Differentialgeometrie

Vorlesung von Prof. Dr. C. Bär
Universität Potsdam
Sommersemester 2006

Stand vom 24. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Mannigfaltigkeiten **1**

1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten 1

1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 8

1.3 Tangentialvektoren 12

1.4 Richtungsableitungen und Derivationen 16

1.5 Vektorfelder 21

2 Semi-riemannsche Geometrie **25**

2.1 Bilinearformen 25

2.2 Semi-riemannsche Metriken 27

2.3 Differentiation von Vektorfeldern 32

2.4 Vektorfelder längs Abbildungen 38

2.5 Parallelverschiebung 41

2.6 Geodätische 45

3 Krümmung **55**

3.1 Riemannscher Krümmungstensor 55

3.2 Schnittkrümmung 61

3.3 Ricci- und Skalarkrümmung 64

3.4 Jacobi-Felder 68

4 Untermannigfaltigkeiten **75**

4.1 Untermannigfaltigkeiten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten 75

4.2 Semi-riemannsche Untermannigfaltigkeiten 79

4.3 Totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten 83

4.4 Hyperflächen 86

4.5 Trigonometrie in Räumen konstanter Krümmung 91

5 Bündeltheorie **99**

5.1 Die Lie-Klammer 99

5.2 Vektorbündel 105

5.3 Metriken und Zusammenhänge auf Vektorbündeln 110

5.4 Krümmung von Vektorbündeln 115

5.5 Existenz (semi-)riemannscher Metriken 124

6 Riemannsche Geometrie **127**

6.1 Die riemannsche Abstandsfunktion 127

6.2 Vollständigkeit 132

6.3 Die zweite Variation der Energie 136

6.4 Verallgemeinerte Abstandsfunktionen 140

6.5 Der Satz von Cartan-Hadamard 154

6.6 Der Schnittort 155

6.7 Integration auf riemannschen Mannigfaltigkeiten 161

6.8 Anwendungen auf die Fundamentalgruppe 166

Symbolverzeichnis **173**

Literaturverzeichnis **175**

Kapitel 1

Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Erinnerung. Sei M eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *Topologie auf* M, falls

1. $\emptyset,\ M \in \mathcal{O}$.
2. Sind $U_i \in \mathcal{O},\ i \in I$, dann ist auch
$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}.$$
3. Sind $U_1,\ U_2 \in \mathcal{O}$, so ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

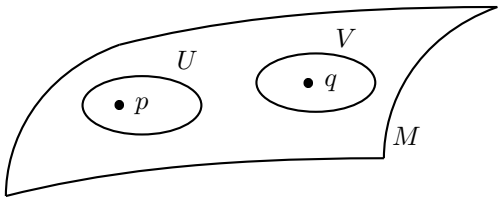
Das Paar $(M, \mathcal{O})$ heißt *topologischer Raum*. Meist spricht man aber etwas unpräzise vom topologischen Raum M. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *offen in* M, falls $U \in \mathcal{O}$. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *abgeschlossen*, falls $M - A \in \mathcal{O}$.

Sind $(M, \mathcal{O}_M)$ und $(N, \mathcal{O}_N)$ topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : M \to N$ *stetig*, falls
$$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M \text{ für alle } V \in \mathcal{O}_N.$$

Eine bijektive stetige Abbildung $f : M \to N$, für die auch f^{-1} stetig ist, heißt *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume M und N heißen *homöomorph*, falls es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

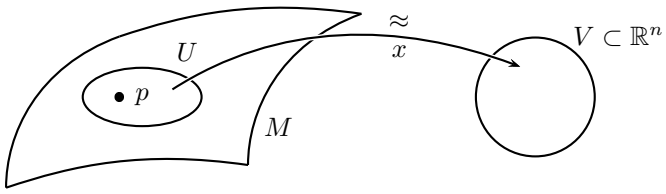
Definition. Sei M topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{O}$. Dann heißt M *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit*, wenn Folgendes gilt:

1. M ist *hausdorffsch*, das heißt, für alle $p, q \in M$ mit $p \neq q$ existieren offene Mengen $U, V \subset M$ mit $p \in U$, $q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.



2. Die Topologie von M besitzt eine abzählbare Basis, das heißt, es existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so dass für jedes $U \in \mathcal{O}$ es $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$, gibt mit
$$U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

3. M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, das heißt, für alle $p \in M$ existieren eine offene Teilmenge $U \subset M$ mit $p \in U$, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $x : U \to V$.



Bemerkung. Die ersten beiden Bedinungen in der Definition sind eher technischer Natur und werden manchmal auch weggelassen. Entscheidend ist die Tatsache, dass eine topologische Mannigfaltigkeit lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, d. h. Mannigfaltigkeiten sehen im Kleinen so aus wie der euklidische Raum. Wird die Topologie von M durch eine Metrik induziert, so ist Bedingung 1 automatisch erfüllt. Ist M sogar gegeben als eine Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit der Teilraumtopologie, so sind Bedingungen 1 und 2 automatisch erfüllt.

Beispiel.

(1) $M = \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltikeit, denn

(i), (ii) Sind klar.

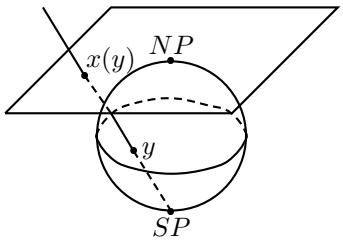
(iii) Gilt mit $U = M$, $V = \mathbb{R}^n$ und $x = \mathrm{id}$.

(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge. M ist n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(i), (ii) Sind klar.

(iii) Gilt mit $U = M$, $V = M$ und $x = \mathrm{id}$.

(3) $M = \mathrm{S}^n = \{\, y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||y|| = 1 \,\}$ ist n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.



(i), (ii) Sind klar, da S^n Teilmenge eines $\mathbb{R}^N$.

(iii) Es werden zwei Homöomorphismen benötigt, die mit Hilfe der *stereografischen Projektion* konstruiert werden. Definiere dazu $U_1 := \mathrm{S}^n - \{SP\}$ mit $SP := (-1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Setze $V_1 := \mathbb{R}^n$. Definiere ferner
$$x : U_1 \to V_1,\ x(y) = x(y^0, \underbrace{y^1, \ldots, y^n}_{=:\hat{y}}) = x(y^0, \hat{y}) = \frac{2}{1 + y^0} \cdot \hat{y}.$$

x ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung y lautet
$$y : V_1 \to U_1,\ y(x) = \frac{1}{4 + ||x||^2}(4 - ||x||^2, 4x),$$

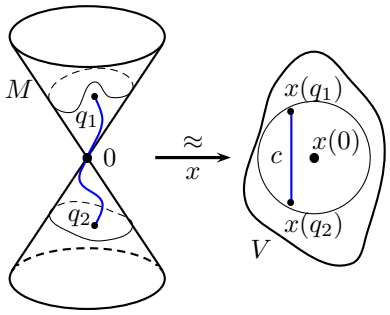
und ist ebenfalls stetig. Also ist x ein Homöomorphismus. Ganz analog dazu wird der Homöomorphismus definiert, der den Nordpol auslässt. Sei nun $U_2 := \mathrm{S}^n - \{NP\}$ mit $NP := (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $V_2 := \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\tilde{x} : U_2 \to V_2,\ \tilde{x}(y) = \tilde{x}(y^0, \underbrace{y^1, \ldots, y^n}_{=:\hat{y}}) = \tilde{x}(y^0, \hat{y}) = \frac{2}{1 - y^0} \cdot \hat{y}.$$

Also ist die Sphäre S^n eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(4) Alle n-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ im Sinne der Analysis 3 sind n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten.

(5) **Nichtbeispiel.** Wir betrachten $M := \{\, (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 = (y^2)^2 + (y^3)^2 \,\}$, den Doppelkegel.



Da $M \subset \mathbb{R}^3$, sind **(i)** und **(ii)** erfüllt. Aber M ist *keine* 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Denn falls doch, dann würden eine offene Teilmenge $U \subset M$ mit $0 \in U$, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ und ein Homöomorphismus $x : U \to V$ existieren mit $x(0) = 0$.

O. B. d. A. sei $V = B_r(x(0))$ mit einem $r > 0$. Wähle $q_1, q_2 \in U$ mit $q_1^1 > 0$ und $q_2^1 < 0$.

Wähle weiterhin einen stetigen Weg $c : [0, 1] \to V$ mit

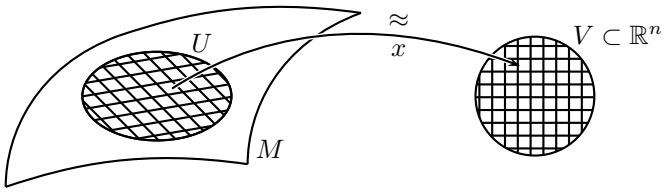
$$c(0) = x(q_1),\ c(1) = x(q_2) \text{ und } c(t) \neq x(0) \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Definiere den stetigen Weg $\tilde{c} := x^{-1} \circ c : [0, 1] \to U$. Dann gilt

$$\tilde{c}(0) = q_1,\ \tilde{c}(1) = q_2,\ \text{das heißt } \tilde{c}^1(0) > 0,\ \tilde{c}^1(1) < 0.$$

Daraus folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $t \in (0, 1)$ existiert mit $\tilde{c}^1(t) = 0$.Dann ist $\tilde{c}(t) = (0, 0, 0)$ und folglich $c(t) = x(\tilde{c}(t)) = x(0)$, was der Wahl von c widerspricht. Also ist M keine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Definition. Ist M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, so heißen die Homöomorphismen $x : U \to V$ *Karten* (oder *lokale Koordinatensysteme*) von M.



Nach der Wahl eines lokalen Koordinatensystems $x : U \to V$ wird jeder Punkt $p \in U$ eindeutig durch die Koordinaten $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$ festgelegt.

In einer 0-dimensionale Mannigfaltigkeit M besitzt jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U, die homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist. Folglich ist $\{p\} = U$ eine offene Teilmenge von M für alle $p \in M$, das heißt M trägt die diskrete Topologie. Und da für die Topologie von M eine abzählbare Basis exisiert und die Topologie gleichzeitig diskret ist, muss M selbst abzählbar sein.
Wir erhalten also:

PROPOSITION 1.1.1. *Ein topologischer Raum M ist genau dann eine 0-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn M abzählbar ist und die diskrete Topologie trägt.*

Definition. Wir nennen eine topologische Mannigfaltigkeit M *zusammenhängend*, falls für je zwei Punkte $p, q \in M$ es eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to M$ gibt mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.

Es müssen also je zwei Punkte sich durch eine stetige Kurve in M verbinden lassen. In der Topologie nennt man dies normalerweise „wegzusammenhängend", was im Fall von Mannigfaltigkeit allerdings äquivalent zum Konzept von „zusammenhängend" ist, worauf wir an dieser Stelle allerdings nicht weiter eingehen wollen.

Bemerkung. Nach Proposition 1.1.1 besteht jede zusammenhängende 0-dimensionale Mannigfaltigkeit M aus nur einem Punkt: $M = \{\text{Punkt}\}$.

Auch in Dimension 1 gibt es nicht viele verschiedene zusammenhängende Mannigfaltigkeiten:

PROPOSITION 1.1.2. *Jede zusammenhängende 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist entweder zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1 homöomorph.*

Einen Beweis dafür findet man zum Beispiel im Anhang von [Milnor]. Einzige kompakte zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist also S^1.

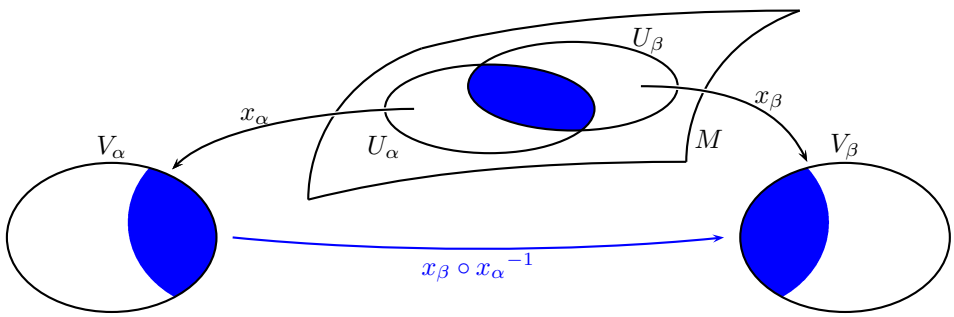
SATZ 1.1.3. *Seien M und A Mengen. Für alle $\alpha \in A$ seien $U_\alpha \subset M$ und $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen und $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ bijektive Abbildungen. Es gelte:*

(i) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,

(ii) $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ *ist offen für alle $\alpha, \beta \in A$ und*

(iii) $x_\beta \circ {x_\alpha}^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *ist für alle $\alpha, \beta \in A$ stetig.*

Dann trägt M genau eine Topologie, bezüglich der alle U_α offene Mengen und alle x_α Homöomorphismen sind.



Beweis. **Eindeutigkeit:** Sei $\mathcal{O}$ eine solche Topologie auf M. Ist $W \in \mathcal{O}$, so ist auch $W \cap U_\alpha$ und damit auch $x_\alpha(W \cap U_\alpha)$ offen für alle $\alpha \in A$.

Ist umgekehrt $W \subset M$ eine Teilmenge, für die $x_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist für alle $\alpha \in A$, so ist auch $W \cap U_\alpha$ offen in U_α. Da auch $U_\alpha \subset M$ offen ist, ist auch $W \cap U_\alpha$ offen in M. Wegen **(i)** ist dann auch $W = \bigcup_{\alpha \in A}(W \cap U_\alpha)$ offen in M, und somit ist

$$\mathcal{O} = \{W \subset M \mid x_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen für alle } \alpha \in A\}.$$

Existenz: Wir nehmen die Darstellung aus dem Eindeutigkeitsteil und setzen:

$$\mathcal{O} := \{W \subset M \mid x_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen für alle } \alpha \in A\}.$$

und weisen nun nach, dass dieses $\mathcal{O}$ die gewünschten Eigenschaften hat:

(a) $\mathcal{O}$ ist eine Topologie, denn

(i) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.

(ii) Seien $W_i \in \mathcal{O}, i \in I$.

$$\begin{aligned} x_\alpha\left(\left(\bigcup_{i\in I} W_i\right) \cap U_\alpha\right) &= x_\alpha\left(\bigcup_{i\in I}(W_i \cap U_\alpha)\right) \\ &= \bigcup_{i\in I} \underbrace{x_\alpha(W_i \cap U_\alpha)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \text{ offen in } \mathbb{R}^n \text{ für alle } \alpha \in A. \end{aligned}$$

(iii) $W_1, W_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \in \mathcal{O}$ folgt ganz ähnlich wie in **(ii)**.

(b) Zu zeigen ist: $U_\beta \in \mathcal{O}$ für alle $\beta \in A$.
$x_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen für alle $\alpha \in A$ nach Voraussetzung.

(c) x_β ist stetig für alle $\beta \in A$, denn:
Sei $Y \subset V_\beta$ offen. Dann gilt für alle $\alpha \in A$:

$$\begin{aligned} x_\alpha({x_\beta}^{-1}(Y) \cap U_\alpha) &= x_\alpha({x_\beta}^{-1}(Y \cap x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))) \\ &= \underbrace{(x_\alpha \circ {x_\beta}^{-1})}_{\substack{=(x_\beta \circ {x_\alpha}^{-1})^{-1} \\ \text{stetig}}} \underbrace{(Y \cap \underbrace{x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Daher ist ${x_\beta}^{-1}(Y) \in \mathcal{O}$.

(d) ${x_\beta}^{-1}$ ist stetig, denn:
Sei $W \subset U_\beta$ offen. Dann ist $W \in \mathcal{O}$. Da für alle $\alpha \in A$ die Menge $x_\alpha(W \cap U_\alpha)$ offen ist, ist insbesondere für $\alpha = \beta$

$({x_\beta}^{-1})^{-1}(W) = x_\beta(W) = x_\beta(W \cap U_\beta)$ eine offene Menge. □

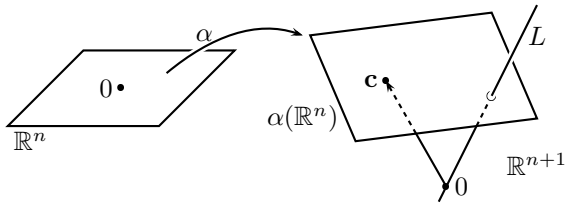
Beispiel (Der reell-projektive Raum).

$$\begin{aligned} M = \mathbb{R}\mathrm{P}^n &:= \mathrm{P}(\mathbb{R}^{n+1}) := \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum}\} \\ A &:= \{\text{affin-lineare Einbettungen } \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } 0 \notin \alpha(\mathbb{R}^n)\} \end{aligned}$$

Dass α affin-linear ist, bedeutet, dass es ein $B \in \mathrm{Mat}(n \times (n+1), \mathbb{R})$ und ein $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\alpha(x) = Bx + c.$$

Da α eine Einbettung ist, gilt $\mathrm{Rang}(B) = n$.



Es ist also $\alpha(\mathbb{R}^n)$ eine affin-lineare Hyperebene. Setze

$$U_\alpha := \{L \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid L \cap \alpha(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset\}.$$

Für $L \in U_\alpha$ besteht $L \cap \alpha(\mathbb{R}^n)$ aus genau einem Punkt, denn sonst würde $0 \in L \subset \alpha(\mathbb{R}^n)$ sein, aber das ist ein Widerspruch. Es gilt also

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n - U_\alpha = \{L \mid L \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^n) \text{ eindimensionaler Untervektorraum}\} \quad (\approx \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}),$$

wenn $\alpha(x) = Bx + c$ mit $\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}(n \times (n+1), \mathbb{R})$. Setze $V_\alpha := \mathbb{R}^n$ und

$$x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha,\ x_\alpha(L) := \alpha^{-1}(L \cap \alpha(R^n))$$

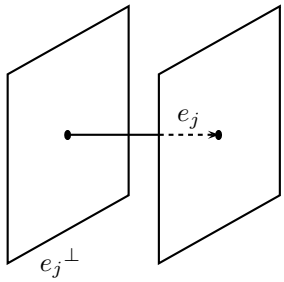
für $\alpha \in A$. Dann ist x_α eine bijektive Abbildung. Es gilt

$${x_\alpha}^{-1}(v) = \mathbb{R} \cdot \alpha(v) \text{ für alle } \alpha \in A.$$

Im Folgenden werden die Voraussetzung von Satz 1.4 überprüft:

(i) *Zu zeigen:* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
Sei dazu $e_0, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Standardbasis. Für $j = 1, \ldots, n$ definieren wir:

$$\alpha_j(v) := v^1 e_0 + \ldots + v^j e_{j-1} + e_j + v^{j+1} e_{j+1} + \ldots + v^n e_n.$$



Angenommen, es existiert ein

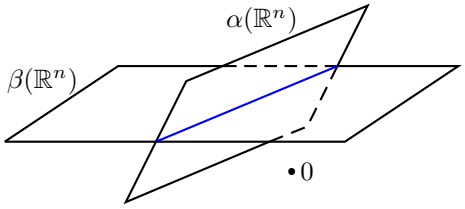
$$L \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n - \bigcup_{j=0}^{n} U_{\alpha_j} \quad = \quad \bigcap_{j=0}^{n} (\mathbb{R}\mathrm{P}^n - U_{\alpha_j})$$

und somit

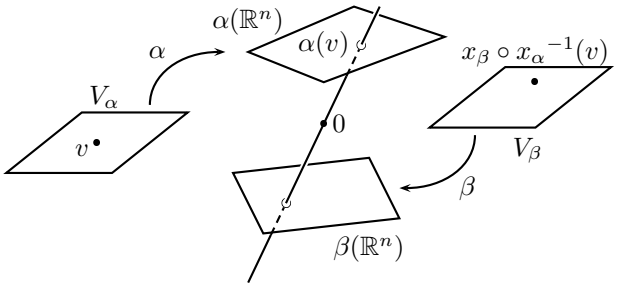
$$L \subset \bigcap_{j=0}^{n} {e_j}^\perp = \{0\}.$$

Das ist ein Widerspruch, also gilt $\bigcup_{j=0}^{n} U_{\alpha_j} = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

(ii) Es gilt: $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{R}^n - \underbrace{\text{affin-linearer Unterraum}}_{\text{abgeschlossen}}$ ist offen für alle $\alpha, \beta \in A$.



(iii) Es gilt: $x_\beta \circ {x_\alpha}^{-1} : v \mapsto \beta^{-1}(\mathbb{R} \cdot \alpha(v) \cap \beta(\mathbb{R}^n))$ ist stetig für alle $\alpha,\, \beta \in A$.



Wegen Satz 1.1.3 besitzt $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ besitzt genau eine Topologie, für die die U_α offen und die x_α Homöomorphismen sind.

Proposition 1.1.4 (Zusatz 1 zu Satz 1.1.3). *Falls es in Satz 1.4 eine abzählbare Teilmenge $A_1 \subset A$ gibt mit*

$$\bigcup_{\alpha \in A_1} U_\alpha = M,$$

so besitzt die resultierende Topologie eine abzählbare Basis.

Beispiel ($\mathbb{R}\mathrm{P}^n$). Für $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ hat sogar die endliche Menge $A_1 := \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ die ein Proposition 1.1.4 verlangte Eigenschaft, die Topologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ besitzt folglich eine abzählbare Basis.

Beweis von Proposition 1.1.4. Die aus A resultierende Topologie hat die Eigenschaften der aus A_1 resultierenden Topologie. Da die Topologie eindeutig ist, müssen A und A_1 also dieselbe Topologie liefern.

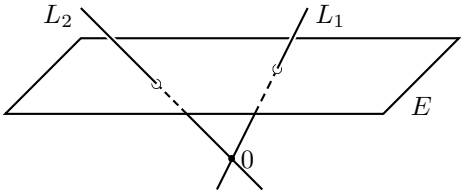
Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $A_1 = A$ abzählbar ist. Dann hat $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

$\Rightarrow$ ${x_\alpha}^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$ ist eine abzählbare Basis von U_α.

$\Rightarrow$ $\bigcup_{\alpha \in A} {x_\alpha}^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$ ist abzählbare Basis von M. □

Proposition 1.1.5 (Zusatz 2 zu Satz 1.1.3). *Falls es in Satz 1.1.3 zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein $\alpha \in A$ gibt mit $p, q \in U_\alpha$, so ist die Topologie von M hausdorffsch.*

Beispiel ($\mathbb{R}\mathrm{P}^n$). Zu $L_1, L_2 \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ existiert eine affin-lineare Hyperebene E mit



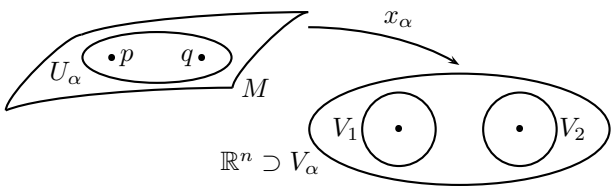
$$L_1 \cap E \neq \emptyset \neq L_2 \cap E.$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist hausdorffsch.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beweis von Proposition 1.1.5. Seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Wähle ein $\alpha \in A$ mit $p, q \in U_\alpha$. Wähle weiterhin $V_1, V_2 \subset V_\alpha$ offen mit $p \in V_1$, $q \in V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

$\Rightarrow {x_\alpha}^{-1}(V_1)$ und ${x_\alpha}^{-1}(V_2)$ trennen p und q. □



Bemerkung (Der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$). Analog zum reell-projektiven Raum definieren wir

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := \{L \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid L \text{ ist eindimensionaler komplexer Untervektorraum}\}.$$

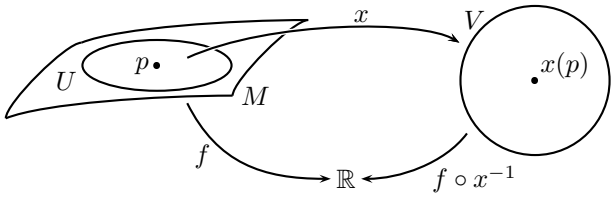
Analog zum reellen Fall ergeben sich Karten $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Daher ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ $2n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Für eine topologische Mannigfaltigkeit M macht es Sinn von stetigen Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ zu sprechen.

Frage. Was bedeutet Differenzierbarkeit von f?

Versuch einer Definition. Die Funktion f soll in $p \in M$ *differenzierbar* heißen, falls für eine Karte $x : U \to V$ mit $p \in U$ die Funktion $f \circ x^{-1} : V \to \mathbb{R}$ in $x(p)$ differenzierbar ist.



Problem. Ist $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ eine weitere Karte mit $p \in \tilde{U}$, so gilt nahe $y(p)$

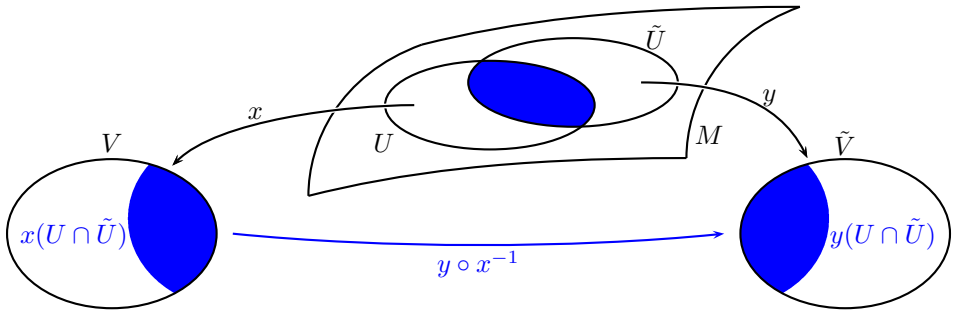
$$f \circ y^{-1} = \underbrace{(f \circ x^{-1})}_{\substack{\text{diff'bar} \\ \text{in } x(p)}} \circ \underbrace{(x \circ y^{-1})}_{\substack{\text{nur} \\ \text{stetig}}}.$$

Diese Konzept von Differenzierbarkeit hängt ab von der Wahl der Karte x. Wüssten wir, dass $x \circ y^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist und nicht nur ein Homöomorphismus, dann könnten wir aus der Differenzierbarkeit von $f \circ x^{-1}$ auf die von $f \circ y^{-1}$ schließen. Daher machen wir folgende Definition.

Definition. Sei M n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Zwei Karten $x : U \to V$ und $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ von M heißen *C^∞-verträglich*, falls

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \to y(U \cap \tilde{U})$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist.



Definition. Eine Menge von Karten $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in A$, heißt *Atlas* von M, falls

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M.$$

Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt *C^∞-Atlas*, falls je zwei Karten in $\mathcal{A}$ C^∞-verträglich sind.

Beispiel. **(1)** Sei $M := U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\mathcal{A} := \{\mathrm{id} : U \to U\}$ ein C^∞-Atlas.

(2) Seien $M := \mathrm{S}^n$ und $\mathcal{A} := \{(x : U_1 \to V_1), (\tilde{x} : U_2 \to V_2)\}$, wobei $U_1 := \mathrm{S}^n - \{SP\}$, $U_2 := \mathrm{S}^n - \{NP\}$ und $V_1 := V_2 := \mathbb{R}^n$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} x(y) &= \frac{2}{1+y^0}\hat{y}, \text{ wobei } y = (y^0, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ y(x) &= \frac{1}{4+||x||^2}(4-||x||^2, 4x) \text{ und} \\ \tilde{x}(y) &= \frac{2}{1-y^0}\hat{y}. \end{aligned}$$

Dann gilt für $v \in x(U_1 \cap U_2) = x(S^n - \{SP, NP\}) = \mathbb{R}^n - \{0\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x} \circ x^{-1}(v) &= \tilde{x}\left(\frac{4-||v||^2}{4+||v||^2}, \frac{4v}{4+||v||^2}\right) \\ &= \frac{2}{1-\dfrac{4-||v||^2}{4+||v||^2}} \frac{4v}{4+||v||^2} \\ &= \frac{8v}{4+||v||^2-4+||v||^2} = \frac{4v}{||v||^2} \end{aligned}$$

ist C^∞ auf $\mathbb{R}^n - \{0\} = x(\mathrm{S}^n - \{SP, NP\}) = x(U_1 \cap U_2)$. Analog für $x \circ \tilde{x}^{-1}$.

$\Rightarrow$ x und $\tilde{x}$ sind C^∞-verträglich.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist ein C^∞-Atlas.

(3) Seien $M := \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $\mathcal{A} := \{x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \mid \alpha$ ist affin-lineare Einbettung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ von maximalem Rang und $0 \notin \alpha(\mathbb{R}^n)\}$. Alle Kartenwechsel $x_\beta \circ {x_\alpha}^{-1}$ sind C^∞ und damit ist $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas.

(4) Sei $M := \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Der resultierende Atlas ist ebenfalls ein C^∞-Atlas.

Bemerkung. Ist $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas von M, so ist auch

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\text{Karten } x \text{ von } M \mid x \text{ ist } C^\infty\text{-verträglich mit allen Karten in } \mathcal{A}\}$$

ein C^∞-Atlas von M. *Denn:*

Sind x und $\tilde{x}$ zwei Karten von M, die C^∞-verträglichmit allen Karten in $\mathcal{A}$ sind, dann sind auch x und $\tilde{x}$ miteinander C^∞-verträglich:

Zu $p \in x(U \cap \tilde{U})$ existiert eine Karte $(y : \tilde{\tilde{U}} \to \tilde{\tilde{V}}) \in \mathcal{A}$ mit $x^{-1}(p) \in \tilde{\tilde{U}}$. Nahe p gilt dann:

$$\tilde{x} \circ x^{-1} = \underbrace{(\tilde{x} \circ y^{-1})}_{\text{ist } C^\infty} \circ \underbrace{(y \circ x^{-1})}_{\text{ist } C^\infty} \text{ ist } C^\infty.$$

Definition. Ein C^∞-Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ heißt *maximal* (oder auch *differenzierbare Struktur*), falls jede Karte, die mit allen Karten in $\mathcal{A}_{\max}$ C^∞-verträglich ist, bereits in $\mathcal{A}_{\max}$ enthalten ist.

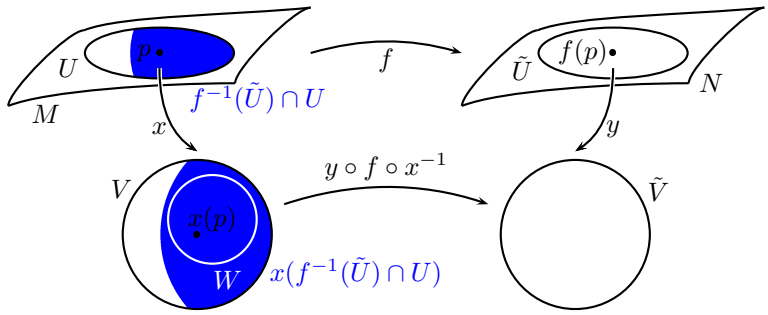
Nach der Bemerkung ist jeder C^∞-Atlas $\mathcal{A}$ in genau einem maximalen C^∞-Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ enthalten.

Definition. Ein Paar $(M, \mathcal{A}_{\max})$, wobei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}_{\max}$ eine differenzierbare Struktur auf M ist, heißt *n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Definition. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $p \in M$. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt *k-mal stetig differenzierbar* (oder C^k) nahe p, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es für eine (und damit jede) Karte $(x : U \to V) \in \mathcal{A}_{\max}(M)$ mit $p \in U$ und für eine (und damit jede) Karte $(y : \tilde{U} \to \tilde{V}) \in \mathcal{A}_{\max}(N)$ mit $f(p) \in \tilde{U}$ eine Umgebung $W \subset x(f^{-1}(\tilde{U}) \cap U)$ von $x(p)$ gibt, so dass

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(f^{-1}(\tilde{U}) \cap U) \to \tilde{V}$$

C^k ist auf W.



Beispiel.

(1) Sei $M = \mathrm{S}^n$ mit der differenzierbaren Struktur, die von $\mathcal{A} := \{(x : U_1 \to V_1), (\tilde{x} : U_2 \to V_2)\}$ induziert wird. Wir zeigen, dass

$$f : \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n, f(y) := -y$$

C^∞ ist nahe NP. (Tatsächlich ist f sogar C^∞ auf ganz S^n.)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{S}^n \arrow[rr, "f"] & & \mathrm{S}^n \\
 & \cup & & \cup \\
NP \in U_1 \arrow[d, mapsto] \arrow[d, shift left=6, "x"] & = \mathrm{S}^n - \{SP\} & & \mathrm{S}^n - \{NP\} = U_2 \arrow[d, "\tilde{x}"'] \\
0 \in V_1 & = \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\tilde{x} \circ f \circ x^{-1}"] & & \mathbb{R}^n = V_2
\end{tikzcd}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \ni v \quad &\overset{x^{-1}}{\mapsto} \quad x^{-1}(v) = \left(\frac{4-||v||^2}{4+||v||^2}, \frac{4v}{4+||v||^2}\right) \\
&\overset{f}{\mapsto} \quad \left(-\frac{4-||v||^2}{4+||v||^2}, \frac{-4v}{4+||v||^2}\right) \\
&\overset{\tilde{x}}{\mapsto} \quad -\frac{2}{1+\dfrac{4-||v||^2}{4+||v||^2}} \cdot \frac{4v}{4+||v||^2} = -\frac{8v}{8} = -v
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\tilde{x} \circ f \circ x^{-1}(v) = -v$ und somit gilt: $\tilde{x} \circ f \circ x^{-1}$ ist C^∞ auf $\mathbb{R}^n$. Wir können also $W = \mathbb{R}^n$ nehmen.

(2) Wir betrachten auf $M = \mathbb{R}$ die Atlanten $\mathcal{A}_1 := \{x = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit zugehöriger differenzierbarer Struktur $\mathcal{A}_{1,\max}$ sowie $\mathcal{A}_2 := \{\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit $\tilde{x}(t) = t^3$ und zugehöriger differenzierbarer Struktur $\mathcal{A}_{2,\max}$.

Nun ist $\tilde{x} \circ x^{-1}(t) = t^3$ zwar C^∞, aber $x \circ \tilde{x}^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ ist es *nicht*.
Das heißt, x und $\tilde{x}$ sind *nicht* C^∞-verträglich und somit sind die differenzierbaren Strukturen verschieden:

$$\mathcal{A}_{1,\max} \neq \mathcal{A}_{2,\max}.$$

- Ist $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,\max}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,\max})$ eine C^∞-Abbildung?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "x=\mathrm{id}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\tilde{x}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "t \mapsto t^3"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} \circ \mathrm{id} \circ x^{-1} \text{ ist } C^\infty \text{ und damit auch id.}$$

- Ist $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,\max}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,\max})$ eine C^∞-Abbildung?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\tilde{x}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "x=\mathrm{id}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "t \mapsto \sqrt[3]{t}"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad x \circ \mathrm{id} \circ \tilde{x}^{-1} \text{ ist } \textit{nicht } C^\infty \text{ und damit auch id nicht.}$$

Definition. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ein Homöomorphismus $f : M \to N$ heißt *C^k-Diffeomorphismus*, falls f und f^{-1} beide C^k sind. Statt C^∞-Diffeomorphismus sagen wir einfach *Diffeomorphismus*.

Falls es einen Diffeomorphismus $f : M \to N$ gibt, so heißen M und N *diffeomorph*.

Beispiel. Seien $M = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,\max})$ mit $\mathcal{A}_{1,\max} = \{x = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $N = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,\max})$ mit $\mathcal{A}_{2,\max} = \{\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{x}(t) = t^3\}$:

- id : $M \to N$ ist kein Diffeomorphismus (siehe vorne).
- $f : M \to N$, $f(t) = \sqrt[3]{t}$ ist ein Diffeomorphismus, denn

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & N \arrow[d, "\tilde{x}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

  Somit sind M und N diffeomorph.

Frage. Ist jede differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ diffeomorph zur Standard-Struktur $\mathcal{A}_{\max}$, die durch $\mathcal{A} = \{x = \mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ induziert wird**?**

Antwort. Für $n = 0, 1, 2$ und 3: **Ja**. Ebenso für $n \geq 5$: **Ja**.

Aber für $n = 4$: **Nein**. Es gibt überabzählbar viele differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}^4$, die paarweise nicht diffeomorph sind (so genannte „exotische" Strukturen).

Bemerkung. (Milnor, 1956) Es gibt exotische n-dimensionale Sphären (das heißt, sie sind homöomorph zur S^n, aber nicht diffeomorph) für $n \geq 7$, in jeder Dimension aber nur endlich viele.

1.3 Tangentialvektoren

Frage. Was ist die *Ableitung* in einem Punkt einer differenzierbaren Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten**?**

Vage Antwort. Das ist die lineare Approximation der Abbildung in diesem Punkt.

Frage. Was ist die *lineare Approximation* in einem Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit**?**

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Ein *Tangentialvektor* an M im Punkt p ist eine Äquivalenzklasse von differenzierbaren Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\varepsilon > 0$ und $c(0) = p$, wobei zwei solche Kurven $c_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$ und $c_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$ äquivalent heißen, falls für eine Karte $x : U \to V$ mit $p \in U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}(x \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x \circ c_2)|_{t=0}.$$

Bemerkung. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Karte $x : U \to V$ ab, denn sei $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ eine weitere Karte mit $p \in \tilde{U}$. Dann

$$\frac{d}{dt}(y \circ c)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((y \circ x^{-1}) \circ (x \circ c))|_{t=0} \overset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} \left(\frac{d}{dt}(x \circ c)|_{t=0} \right). \quad (*)$$

Also gilt: $\frac{d}{dt}(x \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x \circ c_2)|_{t=0} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(y \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(y \circ c_2)|_{t=0}$.

Notation. Für die Äquivalenzklasse von c schreibe $\dot{c}(0)$.

Definition. Die Menge $T_pM := \{\dot{c}(0) \,|\, c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ differenzierbar mit $c(0) = p\}$ heißt der *Tangentialraum* von M im Punkt p.

LEMMA 1.3.1. *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$ und sei $x : U \to V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Dann ist die Abbildung*

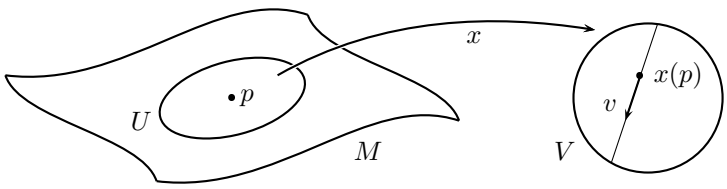
$$dx|_p : \begin{array}{ccc} T_pM & \to & \mathbb{R}^n, \\ \dot{c}(0) & \mapsto & \frac{d}{dt}(x \circ c)|_{t=0}, \end{array}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis.

- *Wohldefiniertheit.* Klar, wegen Definition der Äquivalenzrelation.
- *Injektivität.* Klar, wegen Definition der Äquivalenzrelation.
- *Surjektivität.* Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Setze $c(t) := x^{-1}(x(p) + tv)$.
  Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $x(p) + tv \in V$ für alle $|t| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}(x \circ x^{-1}(x(p) + tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x(p) + tv)|_{t=0} = v.$$



□

Definition. Wir versehen T_pM mit der eindeutigen Vektorraumstruktur, für die $dx|_p$ ein linearer Isomorphismus wird, das heißt für $a, b \in \mathbb{R}$ und $c_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$, $c_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$ setzen wir:

$$a \cdot \dot{c}_1(0) + b \cdot \dot{c}_2(0) := (dx|_p)^{-1}(a \cdot dx|_p(\dot{c}_1(0)) + b \cdot dx|_p(\dot{c}_2(0))).$$

LEMMA 1.3.2. *Diese Vektorraumstruktur hängt nicht von der Wahl der Karte $x : U \to V$ ab.*

Beweis. Sei $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ eine weitere Karte mit $p \in \tilde{U}$.

Zu zeigen: Auch $dy|_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ ist linear bezüglich der Vektorraumstruktur, die von x induziert wird. Dies gilt, denn

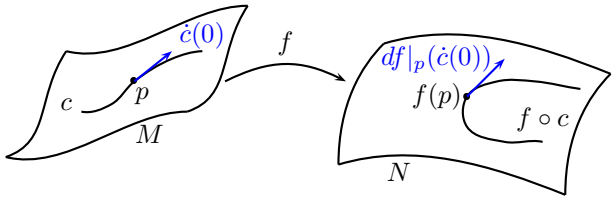
$$dy|_p \overset{(*)}{=} \underbrace{D(y \circ x^{-1})|_{x(p)}}_{\text{linear}} \circ \underbrace{dx|_p}_{\text{linear}}$$

ist Verkettung zweier linearer Abbildungen. □

LEMMA 1.3.3. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $p \in M$, sei $f : M \to N$ differenzierbar nahe p. Dann ist die Abbildung*

$$df|_p : \begin{array}{ccc} T_pM & \to & T_{f(p)}N \\ \dot{c}(0) & \mapsto & (f \circ c)^{\cdot}(0) \end{array}$$

wohldefiniert und linear.



Beweis. Wähle eine Karte $x : U \to V$ von M mit $p \in U$ und eine Karte $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ von N mit $f(p) \in \tilde{U}$.

$$\begin{tikzcd}
\dot{c}(0) \in T_pM \arrow[r, dotted] \arrow[d, mapsto] \arrow[d, "dx|_p", "\cong"'] & T_{f(p)}N \ni (f \circ c)^{\cdot}(0) \arrow[d, "dy|_{f(p)}", "\cong"'] \arrow[d, mapsto] \\
(x \circ c)^{\cdot}(0) \in \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}"] & \mathbb{R}^n \ni (y \circ f \circ c)^{\cdot}(0) = ((y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ c))^{\cdot}(0) \\
& \qquad = D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}((x \circ c)^{\cdot}(0))
\end{tikzcd}$$

Somit ist $df|_p = \left(dy|_{f(p)}\right)^{-1} \circ D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} \circ dx|_p$. Insbesondere ist $df|_p$ wohldefiniert und linear. □

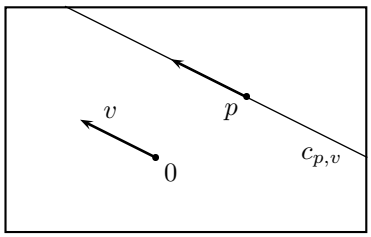
Definition. Die Abbildung $df|_p$ heißt das *Differential* von f im Punkt p.

Bemerkung. Ist $U \subset M$ eine offene Teilmenge, so ist das Differential der Inklusionsabbildung $\iota : U \hookrightarrow M$ ein kanonischer Isomorphismus $d\iota : T_pU \to T_pM$, der gegeben ist durch $\dot{c}(0) \mapsto (\iota \circ c)^{\cdot}(0) = \dot{c}(0)$. Wir werden die Tangentialräume vermöge dieses Isomorphismus identifizieren und einfach $T_pU = T_pM$ schreiben.

Bemerkung. Ist M ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so sind M und T_pM *kanonisch* isomorph vermöge

$$\begin{array}{rcl} M & \to & T_pM, \\ v & \mapsto & \dot{c}_{p,v}(0), \end{array}$$

wobei $c_{p,v}(t) := p + tv$.



Bemerkung. Für eine Karte $x : U \to V$ hat $dx|_p$ zwei Bedeutungen:

$$\begin{tikzcd}
\dot{c}(0) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & (x \circ c)^{\cdot}(0) \\
& T_pU = T_pM \arrow[r, "dx|_p"] \arrow[d, "dx|_p", "\cong"'] \arrow[u, phantom, "\in"] & T_{x(p)}V = T_{x(p)}\mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, "\ni"] \\
\frac{d}{dt}(x \circ c)|_{t=0} \in & \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\cong", "\text{kanonischer Isomorphismus}"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 1.3.4 (Kettenregel). *Seien M, N und P differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ differenzierbar. Sei $p \in M$. Dann gilt*

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p$$

Beweis. Für eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ gilt:

$$\begin{aligned} d(g \circ f)|_p(\dot{c}(0)) &= \frac{d}{dt}((g \circ f) \circ c)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(g \circ (f \circ c))|_{t=0} \\ &= dg|_{f(p)}((f \circ c)\dot{}(0)) \\ &= dg|_{f(p)}(df|_p(\dot{c}(0))) \end{aligned}$$

□

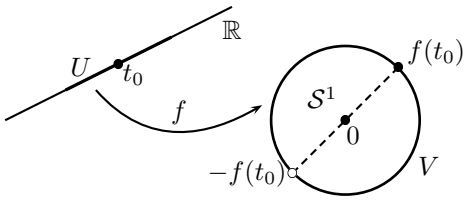
Definition. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine surjektive stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt *lokaler C^k-Diffeomorphismus*, falls für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in M und eine offene Umgebung V von $f(p)$ in N existieren, so dass

$$f|_U : U \to V$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Beispiel. Setze $f : \mathbb{R} \to \mathcal{S}^1$, $f(t) := e^{it}$. Zwar ist f nicht injektiv, aber ein lokaler Diffeomorphismus, denn:

Zu $t_0 \in \mathbb{R}$ wähle $U := (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$ und $V := \mathcal{S}^1 - \{-f(t_0)\}$.



Bemerkung. Ist $f : M \to N$ ein lokaler C^k-Diffeomorphismus, so ist

$$df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

ein Isomorphismus. Insbesondere gilt $\dim(T_pM) = \dim(T_{f(p)}N)$ und daher auch $\dim M = \dim N$. Denn:

O. B. d. A. sei f ein C^k-Diffeomorphismus. Für eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ gilt:

$$d(\mathrm{id}_M)|_p(\dot{c}(0)) = (\mathrm{id}_M \circ c)\dot{}(0) = \dot{c}(0) \Rightarrow d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM}.$$

Daraus folgt mit der Kettenregel:

$$\mathrm{id}_{T_pM} = d(\mathrm{id}_M)|_p = d(f^{-1} \circ f)|_p = df^{-1}|_{f(p)} \circ df|_p$$

Analog lässt sich die Gleichung $df|_p \circ df^{-1}|_{f(p)} = \mathrm{id}_{T_pM}$ herleiten. Daraus folgt:

$$df^{-1}|_{f(p)} = (df|_p)^{-1}.$$

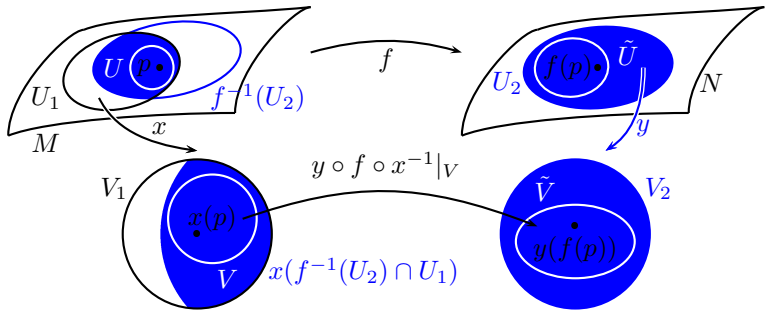
Es gilt auch die Umkehrung der Aussage:

Satz 1.3.5 (Umkehrsatz). *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $p \in M$. Sei $f : M \to N$ eine C^k-Abbildung. Falls $df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist, so existieren eine offene Umgebung U von p im M und eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $f(p)$ in N, so dass*

$$f|_U : U \to \tilde{U}$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Beweis. Wähle eine Karte $x : U_1 \to V_1$ von M mit $p \in U_1$ und eine Karte $y : U_2 \to V_2$ von N mit $f(p) \in U_2$.



Auf $x(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$ ist die Abbildung $y \circ f \circ x^{-1}$ definiert. Da $df|_p$ invertierbar ist, ist auch $D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}$ invertierbar.

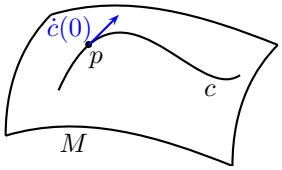
Der „klassische Umkehrsatz" besagt, dass es eine offene Umgebung $V \subset x(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$ von $x(p)$ und eine offene Umgebung $\tilde{V} \subset V_2$ von $y(f(p))$ gibt, so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}|_V : V \to \tilde{V}$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist. Mit $U := x^{-1}(V)$ und $\tilde{U} := y^{-1}(\tilde{V})$ folgt, dass $f|_U : U \to \tilde{U}$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. □

1.4 Richtungsableitungen und Derivationen

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$ und sei $\dot{c}(0) \in T_pM$. Dann heißt für eine nahe p differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$



$$\partial_{\dot{c}(0)} f := df|_p(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in \mathbb{R}$$

die *Richtungsableitung* von f in Richtung $\dot{c}(0)$.

Notation. Zu $U \subset M$ offen schreibe $C^k(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^k\}$. Zu $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C^k(U)$ und $g \in C^k(\tilde{U})$ setze

$$\begin{aligned} \alpha \cdot f &\in C^k(U), & (\alpha \cdot f)(q) &:= \alpha \cdot f(q) \\ f + g &\in C^k(U \cap \tilde{U}), & (f+g)(q) &:= f(q) + g(q) \\ f \cdot g &\in C^k(U \cap \tilde{U}), & (f \cdot g)(q) &:= f(q) \cdot g(q) \end{aligned}$$

und $C_p^\infty := \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ p \in U}} C^\infty(U)$.

Definition. Eine Abbildung $\partial : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Derivation* in p, falls Folgendes erfüllt ist:

(i) *Lokalität:* Sind $\tilde{U} \subset U$ offen, $p \in \tilde{U}$, $f \in C^\infty(U)$, dann

$$\partial f = \partial(f|_{\tilde{U}}).$$

(ii) *Linearität:* Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C_p^\infty$, dann

$$\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha \partial f + \beta \partial g.$$

(iii) *Produktregel:* Für $f, g \in C_p^\infty$ gilt

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g.$$

Beispiel.

- Seien $M = \mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Dann ist $\partial = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ eine Derivation.
- Sei M eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $p \in M$ und $\dot{c}(0) \in T_pM$. Dann ist $\partial_{\dot{c}(0)}$ eine Derivation, denn zum Beispiel **(iii)** ergib sich aus

$$\begin{aligned}
\partial_{\dot{c}(0)}(f \cdot g) &= \frac{d}{dt}((f \cdot g) \circ c)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((f \circ c) \cdot (g \circ c))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \cdot g(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{d}{dt}(g \circ c)|_{t=0} \\
&= \partial_{\dot{c}(0)} f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial_{\dot{c}(0)} g
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Menge $\mathrm{Der}(C_p^\infty)$ aller Derivationen in p bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum vermöge

$$(\alpha \partial_1 + \beta \partial_2)(f) = \alpha \partial_1 f + \beta \partial_2 f.$$

Lemma 1.4.1. *Die Abbildung $\partial : T_pM \to \mathrm{Der}(C_p^\infty)$, $\dot{c}(0) \mapsto \partial_{\dot{c}(0)}$, ist linear.*

Beweis. Sei $x : U \to V$ eine Karte von M mit $p \in U$.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "\partial."] \arrow[d, "dx|_p"', "\cong"] & \mathrm{Der}(C_p^\infty) \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\partial \circ (dx|_p)^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

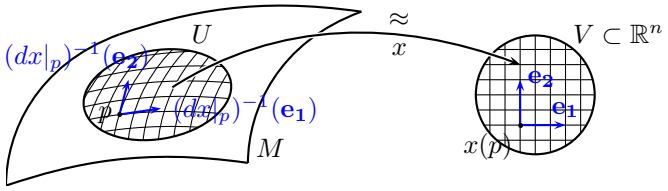
Zu zeigen: $\partial \circ (dx|_p)^{-1}$ ist linear. Sei dazu $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(\partial \circ (dx|_p)^{-1}(v))(f) &= df|_p((dx|_p)^{-1}(v)) \\
&= df|_p(\dot{c}(0)) \text{ mit } c(t) := x^{-1}(x(p) + tv) \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1}(x(p) + tv))|_{t=0} \\
&= \left\langle \mathrm{grad}(f \circ x^{-1})|_{x(p)}, v \right\rangle |_{t=0}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist linear in v. □

Bemerkung. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $(dx|_p)^{-1}(e_1), \ldots, (dx|_p)^{-1}(e_n)$ eine Basis von T_pM. Es gilt

$$\partial_{(dx|_p)^{-1}(e_j)}(f) = \left\langle \mathrm{grad}(f \circ x^{-1})|_{x(p)}, e_j \right\rangle = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^j}\bigg|_{x(p)} =: \frac{\partial f}{\partial x^j}\bigg|_{x(p)}$$



Zu jeder Karte x erhalten wir die Derivationen

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

Proposition 1.4.2. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Dann ist die Abbildung*

$$\partial_\cdot : T_pM \to \mathrm{Der}(C_p^\infty),\ \dot{c}(0) \mapsto \partial_{\dot{c}(0)},$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist jede Derivation eine Richtungsableitung und für jede Karte $x : U \to V$ mit $p \in U$ ist

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

eine Basis von $\mathrm{Der}(C_p^\infty)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Derivationen

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

eine Basis von $\mathrm{Der}(C_p^\infty)$ bilden.

(a) *Lineare Unabhängigkeit:* Sei $\sum_{i=1}^n \alpha^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = 0$. Zu zeigen ist: $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0$. Wähle $f = x^j$. Dann

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha^i \underbrace{\left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_p}_{=\delta_i^j} = \alpha^j \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

(b) *Erzeugendeneigenschaft:* Sei $\delta \in \mathrm{Der}(C_p^\infty)$. Setze $\alpha^j := \delta(x^j)$ für $j = 1 \ldots, n$. Wir werden zeigen, dass

$$\delta = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

(b1) Es gilt

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) \overset{\text{(iii)}}{=} \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0.$$

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\delta(\alpha) = \delta(\alpha \cdot 1) \overset{\text{(ii)}}{=} \alpha \cdot \delta(1) = 0.$$

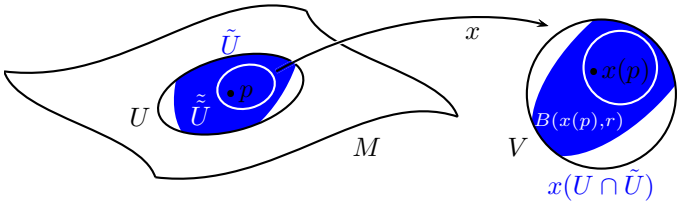
Derivationen verschwinden somit auf allen konstanten Funktionen.

(b2) Sei $f \in C_p^\infty$, genauer $f \in C^\infty(\tilde{U})$ mit $p \in \tilde{U}$ offen.

Wähle eine offene Umgebung $\tilde{\tilde{U}}$ von p mit

$$\tilde{\tilde{U}} \subset \tilde{U} \cap U$$

und $x(\tilde{\tilde{U}}) = B(x(p), r)$.



Lemma 1.4.3 (siehe unten) mit $h = f \circ x^{-1}$ besagt: Es existieren $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(B(x(p), r))$, so dass

$$(f \circ x^{-1})(x) = (f \circ x^{-1})(x(p)) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i(p)) \cdot g_i(x) \text{ und}$$

$$\frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p)) = g_i(x(p)).$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
\delta(f) &\overset{\text{(i)}}{=} \delta(f|_{\tilde{\tilde{U}}}) \\
&= \delta(f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i(p))(g_i \circ x)) \\
&\overset{\text{(ii)}}{\underset{\text{(b1)}}{=}} \sum_{i=1}^{n} \delta((x^i - x^i(p))(g_i \circ x)) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{i=1}^{n} (\delta(x^i - x^i(p)) \cdot g_i(x(p)) + \underbrace{(x^i - x^i(p))|_p}_{=0} \delta(g_i \circ x)) \\
&\overset{\text{(ii)}}{\underset{\text{(b1)}}{=}} \sum_{i=1}^{n} \delta(x^i) g_i(x(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p
\end{aligned}$$

□

LEMMA 1.4.3. *Sei $h \in C^\infty(B(q, r))$. Dann existieren $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(B(q, r))$ mit*

(i) $h(x) = h(q) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - q^i) g_i(x)$ *und*

(ii) $\frac{\partial h}{\partial x^i}(q) = g_i(q)$.

Beweis. Für $x \in B(q,r)$ setze $w_x : [0,1] \to \mathbb{R}$, $w_x(t) := h(tx + (1-t)q)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} h(x) - h(q) &= w_x(1) - w_x(0) \\ &= \int_0^1 \dot{w}_x(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{tx+(1-t)q} \cdot (x^i - q^i)\,dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) \underbrace{\int_0^1 \left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{tx+(1-t)q} dt}_{=:\, g_i(x)} \end{aligned}$$

Daraus folgt **(i)**. Und **(ii)** folgt aus **(i)** durch Differentiation an der Stelle q. □

Wir haben jetzt folgende Situation auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit:

$$\begin{tikzcd} (dx|_p)^{-1}(e_j) \in T_pM \arrow[rr, "\partial.", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & & \mathrm{Der}(C_p^\infty) \ni \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\ & \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\ni e_j} \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

$dx|_p$ $\qquad$ $\partial \circ (dx|_p)^{-1}$

hängen ab von der Wahl von x

Von jetzt an identifiziere T_pM mit $\mathrm{Der}(C_p^\infty)$ vermöge des Isomorphismus $\partial.$. Schreibe zum Beispiel für $\xi \in T_pM$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

statt $\partial_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ bzw. $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i (dx|_p)^{-1}(e_i)$, wobei $(\xi^1, \ldots, \xi^n)^* = dx|_p(\xi)$.

Wie ändern sich die Koeffizienten $\xi^1, \ldots, \xi^n$, wenn man die Karte x durch die Karte y ersetzt?

Sei $\xi \in T_pM$, seien x und y Karten, die p enthalten. Es gelte

$$\sum_{i=1}^n \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \xi = \sum_{j=1}^n \eta^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = dx|_p(\xi) = (dx|_p)\left((dy|_p)^{-1}\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}\right) = D(x \circ y^{-1})|_{y(p)} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich $\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$, also

$$\boxed{\eta^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i}\right|_{x(p)}}$$

Etwas anders formuliert: Für den Fall $\xi = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, das heißt $(\xi^1, \ldots, \xi^n)^* = e_i$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &= \sum_{j=1}^{n} \eta^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi^k \left.\frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^k}\right|_{x(p)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i}\right|_{x(p)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \text{, also}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i}\right|_{x(p)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p}$$

Vor allem in der physikalischen Literatur notiert man Formeln aus Gründen der Übersichtlichkeit häufig gemäß der

Einstein'schen Summenkonvention:

In einer Formel, in der ein Index einmal oben und einmal unten (auf einer Seite des Gleichheitszeichens) auftritt, ist über den Index zu summieren.

Obige Transformationsformel würde dann also kurz folgendermaßen geschrieben:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}}$$

1.5 Vektorfelder

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

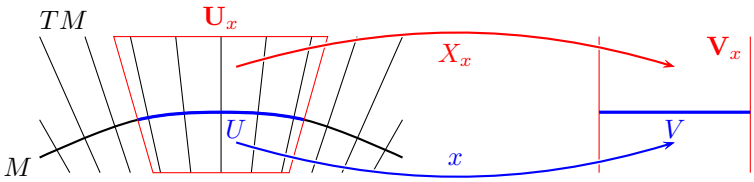
das *Tangentialbündel* von M.

Wir verabreichen TM die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit: Zu jeder Karte $x : U \to V$ von M konstruieren wir eine Karte $X_x : \mathbf{U}_x \to \mathbf{V}_x$ von TM, wobei $\pi : TM \to M, \pi(\xi) = p$ für $\xi \in T_pM$ die Fußpunktabbildung ist. Setze also

$$\mathbf{U}_x := \pi^{-1}(U) \subset TM,\ \mathbf{V}_x := V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ und } X_x(\xi) := (x(\pi(\xi)), dx|_{\pi(\xi)}(\xi)).$$

Dann ist ${X_x}^{-1}(v, w) = (dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w)$.

Schematisches Bild



Offensichtlich gilt (nach Konstruktion):

$$\bigcup_{\substack{\text{Karten}\\ x \text{ von } M}} \mathbf{U}_x = TM.$$

Seien x und y Karten M. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X_y \circ {X_x}^{-1}(v,w) &= X_y((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w)) \\ &= (y(\pi((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))), dy|_{\pi((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))}((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))) \\ &= (y(x^{-1}(v)), dy|_{x^{-1}(v)}((dx|_{x^{-1}(v)})^{-1}(w))) \\ &= (\underbrace{(y \circ x^{-1})}_{C^\infty}(v), \underbrace{D(y \circ x^{-1})|_v}_{C^\infty} \cdot w) \end{aligned}$$

ist eine C^∞-Abbildung, also insbesondere stetig.

Mit Satz 1.4 folgt dann, dass TM genau eine Topologie trägt, für die die X_x Homöomorphismen sind.

Hat die Topologie von TM eine abzählbare Basis?

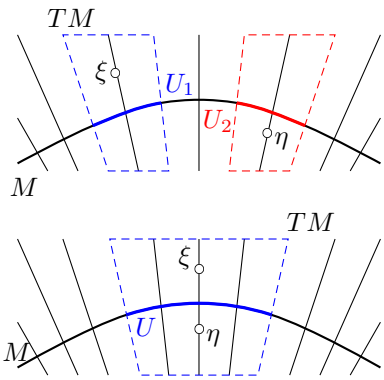
Die Topologie von M hat eine abzählbare Basis.

- $\Rightarrow$ M besitzt einen abzählbaren C^∞-Atlas.
- $\Rightarrow$ Die zugehörigen Karten von TM bilden einen abzählbaren Atlas von TM.

Mit Proposition 1.1.4 folgt dann, dass die Topologie von TM eine abzählbare Basis hat.

Ist TM hausdorffsch?

Seien $\xi, \eta \in TM$ mit $\xi \neq \eta$.



1. Fall: $\pi(\xi) \neq \pi(\eta)$.
M ist hausdorffsch.

- $\Rightarrow$ Es existieren eine offene Umgebung U_1 von $\pi(\xi)$ und eine offene Umgebung U_2 von $\pi(\eta)$, so dass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
- $\Rightarrow$ Die Mengen $\pi^{-1}(U_1)$ bzw. $\pi^{-1}(U_2)$ sind offene Umgebungen von ξ bzw. η mit $\pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2) = \emptyset$.

2. Fall: $\pi(\xi) = \pi(\eta)$.
Sei $x : U \to V$ eine Karte von M mit $\pi(\xi) = \pi(\eta) \in U$. Dann sind $\xi, \eta \in \pi^{-1}(U) = \mathbf{U}_x$. Mit Proposition 1.1.5 folgt dann, dass sich ξ und η trennen lassen.

