Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

Andreas Knauf*

Sommersemester 2006

Vorlesungsbegleitendes Skript. Anregungen und Kritik sind willkommen!

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen **6**
2.1 Definitionen und Beispiele 6
2.2 Lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung 12
2.3 Globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung 20
2.4 Transformation in ein dynamisches System 22

3 Lösungsmethoden für lineare DGLn **25**
3.1 Homogene lineare autonome DGLn 26
3.2 Explizit zeitabhängige lineare DGLn 34
3.3 Quasipolynome 40

4 Klassifikation linearer Flüsse **43**
4.1 Konjugationen dynamischer Systeme 43
4.2 Hyperbolische lineare Vektorfelder 46
4.3 Lineare Flüsse in der Ebene 50
4.4 Beispiel: Feder mit Reibung 52

*Mathematisches Institut, Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstr. $1\frac{1}{2}$, D–91054 Erlangen, Germany. e-mail: knauf@mi.uni-erlangen.de, web: www.mi.uni-erlangen.de/∼knauf

5 Stabilität von Gleichgewichtslagen **58**
5.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung 58
5.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen 62
5.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen 64

6 Lösung nichtautonomer bzw. nichtlinearer DGLn **68**
6.1 Lösungsbegriffe 68
6.2 Elementare analytische Lösungsmethoden 70
6.2.1 Trennung der Variablen 70
6.2.2 Konstanten der Bewegung 73
6.2.3 Potenzreihen als Lösungen 74
6.2.4 Dynamische Systeme in der Ebene 76
6.3 Numerische Integration von DGLn 77

7 Der Hauptsatz der Theorie gewöhnlicher DGLn **82**
7.1 Das maximale Existenzintervall 82
7.2 Linearisierung der DGL entlang einer Trajektorie 85
7.3 Aussage und Beweis des Hauptsatzes 87
7.4 Folgerungen aus dem Hauptsatz 89

8 Rand- und Eigenwertprobleme **91**
8.1 Lösungen linearer Randwertprobleme 91
8.2 Das Sturm-Liouville-Problem 94

9 Besondere Klassen von Differentialgleichungen **96**
9.1 Gradienten–Differentialgleichungen 96
9.2 Hamiltonsche Differentialgleichungen 107

10 Symbolische Dynamik **130**
10.1 Das Modellsystem 130
10.2 Diskretisierung 131
10.3 Iteration der Poincaré-Abbildung 140
10.4 Der Shiftraum 144

Literatur **154**

Index **156**

Danksagung: Ich danke Frau I. Moch für ihre hervorragende Arbeit beim Schreiben des Manuskriptes und Herrn Dipl.-Math. Chr. Schumacher sowie zahlreichen Studierenden für ihre Korrekturvorschläge. Erlangen, im Juli 2006, A.K.

Vorbemerkungen: Die Kapitel 2, 3, 5 und 6 des Skriptes sind Erweiterungen von Kapiteln meiner Skripten *Analysis II* bzw. *Analysis III*, siehe [Kn].
Dieses Skript kann kein Lehrbuch ersetzen. Einige Lehrbücher über gewöhnliche Differentialgleichungen sind im Literaturverzeichnis erwähnt.

1 Einführung

Diese Einführung zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen" stellt typische Fragestellungen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen anhand der Theorie der Planetenbewegungen vor.

Sowohl die Untersuchung von Differentialgleichungen als auch die physikalisch begründete Theorie der Planetenbewegungen gehen auf Isaac Newton (1643–1727) zurück.

- Der *Mathematiker* Newton ist (zusammen mit Leibniz) als Begründer der Differentialrechnung bekannt.
- Der *Physiker* Newton gab dem Gesetz

$$\text{Kraft} \quad = \quad \text{Masse} \quad \times \quad \text{Beschleunigung} \tag{1.1}$$

  seinen Namen.

Diese beiden Tätigkeitsfelder Newtons hängen miteinander zusammen. Ist nämlich

- $x(t) \in \mathbb{R}^3$ der *Ort* eines Massenpunktes zur Zeit $t \in \mathbb{R}$, dann sind $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ seine *Geschwindigkeit* und $\ddot{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ seine *Beschleunigung* zu diesem Zeitpunkt.
- Andererseits kann die *Kraft* F von Ort und Geschwindigkeit des Teilchens und auch direkt von der Zeit abhängen, sodass Gleichung (1.1) die Form

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

  besitzt. Dabei ist die Kraftfunktion F als bekannt vorausgesetzt.

Dies ist ein Beispiel einer Differentialgleichung, denn es handelt sich um eine Gleichung, die von der gesuchten, hier vektorwertigen Funktion $x(t)$ und ihren Ableitungen erfüllt wird.

Beispielsweise wirkt auf die Erde (mit der Masse $m > 0$) die Kraft

$$F(x) = -m\gamma \frac{x}{\|x\|^3} \quad , \quad (x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}), \tag{1.2}$$

wobei vereinfachend vorausgesetzt wird, dass die Sonne sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Eine genauere Behandlung zeigt, dass sich das echte 2–Körperproblem, bei dem Erde und Sonne sich um ihren Schwerpunkt

bewegen, auf das diskutierte Zentralkraftproblem reduzieren lässt. Die positive Konstante γ ist das Produkt von Gravitationskonstante und Sonnenmasse.

Gleichung (1.1) besitzt hier also nach Kürzung durch m die Form

$$\boxed{\ddot{x} = -\gamma \frac{x}{\|x\|^3}}. \tag{1.3}$$

Newton löste diese Differentialgleichung und leitete damit die bisher nur empirisch aus den Beobachtungsdaten abgelesenen Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung aus dem mechanischen Grundgesetz (1.1) und (1.2) ab.

Dies war der erste Triumph der neuen Naturwissenschaft — 1687 in seinem Hauptwerk "Philosophiae naturalis principia mathematica"(kurz: *Principia*) veröffentlicht.

Newton war sich der Bedeutung seiner Erkenntnis bewusst, und da er außer zu Mathematik und Physik auch zum Geheimnisvollen und Mystischen neigte, verschlüsselte er einen lateinischen Satz in einem Anagramm. Der Satz lautete, frei übersetzt [Ar2]:

"Es ist nützlich, Differentialgleichungen zu lösen."

Wir wollen Newtons Rat folgen und (1.3) lösen.

1. Als erstes stellen wir fest, dass der Planet für alle Zeiten in der durch seinen Anfangsort und seine Anfangsgeschwindigkeit aufgespannten *Bahnebene* bleibt, denn

$$\frac{d}{dt}[x(t) \times \dot{x}(t)] \quad = \quad \dot{x} \times \dot{x} + x \times \ddot{x} = \dot{x} \times \dot{x} - \gamma \frac{x \times x}{\|x\|^3} = 0,$$

   der auf dieser Ebene senkrechte Vektor $x(t) \times \dot{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ ist also zeitlich konstant.

2. Nun ist es nützlich, den Ort $x(t)$ in dieser Bahnebene durch eine komplexe Zahl $z(t)$ zu beschreiben, wobei $z(t) := x_1(t) + ix_2(t)$, falls o.B.d.A. $x \times \dot{x}$ in 3–Richtung weist.

   Damit ist in *Polarkoordinaten* $z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$, also

$$\dot{z} \;=\; (\dot{r} + i\dot{\varphi}r)e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \ddot{z} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r + i(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}))e^{i\varphi}.$$

   Nach Division durch $e^{i\varphi}$ und Trennung von Real- und Imaginärteil führt die Newtonsche Kraftgleichung $\ddot{z} = -\gamma\frac{z}{|z|^3}$ damit zu den beiden verkoppelten reellen Differentialgleichungen

   (I) $\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r + \frac{\gamma}{r^2} = 0$

   (II) $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$

3. Wegen $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$ ist $l := r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$ eine Konstante der Bewegung. Die Multiplikation dieser Größe mit der Masse m des Planeten ergibt definitionsgemäß den *Drehimpuls*. Dieser ist also zeitlich konstant.

4. Substitution von $\dot{\varphi} = l/r^2$ in (I) ergibt die Gleichung

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2} = 0.$$

   Auch hier lässt sich eine Konstante der Bewegung finden, denn mit

$$U_l(r) := \frac{l^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r} \quad \text{und} \quad H_l(r, \dot{r}) := \tfrac{1}{2}\dot{r}^2 + U_l(r)$$

   ist

$$\frac{d}{dt}H_l\big(r(t), \dot{r}(t)\big) \;=\; \dot{r}\left(\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2}\right) = 0,$$

   sodass H_l zeitlich konstant ist: $H_l(r(t), \dot{r}(t)) = H_l(r(0), \dot{r}(0)) =: E$. Physikalisch wird $E \cdot m$ als die *Gesamtenergie* des Planeten interpretiert.

5. Nun sind wir zunächst weniger an der Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{r} = \pm\sqrt{2(E - U_l(r))}, \tag{1.4}$$

   also der Zeitabhängigkeit des Radius interessiert, als an der Bahnform $R(\varphi) := r(t(\varphi))$. Wir können zu φ als unabhängiger Variable übergehen, wenn wir voraussetzen, dass $l = r^2\dot{\varphi} \neq 0$ ist.

Dann ergibt sich aus (1.4)

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm R^2\sqrt{2(E - U_l(R))}}{l}$$

oder durch Separation der Variablen und Einsetzen von U_l

$$\int \frac{l\,dR}{\pm R\sqrt{2ER^2 + 2\gamma R - l^2}} = \int d\varphi' = \varphi - \varphi_0.$$

Mit den Konstanten $e := \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\gamma^2}}$ und $p := l^2/\gamma$ lässt sich der Integrand der linken Seite umformen:

$$\frac{l}{R\sqrt{2ER^2 + 2\gamma R - l^2}} = \frac{p/R}{\sqrt{e^2R^2 - (p - R)^2}}.$$

Es ergibt sich laut Integraltabelle

$$\arccos\left(\frac{p/R(\varphi) - 1}{e}\right) = \varphi - \varphi_0$$

oder

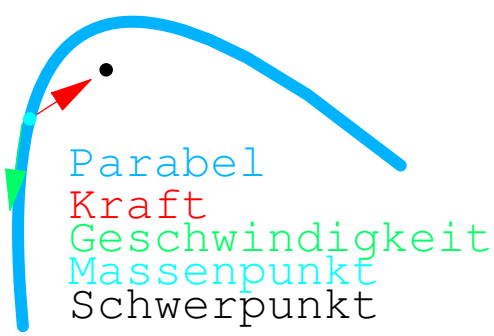
$$R(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

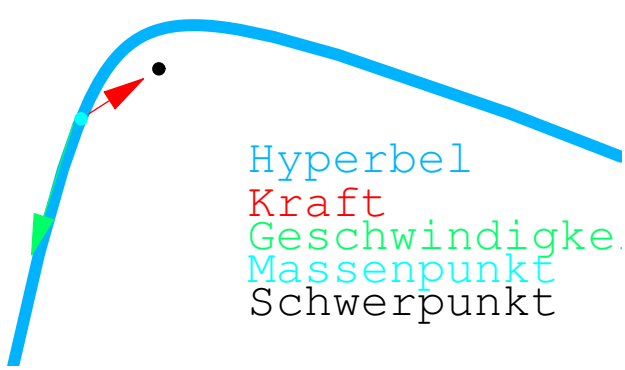
Dies ist aber die Gleichung eines Kegelschnittes, wobei die Konstante e als *Exzentrizität* und p als *Parameter* des Kegelschnittes bezeichnet wird.

Es ergibt sich für Energien

- $E < 0: \ e < 1$ (Ellipse)
- $E = 0: \ e = 1$ (Parabel)
- $E > 0: \ e > 1$ (Hyperbel)

Damit haben wir das erste Keplersche Gesetz abgeleitet.





Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass die Verbindungsstrecke zwischen Sonne und Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Es ergibt sich aus der Konstanz von $l = r^2\dot{\varphi}$, denn die im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ überstrichene Fläche ist

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}R(\varphi)^2\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r(t)^2 \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt = \tfrac{1}{2}l(t_2 - t_1).$$

Ebenso könnten wir das dritte Keplersche Gesetz bestätigen.

Wir haben also die Differentialgleichung des Keplerproblems gelöst. Ohne dass dies vielleicht klar wurde, haben wir von der *Symmetrie* des untersuchten Systems, nämlich der Invarianz von (1.3) unter den orthogonalen Transformationen des $\mathbb{R}^3$, profitiert, indem wir in den Schritten 1) und 2) die festgestellt haben, dass bestimmte Grössen zeitlich konstant sind und damit die Zahl der Variablen reduzieren konnten.

In (1.2) kommen maximal zweite zeitliche Ableitungen von x vor, und entsprechend müssen als *Anfangswerte* zur Zeit 0 Anfangsort $x(0) \in \mathbb{R}^3$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben werden. Dann *existiert für alle Zeiten eine eindeutige Lösung von (1.3)* (außer für den bei linearer Abhängigkeit von $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ auftretenden Fall der Kollision mit der Zentralmasse bei $x = 0$).

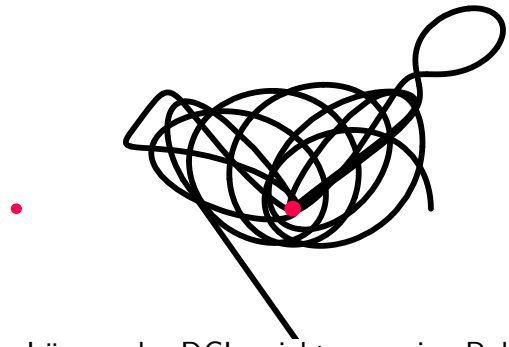
Diesem Erfolg steht aber ein Misserfolg gegenüber. Verallgemeinert kann man die Bewegung von $n \geq 2$ Massenpunkten untersuchen, die sich gegenseitig anziehen. Man stelle sich z.B. das Sonnensystem mit Sonne, Planeten und Monden vor.

Das 3–Körperproblem ist für uns von besonderer Bedeutung, denn die Masse von Jupiter beträgt etwa $1/1000$ der Sonnenmasse, sodass man erwarten kann, dass schon nach ca. 1000 Jahren seine Anwesenheit die Erdbahn merklich beeinflusst.

Das 3–Körperproblem widerstand aber in den 200 auf das Erscheinen der "Principia" folgenden Jahren allen Lösungsversuchen.

1885 wurde dem französischen Mathematiker Henri Poincaré ein von König Oskar II. von Schweden auf die Lösung dieses Problems ausgesetzter Preis verliehen. Poincaré hatte das Problem aber nicht allgemein gelöst, sondern Indizien dafür gefunden, dass Lösungsansätze divergieren mussten (siehe [DH]).

1.1 Bemerkung Tatsächlich sind die Bahnformen schon des sog. restringierten Dreikörperproblems (bei dem sich ein Satellit mit verschwindend kleiner Masse im Gravitationsfeld zweier um ihren Schwerpunkt kreisenden Himmelskörpern bewegt), sehr kompliziert.



In der nebenstehenden numerischen Lösung der DGLn sieht man eine Bahnform des Satelliten im mitgedrehten Koordinatensystem, in dem die Orte der beiden Himmelskörper fix sind.

Die Feststellung Poincarés leitete eine neue Epoche ein, in der mehr Gewicht auf qualitative Eigenschaften von Differentialgleichungen gelegt wurde. Beispielsweise wird gefragt, ob das Sonnensystem stabil ist oder nicht, ob ohne Reibungskräfte Himmelskörper eingefangen werden können etc. Beide Typen von Fragen, die nach den expliziten Lösungen von Differentialgleichungen und die nach ihren qualitativen Eigenschaften, werden in der Vorlesung ihren Platz haben.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Definitionen und Beispiele

Differentialgleichungen sind so vielfältig wie die Naturvorgänge, die sie beschreiben. Wir beginnen mit (etwas informellen) Definitionen und einer Grobeinteilung:

2.1 Definition • *Eine* **Differentialgleichung (DGL)** *ist eine Gleichung, in der Ableitungen einer oder mehrerer Funktionen von einer oder mehreren Variablen auftreten. Die gesuchten Unbekannten sind hierbei die Funktionen.*
• *Hängen die Funktionen von nur* **einer** *Variablen ab, so heißt die DGL* **gewöhnlich**, *sonst* **partiell**.
• *Werden mehrere Funktionen gesucht, so spricht man von einem* **Differentialgleichungssystem**, *sonst von einer* **Einzel-DGL**.

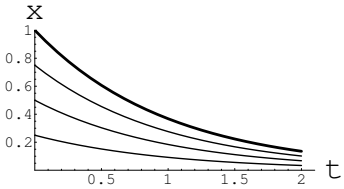
2.2 Beispiele 1. Für $c > 0$ beschreibt die gewöhnliche Einzel–DGL

$$\frac{dx}{dt}(t) = -c \cdot x(t)$$

z.B. radioaktiven Zerfall mit Stoffmenge x als Funktion der Zeit t und Zerfallskonstante c. Ist die Stoffmenge zur Zeit $t = 0$ gleich $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist

$$x(t) = x_0 e^{-ct} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

die eindeutige Lösung. Wir erhalten also eine einparametrige Schar von Lösungen, die linear vom Anfangswert x_0 abhängt:



2. Die Bahn eines geworfenen Körpers im konstanten Schwerefeld der Erde mit Erdbeschleunigung[1] $g > 0$ wird unter Vernachlässigung der Luftreibung durch das gewöhnliche DGL–System,

$$\tfrac{d^2x_1}{dt^2}(t) = 0 \quad , \quad \tfrac{d^2x_2}{dt^2}(t) = -g$$

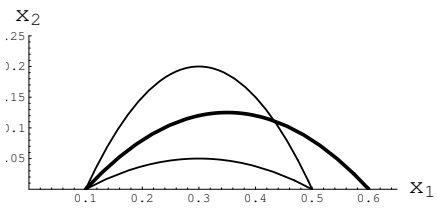
beschrieben. Dabei bezeichnet x_1 die Horizontalkomponente und x_2 die Vertikalkomponente des Ortes als Funktionen der Zeit t.
Für Anfangsort $x_0 = \binom{x_{1,0}}{x_{2,0}} \in \mathbb{R}^2$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \binom{v_{1,0}}{v_{2,0}} \in \mathbb{R}^2$ ist die **Lösung:**

$$x_1(t) = x_{1,0} + v_{1,0}t \quad , \quad x_2(t) = x_{2,0} + v_{2,0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dies entspricht den Geschwindigkeiten

$$v_1(t) := \frac{d}{dt}x_1(t) = v_{1,0} \quad , \quad v_2(t) := \frac{d}{dt}x_2(t) = v_{2,0} - gt \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Zeichnung zeigt verschiedene Wurfbahnen bei gleichem Anfangsort und Betrag der Anfangsgeschwindigkeit, aber unterschiedlicher Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. Der Wurf mit Winkel $\pi/4$ führt dabei am weitesten.



3. Die *Wellengleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ mit Parameter $c > 0$ (*Ausbreitungsgeschwindigkeit*) ist ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung. Für beliebige Funktionen $f_\pm \in C^2(\mathbb{R})$ ist

$$u(x,t) := f_+(x - ct) + f_-(x + ct) \qquad (x, t \in \mathbb{R})$$

[1] In Bodenhöhe ist $g = 9.81 m/s^2$

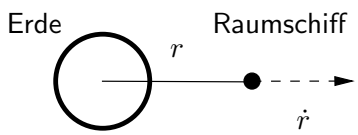
eine Lösung. Eine physikalische Anwendung ist die Ausbreitung elektrischer Signale $f_\pm$ in einem Telegraphendraht, wobei die Position mit x, die Zeit mit t bezeichnet wird.

Wir werden in dieser Vorlesung nur gewöhnliche DGLn (englisch: *ordinary differential equations* oder *o.d.e.*) behandeln.

2.3 Definition *Die Ordnung des höchsten in der DGL auftretenden Differentialquotienten wird* **Ordnung der DGL** *genannt.*

2.4 Beispiele

1. 2.2.1. ist von erster Ordnung
2. 2.2.2. ist von zweiter Ordnung
3. Die DGL (1.3) und ihr durch Spezialisierung auf verschwindenden Drehimpuls entstehender Radialteil $\frac{d^2r}{dt^2}(t) = -\frac{M}{r^2(t)}$ sind von zweiter Ordnung. Letztere DGL beschreibt z.B. die Bewegung eines sich radial vom Erdmittelpunkt wegbewegenden Raumschiffes. $M > 0$ ist die Erdmasse, r der Abstand des Raumschiffes vom Erdmittelpunkt und $\dot{r} = \frac{d}{dt}r$ die Radialgeschwindigkeit.



2.5 Definition • *Eine gewöhnliches DGL-System für die Funktionen $x_1, \ldots, x_m$ heißt* **linear**, *wenn es die Form*

$$\sum_{i=0}^{n} A^{(i)}(t)x^{(i)}(t) \quad = \quad b(t)$$

hat. Dabei bezeichnet $x^{(i)} := (\frac{d^i}{dt^i}x_1, \ldots, \frac{d^i}{dt^i}x_m)^t$ den Vektor der i–ten Ableitungen; $A^{(i)}(t) \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$ und $b(t) \in \mathbb{R}^m$ sind vorgegebene Matrix– bzw. vektorwertige Funktionen.
• *Andernfalls heißt das DGL-System* **nicht linear**.
• *Eine lineare DGL heißt* **homogen**, *wenn $b(t) = 0$ für alle t, sonst* **inhomogen**.
• *Die Komponenten b_l von b heißen* **Störfunktionen**.

Beispiel 2.4.1. ist linear homogen.
Beispiel 2.4.2. ist linear inhomogen.
Beispiel 2.4.3. ist nicht linear.

Ab jetzt werden viele Begriffe nur für Einzel–DGLn eingeführt. Das meiste überträgt sich aber auf DGL–Systeme.

2.6 Definition 1. *Eine DGL heißt* **implizit**, *wenn sie die Form*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

hat, **explizit**, *wenn sie die Form*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

hat.

2. *Eine n–mal differenzierbare auf dem offenen Intervall I definierte Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ heißt* **explizite Lösung** *der DGL (2.1) bzw. (2.2), wenn gilt:*

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \qquad (t \in I)$$

$$\textit{bzw.} \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \qquad (t \in I).$$

Beispiele 2.4.1.–3. waren explizite DGLn, für 1. und 2. wurden auch (die) expliziten Lösungen angegeben.

2.7 Bemerkung Algebraische Gleichungen, wie z.B. $ax^2 + bx + c = 0$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, sind uns vertraut. Diese sind *Aussageformen* über dem Variablenbereich $\mathbb{R}$, es entsteht also eine (wahre oder falsche) Aussage, wenn wir eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ einsetzen.

Ähnlich betrachten wir z.B. eine DGL vom Typ (2.1) als Aussageform über dem Variablenbereich $C^n(\mathbb{R})$, wobei die Lösungen wieder die wahren Aussagen liefern [Wu].

2.8 Beispiel 4. $y\frac{dy}{dx} + x = 0$ ist eine implizite nichtlineare DGL. Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = c > 0$ ist die allgemeine Lösung, aber in *impliziter* Form.

Explizite Lösung: $y(x) = \pm\sqrt{c - x^2}$ für $|x| < \sqrt{c}$, also

$$\frac{dy}{dx} = \mp\frac{x}{\sqrt{c - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

2.9 Definition

- *Eine einzelne Lösung (ohne frei wählbare Konstanten) heißt* **spezielle** *oder* **partikuläre** *Lösung.*
- *Eine parameterabhängige Lösung einer DGL n–ter Ordnung heißt* **allgemeine** *Lösung, wenn sie n frei wählbare Konstanten enthält,*

- *eine parameterabhängige Lösung heißt* **vollständig**, *wenn alle speziellen Lösungen durch Wahl geeigneter Parameterwerte aus ihr hervorgehen.*

- *Eine nicht zu einer parameterabhängigen Lösung gehörende spezielle Lösung heißt* **singulär**.

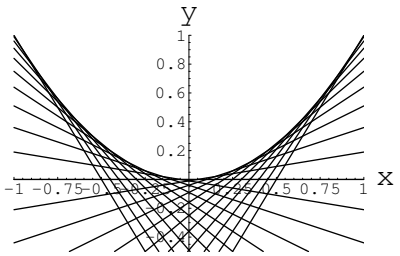
Beispiele 2.2.1. und 2.: Die allgemeinen = vollständigen Lösungen wurden angegeben. Eine partikuläre Lösung von 2. ist z.B. $x_1(t) = 0,\ x_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

Beachte: In 2. gab es *vier* Parameter $x_{1,0}, x_{2,0}, v_{1,0}, v_{2,0}$, denn es waren zwei DGLn zweiter Ordnung, $2 \times 2 = 4$.
Beispiel 2.8.4.: Hier war $c \geq 0$ Parameter der allgemeinen = vollständigen Lösung.

2.10 Beispiel 5. $(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$

ist eine implizite nichtlineare DGL erster Ordnung.

Die *allgemeine* Lösung: $y(x) = 2cx - c^2,\ c \in \mathbb{R}$ ist eine durch c parametrisierte Geradenschar.
Dies ist aber *nicht* die *vollständige* Lösung, denn es existiert noch die *singuläre* Lösung $y(x) = x^2$. Diese ist die Einhüllende der Geradenschar, siehe Abbildung.



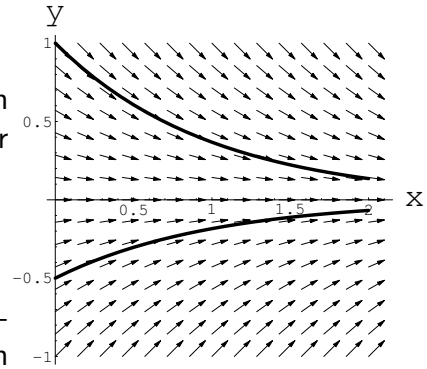
Frage:
- Wie findet man Lösungen?
- Woher weiß man, dass man alle gefunden hat?

Diese Frage beschäftigt seit der Zeit Newtons viele Mathematiker (und uns in den nächsten Wochen[2]).

Wir betrachten zunächst die expliziten Einzel-DGLn erster Ordnung

[2]Numerische Methoden zur Lösung von DGLn werden z.B. in [DB] behandelt

$$y' = f(x,y) \qquad (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2,\ U \text{ offen.}$$



Geometrische Interpretation: Zeichnet man an jedem Punkt $(x,y) \in U$ eine Gerade der Steigung $f(x,y)$, dann ist

$$\mathrm{graph}(\tilde{y}) = \{(x, \tilde{y}(x))\}$$

jeder speziellen Lösung $\tilde{y} \equiv \tilde{y}(x)$ der DGL eine Kurve in U, die überall *tangential* an den lokalen Geraden ist.

Beispiel $y' = -cy$, also $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -cy$, siehe Abbildung.

Um also die durch den Punkt (x,y) gehende spezielle Lösung zu finden, bewegt man sich, von (x,y) ausgehend, tangential zum Richtungsfeld.

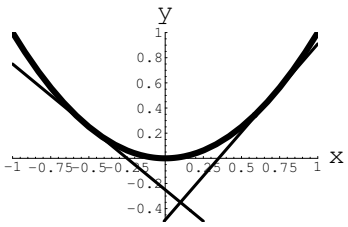
Vorsicht: Woher wissen wir überhaupt, dass durch jeden Punkt $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ nur *eine* Lösungskurve geht?

2.11 Beispiele (Gegenbeispiele zur eindeutigen Lösbarkeit)

1. **Implizite DGL, Beispiel 2.8.4.**

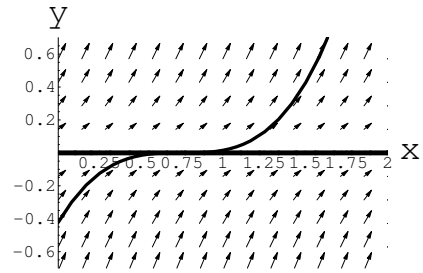
$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0 \tag{2.3}$$

Hier gehen durch jeden Punkt (x_0, y_0) unterhalb des Graphen der Parabel $y = x^2$ zwei Lösungskurven, d.h. an die Parabel tangentiale Geraden. Deren Steigungen entsprechen den zwei Lösungen der quadratischen Gleichung (2.3) für y' am Punkt (x_0, y_0).



2. **Explizite DGL, f nicht lipschitzstetig**

$y' = f(y)$ mit $f(y) := 3\sqrt[3]{y^2}$
Allgemeine Lösung:
$y(x) = (x-c)^3,\ c \in \mathbb{R}$
Singuläre Lösung: $y(x) = 0$.
Durch jeden Punkt auf der x–Achse gehen damit mindestens zwei Lösungskurven!



Im zweiten Beispiel fällt auf, dass die Funktion f bei 0 nicht lipschitzstetig, geschweige denn differenzierbar war.

Nach dieser informellen Übersicht über die bei gewöhnlichen DGLn auftretenden Phänomene zeigen wir nun mathematisch rigoros die (lokale) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung genügend regulärer expliziter gewöhnlicher DGLn 1. Ordnung. Später werden wir sehen, dass damit auch die gleiche Frage für explizite DGLn höherer Ordnung beantwortet wird.

2.2 Lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Wir werden nun sehen, dass bei etwas mehr Regularität von f die DGL lokal eindeutig lösbar ist. Dazu schauen wir uns aber gleich die n–dimensionale Situation an:

2.12 Definition

- *Ist der* **erweiterte Phasenraum** $U \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ *offen, und das* **zeitabhängige Vektorfeld** $f : U \to \mathbb{R}^n$ *stetig, dann heißt die Gleichung*

$$\boxed{\dot{x} = f(t,x)}$$

  nicht autonome *oder* **explizit zeitabhängige** *DGL.*

- *Ist speziell* $U = \mathbb{R}_t \times \tilde{U}$ *mit* **Phasenraum** $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n_x$ *offen und* f *von der Form* $f(t,x) = \tilde{f}(x)$*, dann heißt die DGL* **autonom** *oder* **dynamisches System**.

- *Eine differenzierbare Funktion* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n_x,\ I \subseteq \mathbb{R}_t$ *Intervall heißt* **Lösung** *der DGL, wenn* $\mathrm{graph}(\varphi) \subset U$ *und*

$$\frac{d\varphi}{dt}\,|_{t=\tau} = f(\tau, \varphi(\tau)) \qquad (\tau \in I).$$

- $\varphi : I \to \mathbb{R}^n_x$ **genügt** *der* **Anfangsbedingung** (t_0, x_0), *wenn* $t_0 \in I$, $(t_0, x_0) \in U$ *und* $\varphi(t_0) = x_0$ *gilt.* φ **löst das Anfangswertproblem** *(AWP), wenn gilt:*

$$\frac{d\varphi}{dt}\,|_{t=\tau} = f(\tau, \varphi(\tau)) \quad (\tau \in I) \quad \textit{und} \quad \varphi(t_0) = x_0 \tag{2.4}$$

- *Das zeitabhängige Vektorfeld* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *genügt*
  - **global einer Lipschitz-Bedingung** *mit Konstante* L, *wenn*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad ((t, x_i) \in U)$$

  - *und* **(lokal) einer Lipschitz-Bedingung**, *wenn jeder Punkt* (τ, x) *aus* U *eine Umgebung* $V \subseteq U$ *besitzt, sodass für eine Konstante* $L = L(\tau, x)$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad ((t, x_i) \in V).$$

2.13 Bemerkungen 1. Man beachte, dass die Lipschitzstetigkeit nur bezüglich der x–Variablen gefragt ist.

2. Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, dann ist in einem konvexen[3] kompakten Gebiet $K \subset U$ (nach Satz 8.13 in Teil II von [Kn][4]) die lokale Lipschitz-Bedingung mit der Konstante $L := \max_{(t,x)\in K} \|D_x f(t, x)\|$ erfüllt.

3. Es war schon festgestellt worden, dass aus einer Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n_x$ des AWP durch Restriktion $\varphi\,|_{\tilde{I}}$ auf ein kleines, t_0 enthaltendes Intervall $\tilde{I} \subset I$ eine von φ im strengen Sinn verschiedene Lösung entsteht, denn die Definitionsbereiche der beiden Funktionen φ und $\varphi|_{\tilde{I}}$ sind ja unterschiedlich. In diesem Sinn ist die Lösung des AWP also nicht eindeutig.

