathrm{tr}\, b) - < a, b >= 0$, d.h. $ab \in P$, und somit ist $aK \subseteq P \neq K$. Insbesondere ist damit $a = 0$.

(b) Ist $a \in K \backslash Z(K)$, so gilt $a^2 = (\mathrm{tr}\, a)a - N(a)$, d.h. genau dann ist $a^2 \in Z(K)$, wenn $\mathrm{tr}\, a = 0$ ist.

(c) Da P ein Teilraum ist, ist $Z(K) \subseteq P$ gleichwertig zu $1 \in P = 1^\perp$. Wegen $< 1,1 >= 1+1$ ist genau dann $1 \in 1^\perp$ wenn $\mathrm{char}(K) = 2$ ist.
(d) Seien $a, b \in P$. Dann ist nach Satz 24.(d) $\mathrm{tr}(ab) = - < a, b >$, d.h. $ab \in P$ bedeutet $< a, b >= 0$. Weiter ist nach Satz 24.(e) auch $ab + ba = - < a, b >$, d.h. genau dann ist $< a, b >= 0$ wenn $ab = -ba$ ist.
(e) Wäre $H \cap He \neq 0$, so gibt es $u \in H$ mit $0 \neq ue \in H$, also auch $u \neq 0$. Da H nach Korollar 23 ein Unteralternativkörper ist, folgt mit Satz 9.(c) auch $e = u^{-1}(ue) \in H$; ein Widerspruch.
(f) Es ist $Z(K) \subseteq H \subseteq P$, also $\mathrm{char}(K) = 2$ nach (c). Insbesondere folgt mit (a) für jedes $a \in H$ auch $\overline{a} = -a = a$. Nach (b) gilt auch $a^2 \in Z(K)$ für jedes $a \in H$. Sind schließlich $a, b \in H$, so gilt nach Satz 24.(a) auch $ab = \overline{a}\overline{b} = \overline{ba} = ba$, d.h. H ist kommutativ.
(g) Wegen $1 \in H$ ist nach (a) auch $H^\perp \subseteq 1^\perp = P$. Angenommen es gibt ein Element $0 \neq a \in H \cap H^\perp$. Dann ist insbesondere $a \in P$. Für jedes $b \in H$ gilt nun nach Satz 24.(d) die Gleichung $\mathrm{tr}(ab) = (\mathrm{tr}\, a)(\mathrm{tr}\, b) - < a, b >= 0$, d.h. $ab \in P$ und somit ist $aH \subseteq P$. Da H nach Korollar 23 ein Unteralternativkörper von K ist und $a \neq 0$ gilt, erhalten wir den Widerspruch $H = aH \subseteq P$. Also ist $H \cap H^\perp = 0$. Wegen $\dim H < \infty$ und $H \neq K$ folgt auch $H^\perp \neq 0$.

Sei nun $0 \neq e \in H^\perp$ gegeben. Dann ist $e \notin H$ und nach (e) haben wir den Teilraum $L = H + He = H \oplus He$. Für jedes $a \in H$ gilt wegen $e \in P$ die Gleichung

$$e\overline{a} - ae \overset{(a)}{=} e\overline{a} + a\overline{e} =< \overline{a}, \overline{e} > \overset{(\text{Satz } 24.(d))}{=} < a, e >= 0.$$

Seien $u, v \in H$. Dann bestehen die folgenden Identitäten

$$\overline{u + ve} = \overline{u} + \overline{e}\,\overline{v} = \overline{u} - e\overline{v} = \overline{u} - ve,$$

$$u(ve) = u(e\overline{v}) \overset{(\text{Lemma } 26)}{=} e(\overline{u}\,\overline{v}) = e\overline{vu} = (vu)e,$$

$$(ue)v \overset{(\text{Lemma } 26)}{=} (u\overline{v})e$$

und

$$(ue)(ve) = (e\overline{u})(ve) \overset{(\text{Lemma } 13.(c))}{=} (e(\overline{u}v))e = (\overline{\overline{u}v}e)e = (\overline{v}u)e^2 = -(\overline{v}u)N(e) = -N(e)\overline{v}u.$$

Für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$ folgt damit

$$\begin{aligned}(u_1 + v_1e)(u_2 + v_2e) &= u_1u_2 + u_1(v_2e) + (v_1e)u_2 + (v_1e)(v_2e)\\ &= u_1u_2 - N(e)\overline{v_2}v_1 + (v_2u_1 + v_1\overline{u_2})e.\end{aligned}$$

Insbesondere ist L tatsächlich eine Unteralgebra von H.

■

Teil (g) dieses Satzes führt uns auf die folgende sogenannte Cayley-Dickson Konstruktion. Aber zunächst führen wir eine kleine Bezeichnung ein.

Definition 7: Sei F ein Körper. Eine Dickson-Algebra ist ein Paar $(H, \overline{\ })$ bestehend aus einer Algebra H über F und einem involutorischen Antiautomorphismus $\overline{\ }$ von H mit $a\overline{a} = \overline{a}a \in F$ und $a + \overline{a} \in F$ für jedes $a \in H$.

Ist $(H, \overline{\ })$ eine Dickson-Algebra über einem Körper F, so haben wir die lineare Abbildung

$$\mathrm{tr} : H \to F; a \mapsto a + \overline{a},$$

und $N : H \to F; a \mapsto \overline{a}a$ ist offenbar eine quadratische Form mit zugehöriger Bilinearform

$$< a, b >= (\overline{a+b})(a+b) - \overline{a}a - \overline{b}b = \overline{a}b + \overline{b}a \quad (a, b \in H).$$

Weiter ist für jedes $a \in H$ auch

$$(\mathrm{tr}\, a)a - N(a) = (a + \overline{a})a - \overline{a}a = a^2,$$

d.h. H ist eine quadratische Algebra, und wegen $\overline{a} = a$ für $a \in F$ sind tr und N die Spur- und die Normabbildung dieser quadratischen Algebra.

Lemma 28: *Seien F ein Körper und $(H, \overline{\ })$ eine Dickson-Algebra über F. Weiter sei $\epsilon \in F$. Dann wird auf dem F-Vektorraum $L := H \times H$ durch*

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) := (u_1u_2 + \epsilon\overline{v_2}v_1, v_2u_1 + v_1\overline{u_2})$$

die Struktur einer F-Algebra definiert, die H durch $u \mapsto (u, 0)$ als Unteralgebra enthält. Weiter ist

$$\overline{\ } : L \to L; (u, v) \mapsto (\overline{u}, -v)$$

ein involutorischer Antiautomorphismus von L, der $\overline{\ }$ auf H fortsetzt, und $(L, \overline{\ })$ ist wieder eine Dickson-Algebra mit

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(u, v) &= \mathrm{tr}\, u, \\ N(u, v) &= N(u) - \epsilon N(v) \end{aligned}$$

für alle $u, v \in H$.

Beweis: Daß L eine Algebra über F ist und $\overline{\ }$ über F linear ist, ist beides klar. Für $u, v \in H$ gilt $(u, 0) \cdot (v, 0) = (uv, 0)$. Da $\overline{\ }$ auf H involutorisch ist, trifft dies offenbar auch auf $\overline{\ }$ in L zu. Für $u, v \in H$ gelten $(1, 0)(u, v) = (u, v)$, $(u, v)(1, 0) = (u, v)$, d.h. $(1, 0)$ ist die Eins von L, und wegen $(1, 0) = 1 \in H$ wird H eine Unteralgebra von L.

Wir zeigen jetzt, daß $\overline{\ }$ tatsächlich ein Antiautomorphismus ist. Seien also vier Elemente $u_1, v_1, u_2, v_2 \in H$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{(u_2, v_2)} \cdot \overline{(u_1, v_1)} &= (\overline{u_2}, -v_2) \cdot (\overline{u_1}, -v_1) \\ &= (\overline{u_2}\,\overline{u_1} + \epsilon\overline{v_1}v_2, -v_1\overline{u_2} - v_2u_1) \\ &= (\overline{u_1u_2 + \epsilon\overline{v_2}v_1}, -(v_2u_1 + v_1\overline{u_2})) \\ &= \overline{(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2)}. \end{aligned}$$

Wir kommen zur letzten Aussage. Seien $u, v \in H$ gegeben. Dann gelten

$$\begin{aligned}(u,v)\cdot\overline{(u,v)} &= (u,v)\cdot(\overline{u},-v) = (u\overline{u}-\epsilon\overline{v}v,-vu+vu) = (u\overline{u}-\epsilon\overline{v}v,0)\in F,\\ \overline{(u,v)}\cdot(u,v) &= (\overline{u},-v)\cdot(u,v)\\ &= (\overline{u}u-\epsilon\overline{v}v,v\overline{u}-v\overline{u})\\ &= (u\overline{u}-\epsilon\overline{v}v,0),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(u,v) &= (u,v)+\overline{(u,v)} = (u,v)+(\overline{u},-v) = (\mathrm{tr}\,u,0) = \mathrm{tr}\,u\in F,\\ N(u,v) &= \overline{(u,v)}\cdot(u,v) = (\overline{u}u-\epsilon\overline{v}v,0) = N(u)-\epsilon N(v).\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(L,\overline{\ })$ eine Dickson-Algebra.

■

Wir bezeichnen diese Konstruktion als die Cayley-Dickson Erweiterung von $(H,\overline{\ })$. Der Parameter ϵ ist übrigens nicht durch den Isomorphietyp von L festgelegt. Ist zum Beispiel $c \in F\backslash\{0\}$, und bezeichnet L' die Cayley-Dickson Erweiterung zum Parameter $\epsilon' = \epsilon/c^2$, so ist $\varphi : L \to L'; (u,v) \mapsto (u,cv)$ ein konjugationstreuer Isomorphismus.

Interessieren wir uns nur für den Isomorphietyp von L bezüglich Addition und Multiplikation, so können wir den Grundkörper F auch durch einen isomorphen Körper ersetzen. Sind nämlich $\varphi : F \to F'$ ein Isomorphismus von F auf einen Körper F', $(H',\overline{\ })$ eine Dickson-Algebra über F' und $\psi : H \to H'$ eine bijektive Abbildung mit $\psi(a+b) = \psi(a)+\psi(b)$, $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$, $\psi(\overline{a}) = \overline{\psi(a)}$ und $\psi(ca) = \varphi(c)\psi(a)$ für alle $a, b \in H$, $c \in F$, so ist $\psi \times \psi : L \to L'$ offenbar wieder eine bijektive Abbildung mit den entsprechenden Eigenschaften, wobei L' die Cayley-Dickson Erweiterung von H' zum Parameter $\varphi(\epsilon) \in F'$ ist.

Wir untersuchen im folgenden, wie sich algebraische Eigenschaften der Algebra H auf die größere Algebra L übertragen.

Lemma 29: *Seien F ein Körper und $(H,\overline{\ })$ eine Dickson-Algebra über F. Weiter sei $\epsilon \in F$, und es bezeichne L die Cayley-Dickson Erweiterung von H.*

(a) *L ist genau dann kommutativ, wenn K kommutativ ist und $\overline{a} = a$ für jedes $a \in H$ gilt.*

(b) *L ist genau dann assoziativ, wenn H assoziativ und kommutativ ist.*

(c) *L ist genau dann ein Körper, wenn H ein Körper ist, $\overline{a} = a$ für jedes $a \in H$ gilt und $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ für alle $u, v \in H$ mit $v \neq 0$ ist.*

(d) *L ist genau dann ein Schiefkörper, wenn H ein Körper ist und $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ für alle $u, v \in H$ mit $v \neq 0$ gilt.*

(e) *L ist genau dann ein Alternativkörper, wenn H ein Schiefkörper ist und auch $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ für alle $u, v \in H$ mit $v \neq 0$ gilt.*

(f) *Ist H ein Schiefkörper und gelten* $\mathrm{Fix}_H(\overline{\ }) \neq H$ *und* $\mathrm{Fix}_H(\overline{\ }) \cap Z(H) = F$*, so gilt auch* $Z(L) := \{a \in L | \forall (b \in L) : ab = ba\} = F$.

Beweis: **(a)** "$\Longrightarrow$" Als Unteralgebra von L ist H kommutativ. Für jedes $a \in K$ gilt nun

$$(0, a) = (a, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1) \cdot (a, 0) = (0, \overline{a}),$$

d.h. $\overline{a} = a$.
"$\Longleftarrow$" Klar.
(b) Für $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in H$ haben wir

$$\begin{aligned}
((u_1, v_1)(u_2, v_2))(u_3, v_3) &= (u_1u_2 + \epsilon\overline{v_2}v_1, v_2u_1 + v_1\overline{u_2})(u_3, v_3) \\
&= ((u_1u_2)u_3 + \epsilon(\overline{v_2}v_1)u_3 + \epsilon\overline{v_3}(v_2u_1) + \epsilon\overline{v_3}(v_1\overline{u_2}), \\
&\quad v_3(u_1u_2) + \epsilon v_3(\overline{v_2}v_1) + (v_2u_1)\overline{u_3} + (v_1\overline{u_2})\overline{u_3}), \\
(u_1, v_1)((u_2, v_2)(u_3, v_3)) &= (u_1, v_1)(u_2u_3 + \epsilon\overline{v_3}v_2, v_3u_2 + v_2\overline{u_3}) \\
&= (u_1(u_2u_3) + \epsilon u_1(\overline{v_3}v_2) + \epsilon(\overline{u_2}\,\overline{v_3})v_1 + \epsilon(u_3\overline{v_2})v_1, \\
&\quad (v_3u_2)u_1 + (v_2\overline{u_3})u_1 + v_1(\overline{u_3}\,\overline{u_2}) + \epsilon v_1(\overline{v_2}v_3)).
\end{aligned}$$