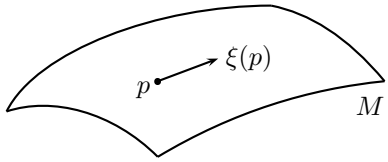
Insgesamt ergibt sich: Mit der so konstruierten Topologie wird TM eine $2n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit dem Atlas

$$\mathcal{A}_{TM} = \{X_x : \mathbf{U}_x \to \mathbf{V}_x \mid (x : U \to V) \in \mathcal{A}_{M,\max}\}.$$

Da die Kartenwechsel $X_x \circ {X_y}^{-1}$ nicht nur stetig, sondern sogar C^∞ sind, ist $\mathcal{A}_{TM}$ ein C^∞-Atlas. Dadurch wird $(TM, \mathcal{A}_{TM,\max})$ zu einer $2n$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine Abbildung $\xi : M \to TM$ heißt *Vektorfeld* auf M, falls für alle $p \in M$ gilt

$$\pi(\xi(p)) = p.$$



Sei $x : U \to V$ eine Karte von M. Ein Vektorfeld ξ wird auf U durch Funktionen

$$\xi^1, \ldots, \xi^n : V \to \mathbb{R}$$

beschrieben, und zwar folgendermaßen:

$$\xi(p) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

Wir überprüfen, was C^k für Vektorfelder bedeutet: Zur Karte x von M betrachte die zugehörige Karte X_x von TM.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\xi"] & TM & \\
 & \cup & \cup & \\
x^{-1}(v) \in & U \arrow[r, "\xi|_U"] \arrow[d, "x"'] & \mathbf{U}_x \arrow[d, "X_x"] & \ni \xi(x^{-1}(v)) \\
v \in & V \arrow[r] & V \times \mathbb{R}^n & \ni (\overbrace{x(\pi(\xi(x^{-1}(v))))}^{=x^{-1}(v)}, dx|_{\pi(\xi(x^{-1}(v)))}(\xi(x^{-1}(v)))) \\
 & \cap & \cap & = (v, \xi^1(v), \ldots, \xi^n(v)) \\
 & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^{2n} &
\end{tikzcd}$$

Es gilt also: ξ ist C^k auf $U \Leftrightarrow \xi^1, \ldots, \xi^n$ sind C^k auf V.

Beispiel ($M = \mathbb{R}^2$). *Polarkoordinaten:* Für $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ setze $U := \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$, $V := (0, \infty) \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ und $y : U \to V$ mit $y^{-1}(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

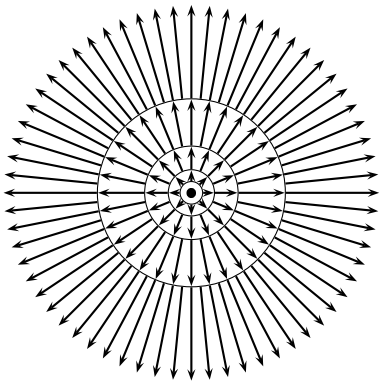
Auf U ist das Vektorfeld $\xi := r\dfrac{\partial}{\partial r}$ definiert.

In kartesischen Koordinaten, das heißt bezüglich der Karte $x = \mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, drückt sich das Vektorfeld ξ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\xi &= r\frac{\partial}{\partial r} = r\left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
&= r\left(\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
&= r\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x^1} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
&= x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

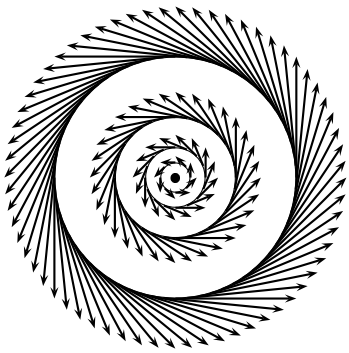
In kartesischen Koordinaten:
$\xi^1(x^1, x^2) = x^1,\ \xi^2(x^1, x^2) = x^2.$

In Polarkoordinaten:
$\eta^1(r, \varphi) = r,\ \eta^2(r, \varphi) = 0.$



Beispiel. Wir rechnen $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ in kartesische Koordinaten um:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x^1} + r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$



Kapitel 2

Semi-riemannsche Geometrie

2.1 Bilinearformen

Definition. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *symmetrische Bilinearform* ist eine Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

(i) $g(\alpha v + \beta w, z) = \alpha g(v, z) + \beta g(w, z)$ für alle $v, w, z \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

(ii) $g(v, w) = g(w, v)$ für alle $v, w \in V$.

Man nennt g *nicht entartet*, falls aus $g(v, w) = 0 \; \forall \, w \in V$ folgt, dass $v = 0$.

Für eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V setze

$$g_{ij} := g(b_i, b_j) \in \mathbb{R} \text{ für } i, j = 1, \ldots, n.$$

Dann ist $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Aus $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ kann g rekonstruiert werden: Für $v = \sum_{i=1}^n \alpha^i b_i$ und $w = \sum_{j=1}^n \beta^j b_j$ gilt:

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i b_i, \sum_{j=1}^n \beta^j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j g_{ij}.$$

Notation. Sei $b_1^*, \ldots, b_n^*$ die duale Basis des Dualraums $V^* = \{$ lineare Abbildungen $V \to \mathbb{R}\}$ zu $b_1, \ldots, b_n$, das heißt $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$. Man schreibt dann auch

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} b_i^* \otimes b_j^*.$$

Dann bedeutet das Einsetzen von $v, w \in V$ folgendes:

$$g(v, w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} b_i^*(v) \cdot b_j^*(w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \alpha^i \beta^j.$$

Hauptachsentransformation.

Sei g eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf V. Dann existiert eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V, so dass

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, \, i \neq j \\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \, i = j \end{cases}, \text{ das heißt } (g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Eine solche Basis nennen wir *verallgemeinerte Orthonormalbasis*. Man bezeichnet $\#\{-1\} =: \mathrm{Index}(g)$ als den *Index* von g.

g ist euklidisches Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ g ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Index}(g) = 0$.

Ist der Index von g gleich 1, so bezeichnet man g als *Minkowski-Skalarprodukt*.

Sind $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)$ zwei Basen von V, dann definiere die Transformationsmatrix $T = (t_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}$ durch

$$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{n} t_i^j b_j.$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(\tilde{\mathcal{B}})} &= g(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j) \\ &= g\Big(\sum_{k=1}^{n} t_i^k b_k, \sum_{l=1}^{n} t_i^l b_l\Big) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} t_i^k t_j^l \cdot g(b_k, b_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} t_i^k t_j^l \cdot g_{kl}^{(\mathcal{B})} \end{aligned}$$

Seien V und W zwei endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Sei g eine symmetrische Bilinearform auf V und $\Phi : W \to V$ eine lineare Abbildung. Dann kann g vermöge Φ nach W „zurückgezogen" werden, das heißt

$$(\Phi^* g)(w_1, w_2) := g(\Phi(w_1), \Phi(w_2)).$$

Dann ist $\Phi^* g$ eine symmetrische Bilinearform auf W.

Bemerkung. Falls g positiv definit ist, so ist $\Phi^* g$ positiv semidefinit. Falls ferner Φ injektiv ist, so ist $\Phi^* g$ ebenfalls positiv definit. Denn:

$$\begin{gathered} (\Phi^* g)(w, w) = g(\Phi(w), \Phi(w)) \geq 0 \quad \forall\, w \in W \text{ und} \\ (\Phi^* g)(w, w) = 0 \Leftrightarrow \Phi(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \ker(\Phi). \end{gathered}$$

Definition. Sind g_V und g_W symmetrische Bilinearformen auf V bzw. W, so heißt eine bijektive lineare Abbildung $\Phi : W \to V$ *Isometrie*, falls

$$g_V(\Phi(w_1), \Phi(w_2)) = g_W(w_1, w_2) \quad \forall\, w_1, w_2 \in W,$$

das heißt, es gilt $\Phi^* g_V = g_W$.

2.2 Semi-riemannsche Metriken

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Betrachte Abbildungen g, die jedem Punkt $p \in M$ eine nicht entartete symmetrische Bilinearform $g|_p$ auf T_pM zuordnen.

Ist $x : U \to V$ eine Karte von M, so definiere $g_{ij}^{(x)} = g_{ij} : V \to \mathbb{R}$ durch

$$g_{ij}(v) := g|_{x^{-1}(v)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x^{-1}(v)}, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x^{-1}(v)} \right).$$

Definition. Ein solche Abbildung g heißt *semi-riemannsche Metrik* auf M, falls sie im folgenden Sinne glatt vom Basispunkt abhängt:

Für jede Karte $x : U \to V$ von M sind die $g_{ij} : V \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktionen.

Transformation bei Kartenwechsel

Seien $x : U \to V$ und $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ zwei Karten von M, sei $p \in U \cap \tilde{U}$.

$$\underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p}_{=\tilde{b}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left.\frac{\partial(x^j \circ y^{-1})}{\partial y^i}\right|_{y(p)}}_{=t_i^j} \cdot \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p}_{=b_j}$$

Daraus folgt, dass

$$g_{ij}^{(y)}(y(p)) = \sum_{k,l=1}^n \left.\frac{\partial(x^k \circ y^{-1})}{\partial y^i}\right|_{y(p)} \cdot \left.\frac{\partial(x^l \circ y^{-1})}{\partial y^j}\right|_{y(p)} \cdot g_{kl}^{(x)}(x(p)).$$

Das heißt

$$\boxed{g_{ij}^{(y)}(v) = \sum_{k,l=1}^n \left.\frac{\partial(x^k \circ y^{-1})}{\partial y^i}\right|_v \cdot \left.\frac{\partial(x^l \circ y^{-1})}{\partial y^j}\right|_v \cdot g_{kl}^{(x)}((x \circ y^{-1})(v))}$$

In Physiker-Kurzschreibweise lautet die Formel

$$\boxed{g_{ij}^{(y)} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot (g_{kl}^{(x)} \circ (x \circ y^{-1})).}$$

Folgerung. Die Glattheitsbedingung für g muss nicht für alle Karten, sondern nur für einen Teilatlas von $\mathcal{A}_{\max}(M)$ überprüft werden, der M überdeckt.

Bemerkung. Für eine Karte $x : U \to V$ ist $dx|_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus, insbesondere sind $dx^1|_p, \ldots, dx^n|_p \in (T_pM)^*$.

Definition. Der Dualraum $(T_pM)^* =: T_p^*M$ heißt *Kotangentialraum* von M in p.

Lemma 2.2.1. *Die $dx^1|_p, \ldots, dx^n|_p$ bilden die zu $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ duale Basis.*

Beweis. $dx|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = e_i \Rightarrow dx^j|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \delta_i^j$ für $i = 1, \ldots, n$. □

Wir können also schreiben:

$$\boxed{g|_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x(p)) \cdot dx^i|_p \otimes dx^j|_p}$$

Bemerkung. Bei der Basistransformation $\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{n} t_i^j b_j$ ergibt sich

$$b_i^* = \sum_{j=1}^{n} t_j^i \tilde{b}_j^*.$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} t_j^i \tilde{b}_j^*\right)(b_k) &= \left(\sum_{j=1}^{n} t_j^i \tilde{b}_j^*\right)\left(\sum_{l=1}^{n} (T^{-1})_k^l \tilde{b}_l\right) \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} t_j^i (T^{-1})_k^l \underbrace{\tilde{b}_j^*(\tilde{b}_l)}_{=\delta_j^l} \\
&= \sum_{j=1}^{n} t_j^i (T^{-1})_k^j = \delta_k^i \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} t_j^i \tilde{b}_j^* &= b_i^*.
\end{aligned}$$

Es gilt also für die Koordinaten-Transformation der $dx^1|_p, \ldots, dx^n|_p$:

$$\boxed{dx^i|_p = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial(x^i \circ y^{-1})}{\partial y^j}\right|_{y(p)} \cdot dy^j|_p}$$

In Physiker-Kurzschreibweise bedeutet das

$$\boxed{dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j}$$

Physiker-Kurzherleitung der Transformationsformel für die g_{ij}:

$$\begin{aligned}
\boxed{g_{kl}^{(y)}}\, dy^k \otimes dy^l = g &= g_{ij}^{(x)} dx^i \otimes dx^j \\
&= g_{ij}^{(x)} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k\right) \otimes \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^l} dy^l\right) \\
&= \boxed{\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}^{(x)}}\, dy^k \otimes dy^l
\end{aligned}$$

Bemerkung. In der Physikliteratur schreibt man häufig einfach

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei β eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Für jedes $p \in M$ sei $\Phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ der kanonische Isomorphismus. Setze $g|_p := \Phi_p^*\beta$. Wir überprüfen die Glattheitsbedingung in der Karte $x = \mathrm{id} : U = M \to V = M$.

$$\begin{aligned}
g|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) &= \Phi_p^*\beta\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) \\
&= \beta\left(\Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right), \Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)\right) \\
&= \beta\left(dx|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right), dx|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)\right) \\
&= \beta(e_i, e_j)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die g_{ij} konstant, also C^∞ sind. Auf diese Weise kann M mit einer semi-riemannschen Metrik von beliebigem Index versehen werden.

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine kanonische injektive Abbildung $\Phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^{n+k}$, definiert durch

$$\dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}c|_{t=0}$$

Äquivalenzklasse der Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

Ableitung von $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+k}$

Dann definiere $g|_p := \Phi_p^* \langle \cdot, \cdot \rangle$, wobei $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n+k} x^i y^i$ für $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^{n+k})^T$, $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^{n+k})^T$ das übliche euklidische Skalarprodukt ist. Da das euklidische Skalarprodukt positiv definit ist und Φ_p injektiv, ist auch $g|_p$ für alle $p \in M$ positiv definit. Die so definierte semi-riemannsche Metrik auf M heißt *1. Fundamentalform*.

Die Karten von Untermannigfaltigkeiten entsprechen den lokalen Parametrisierungen, das heißt, ist $F : U \to M$ eine lokale Parametrisierung, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, so ist

$$x := F^{-1} : U := F(V) \to V$$

eine Karte von M. Es gilt dann mit $p = x^{-1}(v)$:

$$\begin{aligned}
g_{ij}(v) &= g|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) \\
&= (\Phi_p{}^* \langle \cdot, \cdot \rangle)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) \\
&= \left\langle \Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right), \Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}F(v + t \cdot e_i)|_{t=0}, \frac{d}{dt}F(v + t \cdot e_j)|_{t=0} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(v), \frac{\partial F}{\partial x^j}(v) \right\rangle \\
\Rightarrow g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right\rangle \text{ ist } C^\infty.
\end{aligned}$$

Definition. Eine semi-riemannsche Metrik g, für die $g|_p$ stets positiv definit ist, heißt *riemannsche Metrik*. Ein Paar (M, g), bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und einer (semi-)riemannschen Metrik g auf M heißt *(semi-)riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Eine semi-riemannsche Metrik g heißt *Lorentz-Metrik*, falls $g|_p$ stets den Index 1 hat. Das Paar (M, g) heißt dann *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.

Beispiel. Die 1. Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine riemannsche Metrik. Zum Beispiel für $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen wir die 1. Fundamentalform als die *Standardmetrik* g_{std} von S^n.

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Das *Minkowski-Skalarprodukt* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ hat den Index 1, wobei

$$\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n$$

für $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ und $\mathbf{y} = (y^0, y^1, \ldots, y^n)$. Ist $\Phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^{n+1}$ der kanonische Isomorphismus, so ist durch

$$g_{\text{Mink}}|_p := {\Phi_p}^* \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$$

eine Lorentz-Metrik auf M definiert. Die Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$ heißt *Minkowski-Raum*. Die Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie ist der 4-dimensionale Minkowski-Raum.

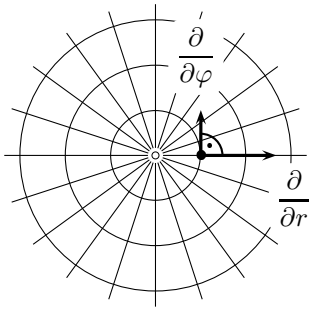
Beispiel. Wir drücken die euklidische Metrik $g_{\text{eukl}} = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$ des $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten aus. (Dabei sind x^1 und x^2 die kartesischen Koordinaten.) Mit $x^1 = r\cos\varphi$ und $x^2 = r\sin\varphi$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial r} dr + \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} d\varphi = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi \\
dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial r} dr + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} d\varphi = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi \\
\Rightarrow g_{\text{eukl}} &= (\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi) \otimes (\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi) \\
&\quad + (\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) \otimes (\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) \\
&= \cos^2\varphi\, dr \otimes dr - r\cos\varphi\sin\varphi\, dr \otimes d\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \otimes dr + r^2\sin^2\varphi\, d\varphi \otimes d\varphi \\
&\quad + \sin^2\varphi\, dr \otimes dr + \sin\varphi r\cos\varphi\, dr \otimes d\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \otimes dr + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi \otimes d\varphi \\
&= dr \otimes dr + r^2\, d\varphi \otimes d\varphi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g_{ij}^{\text{Polar}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

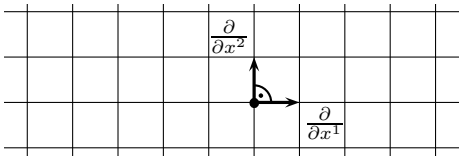
Diese Matrix besagt:

- $\dfrac{\partial}{\partial r}$ hat die Länge 1,
- $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ hat die Länge r,
- $\dfrac{\partial}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ stehen senkrecht aufeinander.



In kartesischen Koordinaten gilt:

$$(g_{ij}^{\text{kartes}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Definition. Seien (M, g_M) und (N, g_N) semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann heißt ein lokaler Diffeomorphismus $\varphi : M \to N$ *lokale Isometrie*, falls

$$d\varphi|_p : (T_pM, g_M|_p) \to (T_{\varphi(p)}N, g_N|_{\varphi(p)})$$

für alle $p \in M$ eine lineare Isometrie ist.

Ist eine lokale Isometrie zusätzlich injektiv, das heißt ein Diffeomorphismus, so heißt sie *Isometrie*.

Definition. Ist $\varphi : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus und g eine semi-riemannsche Metrik auf N, so heißt die semi-riemannsche Metrik $\varphi^* g$ auf M *Zurückziehung* oder *Pull-Back* von g, wobei

$$(\varphi^* g)|_p := (d\varphi|_p)^*(g|_{\varphi(p)}),$$

das heißt, für $\xi, \eta \in T_pM$ gilt:

$$(\varphi^* g)|_p(\xi, \eta) = g|_{\varphi(p)}(d\varphi|_p(\xi), d\varphi|_p(\eta)).$$

Bemerkung. Die Abbildung $\varphi^* g$ ist die eindeutige semi-riemannsche Metrik auf M, für die φ eine lokale Isometrie ist.

Definition. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$\mathrm{Isom}(M, g) := \{\varphi : M \to M \text{ Isometrie}\}$$

die *Isometrie-Gruppe* von M.

Bemerkung. Die Menge $\mathrm{Isom}(M, g)$ ist eine Gruppe bezüglich Komposition mit neutralem Element id_M.

Beispiel. Wir suchen die Isometrien von $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$. Das bedeutet:

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus mit $D\varphi|_{\mathbf{x}} \in \mathrm{O}(n)$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Zum Beispiel:

$$\varphi(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathbb{R}^n.$$

Solche φ heißen *euklidische Bewegungen*. Also

$$\{\text{euklidische Bewegungen}\} \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}).$$

Beispiel. Für die Isometrien von $(M, g) = (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$ gilt:

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus mit

$$\begin{aligned} D\varphi|_{\mathbf{x}} \in \mathrm{O}(n,1) &:= \{A \in \mathrm{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{R}) \mid \langle\langle Ay, Az \rangle\rangle = \langle\langle y, z \rangle\rangle\ \forall\, y, z \in \mathbb{R}^{n+1}\} \\ &= \{A \in \mathrm{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{R}) \mid A^* I_{1,n}, A = I_{1,n}\} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $I_{1,n} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zum Beispiel:

$$\varphi(x) = Ax + b,\ A \in \mathrm{O}(n,1), b \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Solche φ heißen *Poincaré-Transformationen*. Es gilt also

$$\{\text{Poincaré-Transformationen}\} \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}}).$$

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathrm{S}^n, g_{\text{std}})$. Zu $A \in \mathrm{O}(n+1)$ setze $\varphi := A|_{S^n} : \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_p\mathrm{S}^n \arrow[r, "d\varphi|_p"] \arrow[d, "\Phi_p"'] & T_{\varphi(p)}\mathrm{S}^n \arrow[d, "\Phi_{\varphi(p)}"] \\ \mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$

kommutiert, denn sei $\dot{c}(0) \in T_p\mathcal{S}^n$. Dann:

$$\begin{tikzcd} \dot{c}(0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\varphi \circ c)^{\cdot}(0) \arrow[r, phantom, "="] & (A \circ c)^{\cdot}(0) \arrow[d, mapsto] \\ \frac{d}{dt}c|_{t=0} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}c|_{t=0} \arrow[r, phantom, "="] & \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot c)|_{t=0} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $d\varphi|_p$ ist eine lineare Isometrie.

$\Rightarrow$ φ ist eine Isometrie.

$\Rightarrow$ $\mathrm{O}(n+1) \subset \mathrm{Isom}(\mathrm{S}^n, g_{\text{std}})$.

Bemerkung. Tatsächlich haben wir in den letzten drei Beispielen bereits alle Isometrien identifiziert, d. h.

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) &= \{\text{euklidische Bewegungen}\}, \\ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}}) &= \text{Poincaré-Gruppe und} \\ \mathrm{Isom}(\mathrm{S}^n, g_{\text{std}}) &= \mathrm{O}(n+1) \end{aligned}$$

Der Beweis, dass diese Räume keine weiteren Isometrien haben, erfolgt in Kapitel 4.4.

2.3 Differentiation von Vektorfeldern

Frage. Wie leitet man Vektorfelder ab**?**

Naiver Versuch. Sei $p \in M$, M differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wähle eine Karte $x : U \to V$ auf M mit $p \in U$. Schreibe $\xi \in T_pM$ als

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \ \xi^i \in \mathbb{R}, \text{ und } \eta = \sum_{i=j}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

wobei die η^j glatte Funktionen nahe $x(p)$ sind. Erkläre die Ableitung von η nach ξ durch

$$\sum_{i,j=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\bigg|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p.$$

Problem. Diese Definition ist abhängig von der Wahl der Karte x.

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^2$. In Polarkoordinaten (r, φ) setze

$$\xi = \eta = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Dann ist die Ableitung von η nach ξ gleich 0, da die Koeffizientenfunktionen η^j konstant sind. In kartesischen Koordinaten (x^1, x^2) ergibt sich

$$\xi = \eta = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Für die Ableitung von η nach ξ gilt dann:

$$\begin{aligned} &\left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)(-x^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)(x^1)\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = -r\frac{\partial}{\partial r} \neq 0. \end{aligned}$$

Notation. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $U \subset M$ offen.

$$\begin{aligned} C^k(U, TM) &:= \{C^k\text{-Vektorfelder, definiert auf } U\}, \\ \Xi_p &:= \bigcup_{\substack{U \subset M \text{ offen} \\ \text{mit } p \in U}} C^\infty(U, TM). \end{aligned}$$

Definition. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Eine Abbildung

$$\nabla : T_pM \times \Xi_p \to T_pM$$

heißt *Levi-Civita-Zusammenhang* (in p), falls gilt:

(i) Lokalität
Für alle $\xi \in T_pM$, für alle $\eta \in C^\infty(U, TM)$ und für alle $\tilde{U} \subset U$ mit $p \in \tilde{U}$ gilt:

$$\nabla_\xi \eta = \nabla_\xi (\eta|_{\tilde{U}}).$$

(ii) Linearität im ersten Argument
Für alle $\xi_1, \xi_2 \in T_pM$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und für alle $\eta \in \Xi_p$ gilt:

$$\nabla_{\alpha\xi_1 + \beta\xi_2} \eta = \alpha \nabla_{\xi_1} \eta + \beta \nabla_{\xi_2} \eta.$$

(iii) Additivität im zweiten Argument
Für alle $\xi \in T_pM$ und für alle $\eta_1, \eta_2 \in \Xi_p$ gilt:

$$\nabla_\xi (\eta_1 + \eta_2) = \nabla_\xi \eta_1 + \nabla_\xi \eta_2.$$

(iv) Produktregel I
Für alle $f \in C_p^\infty$, für alle $\eta \in \Xi_p$ und für alle $\xi \in T_pM$ gilt:

$$\nabla_\xi (f \cdot \eta) = \partial_\xi f \cdot \eta|_p + f(p) \cdot \nabla_\xi \eta.$$

(v) Produktregel II

Für alle $\xi \in T_pM$ und für alle $\eta_1, \eta_2 \in \Xi_p$ gilt:

$$\partial_\xi g(\eta_1, \eta_2) = g|_p(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2|_p) + g|_p(\eta_1|_p, \nabla_\xi \eta_2).$$

(vi) Torsionsfreiheit

Für alle Karten $x : U \to V$ von M mit $p \in U$ gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

für alle i und j.

Bemerkung. **(1)** Aus *(iii)* und *(iv)* folgt die $\mathbb{R}$-Linearität im zweiten Argument. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) &\overset{(iii)}{=} \nabla_\xi(\alpha\eta_1) + \nabla_\xi(\beta\eta_2) \\
&\overset{(iv)}{=} \underbrace{\partial_\xi \alpha}_{=0} \cdot \eta_1|_p + \alpha\nabla_\xi(\eta_1) + \underbrace{\partial_\xi \beta}_{=0} \cdot \eta_2|_p + \beta\nabla_\xi(\eta_2) \\
&= \alpha\nabla_\xi(\eta_1) + \beta\nabla_\xi(\eta_2)
\end{aligned}$$

(2) Gilt *(vi)* in einer Karte x, so auch in jeder anderen Karte y, die p enthält.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_p} \frac{\partial}{\partial y^j} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_p} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&\overset{(iii)}{\underset{(iv)}{=}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j}\bigg|_{y(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\bigg|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j}\bigg|_{y(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\bigg|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^i}\bigg|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist in i und j symmetrisch wegen des Satzes von Schwarz. Für den zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\bigg|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^i}\bigg|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^k} &\overset{(vi)}{=} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\bigg|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial y^i}\bigg|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^l} \\
\text{Umbenennen der Indizes} \quad &= \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\bigg|_{y(p)} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\bigg|_{y(p)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}\big|_p} \frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

Dieser ist also auch symmetrisch.

(3) Für Nicht-Koordinatenfelder ξ und η gilt im Allgemeinen

$$\nabla_\xi \eta \neq \nabla_\eta \xi$$

Beispiel. $\xi = \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \eta = f \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\partial_\xi f \neq 0$.

Definition. Schreibe

$$\boxed{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p} \tag{2.1}$$

Die Γ_{ij}^k heißen *Christoffel-Symbole*.

Bemerkung. Die Christoffel-Symbole legen ∇ fest:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p} \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} &\overset{(ii),(iii)}{=} \sum_{i,j=1}^n \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p} \left(\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&\overset{(iv)}{=} \sum_{i,j=1}^n \xi^i \left(\left.\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\right|_{x(p)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p + \eta^j|_{x(p)} \cdot \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right) \\
&= \sum_{i,k=1}^n \xi^i \left(\left.\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i}\right|_{x(p)} + \sum_{j=1}^n \eta^j|_{x(p)} \cdot \Gamma_{ij}^k(x(p)) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Bemerkung. Torsionsfreiheit bedeutet für die Christoffel-Symbole Symmetrie:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \text{ für alle } i, j, k.$$

Satz 2.3.1. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Dann gibt es genau einen Levi-Civita-Zusammenhang in p.*

Beweis. *Eindeutigkeit:* Sei $x : U \to V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Verwende die einsteinsche Summenkonvention.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&\overset{(v)}{=} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&\overset{2.2}{=} g\left(\Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \Gamma_{ki}^l \cdot g_{lj} + \Gamma_{kj}^l \cdot g_{il}
\end{aligned}$$

Daraus folgen durch Vertauschen der Indizes die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l \cdot g_{lj} + \Gamma_{kj}^l \cdot g_{il} \tag{2.3}$$

$$\begin{matrix} i \to i \\ j \to k \\ k \to j \end{matrix} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ji}^l \cdot g_{lk} + \Gamma_{jk}^l \cdot g_{il} \tag{2.4}$$

$$\begin{matrix} i \to k \\ j \to j \\ k \to i \end{matrix} \quad \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^l \cdot g_{lj} + \Gamma_{ij}^l \cdot g_{kl} \tag{2.5}$$

Die Gleichung (2.3)−(2.4)+(2.5) ergibt mit der Torsionsfreiheit:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{ki}^l \cdot g_{lj}.$$

Sei $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die zu $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ inverse Matrix. Diese kann gebildet werden, da $g|_p$ nicht entartet ist. Es gilt also:

$$g^{ij} \cdot g_{jk} = \delta_k^i.$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right) g^{jm} = 2\Gamma^l_{ki} \cdot \underbrace{g_{lj} \cdot g^{jm}}_{=\delta^m_l}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^m_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right) g^{jm}$$

Etwas schöner lässt sich das schreiben (mit $k \to j, m \to k, j \to m$):

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{mk}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)} \tag{2.6}$$

Daraus folgt, dass die Christoffel-Symbole und damit auch ∇ durch die Komponenten der semi-riemannschen Metrik und ihre ersten Ableitungen festgelegt sind.

Existenz: Definiere die Γ^k_{ij} durch Gleichung (2.6) und ∇ durch Gleichung (2.2). Dann gilt:

(i) Lokalität ist erfüllt.

(ii) Linearität im ersten Argument ist erfüllt.

(iii) Additivität im zweiten Argument ist erfüllt.

(iv) Für die erste Produktregel gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi(f\eta) &= \xi^i\left(\frac{\partial(f\cdot\eta^k)}{\partial x^i} + f\eta^j\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= f\cdot\xi^i\left(\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i} + \eta^j\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} + \xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\eta^k\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= f\cdot\nabla_\xi\eta + \partial_\xi f\cdot\eta
\end{aligned}$$

Bislang wurde Gleichung 2.6 noch nicht benutzt.

(v) Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&\partial_\zeta g(\xi,\eta) - g(\nabla_\zeta\xi,\eta) - g(\xi,\nabla_\zeta\eta) \\
&= \zeta^k\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\xi^i\eta^j) - g_{ij}\zeta^k\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k} + \xi^l\Gamma^i_{lk}\right)\eta^j - g_{ij}\xi^i\zeta^k\left(\frac{\partial\eta^j}{\partial x^k} + \eta^l\Gamma^j_{lk}\right) \\
&= \xi^i\eta^j\zeta^k\left(\frac{g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l_{ik} - g_{il}\Gamma^l_{jk}\right) \\
&\overset{2.6}{=} \xi^i\eta^j\zeta^k\Bigg(\frac{g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\underbrace{g_{lj}g^{ml}}_{=\delta^m_j}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\underbrace{g_{il}g^{ml}}_{=\delta^m_i}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right)\Bigg) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(vi) Symmetrie der Christoffel-Symbole ist klar auf Grund von Gleichung (2.6).

□

Bemerkung. Für eine Karte $x : U \to V$ auf (M, g) bilden die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) : V \to \mathbb{R}$$

C^∞-Funktionen.

Bemerkung. Als wir am Anfang dieses Abschnittes versucht haben, naiv Vektorfelder zu differenzieren, entsprach dies dem Ansatz $\Gamma_{ij}^k = 0$. Die korrekte allgemeine Formel ist aber durch (2.2) gegeben.

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}})$. In kartesischen Koordinaten x^1, x^2 sind die $g_{ij} = \delta_i^j$ konstant. Daraus folgt: $\Gamma_{ij}^k = 0$. In diesem Fall sind einfach die Koeffizientenfunktionen zu differenzieren:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \nabla_{-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\
&= \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (-x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \quad = \quad -r \frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten r, φ ergibt sich:

$$(g_{ij})(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Die Christoffel-Symbole sind dann:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(1 \cdot (0 + 0 - 0) + 0 \cdot \ldots) = 0.$$

Analog: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$. Außerdem:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} \right) + 0 \cdot \ldots \right) = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Daraus folgt: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial}{\partial r}$.

Sprechweise. $\nabla_\xi \eta$ heißt auch *kovariante Ableitung* von η nach ξ.

∇ war definiert als eine Abbildung $T_pM \times \Xi_p \to T_pM$. ∇ liefert aber auch eine Abbildung

$$\nabla : \Xi(M) \times \Xi(M) \to \Xi(M),$$

wobei $\Xi(M)$ die Menge der glatten Vektorfelder auf M bezeichnet, durch

$$(\nabla_\xi \eta)(p) := \nabla_{\xi(p)} \eta.$$

Wir wissen: $\nabla_\xi(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) = \alpha_1 \nabla_\xi \eta_1 + \alpha_2 \nabla_\xi \eta_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Für ξ gilt sogar:

$$\nabla_{f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2} \eta = f_1 \nabla_{\xi_1} \eta + f_2 \nabla_{\xi_2} \eta,$$

wobei $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$. Also ist $\nabla_\xi \eta$ in ξ sogar $C^\infty(M)$-linear, in η dagegen nur $\mathbb{R}$-linear.

Bemerkung. Zur Berechnung von $\nabla_\xi \eta$ mit $\xi = \dot{c}(0)$ muss man η nur längs der Kurve c kennen, denn:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{c}(0)} \left(\sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \nabla_{\sum_{i=1}^n \dot{c}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(0) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(0) \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^n \eta^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (\eta^j \circ c)|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k=1}^n \dot{c}^i(0) \eta^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

2.4 Vektorfelder längs Abbildungen

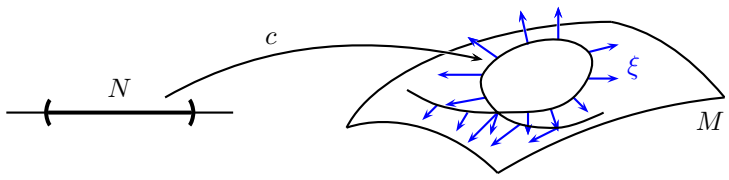
Definition. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $\varphi : N \to M$. Dann heißt eine Abbildung $\xi : N \to TM$ *Vektorfeld längs* φ, falls für die Fußpunkt-Abbildung $\pi_M : TM \to M$ gilt:

$$\pi_M \circ \xi = \varphi.$$

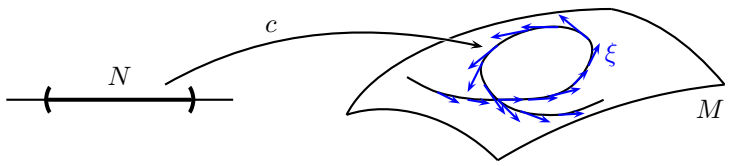
Beispiel.

- *Vektorfelder längs Kurven.*

  Sei $N = I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $c = \varphi : N = I \to M$ eine Kurve.



  Etwa $\xi(t) = \dot{c}(t) := \dot{c}_t(0)$, wobei $c_t(s) := c(t+s)$, das *Geschwindigkeitsfeld* von c.



- Seien $N = M, \varphi = \mathrm{id}$. Dann ist ein Vektorfeld längs id gleich einem Vektorfeld im bisherigen Sinne.
- Sei φ konstant, das heißt $\varphi(x) = p$ für alle $x \in N$. Dann ist ein Vektorfeld längs φ eine Abbildung $N \to T_pM$.
- Sei φ differenzierbar und sei ξ ein Vektorfeld auf N. Dann ist

  $$p \mapsto d\varphi|_p(\xi(p)) \in T_{\varphi(p)}M$$

  ein Vektorfeld längs φ.

- Ist ξ ein Vektorfeld auf M, so ist
$$p \mapsto \xi(\varphi(p))$$
ein Vektorfeld längs φ.

Definition. Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\varphi : N \to M$ differenzierbar. Sei $\eta : N \to TM$ ein differenzierbares Vektorfeld längs φ. Seien $p \in N, \xi \in T_pN$. Wir definieren die *kovariante Ableitung* $\nabla_\xi \eta \in T_{\varphi(p)}M$ wie folgt:

Wähle eine Karte $x : U \to V$ von M mit $\varphi(p) \in U$, schreibe
$$\eta(q) = \sum_{j=1}^{n} \eta^j(q) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(q)}$$
mit differenzierbaren Funktionen $\eta^1, \ldots, \eta^n$, definiert in der Umgebung $\varphi^{-1}(U)$ von p. Wähle ferner eine Kurve c mit $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ mit $\dot{c}(0) = \xi$ und setze
$$\begin{aligned}\nabla_\xi \eta &:= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}(\eta^k \circ c)|_{t=0} + \sum_{i,j=1}^{n} \eta^j(p) \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ c)|_{t=0} \Gamma_{ij}^k(x(\varphi(p))) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\varphi(p)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_\xi \eta^k + \sum_{i,j=1}^{n} \eta^j(p)\, d\varphi(\xi)^i\, \Gamma_{ij}^k(x(\varphi(p))) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\varphi(p)}.\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.4.1. *Seien N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\varphi : N \to M$ differenzierbar. Seien η, η_1, η_2 differenzierbare Vektorfelder längs φ, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, sei $f : N \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Seien ferner $p \in N$ und $\xi, \xi_1, \xi_2 \in T_pM$. Dann ist die kovariante Ableitung $\nabla_\xi \eta$ unabhängig von der Wahl der Karte x und der Kurve c mit $\dot{c}(0) = \xi$ definiert und es gilt:*

(0) Ist η von der Form $\eta = \zeta \circ \varphi$, wobei ζ ein differenzierbares Vektorfeld auf M ist, so gilt
$$\nabla_\xi \eta = \nabla_{d\varphi|_p(\xi)} \zeta.$$

(i) Lokalität: *Ändert man η außerhalb einer Umgebung von p ab, so ändert sich $\nabla_\xi \eta$ nicht.*

(ii) Linearität im ersten Argument:
$$\nabla_{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2} \eta = \alpha_1 \nabla_{\xi_1} \eta + \alpha_2 \nabla_{\xi_2} \eta.$$

(iii) Linearität im zweiten Argument:
$$\nabla_\xi(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2) = \alpha_1 \nabla_\xi \eta_1 + \alpha_2 \nabla_\xi \eta_2.$$

(iv) Produktregel I:
$$\nabla_\xi(f \cdot \eta) = \partial_\xi f \cdot \eta(p) + f(p) \nabla_\xi \eta.$$

(v) Produktregel II:
$$\partial_\xi g(\eta_1, \eta_2) = g|_{\varphi(p)}(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2(p)) + g|_{\varphi(p)}(\eta_1(p), \nabla_\xi \eta_2).$$

(vi) Torsionsfreiheit: *Für alle Karten y von N und alle $i, j = 1, \ldots, \dim(N)$ gilt:*
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right).$$

Beweis. Ergibt sich aus der Definition und den entsprechenden Axiomen für den Levi-Civita-Zusammenhang □

Notation. Für lokale Koordinaten y auf N schreiben wir auch

$$\frac{\nabla\eta}{\partial y^l}(p) := \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^l}\big|_p}\eta = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta^k}{\partial y^l}\bigg|_{y(p)} + \sum_{i,j}^{n}\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^l}(p)\cdot\eta^j(y(p))\cdot\Gamma_{ij}^k(x(\varphi(p)))\right)\frac{\partial}{\partial x^k}(p).$$

Speziell falls N eindimensional ist, schreibe statt

$$\frac{\nabla\eta}{\partial t} =: \frac{\nabla\eta}{dt}.$$

Im Fall einer Kurve $c : I \to M$ haben wir in lokalen Koordinaten auf M die Formel

$$\frac{\nabla\eta}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\dot\eta^k(t) + \sum_{i,j}^{n}\dot c^i(t)\cdot\eta^j(t)\cdot\Gamma_{ij}^k(x(c(t)))\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{c(t)}.$$

Beispiel. Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$.

Dann sind in kartesischen Koordinaten die g_{ij} konstant. Deshalb verschwinden die Christoffel-Symbole: $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Für $N = I \subset \mathbb{R}$ Intervall, für eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $c : I \to M$ und für ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld ξ längs c gilt mit $\xi(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j}|_{c(t)}$ gilt dann:

$$\frac{\nabla}{dt}\xi(t) = \sum_{j=1}^{n}\dot\xi^j(t)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{c(t)}.$$

Beispiel. In der euklidischen Ebene $(M,g) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}})$ betrachten wir die Kreislinie $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ und ihr Geschwindigkeitsfeld $\xi(t) = \dot c(t) = -\sin(t)\,\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{c(t)} + \cos(t)\,\frac{\partial}{\partial x^2}\big|_{c(t)}$. In den kartesischen Koordinaten erhalten wir gemäß dem vorangegangenen Beispiel

$$\frac{\nabla}{dt}\xi(t) = \frac{\nabla}{dt}\dot c(t) = -\cos(t)\,\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{c(t)} - \sin(t)\,\frac{\partial}{\partial x^2}\bigg|_{c(t)} = -\,\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)}.$$

Machen wir die Rechnung zur Kontrolle auch in Polarkoordinaten (r,φ). Nun ist $c^1(t) = r(t) = 1$ und $c^2(t) = \varphi(t) = t$ sowie $\xi(t) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{c(t)}$, d. h. $\xi^1(t) = 0$ und $\xi^2(t) = 1$. Dieses Mal treten also keine Ableitungen der Koeffizienten von ξ auf, aber dafür sind die Christoffel-Symbole nun zu beachten. Die drei nichtverschwindenden Christoffel-Symbole für Polarkoordinaten der euklischen Ebene lauten

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}\xi(t) &= \sum_{ij=1}^{2}\dot c^i(t)\xi^j(t)\Gamma_{ij}^1(r(t),\varphi(t))\,\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} + \sum_{ij=1}^{2}\dot c^i(t)\xi^j(t)\Gamma_{ij}^2(r(t),\varphi(t))\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\bigg|_{c(t)}\\
&= \dot c^2(t)\xi^2(t)(-r(t))\,\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} + \left(\dot c^1(t)\xi^2(t)\frac{1}{r(t)} + \dot c^2(t)\xi^1(t)\frac{1}{r(t)}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\bigg|_{c(t)}\\
&= 1\cdot 1\cdot(-1)\,\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)} + (0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\bigg|_{c(t)}\\
&= -\,\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{c(t)}.
\end{aligned}$$

2.5 Parallelverschiebung

Definition. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld ξ längs c heißt *parallel*, falls

$$\frac{\nabla}{dt}\xi \equiv 0.$$

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} & \xi(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)} \text{ ist parallel} \\ \Leftrightarrow \quad & \dot{\xi}^j(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \\ \Leftrightarrow \quad & \text{Die } \xi^j \text{ sind konstant.} \end{aligned}$$

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$. In Polarkoordinaten (r, φ) gilt:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{22} = -r.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial r} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ ist parallel} \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= \frac{\nabla}{dt}\xi \\ &= \dot{\xi}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \xi^1 \nabla_{\dot{c} = \dot{c}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \dot{c}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\xi}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \xi^2 \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \dot{\xi}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \xi^1 \left(\dot{c}^1 \cdot 0 + \dot{c}^2 \cdot \frac{1}{c^1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \dot{\xi}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \xi^2 \left(\dot{c}^1 \frac{1}{c^1} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{c}^2 (-c^1) \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= (\dot{\xi}^1 - c^1 \dot{c}^2 \xi^2) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\dot{\xi}^2 + \frac{\dot{c}^2}{c^1} \xi^1 + \frac{\dot{c}^1}{c^1} \xi^2 \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit:

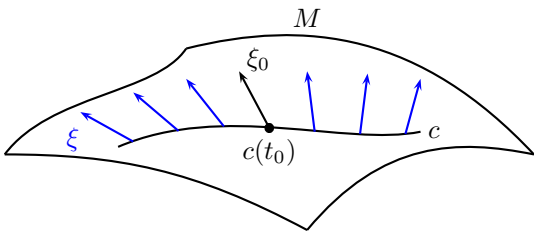
$$\dot{\xi}^1 - c^1 \dot{c}^2 \xi^2 = 0, \quad \dot{\xi}^2 + \frac{\dot{c}^2}{c^1} \xi^1 + \frac{\dot{c}^1}{c^1} \xi^2 = 0,$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \dot{\xi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^1 \dot{c}^2 \\ -\frac{\dot{c}^2}{c^1} & -\frac{\dot{c}^1}{c^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für (ξ^1, ξ^2).

Proposition 2.5.1. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Manngigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve, sei $t_0 \in I$. Zu $\xi_0 \in T_{c(t_0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld ξ längs c mit $\xi(t_0) = \xi_0$.*



Beweis. **Fall 1:** Sei $c(I)$ in einer Karte enthalten.

Sei $x : U \to V$ eine solche Karte. Dann ist die Bedinung $\frac{\nabla}{dt}\xi = 0$ äquivalent zu

$$\dot{\xi}^k = -\sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ x \circ c)\dot{c}^i \cdot \xi^j \,,$$

was ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung ist. Es exisiert also eine eindeutige Lösung mit der Anfangsbedingung

$$(\xi^1(t_0), \ldots, \xi^n(t_0)) = (\xi_0^1, \ldots, \xi_0^n).$$

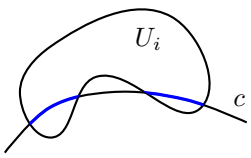
Wegen der Linearität des Systems ist die Lösung auf ganz I definiert.

Fall 2: Sei $c(I)$ nicht in einer Karte enthalten.

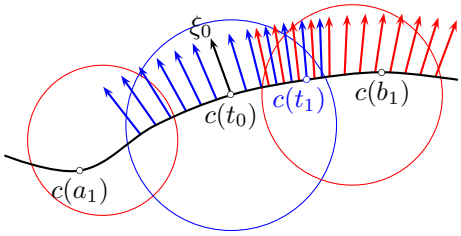
Existenz: Schreibe $I = (a, b)$, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Wähle $a < a_i < t_0 < b_i < b$ mit $a_i \to a$ und $b_i \to b$.

Dann ist $c([a_i, b_i])$ kompakt und kann durch endlich viele Karten $x_1 : U_1 \to V_1, \ldots, x_N : U_N \to V_N$ überdeckt werden.

O. B. d. A. sei $U_i \cap c([a_1, b_1])$ zusammenhängend.



So was nicht!



O. B. d. A. sei $c(t_0) \in U_1$. Löse gemäß Fall 1 die Gleichung $\dfrac{\nabla}{dt}\xi = 0$ mit $\xi(t_0) = \xi_0$ in U_1.

Falls die Lösung noch nicht auf ganz $[a_1, b_1]$ erklärt ist, wähle $t_1 \in (a_1, b_1)$ mit $c(t_1) \in U_1 \cap U_2$. Löse dann die Gleichung in der Karte x_2 mit der Anfangsbedingung $\xi(t_1)$, gegeben durch die vorherige Lösung.

Wegen der Eindeutigkeit gemäß Fall 1 stimmen die beiden parallelen Vektorfelder auf $U_1 \cap U_2$ überein, usw.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir ein paralleles Vektorfeld, das auf $[a_1, b_1]$ definiert ist.

Dasselbe für das nächste kompakte Teilintervall $[a_2, b_2]$ liefert ein paralleles Vektorfeld auf $[a_2, b_2]$, das dasjenige auf $[a_1, b_1]$ fortsetzt.

Induktion liefert dann ein paralleles Vektorfeld ξ auf $[a_i, b_i]$ mit $\xi(t_0) = \xi_0$. Wegen $\bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i] = (a, b)$ erhalten wir ein paralleles Vektorfeld ξ mit $\xi(t_0) = \xi_0$ auf (a, b).

Eindeutigkeit: Seien ξ und $\tilde{\xi}$ zwei parallele Vektorfelder längs c mit $\xi(t_0) = \tilde{\xi}(t_0) = \xi_0$. Schreibe $I = I_{\text{gut}} \dot{\cup} I_{\text{schlecht}}$, wobei

$$\begin{aligned} I_{\text{gut}} &= \{t \in I \mid \xi(t) = \tilde{\xi}(t)\} \\ I_{\text{schlecht}} &= \{t \in I \mid \xi(t) \neq \tilde{\xi}(t)\} \end{aligned}$$

Da ξ und $\tilde{\xi}$ stetig sind, ist I_{gut} abgeschlossen in I. Für $t_1 \in I_{\text{gut}}$ wähle eine Karte $x : U \to V$, die $c(t_1)$ enthält. Nach dem ersten Fall gilt dann:

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) \text{für alle } t \in I \text{ mit } c(t) \in U.$$

$\Rightarrow$ Eine Umgebung von t_1 ist in I_{gut} enthalten.

$\Rightarrow$ I_{gut} ist offen in I. Also

$$I = \underbrace{\overset{\text{offen}}{I_{\text{gut}}}}_{\ni t_0} \dot{\cup} I_{\text{schlecht}}.$$

Da I zusammenhängend ist, muss gelten: $I_{\text{schlecht}} = \emptyset$ und daher

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t) \text{ für alle } t \in I_{\text{gut}} = I.$$

□

Definition. Seien $t_0, t_1 \in I$. Die Abbildung

$$P_{c,t_0,t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M,\ \xi_0 \mapsto \xi(t_1)$$

heißt *Parallelverschiebung* längs c, wobei $\xi(t)$ das parallele Vektorfeld längs c ist mit $\xi(t_0) = \xi_0$.

PROPOSITION 2.5.2. *Für die Parallelverschiebung gilt:*

(a) $P_{c,t_0,t_1} : (T_{c(t_0)}M, g|_{c(t_0)}) \to (T_{c(t_1)}M, g|_{c(t_1)})$ *ist eine lineare Isometrie.*

(b) $P_{c,t_0,t_2} = P_{c,t_1,t_2} \circ P_{c,t_0,t_1}$.

Beweis.

(a) Seien $\xi_0, \eta_0 \in T_{c(t_0)}M$. Seien ξ, η die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs c. Dann

$$\frac{d}{dt} g(\xi, \eta) = g\Big(\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\xi}_{=0}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\eta}_{=0}\Big) = 0.$$

Daher ist $g(\xi, \eta)$ konstant und somit

$$\begin{aligned} g(P_{c,t_0,t_1}(\xi_0), P_{c,t_0,t_1}(\eta_0)) &= g(\xi(t_1), \eta(t_1)) \\ &= g(\xi(t_0), \eta(t_0)) \\ &= g(\xi_0, \eta_0). \end{aligned}$$

(b) Klar.

□

Bemerkung. Zu $\xi_0 \in T_{c(t_0)}M$ ist das parallele Vektorfeld ξ mit $\xi(t_0) = \xi_0$ gegeben durch

$$\xi(t) = P_{c,t_0,t_1}(\xi_0).$$

Wir haben an geometrischer Struktur:

semi-riemannsche Metrik $\rightsquigarrow$ kovariante Ableitung ∇ $\rightsquigarrow$ Parallelverschiebung P

Man kann ∇ aus P rekonstruieren:

PROPOSITION 2.5.3. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve, sei $t_0 \in I$. Dann gilt für jedes $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld ξ längs c:*

$$\frac{\nabla}{dt}\xi|_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{c,t,t_0}(\xi(t)) - \xi(t_0)}{t - t_0}.$$

Beweis. Sei $e_1(t_0), \ldots, e_n(t_0)$ eine Basis von $T_{c(t_0)}M$. Seien $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs c.

Dann folgt aus der Proposition 10.2 (a), dass $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ eine Basis von $T_{c(t)}M$ ist für alle $t \in I$. Schreibe $\xi(t) = \sum_{j=1}^n \xi^j(t) e_j(t)$. Dann

$$\begin{aligned}
\frac{P_{c,t,t_0}(\xi(t)) - \xi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\sum_{j=1}^n \xi^j(t) \overbrace{P_{c,t,t_0}(e_j(t))}^{=e_j(t_0)} - \sum_{j=1}^n \xi^j(t_0) e_j(t_0)}{t - t_0} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\xi^j(t) - \xi^j(t_0)}{t - t_0} e_j(t_0) \\
&\overset{t \to t_0}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t_0) e_j(t_0)
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}\xi|_{t_0} &= \frac{\nabla}{dt}\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right)\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\dot{\xi}^j(t_0) e_j(t_0) + \xi^j(t_0) \underbrace{\frac{\nabla}{dt} e_j|_{t_0}}_{=0}\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \dot{\xi}^j(t_0) e_j(t_0)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Ist $\psi : M \to \tilde{M}$ eine lokale Isometrie und ist $c : I \to M$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve, so setze $\tilde{c} := \psi \circ c$. Dann gilt für jedes $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld ξ längs c:

$$\xi \text{ parallel längs } c \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\xi} := d\psi \circ \xi \text{ parallel längs } \tilde{c}.$$

Insbesondere kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
T_{c(t_0)}M \arrow[r, "P_{c,t_0,t_1}"] \arrow[d, "d\psi|_{c(t_0)}"'] & T_{c(t_1)}M \arrow[d, "d\psi|_{c(t_1)}"] \\
T_{\tilde{c}(t_0)}\tilde{M} \arrow[r, "P_{\tilde{c},t_0,t_1}"] & T_{\tilde{c}(t_1)}\tilde{M}
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist $P_{c,t_0,t_1} \neq P_{\hat{c},s_0,s_1}$, auch wenn $c(t_0) = \hat{c}(s_0)$ und $c(t_1) = \hat{c}(s_1)$.

Beispiel. Für die Parallelverschiebung auf $(M, g) = (\mathrm{S}^2, g_{\text{std}})$ siehe auch:
`http://www.math.uiuc.edu/~jms/java/dragsphere/`

2.6 Geodätische

Definition. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve. Dann heißt

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))\, dt$$

Energie von c.

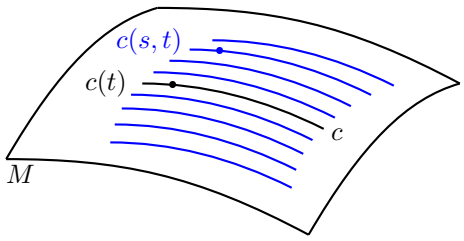
Bemerkung. Falls (M, g) riemannsch ist, so gilt $g(\dot{c}, \dot{c}) \geq 0$ und somit $E[c] \geq 0$ (und gleich 0 genau dann, wenn c konstant ist).

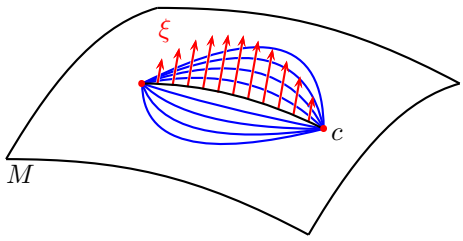
Frage. Gibt es Kurven minimaler Energie zu vorgegebenen Endpunkten (oder allgemeiner: stationärer Energie)**?**

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve. Eine *Variation* von c ist eine glatte Abbildung

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$$

mit $c(0, t) = c(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Falls $c(s, a) = c(a)$ und $c(s, b) = c(b)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so heißt $c(s, t)$ *Variation mit festen Endpunkten*.





Das Vektorfeld $\xi(t) := \dfrac{\partial c}{\partial s}(0, t)$ heißt das *Variationsvektorfeld*.

Bemerkung. Das Variationsvektorfeld ξ einer Variation mit festen Endpunkten erfüllt:

$$\xi(a) = 0 \text{ und } \xi(b) = 0.$$

SATZ 2.6.1 (Erste Variation der Energie). *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve, sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ eine Variation dieser Kurve. Schreibe $c_s(t) = c(s, t)$. Sei ξ das Variationsvektorfeld. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} = -\int_a^b g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right)\, dt + g(\xi(b), \dot{c}(b)) - g(\xi(a), \dot{c}(a)).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\int_a^b g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} g\left(\frac{\partial c}{\partial t}(s,t), \frac{\partial c}{\partial t}(s,t)\right)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b 2 \cdot g\left(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(0,t), \frac{\partial c}{\partial t}(0,t)\right)\, dt \\
&\overset{(*)}{=} \int_a^b g\left(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}(0,t), \frac{\partial c}{\partial t}(0,t)\right)\, dt \\
&= \int_a^b g\left(\frac{\nabla}{dt}\xi(t), \dot{c}(t)\right)\, dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{d}{dt}g(\xi(t), \dot{c}(t)) - g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right)\right]\, dt \\
&= g(\xi(b), \dot{c}(b)) - g(\xi(a), \dot{c}(a)) - \int_a^b g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right)\, dt.
\end{aligned}$$

Dabei folgt (*) aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs. □

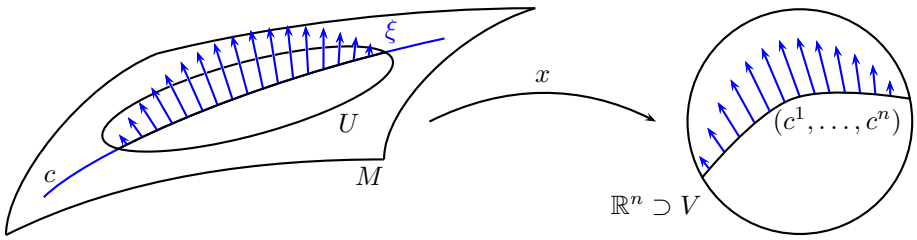
KOROLLAR 2.6.2. *Ist ξ das Variationsvektorfeld einer Variation mit festen Endpunkten, so gilt*

$$\frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} = -\int_a^b g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right)\, dt.$$

LEMMA 2.6.3. *Sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve, sei ξ ein glattes Vektorfeld längs c. Dann existiert eine Variation von c mit Variationsvektorfeld ξ. Falls $\xi(a) = 0$ und $\xi(b) = 0$, so kann die Variation mit festen Endpunkten gewählt werden.*

Beweis.

(a) Betrachte den Fall, dass $\operatorname{supp}(\xi)$ in einer Karte $x : U \to V$ enthalten ist, das heißt $c(t) \in U$, falls $\xi(t) \neq 0$.



Schreibe $\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}$. Setze

$$c(s,t) := \begin{cases} x^{-1}((c^1(t),\dots,c^n(t)) + s(\xi^1(t),\dots,\xi^n(t))), & c(t) \in U \\ c(t) & , c(t) \notin U \end{cases}$$

Dann gilt für das zugehörige Variationvektorfeld:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial s}(0,t)\right)^j &= dx^j \left(\frac{\partial c}{\partial s}(0,t)\right) \\ &= \frac{\partial (x^j \circ c)}{\partial s}(0,t) \\ &= \left.\frac{\partial (c^j(t) + s\xi^j(t))}{\partial s}\right|_{s=0} \\ &= \xi^j(t). \end{aligned}$$

(b) Im allgemeinen Fall überdecke die kompakte Menge $c([a,b])$ durch endlich viele Karten und konstruiere die Variation stückweise. □

Bemerkung. Später folgt ein noch einfacherer Beweis.

Notation. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $p, q \in M$. Dann setze

$$\Omega_{p,q}(M) := \{\text{glatte Kurven } c : [a,b] \to M \text{ mit } c(a) = p \text{ und } c(b) = q\}.$$

KOROLLAR 2.6.4. *Ist $c \in \Omega_{p,q}(M)$ ein „kritischer Punkt" des Energiefunktionals, das heißt*

$$\frac{d}{ds} E[c_s]|_{s=0} = 0$$

für alle Variationen c_s von c mit festen Endpunkten, dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

für alle $t \in [a,b]$.

Beweis. Angenommen, es existiert ein $t_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0) \neq 0.$$

Dann existiert ein $\xi_0 \in T_{c(t_0)}M$ mit

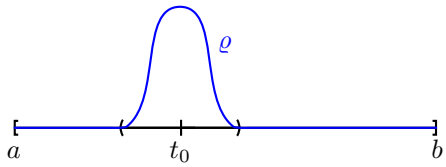
$$g\left(\xi_0, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t_0)\right) > 0.$$

Sei $\tilde{\xi}$ das parallele Vektorfeld längs c mit $\tilde{\xi}(t_0) = \xi_0$. Aus Stetigkeitsgründen existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ und

$$g\left(\tilde{\xi}(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) > 0.$$

für alle $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Wähle eine glatte Funktion $\varrho : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varrho(t) > 0$ für alle $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ und $\varrho(t) = 0$ sonst.



Setze $\xi(t) := \varrho(t) \cdot \tilde{\xi}(t)$. Dann gilt:

$$g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) = \varrho(t) \cdot g\left(\tilde{\xi}(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) \begin{cases} > 0 & \text{für } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wähle gemäß Lemma 11.3 eine Variation von c mit festen Endpunkten und dem Variationsvektorfeld ξ. Dann gilt:

$$\frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} = -\int_a^b g\left(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) dt < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$ auf (a, b) und wegen der Stetigkeit auch auf ganz $[a, b]$. □

Definition. Eine glatte Kurve c mit $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$ heißt *Geodätische*.

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$. In kartesischen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ddot{c}^1 = 0, \ldots, \ddot{c}^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c^j(t) = p^j + tv^j \\ &\Leftrightarrow \quad c(t) = p + tv \\ &\Leftrightarrow \quad c \text{ ist eine Gerade, parametrisiert mit konstanter Geschwindigkeit.} \end{aligned}$$

LEMMA 2.6.5. *Für Geodätische c ist $g(\dot{c}, \dot{c})$ konstant.*

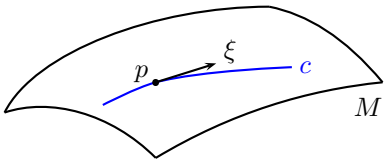
Beweis. $\frac{d}{dt}g(\dot{c}, \dot{c}) = 2 \cdot g\Big(\underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}}_{=0}, \dot{c}\Big) = 0.$ □

Definition. Eine glatte Kurve c heißt

- *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv 1$,
- *nach Eigenzeit parametrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv -1$,
- *proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv \alpha > 0$,
- *proportional zur Eigenzeit parametrisiert*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv -\alpha < 0$ und
- *Nullkurve*, falls $g(\dot{c}, \dot{c}) \equiv 0$.

SATZ 2.6.6 (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen). *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu $p \in M$ und $\xi \in T_pM$ existieren ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Geodätische $c : I \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \xi$.*

Sind $c : I \to M$ und $\tilde{c} : \tilde{I} \to M$ zwei solche Geodätische mit $c(0) = \tilde{c}(0)$ und $\dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$, dann stimmen c und $\tilde{c}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap \tilde{I}$ überein.



Beweis. In der Karte $x : U \to V$ in p lautet die Geodätengleichung

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{c}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(c^1, \ldots, c^n) \cdot \dot{c}^i \cdot \dot{c}^j = 0$$

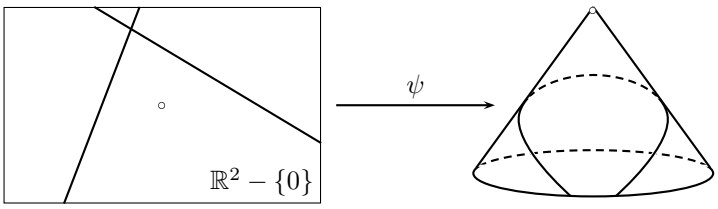
für $k = 1, \ldots, n$ und $c^k = x^k \circ c$. Dies ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Dieses Differentialgleichungssystem ist nicht linear. Daher gibt es keine A-priori-Kontrolle über die Größe des maximalen Definitionsbereiches I der Geodätischen.

Bemerkung. Ist $\psi : M \to \tilde{M}$ eine lokale Isometrie, so ist

$$c : I \to M \text{ Geodätische} \quad \Leftrightarrow \quad \psi \circ c : I \to \tilde{M} \text{ Geodätische.}$$

Beispiel. $M = (\mathbb{R}^2 - \{0\}, g_{\text{eukl}})$, $\tilde{M} =$ Kegel.



Definition. Sei $\psi : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Dann heißt

$$\text{Fix}(\psi) := \{p \in M | \psi(p) = p\}$$

die *Fixpunktmenge* von ψ.