   Da wir aber später sowieso nach dem größtmöglichen Zeitintervall I suchen, für das die Lösung von (2.4) definiert ist, interessiert uns diese triviale Verschiedenheit der Lösungen nicht. Daher wird sie wegdefiniert:

[3] **Def.:** $V \subset \mathbb{R}^m$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $v_0, v_1 \in V$ gilt:
$v_a := (1-a)v_0 + av_1 \in V \qquad (a \in [0, 1])$.

[4] **Bew. (zeitunabhängiger Fall):** Für $v_0, v_1 \in V$ ist
$f(v_1) - f(v_0) = \int_0^1 \frac{d}{da} f(v_a)\, da = \int_0^1 Df(v_a)\frac{dv_a}{da}\, da = \int_0^1 Df(v_a)(v_1 - v_0)\, da$, woraus die Lipschitzungleichung folgt: $\|f(v_1) - f(v_0)\| \leq \int_0^1 \|Df(v_a)\|\, da \cdot \|v_1 - v_0\| \leq L\|v_1 - v_0\|$ $\square$.

2.14 Definition Die Lösung des AWP (2.4) ist eindeutig, *wenn für je zwei Lösungen $\varphi_1 : I_1 \to P$ und $\varphi_2 : I_2 \to P$ auf dem Intervall $I_3 := I_1 \cap I_2$ gilt:*

$$\varphi_1|_{I_3} = \varphi_2|_{I_3}.$$

Wir werden in Satz 2.16 die eindeutigen lokalen Lösungen des Anfangswertproblems als Fixpunkte einer kontrahierenden Abbildung auf einem Raum stetiger Funktionen finden. Damit wir sicher sein können, dass der Fixpunkt überhaupt existiert, müssen wir gemäß dem Banachschen Fixpunktsatz[5] zunächst kontrollieren, dass der benutzte Funktionenraum ein vollständiger metrischer Raum ist.

2.15 Satz *Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und M der Raum der Kurven in V, also $M := C([a,b], V)$. Für $f, g \in M$ setzen wir $d(f,g) := \sup\limits_{t\in[a,b]} \|f(t) - g(t)\|$. Dann ist (M, d) ein vollständiger metrischer Raum.*

Bew.: • Auf $[a,b]$ nimmt die stetige Funktion $t \mapsto \|f(t) - g(t)\|$ ihr Maximum an. Also ist $d(f,g) < \infty$. Andererseits ist $d(f,g) = 0$ genau für $f = g$.
Ebenso gilt $d(g,f) = d(f,g)$ und

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{t\in[a,b]} \|(f(t) - g(t)) + (g(t) - h(t))\| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} (\|f(t) - g(t)\| + \|g(t) - h(t)\|) \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - g(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|g(t) - h(t)\| \\ &= d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

Damit ist (M, d) ein metrischer Raum.
• Weiter ist für alle $t \in [a,b]$ und eine Cauchyfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Kurven $f_m \in M$ auch die Folge $(f_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus V eine Cauchyfolge, denn es gilt $\|f_m(t) - f_n(t)\| \leq d(f_m, f_n)$. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, existiert für alle $t \in [a,b]$ der Punkt

$$f(t) := \lim_{m\to\infty} f_m(t) \in \mathbb{R}^n$$

[5] **Banachscher Fixpunktsatz** Eine kontrahierende Abbildung $f : X \to X$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d) mit Lipschitz-Konstante $\theta < 1$ besitzt genau einen Fixpunkt x^*, und für die m-**te Iterierte** $x_m := f(x_{m-1})$ **von** $x_0 \in X$ gilt

$$\boxed{d(x_m, x^*) \leq d(x_1, x_0)\frac{\theta^m}{1-\theta} \qquad (m \in \mathbb{N}).} \tag{2.5}$$

und ist sogar aus V.
• Ist damit schon der Limes $f \in M$? Das ist noch nicht klar, denn f könnte unstetig sein. Wir verwenden zum Nachweis der Stetigkeit ein sog. $\varepsilon/3$–*Argument*: Für jedes $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ gilt ja für die Cauchyfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ insbesondere

$$d(f_m, f_N) < \varepsilon/3 \qquad (m \geq N),$$

also auch für alle $t \in [a, b]$

$$\|f(t) - f_N(t)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m(t) - f_N(t)\| \leq \varepsilon/3.$$

Da f_N stetig ist, gibt es für jedes $s \in [a, b]$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f_N(t) - f_N(s)\| < \varepsilon/3 \qquad (t : |t - s| < \delta).$$

Damit ist nach der Dreiecksungleichung für diese t

$$\begin{array}{rclcccccc} \|f(t) - f(s)\| & \leq & \|f(t) - f_N(t)\| & + & \|f_N(t) - f_N(s)\| & + & \|f_N(s) - f(s)\| \\ & < & \varepsilon/3 & + & \varepsilon/3 & + & \varepsilon/3 \\ & = & \varepsilon. & & & & \end{array}$$

Also ist auch f stetig, d.h. $f \in M$.
• Damit gilt auch $f = \lim_{m\to\infty} f_m$ im metrischen Raum (M, d), denn

$$\begin{aligned} d(f, f_N) &= \sup_{t\in[a,b]} \|f(t) - f_N(t)\| = \sup_t \lim_{m\to\infty} \|f_m(t) - f_N(t)\| \\ &\leq \sup_t \sup_{m\geq N} \|f_m(t) - f_N(t)\| = \sup_{m\geq N} d(f_m, f_N), \end{aligned}$$

und da die f_n eine Cauchyfolge bilden, geht letzterer Abstand für $N \to \infty$ gegen Null. Wir haben damit nachgewiesen, dass jede Cauchyfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert, (M, d) also vollständig ist. □

2.16 Satz (Picard–Lindelöf) *Das zeitabhängige Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ genüge einer Lipschitz-Bedingung auf U. Dann existiert für $(t_0, x_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$, sodass das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.6}$$

eine eindeutige Lösung $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ besitzt.

Bew.: Wir bezeichnen das Zeitintervall mit $I := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

- Existiert eine solche Lösung, dann muss sie die Integralgleichung

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad (t \in I) \tag{2.7}$$

erfüllen, wie man durch Differentiation bzw. Einsetzen von t_0 feststellt. Andererseits ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung (Satz 12.15 von [Kn]) jede stetige Lösung von (2.7) auch schon differenzierbar und damit eine Lösung des Anfangswertproblems

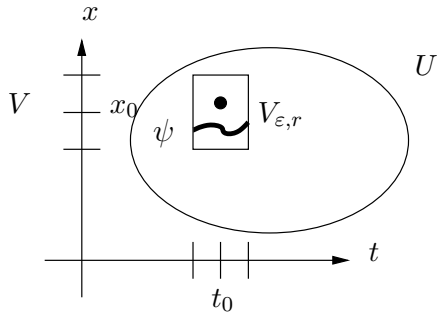
$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0.$$

- Es soll nun die Lösung φ als Fixpunkt einer Abbildung A aufgefunden werden. A wird stetige Kurven im Phasenraum in solche abbilden.

Um den Definitionsbereich von A günstig zu wählen, soll der Phasenraumbereich die Vollkugel $V := \overline{U_r(x_0)}$ sein. Wir setzen

$$V_{\varepsilon,r} := I \times V,$$

und wählen r so klein, das $V_{r,r} \subseteq U$.



Weiter sei $L > 0$ Lipschitz-Konstante von $f|_{V_{r,r}}$ und

$$N := \max_{(t,x)\in V_{r,r}} \|f(t,x)\| \quad \text{und} \quad \varepsilon := \min\left(r, \frac{r}{N}, \frac{1}{2L}\right). \tag{2.8}$$

Damit ist insbesondere $V_{\varepsilon,r} \subseteq V_{r,r} \subseteq U$.

$$M := C(I, V) \subseteq C(I, \mathbb{R}^n)$$

bezeichne wieder den metrischen Raum der stetigen Funktionen $\psi : I \to V$ mit Supremumsmetrik

$$d(\psi, \varphi) := \sup_{t\in I} \|\psi(t) - \varphi(t)\|.$$

Nach Satz 2.15 ist (M, d) ein vollständiger metrischer Raum (denn $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen).

- Wir führen durch

$$\boxed{(A\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s,\psi(s))\,ds \qquad (t \in I)}$$

eine Abbildung $A : M \to C(I, \mathbb{R}^n)$ ein, von der wir zunächst zeigen wollen, dass ihr Bild in M bleibt. Dazu stellen wir fest, dass gemäß Definition (2.8)

$$\begin{aligned}\left\| \int_{t_0}^t f(s,\psi(s))\,ds \right\| &\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s,\psi(s))\|\,ds \right| \\ &\le \left| \int_{t_0}^t \max_{(\tilde{t},x)\in V} \|f(\tilde{t},x)\|\,ds \right| \le |t-t_0|N \le \varepsilon N \le r,\end{aligned}$$

sodass $(A\psi)(t) \in V$ für $t \in I$ ist.

- Jetzt müssen wir nur noch beweisen, dass

$$A : M \to M,$$

die so genannte *Picard–Abbildung*, kontrahierend ist, dass also für ein geeignetes $0 < \theta < 1$ gilt

$$d(A\varphi, A\psi) \le \theta\, d(\varphi,\psi) \qquad (\varphi,\psi \in M).$$

Tatsächlich ergibt sich aus der Definition (2.8) von ε für $t \in I$

$$\begin{aligned} d(A\varphi, A\psi) &= \sup_{t\in I} \|A\psi(t) - A\varphi(t)\| \\ &= \sup_{t\in I} \left\| \int_{t_0}^t [f(s,\psi(s)) - f(s,\varphi(s))]\,ds \right\| \\ &\le \varepsilon \cdot \sup_{s\in I} \|f(s,\psi(s)) - f(s,\varphi(s))\| \\ &\le \varepsilon L \sup_{s\in I} \|\psi(s) - \varphi(s)\| = \varepsilon L d(\psi,\varphi) \le \tfrac{1}{2} d(\psi,\varphi). \end{aligned}$$

A ist damit eine kontrahierende Abbildung auf dem vollständigen metrischen Raum M, besitzt also nach dem Banachschen Fixpunktsatz (siehe Seite 14) einen eindeutigen Fixpunkt $\varphi \in M$. Diese Funktion φ erfüllt also die Integralgleichung (2.7) und löst damit das Anfangswertproblem. □

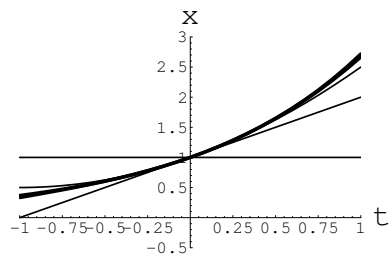
Die Picard–Iteration, die hier als technisches Beweismittel verwandt wurde, kann auch zur Lösung der DGL verwandt werden:

2.17 Beispiele 1. Wir approximieren die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = x \quad , \quad x(0) = x_0$ durch

$$x_0(t) := x_0 \qquad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad x_{i+1}(t) := x_0 + \int_0^t x_i(s)\, ds,$$

also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0(1+t) \\ x_2(t) &= x_0\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}. \end{aligned}$$



Da $x(t) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = x_0 \cdot e^t$, konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ die n–te Iterierte $x_n(t)$ gegen die Lösung $x(t)$, und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall (aber nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$).

2. $\dot{x} = 1 + x^2 \quad , \quad x_0 = 0$

Für $r > 0$ ist $N = \max_{|x| \le r} \|f(x)\| = 1 + r^2$, und die Lipschitz-Konstante $L = \max_{|x| \le r} \|f'(x)\| = 2r$, also ist gemäß Definition (2.8) $\varepsilon = \min\left(\frac{r}{1+r^2}, \frac{1}{4r}\right)$.

ε wird maximal für $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d.h. $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Für Zeiten $|t| < \frac{\sqrt{3}}{4}$ können wir also Konvergenz garantieren.

Picard–Iteration mit $x_0(t) := x_0$ ergibt

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0 \\ x_1(t) &= (Ax_0)(t) = \int_0^t (1 + x_0^2(s))\, ds = t \\ x_2(t) &= \int_0^t (1 + s^2)\, ds = t + t^3/3 \\ x_3(t) &= \int_0^t [1 + (s + s^3/3)^2]\, ds = t + \tfrac{t^3}{3} + \tfrac{2}{15}t^5 + \tfrac{1}{63}t^7, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge konvergiert gegen $\tan(t)$, die Lösung des Anfangswertproblems. Konvergenz haben wir sogar auf dem offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

In den naturwissenschaftlichen oder technischen Anwendungen von Differentialgleichungen kennen wir deren Anfangswerte normalerweise nicht genau. Der folgende Satz besagt, dass dies auch gar nicht nötig ist.

2.18 Satz *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.16 (Picard–Lindelöf) existiert für jeden Punkt $(T_0, X_0) \in U$ des erweiterten Phasenraumes eine kompakte Umgebung $V \subset U$ und ein Intervall $I := [-\varepsilon, \varepsilon]$, sodass die Familie*

$$\Phi : I \times V \to U \quad , \quad (s; t_0, x_0) \mapsto \varphi(t_0 + s)$$

der Lösungen des AWP (2.6) eine stetige Abbildung ist. Die Lösungen hängen also stetig von ihren Anfangswerten und der Zeit ab.

Bew.:

- Wir setzen $V_{\varepsilon,r} := [T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon] \times \overline{U_r(X_0)}$. Diese Menge von Anfangswerten ist für kleine $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ im erweiterten Phasenraum U enthalten. Außerdem ist sie beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Für die Picarditeration benutzen wir statt des Raumes der Kurven den metrischen Raum
$$M := C\Big(I \times V_{\varepsilon,r}, \overline{U_R(X_0)}\Big)$$
mit der Supremumsmetrik
$$d(\Phi, \Psi) := \sup\{\|\Phi(t,y) - \Psi(t,y)\| \mid (t,y) \in I \times V_{\varepsilon,r}\}.$$

- Dies ist ein vollständiger metrischer Raum, denn
  1. die Bildmenge ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also vollständig.
  2. der Definitionsbereich ist kompakt, weswegen jede Cauchyfolge $(\Phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in M einen *punktweisen* Limes Φ mit $\Phi(t,y) := \lim_{m\to\infty} \Phi_m(t,y)$ besitzt.
  3. auch das $\varepsilon/3$–Argument aus Satz 2.15 überträgt sich auf diese Situation, Φ ist also stetig und $\Phi \in M$.

- Für kleine $R > 0$ und $\varepsilon > 0$ ist $[T_0 - 2\varepsilon, T_0 + 2\varepsilon] \times \overline{U_R(X_0)} \subset U$. Wir betrachten für $\Psi \in M$ die Picard–Abbildung
$$(A\Psi)(s, t_0, x_0) := x_0 + \int_0^s f\big(t_0 + \tau, \Psi(\tau, t_0, x_0)\big)\, d\tau.$$

Ist Φ ein Fixpunkt von A, dann bedeutet dies

$$\Phi(0, t_0, x_0) = A\Phi(0, t_0, x_0) = x_0$$

und

$$\frac{d}{ds}\Phi(s, t_0, x_0) = \frac{d}{ds}(A\Phi)(s, t_0, x_0) = f\big(t_0 + s, \Psi(s, t_0, x_0)\big).$$

Die Abbildung $t \mapsto \Phi(t - t_0, t_0, x_0)$ löst also das AWP mit Anfangswert (t_0, x_0).

- Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Picard–Lindelöf wird für kleine Parameter $\varepsilon, r > 0$

$$A : M \to M$$

zu einer Kontraktion, besitzt also nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt Φ. □

2.3 Globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

An Beispiel 2.17.2 sehen wir, dass die Lösung nicht für alle Zeiten existiert, da $f(x) = 1 + x^2$ mit $|x|$ sehr stark anwächst, sodass man in der Zeit $\frac{\pi}{2}$ nach ∞ geführt wird. Dies steht nicht im Widerspruch zur lokalen Lipschitzstetigkeit von f.

Dagegen ist in Beispiel 2.17.1 $f(x) = x$ sogar global lipschitzstetig, und die Lösung existiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Dies ist ganz allgemein so:

2.19 Satz *Ist das (zeitunabhängige) Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig, dann existiert eine eindeutige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0.$$

Bew.: Es sei $L \geq 1$ eine Lipschitz-Konstante, es gelte also

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n).$$

Wir wählen $r := \|f(x_0)\| + \frac{1}{2L}$, sodass $N = \max_{x \in \overline{U_r(x_0)}} \|f(x)\|$

$$\begin{aligned} N &\leq \|f(x_0)\| + \max_{x \in \overline{U_r(x_0)}} \|f(x) - f(x_0)\| \\ &\leq \|f(x_0)\| + L\max_{x \in \overline{U_r(x_0)}} \|x - x_0\| = r + Lr \end{aligned}$$

ist, und die das Zeitintervall definierende Konstante ε aus (2.8) unabhängig von x_0 wird:

$$\varepsilon = \min\left(r, \frac{r}{N}, \frac{1}{2L}\right) \geq \min\left(\tfrac{1}{2L} + \|f(x_0)\|, \tfrac{1}{1+L}, \tfrac{1}{2L}\right) = \tfrac{1}{2L}$$

Damit können wir die lokale Lösung $\varphi_0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$ mit $\varphi_0(0) := x_0$ finden.

$\varphi_0(\varepsilon/2)$ wird der neue Anfangswert für Zeit $t_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, und wir erhalten eine Lösung $\varphi_1 : \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}\varepsilon\right) \to \mathbb{R}^n$, mit

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) \quad \text{für} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \left(-\tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{3}{2}\varepsilon\right) = \left(-\tfrac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right).$$

Durch Zusammensetzung der Lösungen

$$\varphi_k : \left(\varepsilon\left(\tfrac{k}{2} - 1\right), \varepsilon \cdot \left(\tfrac{k}{2} + 1\right)\right) \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \varphi_k\left(\tfrac{k}{2}\varepsilon\right) := \varphi_{k-1}\left(\tfrac{k}{2}\varepsilon\right)$$

erhalten wir eine Lösung für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. □

2.20 Bemerkungen

1. Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dann ist (nach Satz 8.13 in Teil II von [Kn]) f Lipschitzstetig, wenn $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Df(x)\| < \infty$ gilt.

2. Insbesondere folgt, dass für alle *linearen Differentialgleichungen* das AWP der Form
$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(0) = x_0$$
für alle Zeiten eindeutig lösbar ist, denn das Vektorfeld $f(x) = Ax$ ist lipschitzstetig mit Konstante $L = \|A\| := \sup_{v\in S^{n-1}} \|Av\|$, der Matrixnorm von $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.
Wie wir in Kapitel 3.1 sehen werden, ist diese Lösung $x(t) = \exp(At)x_0$.

3. Die Lipschitzstetigkeit des Vektorfeldes auf dem gesamten Phasenraum ist eine hinreichende, aber keineswegs notwendige Voraussetzung für die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

2.21 Beispiel Phasenraum $P = \mathbb{R}^2$, Vektorfeld $f(x) = \|x\|^2 \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{smallmatrix}\right)$.

Ohne den multiplikativen Faktor $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ hatten wir die Differentialgleichung schon einmal gelöst. Die Orbits waren Kreise um den Koordinatenursprung. Daran ändert sich hier nichts, denn der Faktor $\|x\|^2$ ändert nur die Umlaufgeschwindigkeit. In Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ lautet die DGL nämlich

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad \dot{\varphi} = -r^2.$$

Deren Lösung $r(t) = r_0$, $\varphi(t) = \varphi_0 - r_0^2 t$ existiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Obwohl f nicht lipschitzstetig ist, kann die Bahn wegen der Form des Vektorfeldes f (fehlende Radialkomponente) nicht in endlicher Zeit nach räumlich unendlich gehen.

2.4 Transformation in ein dynamisches System

Reduktion der Ordnung

Auch Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung lassen sich mit den beschriebenen Methoden behandeln, indem man aus einer expliziten DGL n–ter Ordnung ein DGL-System von n DGLn erster Ordnung macht.

2.22 Satz *Die DGL der Ordnung* $n > 1$

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \tag{2.9}$$

mit $F \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ *ist zum DGL–System*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad \textit{mit} \quad f(t,x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ F(t,x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

im folgenden Sinn äquivalent:

- *Ist* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *Lösung von (2.9), dann ist* $\psi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ *Lösung von (2.10).*
- *Ist umgekehrt* $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ *Lösung von (2.10), dann ist* ψ_1 *Lösung von (2.9).*

Bew.: Nach Definition ist φ n–mal differenzierbar, also $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und $\psi_k = \frac{d}{dt}\psi_{k-1} \qquad (k = 2, \ldots, n)$,

$$\frac{d}{dt}\psi_n = \frac{d^n\varphi}{dt^n} = F_n(t, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) = F_n(t, \psi_1, \ldots, \psi_n).$$

Die Argumentation lässt sich umkehren. □

2.23 Beispiel Das himmelsmechanische 2–Körper–Problem beschreibt die z.B. die Bewegung von Erde und Sonne um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Es läßt sich auf das in der Einleitung behandelte sog. 1–Zentren-Problem der Bewegung einer Punktmasse am Ort $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ im Schwerefeld eines im Koordinatenursprung befindlichen Himmelskörpers reduzieren. Es gilt dann nach (1.3)

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{x}{\|x\|^3}.$$

Dieses DGL–System zweiter Ordnung lässt sich auf die DGL erster Ordnung mit $z = (x, v) \in U := (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^3$

$$\dot{z} = f(z) := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -\gamma \frac{x_1}{\|x\|^3} \\ -\gamma \frac{x_2}{\|x\|^3} \\ -\gamma \frac{x_3}{\|x\|^3} \end{pmatrix}$$

umformen. Der Phasenraum U ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^6$, und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^6)$. Damit können wir es mit Picard–Iteration oder einem anderen Verfahren für kleine Zeiten lösen.

Übergang zu einem zeitunabhängigen System

Wir können auch explizite zeitabhängige DGLn auf autonome zurückführen. Statt der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f : U \to \mathbb{R}^n,\ U \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n$ offen betrachten wir dazu das autonome DGL–System

$$\dot{y} = g(y) \quad \text{mit} \quad g : U \to \mathbb{R}^{n+1} \quad , \quad y := \left(\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix}\right) \qquad g(y) := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ f(y) \end{smallmatrix}\right). \tag{2.11}$$

Wir erhöhen also die Dimension des Phasenraumes um eins, indem wir den Zeitparameter s zum Phasenraumpunkt x hinzufügen. Ausgeschrieben hat (2.11) die Form

$$\tfrac{d}{dt} s = 1 \quad , \quad \tfrac{d}{dt} x = f(s, x). \tag{2.12}$$

Ist nun $\psi : I \to U$ eine Lösung von (2.11), dann gilt mit $\psi(t) = \left(\begin{smallmatrix} s(t) \\ x(t) \end{smallmatrix}\right)$ $s(t) = s(0) + t$, bis auf eine zu wählende additive Konstante ist also die Phasenraumkoordinate s gleich der Zeit t. Die Lösung $\psi = \left(\begin{smallmatrix} s \\ \tilde{x} \end{smallmatrix}\right)$ des AWP $\dot{y} = g(y),\ \psi(0) = \left(\begin{smallmatrix} t_0 \\ x_0 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt daher eine Lösung x des AWP $\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$. Man setzt einfach $x(t) := \tilde{x}(t - t_0)$.

Umgekehrt kann man aus einer Lösung des AWP $\dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$ durch Ergänzung eine Lösung des AWP von (2.11) konstruieren.

Ist $f : U \to \mathbb{R}^n$ (in allen Argumenten) lipschitzstetig, dann auch g. Damit überträgt sich der Existenz– und Eindeutigkeitssatz (man beachte aber, dass wir für nicht autonome DGLn keine Lipschitzstetigkeit bezüglich t forderten).

Grundbegriffe für dynamische Systeme

2.24 Definition *Das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten die DGL $\dot{x} = f(x)$.*

1. *Existiert für alle $x_0 \in U$ eine Lösung $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to U$ des AWP $\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0$, dann heißt die Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{R} \times U \to U \quad , \quad (t,x) \mapsto \varphi_x(t) \tag{2.13}$$

   Phasenfluss *oder kurz* **Fluss** *der DGL.*

2. *Das Bild $\varphi(I) \subseteq U$ einer Lösungskurve $\varphi : I \to U$ von (5.1) heißt* **Orbit**. *Für $x \in U$ heißt $\mathcal{O}(x) := \Phi(\mathbb{R}, x)$* **Orbit durch** *$x$.*

3. *$x_s \in U$ heißt* **singulärer Punkt** *des Vektorfeldes f, wenn $f(x_s) = 0$ ist. Ist $x_s \in U$ singulärer Punkt von f, dann heißt x_s auch* **Ruhelage** *oder* **Gleichgewichtslage** *der DGL.*

4. *$x \in U$ heißt* **periodischer Punkt** *mit* **(Minimal)-Periode** *$T > 0$, wenn $\Phi(T,x) = x$, und $\Phi(t,x) \neq x$ falls $t \in (0,T)$.*

   Ein Orbit $\mathcal{O}(x)$ heißt **geschlossen**, *wenn $x \in U$ ein periodischer Punkt ist*

5. *Für $x \in U$ heißt*

$$\omega(x) := \left\{ y \in U \mid \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \Phi(t_n, x) = y \right\}$$

   ω**–Limesmenge von** *x und*

$$\alpha(x) := \left\{ y \in U \mid \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \Phi(t_n, x) = y \right\}$$

   α**–Limesmenge von** *x.*

2.25 Bemerkungen 1. Für einen singulären Punkt x_s des Vektorfelds f ist die konstante Funktion $x(t) = x_s$ die (einzige) Lösung des AWP.

2. *Singulär* heißt der Punkt nicht etwa deswegen, weil das Vektorfeld f dort eine Singularität besäße, sondern weil dessen *Richtungsfeld* $x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ dort undefiniert ist und sich auch im Allgemeinen nicht stetig auf x_s fortsetzen lässt.

3. Gibt es für zwei Phasenraumpunkte $x, y \in U$ eine Zeit $t \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(t,x) = y$, dann sind ihrer Orbits gleich: $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, also auch ihre α– bzw. ω–Limesmengen.

2.26 Satz *Wenn der Phasenfluss (2.13) existiert, ist er stetig, und die*

$$\Phi_t : U \to U \quad , \quad \Phi_t(x) := \Phi(t,x) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.14}$$

sind Homöomorphismen, mit

$$\Phi_0 = \mathrm{Id}_U \quad , \quad \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Bew.: Hausaufgabe, unter Verwendung von Satz 2.18. □

2.27 Beispiele 1. Für ein reelles Polynom $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ mit den Nullstellen $a_1 < \ldots < a_n$ ist die DGL $\dot{x} = f(x)$ lokal eindeutig lösbar und besitzt für $x \in [a_1, a_n]$ sogar Lösungen $t \mapsto \Phi_t(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Ruhelagen sind die Punkte $a_1, \ldots, a_n$, und für $x \in (a_i, a_{i+1})$ ist $f|_{(a_i,a_{i+1})} > 0$, falls $n-i$ gerade ist. In diesem Fall ist damit $\omega(x) = \{a_{i+1}\}$ und $\alpha(x) = \{a_i\}$. Ist dagegen $n - i$ ungerade, also $f|_{(a_i,a_{i+1})} < 0$, dann gilt umgekehrt $\omega(x) = \{a_i\}$, $\alpha(x) = \{a_{i+1}\}$. Periodische Punkte existieren nicht.

2. Für das (in Polarkoordinaten (r, φ) notierte) DGL–System mit Phasenraum $\mathbb{R}^2$

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad , \quad \dot{\varphi} = 1$$

ist der Ursprung $(r = 0)$ die einzige Ruhelage, und $\{1\} \times [0, 2\pi)$ der einzige periodische Orbit. Für alle $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist $\omega(x)$ gleich diesem periodischen Orbit, für $\|x\| < 1$ ist $\alpha(x) = \{0\}$.

3 Lösungsmethoden für lineare DGLn

Eine besonders wichtige Klasse von DGLn sind die linearen mit konstanten Koeffizienten, und nach Satz 12.17 der *Analysis II* können wir annehmen, dass das

System erster Ordnung ist. Wenn wir eine Zeitabhängigkeit der *Störfunktion* b zulassen, dann lautet das AWP

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

mit *Systemmatrix* $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}),\ b : I \to \mathbb{R}^n$, t_0 im Intervall I und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Die Lösungsstrategie wird darin bestehen, im ersten Schritt das *homogene* AWP

$$\dot{y} = Ay \quad , \quad y(t_0) = x_0 \tag{3.2}$$

durch

$$y(t) := \exp\big((t - t_0)A\big)x_0 \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.3}$$

zu lösen, um dann das *inhomogene* AWP (3.1) zu lösen.
Formal ist (3.3) die Lösung von (3.2), denn formale Differentiation von y nach t ergibt Ay, und $y(t_0) = x_0$.

3.1 Homogene lineare autonome DGLn

Exponentiation von Matrizen

Warum aber löst die Exponentialfunktion die DGL? Diese Frage soll jetzt beantwortet werden. Sie ist nicht rein akademisch, denn ist die Matrix A zeitabhängig, dann löst die Funktion $t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right) x_0$ *nicht* das homogene AWP $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$, außer für Dimension $n = 1$.

Zur Rechtfertigung von (3.3) müssen wir also etwas über matrixwertige Funktionen nachdenken, und zwar für Vektorräume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zunächst wird die Exponentialfunktion wie für $n = 1$ durch ihre Potenzreihe erklärt:

3.1 Definition • *Für einen Endomorphismus $M \in B(V)$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraums V ist $\exp(M) \in B(V)$ durch*

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad , \textit{ mit } \quad M^0 := \mathbb{1}$$

definiert.
• *Analog wird die Exponentialfunktion auf Matrizen in $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ angewandt.*

Wir haben also eine Reihe vor uns, deren Summanden Elemente von $B(V)$, dem Raum der (beschränkten) linearen Abbildungen von V in V sind.

Wir haben auf $B(\mathbb{K}^n)$ schon die *Operatornorm*

$$\|M\| := \sup_{v\in\mathbb{K}^n/\{0\}} \tfrac{\|Mv\|}{\|v\|}$$

eingeführt, die neben den Eigenschaften $\|M\| \geq 0,\ \|M\| = 0 \Leftrightarrow M = 0$,

$$\|\lambda M\| = |\lambda|\,\|M\| \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \quad \text{und} \quad \|M+N\| \leq \|M\| + \|N\|$$

einer Norm noch die Ungleichung

3.2 Satz $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$ *erfüllt,*

Bew.: denn

$$\begin{aligned} \|MN\| &= \sup_{v\neq 0} \tfrac{\|MNv\|}{\|v\|} = \sup\nolimits_{v:\,Nv\neq 0} \tfrac{\|MNv\|}{\|Nv\|} \cdot \tfrac{\|Nv\|}{\|v\|} \\ &\leq \sup_{w\neq 0} \tfrac{\|Mw\|}{\|w\|} \cdot \sup\nolimits_{v\neq 0} \tfrac{\|Nv\|}{\|v\|} = \|M\| \cdot \|N\|, \end{aligned}$$

außer für $N = 0$, wo sowieso beide Seiten Null sind. □

Nun stellen wir fest, dass die obige Definition von $\exp(M)$ auch sinnvoll ist:

3.3 Satz *Die Partialsummen* $s_k := \sum_{l=0}^{k} \frac{M^l}{l!}$ *bilden eine Cauchyfolge.*

Bew.: Für $k_1 \geq k_0 \geq \|M\|$ gilt nach der Dreiecksungleichung und Satz 3.2

$$\begin{aligned} \|s_{k_1} - s_{k_0}\| &= \left\| \sum_{l=k_0+1}^{k_1} \frac{M^l}{l!} \right\| \leq \sum_{l=k_0+1}^{k_1} \tfrac{\|M^l\|}{l!} \leq \textstyle\sum_{l=k_0+1}^{k_1} \tfrac{\|M\|^l}{l!} \\ &\leq \tfrac{\|M\|^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \textstyle\sum_{m=0}^{k_1-k_0-1} \tfrac{\|M\|^m}{(k_0+1)^m} \leq \tfrac{\|M\|^{k_0+1}}{(k_0+1)!} \left(1 - \tfrac{\|M\|}{k_0+1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht für $k_0 \to \infty$ gegen Null, denn die Fakultät wächst schneller als die (reelle) Exponentialfunktion. □

Nebenbei stellen wir fest, dass wir an keiner Stelle vorausgesetzt haben, dass der lineare Endomorphismus bzw. die Matrix reell ist. Dies ist günstig, denn die Jordan–Normalform von A in (3.2), und damit von $\exp(At)$, kann auch komplex sein.