Ist H kommutativ und assoziativ, so sind diese beiden Terme offenbar gleich, und L ist assoziativ. Jetzt sei L umgekehrt als assoziativ vorausgesetzt. Dann ist auch H als Unteralgebra von L assoziativ. Sind $a, b \in H$, so haben wir

$$(0, ba) = (a, 0)((b, 0)(0, 1)) = ((a, 0)(b, 0))(0, 1) = (0, ab),$$

d.h. $ab = ba$ und H ist kommutativ.
(e) Für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$ liefert unsere obige Formel

$$\begin{aligned}
(u_1, v_1)^2(u_2, v_2) &= (u_1^2u_2 + \epsilon N(v_1)u_2 + \epsilon\overline{v_2}(v_1u_1) + \epsilon\overline{v_2}(v_1\overline{u_1}), \\
&\quad v_2u_1^2 + \epsilon N(v_1)v_2 + (v_1u_1)\overline{u_2} + (v_1\overline{u_1})\overline{u_2}) \\
&= (u_1^2u_2 + \epsilon N(v_1)u_2 + \epsilon(\mathrm{tr}\, u_1)\overline{v_2}v_1, \\
&\quad v_2u_1^2 + \epsilon N(v_1)v_2 + (\mathrm{tr}\, u_1)v_1\overline{u_2}), \\
(u_1, v_1)((u_1, v_1)(u_2, v_2)) &= (u_1(u_1u_2) + \epsilon u_1(\overline{v_2}v_1) + \epsilon(\overline{u_1}\,\overline{v_2})v_1 + \epsilon(u_2\overline{v_1})v_1, \\
&\quad (v_2u_1)u_1 + (v_1\overline{u_2})u_1 + v_1(\overline{u_2}\,\overline{u_1}) + \epsilon v_1(\overline{v_1}v_2)), \\
(u_1, v_1)(u_2, v_2)^2 &= (u_1u_2^2 + \epsilon N(v_2)u_1 + \epsilon(\overline{u_2}\,\overline{v_2})v_1 + \epsilon(u_2\overline{v_2})v_1, \\
&\quad (v_2u_2)u_1 + (v_2\overline{u_2})u_1 + v_1\overline{u_2}^2 + \epsilon N(v_2)v_1) \\
&= (u_1u_2^2 + \epsilon N(v_2)u_1 + \epsilon(\mathrm{tr}\, u_2)\overline{v_2}v_1, \\
&\quad (\mathrm{tr}\, u_2)v_2u_1 + v_1\overline{u_2}^2 + \epsilon N(v_2)v_1), \\
((u_1, v_1)(u_2, v_2))(u_2, v_2) &= ((u_1u_2)u_2 + \epsilon(\overline{v_2}v_1)u_2 + \epsilon\overline{v_2}(v_2u_1) + \epsilon\overline{v_2}(v_1\overline{u_2}), \\
&\quad v_2(u_1u_2) + \epsilon v_2(\overline{v_2}v_1) + (v_2u_1)\overline{u_2} + (v_1\overline{u_2})\overline{u_2}).
\end{aligned}$$

"$\Longrightarrow$" Sei also L ein Alternativkörper. Seien $a, b, c \in H$. Dann ist

$$\begin{aligned}
((b, 0)(c, a))(c, a) &= ((bc)c + \epsilon\overline{a}(ab), a(bc) + (ab)\overline{c}), \\
(b, 0)(c, a)^2 &= (bc^2 + \epsilon N(a)b, (\mathrm{tr}\, c)ab),
\end{aligned}$$

und mit dem Rechtsalternativgesetz ergibt sich

$$a(bc) + (ab)\overline{c} = (\mathrm{tr}\, c)ab = (ab)(\mathrm{tr}\, c) = (ab)(c + \overline{c}) = (ab)c + (ab)\overline{c},$$

d.h. $a(bc) = (ab)c$ und H ist assoziativ. Ist $a \in H\backslash\{0\}$, so existieren $u, v \in H$ mit $(1,0) = (u,v)(a,0) = (ua, v\overline{a})$, also insbesondere $ua = 1$. Damit ist H ein Schiefkörper. Seien $u, v \in H$ mit $v \neq 0$ gegeben. Dann ist $(u,v) \neq 0$ und da L als Divisionsalgebra nullteilerfrei ist, folgt nach Lemma 28

$$N(u) - \epsilon N(v) = N(u,v) = (u,v)\overline{(u,v)} \neq 0,$$

d.h. $N(u)/N(v) \neq \epsilon$.
"'$\Longleftarrow$"' Sei H ein Schiefkörper und es gelte $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ für $u, v \in H$ mit $v \neq 0$. Aus der Assoziativität von H folgt mit den obigen Formeln offenbar $uv^2 = (uv)v$ und $u^2v = u(uv)$ für alle $u, v \in L$. Also ist nur noch zu zeigen, daß L überhaupt eine Divisionsalgebra ist. Für $u, v \in L$ haben wir auch $(u\overline{v})v = (u((\mathrm{tr}\, v) - v))v = (\mathrm{tr}\, v)uv - (uv)v = (\mathrm{tr}\, v)uv - uv^2 = (\mathrm{tr}\, v)uv - (\mathrm{tr}\, v)uv + N(v)u = N(v)u$, und ebenso $u(\overline{u}v) = N(u)v$.

Seien jetzt $a, b \in L$ mit $a \neq 0$ gegeben. Dann ist $a = (u,v)$ mit $u, v \in H$, $(u,v) \neq (0,0)$. Ist $v \neq 0$, so gilt $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ also $N(a) = N(u) - \epsilon N(v) \neq 0$. Ist $v = 0$, so ist ebenfalls $N(a) = N(u) \neq 0$ da $u \neq 0$ ist. Setzen wir also $x := N(a)^{-1}\overline{a}b$, so folgt $ax = N(a)^{-1}a(\overline{a}b) = b$. Ist umgekehrt $y \in L$ mit $ay = b$, so ergibt sich $\overline{a}b = \overline{a}(\overline{a}y) = N(\overline{a})y = (\overline{a}\overline{a})y = (\overline{a}a)y = N(a)y$, d.h. $y = N(a)^{-1}\overline{a}b = x$. Analog gibt es auch genau ein $x \in L$ mit $xa = b$, d.h. L ist eine Divisionsalgebra.
(d) "'$\Longrightarrow$"' Da L insbesondere ein Alternativkörper ist, ist H nach (e) ein Schiefkörper und es gilt $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ für $u, v \in H$ mit $v \neq 0$. Nach (b) ist H auch kommutativ, d.h. ein Körper.
"'$\Longleftarrow$"' Nach (e) ist L ein Alternativkörper, und nach (b) ist L auch assoziativ, d.h. L ist ein Schiefkörper.
(c) "'$\Longrightarrow$"' Nach (d) ist H ein Körper und es gilt $N(u)/N(v) \neq \epsilon$ für $u, v \in H$ mit $v \neq 0$. Nach (a) ist auch $\overline{a} = a$ für jedes $a \in H$.
"'$\Longleftarrow$"' Nach (d) ist L ein Schiefkörper und nach (a) auch kommutativ, d.h. L ist ein Körper.
(f) Die Inklusion $F \subseteq Z(L)$ ist klar. Seien umgekehrt $u, v \in H$ mit $(u,v) \in Z(L)$ gegeben. Für jedes $w \in H$ haben wir dann

$$\begin{aligned}(u,v)\cdot(w,0) &= (uw, v\overline{w}),\\ (w,0)\cdot(u,v) &= (wu, vw),\end{aligned}$$

d.h. $uw = wu$ und $v\overline{w} = vw$. Insbesondere ist $u \in Z(H)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $w \in H$ mit $\overline{w} \neq w$, und damit liefert $v(\overline{w} - w) = 0$ auch $v = 0$. Weiter folgt

$$(0, \overline{u}) = (0,1)(u,0) = (u,0)(0,1) = (0,u),$$

d.h. $\overline{u} = u$ und somit $u \in F$.

■

Damit erhalten wir eine explizite Konstruktion echter Alternativkörper.

Satz 30: *Sei F ein Körper und seien $a, b, c \in K$ mit*

$$\begin{aligned} u^2 - u &\neq a, \\ u_1^2 + u_1u_2 - au_2^2 &\neq b, \\ u_1^2 + u_1u_2 - au_2^2 - bu_3^2 - bu_3u_4 + abu_4^2 &\neq c \end{aligned}$$

für alle $u, u_1, u_2, u_3, u_4 \in F$.

(a) *Der F-Vektorraum F^2 versehen mit der Multiplikation*

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) := (u_1u_2 + av_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1 + v_1v_2)$$

ist ein Körper, den wir als $\mathbb{C}_a(F)$ schreiben, und durch $\overline{(u,v)} := (u+v, -v)$ wird ein involutorischer Automorphismus definiert mit dem $\mathbb{C}_a(F)$ zu einer zweidimensionalen Dickson-Algebra über F wird.

(b) *Bilden wir mit dem Parameter b die Cayley-Dickson Erweiterung $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ von $\mathbb{C}_a(F)$, so ist $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ ein nicht kommutativer Schiefkörper mit $Z(\mathbb{H}_{a,b}(F)) = F$ und $\dim \mathbb{H}_{a,b}(F) = 4$.*

(c) *Bilden wir erneut mit dem Parameter c aus $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ die Cayley-Dickson Erweiterung $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$, so ist $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$ ein echter Alternativkörper, dessen Zentrum genau F ist. Es ist $\dim \mathbb{O}_{a,b,c}(F) = 8$.*

Beweis: **(a)** Nach Voraussetzung ist das Polynom $x^2 - x - a \in F[x]$ irreduzibel über F, und wir erhalten einen Erweiterungskörper $K = F(e)$ von Grad 2 über F mit $e^2 = e + a$. Dieser Körper ist dann genau der Körper $\mathbb{C}_a(F)$. Weiter ist $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e + a = (1-e) + a$, d.h. auch $1 - e$ ist eine Wurzel von $x^2 - x - a$, und wir erhalten einen Automorphismus $\overline{\ }$ von $\mathbb{C}_a(F)$ mit $\overline{e} = 1 - e$. Wegen $1 - (1-e) = e$ ist dieser involutorisch, und hat offenbar genau die angegebene Form. Für $u, v \in F$ gelten $N(u,v) = \overline{(u,v)}(u,v) = (u,v)\overline{(u,v)} = (u,v)\overline{(u+v,-v)} = (u^2 + uv - av^2, -uv + uv + v^2 - v^2) = u^2 + uv - av^2 \in F$ und $(u,v) + \overline{(u,v)} = (u,v) + (u+v,-v) = 2u + v \in F$. Also ist $\mathbb{C}_a(F)$ eine Dickson-Algebra.
(b) Für $u, v \in \mathbb{C}_a(F)$ gilt $N(uv) = uv\overline{uv} = u\overline{u}v\overline{v} = N(u)N(v)$, und für $v \neq 0$ folgt $N(uv^{-1}) = N(u)/N(v)$. Wegen $N(u,v) = u^2 + uv - av^2$ für $u, v \in F$ liefert unsere Bedingung an b somit $N(u)/N(v) \neq b$ für $u, v \in \mathbb{C}_a(F)$ mit $v \neq 0$. Nach Lemma 29.(d) ist $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ somit ein Schiefkörper, und wegen $\dim \mathbb{C}_a(F) = 2$ ist $\dim \mathbb{H}_{a,b}(F) = 4$.

Für $u, v \in F$ ist $(u,v) = \overline{(u,v)} = (u+v,-v)$ genau dann, wenn $v = 0$ gilt, d.h. es ist $\mathrm{Fix}_{\mathbb{C}_a(F)}(\overline{\ }) = F \neq \mathbb{C}_a(F)$. Mit Lemma 29.(f) folgt $Z(\mathbb{H}_{a,b}(F)) = F$, und insbesondere ist $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ nicht kommutativ.
(c) Für $u, v \in \mathbb{H}_{a,b}(F)$ haben wir $N(uv) = \overline{uv}uv = \overline{v}\,\overline{u}uv = N(u)\overline{v}v = N(u)N(v)$, und für $v \neq 0$ ergibt sich weiter $N(u)/N(v) = N(uv^{-1})$. Für $u_1, u_2, u_3, u_4 \in F$ gilt $N((u_1,u_2),(u_3,u_4)) = N(u_1,u_2) - bN(u_3,u_4) = u_1^2 + u_1u_2 - au_2^2 - bu_3^2 - bu_3u_4 + abu_4^2$,

und somit folgt $N(u)/N(v) \neq c$ für alle $u, v \in \mathbb{H}_{a,b}(F)$ mit $v \neq 0$. Da $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ nach (b) ein Schiefkörper ist, ist somit $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$ nach Lemma 29.(e) ein Alternativkörper. Da $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ nicht kommutativ ist, ist $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$ nach Lemma 29.(d) kein Schiefkörper, d.h. nicht assoziativ, und somit ist $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$ ein echter Alternativkörper. Wegen $\dim \mathbb{H}_{a,b}(F) = 4$ ist $\dim \mathbb{O}_{a,b,c}(F) = 8$. Wie in (b) eingesehen gibt es $u \in \mathbb{C}_a(F) \subseteq \mathbb{H}_{a,b}(F)$ mit $\overline{u} \neq u$ und es ist $\mathrm{Fix}_{\mathbb{H}_{a,b}(F)}(\overline{\ }) \cap Z(\mathbb{H}_{a,b}(F)) = F$. Damit ergibt Lemma 29.(f) auch $Z(\mathbb{O}_{a,b,c}(F)) = F$.

■

Den Körper $\mathbb{C}_a(F)$ nennen wir die verallgemeinerten komplexen Zahlen über F, der Schiefkörper $\mathbb{H}_{a,b}(F)$ ist ein verallgemeinerter Quaternionenschiefkörper über F, und der Alternativkörper $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$ wird als verallgemeinerte Oktavenalgebra über F bezeichnet. Im Fall $F = \mathbb{R}$ erfüllen $a = b = c = -1$ die Bedingungen des Satzes, und wir erhalten die klassischen Quaternionen und Oktaven.

Oben hatten wir beschrieben, wie sich Isomorphismen des Grundkörpers F zu Isomorphismen von Cayley-Dickson Erweiterungen fortsetzen lassen. Daraus erhalten wir leicht die folgende Tatsache: Sind $\psi : F \to F'$ ein Isomorphismus von Körpern und $a, b, c \in F$ wie in Satz 30, so erfüllen auch $\psi(a), \psi(b), \psi(c) \in F'$ diese Bedingungen, und ψ setzt sich zu einem Isomorphismus $\mathbb{O}_{a,b,c}(F) \simeq \mathbb{O}_{\psi(a),\psi(b),\psi(c)}(F')$ von Alternativkörpern fort. Ein Beweis dieser Behauptung ist in den Aufgaben zu diesem Paragraphen enthalten.

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel beisammen, um zu zeigen, daß ein echter Alternativkörper stets eine verallgemeinerte Oktavenalgebra über seinem Zentrum ist.

Satz 31: *Sei K ein echter Alternativkörper. Dann ist jede echte Unteralgebra von K über $Z(K)$ ein Schiefkörper, und für jede Unteralgebra H von K ist $(H, \overline{\ })$ eine Dickson-Algebra. Ist H eine echte Unteralgebra von K mit $H \not\subseteq P$, so ist $H^\perp \neq 0$ und für jedes $e \in H^\perp \backslash \{0\}$ ist $L := H + He$ eine Unteralgebra von K, die durch $(u, v) \mapsto u + ve$ zur Cayley-Dickson Erweiterung von H zum Parameter $-N(e)$ isomorph ist, und dieser Isomorphismus erhält auch die Konjugation.*

Es existieren Elemente $a, b, c \in K$ mit $a \notin Z(K)$, $\mathrm{tr}\, a = 1$, $b \in \langle 1, a\rangle^\perp \backslash \{0\}$, $c \in \langle 1, a, b, ab\rangle^\perp \backslash \{0\}$. Weiter erfüllen dann $-N(a), -N(b), -N(c)$ die Bedingungen aus Satz 30 und es existiert ein Algebrenisomorphismus $\psi : K \to \mathbb{O}_{-N(a),-N(b),-N(c)}(Z(K))$ über $Z(K)$ mit $\psi(a) = (0, 1) \in \mathbb{C}_{-N(a)}(Z(K))$, $\psi(b) = (0, 1) \in \mathbb{H}_{-N(a),-N(b)}(Z(K))$ und $\psi(c) = (0, 1) \in \mathbb{O}_{-N(a),-N(b),-N(c)}(Z(K))$. Insbesondere ist $\dim_{Z(K)} K = 8$.