PROPOSITION 2.6.7. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\psi \in \mathrm{Isom}(M, g)$. Dann verläuft für $p \in \mathrm{Fix}(\psi)$ und $\xi \in T_pM$ mit $d\psi|_p(\xi) = \xi$ die Geodätische $c : I \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \xi$ ganz in $\mathrm{Fix}(\psi)$, das heißt für alle $t \in I$ ist $c(t) \in \mathrm{Fix}(\psi)$.*

Beweis. Setze $\tilde{c}(t) := \psi \circ c(t)$. Da ψ eine Isometrie ist, ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine Geodätische. Es gilt:

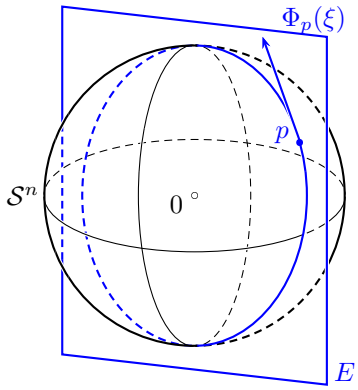
$$\begin{aligned} \tilde{c}(0) &= \psi(c(0)) = \psi(p) = p = c(0) \\ \dot{\tilde{c}}(0) &= d\psi|_{c(0)}(\dot{c}(0)) = d\psi|_p(\xi) = \xi = \dot{c}(0) \end{aligned}$$

Der Eindeutigkeitsteil von Satz 2.6.6 liefert:

$$\forall\, t \in I : c(t) = \tilde{c}(t) = \psi(c(t)).$$

Das heißt: $c(t) \in \mathrm{Fix}(\psi)$ für alle $t \in I$. □

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathrm{S}^n, g_{\mathrm{std}})$. Seien $p \in \mathrm{S}^n, \xi \in T_p\mathrm{S}^n$.



Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der zweidimensionale Untervektorraum, der von p und $\Phi_p(\xi)$ aufgespannt wird. Sei $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Spiegelung an E. Dann ist $A \in \mathrm{O}(n+1)$.

$$\Rightarrow \psi := A|_{\mathcal{S}^n} \in \mathrm{Isom}(\mathrm{S}^n, g_{\mathrm{std}}).$$

Dann gilt:

$$\mathrm{Fix}(A) = E \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Fix}(\psi) = E \cap \mathrm{S}^n \quad \text{(Großkreis)}.$$

Mit der Proposition 2.6.7 folgt dann, dass $c(t) \in E \cap \mathrm{S}^n$ für alle t. Wir parametrisieren den Großkreis proportional zur Bogenlänge.

$$c(t) = p \cdot \cos(\alpha t) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\Phi_p(\xi)\|} \cdot \sin(\alpha t).$$

Es müssen die Anfangsbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} c(0) &= p \text{ ist erfüllt.} \\ \frac{d}{dt}c(0) &= \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\Phi_p(\xi)\|} \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \|\Phi_p(\xi)\| = \|\xi\|. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir: $\frac{d}{dt}c(0) = \Phi_p(\xi)$, das heißt $\dot{c}(0) = \xi$. Daraus folgt:

$$c(t) = p \cdot \cos(\|\xi\|\, t) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\|\, t).$$

Bemerkung. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Zu $\xi \in T_pM$ sei c_ξ die Geodätische mit

$$c_\xi(0) = p \text{ und } \dot{c}_\xi(0) = \xi.$$

Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ setze $\tilde{c}(t) := c_\xi(\alpha t)$. Dann ist

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}(t) = \frac{\nabla}{dt}(\alpha \cdot \dot{c}_\xi(\alpha t)) = \alpha^2 \left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}_\xi\right)(\alpha t) = 0.$$

Daraus folgt: $\tilde{c}$ ist ebenfalls eine Geodätische. Für die Anfangsbedingungen gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{c}(0) = c_\xi(0) = p \\ \dot{\tilde{c}} = \alpha \cdot \dot{c}_\xi(0) = \alpha\xi\end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{c} = c_{\alpha\xi}.$$

Deshalb gilt: $c_\xi(\alpha) = c_{\alpha\xi}(1)$.

Definition. Zu $\xi \in T_pM$ setze $\exp_p(\xi) := c_\xi(1)$, falls der maximale Definitionsbereich von c_ξ die 1 enthält. Setze ferner

$$\mathcal{D}_p := \{\xi \in T_pM | 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c_\xi\}.$$

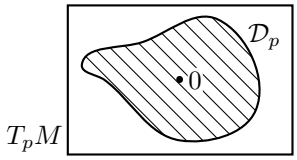
Dann heißt $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ *riemannsche Exponentialabbildung* (im Punkt p).

Bemerkung. **(1)** $\exp_p(t \cdot \xi) = c_{t\xi}(1) = c_\xi(t)$. Daraus folgt, dass $t \mapsto \exp_p(t\xi)$ *die* Geodätische ist mit den Anfangswerten p und ξ.

(2) $\exp_p(0) = p$.

(3) $\mathcal{D}_p$ ist sternförmig bezüglich 0, denn: Sei $\xi \in \mathcal{D}_p$. Sei $0 \leq \alpha \leq 1$. Dann ist c_ξ auf $[0,1]$ definiert.

$$c_{\alpha\xi}(t) = c_\xi(\alpha t).$$



$\Rightarrow$ $c_{\alpha\xi}$ ist auf $[0, \frac{1}{\alpha}] \supset [0,1]$ definiert, da $\alpha \leq 1$.

$\Rightarrow$ $\alpha\xi \in \mathcal{D}_p$.

(4) Setze $\mathcal{D} := \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}_p \subset TM$ und $\exp : \mathcal{D} \to M, \exp(\xi) := \exp_{\pi(\xi)}(\xi)$.
Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, dass $\mathcal{D}$ offen und $\exp$ eine glatte Abbildung ist. Insbesondere ist $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM$ offen in T_pM.

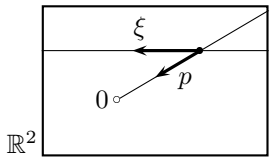
Beispiel.

- Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$. Dann gilt:

$$\exp_p(\xi) = p + 1 \cdot \Phi_p(\xi) = p + \Phi_p(\xi) \text{ mit } \mathcal{D}_p = T_p\mathbb{R}^n.$$

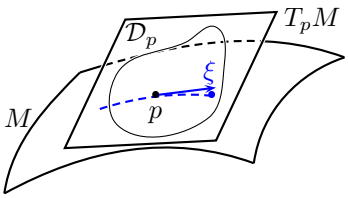
- Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^2 - \{0\}, g_{\text{eukl}})$. Dann:

$$\mathcal{D}_p = T_pM - \{-t \cdot {\Phi_p}^{-1}(p) \,|\, t \geq 1\}.$$



- Sei $(M, g) = (\mathcal{S}^n, g_{\text{std}})$. Dann:

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\|\xi\|) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\|), \mathcal{D}_p = T_pM.$$



LEMMA 2.6.8. *Das Differential der Abbildung* $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ *im Punkt 0 ist gegeben durch den kanonischen Isomorphismus*

$$d\exp_p|_0 = \Phi_0 : T_0\mathcal{D}_p = T_0T_pM \to T_pM.$$

Beweis. Sei $\xi \in T_pM$. Dann gilt:

$$d\exp_p|_0({\Phi_0}^{-1}(\xi)) = d\exp_p|_0\left(\frac{d}{dt}(t\xi)|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\exp_p(t\xi)|_{t=0} = \xi.$$

□

In der Literatur wird das Lemma 2.6.8 manchmal etwas salopp so formuliert:

$$\mathrm{id}_{T_pM} = d\exp_p|_0 : T_pM \to T_pM.$$

KOROLLAR 2.6.9. *Zu* $p \in M$ *existiert eine offene Umgebung* $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{D}_p \subset T_pM$ *von 0, so dass*

$$\exp_p|_{\mathcal{V}_p} : \mathcal{V}_p \to \exp_p(\mathcal{V}_p) =: U_p$$

ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 2.6.8 ($d\exp_p|_0$ ist invertierbar) und dem Umkehrsatz. □

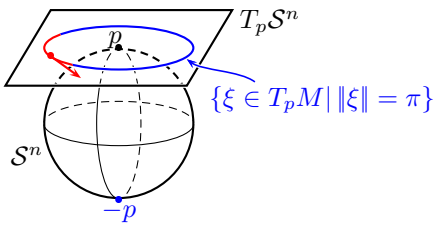
Bemerkung. Im Allgemeinen ist $\exp_p : \mathcal{D}_p \to \exp_p(\mathcal{D}_p) \subset M$ kein Diffeomorphismus, denn $d\exp_p|_\xi$ ist im Allgemeinen nicht invertierbar.

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathrm{S}^n, g_{\mathrm{std}})$. Für $p \in \mathcal{S}^n$ gilt: $\mathcal{D}_p = T_pM$ und

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\|\xi\|) + \frac{\Phi_p(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\|),$$

aber für $\xi \in T_pM$ mit $\|\xi\| = \pi$ gilt:

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\pi) = -p.$$



Für $\xi \in T_pM$ mit $\|\xi\| = \pi$ hat $d\exp_p|_\xi$ den Kern $\{\eta \in T_\xi T_p\mathrm{S}^n | \Phi_\xi(\eta) \perp \xi\}$ (ist $(n-1)$-dimensional).

Wir konstruieren nun gut an die Geometrie angepasste Koordinaten und wählen dazu eine verallgemeinerte Orthonormalbasis $E_1, \ldots, E_n$ von T_pM bezüglich $g|_p$, das heißt

$$g|_p(E_i, E_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}, \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

Wir erhalten einen linearen Isomorphismus $A : \mathbb{R}^n \to T_pM, (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha^i E_i$.

$$\begin{tikzcd} T_pM \supset \mathcal{V}_p \arrow[r, "\exp_p", "\approx"'] & U_p \subset M \\ \mathbb{R}^n \supset V_p \arrow[u, "\cong", "A"'] \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

wobei $V_p := A^{-1}(\mathcal{V}_p)$, also: $\exp_p \circ A : V_p \to U_p$ ist ein Diffeomorphismus. Setze $x := (\exp_p \circ A)^{-1}$. Dann ist $x : U_p \to V_p$ eine Karte.

Definition. Die so erhaltenen Koordinaten nennt man die *riemannschen Normalkoordinaten* um den Punkt p.

Inwiefern sind diese Koordinaten gut an die Geometrie angepasst?

PROPOSITION 2.6.10. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Seien $g_{ij} : V_p \to \mathbb{R}$ und $\Gamma_{ij}^k : V_p \to \mathbb{R}$ die zu den riemannschen Normalkoordinaten x um p gehörigen g_{ij} bzw. Christoffel-Symbole. Dann gilt:*

$$x(p) = 0, \quad g_{ij}(0) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

Beweis.

(a) $x(p) = A^{-1}({\exp_p}^{-1}(p)) = A^{-1}(0) = 0$.

(b) Seien $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned} g_{ij}(0) &= g|_p(dx^{-1}|_0(e_i), dx^{-1}|_p(e_j)) \\ &= g|_p(d(\exp_p \circ A)|_0(e_i), d(\exp_p \circ A)|_0(e_i)) \\ &= g|_p(d\exp_p|_0(E_i), d\exp_p|_0(E_j)) \\ &\overset{\text{L. 2.6.8}}{=} g|_p(E_i, E_j) \;=\; \varepsilon_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

(c) Sei $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $c(t) = x^{-1}(tv) = \exp_p(tAv)$ eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = Av$. In riemannschen Normalkoordinaten lautet die Geodätengleichung für diese Geodätische

$$0 = \ddot{c}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c^1(t), \ldots, c^n(t)) \cdot \dot{c}^i(t) \cdot \dot{c}^j(t).$$

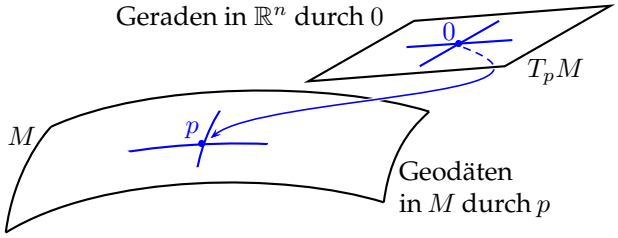
Hierbei ist $c^k(t) = x^k(c(t)) = tv^k$, $\dot{c}^k(t) = v^k$ und $\ddot{c}^k(t) = 0$. Für $t = 0$ ergibt sich

$$0 = 0 + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0, \ldots, 0) \cdot v^i \cdot v^j.$$

Dann ist β^k, definiert durch $\beta^k(y, z) := \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k(0) y^i z^j$, eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, denn:

$$\beta^k(z, y) = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) z^i y^j \underset{\substack{\text{Vertauschen} \\ \text{der Indizes}}}{=} \sum_{j,i=1}^n \Gamma_{ji}^k(0) z^j y^i \underset{\substack{\nabla \text{ tor-} \\ \text{sionsfrei}}}{=} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) y^i z^j = \beta^k(y, z).$$

Daher gilt $\beta^k(v, v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und daher $\beta^k(y, z) = 0$ für alle $y, z \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt: $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ für alle i, j, k. □



Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$, sei $p \in M$. Wähle $A = \Phi_p$ = kanonischer Isomorphismus $\mathbb{R}^n \Rightarrow T_p\mathbb{R}^n$. Dann gilt $\exp_p(Av) = p + v$, also

$$x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x(q) = q - p.$$

KOROLLAR 2.6.11. *In riemannschen Normalkoordinaten gilt für die Taylorentwicklung um 0 von $g_{i,j} : V_p \to \mathbb{R}$:*

$$g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + O(\|x\|^2).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= g_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) \cdot x^k + O(\|x\|^2) \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) &= \sum_{l=1}^{n} (\Gamma^l_{ki}(0) g_{lj}(0) + \Gamma^l_{kj}(0) g_{il}(0)) = 0 \end{aligned}$$

Beweis von Satz 2.3.1

□

Kapitel 3

Krümmung

3.1 Riemannscher Krümmungstensor

Definition. Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Seien $\xi \in T_pM$ und $\eta, \zeta \in \Xi_p(M)$. Dann ist $\nabla_\eta \zeta \in \Xi_p(M)$ und

$$\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta := \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_{\nabla_\xi \eta}\zeta \in T_pM$$

heißt *zweite kovariante Ableitung* von ζ in Richtung ξ und η.

Lemma 3.1.1. *Die zweite kovariante Ableitung $\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta$ hängt von η nur vermöge $\eta|_p$ ab, das heißt, sind $\eta, \tilde{\eta} \in \Xi_p(M)$ mit $\eta|_p = \tilde{\eta}|_p$, dann gilt:*

$$\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta = \nabla^2_{\xi,\tilde{\eta}}\zeta.$$

Beweis. Wir wählen um p riemannsche Normalkoordinaten x und schreiben in diesen Koordinaten (unter Verwendung der einsteinschen Summenkonvention) die Vektorfelder lokal als:

$$\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \quad \eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \zeta = \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Da die Christoffel-Symbole in 0 alle verschwinden erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \eta &= \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p}\left(\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p + 0 \\
\Rightarrow \quad \nabla_{\nabla_\xi \eta}\zeta &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \nabla \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \left(\zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p
\end{aligned}$$

Und ebenso:

$$\begin{aligned}
\nabla_\eta \zeta &= \nabla_{\eta=\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\zeta = \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
&= \eta^j \left(\frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} + \zeta^k \Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
\Rightarrow \quad \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta &= \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p} \left(\eta^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} + \eta^j \zeta^k \Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
&= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}(0) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p + \xi^i \eta^j(0) \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^j \partial x^i}(0) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p \\
&\quad + \xi^i \eta^j(0) \zeta^k \frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial x^i}(0) \left. \frac{\partial}{\partial x^m} \right|_p ,
\end{aligned}$$

womit dann folgt:

$$\Rightarrow \quad \nabla^2_{\xi,\eta} \zeta = \left[\xi^i \eta^j(0) \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j}(0) + \xi^i \eta^j(0) \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^i}(0) \right] \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p$$

Die Abhängigkeit von η dieses Ausdruckes beschränkt sich auf die Werte $\eta^j(0)$, also auf $\eta|_p$. □

Folgerung. Der Ausdruck $\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta$ ist wohldefiniert für $\xi, \eta \in T_pM$ und $\zeta \in \Xi_p$.

Lemma 3.1.2. *Für $\xi, \eta \in T_pM$ und $\zeta \in \Xi_p(M)$ hängt*

$$R(\xi,\eta)\zeta := \nabla^2_{\xi,\eta}\zeta - \nabla^2_{\eta,\xi}\zeta$$

nur von ζ vermöge $\zeta|_p$ ab. Das heißt $R(\xi,\eta)\zeta \in T_pM$ ist für $\xi, \eta, \zeta \in T_pM$ wohldefiniert.

Beweis. Wieder gilt in riemannschen Normalkoordinaten um p:

$$\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta = \xi^i(0)\eta^j(0) \left(\frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j} + \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma^k_{jm}}{\partial x^i} \right) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad R(\xi,\eta)\zeta &= (\xi^i(0)\eta^j(0) - \xi^j(0)\eta^i(0)) \left(\frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j}(0) + \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0) \right) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p \\
&= \xi^i(0)\eta^j(0) \left(\frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^i \partial x^j}(0) - \frac{\partial^2 \zeta^k}{\partial x^j \partial x^i}(0) + \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0) - \zeta^m(0) \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^j}(0) \right) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p \\
&= \xi^i(0)\eta^j(0)\zeta^m(0) \left(\frac{\partial \Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma^k_{im}}{\partial x^j}(0) \right) \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p
\end{aligned}$$

□

Definition. Die Abbildung

$$R: \begin{array}{rcl} T_pM \times T_pM \times T_pM & \to & T_pM \\ (\xi,\eta,\zeta) & \mapsto & R(\xi,\eta)\zeta \end{array}$$

heißt *riemannscher Krümmungstensor* im Punkt p.

Darstellung in lokalen Koordinaten.

Sei $x : U \to V$ eine Karte von M. Dann wird R auf U festgelegt durch glatte Funktionen $R^l_{kij} : V \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^n R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass in riemannschen Normalkoordinaten gilt:

$$\boxed{R^l_{kij}(0) = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}(0)}$$

Bemerkung. Man kann nachrechnen (das ist nicht schwer, dafür aber etwas mühsam), dass in *beliebigen* Koordinaten gilt:

$$\boxed{R^l_{kij}(0) = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}(0) + \sum_{m=1}^n (\Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj})}$$

PROPOSITION 3.1.3 (Symmetrien des Krümmungstensors). *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, seien $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_pM$. Dann:*

(1) $R : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *ist trilinear,*

(2) $R(\xi, \eta)\zeta = -R(\eta, \xi)\zeta$,

(3) $g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) = -g|_p(R(\xi, \eta)\nu, \zeta)$,

(4) *Erste Bianchi-Identität.* $R(\xi, \eta)\zeta + R(\eta, \zeta)\xi + R(\zeta, \xi)\eta = 0$ *und*

(5) $g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) = g|_p(R(\zeta, \nu)\xi, \eta)$.

Beweis.

(1) klar, da bereits $\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta$ in ξ, η und ζ $\mathbb{R}$-linear ist.

(2) ist auch klar.

(3) Wir berechnen dies in riemannschen Normalkoordinaten um p für

$$\xi = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \quad \eta = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \quad \zeta = \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p, \quad \nu = \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
g|_p(R(\xi, \eta)\zeta, \nu) &= g|_p\left(R\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right) \\
&= g|_p\left(\sum_{m=1}^n R^m_{kij}(0)\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right) \\
&= \sum_{m=1}^n R^m_{kij}(0) \cdot g|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right) \\
&= \sum_{m=1}^n g_{ml}(0) \cdot R^m_{kij}(0)
\end{aligned}$$

In beliebigen Koordinaten (und damit auch in riemannschen Normalkoordinaten für $x \neq 0$) gilt (nach dem Beweis von Satz 2.3.1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \sum_{m=1}^{n} (g_{mj}\Gamma^m_{ki} + g_{mi}\Gamma^m_{kj}) \\
\overset{\text{in riem. Normalk.}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0) &= \sum_{m=1}^{n} \left(g_{mj}(0)\frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^l}(0) + g_{mi}(0)\frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial x^l}(0) \right) \\
\Longrightarrow \qquad 0 &= \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0) - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k}(0) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \Bigg(g_{mj}(0)\frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^l}(0) + g_{mi}(0)\frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial x^l}(0) \\
&\qquad - g_{mj}(0)\frac{\partial \Gamma^m_{li}}{\partial x^k}(0) - g_{mi}(0)\frac{\partial \Gamma^m_{lj}}{\partial x^k}(0) \Bigg) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (g_{mj}(0)R^m_{ilk}(0) + g_{mi}(0)R^m_{jlk}(0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} l \to i \\ k \to j \\ i \to k \\ j \to l \end{pmatrix} \qquad 0 &= \sum_{m=1}^{n} (g_{ml}(0)R^m_{kij}(0) + g_{mk}(0)R^m_{lij}(0)) \\
\Longrightarrow \quad \sum_{m=1}^{n} g_{ml}(0)R^m_{kij}(0) &= -\sum_{m=1}^{n} g_{mk}(0)R^m_{lij}(0)
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für diese ξ, η, ζ, ν.

Mit der Multilinearität folgt die Behauptung für alle ξ, η, ζ und ν.

(4) Die erste Bianchi-Identität ist äquivalent zu

$$R^l_{kij} + R^l_{ijk} + R^l_{jki} = 0.$$

Wir rechnen dies in riemannschen Normalkoordinaten nach:

$$R^l_{kij}(0) + R^l_{ijk}(0) + R^l_{jki}(0) =$$

$$\frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}(0) + \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}(0) - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k}(0) - \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}(0) = 0.$$

(5) Beweis durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
0 \overset{(4)}{=} \; & g|_p(R(\eta,\zeta)\xi,\nu) + g|_p(R(\zeta,\xi)\eta,\nu) + \underline{g|_p(R(\xi,\eta)\zeta,\nu)} \\
& + g|_p(R(\zeta,\xi)\nu,\eta) + g|_p(R(\xi,\nu)\zeta,\eta) + \underline{\underline{g|_p(R(\nu,\zeta)\xi,\eta)}} \\
& + g|_p(R(\xi,\nu)\eta,\zeta) + g|_p(R(\nu,\eta)\xi,\zeta) + \underline{g|_p(R(\eta,\xi)\nu,\zeta)} \\
& + g|_p(R(\nu,\eta)\zeta,\xi) + g|_p(R(\eta,\zeta)\nu,\xi) + \underline{\underline{g|_p(R(\zeta,\nu)\eta,\xi)}} \\
\overset{(2),(3)}{=} \; & 2g|_p(R(\xi,\eta)\zeta,\nu) + 2g|_p(R(\zeta,\nu)\eta,\xi) \\
= \; & 2(g|_p(R(\xi,\eta)\zeta,\nu) - g|_p(R(\zeta,\nu)\xi,\eta))
\end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Mink}})$. In kartesischen Koordinaten gilt $\Gamma_{ij}^k = 0$. Daraus folgt:

$$R_{kij}^l = 0 \quad \Rightarrow \quad R \equiv 0.$$

Definition. Eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit mit $R \equiv 0$ heißt *flach*.

Warnung! In der Literatur existieren zwei verschiedene Vorzeichenkonventionen für R:
Unser R ist das Negative des Krümmungstensors, wie er beispielsweise in [O'Neill] definiert wird.

LEMMA 3.1.4. *Seien (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten, sei $\psi : M \to \tilde{M}$ eine lokale Isometrie. Sei $p \in M$. Dann gilt für den Krümmungstensor R von M in p und den Krümmungstensor $\tilde{R}$ von $\tilde{M}$ in $\psi(p)$:*

$$d\psi|_p(R(\xi, \eta)\zeta) = \tilde{R}(d\psi|_p(\xi), d\psi|_p(\eta))d\psi|_p(\zeta)$$

für alle $\xi, \eta, \zeta \in T_pM$.

Beweis. Sei $x : U \to V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Dann ist $\tilde{x} := x \circ \psi^{-1} : \tilde{U} \to V$ eine Karte von $\tilde{M}$, wobei $\tilde{U} := \psi(U)$ und U eventuell verkleinert wurde (so dass $\psi : U \to \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus ist).

Da ψ eine lokale Isometrie ist, folgt, dass $g_{ij} = \tilde{g}_{ij} : V \to \mathbb{R}$, wobei die g_{ij} die Komponenten von g bezüglich x und $\tilde{g}_{ij}$ die Komponenten von $\tilde{g}$ bezüglich $\tilde{x}$ sind. Damit sind die entsprechenden Christoffel-Symbole gleich: $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ und damit sind es auch die Komponenten der Krümmungstensoren: $R_{kij}^l = \tilde{R}_{kij}^l$. □

Bemerkung. Verschwindet der Krümmungstensor $R : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ im Punkt p nicht, dann gibt es *keine* Karte um p, für die $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$.

Alternativ kann man den Krümmungstensor auch definieren als eine multilineare Abbildung

$$R : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = g(R(\xi, \eta)\zeta, \nu).$$

In *lokalen Koordinaten* setze für eine Karte $x : U \to V$ um p

$$R_{ijkl} : V \to \mathbb{R}, \quad R_{ijkl}(x(p)) := R\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_p\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &\overset{\text{Prop. 3.1.3(5)}}{=} R_{klij} = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= g\left(\sum_{m=1}^n R_{ikl}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{m=1}^n R_{ikl}^m g\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\boxed{R_{ijkl} = \sum_{m=1}^n g_{mj} R_{ikl}^m}$$

Wir haben den oberen Index „heruntergezogen“.

Umgekehrt:

$$\begin{aligned} R^l_{kij} &= \sum_{m=1}^{n} \delta^l_m R^m_{kij} \\ &= \sum_{a,m=1}^{n} g^{al} g_{ma} R^m_{kij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R^l_{kij} = \sum_{a=1}^{n} g^{al} R_{kaij}}$$

Der Index wurde „raufgezogen".

PROPOSITION 3.1.5. *Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. In riemannschen Normalkoordinaten gilt dann:*

$$g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^{n} R_{ikjl}(0) x^k x^l + O(\|x\|^3).$$

Beweis. Wir wissen bereits $g_{ij}(x) = \varepsilon_i \delta_{ij} + O(\|x\|^2)$ (Korollar 2.6.11). Im Folgenden verwenden wir die einsteinsche Summenkonvention sowie die abkürzenden Schreibweisen

$$f_{,k} := \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad f_{,k\ell} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^\ell}$$

für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Im Beweis von Satz 2.3.1 haben wir gesehen, dass

$$g_{ij,k} = \Gamma^m_{ki} g_{mj} + \Gamma^m_{kj} g_{mi} .$$

Diese Gleichung differenzieren wir nach x^ℓ, werten in 0 aus und benutzen, dass die Christoffelsymbole in 0 verschwinden:

$$g_{ij,k\ell}(0) = \Gamma^m_{ki,\ell}(0) \cdot g_{mj}(0) + \Gamma^m_{kj,\ell}(0) g_{mi}(0) . \tag{3.1}$$

Zwischenbehauptung:

$$\Gamma^k_{ij,\ell}(0) + \Gamma^k_{\ell i,j}(0) + \Gamma^k_{j\ell,i}(0) = 0 . \tag{3.2}$$

Beweis der Zwischenbehauptung:
In Normalkoordinaten ergeben die Geraden $t \mapsto t \cdot x$ durch 0 Geodätische. Die Geodätengleichung lautet dann :

$$0 = \Gamma^k_{ij}(t \cdot x) x^i x^j .$$

Wir differenzieren das nach t und werten in $t = 0$ aus:

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Gamma^k_{ij}(tx) x^i x^j = \Gamma^k_{ij,\ell}(0) x^\ell x^i x^j .$$

Damit haben wir für jedes k ein Polynom 3. Grades in x, nämlich $P^k(x) := \Gamma^k_{ij,\ell}(0) x^i x^j x^\ell$, das identisch verschwindet. Also muss für jedes Monom $x^\alpha x^\beta x^\gamma$ die Summe der Koeffizienten

$\Gamma^k_{ij,\ell}(0)$ mit $x^i x^j x^\ell = x^\alpha x^\beta x^\gamma$ verschwinden. Dies und die Symmetrie der Christoffelsymbole in den beiden unteren Indizes liefern die Zwischenbehauptung.

Mit $R^\ell_{kij}(0) = \Gamma^\ell_{jk,i}(0) - \Gamma^\ell_{ik,j}(0)$ folgt:

$$\begin{aligned} R_{k\ell ij}(0) &= \left(\Gamma^m_{jk,i}(0) - \Gamma^m_{ik,j}(0)\right) g_{m\ell}(0) \\ &\overset{(3.2)}{=} -\left(\Gamma^m_{ij,k}(0) + \Gamma^m_{ki,j}(0) + \Gamma^m_{ik,j}(0)\right) g_{m\ell}(0) \\ &= -\left(\Gamma^m_{ij,k}(0) + 2\Gamma^m_{ki,j}(0)\right) g_{m\ell}(0)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} 2R_{ikj\ell}(0)\,x^k x^\ell &\overset{\text{Prop. 3.1.3}}{=} \left(-R_{kij\ell}(0) - R_{\ell jik}(0)\right) x^k x^\ell \\ &\overset{(3.3)}{=} \left(\Gamma^m_{j\ell,k}(0) + 2\Gamma^m_{kj,\ell}(0)\right) g_{mi}(0)\,x^k x^\ell \\ &\quad + \left(\Gamma^m_{ik,\ell}(0) + 2\Gamma^m_{\ell i,k}(0)\right) g_{mj}(0)\,x^k x^\ell \\ &\overset{(*)}{=} \left(\Gamma^m_{j\ell,k}(0) + 2\Gamma^m_{kj,\ell}(0)\right) g_{mi}(0)\,x^k x^\ell \\ &\quad + \left(\Gamma^m_{i\ell,k}(0) + 2\Gamma^m_{ki,\ell}(0)\right) g_{mj}(0)\,x^\ell x^k \\ &\overset{(3.1)}{=} \left(g_{ij,\ell k}(0) + 2g_{ij,k\ell}(0)\right) \cdot x^k x^\ell \\ &= 3g_{ij,k\ell}(0) \cdot x^k x^\ell\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der mit $(*)$ gekennzeichneten Umformung in der unteren Zeile den Summationsparameter k in ℓ umbenannt und umgekehrt. Dies ergibt für den Term 2. Ordnung in der Taylorentwicklung

$$\frac{1}{2}\,g_{ij,k\ell}(0)\,x^k x^\ell = \frac{1}{3}\,R_{ikj\ell}(0) \cdot x^k x^\ell\,.$$

□

3.2 Schnittkrümmung

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$. (Später wird $V = T_pM$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle = g|_p(\cdot,\cdot)$ sein.)

Definition. Ein Untervektorraum $U \subset V$ heißt *nicht entartet*, falls $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U} : U \times U \to \mathbb{R}$ nicht entartet ist. Man setzt dann:

$$G_k(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) := \{k\text{-dimensionale, nicht entartete Untervektorräume von } V\}.$$

Bemerkung. Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definit, so ist jeder Untervektorraum nicht entartet.

Setze $Q : V \times V \to \mathbb{R},\ Q(\xi,\eta) := \langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle - \langle\xi,\eta\rangle^2$.

Lemma 3.2.1. *Es sind äquivalent für zweidimensionale Untervektorräume $E \subset V$:*

(1) $E \in G_2(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(2) *Es existiert eine Basis ξ, η von E mit $Q(\xi,\eta) \neq 0$.*

(3) *Für alle Basen ξ, η von E gilt $Q(\xi,\eta) \neq 0$.*

Beweis. Bezüglich einer Basis ξ, η von E wird $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{E\times E}$ dargestellt durch die Matrix

$$A_{\xi,\eta} := \begin{pmatrix} \langle\xi,\xi\rangle & \langle\eta,\xi\rangle \\ \langle\xi,\eta\rangle & \langle\eta,\eta\rangle \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Q(\xi,\eta) = \det A_{\xi,\eta}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung.

- Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit, so ist

$$\sqrt{Q(\xi,\eta)} = \text{Flächeninhalt des von } \xi \text{ und } \eta \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$$

- Der zweidimensionale Untervektorraum $E \subset V$ ist genau dann entartet, wenn eine Basis ξ, η von E existiert mit

$$\langle\xi,\xi\rangle = \langle\xi,\eta\rangle = 0.$$

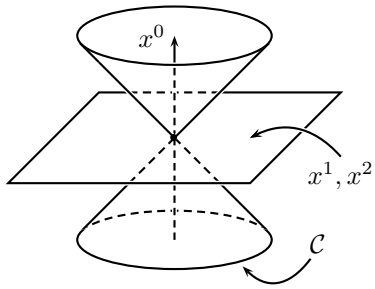
Begründung:

„$\Leftarrow$": $Q(\xi,\eta) = \underbrace{\langle\xi,\xi\rangle}_{=0}\langle\eta,\eta\rangle - \underbrace{\langle\xi,\eta\rangle}_{=0}{}^2$.

„$\Rightarrow$": Sei E entartet, das heißt, $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{E\times E}$ ist entartet. Daraus folgt: Es existiert ein $\xi \in E - \{0\}$ mit $\langle\xi,\zeta\rangle = 0$ für alle $\zeta \in E$. Ergänze ξ durch ein η zu einer Basis von E.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Minkowski-Skalarprodukt

$$\langle\!\langle\xi,\eta\rangle\!\rangle = -\xi^0\eta^0 + \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2.$$



Betrachte den Lichtkegel $\mathcal{C} := \{\xi \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \mid \langle\!\langle\xi,\xi\rangle\!\rangle = 0\}$. Dann ist eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ genau dann entartet, wenn $E = T_p\mathcal{C}$ für ein $p \in \mathcal{C}$. Sei nämlich $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{C}$ eine glatte Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \xi$. Dann gilt:

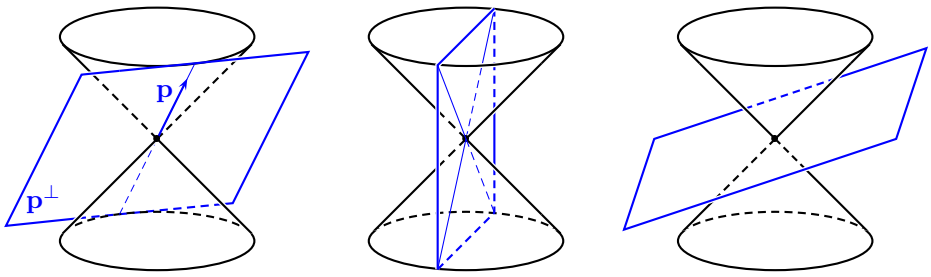
$$\langle\!\langle c(t), c(t)\rangle\!\rangle = 0 \;\forall\, t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle\!\langle c(t), c(t)\rangle\!\rangle = 2\,\langle\!\langle \dot{c}(0), c(0)\rangle\!\rangle = 2\,\langle\!\langle\xi, p\rangle\!\rangle$$

$\Rightarrow$ $T_p\mathcal{C} \subset p^\perp$, wobei beide zweidimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

$\Rightarrow$ $T_p\mathcal{C} = p^\perp$.

$\Rightarrow$ $\xi = p$ und $\eta \in T_p\mathcal{C}$ linear unabhängig davon erfüllen $\langle\!\langle\xi,\xi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\xi,\eta\rangle\!\rangle = 0$.



entartet nicht entartet nicht entartet

Lemma 3.2.2. *Sei V endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit nicht entarteter symmetrischer Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ multilinear mit*

$$R(\xi,\eta,\zeta,\nu) = -R(\eta,\xi,\zeta,\nu) = -R(\xi,\eta,\nu,\zeta)$$

für alle $\xi,\eta,\zeta,\nu \in V$. Dann hängt für $E \in G_2(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ der Ausdruck

$$K(E) := \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{Q(\xi,\eta)}$$

nicht von der Wahl der Basis ξ,η von E ab, sondern nur von E selbst.

Beweis. Sei μ,ν eine andere Basis von E mit $\mu = a\xi + b\eta$ und $\nu = c\xi + d\eta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
R(\mu,\nu,\nu,\mu) &= R(a\xi+b\eta, c\xi+d\eta, c\xi+d\eta, a\xi+b\eta)\\
&= adcb\cdot R(\xi,\eta,\xi,\eta) + adda\cdot R(\xi,\eta,\eta,\xi) + bccb\cdot R(\eta,\xi,\xi,\eta) + bcda\cdot R(\eta,\xi,\eta,\xi)\\
&= (-abcd + a^2d^2 + b^2c^2 - abcd)\cdot R(\xi,\eta,\eta,\xi)\\
&= (ad-bc)^2\cdot R(\xi,\eta,\eta,\xi)
\end{aligned}$$

Die Abbildung $R_1 : V\times V\times V\times V \to \mathbb{R}$, definiert durch $R_1(\xi,\eta,\zeta,\nu) := \langle\xi,\nu\rangle\langle\eta,\zeta\rangle - \langle\xi,\zeta\rangle\langle\eta,\nu\rangle$, hat alle Symmetrien des Krümmungstensors in Proposition 3.1.3. Daraus folgt

$$\underbrace{R_1(\mu,\nu,\nu,\mu)}_{=Q(\mu,\nu)} = (ad-bc)^2\underbrace{R_1(\xi,\eta,\eta,\xi)}_{=Q(\xi,\eta)}.$$

Daraus folgt dann direkt die Behauptung. □

Setze $G_2(M,g) := \bigcup_{p\in M} G_2(T_pM, g|_p)$.

Definition. Die Funktion $K : G_2(M,g) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$K(E) := \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{Q(\xi,\eta)},$$

wobei ξ,η eine Basis von E bildet, heißt *Schnittkrümmung* von (M,g). Hierbei ist R der riemannsche Krümmungstensor.

Bemerkung. Die Schnittkrümmung ist nur für Mannigfaltigkeiten mit der Dimension größer gleich 2 erklärt.

Falls $\dim(M) = 1$, so ist $R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = 0$ für alle $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_pM$ wegen der Schiefsymmetrie in ξ und η.

Definition. Ist (M, g) eine zweidimensionale semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt

$$K : M \to \mathbb{R}, \quad K(p) := K(T_pM)$$

die *Gauß-Krümmung* von M.

Bemerkung. Die Schnittkrümmung bestimmt den riemannschen Krümmungstensor. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} 6R(\xi, \eta, \zeta, \nu) \quad = \quad & K(\xi + \nu, \eta + \zeta)Q(\xi + \nu, \eta + \zeta) - K(\eta + \nu, \xi + \zeta)Q(\eta + \nu, \xi + \zeta) \\ & - K(\xi, \eta + \zeta)Q(\xi, \eta + \zeta) - K(\eta, \xi + \nu)Q(\eta, \xi + \nu) \\ & - K(\zeta, \xi + \nu)Q(\zeta, \xi + \nu) - K(\nu, \eta + \zeta)Q((\nu, \eta + \zeta) \\ & + K(\xi, \eta + \nu)Q(\xi, \eta + \nu) + K(\eta, \zeta + \xi)Q(\eta, \zeta + \xi) \\ & + K(\zeta, \eta + \nu)Q(\zeta, \eta + \nu) + K(\nu, \xi + \zeta)Q(\nu, \xi + \zeta) \\ & + K(\xi, \zeta)Q(\xi, \zeta) + K(\eta, \nu)Q(\eta, \nu) - K(\xi, \nu)Q(\xi, \nu) - K(\eta, \zeta)Q(\eta, \zeta) \end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_pM$, für die die entsprechenden Schnittkrümmungen definiert sind. Die Menge der Quadrupel (ξ, η, ζ, ν), die dies erfüllen, ist offen und dicht in $T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM$. Wegen der Stetigkeit legt dies R auf $T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM$ fest.

Spezialfall: Hängt $K(E)$, $E \subset T_pM$, nur ab von p (automatisch erfüllt, falls $\dim(M) = 2$, im Allgemeinen aber nicht erfüllt, falls $\dim(M) \geq 3$), so gilt

$$R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = K(p)(\langle \eta, \zeta \rangle \langle \xi, \nu \rangle - \langle \xi, \zeta \rangle \langle \eta, \nu \rangle).$$

Außerdem gilt immer: $K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = 0$.

3.3 Ricci- und Skalarkrümmung

Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Der riemannsche Krümmungstensor an der Stelle $p \in M$ ist eine multilineare Abbildung

$$R : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM.$$

Für feste $\xi, \eta \in T_pM$ erhalten wir die lineare Abbildung

$$R(\xi, \cdot)\eta : T_pM \to T_pM, \quad \zeta \mapsto R(\xi, \zeta)\eta.$$

Definition. Die Abbildung

$$\text{ric} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad \text{ric}(\xi, \eta) := -\text{Spur}(R(\xi, \cdot)\eta) = \text{Spur}(R(\cdot, \xi)\eta)$$

heißt *Ricci-Krümmung* (an der Stelle p).

Bemerkung. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit nicht entarteter symmetrischer Bilinearform g, seien $E_1, \ldots, E_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von (V, g), das heißt $g(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{i,j}$ mit $\varepsilon_i = \pm 1$. Dann gilt für jeden Endomorphismus $A : V \to V$, dass

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(A(E_i), E_i).$$

Denn: Mit $\omega_i : V \to \mathbb{R},\ \omega_i(\xi) := \varepsilon_i \cdot g(\xi, E_i)$, ist $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die zu $E_1, \ldots, E_n$ duale Basis.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(A(E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(A(E_i), E_i).$$

In lokalen Koordinaten: Für eine Karte $x : U \to V$ von M setze

$$\mathrm{ric}_{ij} : V \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{ric}_{ij}(x(p)) := \mathrm{ric}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right).$$

LEMMA 3.3.1 (Eigenschaften der Ricci-Krümmung).

(1) *Die Abbildung* ric *ist bilinear und symmetrisch auf* T_pM.

(2) *Für eine verallgemeinerte Orthonormalbasis* $E_1, \ldots, E_n$ *von* $(T_pM, g|_p)$ *gilt:*

$$\mathrm{ric}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \eta).$$

(3) *Es gilt:*

$$\mathrm{ric}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R^k_{ikj}.$$

Beweis.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}(\xi, \eta) &= \mathrm{Spur}(\zeta \mapsto -R(\xi, \zeta)\eta) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(-R(\xi, E_i)\eta, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \eta) \end{aligned}$$

(1) Bilinearität ist klar, da R multilinear.

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}(\eta, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(R(\eta, E_i)E_i, \xi) \\ &\overset{\text{Prop. 3.1.3(5)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(R(E_i, \xi)\eta, E_i) \\ &\overset{\text{Prop. 3.1.3 (2),(3)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot g(R(\xi, E_i)E_i, \eta) \\ &= \mathrm{ric}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

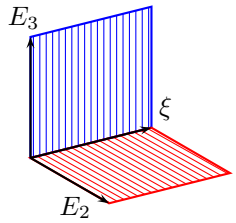
(3) Es gilt: $\mathrm{ric}_{ij} = \mathrm{ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \mathrm{Spur}\left(\zeta \mapsto -R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \zeta\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. Bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ hat dieser Endomorphismus die Matrixdarstellung

$$(-R^l_{jik})_{k,l} = (R^l_{jki})_{k,l}.$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{ric}_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{jki}$, und wegen **(1)** ist $\mathrm{ric}_{ij} = \mathrm{ric}_{ji}$, woraus dann die Behauptung folgt. □

LEMMA 3.3.2. *Die Ricci-Krümmung lässt sich durch Mittelung aus der Schnittkrümmung berechnen. Genauer: Ist $\xi \in T_pM$ mit $g(\xi,\xi) \neq 0$ und ist $E_2, \ldots, E_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von $\xi^\perp$, dann*

$$\mathrm{ric}(\xi,\xi) = g(\xi,\xi) \cdot \underbrace{\sum_{j=2}^n K(\mathrm{Spann}\{\xi, E_j\})}_{\text{Das ist im Wesentlichen der Mittelwert von } K \text{ auf allen Ebenen, die } \xi \text{ enthalten.}}$$



Beweis. O. B. d. A. sei $g(\xi,\xi) = \pm 1$. Schreibe $\xi =: E_1$. Dann bildet $E_1, \ldots, E_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von T_pM.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(\xi,\xi) &= \sum_{i=1}^n g(E_i,E_i) \cdot g(R(\xi,E_i)E_i,\xi) \\
&= \sum_{i=2}^n g(E_i,E_i) \cdot g(R(\xi,E_i)E_i,\xi) \\
&= \sum_{i=2}^n g(E_i,E_i) \cdot K(\mathrm{Spann}\{\xi,E_i\}) \cdot (g(\xi,\xi)g(E_i,E_i) - \underbrace{g(\xi,E_i)}_{=0}{}^2) \\
&= g(\xi,\xi) \cdot \sum_{i=2}^n K(\mathrm{Spann}\{\xi,E_i\})
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Durch Polarisieren legt $\mathrm{ric}(\xi,\xi)$ für alle $\xi \in T_pM$ auch $\mathrm{ric}(\xi,\eta)$ für alle $\xi,\eta \in T_pM$ fest, da: $\mathrm{ric}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ric}(\xi+\eta,\xi+\eta) - \mathrm{ric}(\xi,\xi) - \mathrm{ric}(\eta,\eta)\right)$.

Bemerkung. Die Abbildung $\mathrm{ric} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist bilinear und symmetrisch, $g|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist auch bilinear und symmetrisch, zusätzlich aber noch nicht entartet.

Daraus folgt: Es existiert genau ein Endomorphismus $\mathrm{Ric} : T_pM \to T_pM$, so dass

$$\mathrm{ric}(\xi,\eta) = g|_p(\mathrm{Ric}(\xi),\eta)$$

für alle $\xi,\eta \in T_pM$.

In lokalen Koordinaten: Für eine Karte $x : U \to V$ erhält man Funktionen $\mathrm{Ric}^j_i : V \to \mathbb{R}$ durch:

$$\mathrm{Ric}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^n \mathrm{Ric}^j_i(x(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}_{ij} &= \mathrm{ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= g\left(\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= g\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}_i^k \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{ric}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}_i^k \cdot g_{kj}}$$

Definition. Die Abbildung

$$\mathrm{scal}(p) := \mathrm{Spur}(\mathrm{Ric})$$

heißt *Skalarkrümmung* im Punkt $p \in M$.

LEMMA 3.3.3. **(1)** *In lokalen Koordinaten gilt*

$$\mathrm{scal}(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_i^i(x(p)) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ric}_{ij}(x(p)) \cdot g^{ij}(x(p)).$$

(2) *Für eine verallgemeinerte Orthonormalbasis $E_1, \ldots, E_n$ von T_pM gilt*

$$\mathrm{scal}(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \mathrm{ric}(E_i, E_i).$$

Beweis klar. □

Spezialfall. $\dim M = 2$.

Sei K die Gaußkrümmung (das heißt $K(p) = K(T_pM)$), dann ist der Krümmungstensor gegeben durch

$$R(\xi, \eta, \zeta, \nu) = K(p)(g(\eta, \zeta)g(\xi, \nu) - g(\xi, \zeta)g(\eta, \nu)).$$

Daraus folgt für die Ricci-Krümmung

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i \cdot R(\xi, E_i, E_i, \eta) \\
&= K(p) \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i (g(E_i, E_i)g(\xi, \eta) - g(\xi, E_i)g(E_i, \eta)) \\
&= K(p)(2g(\xi, \eta) - g(\xi, \eta)) \\
&= K(p) \cdot g(\xi, \eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathrm{ric} &= K \cdot g \\
\Rightarrow \quad \mathrm{scal} &= 2K
\end{aligned}$$

Abhängigkeiten der verschiedenen Krümmungsbegriffe.

$\dim M$	2	3	≥ 4
R	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
K	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Downarrow$
ric	$\Updownarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
scal			

In der Physikliteratur werden in lokalen Koordinaten häufig folgende Bezeichnungen verwendet:

- für R schreibt man: R^l_{ijk} und R_{ijkl} (wie hier),
- für Ric und ric schreibt man: $\mathrm{ric}_{ij} = R_{ij}$ und $\mathrm{Ric}^j_i = R^j_i$,
- für scal schreibt man: $\mathrm{scal} = R$.

3.4 Jacobi-Felder

Ziel. „Linearisiere“ die Geodätengleichung.

Definition. Sei M eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Variation von Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ heißt *geodätische Variation*, falls für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Kurve $t \mapsto c_s(t) := c(s,t)$ eine Geodätische ist.

Sei $\xi(t) := \dfrac{\partial}{\partial s} c(0,t)$ das zugehörige Variationsfeld.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 \xi(t) &= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} c(s,t)|_{s=0} \\
&= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} c(s,t)|_{s=0} \\
&= \frac{\nabla}{\partial s}\underbrace{\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} c(s,t)}_{\equiv 0,\text{ da geod. Var.}}|_{s=0} + R\left(\frac{\partial c}{\partial t}(0,t), \frac{\partial c}{\partial s}(0,t)\right)\frac{\partial c}{\partial t}(0,t) \\
&= R(\dot{c}_0(t), \xi(t))\dot{c}_0(t)
\end{aligned}$$

Definition. Die Gleichung

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 \xi = R(\dot{c}_0, \xi)\dot{c}_0$$

heißt *Jacobi-Feld-Gleichung*. Die Lösungen heißen *Jacobi-Felder*.

Bemerkung. Wir haben gezeigt, dass die Variationsfelder von geodätischen Variationen Jacobi-Felder sind.

PROPOSITION 3.4.1. *Sei M eine n-dimensionale semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine Geodätische, sei $t_0 \in I$. Für alle $\xi, \eta \in T_{c(t_0)}M$ gibt es genau ein Jacobi-Feld J längs c mit $J(t_0) = \xi$ und $\dfrac{\nabla}{dt}J(t_0) = \eta$.*

Insbesondere ist $\{$ Jacobi-Felder längs c $\}$ ein $2n$-dimensionaler Vektorraum.

Beweis. Sei $E_1(t_0), \ldots, E_n(t_0)$ eine Basis von $T_{c(t_0)}M$. Verschiebe parallel längs c und erhalte die Basisfelder $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ längs $c(t)$. Schreibe $J(t) = \sum_{j=1}^n v^j(t)E_j(t)$. Dann gilt $\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J(t) = \sum_{j=1}^n \ddot{v}^j(t)E_j(t)$.

$$R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t) = \sum_{j=1}^n v^j(t)R(\dot{c}(t), E_j(t))\dot{c}(t).$$

Schreibe $R(\dot{c}(t), E_j(t))\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^n a_j^k(t)E_k(t)$.

$$\begin{aligned} J \text{ ist Jacobi-Feld} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n \ddot{v}^k E_k = \sum_{j,k=1}^n a_j^k v^j E_k \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{v}^k = \sum_{j=1}^n a_j^k v^j} \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Dies ist ein *lineares* gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Die Lösungen existieren also (auf ganz I) und sind festgelegt durch die Anfangswerte $v^k(t_0)$ und $\dot{v}^k(t_0)$, das heißt durch $J(t_0)$ und $\frac{\nabla}{dt}J(t_0)$. □

Beispiel. Ist M flach, das heißt $R \equiv 0$, so lautet die Jacobi-Feld-Gleichung

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \{\text{Jacobi-Felder}\} = \{\xi(t) + t\eta(t) | \xi, \eta \text{ parallel}\}.$$

Beispiel. Sei c Geodätische in einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit. Dann ist das Vektorfeld $J(t) := (a + bt)\dot{c}(t)$ ein Jacobi-Feld, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Denn:

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J(t) = 0, \quad R(\dot{c}, J)\dot{c} = (a + bt)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0.$$

J ist das Variationsfeld zur geodätischen Variation

$$c(s, t) = c(t + s(a + bt)) = c((1 + sb)t + sa).$$

Dies ist der zweidimensionale Raum der *uninteressanten* Jacobi-Felder.

Bemerkung. Falls für ein Jacobi-Feld $J : I \to TM$ gilt: $J(t_0) \perp \dot{c}(t_0)$ und $\frac{\nabla}{dt}J(t_0) \perp \dot{c}(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, so gilt $J(t) \perp \dot{c}(t)$ und $\frac{\nabla}{dt}J(t) \perp \dot{c}(t)$ für alle $t \in I$. Denn:

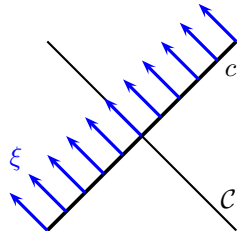
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\nabla}{dt}J, \dot{c}\right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J, \dot{c}\right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{dt}J, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}}_{=0}\right\rangle = \langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \dot{c}\rangle = 0 \\ \Rightarrow \qquad \left\langle \frac{\nabla}{dt}J, \dot{c}\right\rangle &\equiv 0 \quad \text{und aus} \\ \frac{d}{dt}\langle J, \dot{c}\rangle &= \left\langle \frac{\nabla}{dt}J, \dot{c}\right\rangle \equiv 0 \\ \Rightarrow \qquad \langle J, \dot{c}\rangle &\equiv 0 \end{aligned}$$

Folgerung. Sei c *nicht* lichtartig. In diesem Fall ist $T_{c(t)}M = \mathbb{R}\dot{c}(t) \oplus \dot{c}(t)^{\perp}$. Dann ist

$$\{\text{Jacobi-Felder längs } c\} = \underbrace{\mathbb{R}\cdot\dot{c} \oplus \mathbb{R}\cdot t\dot{c}}_{\substack{\text{uninteressante}\\ \text{Jacobi-Felder}}} \oplus \underbrace{\{\text{Jacobi-Felder } J \text{ längs } c \mid J \perp \dot{c}, \tfrac{\nabla}{dt}J \perp \dot{c}\}}_{\text{interessante Jacobi-Felder}}.$$

Bemerkung. Für lichtartige Geodätische c gilt dies nicht, da $\dot{c} \perp \dot{c}$.

Beispiel. Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}})$, sei c lichtartige Geodätische, sei ξ ein lichtartiges paralleles Vektorfeld längs c und linearunabhängig von $\dot{c}$.



Wegen ξ parallel und $R = 0$ ist ξ ein Jacobi-Feld. Es gilt

$$\begin{aligned}\{\text{Jacobi-Felder längs } c\} &= \underbrace{\mathbb{R}\dot{c} \oplus \mathbb{R}(t\dot{c})}\oplus\mathbb{R}\xi \oplus \mathbb{R}(t\xi)\\ &= \{\text{Jacobi-Felder } J \text{ längs } c | J \perp \dot{c}, \tfrac{\nabla}{dt}J \perp \dot{c}\}\end{aligned}$$

Definition. Für $\kappa \in \mathbb{R}$ sind die *verallgemeinerten Sinus-* und *Kosinusfunktionen* $\mathfrak{s}_\kappa, \mathfrak{c}_\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathfrak{s}_\kappa(r) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}\cdot r) & , \kappa > 0\\ r & , \kappa = 0\\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}\sinh(\sqrt{|\kappa|}\cdot r), & \kappa < 0\end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_\kappa(r) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}\cdot r) & , \kappa > 0\\ 1 & , \kappa = 0\\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}\cdot r), & \kappa < 0\end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\kappa\mathfrak{s}_\kappa^2 + \mathfrak{c}_\kappa^2 = 1$, $\mathfrak{s}_\kappa' = \mathfrak{c}_\kappa$, $\mathfrak{c}_\kappa' = -\kappa\mathfrak{s}_\kappa$, $\mathfrak{s}_\kappa(0) = 0$ und $\mathfrak{c}_\kappa(0) = 1$.

Beispiel. Sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K \equiv \kappa$. Sei c eine Geodätische, nach Bogenlänge parametrisiert. Sei ξ ein paralleles Vektorfeld längs c mit $\xi \perp \dot{c}$. Setze $J(t) := (a\mathfrak{s}_\kappa(t) + b\mathfrak{c}_\kappa(t))\xi(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann

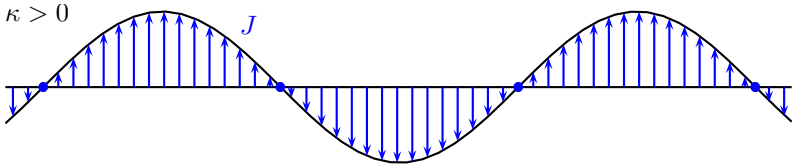
$$\begin{aligned}\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J &= (a\ddot{\mathfrak{s}}_\kappa + b\ddot{\mathfrak{c}}_\kappa)\xi\\ &= -\kappa(a\mathfrak{s}_\kappa + b\mathfrak{c}_\kappa)\xi \quad = \quad -\kappa J\end{aligned}$$

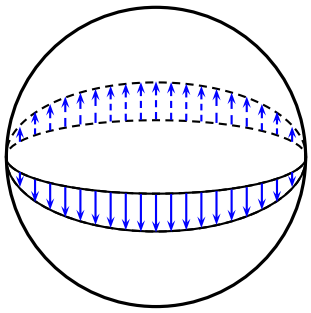
Für den Krümmungstensor gilt $R(\xi,\eta)\zeta = \kappa(\langle\eta,\zeta\rangle\,\xi - \langle\xi,\zeta\rangle\,\eta)$

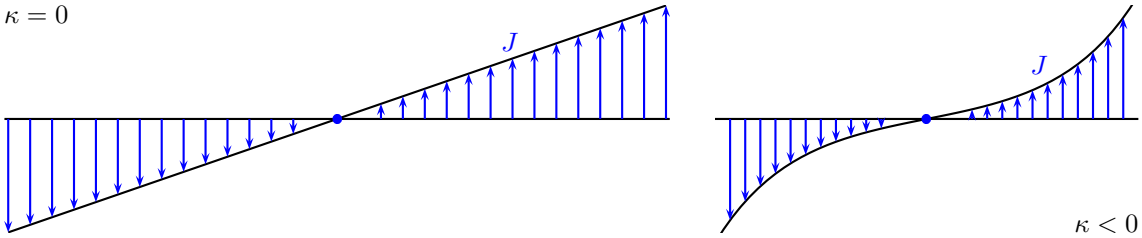
$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad R(\dot{c},J)\dot{c} &= (a\mathfrak{s}_\kappa + b\mathfrak{c}_\kappa)\cdot\kappa(\underbrace{\langle\xi,\dot{c}\rangle}_{=0}\,\dot{c} - \underbrace{\langle\dot{c},\dot{c}\rangle}_{=1}\,\xi)\\ &= -\kappa(a\mathfrak{s}_\kappa + b\mathfrak{c}_\kappa)\xi \quad = \quad -\kappa J\end{aligned}$$

Also ist J ein Jacobi-Feld.

$\Rightarrow$ $\{\text{Jacobi-Felder längs } c | J \perp \dot{c}, \frac{\nabla}{dt}J \perp \dot{c}\} = \{(a\mathfrak{s}_\kappa + b\mathfrak{c}_\kappa)\xi | a, b \in \mathbb{R}, \xi \text{ parallel längs } c, \xi \perp \dot{c}\}$.







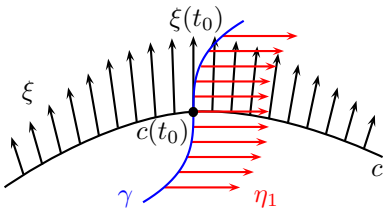
PROPOSITION 3.4.2. *Sei M eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische. Sei ξ ein glattes Vektorfeld längs c. Dann gilt*

$$\xi \text{ ist Jacobi-Feld } \Leftrightarrow \xi \text{ ist Variationsfeld einer geodätischen Variation.}$$

Beweis.

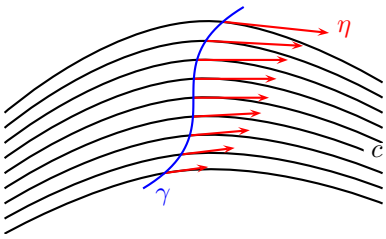
„$\Leftarrow$" wissen wir schon.

„$\Rightarrow$" Sei ξ ein Jacobi-Feld längs c. Wähle ein $t_0 \in [a, b]$ und wähle eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = c(t_0)$ und $\dot\gamma(0) = \xi(t_0)$. Sei η_1 das parallele Vektorfeld längs γ mit $\eta_1(0) = \dot c(t_0)$. Sei η_2 das parallele Vektorfeld längs γ mit $\eta_2(0) = \frac{\nabla}{dt}\xi(t_0)$. Setze $\eta(s) := \eta_1(s) + s\eta_2(s)$ und



$$c(s, t) := \exp_{\gamma(s)}((t - t_0)\eta(s)).$$

Da der Definitionsberech von exp offen ist, ist $c(s, t)$ für $|s|$ hinreichend klein für alle $t \in [a, b]$ definiert. Dann gilt



$$\begin{aligned} c(0, t) &= \exp_{\gamma(0)}((t - t_0)\eta(0)) \\ &= \exp_{c(t_0)}((t - t_0)\dot c(t_0)) \quad = \quad c(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ c ist eine geodätische Variation.

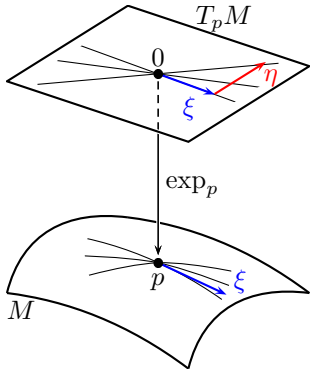
Sei $J(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$ das zugehörige Variationsfeld. Dann ist J ein Jacobi-Feld. Wir zeigen: $\xi(t_0) = J(t_0)$ und $\frac{\nabla}{dt}\xi(t_0) = \frac{\nabla}{dt}J(t_0)$. Dann folgt $\xi = J$ und damit ist ξ das Variationsfeld einer geodätischen Variation. Also

$$\begin{aligned} J(t_0) &= \frac{\partial c}{\partial s}(0, t_0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(s) = \dot\gamma(0) = \xi(t_0) \\ \frac{\nabla}{dt}J(t_0) &= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}(0, t_0) = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(0, t_0) = \frac{\nabla}{ds}\eta(0) = \eta_2(0) = \frac{\nabla}{dt}\xi(t_0) \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3.4.3. *Sei M semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $p \in M$ und $\xi \in T_pM$. Die Geodätische $\gamma(t) := \exp_p(t\xi)$ sei auf $[0, 1]$ definiert, das heißt, ξ ist im Definitionsbereich von $\exp_p$. Zu $\eta \in T_pM (\cong T_{t\xi}T_pM)$ sei J das Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt}J(0) = \eta$. Dann gilt*

$$d\exp_p|_{t\xi}(\eta) = \frac{J(t)}{t} \quad (0 < t \le 1).$$



Beweis. Betrachte die geodätische Variation $c(s,t) := \exp_p(t(\xi + s\eta))$. Sei $\zeta := \frac{\partial c}{\partial s}|_{s=0}$ das zugehörige Variationsfeld, also ein Jacobi-Feld. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= \frac{\partial c}{\partial s}(0,0) = \frac{d}{ds}\exp_p|_{s=0}(0) = 0 = J(0) \\
\frac{\nabla}{dt}\zeta(0) &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial c}{\partial s}(0,0) = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(0,0) = \frac{\nabla}{ds}(\xi + s\eta)|_{s=0} \\
&= \eta = \frac{\nabla}{dt}J(0)
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann $\zeta = J$ und weiter gilt

$$\begin{aligned}
d\exp_p|_{t\xi}(\eta) &= \frac{d}{ds}\exp_p(t\xi + s\eta)|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\exp_p\left(t\left(\xi + s\frac{\eta}{t}\right)\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{t}\zeta(t) = \frac{1}{t}J(t)
\end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 3.4.4. $\ker(d\exp_p|_\xi) \cong \{$*Jacobi-Felder längs* $\gamma(t) = \exp_p(t\xi) | J(0) = 0, J(1) = 0\}$.

Definition. Sei M eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma : I \to M$ eine Geodätische. Dann heißen $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ *konjugierte Punkte* längs γ, falls es ein nicht-triviales Jacobi-Feld J längs γ gibt mit $J(t_1) = 0$ und $J(t_2) = 0$.

FOLGERUNG 3.4.5. $d\exp_p|_\xi$ *ist genau dann nicht invertierbar, wenn* 0 *und* 1 *konjugierte Punkte längs* $\gamma(t) = \exp_p(t\xi)$ *sind.*

Beispiel. Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K \equiv \kappa$.