Um nun zu sehen, dass (3.3) des AWP (3.2) tatsächlich löst, müssen wir in der Lage sein, die Abbildung

$$\mathbb{R} \to B(\mathbb{K}^n) \quad , \quad t \mapsto \exp(At)$$

nach dem Zeitparameter zu differenzieren.

Später werden wir uns auch fragen, wie die Lösungen von eventuellen Parametern der linearen DGL abhängen. Für diese Art von Fragestellungen wertet man die Exponentialfunktion für mehr als ein Argument aus, man betrachtet also die Abbildung

$$\exp : B(\mathbb{K}^n) \to B(\mathbb{K}^n) \quad , \quad M \mapsto \exp(M)$$

in ihrer Abhängigkeit von Argument M. Hier hilft das *Weierstraß–Kriterium*:

3.4 Satz (Weierstraß) *Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $X \subseteq V$ und*

$$f_l : X \to V \qquad (l \in \mathbb{N}_0)$$

seien Funktionen mit $\sup_{x\in X} \|f_l(x)\| \leq a_l$ mit $\sum_{l=0}^{\infty} a_l < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} f_l$ auf X absolut und gleichmäßig.

Die Beweismethode für reelle Funktionen lässt sich verallgemeinern:

Bew.: Wegen der Vollständigkeit des metrischen Raumes V haben wir punktweise Konvergenz der Partialsummen $s_l := \sum_{m=0}^{l} f_m$:

$$s(x) := \lim_{l\to\infty} s_l(x) \qquad (x \in X).$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{l=m+1}^{n} a_l < \varepsilon \qquad (n > m)$.

Daher folgt $\|s_n(x) - s_m(x)\| \leq \sum_{l=m+1}^{n} a_l < \varepsilon,\ (x \in X)$, also gleichmäßige Konvergenz. □

3.5 Satz *Für $A \in B(\mathbb{K}^n)$ ist die Abbildung*

$$\mathbb{R} \to B(\mathbb{K}^n) \quad , \quad t \mapsto \exp(At)$$

stetig differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{\tfrac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At).} \tag{3.4}$$

Bew.: Setzen wir in unserem Fall $f_l : \underbrace{B(\mathbb{K}^n)}_{V} \to B(\mathbb{K}^n),\ M \mapsto \frac{M^l}{l!}$, so ist zwar $\sup_{M\in V} \|f_l(M)\|$ (außer für $l = 0$) gleich ∞. Wählen wir aber als Definitionsbereich die Vollkugel $X := \{M \in V \mid \|M\| \le c\}$ mit Radius $c > 0$, dann ist $a_l := \sup_{M\in X} \|f_l(M)\| = \frac{1}{l!} \sup_{M\in X} \|M^l\| \le \frac{c^l}{l!}$, und die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} a_l \le e^c$ konvergiert für jede Wahl von c.

Deshalb ist die Exponentialabbildung als Limes gleichmäßig konvergenter stetiger Funktionen $s_l\restriction_X : X \to V$ auch stetig, und, da auch die Ableitungen Ds_l auf X gleichmäßig konvergent sind, auch differenzierbar. Damit ist auch die Formel (3.4) richtig, und aus ihr ergibt sich auch die Stetigkeit der Ableitung. □

Verwendung der Jordan–Normalform

Die konkrete Berechnung von $\exp(At)$ kann mittels der Jordan–Normalform von A erfolgen.

3.6 Definition

- *Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $r \in \mathbb{N}$ heißt* $J_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{K})$ $r \times r$**–Jordan-Block mit Eigenwert** λ.

- *Eine* **Jordanmatrix** *ist eine quadratische Matrix der Form*

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} = J_{r_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{r_k}(\lambda_k). \tag{3.5}$$

- *Eine* **Jordanbasis** *eines Operators $A \in B(V)$ auf dem $\mathbb{K}$–Vektorraum V ist eine Basis von V, in der die darstellende Matrix von A eine Jordanmatrix ist.*

Aus der linearen Algebra ist der (konstruktive) Beweis des folgenden Satzes bekannt[6]:

3.7 Satz *Sei V ein endlich–dimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum und $A \in B(V)$. Dann existiert eine Jordanbasis für A.*

[6] Z.B. in meinem Skript *Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2*, Kap. 5, erhältlich unter www.mi.uni-erlangen.de/∼knauf

Da mit $n := \dim(V)$ der Vektorraum V isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist, können wir A in der Form

$$A = WJW^{-1} \quad \text{mit} \quad J \quad \text{Jordanmatrix}, \quad W \in GL(n, \mathbb{C})$$

schreiben, wenn wir die darstellende Matrix ebenfalls mit A bezeichnen.

Wegen $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ können wir insbesondere reelle quadratische Matrizen A Jordan-diagonalisieren, aber J ist im Allgemeinen nicht mehr reell (wir *komplexifizieren* A also im Sinne der Linearen Algebra).

3.8 Beispiel $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt die komplexen Eigenwerte $\pm i$. Die Matrix $W := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbb{C})$ mit $W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$, diagonalisiert A:

$$W^{-1}AW = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = J_1(i) \oplus J_1(-i).$$

Wie in diesem Beispiel existiert allgemein zu jedem nicht reellen Eigenwert λ von $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ und Jordan-Block $J_r(\lambda)$ ein Eigenwert $\overline{\lambda}$ gleicher Multiplizität und Jordan-Block $J_r(\overline{\lambda})$, denn das charakteristische Polynom von A lässt sich in $\mathbb{R}$ in Faktoren höchstens zweiten Grades zerlegen (siehe Abb. 3.1).

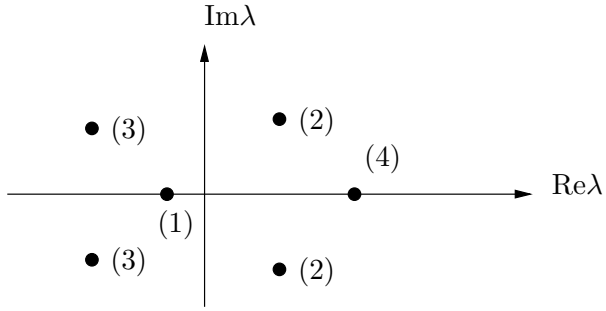


Abbildung 3.1: Komplexe Eigenwerte (mit Multiplizitäten) einer reellen Matrix

Es gilt

$$\boxed{\exp(At) = W \exp(Jt) W^{-1} \qquad (t \in \mathbb{R}),}$$

wie man durch Potenzreihenentwicklung und Benutzung von $A^m = (WJW^{-1})^m = WJ^mW^{-1}$ sieht.

Wegen

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} \exp(J_{r_1}(\lambda_1)t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_{r_k}(\lambda_k)t) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

für die Jordanmatrix J aus (3.5) genügt es, $\exp(J_r(\lambda)t)$ zu berechnen. Nun gilt $J_r(\lambda) = J_r(0) + \lambda\mathbb{1}$. $J_r(0)$ und $\lambda\mathbb{1}$ kommutieren aber, was die Berechnung von $\exp(J_r(\lambda)t)$ erleichtert:

3.9 Lemma *Für $B, C \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{C})$ mit $BC = CB$ gilt*

$$\exp(B + C) = \exp(B) \cdot \exp(C).$$

Bew.: Durch Einsetzen in die Definition von $\exp$:

$$\begin{aligned} \exp(B+C) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(B+C)^n \overset{(!)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B^i C^{n-i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} B^i C^{n-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} B^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} C^j \right) = \exp(B) \cdot \exp(C). \qquad \square \end{aligned}$$

3.10 Bemerkungen 1. Als Gegenbeispiel gilt für die Dreiecksmatrizen $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $C := B^t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: $\exp(Bt) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\exp(Ct) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)$, also

$$\exp(Bt)\exp(Ct) = \left(\begin{smallmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \exp(Ct)\exp(Bt) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{smallmatrix}\right).$$

Dagegen folgt aus $(B+C)^n = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & , \quad n \quad \text{gerade} \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & , \quad n \quad \text{ungerade} \end{cases}$

$$\exp((B+C)t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} = \left(\begin{smallmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{smallmatrix}\right).$$

2. Da Vielfache einer Matrix miteinander kommutieren, ist für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\exp(At_1)\exp(At_2) = \exp(A\ (t_1 + t_2)),}$$

der die DGL $\dot{x} = Ax$ lösende lineare Fluss

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \Phi_t(x) = \exp(At)x \qquad (t \in \mathbb{R})$$

bildet also eine einparametrige Gruppe.

Für die Jordan-Blöcke gilt aber $\exp(J_r(\lambda)t) = \exp(J_r(0) \cdot t) \cdot \exp(\lambda t \mathbb{1})$.
$\exp(\lambda t \mathbb{1})$ ist gleich $\exp(\lambda t)\mathbb{1}$ und $\exp(J_r(0)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(J_r(0))^n t^n$ mit

$$((J_r(0))^n)_{i,k} = \delta_{i,k-n} \qquad (i, k \in \{1, \ldots, r\}),$$

also

$$\exp(J_r(\lambda)t) = \exp(\lambda t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Verwendung der reellen Jordan–Normalform

Für $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ ist es oft sinnvoll, die *reelle* Jordan–Normalform von $\exp(At)$ zu benutzen. Dabei setzt man für reelle Eigenwerte einfach

$$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := J_r(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Für $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ transformiert man Paare von Jordan–Blöcken der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} \quad ,$$

unter Benutzung von $X := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & \mathbb{1}_r \\ -i\mathbb{1}_r & i\mathbb{1}_r \end{pmatrix}$ in die *reelle Normalform*

$$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := X \begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} J_r(\mu) & -\varphi \mathbb{1}_r \\ \varphi \mathbb{1}_r & J_r(\mu) \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R})$$

mit $\mu := \mathrm{Re}(\lambda)$ und $\varphi := \mathrm{Im}(\lambda)$. Es gilt

$$\exp\left(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)t\right) = X \exp\left(\begin{pmatrix} J_r(\lambda) & 0 \\ 0 & J_r(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} t\right) X^{-1} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\varphi t) e^{J_r(0)t} & -\sin(\varphi t) e^{J_r(0)t} \\ \sin(\varphi t) e^{J_r(0)t} & \cos(\varphi t) e^{J_r(0)t} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

also im Spezialfall $r = 1$ einfacher Multiplizität

$$\exp\left(J_1^{\mathbb{R}}(\lambda)t\right) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Bedeutung der Spur

Unter einem Diffeomorphismus[7] $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt das Bild $g(A)$ einer kompakten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ das Volumen

$$V_n(g(A)) = \int_A |\det(Dg(x))|\, dx,$$

der Betrag der Funktionaldeterminante bei $x \in A$ ist also der Faktor, um den bei x das Volumen durch g vergrößert wird (*Transformationssatz*, Satz 5.28 aus Teil III von [Kn]).

Betrachten wir nun für die Zeit $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsoperator der DGL $\dot{x} = Ax$, also die lineare Abbildung

$$\Phi_t \in B(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \Phi_t(x) = \exp(At)x.$$

Wie bei jeder linearen Abbildung ist die Ableitung konstant:

$$D\Phi_t(x) = \exp(At) \qquad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{3.10}$$

und es gilt

3.11 Lemma *Für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $\det(D\Phi_t) = \exp(\mathrm{tr}\,(A)t)$.

Bew.: Für alle $B \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(\exp(B)) = \exp(\mathrm{tr}\,(B))$$

(siehe z.B. mein Skript *Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2*, Satz 8.28). Setze nun $B := At$ und benutze (3.10). □

Wir sehen also, dass die Zeitableitung der Volumenvergrößerung gleich

$$\tfrac{d}{dt} \det(D\Phi_t)\,|_{t=0} = \tfrac{d}{dt} \exp(\mathrm{tr}\,(A)t)\,|_{t=0} = \mathrm{tr}\,(A)$$

ist. Genau diejenigen linearen DGLn mit $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ sind damit volumenerhaltend.

[7] **Def.:** Für $r \in \mathbb{N}$ und $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt eine Abbildung $\Psi : U \to V$ ein C^r–**Diffeomorphismus**, wenn $\Psi \in C^r(U, V)$, die inverse Abbildung $\Psi^{-1} : V \to U$ existiert, und $\Psi^{-1} \in C^r(V, U)$.

3.2 Explizit zeitabhängige lineare DGLn

Das homogene Problem

Wir betrachten zunächst auf dem t_0 enthaltenden Zeitintervall I das *homogene* lineare nicht autonome (d.h. explizit zeitabhängige) AWP

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.11}$$

wobei $A : I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine stetige matrixwertige Funktion ist.

3.12 Satz *Ist* $M := \sup_{t \in I} \|A(t)\| < \infty$, *dann hat (3.11) eine eindeutige Lösung* $y : I \to \mathbb{R}^n$ *mit*

$$\|y(t)\| \leq e^{M \cdot |t - t_0|} \|y_0\| \qquad (t \in I). \tag{3.12}$$

Bew.:

- Zunächst können wir durch eine Substitution $t = \tilde{t} + t_0$ erreichen, dass $t_0 = 0$ ist, und es genügt, $t \geq 0$ zu betrachten.
- Die eindeutige Existenz der Lösung $t \mapsto y(t)$ folgt wegen der in t uniformen globalen Lipschitzstetigkeit des Vektorfeldes $y \mapsto A(t)y$ auf dem $\mathbb{R}^n$ analog zu Satz 2.19.
- $z(t) := e^{-Mt} y(t)$ erfüllt das AWP

  $$\dot{z}(t) = N(t)z(t) \quad , \quad z(0) = y_0 \quad \text{mit} \quad N(t) := A(t) - M\mathbb{1},$$

  wie man durch Differentiation nachprüft. Die Abschätzung (3.12) folgt daher, wenn wir

  $$\|z(t)\| \leq \|y_0\| \qquad (t \geq 0, t \in I) \tag{3.13}$$

  bewiesen haben. Nun ist

  $$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\|z(t)\|^2 &= \langle \dot{z}(t), z(t) \rangle + \langle z(t), \dot{z}(t) \rangle \\ &= \langle N(t)z(t), z(t) \rangle + \langle z(t), N(t)z(t) \rangle \\ &= \langle z(t), S(t)z(t) \rangle \leq 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

  mit $S(t) := N(t) + N^T(t)$, denn $S(t)$ ist selbstadjungiert, und besitzt nur Eigenwerte $E \leq 0$.

Letzteres sieht man so: Wäre $S(t)v = Ev$ mit $E > 0$, dann würde auch $(A(t) + A^T(t))v = (E + 2M)v$ gelten, die Norm $\|A(t) + A^T(t)\|$ also $\geq 2M$ sein, was im Widerspruch zur Definition von M steht.

Aus (3.14) folgt aber (3.13). □

Sind $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der DGL $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann ist auch $c_1, \varphi_1 + c_2\varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung. Die Menge

$$L := \{\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t), t \in I\} \tag{3.15}$$

der Lösungen bildet also einen $\mathbb{R}$–Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, den (homogenen) *Lösungsraum*. Ist $t_0 \in I$, so ist wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWP die lineare Abbildung

$$B_{t_0} : L \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

ein Isomorphismus, es ist also $\dim(L) = n$.

3.13 Definition *Eine Basis des Lösungsraumes L heißt* **Fundamentalsystem** *von Lösungen der Differentialgleichung.*

Da die Lösung des homogenen DGL-Systems (3.11) linear von y_0 abhängt, erhalten wir die allgemeine Lösung in der Form

$$y_h(t) = \Phi(t, s)y_h(s)$$

mit dem *Lösungsoperator* $\Phi : I \times I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

Im Spezialfall einer zeitunabhängigen Matrix A ist

$$\Phi(t, s) = \exp(A \cdot (t - s)) \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Allgemein gilt

$$\boxed{\tfrac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s) \text{ und } \Phi(s, s) = \mathbb{1}}. \tag{3.16}$$

3.14 Bemerkungen 1. Auch wenn diese Familie von Matrizen von *zwei* Parametern, der Anfangszeit s und der Endzeit t abhängt, genügt es, für ein einziges $t_0 \in I$ die einparametrige Familie

$$t \mapsto \Phi(t, t_0) \qquad (t \in I)$$

zu kennen, denn es gilt

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(s, t_0)(-1).$$

2. Trotzdem ist die Lösung dieses homogenen nicht autonomen Problems oft eine Matrix, deren Einträge keine elementaren Funktionen sind, auch wenn die Einträge von A elementare Funktionen sind.

   Tatsächlich werden viele sog. *höhere Funktionen* als Lösungen solcher DGLn definiert, wie etwa die Bessel–Gleichung oder die Mathieu–Gleichung.

Die Wronski–Determinante

3.15 Definition *Für ein Intervall I und Kurven $v_1, \ldots, v_n \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ist die* **Wronski–Determinante** *die stetige Funktion*

$$w : I \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \det(v_1(t), \ldots, v_n(t)).$$

Wir sind hier an der Wronski–Determinante w von Lösungen $v_1, \ldots, v_n$ der DGL interessiert. Da diese Lösungen sogar stetig differenzierbar von der Zeit abhängen, ist $w \in C^1(I, t)$, und erfüllt selbst eine DGL.

3.16 Satz *Für die Wronski–Determinante w gilt*

$$\frac{d}{dt} w(t) = \operatorname{tr}(A(t)) w(t) \qquad (t \in I), \tag{3.17}$$

also

$$w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\, ds \right) w(t_0). \tag{3.18}$$

Bew.: Da die Lösungen $v_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ der DGL die Ableitung

$$\dot{v}_i(t) = A(t) v_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

besitzen, gilt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det\Big(v_1(t), \ldots, v_{i-1}(t), \dot{v}_i(t), v_{i+1}(t), \ldots, v_n(t) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det\Big(v_1(t), \ldots, v_{i-1}(t), A v_i(t), v_{i+1}(t), \ldots, v_n(t) \Big), \end{aligned}$$

denn für die kanonische Basis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \det\Big(e_1, \ldots, e_{i-1}, A e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n \Big),$$

was sich nach der Determinantenproduktregel auf beliebige Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \in \mathbb{R}^n$ überträgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A)\det(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) &= \sum_{i=1}^{n} \det\Big((e_1, \ldots, e_{i-1}, Ae_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{i-1}, A\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_n)
\end{aligned}$$

Die Lösung der DGL (3.17) erfolgt durch Separation der Variablen. □

Die Wronski–Determinante einer *Fundamentallösung* lässt sich also berechnen, auch wenn man nur deren Anfangswerte $v_1(t_0), \ldots, v_n(t_0)$ kennt. Weil $w(t_0) = \det(v_1(t_0), \ldots, v_n(t_0)) \neq 0$ ist, folgt aus der Gestalt (3.18) der Lösung auch $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Die Wronski–Determinante $w(t)$ eines Fundamentalsystems mit Anfangsbedingungen $v_i(t_0) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ gibt den Faktor an, um den das Phasenraumvolumen zum Zeitpunkt t gewachsen ist.

Für eine lineare DGL n–ter Ordnung der Form

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = 0$$

mit stetigen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ist die zugeordnete DGL erster Ordnung von der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_i = y^{(i-1)} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hier ist also die Wronski–Determinante von Lösungen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ gleich

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad , \text{ und } \quad \frac{d}{dt} w(t) = -a_{n-1}(t) w(t).$$

Das inhomogene Problem

Das *inhomogene AWP*

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + b(t) \quad , \quad z(t_0) = z_0 \tag{3.19}$$

mit $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig lässt sich bei Kenntnis dieses homogenen Lösungsoperators leicht lösen:

3.17 Satz ("Duhamel–Prinzip")

$$z(t) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds \tag{3.20}$$

Bew.: Wegen $\Phi(s, s) = \mathbb{1}$ gilt in (3.20) $z(t_0) = z_0$ und zusätzlich gilt wegen $\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s)$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(t)\Phi(t, t_0)z_0 + A(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds + \Phi(t, t)b(t) \\ &= A(t)z(t) + b(t). \end{aligned}$$

Damit ist (3.20) die Lösung von (3.19). □

Die Menge der Lösungen der inhomogenen linearen DGL

$$L_b := \{\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), t \in I\}$$

ist also von der Form

$$L_b = L + \varphi,$$

mit dem in (3.15) definierten homogenen Lösungsraum L und der partikulären Lösung

$$\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \quad , \quad \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds$$

Dieser *inhomogene Lösungsraum* ist damit ein affiner Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

3.18 Beispiel Die DGL $\ddot{x}(t) + \frac{1}{10}\dot{x}(t) + x(t) = \cos(t)$ eines gedämpften harmonischen Oszillators mit äußerer Anregung ist zum System

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + b(t)$$

mit

$$z(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/10 \end{pmatrix} \quad , \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

äquivalent. A besitzt die komplexen Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\tfrac{1}{20} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{20}\right)^2 - 1} = \tfrac{1}{20}(-1 \pm \sqrt{399}i),$$

und Eigenvektoren

$$W_{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}(+1 \mp \sqrt{399}i) \\ 1 \end{pmatrix},$$

sodass mit der diagonalisierenden Matrix

$$W := (W_1; W_2) = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{399}i}{20} & \frac{1+\sqrt{399}i}{20} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-10i}{\sqrt{399}} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{399}} \\ \frac{10i}{\sqrt{399}} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{399}} \end{pmatrix} \quad , \quad W^{-1}AW = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Damit ist

$$\begin{aligned} \exp(At) &= W \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} W^{-1} \\ &= e^{-t/20} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) + \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right)}{\sqrt{399}} & \frac{20}{\sqrt{399}} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) \\ -\frac{20}{\sqrt{399}} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) - \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right)}{\sqrt{399}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

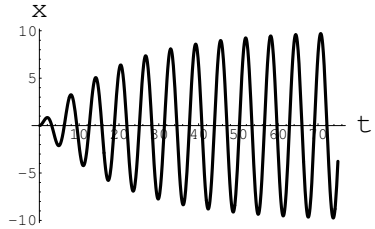
Aus (3.20) ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp(At)z_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))b(s)\,ds \\ &= e^{-t/20} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) + \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right)}{\sqrt{399}} & \frac{20}{\sqrt{399}} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) \\ -\frac{20}{\sqrt{399}} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) - \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right)}{\sqrt{399}} \end{pmatrix} z_0 + \\ &\quad \begin{pmatrix} 10\sin(t) - \frac{200}{\sqrt{399}} e^{-t/20} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) \\ 10\cos(t) + 10e^{-t/20}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) + \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right)}{\sqrt{399}}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL zweiter Ordnung von der Form

$$x(t) = e^{-t/20}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right)\right) + 10\sin t.$$

Die Lösung des AWP für $x_0 = x_0' = 0$ ist nebenstehend abgebildet.
Die Integration bereitet zwar keine grundsätzlichen Probleme, ist aber schon in diesem einfachen Beispiel rechenintensiv.



3.3 Quasipolynome

Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, benutzt man die Methode der Quasipolynome.

Erinnerung: Der Lösungsoperator $\exp(At)$ der linearen DGL $\dot{x} = Ax$ hat die Form

$$\exp(At) = W \exp(Jt) W^{-1}$$

mit der Jordanmatrix $J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$, und

es gilt $\exp(J_r(\lambda)t) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Folgerung: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ seine Eigenwerte mit den Vielfachheiten $\nu_1, \dots, \nu_k$, dann haben die Einträge der Matrix $\exp(At)$ die Form $\sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} \cdot p_l(t)$, wobei $p_l(t)$ ein Polynom vom Grad $\leq \nu_l - 1$ ist.

Diese Folgerung können wir uns zunutze machen, nur unter Benutzung eines entprechenden Lösungsansatzes direkter eine Lösung linearer DGLn zu finden.

3.19 Definition *Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ heißt die Funktion*

$$t \mapsto e^{\lambda t} p(t)$$

λ–**Quasipolynom** *vom* **Grad** $\mathrm{grad}(p)$ über $\mathbb{K}$.

Kennt man nun durch Auswertung des charakteristischen Polynoms von A die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die Multiplizitäten $\nu_1, \dots, \nu_k$, dann kann man die Lösung in der oben angegebenen Form ansetzen.

Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der λ–Quasipolynome wird durch Differentiation linear in sich abgebildet, und es gilt

$$\tfrac{d}{dt}(e^{\lambda t} p(t)) = e^{\lambda t}(p'(t) + \lambda p(t)).$$

Einsetzen des Lösungsansatzes ergibt für jeden Eigenwert λ_l eine Gleichung für die Polynome p_l (im Allgemeinen mehrere, denn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$).

Daraus lassen sich im Prinzip deren Koeffizienten bestimmen.

Besonders leicht ist der Lösungsansatz für lineare Einzel-DGLn höherer Ordnung. Ist nämlich

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0,$$

dann ergibt sich das äquivalente System

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_k := \tfrac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Es ist damit das charakteristische Polynom

$$\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0,$$

also das Polynom mit den Koeffizienten der DGL.

Wir brauchen also nicht den Umweg über ein DGL–System erster Ordnung zu machen, wenn wir die allgemeine Lösung in Form eines Quasipolynoms schreiben wollen.

3.20 Beispiel 1. $x^{(4)} - ax = 0 \quad , \quad a > 0.$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^4 - a = 0$ sind

$$\lambda_k = i^k \sqrt[4]{a} \qquad (k = 1, \ldots, 4).$$

Jede Lösung lässt sich also in der Form $x(t) = \sum_{k=1}^{4} c_k e^{\lambda_k t}$ mit Koeffizienten c_k schreiben. Ist eine reelle Lösung gefragt, dann muss offensichtlich $c_2, c_4 \in \mathbb{R}$ und $c_1 = \overline{c}_3$ gelten.

2. Die DGL $\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$ mit $k > 0$ beschreibt einen *gedämpften harmonischen Oszillator* (ohne äußere Anregung).

   Die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$ der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{smallmatrix}\right)$ sind nur im *aperiodischen Grenzfall* $k = 2$ einander gleich: Dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, sodass die allgemeine Lösung von der Form

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

   ist.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ (sogar für $\lambda \in \mathbb{C}$!) ist

$$\cosh(\lambda t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\right) \quad , \quad \sinh(\lambda t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right),$$

und nach der Euler-Formel

$$\cos(\lambda t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}\right) \quad , \quad \sin(\lambda t) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}\right).$$

Lösungen linearer DGLn können also insbesondere Produkte dieser vier elementaren Funktionen mit t–Potenzen enthalten, denn diese erhält man durch Linearkombination geeigneter Quasipolynome.

Das hat eine weitere Konsequenz.

Ist nämlich $\dot{x} = Ax + b(t)$, wobei $b(t)$ sich als Summe von Quasipolynomen schreiben lässt, dann lässt sich die Lösung dieser *inhomogenen* DGL mit konstanten Koeffizienten als Summe von λ–Quasipolynomen schreiben (wobei λ Eigenwert von A ist oder als Exponent in $b(t)$ auftaucht). Dies ergibt sich unmittelbar aus der in diesem Fall gültigen Lösungsformel (siehe (3.20))

$$\varphi(t) = \exp(At)\left(x_0 + \int_0^t \exp(-As)b(s)\,ds\right)$$

für das AWP mit $x(0) = x_0$, denn Produkte und Integrale von Quasipolynomen sind Quasipolynome.

3.21 Beispiel 1. $\ddot{x} + x = t^2$

Eine partikuläre Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist $x_p(t) := t^2 - 2$, die allgemeine von der Form $a_1 \cos t + a_2 \sin t + x_p(t),\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

2. $x^{(4)} + x = t^2 e^t \cos t$.

Die rechte Seite ist von der Form $\frac{1}{2}t^2(e^{\lambda t} + e^{\overline{\lambda} t})$ mit $\lambda := 1 + i$.

Allgemein hat ein Quasipolynom $e^{\lambda t}p(t)$ die k–te Ableitung

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{\lambda t}p(t)\right) = e^{\lambda t} \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^l p^{(k-l)}(t), \tag{3.21}$$

denn nach der Leibnizregel gibt es $\binom{k}{l}$ Wahlmöglichkeiten, den Exponentialfaktor l–mal abzuleiten.

Wir setzen die partikuläre Lösung x_p in der Form $x_p = y_p + \overline{y}_p$ mit $y_p^{(4)}(t) + y_p(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$ an, wobei $y_p(t) := e^{\lambda t}(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)$ sein soll.

Nach Formel (3.21) ist die linke Seite

$$\begin{aligned} y_p^{(4)}(t) + y_p(t) &= e^{\lambda t}((\lambda^4+1)a_2 t^2 + [(\lambda^4+1)a_1 + 8\lambda^3 a_2]t \\ &\quad +[(\lambda^4+1)a_0 + 4\lambda^3 a_1 + 12\lambda^2 a_2]). \end{aligned}$$

Vergleich mit der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} a_2 &= \tfrac{1/2}{\lambda^4+1} = -\tfrac{1}{6} \qquad (\text{denn } \lambda^2 = 2i,\ \lambda^4 = -4) \\ a_1 &= \tfrac{-8\lambda^3 a_2}{\lambda^4+1} = \tfrac{8}{9}(1-i) \\ a_0 &= -\tfrac{4\lambda^3 a_1 + 12\lambda^2 a_2}{\lambda^4+1} = \tfrac{92}{27} i. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 2\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t}(-\tfrac{t^2}{6} + \tfrac{8}{9}(1-i)t + \tfrac{92}{27})\right) \\ &= e^t\left((-\tfrac{t^2}{8} + \tfrac{16}{9}t)\cos t + (\tfrac{16}{9}t - \tfrac{92}{27})\sin t\right). \end{aligned}$$

4 Klassifikation linearer Flüsse

Wir kennen den von einem linearen dynamischen System $\dot{x} = Ax$ auf dem Phasenraum $U = \mathbb{R}^n$ erzeugten Fluss

$$\Phi_t : U \to U \quad , \quad x \mapsto \exp(At)x \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.1}$$

wollen aber ein vertieftes geometrisches Verständnis erlangen. Insbesondere wollen wir für kleine Dimensionen n die Phasenporträts von (4.1) verstehen.
Allgemein versteht man unter dem *Phasenporträt* eines dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ die Zerlegung des Phasenraumes U in Orbits.

4.1 Konjugationen dynamischer Systeme

Zunächst noch etwas unpräzise kann man fragen, wann ein zweites dynamisches System $\dot{y} = g(y)$ auf dem Phasenraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ein ähnliches Phasenporträt hat wie das dynamische System $\dot{x} = f(x)$ auf U.