Beweis: Sei H eine Unteralgebra von K. Nach Korollar 23 ist H ein unter Konjugation invarianter Unteralternativkörper von K. Für $a \in K$ ist $a + \overline{a} = \mathrm{tr}\, a \in Z(K)$ und nach Korollar 22 ist auch $\overline{a}a = a\overline{a} = N(a) \in Z(K)$. Außerdem ist die Konjugation nach Satz 24.(a) ein involutorischer Antiautomorphismus von K, d.h. $(H, \overline{\ })$ ist eine Dickson-Algebra.

Jetzt sei H als echte Unteralgebra mit $\dim H < \infty$ vorausgesetzt. Ist $H \subseteq P$, so ist H nach Satz 27.(f) kommutativ, und nach Korollar 18 ein Körper. Im Folgenden nehmen wir $H \not\subseteq P$ an. Nach Satz 27.(g) ist dann $H^\perp \neq 0$, und ist $e \in H^\perp \backslash \{0\}$, so

ist $L := H + He = H \oplus He$ eine Unteralgebra von K. Insbesondere ist die Abbildung $\varphi : H \times H \to L; (u, v) \mapsto u + ve$ linear über $Z(K)$ und bijektiv. Außerdem ergibt die Formel in Satz 27.(g), daß φ ein konjugationserhaltender Isomorphismus der Cayley-Dickson Erweiterung zum Parameter $-N(e)$ von H auf L ist. Da auch L nach Korollar 23 ein Alternativkörper ist, ist H nach Lemma 29.(e) ein Schiefkörper.

Wegen $K \neq Z(K)$ ist $\dim_{Z(K)} K \geq 2$ und da P nach Satz 27.(a) eine Hyperebene von K ist, gibt es ein $a' \in K$ mit $a' \notin Z(K), P$. Dann ist $\mathrm{tr}\, a' \neq 0$ und wir haben $a := (\mathrm{tr}\, a')^{-1} a' \in K \backslash Z(K)$ mit $\mathrm{tr}\, a = 1$. Sei jetzt ein solches a gegeben. Dann ist insbesondere $a \notin P$, und nach Satz 27.(b) ist $a^2 \notin Z(K)$, und nach Korollar 21 ist $F_1 := \langle 1, a \rangle$ ein Unterkörper von K mit $\mathrm{Fix}_{F_1}(\bar{\ }) = Z(K)$. Es gilt $a^2 = a - N(a)$, und damit ist $x^2 - x + N(a) \in Z(K)[x]$ das Minimalpolynom von a, und somit ist $u^2 - u \neq -N(a)$ für jedes $u \in Z(K)$ und $F_1 \simeq \mathbb{C}_\alpha(Z(K))$ mit $\alpha := -N(a)$, wobei a unter diesem Isomorphismus dem Element $(0, 1)$ von $\mathbb{C}_\alpha(Z(K))$ entspricht.

Da wegen $a \notin P$ insbesondere $F_1 \not\subseteq P$ ist, wissen wir bereits $F_1^\perp \neq 0$ und ist $b \in F_1^\perp \backslash \{0\}$, so ist $F_2 := F_1 + F_1 b = \langle 1, a, b, ab \rangle$ eine zur Cayley-Dickson Erweiterung von F_1 mit Parameter $\beta := -N(b)$ isomorphe Unteralgebra von K. Nach Korollar 16 ist F_2 ein Schiefkörper, und wegen $N(1) = 1$ ergibt Lemma 29.(d) auch $N(u) \neq \beta$ für alle $u \in F_1$. Für $u_1, u_2 \in Z(K)$ haben wir $N(u_1 + u_2 a) = N(u_1) + N(u_2 a) + < u_1, u_2 a >= u_1^2 + u_2^2 N(a) + u_1 u_2 a + \bar{a} u_2 u_1 = u_1^2 - \alpha u_2^2 + (\mathrm{tr}\, a) u_1 u_2 = u_1^2 + u_1 u_2 - \alpha u_2^2$, d.h. es ist $u_1^2 + u_1 u_2 - \alpha u_2^2 \neq \beta$ für alle $u_1, u_2 \in Z(K)$. Weiter folgt wegen $F_1 \simeq \mathbb{C}_\alpha(Z(K))$ nun $F_2 \simeq \mathbb{H}_{\alpha,\beta}(Z(K))$, wobei b unter diesem Isomorphismus dem Element $(0, 1)$ entspricht.

Da wegen $F_1 \not\subseteq P$ auch $F_2 \not\subseteq P$ gilt, ist wieder $F_2^\perp \neq 0$. Sei $c \in F_2^\perp \backslash \{0\}$. Dann ist $F_3 := F_2 + F_2 c$ eine zur Cayley-Dickson Erweiterung mit Parameter $\gamma := -N(c)$ von F_2 isomorphe Unteralgebra von K. Da F_3 nach Korollar 23 ein Alternativkörper ist, gilt nach Lemma 29.(e) wieder $N(u) \neq \gamma$ für alle $u \in F_2$. Für $u_1, u_2, u_3, u_4 \in Z(K)$ haben wir $N(u_1 + u_2 a + u_3 b + u_4 ab) = N(u_1 + u_2 a) - \beta N(u_3 + u_4 a) = u_1^2 + u_1 u_2 - \alpha u_2^2 - \beta u_3^2 - \beta u_3 u_4 + \alpha\beta u_4^2$, d.h. es ist $u_1^2 + u_1 u_2 - \alpha u_2^2 - \beta u_3^2 - \beta u_3 u_4 + \alpha\beta u_4^2 \neq \gamma$ für alle $u_1, u_2, u_3, u_4 \in Z(K)$. Wegen $F_2 \simeq \mathbb{H}_{\alpha,\beta}(Z(K))$ folgt weiter $F_3 \simeq \mathbb{O}_{\alpha,\beta,\gamma}(Z(K))$, wobei c unter diesem Isomorphismus auf $(0, 1)$ abgebildet wird. Insbesondere ist F_3 nach Satz 30.(c) ein echter Alternativkörper, also kein Schiefkörper, und kann damit keine echte Unteralgebra von K sein. Dies zeigt $F_3 = K$ und der Satz ist bewiesen.

■

Korollar 32: *Ein endlicher Alternativkörper ist ein Körper.*

Beweis: Sei K ein endlicher Alternativkörper. Wäre K ein echter Alternativkörper, so enthielte K nach Satz 31 einen Quaternionenschiefkörper als Unterschiefkörper, und dieser wäre nach Satz 30.(b) nicht kommutativ, im Widerspruch zum Satz von Wedderburn. Also ist K ein Schiefkörper, und erneut nach dem Satz von Wedderburn sogar ein Körper.

■

Aufgaben zu §12

(171) Sei K ein Semikörper, und seien $\mathfrak{T}_1 := \mathfrak{T}(K)$, $\mathfrak{T}_2 := \mathfrak{T}(K^t)$ die Spreadsets der Links- und Rechtsmultiplikationen. Zeigen Sie, daß dann $P(K) \simeq \overline{\pi(\mathfrak{T}_1)}$ und $P(K)^* \simeq \overline{\pi(\mathfrak{T}_2)}$ gelten.

(172) Verwenden Sie §9.Lemma 23.(c), um einen anderen Beweis der Gleichung $((ab)c)b = a((bc)b)$ in Lemma 3 zu geben.

(173) Sei K ein echter Alternativkörper. Zeigen Sie, daß dann $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$ für alle $a, b \in K$ gilt.

(174) Sei K ein echter Alternativkörper. Zeigen Sie, daß dann $K^t \simeq K$ gilt.

(175) Seien $(H_i, \bar{}\,)$ $(i = 1, 2)$ zwei Dickson-Algebren über einem Körper F, und sei $a \in K$. Für $i = 1, 2$ sei L_i die Cayley-Dickson Erweiterung von H_i zum Parameter a, und setze $e := (0, 1)$ (in L_1 und L_2). Sei $\varphi : H_1 \to H_2$ ein konjugationstreuer Isomorphismus von Algebren über F. Dann setzt sich φ eindeutig zu einem konjugationstreuen Isomorphismus $\psi : L_1 \to L_2$ mit $\psi(e) = e$ fort.

(176) Geben Sie eine explizite Multiplikationstabelle der Oktavenalgebra $\mathbb{O}_{a,b,c}(F)$ an.

(177) Seien F ein Körper und $(H, \bar{}\,)$ eine Dickson-Algebra über F in der H ein Schiefkörper ist. Sei $\epsilon \in F$ und bezeichne L die Cayley-Dickson Erweiterung zu diesem Parameter. Weiter sei $c \in H \backslash \{0\}$ und setze $\epsilon' := N(c)\epsilon$. Sei L' die Cayley-Dickson Erweiterung zum Parameter ϵ'. Zeigen Sie, daß ein konjugationstreuer Isomorphismus $\varphi : L \to L'$ existiert.

(178) Seien F ein Körper und $a, b, c \in F$ wie in Satz 30. Seien $s, t, r \in F \backslash \{0\}$, und setze $a' := s^2 a$, $b' := t^2 b$ und $c' := r^2 c$. Zeigen Sie, daß auch a', b', c' die Bedingungen des Satz 30 erfüllen, und beweisen Sie weiter $\mathbb{O}_{a,b,c}(F) \simeq \mathbb{O}_{a',b',c'}(F)$.

(179) Zeigen Sie, daß es bis auf Isomorphie genau einen echten Alternativkörper gibt, dessen Zentrum zu $\mathbb{R}$ isomorph ist.

(180) Seien F ein Körper und $a, b, c \in F$ wie in Satz 30. Weiter sei $\psi : F \to F'$ ein Isomorphismus von F auf einen weiteren Körper F'. Zeigen Sie, daß $\psi(a), \psi(b), \psi(c) \in F'$ dann ebenfalls die Voraussetzungen von Satz 30 erfüllen. Weiter setzt sich ψ zu einem Körperisomorphismus $\mathbb{C}_a(F) \simeq \mathbb{C}_{\psi(a)}(F')$, zu einem Schiefkörperisomorphismus $\mathbb{H}_{a,b}(F) \simeq \mathbb{H}_{\psi(a),\psi(b)}(F')$ und zu einem Isomorphismus $\mathbb{O}_{a,b,c}(F) \simeq \mathbb{O}_{\psi(a),\psi(b),\psi(c)}(F')$ von Alternativkörpern fort.

(181) Sei K ein echter Alternativkörper. Zeigen Sie, daß jedes Element $a \in K$ in einem Quaternionenunterschiefkörper von K enthalten ist.

§13 Moufang Ebenen

Nach diesem längeren algebraischen Exkurs kehren wir nun zur Behandlung projektiver Ebenen zurück. Die ursprüngliche Motivation für §12 war unser Satz in §10, der die Ebenen vom Lenz Typ mindestens VIb als die projektiven Ebenen über rechtsinversen Semikörpern charakterisiert hat. Nach §12.Satz 8 sind derartige Semikörper bereits Alternativkörper. Wir werden jetzt einsehen, daß die projektiven Ebenen über Alternativkörpern genau die Moufang Ebenen sind. Eine Moufang Ebene hatten wir dabei in §5 als eine projektive Ebene definiert, in der jede Gerade eine Translationsachse ist. Wir beginnen unsere Behandlung mit der Konstruktion einer speziellen Kollineation der Ebene $P(K)$ über einem Alternativkörper K.

Lemma 1: *Sei K ein Alternativkörper. Dann wird durch*

$$\begin{array}{ll}(x,y)\mapsto(y^{-1},xy^{-1})\ (x,y\in K,y\neq 0), & [s,t]\mapsto[-s^{-1}t,s^{-1}]\ (s,t\in K,s\neq 0),\\ (x,0)\mapsto(x)\ (x\in K), & [0,t]\mapsto[t^{-1}]\ (t\in K,t\neq 0),\\ (s)\mapsto(0,s^{-1})\ (s\in K,s\neq 0), & [c]\mapsto[c,0]\ (c\in K),\\ (0)\mapsto(\infty) & [0,0]\mapsto[\infty],\\ (\infty)\mapsto(0,0) & [\infty]\mapsto[0]\end{array}$$

eine Kollineation τ von $P(K)$ definiert.

Beweis: Nach §12.Satz 9 ist K links- und rechtsinvers. Nach §10.Lemma 20.(a) ist die Abbildung $x\mapsto x^{-1}$ von $K\backslash\{0\}$ auf sich involutorisch, und insbesondere bijektiv. Damit ergibt sich sofort, daß die angegebenen Punkt- und Geradenabbildungen $K^2\cup K\cup\{\infty\}\to K^2\cup K\cup\{\infty\}$ bijektiv sind. Nach §6.Lemma 4 ist zu zeigen, daß die Inzidenzrelation von $P(K)$ erhalten bleibt.

Seien $s,t\in K$ mit $s\neq 0$. Der Punkt (s) von $[s,t]$ wird auf $(0,s^{-1})$ auf $[-s^{-1}t,s^{-1}]$ abgebildet. Ist $(x,y)\in K^2$ auf $[s,t]$, so ist $y=sx+t$. Ist $y\neq 0$, so wird dieser Punkt auf (y^{-1},xy^{-1}) abgebildet, und wir haben mit der Rechts- und der Linksinversenbedingung

$$\left(-(s^{-1}t)y^{-1}+s^{-1}\right)y=-((s^{-1}t)y^{-1})y+s^{-1}y=-s^{-1}t+s^{-1}(sx)+s^{-1}t=x,$$

d.h. erneut nach der Rechtsinversenbedingung $-(s^{-1}t)y^{-1}+s^{-1}=xy^{-1}$, und somit liegt (y^{-1},xy^{-1}) auf $[-s^{-1}t,s^{-1}]$. Ist andererseits $y=0$, d.h. $sx=-t$, so liefert die Linksinversenbedingung $x=-s^{-1}t$, und somit wird $(x,y)=(x,0)$ auf $(x)=(-s^{-1}t)$ in $[-s^{-1}t,s^{-1}]$ abgebildet.

Jetzt sei $t\in K$ mit $t\neq 0$ gegeben, und wir wollen das Bild der Geraden $[0,t]$ betrachten. Der Punkt (0) auf $[0,t]$ wird auf (∞) in $[t^{-1}]$ abgebildet. Weiter ist für jedes $x\in K$ das Bild des Punktes (x,t) gleich (t^{-1},xt^{-1}) auf $[t^{-1}]$.