Fall 1: $\kappa \leq 0$. Jedes Jacobi-Feld hat höchstens eine Nullstelle.

$\Rightarrow$ Es gibt keine konjugierten Punkte.

$\Rightarrow$ $d\exp_p|_\xi$ ist invertierbar für alle $\xi \in \mathcal{D}_p$.

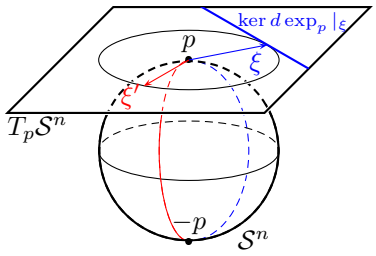
$\Rightarrow$ Die Abbildung $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Fall 2: $\kappa > 0$. Die zu t_0 konjugierten Punkte sind die Punkte $t_0 + m\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Es gilt also

$$\exp_p(\{\xi \in T_p\mathcal{S}^n | \ \|\xi\| = \pi\}) = \{-p\}.$$

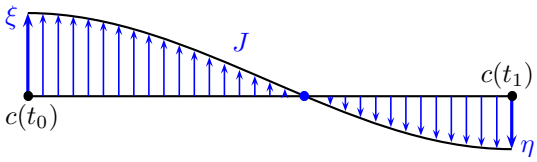
Für $\|\xi\| = \pi$ gilt dann

$$\ker d\exp_p|_\xi = \xi^\perp.$$



PROPOSITION 3.4.6. *Sei* M *eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei* $c : [t_0, t_1] \to M$ *eine Geodätische und seien* t_0 *und* t_1 nicht *zueinander konjugiert längs* c. *Dann existiert zu* $\xi \in T_{c(t_0)}M$ *und* $\eta \in T_{c(t_1)}M$ *genau ein Jacobi-Feld* J *längs* c *mit* $J(t_0) = \xi$ *und* $J(t_1) = \eta$.

Bemerkung. Wir können im nicht konjugierten Fall Jacobi-Felder statt durch Anfangswerte $J(t_0)$ und $\frac{\nabla}{dt}J(t_0)$ auch durch die Randwerte $J(t_0)$ und $J(t_1)$ charakterisieren.



Beweis von Proposition 20.6. Die lineare Abbildung

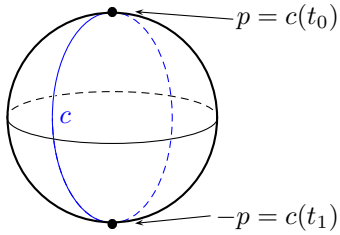
$$\begin{array}{rcl} \overbrace{\{\text{Jacobi-Felder längs } c\}}^{2n\text{-dimensional}} & \to & \overbrace{T_{c(t_0)}M \oplus T_{c(t_1)}M}^{(n+n)\text{-dimensional}} \\ J & \mapsto & (J(t_0), J(t_1)) \end{array}$$

ist injektiv, da t_0 und t_1 nicht zueinander konjugiert sind längs c. Aus Dimensionsgründen folgt dann, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist. □

Im konjugierten Fall ist dies falsch.

Beispiel. Sei $\xi := 0 \in T_p\mathcal{S}^n$. Die Menge der $\eta \in T_{-p}\mathcal{S}^n$, für die es ein Jacobi-Feld J längs c mit $J(0) = \xi = 0$ und $J(\pi) = \eta$ gibt, ist

$$\{\eta = \alpha \cdot \dot{c}(\pi) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



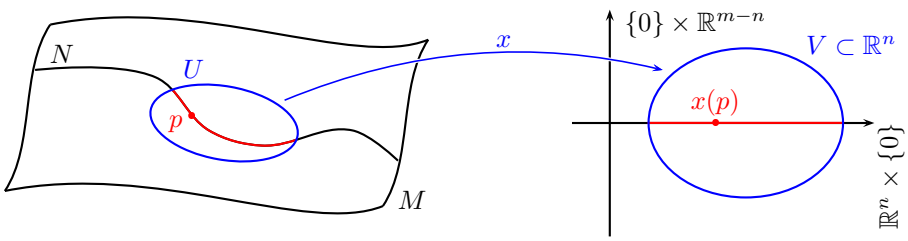
Kapitel 4

Untermannigfaltigkeiten

4.1 Untermannigfaltigkeiten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

Definition. Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, falls für alle $p \in N$ eine Karte $x : U \to V$ von M mit $p \in U$ existiert, so dass

$$x(N \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$



Eine solche Karte heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* für N. Die Zahl $m - n$ heißt *Kodimension* von N in M.

Beispiel. **(1) Kodimension $n = 0$.** $N \subset M$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0, wenn N offen in M ist.

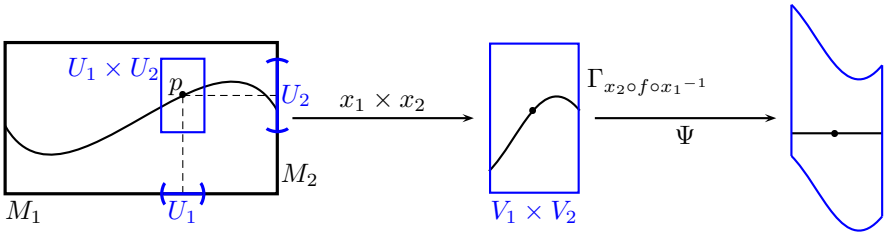
(2) Dimension $n = 0$. $N \subset M$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 0, wenn N eine diskrete Teilmenge von M ist.

(3) Affine Unterräume. Sei $N \subset M = \mathbb{R}^m$ ein affiner Unterraum, das heißt N ist von der Form $N = N' + p$, wobei $N' \subset \mathbb{R}^m$ ein n-dimensionaler Untervektorraum ist und $p \in \mathbb{R}^m$ fest. Wähle $A \in GL(m)$ mit $AN' = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Dann ist $x : U = \mathbb{R}^m \to V = \mathbb{R}^m$, gegeben durch

$$x(q) := A(q - p),$$

eine Untermannigfaltigkeitskarte.

(4) Graphen. Seien M_1, M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $f : M_1 \to M_2$ eine glatte Abbildung. Setze $M = M_1 \times M_2$ und $N = \Gamma_f = \{(\xi, \eta) \in M_1 \times M_2 \mid \eta = f(\xi)\}$.



Wähle Karten $x_i : U_i \to V_i$ von M_i mit $p \in U_1 \times U_2$. O. B. d. A. sei $f(U_1) \subset U_2$. Setze für $w \in V_1$ und $z \in V_2$

$$\psi(w, z) := (w, z - (x_2 \circ f \circ x_1{}^{-1})(w)).$$

Dann ist $x := \psi \circ (x_1 \times x_2)$ eine Untermannigfaltigkeitskarte, definiert auf $U_1 \times U_2$.

Satz 4.1.1. *Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei $N \subset M$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(i) *N ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

(ii) *Für alle $p \in N$ existieren eine offene Umgebung U von p und glatte Funktionen $f_1, \ldots, f_{m-n} : U \to \mathbb{R}$, so dass*

- **(a)** $N \cap U = \{q \in U \mid f_1(q) = \ldots = f_{m-n}(q) = 0\}$.
- **(b)** *Die Differentiale $df_1|_p, \ldots, df_{m-n}|_p \in T_p^*M$ sind linear unabhängig.*

(iii) *Für alle $p \in N$ existieren eine offene Umgebung U von p, eine $(m-n)$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit R und eine glatte Abbildung $f : U \to R$ mit*

- **(a)** $N \cap U = f^{-1}(q),\ q = f(p)$.
- **(b)** *$df|_p : T_pM \to T_qR$ hat maximalen Rang.*

Beweis.

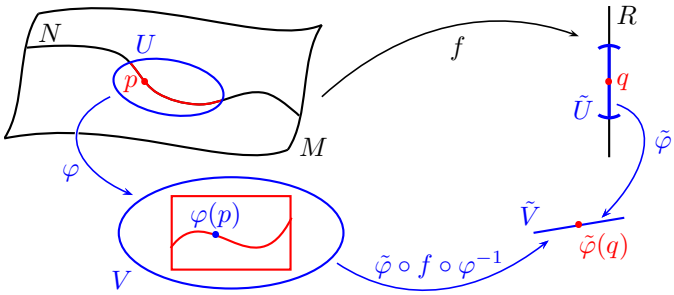
(i)⇒(ii) Sei $p \in N$. Sei $x : U \to V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte für N mit $p \in U$. O. B. d. A. seien

- **(1)** $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ (sonst verkette x mit einer geeigneten Translation).
- **(2)** $V = V_1 \times V_2, V_1 \subset \mathbb{R}^n, V_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ (sonst verkleinere U).

Setze $f_j : U \to \mathbb{R}, f_j := x^{n+j}$ für $j = 1, \ldots, m-n$.

(ii)⇒(iii) trivial (setze $R := \mathbb{R}^{m-n}$ und $f := (f_1, \ldots, f_{m-n})$).

(iii)⇒(i)



Wähle eine Karte $\varphi : U \to V$ von M um p und eine Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ von R um $q := f(p)$. O. B. d. A. sei $f(U) \subset \tilde{U}$. Da φ und $\tilde{\varphi}$ Diffeomorphismen sind, gilt

$$\operatorname{Rang} D(\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} = \operatorname{Rang} df|_p = m - n.$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt dann: Nach eventueller Verkleinerung von V (und U) zu $V_1 \times V_2$ und Umsortierung der Koordinaten existiert eine glatte Abbildung $g : V_1 \to V_2$, so dass

$$(\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\tilde{\varphi}(q)) = (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(q) = \Gamma_g.$$

Verkettet man φ mit einer Untermannigfaltigkeitskarte für Graphen wie im Beispiel **(4)**, so erhält man eine Untermannigfaltigkeitskarte für N in M um p. □

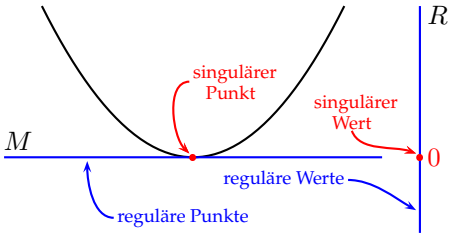
Definition. Seien M, R differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $f : M \to R$ glatt. Ein Punkt $p \in M$ heißt *regulärer Punkt* von f, falls $df|_p$ maximalen Rang hat. Ansonsten heißt p *singulärer Punkt* von f.

Ein Punkt $q \in R$ heißt *regulärer Wert* von f, falls alle $p \in f^{-1}(q)$ reguläre Punkte sind. Ansonsten heißt q *singulärer Wert* von f.

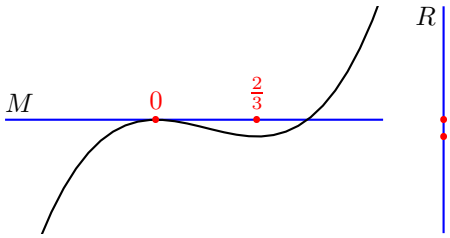
Beispiel. Seien $M = R = \mathbb{R}$ und $f(t) = t^2$. Es gilt

$$df|_t(\xi) = f'(t) \cdot \xi.$$

Also ist t genau dann ein singulärer Punkt von f, wenn $f'(t) = 0$.



Beispiel. Seien $M = R = \mathbb{R}$ und $f(t) = t^2(t-1)$.



Beispiel. Seien $M = R = \mathbb{R}$ und $f(t) = 0$.

Bemerkung. „Fast alle“ Punkte aus R sind reguläre Werte. Genauer:

Satz 4.1.2 (Sard). *Seien M, R differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $f : M \to R$ glatt. Dann ist die Menge $\{$ singuläre Werte von f $\}$ eine Lebesgue-Nullmenge in R, das heißt, für alle Karten $x : U \to V$ von R ist $x(U \cap \{$ singuläre Werte von f $\}) \subset V$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis siehe [Milnor, Kapitel 3].

Korollar 4.1.3. *Ist $f : M \to R$ glatt und gilt $\dim R \leq \dim M$ und ist $q \in R$ ein regulärer Wert von f, so ist $N = f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M mit $\operatorname{codim}(N) = \dim(R)$.*

Beweis folgt direkt aus Satz 4.1.1, Kriterium (iii). □

Beispiel. $M = \mathbb{R}^{n+1}, R = \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|^2 = (x^0)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Dann ist $S^n = f^{-1}(1)$ und

$$Df|_x = (2x^0, \ldots, 2x^n).$$

$\Rightarrow$ $\text{Rang} Df|_x = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Für alle $x \in f^{-1}(1)$ ist $\text{Rang} Df|_x = 1$.

$\Rightarrow$ 1 ist ein regulärer Wert von f.

$\overset{4.1.3}{\Rightarrow}$ $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung. In diesem Beispiel sind alle $q \in \mathbb{R} - \{0\}$ reguläre Werte. Es ist

$$f^{-1}(q) = \begin{cases} \mathrm{S}^n(\sqrt{q}), q > 0 \\ \emptyset \quad , q < 0 \end{cases}$$

Für den singulären Wert $q = 0$ gilt: $f^{-1}(0) = \{0\}$ ist (zufälligerweise) auch eine Untermannigfaltigkeit, aber von der falschen Kodimension $n + 1$.

Im Allgemeinen ist aber $f^{-1}(q)$ für einen singulären Wert q *keine* Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung. Die Menge $f^{-1}(q)$ kann aber auch eine Untermannigfaltigkeit mit der Kodimension $\dim R$ sein, wenn q ein singulärer Wert ist.

Beispiel. $S^n = g^{-1}(0)$, wobei $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, g(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$ und 0 ist singulärer Wert von g.

Bemerkung. Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind selbst wieder differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Denn:

Seien $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in N$, sei $x : U \to V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte mit $x = (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m)$, dann ist $(x^1, \ldots, x^n) : U \cap N \to V \cap \mathbb{R}^n$ eine Karte von N.

Satz 4.1.4. *Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $\iota : N \to M$ die Inklusionsabbildung, $\iota(p) = p$. Dann gilt*

(i) *ι ist glatt und $d\iota|_p : T_pN \to T_pM$ ist injektiv.*

(ii) *Ist $f : M \to P$ glatt, so ist auch $f|_N : N \to P$ glatt.*

(iii) *Ist $g : Q \to M$ glatt mit $g(Q) \subset N$, so ist auch $g : Q \to N$ glatt.*

Beweis.

(i) Sei $x = (x^1, \ldots, x^m)$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M, $\tilde{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ sei die zugehörige Karte von N.

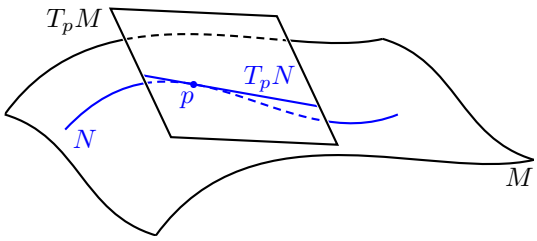
$$\begin{tikzcd} N \supset U \cap N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\tilde{x}"'] & U \subset M \arrow[d, "x"] \\ V \cap \mathbb{R}^n \arrow[r, "\xi \mapsto (\xi, 0)"] & V \end{tikzcd}$$

Offenbar ist $\xi \mapsto (\xi, 0)$ glatt. Da diese Abbildung linear ist, stimmt sie mit ihrem Differential überein, so dass dieses insbesondere injektiv ist.

(ii) Die Funktion $f|_N = f \circ \iota$ ist die Verkettung zweier glatter Abbildungen und damit selbst glatt.

(iii) Sei $q \in Q$ und $x = (x^1, \ldots, x^m)$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M um $g(q)$. Dann gilt für $g^i := x^i \circ g$, dass $(g^1, \ldots, g^m) = (g^1, \ldots, g^n, 0, \ldots, 0)$ glatt ist. Deshalb sind die $g^1, \ldots, g^m$ glatt und somit auch $g : Q \to N$. □

Bemerkung. Man identifiziert T_pN mit $d\iota|_p(T_pN)$ und fasst ihn als Untervektorraum von T_pM auf.



Bemerkung. Für $N \subset \mathbb{R}^m$ ist $T_pN \subset T_p\mathbb{R}^m \xrightarrow[\text{Isom.}]{\cong \text{ kanon.}} \mathbb{R}^m$.

Beispiel. $N = \mathrm{S}^n, m = n + 1$. Dann gilt $T_p\mathrm{S}^n = p^\perp$.

4.2 Semi-riemannsche Untermannigfaltigkeiten

Definition. Sei $(\bar{M}, \bar{g})$ eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \bar{M}$ heißt *semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit*, falls für alle $p \in M$

$$(\bar{g}|_p)|_{T_pM \times T_pM} =: g|_p$$

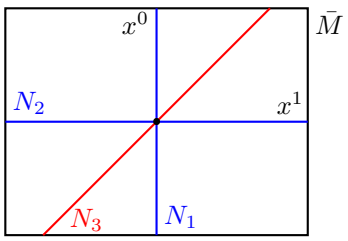
nicht entartet ist.

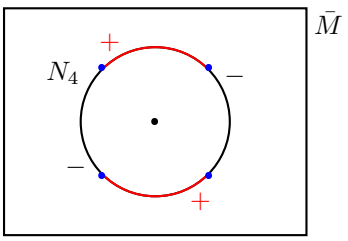
Beispiel. Ist $(\bar{M}, \bar{g})$ riemannsch, so ist jede Untermannigfaltigkeit eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit.

Beispiel. $(\bar{M}, \bar{g}) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}}), g_{\text{Mink}} = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1$.

$N_1 = \{(x^0, 0) | x^0 \in \mathbb{R}\}$ ist semi-riemannsch (mit negativ-definiter Metrik). $N_2 = \{(0, x^1) | x^1 \in \mathbb{R}\}$ ist semi-riemannsch (mit positiv-definiter Metrik).

$N_3 = \{(t, t) | t \in \mathbb{R}\}$ ist nicht semi-riemannsch, da die Einschränkung von g_{Mink} auf T_pN_3 verschwindet. $N_4 = S^1$ besitzt 4 Punkte, in denen die Einschränkung von g_{Mink} entartet.

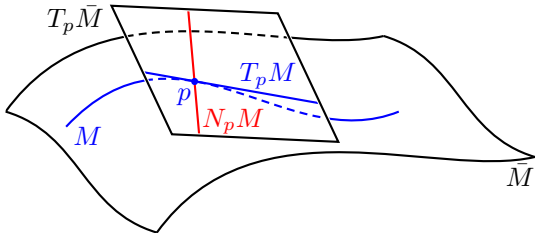




Definition. Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Dann heißt

$$N_pM := T_pM^\perp = \{\xi \in T_p\bar{M} \mid \bar{g}|_p(\xi, \eta) = 0 \; \forall \, \eta \in T_pM\}$$

Normalraum von M im Punkt p.



Bemerkung. Es gilt $T_p\bar{M} = T_pM \oplus N_pM$. Denn:

(1) $\dim N_pM \geq \dim T_p\bar{M} - \dim T_pM$.

(2) Wäre $\xi \in T_pM \cap N_pM$ mit $\xi \neq 0$, dann wäre $\xi \in T_pM$ mit $\bar{g}|_P(\xi, \eta) = 0$ für alle $\eta \in T_pM$ und damit wäre $(\bar{g}|_p)|_{T_pM \times T_pM}$ entartet. Das ist ein Widerspruch!

Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Seien

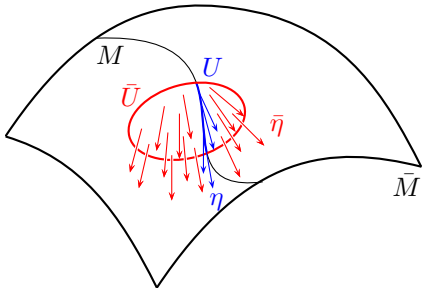
$$\begin{aligned} \tan &: T_p\bar{M} \to T_pM \\ \mathrm{nor} &: T_p\bar{M} \to N_pM \end{aligned}$$

die Orthogonalprojektionen. Sowohl M als auch $\bar{M}$ tragen als semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten je einen Levi-Civita-Zusammenhang ∇ bzw. $\bar{\nabla}$. Wir wollen jetzt untersuchen, inwiefern man ∇ direkt aus $\bar{\nabla}$ bestimmen kann.

$$\begin{tikzcd} (\bar{M}, \bar{g}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \bar{\nabla} \text{ Levi-Civita-Zusammenhang} \arrow[d, dashed, "?"] \\ (M, g) \arrow[r, dashed] & \nabla \text{ Levi-Civita-Zusammenhang} \end{tikzcd}$$

Dabei ist $g|_p := (\bar{g}|_p)_{T_pM \times T_pM}$.

Seien $p \in M$, $\xi \in T_pM$ und $\eta \in C^\infty(U, TM)$, wobei $U \subset M$ eine offene Umgebung von p ist. Wähle eine glatte Fortsetzung $\bar{\eta}$ von η auf eine in $\bar{M}$ offene Umgebung $\bar{U}$ von p. Dann hängt $\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta} \in T_p\bar{M}$ nicht von der Wahl der Fortsetzung $\bar{\eta}$ ab. Denn: $\xi \in T_pM$ und daher von der Form $\xi = \dot{c}(0)$ mit einer Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Also hängt $\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}$ von $\bar{\eta}$ nur längs c ab, das heißt nur von η.



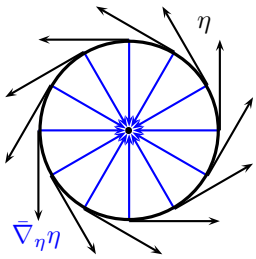
Wir können also schreiben:

$$\bar{\nabla}_\xi \eta := \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}.$$

Beispiel. $\bar{M} = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}}), M = \mathrm{S}^1$. Setze $\eta(x^1, x^2) = (-x^2, x^1)$. Für $c : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1$ mit $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ gilt

$$\dot{c}(t) = \eta(c(t)).$$

Daraus folgt: $\bar{\nabla}_\eta \eta = \dfrac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c} = \ddot{c} = (-\cos(t), -\sin(t))$ ist *nicht* tangential an S^1.



Wir setzen $\nabla_\xi \eta := \tan(\bar{\nabla}_\xi \eta)$.

SATZ 4.2.1. *Sei $(\bar{M}, \bar{g})$ eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit mit induzierter semi-riemannscher Metrik g. Sei $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang von $(\bar{M}, \bar{g})$. Dann ist*

$$\nabla_\xi \eta = \tan(\bar{\nabla}_\xi \eta)$$

der Levi-Civita-Zusammenhang von (M, g).

Beweis. Wir überprüfen für ∇ die Axiome des Levi-Civita-Zusammenhangs für (M, g).

(i) *Lokalität:* klar, da $\bar{\nabla}$ lokal ist.

(ii) *Linearität in ξ:* klar.

(iii) *Linearität in η:* klar.

(iv) *Produktregel I:* Seien $f \in C^\infty(U)$ und $\eta \in C^\infty(U, TM)$, wobei $U \subset M$ eine offene Umgebung von p ist, sei $\xi \in T_pM$. Seien $\bar{\eta}$ bzw. $\bar{f}$ glatte Fortsetzungen von η bzw. f auf eine offene Umgebung $\bar{U}$ von p in $\bar{M}$.

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi(f \cdot \eta) &= \tan(\bar{\nabla}_\xi(\bar{f} \cdot \bar{\eta})) \\
&= \tan(\partial_\xi \bar{f} \cdot \bar{\eta}|_p + \bar{f}(p) \cdot \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\
&= \tan(\partial_\xi f \cdot \bar{\eta}|_p + f(p) \cdot \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\
&= \partial_\xi f \cdot \tan(\bar{\eta}|_p) + f(p) \cdot \tan(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\
&= \partial_\xi f \cdot \eta|_p + f(p) \nabla_\xi \eta
\end{aligned}$$

(v) *Produktregel II:* Seien $\xi \in T_pM$ und $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(U, TM)$. Wähle glatte Fortsetzungen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \in C^\infty(\bar{U}, T\bar{M})$.

$$\begin{aligned}
\partial_\xi g(\eta_1, \eta_2) &= \partial_\xi \bar{g}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \\
&= \bar{g}|_p(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_1, \underbrace{\bar{\eta}_2|_p}_{=\eta_2|_p,\ \text{insbesondere tangential an } M}) + \bar{g}|_p(\bar{\eta}_1|_p, \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_2) \\
&= g|_p(\tan(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_1), \eta_2|_p) + g|_p(\eta_1|_p, \tan(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}_2)) \\
&= g|_p(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2|_p) + g|_p(\eta_1|_p, \nabla_\xi \eta_2)
\end{aligned}$$

(vi) *Torsionsfreiheit:* Seien $x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{\bar{m}}$ Untermannigfaltigkeitskoordinaten auf $\bar{M}$. Damit sind $x^1, \ldots, x^m$ Koordinaten auf M. Für $1 \leq i, j \leq m$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p} \frac{\partial}{\partial x^j} = \tan\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \tan\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

□

Beispiel. $M = \mathrm{S}^1 \subset \bar{M} = \mathbb{R}^2, \bar{g} = g_{\text{eukl}}$. Setze $\eta(c(t)) = \dot{c}(t)$, wobei $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Dann

$$\nabla_\eta \eta = \tan\left(\bar{\nabla}_\eta \eta\big|_p\right) = \tan(-p) = 0.$$

LEMMA 4.2.2. *Sei $\xi \in T_pM$, sei $\eta \in C^\infty(U, TM)$, wobei $U \subset M$ eine offene Umgebung von p ist. Dann hängt* $\mathrm{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta) \in N_pM$ *von η nur vermöge $\eta|_p$ ab.*

Beweis. Seien $x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{\bar{m}}$ Untermannigfaltigkeitskoordinaten auf $\bar{M}$ um p. Seien $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ die Christoffel-Symbole von ∇, $1 \leq i, j, k \leq m$, und $\bar{\Gamma}^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ die Christoffel-Symbole von $\bar{\nabla}$, $1 \leq i, j, k \leq \bar{m}$.

Schreibe auf U: $\eta = \sum_{j=1}^m \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Definiere auf $\bar{U}$: $\bar{\eta}^j(x^1, \ldots, x^{\bar{m}}) := \eta^j(x^1, \ldots, x^m)$ für $j = 1, \ldots, m$ und $\bar{\eta}^j(x^1, \ldots, x^{\bar{m}}) := 0$ für $j = m+1, \ldots, \bar{m}$. Setze $\bar{\eta} := \sum_{j=1}^{\bar{m}} \bar{\eta}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Schreibe ferner $\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta) &= \operatorname{nor}(\bar{\nabla}_\xi \bar{\eta}) \\
&= \bar{\nabla}_\xi \bar{\eta} - \nabla_\xi \eta \\
&= \sum_{i=1}^m \xi^i \sum_{k=1}^{\bar{m}} \left(\left.\frac{\partial \bar{\eta}^k}{\partial x^i}\right|_{x(p)} + \sum_{j=1}^{\bar{m}} \bar{\Gamma}^k_{ij}|_{x(p)} \cdot \bar{\eta}^j|_{x(p)} \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \xi^i \sum_{k=1}^m \left(\left.\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i}\right|_{x(p)} + \sum_{j=1}^m \Gamma^k_{ij}|_{x(p)} \cdot \eta^j|_{x(p)} \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^m \xi^i \sum_{j=1}^m \eta^j|_{x(p)} \left(\sum_{k=1}^{\bar{m}} \bar{\Gamma}^k_{ij}|_{x(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p - \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{ij}|_{x(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right).
\end{aligned}$$

Dies hängt nur von $\eta^j|_{x(p)}$, d. h. von $\eta|_p$ ab. □

Definition. Die Abbildung $II : T_pM \times T_pM \to N_pM$, gegeben durch $II(\xi, \eta) = \operatorname{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta)$, heißt *zweite Fundamentalform* von M in $\bar{M}$ (im Punkt $p \in M$).

LEMMA 4.2.3. *Die zweite Fundamentalform II ist bilinear und symmetrisch.*

Beweis. Im vorangegangenen Beweis haben wir gezeigt, dass

$$II(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\bar{m}} \bar{\Gamma}^k_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p - \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right) \xi^i \eta^j.$$

Offenbar ist II bilinear. Wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes ist II auch symmetrisch. □

Beispiel. Sei $M = \mathrm{S}^1 \subset \bar{M} = \mathbb{R}^2$ und η wie im letzten Beispiel. Für die zweite Fundamentalform gilt $II(\eta, \eta) = -p$.

Fazit. Die Gleichung $\bar{\nabla}_\xi \eta = \nabla_\xi \eta + II(\xi, \eta|_p)$ ist die Zerlegung in Tangential- und Normalteil.

Notation. Schreibe $\langle \xi, \eta \rangle$ statt $g(\xi, \eta)$ oder $\bar{g}(\xi, \eta)$.

SATZ 4.2.4 (Gauß-Formel). *Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Seien $\xi, \eta, \zeta, \nu \in T_pM$. Dann gilt*

$$\langle R(\zeta, \nu)\xi, \eta \rangle = \left\langle \bar{R}(\zeta, \nu)\xi, \eta \right\rangle + \langle II(\nu, \xi), II(\zeta, \eta) \rangle - \langle II(\zeta, \xi), II(\nu, \eta) \rangle .$$

Beweis. Seien $x^1, \dots, x^m$ Koordinaten von M um p, die von Untermannigfaltigkeitskoordinaten $x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{\bar{m}}$ herrühren. Es genügt, die Behauptung für $\xi = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $\eta = \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$, $\zeta = \frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p$ und $\nu = \frac{\partial}{\partial x^l}\big|_p$ zu zeigen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\left\langle \bar{R}(\zeta,\nu)\xi,\eta \right\rangle &= \left\langle \bar{\nabla}_\zeta \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}|_p \frac{\partial}{\partial x^l}}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^l}|_p \frac{\partial}{\partial x^k}}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta \right\rangle \\
\text{Torsionsfreiheit} \quad &= \left\langle \bar{\nabla}_\zeta \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta \right\rangle \\
&= \left\langle \bar{\nabla}_\zeta \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \bar{\nabla}_\zeta II\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \bar{\nabla}_\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\nabla}_\nu II\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \eta \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_\zeta \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta \right\rangle \\
&\quad + \partial_\zeta \overbrace{\left\langle II\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle}^{\equiv 0} - \left\langle II\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \bar{\nabla}_\zeta \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\
&\quad - \partial_\nu \overbrace{\left\langle II\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle}^{\equiv 0} + \left\langle II\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \bar{\nabla}_\nu \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\
&= \langle R(\zeta,\nu)\xi,\eta\rangle + \langle II(\zeta,\xi), II(\nu,\eta)\rangle - \langle II(\nu,\xi), II(\zeta,\eta)\rangle
\end{aligned}
$$

□

KOROLLAR 4.2.5. *Ist $E \subset T_pM$ eine nicht entartete Ebene mit der Basis ξ, η, dann gilt*

$$K(E) = \bar{K}(E) + \frac{\langle II(\xi,\xi), II(\eta,\eta)\rangle - \langle II(\xi,\eta), II(\xi,\eta)\rangle}{\langle \xi,\xi\rangle \langle \eta,\eta\rangle - \langle \xi,\eta\rangle^2}.$$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition der Schnittkrümmung und der Gauß-Formel. □

LEMMA 4.2.6. *Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei $\varphi : \bar{M} \to \bar{N}$ eine lokale Isometrie, setze $\varphi(M) =: N$. Für $\xi, \eta \in T_pM$ gilt*

$$II_N(d\varphi|_p(\xi), d\varphi|_p(\eta) = d\varphi|_p(II_M(\xi,\eta)).$$

Beweis. Lokale Isometrien erhalten ∇ und $\bar{\nabla}$. Da II die Differenz von ∇ und $\bar{\nabla}$ ist, folgt die Behauptung. □

4.3 Totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Sei ξ ein glattes Vektorfeld an M längs c. Dann lautet die Zerlegung in Tangential- und Normalteil

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\xi = \frac{\nabla}{dt}\xi + II(\xi, \dot{c}).$$

Insbesondere gilt für $\xi = \dot{c}$

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c} = \frac{\nabla}{dt}\dot{c} + II(\dot{c}, \dot{c}).$$

Die Kurve c ist somit genau dann Geodätische in M, wenn

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c} = II(\dot{c}, \dot{c}), \quad \text{d. h. wenn} \quad \frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}(t) \in N_{c(t)}M \text{ für alle } t \in I.$$

Beispiel. Sei $M = \mathrm{S}^n \subset \bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ mit euklidischer Metrik. Die Kurve $c : I \to S^n$ sei ein Großkreis, d. h. von der Form

$$c(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot \xi.$$

mit $p \in S^n, \xi \in T_pS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $|\xi| = 1$. Daraus folgt dann

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t) = -\cos(t) \cdot p - \sin(t) \cdot \xi = -c(t) \in N_{c(t)}S^n.$$

Also ist c eine Geodätische in S^n.

Definition. Eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit heißt *totalgeodätisch*, falls $II \equiv 0$.

SATZ 4.3.1. *Für eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit $M \subset \bar{M}$ sind äquivalent*

(i) *M ist totalgeodätisch.*

(ii) *Jede Geodätische in M ist auch Geodätische in $\bar{M}$.*

(iii) *Für alle $p \in M$ und $\xi \in T_pM$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die $\bar{M}$-Geodätische $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \bar{M}$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \xi$ in M verläuft, das heißt $c(t) \in M$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

(iv) *Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Dann ist die Parallelverschiebung längs c bezüglich M und bezüglich $\bar{M}$ dasselbe (für Tangentialvektoren von M).*

Beweis.

(ii)⇒(iii) Sei $p \in M$, sei $\xi \in T_pM$. Sei c die $\bar{M}$-Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \xi$. Sei $\tilde{c}$ die M-Geodätische mit $\tilde{c}(0) = p$ und $\dot{\tilde{c}}(0) = \xi$.

$\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$ $\tilde{c}$ ist auch Geodätische in $\bar{M}$ und es gilt $\tilde{c}(0) = c(0)$ und $\dot{\tilde{c}}(0) = \dot{c}(0)$.

$\Rightarrow$ $c = \tilde{c}$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ c verläuft in M

(iii)⇒(i) Seien $p \in M$ und $\xi \in T_pM$. Sei c_ξ die $\bar{M}$-Geodätische mit $c_\xi(0) = p$ und $\dot{c}_\xi(0) = \xi$.

$\overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow}$ c_ξ verläuft in M für t hinreichend nahe bei 0, das heißt für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$.

Auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ erhalten wir:

$$0 = \frac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}_\xi = \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}_\xi}_{\text{tangential}} + \underbrace{II(\dot{c}_\xi, \dot{c}_\xi)}_{\text{normal}}$$

Insbesondere gilt somit

$$II(\dot{c}_\xi(t), \dot{c}_\xi(t)) = 0 \text{ für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Für $t = 0$ bedeutet das $II(\xi, \xi) = 0$. Durch Polarisierung folgt: $II \equiv 0$.

(i)⇒(iv) Es gilt $\frac{\nabla}{dt}\xi = \frac{\bar{\nabla}}{dt}\xi$. Also ist ξ genau dann parallel in M, wenn ξ parallel in $\bar{M}$ ist.

(iv)⇒(ii) Sei c Geodätische in M.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \dot{c} \text{ ist parallel in } M. \\ &\overset{\text{(iv)}}{\Rightarrow} \quad \dot{c} \text{ ist parallel in } \bar{M}. \\ &\Rightarrow \quad c \text{ ist Geodätische in } \bar{M}. \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ affiner Unterraum, $\mathbb{R}^n$ trage g_{eukl} oder g_{Mink}. Das Kriterium **(iii)** liefert: $A \subset \mathbb{R}^n$ ist totalgeodätisch.

Beispiel. Sei $\bar{M}$ eine beliebige semi-riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $\bar{m}$.

- Alle 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten sind totalgeodätisch.
- Jede $\bar{m}$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, also jede offenen Teilmengen von $\bar{M}$, ist totalgeodätisch.
- Sei $M = \{c(t) | t \in I\}$, wobei $c : I \to \bar{M}$ eine Geodätische ist. Dann ist M totalgeodätisch, sofern M eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit ist.

Bemerkung. Die meisten semi-riemannschen Mannigfaltigkeiten $\bar{M}$ haben keine totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten der Dimension $m \in \{2, \ldots, \bar{m} - 1\}$.

SATZ 4.3.2. *Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Es existiere eine Isometrie $\varphi \in$ Isom$(\bar{M})$, so dass M eine Zusammenhangskomponente von* Fix$(\varphi) = \{p \in \bar{M} | \varphi(p) = p\}$ *ist. Dann ist M totalgeodätisch.*

Beweis. Verwende Kriterium **(iii)** aus Satz 4.3.1.

Seien $p \in M$ und $\xi \in T_pM$. Sei $c : I \to \bar{M}$ die $\bar{M}$-Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \xi$.

Behauptung: $d\varphi|_p(\xi) = \xi$.

Beweis. Sei $\gamma : J \to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\varphi|_p(\xi) &= d\varphi|_p(\dot{\gamma}(0)) \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{(\varphi \circ \gamma)}_{=\gamma, \text{ da } M \subset \text{Fix}(\varphi)} |_{t=0} \\ &= \dot{\gamma}(0) \;=\; \xi. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.6.7 verläuft c in Fix(φ). Da $c(I)$ zusammenhängend ist, liegt es sogar in M.

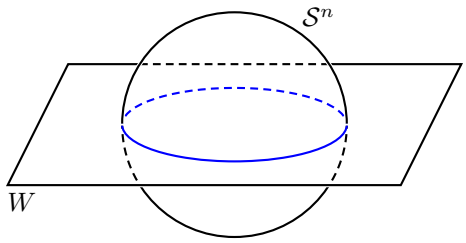
□

Beispiel. Sei $\bar{M} = \mathrm{S}^n$. Sei $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Untervektorraum. Sei $A \in \mathrm{O}(n+1)$ die Spiegelung an W.

$\Rightarrow$ $\varphi := A|_{\mathrm{S}^n} \in \mathrm{Isom}(\mathrm{S}^n)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Fix}(\varphi) = W \cap \mathrm{S}^n$ ist totalgeodätisch

$\Rightarrow$ S^n besitzt totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten jeder Kodimension.



Aus der *Gauß-Formel* (Satz 4.2.4) folgt: Ist $M \subset \bar{M}$ totalgeodätisch, so

$$\begin{aligned} R(\xi,\eta)\zeta &= \bar{R}(\xi,\eta)\zeta && \text{für alle } p \in M,\ \xi,\eta,\zeta \in T_pM \\ K(E) &= \bar{K}(E) && \text{für alle nicht entarteten Ebenen } E \subset T_pM \end{aligned}$$

4.4 Hyperflächen

Definition. Eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit $M \subset \bar{M}$ heißt *semi-riemannsche Hyperfläche*, falls $\mathrm{codim} M = 1$. Das *Signum* von M ist $\varepsilon = +1$, falls $(\bar{g}|_p)|_{N_pM \times N_pM}$ positiv-definit ist, und $\varepsilon = -1$, falls $(\bar{g}|_p)|_{N_pM \times N_pM}$ negativ-definit ist.

Bemerkung. Für $\varepsilon = +1$ gilt: $\mathrm{Index}(\bar{M}, \bar{g}) = \mathrm{Index}(M, g)$.

Für $\varepsilon = -1$ gilt: $\mathrm{Index}(\bar{M}, \bar{g}) = \mathrm{Index}(M, g) + 1$.

Notation. Für $\xi \in T_pM$ definiere

$$|\xi| := \sqrt{|\langle \xi, \xi \rangle|}.$$

Achtung! Es kann auch vorkommen, dass $|\xi| = 0$, obwohl $\xi \neq 0$.

Gradient einer differenzierbaren Funktion

Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, sei $p \in M$. Dann ist $df|_p \in T_p^*M$. In Koordinaten haben wir

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Da $g|_p$ nicht ausgeartet ist, existiert genau ein $\xi \in T_pM$, so dass

$$df|_p(\eta) = g|_p(\xi, \eta) \text{ für alle } \eta \in T_pM.$$

Schreibe $\xi =: \mathrm{grad} f|_p$. In lokalen Koordinaten schreibe $\mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i g_{ij} \end{aligned}$$

Durch Matrixmultiplikation mit $(g^{ij})_{ij}$ folgt daraus $\alpha^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$, also

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

LEMMA 4.4.1. *Sei $\bar{M}$ eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $f : \bar{M} \to \mathbb{R}$ glatt, sei $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f. Dann ist $f^{-1}(c) \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum ε, falls*

$$\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \cdot \varepsilon > 0$$

Ferner ist $\nu := \frac{\operatorname{grad} f|_p}{|\operatorname{grad} f|_p|} \in N_pM$ mit $\langle \nu, \nu \rangle = \varepsilon$.

Beweis. Zu zeigen ist lediglich: $\operatorname{grad} f|_p \perp T_pM$.
Dazu sei $\xi \in T_pM$. Wir wählen $\gamma : I \to M$ mit $\dot{\gamma}(0) = \xi$ und erhalten:

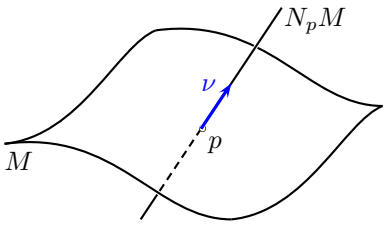
$$0 = \frac{d}{dt} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\equiv c} |_{t=0} = df|_p(\xi) = \langle \operatorname{grad} f|_p, \xi \rangle$$

□

Definition. Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Hyperfläche, sei $p \in M$. Sei $\nu \in N_pM$ mit $|\nu| = 1$. Die lineare Abbildung $S_\nu : T_pM \to T_pM$, charakterisiert durch

$$\langle S_\nu(\xi), \eta \rangle = \langle II(\xi, \eta), \nu \rangle \text{ für alle } \xi, \eta \in T_pM,$$

heißt *Weingarten-Abbildung*.



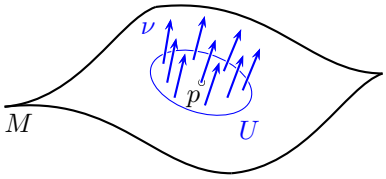
LEMMA 4.4.2. *S_ν ist selbstadjungiert.*

Beweis klar, da II symmetrisch ist. □

Bemerkung. Es gilt $S_{-\nu} = -S_\nu$. Ohne Festlegung von ν ist die Weingarten-Abbildung also nur bis auf das Vorzeichen bestimmt.

LEMMA 4.4.3. *Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Hyperfläche, sei $p \in M$. Sei $U \subset M$ eine offene Umgebung von p und sei $\nu \in C^\infty(U, NM)$ mit $|\nu| = 1$. Dann gilt*

$$S_\nu(\xi) = -\bar{\nabla}_\xi \nu.$$



Beweis. Für alle $\eta \in C^\infty(U, TM)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle S_\nu(\xi), \eta \rangle &= \langle II(\xi, \eta), \nu \rangle = \langle \operatorname{nor}(\bar{\nabla}_\xi \eta), \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_\xi \eta, \nu \rangle \\ &= \partial_\xi \underbrace{\langle \eta, \nu \rangle}_{=0} - \langle \eta, \bar{\nabla}_\xi \nu \rangle = -\langle \bar{\nabla}_\xi \nu, \eta \rangle \end{aligned}$$

□

Gauß-Gleichungen: Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum ε. Seien $\xi, \eta, \zeta \in T_pM$ für $p \in M$.

$$R(\xi,\eta)\zeta = \bar{R}(\xi,\eta)\zeta + \varepsilon\{\langle S_\nu(\eta),\zeta\rangle\, S_\nu(\xi) - \langle S_\nu(\xi),\zeta\rangle\, S_\nu(\eta)\}.$$

Für eine nicht entartete Ebene $E \subset T_pM$ gilt

$$K(E) = \bar{K}(E) + \varepsilon \cdot \frac{\langle S_\nu(\xi),\xi\rangle\,\langle S_\nu(\eta),\eta\rangle - \langle S_\nu(\xi),\eta\rangle^2}{\langle \xi,\xi\rangle\,\langle \eta,\eta\rangle - \langle \xi,\eta\rangle^2},$$

wobei ξ, η eine Basis von E bilden.

Pseudosphären und pseudo-hyperbolische Räume

Betrachte jetzt $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\bar{g} = -\sum_{i=0}^{k-1} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=k}^{n} dx^i \otimes dx^i$ in kartesischen Koordinaten $x^0, \ldots, x^n$. Dann ist $(\bar{M}, \bar{g})$ eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index k. Für $k = 0$ haben wir also die euklidische Metrik vorliegen, für $k = 1$ die Minkowski-Metrik.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, dass alle g_{ij} konstant sind. Alle Christoffel-Symbole verschwinden also in kartesischen Koordinaten. Daher gilt für die Krümmung:

$$\bar{R} \equiv 0,\ \bar{K} \equiv 0,\ \overline{\mathrm{ric}} \equiv 0 \text{ und } \overline{\mathrm{scal}} \equiv 0.$$

Für $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, f(x^0, \ldots, x^n) = -\sum_{i=0}^{k-1}(x^i)^2 + \sum_{i=k}^{n}(x^i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i (x^i)^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad} f|_x &= \sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \underbrace{g^{ij}}_{=\varepsilon_i \delta^{ij}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= 2\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \underbrace{2\sum_{i=0}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}}_{\in T_p\mathbb{R}^{n+1}} \quad \longleftrightarrow \quad 2x \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cong \quad \mathbb{R}^{n+1}
\end{aligned}$$

Es gilt also $\mathrm{grad} f|_x = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
Der einzige singuläre Punkt von f ist folglich $x = 0$ und $0 = f(0)$ ist der einzige singuläre Wert von f.

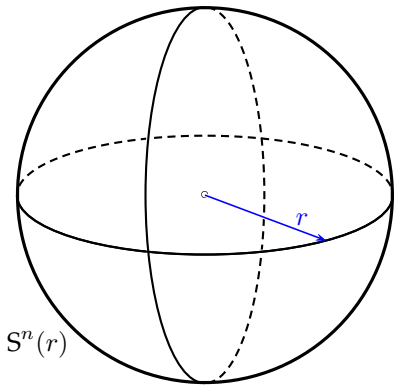
Ist $c \neq 0$, so definiert $M := f^{-1}(c)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{grad} f|_x, \mathrm{grad} f|_x \rangle &= 4 \left\langle \sum_{i=0}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{i=0}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \\
&= 4 \sum_{i,j=0}^{n} x^i x^j g_{ij} \\
&= 4 \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j (x^j)^2 \\
&= 4 f(x)
\end{aligned}$$

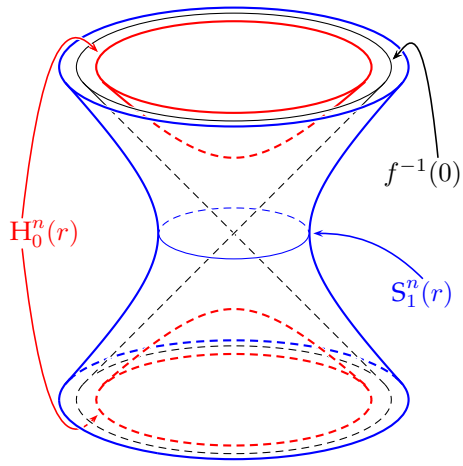
Für $c > 0$ ist somit $f^{-1}(c)$ eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum $\varepsilon = +1$, für $c < 0$ ist $f^{-1}(c)$ eine semi-riemannsche Hyperfläche vom Signum $\varepsilon = -1$.

Definition. Die semi-riemannsche Hyperfläche $\mathrm{S}^n_k(r) := f^{-1}(r^2)$, wobei $r > 0$, heißt *Pseudosphäre* vom Radius r und vom Index k, die semi-riemannsche Hyperfläche $\mathrm{H}^n_{k-1}(r) := f^{-1}(-r^2)$, wobei $r > 0$, heißt *pseudo-hyperbolischer Raum* vom Index $k-1$.

Beispiel. $k = 0, \bar{g} = g_{\text{eukl}}, \mathrm{S}^n_0(r) = \mathrm{S}^n(r)$ ist die Standard-Sphäre vom Radius r.



Beispiel. $k = 1, \bar{g} = g_{\text{Mink}}$.



Definition. $\mathrm{H}^n := \{x \in \mathrm{H}^n_0(1) | x^0 > 0\}$ zusammen mit der induzierten riemannschen Metrik g_{hyp} heißt n-dimensionaler *hyperbolischer Raum*.

Definition. $\mathrm{S}^4_1(r)$ heißt *deSitter-Raumzeit* und $\mathrm{H}^4_1(r)$ heißt *Anti-deSitter-Raumzeit*.

Bemerkung. $S^n_k(r)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}$ und $\mathcal{H}^n_k(r)$ ist diffeomorph zu $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Den Beweis dafür findet man in [O'Neill, Seite 111].

Wir wollen nun die Krümmung dieser Hyperflächen berechnen. Für $M = f^{-1}(c)$, wobei $c \neq 0$, gilt:

$$\langle \operatorname{grad} f|_x, \operatorname{grad} f|_x \rangle = 4f(x) = 4c.$$

$$\Rightarrow \quad \nu|_x := \frac{\operatorname{grad} f|_x}{2\sqrt{|c|}} = \frac{\operatorname{grad} f|_x}{2r} \longleftrightarrow \frac{1}{r} \cdot x.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_\nu = -\frac{1}{r}\mathrm{id}}$$

$$\Rightarrow \quad R(\xi,\eta)\zeta = 0 + \tfrac{\varepsilon}{r^2}\{\langle \eta,\zeta\rangle \xi - \langle \xi,\zeta\rangle \eta\} \text{ und } K(E) = 0 + \tfrac{\varepsilon}{r^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R(\xi,\eta)\zeta = \frac{\varepsilon}{r^2}(\langle \eta,\zeta\rangle \xi - \langle \xi,\zeta\rangle \eta)} \text{ und } \boxed{K \equiv \frac{\varepsilon}{r^2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \operatorname{ric}(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R(\xi,e_i)e_i,\eta\rangle \\ &= \frac{\varepsilon}{r^2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \big\langle \underbrace{\langle e_i,e_i\rangle}_{=\varepsilon_i} \xi - \langle \xi,e_i\rangle e_i, \eta\big\rangle \\ &= \frac{\varepsilon}{r^2}(n\langle \xi,\eta\rangle - \langle \xi,\eta\rangle) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{ric} = \frac{\varepsilon(n-1)}{r^2} g}$$

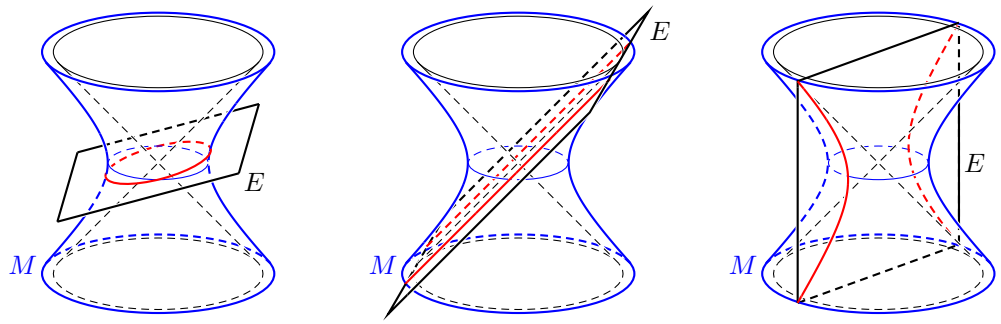
$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{scal} = \frac{\varepsilon(n-1)n}{r^2}}$$

Bemerkung. Wir haben also für $\mathrm{S}^4_1(r)$ bzw. $\mathrm{H}^4_1(r)$ den *Einstein-Tensor*

$$G = \operatorname{ric} - \tfrac{1}{2}\operatorname{scal} \cdot g = \tfrac{3\varepsilon}{r^2} g - \tfrac{1}{2}\tfrac{\varepsilon\cdot 3\cdot 4}{r^2} g = -3\tfrac{\varepsilon}{r^2} g.$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{S}^4_1(r)$ bzw. $\mathrm{H}^4_1(r)$ Vakuumlösungen der Einstein'schen Feldgleichung mit kosmologischer Konstante $\Lambda = \frac{3}{r^2}$ bzw. $\Lambda = -\frac{3}{r^2}$ sind.

Im Folgenden wollen wir die Geodätischen bestimmen. Sei dazu $p \in M$, wobei $M = \mathrm{S}^n_k(r)$ oder $M = \mathrm{H}^n_{k-1}(r)$, sei $\xi \in T_pM \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\xi \neq 0$. Insbesondere gilt $p \neq 0$. Dann sind p und ξ, aufgefasst als Vektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$, linear unabhängig, da $\xi \in T_pM$ und $p \in N_pM$. Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Ebene, die von p und ξ aufgespannt wird. Parametrisiere $M \cap E$ proportional zur Bogenlänge. Wir erhalten eine Kurve $c : I \to M$.



Da $\langle \dot c, \dot c\rangle$ konstant ist, folgt $\frac{\nabla}{dt}\dot c(t) \perp \dot c(t)$ für alle $t \in I$.
Andererseits verläuft c auch in E, also ist $\dot c$ auch tangential an E und es gilt $\frac{\nabla}{dt}\dot c(t) \in E$, weil E

eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Es folgt für alle $t \in I$:

$$\tfrac{\nabla}{dt}\dot{c} + II(\dot{c},\dot{c}) = \tfrac{\bar{\nabla}}{dt}\dot{c}(t) \in E$$

und damit ist $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \alpha\,\dot{c}(t)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist c raum- oder zeitartig, so folgt aus $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$ schließlich $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0$ und damit ist c eine Geodätische in M. Ist c dagegen lichtartig, so ist c eine Gerade, denn der Lichtkegel im 2-dimensionalen Minkowski-Raum E besteht aus zwei Geraden. Mit affiner Parametrisierung sind Geraden Geodätische in $\mathbb{R}^{n+1}$ und damit auch in M.

4.5 Trigonometrie in Räumen konstanter Krümmung

Diesen letzten Abschnitt von Kapitel 4 konnten wir aus Zeitgründen in der Vorlesung leider nicht behandeln. Da er sehr hübsch ist, nehmen wir ihn trotzdem ins Skript auf.

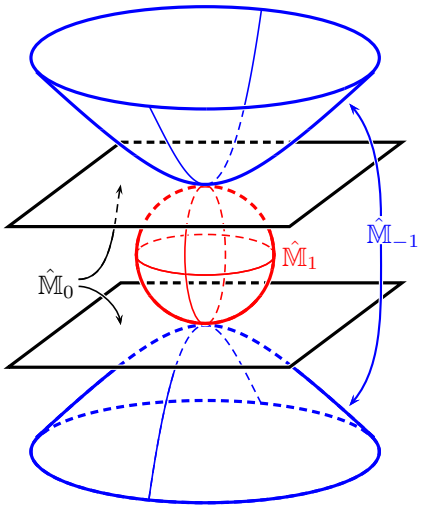
Ziel. Untersuchung der Längen- und Winkelverhältnisse in Dreiecken.

Notation. Der *Modellraum* $\mathbb{M}^n_\kappa$ ist definiert als

$$\mathbb{M}^n_\kappa := \begin{cases} \mathrm{S}^n(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}) & , \kappa > 0 \\ \mathbb{R}^n & , \kappa = 0 \\ \mathrm{H}^n(\frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}), & \kappa < 0 \end{cases}$$

Dann ist $\mathbb{M}^n_\kappa$ eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit der konstanter Schnittkrümmung κ.

Bemerkung. Da zu je drei Punkten eine totalgeodätische zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{M}^n_\kappa$ existiert, die diese Punkte enthält, genügt es den Fall $n = 2$ zu betrachten.



Definiere auf $\mathbb{R}^3$ die Bilinearform

$$\langle x, y\rangle_\kappa := x^0y^0 + \kappa(x^1y^1 + x^2y^2).$$

Setze dann $\hat{\mathbb{M}}_\kappa := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle x, x\rangle_\kappa = 1\}$. Setze

$$\mathbb{M}_\kappa := \begin{cases} \hat{\mathbb{M}}_\kappa & , \kappa > 0 \\ \{x \in \hat{\mathbb{M}}_\kappa | x^0 > 0\}, & \kappa \leq 0 \end{cases}$$

Im Fall $\kappa \neq 0$ ist $\mathbb{M}_\kappa$ mit der durch $\frac{1}{\kappa}\langle\cdot,\cdot\rangle_\kappa$ induzierten Metrik gegeben durch

$$\mathbb{M}_\kappa = \begin{cases} \mathrm{S}^2 \,, & \kappa = 1 \\ \mathrm{H}^2, & \kappa = -1 \end{cases}$$

Im Fall $\kappa = 0$ induziert jede Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ der Form $\lambda \cdot x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2$ die euklidische Metrik auf $\mathbb{M}_0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wählen $\lambda = 0$ und schreiben im Fall $\kappa = 0$ Folgendes:

$$\tfrac{1}{\kappa}\langle x, y\rangle_\kappa := x^1y^1 + x^2y^2.$$

Lemma 4.5.1. *Für alle $\kappa \in \mathbb{R}$ enthält die Isometriegruppe von $\mathbb{M}_\kappa$ die Untergruppe*

$$G_\kappa := \{\varphi \,|\, \varphi = A|_{\mathbb{M}_\kappa}, A \in GL(3), \langle Ax, Ay\rangle_\kappa = \langle x, y\rangle_\kappa, \frac{1}{\kappa}\langle Ax, Ay\rangle_\kappa = \frac{1}{\kappa}\langle x, y\rangle_\kappa \,\forall x, y \in \mathbb{R}^3, A(\mathbb{M}_\kappa) = \mathbb{M}_\kappa\}.$$

Bemerkung. Im Fall $\kappa \neq 0$ sind die Bedingungen $\langle Ax, Ay\rangle_\kappa = \langle x, y\rangle_\kappa$ und $\frac{1}{\kappa}\langle Ax, Ay\rangle_\kappa = \frac{1}{\kappa}\langle x, y\rangle_\kappa$ natürlich äquivalent und wir könnten eine weglassen. Im Fall $\kappa = 0$ brauchen wir sie aber beide.

Aus $\langle Ax, Ay\rangle_\kappa = \langle x, y\rangle_\kappa$ folgt bereits, dass $A(\hat{\mathbb{M}}_\kappa) = \hat{\mathbb{M}}_\kappa$. Im Fall $\kappa \leq 0$ könnte A allerdings die beiden Komponenten von $\hat{\mathbb{M}}_\kappa$ vertauschen. Dies wird durch die Bedingung $A(\mathbb{M}_\kappa) = \mathbb{M}_\kappa$ unterbunden. Im Fall $\kappa > 0$ könnten wir sie weglassen.

Beweis des Lemmas. Sei $A \in G_\kappa$. Da $\varphi = A|_{\mathbb{M}_\kappa}$ Einschränkung der linearen Abbildung A ist, ist für $p \in \mathbb{M}_\kappa$ das Differential $d\varphi(p) : T_p\mathbb{M}_\kappa \to T_{\varphi(p)}\mathbb{M}_\kappa$ ebenfalls Einschränkung von A,

$$d\varphi(p) = A|_{\mathbb{M}_\kappa}.$$

Hier werden die Tangentialräume von $\mathbb{M}_\kappa$ als Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ aufgefasst. Da A die Bilinearform $\frac{1}{\kappa}\langle\cdot,\cdot\rangle_\kappa$ erhält, ist $d\varphi(p)$ für jedes $p \in \mathbb{M}_\kappa$ eine lineare Isometrie und φ damit eine Isometrie riemannscher Mannigfaltigkeiten. □

Bemerkung. Tatsächlich gilt $\mathrm{Isom}(\mathbb{M}_\kappa) = G_\kappa$, aber das werden wir nicht benötigen.

Für $\kappa = 1$ ist $G_\kappa \cong \{A \in GL(3) \,|\, \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{O}(3)$, die Gruppe der orthogonalen Transformationen. Für $\kappa = -1$ nennt man G_κ die Gruppe der *zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen* .

Im Fall $\kappa = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} G_0 &= \{A \in GL(3) |\, \langle Ax, Ay\rangle_0 = \langle x, y\rangle_0, \tfrac{1}{0}\langle Ax, Ay\rangle_0 = \tfrac{1}{0}\langle x, y\rangle_0 \,\forall x, y \in \mathbb{R}^3, A\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0\} \\ &= \left\{ A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b^1 & & \\ b^2 & & B \end{array}\right) \middle| \, b^1, b^2 \in \mathbb{R}, B \in \mathrm{O}(2) \right\} \end{aligned}$$

Denn sei $A \in G_0$. Dann gilt

$$x^0y^0 = (Ax)^0(Ay)^0 = (A_0^0x^0 + A_1^0x^1 + A_2^0x^2)(A_0^0y^0 + A_1^0y^1 + A_2^0y^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Für } x = y = e_0\text{: } 1 = (A_0^0)^2 & \Rightarrow \quad A_0^0 = \pm 1 \quad \overset{\mathbf{A}(\mathbb{M}_0)=\mathbb{M}_0}{\Rightarrow} \quad A_0^0 = 1. \\ \text{Für } x = y = e_1\text{: } 0 = (A_1^0)^2 & \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad A_1^0 = 0. \\ \text{Für } x = y = e_2\text{: } 0 = (A_2^0)^2 & \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad A_2^0 = 0. \end{cases}$$

Für $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt mit $x = (0, \hat{x})^\top$ und $y = (0, \hat{y})^\top$:

$$\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{\mathbb{R}^2} = \tfrac{1}{0}\langle x, y\rangle_0 = \tfrac{1}{0}\langle Ax, Ay\rangle_0 = \tfrac{1}{0}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ B\hat{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B\hat{y} \end{pmatrix} \right\rangle_0 = \langle B\hat{x}, B\hat{y}\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

$\Rightarrow$ Es gilt $B \in \mathrm{O}(2)$.

$\Rightarrow$ Also $G_0 \subset \left\{ \mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & \mathrm{B} \end{array}\right) \middle| \, b \in \mathbb{R}^2, \mathrm{B} \in \mathrm{O}(2) \right\}$.

Die andere Inklusion „$\supset$“ ergibt sich einfach durch Nachrechnen. Daraus folgt also die Gleichheit.

Betrachten wir nun, wie G_0 wirkt, wenn wir $\mathbb{M}_0$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

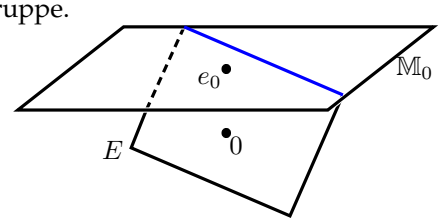
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{M}_0 & \overset{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ b & B\end{smallmatrix}\right)}{\longrightarrow} & \mathbb{M}_0 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \hat{x} & \mapsto & \begin{pmatrix}1\\ \hat{x}\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}1 & 0\\ b & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \hat{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ b+B\hat{x}\end{pmatrix} & \mapsto & b+B\hat{x} \end{array}$$

Die Gruppe G_0 wirkt also wie die euklidische Bewegungsgruppe.

Wie im letzten Abschnitt sieht man, dass die Geodätischen in $\mathbb{M}_\kappa$, als Punktmengen, genau die Mengen von der Form

$$\mathbb{M}_\kappa \cap E$$

sind, wobei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionaler Untervektorraum ist.



Lemma 4.5.2. *Die nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_\kappa$ mit $\gamma(0) = e_0$ sind gegeben durch*

$$\gamma(r) = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ \mathfrak{s}_\kappa(r)\cdot\sin(\varphi) \\ \mathfrak{s}_\kappa(r)\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ fest ist.