Im Fall (4.1) linearer Systeme heißen die Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ *ähnlich*, wenn ein $S \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ existiert mit $B = SAS^{-1}$. Dann gilt für den von B erzeugten Fluss $\Psi_t(y) := \exp(Bt)y$

$$\Psi_t(y) = S\exp(At)S^{-1}y = S\Phi_t(S^{-1}y). \tag{4.2}$$

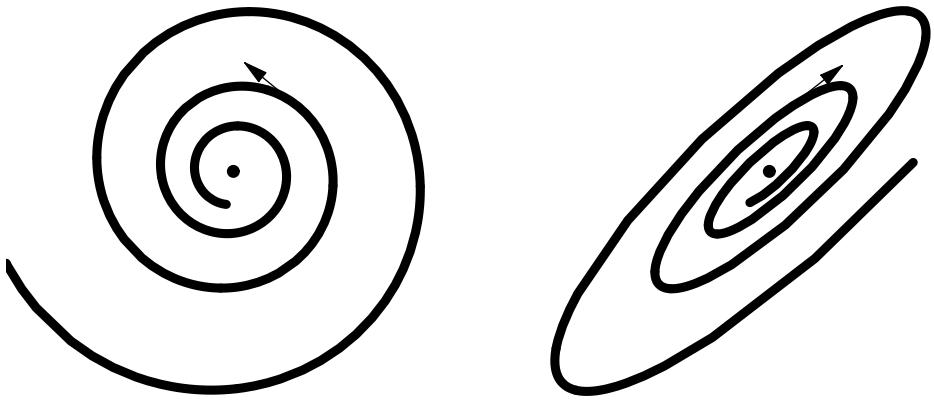


Abbildung 4.1: Phasenporträts von stabilen Spiralen der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: $A = \left(\begin{smallmatrix} -1/5 & -1 \\ 1 & -1/5 \end{smallmatrix}\right)$; rechts: eine zu A ähnliche Matrix

Also geht das Phasenporträt von B aus dem von A durch eine Basistransformation des $\mathbb{R}^n$ hervor.

In Abb. 4.1 sehen wir Phasenporträts zweier ähnlicher Matrizen.

Da bei der Ähnlichkeitstransformation die Eigenwerte mit ihrer Multiplizität invariant gelassen werden, ist diese Äquivalenzklasseneinteilung linearer Flüsse für viele Zwecke zu fein. Angemessener für den Vergleich zweier dynamischer Systeme ist der folgende Begriff.

Wir nehmen an, dass für $i = 1, 2$ die Vektorfelder $f_i \in C^1(U_i, \mathbb{R}^n)$ auf den Phasenräumen $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ Flüsse

$$\Phi_t^{(i)} : U_i \to U_i \qquad (t \in \mathbb{R})$$

erzeugen.

4.1 Definition $\Phi^{(1)}$ *heißt* **konjugiert** *zu* $\Phi^{(2)}$*, falls es einen Homöomorphismus* $h : U_1 \to U_2$ *gibt mit*

$$\Phi_t^{(2)} = h \circ \Phi_t^{(1)} \circ h^{-1} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Da die Inversen und die Komposition von Homöomorphismen wieder Homöomorphismen sind, definiert dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Flüsse.

4.2 Satz *Falls* $\Phi^{(1)}$ *zu* $\Phi^{(2)}$ *konjugiert ist,*

1. *ist $x_1 \in U_1$ genau dann Ruhelage von $\Phi^{(1)}$, wenn $x_2 := h(x_1) \in U_2$ Ruhelage von $\Phi^{(2)}$ ist.*

2. *ist der $\Phi^{(1)}$–Orbit $\mathcal{O}(x_1)$ durch $x_1 \in U_1$ genau dann geschlossen, wenn der $\Phi^{(2)}$–Orbit $\mathcal{O}(x_2)$ durch $x_2 := h(x_1) \in U_2$ geschlossen ist. Dann sind auch die Perioden gleich.*

3. *ist das Bild der ω–Limes–Menge $\omega(x_1)$ von $x_1 \in U_1$ gleich*

$$h(\omega(x_1)) = \omega(h(x_1)).$$

Bew.: Hausaufgabe. □

Ist h sogar ein Diffeomorphismus, d.h. gilt zusätzlich $h \in C^1(U_1, U_2)$ und $h^{-1} \in C^1(U_2, U_1)$, dann ist

$$f_2 \circ h = \frac{d}{dt}(\Phi_t^{(2)} \circ h)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(h \circ \Phi_t^{(1)})|_{t=0} = Dh \circ f_1$$

oder

$$f_2 = Dh \circ f_1 \circ h^{-1}. \tag{4.3}$$

Die den Fluss erzeugenden Vektorfelder werden also durch die Linearisierung von h aufeinander abgebildet.

Ist insbesondere $x_1 \in U_1$ eine Ruhelage von $\Phi^{(1)}$, dann ist nach Satz 4.2 auch $x_2 = h(x_1)$ eine Ruhelage von $\Phi^{(2)}$, und die Linearisierungen $Df_1(x_1)$ und $Df_2(x_2)$ sind ähnliche Matrizen aus $\mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$.

Umgekehrt gesagt, sind lineare Flüsse auf dem $\mathbb{R}^n$ dann und nur dann durch Diffeomorphismen konjugiert, wenn die ihre Vektorfelder definierenden Matrizen ähnlich sind. In diesem Fall können wir statt *allgemeiner* Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^n$ aber gleich die in durch $S \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ definierte *lineare* Abbildung als konjugierenden Diffeomorphismus verwenden.

Anders sieht die Situation bei Verwendung nicht differenzierbarer Homöomorphismen h aus.

4.3 Beispiel Für Parameter $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare DGL $\dot{x} = ax$ auf $\mathbb{R}$, mit Fluss $\Phi_t^{(a)}(x) = e^{at}x$. Dann ist der Ursprung $x = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ Ruhelage. Ist nun $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dann ist die ω–Limesmenge von x für

- $a < 0 \qquad \omega(x) = \{0\}$
- $a = 0 \qquad \omega(x) = \{x\}$

- $a > 0 \qquad \omega(x) = \emptyset.$

Nach Satz 4.2 können also $\Phi^{(a)}$ und $\Phi^{(b)}$ höchstens dann konjugiert sein, wenn $\mathrm{sign}(a) = \mathrm{sign}(b)$ gilt. Dann sind die Abbildungen aber auch wirklich konjugiert. Sind nämlich a und b beide größer als Null oder beide kleiner als Null, können wir den für $\alpha > 0$ definierten Homöomorphismus

$$h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \mathrm{sign}(x)|x|^\alpha$$

von $\mathbb{R}$ benutzen. Es ist $h_\alpha^{-1} = h_{1/\alpha}$ und daher für $\alpha := \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} h_\alpha \circ \Phi_t^{(a)} \circ h_\alpha^{-1}(x) &= h_\alpha(e^{at}\mathrm{sign}(x)|x|^{1/\alpha}) \\ &= \mathrm{sign}(x)(e^{at}|x|^{1/\alpha})^\alpha = e^{bt}\mathrm{sign}(x)|x| = e^{bt}x = \Phi_t^{(b)}(x). \end{aligned}$$

Wir beachten, dass dieser konjugierende Homöomorphismus außer an der Stelle Null glatt ist.

4.2 Hyperbolische lineare Vektorfelder

Wir verallgemeinern jetzt das Beispiel 4.3.

4.4 Definition

- *Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$, das Vektorfeld $x \mapsto Ax$ und der Fluss $(t, x) \mapsto \Phi_t(x) = \exp(At)x$ heißen* **hyperbolisch**, *wenn für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt: $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$.*
- *Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ heißt der* **Index** *von A und wird $\mathrm{Ind}(A)$ geschrieben.*
- $E^s := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \Phi_t(x) = 0\}$ *heißt* **stabiler Unterraum**, $E^u := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x) = 0\}$ **instabiler Unterraum** *von A.*

4.5 Bemerkungen

1. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}\,(u, \mathbb{R})$ ist also genau dann hyperbolisch, wenn $\mathrm{Ind}(A) + \mathrm{Ind}(-A) = n$ ist.
2. Im Beispiel 4.3 waren die hyperbolischen dynamischen Systeme mit gleichem Index zueinander konjugiert. Dies werden wir jetzt auch für beliebige Dimensionen n zeigen.
3. Die (gebräuchlichen) Indices s bzw. u stehen für *stable* bzw. *unstable*).

4.6 Lemma *Für eine hyperbolische Matrix A gilt*

$$\dim(E^s) = \mathrm{Ind}(A).$$

Bew.: Zunächst sind wegen der Linearität des Flusses Φ_t tatsächlich E^u und E^s Unterräume des Phasenraums $\mathbb{R}^n$.

- Ist $x \in \mathbb{R}^n$ Element der direkten Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu den Eigenwerten λ_i mit $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, dann sind die Komponenten der vektorwertigen Funktion $t \mapsto \Phi_t(x)$ Summen von λ_i–Quasipolynomen, also $x \in E^s$. Damit ist $\dim(E^s) \geq \mathrm{Ind}(A)$.

- Andererseits ist mit der analogen Argumentation für die Eigenwerte mit positivem Realteil $\dim(E^u) \geq \mathrm{Ind}(-A) = n - \mathrm{Ind}(A)$.

- Außerdem gilt für jede Summe $f(t) := \sum_i p_i(t)e^{\lambda_i t}$ von λ_i–Quasipolynomen: Falls $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$, dann ist auch $f = 0$.
  Also ist $E^u \cap E^s = \{0\}$ und damit $\dim(E^u)+\dim(E^s) = n$, was $\dim(E^s) = \mathrm{Ind}(A)$ und $\dim(E^u) = n - \mathrm{Ind}(A)$ impliziert. □

Betrachten wir das rechte Phasenportrait in Abb. 4.1, dann ist die Trajektorie zwar stabil, nähert sich aber nicht die ganze Zeit dem Ursprung. Der Übergang zur ähnlichen Systemmatrix der linken Abbildung behebt diesen Defekt.
Dies ist allgemein möglich:

4.7 Lemma *Es sei $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$, und $\Lambda := \max\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda$ Eigenwert von $A\}$. Dann gibt es für alle $\Lambda' > \Lambda$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, für dessen Norm gilt:*

$$\frac{d}{dt}\|\Phi_t(x)\| \leq \Lambda' \|\Phi_t(x)\| \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Bew.: Wegen $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = \frac{d}{ds}\Phi_{t+s}(x)|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Phi_s(y)|_{s=0}$ mit $y := \Phi_t(x)$ genügt es, (4.4) für $t = 0$ zu zeigen.

- Stattdessen zeigen wir sogar, dass für ein geeignetes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$ gilt

  $$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \exp(At)x, \exp(At)x\rangle|_{t=0} \leq \Lambda' \langle x, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{C}^n). \tag{4.5}$$

  Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass der Basiswechsel zur Jordan-Normalform schon vorgenommen wurde. Es ist

  $$\frac{d}{dt}\langle \exp(At)x, \exp(At)x\rangle|_{t=0} = 2\mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle).$$

- Ist das Skalarprodukt so gewählt, dass die Unterräume zu den verschiedenen Jordan-Blöcken orthogonal sind, ist dieser Term eine Summe über die Beiträge der Jordan-Blöcke.
  Mit dem Jordan-Block $J_r(\lambda)$ für den Eigenwert λ ist für $\mu := \mathrm{Re}(\lambda) \leq \Lambda$

$$\mathrm{Re}(\langle x, J_r(\lambda)x\rangle) = \mathrm{Re}(\langle x, J_r(\mu)x\rangle).$$

- Für $\varepsilon > 0$ konjugieren wir $J_r(\mu) = \mu \mathbb{1}_r + J_r(0)$ mit der (invertierbaren) Diagonalmatrix $D_\varepsilon := \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{r-1})$:

$$D_\varepsilon^{-1} J_r(\mu) D_\varepsilon = \mu \mathbb{1}_r + D_\varepsilon^{-1} J_r(0) D_\varepsilon = \mu \mathbb{1}_r + \varepsilon J_r(0).$$

  Die Nebendiagonale wurde also mit ε multipliziert. Wir bezeichnen das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^r$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert

$$\mathrm{Re}\left(\langle x, J_r(0)x\rangle_{\mathrm{can}}\right) \leq \|x\|_{\mathrm{can}} \|J_r(0)x\|_{\mathrm{can}} \leq \|x\|_{\mathrm{can}}^2.$$

  Also ist für $\varepsilon \in \big(0, \Lambda' - \Lambda\big)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\langle x, (\mu \mathbb{1}_r + \varepsilon J_r(0))x\rangle_{\mathrm{can}}\right) &= \mu \langle x, x\rangle_{\mathrm{can}} + \varepsilon\, \mathrm{Re}\left(\langle x, J_r(0)x\rangle_{\mathrm{can}}\right) \\ &\leq (\Lambda + \varepsilon) \langle x, x\rangle_{\mathrm{can}} \leq \Lambda' \langle x, x\rangle_{\mathrm{can}}. \end{aligned}$$

  Wir definieren also das Skalarprodukt durch $\langle x, y\rangle := \langle D_\varepsilon^{-1} x, D_\varepsilon^{-1} y\rangle_{\mathrm{can}}$ und erhalten für $\tilde{x} := D_\varepsilon^{-1} x$

$$\langle x, J_r(\mu)x\rangle = \langle \tilde{x}, (\mu \mathbb{1}_r + \varepsilon J_r(0))\tilde{x}\rangle_{\mathrm{can}} \leq \Lambda' \langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle_{\mathrm{can}} = \Lambda' \langle x, x\rangle,$$

  insgesamt also $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\exp(At)x\|^2|_{t=0} \leq \Lambda' \|x\|^2$. □

Der (eindimensionale, da durch $a \in \mathbb{R}$ parametrisierte) Parameterraum der eindimensionalen linearen dynamischen Systeme $\dot{x} = ax$ wird also in drei Äquivalenzklassen zueinander konjugierter Systeme zerlegt.

4.8 Satz *Die linearen Flüsse zweier hyperbolischer Matrizen $A^{(i)} \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ sind genau dann konjugiert, wenn $\mathrm{Ind}(A^{(1)}) = \mathrm{Ind}(A^{(2)})$ gilt.*

Bew.: Wir bezeichnen die linearen Flüsse mit $\Phi_t^{(i)}(x) := \exp(A^{(i)}t)(x)$ und deren stabile Unterräume mit $E^{(i)}$ $(i = 1, 2)$.

- Existiert ein konjugierender Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann gilt $h(0) = 0$ und auch $h(E^{(1)}) = E^{(2)}$, denn die Punkte $x \in E^{(i)}$ haben die definierende Eigenschaft $\{0\} = \omega(x)$, und es gilt nach Satz 4.2 $h(\omega(x)) = \omega(h(x))$. Es ist eine wichtige Eigenschaft von Homöomorphismen, die Dimension von Vektorräumen invariant zu lassen. Damit ist bei Existenz einer Konjugation h

$$\mathrm{Ind}(A^{(1)}) = \dim(E^{(1)}) = \dim(h(E^{(1)})) = \dim(E^{(2)}) = \mathrm{Ind}(A^{(2)}).$$

- Wir nehmen jetzt umgekehrt $\mathrm{Ind}(A^{(1)}) = \mathrm{Ind}(A^{(2)})$ an und konstruieren einen konjugierenden Homöomorphismus h. Da beide Phasenräume $\mathbb{R}^n$ direkte Summen ihrer stabilen bzw. instabilen Unterräume sind, schreiben wir bezüglich dieser Zerlegungen den Homöomorphismus in der Form $h = (h^{(s)}, h^{(u)})$ mit $h^{(s)} : E^{(1)} \to E^{(2)}$, während $h^{(u)}$ die instabilen Unterräume aufeinander abbildet.

- Wir geben an, wie $h^{(s)}$ konstruiert wird. $h^{(u)}$ kann man analog, aber bei Übergang von $A^{(i)}$ zu den Systemmatrizen $-A^{(i)}$ definieren.

  Zunächst ist $h^{(s)}(0) := 0$. Ist $x \in E^{(1)} \backslash \{0\}$, dann ist $\lim_{t\to\infty} \Phi_t^{(1)}(x) = 0$ und $\lim_{t\to-\infty} \|\Phi_t^{(1)}(x)\| = \infty$. Nach Lemma 4.7 gibt es genau ein

$$T(x) \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Phi_{T(x)}^{(1)}(x) \in S^{(1)} := \{y \in E^{(1)} \mid \|y\|^{(1)} = 1\}.$$

  Geometrisch ist $S^{(1)}$ die Sphäre vom Radius 1 in $E^{(1)}$. Ähnlich bezeichnet $S^{(2)} := \{z \in E^{(2)} \mid \|z\|^{(2)} = 1\}$ die Einheitssphäre in $E^{(2)}$.

  Da die beiden $\mathbb{R}$–Vektorräume $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$ die gleiche Dimension besitzen, gibt es einen Isomorphismus $I : E^{(1)} \to E^{(2)}$, und entsprechend den Diffeomorphismus

$$\tilde{I} : S^{(1)} \to S^{(2)} \quad , \quad y \mapsto \frac{I(y)}{\|I(y)\|^{(2)}}.$$

  Wir setzen

$$h^{(s)}(x) := \Phi_{-T(x)}^{(2)} \circ \tilde{I} \circ \Phi_{T(x)}^{(1)}(x) \qquad (x \in E^{(1)} \backslash \{0\}).$$

  Als Verkettung glatter Abbildungen ist $h^{(s)}$ auf $E^{(1)} \backslash \{0\}$ glatt, und $h^{(s)}(x) \to 0$ für $x \to 0$. Analoge Aussagen gelten für die Umkehrabbildung von $h^{(s)}$. Damit ist $h^{(s)}$ und schließlich auch h ein Homöomorphismus.

- h konjugiert die Flüsse, denn für $y := \Phi_s^{(1)}(x)$ und $x \in E^{(1)}$ ist

$$\Phi_{T(x)-s}^{(1)}(y) = \Phi_{T(x)}^{(1)}\Phi_{-s}^{(1)}(y) = \Phi_{T(x)}^{(1)}(x),$$

  also $T(y) = T(x) - s$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und (zunächst nur) für $x \in E^{(1)}$ ist

$$\Phi_t^{(2)} \circ h(x) = \Phi_{t-T(x)}^{(2)} \circ \tilde{I} \circ \Phi_{T(x)}^{(1)}(x) = \Phi_{t-T(x)}^{(2)} \circ \tilde{I} \circ \Phi_{T(x)-t}^{(1)} \circ \Phi_t^{(1)}(x) = h \circ \Phi_t^{(1)}(x),$$

  woraus mit analoger Argumentation für den instabilen Unterraum die Konjugationseigenschaft für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt. □

Es gilt also bezüglich Konjugation genau $n+1$ Äquivalenzklassen hyperbolischer Matrizen $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$.

Eine weitergehende Analyse, insbesondere eine Verallgemeinerung auf die lokale Theorie nichtlinearer DGLn in der Nähe eines hyperbolischen singulären Punktes, findet sich in Palis und de Melo [PdM], sowie in Amann [Am].

4.3 Lineare Flüsse in der Ebene

Nach dem in Beispiel 4.3 behandelten Fall $n = 1$ untersuchen wir jetzt den nächst einfachen Fall $n = 2$. Zueinander ähnliche Matrizen führen zu Flüssen, die sich nur durch eine Basistransformation unterscheiden.

Wir betrachten für $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{R})$ den Fluss $\Phi_t^{(A)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der linearen DGL $\dot{x} = Ax$. Die Größen

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \quad , \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{und} \quad D := \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

sind invariant unter Konjugationen $A \mapsto SAS^{-1}$, und die Eigenwerte $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$ sind gleich

$$\lambda_{1/2} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{D}).$$

Nur wenn die Diskriminante $D = 0$ ist, kann also die komplexe Jordan-Normalform von A aus einen Jordan-Block der Größe 2 bestehen, und nur dann ist die Konjugationsklasse von A nicht schon durch $\mathrm{tr}(A)$ und $\det(A)$ festgelegt.

Nicht hyperbolisch ist die Matrix A genau dann, wenn mindestens einer der Eigenwerte verschwindenden Realteil hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn

1. $\det(A) = 0$, also sogar ein Eigenwert 0 ist oder

2. $\det(A) > 0$, aber $\mathrm{tr}(A) = 0$ gilt, also die Eigenwerte rein imaginär sind.

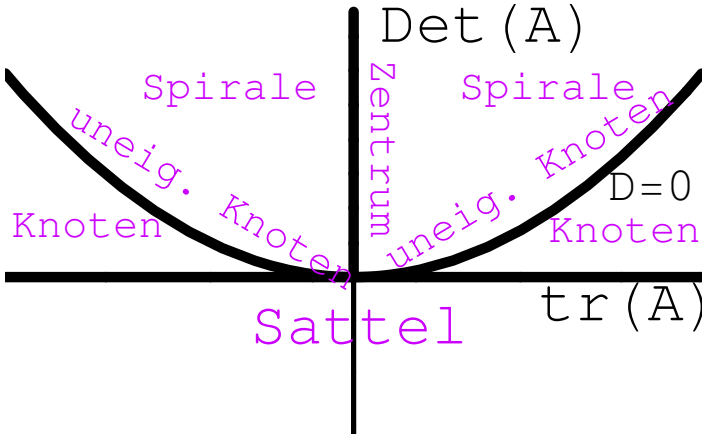


Abbildung 4.2: Verzweigungsdiagramm für Matrizen $A \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{R})$, mit Diskriminante $D = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.
$\mathrm{tr}(A) < 0$: Senke; $\mathrm{tr}(A) = 0$: Volumenerhaltender Fluss; $\mathrm{tr}(A) > 0$: Quelle

In der $(\mathrm{tr}, \det) \in \mathbb{R}^2$–Ebene bilden diese Bedingungen die Abszisse bzw. positive Ordinate und trennen damit drei offene Gebiete ab, siehe Abb. 4.2.

- $\mathrm{Ind}(A) = 0$ gilt für den Quadranten $\det(A) > 0 < \mathrm{tr}(A)$
- $\mathrm{Ind}(A) = 1$ gilt für $\det(A) < 0$. Hier sind beide Eigenwerte reell.
- $\mathrm{Ind}(A) = 2$ entspricht dem Quadranten $\det(A) > 0 > \mathrm{tr}(A)$.

Wie im letzten Abschnitt bewiesen, sind die Flüsse innerhalb jedes dieser drei Gebiete untereinander konjugiert, aber Flüsse für Matrizen mit verschiedenen Indices sind nicht konjugiert.

Der Fall $\mathrm{Ind}(A) = 1$ ist, entsprechend dem Vorzeichen von $\mathrm{tr}(A)$, noch weiter unterteilbar. In der Situation $\mathrm{tr}(A) = 0$ zweier Eigenwerte $\lambda_1 = -\lambda_2 \in \mathbb{R}$ wird das Phasenraumvolumen durch den Fluss erhalten, während für $\mathrm{tr}(A) < 0$ gemäß Lemma 3.11 für den Limes großer Zeiten mit exponentieller Rate gegen Null geht. Der Fall $\mathrm{tr}(A) > 0$ ist in Abb. 4.3 dargestellt.

Die durch die Gleichung $D = 0$ definierte Parabel trennt die Konjugationsklassen $\mathrm{Ind}(A) = 0$ und $\mathrm{Ind}(A) = 2$ noch weiter auf. Für $D > 0$, also reelle Eigenwerte, erhalten wir sog. *Knoten* als Phasenraumporträts, siehe Abb. 4.4. Diese werden *stabil* genannt, wenn $\dim(E^s) = 2$, also $\mathrm{Ind}(A) = 2$ ist und *instabil* für $\mathrm{Ind}(A) = 0$.

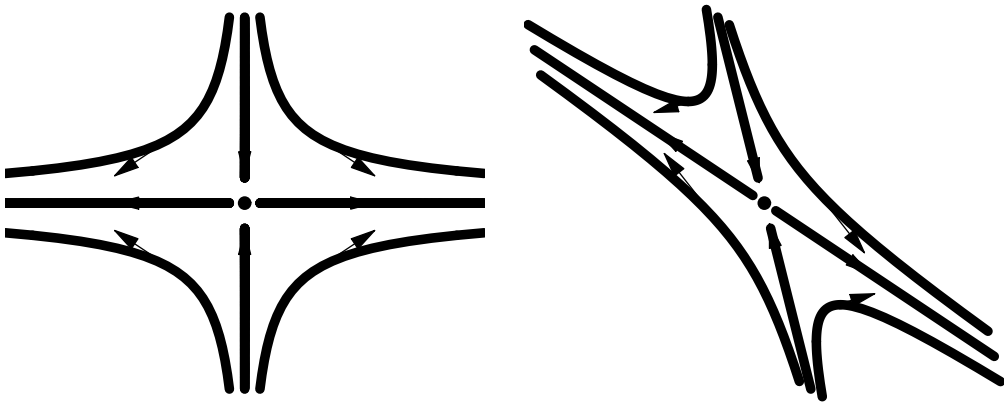


Abbildung 4.3: Phasenporträt von Satteln der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: Systemmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$; Rechts: zu A ähnliche Matrix.

Für $D = 0$ kann die Jordan–Normalform von A ein nichttrivialer Jordan–Block sein. Ein entsprechendes Phasenporträt, *uneigentlicher Knoten* genannt, findet sich ebenfalls in Abb. 4.4.

Ist zusätzlich $\mathrm{tr}(A) = 0$, sind also beide Eigenwerte gleich Null, erhält man einen eindimensionalen Eigenraum von Gleichgewichtslagen, wie in Abb. 4.5 (links). Der Fall $\mathrm{tr}(A) = 0,\ \det(A) > 0$ führt zu imaginären Eigenwerten und periodischen Orbits (Abb. 4.5 rechts), auch *Zentren* genannt.

Endlich ist für $D < 0$ und $\mathrm{tr}(A) < 0$ die Bewegung spiralförmig und stabil (Abb. 4.6), während $D < 0$ und $\mathrm{tr}(A) > 0$ zu sog. *instabilen Spiralen* führt.

4.4 Beispiel: Feder mit Reibung

Als Anwendungsbeispiel der Theorie linearer DGLn diskutieren wir den Fall eines an einer Feder aufgehängten Gewichts der Masse $m > 0$, das sich im Ruhezustand im der Höhe $x = 0$ befinde.

Die Kraft $F(x, \dot{x})$, die auf die Masse wirkt, ist in der einfachsten Näherung eine lineare Funktion der Auslenkung $x \in \mathbb{R}$ und der Geschwindigkeit $\dot{x} \in \mathbb{R}$. Die erste Proportionalitätskonstante $-D$ mit $D > 0$ nennt man Federkonstante. Sie ist ein Maß für die Steifheit der Feder.

Die zweite Konstante $-R$ mit $R \geq 0$ beschreibt die Reibung des Massenkörpers an der umgebenden Luft und die innere Reibung des Federmaterials.

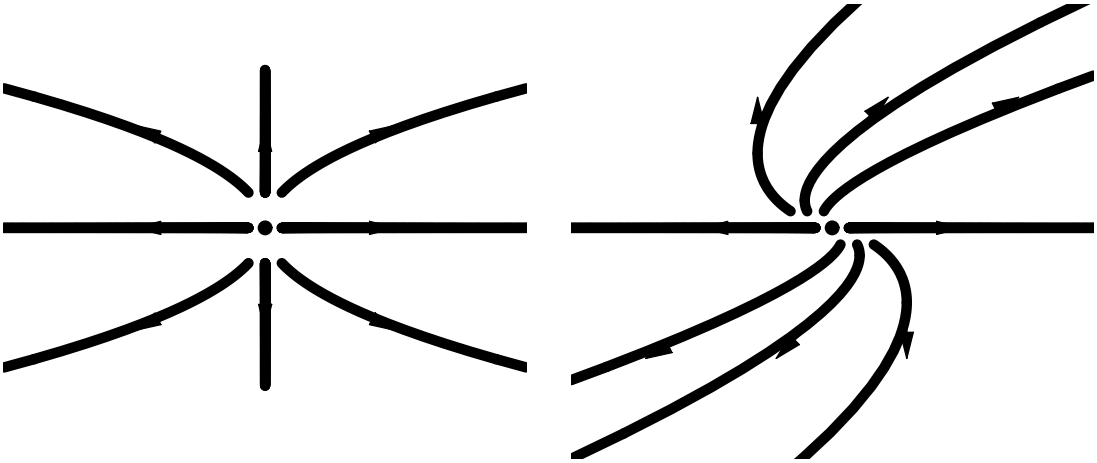


Abbildung 4.4: Phasenporträts von Knoten der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: instabiler Knoten, für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$; Rechts: instabiler uneigentlicher Knoten, für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

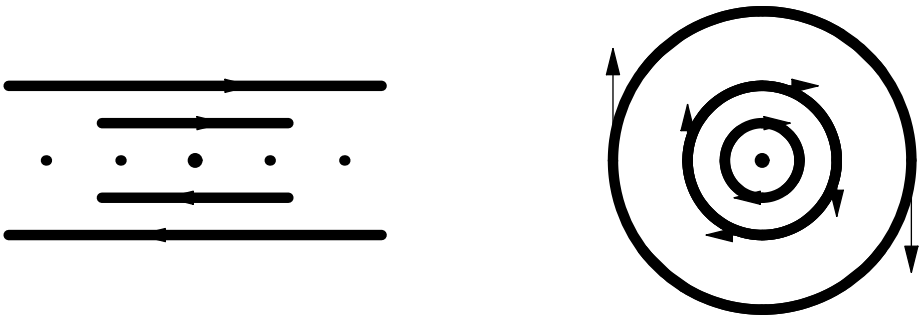


Abbildung 4.5: Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$. Fall rein imaginärer Eigenwerte. Links: Nilpotente Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; Rechts: Zentrum, für antisymmetrische Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

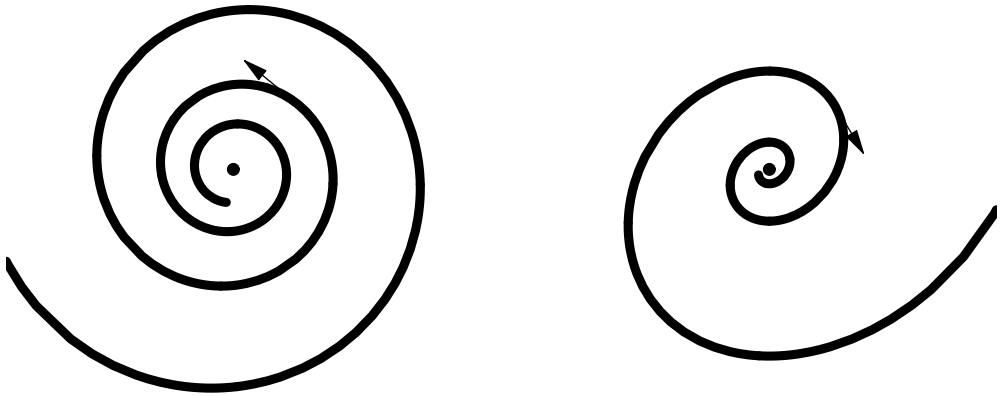


Abbildung 4.6: Phasenporträts von stabilen Spiralen der DGL $\dot{x} = Ax$. Links: $A = \left(\begin{smallmatrix} -1/5 & -1 \\ 1 & -1/5 \end{smallmatrix}\right)$; rechts: eine nicht zu A ähnliche Matrix

Autonomer Fall

Es gilt also nach Newton $m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -Dx(t) - R\frac{d}{dt}x(t)$, oder $\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{D}{m}x - \frac{R}{m}\frac{d}{dt}x$. Setzt man als neuen Zeitparameter $s = \sqrt{\frac{m}{D}}t$ an, und kürzt $\frac{d}{ds}x(t(s))$ mit $\dot{x}$ ab, so ergibt sich

$$\ddot{x} = -x - k\dot{x} \quad \text{, mit} \quad k := \frac{R}{\sqrt{mD}} \geq 0.$$

Eine solche Umskalierung wird häufig benutzt, um eine Differentialgleichung auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Mit der Geschwindigkeit $v := \dot{x}$ ergibt sich das lineare System erster Ordnung

$$\left(\begin{smallmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ v \end{smallmatrix}\right) \quad \text{mit} \quad A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{smallmatrix}\right).$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich als die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$ des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \lambda^2 + k\lambda + 1$.

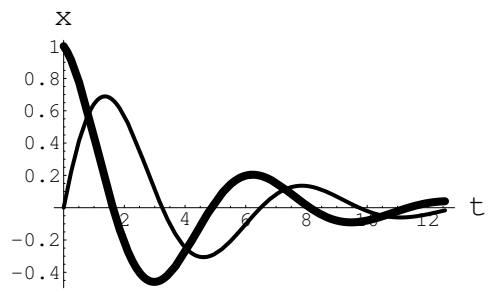
Es gilt $\det(A) = 1$ und $\mathrm{tr}(A) = -k$, wir bewegen uns also im Diagramm 4.2 auf einer hozontalen Geraden. Je nach Größe des Reibungsterms müssen also drei Fälle unterschieden werden:

1. **Schwingfall:**, Kleine Reibung, $0 \leq k < 2$.