Die Punkte auf der Geraden $[0,0]$ sind (0) und die $(x,0)$ $(x\in K)$, und die Bildpunkte (∞) von (0) und (x) von $(x,0)$ für $x\in K$ liegen alle auf $[\infty]$.

Sei $c\in K$. Es ist $(\infty)^\tau=(0,0)I[c,0]$, $(c,0)^\tau=(c)I[c,0]$, und für jedes $y\in K\backslash\{0\}$ ist ebenfalls $(c,y)^\tau=(y^{-1},cy^{-1})I[c,0]$.

Schließlich werden die Punkte auf $[\infty]$ auf Punkte der vertikalen Geraden $[0]$ abgebildet. Also ist τ tatsächlich eine Kollineation von $P(K)$.

■

Damit erhalten wir bereits die geometrische Kennzeichnung der Alternativkörper.

Satz 2: *Sei (K,T) ein Ternärkörper. Genau dann ist die projektive Ebene $P(K,T)$ über (K,T) eine Moufang Ebene, wenn (K,T) ein Alternativkörper ist.*

Beweis: "'$\Longrightarrow$"' Ist $P(K,T)$ eine Moufang Ebene, so ist jede Gerade von $P(K,T)$ eine Translationsachse, und nach §10.Satz 21 ist (K,T) ein rechtsinverser Semikörper. Nach §12.Satz 8 ist K sogar ein Alternativkörper.
"'$\Longleftarrow$"' Nach §12.Satz 9 ist K ein rechtsinverser Semikörper, und nach §10.Satz 21 ist jede Gerade durch (∞) eine Translationsachse von $P(K,T)$. Nach Lemma 1 gibt es eine Kollineation τ von $P(K,T)$ mit $(\infty)^\tau = (0,0)$, und damit ist auch jede Gerade durch $(0,0)$ eine Translationsachse von $P(K,T)$. Insbesondere ist $P(K,T)$ nach §7.Satz 4 eine Moufang Ebene.

■

Analog zur Kennzeichnung desarguescher Ebenen in §7 erhalten wir den folgenden Charakterisierungssatz für Moufang Ebenen.

Satz 3: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Ebene π ist eine Moufang Ebene.*

(b) *In π gilt der kleine Satz von Desargues.*

(c) *Die Ebene π besitzt zwei verschiedene Translationsachsen.*

(d) *Alle zu beliebigen Vierecken in π gehörenden Ternärkörper sind Alternativkörper.*

(e) *Es gibt ein Viereck in π, dessen zugehöriger Ternärkörper ein Alternativkörper ist.*

Beweis: **(a)$\Longleftrightarrow$(b):** Dies ist §6.Korollar 8.
(a)$\Longrightarrow$(c): Klar.
(c)$\Longrightarrow$(e): Seien $a, b \in \mathfrak{L}$ zwei verschiedene Translationsachsen von π, und setze $v := a \wedge b \in \mathfrak{P}$. Nach §7.Lemma 2 ist jede Gerade durch v eine Translationsachse von π. Wähle ein Viereck (o, e, u, v) in π, und bezeichne (K,T) den zugehörigen Ternärkörper. Nach §3.Satz 11 ist jede Gerade durch (∞) eine Translationsachse von $P(K,T)$, und nach §10.Satz 21 ist (K,T) ein rechtsinverser Semikörper. Nach §12.Satz 8 ist (K,T) ein Alternativkörper.
(e)$\Longrightarrow$(a): Klar nach §3.Satz 11 und Satz 2.
(d)$\Longrightarrow$(e): Klar.
(a)$\Longrightarrow$(d): Klar nach §3.Satz 11 und Satz 2.

■

Korollar 4: *Es gibt keine projektiven Ebenen von Lenz Typ VIa oder VIb.*

Beweis: Eine projektive Ebene von Lenz Typ mindestens VIb besitzt zwei verschiedene Translationsachsen und ist nach Satz 3 damit eine Moufang Ebene, und folglich von Lenz Typ VII. Da die duale Ebene einer projektiven Ebene von Lenz Typ VIa den Lenz Typ VIb hätte, kann es auch keine solche Ebene geben.

■

Weiter erhalten wir die bereits in den Paragraphen §9 und §10 erwähnte Tatsache, daß die volle Kollineationsgruppe einer nicht-moufangschen Translationsebene die Translationsachse fixiert, d.h. die dort betrachteten Untergruppen der Kollineationsgruppe waren tatsächlich schon die volle Gruppe.

Korollar 5: *Sei π eine Translationsebene mit Translationsachse a, die keine Moufang Ebene ist, und sei $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Dann gilt $a^\Gamma = a$. Ist außerdem $z \in a$ so, daß π eine duale Translationsebene mit dualer Translationsachse z ist, so ist auch $z^\Gamma = z$.*

Beweis: Da das Bild einer Translationsachse unter einer Kollineation wieder eine ist, folgt die erste Aussage sofort aus Satz 3. Die zweite Behauptung folgt durch Anwendung der ersten auf die duale Ebene.

■

Die Kollineationsgruppe einer Moufang Ebene ist allerdings viel größer. Wir werden zeigen, daß diese Gruppe transitiv auf der Menge der Vierecke wirkt. Transitivität auf der Menge der Dreiecke ist einfach, und um hieraus die volle Transitivität zu gewinnen, müssen wir die Wirkung der Standgruppe eines Dreiecks untersuchen. Diese Gruppe hatten wir in §10 als die Autotopismengruppe eines koordinatisierenden Alternativkörpers erkannt. Wir werden jetzt zeigen, daß für Alternativkörper Isotopie und Isomorphie gleichwertig sind. Für Schiefkörper ist dies eine einfache Folgerung aus §10.Korollar 14 und §4.Satz 6, dies ist auch eine der Aufgaben zu §10. Also können wir uns auf den Fall echter Alternativkörper beschränken. Wir beginnen mit der Untersuchung der Hauptisotope eines echten Alternativkörpers.

Lemma 6: *Seien K ein echter Alternativkörper und $a, b \in K\backslash\{0\}$. Dann ist das Hauptisotop $K_{a,b}$ ein echter Alternativkörper, dessen Addition mit der Addition von K übereinstimmt. Weiter ist $Z(K_{a,b}) = Z(K)ab$ und für alle $u, v \in K$ gelten*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{a,b}\, u &= N(ab)^{-1} < u, ab > ab, \\ N_{a,b}(u) &= N(ab)^{-1} N(u) ab, \\ < u, v >_{a,b} &= N(ab)^{-1} < u, v > ab. \end{aligned}$$

Außerdem ist $K_{a,b} \simeq K$.

Beweis: Nach §10.Lemma 17 ist $K_{a,b}$ ein Semikörper, dessen Addition mit der Addition von K übereinstimmt, und ist $\otimes$ die Multiplikation in $K_{a,b}$, so ist $u \otimes v = r_b^{-1}(u) l_a^{-1}(v) =$

$(ub^{-1})(a^{-1}v)$ für alle $u, v \in K$. Nach §3.Lemma 12 und §10.Korollar 14 gibt es ein $e \in (K\backslash\{0\})^2$ so, daß der Ternärkörper von $P(K)$ zum Viereck $((0,0), e, (0), (\infty))$ zu $K_{a,b}$ isomorph ist, und mit §3.Satz 11 und §4.Satz 3.(a) folgt $P(K_{a,b}) \simeq P(K)$. Nach Satz 2 ist $P(K)$ eine Moufang Ebene und wieder nach Satz 2 ist $K_{a,b}$ ein Alternativkörper. Wäre $K_{a,b}$ ein Schiefkörper, so wäre $P(K)$ nach §7.Satz 14 desarguesch, und ebenfalls nach §7.Satz 14 wäre K ein Schiefkörper. Also ist $K_{a,b}$ kein Schiefkörper, d.h. $K_{a,b}$ ist ein echter Alternativkörper.

Sei $z \in Z(K)$. Für jedes $u \in K$ haben wir dann

$$\begin{aligned}(zab) \otimes u &= (z(ab)b^{-1})(a^{-1}u) = za(a^{-1}u) = zu,\\ u \otimes (zab) &= (ub^{-1})(a^{-1}(zab)) = z(ub^{-1})(a^{-1}(ab)) = z(ub^{-1})b = zu,\end{aligned}$$

d.h. es ist $zab \in Z(K_{a,b})$. Damit haben wir $Z(K)ab \subseteq Z(K_{a,b})$ eingesehen. Nach §10.Lemma 11 ist $(K_{a,b})_{b,a} = K_{r_b^{-1}(b), l_a^{-1}(a)} = K_{1,1} = K$, d.h. wenden wir die bewiesene Inklusion auf $K_{a,b}$ an, so ergibt sich

$$Z(K_{a,b}) \otimes b \otimes a \subseteq Z\left((K_{a,b})_{b,a}\right) = Z(K).$$

Ist $z \in Z(K_{a,b})$, so haben wir

$$z \otimes b \otimes a = z \otimes ((bb^{-1})(a^{-1}a)) = z \otimes 1 = (zb^{-1})a^{-1} = r_{a^{-1}}(r_{b^{-1}}(z)) = r_a^{-1}(r_b^{-1}(z)).$$

Ist also $z \in Z(K_{a,b})$, so ist $z = r_a^{-1}(r_b^{-1}(z))ab \in Z(K)ab$, d.h. wir haben auch $Z(K_{a,b}) \subseteq Z(K)ab$, und die Aussage über das Zentrum ist bewiesen.

Sei $u \in K$ mit $u \notin Z(K_{a,b})$ gegeben. Dann rechnen wir

$$\begin{aligned}u \otimes u &= (ub^{-1})(a^{-1}u)\\ &\overset{(\S12.\text{Lemma 13.(a)})}{=} u((b^{-1}a^{-1})u)\\ &\overset{(\S12.\text{Korollar 16})}{=} u((ab)^{-1}u)\\ &\overset{(\S12.\text{Korollar 22})}{=} N(ab)^{-1}u(\overline{ab}u)\\ &= N(ab)^{-1}(u(\overline{ab}u) + (ab)(\overline{u}u)) - N(ab)^{-1}(ab)(\overline{u}u)\\ &\overset{(\S12.\text{Lemma 26})}{=} N(ab)^{-1} < u, ab > u - N(ab)^{-1}abN(u)\\ &= (N(ab)^{-1} < u, ab > ab) \otimes u - (N(ab)^{-1}N(u))ab,\end{aligned}$$

und dies bedeutet

$$\mathrm{tr}_{a,b}\, u = N(ab)^{-1} < u, ab > ab,\ N_{a,b}(u) = N(ab)^{-1}N(u)ab.$$

Ist dagegen $u \in Z(K_{a,b})$, so existiert $z \in Z(K)$ mit $u = zab$, und wir haben

$$\begin{aligned}N(ab)^{-1} < u, ab > ab &= N(ab)^{-1} < zab, ab > ab\\ &\overset{(\S12.\text{Korollar 25})}{=} N(ab)^{-1} < z, (ab)\overline{ab} > ab =< z, 1 > ab = (\mathrm{tr}\, z)ab = 2zab = 2u = \mathrm{tr}_{a,b}\, u,\end{aligned}$$

sowie

$$N(ab)^{-1}N(u)ab \overset{(\S12.\text{Satz } 24.(\text{d}))}{=} N(z)ab = z^2ab = (zab) \otimes (zab) = u \otimes u = N_{a,b}(u).$$

Für das Skalarprodukt in $K_{a,b}$ folgt weiter für $u, v \in K$

$$\begin{aligned} < u, v >_{a,b} &= N_{a,b}(u+v) - N_{a,b}(u) - N_{a,b}(v) \\ &= N(ab)^{-1}(N(u+v) - N(u) - N(v))ab = N(ab)^{-1} < u, v > ab. \end{aligned}$$

Es verbleibt nur noch $K \simeq K_{a,b}$ zu zeigen. Hierzu betrachten wir die bijektive Abbildung $\psi : K \to K; x \mapsto x(ab)$. Die Einschränkung $\psi|Z(K) : Z(K) \to Z(K_{a,b})$ ist ein Körperisomorphismus und für $z \in Z(K)$, $u \in K$ gilt $\psi(z) \otimes u = zu$. Weiter haben wir für jedes $u \in K$

$$N_{ab}(\psi(u)) = N_{a,b}(u(ab)) = N(ab)^{-1}N(u(ab))ab \overset{(\S12.\text{Satz } 24.(\text{d}))}{=} N(u)ab = \psi(N(u))$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{a,b} \psi(u) &= \operatorname{tr}_{a,b}(u(ab)) = N(ab)^{-1} < u(ab), ab > ab \\ &\overset{(\S12.\text{Korollar } 25)}{=} N(ab)^{-1} < u, (ab)\overline{ab} > ab =< u, 1 > ab = (\operatorname{tr} u)ab = \psi(\operatorname{tr} u), \end{aligned}$$

und damit auch

$$< \psi(u), \psi(v) >_{a,b} = \psi(< u, v >).$$

Nach §12.Satz 31 gibt es $e, f \in K$ mit $e \notin Z(K)$, $\operatorname{tr} e = 1$ und $f \in \langle 1, e\rangle^{\perp}\backslash\{0\}$. Setzen wir $e' := e(ab) = \psi(e)$, so ist $e' \notin Z(K)ab = Z(K_{a,b})$ und $\operatorname{tr}_{a,b} e' = \psi(\operatorname{tr} e) = ab$ ist die Eins von $K_{a,b}$. Setzen wir weiter $f' := \psi(f)$, so ist $\psi(f) \perp ab = \psi(1), e' = \psi(e)$. Definiere $h \in K$ durch $\psi(h) = e' \otimes f'$. Dann ist $\dim\langle 1, e, f, ef, h\rangle^{\perp} \geq \dim_{Z(K)} K - 5 = 3$, d.h. es existiert ein $g \in \langle 1, e, f, ef, h\rangle^{\perp}\backslash\{0\}$. Setzen wir $\alpha := -N(e)$, $\beta := -N(f)$ und $\gamma := -N(g)$, so folgt mit §12.Satz 31, daß $K \simeq \mathbb{O}_{\alpha,\beta,\gamma}(Z(K))$ ist. Ist $g' := \psi(g)$, so folgt aus $g \perp 1, e, f$ auch $\psi(g) \perp ab, e', f'$, und auch $g' \perp \psi(h) = e' \otimes f'$. Da für $x \in \{e, f, g\}$ auch $N_{a,b}(x') = \psi(N(x))$ gilt, folgt wieder mit §12.Satz 31 die Isomorphie $K_{a,b} \simeq \mathbb{O}_{\psi(\alpha),\psi(\beta),\psi(\gamma)}(Z(K_{a,b}))$. Wie in §12 bemerkt, setzt sich $\psi : Z(K) \to Z(K_{a,b})$ zu einem Isomorphismus $\mathbb{O}_{\alpha,\beta,\gamma}(Z(K)) \simeq \mathbb{O}_{\psi(\alpha),\psi(\beta),\psi(\gamma)}(Z(K_{a,b}))$ fort, und wir haben $K \simeq K_{a,b}$.