Beweis. Die Kurve γ verläuft in $\hat{M}_\kappa$, denn

$$\langle\gamma(r),\gamma(r)\rangle_\kappa = \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 + \kappa(\mathfrak{s}_\kappa(r)^2\sin(\varphi)^2 + \mathfrak{s}_\kappa^2\cos(\varphi)^2) = \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r)^2 = 1$$

Da $\gamma(0) = e_0 \in \mathbb{M}_\kappa$ und γ stetig ist, verläuft γ in $\mathbb{M}_\kappa$. Außerdem verläuft γ in der Ebene E, die aufgespannt wird durch e_0 und $(0,\sin(\varphi),\cos(\varphi))^\top$.

$\Rightarrow$ γ verläuft in $\mathbb{M}_\kappa \cap E$.

Es gilt zusätzlich noch, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, denn

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\kappa}\langle\dot\gamma(r),\dot\gamma(r)\rangle_\kappa &= \tfrac{1}{\kappa}\left\langle \begin{pmatrix} -\kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r)\sin(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r)\cos(\varphi)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r)\sin(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r)\cos(\varphi)\end{pmatrix}\right\rangle_\kappa \\ &= \tfrac{1}{\kappa}(\kappa^2\mathfrak{s}_\kappa(r)^2 + \kappa(\mathfrak{c}_\kappa(r)^2\sin(\varphi)^2 + \mathfrak{c}_\kappa(r)^2\cos(\varphi)^2) \\ &= \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r)^2 + \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 \quad = \quad 1 \end{aligned}$$

□

Die verallgemeinerten Sinus- und Kosinusfunktionen erlauben es, viele Isometrien in G_κ explizit hinzuschreiben.

Beispiel. Drehungen um die e_0-Achse sind für alle $\kappa \in \mathbb{R}$ Isometrien,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in G_\kappa$$

für alle φ und alle $\kappa \in \mathbb{R}$. Unter Benutzung von $\kappa\mathfrak{s}_\kappa^2 + \mathfrak{c}_\kappa^2 = 1$ rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) & -\kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & \mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_\kappa$$

für alle $r \in \mathbb{R}$. Im Fall $\kappa = 1$ ist dies eine Drehung um die e_2-Achse, im Fall $\kappa = 0$ ist dies die Identität (also uninteressant), und im Fall $\kappa = -1$ nennt man solche Isometrien *Lorentz-Boost* . Ähnlich sieht man auch, dass

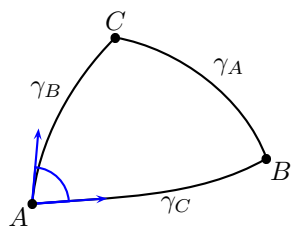
$$L_r := \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \in G_\kappa.$$

Diese Isometrie werden wir gleich benutzen und wir beobachten daher schon, dass

$$\begin{aligned} L_r e_0 &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ L_r \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r)^2 + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r)^2 \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r)\mathfrak{c}_\kappa(r) - \mathfrak{c}_\kappa(r)\mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0 \end{aligned}$$

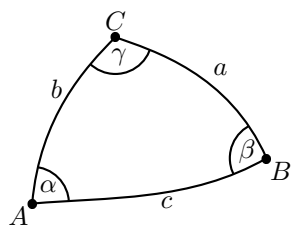
Somit vertauscht L_r die Punkte e_0 und $(\mathfrak{c}_\kappa(r), 0, \mathfrak{s}_\kappa(r))^\top$.

Definition. Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein *geodätisches Dreieck* ist ein 6-Tupel $(A, B, C, \gamma_A, \gamma_B, \gamma_C)$, wobei $A, B, C \in M$ paarweise verschiedene Punkte und γ_A, γ_B und γ_C geodätische Segmente mit den Endpunkten B und C, C und A bzw. A und B sind.



A, B und C sind die *Ecken*, γ_A, γ_B und γ_C sind die *Seiten* des geodätischen Dreiecks. Der Winkel in der Ecke A ist definiert durch den Winkel der Tangentialvektoren der Seiten im Punkt A.

Sei also $(A, B, C, \gamma_A, \gamma_B, \gamma_C)$ ein geodätisches Dreieck in $\mathbb{M}_\kappa$. Die Seiten haben die Längen a, b bzw. c und die Winkel heißen α, β bzw. γ. Dabei ist die Länge eines geodätischen Segments γ definiert als die Länge des Parameterintervalls $\times$ die Norm von $\dot\gamma$, was ja konstant ist. Eine allgemeine Definition von Länge einer differenzierbaren Kurve in einer riemannschen Mannigfaltigkeit werden wir später kennenlernen. Da die Isometriegruppe von $\mathbb{M}_\kappa$ transitiv wirkt, kann man o. B. d. A. annehmen, dass



$$A = e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Wirkung einer Isometrie der Form

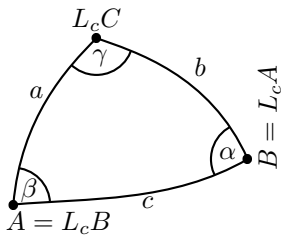
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(Drehung um die e_0-Achse) kann B in die e_0-e_2-Ebene gedreht werden. Die Formel aus Lemma 4.5.2 für die Geodätische γ_C mit $\varphi = 0$ und $r = c$ sagt uns dann

$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(c) \\ 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(c) \end{pmatrix}$$

Lemma 4.5.2 für die Geodätische γ_B mit $\varphi = \alpha$ und $r = b$ liefert

$$C = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(b) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$



Die Isometrie L_c vertauscht also die Punkte A und B, wir erhalten ein neues geodätisches Dreieck.

Einerseits kann man L_cC ähnlich wie C selbst berechnen und man erhält $L_cC = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(a) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\beta) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\beta) \end{pmatrix}$. Andererseits

$$\begin{aligned} L_cC &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(c) & 0 & \kappa\mathfrak{s}_\kappa(c) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(c) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(b) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) - \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \textit{(Seitenkosinussatz)} \quad \mathfrak{c}_\kappa(a) &= \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) && (1) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\beta) &= \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \textit{(Sinussatz)} \quad \frac{\mathfrak{s}_\kappa(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\mathfrak{s}_\kappa(b)}{\sin(\beta)} && (2) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\beta) &= \mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) - \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) && (3) \end{aligned}$$

(3) mit den Rollen von B und C vertauscht liefert

$$\mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\gamma) = \mathfrak{s}_\kappa(b)\mathfrak{c}_\kappa(c) - \mathfrak{c}_\kappa(b)\mathfrak{s}_\kappa(c)\cos(\alpha) \qquad (4)$$

$(3) \cdot \cos(\alpha) - (2) \cdot \sin(\alpha)$ liefert dann

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\beta)\cos(\alpha) - \mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\beta)\sin(\alpha) &= \mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b)\cos(\alpha) - \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha)^2 \\
&\quad - \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha)^2 \\
\Rightarrow \quad \mathfrak{s}_\kappa(a)(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) &\overset{(4)}{=} \mathfrak{s}_\kappa(b)\mathfrak{c}_\kappa(c) - \mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\gamma) \\
&\quad - \mathfrak{s}_\kappa(b)\mathfrak{c}_\kappa(c)\cos(\alpha)^2 - \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha)^2 \\
&= \mathfrak{s}_\kappa(b)\mathfrak{c}_\kappa(c)\sin(\alpha)^2 - \mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\gamma) - \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha)^2 \\
&\overset{(2)}{=} \mathfrak{s}_\kappa(a)\mathfrak{c}_\kappa(c)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\gamma) \\
&\quad - \mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\Rightarrow \quad \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \mathfrak{c}_\kappa(c)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\gamma) \\
\Rightarrow \quad (\textit{Winkelkosinussatz}) & \\
\cos(\gamma) &= \mathfrak{c}_\kappa(c)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta)
\end{aligned}$$

Wir haben bewiesen

SATZ 4.5.3. *Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Für geodätische Dreiecke in $\mathbb{M}_\kappa$ mit den Seitenlängen a, b, c und den Winkeln α, β, γ gilt*

(1) ***Sinussatz.***
$$\frac{\mathfrak{s}_\kappa(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(c)}{\sin(\gamma)}$$

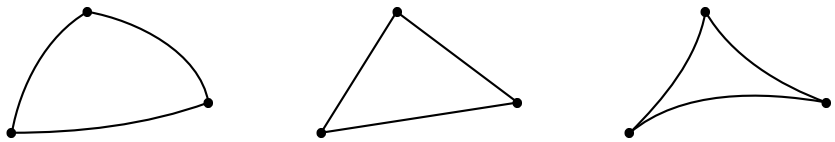
(2) ***Seitenkosinussatz.***
$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_\kappa(a) &= \mathfrak{c}_\kappa(b)\mathfrak{c}_\kappa(c) + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(b)\mathfrak{s}_\kappa(c)\cdot\cos(\alpha), \\
\mathfrak{c}_\kappa(b) &= \mathfrak{c}_\kappa(a)\mathfrak{c}_\kappa(c) + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(a)\mathfrak{s}_\kappa(c)\cdot\cos(\beta), \\
\mathfrak{c}_\kappa(c) &= \mathfrak{c}_\kappa(a)\mathfrak{c}_\kappa(b) + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(a)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cdot\cos(\gamma)
\end{aligned}$$

(3) ***Winkelkosinussatz.***
$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \mathfrak{c}_\kappa(a)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma), \\
\cos(\beta) &= \mathfrak{c}_\kappa(b)\sin(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\alpha)\cos(\gamma), \\
\cos(\gamma) &= \mathfrak{c}_\kappa(c)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta)
\end{aligned}$$

Nun zur Winkelsumme im Dreieck in der Modellfläche konstanter Krümmung.

SATZ 4.5.4. *Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Für die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines geodätischen Dreiecks in $\mathbb{M}_\kappa$ mit den Innenwinkeln $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ und den Seitenlängen a, b, c gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma \begin{cases} > \pi, & \textit{falls } \kappa > 0 \\ = \pi, & \textit{falls } \kappa = 0 \\ < \pi, & \textit{falls } \kappa < 0 \end{cases}$$



$\kappa > 0$ $\kappa = 0$ $\kappa < 0$

Beweis. O. B. d. A. nehmen wir an, dass $\alpha \geq \beta$. In diesem Beweis verwenden wir vorübergehend die Notation "$\lesseqgtr$" für "$<$", falls $\kappa > 0$, für "$=$", falls $\kappa = 0$, und für "$>$", falls $\kappa < 0$. Wir haben also in jedem Fall $-\kappa \lesseqgtr 0$.

Falls $\kappa > 0$ ist, so ist $\mathbb{M}_\kappa$ die Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$. Daher müssen in diesem Fall die Seitenlängen $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ sein. Im Fall $\kappa \leq 0$ haben wir keine Einschränkung an die Seitenlängen. Verwenden wir also die Konvention $\frac{1}{\sqrt{\kappa}} = \infty$, falls $\kappa \leq 0$. Dann gilt in jedem Fall

$$\mathfrak{c}_\kappa \lesseqgtr 1$$

auf dem Intervall $(0, \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}})$. Da $\sin$ auf $(0, \pi)$ positiv ist, erhalten wir aus dem Winkelkosinussatz

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \mathfrak{c}_\kappa(a)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma) \\
&\lesseqgtr \sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma) \\
&= -\cos(\beta+\gamma) \\
&= \cos(\pi - (\beta+\gamma)) \\
&= \cos(\beta+\gamma-\pi).
\end{aligned}$$

Wegen $0 < \beta, \gamma < \pi$ ist $-\pi < \pi - (\beta+\gamma) < \pi$.

1. Fall: $\pi - (\beta+\gamma) \geq 0$.

Da $\cos$ auf $[0, \pi]$ streng monoton fällt, folgt dann aus $\cos(\alpha) \lesseqgtr \cos(\pi-(\beta+\gamma))$, dass $\pi-(\beta+\gamma) \lesseqgtr \alpha$ und somit $\pi \lesseqgtr \alpha+\beta+\gamma$, was zu zeigen ist.

2. Fall: $\pi - (\beta+\gamma) < 0$.

Falls $\kappa > 0$ ist, erhalten wir nun direkt $\pi < \beta+\gamma < \alpha+\beta+\gamma$, was zu zeigen ist. Sei also $\kappa \leq 0$. Dann folgt aus $\cos(\alpha) \geq \cos(\beta+\gamma-\pi)$, dass $\alpha \leq \beta+\gamma-\pi$. Wegen $\alpha \geq \beta$ und $\gamma < \pi$ impliziert dies

$$\alpha < \alpha + \pi - \pi = \alpha,$$

Widerspruch. □

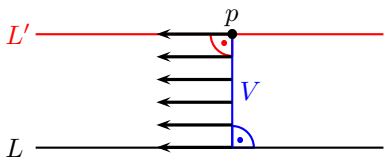
Bemerkung. Da die Innenwinkel $< \pi$ sind, gilt für die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck natürlich immer $\alpha+\beta+\gamma < 3\pi$. Man kann sich nun leicht überlegen, dass für $\mathbb{M}_\kappa$ mit $\kappa > 0$ die Winkelsumme geodätischer Dreiecke alle Werte aus $(\pi, 3\pi)$ annehmen kann. Für $\mathbb{M}_\kappa$ mit $\kappa < 0$ kommen alle Werte aus $(0, \pi)$ vor.

Zum Parallelenaxiom

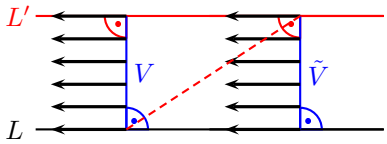
Das Parallelenaxiom besagt: Zu jeder Geraden (Geodätischen) L und jedem Punkt $p \notin L$ existiert höchstens eine Gerade (Geodätische) L' mit $p \in L'$ und $L \cap L' = \emptyset$.

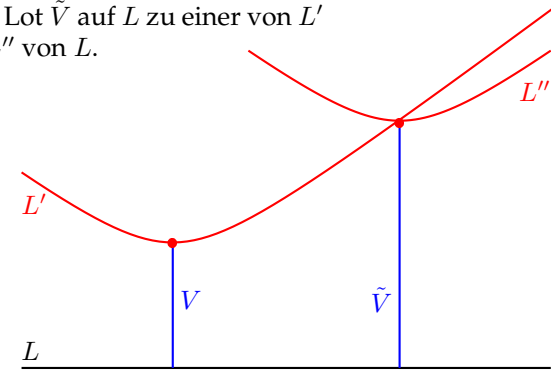
Das Parallelenaxiom gilt in $\mathbb{M}_\kappa$ für $\kappa = 0$ (und auch für $\kappa > 0$, da sich auf der Sphäre zwei Großkreise immer schneiden und es daher überhaupt keine Paralle gibt), aber nicht für $\kappa < 0$. Andererseits erfüllt $\mathbb{M}_{-1}$ alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie. Daher kann das Parallelenaxiom *nicht* aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie hergeleitet werden.

Konstruktion einer Parallelen zu L: Verbinde p mit L durch eine kürzeste Geodätische V. Diese trifft L in einem rechten Winkel. Verschiebe einen Tangentialvektor an L längs V parallel nach p. Sei L' dann die Geodätische durch p mit diesem Geschwindigkeitsvektor. Da die Winkelsumme in $\mathbb{M}_{-1}$ stets kleiner als π ist, können sich L und L' nicht schneiden. Also ist L' eine Parallele zu L durch p.



Die Parallele L' kann ein anderes Lot $\tilde{V}$ nicht ebenfalls in einem rechten Winkel schneiden, da sonst ein Viereck mit vier rechten Winkeln entstünde, das sich in zwei Dreiecke zerlegen ließe, von denen mindestens eines eine Winkelsumme $\geq \pi$ haben müsste. Daher führt ein anderes Lot $\tilde{V}$ auf L zu einer von L' verschiedenen Paralle L'' von L.





Kapitel 5

Bündeltheorie

5.1 Die Lie-Klammer

Proposition 5.1.1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien ξ und η glatte Vektorfelder auf M. Dann existiert genau ein glattes Vektorfeld ζ auf M mit*

$$\partial_\zeta = \partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi =: [\partial_\xi, \partial_\eta].$$

Beweis.

(a) Sei $p \in M$ und setze $\delta := [\partial_\xi, \partial_\eta]|_p$. Wir überprüfen, dass δ eine Derivation ist.

(i) Die Lokalität ist klar, da ∂_ξ und ∂_η bereits lokal sind.

(ii) Die Linearität ist klar, da ∂_ξ und ∂_η jeweils linear sind.

(iii) Zur Produktregel:

$$\begin{aligned}
\delta(f \cdot g) &= \partial_\xi \partial_\eta (f \cdot g) - \partial_\eta \partial_\xi (f \cdot g) \\
&= \partial_\xi (f \partial_\eta g) + \partial_\xi (g \partial_\eta f) - \partial_\eta (f \partial_\xi g) - \partial_\eta (g \partial_\xi f) \\
&= \underline{(\partial_\xi f)(\partial_\eta g)} + \underline{f(\partial_\xi \partial_\eta g)} + \underline{\underline{(\partial_\xi g)(\partial_\eta f)}} + \underline{\underline{g(\partial_\xi \partial_\eta f)}} \\
&\quad - \underline{\underline{(\partial_\eta f)(\partial_\xi g)}} - \underline{f(\partial_\eta \partial_\xi g)} - \underline{(\partial_\eta g)(\partial_\xi f)} - \underline{\underline{g(\partial_\eta \partial_\xi f)}} \\
&= f(\delta g) + (\delta f) g
\end{aligned}$$

Da δ eine Derivation ist, gibt es ein $\zeta(p) \in T_p M$ mit $\delta = \partial_{\zeta(p)}$.

(b) Um zu zeigen, dass das Vektorfeld $p \mapsto \zeta(p)$ glatt ist, leiten wir eine Formel in lokalen Koordinaten her. Schreibe dazu

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ und } \eta = \sum_{k=1}^{n} \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

wobei $x^1, \ldots, x^n$ lokale Koordinaten sind. Dann gilt für alle f:

$$\begin{aligned}
\partial_\zeta f &= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\eta^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) - \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\underline{\xi^j \eta^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}} + \xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} - \underline{\eta^k \xi^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}} - \underbrace{\eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^j}}_{\substack{j \text{ und } k \\ \text{vertauschen}}} \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle f und daher folgt

$$\zeta = \sum_{j,k=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}}_{\substack{\text{ist glatt innerhalb der} \\ \text{Kartenumgebung}}} \Bigg) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1}$$

Daraus folgt, dass ζ auf ganz M glatt ist.

Wir schreiben $\zeta =: [\xi, \eta]$ und nennen $[\xi, \eta]$ die *Lie-Klammer* von ξ und η.

Bemerkung.

- Die Lie-Klammer ist auch für $\mathcal{C}^k$-Vektorfelder, $k \geq 1$, definiert. Allerdings ist die Lie-Klammer selbst dann nur noch $\mathcal{C}^{k-1}$, wie man an der Gleichung (1) sieht.
- Die Lie-Klammer verschwindet für Koordinaten-Vektorfelder, es gilt für alle $j, k = 1, \ldots, n$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = 0.$$

  Dies ist eine Reformulierung des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen glatter Funktionen.

PROPOSITION 5.1.2. *Die Lie-Klammer hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) **$\mathbb{R}$-Linearität**. *Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und alle glatten Vektorfelder $\xi_1, \xi_2, \xi, \eta_1, \eta_2$ und η gilt*

$$\begin{aligned}
[a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta] &= a_1[\xi_1, \eta] + a_2[\xi_2, \eta] \\
[\xi, a_1\eta_1 + a_2\eta_2] &= a_1[\xi, \eta_1] + a_2[\xi, \eta_2]
\end{aligned}$$

(ii) **Schiefsymmetrie (oder Antisymmetrie)**. *Für alle glatten Vektorfelder ξ und η gilt*

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi].$$

(iii) **Jacobi-Identität**. *Für alle glatten Vektorfelder ξ, η und ζ gilt*

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0.$$

Beweis. **(i)** und **(ii)** sind klar, **(iii)** ergibt sich durch Nachrechnen. □

Mit Hilfe der Lie-Klammer lässt sich die Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs auch anders formulieren.

PROPOSITION 5.1.3. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Eine Abbildung $\nabla : T_pM \times \Xi_p \to T_pM$ erfülle die Axiome (i) bis (iv) des Levi-Civita-Zusammenhangs aus Abschnitt 2.3. Dann ist ∇ genau dann torsionsfrei (Axiom (vi)), wenn für alle $\xi, \eta \in \mathcal{X}_p$ gilt*

$$\nabla_{\xi|_p}\eta - \nabla_{\eta|_p}\xi = [\xi, \eta]|_p.$$

Beweis.

„$\Leftarrow$“: Für die Koordinaten-Vektorfelder $\xi = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\eta = \frac{\partial}{\partial x^k}$ gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}|_p}\frac{\partial}{\partial x^j} = \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right]\Bigg|_p = 0.$$

„$\Rightarrow$“: Schreibe für die glatten Vektorfelder ξ und η

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ und } \eta = \sum_{k=1}^n \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

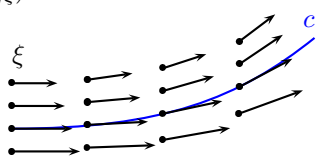
in lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi &= \sum_{j,k=1}^n \xi^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \sum_{j,k=1}^n \eta^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^n \Bigg(\xi^j\eta^k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \xi^j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&\qquad - \eta^k\xi^j\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \eta^k\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j}\Bigg) \\
&= \sum_{j,k=1}^n \left(\xi^j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&\overset{(1)}{=} [\xi, \eta]
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Auch der riemannsche Krümmungstensor lässt sich mit Hilfe der Lie-Klammer ausdrücken:

$$\begin{aligned}
R(\xi, \eta) &= \nabla^2_{\xi,\eta} - \nabla^2_{\eta,\xi} \\
&= (\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_{\nabla_\xi\eta}) - (\nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{\nabla_\eta\xi}) \\
&= \nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}
\end{aligned}$$



Definition. Sei ξ ein $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, $k \geq 1$. Eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $c : I \to M$ heißt *Integralkurve* von ξ, falls $\dot{c}(t) = \xi(c(t))$ für alle $t \in I$.

PROPOSITION 5.1.4. *Sei ξ ein $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld auf M, sei $p \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Integralkurve $c : I \to M$ von ξ mit $c(t_0) = p$. Diese Integralkurve ist im folgenden Sinne eindeutig: Sind $c_1 : I_1 \to M$ und $c_2 : I_2 \to M$ zwei Integralkurven mit $c_1(t_0) = c_2(t_0) = p$, so ist $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$.*

Beweis. In lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ lautet die Bedingung Integralkurve zu sein folgendermaßen: Schreibe

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Mit $c^k = x^k \circ c$ gilt dann

$$\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{c}^k(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{c(t)}.$$

Dann ist c genau dann eine Integralkurve von ξ, wenn

$$\dot{c}^k(t) = \xi^k(c^1(t), \ldots, c^n(t)) \text{ für alle } k = 1, \ldots, n.$$

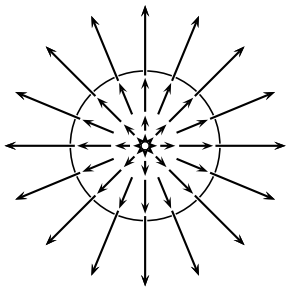
Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurve (solange alles in *einer* Karte bleibt, bei Kartenwechsel geht man analog zum Beweis von Proposition 2.5.1 vor). □

Bemerkung. Ist ξ ein $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld, so ist die Integralkurve eine $\mathcal{C}^{k+1}$-Kurve.

Beispiel. **(a)** Setze $M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 | (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$. Schreibe

$$\xi(x^1, x^2) = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \; t_0 = 0.$$

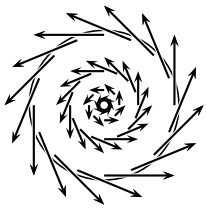
Startpunkt $c(0)$	Integralkurve c	maximaler Definitionsbereich
$(0,0)$	$c(t) = (0,0)$	$\mathbb{R}$
$(0, \frac{1}{2})$	$c(t) = (0, \frac{1}{2}e^t)$	$(-\infty, \ln 2)$



(b) Sei wieder $M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 | (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$. Schreibe

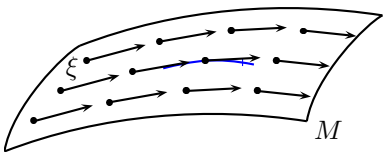
$$\xi(x^1, x^2) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}, \; t_0 = 0.$$

Startpunkt $c(0)$	Integralkurve c	maximaler Definitionsbereich
$(0,0)$	$c(t) = (0,0)$	$\mathbb{R}$
$(0, \frac{1}{2})$	$c(t) = \frac{1}{2}(\sin(t), \cos(t))$	$\mathbb{R}$
$(0, \varepsilon)$	$c(t) = \varepsilon(\sin(t), \cos(t))$	$\mathbb{R}$



Man fasst die Integralkurven eines Vektorfeldes zum sogenannten Fluss zusammen.

Definition. Sei ξ ein C^k-Vektorfeld auf M, $k \geq 1$. Eine C^k-Abbildung $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ heißt *Fluss* von ξ, falls für jedes $p \in M$ die Kurve $t \mapsto \Phi(p, t)$ die Integralkurve von ξ mit $\Phi(p, 0) = p$ ist.



Bemerkung.
- Der Fluss des Vektorfelds ξ existiert genau dann, wenn alle Integralkurven von ξ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.
- Man schreibt häufig statt $\Phi(p,t)$ auch $\Phi_t(p)$. Dann ist Φ ein Fluss von ξ, wenn

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(p) = \xi(\Phi_t(p)) \text{ und } \Phi_0 = \mathrm{id}.$$

PROPOSITION 5.1.5. *Flüsse haben die Eigenschaft $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Fixiere $p \in M$ und $s \in \mathbb{R}$. Setze $c(t) := \Phi_t(\Phi_s(p))$ und $\tilde{c}(t) := \Phi_{t+s}(p)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(\Phi_s(p)) = \xi(\Phi_t(\Phi_s(p))) = \xi(c(t)), \\ c(0) &= \Phi_0(\Phi_s(p)) = \Phi_s(p). \end{aligned}$$

Also ist c die Integralkurve des Vektorfelds ξ mit dem Anfangswert $\Phi_s(p)$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}} &= \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t+s}(p) = \xi(\Phi_{t+s}(p)) \cdot 1 = \xi(\tilde{c}(t)), \\ \tilde{c}(0) &= \Phi_{0+s}(p) = \Phi_s(p). \end{aligned}$$

Deshalb ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine Integralkurve von ξ mit dem Anfangswert $\Phi_s(p)$. Aus der Eindeutigkeit der Integralkurven (Proposition 5.1.4) folgt $c = \tilde{c}$, also die Behauptung. □

KOROLLAR 5.1.6. *Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\Phi_t : M \to M$ ein Diffeomorphismus mit*

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}.$$

PROPOSITION 5.1.7. *Hat das C^k-Vektorfeld ξ, $k \geq 1$, kompakten Träger (z. B. falls M kompakt), dann besitzt das Vektorfeld genau einen Fluss.*

Beweis. Flüsse sind stets eindeutig (wenn sie existieren), da die Integralkurven durch den Anfangswert eindeutig festgelegt werden.

Zu zeigen ist also, dass die Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Sei $K \subset M$ der Träger von ξ. Für $p \in M - K$ ist $\xi(p) = 0$ und somit ist $c(t) \equiv p$ die Integralkurve von ξ mit $c(0) = p$.

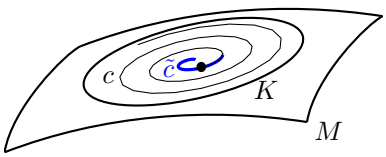
Da K kompakt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass alle Integralkurven, die in K starten, mindestens auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert sind (weil die Definitionsintervalle der Integralkurven stetig vom Basispunkt abhängen).

$\Rightarrow$ Alle Integralkurven c von ξ mit $c(t_0) \in K$ sind mindestens auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ definiert.

Sei nun (a, b) der maximale Definitionsbereich einer Integralkurve c von ξ mit $c(0) \in K$ und $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Wir nehmen an, es gelte $b < \infty$ (der Fall $-\infty < a$ geht analog). Sei $\tilde{c}$ die Integralkurve von ξ mit

$$\tilde{c}(\underbrace{b - \tfrac{\varepsilon}{2}}_{=:t_0}) = \underbrace{c(b - \tfrac{\varepsilon}{2})}_{\in K}.$$

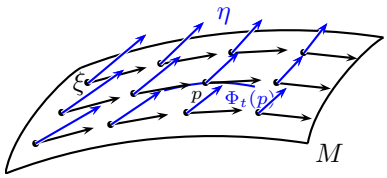
Also ist $\tilde{c}$ mindestens auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) = (b - \frac{3\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})$ erklärt. Wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven setzt $\tilde{c}$ die Integralkurve c nach $(a, b + \frac{\varepsilon}{2})$ fort. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von b. □



Definition. Ein Vektorfeld ξ, das einen Fluss besitzt, heißt *vollständig*.

Definition. Seien ξ, η zwei vollständige $\mathcal{C}^2$-Vektorfelder auf M, sei Φ_t der Fluss von ξ. Die *Lie-Ableitung* von η nach ξ ist für $p \in M$ definiert durch

$$\mathcal{L}_\xi \eta|_p := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \overbrace{d\Phi_{-t}(\underbrace{\eta(\Phi_t(p))}_{\in T_{\Phi_t(p)}M})}^{\in T_pM} = \lim_{t\to 0} \frac{d\Phi_{-t}(\eta(\Phi_t(p))) - \eta(p)}{t}.$$



Bemerkung. Für die Lie-Ableitung einer Funktion f nach einem Vektorfeld ξ setzen wir

$$\mathcal{L}_\xi f|_p := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\Phi_t(p))$$

und sehen sofort $\mathcal{L}_\xi f|_p = \partial_{\xi(p)} f$, da die Kurve $t \mapsto \Phi_t(p)$ den Tangentialvektor $\xi(p)$ repräsentiert.

Satz 5.1.8. *Seien ξ, η zwei vollständige $\mathcal{C}^2$-Vektorfelder auf M. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_\xi \eta = [\xi, \eta].$$

Beweis. Sei $p \in M$, sei ferner $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion nahe p. Wir zeigen

$$\partial_{\mathcal{L}_\xi \eta|_p} f = \partial_{\xi(p)} \partial_\eta f - \partial_{\eta(p)} \partial_\xi f.$$

Die linke Seite berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathcal{L}_\xi \eta|_p} f &= \partial_{\lim\limits_{t\to 0} \frac{d\Phi_{-t}(\eta(\Phi_t(p))) - \eta(p)}{t}} f \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\partial_{d\Phi_{-t}(\eta(\Phi_t(p)))} f - \partial_{\eta(p)} f}{t} \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \partial_{d\Phi_{-t}(\eta(\Phi_t(p)))} f \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \partial_{\eta(\Phi_t(p))} (f \circ \Phi_t)
\end{aligned}$$

Sei Ψ_t der Fluss von η. Setze G : offene Umgebung von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$G(t,u,s) := f(\Phi_s(\Psi_u(\Phi_t(p))))$$

und H : offene Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$H(t,u) := G(t,u,-t).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial H}{\partial u}\bigg|_{(t,0)} = \frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{(t,0)} f(\Phi_{-t}(\Psi_u(\Phi_t(p)))) = \partial_{\eta(\Phi_t(p))}(f \circ \Phi_{-t}),$$

wobei benutzt wird, dass für $g = f \circ \Phi_{-t}$ und $q = \Phi_t(p)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{u=0} g(\underbrace{\Psi_u(q)}_{\substack{\text{Tangentialvektor} \\ \text{dieser Kurve bei } u=0 \\ \text{ist } \eta(q)}}) = \partial_{\eta(q)} g.$$

Daraus folgt, dass $\left.\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial u}\right|_{(0,0)} = \partial_{(\mathcal{L}_\xi \eta)|_p} f$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial u}\right|_{(0,0)} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(t,0,-t)} \\
&= \left.\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial u}\right|_{(0,0,0)} - \left.\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial u}\right|_{(0,0,0)}, \quad \text{wobei} \\
\left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{(t,0,0)} &= \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=0} f(\Phi_0(\Psi_u(\Phi_t(p)))) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=0} f(\Psi_u(\Phi_t(p))) \\
&= \partial_{\eta(\Phi_t(p))} f \\
\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial u}\right|_{(0,0,0)} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \partial_{\eta(\Phi_t(p))} f \\
&= \partial_{\xi(p)} \partial_\eta f
\end{aligned}$$

Analog gilt $\left.\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial u}\right|_{(0,0,0)} = \partial_{\eta(p)} \partial_\xi f$. Daraus folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung. Für die Definition und Diskussion der Lie-Ableitung $\mathcal{L}_\xi \eta$ ist die Vollständigkeit von ξ und η nicht wirklich erforderlich. Es genügen „lokale Flüsse".

5.2 Vektorbündel

Definition. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien E und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine surjektive glatte Abbildung $\pi : E \to M$ heißt *reelles* bzw. *komplexes Vektorraumbündel* (auch *Vektorbündel*) *vom Rang* N, falls

(i) für alle $p \in M$ die Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ eine N-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur trägt und

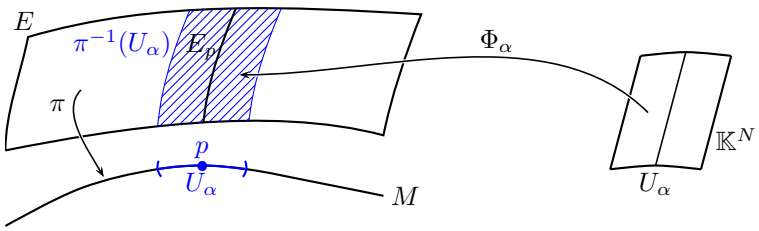
(ii) es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M und Diffeomorphismen

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{K}^N \to \pi^{-1}(U_\alpha),\ U_\alpha \in \mathcal{U},$$

mit $\pi \circ \Phi_\alpha = \mathrm{pr}_{U_\alpha}$ gibt, so dass für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und für alle $v, w \in \mathbb{K}^N$

$$\Phi_\alpha(p, av + bw) = a\Phi_\alpha(p, v) + b\Phi_\alpha(p, w)$$

gilt.



Bemerkung. Da Φ_α ein Diffeomorphismus ist, ist $\{p\} \times \mathbb{K}^N \overset{\Phi_\alpha}{\to} E_p$ bijektiv und damit ein Vektorraumisomorphismus.

Definition. E heißt *Totalraum*, M heißt *Basis* und π heißt die *Projektionsabbildung*. Die Φ_α heißen *lokale Trivialisierungen*.

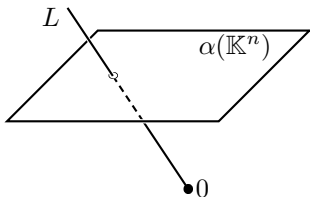
Beispiel. **(1) Das triviale Vektorbündel.** $E = M \times \mathbb{K}^N$ mit $\pi = \mathrm{pr}_M$. Globale Trivialisierung: $U_\alpha = M, \Phi_\alpha = \mathrm{id}$.

(2) Das Tangentialbündel. $E = TM$. Ist $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, so setze

$$\Phi_\alpha : \begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \to & \pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM \\ (p, v) & \mapsto & \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \end{array}$$

(3) Das tautologische Geradenbündel von $\mathbb{K}P^n$. $M = \mathbb{K}P^n = \{1-\text{dimensionaler Untervektorraum von } \mathbb{K}^{n+1}\}$. Setze $E := \{(p, v) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} | v \in p\}$ und $\pi := \mathrm{pr}_{\mathbb{K}P^n}|_E$. Es gilt dann $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times p$.

Die lokalen Trivialisierungen ergeben sich wie folgt: Sei $\alpha : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n+1}$ eine affin-lineare Einbettung mit $0 \notin \alpha(\mathbb{K}^n)$. Dann ist $U_\alpha := \{L \in \mathbb{K}P^n | L \cap \alpha(\mathbb{K}^n) \neq \emptyset\}$.



$$\Phi_\alpha : \begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{K} & \to & \pi^{-1}(U_\alpha) \\ (p, c) & \mapsto & c \cdot (p \cap \alpha(\mathbb{K}^n)) \end{array}$$

Definition. Ein Vektorbündel vom Rang 1 heißt auch *Geradenbündel*.

Definition. Ein *Untervektorbündel* eines Vektorbündels E ist eine Untermannigfaltigkeit $\tilde{E} \subset E$, so dass $\pi|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \to M$ ein Vektorbündel ist. Insbesondere ist für alle $p \in M$ $\tilde{E}_p \subset E_p$ ein Untervektorraum.

Beispiel. Das tautologische Geradenbündel über $\mathbb{K}P^n$ ist ein Untervektorbündel des trivialen Vektorbündels über $\mathbb{K}P^n$ vom Rang $n + 1$.

Definition. Seien $\pi : E \to M$ und $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{M}$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorbündel. Ein *Vektorbündel-Homomorphismus* F über f besteht aus glatten Abbildungen $F : E \to \tilde{E}$ und $f : M \to \tilde{M}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "f"] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

kommutiert und für alle $p \in M$ ist $F|_{E_p} : E_p \to \tilde{E}_{f(p)}$ ein Vektorraum-Homomorphismus.

Beispiel. **(1)** $E = M \times \mathbb{K}^N, \tilde{E} = \tilde{M} \times \mathbb{K}^{\tilde{N}}$. Sei $\varphi : M \to \mathrm{Mat}(N \times \tilde{N}, \mathbb{K})$ glatt, sei $f : M \to \tilde{M}$ glatt. Dann ist

$$F : E \to \tilde{E}, F(p, v) := (f(p), \varphi(p) \cdot v)$$

ein Vektorbündel-Homomorphismus.

(2) Ist $f : M \to \tilde{M}$ glatt, so ist $df : TM \to T\tilde{M}$ ein Vektorbündel-Homomorphismus über f.

Definition. Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Ein *Schnitt* in E ist eine Abbildung $s : M \to E$, so dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.

Beispiel.

- Schnitte im Tangentialbündel sind Vektorfelder.
- Schnitte im trivialen Bündel $M \times \mathbb{K}^N$ sind von der Form

$$s(p) = (p, \varphi(p)),$$

  wobei $\varphi : M \to \mathbb{K}^N$ beliebig ist.

Definition. Ein Vektorbündel-Homomorphismus F über f heißt *Vektorbündel-Isomorphismus*, falls F und f Diffeomorphismen sind.

Zwei Vektorbündel $\pi : E \to M$ und $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{M}$ heißen *isomorph*, falls es einen Vektorbündel-Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Wir sagen, ein Vektorbündel sei *trivial*, wenn es isomorph zum trivialen Vektorbündel $M \times \mathbb{K}^N$ ist.

Frage. Ist $TM \to M$ trivial**?**

Die Antwort hängt von M ab.

Beispiel. $T\mathrm{S}^1$ ist trivial.

LEMMA 5.2.1. *Ein Vektorbündel $\pi : E \to M$ vom Rang N ist genau dann trivial, wenn es N glatte Schnitte $s_1, \ldots, s_N$ besitzt, so dass $s_1(p), \ldots, s_N(p)$ eine Basis von E_p ist für alle $p \in M$.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Sei $\pi : E \to M$ trivial. Sei $\Phi : E \to M \times \mathbb{K}^N$ ein Vektorbündel-Isomorphismus. Sei $e_1, \ldots, e_N$ eine Basis von $\mathbb{K}^N$. Setze $s_j(p) := \Phi^{-1}(p, e_j)$.

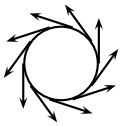
„$\Leftarrow$“: Seien $s_1, \ldots, s_N$ überall eine Basis. Definiere $\Phi^{-1} : M \times \mathbb{K}^N \to E$ durch

$$\Phi^{-1}(p, v) := \sum_{j=1}^{N} v^j \cdot s_j(p).$$

□

Beispiel.

- $T\mathrm{S}^1$ ist trivial, denn

$s :=$ 

  verschwindet nirgends und ist somit ein Basisfeld.

- Aus dem Igelkämmungssatz folgt: Jedes glatte Vektorfeld auf S^2 hat mindestens eine Nullstelle. Daraus folgt, dass $T\mathrm{S}^2$ nicht trivial ist.

Algebraische Konstruktionsverfahren für Vektorbündel

Whitney-Summe zweier Vektorbündel.

Seien $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ Vektorbündel. Setze $E := \bigcup_{p\in M} E_{1,p} \oplus E_{2,p}$ und $\pi : E \to M$, so dass

$$\pi(\underbrace{E_{1,p} \oplus E_{2,p}}_{=E_p}) = \{p\}.$$

Bleibt noch auf E eine Topologie und eine differenzierbare Struktur so einzuführen, dass π glatt ist und dass es bezüglich der natürlichen Vektorraumstruktur auf E_p lokale Trivialisierungen gibt.

Sei also $x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M. Nach eventueller Verkleinerung gibt es lokale Trivialisierungen

$$\begin{aligned} \Phi_1 : U \times \mathbb{K}^{n_1} &\to {\pi_1}^{-1}(U) \quad \text{und} \\ \Phi_2 : U \times \mathbb{K}^{n_2} &\to {\pi_2}^{-1}(U). \end{aligned}$$

Definiere $\Phi : U \times (\mathbb{K}^{n_1} \oplus \mathbb{K}^{n_2}) \to \pi^{-1}(U)$ durch

$$\Phi(p, v \oplus w) := \underbrace{\Phi_1(p, v)}_{\in E_{1,p}} \oplus \underbrace{\Phi_2(p, w)}_{\in E_{2,p}}.$$

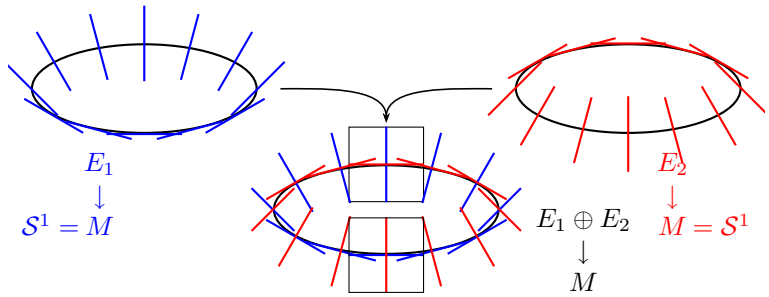
Setze $\varphi : \pi^{-1}(U) \to V \times (\mathbb{K}^{n_1} \oplus \mathbb{K}^{n_2}) \overset{\text{offen}}{\subset} \begin{cases} \mathbb{R}^{n+n_1+n_2}, & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^{n+2n_1+2n_2}, & \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ durch

$$\varphi(q) := (x \times \mathrm{id})(\Phi^{-1}(q)).$$

Die Abbildung φ ist bijektiv. Man überprüft die Bedingungen aus Satz 1.4 an die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ \varphi : \pi^{-1}(U) \to V \times (\mathbb{K}^{n_1} \oplus \mathbb{K}^{n_2}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x : U \to V \text{ Karte von } M, \\ \Phi_i : U \times \mathbb{K}^{n_i} \to {\pi_i}^{-1}(U) \text{ lokale Trivialisierun-} \\ \text{gen von } E_i,\ i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

Aus Satz 1.1.3 und seinen Zusätzen folgt dann, dass E genau eine Topologie und eine differenzierbare Struktur trägt, so dass die $\pi^{-1}(U) \subset E$ offen und die φ Karten sind. Damit sind dann die Φ's Diffeomorphismen, also lokale Trivialisierungen.
Man nennt $E := E_1 \oplus E_2$ die *Whitney-Summe* von E_1 und E_2.



Analog erhält man:

(1) *Tensorbündel.* $E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{p\in M} E_{1,p} \otimes E_{2,p}$.

(2) *Duales Bündel.* $E^* := \bigcup_{p\in M} {E_p}^*$.

(3) *Äußeres Produktbündel.* $\bigwedge^k E := \bigcup_{p\in M} \bigwedge^k E_p$.

(4) *Quotientenbündel.* Sei $\tilde{E} \subset E$ ein Untervektorbündel. $E/\tilde{E} := \bigcup_{p\in M} E_p/\tilde{E}_p$.

Beispiel.

- $T^*M := TM^*$ heißt das *Kotangentialbündel* von M.
  Ist $x : U \to V$ eine Karte von M, so bilden $dx^1|_p, \ldots, dx^n|_p$ für $p \in U$ eine Basis. Für die lokalen Trivialisierungen gilt:
  $$\sum_{i=1}^n \omega_i dx^i|_p \overset{\Phi}{\leftrightarrow} (p, \omega_1, \ldots, \omega_n) \in U \times \mathbb{R}^n.$$
- $\bigwedge^k T^*M$. Ist $x : U \to V$ eine Karte von M, so ist für $p \in U$
  $$dx^{i_1}|_p \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}|_p \in \bigwedge^k T^*M, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n,$$
  eine Basis. Schnitte in diesem Bündel heißen k-*Formen* (oder *Differentialformen* vom Grad k).
- $\underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{r \text{ mal}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{s \text{ mal}}$.
  Die Schnitte in diesem Bündel heißen (r, s)-*Tensorfelder*.

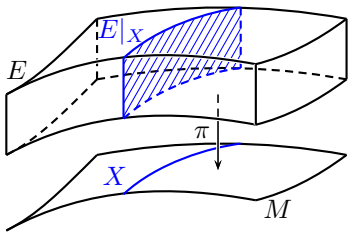
geometrisches Objekt	*ist Schnitt in*
Vektorfeld	TM
semi-riemannsche Metrik	$T^*M \otimes T^*M$
riemannscher Krümmungstensor	$T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M$ oder $TM \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M$
Ricci-Krümmung ric Ric	 $T^*M \otimes T^*M$ $TM \otimes T^*M$
Skalarkrümmung	triviales Geradenbündel

Einschränkung und Pull-Back.

Sei $X \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Definiere

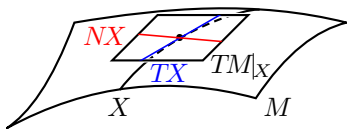
$$E|_X := \bigcup_{p\in X} E_p = \pi^{-1}(X) \text{ und } \pi_X := \pi|_{E|_X} \to X.$$

Die Abbildung $\pi_X : E|_X \to X$ heißt *Einschränkung* von E auf X.



Beispiel. Sei M semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $X \subset M$ semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$TM|_X = TX \oplus NX.$$



Bemerkung. Das Normalenbündel NX lässt sich auch ohne semi-riemannsche Metrik definieren.

$$NX := (TM|_X)/TX.$$

Dabei ist NX dann aber kein Unterbündel von $TM|_X$.

Seien X, M differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $f : X \to M$ eine glatte Abbildung. Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Setze

$$f^*E := \bigcup_{p \in X} \underbrace{\{p\} \times E_{f(p)}}_{=(f^*E)_p}$$

und $\tilde{\pi} : f^*E \to X$ durch $\tilde{\pi}(p, v) := p$. Dann heißt $\tilde{\pi} : f^*E \to X$ *Pull-Back* von $\pi : E \to M$.

Bemerkung. Die Einschränkung ist ein Spezialfall des Pull-Back, wobei $f : X \to M$ die Inklusionsabbildung ist.

Die lokalen Trivialisierungen von f^*E erhält man wie folgt:

Sei $U \subset M$ offen und $\Phi : U \times \mathbb{K}^M \to \pi^{-1}(U)$ lokale Trivialisierung von E. Sei $\tilde{U} \subset X$ offen mit $\tilde{U} \subset f^{-1}(U)$. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \tilde{U} \times \mathbb{K}^m &\to \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}) \\ \tilde{\Phi}(p, v) &:= (p, \Phi(f(p), v)). \end{aligned}$$

Satz 1.1.3 liefert dann insbesondere auch die Topologie und die differenzierbare Struktur auf f^*E, so dass die $\tilde{\Phi}$ die lokalen Trivialisierungen von f^*E sind.

Beispiel. Die Schnitte in $f^*TM \to X$ sind genau die Vektorfelder längs f.

5.3 Metriken und Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Definition. Sei $E \to M$ ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel. Eine *riemannsche Metrik* auf E ist ein glatter Schnitt g im Vektorbündel $E^* \otimes E^* \to M$, so dass für jedes $p \in M$

$$g(p) \in (E^* \otimes E^*)_p = E_p^* \otimes E_p^* \cong \{\text{Bilinearformen auf } E_p\}$$

symmetrisch und positiv definit ist. Ein reelles Vektorbündel mit einer riemannschen Metrik g heißt *riemannsches Vektorbündel*.

PROPOSITION 5.3.1. *Jedes reelle Vektorbündel besitzt riemannsche Metriken.*

Beweis.

(a) Wir nehmen zunächst an, dass das Bündel $E \to M$ trivial ist. Sei $\Phi : M \times \mathbb{R}^N \to E$ eine globale Trivialisierung. Zu $p \in M$ und $v, w \in E_p$ schreibe $\Phi^{-1}(v) = (p, x)$ und $\Phi^{-1}(w) = (p, y)$, dabei sind $x, y \in \mathbb{R}^N$. Zur Definition einer riemannschen Metrik verwenden wir das euklidische Skalarprodukt und setzen:

$$g(p)(v, w) := \langle x, y \rangle .$$

(b) Nun braucht $E \to M$ nicht mehr trivial zu sein. Da das Bündel lokal trivial ist, existiert eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M, so dass $E|_{U_\alpha}$ trivial ist.

Sei $\{\varphi_\alpha\}$ eine untergeordnete Teilung der Eins, d. h. $\varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ ist glatt mit $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$, $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$, für jedes $p \in M$ ist $\varphi_\alpha(p) \neq 0$ nur für endlich viele α und $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$.

Aus **(a)** folgt dann, dass riemannsche Metriken g_α auf $E|_{U_\alpha}$ existieren. Setze

$$g(p) := \sum_\alpha \varphi_\alpha(p) \cdot g_\alpha(p).$$

Beachte dabei, dass $\varphi_\alpha \cdot g_\alpha$ auf ganz M definiert ist (durch „$\equiv 0$" auf $M - U_\alpha$) und glatt. Außerdem ist $g(p)$ eine symmetrische Bilinearform auf E_p und darüber hinaus auch positiv definit, denn es gilt

$$g(p)(v,v) \quad = \quad \sum_\alpha \underbrace{\varphi_\alpha(p)}_{\substack{\geq 0 \\ >0}} \underbrace{g_\alpha(p)(v,v)}_{>0 \quad \text{für gewisse } \alpha} \quad > 0$$

für $v \neq 0$. □

Proposition 5.3.1 verallgemeinert den Satz 5.5.1 (dort war $E = TM$).

Bemerkung. Sind $E, F \to M$ riemannsche Vektorbündel, so erben E^*, $\bigwedge^k E$, $E \oplus F$, $E \otimes F$ und E/F (wobei $F \subset E$ Unterbündel) kanonische riemannsche Metriken.

Seien V, W endlich dimensionale euklidische Vektorräume mit den Orthonormalbasen $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$. Dann

trägt	V^*	$\bigwedge^k E$	$V \oplus W$	$V \otimes W$	V/W (hier: $W \subset V$)
euklidisches Skalarprodukt mit Orthonormalbasis	$v_1^*, \ldots, v_n^*$ duale Basis	$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$ $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$	$v_1, \ldots, v_n$ $w_1, \ldots, w_m$	$v_i \otimes w_j$, $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq m$	$[v_{m+1}], \ldots, [v_n]$ hier: $w_j = v_j$, $j = 1, \ldots, m$
dim	n	$\binom{n}{k}$	$n + m$	$n \cdot m$	$n - m$

Auf dem Pull-Back-Bündel f^*E eines riemannschen Vektorbündels E erhalten wir die riemannsche Metrik durch

$$g^{f^*E}(p) := g^E(f(p)).$$

Notation. Ist $E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M, so schreibe

$$C^k(M, E) := \{C^k\text{-Schnitte in } E\}, 0 \leq k \leq \infty.$$

Setze weiterhin $C_p^k(E) := \bigcup_{\substack{p \ni U \\ \text{offen}}} C^k(U, E|_U)$.

Definition. Sei $E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel. Ein *Zusammenhang im Punkt* $p \in M$ ist eine Abbildung $\nabla^p : T_pM \times C_p^\infty(E) \to E_p$ mit

(i) Lokalität. Für $s \in C^\infty(U, E|_U)$, $\tilde{U} \subset U$ offen mit $p \in \tilde{U}$ und $\xi \in T_pM$ gilt

$$\nabla_\xi^p(s|_{\tilde{U}}) = \nabla_\xi^p s.$$

(ii) Linearität im ersten Argument. Für $s \in C^\infty(U, E|_U)$, $\xi_1, \xi_2 \in T_pM$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\nabla^p_{\alpha\xi_1+\beta\xi_2} s = \alpha \nabla^p_{\xi_1} s + \beta \nabla^p_{\xi_2} s.$$

(iii) Additivität im zweiten Argument. Für $s_1, s_2 \in C^\infty(U, E|_U)$ und $\xi \in T_pM$ gilt

$$\nabla^p_\xi (s_1 + s_2) = \nabla^p_\xi s_1 + \nabla^p_\xi s_2.$$

(iv) Produktregel I. Für $s \in C^\infty(U, E|_U)$, $\xi \in T_pM$ und $f \in C^\infty(U, \mathbb{K})$ gilt

$$\nabla^p_\xi (f \cdot s) = \partial_\xi f \cdot s(p) + f(p) \cdot \nabla^p_\xi s.$$

Ein *Zusammenhang auf E* ist eine Abbildung $p \mapsto \nabla^p$, die jedem $p \in M$ einen Zusammenhang ∇^p im Punkt p zuordnet, so dass für alle $\xi \in C^\infty(U, TM|_U)$ und alle $s \in C^\infty(U, E|_U)$ die Schnitte $(p \mapsto \nabla^p_{\xi(p)} s) \in C^\infty(U, E|_U)$ wieder glatt sind.

Definition. Sei $E \to M$ ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel mit einer riemannschen Metrik g. Ein Zusammenhang ∇ auf E heißt *metrisch*, falls ferner gilt

(v) Produktregel II. Für $s_1, s_2 \in C^\infty(U, E|_U)$ gilt

$$\partial_\xi g(s_1, s_2) = g(\nabla_\xi s_1, s_2) + g(s_1, \nabla_\xi s_2).$$

PROPOSITION 5.3.2. *Sei $E \to M$ ein riemannsches Vektorbündel. Dann existiert ein metrischer Zusammenhang auf E.*

Beweis.

(a) Wir nehmen zunächst wieder an, dass das Bündel trivial ist. Gemäß Lemma 5.2.1 existieren glatte Schnitte $s_1, \ldots, s_N \in C^\infty(M, E)$, so dass $s_1(p), \ldots, s_N(p)$ eine Basis von E_p bilden für alle $p \in M$. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert dann $e_1, \ldots, e_n \in C^\infty(M, E)$, die in jedem Punkt eine Orthonormalbasis bilden. Definiere ∇ durch

$$\nabla_\xi \left(\sum_{i=1}^N f_i e_i \right) := \sum_{i=1}^N \partial_\xi f_i \cdot e_i.$$

Dann ist ∇ ein metrischer Zusammenhang, denn

(i) Lokalität: gilt offensichtlich.

(ii) Linearität im ersten Argument: klar, da $\partial_\cdot$ linear.

(iii) Additivität im zweiten Argument: klar, da $\partial_\xi(\cdot)$ linear.

(iv) Produktregel I: folgt aus der Produktregel für $\partial_\xi(\cdot)$.

(v) Produktregel II: Sei $s_1 = \sum_{i=1}^N f_i e_i$, $s_2 = \sum_{j=1}^N h_j e_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_\xi g(s_1, s_2) &= \partial_\xi \Big(\textstyle\sum_{i,j=1}^N f_i h_j \cdot \overbrace{g(e_i, e_j)}^{=\delta_{ij}} \Big) \\ &= \partial_\xi \Big(\textstyle\sum_{i=0}^N f_i h_i \Big) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^N \partial_\xi f_i \cdot h_i + \sum_{i=1}^N f_i \partial_\xi h_i \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} g(\nabla_\xi s_1, s_2) &= g\Big(\textstyle\sum_{i=1}^N \partial_\xi f_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^N h_j e_j\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \partial_\xi f_i \cdot h_j \cdot g(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \partial_\xi f_i \cdot h_i \end{aligned}$$

Analog berechnet man $g(s_1, \nabla_\xi s_2) = \sum_{i=1}^N f_i \partial_\xi h_i$. Daraus folgt die Produktregel II.

(b) Sei nun E nicht länger trivial. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M, so dass $E|_{U_\alpha}$ trivial ist.

$\overset{\text{(a)}}{\Rightarrow}$ Es existiert ein metrischer Zusammenhang ${}^\alpha\nabla$ auf $E|_{U_\alpha}$.

Sei $\{\varphi_\alpha\}$ eine untergeordnete Teilung der Eins. Setze für $p \in M$, $\xi \in T_pM$ und $s \in C_p^\infty(E)$

$$\nabla_\xi^p s := \sum_\alpha \varphi_\alpha(p) \cdot {}^\alpha\nabla_\xi^p s.$$

Dieses ∇ tut's dann. □

Bemerkung. ∇ ist *nicht* eindeutig. Die Torsionsfreiheit, die den Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Tangentialbündel zusammen mit den anderen Axiomen eindeutig festlegt, macht in dieser Allgemeinheit keinen Sinn.

Bemerkung. Sind $E, F \to M$ reelle Vektorbündel mit Zusamennhängen ∇^E bzw. ∇^F, so erben die Bündel E^*, $\bigwedge^k E$, $E \oplus F$ und $E \otimes F$ Zusammenhänge durch

(a) $\partial_\xi(\omega(s)) = (\nabla_\xi^{E^*}\omega)(s) + \omega(\nabla_\xi^E s)$ für $s \in C_p^\infty(E)$, $\omega \in C_p^\infty(E^*), \xi \in T_pM$; das heißt, wir definieren

$$(\nabla_\xi^{E^*}\omega)(s) := \partial_\xi(\omega(s)) - \omega(\nabla_\xi^E s).$$

(b) Für $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k} \in C_p^\infty(E), \xi \in T_pM$ definiere

$$\begin{aligned} \nabla_\xi^{\bigwedge^k E}(s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_k}) &:= (\nabla_\xi^E s_{i_1}) \wedge s_{i_2} \wedge \ldots \wedge s_{i_k} + s_{i_1} \wedge (\nabla_\xi^E s_{i_2}) \wedge \ldots \wedge s_{i_k} \\ &\quad + \cdots + s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \ldots \wedge (\nabla_\xi^E s_{i_k}). \end{aligned}$$

(c) Für $s_1, s_2 \in C_p^\infty(E), \xi \in T_pM$ setze

$$\nabla_\xi^{E\oplus F}(s_1 \oplus s_2) := (\nabla_\xi^E s_1) \oplus (\nabla_\xi^F s_2).$$

(d) Für $s_1, s_2 \in C_p^\infty(E), \xi \in T_pM$ setze

$$\nabla_\xi^{E\otimes F}(s_1 \otimes s_2) := (\nabla_\xi^E s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_\xi^F s_2).$$

Bemerkung. Sind ∇^E und ∇^F metrische Zusammenhänge, so auch die induzierten Zusammenhänge bezüglich der induzierten Metriken.

Bemerkung. Analog zu riemannschen Metriken auf reellen Vektorbündlen erklärt man hermitesche Metriken auf komplexen Vektorbündeln. Sie existieren stets. Man spricht auch von metrischen Zusammenhängen auf einem hermitischen Vektorbündel $E \to M$, falls gilt

$$\partial_\xi h(s_1, s_2) = h(\nabla_\xi s_1, s_2(p)) + h(s_1(p), \nabla_\xi s_2)$$

für $s_1, s_2 \in C^\infty(U, E|_U)$, $p \in U$ und $\xi \in T_pM$. Solche metrischen Zusammenhänge existieren stets.

Zusammenhänge in lokalen Koordinaten

Sei $x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte in M. O. B. d. A. sei $E|_U \to U$ trivial. Seien $s_1, \ldots, s_N$ glatte Basisschnitte in E, definiert auf U. Schreibe für $i = 1, \ldots, n$ und $\alpha = 1, \ldots, N$ Folgendes:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s_\alpha =: \sum_{\beta=1}^{N} (\Gamma_{i\alpha}^{\beta} \circ x) \cdot s_\beta.$$

Dadurch sind glatte Funktionen $\Gamma_{i\alpha}^{\beta} : V \to \mathbb{K}$ definiert. Sei heißen *Christoffel-Symbole* von ∇ bezüglich x und $s = (s_1, \ldots, s_N)$. Die Christoffel-Symbole legen ∇ fest, denn für einen beliebigen glatten Schnitt s, definiert auf U, und für $\xi \in T_pM$ mit $p \in U$ schreibe

$$s = \sum_{\alpha=1}^{N} f^\alpha s_\alpha, \quad \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

und berechne Folgendes:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi s &= \nabla_{\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} f^\alpha s_\alpha \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{N} \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (f^\alpha s_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{N} \xi^i \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} s_\alpha + f^\alpha \sum_{\beta=1}^{N} (\Gamma_{i\alpha}^{\beta} \circ x) \cdot s_\beta \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi^i \cdot \sum_{\beta=1}^{N} \left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{N} f^\alpha (\Gamma_{i\alpha}^{\beta} \circ x) \right) s_\beta
\end{aligned}$$

Bemerkung. Bisher hatten wir nur den Fall betrachtet, dass $E = TM$ und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang ist.

Zurückziehen von Zusammenhängen

Sei $E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel, sei $f : X \to M$ glatt. Druch $F : f^*E \to E$, $F(p, v) := v$ ist ein Vektorbündelhomomorphismus über f definiert, der auf jeder Faser ein Isomorphismus ist. Insbesondere kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 5.3.3. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf E. Dann existiert genau ein Zusammenhang ∇^{f^*E} auf f^*E, so dass für alle $s \in C^\infty(U, E|_U)$, für alle $p \in f^{-1}(U)$ und für alle $\xi \in T_pX$ gilt:*

$$\nabla_\xi^{f^*E} (F^{-1} \circ s \circ f) = F^{-1} (\nabla_{df|_p(\xi)}^{E} s).$$

Dieser Zusammenhang heißt *zurückgezogener Zusammenhang* auf f^*E.

Beweis. Eindeutigkeit. Sei $y : U \to V$ eine Karte von M, seien $s_1, \dots, s_N$ glatte Basisschnitte von E über U. Seien $\Gamma^\beta_{i\alpha} : V \to \mathbb{K}$ die zugehörigen Christoffel-Symbole. Sei $x : \tilde{U} \to W$ eine Karte von X, wobei $\tilde{U} \subset f^{-1}(U)$. Dann bilden $\tilde{s}_\alpha := F^{-1} \circ s_\alpha \circ f$ Basisschnitte für f^*E über $f^{-1}(U)$. Seien $\tilde{\Gamma}^\beta_{a\alpha} : W \to \mathbb{K}$ die zugehörigen Christoffel-Symbole. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^N \tilde{\Gamma}^\beta_{a\alpha}(x(p))\tilde{s}_\beta(p) &= \nabla^{f^*E}_{\frac{\partial}{\partial x^a}(p)}\tilde{s}_\alpha = \nabla^{f^*E}_{\frac{\partial}{\partial x^a}(p)}(F^{-1} \circ s_\alpha \circ f) = F^{-1}(\nabla^E_{df(\frac{\partial}{\partial x^a}(p))}s_\alpha) \\
&= F^{-1}(\nabla^E_{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^a}(p)\frac{\partial}{\partial y^i}(f(p))}s_\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^a}(p)F^{-1}(\nabla^E_{\frac{\partial}{\partial y^i}(f(p))}s_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^a}(p)F^{-1}\left(\sum_{\beta=1}^N \Gamma^\beta_{i\alpha}(y(f(p)))s_\beta(f(p))\right) \\
&= \sum_{\beta=1}^N\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^a}(p)\Gamma^\beta_{i\alpha}(y(f(p)))\tilde{s}_\beta(p)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\tilde{\Gamma}^\beta_{a\alpha}(x(p)) = \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^a}(p)\Gamma^\beta_{i\alpha}(y(f(p)))} \tag{2}$$

Dadurch werden die Christoffel-Symbole $\tilde{\Gamma}^\beta_{a\alpha}$ von ∇^{f^*E} durch diejenigen von ∇^E festgelegt.