Die allgemeine Lösung hat hier die Form

$$x(t) = e^{-kt/2}(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)) \quad \text{mit} \quad \omega := \mathrm{Im}(\lambda_1) = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}},$$

wobei die Koeffizienten a und b aus den Anfangswerten $x(0), \dot{x}(0)$ zu bestimmen sind. Für den reibungsfreien Fall $k = 0$ liegt ein Zentrum vor, sonst eine Spirale.
Die Schwingungsfrequenz $\omega(k)$ ist gegenüber $\omega(0) = 1$ verkleinert, aber es gilt noch $\omega(k) > 0$.
Die an der Feder aufgehängte Masse pendelt sich allmählich in ihre Ruhelage $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ ein.



Zwei Lösungen für den Schwingfall ($k = 1/2$)

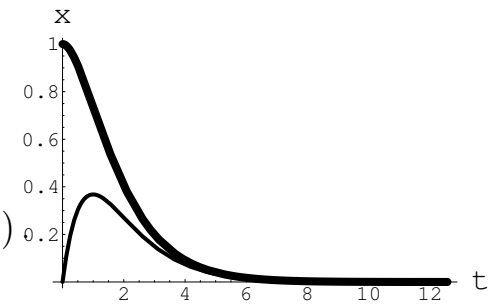
2. **Aperiodischer Grenzfall:** $k = 2$.

Es ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, und die Matrix $V := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), V^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, führt A in obere Dreiecksform über: $J := V^{-1}AV = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Damit ist $e^{Jt} = e^{-t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und

$$\exp(At) = Ve^{Jt}V^{-1} = e^{-t}\left(\begin{smallmatrix} 1+t & t \\ -1 & 1-t \end{smallmatrix}\right)$$

Beispielsweise ist bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$

$$x(t) = x_0(1 + t)e^{-t}.$$



Zwei Lösungen für den Aperiodischen Grenzfall

Es findet also keine Schwingung mehr statt. Wegen der Nichttrivialität des Jordan-Blockes ist die Bewegung zur Ruhelage hin gegenüber der Lösung $x(t) = x_0e^{-t}$ verlangsamt.

3. **Kriechfall:** Große Reibung, $k > 2$.

Hier hat A die beiden reellen negativen Eigenwerte

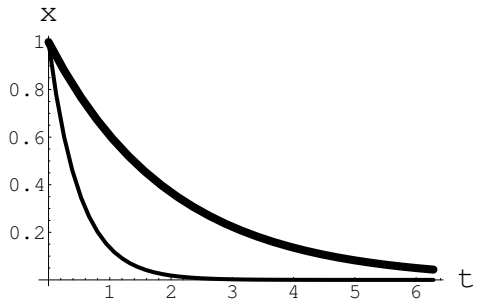
$$\lambda_{1/2} = -\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} = -\frac{k}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{k^2}}\right).$$

Für $k \to \infty$ ist also

$$\lambda_1 \sim -k^{-1} \quad , \quad \lambda_2 \sim -k.$$

Das Phasenportrait ist das eines Knotens. Physikalisch bedeutet dies, dass, außer für sehr spezielle Anfangswerte (x_0, v_0) die einem Eigenvektor zum kleineren Eigenwert λ_2 entsprechen, die Annäherung an die Ruhelage sich bei Vergrößerung von k verlangsamt:

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}.$$



Zwei Lösungen für den Kriechfall $(k = 2.5)$

Nicht autonomer Fall

Eine in der Praxis wichtige Erweiterung des eben besprochenen Beispiels besteht darin, dass auf den Massenpunkt zusätzlich eine äußere Kraft wirkt. Soll beispielsweise dauerhaft eine Schwingung aufrechterhalten werden, kann man den Aufhängungspunkt zeitperiodisch nach oben und unten bewegen.

Die zu behandelnde Differentialgleichung hat dann die Normalform

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = f(t)$$

mit einer vorgegebenen äußeren Kraft f, z.B. $f(t) = a\cos\omega t$. Es ist ja $\cos\omega t = \mathrm{Re}(e^{i\omega t})$. Es liegt also zur Verkürzung der Rechnung nahe, eine partikuläre Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{y} + k\dot{y} + y = ae^{i\omega t}$$

zu suchen, und danach $x(t) := \mathrm{Re}(y(t))$ zu setzen.

Physikalisch ist wegen der Reibung zu erwarten, dass der Massenpunkt nach einiger Zeit hauptsächlich eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω durchführt, die ihm von außen aufgeprägt wird. Setzen wir an: $y(t) := Be^{i\omega t}$, so ergibt sich $y^{(k)}(t) = (i\omega)^k y(t)$, also

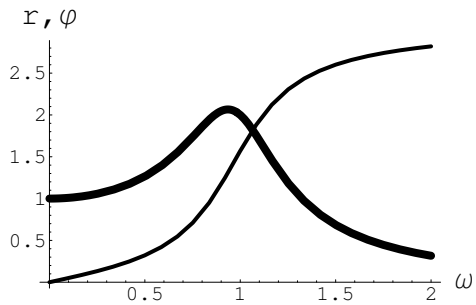
$$(1 - \omega^2 + ik\omega)y(t) = Ae^{i\omega t}$$

oder, nach Auflösen nach B:

$$B = \frac{A}{1 - \omega^2 + ik\omega} = Ar(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$$

mit *Amplitude* $r(\omega) := \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+(k\omega)^2}}$ und *Phase* $\varphi(\omega) := \arctan\left(\frac{k\omega}{1-\omega^2}\right)$

der erzwungenen Schwingung (siehe Abb.).



Amplitude und Phasendifferenz der Erzwungenen Schwingung ($k = \frac{1}{2}$)

Offensichtlich spielt $\omega = 1$ eine besondere Rolle; das ist nicht verwunderlich, denn die homogene Gleichung ohne Reibung hatte ja diese Frequenz ihrer Lösungen.

Wir interpretieren jetzt Amplitude und Phase der Lösung physikalisch:

- Für kleine anregende Frequenz ω schwingt die Masse einfach mit der Amplitude der Anregung. Ist ω nahe bei der auf 1 normierten Eigenfrequenz, dann kommt es zur Resonanz. Die Schwingungsamplitude wird größer als die anregende Amplitude und zwar um so größer, je geringer die Dämpfung ist.[8] Das Maximum von $r(\omega)$ liegt an der Stelle $\omega_0 = \sqrt{1 - k^2/2}$, also zwischen der Eigenfrequenz mit und ohne Reibung. Die Maximalamplitude ist für verschwindende Dämpfung $k \searrow 0$ asymptotisch zu

$$r(\omega_0) = \frac{1}{k\sqrt{1 - k^2/4}} \sim \frac{1}{k}.$$

- Die Phasendifferenz $\varphi(k)$ zwischen der äußeren Kraft und der Schwingung hat folgende Form:

  Für $\omega \ll 1$ sind die beiden Schwingungen also in Phase, für $\omega \gg 1$ gegenphasig, für $\omega = 1$ um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben.

[8] Voraussetzung: $k < \sqrt{2}$.

Wir erhalten also als Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + k\dot{x} + x = A\cos\omega t$

$$x_I(t) = r(\omega)A\cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Der Index I steht hier für *inhomogen* und verweist auf die rechte Seite der Differentialgleichung. Wie immer bei inhomogenen linearen DGLn gilt:

Ist x_H eine beliebige *homogene* Lösung der homogenen linearen DGL (hier: $\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$), dann ist

$$x_H + x_I$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung, und jede Lösung der inhomogenen Gleichung läßt sich so gewinnen. Diese Lösungsstruktur der derjenigen der Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$.

5 Stabilität von Gleichgewichtslagen

5.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung

Wir besitzen jetzt eine Lösungsmethode für lineare DGLn (mit konstanten Koeffizienten). Es ist dies aber leider die einzige große Klasse "algorithmisch" lösbarer DGLn. Andererseits sind viele Anfangswertprobleme zwar nicht linear, können aber immerhin näherungsweise mithilfe linearer AWPs gelöst werden.

5.1 Bemerkung Ein Grund dafür ist die Tatsache, dass sich viele in der Natur auftretenden Systeme näherungsweise im Gleichgewicht befinden, also nahe bei einem kräftefreien Fall. Besitzt die ortsabhängige Kraft F eine Nullstelle bei q_s, dann gilt (für glattes F) nach Taylor für q nahe bei q_s

$$\begin{aligned} F(q) &= \underbrace{F(q_s)}_{0} + DF(q_s)(q - q_s) + \mathcal{O}(\|q - q_s\|^2) \\ &= A(q - q_s) + \mathcal{O}(\|q - q_s\|^2) \end{aligned}$$

mit $A := DF(q_s)$. Führt man die Relativkoordinate $y := q - q_s$ ein, so wird aus der Newtongleichung $\ddot{q} = F(q)$ (für Masse 1)

$$\ddot{y} = Ay + \mathcal{O}(\|y\|^2).$$

Es liegt nun nahe (und ist auch richtig), anzunehmen, dass für kurze Zeiten die Lösungen des AWP für $\ddot{y} = Ay$ mit betragsmäßig kleinen Anfangswerten $y(0)$

und $\dot{y}(0)$ nahe bei den entsprechenden Lösungen der nicht linearen DGL liegen. Manchmal gilt das sogar für alle Zeiten, zumindest wenn man statt der Lösungen die Orbits vergleicht, also die Zeitparametrisierung vergisst.

Wir formulieren nun das Konzept der Linearisierung allgemein für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

5.2 Definition *Es sei $x_s \in U$ Nullstelle des Vektorfeldes $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, also Gleichgewichtslage der DGL*

$$\dot{x} = f(x). \tag{5.1}$$

Die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = Ay \quad \textit{mit} \quad A := Df(x_s) \tag{5.2}$$

heißt **Linearisierung** *von (5.1)* **bei** x_s.

Wir untersuchen an einem Beispiel den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (5.1) und denen der Linearisierung (5.2).

5.3 Beispiel (Das planare Pendel) Zunächst leiten wir mithilfe des Newtonschen Kraftgesetzes eine Differentialgleichung ab, die wir anschließend untersuchen.

Im ersten Schritt (oft *Modellierung* genannt) idealisieren wir das Pendel wie folgt. Es soll aus einem Massepunkt der Masse $m > 0$ bestehen, der sich in einer Ebene auf einem Kreis mit Radius $L > 0$ (Pendellänge) um den Ursprung bewegt. Seine Koordinaten seien $\binom{z_1}{z_2} = L\binom{\sin\varphi}{-\cos\varphi}$, und auf ihn wirke eine in $-z_2$–Richtung wirkende Kraft $F(z) = \binom{0}{-m}$ der Stärke m (Schwerkraft). Deren Komponente in Tangentialrichtung ist daher gleich $-\sin\varphi$. Es ergibt sich damit die Differentialgleichung

$$L\ddot{\varphi} = -\sin\varphi,$$

denn die Masse m tritt auf beiden Seiten des Newtonschen Kraftgesetzes als Faktor auf, kann also gekürzt werden. Auf dem Phasenraum $U = \mathbb{R}^2$ erhalten wir durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit v das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\varphi} = v \quad , \quad \dot{v} = -\frac{1}{L}\sin\varphi.$$

Durch Reskalierung der Zeit können wir erreichen, dass $L = 1$ ist.
Mit $x := \binom{\varphi}{v}$ ist

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Es gilt $f(x+y) = f(x)$, falls $y = (0, 2\pi k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. Innerhalb einer Periode ($\varphi \in [0, 2\pi)$) besitzt aber f nur die Nullstellen $x_s = (0,0)$ und $(0,\pi)$, entsprechend der unteren bzw. oberen Ruhelage des Pendels. Linearisierung bei $x_s = (0,0)$ ergibt die lineare Differentialgleichung auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A = Df(x_s) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Diese besitzt mit der Bezeichnung $y = (q,p)$ die Lösung

$$q(t) = q_0 \cos t + p_0 \sin t \quad , \quad p(t) = -q_0 \sin t + p_0 \cos t, \tag{5.4}$$

mit der Periode 2π.

Sind diese Lösungen für Anfangsbedingungen (q_0, p_0) in der Nähe der Ruhelage $x_s = (0,0)$ eine gute Näherung an die Lösungen von (5.3)?

Um dies zu untersuchen, stellen wir fest, dass die so genannte *Hamilton-Funktion* [9] von (5.3)

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad H(\varphi, v) = \tfrac{1}{2}v^2 - \cos\varphi$$

entlang der Lösungskurven ihren Wert nicht ändert:

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t), v(t)) = v\dot{v} + \sin\varphi\dot{\varphi} = -v\sin\varphi + v\sin\varphi = 0.$$

Damit fixieren die Niveaulinien von H im Phasenraum $\mathbb{R}^2$ auch schon die Orbits der DGL (siehe Abb. 5.1). Da x_s Minimalstelle von H ist, und die Hessesche Hess $H(x_s) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ positiv definiert ist, sind diese Niveauflächen $H^{-1}(H(x_0))$ für x_0 nahe bei x_s näherungsweise von der Form eines Kreises mit Radius $\|x_0\|$, also nahe bei dem Orbit (5.4) der Linearisierung.
Damit bleibt insbesondere die Lösung von (5.3) für alle Zeiten in der Nähe von x_s. Die Schwingungsdauer des Pendels ist aber größer als die Periode 2π der Lösung (5.4) der linearen DGL, sodass die beiden Lösungen nach einiger Zeit nicht mehr synchron sind (siehe Abb. 5.2).

[9] Physikalisch ist $H(\varphi, v)$ die Gesamtenergie des Pendels mit Winkel φ und Winkelgeschwindigkeit v

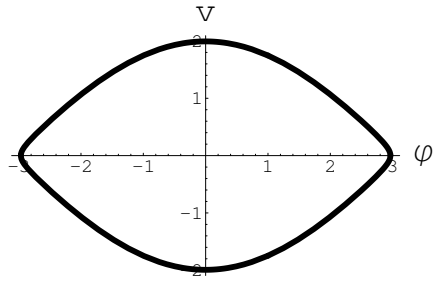


Abbildung 5.1: Niveaukurve für die Energie der oberen Ruhelage des Pendels

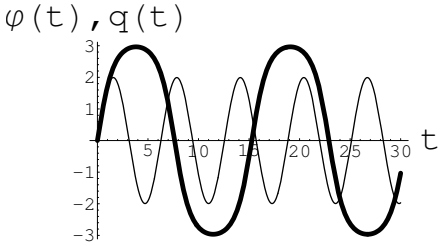


Abbildung 5.2: Pendelausschlag als Funktion der Zeit und Linearisierung

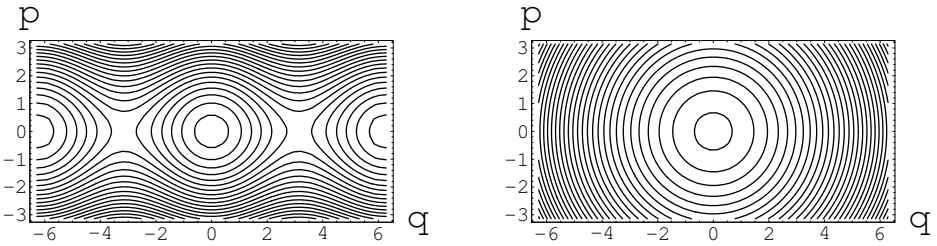


Abbildung 5.3: Orbits der Pendelgleichung (links) und ihrer Linearisierung an der unteren Gleichgewichtslage (rechts)

5.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen

Anschaulich wird man eine Gleichgewichtslage x_s der DGL $\dot{x} = f(x)$ dann stabil nennen, wenn benachbarte Lösungen nicht von x_s wegstreben. Diese Vorstellung muss natürlich noch präzisiert werden, ihre praktischen Implikationen sind aber offensichtlich.

5.4 Beispiel In vielen technischen Anwendungen ist man daran interessiert, das System in eine Gleichgewichtslage zu bringen. Man kann das aber natürlich nur bis auf einen gewissen Fehler erreichen.

Ist nun die Gleichgewichtslage stabil, dann ist auch in Zukunft das System nahe bei der Gleichgewichtslage, sonst im Allgemeinen nicht.

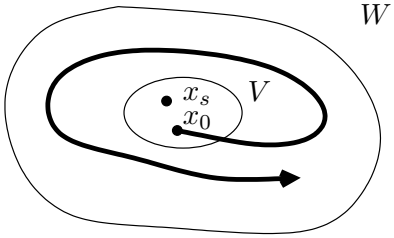
Das Pendel ist in diesem Sinn in seiner unteren Gleichgewichtslage stabil, in seiner oberen nicht.

Ist das Pendel ungedämpft, so wird es für alle Zeiten kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollführen; ist es gedämpft, dann wird es sich der Gleichgewichtslage immer mehr annähern. Entsprechend unterscheiden wir auch zwei Stabilitätsbegriffe.

5.5 Definition • *Die Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \tag{5.5}$$

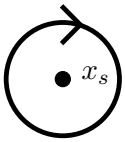
heißt **Liapunov-stabil**, *falls für jede Umgebung $W \subseteq U$ von x_s eine Umgebung $V \subseteq W$ von x_s existiert, sodass das AWP (6.2) für alle Anfangswerte $x_0 \in V$ und alle Zeiten $t \geq 0$ lösbar ist und die Lösungen φ in W bleiben ($\varphi\big([0,\infty)\big) \subseteq W$).*
• *Andernfalls heißt sie* **instabil**.



5.6 Beispiel 1. Die *untere* Gleichgewichtslage $x_s := (\varphi, v) = (0, 0)$ des planaren Pendels

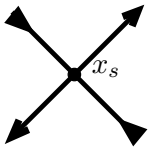
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin\varphi \end{cases}$$

ist Liapunov-stabil, denn jede Umgebung W von x_s enthält eine Umgebung V der Form $V = H^{-1}((-\infty, E))$, wobei $H(v, \varphi) = \frac{v^2}{2} - \cos\varphi$ die Hamilton-Funktion ist.



V ist aber flussinvariant, denn die Energie H ist, wie wir gesehen haben, auf den Lösungskurven konstant (lässt man Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ zu, muss man statt $H^{-1}((-\infty, E))$ die x_s enthaltende Zusammenhangskomponente V dieser nicht beschränkten Menge verwenden).

2. Die *obere* Gleichgewichtslage $x_s := (\varphi, v) = (\pi, 0)$ ist *nicht* Liapunov-stabil, denn $H(x_s) = 1$, und $E^{-1}(1)$ enthält von x_s verschiedene, aber diesem beliebig nahe Phasenraumpunkte, die von x_s wegstreben.



Der Begriff der Liapunov-Stabilität ist vergleichsweise schwach, denn er setzt ja keine Annäherung an die Gleichgewichtslage voraus. So ist der untere Gleichgewichtspunkt des Pendelbeispiels auch für negative Zeiten, also bei Richtungsumkehr des Vektorfeldes, Liapunov-stabil.

5.7 Definition *Die Gleichgewichtslage x_s von (5.5) heißt* **asymptotisch stabil**, *wenn sie Liapunov-stabil ist und eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_s existiert mit*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s \quad \textit{für alle} \quad x(0) \in V.$$

5.8 Bemerkung Wie das Beispiel einer autonomen DGL auf dem $\mathbb{R}^2$ zeigt (siehe z.B. [Am], §15) folgt die Liapunov-Stabilität nicht aus der zweiten Bedingung.

5.9 Beispiel 1. Die untere Gleichgewichtslage $x_s = (0, 0)$ des Pendels ist *nicht* asymptotisch stabil, denn nur x_s selbst hat Energie $H(x_s) = -1$, alle Nachbarpunkte haben echt größere Energie, und diese bleibt erhalten.

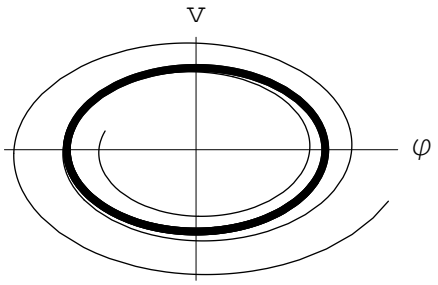
2. Wirkt auf das Pendel eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit Proportionalitätskonstante $k > 0$, dann wird seine Bewegung durch die DGL

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin\varphi - k \cdot v \end{cases}$$

beschrieben. In diesem Fall ist die untere Gleichgewichtslage sogar asymptotisch stabil. Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dt} H(v(t), \varphi(t)) \quad = \quad v(t) \cdot \dot{v}(t) + \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = -k(v(t))^2 \leq 0,$$

was ja auch anschaulich zu erwarten ist. Man kann nun zeigen, dass mit der Zeit die Energie H tatsächlich gegen -1 geht, der Orbit also auf die untere Gleichgewichtslage zusteuert. In diesem Beispiel spielt H die Rolle einer *Liapunov-Funktion*, d.h. einer entlang der Lösung monoton fallenden Phasenraumfunktion H.



5.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen

Das letzte Beispiel zeigt eine wichtige Beweisidee für asymptotische Stabilität. Man möchte ja Stabilitätsfragen auch für DGLn klären, deren Lösungen man nicht hinschreiben kann. Die Rolle der Funktion H bestand nun in der Tatsache, dass die Mengen $H^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \subset U$ Umgebungen der Gleichgewichtslage waren, die wegen $\frac{dH}{dt} \leq 0$ nicht verlassen werden können. Die Größe von H ist ein Maß für den Abstand von der Gleichgewichtslage, und dieser wird immer kleiner. Unsere Strategie besteht nun darin, zunächst Kriterien für die Stabilität im linearen Fall zu entwickeln, um danach, soweit möglich, diese auf den nichtlinearen Fall mittels Linearisierung zu übertragen.

Der lineare Fall

Der Fall linerarer autonomer DGLn folgt unter Verwendung der reellen Jordan-Normalform. Neu gegenüber den Ergebnissen des Kapitels 4.2 ist dabei nur das Auftreten nicht hyperbolischer Matrizen.

5.10 Satz *Die Ruhelage* 0 *der DGL* $\dot{x} = Ax$ *mit* $A \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ *ist*

1. **instabil**, *wenn* $\mathrm{Ind}(-A) > 0$ *oder* $\mathrm{Ind}(-A) = 0$, *es aber einen Eigenwert* $\lambda \in i\mathbb{R}$ *gibt, dessen algebraische Multiplizität größer als die geometrische ist,*

2. **Liapunov-stabil**, *wenn keine der in 1. genannten Bedingungen erfüllt ist,*

3. **asymptotisch stabil** *genau dann, wenn* $\mathrm{Ind}(A) = n$ *gilt.*

Bew.: Da Instabilität, Liapunov-Stabilität und asymptotische Stabilität linearer DGLn unter Ähnlichkeitstransformationen erhalten bleiben, nehmen wir ohne

Beschränkung der Allgemeinheit an, dass sich A schon in der reellen Jordan–Normalform befindet, also aus reellen Jordan-Blöcken der Form
$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := J_r(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, bzw.

$$J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) := \begin{pmatrix} J_r(\mu) & -\varphi \mathbb{1}_r \\ \varphi \mathbb{1}_r & J_r(\mu) \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R})$$

mit $\mu := \mathrm{Re}(\lambda),\ \varphi := \mathrm{Im}(\lambda)$ besteht.

1. Nach Voraussetzung gibt es einen Jordan-Block zu einem Eigenwert λ, für den $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ oder $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, aber $r \geq 2$ gilt. Wir benutzen den r–ten kanonischen Basisvektor e_r im fluss–invarianten Unterraum dieses reellen Jordan-Blocks als Anfangswert. Inspektion von (3.7) bzw. (3.8) zeigt, dass

$$\lim_{t \to \infty} \| \exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda)) e_r \| = \infty.$$

2. Andernfalls gibt es keine Eigenwerte λ mit positivem Realteil, und diejenigen mit Realteil 0 gehören zu Jordan-Blöcken $J_r(\lambda)$ mit $r = 1$.

   Im ersten Fall zeigt für reelle λ (3.7) ist, und für nicht reelle λ (3.8), dass

$$\lim_{t \to \infty} \| \exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) t) \| = \lim_{t \to \infty} e^{\mu t} \| \exp(J_r^{\mathbb{R}}(i\varphi) t) \| = 0.$$

   Für $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ und $r = 1$ tritt neben dem Fall $\exp(J_r(0)t) = 1$ nur der Fall des reellen Jordan-Blocks

$$\left\| \exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) t) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) \end{pmatrix} \right\| = 1$$

   aus (3.9) auf, und beide führen zu Liapunov-Stabilität.

3. Ist $\mathrm{Ind}(A) = n$, sind also die Realteile der Eigenwerte negativ, dann ist $\lim_{t \to \infty} \| \exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) t) \| = 0$, andernfalls gibt es ein λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, also $\lim_{t \to \infty} \| \exp(J_r^{\mathbb{R}}(\lambda) t) \| \geq 1$. □

Der nichtlineare Fall

Wir betrachten nun eine nicht notwendig lineare DGL auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

in einer Umgebung einer Gleichgewichtslage x_s. Von dieser können wir (durch Einführung verschobener Koordinaten $x - x_s$) o.B.d.A. annehmen, dass sie sich im Nullpunkt befindet.

Mit $A := Df(0)$ bezeichne

$$R \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad R(x) := f(x) - Ax$$

die Abweichung des Vektorfeldes von seiner Linearisierung an der Gleichgewichtslage.

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösungen der DGL in führender Ordnung durch die Linearisierung von f kontrolliert werden, soweit wir uns in der Nähe der Gleichgewichtslage befinden. Wir können die so genannte Gronwall–Ungleichung benutzen. Diese in der Differentialgleichungstheorie wichtige Abschätzung ähnelt Münchhausens Methode, sich an den eigenen Haaren aus dem Sumpf zu ziehen.

5.11 Lemma (Gronwall–Ungleichung) *Für $F, G \in C^0\big([t_0, t_1), [0, \infty)\big)$ gelte mit einem geeigneten $a \geq 0$ die Ungleichung*

$$F(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} F(s)G(s)\, ds \qquad (t \in [t_0, t_1)).$$

Dann ist

$$F(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} G(s)\, ds\right) \qquad (t \in [t_0, t_1)).$$

Bew.: • Ist $a > 0$, dann gilt für die rechte Seite $h(t) := a + \int_{t_0}^{t} F(s)G(s)\, ds$ der Voraussetzung $h(t) > 0$ und $h'(t) = F(t)G(t) \leq h(t)G(t)$, also $\frac{h'(t)}{h(t)} \leq G(t)$.

Integration ergibt $\ln\left(\frac{h(t)}{a}\right) \leq \int_{t_0}^{t} G(s)\, ds$, oder $h(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} G(s)\, ds\right)$, also die Behauptung.

• Ist $a = 0$, dann gelten Voraussetzung und Resultat für alle $\hat{a} := \varepsilon > 0$, also ist $F = 0$. □

5.12 Bemerkung Man kann sich die Abschätzung leicht merken, wenn man Gleichheit annimmt. Die Integralgleichung

$$F(t) = a + \int_{t_0}^{t} F(s)G(s)\, ds$$

entspricht ja dem AWP $\dot{F} = F \cdot G,\ F(t_0) = a$ mit der Lösung $F(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} G(s)\, ds}$.

5.13 Satz *Eine Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

ist asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Ind}(Df(x_s)) = n$ ist.

Bew.: • Wieder können wir durch eine Verschiebung $x_s = 0$ erreichen. Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, gehört eine Kugelumgebung vom positiven Radius $\tilde{r}$ zu U.

• Für $A = Df(x_s)$ gibt es ein $\Lambda < 0$ mit $\mathrm{Re}(\lambda_i) < \Lambda$ für alle Eigenwerte λ_i von A und, wegen Ungleichung (4.5) aus Lemma 4.7, ein Skalarprodukt mit

$$\langle Ax, x\rangle \leq \Lambda \, \langle x, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

• Nun existiert ein Radius $r \in (0, \tilde{r})$ mit

$$\|R(x)\| \leq \frac{|\Lambda|}{2}\|x\| \quad \text{, falls} \quad \|x\| \leq r, \tag{5.6}$$

für $R(x) = f(x) - Ax$, denn $\lim_{x\to 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\|f(x) - Df(0)x\|}{\|x\|} = 0$.

• Also folgt für die glatte Funktion

$$\tilde{F} : \overline{U_r(0)} \to [0, \infty) \quad , \quad \tilde{F}(x) := \tfrac{1}{2}\|x\|^2,$$

für alle Lösungen mit Anfangswerten $x(0) \in \overline{U_r(0)}$ und $F(t) := \tilde{F}(x(t))$

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \langle \dot{x}(t), x(t)\rangle = \langle f(x(t)), x(t)\rangle \leq \langle Ax(t), x(t)\rangle + \|R(x(t))\|\|x(t)\| \\ &\leq \frac{\Lambda}{2}\langle x(t), x(t)\rangle = \Lambda F(t) \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Denn da F monoton fällt ($\tilde{F}$ also eine Liapunov-Funktion ist), gilt auch $x(t) \in \overline{U_r(0)}$. Durch Integration wird aus dieser Ungleichung

$$F(t) = F(0) + \int_0^t \dot{F}(s)\, ds \leq F(0) + \Lambda \int_0^t F(s)\, ds \qquad (t \geq 0),$$

also nach dem Gronwall–Lemma 5.11

$$F(t) \leq F(0) \exp\left(\int_0^t \Lambda\, ds\right) = F(0)\exp(\Lambda t)$$

oder $\|x(t)\| \leq r \exp\left(\frac{\Lambda}{2}t\right)$. Die Lösungskurve bleibt also für alle positiven Zeiten in der Vollkugel $\overline{U_r(0)}$ und konvergiert gegen Null. □

5.14 Bemerkung Der Beweis lieferte zusätzlich die Aussage, dass alle $x \in \overline{U_r(0)}$ zu gegen die Gleichgewichtslage konvergierenden Orbits gehören, also in deren Einzugsbereich, dem so genannten *Bassin*, liegen.

Leider kann man nicht wie im Fall der asymptotischen Stabilität vom linearen auf den nicht linearen Fall folgern.

5.15 Beispiel (aus [Wa]) DGL $\dot{x} = \alpha x + \beta x^3$ mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Die Null ist Gleichgewichtslage der DGL und ihrer Linearisierung $\dot{y} = \alpha y$.

	linearisierte Gleichung	nicht lineare Gleichung
$\alpha < 0$	asymptotisch stabil	asymptotisch stabil
$\alpha > 0$	instabil	instabil
$\alpha = 0$	Liapunov-stabil	$\begin{cases} \text{asymptotisch stabil für} & \beta < 0 \\ \text{stabil für} & \beta = 0 \\ \text{instabil für} & \beta > 0. \end{cases}$

5.16 Bemerkung Anschaulich gesprochen kann asymptotische Stabilität nur vorliegen, wenn der Fluss in der Nähe der Gleichgewichtslage das Phasenraumvolumen verkleinert. Daher kann man in physikalischen Situationen ohne Reibungseffekte höchstens Liapunov-Stabilität erwarten. Das hat z.B. zur Folge, dass die Frage der Stabilität des Sonnensystems sehr subtil sind.

6 Lösung nichtautonomer bzw. nichtlinearer DGLn

6.1 Lösungsbegriffe

Wir wissen nun, dass unter vernünftigen Bedingungen Differentialgleichungen lokal eindeutige Lösungen besitzen. Wir können nämlich explizite, explizit zeitabhängige DGLn höherer Ordnung durch Einführung neuer Variablen in die Form

$$\dot{x} = f(x) \tag{6.1}$$

überführen, wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf dem (offenen) *Phasenraum* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld ist. Für $x_0 \in U$ besitzt dann das *Anfangswertproblem* (AWP)

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0 \tag{6.2}$$

eine Lösung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$. Ist das Vektorfeld $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, dann ist auch die Lösung des Anfangswertproblems entsprechend glatt: $\varphi \in C^k((-\varepsilon, \varepsilon), U)$.