■

Satz 7: *Seien K ein Alternativkörper und (K', T) ein zu K isotoper Ternärkörper. Dann ist (K', T) bereits ein zu K isomorpher Alternativkörper.*

Beweis: Wie bereits bemerkt, können wir annehmen das K ein echter Alternativkörper ist. Nach §10.Korollar 13 gibt es $a, b \in K\backslash\{0\}$ mit $(K', T) \simeq K_{a,b}$. Mit Lemma 6 ist auch $K_{a,b} \simeq K$.

■

Damit erhalten wir unseren Satz über die Transitivität der Kollineationsgruppe einer Moufang Ebene auf der Menge aller Vierecke.

Satz 8: *Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine Moufang Ebene und $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Dann wirkt Γ transitiv auf der Menge aller Vierecke in π. Außerdem sind alle zu π gehörenden Ternärkörper zueinander isomorph.*

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß Γ transitiv auf der Menge der Dreiecke in π wirkt. Sind $p, q, r, r' \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$ und $r, r' \notin p \vee q$ gegeben, so wirkt die Translationsgruppe $\Gamma_{[p\vee q, p\vee q]} \supseteq \Gamma_{p,q}$ transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash p \vee q$, d.h. es existiert $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ mit $r' = r^\gamma$.

Also reicht es einzusehen, daß Γ zweifach transitiv auf $\mathfrak{P}$ wirkt. Sind $p, q, q' \in \mathfrak{P}$ mit $q, q' \neq p$, so existieren eine Gerade $l \in \mathfrak{L}_p$ mit $q, q' \notin l$ und ein $p' \in l$ mit $p' \neq p$. Wie bereits gezeigt, existiert ein $\gamma \in \Gamma_{p,p'} \subseteq \Gamma_p$ mit $q' = q^\gamma$, d.h. Γ_p wirkt transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash\{p\}$.

Also müssen wir nur noch die Transitivität von Γ auf $\mathfrak{P}$ einsehen. Seien $p, q \in \mathfrak{P}$. Dann existiert ein $r \in \mathfrak{P}$ mit $r \neq p, q$, und somit existiert $\gamma \in \Gamma_r \subseteq \Gamma$ mit $q = p^\gamma$.

Also wirkt Γ transitiv auf der Menge der Dreiecke in π. Ist (o, u, v) ein Dreieck in π, so bleibt zu zeigen, daß die Standgruppe $\Lambda := \Gamma_{o,u,v}$ transitiv auf $M := \mathfrak{P}\backslash((o\vee u)\cup(o\vee v)\cup(u\vee v))$ wirkt. Seien also $e, e' \in M$ gegeben. Dann sind (o, e, u, v) und (o, e', u, v) zwei Vierecke in π, deren zugehörige Ternärkörper K, K' nach Satz 3 Alternativkörper sind. Nach §10.Lemma 9 sind K und K' isotop, und nach Satz 7 ist sogar $K \simeq K'$. Nach §4.Satz 3.(c) existiert ein $\gamma \in \Lambda$ mit $e' = e^\gamma$.

Die letzte Behauptung gilt nun nach §4.Korollar 10.

■

Aufgaben zu §13

(182) Sei π eine Moufang Ebene und sei K ein koordinatisierender Alternativkörper von π. Zeigen Sie, daß π genau dann fanosch (antifanosch) ist (siehe Aufgabe (78)), wenn $\mathrm{char}(K) = 2$ ($\mathrm{char}(K) \neq 2$) gilt.

(183) Zeigen Sie, daß für eine endliche projektive Ebene π die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) π ist eine Moufang Ebene.

(b) π ist desarguesch.

(c) In π gilt der Satz von Pappus.

(184) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine nicht desarguesche Moufang Ebene und seien $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathfrak{P}$ fünf Punkte von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann gibt es eine desarguesche Baer Unterebene $\pi' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{L}')$ von π mit $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathfrak{P}'$.

(185) Sei π eine nicht desarguesche Moufang Ebene. Dann gilt $\pi \simeq \pi^*$.

(186) Sei K ein Alternativkörper. Dann ist die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, x)$ eine axiale Kollineation der affinen Ebene $A(K)$. Bestimmen Sie außerdem das Zentrum dieser Kollineation in $P(K)$.

§14 Die Lenz-Barlotti Klassifikation

In §7 hatten wir die sogenannte Lenz Klassifikation projektiver Ebenen diskutiert, d.h. projektive Ebenen wurden danach klassifiziert wieviele transitive Elationsgruppen in ihnen existieren. Es stellte sich heraus, daß es 9 solche Lenz-Typen gibt, und in §13.Korollar 4 haben wir jetzt eingesehen, daß die Typen VIa und VIb gar nicht vorkommen, d.h. es gibt nur sieben Lenz Typen. Es gibt auch tatsächlich für jeden dieser verbleibenden sieben Typen stets eine projektive Ebene dieses Typs. Die Lenz-Barlotti Klassifikation verfeinert die Lenz-Klassifikation indem auch transitive Gruppen von Homologien betrachtet werden. Analog zu §7 definieren wir zunächst die Lenz-Barlotti Figur einer projektiven Ebene.

Definition 1: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann heißt

$$\mathfrak{F}_\pi := \{(a, z) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{P} : \pi \text{ ist } (a, z)\text{-transitiv}\}$$

die Lenz-Barlotti Figur von π.

Ist $\mathfrak{E}_\pi$ die Lenz Figur aus §7, so haben wir offenbar

$$\mathfrak{E}_\pi = \{(a, z) \in \mathfrak{F}_\pi : z \in a\},$$

d.h. die Lenz-Figur ist durch die Lenz-Barlotti Figur bereits festgelegt. Um einen Überblick über alle möglichen Formen der Lenz-Barlotti Figur zu gewinnen, können wir also jeden der sieben möglichen Lenz Typen einzeln untersuchen, und jeweils alle Möglichkeiten für $\mathfrak{F}_\pi$ bestimmen. Wie in §7 stellen wir erst einmal alles zusammen, was wir bereits über $\mathfrak{F}_\pi$ wissen.

- Ist π eine projektive Ebene, so gilt

  $$\mathfrak{F}_{\pi^*} = \{(z, a) : (a, z) \in \mathfrak{F}_\pi\}.$$

  Dies ist klar nach §7.Lemma 1.

- Sind π, π' projektive Ebenen und $\gamma : \pi \to \pi'$ ein Isomorphismus, so ist $\gamma(\mathfrak{F}_\pi) = \mathfrak{F}_{\pi'}$. Dies ist klar nach §5.Lemma 12.

- Sind π eine projektive Ebene und $\gamma \in \mathrm{Aut}(\pi)$, so ist $\mathfrak{F}_\pi^\gamma = \mathfrak{F}_\pi$. Dies ist ein Spezialfall der obigen Aussage.

- Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $a, b \in \mathfrak{L}$ mit $a \neq b$ und $u, v \in b$ mit $u \neq v$ und $(a,u),(a,v) \in \mathfrak{F}_\pi$. Nach §11.Lemma 1 ist dann $(a,z) \in \mathfrak{F}_\pi$ für jedes $z \in b$, und mit §11.Korollar 5 sowie §5.Lemma 15.(a) folgt

$$\{(a,z) : z \in b\} \cup \{(b,z) : z \in a\} \cup \{(l, a \wedge b) : l \in \mathfrak{L}_{a \wedge b}\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi.$$

- Sind $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $p, q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$ und $a, b \in \mathfrak{L}_q$ mit $a \neq b$ und $(a,p),(b,p) \in \mathfrak{F}_\pi$, so ist

$$\{(l,p) : l \in \mathfrak{L}_q\} \cup \{(l,q) : l \in \mathfrak{L}_p\} \cup \{(p \vee q, z) : z \in p \vee q\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi.$$

  Dies ist gerade die duale Form der obigen Aussage.

- Sind $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $a \in \mathfrak{L}$, $u, v, z \in \mathfrak{P}$ mit $u, v \in a$, $u \neq v$, $z \notin a$ und $(a,u),(a,v),(a,z) \in \mathfrak{F}_\pi$, so ist π nach §7.Satz 14 desarguesch und $\mathfrak{F}_\pi = \mathfrak{L} \times \mathfrak{P}$.

- Sind $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, $z \in \mathfrak{P}$, $a, b, c \in \mathfrak{L}$ mit $z \in a, b$, $a \neq b$, $z \notin c$ und $(a,z),(b,z),(c,z) \in \mathfrak{F}_\pi$, so ist $\mathfrak{F}_\pi = \mathfrak{L} \times \mathfrak{P}$. Dies folgt wieder per Dualität aus der obigen Aussage.

Die Untersuchung der möglichen Lenz-Barlotti Typen gliedert sich in zwei Hauptfälle, entweder ist π Translationsebene oder duale Translationsebene oder π ist von Lenz Typ höchstens III. Es ist nützlich die folgende Tatsache über die Lenz Figur festzuhalten.

Lemma 1: *Sei π eine projektive Ebene, und es sei $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{E}_\pi)$ nicht kopunktal oder $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{E}_\pi)$ nicht kollinear. Dann ist π eine Moufang Ebene, und insbesondere von Lenz Typ VII.*

Beweis: Wir zeigen die Kontraposition, d.h. $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ sei keine Moufang Ebene. Nach §13.Korollar 4 ist π dann von einem der Lenz Typen I,II,III,IVa,IVb oder V. Für Lenz Typ I ist $\mathfrak{E}_\pi$ leer und für Lenz Typ II einelementig, d.h. $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{E}_\pi)$ ist kopunktal und $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{E}_\pi)$ kollinear. Für Lenz Typ III gibt es einen Punkt z und eine Gerade l mit $z \notin l$ und $\mathfrak{E}_\pi = \{(p \vee z, p) : p \in l\}$, d.h. $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{E}_\pi) = \mathfrak{L}_z$ und $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{E}_\pi) = l$. Für Lenz Typ IVa gibt es eine Gerade a mit $\mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$, also $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{E}_\pi) = \{a\}$, $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{E}_\pi) = a$. Der Fall Lenz Typ IVb ist dual. Für Lenz Typ V haben wir schließlich eine Gerade a und einen Punkt $z \in a$ mit $\mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a \cup \mathfrak{L}_z \times \{z\}$ und damit ist in diesem Fall $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{E}_\pi) = \mathfrak{L}_z$, $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{E}_\pi) = a$.

■

Wir beginnen mit der Behandlung der Lenz Typen I,II und III. Zunächst haben wir das folgende Lemma:

Lemma 2: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene von Lenz Typ höchstens III.*

(a) *Sind $(a,u),(b,v) \in \mathfrak{F}_\pi \backslash \mathfrak{E}_\pi$ mit $(a,u) \neq (b,v)$, so ist $a \neq b$ und $u \neq v$. Weiter gilt genau dann $u \in b$ wenn $v \in a$ ist.*

(b) *Seien* $(a,u),(b,v) \in \mathfrak{F}_\pi \backslash \mathfrak{E}_\pi$ *mit* $(a,u) \neq (b,v)$ *und* $u \notin b$, $v \notin a$. *Setze* $z := a \wedge b$ *und* $l := u \vee v$. *Dann haben wir:*

1. *Ist* $z \notin l$, *so gibt es eine fixpunktfreie, involutorische Permutation* θ *von* l *mit* $\{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$.
2. *Ist* $z \in l$, *so existiert eine bijektive Abbildung* $\phi : l \backslash \{z\} \to \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$ *mit* $\{(p^\phi, p) : p \in l \backslash \{z\}\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$.

Beweis: Da eine projektive Ebene der Ordnung 2 desarguesch ist, und somit Lenz Typ VII hat, ist die Ordnung von π mindestens 3.
(a) $a \neq b$ und $u \neq v$ gilt aufgrund der obigen Tatsachen, da π weder eine Translationsachse noch eine duale Translationsachse besitzt. Für die zweite Aussage reicht es offenbar zu zeigen, daß $u \in b$ schon $v \in a$ impliziert. Sei also $u \in b$. Angenommen es wäre $v \notin a$. Dann setzen wir $l := u \vee v$ und wählen einen Punkt $v' \in l$ mit $v' \neq u, v, l \wedge a$. Da π (a,u) transitiv ist, gibt es eine Kollineation γ mit Zentrum u, Achse a und $v' = v^\gamma$. Wegen $u \in b$ ist $b^\gamma = b$, und es ist $(b,v') = (b,v)^\gamma \in \mathfrak{F}_\pi$; ein Widerspruch. Also ist tatsächlich $v \in a$.
(b) Wir beginnen mit dem Fall $z \notin l$. Sei $p \in l$. Wir zeigen, daß es ein $g \in \mathfrak{L}_z$ mit $p \notin g$ und $(g,p) \in \mathfrak{F}_\pi$ gibt. Für $p = u$ ist dies mit $g = a$ klar, d.h. wir können $p \neq u$ annehmen. Weiter sei zunächst auch $p \neq a \wedge l$, d.h. $p \notin a$. Dann existiert eine Kollineation γ von π mit Zentrum u, Achse a und $p = v^\gamma$, und damit ist $g := b^\gamma \in \mathfrak{L}_z$ mit $p \notin g$ und $(g,p) = (b,v)^\gamma \in \mathfrak{F}_\pi$. Es verbleibt nur noch der Fall $p = a \wedge l$. Dann ist $p \neq v$ und $p \notin b$. Also existiert eine Kollineation γ mit Zentrum v und Achse b so, daß $p = u^\gamma$ ist, und damit erfüllt $g := a^\gamma$ wieder $g \in \mathfrak{L}_z$, $p \notin g$ und $(g,p) \in \mathfrak{F}_\pi$.

Nach dieser Zwischenbehauptung existiert somit eine Abbildung $\phi : l \to \mathfrak{L}_z$ mit $(\phi(p),p) \in \mathfrak{F}_\pi$ und $p \notin \phi(p)$ für jedes $p \in l$. Definieren wir also

$$\theta : l \to l; p \mapsto \phi(p) \wedge l,$$

so ist für jeden Punkt $p \in l$ stets $p \neq p^\theta$ und $\phi(p) = z \vee p^\theta$ also $(z \vee p^\theta, p) = (\phi(p), p) \in \mathfrak{F}_\pi$. Sei $p \in l$. Dann sind $(z \vee p^\theta, p), (z \vee p^{\theta^2}, p^\theta) \in \mathfrak{F}_\pi \backslash \mathfrak{E}_\pi$ mit $p^\theta \in z \vee p^\theta$, und nach Teil (a) ist damit auch $p \in z \vee p^{\theta^2}$, d.h. $p^{\theta^2} = p$. Also ist θ involutorisch, und insbesondere bijektiv.