Existenz. Definiere die Christoffel-Symbole durch (2). Überprüfe, dass dadurch ein Zusammenhang ∇^{f^*E} auf ganz $f^*E \to x$ wohldefiniert ist. □

Beispiel.
- Im Fall, dass $E = TM \to M$ und ∇^E der Levi-Civita-Zusammenhang ist, liefert dies die kovariante Ableitung von Vektorfeldern längs Abbildungen.
- Für $E \to M$ und ∇^E beliebig und für $f : X \to M$ konstant bilden für eine Basis $v_1, \dots v_N$ von $E_{f(x)}$ die Schnitte
$$s_\alpha(p) := (p, v_\alpha)$$
globale glatte Basisschnitte, das heißt, dass f^*E trivial ist. Für ∇^{f^*E} erhalten wir $\tilde{\Gamma}^\beta_{a\alpha} \equiv 0$ und daher
$$\nabla^{f^*E}_\xi(\sum_{\alpha=1}^N f^\alpha s_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \partial_\xi f^\alpha \cdot s_\alpha.$$

5.4 Krümmung von Vektorbündeln

Definition. Sei $E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel mit Zusammenhang ∇. Der *Krümmungstensor* R^∇ ist für $\xi, \eta \in C^\infty(U, TM|_U)$ und $s \in C^\infty(U, E|_U)$ definiert durch

$$R^\nabla(\xi, \eta)s = \nabla_\xi\nabla_\eta s - \nabla_\eta\nabla_\xi s - \nabla_{[\xi,\eta]}s.$$

LEMMA 5.4.1. *Für $p \in U$ hängt $(R^\nabla(\xi, \eta)s)(p)$ nur von $\xi(p)$, $\eta(p)$ und $s(p)$ ab.*

Beweis. Schreibe $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\eta = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $s = \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha s_\alpha$. Unter Verwendung der einsteinschen Summenkonvention gilt dann:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \nabla_\eta s &= \nabla_\xi(\eta^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(f^\alpha s_\alpha)) \\
&= \nabla_\xi \left(\eta^i \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} s_\alpha + f^\alpha \Gamma^\beta_{i\alpha} s_\beta\right)\right) \\
&= \nabla_\xi \left(\eta^i \left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} + f^\alpha \Gamma^\beta_{i\alpha}\right) s_\beta\right) \\
&= \xi^j \Bigg[\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^i} + f^\alpha \Gamma^\gamma_{i\alpha}\right) + \eta^i \left(\cancel{\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^j \partial x^i}} + \cancel{\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}} \Gamma^\gamma_{i\beta} + f^\alpha \frac{\partial \Gamma^\gamma_{i\alpha}}{\partial x^j}\right) \\
&\qquad + \eta^i \left(\cancel{\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}} + f^\alpha \Gamma^\beta_{i\alpha}\right) \Gamma^\gamma_{j\beta}\Bigg] s_\gamma \\
\Rightarrow \nabla_\xi \nabla_\eta s - \nabla_\eta \nabla_\xi s &= \Bigg[\left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^i} + f^\alpha \Gamma^\gamma_{i\alpha}\right) \\
&\qquad + \xi^j \eta^i f^\alpha \left(\frac{\partial \Gamma^\gamma_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{j\alpha}}{\partial x^i} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\gamma_{j\beta} + \Gamma^\beta_{j\alpha}\Gamma^\gamma_{i\beta}\right)\Bigg] s_\gamma \\
\Rightarrow \nabla_\xi \nabla_\eta s - \nabla_\eta \nabla_\xi s - \nabla_{[\xi,\eta]} s &= \xi^j \eta^i f^\alpha R^\gamma_{ji\alpha} \cdot s_\gamma,
\end{aligned}$$

wobei $$\boxed{R^\gamma_{ji\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\gamma_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{j\alpha}}{\partial x^i} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\gamma_{j\beta} + \Gamma^\beta_{j\alpha}\Gamma^\gamma_{i\beta}}$$ □

Korollar 5.4.2. *Der Krümmungstensor R^∇ ist ein glatter Schnitt in $T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E$.*

Proposition 5.4.3. *Der Krümmungstensor R^∇ besitzt folgende Symmetrien:*

(i) $R^\nabla(\xi,\eta) = -R^\nabla(\eta,\xi)$.

(ii) Falls ∇ metrisch ist bezüglich einer riemannschen oder hermiteschen Metrik g, so gilt:

$$g(R^\nabla(\xi,\eta)s_1, s_2) = -g(s_1, R^\nabla(\xi,\eta)s_2).$$

Beweis.

(i) klar.

(ii) Es gilt

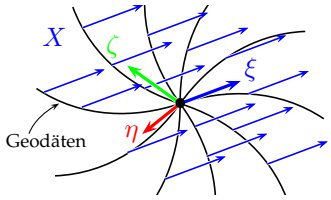
$$\begin{aligned}
0 &= (\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi - \partial_{[\xi,\eta]}) g(s_1, s_2) \\
\nabla \text{ metrisch} \quad &= g(R^\nabla(\xi,\eta)s_1, s_2) + g(s_1, R^\nabla(\xi,\eta)s_2)
\end{aligned}$$ □

Korollar 5.4.4. *R^∇ ist ein glatter Schnitt im Vektorbündel $\bigwedge^2 T^*M \otimes E^* \otimes E$.*

Proposition 5.4.5 (Bianchi-Identität). *Sei $E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel mit einem Zusammenhang ∇. M trage eine semi-riemannsche Metrik und TM den Levi-Civita-Zusammenhang. Dann gilt für $R = R^\nabla$:*

$$\nabla_\xi R(\eta,\zeta) + \nabla_\eta R(\zeta,\xi) + \nabla_\zeta R(\xi,\eta) = 0.$$

Beweis. Sei $p \in M$, seien ξ, η, ζ in T_pM und sei $e \in E_p$. Setze e zu einem glatten Schnitt s in eine Umgebung von p fort (das geht, da E lokal trivial ist). Setze weiterhin ξ, η und ζ zu glatten Vektorfeldern X, Y und Z auf eine Umgebung von p fort durch Parallelverschiebung von ξ, η und ζ längs der von p ausgehenden Geodätischen. Dann gilt



$$\nabla.X|_p = \nabla.Y|_p = \nabla.Z|_p = 0$$

und insbesondere

$$[X,Y]|_p = \nabla_X Y|_p - \nabla_Y X|_p = 0, \quad [Y,Z]|_p = [X,Z]|_p = 0.$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi R)(\eta,\zeta)e &= \nabla_X(R(Y,Z)s)|_p - R(\nabla_X Y, Z)|_p - R(Y,\nabla_X Z)s|_p - R(Y,Z)\nabla_X s|_p \\ &= \big(\nabla_X(\nabla_Y\nabla_Z s - \nabla_Z\nabla_Y s - \nabla_{[Y,Z]}s)\big)\big|_p - R(Y,Z)\nabla_X s|_p\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}&(\nabla_\xi R)(\eta,\zeta)e + (\nabla_\eta R)(\zeta,\xi)e + (\nabla_\zeta R)(\xi,\eta)e \\ &= \big(\cancel{\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z s} - \cancel{\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y s} - \underline{\underline{\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}s}} - \cancel{R(Y,Z)\nabla_X s} \\ &\quad + \cancel{\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X s} - \cancel{\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z s} - \underline{\underline{\nabla_Y\nabla_{[Z,X]}s}} - \cancel{R(Z,X)\nabla_Y s} \\ &\quad + \cancel{\nabla_Z\nabla_X\nabla_Y s} - \cancel{\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X s} - \underline{\underline{\nabla_Z\nabla_{[X,Y]}s}} - \cancel{R(X,Y)\nabla_Z s}\big)\big|_p \\ &= \big(\underbrace{R([Y,Z],X)s}_{=0} + \nabla_{[[Y,Z],X]}s + \underbrace{R([Z,X],Y)s}_{=0} + \nabla_{[[Z,X],Y]}s + \underbrace{R([X,Y],Z)s}_{=0} + \nabla_{[[X,Y],Z]}s\big)\big|_p \\ &= \nabla_{\underbrace{[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]+[[X,Y],Z]}_{=0 \quad \text{(Jacobi-Identität)}}}s\big|_p \quad = \quad 0\end{aligned}$$

R hängt in den Argumenten nur von den Argumenten *an der Stelle* p ab.

□

Bemerkung. Diese Bianchi-Identität hat nichts mit der „ersten Bianchi-Identität“ $R(\xi,\eta)\zeta + R(\eta,\zeta)\xi + R(\zeta,\xi)\eta = 0$ des Levi-Civita-Zusammenhangs aus Proposition 3.1.3 zu tun und wird im Falle des Levi-Civita-Zusammenhangs auch „zweite Bianchi-Identität“ genannt.

Definition. Ein Zusammenhang ∇ heißt *flach*, wenn für den zugehörigen Krümmungstensor $R^\nabla = 0$ gilt.

Beispiel.

- Jeder metrische Zusammenhang auf einem riemannschen Geradenbündel ist flach. Denn:

$$R^\nabla(\xi,\eta) \in \underbrace{\mathrm{End}(E_p)}_{\text{1-dimensional}} \text{ ist schiefsymmetrisch} \quad \Rightarrow \quad R^\nabla(\xi,\eta) = 0.$$

- Jedes triviale Vektorbündel besitzt flache Zusammenhänge. Denn:

  Wähle globale Basisschnitte $s_1, \ldots, s_N$ und definiere

$$\nabla_\xi\big(\textstyle\sum_{\alpha=1}^N f^\alpha s_\alpha\big) := \textstyle\sum_{\alpha=1}^N \partial_\xi f^\alpha \cdot s_\alpha.$$

- Sei nun ∇ ein metrischer Zusammenhäng auf einem hermiteschen Geradenbündel $E \to M$. Für alle $\xi, \eta \in T_pM$ ist $R^\nabla(\xi,\eta) \in \mathrm{End}(E_p) \cong \mathbb{C}$ schiefhermitesch, folglich ist $R^\nabla(\xi,\eta) \in i\mathbb{R}$.

  Daraus folgt dann, dass $R^\nabla = iF$, wobei F eine reelle 2-Form ist.

  Was besagt hier die Bianchi-Identität? Schreibe lokal

$$F = \sum_{1\le i<j\le n} F_{ij} dx^i \wedge dx^j .$$

  Setze $F_{ii} := 0$ und für $i > j$ $F_{ij} := -F_{ji}$. Dann gilt

$$F = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij} dx^i \wedge dx^j .$$

  Man berechnet

$$\begin{aligned}
dF &= \sum_{1\le i<j\le n} dF_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{ij}}{dx^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{1\le \alpha<\beta<\gamma\le n} \Bigg(\underbrace{\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}}_{\substack{k<i<j \\ \alpha\ \ \beta\ \ \gamma}} - \underbrace{\frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}}_{\substack{i<k<j \\ \alpha\ \ \beta\ \ \gamma}} + \underbrace{\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}}_{\substack{i<j<k \\ \alpha\ \ \beta\ \ \gamma}} \Bigg) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \\
&= \sum_{1\le i<j<k\le n} \left(\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k
\end{aligned}$$

  Schreibe $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $\nabla_i := \nabla_{\partial_i}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
(\nabla_i F)(\partial_j, \partial_k) &= \partial_i(F(\partial_j,\partial_k)) - F(\nabla_i\partial_j, \partial_k) - F(\partial_j, \nabla_i\partial_k) \\
&= \partial_i F_{jk} - F(\nabla_i\partial_j, \partial_k) + F(\nabla_i\partial_k, \partial_j)
\end{aligned}$$

  Die Bianchi-Identität besagt

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_i F)(\partial_j,\partial_k) + (\nabla_j F)(\partial_k,\partial_i) + (\nabla_k F)(\partial_i,\partial_j) \\
&= \partial_i F_{jk} - \underline{\underline{\underline{F(\nabla_i\partial_j,\partial_k)}}} + \underline{\underline{F(\nabla_i\partial_k,\partial_j)}} \\
&\quad + \partial_j F_{ki} - \underline{F(\nabla_j\partial_k,\partial_i)} + \underline{\underline{\underline{F(\nabla_j\partial_i,\partial_k)}}} \\
&\quad + \partial_k F_{ij} - \underline{\underline{F(\nabla_k\partial_i,\partial_j)}} + \underline{F(\nabla_k\partial_j,\partial_i)} \\
&= \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} + F(\underbrace{[\partial_k,\partial_j]}_{=0},\partial_i) + F(\underbrace{[\partial_k,\partial_j]}_{=0},\partial_i) + F(\underbrace{[\partial_k,\partial_j]}_{=0},\partial_i)
\end{aligned}$$

  Das bedeutet, dass die Bianchi-Identität äquivalent ist zu $dF = 0$. Das heißt also, dass $R^\nabla = iF$, wobei F eine geschlossene reelle 2-Form ist.

- Sei nun insbesondere M der vierdimensionale Minkowski-Raum. Betrachte die Koordinaten $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ und $x^3 = z$ bezüglich derer die Minkowski-Metrik die Gestalt

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

hat. Schreibe $F = -E_1 dt \wedge dx - E_2 dt \wedge dy - E_3 dt \wedge dz + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$. Man berechnet nun

$$\begin{aligned} dF &= (\partial_x B_1 + \partial_y B_2 + \partial_z B_3) dx \wedge dy \wedge dz + (\partial_z E_2 - \partial_y E_3 + \partial_t B_1) dt \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + (-\partial_z E_1 + \partial_x E_3 + \partial_t B_2) dt \wedge dz \wedge dx + (\partial_y E_1 - \partial_x E_2 + \partial_t B_3) dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

Setze nun $\vec{E} := (E_1, E_2, E_3) : M \to \mathbb{R}^3$ (*elektrisches Feld*) und $\vec{B} := (B_1, B_2, B_3) : M \to \mathbb{R}^3$ (*magnetisches Feld*). Dann ist die Bianchi-Identität äquivalent zu

$$0 = \operatorname{div} \vec{B} \tag{3}$$

$$\textit{(Faradaysches Gesetz)} \quad 0 = \partial_t \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{E} \tag{4}$$

Die Gleichung (3) bedeutet, dass keine magnetischen Quellen existieren.

Einschub über Orientierungen und den Hodge-$*$-Operator

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit nicht entarteter symmetrischer Bilinearform $g : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Index s. Dann trägt $\bigwedge^p V$ ein nicht entartete symmetrische Bilinearform $g^{\bigwedge^p V} : \bigwedge^p V \times \bigwedge^p V \to \mathbb{R}$, die charakterisiert ist durch Folgendes:

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von V, dann gilt $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i = \pm 1$. Dann bilden die $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, $i_1 < \cdots < i_p$, eine verallgemeinerte Orthonormalbbasis von $\bigwedge^p V$, wobei gilt:

$$g^{\bigwedge^p V}(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_p} \cdot \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_p j_p}.$$

Analog hat V^* eine nicht entartete symmetrische Bilinearform $g^{V^*} : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$, charakterisiert durch

$$g^{V^*}(e_i^*, e_j^*) = \varepsilon_i \delta_{ij}.$$

Definition. Trägt V zusätzlich eine Orientierung, so definiert man die *Volumenform* $\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in \bigwedge^n V$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ eine positiv orientierte verallgemeinerte Orthonormalbasis ist.

Bemerkung. Die Volumenform ω hängt *nicht* von der genauen Wahl der Orthonormalbasis ab. Kehrt man die Orientierung auf V um, so wird ω durch $-\omega$ ersetzt. Außerdem gilt

$$g^{\bigwedge^n V}(\omega, \omega) = (-1)^s,$$

wobei s der Index von g ist.

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Seien $x : U \to V$ und $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ zwei Karten. Dann heißen x und y *orientierungsverträglich*, falls auf $x(U \cap \tilde{U})$ gilt:

$$\det D(y \circ x^{-1}) > 0.$$

Einen C^∞-Atlas $\mathcal{A}$ nennt man *orientiert*, wenn je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ orientierungsverträglich sind. Eine *Orientierung* von M ist ein maximaler orientierter C^∞-Atlas von M. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Orientierung nennen wir eine *orientierte Mannigfaltigkeit*.

Bemerkung. Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit, so trägt jeder Tangentialraum T_pM (und damit auch jeder Kotangentialraum T_p^*M) eine Orientierung im Sinne der linearen Algebra:

Ist nämlich $x : U \to V$ eine Karte aus dem orientierten Atlas, so ist $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ eine positiv orientierte Basis von T_pM (und $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ ist eine positiv orientierte Basis von T_p^*M).

PROPOSITION 5.4.6. *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist orientierbar.

(ii) Das reelle Geradenbündel $\bigwedge^n T_p^*M$ ist trivial.

Beweis.

(ii) ⇒ (i): Sei $\bigwedge^n T^*M$ trivial. Dann existiert ein glatter Schnitt $\omega \in C^\infty(M, T^*M)$ mit $\omega(p) \neq 0$ für alle $p \in M$. Sei $\mathcal{A}$ die differenzierbare Struktur von M. Setze

$$\mathcal{A}_\omega := \left\{ (x : U \to V) \in \mathcal{A} \,\middle|\, \omega(\tfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x^n}) > 0 \text{ auf } U \right\}.$$

Behauptung: $\mathcal{A}_\omega$ ist ein orientierter Atlas von M. *Denn:*

(a) Es ist zu zeigen, dass die Karten aus $\mathcal{A}_\omega$ ganz M überdecken.
Sei $p \in M$, sei $(x : U \to V) \in \mathcal{A}$ mit $p \in U$. O. B. d. A. sei U (und damit auch V) zusammenhängend.
Falls $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}) > 0$, so ist $(x : U \to V) \in \mathcal{A}_\omega$. Falls nicht, so gilt $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}) < 0$ auf ganz U (da $\omega \neq 0$ überall und U zusammenhängend). Setze

$$y^1 := -x^1,\ y^2 := x^2,\ \dots,\ y^n := x^n.$$

Die Karte $y : U \to \tilde{V}$ enthält p und erfüllt

$$\omega(\tfrac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial y^n}) = \omega(-\tfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x^n}) > 0,$$

das heißt $(y : U \to \tilde{V}) \in \mathcal{A}_\omega$.

(b) Es bleibt zu zeigen, dass je zwei Karten $x : U \to V$ und $y : \tilde{U} \to \tilde{V}$ aus $\mathcal{A}_\omega$ orientierungserhaltend sind.
Auf $x(U \cap \tilde{U})$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &< \omega(\tfrac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial y^n}) \\ &= \omega(\textstyle\sum_{i_1=1}^n \frac{\partial(x^{i_1} \circ y^{-1})}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n \frac{\partial(x^{i_n} \circ y^{-1})}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial x^n}) \\ &= \det D(x \circ y^{-1}) \cdot \underbrace{\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x^n})}_{>0} \\ \Rightarrow \quad \det D(x \circ y^{-1}) &> 0 \end{aligned}$$

(i) ⇒ (ii): Wähle eine riemannsche Metrik g auf M. Für $p \in M$ sei $\omega(p) \in \bigwedge^n T_p^*M$ die Volumenform von T_p^*M, das heißt es gilt

$$g^{\bigwedge^n}(\omega, \omega) := g^{\bigwedge^n T_p^*M}(\omega, \omega) = 1.$$

Daraus folgt, dass ω ein nirgends verschwindender Schnitt in $\bigwedge^n T^*M$ ist.

Sei nun $p \in M$. Wähle eine positiv orientierte Karte $x : U \to V$ um p. Dann bilden $dx^1, \ldots, dx^n$ positiv orientierte, glatte Basisschnitte in T^*M, definiert auf M.

Die Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahren liefert eine positiv orientierte, glatte Orthonormalbasisschnitte $e_1, \ldots, e_n$ in T^*M, definiert auf U. Es gilt $\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, also ist ω glatt auf U.

$\Rightarrow$ Die Volumenform ω ist ein nirgends verschwindender glatter Schnitt in $\bigwedge^n T^*M$.

$\Rightarrow$ Das reelle Geradenbündel $\bigwedge^n T^*M$ ist trivial. □

LEMMA 5.4.7. *Sei V ein orientierter n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit nicht entarteter symmetrischer Bilinearform g. Sei $p \in \{0, \ldots, n\}$. Dann existiert genau ein Vektorraum-Isomorphismus $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$, so dass für alle $\alpha, \beta \in \bigwedge^p V$ gilt:*

$$\alpha \wedge (*\beta) = g^{\bigwedge^p V}(\alpha, \beta) \cdot \omega.$$

Beweis. Eindeutigkeit. Seien $*_1$ und $*_2$ zwei solche Vektorraum-Isomorphismen. Daraus folgt, dass für alle $\alpha, \beta \in \bigwedge^n V$ gilt

$$\alpha \wedge ((*_1 - *_2)\beta) = g^{\bigwedge^p V}(\alpha, \beta) \cdot \omega - g^{\bigwedge^p V}(\alpha, \beta) \cdot \omega = 0.$$

Wenn für ein $\gamma \in \bigwedge^{n-p} V$ und alle $\alpha \in \bigwedge^p V$ gilt: $\alpha \wedge \gamma = 0$, so muss $\gamma = 0$ sein. *Denn:* Schreibe

$$\gamma = \sum_I \gamma^I e_I,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis ist und über alle Multiindizes $I = (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ summiert wird. Dabei gilt

$$\gamma^I \in \mathbb{R} \text{ und } e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

Fixiere einen Multiindex I_0 und betrachte den komplementären Multiindex I_0^C. Für $\alpha = e_{I_0^C} \in \bigwedge^p V$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \wedge \gamma \\ &= e_{I_0^C} \wedge \sum_I \gamma^I e_I \\ &= \gamma^{I_0} e_{I_0^C} \wedge e_I \\ &= \pm \gamma^{I_0} \omega \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\gamma^{I_0} = 0$ für alle Multiindizes I_0, also $\gamma = 0$. Daraus folgt, dass $*_1 = *_2$.

Existenz. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine positiv orientierte verallgemeinerte Orthonormalbasis von V. Definiere $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ durch

$$\boxed{*e_I \;:=\; g^{\bigwedge^p V}(e_I, e_I) \cdot \operatorname{sign}(I, I^C) \cdot e_{I^C}.}$$

Dabei wird (I, I^C) als Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ aufgefasst und $\operatorname{sign}(I, I^C)$ ist dann das Vorzeichen dieser Permutation. □

Bemerkung. Bei Umkehr der Orientierung von V wird $*$ durch $-*$ ersetzt.

Definition. Der Operator $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ heißt *Hodge-$*$-Operator*.

PROPOSITION 5.4.8. *Der Hodge-$*$-Operator hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $*1 = \omega$ *und* $*\omega = (-1)^s$.

(ii) Für $\alpha \in \bigwedge^p V$ *und* $\beta \in \bigwedge^{n-p} V$ *gilt* $g^{\bigwedge^p V}(\alpha, *\beta) = (-1)^{p(n-p)} g^{\bigwedge^{n-p}}(*\alpha, \beta)$.

(iii) Auf $\bigwedge^p V$ *gilt* $*^2 = (-1)^{p(n-p)+s} \mathrm{id}_{\bigwedge^p V}$.

Dabei ist s der Index der symmetrischen Bilinearform g auf V.

Beweis.

(i) Es gilt
$$*1 = *e_\emptyset = \underbrace{g^{\bigwedge^0 V}(1,1)}_{=1} \underbrace{\mathrm{sign}(1 \cdots n)}_{=1} e_{1 \dots n} = \omega \quad \text{und}$$
$$*\omega = *e_{1 \dots n} = \underbrace{g^{\bigwedge^n V}(\omega, \omega)}_{=(-1)^s} \underbrace{\mathrm{sign}(1 \cdots n)}_{=1} \varepsilon_\emptyset = (-1)^s.$$

(iii) Man berechnet
$$\begin{aligned} *^2 e_I &= *(g^{\bigwedge^p V}(e_I, e_I)\mathrm{sign}(I, I^C) e_{I^C}) \\ &= \underbrace{g^{\bigwedge^p V}(e_I, e_I)} \cdot \underbrace{\mathrm{sign}(I, I^C)} \cdot \underbrace{g^{\bigwedge^p V}(e_{I^C}, e_{I^C})} \cdot \underbrace{\mathrm{sign}(I^C, I)} e_I \\ &\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{=(-1)^s} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{=(-1)^{p(n-p)}} \\ &= (-1)^{p(n-p)+s} e_I \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \text{Einerseits gilt } \alpha \wedge \beta &\overset{(iii)}{=} (-1)^{(n-p)p+s} \alpha \wedge *^2 \beta \\ &= (-1)^{(n-p)p+s} g^{\bigwedge^p V}(\alpha, *\beta) \cdot \omega, \\ \text{andererseits } \alpha \wedge \beta &= (-1)^{p(n-p)} \beta \wedge \alpha \\ &\overset{(iii)}{=} (-1)^{p(n-p)} (-1)^{(n-p)p+s} \beta \wedge *^2 \alpha \\ &= (-1)^{2p(n-p)+s} g^{\bigwedge^{n-p} V}(\beta, *\alpha) \cdot \omega. \end{aligned}$$
□

Definition. Sei M eine orientierte semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei also
$$d : C^\infty(M, \wedge^p T^* M) \to C^\infty(M, \wedge^{p+1} T^* M)$$
die äußere Ableitung von Differentialformen auf M. Dann heißt
$$\delta := (-1)^{np+1+s} * d * : C^\infty(M, \wedge^{p+1} T^* M) \to C^\infty(M, \wedge^p T^* M)$$
die *Koableitung*.

Bemerkung. Zur Definition von d werden die semi-riemannsche Metrik und die Orientierung nicht benötigt. Kehrt man die Orientierung um, so wird $*$ durch $-*$ ersetzt, das heißt δ bleibt unverändert. Also hängt δ von der Metrik ab, aber nicht von der Orientierung. Daher kann δ auch auf nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten definiert werden.

Bemerkung. Es gilt: $\delta^2 = \pm * d * * d * \overset{*^2 = \pm 1}{=} \pm * d^2 * \overset{d^2 = 0}{=} 0$.

Weiter mit der Elektrodynamik

Sei M der vier-dimensionale Minkwowski-Raum, sei $E \to M$ ein hermitesches Geradenbündel mit Zusammenhang ∇.

Dann gilt $R^\nabla = iF$, wobei F eine reelle 2-Form ist. Die Bianchi-Identität ist äquivalent zu $dF = 0$, was wiederum äquivalent zur ersten und zweiten Maxwellgleichung ist (die Gleichungen (3) und (4)).

Schreibe nun für $\delta F =: J$ mit

$$J = -\varrho dt + j_1 dx + j_2 dy + j_3 dz.$$

Man rechnet nun nach, dass $\delta F = J$ äquivalent ist zu

$$\text{(Gaußsches Gesetz)} \quad \varrho = \operatorname{div}\vec{E} \tag{5}$$

$$\text{(Ampèresches Gesetz)} \quad \vec{\jmath} = \operatorname{rot}\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6}$$

wobei $\vec{\jmath} := (j_1, j_2, j_3) : M \to \mathbb{R}^3$ als *Stromdichte* und ϱ als *Ladungsdichte* bezeichnet wird.

Es gilt $\delta J = \delta\delta F = 0$. Wegen $\delta J = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath}$ heißt dies

$$\text{(Kontinuitätsgleichung, Ladungserhaltung)} \quad 0 = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath} \tag{7}$$

Sei $s \in C^\infty(U, E|_U)$ ein lokaler Basisschnitt, das heißt $s \neq 0$ auf ganz $U \subset M$. Für die zugehörigen Christoffel-Symbole gilt dann

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(f \cdot s) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\Gamma^1_{01}\right) s \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(f \cdot s) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\Gamma^1_{11}\right) s \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}(f \cdot s) &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} + f\Gamma^1_{21}\right) s \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}(f \cdot s) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} + f\Gamma^1_{31}\right) s
\end{aligned}$$

Setze $\varphi := -i\Gamma^1_{01}$ und $A_j := i\Gamma^1_{j1}$ für $j = 1, 2, 3$ sowie $\vec{A} := (A_1, A_2, A_3)$.
Die Krümmung lässt sich aus den Christoffel-Symbolen berechnen.

$$\begin{aligned}
R^1_{jk1} &= \frac{\partial \Gamma^1_{k1}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^1_{j1}}{\partial x^k} + \cancel{\Gamma^1_{k1}\Gamma^1_{j1}} - \cancel{\Gamma^1_{j1}\Gamma^1_{k1}} \\
\Rightarrow \quad E_j &= -F_{0j} = -iR^1_{0j1} = -i\left(\frac{\partial \Gamma^1_{j1}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^j}\right), \quad j = 1, 2, 3 \\
&= -\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \\
\Rightarrow \quad \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi && (8) \\
\text{Analog:} \quad \vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A} && (9)
\end{aligned}$$

Man nennt φ das *skalare Potential* und $\vec{A}$ das *Vektorpotential*. Beide hängen von der Wahl von s ab. Ersetzt man s durch einen anderen lokalen Basisschnitt $\tilde{s} = e^{-iu} \cdot s$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} \cdot \tilde{s} &= -i\tilde{\Gamma}^1_{01} \cdot \tilde{s} &= -i\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tilde{s} \\
&= -i\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (e^{-iu} \cdot s) &= -i\left(-i\frac{\partial u}{\partial t} e^{-iu} s + e^{-iu}\Gamma^1_{01} \cdot s\right) \\
\Rightarrow \quad \tilde{\varphi} &= -\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi. \\
\text{Analog} \quad \tilde{\vec{A}} &= \vec{A} + \operatorname{grad} u.
\end{aligned}$$

Physikalisch haben wir eine *Eichtransformation* durchgeführt. Hier waren das skalare und das Vektorpotential komplexwertig, auch die Eichtransformation u ist eine Funktion $u : U \to \mathbb{C}$. Lässt man für die Basisschnitte s nur noch solche zu, die konstante Länge 1 haben (man erinnere sich daran, dass E ein *hermitesches* Geradenbündel ist), so werden die Potentiale und die Eichtransformationen reellwertig.

Fazit. Die Theorie der metrischen Zusammenhänge auf hermiteschen Geradenbündeln über dem vier-dimensionalen Minkowski-Raum ist ein natürlicher mathematischer Rahmen für die Formulierung der Elektrodynamik.

Mathematik	**Physik**
metrischer Zusammenhang ∇	Viererpotiential ($\vec{A}$ und φ)
Wahl eines Basisschnitts s	Eichung
$s \rightsquigarrow e^{-iu} \cdot s = \tilde{s}$	Eichtransformation
Krümmung $R^\nabla = iF$	elektromagnetisches Feld ($\vec{E}$ und $\vec{B}$)
J	Viererstromdichte ($\vec{j}$ und ϱ)
Bianchi-Identität $dF = 0$	Maxwell-Gleichungen (3) und (4)
$\delta F = J$	Maxwell-Gleichungen (5) und (6)
$\delta J = 0$	Kontinuitätsgleichung (7)

5.5 Existenz (semi-)riemannscher Metriken

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $\mathcal{U} := \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von M. Eine Menge $\{\varrho_\alpha | \alpha \in A\}$ heißt zu $\mathcal{U}$ passende *Teilung der Eins*, falls alle $\varrho_\alpha : M \to \mathbb{R}$ glatt sind, falls für $\alpha \in A$ gilt $\operatorname{supp}\varrho_\alpha \subset U_\alpha$ und $0 \leq \varrho_\alpha \leq 1$ auf M und falls für alle $p \in M$ gilt $\varrho_\alpha(p) \neq 0$ nur für endlich viele α und

$$\sum_{\alpha \in A} \varrho_\alpha(p) = 1.$$

Faktum. Zu $\mathcal{U}$ auf M existiert *stets* eine Teilung der Eins.

SATZ 5.5.1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine riemannsche Metrik auf M.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} := \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ eine Überdeckung von M durch Karten $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Setze $g_\alpha := {x_\alpha}^*(g_{\text{eukl}})$. Dann ist g_α eine riemannsche Metrik auf U_α für alle $\alpha \in A$. Sei $\{\varrho_\alpha | \alpha \in A\}$ eine

passende Teilung der Eins. Sei $p \in M$. Setze

$$g|_p := \sum_{\alpha \in A} \varrho_\alpha(p) g_\alpha|_p.$$

Dann hängt g glatt von p ab und $g|_p$ ist positiv definit, denn: Sei $\xi \in T_pM$ mit $\xi \neq 0$. Wegen $\sum_{\alpha \in A} \varrho_\alpha(p) = 1$ existiert ein $\alpha_0 \in A$, so dass $\varrho_{\alpha_0}(p) > 0$. Daher gilt

$$g|_p = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \underbrace{\varrho_\alpha(p)}_{\geq 0} \underbrace{g_\alpha|_p(\xi,\xi)}_{>0} + \underbrace{\varrho_{\alpha_0}(p)}_{>0} \underbrace{g_{\alpha_0}|_p(\xi,\xi)}_{>0} > 0$$

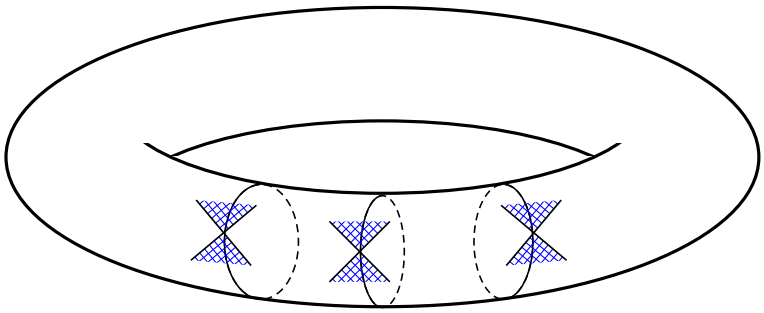
□

Bemerkung. Der Beweis benutzte, dass konvexe Kombinationen positiv-definiter symmetrischer Bilinearformen wieder positiv-definit sind. Für allgemeine nichtentartete symmetrische Bilinearformen kann eine solche Konvexkombination entartet sein. Also funktioniert dieser Beweis nicht für allgemeine semi-riemannasche Metriken. Der Satz ist bereits für Lorentz-Metriken falsch.

Beispiel. Die Mannigfaltigkeit $M = \mathcal{S}^2$ besitzt keine Lorentz-Metrik.

Falls doch, so könnte man in Koordinatensystemen U_α lokal Abbildungen konstruieren, die jedem Punkt $p \in U_\alpha$ einen eindimensionalen zeitartigen Untervektorraum $L_\alpha(p) \subset T_p\mathcal{S}^2$ zuordnet, die glatt glatt sind in p. Eine Teilung der Eins liefert eine glatte Abbildung, die jedem $p \in \mathcal{S}^2$ eine zeitartige Gerade $L(p) \subset T_p\mathcal{S}^2$ zuordnet. Dann wäre für alle $p \in \mathcal{S}^2$ $T_p\mathcal{S}^2 = L(p) \oplus L(p)^\perp$. Daraus würde folgen, dass die Eulerzahl $\chi(\mathcal{S}^2) = 0$ wäre, sie ist aber 2.

Dagegen ist der 2-Torus $\mathcal{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Metrik, die von der Minkowski-Metrik kommt, eine Lorentz-Mannigfaltigkeit.



Kapitel 6

Riemannsche Geometrie

6.1 Die riemannsche Abstandsfunktion

Generelle Voraussetzung. Sei M eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne die riemannsche Metrik.

Definition. Sei $c : [a, b] \to M$ eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann heißt

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

die *Länge* von c.

Bemerkung. Die Länge einer Kurve ist invariant unter Parametertransformationen.

Ist nämlich $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ eine Parametertransformation, so gilt

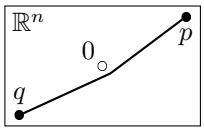
$$\begin{aligned} L[c \circ \varphi] &= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt}(c \circ \varphi) \right\| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{c}(\varphi(t))\| \cdot |\dot{\varphi}(t)| \, dt \\ \text{Substitution } s = \varphi(t) \quad &= \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(s)\| \, ds \\ &= L[c] \end{aligned}$$

Definition. Seien $p, q \in M$. Dann heißt

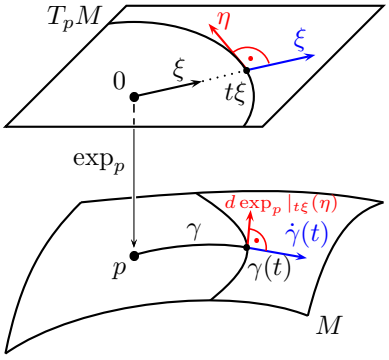
$$d(p, q) = \inf\{L[c] \mid c : [a, b] \to M \text{ stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Kurve mit } c(a) = p, c(b) = q\}$$

der *riemannsche Abstand* von p und q.

Bemerkung. Das Infimum braucht nicht angenommen zu werden.



Beispiel. $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$ und $p = -q$. Es gilt $d(p, q) = 2\|p\|$, aber jede Kurve c von p nach q hat eine Länge $L[c] > 2\|p\|$.



Satz 6.1.1 (Gauß-Lemma). *Seien $p \in M$ und $\xi \in T_pM$. Die Geodätische $\gamma(t) = \exp_p(t\xi)$ sei auf $[0, b]$ definiert. Dann ist $\exp_p$ auf einer offenen Umgebung von $\{t\xi \mid 0 \le t \le b\} \subset T_pM$ definiert und es gilt*

(i) $d\exp_p|_{t\xi}(\xi) = \dot\gamma(t)$.

(ii) Für $\eta \in T_{t\xi}T_pM \cong T_pM$ gilt

$$\left\langle d\exp_p|_{t\xi}(\eta), \dot\gamma(t)\right\rangle = \langle \eta, \xi\rangle .$$

Insbesondere gilt $d\exp_p|_{t\xi}(\eta) \perp \dot\gamma(t)$, falls $\eta \perp \xi$.

Beweis.

(i) $d\exp_p|_{t\xi}(\xi) = \dfrac{d}{ds}\exp_p(t\xi + s\xi)|_{s=0} = \dfrac{d}{ds}\gamma(t+s)|_{s=0} = \dot\gamma(t)$.

(ii) Wegen *(i)* genügt es, den Fall $\eta \perp \xi$ zu betrachten. Sei J das Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt}J(0) = \eta$. Nach Proposition 20.3 gilt dann

$$d\exp_p|_{t\xi}(\eta) = \frac{J(t)}{t} \text{ für } t > 0.$$

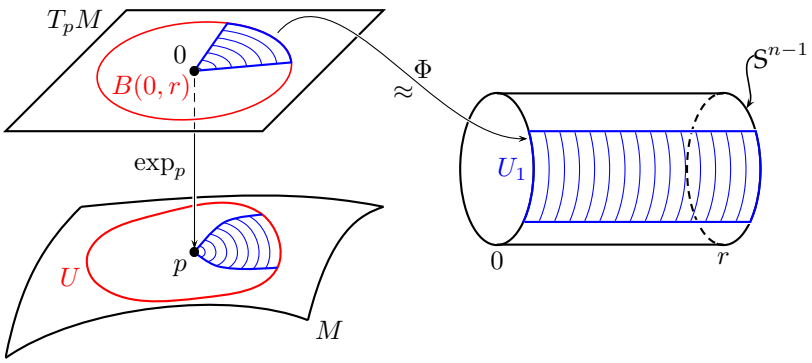
Da sowohl J als auch $\frac{\nabla}{dt}J$ für $t = 0$ auf $\dot\gamma$ senkrecht stehen, gilt dies für alle t. Also gilt

$$\left\langle d\exp_p|_{t\xi}(\eta), \dot\gamma(t)\right\rangle = \left\langle \frac{J(t)}{t}, \dot\gamma(t)\right\rangle = 0 = \langle \eta, \xi\rangle . \qquad \square$$

Wir betrachten nun den Diffeomorphismus $\Phi : T_pM - \{0\} \to (0,\infty) \times \mathrm{S}^{n-1}$, wobei $\mathrm{S}^{n-1} \subset T_pM$, gegeben durch $t \cdot y \leftarrow\!\shortmid (t, y)$. Dann existiert ein $r > 0$, so dass $B(0, r) \subset T_pM$ unter $\exp_p$ diffeomorph auf eine Umgebung U von p in M abgebildet wird.

$\Rightarrow$ $(0, r) \times \mathrm{S}^{n-1} \to U - \{p\}$, $(t, y) \mapsto \exp_p(ty)$ ist ein Diffeomorphismus.

Seien nun $y^2, \dots, y^n$ lokale Koordinaten auf $U_1 \subset \mathcal{S}^{n-1}$. Dann heißen die Koordinaten, die durch den Diffeomorphismus $\exp_p(ty) \mapsto (t, y^2, \dots, y^n)$ gegeben sind, *geodätische Polarkoordinaten*.



Das Gauß-Lemma besagt, dass in solchen Koordinaten die riemannsche Metrik so aussieht:

$$(g_{ij}) \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right)$$

KOROLLAR 6.1.2. *Sei $r > 0$, so dass $\exp_p|_{\bar{B}(0,r)}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Sei $c : [a,b] \to M$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) \notin \exp_p(B(0,r))$. Dann gilt $L[c] \geq r$.*

Beweis. Sei $\beta \in (a,b)$ minimal, so dass $c(\beta) \in \partial \exp_p(B(0,r)) = \exp_p(\mathrm{S}^{n-1}(r))$. Sei $\alpha \in [a,\beta)$ maximal, so dass $c(\alpha) = p$. Nun ist sichergestellt, dass für $\tau \in (\alpha,\beta)$ die Kurve $c(\tau)$ in $\exp_p(B(0,r))\backslash\{p\}$ verläuft.

Für $\tau \in (\alpha,\beta]$ schreibe

$$\tilde{c}(\tau) \;:=\; {\exp_p}^{-1}(c(\tau)) \;=\; t(\tau)\cdot y(\tau),$$

wobei $t(\tau) := \|\tilde{c}(\tau)\| \in (0,r]$ und $y(\tau) := \frac{\tilde{c}(\tau)}{\|\tilde{c}(\tau)\|} \in \mathrm{S}^{n-1}$. Sei $\tilde{\xi}$ das Einheitsvektorfeld auf $T_pM\backslash\{0\}$, das unter dem kanonischen Isomorphismus $T_xT_pM \cong T_pM$ durch $\tilde{\xi}(x) = \frac{x}{\|x\|}$ gegeben ist. Mit dem Diffeomorphismus $\exp_p$ transportieren wir dieses Vektorfeld auf $\exp_p(B(0,r)) - \{p\}$, d. h. wir setzen

$$\xi(q) := d\exp_p\left(\tilde{\xi}({\exp_p}^{-1}(q))\right).$$

Aus dem Gauß-Lemma, Teil (i), folgt, dass $\|\xi\| \equiv 1$. Aus Teil (ii) des Gauß-Lemmas erhalten wir wegen

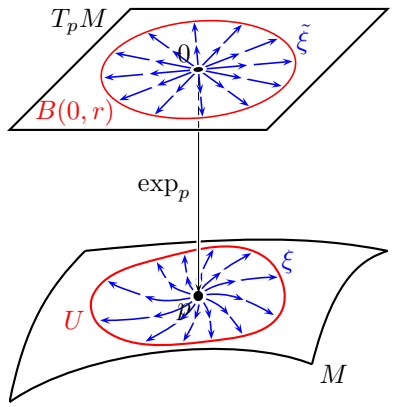
$$\frac{d}{d\tau}\tilde{c}(\tau) = \frac{dt}{d\tau}\cdot \underbrace{y(\tau)}_{=\tilde{\xi}(\tilde{c}(\tau))} + t(\tau)\cdot \underbrace{\frac{dy}{d\tau}(\tau)}_{\perp\tilde{\xi}(\tilde{c}(\tau))}$$

dass

$$\langle \xi(c(\tau)), \dot{c}(\tau)\rangle = \left\langle d\exp_p(\tilde{\xi}(\tilde{c}(\tau))), d\exp_p(\dot{\tilde{c}}(\tau))\right\rangle = \left\langle \tilde{\xi}(\tilde{c}(\tau)), \dot{\tilde{c}}(\tau)\right\rangle = \frac{dt}{d\tau}.$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} L[c] &\geq L[c|_{[\alpha,\beta]}] \\ &= \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(\tau)\|\, d\tau \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}}{\geq} \int_\alpha^\beta \langle \xi(c(\tau)), \dot{c}(\tau)\rangle\, d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{dt}{d\tau}\, d\tau \\ &= t(\beta) - t(\alpha) \quad = \quad r - 0 \quad = \quad r. \end{aligned}$$



□

SATZ 6.1.3. *(M,d) ist ein metrischer Raum.*

Beweis.

(i) Offensichtlich gilt stets $d(p,q) \geq 0$. Es gilt $d(p,p) = 0$ für alle $p \in M$, denn die konstante Kurve hat Länge 0.

Sei umgekehrt $d(p,q) = 0$. Angenommen, es gelte $p \neq q$. Wähle $r > 0$ so, dass $\exp_p|_{B(0,r)}$ ein Diffeomorphismus ist und (nach eventueller Verkleinerung von r) $q \notin \exp_p(B(0,r))$. Dann gilt nach Korollar 6.1.2, dass jede Kurve von p nach q mindestens die Länge r hat, also $d(p,q) \geq r > 0$. Das ist ein Widerspruch, also gilt $p = q$.

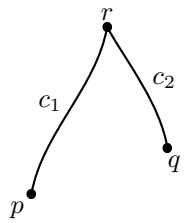
(ii) Es ist klar, dass $d(p,q) = d(q,p)$ (durchlaufe die verbindenden Kurven in umgekehrter Richtung).

(iii) Zu zeigen bleibt noch $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wähle eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve c_1 von p nach r mit $L[c_1] \leq d(p,r) + \varepsilon$ und eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve c_2 von r nach q mit $L[c_2] \leq d(r,q) + \varepsilon$. Setze c_1 und c_2 zu einer stetigen, stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurve c von p nach q zusammen. Dann gilt

$$d(p,q) \leq L[c] = L[c_1] + L[c_2] \leq d(p,r) + \varepsilon + d(r,q) + \varepsilon.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. □



Notation. Setze

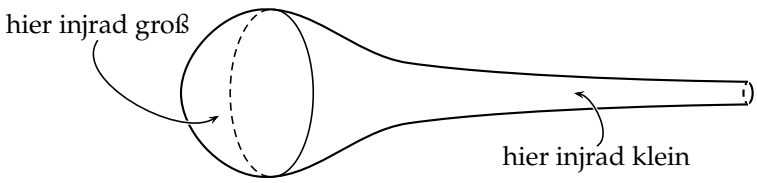
$$\begin{aligned} B(p,r) &:= \{q \in M \mid d(p,q) < r\}, \\ \bar{B}(p,r) &:= \{q \in M \mid d(p,q) \leq r\} \quad \text{und} \\ S(p,r) &:= \{q \in M \mid d(p,q) = r\}. \end{aligned}$$

Definition. Für $p \in M$ heißt

$$\text{injrad}(p) := \sup\{r \mid \exp_p|_{B(0,r)} : B(0,r) \to \exp_p(B(0,r)) \text{ ist Diffeomorphismus}\}$$

der *Injektivitätsradius* in p.

Beispiel. Der Injektivitätsradius hängt von p ab.



Bemerkung. Für $0 < r < \text{injrad}(p)$ gilt $\exp_p(B(0,r)) = B(p,r)$. *Denn:*

„$\subset$“: Sei $q = \exp_p(\xi)$ mit $\|\xi\| < r$. Dann ist $t \mapsto \exp_p(t\xi)$, $t \in [0,1]$, eine Kurve von p nach q und hat die Länge $\|\xi\| < r$. Also ist $d(q,p) < r$, d. h. $q \in B(p,r)$.

„$\supset$“: Korollar 6.1.2

SATZ 6.1.4. *Die Metrik d induziert die ursprüngliche Topologie.*

Beweis. Bezeichne für den Moment die bezüglich d offenen Teilmengen von M als „d-offen“. Es ist somit zu zeigen: d-offen = offen.

(a) *Behauptung:* Jede d-offene Menge ist offen.

Sei $U \subset M$ d-offen. Für jedes $p \in U$ existiert ein $r(p) > 0$, so dass $B(p, r(p)) \subset U$. O. B. d. A. sei $r(p) <$ injrad(p). Dann ist $B(p, r(p)) = \exp_p(\underbrace{B(0, r(p))}_{\text{offen in } T_pM})$ das diffeomorphe Bild einer offenen Teilmenge von T_pM, also selbst offen.

$\Rightarrow \quad U = \bigcup_{p \in M} B(p, r(p))$ ist die Vereinigung offener Teilmengen von M und somit offen.

(b) *Behauptung:* Jede offene Menge ist d-offen.

Der Beweis funktioniert ähnlich. □

KOROLLAR 6.1.5. *Die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Bemerkung. Ist $\Phi \in \mathrm{Isom}(M)$, so gilt $L[\Phi \circ c] = L[c]$ und somit auch $d(\Phi(p), \Phi(q)) = d(p, q)$.

Erinnerung. Wir haben $E[c] = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 \, dt$ die *Energie* von c genannt.

PROPOSITION 6.1.6. *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $c : [a, b] \to M$ eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann gilt*

$$L[c]^2 \leq 2(b - a) \cdot E[c].$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das L^2-Skalarprodukt ergibt sich:

$$L[c]^2 \;=\; \left(\int_a^b \|\dot{c}(t)\| \cdot 1 \, dt \right)^2 \leq \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 \, dt \cdot \int_a^b 1^2 \, dt \;=\; 2E[c](b - a).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\|\dot{c}\|$ und 1 (als Funktion) linear abhängig sind, d. h. wenn $\|\dot{c}\|$ konstant ist, d. h. wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. □

KOROLLAR 6.1.7. *Eine Kurve c minimiert genau dann die Energie unter allen stetigen, stückweisen $\mathcal{C}^1$-Kurven, die p und q verbinden, wenn c die Länge minimiert und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.*

Bemerkung. Energieminimierende Kurven sind nach Korollar 2.6.4 Geodätische.

KOROLLAR 6.1.8. *Jede kürzeste Kurve von p nach q ist bis auf Parametrisierungen eine Geodätische (genauer: jede Umparametrisiertung proportional zur Bogenlänge ist Geodätische).*

Vorsicht! Umgekehrt ist *nicht* jede Geodätische Kürzeste.

Beispiel. Die Großkreise auf der S^n.

Definition. Eine Geodätische $\gamma : [a, b] \to M$ mit $L[\gamma] = d(\gamma(a), \gamma(b))$ heißt *minimal*.

6.2 Vollständigkeit

Generelle Voraussetzung. Sei M eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition. Sei $p \in M$. Dann heißt M *geodätisch vollständig* in p, falls $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert ist, das heißt alle Geodätischen durch p sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

SATZ 6.2.1 (Hopf-Rinow). *Sei M eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Dann sind äquivalent:*

(1) *M ist geodätisch vollständig in p.*

(2) *M ist geodätisch vollständig in allen $q \in M$.*

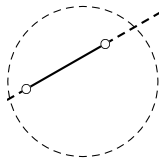
(3) *Die $\bar{B}(p, r)$ sind kompakt für alle $r > 0$.*

(4) *Die $\bar{B}(q, r)$ sind kompakt für alle $r > 0$ und alle $q \in M$.*

(5) *(M, d) ist ein vollständiger metrischer Raum, das heißt, alle d-Cauchy-Folgen konvergieren.*

Jede dieser Bedingungen impliziert zusätzlich

(6) *Jeder Punkt q lässt sich mit p durch eine minimale Geodätische verbinden.*



Bemerkung. Die Aussage **(6)** ist schwächer als **(1)** bis **(5)**.

Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ mit der euklidischen Metrik erfüllt zwar **(6)**, aber nicht **(1)** bis **(5)**.

Definition. Falls die Bedingungen **(1)** bis **(5)** aus Satz 27.1 gelten, nennt man M eine *vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit*.

KOROLLAR 6.2.2. *Jede kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.*

Beweis von Korollar 6.2.2. Nach dem Satz von Hopf-Rinow genügt es die Bedingung **(3)** nachzuweisen.

Es gilt also: $\bar{B}(p, r) \subset M$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes M und daher selbst wieder kompakt. □

Beweis von Satz 6.2.1. Wir werden den Satz in fünf Schritten beweisen. Die Struktur des Beweises sieht dabei folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd}
(5) \arrow[r, Rightarrow, "(a)"] & (2) \arrow[r, Rightarrow, "\text{trivial}"] & (1) \arrow[r, Rightarrow, "(e)"] \arrow[d, Rightarrow, "(d)"] & (6) \\
 & (4) \arrow[ul, Rightarrow, "(b)"] & (3) \arrow[l, Rightarrow, "(c)"] &
\end{tikzcd}$$

(a) Sei $\gamma : (\alpha, \beta) \to M$ eine Geodätische mit maximalem Definitionsbereich. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir nehmen an, es gelte $\beta < \infty$ (der Fall $\alpha > -\infty$ ist analog). Dann gilt für eine Folge von $t_i \in (\alpha, \beta)$ mit $t_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta$, dass

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq L[\gamma|_{[t_i,t_j]}] = |t_i - t_j|.$$

Folglich ist $(\gamma(t_i))_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine d-Cauchy-Folge.
Und da (M, d) vollständig ist, existiert ein $q \in M$ mit $\gamma(t_i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} q$.

1. Zwischenbehauptung: Der Grenzwert q hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $t_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta$ ab.

Beweis. Ist $(t_i')_{i\in\mathbb{N}}$ eine weitere solche Folge mit $q' = \lim_{i\to\infty} \gamma(t_i')$, so ist auch $(t_i'')_{i\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge, wobei

$$t_i'' := \begin{cases} t_j, & i = 2j \\ t_j', & i = 2j+1 \end{cases}$$

Die Folge $(\gamma(t_i''))_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine d-Cauchy-Folge mit den Häufungspunkten q und q'. Es gilt also $q = q'$. Das beweist die Zwischenbehauptung. ✓

Wir erhalten also eine stetige Fortsetzung $\bar{\gamma} : (\alpha, \beta] \to M$ von γ durch

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in (\alpha, \beta) \\ q, & t = \beta \end{cases}$$

1. Zwischenbehauptung: Das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\gamma}$ besitzt ebenfalls eine stetige Fortsetzung auf $(\alpha, \beta]$.

Beweis. Sei dazu $x : U \to V$ eine Karte von M um q mit $x(q) = 0$. Wähle $r > 0$ so, dass $\bar{B}(0, r) \subset V$. Da $\bar{B}(0, r)$ kompakt ist, existieren Konstanten $C_1, C_2, C_4 > 0$ mit

- $\left|\Gamma_{ij}^k(y)\right| \leq C_1$ für alle $y \in \bar{B}(0, r)$.
- $\|a\|_{\max} \leq C_2 \left\|\sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^{-1}(y))\right\|_g$ für alle $a = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \bar{B}(0, r)$.
- $\left|\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}(y)\right| \leq C_4$ für alle $y \in \bar{B}(0, r)$.

Schreibe $\gamma^k := x^k \circ \gamma$ für $t \in (\beta - \varepsilon, \beta)$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\gamma(t) \in x^{-1}(\bar{B}(0, r))$, sowie $a^k := \dot{\gamma}^k$. Dann liefert die Geodäten-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\dot{a}^k &= \ddot{\gamma}^k = -\textstyle\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma^1, \ldots, \gamma^n) \cdot \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \\
&= -\textstyle\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma^1, \ldots, \gamma^n) a^i a^j \\
\Rightarrow \quad \left|\dot{a}^k\right| &\leq n^2 \cdot C_1 \cdot \|a\|_{\max}^2 \\
\Rightarrow \quad \|\dot{a}\|_{\max} &\leq n^2 C_1 \cdot \|a\|_{\max}^2 \leq n^2 C_1 \cdot {C_2}^2 \underbrace{\|\dot{\gamma}\|_g{}^2}_{=1} = n^2 C_1 {C_2}^2 =: C_3 \\
\Rightarrow \quad \|a(t_i) - a(t_j)\|_{\max} &= \left\|\textstyle\int_{t_i}^{t_j} \dot{a}(t)\, dt\right\|_{\max} \leq \left|\textstyle\int_{t_i}^{t_j} \|\dot{a}(t)\|_{\max}\, dt\right| \leq C_3 \left|t_i - t_j\right|
\end{aligned}$$

Die $a(t_i)$ bilden eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$, das heißt, sie konvergieren gegen ein $A \in \mathbb{R}^n$.

Wie eben ist A unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $t_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta$. Also erhalten wir eine stetige Fortsetzung von a durch

$$\bar{a}(t) := \begin{cases} a(t),\, t \in (\beta-\varepsilon, \beta) \\ A,\, t = \beta \end{cases}$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\gamma}$ setzt sich also stetig in $t = \beta$ fort. Die Fortsetzung $\bar{\gamma}$ von γ ist C^1. ✓

Die Differentiation der Geodäten-Gleichung liefert

$$\ddot{a}^k \;=\; -\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}a^l a^i a^j + 2\Gamma_{ij}^k \dot{a}^i a^j\right)$$

Daraus folgt:

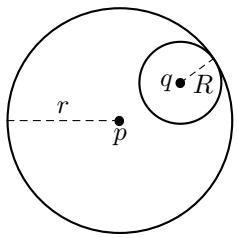
$$\begin{aligned}\|\ddot{a}\|_{\max} &\le n^3 C_4 \|a\|_{\max}^3 + 2n^2 C_1 \|\dot{a}\|_{\max} \|a\|_{\max} \\ &\le\; n^3 C_4 {C_2}^3 + 2n^2 C_1 C_3 C_2 \\ &=:\; C_5\end{aligned}$$

Ebenso wie oben bildet $(\dot{a}(t_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine d-Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$. Die Fortsetzung $\bar{\gamma}$ ist sogar eine C^2-Kurve.

Sei also $\hat{\gamma} : (\beta-\delta, \beta+\delta) \to M$ die Lösung der Geodäten-Gleichung mit $\hat{\gamma}(\beta) = \bar{\gamma}(\beta)$ und $\dot{\hat{\gamma}}(\beta) = \dot{\bar{\gamma}}(\beta)$. Aus der Eindeutigkeit von Geodätischen folgt, dass $\hat{\gamma}$ und $\bar{\gamma}$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen.
Wir erhalten also eine Fortsetzung von γ als Geodäte auf $(\alpha, \beta+\delta)$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von β und zeigt somit **(a)**.

(b) Seien alle abgeschlossenen Bälle in M kompakt. Sei $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M. Da alle Cauchy-Folgen beschränkt sind, existiert ein $R > 0$, so dass $p_i \in \bar{B}(p, R)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von $\bar{B}(p, R)$ hat die Cauchy-Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt und konvergiert folglich.

(c) Seien alle $\bar{B}(p, r)$ kompakt für alle $r > 0$. Sei $q \in M$ und sei $R > 0$. Setze $r := R + d(p, q)$. Dann gilt



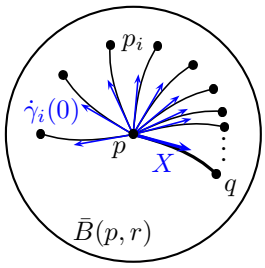
$$\bar{B}(q, R) \subset \bar{B}(p, r),$$

denn für $x \in \bar{B}(q, R)$ gilt

$$d(x, p) \le d(x, q) + d(q, p) \le R + d(q, p) = r.$$

Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\bar{B}(p, r)$ ist der Ball $\bar{B}(q, R)$ selbst kompakt.

(d) Sei $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bar{B}(p,r)$. Es ist zu zeigen, dass $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.



Nach **(6)** existieren minimale Geodätische γ_i, $i\in\mathbb{N}$, mit $\gamma_i(0)=p$ und $\gamma_i(t_i)=p_i$ für geeignete t_i, $i\in\mathbb{N}$.
O. B. d. A. seien die γ_i nach Bogenlänge parametrisiert. Dann ist $t_i = L[\gamma_i] = d(p,p_i) \le r$.

Die $\dot\gamma_i(0)$ sind Einheitsvektoren in T_pM. Da $\mathrm{S}^{n-1}(1)\subset T_pM$ kompakt ist, gilt nach dem Übergang zu einer geeigneten Teilfolge

$$\dot\gamma_i(0) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} X \in \mathrm{S}^{n-1}(1)\subset T_pM.$$

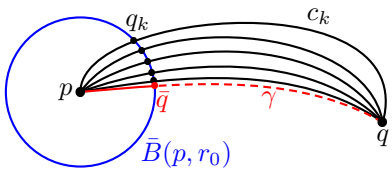
Es gilt $t_i\in[0,r]$ kompakt. Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert auch $t_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} T\in[0,r]$. Setze $q:=\exp_p(T\cdot X)$. Diese Definition ist wegen **(1)** möglich. Es gilt nun

$$\lim_{i\to\infty} p_i = \lim_{i\to\infty}\exp_p(t_i\cdot\dot\gamma_i(0)) = \exp_p(\lim_{i\to\infty} t_i\dot\gamma_i(0)) = \exp_p(TX) = q.$$

Dies beweist **(d)**.

(e) Sei $q\in M$. Wir wissen bereits, dass wir minimale Geodätische von p nach q finden können, falls $q\in B(p,\mathrm{injrad}(p))$.

Seien c_k stetige, stückweise C^1-Kurven von p nach q mit $L[c_k] = d(p,q)+\varepsilon_k$ mit $\varepsilon_k \searrow 0$. Sei also $q\notin B(p,\mathrm{injrad}(p))$ (sonst sind wir schon fertig). Wähle $0<r_0<\mathrm{injrad}(p)$. Dann ist



$$S(p,r_0) = \exp_p(S^{n-1}(r_0))$$

kompakt. Sei q_k der erste Schnittpunkt von c_k mit $S(p,r_0)$. Nach dem Übergang zu einer geeigneten Teilfolge besitzt q_k eine Grenzwert $\bar q\in S(p,r_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} & d(p,q)\le d(p,q_k)+d(q_k,q)\le L[c_k]\le d(p,q)+\varepsilon_k \\ \overset{k\to\infty}{\Rightarrow}\quad & d(p,q)\le d(p,\bar q)+d(\bar q,q)\le d(p,q) \\ \Rightarrow\quad & d(p,q) = d(p,\bar q)+d(\bar q,q) \end{aligned}$$

Sei also γ die eindeutige minimale Geodätische, die p mit $\bar q$ verbindet, o. B. d. A. nach Bogenlänge parametrisiert. Mit **(1)** kann man γ auf $[0,d(p,q)]$ fortsetzen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\gamma:[0,d(p,q)]\to M$ ist eine minimale Geodätische von p nach q. Setze dazu

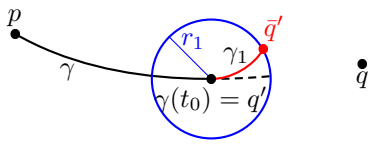
$$I := \{t\in[0,d(p,q)]\,|\,d(p,\gamma(t)) = t \text{ und } d(p,\gamma(t))+d(\gamma(t),q) = d(p,q)\}.$$

Wir haben gesehen, dass $[0,r_0]\subset I$. Setze also $t_0:=\sup(I)$. Zu zeigen ist $t_0 = d(p,q)$, denn dann ist

$$d(\gamma(t_0),q) = d(p,q)-d(\gamma(t_0),p) = d(p,q)-t_0 = 0,$$

und daraus folgt dann $\gamma(t_0)=q$ und γ ist minimale Geodätsiche von p nach q.