Nur, wie finden wir diese Lösungen im Allgemeinen? Die Antwort hängt von unserem *Lösungsbegriff* ab.

1. Meistens werden die Komponenten von f elementare Funktionen[10] sein. Können wir dann auch gleiches für die Komponenten von φ erwarten? Im Allgemeinen nicht. Man muss sich nur vergegenwärtigen, dass die Integration einer reellen Funktion f die Lösung einer speziellen, explizit zeitabhängigen DGL bedeutet: Ist

   $$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds,$$

   dann gilt

   $$\dot{\varphi} = f \quad , \quad \varphi(t_0) = c.$$

   Nun bildet die Integration (im Gegensatz zur Differentiation) die Menge der elementaren Funktionen nicht in sich ab, wie schon das Beispiel der *Fehlerfunktion* $t \mapsto \int_{\infty}^{t} \exp(-s^2)\, ds$ zeigt.

   Wir müssen also darauf gefasst sein, nicht elementare Funktionen (wie der Fehlerfunktion des Beispiels, oder der so genannten hypergeometrischen Funktion) als *analytische Lösungen* in Betracht zu ziehen.

   Inzwischen sind Programmsysteme wie Mathematica oder Maple in der analytischen Lösung von Differentialgleichungen versierter als die meisten Mathematiker. Trotzdem kapitulieren sie schon bei den meisten linearen Einzeldifferentialgleichungen zweiter Ordnung (mit nicht konstanten Koeffizienten).

   Selbst wenn ein Programmsystem die allgemeine analytische Lösung einer DGL findet, kann diese so kompliziert sein, dass man ihre qualitativen Eigenschaften (siehe unten) nicht unmittelbar versteht.

   Ich werde einige Methoden zur analytischen Integration beschreiben, verweise aber darauf, dass für die Mehrzahl der in der Praxis vorkommenden DGLn die allgemeine Lösung nicht bekannt ist.

2. Ein weiterer Lösungsbegriff ist der der *Numerischen Lösung*. Zunächst einmal verstehen wir darunter heuristisch das, was der Computer uns liefert, wenn wir ihn sachgemäß programmiert haben. Auch für ein endliches

[10] also die Polynome, die Exponentialfunktion, der Logarithmus, die (invers) trigonometrischen Funktionen, und aus diesen durch endlich viele Anwendungen der Grundrechenarten und Kompositionen gewonnene Funktionen

Zeitintervall wird diese Lösung im Allgemeinen nicht mit der analytischen Lösung übereinstimmen. Wir verlangen aber von einem numerischen Verfahren, dass es die (unbekannte) Lösung beliebig gut approximiert, wenn man – auf Kosten der Rechenzeit – einen Parameter wie den Zeitschritt der Iteration gegen Null führt. Vorteil der Numerik ist ihre fast universelle Anwendbarkeit, Nachteil die oft unbekannte Genauigkeit.

3. Oft sind wir an *qualitativen Eigenschaften* der Lösungen interessiert, etwa:
   - Konvergiert eine Lösung gegen eine Ruhelage?
   - Ist sie beschränkt oder nicht?
   - Ist sie zeitperiodisch?
   - Verändert sich eine Lösung stark, wenn der Anfangswert verändert wird (Instabilität)?

6.2 Elementare analytische Lösungsmethoden

6.2.1 Trennung der Variablen

6.1 Beispiel Das AWP $\dot{x} = x^2,\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt die folgenden Lösungen:

- $x_0 = 0:\ x(t) = 0$
- $x_0 > 0:\ x(t) = \frac{x_0}{1-t/x_0} \qquad (t \in (-\infty, 1/x_0))$
- $x_0 < 0:\ x(t) = \frac{x_0}{1-t/x_0} \qquad (t \in (1/x_0, \infty))$.

Dabei wurde für $x_0 \neq 0$ der Lösungsansatz

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds \quad \text{, also} \quad \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t$$

benutzt.

Diese Lösungsmethode kann wie folgt verallgemeinert werden:

6.2 Satz (Separation der Variablen) *Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g \in C(I, \mathbb{R})$ und $h \in C(J, \mathbb{R})$.*
Dann besitzt das AWP für die **DGL mit getrennten Variablen**

$$\dot{x} = g(x)h(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad \textit{mit} \quad (x_0, t_0) \in I \times J \tag{6.3}$$

eine lokale Lösung:

1. *Ist $g(x_0) = 0$, dann ist $t \mapsto x_0$ sogar eine globale Lösung.*

2. *Ist dagegen $g(x_0) \neq 0$, dann existiert ein t_0 enthaltendes Intervall $\tilde{J} \subseteq J$ und eine eindeutige lokale Lösung $\varphi \in C^1(\tilde{J}, I)$ von (6.3), in der Form*

$$\varphi(t) = G^{-1} \circ H(t) \tag{6.4}$$

mit

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{g(y)} \quad , \quad H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds. \tag{6.5}$$

Bew.:

1. Für $g(x_0) = 0$ ist das AWP von der Form $\dot{x} = 0,\ x(t_0) = x_0$, besitzt also die konstante Lösung $\varphi(t) = x_0 \quad (t \in \mathbb{R})$.

2. • Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 in einem eindeutigen maximalen Intervall $\tilde{I} \subset I$ enthalten, auf dem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{I}$ gilt. Das Integral G existiert damit auf $\tilde{I}$, und $G \in C^1(\tilde{I}, \mathbb{R})$. Ebenso ist $H \in C^1(J, \mathbb{R})$. G besitzt die stetige Ableitung $\frac{1}{g}\restriction_{\tilde{J}}$, ist also streng monoton und sogar ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bildintervall $K := G(\tilde{I})$. K enthält $0 = G(x_0)$, genauso wie $H(J)$.

   • Es sei $\tilde{J} \subseteq J$ das größte t_0 enthaltende offene Intervall mit $H(\tilde{J}) \subseteq K$. Dann ist in (6.4) φ auf $\tilde{J}$ definiert, und es gilt $\varphi \in C^1(\tilde{J}, \tilde{I})$.

   • Tatsächlich ist φ eine Lösung von (6.3), denn $\varphi(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$ und

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{H'(t)}{G'(G^{-1}(H(t)))} = g(G^{-1}(H(t))) \cdot h(t) = g(\varphi(t))h(t).$$

   • Ist $\tilde{\varphi}$ eine weitere lokale Lösung von (6.3), dann gilt auf dem t_0 enthaltenden Schnitt $\hat{I} \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich von φ und $\tilde{\varphi}$, dass

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{d\tilde{\varphi}}{ds}(s)}{g(\tilde{\varphi}(s))} ds = \int_{x_0}^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{dy}{g(y)} = G(\tilde{\varphi}(t))$$

   oder

$$\tilde{\varphi}(t) = G^{-1} \circ H(t) = \varphi(t) \qquad (t \in \hat{I}),$$

   also die Eindeutigkeit der Lösung. □

6.3 Bemerkungen 1. Wie schon das Beispiel $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ zeigt, ist im Fall 1. die konstante Lösung i. Allg. nicht die einzige Lösung.

Im Fall 2. brauchen wir, anders als im Satz von Picard-Lindelöf, keine Lipschitzstetigkeit von g zu verlangen, um die Eindeutigkeit zu erzwingen.

2. Man kann sich die Methode gut merken, wenn man die DGL in (6.3) in der Form $\frac{dx}{dt} = g(x)h(t)$ schreibt und dann die Variablen in der Form

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t)\,dt$$

trennt. Dann sind beide Seiten Differentialformen, genauer ist $\frac{dx}{g} \in \Omega^1(\tilde{I})$ und $h\,dt \in \Omega^1(J)$ (in Kap. 7 der *Analysis III* [Kn] findet man eine Einführung in die Theorie der Differentialformen).

Wie in [Am], Kap. I.5 gezeigt, können wir mithilfe der Differentialformen in vielen Fällen auch die DGL $\dot{x} = f(x,t)$ (bei der f nicht von der Produktform $f(x,t) = g(x) \cdot h(t)$ ist) lösen.

Insbesondere kann eine Einzeldifferentialgleichung erster Ordnung manchmal durch eine Variablentransformation in einer DGL mit getrennten Variablen überführt werden.

6.4 Beispiele 1. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die DGL $\dot{x} = f(ax+bt+c)$. Falls a oder b gleich Null ist, ist sie schon in der gewünschten Form. Andernfalls benutzen wir als neue abhängige Variable $z(t) := ax(t) + bt + c$, also $\dot{z} = a\dot{x} + b = af(z) + b$, eine durch Separation der Variablen lösbare DGL. Nach Lösung wenden wir die Rücktransformation $x(t) = \frac{z(t)-bt-c}{a}$ an.

2. Die sog. *Ähnlichkeits–Differentialgleichung*

$$\dot{x} = f(x/t) \qquad (t \in (0,\infty))$$

wird durch die Substitution $y(t) := x(t)/t$ gelöst, denn

$$\dot{y}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{f(y(t)) - y(t)}{t}.$$

6.2.2 Konstanten der Bewegung

Für eine autonome DGL $\dot{x} = f(x)$ auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren manchmal Phasenraumfunktionen $H \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $dH(x)f(x) = 0$ $(x \in U)$. Durch Integration schließen wir, dass diese dann *Konstanten der Bewegung* sind, d.h. $t \mapsto H \circ \Phi_t(x_0)$ für alle $x \in U$ konstant ist. Dann findet die Bewegung auf der Niveaumenge $H^{-1}(H(x_0)) \subset U$ statt, und diese ist für reguläre Werte $H(x_0)$ von H nach dem Satz über die implizite Funktion eine Mannigfaltigkeit[11].

6.5 Beispiel Die Newtonsche Kraftgleichung

$$\ddot{q} = F(q) \quad \text{mit} \quad F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

besitzt die Lösungen

$$q(t) = q_0 + G_E^{-1}(t - t_0),$$

wobei für das sog. *Potential* $V(q) := -\int_{q_0}^{q} F(x)\,dx$ der Kraft und $E > 0$

$$G_E(q) := \int_{q_0}^{q} \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}} dx \tag{6.6}$$

gesetzt wird.

Hintergrund ist der folgende: Für $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist die sog. *Hamiltonsche DGL von H* von der Form

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Physikalisch wird dabei q als Ort, p als Impuls eines Teilchens auf der Geraden interpretiert. Wir verifizieren, dass für jede Lösung $t \mapsto x(t) = (q(t), p(t))$ gilt

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 0.$$

H ist also *Konstante der Bewegung*, die Bewegung erfolgt auf den Niveauflächen von H.

[11] **Def.:** Für $p \in \{0, \ldots, m\}$ heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ p**–dimensionale Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^m$, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^m$ besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung $f \in C^1(V_x, \mathbb{R}^{m-p})$ mit regulärem Wert 0 gilt: $M \cap V_x = f^{-1}(0)$.

Im obigen Beispiel ist $H(q,p) := \frac{1}{2}p^2 + V(q)$, also $\dot{q} = p$ und $\dot{p} = F(q)$. Setzt man $E := H(x_0)$, dann ist $\sqrt{2(E - V(q_0))} = p_0$, falls $x_0 = (q_0, p_0)$ mit $p_0 \geq 0$. In (6.6) wird also die inverse Geschwindigkeit integriert, um die Zeitdifferenz $t - t_0$ zu erhalten, die das Teilchen zum Zurücklegen des Weges zwischen q_0 und q benötigt.

Eine Einführung in die Hamiltonschen DGLn bietet mein Skript *Mathematische Physik 1 (Klassische Mechanik)*[12].

6.2.3 Potenzreihen als Lösungen

In Anwendungen kommen häufig lineare, nicht autonome DGLn vor. Als Beispiel betrachten wir solche von zweiter Ordnung in der Form

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \tag{6.7}$$

wobei wir vereinfachend annehmen wollen, dass die Funktionen p und q der unabhängigen Variable t Polynome sind. Der Fall reell–analytischer Funktionen ist aber auch nicht viel schwieriger. Unser Ansatz zur Lösung des AWP mit

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(t_0) = x_1$$

ist

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)^k x_k \tag{6.8}$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $x_k \in \mathbb{R},\ k \geq 2$. Wir bestimmen diese durch Einsetzen in (6.7) und Koeffizientenvergleich.

Sind p und q Polynome, dann ist der (verschwindende) Koeffizient von t^ℓ Summe des vom $\ddot{x}$–Term stammenden Term $(\ell+1)(\ell+2)x_{\ell+2}$ und höchstens $2 + \deg(p) + \deg(q)$ weiteren schon bekannten Termen der Form $c_k x_k$, $k < \ell + 2$.

Da die so definierte Potenzreihe positiven Konvergenzradius ρ besitzt, ist deren gliedweise Differentiation für $t \in (t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ nachträglich gerechtfertigt.

6.6 Beispiel Airy–Differentialgleichung $\ddot{x}(t) - tx(t) = 0$.
Einsetzen von (6.8) für $t_0 = 0$ ergibt $\ddot{x}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2}x_k$, also $\sum_{k=0}^{\infty} \big(k(k-1)t^{k-2}x_k - t^{k+1}x_k\big) = 0$ oder

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \Big((\ell+1)(\ell+2)x_{\ell+2} - x_{\ell-1}\Big)t^\ell = 0,$$

[12] erhältlich unter www.mi.uni-erlangen.de/∼knauf

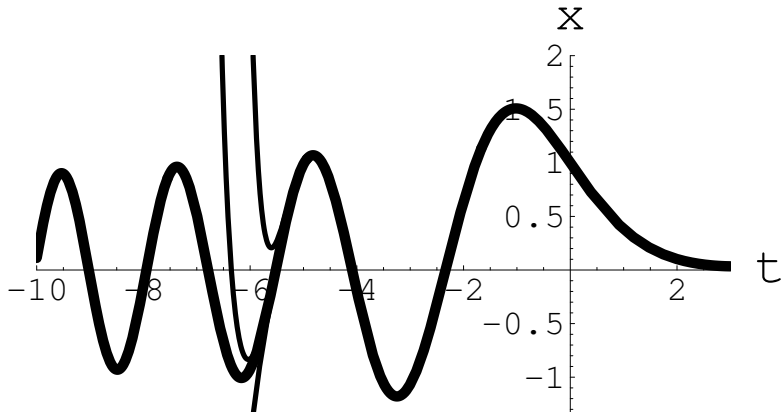


Abbildung 6.1: Die Airy-Funktion Ai und drei ihrer Polynom-Approximationen

wenn $x_{-1} := 0$ gesetzt wird. Wir wissen aus der *Analysis I*, dass diese Potenzreihe nur dann die Nullfunktion ergeben kann, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind. Das bedeutet, nur x_0 und x_1, also die Anfangswerte der DGL, können frei gewählt werden, alle anderen bestimmen sich aus diesen. Insbesondere ergibt sich für $\ell = 0,\ \ell = 1$ und $\ell = 2$

$$x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = \frac{x_0}{6} \quad , \quad x_4 = \frac{x_1}{12}.$$

Allgemein sind für $n \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten $x_{3n-1} = 0$,

$$x_{3n} = \frac{x_0}{\prod_{\ell=1}^{n}\left((3\ell-1)3\ell\right)} \quad \text{und} \quad x_{3n+1} = \frac{x_1}{\prod_{\ell=1}^{n}\left(3\ell(3\ell+1)\right)}.$$

In Abb. 6.1 ist für die Anfangswerte $x_0 = 1,\ x_1 \approx -0.729$ die Airy–Funktion und einige ihrer approximierenden Polynome dargestellt. Die Wahl der Anfangswerte bewirkt Erfüllen der Randbedingung $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Da hier die Quotienten

$$\frac{x_{3(n+1)}}{x_{3n}} = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} \quad \text{und} \quad \frac{x_{3(n+1)+1}}{x_{3n+1}} = \frac{1}{(3n+3)(3n+4)}$$

der Koeffizienten mit Indexdifferenz 3 für $n \to \infty$ gegen Null gehen, während sogar $x_{3n+2} = 0$ ist, besitzt die Potenzreihe Konvergenzradius unendlich.

6.2.4 Dynamische Systeme in der Ebene

In eindimensionalen Phasenräumen können keine periodischen Orbits vorkommen, denn deren Existenz ist mit der Anordnung der reellen Zahlen unverträglich. Wir betrachten jetzt die nächst einfache Situation einer DGL $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass der offene Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein *Gebiet* ist, also $U \neq \emptyset$ und U zusammenhängend.

6.7 Definition *Ein topologischer Raum $(U, \mathcal{O})$ heißt* **zusammenhängend***, wenn es außer U und $\emptyset$ keine weiteren gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von U gibt. Die maximalen zusammenhängenden Umgebungen von Punkten aus U werden die* **Zusammenhangskomponenten** *genannt.*

6.8 Beispiel Die Gruppe $O(n)$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten.

Ist nun $x \in U$ ein Punkt auf einem periodischen Orbit $\mathcal{O}(x)$ mit Periode $T > 0$, dann zerlegt die Kurve

$$c : [0, T] \to U \quad , \quad t \mapsto \Phi_t(x)$$

nach dem Jordanschen Kurvensatz die Ebene in zwei Gebiete, d.h. $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{O}(x)$ besitzt zwei Zusammenhangskomponenten, von denen die eine beschränkt ist (das *Innere* der Kurve), die andere nicht (das *Äußere* der Kurve).

6.9 Definition *Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$, in dem das Innere jeder geschlossenen Kurve $c : [0, T] \to U$ Teilmenge von U ist, heißt* **einfach zusammenhängend***.*

Anschaulich gesprochen besitzen einfach zusammenhängende Gebiete keine Löcher.

6.10 Satz (Bendixson) *Wenn der Phasenraum U einfach zusammenhängend ist und außerhalb einer Nullmenge $\operatorname{div}(f) > 0$ gilt, existiert kein periodischer Orbit. Gleiches gilt analog für den Fall $\operatorname{div}(f) < 0$.*

Bew.: Wir nehmen an, dass ein periodischer Orbit $\mathcal{O} \subset U$ existiert und bezeichnen mit $I \subset \mathbb{R}^2$ sein Inneres. Da U einfach zusammenhängend ist, gilt $I \subset U$. Nach dem Satz von Gauß ist

$$\int_I \operatorname{div}(f)\, dx = \int_{\mathcal{O}} f(x) \cdot dN(x),$$

wobei für $x \in \mathcal{O}$ die *Normale* $N(x)$ auf $f(x)$ senkrecht steht und nach außen zeigt. Daher ist das Skalarprodukt im Integral der rechten Seite Null, während das Integral auf der linken Seite ungleich Null ist. Widerspruch! $\square$

6.11 Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{pmatrix} x_2 & +x_1^3 \\ -x_1 & +x_2^3 \end{pmatrix}$ besitzt keinen periodischen Orbit, denn $\operatorname{div} f(x) = 3\|x\|^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Den Beweis des folgenden Satzes findet man z.B. in [Am], V.24.

6.12 Satz (Poincaré–Bendixson) *Auf der kompakten Teilmenge $K \subset U$ des Gebietes $U \subseteq \mathbb{R}^2$ besitze das Vektorfeld keine kritischen Punkte.*
Dann ist für Anfangswerte x mit $\Phi_t(x) \in K$ für alle $t \geq 0$ die ω–Limesmenge $\omega(x)$ ein periodischer Orbit.

6.3 Numerische Integration von DGLn

Ziel: Es soll das AWP $\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0$ im Zeitintervall $t \in [0, T]$ näherungsweise gelöst werden.

Annahme: Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist *global lipschitzstetig*, d.h. für ein $L > 0$ ist

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d).$$

Eine Gruppe numerischer Verfahren basiert auf einer Reihenentwicklung für die Lösung und liefert eine auf ganz $[0, T]$ definierte Näherungslösung.

Ich werde hier aber nur den üblicheren Ansatz diskutieren, bei dem die Lösung nur für endlich viele Zeitpunkte in $[0, T]$ approximiert wird.

Dazu wählen wir eine *Schrittweite* $h > 0$ und setzen

$$t_n := n \cdot h \qquad n = 0, \ldots, n_{\max} := \lfloor T/h \rfloor.$$

Wir wissen aus Satz 2.19, dass die eindeutige Lösung $\Phi(t, x_0)$ des AWP für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Unser Ziel ist damit, die *Lösung*

$$x_n := \Phi(t_n, x_0) \quad \text{zu den Zeitpunkten} \quad t_n \in [0, T] \quad \text{durch Werte} \quad y_n$$

anzunähern; gehen in die Berechnung von y_n die Größen $y_{n-k}, \ldots, y_{n-1}$ ein, spricht man von einem k–*Schrittverfahren*. Ich werde nur Einschrittverfahren besprechen.

Zu dessen Definition wird ein *approximativer Differenzenquotient* für Schrittweiten $h \leq h_0$ gewählt, d.h. eine stetige Abbildung

$$F : \mathbb{R}^d \times [0, h_0] \to \mathbb{R}^d$$

mit den Eigenschaften

1. $F(x,0) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$ (*Konsistenz*) ,

2. *Lipschitzstetigkeit*, d.h. der Existenz von $M > 0$ mit

$$\sup_{h\in[0,h_0]} \|F(x_1,h) - F(x_2,h)\| \le M\|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d). \quad (6.9)$$

Die Wahl von F bestimmt das *Einschrittverfahren*

$$y_0 := x_0 \quad , \quad y_n := y_{n-1} + hF(y_{n-1}, h) \qquad (n = 1, \ldots, n_{\max}).$$

6.13 Beispiel 1. $F(x,h) := f(x)$ (*Euler*–Verfahren)

2. $F(x,h) := \frac{1}{2}\big(f(x + hf(x)) + f(x)\big)$ (*Heun*–Verfahren)

3. $F(x,h) := \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ mit

$$k_1 := f(x)\,,\ k_2 := f(x + \tfrac{h}{2}k_1)\,,\ k_3 := f(x + \tfrac{h}{2}k_2)\,,\ k_4 := f(x + hk_3)$$

(*Runge–Kutta*–Verfahren der Ordnung 4).

Offensichtlich ist das Euler-Verfahren das einfachste. In einem Beispiel wollen wir sehen, welchen Verfahrensfehler es liefert:

6.14 Beispiel (Euler-Verfahren für harmonischen Oszillator) Die DGL der ungedämpften harmonischen Schwingung mit Phasenraum $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = f(x) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) x$$

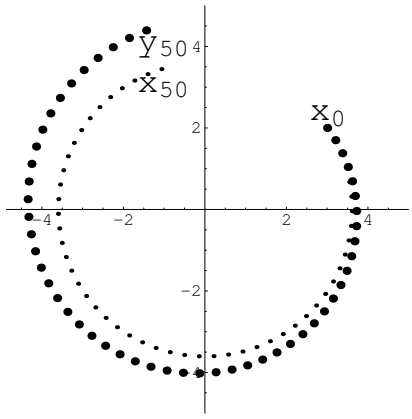
besitzt die Lösung

$$\Phi(t, x_0) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right) x_0,$$

sodass die Lösung $x_n := \Phi(t_n, x_0)$ gleich

$$x_n = \begin{pmatrix} \cos(hn) & \sin(hn) \\ -\sin(hn) & \cos(hn) \end{pmatrix} x_0$$

ist und $\|x_n\| = \|x_0\|$ gilt.



Dagegen liefert das Euler-Verfahren

$$y_n \;=\; y_{n-1} + h\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) y_{n-1} = By_{n-1} = \ldots = B^n y_0 = B^n x_0$$

mit

$$B := \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$$

für

$$\lambda := \sqrt{\det B} = \sqrt{1+h^2} \quad \text{und} \quad \varphi := \arcsin(h/\lambda).$$

Damit ist $y_n = \lambda^n \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & \sin(n\varphi) \\ -\sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} x_0$, also

$$\|y_n\| = \lambda^n \|x_0\|.$$

- Wegen $n_{\max} = \lfloor T/h \rfloor$ ist die Zahl der Schritte von der Ordnung $\mathcal{O}(1/h)$. Nun ist nach Taylor $\varphi - h = \mathcal{O}(h^3)$, die maximale Winkeldifferenz also

$$n_{\max} \cdot (\varphi - h) = \mathcal{O}(h^2).$$

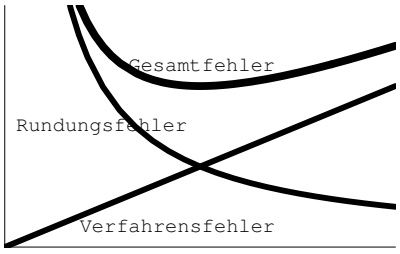
- Wegen $\lambda^n = e^{n \ln \lambda} = e^{\frac{n}{2}\ln(1+h^2)} = \exp\left(\frac{n}{2}(h^2 + \mathcal{O}(h^4))\right)$ ist

$$\lambda^{n_{\max}} = 1 + \mathcal{O}(h).$$

- Der Verfahrensfehler im Zeitintervall $[0, T]$ ist also von der Ordnung $\mathcal{O}(h)$.

Um den Verfahrensfehler zu verkleinern, ist es also zunächst einmal naheliegend, die Schrittweite h zu verringern. Dies kann aber aus zwei Gründen nicht die letzte Antwort sein:

- Die *Rechenzeit* wächst proportional zu $n_{\max} = \lfloor T/h \rfloor$.
- Die (hier nicht weiter betrachteten) *Rundungsfehler* bei jedem der $n_{\max}$ Verfahrensschritte addieren sich im ungünstigen Fall auf, ergeben also einen *globalen Rundungsfehler*, der von der Größenordnung $1/h$ ist, also bei Verringerung der Schrittweite zunimmt, siehe Abb.



Daher bemüht man sich sinnvollerweise um bessere Verfahren, also solche hoher Ordnung:

6.15 Definition • *Der* lokale Verfahrensfehler *der Methode* F *bei* $x \in \mathbb{R}^d$ *ist*

$$T(x,h) := F(x,h) - \frac{\Phi(h,x) - x}{h}.$$

• *Existieren* $p > 0$ *und ein Vektorfeld* $\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *mit*

$$T(x,h) = \tau(x)h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

dann ist F *(mindestens)* von der Ordnung p.

Der Verfahrensfehler T ist also die Abweichung des approximativen Differenzenquotients $F(x,h)$ vom wahren Differenzenquotient $(\Phi(h,x) - x)/h$.

Man bezeichnet im engeren Sinn als *Ordnung des Verfahrens* das *größte* für *alle* DGLn gültige p.

6.16 Beispiel (Euler-Verfahren) Das Euler-Verfahren ist von der *Ordnung 1*. Denn nach Taylor[13] gilt unter der Voraussetzung $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ zunächst in Dimension $d = 1$ für die Lösung Φ des AWP der DGL $\dot{x} = f(x)$

$$\Phi(h,x) = x + h\frac{d}{dt}\Phi(0,x) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t',x)$$

mit $t' \in [0,h]$, also

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(h,x) - x}{h} &= \frac{d}{dt}\Phi(0,x) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t',x) \\
&= f(x) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(0,x) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= f(x) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(x + \int_0^t f(\Phi(s,x))\,ds\right)|_{t=0} + \mathcal{O}(h^2) \\
&= f(x) + \frac{h}{2}Df(x)f(x) + \mathcal{O}(h^2). \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

[13] Denn die Lösung besitzt die gleiche Differenzierbarkeitsstufe wie das Vektorfeld:
Satz: Gegeben sei auf der offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ein DGL-System

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad f \in C^r(M, \mathbb{R}^n).$$

Für $m \in M$ existiert dann auf einer Umgebung $U \subset \mathbb{R} \times M$ eine *lokale Lösung* $\Phi_U \in C^r(U, M)$, wobei

$$\Phi_U(0,x) = x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\Phi_U(t,x) = f(\Phi_U(t,x)).$$

Für Dimension $d > 1$ benutzt man für die Taylorformeln der Komponenten von $\Phi(h, x)$ Zeiten $t'_1, \ldots, t'_d \in [0, h]$, das Endergebnis (6.10) gilt aber immer noch.

Es ist damit der lokale Verfahrensfehler

$$\begin{aligned} T(x,h) &= f(x) - \left(f(x) + \frac{h}{2} Df(x) \cdot f(x) + \mathcal{O}(h^2) \right) \\ &= \tau(x)h + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{mit} \\ \tau(x) &= -\tfrac{1}{2} Df(x) f(x). \end{aligned}$$

Entsprechend lässt sich zeigen, dass

- das *Heunverfahren* von der Ordnung 2 und
- das *Runge–Kutta–Verfahren* von der Ordnung 4 ist.

Wir wollen jetzt den *globalen* Verfahrensfehler abschätzen. Dazu nehmen wir an, dass für die untersuchte DGL und ein geeignetes $c > 0$ der lokale Verfahrensfehler uniform in x durch

$$\|T(x,h)\| \leq ch^p \qquad ((x,h) \in \mathbb{R}^d \times [0, h_0]) \tag{6.11}$$

abgeschätzt werden kann. Dies stimmt zwar für viele DGLn nicht, durch ein etwas komplizierteres Argument kann man aber oft auch dann zu einer der folgenden vergleichbaren Abschätzung kommen.

Es sei $\Delta_n := y_n - x_n$ der Fehler zur Zeit $t_n = hn$, und $d_n := \|\Delta_n\|$ sein Betrag, also $d_0 = 0$. M bezeichnet die Lipschitz-Konstante aus (6.9).

6.17 Satz *Für die Konstante $k := c\frac{e^{TM}}{M}$ gilt, dass für alle Schrittweiten $h \in [0, h_0]$ der globale Verfahrensfehler*

$$d_n \leq kh^p \qquad (n = 0, \ldots, n_{\max})$$

ist, die numerische Methode also im Zeitintervall $[0, T]$ mit der p–ten Potenz der Schrittweite konvergiert.

Bew.: Der Fehler entwickelt sich zeitlich gemäß

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= y_{n+1} - x_{n+1} = \Delta_n + h \left[F(y_n, h) - \frac{\Phi(h, x_n) - x_n}{h} \right] \\ &= \Delta_n + h[F(y_n, h) - F(x_n, h)] + hT(x_n, h), \end{aligned}$$

also nach der Dreiecksungleichung, (6.11) und (6.9)

$$\begin{aligned} d_{n+1} &\leq d_n + h\|F(y_n,h) - F(x_n,h)\| + ch^{p+1} \\ &\leq (1+hM)d_n + ch^{p+1} \end{aligned}$$

und $d_0 = 0$. Wir setzen $\lambda := 1 + hM$ und $\mu := ch^{p+1}$, iterieren also

$$d_n \leq \lambda d_{n-1} + \mu \quad , \quad d_0 = 0.$$

Wir majorisieren d_n durch die Lösung $c_n \geq d_n$ der Rekursion

$$c_{n+1} := \lambda c_n + \mu \quad , \quad c_0 = 0,$$

also

$$c_n = \mu \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = \mu \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \leq \mu \frac{\lambda^n}{hM} = \frac{c}{M} h^p \lambda^n.$$

Nun ist $\lambda^n = e^{n\ln(1+hM)} \leq e^{n(hM)} \leq e^{TM}$ für $n \leq n_{\max} = \lfloor T/h \rfloor$ beschränkt, und zwar uniform in h, sodass $d_n \leq \frac{ce^{TM}}{M} h^p = kh^p$. □

Für weitergehende Informationen über die Numerik von gewöhnlichen DGLn verweise ich auf das Buch [DB] von Bornemann und Deuflhard.

7 Der Hauptsatz der Theorie gewöhnlicher DGLn

Wir wissen aus Satz 2.18, dass für stetig differenzierbare zeitabhängige Vektorfelder f auch die Lösungen $\Phi(t, x_0)$ des AWP $\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$ stetig in der Zeit t *und* im Anfangswert x_0 sind.

Der Hauptsatz besagt nun, dass die Lösung Φ genauso glatt wie f ist.

Zur Vorbereitung bestimmen wir zunächst die Struktur des maximalen Definitionsbereichs von Φ.