Damit ist dieser Fall vollständig behandelt und wir kommen jetzt zum Fall $z \in l$. Ist $p \in l \backslash \{z\}$, so finden wir wieder eine Kollineation γ mit Achse a, Zentrum u oder Achse b, Zentrum v, die v auf p oder u auf p abbildet, und dies ergibt wie oben, daß es eine Gerade $\phi(p) \in \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$ mit $(\phi(p),p) \in \mathfrak{F}_\pi$ gibt. Dual erhalten wir eine Abbbildung $\psi : \mathfrak{L}_z \backslash \{l\} \to l \backslash \{z\}$ mit $(g, \psi(g)) \in \mathfrak{F}_\pi$ für jedes $g \in \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$. Sei $p \in l \backslash \{z\}$. Dann ist $(\phi(p),p) \in \mathfrak{F}_\pi$ und $(\phi(p), \psi(\phi(p))) \in \mathfrak{F}_\pi$, und damit folgt $\psi(\phi(p)) = p$. Dual ergibt sich $\phi(\psi(g)) = g$ für jede Gerade $g \in \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$, d.h. ϕ ist bijektiv mit $\phi^{-1} = \psi$.

■

Wir wollen jetzt die Möglichkeiten für $\mathfrak{F}_\pi$ in den beiden Fällen von (b) des vorigen Lemmas bestimmen. Wir beginnen mit (1), und benötigen noch einen kleinen all-

gemeinen Begriff, der bisher nur in den Übungen zu diesem Skript diskutiert wurde.

Definition 2: Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Eine Polarität von π ist eine bijektive Abbildung $\psi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{L}$ für die $(\psi, \psi^{-1}) : \pi \to \pi^*$ ein Isomorphismus von π auf die duale Ebene π^* ist. Ein Punkt $p \in \mathfrak{P}$ heißt absoluter Punkt von ψ, wenn $p \in p^\psi$ ist. Dual heißt eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ absolute Gerade von π, wenn $l^\psi \in l$ ist, wobei wir l^ψ statt des eigentlich korrekten $\psi^{-1}(l)$ schreiben.

Lemma 3: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene von Lenz Typ höchstens III, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Es gebe einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$, eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin l$ und eine fixpunktfreie, involutorische Permutation $\theta : l \to l$ mit $\{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$. Dann gelten:*

(a) *Die Gruppe $\Gamma_{z,l}$ wirkt transitiv auf l und auf $\mathfrak{P}\backslash(l \cup \{z\})$.*

(b) *Entweder gilt*

$$\mathfrak{F}_\pi \subseteq \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \cup \{(l, z)\},$$

oder es existiert eine Polarität ψ von π ohne absolute Punkte für die

$$\mathfrak{F}_\pi = \{(p^\psi, p) : p \in \mathfrak{P}\}$$

gilt. Insbesondere ist π von Lenz Typ I.

Beweis: **(a)** Wir zeigen zuerst, daß $\Gamma_{z,l}$ transitiv auf l wirkt. Ist die Ordnung von π höchstens 3, so ist π desarguesch, wie in den Aufgaben zu §2 und §11 gezeigt wurde, und hat damit Lenz Typ VII, ein Widerspruch. Also hat π mindestens die Ordnung 4. Seien jetzt $p, q \in l$ gegeben. Wähle $r \in l$ mit $r \neq p, q, p^\theta, q^\theta$. Dann ist auch $r^\theta \neq p, q$ und somit $p, q \notin z \vee r^\theta$. Also existiert eine Kollineation $\gamma \in \Gamma_{[z \vee r^\theta, r]} \subseteq \Gamma_{z,l}$ mit $q = p^\gamma$.

Insbesondere wirkt $\Gamma_{z,l}$ auch transitiv auf $\mathfrak{L}_z$. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $\Gamma_{z,l,g}$ transitiv auf $g\backslash\{z, g \wedge l\}$ wirkt, wenn $g \in \mathfrak{L}_z$ ist. Sei also $g \in \mathfrak{L}_z$ gegeben. Seien $p, q \in g$ mit $p, q \neq z, g \wedge l =: r$. Wegen $r^\theta \neq r$ ist $g \neq z \vee r^\theta$ und somit $p, q \notin z \vee r^\theta$. Also existiert eine Kollineation $\gamma \in \Gamma_{[z \vee r^\theta, r]} \subseteq \Gamma_{z,l,g}$ mit $q = p^\gamma$.
(b) Wir betrachten zunächst den Fall $z^\Gamma \neq z$. Wir zeigen zuerst, daß Γ dann transitiv auf $\mathfrak{P}$ wirkt. Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $z' := z^\gamma \neq z$ und setze $l' := l^\gamma \in \mathfrak{L}$. Dann ist $z' \notin l'$. Wäre $l' = l$, so wählen wir ein $p \in l$ mit $z \vee p^\theta \neq z \vee z'$. Dann ist $(z \vee p^\theta, p) \in \mathfrak{F}_\pi$. Weiter ist $q := p^{\gamma^{-1}} \in l$, also $(z \vee q^\theta, q) \in \mathfrak{F}_\pi$, und somit auch $(z' \vee q^{\theta\gamma}, p) \in \mathfrak{F}_\pi$ und wegen $z' \notin z \vee p^\theta$ ist $z' \vee q^{\theta\gamma} \neq z \vee p^\theta$; ein Widerspruch. Also ist $l' \neq l$. Nach (a) ist l' in einer Bahn von Γ enthalten. Weiter sind auch l und $\mathfrak{P}\backslash(l \cup \{z\})$ nach (a) in Bahnen von Γ enthalten, und wegen $l \cap l' \neq \emptyset$ und $l' \cap (\mathfrak{P}\backslash(l \cup \{z\})) \neq \emptyset$ ist ganz $\mathfrak{P}\backslash\{z\}$ in einer Bahn von Γ enthalten. Da auch $z^\Gamma \neq z$ ist, folgt das Γ transitiv auf $\mathfrak{P}$ wirkt. Da auch $l^\gamma = l' \neq l$ ist, wirkt Γ dual auch auf $\mathfrak{L}$ transitiv.

Wegen $\mathfrak{F}_\pi\backslash\mathfrak{E}_\pi \neq \emptyset$ und da mit $\mathfrak{F}_\pi$ und $\mathfrak{E}_\pi$ auch $\mathfrak{F}_\pi\backslash\mathfrak{E}_\pi$ unter Γ invariant ist, folgt aus der Transitivität von Γ auf $\mathfrak{P}$ auch $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{F}_\pi\backslash\mathfrak{E}_\pi) = \mathfrak{P}$. Damit existiert eine Abbildung

$\psi : \mathfrak{P} \to \mathfrak{L}$ mit $p \notin p^\psi$ und $(p^\psi, p) \in \mathfrak{F}_\pi$ für jedes $p \in \mathfrak{P}$. Dual erhalten wir eine Abbildung $\psi' : \mathfrak{L} \to \mathfrak{P}$ mit $l^{\psi'} \notin l$ und $(l, l^{\psi'}) \in \mathfrak{F}_\pi$ für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}$.

Ist $p \in \mathfrak{P}$, so haben wir $(p^\psi, p) \in \mathfrak{F}_\pi$ und $(p^\psi, p^{\psi\psi'}) \in \mathfrak{F}_\pi$, und damit gilt $p^{\psi\psi'} = p$, d.h. $\psi\psi' = \mathrm{id}$. Dual folgt auch $\psi'\psi = \mathrm{id}$, d.h. ψ ist bijektiv mit $\psi^{-1} = \psi'$. Seien $p \in \mathfrak{P}$, $l \in \mathfrak{L}$ mit $p \in l$. Dann haben wir $(p^\psi, p), (l, l^{\psi^{-1}}) \in \mathfrak{F}_\pi$ und wegen $p \in l$ folgt mit Lemma 2.(a) auch $l^{\psi^{-1}} \in p^\psi$. Damit ist $\psi : \pi \to \pi^*$ ein Isomorphismus, d.h. ψ ist eine Polarität ohne absolute Punkte mit $\{(p^\psi, p) : p \in \mathfrak{P}\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$. Ist $(a, z) \in \mathfrak{F}_\pi$ beliebig, so ist auch $(z^\psi, z) \in \mathfrak{F}_\pi$, und es folgt $a = z^\psi$. Damit ist $\mathfrak{F}_\pi = \{(p^\psi, p) : p \in \mathfrak{P}\}$.

Damit ist der Fall $z^\Gamma \neq z$ vollständig behandelt, und wir betrachten jetzt $z^\Gamma = z$. Dann gilt auch $l^\Gamma = l$ wie oben gezeigt. Wir zeigen jetzt $\mathfrak{F}_\pi \subseteq \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \cup \{(l, z)\}$. Sei also $(a, u) \in \mathfrak{F}_\pi$ gegeben. Da die Ordnung von π mindestens 3 ist, existiert dann ein $1 \neq \gamma \in \Gamma_{[a,u]}$. Nach §5.Lemma 4 ist dann $z \in \mathrm{Fix}_\mathfrak{P}\,\gamma = a \cup \{u\}$ und $l \in \mathrm{Fix}_\mathfrak{L}\,\gamma = \mathfrak{L}_u \cup \{l\}$. Wir betrachten zuerst den Fall $z = u$. Wäre dann $a \in \mathfrak{L}_u = \mathfrak{L}_z$, so setzen wir $p := (l \wedge a)^\theta \in l$ und wegen $z \vee p^\theta = z \vee (l \wedge a) = a$ ist $(a, p), (a, z) \in \mathfrak{F}_\pi$, d.h. $p = z$; ein Widerspruch. Also ist auch $a = l$. Damit kommen wir zum Fall $u \neq z$, d.h. $z \in a$. Setzen wir wieder $p := (l \wedge a)^\theta \in l$, so ist $z \vee p^\theta = a$ und $(a, p) \in \mathfrak{F}_\pi$, d.h. $z = p$ und $(a, z) = (z \vee p^\theta, p)$.

■

Der andere Fall in Lemma 2.(b) ist leichter zu behandeln, er führt nur auf zwei Möglichkeiten für die Lenz-Barlotti Figur.

Lemma 4: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene von Lenz Typ höchstens III, und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Es gebe $z \in l \in \mathfrak{L}$ und eine bijektive Abbildung $\phi : l\backslash\{z\} \to \mathfrak{L}_z\backslash\{l\}$ mit $\{(p^\phi, p) : p \in l\backslash\{z\}\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$. Dann ist $z^\Gamma = z$, $l^\Gamma = l$, Γ wirkt zweifach transitiv auf $l\backslash\{z\}$ und $\mathfrak{L}_z\backslash\{l\}$ und transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash l$ und $\mathfrak{L}\backslash\mathfrak{L}_z$. Weiter ist*

$$\mathfrak{F}_\pi \subseteq \{(p^\phi, p) : p \in l\backslash\{z\}\} \cup \{(l, z)\},$$

und insbesondere ist π von Lenz Typ höchstens II.

Beweis: In den Aufgaben zu §11 wurde gezeigt, daß eine Ebene der Ordnung ≤ 4 desarguesch ist, d.h. π muß mindestens die Ordnung 5 haben. Insbesondere ist $|l\backslash\{z\}| \geq 3$. Sei $p \in l\backslash\{z\}$. Da $(p^\phi, p) \in \mathfrak{F}_\pi$ ist, wirkt $\Gamma_{[p^\phi,p]} \subseteq \Gamma_{l,z,p}$ transitiv auf $l\backslash\{z, p\}$. Also wirkt $\Gamma_{l,z}$ zweifach transitiv auf $l\backslash\{z\}$ und dual auch auf $\mathfrak{L}_z\backslash\{l\}$.

Sei $g \in \mathfrak{L}_z\backslash\{l\}$. Wir zeigen, daß $\Gamma_{l,z,g}$ transitiv auf $g\backslash\{z\}$ wirkt. Sei $p \in g\backslash\{z\}$. Sei B die Bahn von p in $g\backslash\{z\}$ unter $\Gamma_{l,z,g}$. Wir zeigen, daß dann $|(g\backslash\{z\})\backslash B| \leq 2$ gilt. Wähle $u \in l$ mit $u \neq z, \phi^{-1}(g)$. Dann ist $p \vee u \neq l, g$ sowie $z \notin p \vee u$ und wir wählen ein $s \in p \vee u$ mit $s \neq p, u, \phi(u) \wedge (p \vee u)$, d.h. $s \notin l, g, \phi(u)$. Die Abbildung $\beta : l \to g; x \mapsto (x \vee s) \wedge g$ ist bijektiv mit $\beta(z) = z$. Setze $h := z \vee s \in \mathfrak{L}_z\backslash\{l, g\}$. Wir zeigen, daß dann $\beta(l\backslash\{z, \phi^{-1}(g), \phi^{-1}(h)\}) \subseteq B$ gilt. Sei also $q \in \beta(l\backslash\{z, \phi^{-1}(g), \phi^{-1}(h)\})$ gegeben. Sei $v \in l$ mit $v \neq z, \phi^{-1}(g), \phi^{-1}(h)$ mit $q = (v \vee s) \wedge g$. Dann ist $\phi(u), \phi(v) \neq g$ also $p, q \notin \phi(u), \phi(v)$. Wegen $(\phi(u), u) \in \mathfrak{F}_\pi$ existiert ein $\gamma \in \Gamma_{[\phi(u),u]} \subseteq \Gamma_{l,z}$ mit $p^\gamma = s$. Wäre $s \in \phi(v)$, so hätten wir $\phi(v) = z \vee s = h$, d.h. es ist $s \notin \phi(v)$. Also existiert auch ein $\delta \in \Gamma_{[\phi(v),v]} \subseteq \Gamma_{l,z}$ mit $q = s^\delta$. Es folgt $\gamma\delta \in \Gamma_{l,z}$ und $p^{\gamma\delta} = q$ und damit auch

$g^{\gamma\delta} = g$. Dies zeigt $|(l\backslash\{z\})\backslash B| \leq |(l\backslash\{\beta(z)\})\backslash\beta(l\backslash\{z, \phi^{-1}(g), \phi^{-1}(h)\})| \leq 2$. Wegen $|l\backslash\{z\}| \geq 5$ ist $\Gamma_{l,z,g}$ transitiv auf g, dies ist eine leichte Übungsaufgabe zu diesem Paragraphen. Insgesamt ist $\Gamma_{l,z}$ somit transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash l$.