Wir nehmen also an, dass $t_0<d(p,q)$. Setze $q':=\gamma(t_0)$ Wähle $0<r_1<d(p,q)-t_0$ so, dass $B(q',r_1)$ eine normale Koordinatenumgebung ist. Wie oben existiert dann ein $\bar q'\in\partial B(q',r_1)$ mit



$$d(q',\bar q')+d(\bar q',q) = d(q',q).$$

Sei nun γ_1 eine minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\gamma_1(t_0) = q'$ und $\gamma(t_0 + r_1) = \bar{q}'$.

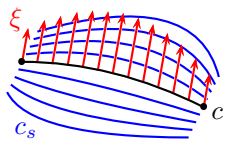
$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} d(p,\bar{q}') &\leq d(p,q') + d(q',\bar{q}') \\ &= d(p,q') + d(q',q) - d(\bar{q}',q) \\ &= d(p,q) - d(q',q) + d(q',q) - d(\bar{q}',q) \\ &= d(p,q) - d(\bar{q}',q) \\ &\leq d(p,\bar{q}') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad d(p,\bar{q}') = d(p,q') + d(q',\bar{q}')$$

$\Rightarrow$ Die Kurve $\gamma|_{[0,t_0]} \cup \gamma_1|_{[t_0,t_0+r_1]}$ ist Kürzeste. Sie hat in q' keinen Knick.

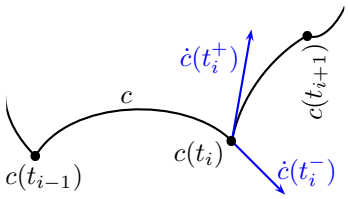
$\Rightarrow$ Es gilt also $t_0 + r_1 \in I$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t_0. Somit ist auch **(e)** bewiesen. □

6.3 Die zweite Variation der Energie



Zur Erinnerung. Ist c_s eine $\mathcal{C}^2$-Variation von $c : [a,b] \to M$ mit Variationsfeld ξ, dann besagt die *erste Variationformel* (Satz 2.6.1) Folgendes:

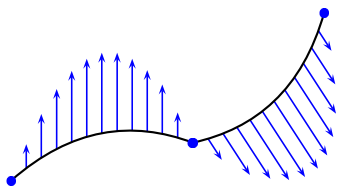
$$\tfrac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} = -\int_a^b \left\langle \xi, \tfrac{\nabla}{dt}\dot{c}\right\rangle dt + \langle \xi, \dot{c}\rangle\,|_a^b.$$



Ist c_s stetig und nur stückweise $\mathcal{C}^2$, das heißt, es existiert eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, so dass $(s,t) \mapsto c_s(t)$ stetig ist auf $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$ und $\mathcal{C}^2$ auf $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [t_{i-1},t_i]$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\sum_{i=1}^N E[c_s|_{[t_{i-1},t_i]}]|_{s=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right\rangle dt + \langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-)\rangle - \langle \xi(t_{i-1}), \dot{c}(t_i^+)\rangle \right) \\ &= -\int_a^b \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right\rangle dt + \langle \xi(b), \dot{c}(b^-)\rangle - \langle \xi(a), \dot{c}(a^+)\rangle + \sum_{i=1}^N \langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)\rangle \end{aligned}$$

Frage. Falls c eine stetige und nur stückweise $\mathcal{C}^2$-Kurve ist mit $\frac{d}{ds}E[c_s]|_{s=0} = 0$ für alle stetigen, stückweisen $\mathcal{C}^2$-Variationen c_s mit festen Endpunkten, muss dann c eine Geodätische (und somit insbesondere C^∞) sein**?**



Antwort. Ja. *Denn* betrachtet man zunächst nur solche Variationen mit $\xi(t_i) = 0$ für alle $i \in \{0,\ldots,N\}$, so folgt wie im Beweis von Korollar 2.6.4, dass $\frac{\nabla}{dt}\dot{c} \equiv 0$ auf jedem $[t_{i-1},t_i]$ für $i = 1,\ldots,N$.

$\Rightarrow$ Die Kurve c ist stückweise eine Geodätische.

Würde nun für ein $i \in \{1, \dots, N-1\}$ gelten, dass $\dot{c}(t_i^-) \neq \dot{c}(t_i^+)$, so kann man ein $\eta \in T_{c(t_i)}M$ wählen mit

$$\left\langle \eta, \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \right\rangle > 0.$$

Setze nun η vermöge der Parallelverschiebung längs c fort. Wähle eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t_i) = 1$ und $\varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{R} - (t_{i-1}, t_{i+1})$. Setze $\xi(t) := \varphi(t)\eta(t)$. Dann gilt $\xi(a) = \xi(b) = 0$ und somit

$$0 = \left\langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \right\rangle = \left\langle \eta, \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \right\rangle > 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Wir fassen zusammen:

SATZ 6.3.1. *Sei M eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : [a,b] \to M$ eine stetige, stückweise $\mathcal{C}^2$-Kurve. Dann gilt für jede stetige, stückweise $\mathcal{C}^2$-Variation c_s von c mit Variationsfeld ξ, dass*

$$\frac{d}{ds} E[c_s]\Big|_{s=0} = -\int_a^b \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt}\dot{c} \right\rangle dt + \langle \xi, \dot{c} \rangle \Big|_a^b + \sum_{i=1}^{N-1} \left\langle \xi(t_i), \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+) \right\rangle,$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ eine Unterteilung ist, für die sowohl c als auch c_s auf den Intervallen $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots N$, $\mathcal{C}^2$ ist.

Die Kurve c ist genau dann eine Geodätische, wenn für alle solchen Variationen mit festen Endpunkten gilt:

$$\frac{d}{ds} E[c_s]\Big|_{s=0} = 0.$$

Um die Minima der Energie zu untersuchen, müssen wir die zweite Ableitung der Energie betrachten.

SATZ 6.3.2 (Zweite Variation der Energie). *Sei M eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $c : [a,b] \to M$ eine Geodätische. Sei c_s eine $\mathcal{C}^3$-Variation von c mit Variationsfeld ξ und festen Endpunkten. Dann gilt*

$$\frac{d^2}{ds^2} E[c_s]\Big|_{s=0} = \int_a^b \left(\left\langle \frac{\nabla}{dt}\xi, \frac{\nabla}{dt}\xi \right\rangle - \langle R(\xi, \dot{c})\dot{c}, \xi \rangle \right) dt.$$

Beweis. Im Beweis von Satz 2.6.1 haben wir bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} E[c_s] &= \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial t} \right\rangle dt \\
\Rightarrow \quad \frac{d^2}{ds^2} E[c_s]\Big|_{s=0} &= \int_a^b \left(\left\langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c_s}{\partial s}\Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{dt}\xi, \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial t}\Big|_{s=0} \right\rangle \right) dt \\
&= \underbrace{\int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s}\Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle dt}_{} + \int_a^b \langle R(\xi, \dot{c})\xi, \dot{c} \rangle \, dt + \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{dt}\xi, \frac{\nabla}{dt}\xi \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s}\Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle - \left\langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s}\Big|_{s=0}, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}}_{=0} \right\rangle \right) dt \\
&= \left\langle \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c_s}{\partial s}\Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle \Big|_a^b = 0, \text{ da } c_s \text{ Variation mit festen Endpunkten ist.}
\end{aligned}$$

□

Definition. Sei M eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\{d(p,q) \mid p,q \in M\} \in (0,\infty]$$

der *Durchmesser* von M.

Beispiel. Sei $M = \mathrm{S}^n$ mit $g = g_{\text{std}}$. Dann ist $\operatorname{diam}(\mathrm{S}^n) = \pi$.

Bemerkung. Ist M vollständig, so gilt

$$\operatorname{diam}(M) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ ist kompakt.}$$

Denn: „$\Leftarrow$": M ist kompakt $\Rightarrow M \times M$ ist kompakt $\Rightarrow d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt Maximum an.

„$\Rightarrow$": Ist $\operatorname{diam}(M) =: R < \infty$, so gilt für beliebiges $p \in M$, dass $M = \bar{B}(p,R)$. Also ist M kompakt nach dem Satz von Hopf-Rinow. □

Satz 6.3.3 (Bonnet-Myers). *Sei M eine vollständige und zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Es gebe ein $\kappa > 0$, so dass* $\operatorname{ric} \geq \kappa(n-1)g$, *d.h. für alle $\xi \in TM$ gilt:* $\operatorname{ric}(\xi,\xi) \geq \kappa(n-1)g(\xi,\xi)$. *Dann ist M kompakt und es ist:*

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

Beispiel. **(1)** Sei $M = \mathcal{S}^n$ mit $g = \alpha^2 \cdot g_{\text{std}}$. Dann gilt

$$\operatorname{diam}(M) = \alpha\pi, \; K \equiv \frac{1}{\alpha^2}, \; \operatorname{ric} \equiv \frac{n-1}{\alpha^2}$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \text{ mit } \kappa = \frac{1}{\alpha^2} \text{ und } \operatorname{ric} = \kappa(n-1)g.$$

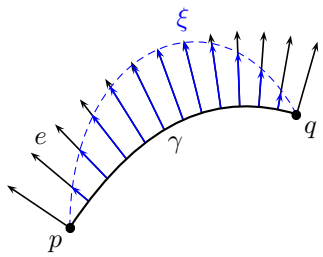
(2) Sei nun $M = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit $g = g_{\text{std}}$. Da $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ lokal isometrisch zur $\mathcal{S}^n$ ist, gilt wie für die Sphäre $\operatorname{ric} = (n-1)g$. Außerdem gilt $\operatorname{diam}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \frac{\pi}{2}$.

Hier gilt also $\operatorname{diam}(M) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, wobei $\kappa = 1$.

Beweis von Satz 6.3.3. Seien $p,q \in M$ mit $p \neq q$. Setze $\delta := d(p,q)$. Da M vollständig ist, folgt mit dem Satz von Hopf-Rinow, dass eine minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma : [0,\delta] \to M$ existiert mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(\delta) = q$.

Sei $e \in T_pM$ mit $e \perp \dot\gamma(0)$ und $\|e\| = 1$. Sei $e(t)$ das längs γ parallelverschobene Vektorfeld. Setze

$$\xi(t) := \sin\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) \cdot e(t).$$



Sei $\gamma_s(t)$ eine Variation von γ mit festen Endpunkten und Variationsfeld ξ, also zum Beispiel

$$\gamma_s(t) = \exp_{c(t)}(s \cdot \xi(t)).$$

Da γ eine minimale Geodätische ist, folgt

$$\begin{aligned}
0 \;=\; \frac{d}{ds}E[\gamma_s]|_{s=0} \quad \text{und} \quad 0 &\leq \frac{d^2}{ds^2}E[\gamma_s]|_{s=0} \\
&= \int_0^\delta \left(\left\| \frac{\nabla}{dt}\xi \right\|^2 - \langle R(\xi,\dot\gamma)\dot\gamma, \xi\rangle \right) dt \\
&= \int_0^\delta \left(\left\| \frac{\pi}{\delta}\cos\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) e(t) \right\|^2 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 \langle R(e,\dot\gamma)\dot\gamma, e\rangle \right) dt \\
&= \int_0^\delta \left(\frac{\pi^2}{\delta^2}\cos\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 \cdot 1 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 K(e,\dot\gamma) \right) dt
\end{aligned}$$

Ist $e_1, \ldots, e_{n-1}$ eine Orthonormalbasis von $\dot\gamma(0)^\perp$, so ergibt dies mit $e = e_i$ und Summation über i:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^\delta \left((n-1)\frac{\pi^2}{\delta^2}\cos\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 \underbrace{\mathrm{ric}(\dot\gamma,\dot\gamma)}_{\geq (n-1)\kappa\cdot 1} \right) dt \\
&\leq (n-1)\int_0^\delta \left(\frac{\pi^2}{\delta^2}\cos\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{\delta}t\right)^2 \cdot \kappa \right) dt \\
&= (n-1)\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \kappa\delta^2}{\delta} \\
\Rightarrow \quad 0 &\leq \pi^2 - \kappa\delta^2 \\
\Rightarrow \quad \delta &\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \\
\Rightarrow \quad \mathrm{diam}(M) &\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}
\end{aligned}$$

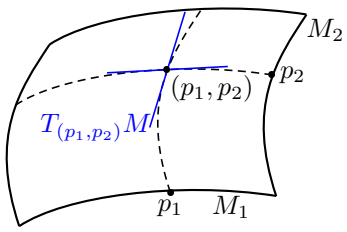
Mit der Vollständigkeit von M folgt dann auch die Kompaktheit. □

Wir haben hier aus einer lokalen Voraussetzung eine globale Schlussfolgerung hergeleitet.

Allgemein gilt Folgendes

$$K \geq \kappa \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa\cdot g \quad \Rightarrow \quad \mathrm{scal} \geq n(n-1)\kappa. \tag{1}$$

Daher gilt der Satz von Bonnet-Myers insbesondere auch für Mannigfaltigkeiten mit $K \geq \kappa > 0$. Genügt auch die Bedingung scal $\geq n(n-1)\kappa$?



Dazu wollen wir ein Gegenbeispiel konstruieren. Seien M_1 und M_2 riemannsche Mannigfaltigkeiten und trage $M := M_1 \times M_2$ die Produktmetrik

$$g_M(\underbrace{\xi_1 + \xi_2}_{\substack{\in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2 \\ = T_{(p_1,p_2)}M}}, \eta_1 + \eta_2) = g_{M_1}(\xi_1, \eta_1) + g_{M_2}(\xi_2, \eta_2).$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad R^M(\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) &= \left(\begin{array}{c|c} R^{M_1}(\xi_1, \eta_1) & 0 \\ \hline 0 & R^{M_2}(\xi_2, \eta_2) \end{array}\right) \\
\Rightarrow \quad \mathrm{ric}^M &= \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{ric}^{M_1} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{ric}^{M_2} \end{array}\right) \\
\Rightarrow \quad \mathrm{scal}^M &= \mathrm{scal}^{M_1} + \mathrm{scal}^{M_2}
\end{aligned}$$

Für $n \geq 3$ ergibt sich mit $M = \mathrm{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, dass

$$\mathrm{scal}^M = (n-1)(n-2) + 0 = (n-1)(n-2),$$

aber gleichzeitig ist $\mathrm{diam}(M) = \infty$. Also gilt der Satz von Bonnet-Myers nicht unter der schwächeren Bedingung $\mathrm{scal} \geq n(n-1)\kappa$ für $n \geq 3$.

Für $n = 2$ gilt jedoch $\mathrm{scal} = 2K$ und die drei Bedinungen in (1) sind äquivalent.

6.4 Verallgemeinerte Abstandsfunktionen

Definition. Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *verallgemeinerte Abstandsfunktion*, falls $\|\mathrm{grad} f\| \equiv 1$.

Dabei ist $\mathrm{grad}_p f$ der Tangentialvektor in T_pM, gegeben durch

$$\left\langle \mathrm{grad}_p f, \xi \right\rangle = \partial_\xi f \text{ für alle } \xi \in T_pM.$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM, so gilt

$$\mathrm{grad}_p f = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f \cdot e_i,$$

denn für alle ξ gilt $\langle \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f \cdot e_i, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f \, \langle e_i, \xi \rangle = \partial_{\sum_{i=1}^n \langle e_i, \xi \rangle e_i} f = \partial_\xi f$.

Definition. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, so heißt

$$\mathrm{Hess}_p f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Hess}_p f(\xi, \eta) := \langle \nabla_\xi \mathrm{grad} f, \eta \rangle,$$

die *Hessesche* von f im Punkt p.

Lemma 6.4.1. *Die Bilinearform* $\mathrm{Hess}_p f$ *ist symmetrisch.*

Beweis. Setze $\xi, \eta \in T_pM$ zu glatten Vektorfeldern in einer Umgebung von p fort. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess} f(\xi,\eta) &= \langle \nabla_\xi \mathrm{grad} f, \eta\rangle \\ &= \partial_\xi \langle \mathrm{grad} f, \eta\rangle - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_\xi \eta\rangle \\ &= \partial_\xi \partial_\eta f - \partial_{\nabla_\xi \eta} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{Hess} f(\xi,\eta) - \mathrm{Hess} f(\eta,\xi) &= \partial_\xi \partial_\eta f - \partial_{\nabla_\xi \eta} f - \partial_\eta \partial_\xi f + \partial_{\nabla_\eta \xi} f \\ &= \partial_\xi \partial_\eta f - \partial_\eta \partial_\xi f - \partial_{[\xi,\eta]} f \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

□

LEMMA 6.4.2. *Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion. Dann sind die Integralkurven von* $\mathrm{grad} f$ *nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.*

Beweis. Für alle $\xi \in T_pM$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\xi \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f\rangle \\ &= 2\langle \nabla_\xi \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f\rangle \\ &= 2\mathrm{Hess} f(\xi, \mathrm{grad} f) \\ &\overset{\text{L.6.4.1}}{=} 2\mathrm{Hess} f(\mathrm{grad} f, \xi) \\ &= 2\left\langle \nabla_{\mathrm{grad} f} \mathrm{grad} f, \xi\right\rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt also $\nabla_{\mathrm{grad} f} \mathrm{grad} f = 0$. Für eine Integralkurve c heißt das $\nabla_{\dot c} \dot c = 0$, also ist c Geodätische. Dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist wegen $\|\dot c\| = \|\mathrm{grad} f\| = 1$ klar. □

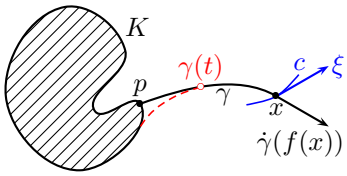
LEMMA 6.4.3. *Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\mathcal{K} \subset M$ kompakt. Dann ist die Funktion*

$$f(x) := d(\mathcal{K}, x) := \inf_{p \in \mathcal{K}} d(p, x)$$

dort auf $M - \mathcal{K}$, wo sie glatt ist, eine verallgemeinerte Abstandsfunktion.

Beweis. Da $\mathcal{K}$ kompakt ist, nimmt für jedes $x \in M$ die Funktion $\mathcal{K} \to \mathbb{R}, p \mapsto d(p,x)$, ihr Minimum an. Wir können also schreiben

$$f(x) = \min_{p \in \mathcal{K}} d(p, x).$$



Sei nun $x \in M - \mathcal{K}$, wobei außerdem f differenzierbar sei in x. Sei $p \in \mathcal{K}$ mit $f(x) = d(p,x)$.

Da M vollständig ist, existiert eine minimale, o. E. nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma : [0, f(x)] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(f(x)) = x$.

Zwischenbehauptung: Für alle $t \in [0, f(x)]$ ist $f(\gamma(t)) = t$.

Beweis. Es gilt $f(\gamma(t)) = d(\mathcal{K}, \gamma(t)) \le d(p, \gamma) \le L[\gamma|_{[0,t]}] = t$.

Würde für ein $t \in (0, f(x))$ gelten, dass $f(\gamma(t)) < t$, so wäre

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad d(\mathcal{K}, x) &\le d(\mathcal{K}, \gamma(t)) + d(\gamma(t), x) \\ &< t + L[\gamma|_{[t, f(x)]}] \\ &= t + f(x) - t \quad = \quad f(x) \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, also gilt $f(\gamma(t)) = t$. Somit ist die Zwischenbehauptung bewiesen. ✓

Daraus folgt dann unmittelbar, dass

$$\partial_{\dot\gamma(f(x))} f = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=f(x)} = \frac{d}{dt} t|_{t=f(x)} = 1.$$

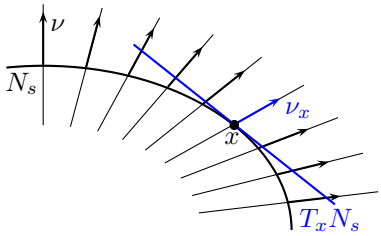
Also gilt auf jeden Fall $\|\mathrm{grad}_x f\| \geq 1$.

Sei nun $\xi \in T_xM$ mit $\|\xi\| = 1$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\dot c(0) = \xi$. Es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & f(c(s)) & = & d(\mathcal{K}, c(s)) \\ & & \leq & d(\mathcal{K}, x) + d(x, c(s)) \\ & & \leq & f(x) + L[c|_{[0,s]}] \\ & & = & f(x) + s \\ \Rightarrow & 1 & \geq & \dfrac{f(c(s)) - f(x)}{s} \quad \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \quad \dfrac{d}{ds} f(c(s))|_{s=0} \\ & & = & \partial_\xi f \quad = \quad \langle \mathrm{grad} f, \xi \rangle \end{array}$$

Daraus folgt also $\|\mathrm{grad} f\| \leq 1$ und insgesamt ergibt sich dann $\|\mathrm{grad} f\| = 1$ dort, wo f differenzierbar ist. Also ist f dort eine verallgemeinerte Abstandsfunktion. □

Die Niveaumengen $N_s := \{x \in M \,|\, f(x) = s\}$, $s \in \mathbb{R}$ einer verallgemeinerten Abstansfunktion f sind glatte Hyperflächen, da wegen $\mathrm{grad} f \neq 0$ jeder Wert $s \in \mathbb{R}$ regulär ist. Ferner ist $\nu_x := \mathrm{grad}_x f$ ein Einheitsnormalenvektor auf $N_{f(x)}$ im Punkt x. Die Weingarten-Abbildung lautet dann



$$S_x : T_xN_s \to T_xN_s, \quad S_x(\xi) = -\nabla_\xi \nu = -\nabla_\xi \mathrm{grad} f.$$

Die Eigenwerte $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ von S_x heißen die Hauptkrümmungen von N_s in M im Punkt x. Man erhält für die zweite Fundamentalform

$$\begin{array}{rcl} II_x : T_xN_s \times T_xN_s \to N(N_s), \quad II_x(\xi, \eta) & = & \langle S_x(\xi), \eta \rangle \, \nu_x \\ & = & \langle -\nabla_\xi \nu, \eta \rangle \, \nu_x \\ & = & -\langle \nabla_\xi \mathrm{grad} f, \eta \rangle \, \nu_x \\ & = & -\mathrm{Hess}_x f(\xi, \eta) \cdot \nu_x \end{array}$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix liefern uns also die Hauptkrümmungen.

SATZ 6.4.4 (Riccati-Gleichung). *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion, seien $N_s = f^{-1}(s)$, sei S die zugehörige Weingarten-Abbildung bezüglich $\nu = \mathrm{grad} f$. Dann gilt*

$$\nabla_\nu S = R_\nu + S^2,$$

wobei $R_\nu : TN_s \to TN_s$ gegeben ist durch $R_\nu(\xi) = R(\xi, \nu)\nu$.

Beweis. Wir setzen $\xi \in T_xN_s$ in eine Umgebung von x zu einem glatten Schnitt ξ in $TN_s \subset TM$ fort, dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} (\nabla_\nu S)(\xi) & = & \nabla_\nu(S(\xi)) - S(\nabla_\nu \xi) \quad = \quad -\nabla_\nu \nabla_\xi \nu + \nabla_{\nabla_\nu \xi} \nu \\ & = & -(\nabla_\xi \underbrace{\nabla_\nu \nu}_{\substack{=0 \\ \text{(Lemma 6.4.2)}}} + R(\nu, \xi)\nu + \nabla_{\underbrace{[\nu, \xi]}_{=\nabla_\nu \xi - \nabla_\xi \nu}} \nu) + \nabla_{\nabla_\nu \xi} \nu \\ & = & R(\xi, \nu)\nu + \nabla_{\nabla_\xi \nu} \nu \quad = \quad R_\nu(\xi) - \nabla_{S(\xi)} \nu \quad = \quad R_\nu(\xi) + S(S(\xi)) \end{array}$$

□

LEMMA 6.4.5. *Ist V ein m-dimensionaler euklidischer Vektorraum und ist $S : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus, so gilt*

$$m \cdot \mathrm{Spur}(S^2) \geq \mathrm{Spur}(S)^2$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $S = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Beweis. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das induzierte Skalarprodukt auf $\mathrm{End}(V)$, das heißt für eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von V ist

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle Ae_i, Be_i \rangle_V .$$

Dann ist $\mathrm{Spur}(S) = \langle S, \mathrm{id}_V \rangle$ und daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(S)^2 &= \langle S, \mathrm{id}_V \rangle^2 \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \langle S, S \rangle \cdot \langle \mathrm{id}_V, \mathrm{id}_V \rangle \\
&= \left\langle S^2, \mathrm{id}_V \right\rangle \cdot m \\
&= m \cdot \mathrm{Spur}(S^2)
\end{aligned}$$

Und Gleichheit gilt genau dann, wenn S und id_V linear abhängig sind. □

KOROLLAR 6.4.6 (Riccati-Ungleichung für die mittlere Krümmung). *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 29.4. Sei $H = \frac{1}{n-1}\mathrm{Spur}(S)$ die mittlere Krümmung von N_s. Dann gilt*

$$\partial_\nu H \geq \tfrac{1}{n-1}\mathrm{ric}(\nu, \nu) + H^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $S = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_\nu H &= \tfrac{1}{n-1}\partial_\nu \mathrm{Spur}(S) \\
&= \tfrac{1}{n-1}\mathrm{Spur}(\nabla_\nu S) \\
&= \tfrac{1}{n-1}\mathrm{Spur}(R_\nu + S^2) \\
&\geq \tfrac{1}{n-1}(\mathrm{ric}(\nu, \nu) + \tfrac{1}{n-1}\mathrm{Spur}(S)^2) \\
&= \tfrac{1}{n-1}\mathrm{ric}(\nu, \nu) + H^2
\end{aligned}$$

□

Beispiel. M habe konstante Schnittkrümmung $K \equiv \kappa$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
R(\xi, \eta)\zeta &= \kappa\{\langle \eta, \zeta \rangle \xi - \langle \xi, \zeta \rangle \eta\} \\
\Rightarrow \quad R_\nu(\xi) &= \kappa\{\underbrace{\langle \nu, \nu \rangle}_{=1} \xi - \underbrace{\langle \xi, \nu \rangle}_{=0} \nu\} \\
&= \kappa \cdot \xi \\
\Rightarrow \quad R_\nu &= \kappa \cdot \mathrm{id}_{TN_s} \\
\Rightarrow \quad \nabla_\nu S &= \kappa \cdot \mathrm{id}_{TN_s} + S^2
\end{aligned}$$

Wir suchen also Lösungen der Differentialgleichung

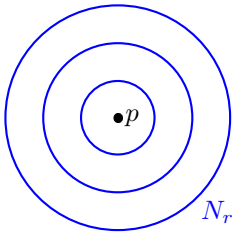
$$u' = \kappa + u^2. \tag{2}$$

Fall 1: $\kappa = 0$. Die Gleichung (2) lautet also $u' = u^2$. Die Lösungen sind

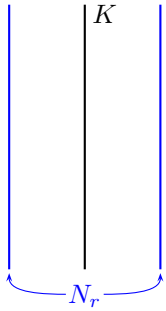
$$u(r) = -\frac{1}{r+C}, \text{ wobei } C \in \mathbb{R}, \text{ sowie } u(r) \equiv 0.$$

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^n$ der euklidische Raum.

- Sei $p \in M$. Setze $f(x) := d(p,x)$. Dann sind die Niveaumengen $N_r = S(p,r)$ die Sphären vom Radius r und für die Weingarten-Abbildung bzw. die mittlere Krümmung gilt dann
$$S = -\frac{1}{r} \cdot \mathrm{id}, H = -\frac{1}{r}.$$



- Sei nun $K = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (das geht auch, obwohl K nicht kompakt ist). Dann ist $f(x) = d(K,x) = x^1$, wenn man schreibt: $x = (x^1, \ldots, x^n)$. In diesem Fall sind die Niveaumengen ein Paar von affinen Unterräumen der Dimension $n-1$, genauer gesagt also
$$N_r = \{-r, r\} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$
Für die Weingarten-Abbildung gilt $S \equiv 0$ und somit ist auch die mittlere Krümmung Null.



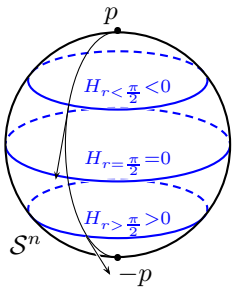
Fall 2: $\kappa = 1$. Die Gleichung (2) lautet also $u' = 1 + u^2$. Die Lösungen sind

$$u(r) = -\cot(r+C) = \tan(r + C + \tfrac{\pi}{2}),\ 0 \le C < \pi.$$

Beispiel. Sei $M = \mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums. Setze $f(x) := d(p,x)$ bezüglich der Standardmetrik. Die Niveaumengen sind dann Sphären der Dimension $n-1$. Dann gilt

$$S = -\cot(r)\mathrm{id} \quad \Rightarrow \quad H = -\cot(r).$$

Bei $r = 0$ hat die mittlere Krümmung (bzgl. S^n!) also einen Pol (gegen $-\infty$, $N_0 = p$), bei $r = \frac{\pi}{2}$ ist sie Null (dort ist N_r eine totalgeodätische Hypersphäre) und für $r \to \pi$ hat sie einen weiteren Pol (gegen $+\infty$, $N_\pi = -p$).



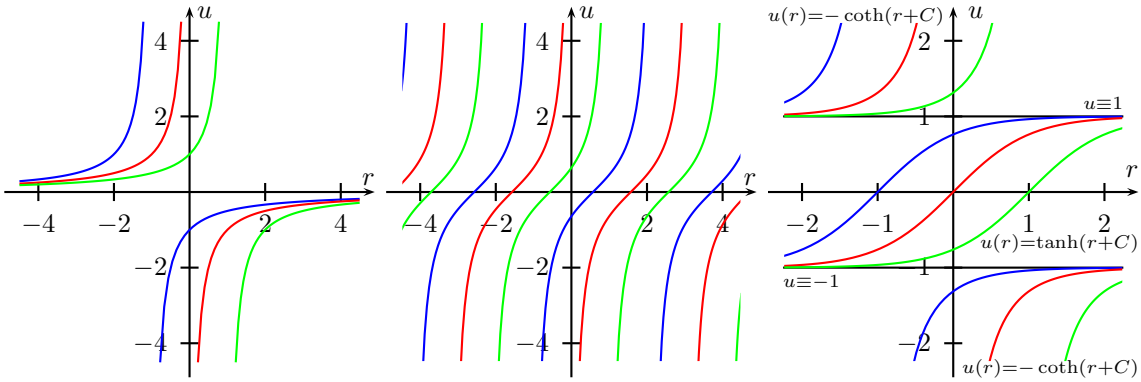
Fall 3: $\kappa = -1$. Die Gleichung (2) lautet also $u' = -1 + u^2$. Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} u(r) &= -\coth(r+C),\ C \in \mathbb{R}, \\ u(r) &= \tanh(r+C),\ C \in \mathbb{R} \text{ sowie} \\ u(r) &\equiv \pm 1. \end{aligned}$$

Beispiel. Sei nun $M = \mathrm{H}^n$ der hyperbolische Raum. Sei $p \in M$. Wieder setzen wir $f(x) := d(p,x)$. Dann sind die Niveaumengen $N_r = S(p,r)$ und für die Weingarten-Abbildung gilt

$$S = -\coth(r)\mathrm{id} \quad \Rightarrow \quad H = -\coth(r).$$

Das bedeutet, dass für $r = 0$ ein Pol (gegen $-\infty$) vorliegt und die mittlere Krümmung der Niveaumengen (bzgl. M) stets negativ ist und für $r \to \infty$ gegen -1 geht (und nicht gegen Null).



Fall 1 ($C = 1, C = 0, C = -1$) *Fall 2* ($C = 1, C = 0, C = -1$) *Fall 3* ($C = 1, C = 0, C = -1$)

Analog wie in Abschnitt 4.5 (und unter Verwendung der Notationen von dort) definieren wir die *verallgemeinerte Kotangensfunktion* durch

$$\mathfrak{ct}_\kappa := \frac{\mathfrak{c}_\kappa}{\mathfrak{s}_\kappa}.$$

Dann löst $-\mathfrak{ct}_\kappa$ die Riccati-Gleichung $u' = \kappa + u^2$ (2) mit einem Pol in $r = 0$.

Für $f(x) = d(p, x)$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$ sind die Niveaumengen $N_r = S(p, r)$ mit der Weingarten-Abbildung $S = -\mathfrak{ct}_\kappa(r)\mathrm{id}$ und der mittleren Krümmung $H = -\mathfrak{ct}_\kappa(r)$.

PROPOSITION 6.4.7 (Riccati-Vergleichssatz). *Sei $\kappa \in \mathbb{R}$, seien $f, F : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$-Funktionen mit*

$$F' \geq \kappa + F^2 \text{ und } f' \leq \kappa + f^2.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dr}\left((F(r) - f(r))e^{-\int_{r_0}^r (F(\varrho)+f(\varrho))\,d\varrho}\right) \geq 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}((F-f)e^{-\int(F+f)})' &= (F'-f')e^{-\int(F+f)} - (F-f)e^{-\int(F+f)}(F+f)\\ &= e^{-\int(F+f)}(F'-f'-F^2+f^2)\\ &\geq e^{-\int(F+f)}(\kappa+F^2-\kappa-f^2-F^2+f^2) \quad = \quad 0\end{aligned}$$

□

KOROLLAR 6.4.8. *Die Voraussetzungen seien wie in Proposition 6.4.7.*

(a) *Gilt zusätzlich für ein $r_1 \in I$: $f(r_1) \leq F(r_1)$, so ist $f(r) \leq F(r)$ für alle $r \geq r_1$,*

(b) *Gilt zusätzlich für ein $r_1 \in I$: $f(r_1) \geq F(r_1)$, so ist $f(r) \geq F(r)$ für alle $r \leq r_1$.*

Beweis.

(a) Nach der Voraussetzung gilt also $(F - f)e^{-\int(F+f)} \geq 0$ in $r = r_1$.

$\Rightarrow$ Die Funktion $(F-f)e^{-\int(F+f)}$ ist nach Proposition 29.7 monoton wachsend.

$\Rightarrow$ $(F-f)\underbrace{e^{-\int(F+f)}}_{>0} \geq 0$ für alle $r \geq r_1$.

$\Rightarrow$ $F(r) - f(r) \geq 0$ für alle $r \geq r_1$.

(b) beweist man analog. □

KOROLLAR 6.4.9. *Die Voraussetzungen seien wieder wie in Proposition 6.4.7. Schreibe $I = (0, b)$.*

(a) *Gilt zusätzlich $\lim_{r\to 0} f(r) = -\infty$, so ist $f(r) \leq -\mathfrak{ct}_\kappa(r)$ für alle $r \in (0, b^*)$, wobei $b^* := \min(\{b\} \cup \{$ positive Pole von $\mathfrak{ct}_\kappa\})$,*

(b) *Gilt zusätzlich $\lim_{r\to 0} F(r) = -\infty$, so ist $F(r) \leq -\mathfrak{ct}_\kappa(r)$ für alle $r \in I$.*

Beweis.

(a) Es ist $\mathfrak{ct}_\kappa$ definiert auf $(0, b^*)$ und glatt und es gilt

$$-\mathfrak{ct}_\kappa{}' = \kappa + \mathfrak{ct}_\kappa{}^2.$$

Angenommen es existiert ein $r_1 \in (0, b^*)$ mit $f(r_1) > -\mathfrak{ct}_\kappa(r_1)$. Dann existiert auch ein ε, so dass $f(r_1) > -\mathfrak{ct}_\kappa(r_1 + \varepsilon)$. Setze $\tilde{F}(r) := -\mathfrak{ct}_\kappa(r + \varepsilon)$. Es gilt dann: $f(r_1) \geq \tilde{F}(r_1)$.

Korollar 6.4.8(b) liefert: $f(r) \geq \tilde{F}(r)$ für alle $r \leq r_1$. Beim Grenzübergang $r \to 0$ gilt:

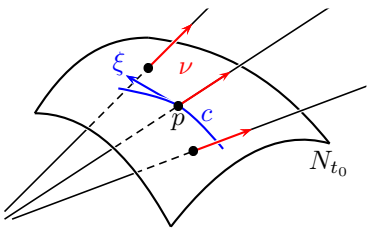
$$-\infty = \lim_{r\to 0} f(r) \geq \lim_{r\to 0} \tilde{F}(r) = -\mathfrak{ct}_\kappa(\varepsilon) > -\infty\,.$$

Die Annahme war also falsch und die Behauptung ist bewiesen.

(b) zeigt man mit ähnlichen Abschätzungen. □

Wir untersuchen nun die Beziehung zwischen der Riccati- und der Jacobifeld-Gleichung:

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion und sei $p \in N_{t_0} = f^{-1}(t_0)$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_{t_0}$ glatt mit $c(0) = p$. Wir setzen $\xi := \dot{c}(0) \in T_pN_{t_0}$ und $\nu := \operatorname{grad} f$.



Definieren wir $\gamma_s(t) := \exp_{c(s)}(t \cdot \nu(c(s)))$, so liefert dies für jedes s eine Geodätische $t \mapsto \gamma_s(t)$ und es gilt

$$\gamma_s(0) = c(s) \text{ und } \dot{\gamma}_s(0) = \nu(c(s)).$$

Folglich ist die Kurve γ_s eine Integralkurve zu $\operatorname{grad} f$.

Dann erklärt $J(t) := \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)|_{s=0}$ ein Jacobi-Feld längs γ_0 und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}J(t_0) &= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)|_{\substack{t=t_0\\ s=0}} \\
&= \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\gamma_s(t)|_{\substack{t=t_0\\ s=0}} \\
&= \frac{\nabla}{ds}\nu(c(s))|_{s=0} \\
&= \nabla_{\dot c}\nu|_{s=0} \quad = \quad \nabla_{\dot c(0)}\nu \\
&= -S(\xi) \quad = \quad -S(J(t_0))
\end{aligned}$$

Das liefert einen neuen Beweis der Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned}
-R_\nu(J) &= \frac{\nabla^2 J}{dt^2} \quad = \quad -\frac{\nabla}{dt}(S(J)) \\
&= -\left(\frac{\nabla}{dt}S\right)(J) + S(S(J)) \\
\Rightarrow \quad -R_\nu(J) &= -(\nabla_\nu S)(J) + S^2(J) \\
\Rightarrow \quad (\nabla_\nu S)(J) &= R_\nu(J) + S^2(J) \\
\Rightarrow \quad \nabla_\nu S &= R_\nu + S^2,
\end{aligned}$$

da man das Jacobi-Feld im Punkt p beliebig vorgeben kann.

Wir betrachten nun speziell $f(x) = d(p,x)$, wobei $p \in M$. Sei $\gamma : [0,\infty) \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Zu $\xi \in T_{\gamma(t_0)}N_{t_0}$, $t_0 > 0$, sei J das oben konstruierte Jacobi-Feld, das heißt, es gilt

$$J(0) = 0 \text{ und } J(t_0) = \xi.$$

Ein solches Jacobi-Feld existiert für alle $\xi \in T_{\gamma(t_0)}N_{t_0}$ genau dann, wenn t_0 ein nicht zu 0 konjugierter Punkt längs γ ist (Proposition 3.4.6).

Fazit. Ist $\gamma : [0,\infty) \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische und ist in $(0,b)$ kein zu Null konjugierter Punkt längs γ enthalten, so besitzt die Riccati-Gleichung eine Lösung S_t auf $(0,b)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für $\xi \in \dot\gamma_0(t_0)^\perp$ ist $S_{t_0}(\xi) = -\frac{\nabla}{dt}J(t_0)$, wobei J das Jacobi-Feld ist mit $J(0) = 0$ und $J(t_0) = \xi$.

(ii) Ist $f(x) = d(x,p)$ mit $p = \gamma(0)$ glatt in $x = \gamma(t)$, dann ist S_t die Weingarten-Abbildung der Abstandssphäre $S(p,t)$ bezüglich der Normalen $\dot\gamma(t)$.

Die Lösung S_t kann durchaus in Punkten t existieren, in denen die Abstandsfunktion f nicht glatt ist, und in denen S_t daher nicht als Weingarten-Abbildung von $\mathcal{S}(p,t)$ interpretiert werden kann.

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^2$ der zweidimensionale euklidische Raum und sei $f(x) = d(0,x) = \|x\|$. Dann ist f glatt auf $M - \{0\}$. Wähle eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma : [0,\infty) \to M$ mit $\gamma(0) = 0$. Dann ist die Lösung der Riccati-Gleichung die Weingarten-Abbildung der Abstandssphäre $S(0,t)$:

$$S_t = -\frac{1}{t}\mathrm{id}_{\dot\gamma(t)^\perp}\,.$$

Ferner ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi : M &\to \hat M := \{(y^1,y^2,y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 + (y^2)^2 = 1\} \\
\Phi(x^1,x^2) &= (\cos(x^1), \sin(x^1), x^2)
\end{aligned}$$

eine lokale Isometrie. Deshalb ist $\hat{\gamma} := \Phi \circ \gamma$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische in $\hat{M}$ und

$$\hat{S}_t := d\Phi \circ S_t = d\Phi^{-1}$$

löst die Riccati-Gleichung in $\hat{M}$, aber $\hat{S}$ ist nicht mehr die Weingarten-Abbildung der Abstandssphären von $\hat{p} = (1,0,0)$ in $\hat{M}$.

PROPOSITION 6.4.10. *Sei M eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [0,b) \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Das Intervall $(0,b)$ enthalte keine zu 0 längs γ konjugierten Punkte. Setze $\gamma(0) =: p$. Es seien $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}(t)$ die Hauptkrümmungen von $S(p,t)$. Falls $f(x) = d(p,x)$ glatt ist in $\gamma(t)$, $t \in (0,b)$, so gilt*

$$\lambda_i(t) \geq -\mathfrak{ct}_\kappa(t) \textit{ für } i = 1, \ldots, n-1$$

Beweis. Sei ξ ein paralleles Einheitsfeld längs γ mit $\xi(0) \perp \dot{\gamma}(0)$. Wir setzen:

$$F(t) := \langle S_t(\xi(t)), \xi(t) \rangle ,$$

wobei S_t die Weingarten-Abbildung der Abstandssphäre $S(p,t)$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{d}{dt} \langle S_t(\xi(t)), \xi(t) \rangle = \left\langle \left(\frac{\nabla}{dt} S_t \right)(\xi(t)), \xi(t) \right\rangle \\
&= \left\langle (R_{\dot{\gamma}(t)} + S_t^2)(\xi(t)), \xi(t) \right\rangle \\
&= \underbrace{\left\langle R_{\dot{\gamma}(t)}(\xi(t)), \xi(t) \right\rangle}_{= \langle R(\xi(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), \xi(t) \rangle} + \langle S_t(\xi(t)), S_t(\xi(t)) \rangle \\
\overset{\langle \dot{\gamma}, \xi \rangle = 0}{\underset{\|\dot{\gamma}\| = \|\xi\| = 1}{=}} & K(\dot{\gamma}(t), \xi(t)) + \|S_t(\xi(t))\|^2 \geq \kappa + \|S_t(\xi(t))\|^2 \\
\text{Außerdem gilt} \quad F^2 &= \langle S_\cdot(\xi), \xi \rangle^2 \overset{CSU}{\leq} \|S_\cdot(\xi)\|^2 \cdot \underbrace{\|\xi\|^2}_{=1} \\
\Rightarrow \quad F'(t) &\geq \kappa + F(t)^2 .
\end{aligned}$$

Falls $\lim\limits_{t \to 0} F(t) = -\infty$, so folgt aus dem Korollar 6.4.9(b), dass $F(t) \geq -\mathfrak{ct}_\kappa(t)$, solange S und F definiert sind, und somit ist

$$\lambda_i(t) \geq \lambda_1(t) = \inf_{\substack{\xi \in \dot{\gamma}(t)^\perp \\ \|\xi\| = 1}} \underbrace{\langle S_t(\xi), \xi \rangle}_{= F(t)} \geq -\mathfrak{ct}_\kappa(t) .$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass $\lim\limits_{t \to 0} F(t) = -\infty$. Dazu zeigen wir

$$\lim_{t \searrow 0} (t \cdot S_t) = -\mathrm{id}_{\dot{\gamma}(0)^\perp} .$$

Beweis. Nach Proposition 3.4.3 gilt für jedes Jacobi-Feld J längs γ mit $J(0) = 0$, dass

$$\begin{aligned}
d\exp_p|_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}J(0)\right) &= \frac{J(t)}{t} \\
\Rightarrow \quad \frac{\nabla}{dt}J(t) &= \frac{\nabla}{dt}\left((t\cdot d\exp_p|_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}J(0)\right)\right) = d\exp_p|_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}J(0))\right) + O(t) \\
\text{Andererseits ist} \quad \frac{\nabla}{dt}J(t) &= -S_t(J(t)) \\
&= -S_t\left(t\cdot d\exp_p|_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}J(0)\right)\right) = -tS_t\left(d\exp_p|_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}J(0)\right)\right) \\
\text{Wegen} \quad \lim_{t\searrow 0} d\exp_p|_{\gamma(t)} &= \mathrm{id}_{T_pM} \text{ folgt:} \\
\frac{\nabla}{dt}J(0) &= -\lim_{t\searrow 0}\left(t\cdot S_t\left(\frac{\nabla}{dt}J(0)\right)\right)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich: $\mathrm{id}_{\dot\gamma(0)^\perp} = -\lim_{t\searrow 0}(t\cdot S_t)$. □

Bemerkung. Die asymptotische Beziehung

$$S_t \overset{t\searrow 0}{\sim} -\frac{1}{t}\mathrm{id}_{\dot\gamma(0)^\perp}$$

bedeutet, dass die Abstandssphären nahe ihres Ursprungspunktes näherungsweise dieselbe Geometrie haben wie die Abstandssphären des euklidischen Raumes.

Bemerkung. Ist J ein nicht triviales Jacobi-Feld längs einer Geodätischen $\gamma : [0,b] \to M$ mit $J(0) = 0$ und $J(b) = 0$, so gilt

$$\begin{array}{ccc}
S(J(t)) & = & -\frac{\nabla}{dt}J(t) \\
{\scriptstyle t\nearrow b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t\nearrow b} \\
S(J(b)) & & -\frac{\nabla}{dt}J(b) \neq 0, \text{ sonst } J \equiv 0
\end{array}$$

Also hat S genau dann einen Pol in b, wenn b zu 0 längs γ konjugiert ist.

KOROLLAR 6.4.11. *Ist M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \geq \kappa > 0$, so tritt längs jeder nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $\gamma : [0,l] \to M$ ein zu 0 konjugierter Punkt auf, falls*

$$l \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Beweis. Es gilt $-\mathfrak{ct}_\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}t)}{\sin(\sqrt{\kappa}t)} \nearrow \infty$, falls $t \nearrow \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.
Mit $\langle S_t(\xi(t)), \xi(t)\rangle \geq -\mathfrak{ct}_\kappa(t)$ und der letzten Bemerkung folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung. Das letzte Korollar gilt auch für $\mathrm{ric} \geq \kappa(n-1)g$.

Wir betrachten nun den Fall einer oberen Schnittkrümmungsschranke. Ist M eine zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion, dann sind die N_{t_0} eindimensionale Untermannigfaltigkeiten. Sei $\nu = \mathrm{grad} f$. Dann ist die

Weingarten-Abbildung S eine lineare Abbildung auf einem eindimensionale Vektorraum und lässt sich also schreiben als

$$S = \kappa_g \cdot \mathrm{id}.$$

Dabei heißt κ_g die *geodätische Krümmung* von N_{t_0}. Die Riccati-Gleichung besagt nun, dass

$$\frac{d}{dt}\kappa_g \quad = \quad \underbrace{K}_{\text{Gauß-Krümmung}} + {\kappa_g}^2$$

Gilt $K < \delta \in \mathbb{R}$ und ist f die riemannsche Abstandsfunktion zum Punkt p, so setze für eine Geodätische $\gamma : [0, b] \to M$ mit $\gamma(0) = p$:

$$h(t) := \kappa_g(\gamma(t)) \quad \Rightarrow \quad h(t) \overset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t}.$$

Es gilt also $h'(t) \leq \delta + h(t)^2$. Daraus folgt dann mit Korollar 29.9(a), dass

$$h(t) = \kappa_g(\gamma(t)) \leq -\mathfrak{ct}_\delta(t).$$

Definition. Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve und $\nu : I \to M$ ein glattes Vektorfeld längs c mit $\|\nu\| \equiv 1$ und $\nu \perp \dot\gamma$ überall. Dann heißt eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit der Form

$$F := \{\exp_{c(t)}(s \cdot \nu(t)) \,|\, t \in I, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

eine *Regelfläche* in M.

LEMMA 6.4.12. *Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit M, eine Regelfläche $F \subset M$ und $p \in F$ gilt:*

$$K^F(p) \leq K^M(T_pF).$$

Beweis. Die Geodätischen $s \mapsto \exp_{c(t)}(s \cdot \nu(t))$ in M sind auch Geodätische in F. Sie definieren geodätische Variationen sowohl in M als auch in F. Dann ist

$$J(s) := \frac{\partial}{\partial t} \exp_{c(t)}(s \cdot \nu(t))$$

ein Jacobi-Feld in M sowie auch in F. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\langle J, J\rangle &= \frac{d}{ds}\left\langle \frac{\nabla}{ds}J, J\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\nabla^M}{ds}\right)^2 J, J\right\rangle + \left\|\frac{\nabla^M}{ds}J\right\|^2 \\
&= \left\langle -R^M(J,\nu)\nu, J\right\rangle + \left\|\frac{\nabla^M}{ds}J\right\|^2 \\
&= -K^M(T_pF)\{\|J\|^2\|\nu\|^2 - \langle J,\nu\rangle^2\} + \left\|\frac{\nabla^M}{ds}J\right\|^2
\end{aligned}$$

Ganz analog erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\langle J, J\rangle = -K^F(p)\{\|J\|^2\|\nu\|^2 - \langle J,\nu\rangle^2\} + \left\|\frac{\nabla^F}{ds}J\right\|^2.$$

Es ist $\frac{\nabla^F}{ds}J$ die orthogonale Projektion von $\frac{\nabla^M}{ds}J$ auf T_pF.

$$\Rightarrow \quad \left\|\tfrac{\nabla^F}{ds}J\right\|^2 \leq \left\|\tfrac{\nabla^M}{ds}J\right\|^2.$$

$$\Rightarrow \quad (K^M(T_pM) - K^F(p))\underbrace{\{\|J\|^2\,\|\nu\|^2 - \langle J,\nu\rangle^2\}}_{>0} = \left\|\tfrac{\nabla^M}{ds}J\right\|^2 - \left\|\tfrac{\nabla^F}{ds}J\right\|^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \quad K^F(p) \leq K^M(T_pF).$$

□

LEMMA 6.4.13. *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \leq \delta \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [0,l] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische und setze $\gamma(0) =: p$. Sei außerdem $l < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Dann gilt für die Hauptkrümmungen $\lambda_i(r)$ der Abstandssphären $\mathcal{S}(p,r)$, dass*

$$\lambda_i(r) \leq -\mathfrak{ct}_\delta(r) \ (= \textit{Hauptkrümmung der Abstandssphären } \mathcal{S}(p,r) \textit{ in } \mathbb{M}^n_\delta).$$

Insbesondere gibt es keine zu 0 längs γ konjugierte Punkte in $(0,l)$, das heißt der erste konjugierte Punkt tritt frühestens bei $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ auf.

Konvention. Falls $\delta \leq 0$, so definiert man $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} := \infty$.

KOROLLAR 6.4.14. *Auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit M mit Schnittkrümmung $K \leq 0$ gibt es keine konjugierten Punkte.*

Beweis von Lemma 6.4.13. Sei $X \in T_{\gamma(r)}M$ mit $X \perp \dot\gamma(r)$ ein Eigenvektor von S_r, der Weingarten-Abbildung von $\mathcal{S}(p,r)$, das heißt, es gilt

$$S_r(X) = \lambda_i(r)\cdot X.$$

Wähle eine Kurve $c : I \to M$ in $\mathcal{S}(p,r)$ mit $\dot c(0) = X$. Sei F die von $\nu = \operatorname{grad} f$ längs der Kurve c erzeugte Regelfläche.

Für die geodätische Krümmung der Parallelkurven von c gilt dann

$$\begin{aligned} \kappa_g' &\leq \underbrace{K^F}_{K^F \leq K^M \leq \delta} + {\kappa_g}^2 \\ \Rightarrow \quad \kappa_g' &\leq \delta + {\kappa_g}^2 \text{ und} \\ \kappa_g(t) &\overset{t\searrow 0}{\sim} -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

Mit Korollar 6.4.9(a) folgt dann:$\kappa_g \leq -\mathfrak{ct}_\delta$. Außerdem erhalten wir:

$$\begin{aligned} \kappa_g(r)\cdot X &= S^F(X) = -\nabla^F_X\nu = \tan(-\nabla^M_X\nu) \\ &= \tan(S^M(X)) = \tan(\lambda_i(r)\cdot X) = \lambda_i(r)\cdot X \end{aligned}$$

da $X \in \dot\gamma(r)^\perp$. Und damit folgt: $\lambda_i(r) = \kappa_g(r) \leq -\mathfrak{ct}_\delta(r)$. □

Bemerkung. Sei $\gamma : I \to M$ eine Geodätische. Dann ist

$$J_{a,b}(t) := (a+tb)\cdot\dot\gamma(t)$$

ein Vektorfeld längs γ und es gilt $\frac{\nabla^2}{dt^2}J_{a,b} = 0$. Andererseits erhält man

$$R_{\dot\gamma}(J_{a,b}) = R((a+tb)\dot\gamma,\dot\gamma)\dot\gamma = 0.$$

Daraus folgt, dass $J_{a,b}$ eine Jacobi-Feld ist (allerdings ein „uninteressantes“).

Sei nun J ein beliebiges Jacobi-Feld längs γ. Setze $u(t) := \langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle$, dann gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) \;=\; \left\langle \frac{\nabla^2}{dt^2}J(t), \dot\gamma(t)\right\rangle \;=\; -\langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma\rangle \;=\; 0.$$

$\Rightarrow$ $u(t) = a + bt$.

$\Rightarrow$ Es gibt ein Vektorfeld J_1 längs γ, so dass $J = J_1 + J_{a,b}$. Da sowohl J als auch $J_{a,b}$ Jacobi-Felder sind, ist auch J_1 ein Jacobi-Feld, denn

$$\langle J_1, \dot\gamma\rangle = \langle J - J_{a,b}, \dot\gamma\rangle = u(t) - (a+bt) = 0.$$

$\Rightarrow$ Es gilt $J_1 \perp \dot\gamma$ überall.

$\Rightarrow$ $\{\text{Jacobi-Felder längs } \gamma\} = \{J_{a,b} \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} \oplus \{\text{Jacobi-Felder } J \text{ längs } \gamma \,|\, \langle J,\dot\gamma\rangle \equiv 0\}$.

SATZ 6.4.15 (Erster rauchscher Vergleichssatz). *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \geq \kappa \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [0,l] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, so dass in $(0,l)$ keine zu 0 konjugierten Punkte liegen. Sei J eine Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J \perp \dot\gamma$ überall. Dann ist $\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}$ monoton fallend auf $(0,l)$ und es gilt*

$$\|J(r)\| \leq \left\|\frac{\nabla}{dt}J(0)\right\| \cdot \mathfrak{s}_\kappa(r).$$

Beweis. Sei f die riemannsche Abstandsfunktion bezüglich $p := \gamma(0)$. Aus $J \perp \dot\gamma$ folgt, dass J tangential an die Niveauflächen von f ist. Solange also $J \neq 0$, ist $r \mapsto \|J(r)\|$ differenzierbar.

Die Ableitung ist: $\|J\|' = (\sqrt{\langle J,J\rangle})' = \dfrac{2\left\langle \frac{\nabla}{dt}J, J\right\rangle}{2\sqrt{\langle J,J\rangle}} = \dfrac{\left\langle \frac{\nabla}{dt}J, J\right\rangle}{\|J\|}$.

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}\right)' &= \frac{\frac{\left\langle \frac{\nabla}{dt}J,J\right\rangle}{\|J\|}\mathfrak{s}_\kappa - \|J\|\cdot\mathfrak{s}_\kappa'}{{\mathfrak{s}_\kappa}^2} \\
&= \frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}\left\{\frac{\left\langle \frac{\nabla}{dt}J,J\right\rangle}{\langle J,J\rangle} - \frac{\mathfrak{s}_\kappa'}{\mathfrak{s}_\kappa}\right\} \\
&= \frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}\left\{\frac{\langle -S(J),J\rangle}{\langle J,J\rangle} - \frac{\mathfrak{s}_\kappa'}{\mathfrak{s}_\kappa}\right\} \\
&\overset{\substack{\text{Prop.}\\ 6.4.10}}{\leq} \frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}\left\{\mathfrak{ct}_\kappa - \frac{\mathfrak{s}_\kappa'}{\mathfrak{s}_\kappa}\right\} \;=\; 0
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}$ monoton fallend.

Wir verwenden diese Monotonie und die Regel von l'Hospital und erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa} &\leq \lim_{r\searrow 0}\frac{\|J(r)\|}{\mathfrak{s}_\kappa(r)} = \lim_{r\searrow 0}\frac{\|J(r)\|'}{\mathfrak{s}_\kappa'(r)} \\
&= \lim_{r\searrow 0}\left\langle \frac{\nabla}{dt}J, \frac{J(r)}{\|J(r)\|}\right\rangle \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \lim_{r\searrow 0}\left\|\frac{\nabla}{dr}J(r)\right\|\cdot 1 \;=\; \left\|\frac{\nabla}{dr}J(0)\right\|
\end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $K \equiv \kappa$. Dann sind diese Jacobi-Felder von der Form

$$J(r) = \mathfrak{s}_\kappa(r) \cdot E(r),$$

wobei E ein paralleles Feld ist. Es gilt $\|J(r)\| = \mathfrak{s}_\kappa(r) \cdot \|E\|$.
Andererseits ist $\left\|\frac{\nabla}{dr} J(0)\right\| = \|\mathfrak{c}_\kappa(0) \cdot E(0)\| = \|E\|$.
Daraus folgt, dass $\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\kappa}$ konstant ist und dass in der schwachen Ungleichung Gleichheit gilt (das heißt insbesondere, dass der erste rauchsche Vergleichssatz nicht zu verbessern ist).

SATZ 6.4.16 (Zweiter Rauch'scher Vergleichssatz). *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq \delta$, wobei $\delta \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [0, l) \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Sei J ein Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J \perp \dot{\gamma}$ überall. Dann ist $\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\delta}$ monoton wachsend auf $[0, l)$ und es gilt*

$$\|J(r)\| \geq \left\|\frac{\nabla}{dr} J(0)\right\| \cdot \mathfrak{s}_\delta(r).$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 6.4.16 berechnet man

$$\left(\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\delta}\right)' = \frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\delta}\Big\{ -\underbrace{\frac{\langle S(J), J\rangle}{\langle J, J\rangle}}_{\leq \lambda_{\max} \leq -\mathfrak{ct}_\delta} - \mathfrak{ct}_\delta \Big\} \geq 0$$

Lemma 6.4.13

Also ist $\frac{\|J\|}{\mathfrak{s}_\delta}$ monoton wachsend. Analog zum vorhergehenden Beweis ergibt sich daraus:

$$\frac{\|J(r)\|}{\mathfrak{s}_\delta(r)} \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\|J(\varepsilon)\|}{\mathfrak{s}_\delta(\varepsilon)} = \left\|\frac{\nabla}{dr} J(0)\right\|.$$

□

Bemerkung. Ist V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und ist $L : I \to \mathrm{Aut}(V)$, $r \mapsto L(r)$, differenzierbar, wobei I ein Intervall ist, so gilt

$$\frac{d}{dr} \det L(r) = \mathrm{Spur}\left(\frac{d}{dr} L(r) \circ L(r)^{-1}\right) \cdot \det L(r).$$

Sei mun M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $p \in M$ und $\xi \in T_pM$ mit $\|\xi\| = 1$. Betrachte $d\exp_p$ längs $r \mapsto r \cdot \xi$. Setze $L(r) := (r \cdot d\exp_p|_{r\xi})|_{\xi^\perp}$, dann ist

$$L(r)(\eta) = r \cdot d\exp_p|_{r\xi}(\eta) = J(r),$$

wobei J das Jacobi-Feld längs $\gamma(t) = \exp_p(t\xi)$ ist mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dr} J(0) = \eta$ (nach der Proposition 3.4.3).

$$\Rightarrow \quad \frac{\nabla}{dr} L(r)(\eta) = \frac{\nabla}{dr} J(r) = -S_r(J(r)) = -S_r(L(r)(\eta))$$

$$\Rightarrow \quad S_r = -\frac{\nabla}{dr} L(r) \circ L(r)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad H_r = \frac{1}{n-1}\mathrm{Spur}(S_r) = -\frac{1}{n-1}\mathrm{Spur}(\frac{\nabla}{dr} L(r) \circ L(r)^{-1}) = -\frac{1}{n-1}\frac{(\det L(r))'}{\det L(r)}$$

Andererseits folgen mit Korollar 6.4.6 und Korollar 6.4.8 im Fall, dassric $\geq \kappa(n-1)g$:

$$H_r \geq -\mathfrak{ct}_\kappa(r)\,.$$

Somit ist

$$(\ln\det L(r))' = -(n-1)\cdot H_r \leq (n-1)\cdot \mathfrak{ct}_\kappa(r) = (n-1)\cdot(\ln\mathfrak{s}_\kappa)' = (\ln\mathfrak{s}_\kappa^{n-1})'\,,$$

woraus folgt:

$$0 \geq (\ln\det L)' - (\ln\mathfrak{s}_\kappa^{n-1})' = \left(\frac{\det L}{\mathfrak{s}_\kappa^{n-1}}\right)'\,.$$

Also ist $\dfrac{\det L}{\mathfrak{s}_\kappa^{n-1}}$ monoton fallend (bis zum ersten konjugierten Punkt). Wir fassen zusammen:

PROPOSITION 6.4.17. *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit* ric $\geq \kappa(n-1)g$ *für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Seien $p \in M$, $\xi \in T_pM$ mit $\|\xi\| = 1$ und $\gamma(r) = \exp_p(r\xi)$. Dann gilt, solange r nicht längs γ zu 0 konjugiert ist, dass*

$$\frac{\det(d\exp_p|_{r\xi})}{\mathfrak{s}_\kappa^{n-1}(r)/r^{n-1}}$$

monoton fallend ist.

6.5 Der Satz von Cartan-Hadamard

Definition. Seien M und $\tilde{M}$ zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine surjektive, differenzierbare Abbildung $\varphi : \tilde{M} \to M$ heißt *Überlagerung* von $\tilde{M}$ über M, falls für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in M existiert, so dass

$$\varphi^{-1}(U) = \dot{\bigcup_\alpha} U_\alpha,\ U_\alpha \subset \tilde{M} \text{ offen},$$

und $\varphi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ ist ein Diffeomorphismus.

Beispiel. Das rechte Beispiel ist eine Verallgemeinerung des linken.