7.1 Das maximale Existenzintervall

Wir betrachten auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, und wollen für die Anfangszeit t_0 allen Anfangswerten x_0 aus U das maximale Zeitintervall zuordnen, für das die Lösung des AWP definiert ist. Wir können dies in der Form $\big(T_-(x_0), T_+(x_0)\big)$ mit

$$-\infty \leq T_-(x_0) < 0 < T_+(x_0) \leq +\infty$$

schreiben, und wir untersuchen die *Fluchtzeiten*

$$T_\pm : U \to \overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{7.1}$$

mit Werten in der erweiterten Zahlengerade. In der *Analysis I* wurde $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer Topologie versehen, bezüglich derer $\overline{\mathbb{R}}$ zum Intervall $[-1,1]$ homöomorph ist, mit Homöomorphismus

$$h : \mathbb{R} \to [-1,1] \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & , \quad x = -\infty \\ \tanh(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \\ 1 & , \quad x = +\infty. \end{cases}$$

Wir sehen an folgendem Beispiel, dass T_+ und T_- im Allgemeinen nicht stetig sind:

7.1 Beispiel Auf dem Phasenraum $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ betrachten wir das konstante Vektorfeld $f(x) := e_1$, also $\Phi_t(x) = x + e_1 t$. Dies ist für alle t definiert, falls $x = \binom{x_1}{x_2}$ mit $x_2 \neq 0$ ist. Für $x_2 = 0$ und $x_1 < 0$ ist $(T_-(x), T_+(x)) = (-\infty, |x_1|)$.

In diesem Beispiel springt T_+ nur nach oben, nicht nach unten. Dies ist typisch für alle DGLn:

7.2 Definition *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einem topologischen Raum U heißt* **oberhalbstetig** *bzw.* **unterhalbstetig bei** $x_0 \in U$*, wenn*

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x) \quad \textit{bzw.} \quad f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x),$$

und **oberhalbstetig** *(bzw.* **unterhalbstetig***), wenn sie für alle $x_0 \in U$ oberhalbstetig (bzw. unterhalbstetig) bei x_0 ist.*

7.3 Beispiel Die floor–Funktion $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist oberhalbstetig, während die ceil–Funktion $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig ist.

7.4 Satz *Die Fluchtzeit $T^+ : U \to \overline{\mathbb{R}}$ aus (7.1) ist unterhalbstetig, die Fluchtzeit $T^- : U \to \overline{\mathbb{R}}$ ist oberhalbstetig. Damit ist der Definitionsbereich*

$$D := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in (T^-(x), T^+(x))\}$$

des Flusses eine offene Teilmenge des erweiterten Phasenraumes.

Bew.:

- Es sei $x_0 \in U$. Dann existiert wegen der Offenheit von U eine Umgebung $U_r(x_0)$ mit $\overline{U_r(x_0)} \subset U$. Da $\overline{U_r(x_0)}$ kompakt ist, ist die Einschränkung des Vektorfeldes auf diese Menge lipschitzstetig. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $y \in U_{r/2}(x_0)$ das AWP $\dot{x} = f(x),\ x(0) = y$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eindeutig lösbar ist.

- Wir betrachten nun eine aufsteigende Folge von Zeiten $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_1 = 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = T^+(x_0)$, sodass für geeignete $r_n > 0$ und $\varepsilon_n > 0$ das AWP

  $$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = y \quad \text{für alle} \quad t \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \quad \text{und} \quad y \in U_{r_n/2}(x_n)$$

  erfüllt ist, wobei wir $x_n := \Phi_{t_n}(x_0)$ setzen. Nach Konstruktion der maximalen Lösung können wir annehmen, dass $t_{n+1} - t_n < \varepsilon_n$ ist.

- Es sei nun T^+ *nicht* unterhalbstetig bei x_0, also $\hat{T} := \liminf_{x\to x_0} T^+(x) < T(x_0)$ und $t_k \le \hat{T} < t_{k+1}$. Nach Annahme ist $t_k + \varepsilon_k > \hat{T}$. Wegen der Stetigkeit des Flusses in den Anfangsbedingungen (Iteration von Satz 2.18) existiert eine Umgebung $V \subset U$ von x_0 mit $\Phi_{t_k}(V) \subset U_{r_k/2}(x_n)$, und für alle $y \in V$ gilt

  $$T^+(y) = t_k + T^+(\Phi_{t_k}(y)) \ge t_k + \varepsilon_k > \hat{T}\,.$$

  Widerspruch!

- Die Oberhalbstetigkeit von T^- zeigt man analog.

- Wäre D nicht offen, dann würde eine Folge $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus D$ mit $(t, x) := \lim_{n\to\infty}(t_n, x_n) \in D$ existieren. Wegen der Offenheit von $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir (durch Weglassen der ersten Folgenglieder) annahmen, dass $x_n \in U$. Also muss für jedes n gelten: Entweder ist $t_n \ge T^+(x_n)$ oder $t_n \le T^-(x_n)$. Einer der beiden Fälle tritt unendlich oft auf, z.B. $t_n \ge T^+(x_n)$. Wir gehen wieder zur entsprechenden Teilfolge über. Wegen $(t, x) \in D$ ist $t \in (0, T^+(x))$, was wegen

  $$\liminf_{n\to\infty} T^+(x_n) \le \liminf_{n\to\infty} t_n = t < T^+(x)$$

  der Unterhalbstetigkeit von T^+ bei x widerspricht. □

7.5 Bemerkung In diesem Abschnitt haben wir angenommen, dass die DGL autonom ist. Ganz analoge Aussagen stimmen aber auch für AWP nicht autonomer DGLn, wenn wir eine Anfangszeit t_0 fixieren. Denn durch Hinzunahme einer abhängigen Variable können wir die DGL in autonomer Form schreiben.

Diese Tatsache werden wir uns beim Beweis des Hauptsatzes zunutze machen.

7.2 Linearisierung der DGL entlang einer Trajektorie

Zur Vorbereitung des Beweises des Hauptsatzes lernen wir zunächst, welcher Differentialgleichung die Ableitung der Lösung nach dem Anfangswert genügen sollte. Nehmen wir dazu schon einmal an, dass sowohl f als auch Φ stetig differenzierbar sind und setzen

$$M(t,x) := D_2\Phi(t,x) \in \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R}).$$

Dann folgt mit $\tilde{A}(t,x) := D_2 f(t,x) \in \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R})$ aus

$$\Phi(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s,\Phi(s,x))\,ds \tag{7.2}$$

die Integralgleichung

$$M(t,x) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} \tilde{A}(s,\Phi(s,x))M(s,x)\,ds. \tag{7.3}$$

Äquivalent dazu stellen wir fest, dass die Ableitung M des Flusses nach dem Anfangswert dem linearen AWP

$$D_1 M(t,x) = \tilde{A}\big(t,\Phi(t,x)\big)M(t,x) \quad , \quad M(t_0,x) = \mathbb{1}$$

genügt. Dabei ist die Systemmatrix die Linearisierung des Vektorfeldes entlang der Trajektorie im erweiterten Phasenraum. Setzen wir $A(t,x) := \tilde{A}(t,\Phi(t,x))$, dann ist A als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Die im folgenden Lemma konstatierte Stetigkeit der Lösung in Zeit und Anfangsbedingungen folgt nicht aus Satz 2.26, weil dort Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfeldes vorausgesetzt war.

7.6 Lemma *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von (t_0,x_0), $A \in C(D,\mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R}))$ und $M : D \to \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R})$ Lösung des AWP*

$$D_1 M(t,x) = A(t,x)M(t,x) \quad , \quad M(t_0,x) = \mathbb{1}. \tag{7.4}$$

Dann ist auch $M \in C(D,\mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R}))$.

Bew.:

- Wir wissen schon, dass für jeden Anfangswert (t_0,x) das AWP (7.4) eine eindeutige lokale Lösung besitzt, denn x taucht nur als Parameter auf, und A ist stetig in t.

- Um auch Stetigkeit in x zu zeigen, genügt es, sich auf kompakte Umgebungen $K \subset D$ von (t_0, x_0) der Form $K := \overline{U_{\delta_t}(t_0)} \times \overline{U_{\delta_x}(x_0)}$ zu beschränken. Es ist $k := \sup_{(t,x)\in K} \|A(t,x)\| < \infty$, also nach (7.3)

$$\|M(t,x)\| \leq 1 + k \left| \int_{t_0}^{t} \|M(s,x)\| \, ds \right|$$

und mit Gronwall

$$\sup_{(t,x)\in K} \|M(t,x)\| \leq e^{k\delta_t}. \tag{7.5}$$

- Aus (7.3) folgt die Identität

$$\begin{aligned} M(t,x) - M(t,x_0) &= \int_{t_0}^{t} A(s,x_0)\big(M(s,x) - M(s,x_0)\big) \, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \big(A(s,x) - A(s,x_0)\big) M(s,x) \, ds. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Der zweite Term kann durch Verkleinerung des Radius δ_x in der Norm unter jede Schranke $a(\delta_x) > 0$ gedrückt werden. Denn die stetige Funktion A ist auf K gleichmäßig stetig, und die Norm von M durch (7.5) beschränkt. Damit ergibt sich für $F_x(t) := \|M(t,x) - M(t,x_0)\|$ aus (7.6):

$$F_x(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^{t} k F_x(s) \, ds \right|.$$

Die Gronwallsche Ungleichung macht daraus

$$F_x(t) \leq a(\delta_x) \exp(k|t - t_0|) \leq a(\delta_x) \exp(k\delta_t) \quad , \quad (x \in U_{\delta_x}(x_0)),$$

also

$$\lim_{x \to x_0} M(t,x) = M(t,x_0) \quad \text{für alle} \quad t \in (t_0 - \delta_t, t_0 + \delta_t).$$

□

Damit sind wir in der Lage, den *Hauptsatz der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* zu beweisen.

7.3 Aussage und Beweis des Hauptsatzes

Wir betrachten jetzt auf dem erweiterten Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ das zeitabhängige Vektorfeld $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$. Wir fixieren eine Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{R}$ und betrachten für Anfangswert $(t_0, x_0) \in U$ das maximale Lösungsintervall $(T^-(x_0), T^+(x_0))$ des AWP

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0.$$

Wie im zeitunabhängigen Fall bekommen wir einen in U offenen maximalen Definitionsbereich

$$D = \{(t, x) \in U \mid t \in (T^-(x), T^+(x))\}$$

des nicht autonomen Flusses $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$, mit

$$\Phi(t_0, x_0) = x_0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\Phi(t, x_0) = f(t, \Phi(t, x_0)). \tag{7.7}$$

7.7 Satz (Hauptsatz) *Ist $r \in \mathbb{N}$ und $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$, dann ist $\Phi \in C^r(D, \mathbb{R}^n)$.*

Bew.:

- Wir wissen schon, dass für $r = 1$ gilt: $\Phi \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$. Auch die Zeitableitung des Lösung existiert, mit $D_1\Phi \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$, denn dies folgt aus der zweiten Formel in (7.7).

  Unser erstes Ziel ist zu zeigen, aus $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ auch $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ folgt. Da die Zeitableitung $D_1\Phi$ stetig ist, muss nur noch die Existenz und Stetigkeit der Ableitung $D_2\Phi : D \to \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ nachgewiesen werden. Falls $D_2\Phi$ existiert, muss diese Abbildung auch stetig sein, denn dann ist $D_2\Phi = M$ mit der Lösung M der Integralgleichung

  $$M(t, x) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} A(s, x)M(s, x)\, ds,$$

  siehe Lemma 7.6.

  Nach Definition der totalen Ableitung muss gezeigt werden, dass für Anfangswert $(t_0, x_0) \in U$ und Zeiten $t \in (T^-(x_0), T^+(x_0))$ gilt:

  $$\Phi(t, x_0 + h) - \Phi(t, x_0) = M(t, x_0)h + \mathrm{o}\,(\|h\|). \tag{7.8}$$

- Wir können das zeitabhängige Vektorfeld bei (t, x) nach Taylor entwickeln und erhalten

$$f(t, y) = f(t, x) + D_2 f(t, x)(y - x) + R(t, x, y) \tag{7.9}$$

mit Restterm $R(t, x, y) = \mathrm{o}\,(\|y - x\|)$.

Es ergibt sich wegen $A(s, x_0) = D_2 f(s, \Phi(s, x_0))$ und (7.9) aus (7.2) und (7.3) die folgende Abweichung von der Linearität:

$$\begin{aligned}
&\big(\Phi(t, x_0 + h) - \Phi(t, x_0)\big) - M(t, x_0)h \\
&= \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(s, \Phi(s, x_0 + h)\big) - f\big(s, \Phi(s, x_0)\big) - A(s, x_0)M(s, x_0)h \Big)\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t} D_2 f(s, \Phi(s, x_0)) \cdot \Big[\Phi(s, x_0 + h) - \Phi(s, x_0) - M(s, x_0)h \Big]\, ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} R\Big(s, \Phi(s, x_0), \Phi(s, x_0 + h)\Big)\, ds
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Die Stetigkeit von Φ verbessert sich durch eine Gronwallabschätzung zunächst zur Lipschitz-Stetigkeit

$$\|\Phi(s, x_0 + h) - \Phi(s, x_0)\| = \mathcal{O}(\|h\|) \qquad (s \in [t_0 - \delta_t, t_0 + \delta_t]).$$

Wegen der Resttermabschätzung ist dann der zweite Term in (7.10) von der Ordnung $\mathrm{o}\,(\|h\|)$.

Mit der Abkürzung

$$F(x) := \|\Phi(t, x_0 + h) - \Phi(t, x_0) - M(t, x_0)h\|$$

schreiben wir damit für $k := \sup_s \|D_2 f(s, \Phi(s, x_0))\|$ den Betrag von (7.10) in der Form

$$F(t) \le \mathrm{o}\,(\|h\|) + k \left| \int_{t_0}^{t} F(s)\, ds \right|,$$

also nach Gronwall

$$F(t) = \mathrm{o}\,(\|h\|) e^{k|t - t_0|} = \mathrm{o}\,(\|h\|).$$

Damit ist (7.8) bewiesen.

- Um für $r \geq 2$ und $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ zu zeigen, dass auch der Fluss r–mal stetig differenzierbar ist, benutzen wir ein Induktionsargument. Dazu setzen wir

$$\tilde{f} : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad , \quad \tilde{f}(t, x, h) := \big(f(t, x), D_2 f(t, x)h\big).$$

Damit ist $\tilde{f} \in C^{r-1}(\tilde{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ein zeitabhängiges Vektorfeld auf dem erweiterten Phasenraum $\tilde{U} := U \times \mathbb{R}^n$. Nach dem eben Bewiesenen ist für $\tilde{D} := D \times \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\Phi} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad , \quad \tilde{\Phi}(t, x_0, h_0) := (\Phi(t, x_0), D_2\Phi(t, x_0)h_0)$$

eine stetige Abbildung, die das AWP

$$\frac{d}{dt}(x, h) = \tilde{f}(t, x, h) \quad , \quad (x, h)(t_0) = (x_0, h_0)$$

löst. Wir wissen auch schon, dass die Zeitableitung $D_1\tilde{\Phi}$ stetig ist. Um $\tilde{\Phi} \in C^1(\tilde{D}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ zu zeigen, müssen wir nur die Existenz und Stetigkeit von $D_2\tilde{\Phi}$ zeigen. Dies geht wie der obige Beweis der Existenz und Stetigkeit von $D_2\Phi$. Der Induktionsschritt lässt sich r–mal anwenden, und wir erhalten $D^r\Phi \in C^0$, also $\Phi \in C^r(D, \mathbb{R}^n)$. □

7.4 Folgerungen aus dem Hauptsatz

In der Nähe einer Gleichgewichtslage können wir ein autonomes DGL–System zwar linearisieren, aber der Zusammenhang zwischen den Lösungen der beiden Differentialgleichungen ist nicht immer klar.

Anders ist die Situation in der Nähe einer Nichtgleichgewichtslage:

7.8 Satz (Satz über die Begradigung) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und für ein $r \in \mathbb{N}$ das Vektorfeld $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$. Ist dann $x_0 \in U$ keine Gleichgewichtslage, dann existiert ein C^r–Diffeomorphismus*

$$G : V \to W$$

von einer Umgebung V von x_0 auf $W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $DG_x f(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ für alle $x \in V$.

7.9 Bemerkung In geeigneten Koordinaten auf V ist also das Vektorfeld f konstant und damit die Lösung eine affine Funktion der Zeit.

Bew.: Da $f(x_0) \neq 0$ ist, ist für kleine $\varepsilon > 0$

$$F_\varepsilon := \{x \in U_\varepsilon(x_0) \mid \langle x - x_0, f(x_0)\rangle = 0\}$$

eine Kreisscheibe der Dimension $n-1$, und

$$\langle f(x), f(x_0)\rangle > 0 \qquad (x \in U_\varepsilon(x_0)). \tag{7.11}$$

Durch eine euklidische Transformation T des $\mathbb{R}^n$ können wir erreichen, dass $T(x_0) = 0$ mit $T(f(x_0)) = \lambda e_1$ mit $\lambda > 0$ gilt, also

$$T(F_\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = 0, \|y\| < \varepsilon\}.$$

Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass f und x_0 selbst schon die Eigenschaften $x_0 = 0$ und $f(x_0) = \lambda e_1$ mit $\lambda > 0$ haben. Wir betrachten den Zylinder $Z_\delta := (-\delta, \delta) \times F_\delta$. Für kleine $\delta > 0$ ist $\Phi|_{Z_\delta} : Z_\delta \to U_\varepsilon(x_0)$ injektiv, denn solange $\Phi_t(x) \in U_\varepsilon$ ist, gilt wegen (7.11)

$$\left(\frac{d}{dt}\Phi(t,x)\right)_1 = f_1(\Phi(t,x)) > 0,$$

wir können also mit der Trajektorie nicht zum zweiten Mal F_δ schneiden. Nach dem Hauptsatz ist $\Phi|_{Z_\delta}$ ein C^r–Diffeomorphismus auf sein Bild $V := \Phi(Z_\delta)$, und auch die Umkehrabbildung G ist ein C^r–Diffeomorphismus. □

Oft hängen Differentialgleichungen von Parametern $p \in P$ ab, wie z.B. Masse und Länge eines Pendels. Wir betrachten also das *parametrisierte AWP*

$$\dot{x} = f(t,x,p) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{7.12}$$

mit $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $P \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^r(U \times P, \mathbb{R}^n)$.

7.10 Satz *Es sei $D \subset U \times P$ der maximale Definitionsbereich des parametrisierten AWP (7.12). Dann ist die Lösung $\Phi \in C^r(D, \mathbb{R}^n)$.*

Bew.: Dies folgt direkt durch Übergang zum AWP

$$(\dot{x}, \dot{p}) = \tilde{f}(t,x,p) \quad , \quad (x,p)(t_0) = (x_0, p_0)$$

mit dem zeitabhängigen Vektorfeld

$$\tilde{f} \in C^r(\tilde{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d) \quad , \quad \tilde{f}(t,x,p) := (f(t,x,p), 0)$$

auf $\tilde{U} := U \times P$, denn dieses lässt den Parameterwert invariant und besitzt eine Lösung $\tilde{\Phi} \in C^r(D, \mathbb{R}^{n+d})$. □

Die wichtigste Folgerung aus dem Hauptsatz ist aber: In der Nähe eine Nichtgleichgewichtslage besitzen glatte DGLn *keine lokale Struktur*. Alle interessanten Fragen sind globaler Natur, also Fragen an das Verhalten der Lösung für große Zeiten.

8 Rand- und Eigenwertprobleme

Das von uns bisher ausschließlich untersuchte Anfangswertproblem ist Spezialfall der Klasse von Randwertproblemen. In diesen werden für *zwei* Werte der unabhängigen Variable Forderungen an die abhängige Variable gestellt. In physikalischen Anwendungen ist dann die unabhängige Variable typischerweise nicht die Zeit, sondern z.B. der Ort. Entsprechend werde ich sie mit x statt t bezeichnen, die abhängige Variable mit y.

8.1 Lösungen linearer Randwertprobleme

Im Folgenden werden nur lineare Randwertprobleme untersucht.

8.1 Definition *Für stetige Funktionen $A : I \to \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R}),\ b : I \to \mathbb{R}^n$ auf dem Intervall $I := [\ell, r]$, Matrizen $L, R \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}^n$ heißt*

$$y' = A(x)y + b(x) \quad , \quad Ly(\ell) + Ry(r) = c \tag{8.1}$$

lineares Randwertproblem *(RWP), und zwar*

- **inhomogen** *für $b \neq 0$ und $c \neq 0$*
- **homogen** *für $b = 0$ und $c = 0$*
- **halbhomogen** *sonst.*

8.2 Bemerkung Multiplizieren wir die Randwertgleichung $Ly(\ell) + Ry(r) = c$ von links mit einer invertierbaren Matrix $G \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dann erhalten wir eine Randwertgleichung mit den *gleichen Lösungen*:

$$\tilde{L}y(\ell) + \tilde{R}y(r) = \tilde{c} \quad \text{mit} \quad \tilde{L} = GL \ , \ \tilde{R} = GR \text{ und } \tilde{c} = Gc.$$

8.3 Beispiel 1. $L = \mathbb{1},\ R = 0$ ist das lineare Anfangswertproblem.

2. Wir betrachten die Vertikalauslenkung $z : [\ell, r] \to \mathbb{R}$ eines Stabes mit den Enden an den Stellen ℓ, r in Horizontalrichtung.

   Wird der Stab an der Stelle $x \in I = [\ell, r]$ mit der Kraft $f(x)$ belastet, ist seine Krümmung (in Kleinwinkelnäherung) gleich $z''(x) = f(x)$ (siehe [MV], § 11). Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$z(x) = c_1 + c_2 \cdot (x - \ell) + \int_\ell^x \int_\ell^s f(\tau)\, d\tau\, ds \qquad (x \in I). \tag{8.2}$$

   (a) Der an seinem linken Ende ℓ horizontal eingespannte Stab hat die Randbedingungen $z(\ell) = z'(\ell) = 0$, entsprechend $c_1 = c_2 = 0$, oder $L = \mathbb{1},\ R = 0,\ c = 0$ für das äquivalente Randwertproblem

$$y' = Ay + b(x) \quad , \quad Ly(\ell) + Ry(r) = c$$

   mit $y = \binom{z}{z'}$, $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $b(x) = \binom{0}{f(x)}$. Wie bekannt, besitzt dieses RWP eine eindeutige Lösung.

   (b) Ist dagegen der Stab (wie z.B. eine Brücke) links und rechts auf gleicher Höhe 0 gestützt, gelten die sog. *Dirichlet-Randbedingungen* $z(\ell) = z(r) = 0$.
   Dies ist z.B. zu $L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $c = \binom{0}{0}$ äquivalent, denn

$$Ly(\ell) + Ry(r) = \begin{pmatrix} z(\ell) \\ z(r) \end{pmatrix} = c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Auch dieses RWP besitzt eine eindeutige Lösung, und zwar (8.2) mit

$$c_1 := 0 \quad \text{und} \quad c_2 := \tfrac{-1}{r-\ell} \int_\ell^r \int_\ell^s f(\tau)\, d\tau\, ds.$$

   (c) Setzt man die Ableitungen $z'(\ell)$ und $z'(r)$ auf vorgegebene Werte, dann kann dieses RWP nie eindeutig lösbar sein, denn hat man eine

Lösung $z : I \to \mathbb{R}$, dann ist für jedes $w \in \mathbb{R}$ auch $z_w : I \to \mathbb{R}$ mit $z_w(x) := z(x) + w$ eine Lösung.
Andererseits muss für jede Lösung dieses RWP nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gelten:

$$z'(r) - z'(\ell) = \int_\ell^r f(x)\,dx. \tag{8.3}$$

Wenn wir also $z'(r)$ und $z'(\ell)$ beliebig vorgeben, besitzt dieses RWP im Allgemeinen keine Lösung.

8.4 Satz *Es sei $\Phi : I \times I \to \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ der Lösungsoperator der homogenen DGL $y_h' = A(x)y_h,\ D := L + R\Phi(r,\ell)$ und $d := R\int_\ell^r \Phi(r,s)\,b(s)\,ds$. Dann gilt:*

1. *Das RWP (8.1) besitzt genau dann eine Lösung, wenn*

$$\mathrm{Rang}\,(D) = \mathrm{Rang}\,(D \mid c - d).$$

2. *Die Menge der Lösungen von (8.1) bildet in diesem Fall einen affinen Vektorraum, dessen Dimension gleich dem Defekt von D ist.*

Bew.: Jede Lösung y der inhomogenen DGL aus (8.1) erfüllt nach dem Duhamel–Prinzip (Satz 3.17) die Gleichung

$$y(x) = \Phi(x,\ell)y(\ell) + \int_\ell^x \Phi(x,s)\,b(s)\,ds \qquad (x \in I).$$

Erfüllt y auch die Randbedingungen aus (8.1), dann gilt zusätzlich

$$c = Ly(\ell) + Ry(r) = \big(L + R\Phi(r,\ell)\big)y(\ell) + d = Dy(\ell) + d.$$

Diese Gleichung ist genau dann durch ein $y(\ell) \in \mathbb{R}^n$ lösbar, wenn $c - d$ im Bild der durch D definierten linearen Abbildung liegt. Dies beweist 1.

Ist y eine Lösung von (8.1), dann löst $y + y_h$ ebenfalls die DGL genau dann, wenn y_h eine Lösung der homogenen DGL ist. In diesem Fall löst $y + y_h$ genau dann die Randbedingungen, wenn y_h im Kern von D liegt. Das beweist die zweite Behauptung. □

8.5 Beispiel Wir setzen Beispiel 8.3 fort:

1. Für das AWP, d.h. $L = \mathbb{1},\ R = 0$ ist $D = \mathbb{1}$, was eindeutige Lösbarkeit impliziert.

2. Hier ist $\Phi(x,x') = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x-x' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, also

$$y(r) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r-\ell \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) y(\ell) + \tau \quad \text{mit} \quad \tau := \begin{pmatrix} \int_\ell^r \int_\ell^s f(\tau)\,d\tau\,ds \\ \int_\ell^r f(s)\,ds \end{pmatrix}$$

   a) ergibt sich aus Teil 1. des Beispiels.
   b) Hier ist $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & r-\ell \end{smallmatrix}\right)$, also wegen $r > \ell$ vom $\operatorname{Rang} 2$, was eindeutige Lösbarkeit ergibt.
   c) Wir können die Randbedingungen durch $L := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $R := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $c := \begin{pmatrix} z'(\ell) \\ z'(r) \end{pmatrix}$ fixieren, denn dann ist

$$Ly(\ell) + Ry(r) = \begin{pmatrix} y_2(\ell) \\ y_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'(\ell) \\ z'(r) \end{pmatrix}.$$

   Andererseits ist dann $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ vom $\operatorname{Rang} 1$ und $d = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \int_\ell^r f(s)\,ds \end{smallmatrix}\right)$. Lösbar ist das System damit genau dann, wenn $\left(\begin{smallmatrix} z'(\ell) \\ z'(r) - \int_\ell^r f(s)\,ds \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Im}(D)$ gilt, also (8.3).

8.2 Das Sturm-Liouville-Problem

Homogene Randwertprobleme besitzen immer mindestens eine Lösung und zwar $y(x) = 0$ $(x \in I)$. Sie können aber einen höher dimensionalen Lösungsraum besitzen. Wir interessieren uns im Fall einer zusätzlichen Parameterabhängigkeit für die Menge der Parameterwerte, bei denen letzteres Phänomen auftritt.

8.6 Beispiel $y'' + \lambda y = 0$ für Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $I = [0,1]$ und Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$. Hier finden wir für $\lambda_n := (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$ nichttriviale Lösungen

$$y_n(x) := \sin(n\pi x) \qquad (x \in I),$$

$n = 1$ entspricht der Grundtonschwingung, $n > 1$ den Oberschwingungen einer eingespannten Saite.

8.7 Definition *Das parameterabhängige RWP* $L(u) + \lambda w u = 0$ *mit*

$$L(u)(x) := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \qquad (x \in I), \tag{8.4}$$

$p \in C^1(I)$, $p > 0$, $q, w \in C^0(I)$, *und Randwerten*

$$u(\ell)\cos\varphi_\ell + u'(\ell)\sin\varphi_\ell = u(r)\cos\varphi_r + u'(r)\sin\varphi_r = 0 \tag{8.5}$$

heißt das **Sturm-Liouvillesche Randwertproblem**.

8.8 Bemerkungen 1. Ausführung der Ableitung ergibt

$$(p(x)u'(x))' = p(x)u''(x) + p'(x)u'(x).$$

Wegen der Positivität von $p(x)$ können wir durch p teilen. Wir sehen dann, dass wir äquivalent von einer linearen normierten DGL zweiter Ordnung hätten ausgehen können. Der Vorteil der Form (8.4) ist, dass bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, v\rangle := \int_I u(x)\overline{v}(x)\,dx \quad \text{auf} \quad L^2(I)$$

der Operator L (formal) *selbstadjungiert* ist, d.h. gilt

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle \qquad \big(u, v \in C^2(I) \text{ mit } (8.5)\big)\,.$$

Dies ergibt sich aus zweifacher partieller Integration.

2. Ziel ist es, Lösungen $u \neq 0$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ zu finden. Man nennt λ dann *Eigenwert* und u *Eigenfunktion*.

Wesentliche qualitative Eigenschaften der Lösungen des allgemeinen Sturm-Liouville-Problems ähneln denen des Spezialfalles aus Bsp. 8.6:

8.9 Satz • *Unter der Voraussetzung $w > 0$ besitzt das Sturm-Liouville-Problem unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.*
• *Die zugehörigen Eigenfunktionen $u_n \in C^2(I, \mathbb{R})$ besitzen im offenen Intervall (ℓ, r) genau $n-1$ Nullstellen.*

Bew.: Siehe z.B. Walter [Wa], § 27. □

8.10 Bemerkungen 1. Über die Verteilung der Eigenwerte und die Struktur der Eigenfunktion sind viele präzise Aussagen bekannt. Sturm-Liouville-Probleme tauchen in der Beschreibung vieler Schwingungsvorgänge aus Natur und Technik auf, z.B. in der Quantenmechanik. Dort wird λ_n als Energie eines in seinen n–ten angeregten Zustand befindlichen Teilchens angesehen.

2. Numerisch und auch im Sinn exakter Abschätzungen kann man Sturm-Liouville-Probleme mit ganz verschiedenen Ansätzen lösen:

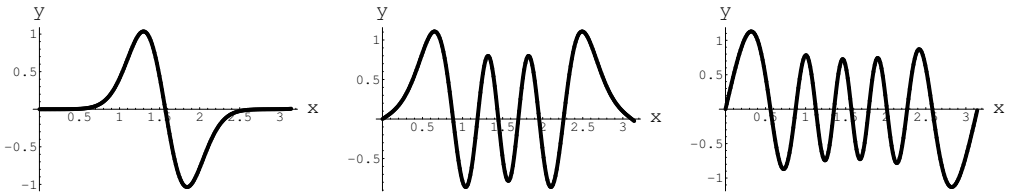


Abbildung 8.1: Von links nach rechts: 2., 7. und 10. Eigenfunktion des Sturm-Liouville-Problems $y''(x) - 100\cos(2x)y(x) = \lambda y(x)$, mit Dirichlet-Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = \pi$.

(a) Beispielsweise kann man mit den Randbedingungen bei ℓ verträgliche Anfangsbedingungen wählen und dann den Parameter λ ändern, bis auch die rechte Randbedingung erfüllt wird.

(b) Eine andere Möglichkeit ist es, L als (selbstadjungierten) Operator auf dem Hilbertraum $L^2(I)$ aufzufassen und zu einer endlichen Matrix zu diskretisieren. Im Fall $w = 1$ ist das Eigenwertproblem dieser Matrix als Approximation an das Problem der kleinen Eigenwerte λ_n aufzufassen.

(c) Ein dritter Ansatz, der besonders für große Eigenwerte λ_n greift, besteht in sog. WKB-Näherungen, wie sie aus der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren folgen (siehe z.B. Martinez [Ma], Kap. 2.3).