Es bezeichne jetzt M die Menge aller Paare $(z', l') \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$ mit $z' \in l'$ für die es eine Bijektion $\phi' : l'\backslash\{z'\} \to \mathfrak{L}_{z'}\backslash\{l'\}$ mit $\{(p^{\phi'}, p) : p \in l'\backslash\{z'\}\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$ gibt. Dann ist $(z, l) \in M$ und M ist invariant unter Γ. Seien $(p, a), (q, b) \in M$ mit $p \neq q$ gegeben. Wäre $a = b$, so wählen wir einen Punkt $r \in a$ mit $r \neq p, q$ und es gibt Geraden $m \in \mathfrak{L}_p\backslash\{a\}$, $n \in \mathfrak{L}_q\backslash\{a\}$ mit $(m, r), (n, r) \in \mathfrak{F}_\pi$. Es folgt $m = n \in \mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q = \{a\}$; ein Widerspruch. Also ist $a \neq b$. Jetzt zeigen wir, daß auch $q \notin a$ gilt. Angenommen es wäre $q \in a$. Wegen $a \neq b$ gibt es dann ein $r \in b\backslash\{q\}$ mit $(a, r) \in \mathfrak{F}_\pi$, und wegen $r \neq q = a \wedge b$ ist $r \neq p$. Da die Ordnung von π mindestens 3 ist, gibt es damit ein $1 \neq \gamma \in \Gamma_{[a,r]}$. Wähle ein $g \in \mathfrak{L}_p\backslash\{a, p \vee r\}$. Dann ist $g \notin \mathfrak{L}_r$ und $g \neq a$ also $g^\gamma \neq g$ nach §5.Lemma 4. Weiter existiert ein $s \in a\backslash\{p\}$ mit $(g, s) \in \mathfrak{F}_\pi$, und damit ist auch $(g^\gamma, s) \in \mathfrak{F}_\pi$; ein Widerspruch. Dies zeigt $q \notin a$ und analog folgt $p \notin b$.

Angenommen es wäre $M \not\subseteq \{z\} \times \mathfrak{L}$. Dann gibt es ein $(p, a) \in M$ mit $p \neq z$. Es folgt $p \notin l$. Wähle ein $q \in a$ mit $q \neq p, l \wedge a$. Dann ist $q \notin l$ und da $\Gamma_{l,z}$ transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash l$ wirkt gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $q = p^\gamma$. Also ist auch $(q, a^\gamma) \in M$; im Widerspruch zu $p \neq q \in a$. Dies zeigt $M \subseteq \{z\} \times \mathfrak{L}$ und dual folgt $M \subseteq \mathfrak{P} \times \{l\}$, d.h. $M = \{(z, l)\}$. Da M unter Γ invariant ist, zeigt dies auch $z^\Gamma = z$ und $l^\Gamma = l$.

Es verbleibt nur noch die Aussage über $\mathfrak{F}_\pi$ einzusehen. Sei also $(a, u) \in \mathfrak{F}_\pi$ gegeben. Dann existiert wieder ein $1 \neq \gamma \in \Gamma_{[a,u]}$. Nach §5.Lemma 4 ist $z \in \mathrm{Fix}_\mathfrak{P}\,\gamma = a \cup \{u\}$ und ebenso $l \in \mathfrak{L}_u \cup \{a\}$. Wir beginnen mit dem Fall $z = u$. Angenommen es wäre $l \neq a$. Ist sogar $z \notin a$, so gibt es $\delta \in \Gamma$ mit $a^\delta \neq a$, da Γ transitiv auf $\mathfrak{L}\backslash\mathfrak{L}_z$ wirkt, und es ist auch $(a^\delta, z) \in \mathfrak{F}_\pi$; ein Widerspruch. Also ist $z \in a$. Wegen $a \neq l$ folgt mit der Transitivität von Γ auf $\mathfrak{L}_z\backslash\{l\}$ auch $(g, z) \in \mathfrak{F}_\pi$ für jedes $g \in \mathfrak{L}_z\backslash\{l\}$, d.h. π ist von Lenz Typ mindestens IVb; ein Widerspruch. Dies zeigt $a = l$.

Also folgt aus $u = z$ schon $(a, u) = (l, z)$. Dual impliziert $a = l$ auch $(a, u) = (l, z)$. Es verbleibt der Fall $z \neq u$, $l \neq a$. Dann ist $z \in a$ und $u \in l$. Wegen $u \neq z$ ist auch $(u^\phi, u) \in \mathfrak{F}_\pi$, also $a = u^\phi$.

■

Wir behandeln jetzt den Fall, daß π eine Translationsebene aber keine Moufang Ebene ist. Anders gesagt soll π von Lenz Typ IVa oder Lenz Typ V sein.

Lemma 5: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene, die eine Translationsachse $a \in \mathfrak{L}$ besitzt, aber keine Moufang Ebene ist. Es gebe $(l, z) \in \mathfrak{F}_\pi\backslash\mathfrak{E}_\pi$. Dann ist $z \in a$ und $l \neq a$. Setzen wir $v := l \wedge a$, so ist entweder*

$$\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup (\mathfrak{L}_v \times \{z\}) \cup (\mathfrak{L}_z \times \{v\}),$$

oder es gibt eine fixpunktfreie, involutorische Bijektion $\theta : a \to a$ mit

$$\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup \bigcup_{p \in a} \mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\}.$$

Insbesondere ist π von Lenz Typ IVa.

Beweis: Da π nicht desarguesch ist, ist die Ordnung von π mindestens 3. Setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$. Nach §13.Korollar 5 ist $a^\Gamma = a$. Sei wieder $1 \neq \gamma \in \Gamma_{[l,z]}$. Nach §5.Lemma 4 ist $a \in \mathrm{Fix}_{\mathfrak{L}}\,\gamma = \mathfrak{L}_z \cup \{a\}$. Wäre $l = a$, so wäre π nach §7.Satz 14 desarguesch, d.h. es ist $l \neq a$. Damit folgt $z \in a$. Mit §11.Lemma 1 folgt $\mathfrak{L}_v \times \{z\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$, und §11.Korollar 5 ergibt auch $\mathfrak{L}_z \times \{v\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$.

Wäre $\mathfrak{E}_\pi \neq \{a\} \times a$, so wäre π von Lenz Typ V, und es gäbe eine duale Translationsachse $u \in a$. Dual zu oben folgte dann $\mathfrak{L}_v \backslash \{a\}, \mathfrak{L}_z \backslash \{a\} \subseteq \mathfrak{L}_u$, d.h. $z = v = u$; ein Widerspruch. Also ist π von Lenz Typ IVa, und es gilt $\mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$. Ist nun

$$\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup (\mathfrak{L}_v \times \{z\}) \cup (\mathfrak{L}_z \times \{v\}),$$

so sind wir fertig, d.h. wir können im folgenden annehmen, daß es ein weiteres $(g, w) \in \mathfrak{F}_\pi$ außerhalb dieser Menge gibt. Dann ist $(g, w) \notin \{a\} \times a = \mathfrak{E}_\pi$, d.h. $w \notin g$. Also haben wir $w \in a$, $g \neq a$ und mit $r := g \wedge a$ ist $\mathfrak{L}_w \times \{r\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$ und $\mathfrak{L}_r \times \{w\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$. Wäre $w = v$, so ist $g \notin \mathfrak{L}_z$ also $r \neq z$. Wähle $o \in \mathfrak{P} \backslash a$ und setze $h := o \vee z$, $h' := o \vee r$. Dann ist $h \neq h'$ und $(h, v), (h', v) \in \mathfrak{F}_\pi$. Nach §11.Lemma 1 ist damit auch $(o \vee v, v) \in \mathfrak{F}_\pi$, d.h. $(o \vee v, v) \in \mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$; ein Widerspruch. Dies zeigt $w \neq v$ und analog folgen $w \neq z$ und $r \neq z, v$.

Wir zeigen jetzt, daß Γ transitiv auf a wirkt. Zunächst ist $\Gamma_{[l,z]}$ transitiv auf $a \backslash \{z, v\}$, d.h. $a \backslash \{z, v\}$ ist in einer Bahn von Γ auf a enthalten. Wegen $(g, w) \in \mathfrak{F}_\pi$ ist $\Gamma_{[g,w]}$ transitiv auf $a \backslash \{w, r\}$, d.h. auch $a \backslash \{w, r\}$ ist in einer Bahn enthalten. Da eine projektive Ebene der Ordnung 2 oder 3 desarguesch ist, hat π mindestens die Ordnung 4, und damit existiert $x \in a$ mit $x \neq z, v, w, r$. Wegen $x, z, v \in a \backslash \{w, r\}$ und $x, w, r \in a \backslash \{z, v\}$ ist $a = x^\Gamma$, d.h. Γ wirkt transitiv auf a.

Insbesondere existiert eine Abbildung $\theta : a \to a$ mit $p^\theta \neq p$ und $\mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$ für jedes $p \in a$. Wir zeigen jetzt

$$\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup \bigcup_{p \in a} \mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\}.$$

Daß die angegebene Menge in $\mathfrak{F}_\pi$ enthalten ist, ist klar. Sei jetzt $(h, u) \in \mathfrak{F}_\pi$. Ist $u \in h$, so $(h, u) \in \mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$. Andernfalls ist $u \notin h$, und es folgen wieder $u \in a$, $h \neq a$. Setze $p := h \wedge a \neq u$. Angenommen es wäre $u \neq p^\theta$. Dann ist $(h, u), (h, p^\theta) \in \mathfrak{F}_\pi$, und mit §11.Lemma 1 folgt wieder $(h, p) \in \mathfrak{E}_\pi = \{a\} \times a$; ein Widerspruch. Also ist $u = p^\theta$ und $(h, u) \in \mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\}$.

Sei $p \in a$. Wegen $\mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$, folgt nach §11.Korollar 5 wieder $\mathfrak{L}_{p^\theta} \times \{p\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$, und die obige Formel für $\mathfrak{F}_\pi$ liefert $p^{\theta\theta} = p$. Also ist θ involutorisch, und insbesondere bijektiv.

■

Damit haben wir alle Hilfslemmata beisammen, um den eigentlichen Satz über die Lenz-Barlotti Klassifikation zu beweisen. Dieser listet alle Möglichkeiten für die Struktur der Lenz-Barlotti Figur $\mathfrak{F}_\pi$ eine projektiven Ebene π auf. Wie schon oben bemerkt, wird dabei jeder Lenz Typ in einen oder mehrere Lenz-Barlotti Typen aufgeteilt. Für

jeden Lenz Typ X numerieren wir die möglichen Lenz-Barlotti Typen durch, und schreiben sie in der Form $X.i$ mit einem laufenden Index i.

Satz 6: *Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(I.1) *Es ist $\mathfrak{F}_\pi = \emptyset$.*

(I.2) *Es gibt $a \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{P}$ mit $z \notin a$ und $\mathfrak{F}_\pi = \{(a, z)\}$.*

(I.3) *Es gibt $v \in a \in \mathfrak{L}$, $u \in b \in \mathfrak{L}$ mit $v \notin b$, $u \notin a$ und $\mathfrak{F}_\pi = \{(a, u), (b, v)\}$.*

(I.4) *Es gibt drei nicht kollineare Punkte $u, v, w \in \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(v \vee w, u), (u \vee w, v), (u \vee v, w)\}$.*

(I.5) *Es gibt eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$, einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$ mit $z \notin l$ und eine fixpunktfreie, involutorische Permutation θ von l mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\}$.*

(I.6) *Es gibt $z \in l \in \mathfrak{L}$ und eine bijektive Abbildung $\phi : l \backslash \{z\} \to \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(p^\phi, p) : p \in l \backslash \{z\}\}$.*

(I.7) *Es gibt eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$, einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$ mit $z \notin l$ und eine fixpunktfreie, involutorische Permutation θ von l mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \cup \{(l, z)\}$.*

(I.8) *Es gibt eine Polarität ψ von π ohne absolute Punkte mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(p^\psi, p) : p \in \mathfrak{P}\}$.*

(II.1) *Es gibt $z \in a \in \mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(a, z)\}$.*

(II.2) *Es gibt eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$, zwei Punkte $z, u \in a$ mit $z \neq u$ und ein $b \in \mathfrak{L}_z \backslash \{a\}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(a, z), (b, u)\}$.*

(II.3) *Es gibt $z \in l \in \mathfrak{L}$ und eine bijektive Abbildung $\phi : l \backslash \{z\} \to \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(p^\phi, p) : p \in l \backslash \{z\}\} \cup \{(l, z)\}$.*

(III.1) *Es gibt einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$ und eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin l$ und $\mathfrak{F}_\pi = \{(p \vee z, p) : p \in l\}$.*

(III.2) *Es gibt einen Punkt $z \in \mathfrak{P}$ und eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin l$ und $\mathfrak{F}_\pi = \{(p \vee z, p) : p \in l\} \cup \{(l, z)\}$.*

(IVa.1) *Es gibt $a \in \mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \{a\} \times a$.*

(IVa.2) *Es gibt $a \in \mathfrak{L}$ und $u, v \in a$ mit $u \neq v$ und $\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup (\mathfrak{L}_u \times \{v\}) \cup (\mathfrak{L}_v \times \{u\})$.*

(IVa.3) *Es gibt eine Gerade $a \in \mathfrak{L}$ und eine fixpunktfreie, involutorische Permutation θ von a mit $\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup \bigcup_{p \in a} \mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\}$.*

(IVb.1) *Es gibt $z \in \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{F}_\pi = \mathfrak{L}_z \times \{z\}$.*

(IVb.2) *Es gibt* $z \in \mathfrak{P}$ *und* $a, b \in \mathfrak{L}_z$ *mit* $a \neq b$ *und* $\mathfrak{F}_\pi = (\mathfrak{L}_z \times \{z\}) \cup (\{b\} \times a) \cup (\{a\} \times b)$.

(IVb.3) *Es gibt einen Punkt* $z \in \mathfrak{P}$ *und eine fixpunktfreie, involutorische Permutation* θ *von* $\mathfrak{L}_z$ *mit* $\mathfrak{F}_\pi = (\mathfrak{L}_z \times \{z\}) \cup \bigcup_{l \in \mathfrak{L}_z} \{l^\theta\} \times l$.

(V) *Es gibt* $z \in a \in \mathfrak{L}$ *mit* $\mathfrak{F}_\pi = (\{a\} \times a) \cup (\mathfrak{L}_z \times \{z\})$.

(VII.1) *Es ist* $\mathfrak{F}_\pi = \{(a, z) : z \in a \in \mathfrak{L}\}$.

(VII.2) *Es ist* $\mathfrak{F}_\pi = \mathfrak{L} \times \mathfrak{P}$.

Beweis: Für jeden der sieben möglichen Lenz Typen schließen sich die angegebenen Fälle offenbar gegenseitig aus. Es ist also nur zu zeigen, daß stets einer dieser Fälle eintritt. Wir setzen $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$, $\mathfrak{E} := \mathfrak{E}_\pi$, $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_\pi$ und $\mathfrak{F}^* := \mathfrak{F}_\pi \backslash \mathfrak{E}_\pi$. Da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ unter Γ invariant sind, ist auch $\mathfrak{F}^*$ unter Γ invariant. Wir machen eine Fallunterscheidung, und für jeden unserer Fälle soll implizit angenommen werden, daß keiner der vorher schon behandelten Fälle vorliegt.