- Seien $M = \mathrm{S}^1$ und $\tilde{M} = \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi(t) = e^{2\pi i\cdot t}$ eine Überlagerung.
- Seien $M = T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der n-dimensionale Torus und $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi(x) = [x]$ die Äquivalenzklasse von x eine Überlagerung.

Bemerkung. Überlagerungen sind lokale Diffeomorphismen, das heißt $d\varphi$ ist stets invertierbar. Aber es gibt durchaus lokale Diffeomorphismen, die keine Überlagerungen sind.

Beispiel. Seien $M = \mathrm{S}^1$, $\tilde{M} = \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi(t) = e^{2\pi i\cdot t}$.

Sei U eine Umgebung von $p = 1$. Dann ist $\varphi(U_1)$ eine echte Teilmenge von U, also kann $\varphi|_{u_1} : U_1 \to U$ kein Diffeomorphismus und somit auch φ keine Überlagerung sein.

Definition. Sind M und $\tilde{M}$ zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeiten, so heißt eine Überlagerung $\varphi : \tilde{M} \to M$ eine *riemannsche Überlagerung*, falls sie zusätzlich eine lokale Isometrie ist.

LEMMA 6.5.1. *Sind M und $\tilde{M}$ vollständige, zusammenhängende, riemannsche Mannigfaltigkeiten, so ist jede surjektive lokale Isometrie $\varphi : \tilde{M} \to M$ eine riemannsche Überlagerung.*

Beweis. Übung. □

SATZ 6.5.2 (Cartan-Hadamard). *Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$, sei $p \in M$. Dann ist $\exp_p : T_pM \to M$ eine Überlagerungsabbildung.*

Insbesondere muss die Mannigfaltigkeit M, wenn sie einfach zusammenhängend ist, diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ sein.

Bemerkung. Daraus folgt, dass die Sphären S^n, $n \geq 2$, keine riemannschen Metriken mit $K \leq 0$ tragen.

Beweis von Satz 6.5.2.

$$\begin{aligned} M \text{ vollständig} &\Rightarrow \exp_p \text{ ist auf ganz } T_pM \text{ definiert.} \\ K \leq 0 &\Rightarrow \text{Es gibt keine konjugierten Punkte.} \\ &\Rightarrow \exp_p \text{ ist ein lokaler Diffeomorphismus.} \\ &\Rightarrow \tilde{g} := \exp_p^* g \text{ definiert eine riemannsche Metrik auf} \\ &\quad\ T_pM. \text{ Dann ist } \exp_p : (T_pM, \tilde{g}) \to (M, g) \text{ eine lokale} \\ &\quad\ \text{Isometrie.} \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(T_pM, \tilde{g})$ vollständig ist.

Die Geraden durch 0 in T_pM werden unter $\exp_p$ auf Geodätische in M abgebildet.

$\Rightarrow$ Die Geraden durch 0 sind Geodätische in $(T_pM, \tilde{g})$, da $\exp$ eine lokale Isometrie ist. (Die Geodätischen, die nicht durch den Nullpunkt gehen, sind im Allgemeinen keine Geraden.)

$\Rightarrow$ $(T_pM, \tilde{g})$ ist geodätisch vollständig in 0.

$\Rightarrow$ Nach dem Satz von Hopf-Rinow folgt, dass $(T_pM, \tilde{g})$ vollständig ist.

$\Rightarrow$ Nach Lemma 6.5.1 ist also $\exp_p : T_pM \to M$ eine Überlagerungsabbildung. □

6.6 Der Schnittort

Sei im Folgenden M immer eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition. Für $p \in M$ setze $S_pM := \{\xi \in T_pM \mid \|\xi\| = 1\}$.
Dann heißt $SM = \bigcup_{p \in M} \mathcal{S}_pM$ das *Einheitstangentialbündel*.

Definition. Setze für $\xi \in \mathcal{S}_pM$

$$c(\xi) := \sup\{t > 0 \mid d(p, \exp_p(t\xi)) = t\} \in (0, \infty].$$

Bemerkung.

- Ist $c(\xi) < \infty$, so ist $d(p, \exp_p(c(\xi)\xi)) = c(\xi)$.
- Ist $d(p, \exp_p(t_0\xi)) = t_0$, so ist auch $d(p, \exp_p(t\xi)) = t$ für alle $t \in [0, t_0]$.
- Für $t \in (0, c(\xi))$ ist $\gamma(s) := \exp_p(s\xi)$ die eindeutige kürzeste, nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische von p nach $\gamma(t)$.

  Denn gäbe es eine weitere Kürzeste $\tilde{\gamma}$ von p nach $\gamma(t)$, so wäre auch $\tilde{\gamma} \cup \gamma|_{[t, c(\xi)]}$ eine kürzeste Geodätische von p nach $\gamma(c(\xi))$.
  Da aber Kürzeste glatt sein müssen, gilt $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(t)$ und somit folgt wegen der Eindeutigkeit von Geodätischen $\tilde{\gamma} = \gamma$.

- Von p nach $\gamma(c(\xi))$ kann es durchaus mehrere minimale Geodätische geben.

  Beispiel.
  - Sei $M = \mathrm{S}^n$. Dann ist $c(\xi) = \pi$ für jedes $\xi \in TM$. Hier gibt es also zu jedem $p \in M$ unendlich viele Kürzeste von p nach $\gamma(c(\xi))$.
  - Sei $M = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Dann gibt es genau zwei Kürzeste von $p \in M$ nach $\gamma(c(\xi))$.
  - Sei $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der flache 2-Torus.
    Hier hängt $c(\xi)$ auch wirklich von $\xi \in TM$ ab und es gibt vier bzw. zwei Kürzeste von p nach $c(\gamma(\xi))$.

Frage. Wie können Geodätische aufhören Kürzeste zu sein?

1. *Möglichkeit* Es gibt mehrere kürzeste Verbindungen.
2. *Möglichkeit* $c(\xi)$ ist konjugiert zu 0 längs γ.

Das folgende Lemma besagt, dass die zweite Möglichkeit tatsächlich eine ist, d. h. Geodätische sind nach dem ersten konjugierten Punkt nicht mehr minimal.

LEMMA 6.6.1. *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma : [0, b] \to M$ Geodätische. Ist $t_0 \in (0, b)$ konjugiert zu 0 längs γ, so ist γ nicht Kürzeste von $\gamma(0)$ nach $\gamma(b)$.*

Beweisskizze. Wähle eine Jacobi-Feld J längs γ mit $J(0) = 0$ und $J(t_0) = 0$, aber $J \not\equiv 0$.

Modifiziere J kurz vor t_0 zu einem glatten Vektorfeld ξ längs γ, so dass ξ linear ist von t_0 bis b. Sei γ_s eine Variation von γ mit Variationsfeld ξ. Die zweite Variationsformel liefert nun, dass

$$\frac{d^2}{ds^2} E[c_s]|_{s=0} < 0.$$

$\Rightarrow$ Für hinreichend kleine s gilt $E[\gamma_s] < E[\gamma]$.

$\Rightarrow$ γ ist nicht minimal. $\square$

Beispiel.

- $M = \mathrm{S}^n$ mit der Standardmetrik g_{stc}.
- $M = \mathrm{S}^n$. Sei γ ein Großhalbkreis von $p \in M$ nach $-p$. Wähle ein glattes $f : \mathrm{S}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \equiv 1$ auf γ und $f > 1$ auf $\mathrm{S}^n - \gamma$. Betrachte nun die riemannsche Metrik $\tilde{g} := f \cdot g_{\text{std}}$.

  Damit ist γ jetzt die eindeutige Kürzeste von p nach $-p$. Verlange zusätzlich, dass die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f längs γ verschwinden.

  $\Rightarrow$ $R_{\tilde{g}} = R_{g_{\text{std}}}$ längs γ.

  $\Rightarrow$ Die Jacobi-Felder bezüglich g_{std} und $\tilde{g}$ sind dieselben.

  $\Rightarrow$ π ist auch für $\tilde{g}$ der erste konjugierte Punkt zu 0 längs γ

LEMMA 6.6.2. *Es gibt keine weiteren Möglichkeiten für eine Geodätische aufzuhören minimierend zu sein.*

Beweis. Sei $c(\xi)$ nicht zu 0 konjugiert längs γ.

$\Rightarrow$ $d\exp_p|_{c(\xi)\cdot\xi}$ ist invertierbar.

$\Rightarrow$ Es existiert eine offene Umgebung U von $c(\xi)\xi$ in T_pM, so dass $\exp_p|_U : U \to \exp_p(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $t_j \searrow c(\xi)$ für $j \to \infty$. Wähle weiterhin $\xi_j \in \mathcal{S}_pM$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma_j(t) = \exp_p(t\xi_j)$ Kürzeste von p nach $\gamma(t_j)$ ist.

Wegen $\gamma \neq \gamma_j$ gilt $t_j\xi_j \notin U$ (da $\exp_p|_U$ injektiv ist). Wähle eine konvergente Teilfolge $\xi_j \to \eta \in \mathrm{S}_pM$.

$\Rightarrow$ Es gilt $c(\xi)\cdot\eta = \lim\limits_{j\to\infty}(t_j\xi_j) \notin U$. Insbesondere gilt $\xi \neq \eta$ und $\exp_p(c(\xi)\cdot\xi) = \exp_p(c(\xi)\cdot\eta)$.

$\Rightarrow$ Sowohl $\gamma|_{[0,c(\xi)]}$ also auch $t \mapsto \exp_p(t\cdot\eta)$, $t \in [0, c(\xi)]$ sind beide Kürzeste von p nach $\gamma(c(\xi))$ und echt verschieden. □

Bemerkung. Beide Möglichkeiten sind symmetrisch in p und $\gamma(c(\xi))$. Daraus folgt, dass $c(\xi) = c(-\dot{\gamma}(c(\xi)))$.

Man kann nun zeigen, dass für ein vollständiges M die Abbildung $c : SM \to (0, \infty]$ stetig ist. Für den Beweis siehe zum Beispiel [Sakai, Prop. 4.1].

Falls M nicht vollständig ist, so ist dies im Allgemeinen nicht richtig.

Beispiel. $M = \mathbb{R}^2 - \{p\}$.

Definition. Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Dann heißt

$$\mathcal{C}_p^{\tan} := \{c(\xi)\cdot\xi \mid \xi \in \mathcal{S}_pM\} \text{ der } \textit{tangentiale Schnittort} \text{ in } p \text{ und}$$
$$\mathcal{C}_p := \exp_p(\mathcal{C}_p^{\tan}) \text{ nennt man den } \textit{Schnittort} \text{ in } p.$$

Beispiel.

- Sei $M = \mathrm{S}^n$. Dann ist $\mathcal{C}_p^{\tan} = \pi \cdot S_pM$ und $\mathcal{C}_p = \{-p\}$ für alle $p \in M$.
- Sei $M = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Dann ist $\mathcal{C}_p^{\tan} = \frac{\pi}{2} \cdot S_pM$ und $\mathcal{C}_p = S(p, \frac{\pi}{2}) \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ für alle $p \in M$.

Bemerkung. • Es gilt $\exp_p(\{t\xi \mid \xi \in S_pM, t \in [0, c(\xi)]\}) = M$, *denn*

„$\subset$": ist klar.

„$\supset$": Sei $q \in M$. Sei γ eine minimale Geodätische von p nach q. Schreibe $\gamma(t) = \exp_p(t\xi)$ mit einem $\xi \in S_pM$.

$$\Rightarrow \quad c(\xi) \geq d(p,q)$$ □

- Die Menge $\mathcal{D}_p^{\tan} := \{r\xi \mid \xi \in \mathcal{S}_pM, 0 \leq r < c(\xi)\}$ ist sternförmig bezüglich 0, homöomorph zum offenen Ball und $\exp_p|_{\mathcal{D}_p^{\tan}} : D_p^{\tan} \to M - \mathcal{C}_p$ ist ein Diffeomorphismus. *Begründung:*
  (1) Es gilt $\exp_p(\mathcal{D}_p^{\tan}) \cap \mathcal{C}_p = \emptyset$.
  (2) Da es keine konjugierten Punkte gibt in $\mathcal{D}_p^{\tan}$, ist $\exp_p|_{\mathcal{D}_p^{\tan}}$ ein lokaler Diffeomorphismus.
- Es gilt $\operatorname{injrad}(p) \leq c(\xi) \leq \operatorname{diam}(M)$ für alle $\xi \in \mathcal{S}_pM$ und $\operatorname{injrad}(p) = \min\limits_{\xi \in S_pM} c(\xi)$.
- Folgende Eigenschaften sind äquivalent:
  (i) M ist kompakt.
  (ii) Für alle $\xi \in \mathcal{S}M$ gilt $c(\xi) < \infty$.
  (iii) Es existiert ein $p \in M$, so dass $c(\xi) < \infty$ für alle $\xi \in \mathcal{S}_pM$.

  Denn: *(i)⇒(ii):* Für alle $\xi \in \mathcal{S}M$ gilt $c(\xi) \leq \operatorname{diam}(M) < \infty$, da M kompakt ist.

  (ii)⇒(iii): Dies ist trivial.

  (iii)⇒(i): Für $r := \max\limits_{\xi \in \mathcal{S}_pM} c(\xi)$ gilt $\overline{\mathcal{D}_p^{\tan}} \subset \overline{\mathcal{B}}(0,r)$, also $M = \overline{\mathcal{B}}(p,r)$ kompakt. □

SATZ 6.6.3. *Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist* injrad $: M \to (0,\infty]$ *stetig.*

Beweis. Sei $p \in M$ und sei $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $p_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$.

(a) Wir zeigen $\operatorname{injrad}(p) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \operatorname{injrad}(p_k) =: \delta$.

Es existieren ein $\xi \in S_pM$ mit $\operatorname{injrad}(p) = c(\xi)$ und eine Folge $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in SM mit $\xi_k \in S_{p_k}M$ und $\operatorname{injrad}(p_k) = c(\xi_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wähle eine Teilfolge von $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim_{k\to\infty} c(\xi_k) = \delta$. Wähle eine weitere Teilfolge von $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\xi_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta \in S_pM$.

$$\overset{c \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{injrad}(p) \leq c(\eta) = \lim_{k\to\infty} c(\xi_k) = \delta.$$

(b) Nun wollen wir zeigen, dass $\operatorname{injrad}(p) \geq \limsup\limits_{k\to\infty} \operatorname{injrad}(p_k)$.

Es existiert eine $\xi \in S_pM$ mit $\operatorname{injrad}(p) = c(\xi)$. Wähle eine Folge $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\eta_k \in S_{p_k}M$ für alle $k \in \mathbb{N}$, mit $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Dann gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \operatorname{injrad}(p_k) \quad \leq \quad \limsup_{k\to\infty} c(\eta_k) \underset{\substack{\text{Stetigkeit}\\ \text{von } c}}{=} c(\xi) \quad = \quad \operatorname{injrad}(p).$$

Daraus folgt dann, dass injrad stetig ist. □

KOROLLAR 6.6.4. *Sei M kompakt. Dann ist* $\operatorname{injrad}(M) := \inf_{p \in M} \operatorname{injrad}(p) > 0$.

Beispiel. Es gibt nichtkompakte Mannigfaltigkeiten mit $\operatorname{injrad}(M) = 0$.

Bemerkung.
- Für $\mathcal{D}_p(r) := \mathcal{D}_p^{\tan} \cap B_r(0) = \{\xi \in T_pM \mid \|\xi\| < \min\{c(\xi), r\}\}$ ist $\exp_p : \mathcal{D}_p(r) \to B_r(p) - \mathcal{C}_p$ ein Diffeomorphismus und $\exp_p : \overline{\mathcal{D}_p^{\tan}} \cap B_r(0) \to B_r(p)$ surjektiv.
- $\mathcal{C}_p$ ist für jedes $p \in M$ eine Nullmenge in M (denn $\mathcal{C}_p^{\tan}$ ist eine Nullmenge in T_pM und $\exp_p$ ist glatt).
- Die riemannschen Normalkoordinaten beschreiben M bis auf eine Nullmenge (nämlich bis auf $\mathcal{C}_p$).

Beispiel.

Definition. Eine Geodätische $\gamma : [a, b] \to M$ heißt *geodätische Schleife mit Basispunkt p*, falls $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Gilt zusätzlich $\dot\gamma(a) = \dot\gamma(b)$, so heißt γ eine *geschlossene Geodätische*.

Bemerkung. Eine geschlossene Geodätische $\gamma : [a, b] \to M$ kann eindeutig zu einer Geodätischen $\tilde\gamma : \mathbb{R} \to M$ mit

$$\begin{aligned} \tilde\gamma(t + (a - b)) &= \tilde\gamma(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und} \\ \tilde\gamma(t) &= \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b] \end{aligned}$$

fortgesetzt werden (periodische Geodätische), geodätische Schleifen im Allgemeinen nicht.

PROPOSITION 6.6.5. *Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Sei weiterhin $q \in \mathcal{C}_p$, so dass*

$$d(p, q) = d(p, \mathcal{C}_p).$$

Ist q längs keiner *minimalen Geodätischen zu p konjugiert, so fügen sich zwei minimale Geodätische von p nach q zu einer geodätischen Schleife mit Basispunkt p zusammen.*

Beweis. Es gibt mindestens zwei Geodätische $\gamma_1, \gamma_2 : [0, d(p, q)] \to M$, die nach der Bogenlänge parametrisiert sind, von p nach q. Es ist zu zeigen, dass dann $\dot\gamma_1(d(p, q)) = -\dot\gamma_2(d(p, q))$. Angenommen, dass dies nicht der Fall sei. Dann existiert ein $\xi \in T_qM$ mit

$$\langle \xi, \dot\gamma_1(d(p, q)) \rangle < 0 \text{ und } \langle \xi, \dot\gamma_2(d(p, q)) \rangle < 0.$$

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = q$ und $\dot\alpha(0) = \xi$. Dann existieren geodätische Variationen $\gamma_{1,s}$ von γ_1 und $\gamma_{2,s}$ von γ_2 mit

$$\begin{aligned} \gamma_{1,s}(0) &= \gamma_1(0) \\ \gamma_{1,s}(d(p, q)) &= \alpha(s) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \gamma_{2,s}(0) &= \gamma_2(0) \\ \gamma_{2,s}(d(p, q)) &= \alpha(s) \end{aligned}$$

Wegen der ersten Variationsformel existiert ein $\delta \in (0, \varepsilon)$, so dass

$$\begin{aligned} L[\gamma_{1,\delta}] &< L[\gamma_1] = d(p, \mathcal{C}_p) = \operatorname{injrad}(p) \quad \text{und} \\ L[\gamma_{2,\delta}] &< L[\gamma_2] = d(p, \mathcal{C}_p) = \operatorname{injrad}(p) \end{aligned}$$

Folglich sind die Geodätischen $\gamma_{1,\delta}$ und $\gamma_{2,\delta}$ minimal von p nach $\alpha(\delta)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Folgerung. In dieser Situation gibt es genau zwei Geodätische von p nach q.

Beweis. Sei γ_1 eine minimale Geodätische. Jede weitere Geodätische γ_2 von p nach q erfüllt dann

$$\dot{\gamma}_2(d(p,q)) = -\dot{\gamma}_1(d(p,q)).$$

Daraus folgt, dass γ_2 eindeutig ist. □

Bemerkung.

- Lässt man in Proposition 31.5 die Voraussetzung „q ist längs *keiner* minimalen Geodätischen zu p konjugiert“ fallen, so wird die Aussage falsch.

  Beispiel. $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

- Gilt zuätzlich zu den Voraussetzungen in Proposition 31.5, dass

  $$d(p,q) = \text{injrad}(M) = \inf_{p' \in M} d(p', \mathcal{C}_{p'}),$$

  so schließen sich zwei verschiedene minimale zu einer geschlossenen Geodätischen.

  Begründung: Vertausche die Rollen von p und q.

  Beispiel.

SATZ 6.6.6 (Klingenbergs Lemma). *Sei M eine kompakte, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\delta > 0$. Es gelte $K \leq \delta$. Dann ist*

$$\text{injrad}(M) \geq \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}, \frac{l(M)}{2}\right\},$$

wobei $l(M) = \inf\{L[\gamma] \,|\, \gamma$ ist eine nicht konstante, geschlossene Geodätische$\}$.

Beweis. Da M kompakt ist, kann man ein $\xi \in \mathcal{S}M$ wählen, wobei p der Fußpunkt von ξ sei, so dass $q := \exp_p(c(\xi) \cdot \xi)$ mit $q \in \mathcal{C}_p$ und

$$d(p,q) = d(p, \mathcal{C}_p) = \inf_{p' \in M} d(p', \mathcal{C}_{p'}) = \text{injrad}(M).$$

Fall 1: Es gilt $\text{injrad}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Dann ist die Aussage bereits wahr.

Fall 2: Es gilt $d(p,q) = \text{injrad}(M) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

$\Rightarrow$ Der Punkt q ist nicht konjugiert zu p längs jeder minimalen Geodätischen.

$\Rightarrow$ Zwei verschiedene minimale Geodätische fügen sich zu einer geschlossenen Geodätischen zusammen. Daraus ergibt sich (für jede minimale Geodätische γ von p nach q)

$$l(M) \leq L[\gamma] = 2 \cdot d(p,q) = 2 \cdot \text{injrad}(M).$$ □

6.7 Integration auf riemannschen Mannigfaltigkeiten

Erinnerung an die Transformationsformel. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\int_{\Omega_1} (f \circ \varphi)(x) \cdot |\det D\varphi(x)| \, d^n x = \int_{\Omega_2} f(y) \, d^n y.$$

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $f : M \to \mathbb{R}$ und $A \subset M$ Teilmenge. Dann heißt

$$\begin{aligned}
A \textit{ messbar} &\Leftrightarrow \psi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n \text{ ist messbar für alle Koordinaten } (U, \psi, V), \\
A \textit{ Nullmenge} &\Leftrightarrow \psi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n \text{ ist Nullmenge für alle Koordinaten } (U, \psi, V) \text{ und} \\
f \textit{ messbar} &\Leftrightarrow f \circ \psi^{-1} : V \to \mathbb{R} \text{ ist messbar für alle Koordinaten } (U, \psi, V).
\end{aligned}$$

Bemerkung. **(1)** Alle Eigenschaften aus der Integrationstheorie bleiben erhalten, zum Beispiel

- **(a)** Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
- **(b)** Kompakte Mengen sind messbar.
- **(c)** Stetige Funktionen sind messbar.

(2) Es genügt die Definition für eine Überdeckung von M durch Karten zu überprüfen.

Das Ziel ist es nun eine sinnvolle Definition zu finden für

$$\int_M f \, d\mathrm{vol} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

1. Schritt: Sei (U, ψ, V) eine Karte von M, sei f messbar mit $f \geq 0$ und $\operatorname{supp} f \subset U$. Setze

$$\overset{\psi}{\int_M} f \, d\mathrm{vol} := \int_V (f \circ \psi^{-1})(y) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi}(y))} \, d^n y,$$

wobei $g_{ij}^{\psi}(y) := \langle d\psi^{-1}(y) e_i, d\psi^{-1}(y) e_j \rangle$.

2. Schritt: *Unabhängigkeit von der Karte.* Seien (U_1, ψ_1, V_1) und (U_2, ψ_2, V_2) zwei Karten von M. Sei f messbar mit $f \geq 0$ und $\operatorname{supp} f \subset U_1 \cap U_2$.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \psi_2 \circ {\psi_1}^{-1} \\
\Rightarrow \qquad (g_{ij}^{\psi_2}) &= (D\varphi^{-1})^T \cdot (g_{ij}^{\psi_1}) \cdot (D\varphi^{-1}) \\
\Rightarrow \qquad \det g_{ij}^{\psi_2} &= \det g_{ij}^{\psi_1} \cdot (\det(D\varphi))^{-2} \text{ und somit} \\
\sqrt{\det(g_{ij}^{\psi_2})} &= \sqrt{\det g_{ij}^{\psi_1}} \cdot |\det(D\varphi)|^{-1}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\overset{\psi_2}{\int_M} f \, d\mathrm{vol} &= \int_V (f \circ {\psi_2}^{-1})(y) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi_2}(y))} \, d^n y \\
&\overset{\text{TF}}{=} \int_V (f \circ {\psi_2}^{-1}) \circ \underbrace{\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}}_{=\varphi}(x) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi_2}(\varphi(x)))} \cdot |\det D\varphi(x)| \, d^n x \\
&= \int_V (f \circ {\psi_1}^{-1})(x) \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi_1}(x))} \, d^n x \quad = \quad \overset{\psi_1}{\int_M} f \, d\mathrm{vol}.
\end{aligned}$$

3. Schritt: Sei nun $f : M \to \mathbb{R}$ messbar mit $\operatorname{supp} f \subset M$ und $f \geq 0$. Sei $\mathcal{A} = \{(U_k, \psi_k, V_k)\}$ ein Atlas von M und sei χ_k eine passende Teilung der Eins. Setze dann

$$\int_M f \, d\mathrm{vol} := \sum_k {}^{\psi_k}\!\!\int_M \underbrace{f \cdot \chi_k}_{\substack{\text{Träger} \\ \text{in } U_k}} \, d\mathrm{vol} \quad \in \quad [0, \infty].$$

Dies ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{A}$ und von der Wahl der χ_k. Zum Nachprüfen nutze zweiten Schritt.

4. Schritt: Sei nun f messbar. Dann heißt f *integrierbar auf* M, falls

$$\begin{aligned} I_+ &:= \int_M \max\{f(x), 0\} \, d\mathrm{vol} \quad < \quad \infty \quad \text{und} \\ I_- &:= \int_M \max\{-f(x), 0\} \, d\mathrm{vol} \quad < \quad \infty. \end{aligned}$$

Wir setzen in diesem Fall dann

$$\int_M f \, d\mathrm{vol} \quad := \quad I_+ - I_- \quad \in \quad \mathbb{R}.$$

Definition. Für ein messbares $A \subset M$ heißt

$$\mathrm{vol}(A) := \int_M \chi_A \, d\mathrm{vol} \in [0, \infty]$$

das *Volumen* von A in M.

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $p \in M$. Man kann nun $\int_M f \, d\mathrm{vol}$ in Normalkoordinaten berechnen:

$$\int_M f \, d\mathrm{vol} \quad \underset{\substack{\mathcal{C}_p \text{ ist} \\ \text{Nullmenge}}}{=} \quad \int_{M - \mathcal{C}_p} f \, d\mathrm{vol} \quad \underset{\text{Transformations-}}{=} \quad \int_{\mathcal{D}_p^{\tan}} (f \circ \exp_p) \cdot |\det d\exp_p| \, d^n x.$$

Insbesondere gilt für ein messbares $A \subset M$, dass

$$\mathrm{vol}(A) = \int_{\exp_p^{-1}(A) \cap \mathcal{D}_p^{\tan}} |\det d\exp_p| \, d^n x.$$

Erinnerung. Seien $\kappa \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Der Modellraum $\mathbb{M}_\kappa^n$ ist gegeben durch

$$\mathbb{M}_\kappa^n = \begin{cases} (\mathrm{S}^n, \frac{1}{\kappa} g_{\text{std}}), & \kappa > 0 \\ (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}), & \kappa = 0 \\ (\mathrm{H}^n, \frac{1}{|\kappa|} g_{\text{hyp}}), & \kappa < 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Der Modellraum $\mathbb{M}_\kappa^n$ ist eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K = \kappa$. Wir wollen nun die Volumina von Bällen in $\mathbb{M}_\kappa^n$ betrachten.

Wegen der Gleichheit „=“ für H in der Ricatti-Ungleichung erhalten wir

$$\det(d\exp_p|_{rx}) = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(r)^{n-1}}{r^{n-1}}.$$

Wir setzen $V_\kappa^n(r) := \mathrm{vol}(B(p,r) \subset \mathbb{M}_\kappa^n)$ und berechnen in Normalkoordinaten für $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$:

$$\begin{aligned} V_\kappa^n(r) &= \int_{\substack{B(0,r)\\ \cap \\ T_p\mathbb{M}_\kappa^n}} |\det d\exp_p|_x|\, d^n x \\ &= \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \int_0^r |\det d\exp_p|_{\varrho x}| \varrho^{n-1}\, d\varrho\, d\mathrm{vol}^{\mathrm{S}^{n-1}}(x) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^r \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1}\, d\varrho, \text{ wobei } \omega_k := \mathrm{vol}(\mathrm{S}^k) = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} \end{aligned}$$

Satz 6.7.1 (Bishop-Gromov). *Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{ric} \geq \kappa(n-1)g$. *Sei $p \in M$. Dann ist*

$$\frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{V_\kappa^n(r)}$$

monoton fallend in r und es gilt $\mathrm{vol}(B(p,r)) \leq V_\kappa^n(r)$.

Beispiel. Sei M der Zylinder. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{vol}(\mathcal{B}(p,r)) \\ &= \mathrm{vol}(\underbrace{B(0,r) \cap \mathcal{D}_p^{\tan}}_{\mathcal{D}_p(r)} \subset T_pM) \\ &\leq \mathrm{vol}(B(0,r) \subset \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Beweis von Satz 6.7.1. Seien $0 < r < R$. Sei $\xi \in \mathcal{S}_pM$ fest. Setze $r' := \min\{r, c(\xi)\}$ und $R' := \min\{R, c(\xi)\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{R'} |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \varrho^{n-1}\, d\varrho}{\int_0^{r'} |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \varrho^{n-1}\, d\varrho} &= 1 + \frac{\int_{r'}^{R'} |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \varrho^{n-1}\, d\varrho}{\int_0^{r'} |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \varrho^{n-1}\, d\varrho} \\ &\leq 1 + \frac{\int_r^R |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \varrho^{n-1}\, d\varrho}{\int_0^r |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \varrho^{n-1}\, d\varrho}, \text{ denn } \begin{cases} (1) & c(\xi) \leq r\colon\ r' = R' = c(\xi), \\ (2) & c(\xi) \geq R\colon\ r = r', R = R', \\ (3) & r \leq c(\xi) \leq R\colon\ r = r', R' = c(\xi) \leq R. \end{cases} \\ &= 1 + \frac{\int_r^R \overbrace{\frac{|\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \cdot \varrho^{n-1}}{\mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1}}}^{\leq \frac{|\det d\exp_p|_{r\xi}| r^{n-1}}{\mathfrak{s}_\kappa(r)^{n-1}}, \text{ da } \varrho \geq r} \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1}\, d\varrho}{\int_0^r \underbrace{\frac{|\det d\exp_p|_{\varrho\xi}| \cdot \varrho^{n-1}}{\mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1}}}_{\geq \frac{|\det d\exp_p|_{r\xi}| r^{n-1}}{\mathfrak{s}_\kappa(r)^{n-1}}, \text{ da } \varrho \leq r} \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1}\, d\varrho} \quad \text{Prop. 6.4.17} \\ &\leq 1 + \frac{\int_r^R \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1} d\varrho}{\int_0^r \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1} d\varrho} = \frac{\int_0^R \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1} d\varrho}{\int_0^r \mathfrak{s}_\kappa(\varrho)^{n-1} d\varrho} = \frac{V_\kappa^n(R)}{V_\kappa^n(r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(B(p,R)) &= \int_{\mathcal{D}_p^{\tan}(R)} |\det d\exp_p|_x|\, d^n x \\
&= \int_{\mathsf{S}^{n-1}} \int_0^{\min\{R,c(\xi)} |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}|\varrho^{n-1}\, d\varrho\, d\mathrm{vol}^{\mathsf{S}^{n-1}}(\xi) \\
&\leq \frac{V_\kappa^n(R)}{V_\kappa^n(r)} \cdot \int_{\mathsf{S}^{n-1}} \int_0^{\min\{r,c(\xi)} |\det d\exp_p|_{\varrho\xi}|\varrho^{n-1}\, d\varrho\, d\mathrm{vol}^{\mathsf{S}^{n-1}}(\xi) \\
&= \frac{V_\kappa^n(R)}{V_\kappa^n(r)} \cdot \mathrm{vol}(B(p,r)) \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{vol}(B(p,R))}{V_\kappa^n(R)} &\leq \frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{V_\kappa^n(r)} \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{V_\kappa^n(r)} &\text{ ist monoton fallend in } r.
\end{aligned}$$

In Normalkoordinaten berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
& g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2) \text{ und somit } \sqrt{\det(g_{ij})} = 1 + O(|x|^2) \\
\Rightarrow \quad & \mathrm{vol}(B(p,r)) = \int_{B(0,r)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, d^n x = r^n \mathrm{vol}(B^{\mathbb{R}^n}(0,1)) + O(r^{n+2}).
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man (mit $\mathbb{M}_\kappa^n$ anstelle von M), dass

$$V_\kappa^n(r) = r^n \mathrm{vol}(B^{R^n}(0,1)) + O(r^{n+2}).$$

Daraus folgt also $\dfrac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{V_\kappa^n(r)} \xrightarrow{r\to 0} 1.$ □

SATZ 6.7.2. *Sei M eine vollständige, n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \leq \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$. Sei $p \in M$. Dann ist für $0 < r < \min\{\mathrm{injrad}(p), \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\}$*

$$\frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{V_\delta^n(r)}$$

monoton wachsend in r und $\mathrm{vol}(B(p,r)) \geq V_\delta^n(r)$.

Beweis. Mit den Notationen aus Proposition 6.4.17 gilt für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische γ mit $\gamma(0) = p$, $\xi := \dot\gamma(0)$:

$$\begin{aligned}
L(r) &:= (r \cdot d\exp_p|_{r\xi})|_{\xi^\perp} \\
\Rightarrow \quad S_r &= -\frac{\nabla}{dr} L(r) \circ L(r)^{-1} \\
\Rightarrow \quad (\ln\det L(r))' &= -(n-1)H_r \\
&\geq (n-1)\mathfrak{ct}_\delta(r) \text{ (mit } K \leq \delta \text{ und Lemma 29.13)} \\
&= (\ln \mathfrak{s}_\delta{}^{n-1})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\det L}{\mathfrak{s}_\delta{}^{n-1}}$ ist monoton wachsend bis zum ersten konjugierten Punkt, insbesondere bis zu $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Ähnlich wie im Beweis von Satz 6.7.1 (einfacher wegen $r < \mathrm{injrad}(p)$) folgt dann die Aussage. □

Beispiel. Die Voraussetzung $r < \text{injrad}(p)$ ist erforderlich. Betrachte etwa $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ (Zylinder).

6.8 Anwendungen auf die Fundamentalgruppe

Sei M stets eine zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$.

Definition. Eine *Schleife* durch p ist eine stetige, stückweise glatte Kurve $c : [0,1] \to M$ mit $c(0) = c(1) = p$.

Eine *Homotopie* zwischen zwei Schleifen c_1 und c_2 ist eine stetige, stückweise glatte Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ mit

(i) $H(0,t) = c_1(t)$,

(ii) $H(1,t) = c_2(t)$ und

(iii) $H(s,0) = H(s,1) = p$.

Falls es zu zwei Schleifen c_1 und c_2 eine solche Homotopie gibt, so heißen c_1 und c_2 *homotop*.

Beispiel. **(1)** Seien $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Zu einer Schleife c setze $H(s,t) := s \cdot c(t)$. Also ist c homotop zur konstanten Schleife $c_0 \equiv 0$.

(2) Sei M der Zylinder. Dann ist c *nicht* homotop zur konstanten Schleife.

Bemerkung. „homotop“ zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Schleifen durch p.

Setze $\pi_1(M;p) := \{\text{Schleifen durch } p\}/\text{Homotopie}$.

Wir erklären eine Gruppenmultiplikation $*$ auf $\pi_1(M;p)$ durch $[c_1] * [c_2] = [c_3]$, wobei

$$c_3(t) := \begin{cases} c_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Die Wohldefiniertheit ist leicht nachzurechnen. Weiterhin ist $(\pi_1(M;p), *)$ eine Gruppe mit neutralem Element $[p]$. Das zu $[c]$ inverse Element ist $[\check{c}]$, wobei $\check{c}(t) := c(1-t)$.

Definition. Die Gruppe $(\pi_1(M;p), *)$ heißt *Fundamentalgruppe* von M mit Basispunkt p.

Ist $p' \in M$ ein weiterer Punkt, so sind $\pi_1(M;p)$ und $\pi_1(M;p')$ isomorph. Der Gruppenisomorphismus lautet

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(M;p) & \to & \pi_1(M;p') \\ [c] & \mapsto & [\gamma^{-1} * c * \gamma] \end{array}$$

wobei γ eine stetige, stückweise glatte Kurve von p' nach p ist.

Definition. Die Mannigfaltigkeit heißt *einfach-zusammenhängend*, falls die Fundamentalgruppe trivial ist, das heißt $\pi_1(M) = \{[p]\}$.

Beispiel. $M = \mathbb{R}^n$ oder $M = \mathrm{S}^n$ für $n \ge 2$.

Definition. Eine Überlagerung $\varphi : \tilde{M} \to M$ heißt *universell*, falls $\tilde{M}$ einfach-zusammenhängend ist.

Beispiel. **(1)** $\varphi : \mathbb{R}^n \to T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

(2) $\varphi : \mathrm{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geq 2$.

Eigenschaften:

(1) *Existenz.* Zu jeder zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M existiert eine universelle Überlagerung $\varphi : \tilde{M} \to M$.

(2) *Universalität.* Ist $\psi : \bar{M} \to M$ eine weitere Überlagerung, so existiert eine Überlagerung $\chi : \tilde{M} \to \bar{M}$, so dass das folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ \bar{M} \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd}$$

(3) *Eindeutigkeit.* Sind $\varphi_1 : \tilde{M}_1 \to M$ und $\varphi_2 : \tilde{M}_2 \to M$ zwei universelle Überlagerungen, so existiert ein Diffeomorphismus $\psi : \tilde{M}_1 \to \tilde{M}_2$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M}_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & \tilde{M}_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(4) Für $q \in M$ gilt $\#\varphi^{-1}(q) = \#\pi_1(M)$.

SATZ 6.8.1 (Zusatz zum Satz von Bonnet-Myers). *Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Sei* $\mathrm{ric} \geq \kappa(n-1)g$, $\kappa > 0$. *Dann ist $\pi_1(M)$ endlich.*

Bemerkung. Insbesondere kann T^n keine Metrik mit $\mathrm{ric} \geq \kappa(n-1)g$, $\kappa > 0$ besitzen.

Beweis. Sei $\varphi : \tilde{M} \to M$ eine universelle Überlagerung. Dann ist $\tilde{g} := \varphi^* g$ eine riemannsche Metrik auf $\tilde{M}$, die φ zu einer riemannschen Überlagerung macht. Weiterhin ist $(\tilde{M}, \tilde{g})$ vollständig und $\mathrm{ric}_{\tilde{g}} \geq \kappa(n-1)\tilde{g}$. Der Satz von Bonnet-Myers, angewandt auf $(\tilde{M}, \tilde{g})$, liefert dann, dass $\tilde{M}$ kompakt ist. Für beliebiges $q \in M$ ist dann

$$\#\pi_1(M) = \#\varphi^{-1}(q) < \infty,$$

denn $\varphi^{-1}(q)$ ist diskret und $\tilde{M}$ kompakt. □

Definition. Sei π eine Gruppe. Eine Teilmenge $\Gamma \subset \pi$ heißt *Erzeugendensystem*, falls jedes $\gamma \in \pi$ sich schreiben lässt in der Form

$$\gamma = \gamma_1^{\pm 1} \cdot \gamma_2^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot \gamma_N^{\pm 1}$$

mit $\gamma_j \in \Gamma$ für $j = 1, \ldots, N$.

Beispiel. $\pi = (\mathbb{Z}^n, +)$. $\Gamma := \{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ ist ein Erzeugendensystem von π.

Definition. Eine Gruppe π heißt *endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem $\Gamma \subset \pi$ gibt.

Man kann nun zeigen, dass $\pi_1(M)$ für *kompakte* zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M stets endlich erzeugt ist. Für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten ist dies im Allgemeinen falsch.

Beispiel. Die Kurven $c_1, c_2, c_3, \ldots$ können nicht durch eine endliche Teilmenge $\Gamma \subset \pi_1(M)$ erzeugt werden.

Sei nun (M, g) eine kompakte, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$. Sei $\varphi : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung. Setze dabei $\tilde{g} := \varphi^* g$ (da M kompakt ist, also insbesondere vollständig, ist damit auch $(\tilde{M}, \tilde{g})$ vollständig). Wähle $\tilde{p} \in \varphi^{-1}(p)$. Betrachte nun die Abbildung $\chi : \varphi^{-1}(p) \to \pi_1(M; p)$, die folgendermaßen definiert ist: Zu $\tilde{p}' \in \varphi^{-1}(p)$ wähle eine kürzeste Geodätische $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \tilde{M}$ von $\tilde{p}$ nach $\tilde{p}'$. Dann ist $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$ eine Schleife in M an p. Setze nun

$$\chi(\tilde{p}') := [\gamma].$$

Dann ist χ wohldefiniert (da $\tilde{M}$ einfach-zusammenhängend ist und somit alle Kurven von $\tilde{p}$ nach $\tilde{p}'$ homotop sind) und bijektiv, denn:

Surjektivität. Sei γ eine geodätische Schleife mit Basispunkt p. Betrachte die Geodätische $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{M}$ mit $\gamma(0) = \tilde{p}$ und $\dot{\tilde{\gamma}} = (d\varphi)^{-1}(\dot{\gamma}(0))$. Dann wird $\tilde{\gamma}$ unter φ auf die Geodätische γ abgebildet, da sie die gleichen Anfangswerte haben. Außerdem endet $\tilde{\gamma}$ in einem $\tilde{p}' \in \varphi^{-1}(p)$.

Injektivität. Betrachte zwei Geodätische in $\tilde{M}$ von $\tilde{p}$ nach $\tilde{p}'$ bzw. $\tilde{p}'' \neq \tilde{p}'$. Angenommen, deren Bilder unter φ wären homotop. Dann gibt es eine Homotopie, die man nach $\tilde{M}$ liften kann. Dort bleibt aber aus Stetigkeitsgründen der Endpunkt konstant. Also sind ihre Bilder unter φ nicht homotop.

Insbesondere ist $\#\pi_1(M; p) = \#\varphi^{-1}(p)$. Daraus folgt insbesondere, dass $\pi_1(M; p)$ nur abzählbar viele Elemente hat, da $\varphi^{-1}(p)$ diskret ist.

Der Dirichlet-Fundamentalbereich

Zu $\tilde{p} \in \varphi^{-1}(p)$ setze

$$\begin{aligned} F_{\tilde{p}} &:= \{\tilde{q} \in \tilde{M} \mid d(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq d(\tilde{p}', \tilde{q}) \ \forall\, \tilde{p}' \in \varphi^{-1}(p) - \{\tilde{p}\}\} \quad \text{und} \\ \overset{\circ}{F}_{\tilde{p}} &:= \{\tilde{q} \in \tilde{M} \mid d(\tilde{p}, \tilde{q}) < d(\tilde{p}', \tilde{q}) \ \forall\, \tilde{p}' \in \varphi^{-1}(p) - \{\tilde{p}\}\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\varphi(F_{\tilde{p}}) = M$ und $\varphi|_{\overset{\circ}{F}_{\tilde{p}}} : \overset{\circ}{F}_{\tilde{p}} \to M - \mathcal{C}_p$ ist eine Isometrie. Außerdem gilt, dass $\bigcup_{\tilde{p} \in \varphi^{-1}(p)} F_{\tilde{p}} = \tilde{M}$ und dass die $\overset{\circ}{F}_{\tilde{p}}$ paarweise disjunkt sind.

Behauptung (1). $F_{\tilde{p}} \subset \bar{B}(\tilde{p}, \mathrm{diam}(M))$.

Beweis. Sei $\tilde{q} \in F_{\tilde{p}}$. Setze $q := \varphi(\tilde{q})$. Verbinde q mit p durch eine kürzeste Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = q$ und $\gamma(1) = q$. Betrachte nun die Geodätische $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{M}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{q}$ und $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Dann ist $\tilde{\gamma}(1) =: \tilde{p}' \in \varphi^{-1}(p)$ und es gilt

$$d(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq d(\tilde{p}', \tilde{q}) \leq L[\tilde{\gamma}] = L[\gamma] = d(p, q) \leq \mathrm{diam}(M). \qquad \square$$

Setze nun $\Gamma := \{\gamma \in \pi_1(M; p) \mid d(F_{\tilde{p}}, F_{\chi^{-1}(\gamma)}) \leq 1\}$.

Behauptung (2). $\#\Gamma < \infty$.

Beweis. Sei $\tilde{q} \in F_{\chi^{-1}(\gamma)}, \gamma \in \Gamma$. Wähle $\tilde{q}_1 \in F_{\tilde{p}}$ und $\tilde{q}_2 \in F_{\chi^{-1}(\gamma)}$, so dass $d(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = d(F_{\tilde{q}}, F_{\chi^{-1}(\gamma)})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d(\tilde{p}, \tilde{q}) &\leq d(\tilde{q}, \tilde{q}_1) + d(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) + d(\tilde{q}_2, \chi^{-1}(\gamma)) + d(\chi^{-1}(\gamma), \tilde{q}) \\
&\leq \mathrm{diam}(M) + 1 + \mathrm{diam}(M) + \mathrm{diam}(M) \\
&= 3\mathrm{diam}(M) + 1 \\
\Rightarrow \quad \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_{\chi^{-1}(\gamma)} &\subset \bar{B}(\tilde{p}, 3\mathrm{diam}(M) + 1) \\
\Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{vol}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overset{\circ}{F}_{\chi^{-1}(\gamma)})}_{\substack{= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{vol}(\overset{\circ}{F}_{\chi^{-1}(\gamma)}) \\ = \#\Gamma \cdot \mathrm{vol}(M - \mathcal{C}_p) \\ = \#\gamma \cdot \mathrm{vol}(M)}} &= \mathrm{vol}(\bar{B}(\tilde{p}, 3\mathrm{diam}(M) + 1)) \\
\Rightarrow \quad \#\Gamma &\leq \frac{\mathrm{vol}(\bar{\mathcal{B}}(\tilde{p}, 3\mathrm{diam}(M) + 1))}{\mathrm{vol}(M)} < \infty
\end{aligned} \qquad \square$$

Setze nun $\Gamma_k := \{\gamma_{i_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{i_m} \mid \gamma_{i_j} \in \Gamma, m \leq k\}$.

Behauptung (3). $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k = \pi_1(M; p)$. Insbesondere ist Γ ein Erzeugendensystem von $\pi_1(M; p)$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\bar{B}(\tilde{p}, 1) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_{\chi^{-1}(\gamma)}$. Induktion nach k (durch Anwendung der Dreiecksungleichung) liefert

$$\begin{aligned}
\underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(\tilde{p}, k)}_{\subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} F_{\chi^{-1}(\gamma)}} &= \tilde{M} = \bigcup_{\gamma \in \pi_1(M;p)} F_{\chi^{-1}(\gamma)} = \bigcup_{\gamma \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k} F_{\chi^{-1}(\gamma)} \\
\Rightarrow \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k &= \pi_1(M; p).
\end{aligned} \qquad \square$$

Wir haben also gezeigt:

PROPOSITION 6.8.2. *Für kompakte zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten ist $\pi_1(M)$ endlich erzeugt.*

Sei nun π eine Gruppe und sei $\Gamma \subset \pi$ ein endliches Erzeugendensystem. Betrachte die *Wachstumsfunktion*

$$N_\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, N_\Gamma(k) := \#\Gamma_k,$$

wobei $\Gamma_k := \{\gamma_{i_1}^{\pm 1} \cdots \gamma_{i_m}^{\pm 1} | \gamma_{i_j} \in \Gamma, m \leq k\}$.

Bemerkung. Sind $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ und $\Gamma' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_{N'}\}$ zwei endliche Erzeugendensysteme von π, so schreibe $\gamma'_j = \gamma_{i_1}^{\pm 1} \cdots \gamma_{i_{N(j)}}^{\pm 1}$ und setze $N'' := \max\{N(1), \dots, N(N')\}$.

$\Rightarrow$ Jedes Wort in Γ', das sich in k Elementen aus Γ' schreiben lässt, lässt sich in höchstens $k \cdot N''$ Elementen aus Γ schreiben.

$\Rightarrow$ $N_{\Gamma'}(k) \leq N_\Gamma(N'' \cdot k)$.

Definition. Sei π eine Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem Γ. Dann hat π *polynomiales Wachstum*, falls es ein reelles Polynom P gibt mit

$$N_\Gamma(k) \leq P(k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Die Gruppe π hat *exponentielles Wachstum*, falls es $C_1, C_2 > 0$ und $C_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$N_\Gamma(k) \geq C_1 e^{C_2 k} + C_3 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung. Diese beiden Eigenschaften schließen sich gegenseitig aus und sie sind unabhängig von der Wahl von Γ (wegen der vorhergehenden Bemerkung).

Beispiel. Ist π abelsch mit endlichem Erzeugendensystem $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, so gilt

$$\Gamma_k = \{\gamma_{i_1}^{\pm 1} \cdots \gamma_{i_m}^{\pm 1} \mid \gamma_{i_j} \in \Gamma, m \leq k\} = \{\gamma_1^{a_1} \cdots \gamma_N^{a_N} \mid |a_1| + \cdots + |a_N| \leq k\}.$$

$\Rightarrow$ $N_\gamma(k) = \#\Gamma_k \leq (2k+1)^N$

$\Rightarrow$ π hat polynomiales Wachstum.

SATZ 6.8.3 (Milnor). *Sei M eine kompakte, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K < 0$. Dann hat $\pi_1(M)$ exponentielles Wachstum.*

KOROLLAR 6.8.4. *Insbesondere ist dann $\pi_1(M)$* nicht *abelsch.*

Beweis von Satz 6.8.3. Sei Γ das vorhin konstruierte Erzeugendensystem von $\pi_1(M; p)$, wobei $p \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\bar{B}(\tilde{p}, k) &\subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} F_{\chi^{-1}(\gamma)} \\
\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(\bar{B}(\tilde{p}, k)) &\leq \mathrm{vol}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} F_{\chi^{-1}(\gamma)}) \\
&= \mathrm{vol}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} \mathring{F}_{\chi^{-1}(\gamma)}) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_k} \mathrm{vol}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} \mathring{F}_{\chi^{-1}(\gamma)}) \\
&= \#\Gamma_k \cdot \mathrm{vol}(M) \\
\Rightarrow \quad N_\Gamma(k) &= \#\Gamma_k = \frac{\mathrm{vol}(\bar{B}(\tilde{p}, k))}{\mathrm{vol}(M)}
\end{aligned}$$

M ist kompakt

$\Rightarrow$ Es existiert ein $\delta < 0$, so dass $K \leq \delta$.

$\Rightarrow$ Für $\tilde{M}$ gilt ebenfalls $K \leq \delta < 0$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(\bar{B}(\tilde{p},k)) \underset{\text{Satz 6.7.2 und nach Cartan-Hadamard ist injrad}(\tilde{M})=\infty}{\leq} \mathrm{vol}(\bar{B}_{\mathbb{M}^n_\delta}(k)) = V^n_\delta(k)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad N_\Gamma(k) &\geq \frac{V^n_\delta(k)}{\mathrm{vol}(M)} = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\omega_{n-1}\int_0^k \mathfrak{s}^{n-1}_\delta(\varrho)\,d\varrho \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\mathrm{vol}(M)}\frac{1}{\sqrt{|\delta|}}\int_0^k \sinh(\sqrt{|\delta|}\varrho)^{n-1}\,d\varrho \quad \text{wächst exponentiell.}\end{aligned}$$

□

SATZ 6.8.5 (Milnor). *Sei M eine kompakte zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{ric} \geq 0$. *Dann hat $\pi_1(M)$ polynomielles Wachstum.*

KOROLLAR 6.8.6. *Eine kompakte zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit kann nicht zwei Metriken g_1 und g_2 besitzen, so dass $K_{g_1} < 0$ und* $\mathrm{ric}_{g_2} \geq 0$.

Beweis von Satz 6.8.5. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} F_{\chi^{-1}(\gamma)} \subset \bar{B}(\tilde{p}, 3\mathrm{diam}(M)+1).$$

Induktion nach k liefert dann

$$\begin{aligned}\bigcup_{\gamma\in\Gamma_k} F_{\chi^{-1}(\gamma)} &\subset \bar{B}(\tilde{p}, \mathrm{diam}(M)+k(2\mathrm{diam}(M)+1)) \\ \Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{vol}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_k} \mathring{F}_{\chi^{-1}(\gamma)})}_{=\sum_{\gamma\in\Gamma_k}\mathrm{vol}(\mathring{F}_{\chi^{-1}(\gamma)})} &\leq \mathrm{vol}(\bar{B}(\tilde{p}, \mathrm{diam}(M)+k(2\mathrm{diam}(M)+1))) \\ &= \#\Gamma_k\cdot\mathrm{vol}(M)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad N_\Gamma(k) &= \#\Gamma_k \\ &\leq \frac{\mathrm{vol}(\bar{B}(\tilde{p}, \mathrm{diam}(M)+k(2\mathrm{diam}(M)+1)))}{\mathrm{vol}(M)} \\ &\underset{\text{Satz von Bishop-Gromov}}{=} \frac{V^n_0(\mathrm{diam}(M)+k(2\mathrm{diam}(M)+1))}{\mathrm{vol}(M)} \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{n\mathrm{vol}(M)}(\mathrm{diam}(M)+k(2\mathrm{diam}(M)+1))^n\end{aligned}$$

□

Symbolverzeichnis

M, 1
S^n, 2
x^i, 3
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, 5
$\dot{c}(0)$, 12
T_pM, 12
TM, 21
$\pi : TM \to M$, 21
$df|_p$, 14
$\partial_{\dot{c}(0)} f$, 16
C_p^∞, 16
$\mathrm{Der}(C_p^\infty)$, 17
$C^k(U, TM)$, 33
Ξ_p, 33
$\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, 18
g_{ij}, 27
g^{ij}, 35
T_p^*M, 27
$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, 30
$\varphi^* g$, 31
$\mathrm{Isom}(M, g)$, 31
∇, 33
Γ_{ij}^k, 35
$\frac{\nabla \eta}{\partial t}$, 40
P_{c,t_0,t_1}, 43
$E[c]$, 45
$\Omega_{p,q}(M)$, 47
$\mathrm{Fix}(\psi)$, 49
$\mathcal{D}_p$, 51
$\exp_p(\xi)$, 51
$\nabla^2_{\xi,\eta}\zeta$, 55
$R(\xi, \eta)\zeta$, 56
$G_2(M, g)$, 63
$K(E)$, 63
$\mathrm{ric}(\xi, \eta)$, 64
$\mathrm{Ric}(\xi)$, 66
$\mathrm{scal}(p)$, 67
N_pM, 80
$II(\xi, \eta)$, 82
$\mathrm{grad} f$, 87
$S_\nu(\xi)$, 87
$\mathrm{S}_k^n(r)$, 89
$\mathrm{H}_{k-1}^n(r)$, 89
H^n, 89
$\mathrm{SO}(n, 1)$, **??**
$\mathbb{M}_\kappa^n$, 91
$\mathfrak{s}_\kappa$, 70
$\mathfrak{c}_\kappa$, 70
$[\xi, \eta]$, 100
$\Phi_t(p)$, 103
$\mathcal{L}_\xi \eta|_p$, 104
$E_1 \oplus E_2$, 108
$E_1 \otimes E_2$, 109
E^*, 109
$\bigwedge^k E$, 109
$E/\tilde{E}$, 109
$C^k(M, E)$, 111
$C_p^k(E)$, 111
$\Gamma_{i\alpha}^\beta$, 114
$R^\nabla(\xi, \eta)s$, 115
$*\alpha$, 122
$\delta\alpha$, 122
$L[c]$, 127
$d(p, q)$, 127
$B(p, r)$, 130
$\bar{B}(p, r)$, 130
$S(p, r)$, 130
$\mathrm{injrad}(p)$, 130
$\mathrm{diam}(M)$, 138
$\mathrm{Hess}_p f$, 140
R_ν, 142
$\mathfrak{ct}_\kappa$, 145
$\kappa_g \cdot \mathrm{id}$, 150
SM, 155
$c(\xi)$, 155
$\mathcal{C}_p^{\tan}$, 157
$\mathcal{C}_p$, 157
$\mathcal{D}_p^{\tan}$, 158
$\int_M f \, d\mathrm{vol}$, 162
$\mathrm{vol}(A)$, 162

$V_\kappa^n(r)$, 163
$\pi_1(M;p)$, 166
$F_{\tilde{p}}$, 168
$\overset{\circ}{F}_{\tilde{p}}$, 168
N_Γ, 169
$p << q$, **??**
$p < q$, **??**
$p \leq q$, **??**
$I^+(A)$, **??**
$J^+(A)$, **??**
$I^-(A)$, **??**
$J^-(A)$, **??**
$\tau(p,q)$, **??**

Literaturverzeichnis

[Milnor] J. MILNOR: *Topology from the differential viewpoint.* University Press of Virginia, Charlottesville 1965.

[O'Neill] B. O'NEILL: *Semi-Riemannian geometry.* Academic Press, New York 1983.

[Sakai] T. SAKAI: *Riemannian geometry.* AMS, Providence 1996.

[Warner] F. W. WARNER: *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg 1983.

Index

C^∞-Atlas, 9
C^∞-Atlas, orientierter, 119
C^∞-Verträglichkeit von Karten, 9
1. Fundamentalform, 29
2. Fundamentalform, 82

Abbildung, differenzierbare, 10
Abbildung, stetige, 1
äußeres Produktbündel, 109
Anti-deSitter-Raumzeit, 89
Atlas, 9

Bianchi-Identität, 57, 116
Bishop-Gromov, Satz von, 163
Bonnet-Myers, Satz von, 138

Cartan-Hadamard, Satz von, 155
Christoffel-Symbole, 35

Derivation, 16
deSitter-Raumzeit, 89
Diffeomorphismus, 11
Differential einer Abbildung, 14
Differentialform, 109
differenzierbare Struktur, 10
Dirichlet-Fundamentalbereich, 168
duales Bündel, 109
Durchmesser einer riemannschen Mannigfaltigkeit, 138

Einheitstangentialbündel, 155
Einstein'sche Summenkonvention, 21
Energie einer Kurve, 45
euklidische Bewegungen, 31

flache Mannigfaltigkeit, 59
Fluss eines Vektorfeldes, 102
Fundamentalgruppe, 166

Gauß-Formel, 82
Gauß-Krümmung, 64
Gauß-Lemma, 128
Geodätische, 48
geodätische Polarkoordinaten, 128
Geodätische, geschlossene, 159
Geodätische, minimale, 131
geodätische Krümmung, 150
geodätische Schleife, 159
geodätisches Dreieck, 94
geodätische Variation, 68
Geradenbündel, 106
Gradient einer differenzierbaren Funktion, 86
Gruppenwachstum, exponentielles, 170
Gruppenwachstum, polynomiales, 170

Hessesche einer Funktion, 140

Hodge-$*$-Operator, 119

Homöomorphismus, 1
Hopf-Rinow, Satz von, 132
hyperbolischer Raum, 89

Injektivitätsradius, 130
Integralkurve, 101
Isometrie, 31
Isometrie, lineare, 26
Isometrie, lokale, 31
Isometrie-Gruppe, 31

Jacobi-Feld, 68
Jacobi-Identität, 100

Karte, 3
Klingenbergs Lemma, 160
Koableitung von Differentialformen, 122
komplex-projektiver Raum, 8
Kosinussatz, 96
Kotangentialraum, 27
kovariante Ableitung, 39
Krümmungstensor eines Zusammenhangs, 115

Länge einer Kurve, 127
Levi-Civita-Zusammenhang, 33
Lie-Ableitung eines Vektorfeldes, 104
Lie-Klammer, 100
lokaler Diffeomorphismus, 15
lokales Koordinatensystem, 3
Lorentz-Boost, 94
Lorentz-Mannigfaltigkeit, 30
Lorentz-Metrik, 30
Lorentztransformationen, zeitorientierungserhaltende, 92

Mannigfaltigkeit, orientierte, 119
Mannigfaltigkeit, differenzierbare, 10
Mannigfaltigkeit, einfachzusammenhängende, 166
Mannigfaltigkeit, geodätisch vollständige, 132
Mannigfaltigkeit, riemannsche, 30
Mannigfaltigkeit, topologische, 1
Mannigfaltigkeit, vollständige, 132
Minkowski-Skalarprodukt, 30
Modellraum konstanter Krümmung, 91

Normalraum, 80
Nullkurve, 48

Orientierungsverträglichkeit von Karten, 119

Parallelenaxiom, 97
paralleles Vektorfeld längs einer Kurve, 41
Parallelverschiebung, 43
Parallelverschiebung auf der Sphäre, Webseite, 45
Parametrisierung nach Bogenlänge, 48
Parametrisierung nach Eigenzeit, 48
Poincaré-Transformation, 31
pseudo-hyperbolischer Raum, 88
Pseudosphäre, 88
Pull-Back einer Metrik, 31
Pull-Back eines Vektorbündels, 110

Quotientenbündel, 109

rauchscher Vergleichssatz, zweiter, 153
rauchscher Vergleichssatz, erster, 152
reell-projektiver Raum, 5
Regelfläche in einer riemannschen Mannigfaltigkeit, 150
regulärer Punkt, 77
regulärer Wert, 77
Riccati-Gleichung, 142
Riccati-Ungleichung für mittlere Krümmung, 143
Riccati-Vergleichssatz, 145
Ricci-Krümmung, 64
Richtungsableitung, 16
riemannsche Exponentialabbildung, 51
riemannsche Metrik, 30
riemannsche Normalkoordinaten, 53
riemannscher Abstand, 127
riemannscher Krümmungstensor, 56

Sard, Satz von, 77
Schleife durch einen Punkt, 166
Schnitt in einem Vektorbündel, 107
Schnittkrümmung, 63
Schnittort, 157
semi-riemannsche Hyperfläche, 86
semi-riemannsche Metrik, 27
Signum einer Hyperfläche, 86
singulärer Punkt, 77
singulärer Wert, 77
Sinussatz, 96
Skalarkrümmung, 67
stereographische Projektion, 2
symmetrische Bilinearform, 25

Tangentialbündel, 21
Tangentialraum, 12
Tangentialvektor, 12
Teilung der Eins, 124
Tensorbündel, 109
Tensorfeld, 109
Topologie, 1
topologischer Raum, 1

Überlagerung, 154
Überlagerung, riemannsche, 154
Überlagerung, universelle, 167
Untermannigfaltigkeit, differenzierbare, 75
Untermannigfaltigkeit, semi-riemannsche, 79
Untermannigfaltigkeit, totalgeodätische, 84
Untermannigfaltigkeitskarte, 75
Untervektorbündel, 106

Variation der Energie, zweite, 137
Variation der Energie, erste, 46
Variationsvektorfeld, 45
Variation von Kurven, 45

Vektorbündel, 105
Vektorbündel, riemannsches, 110
Vektorbündel-Homomorphismus, 106
Vektorbündel-Isomorphismus, 107
Vektorfeld, 23
Vektorfeld, vollständiges, 104
Vektorfelder längs Abbildungen, 38
verallgemeinerte Sinusfunktion, 70
verallgemeinerte Abstandsfunktion, 140
verallgemeinerte Kosinusfunktion, 70
verallgemeinerte Kotangensfunktion, 145
Volumen einer Teilmenge einer riemannschen Mannigfaltigkeiten, 162
Volumenform, 119

Weingarten-Abbildung, 87
Whitney-Summe, 108

zusammenhängend, 4
Zusammenhang, flacher, 117
Zusammenhang, hermitescher, 113
Zusammenhang, metrischer, 112
Zusammenhang eines Vektorbündels, 111
zweite kovariante Ableitung, 55