Fall 1: Ist $\mathfrak{F}^* = \emptyset$, so ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$, und wir sind nach §7.Satz 4 und §13.Korollar 4 in einem der Fälle $I.1$, $II.1$, $III.1$, $IVa.1$, $IVb.1$, V oder $VII.1$.

Fall 2: π sei höchstens von Lenz Typ III, und es gelte $|\mathfrak{F}^*| = 1$. Seien $a \in \mathfrak{L}$, $u \in \mathfrak{P}$ mit $u \notin a$ und $\mathfrak{F}^* = \{(a, u)\}$. Ist π von Lenz Typ I, so ist $\mathfrak{E} = \emptyset$, und wir sind im Fall $I.2$. Also sei jetzt $\mathfrak{E} \neq \emptyset$. Ist $(l, z) \in \mathfrak{E}$, so sind a und u invariant unter Γ also auch unter $\Gamma_{[l,z]} \neq 1$, und es folgt $u \in l$, $z \in a$. Insbesondere ist $a \neq l$ und $z \neq u$. Hat π Lenz Typ II, so haben wir damit den Fall II.2, d.h. wir können im folgenden annehmen, daß π Lenz Typ III hat. Es gibt also eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$ und ein $z \in \mathfrak{P} \backslash l$ mit $\mathfrak{E} = \{(p \vee z, p) : p \in l\}$. Es folgt $z = u$ und $l = a$, und wir sind in Fall $III.2$.

Fall 3: Jetzt sei π von Lenz Typ höchstens III und es gebe $(a, u), (b, v) \in \mathfrak{F}^*$ mit $(a, u) \neq (b, v)$ und $u \notin b$ oder $v \notin a$. Nach Lemma 2.(a) ist dann $u \notin b$ und $v \notin a$. Setze $z := a \wedge b$ und $l := u \vee v$. Wir unterscheiden zwei Unterfälle.

Fall A: Sei $z \notin l$. Nach Lemma 2.(b) gibt es eine fixpunktfreie, involutorische Permutation θ von l mit $\{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \subseteq \mathfrak{F}$. Ist $\mathfrak{F} \subseteq \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \cup \{(l, z)\}$, so gilt $\mathfrak{F} = \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\}$ und wir sind in Fall $I.5$, oder $\mathfrak{F} = \{(z \vee p^\theta, p) : p \in l\} \cup \{(l, z)\}$ und wir haben Fall $I.7$. Andernfalls gibt es nach Lemma 3.(b) eine Polarität ψ von π ohne absolute Punkte mit $\mathfrak{F} = \{(p^\psi, p) : p \in \mathfrak{P}\}$, und wir haben Fall $I.8$.

Fall B: Sei $z \in l$. Nach Lemma 2.(b) existiert eine bijektive Abbildung $\phi : l \backslash \{z\} \to \mathfrak{L}_z \backslash \{l\}$ mit $\{(p^\phi, p) : p \in l \backslash \{z\}\} \subseteq \mathfrak{F}$. Nach Lemma 4 liegt dann einer der Fälle $I.6$ oder $II.3$ vor.

Fall 4: Jetzt nehmen wir nur noch an, daß π Lenz Typ höchstens III hat. Da wir in keinem der obigen Fälle sind, ist $|\mathfrak{F}^*| \geq 2$ und für $(a, u), (b, v) \in \mathfrak{F}^*$ mit $(a, u) \neq (b, v)$ gilt stets $u \in b$ und $v \in a$, und nach Lemma 2.(a) ist auch $a \neq b$, $u \neq v$. Wähle $(a, u), (b, v) \in \mathfrak{F}^*$ mit $(a, u) \neq (b, v)$. Wir zeigen jetzt $\mathfrak{E} = \emptyset$. Angenommen es gäbe $(c, z) \in \mathfrak{E}$. Wäre $z = u$, so wäre $(a \wedge c) \vee u$ wieder nach §11.Lemma 1 und §11.Korollar 5 eine Translationsachse, und π wäre von Lenz Typ mindestens IVa; ein Widerspruch.

Also ist $z \neq u$ und analog $z \neq v$. Dual folgt $c \neq a, b$. Wäre $\mathfrak{E} = \{(c, z)\}$, so hätten wir $c^\Gamma = c$ und $z^\Gamma = z$, und da die Ordnung von π mindestens 3 ist, ist $\Gamma_{[a,u]} \neq 1$ und $\Gamma_{[b,v]} \neq 1$, und damit folgen $z = a \wedge b$ und $c = u \vee v$. Somit ist $a \wedge b \in u \vee v$, und es folgt $a = b$; ein Widerspruch.

Also ist π von Lenz Typ III, d.h. es existieren $z \in \mathfrak{P}$, $l \in \mathfrak{L}$ mit $z \notin l$ und $\mathfrak{E} = \{(p \vee z, p) : p \in l\}$. Insbesondere ist $z^\Gamma = z$, $l^\Gamma = l$ und $u, v \notin l$, $z \notin a, b$. Es folgt $a = l = b$; erneut ein Widerspruch.

Also ist tatsächlich $\mathfrak{E} = \emptyset$ und somit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Ist $\mathfrak{F} = \{(a, u), (b, v)\}$, so haben wir Fall $I.3$. Ist $(c, w) \in \mathfrak{F}$ mit $(c, w) \neq (a, u), (b, v)$, so folgen $w \in a, b$ und $u, v \in c$, d.h. $w = a \wedge b$ und $c = u \vee v$. Weiter folgen $a = v \vee w$ und $b = u \vee w$. Wegen $a \neq b$ sind u, v, w insbesondere nicht kollinear. Damit haben wir $\mathfrak{F} = \{(u \vee v, w), (v \vee w, u), (u \vee w, v)\}$ eingesehen, und es liegt Fall $I.4$ vor.

Fall 5: Nun habe π einen der beiden Lenz Typen IVa oder V. Dann ist π keine Moufang Ebene und besitzt eine Translationsachse a. Wegen $\mathfrak{F}^* \neq \emptyset$ gibt es $(l, z) \in \mathfrak{F}^*$. Nach Lemma 5 sind wir in einem der beiden Fälle $IVa.2$ oder $IVa.3$.

Fall 6: Hat π den Lenz Typ IVb, so hat π^* Lenz Typ IVa, d.h. π^* erfüllt eine der Aussagen $IVa.2$ oder $IVa.3$, und somit gilt in π $IVb.2$ oder $IVb.3$.

Fall 7: Im letzten verbleibenden Fall hat π den Lenz Typ VII, d.h. π ist eine Moufang Ebene. Wegen $\mathfrak{F}^* \neq \emptyset$ gibt es $(a, z) \in \mathfrak{F}^*$, und da a eine Translationsachse ist, ist π nach §7.Satz 14 desarguesch, und insbesondere gilt $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \times \mathfrak{P}$, d.h. $VII.2$ liegt vor.

■

Bei der Lenz Klassifikation in §7 hatten wir erst in §13 eingesehen, daß zwei der zunächst möglichen Lenz Typen tatsächlich gar nicht vorkommen. Auch unsere eben bewiesene Lenz-Barlotti Klassifikation enthält noch einige Möglichkeiten, die gar nicht existieren. Es handelt sich hierbei um die Typen $I.5$, $I.7$, $I.8$, $II.3$. Alle anderen Lenz-Barlotti Typen bis auf eventuell $I.6$ existieren tatsächlich. Die Frage ob es projektive Ebenen vom Lenz-Barlotti Typ $I.6$ gibt, scheint offen zu sein.

Herausheben sollte man noch den Typ $IVa.3$, beziehungsweise dual dazu $IVb.3$. Es gibt bis auf Isomorphie genau eine projektive Ebene von Lenz-Barlotti Typ $IVa.3$ nämlich die nicht-desarguesche Translationsebene der Ordnung 9 aus §9.Satz 32. Nach §11.Satz 4 werden die projektiven Ebenen von Lenz-Barlotti Typ mindestens $IVa.2$ durch Fastkörper koordinatisiert, und die Ebene von Typ $IVa.3$ ist eine spezielle Fastkörperebene. All diese Dinge werden in den Aufgaben zu diesem Paragraphen behandelt.

Wir wollen hier keine weiteren Details mehr vorführen, sondern nur noch wie in §7 eine Übersicht über die Lenz-Barlotti Klassifikation der Translationsebenen in Form einer Tabelle angeben.

Typ	Bedeutung	Koordinatisierung
$IVa.1$	Translationsebene	Quasikörper
$IVa.2$	Translationsebene mit transitiven Gruppen von Homologien zu zwei Zentren auf der Translationsachse.	Fastkörper
$IVa.3$	Die nicht desarguesche Translationsebene der Ordnung 9.	Spezieller Fastkörper
V	Es gibt eine Gerade a und einen Punkt $z \in a$ so, daß π sowohl Translationsebene zur Translationsachse a, als auch duale Translationsebene zur dualen Translationsachse z ist.	Semikörper
$VII.1$	Moufang Ebenen	Alternativkörper
$VII.2$	Desarguesche Ebenen	Schiefkörper

Aufgaben zu §14

(187) Sei π eine projektive Ebene von Lenz-Barlotti $I.8$, und bezeichne ψ die Polarität mit $\mathfrak{F}_\pi = \{(p^\psi, p) : p \in \mathfrak{P}\}$. Zeigen Sie, daß $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ transitiv auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{L}$ wirkt, und das $\psi\gamma = \gamma\psi$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt.

(188) Die Gruppe G wirke auf der Menge Ω. Sei $k \in \mathbb{N}$ und für jede Bahn B von G auf Ω gelte $|\Omega\backslash B| \leq k$. Ist dann $|\Omega| \geq 2k+1$, so wirkt G transitiv auf Ω.

(189) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine projektive Ebene von Lenz-Barlotti Typ $IVa.3$. Seien a die Translationsachse von π und θ die fixpunktfreie, involutorische Permutation von a mit $\mathfrak{F} = \{a\} \times a \cup \bigcup_{p \in a} \mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\}$. Zeigen Sie, daß $\Gamma := \mathrm{Aut}(\pi)$ transitiv auf $\mathfrak{P}\backslash a$, a und $\mathfrak{L}\backslash\{a\}$ wirkt. Weiter ist $\gamma\theta = \theta\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$, und ist $p \in a$, so wirkt Γ_p transitiv auf $a\backslash\{p, p^\theta\}$.

(190) Seien K ein Schiefkörper, V ein Vektorraum über K und $\mathfrak{S}$ ein Spread in V. Sei α eine involutorische Homologie der projektiven Ebene $\overline{\pi(\mathfrak{S})}$ mit Achse $U \in \mathfrak{S}$ und einem Zentrum z auf der Ferngeraden von $\overline{\pi(\mathfrak{S})}$. Dann ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, und es ist $0 \vee z = \mathrm{Neg}(\alpha) = \{v \in V : v^\alpha = -v\} \in \mathfrak{S}$.

(191) Seien $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine Translationsebene mit Translationsachse $a \in \mathfrak{L}$, $l \in \mathfrak{L}$ mit $l \neq a$ und $z \in a$ mit $z \notin l$. Dann existiert höchstens eine involutorische Homologie von π mit Zentrum z und Achse l.

(192) Sei K ein Fastkörper. Dann gilt $-a = (-1)a = a(-1)$ für jedes $a \in K$, und es ist $(-a)^{-1} = -a^{-1}$ für $a \in K\backslash\{0\}$.

(193) Seien K ein Fastkörper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $a \in K\backslash\{0\}$. Dann ist die Abbildung $(x, y) \mapsto (a^{-1}y, ax)$ eine involutorische Homologie von $P(K)$ mit Achse $[a, 0]$ und Zentrum $(-a)$.

(194) Sei $\pi = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ eine Translationsebene mit Translationsachse $a \in \mathfrak{L}$, und seien $u, v \in a$ mit $u \neq v$ und $\mathfrak{L}_u \times \{v\} \cup \mathfrak{L}_v \times \{u\} \subseteq \mathfrak{F}_\pi$. Ist dann $l \in \mathfrak{L}\backslash\{a\}$ mit $l \wedge a \neq u, v$ existiert eine involutorische Kollineation mit Achse l und Zentrum auf a, die u und v vertauscht.

(195) Sei K ein Fastkörper. Es gebe eine fixpunktfreie, involutorische Permutation θ von $[\infty]$ mit

$$\mathfrak{F}_{P(K)} = \{[\infty]\} \times [\infty] \cup \bigcup_{p \in [\infty]} \mathfrak{L}_p \times \{p^\theta\}.$$

Dann existiert für jede Gerade $l \in \mathfrak{L}\backslash\{[\infty]\}$ genau eine involutorische Homologie α mit Achse l, und das Zentrum dieser Homologie ist dann $(l \wedge a)^\theta$.
Weiter ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $(0)^\theta = (\infty)$, $(\infty)^\theta = (0)$ und $(s)^\theta = (-s)$ für jedes $s \in K\backslash\{0\}$.

(196) Seien K, θ wie in Aufgabe (195). Dann gilt $a^2 = -1$ für jedes $a \in K\backslash\{0, 1, -1\}$. Die multiplikative Gruppe K^* von K enthält genau eine Involution und es ist $a^4 = 1$ für jedes $a \in K\backslash\{0\}$.

(197) Sei G eine Gruppe, die genau eine Involution enthält und in der $a^4 = 1$ für jedes $a \in G$ gilt. Dann ist $G \simeq \mathbb{Z}_2$ oder $G \simeq \mathbb{Z}_4$ oder $G \simeq Q$ ist isomorph zur Quaternionengruppe der Ordnung 8.

(198) Sei H der Quasikörper aus Aufgabe (93) über GF(3) zum Polynom $f(x) = x^2 + 1$. Dann ist H ein Fastkörper der Ordnung 9, aber kein Schiefkörper. Weiter ist $a^2 = -1$ für jedes $a \in H\backslash\{0, 1, -1\}$.

(199) Sei H wie in Aufgabe (198) und setze $\Gamma := \mathrm{Aut}(P(H))$. Dann ist $P(H)$ isomorph zur Translationsebene aus §9.Satz 32. Weiter definiert

$$\alpha : H \times H \to H \times H; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

eine Kollineation von $P(H)$ mit $(0)^\alpha = (1)$, $(1)^\alpha = (0)$, $(-1)^\alpha = (\infty)$ und $(\infty)^\alpha = (-1)$, und Γ wirkt transitiv auf $[\infty]$. Die Ebene $P(H)$ ist vom Lenz-Barlotti Typ $IVa.3$.

(200) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine projektive Ebene von Lenz-Barlotti Typ $IVa.3$, nämlich die nicht-desarguesche Translationsebene der Ordnung 9 aus §9.Satz 32.