9 Besondere Klassen von Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir Differentialgleichungen mit Vektorfeldern behandeln, die jeweils durch Angabe einer einzigen Funktion fixiert sind: Gradienten– bzw. Hamiltonsche DGLn. Diese werden einerseits häufig betrachtet. Andererseits besitzen sie besondere dynamische Eigenschaften.

9.1 Gradienten–Differentialgleichungen

Auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik lässt sich der Gradient einer reellwertigen Funktion h in kartesischen Koordinaten als $\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ schreiben. ∇h ist

dann ein Vektorfeld.

9.1 Definition • *Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt* **Gradienten-Vektorfeld**, *wenn eine Funktion $h \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\nabla h = f$ existiert.*
• *Die DGL $\dot{x} = f(x)$ heißt dann* **Gradienten-Differentialgleichung**.

Kriterien, Eigenschaften und Beispiele

Wie stellt man nun fest, ob ein vorgegebenes Vektorfeld Gradienten-Vektorfeld ist? Hilfreich ist dafür die Theorie der Differentialformen aus der *Analysis III*. In kartesischen Koordinaten ist ∇h ja bis auf Transposition gleich der exakten 1-Form $dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n$. Die dem Vektorfeld $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ assoziierte 1-Form $\omega := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ muss also *geschlossen* sein ($d\omega = 0$), wenn f Gradienten-Vektorfeld sein soll. Nach dem Poincaré-Lemma ist für konvexe U diese Bedingung auch hinreichend:

9.2 Satz *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, dann ist das Vektorfeld $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ genau dann Gradienten-Vektorfeld, wenn ω geschlossen ist, d.h. gilt*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad (i, k \in \{1, \ldots, n\}). \tag{9.1}$$

Bew.: • Dass diese Bedingung notwendig ist, folgt aus $f_j = \frac{\partial h}{\partial x_j}$ und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen von $h \in C^2(U, \mathbb{R})$.
• Umgekehrt können wir wegen der Konvexität einen vorgegebenen Anfangspunkt $y \in U$ mit jedem $x \in U$ durch eine in U liegende Strecke verbinden. Wir zeigen, dass f Gradienten-Vektorfeld von $h \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit

$$h(x) := \int_0^1 \big\langle f\big(y + t(x-y)\big), x - y \big\rangle \, dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_i\big(y + t(x-y)\big)(x_i - y_i) \, dt$$

ist. Denn wegen (9.1) ist die k–te partielle Ableitung von h gleich

$$\begin{aligned} D_k h(x) &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \big[\delta_{ik} f_i\big(y + t(x-y)\big) + D_k f_i\big(y + t(x-y)\big)(x_i - y_i)t\big] \, dt \\ &= \int_0^1 \left[f_k\big(y + t(x-y)\big) + \sum_{i=1}^n D_i f_k\big(y + t(x-y)\big)(x_i - y_i)t \right] dt. \end{aligned}$$

Setzt man abkürzend $g_k(t) := f_k(y + t(x - y))$, dann ist

$$\frac{dg_k}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_k\big(y + t(x-y)\big)(x_i - y_i),$$

also ist

$$D_k h(x) = \int_0^1 g_k(t)\,dt + \int_0^1 \frac{dg_k}{dt}(t)\,t\,dt.$$

Mit partieller Integration ergibt das zweite Integral

$$\int_0^1 \frac{dg_k}{dt}(t)\,t\,dt = g_k(1) - \int_0^1 g_k(t)\,dt,$$

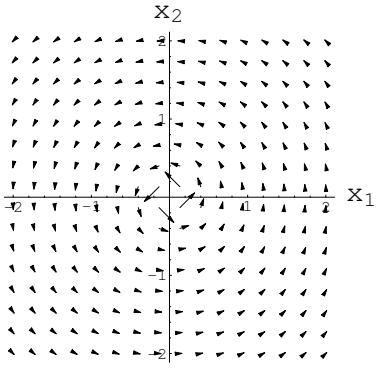
sodass sich aus $g_k(1) = f_k(x)$ ergibt: $D_k h(x) = g_k(1) = f_k(x)$. □

9.3 Bemerkung Statt Konvexität zu verlangen, kann man auch abschwächend fordern, dass U einfach zusammenhängend ist (für $n = 2$ siehe Def. 6.9). Analog zur Definition von h im Beweis von Satz 9.2 setzt man h als Wegintegral

$$h(x) := \int_0^1 \big\langle f\big(\gamma_x(t)\big), \gamma_x'(t)\big\rangle\,dt \qquad (x \in U) \tag{9.2}$$

an und zeigt dann die Unabhängigkeit von der Wahl des Weges $\gamma_x : [0,1] \to U$ vom Ausgangspunkt $\gamma_x(0) = y \in U$ zum Punkt $\gamma_x(1) = x$.
Die Forderung des einfachen Zusammenhangs von U kann man nicht weglassen:

9.4 Beispiel Das Vektorfeld $f(x) := \frac{1}{\|x\|^2}\binom{-x_2}{+x_1}$ auf dem Phasenraum $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ besitzt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\|x\|^4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, erfüllt also (9.1).



Das Vektorfeld f ist senkrecht zur radialen Richtung, und $\|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|}$. Daher ist das Wegintegral (9.2) nur vom durch γ_x überstrichenen Winkel abhängig. Auf der einfach zusammenhängenden geschlitzten Ebene

$$\tilde{U} := \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [0, \infty)) \subset U$$

ist das Integral daher gleich dem Winkel zwischen Anfangs- und Endpunkt. $f\restriction_{\tilde{U}}$ ist also ein Gradienten-Vektorfeld. Auf U ist h allerdings nicht stetig definierbar. f selbst ist also kein Gradienten-Vektorfeld.

Die Orbits des Vektorfeldes im letzten Beispiel sind die Kreise um den Ursprung. Dergleichen kann bei Gradienten-Vektorfeldern nicht geschehen.

9.5 Lemma *Entweder ist ein Orbit eines Gradienten-Vektorfeldes $\dot{x} = \nabla h(x)$ eine Gleichgewichtslage, oder h steigt entlang der Lösungskurve streng monoton.*

Bew.: Es sei $t \mapsto \varphi(t)$ eine Lösungskurve, also $\frac{d\varphi}{dt} = \nabla h(\varphi(t))$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} h(\varphi(t)) = \langle \nabla h(\varphi(t)), \dot{\varphi} \rangle = \|\nabla h(\varphi(t))\|^2 \geq 0.$$

Ist der Gradient von h an der Stelle $\varphi(t)$ Null, dann ist der Orbit eine Gleichgewichtslage. Sonst gilt (für den ganzen Orbit!) die strikte Ungleichung. $\square$

Welche *linearen* Vektorfelder sind Gradienten-Vektorfelder? Offensichtlich muss mit $f(x) = Ax$ für alle Indexpaare (i,k) gelten $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ oder entsprechend $A_{ik} = A_{ki}$. Die linearen Gradienten-Vektorfelder zeichnen sich also dadurch aus, dass ihre Systemmatrix selbstadjungiert ist. f ist dann Gradient der Funktion

$$h(x) := \tfrac{1}{2} \langle x, Ax \rangle ,$$

also einer quadratischen Form auf dem Phasenraum $U = \mathbb{R}^n$.

Durch eine Drehung können wir erreichen, dass die Systemmatrix diagonal ist, also o.B.d.A.

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

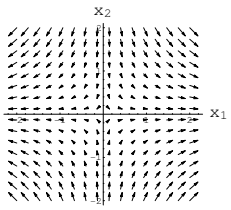
Damit ist $\exp(At) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$.

Sind nun die λ_i alle $\neq 0$, dann spaltet der Phasenraum in die direkte Summe $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ zweier Unterräume auf, wobei A die Aufspaltung invariant lässt, und $A|_{E^s} < 0$, $A|_{E^u} > 0$, also $\operatorname{Ind}(A) = \dim(E^s)$. Es gilt

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \exp(At)x = 0\} \quad , \quad E^u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} \exp(At)x = 0\},$$

so dass E^s bzw. E^u der *stabile* bzw. *instabile Unterraum* ist.

9.6 Beispiel Dis Systemmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ hat Index 1, und das lineare Vektorfeld $f(x) = Ax$ ist ein Gradienten-Vektorfeld.



Es stellt sich heraus, dass diese eben beschriebene lineare Situation auch das Wesentliche der nicht linearen Situation erfasst, falls man voraussetzt, dass die kritischen Punkte $x \in U$ von h (d.h. die mit $\nabla h(x) = 0$) nicht degeneriert sind.

9.7 Definition *Ein kritischer Punkt $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ einer Funktion $h \in C^2(U, \mathbb{R})$ heißt* **nicht degeneriert**, *falls die Hesse–Matrix*

$$\mathrm{Hess}_h(x) = \begin{pmatrix} h_{x_1x_1}(x) & \dots & h_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{x_nx_1}(x) & \dots & h_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

vollen Rang besitzt, also $\mathrm{Rang}(\mathrm{Hess}_h(x)) = n$.

Kritische Punkte von h sind Nullstellen des Gradientenvektorfeldes von h, d.h. Ruhelagen des Gradientenflusses.

9.8 Definition *Besitzt der Fluß $\Phi : D \to U$ einer DGL den maximalen Definitionsbereich $D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in (T^-(x), T^+(x))\}$ dann heißt für eine Ruhelage $x \in U$*

$$M^s(x) := \{y \in U \mid \lim_{t \nearrow T^+(y)} \Phi_t(y) = x\}$$

die **stabile Mannigfaltigkeit** *und*

$$M^u(x) := \{y \in U \mid \lim_{t \searrow T^-(y)} \Phi_t(y) = x\}$$

die **instabile Mannigfaltigkeit** *von x.*

Es gilt $T^+(y) = \infty$ falls $y \in M^s(x)$, und analog $T^-(y) = -\infty$ für $y \in M^u(x)$.

9.9 Bemerkung Immer gilt $x \in M^s(x)$ und $x \in M^u(x)$. Im Allgemeinen kann $M^u(x) \cap M^s(x)$ noch weitere Punkte enthalten, wie man am Fall der oberen Ruhelage x des Pendels sieht (Beispiel 5.3, Abbildung 5.1).

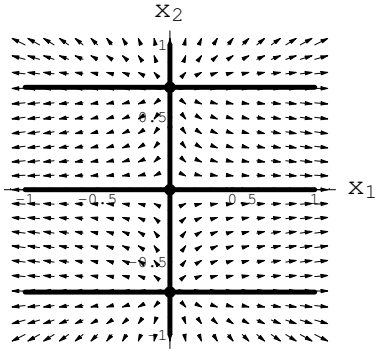
Dieses Phänomen tritt allerdings bei Gradienten-DGLn nicht auf, denn entlang nicht konstanter Trajektorien wächst die Funktion ja streng monoton.

9.10 Beispiel Wir betrachten den Gradientenfluss von

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad h(x_1, x_2) := \tfrac{1}{2}x_1^2 - \tfrac{1}{4}x_2^2 + \tfrac{1}{4}x_2^4.$$

Die kritischen Punkte von h sind die $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla h(x) = \binom{x_1}{x_2^3 - x_2/2} = 0$, also

$$y_0 := (0, 0) \ , \ y_1 := \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ und } y_2 := \left(0, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$



Die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der kritischen Punkte sind

$$\begin{array}{ll} M^s(y_0) = \{0\} \times \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & , \quad M^u(y_0) = \mathbb{R} \times \{0\} \\ M^s(y_1) = \{y_1\} & , \quad M^u(y_1) = \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ M^s(y_2) = \{y_2\} & , \quad M^u(y_2) = \mathbb{R} \times (-\infty, 0). \end{array}$$

In diesem Beispiel sind $M^u(y_i)$ Mannigfaltigkeiten der Dimension

$$\dim(M^u(y_i)) = 2 - \mathrm{Ind}\left(\mathrm{Hess}_h(y_i)\right),$$

und $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=0}^2 M^u(y_i)$, wobei es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt.

Dagegen ist $\bigcup_{i=0}^2 M^s(y_i) = \{0\} \times \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \subset \mathbb{R}^2$, also eine echte Teilmenge des Phasenraumes, und die Dimensionen der stabilen Mannigfaltigkeiten sind

$$\dim(M^s(y_i)) = \mathrm{Ind}\left(\mathrm{Hess}_h(y_i)\right),$$

also gleich den Dimensionen der stabilen Unterräume $E^s(y_i)$ der linearisierten Vektorfelder mit Systemmatrix $\mathrm{Hess}_h(y_i)$.

Ähnlich wie die instabilen Mannigfaltigkeiten sind die stabilen Mannigfaltigkeiten $M^s(y_i)$ bei y_i an den $E^s(y_i)$ tangential.

Die gennanten Eigenschaften (Dimension, Tangentialität) sind typisch für Gradienten-Differentialgleichungen mit nicht degenerierten kritischen Punkten.

Die ω–Limesmenge

Wir wissen schon, dass Gradienten-Vektorfelder keine (echten) periodischen Orbits zulassen, denn falls der Phasenraumpunkt keine Gleichgewichtslage ist, nimmt h auf der durch ihn verlaufenden Lösung streng monoton zu. Diese Eigenschaft, nicht zurückzulaufen, macht Gradientenflüsse einfacher als Flüsse anderer Differentialgleichungen. Im Limes großer Zeiten kann diese Eigenschaft allerdings verloren gehen.

Ich werde jetzt zunächst Eigenschaften der ω–Limesmengen zeigen, die nicht voraussetzen, dass die zugrundeliegende Differentialgleichung eine Gradienten-Differentialgleichung ist.

Der Einfachheit halber aber soll die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf U einen vollständigen Phasenfluss $\Phi : \mathbb{R} \times U \to U$ besitzen.

9.11 Satz *Für $x \in U$ ist die ω–Limesmenge $\omega(x) \subseteq U$*

1. *abgeschlossen und*

2. *eine Vereinigung von Orbits.*

Existiert eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\Phi_t(x) \in K$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt zusätzlich

3. *$\omega(x)$ ist zusammenhängend und*

4. *nicht leer.*

Bew.:

1. Ist $y \notin \omega(x)$, dann existiert eine Umgebung $U_\varepsilon(y) \subset U$ von y und eine Minimalzeit $T \in [0, \infty)$ mit $\Phi_t(x) \notin U_\varepsilon(y)$ für alle $t \geq T$. Damit haben aber auch alle $z \in U_{\varepsilon/2}(y)$ die Eigenschaft, dass für kein $t \geq T$ die Lösung $\Phi_t(x)$ in $U_{\varepsilon/2}(z)$ liegt. Damit ist $U_{\varepsilon/2}(y) \cap \omega(x) = \emptyset$, $U \setminus \omega(x)$ also offen.

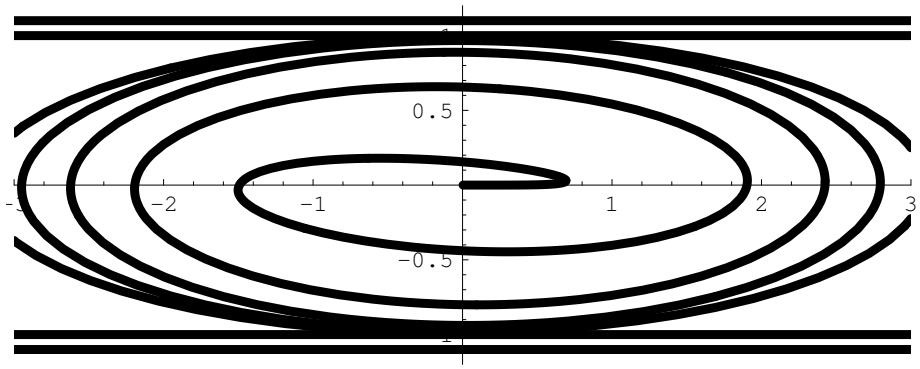
2. Ist dagegen $y \in \omega(x)$, dann kann jeder Punkt z auf dem Orbit durch y in der Form $z = \Phi_s(y)$ für ein geeignetes $s \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Ist nun $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zeiten mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x) = y$, dann ist mit $t'_n := t_n + s$ auch $\lim_{n\to\infty} t'_n = \infty$ und
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Phi_{t'_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} \Phi_s \circ \Phi_{t_n}(x) = \Phi_s \circ \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x) \\ &= \Phi_s(y) = z \text{ , also } z \in \omega(x). \end{aligned}$$

3. Wir nehmen an, dass die abgeschlossene Menge $\omega(x)$ nicht zusammenhängend ist, dass also $\omega(x) = A_1 \cup A_2$ mit $A_i \neq \emptyset$ abgeschlossen und disjunkt, d.h. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Als abgeschlossene Teilmengen der kompakten Menge K sind auch die A_i kompakt, besitzen also einen positiven Abstand
$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) := \inf\{\|a_1 - a_2\| \mid a_i \in A_i\}.$$
Setzt man $\varepsilon := \operatorname{dist}(A_1, A_2)/4 > 0$ dann ist für die offenen Umgebungen
$$V_i := \cup_{a\in A_i} U_\varepsilon(a_i) \text{ der } A_i \qquad (i = 1, 2)$$
$\operatorname{dist}(V_1, V_2) \geq 2\varepsilon$. Die Menge $\tilde{K} := K \setminus (V_1 \cup V_2))$ ist kompakt und wird vom Orbit $\mathcal{O}(x)$ immer wieder betreten, d.h. es gibt eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zeiten mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ und $\Phi_{t_n}(x) \in \tilde{K}$. Wegen der Kompaktheit von $\tilde{K}$ gibt es eine Teilfolge $(t_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, für die $\lim_{k\to\infty} \Phi_{t_{n(k)}}(x)$ existiert und in $\tilde{K}$ liegt. Der so konstruierte Punkt liegt aber nach Voraussetzung nicht in $\omega(x)$. Widerspruch!

4. Ist offensichtlich, denn im Kompaktum K hat *jede* Folge $(\Phi_{t_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt. $\square$

9.12 Bemerkung Die Kompaktheitsannahme ist für die 3. und 4. Behauptung unverzichtbar:

3. Gegenbeispiel eines Phasenportraits im $\mathbb{R}^2$ mit nichtzusammenhängender ω–Limesmenge, nach [PdM], Seite 15:



4. Für $U := \mathbb{R}$ und $h(x) := x$, also $\dot{x} = \nabla h = 1$ ist $\omega(x) = \emptyset$.

Speziell für Gradienten-Differentialgleichungen ergibt sich

9.13 Satz *Die ω–Limesmenge $\omega(x)$, $x \in U$ einer Gradienten-Differentialgleichung $\dot{x} = \nabla h(x)$ besteht aus Gleichgewichtspunkten, und h ist auf $\omega(x)$ konstant.*

Bew.: Wäre $y \in \omega(x)$ kein Gleichgewichtspunkt, so könnte man nach Satz 7.8 in geeigneten Koordinaten das Vektorfeld in der Nähe von y begradigen und eine Umgebung der Zylinderform$(-\varepsilon, \varepsilon) \times D_\varepsilon$ finden, sodass $h(a, b) = h(y) + a$. Nach Verlassen dieser Umgebung besitzt der Orbit einen h–Wert, der größer als $h(y) + \varepsilon$ ist. Da h aber streng monoton wächst, kann die Lösung nicht wieder in die Umgebung zurückkehren, sodass y kein Häufungspunkt ist.

Gäbe es $y_1, y_2 \in \omega(x)$ mit $h(y_1) < h(y_2)$, dann könnte die Lösung nicht mehr von einer Umgebung $U_2 := h^{-1}\Big(\big(h(y_2) - \varepsilon, h(y_2 + \varepsilon)\big)\Big)$ von y_2 zu einer entsprechenden Umgebung U_1 von y_1 zurückkehren, wenn man $\varepsilon > 0$ kleiner als $\frac{1}{2}(h(y_2) - h(y_1))$ wählt, sodass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist. $\square$

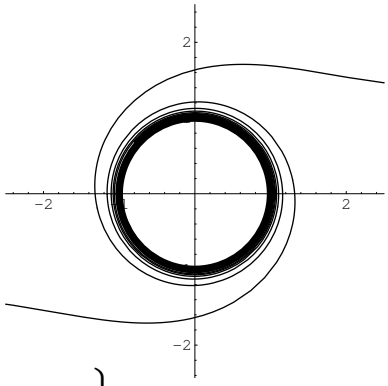
Es ist aber nicht so, dass für Gradienten-DGLn $\omega(x)$ aus höchstens einem Punkt bestehen muss.

Gegenbeispiel (nach Palis und de Melo [PdM])
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in Polarkoordinaten (r, φ) gegeben durch

$$h(r\cos\theta, r\sin\theta) := \begin{cases} e^{1/(r^2-1)} & , 0 \le r < 1 \\ 0 & , r = 1 \\ e^{-1/(r^2-1)} \sin(1/(r-1) - \theta) & , r > 1 \end{cases}$$

und $f := \nabla h$. Es ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $\|x\| = 1$, und $f^{-1}(0) = C \cup E_1 \cup E_2$ mit dem Kreis

$$C \quad := \quad \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$



$$E_1 := \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r = 1 + \frac{1}{\pi + \theta}, \theta \in (-\pi, \infty) \right\}$$

$$E_2 := \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r = 1 + \frac{1}{2\pi + \theta}, \theta \in (-2\pi, \infty) \right\}$$

Es gibt nun ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\omega(x) = C$.

Gradientenflüsse auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Man kann Gradienten-Differentialgleichungen nicht nur auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren, sondern immer dann, wenn man den Gradienten einer reellen Funktion definieren kann, also auf so genannten *Riemannschen Mannigfaltigkeiten*. Dieser Begriff steht uns zwar nicht in voller Allgemeinheit zur Verfügung, wir werden aber eine spezielle Klasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten untersuchen, und zwar die in der *Analysis II* eingeführten Untermannigfaltigkeiten des Euklidischen Raums.

Man kann eine solche k–dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ auf zwei Weisen definieren:

- **durch Parametrisierung,** d.h. als Bild der offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ unter einer injektiven Abbildung $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, falls $Dg(x)$ überall den maximalen Rang k hat;

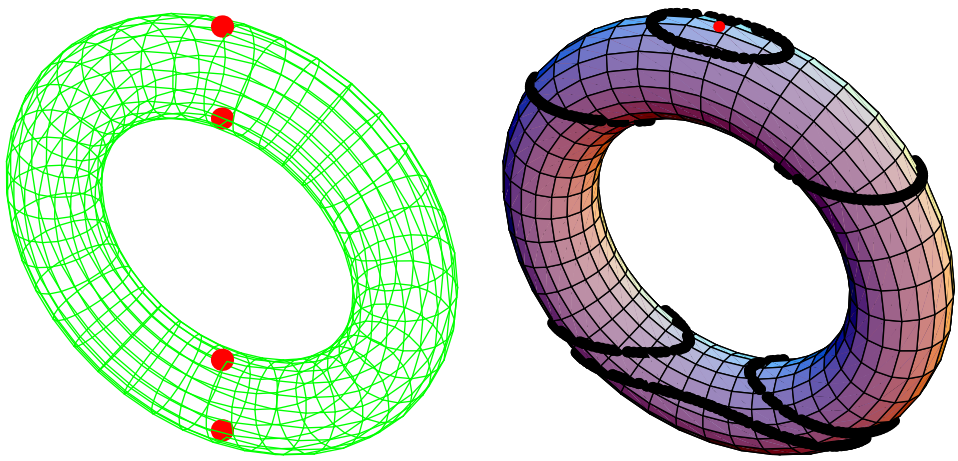


Abbildung 9.1: Kritische Punkte (links) und Niveaumengen (rechts) der restringierten Funktion $h|_{\mathbb{T}^2} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ auf dem Torus, für $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ,\ h(x) := x_3$

- **als Niveaumenge:** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von der Form $M = g^{-1}(0)$ mit $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ ist eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ regulärer Wert von g ist (für $n - k = 1$ bedeutet das $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in g^{-1}(0)$).
  Dann lässt sich M nach dem Satz über die implizite Funktion *lokal* (in einer Umgebung von $x \in M$) durch k Parameter koordinatisieren.

9.14 Beispiel 1. Der 2–Torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{T}^2 := g([0, 2\pi) \times [0, 2\pi))$,

$$g(x) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(4+\cos(\theta)) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\varphi)(4+\cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

2. Die 2–Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $S^2 := g^{-1}(0)$, $g(x) := \|x\|^2 - 1$

Wir können jetzt eine Funktion $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ auf M restringieren. Die restringierte Funktion $h|_M \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ wird wieder kritische Punkte besitzen, in deren Umgebung sich die Topologie der Niveaumengen von $h|_M$ ändern kann, siehe Abb. 9.1.

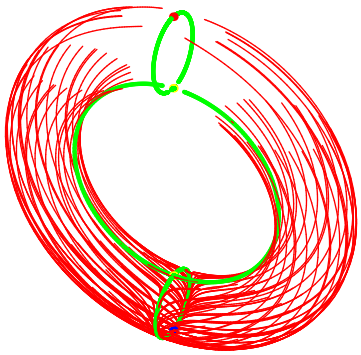
Ebenso können wir die Restriktion des Gradienten $\nabla h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von h auf $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten. Diese besitzt eine zu M senkrechte Komponente mit Norm $\frac{|\langle \nabla h(x), \nabla g(x) \rangle|}{\|\nabla g(x)\|}$. Damit wird aber das Vektorfeld

$$f(x) := \nabla h(x) - \frac{\langle \nabla h(x), \nabla g(x) \rangle}{\langle \nabla g(x), \nabla g(x) \rangle}\ \nabla g(x)$$

zu M tangential, wie man durch Bildung des inneren Produktes mit $\nabla g(x)$ sieht. Seine Restriktion auf M ist also ein Vektorfeld der Untermannigfaltigkeit.

$f|_M$ lässt sich auch als Gradienten-Vektorfeld von $h|_M$ bezüglich der vom $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik auf M auffassen.

9.15 Beispiel Gradientenfluss der Höhenfunktion $h(x) = x_3$ auf dem Torus $\mathbb{T}^2$.



In der so genannten *Morse-Theorie* werden diese Gradientenflüsse dazu benutzen, um Mannigfaltigkeiten voneinander zu unterscheiden.

Es lässt sich z.B. zeigen, dass – wie im Beispiel – auf $\mathbb{T}^2$ das Gradienten-Vektorfeld von $h|_M$ mindestens vier Ruhelagen besitzt, wenn diese nicht degeneriert sind, wie auch immer man h wählt. Daraus folgt, dass $\mathbb{T}^2$ und S^2 nicht diffeomorph sein können, denn die Höhenfunktion auf S^2 besitzt nur Minimum und Maximum als (nicht degenerierte) Ruhelagen[14].

[14] Auf der website 'Topology and Mathematica' von Andrzej Kozlowski findet man diese und weitere Beispiele zur Morse-Theorie

9.2 Hamiltonsche Differentialgleichungen

Hamiltonsche DGL-Systeme tauchen in mechanischen Problemen ohne Reibung aber auch in der Optik und anderen Anwendungen auf.

9.16 Definition • *Ein Vektorfeld* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{2n})$ *auf dem Phasenraum* $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ *heißt* **Hamiltonsch**, *wenn für* $J := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ *gilt:*

$$f = J\nabla H \quad \textit{für ein} \quad H \in C^2(U, \mathbb{R}).$$

• H *heißt dann* **Hamilton-Funktion** *von* f,
• $\dot{x} = J\nabla H(x)$ **Hamiltonsche DGL** *von* H.
• n *(also die halbe Phasenraumdimension), heißt die* **Zahl der Freiheitsgrade**.

Oft haben wir folgende Struktur des Phasenraumes:

9.17 Notation Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n_q$ offen, dann nennt man

- M *Konfigurationsraum*,
- $U := \mathbb{R}^n_p \times M$ Phasenraum *über* M,
- $q \in M$ *Ort* und $p \in \mathbb{R}^n_p$ *Impuls*.

9.18 Beispiel Die Newtonsche Gleichung Kraft = Masse × Beschleunigung hängt im einfachsten Fall reibungsfreier Kräfte mit einer Hamilton-Funktion zusammen. Geht man nämlich von $\ddot{q} = \frac{1}{m}F(q),\ q \in \mathbb{R}^d$ aus und setzt $p := m\dot{q}$, so ist

$$\dot{p} = F(q) \quad , \quad \dot{q} = p/m.$$

Ist das Kraftfeld F ein Gradientenvektorfeld, also $F(q) = -\nabla V(q)$ mit sog. *Potential* V, dann ist mit $x \equiv (p, q)$ und $H(x) := \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$

$$\nabla H(p, q) = \left(\begin{smallmatrix} p/m \\ -F(q) \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = J\nabla H(p, q).$$

In den physikalisch wichtigen Fällen gilt tatsächlich $F(q) = -\nabla V(q)$, z.B. für die am Vorlesungsbeginn diskutierte gravitative Kraft $F : \mathbb{R}^3_q \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$F(q) = -\gamma m \frac{q}{\|q\|^3} = -\nabla V(q) \quad \text{mit} \quad V(q) := -\frac{\gamma m}{\|q\|}.$$

Die Hamilton-Funktion des himmelsmechanischen Einkörperproblems ist also

$$H \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3_p \times (\mathbb{R}^3_q \backslash \{0\}), \mathbb{R}\big) \quad , \quad H(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2m} - \frac{\gamma m}{\|q\|}.$$

Frage: Wir haben ja schon früher DGLn 2. Ordnung wie die Newtonsche Kraftgleichung in DGLn erster Ordnung transformiert. Was nutzt uns die Hamiltonsche Formulierung?

Antwort: In der Einleitung haben wir die zeitliche Konstanz der Gesamtenergie benutzt, um die Differentialgleichung zu lösen, Die Gesamtenergie ist aber der Wert von H, was man durch Ersetzen von p durch mv, v Geschwindigkeit, sieht. Wir werden noch weitere Gründe kennen lernen.

9.19 Satz *Die Hamilton-Funktion H einer Hamiltonschen Differentialgleichung $\dot{x} = J\nabla H(x),\ H \in C^2(U, \mathbb{R})$, ist auf den Orbits konstant.*

Bew.: Es sei $t \mapsto x(t)$ die Lösung des AWP $\dot{x} = J\nabla H(x),\ x(0) = x_0$. Dann ist

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \langle \nabla H(x(t)), \dot{x}(t)\rangle = \langle \nabla H(x(t)), J\nabla H(x(t))\rangle\,.$$

J ist antiselbstadjungiert: $J^* = -J$. Daher gilt für alle $y \in \mathbb{R}^{2n}$

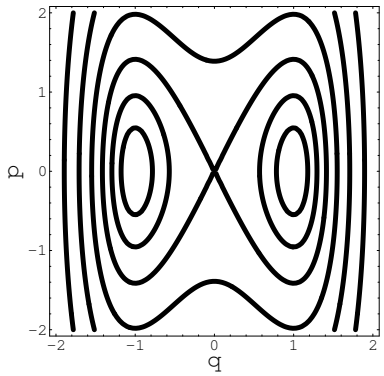
$$\langle y, Jy\rangle = \tfrac{1}{2}[\langle y, Jy\rangle + \langle J^*y, y\rangle] = \tfrac{1}{2}[\langle y, Jy\rangle - \langle Jy, y\rangle] = 0,$$

also auch für $y := \nabla H(x(t))$. □

Wie in Beispiel 6.5 gezeigt, erlaubt uns Satz 9.19 im Fall $n = 1$, also $U \subset \mathbb{R}^2$ für eine gegebene Hamilton-Funktion $H : U \to \mathbb{R}$ die Orbits des Hamiltonschen Vektorfeldes $J\nabla H$ aufzufinden, allerdings zunächst ohne Zeitparametrisierung. Ist $\nabla H(x) = 0$, so besteht der Orbit nur aus x. Sonst ist $H^{-1}(H(x))$ in einer Umgebung von x eine glatte Kurve im Phasenraum U (impliziter Funktionensatz). Auf dieser muss der Orbit durch x verlaufen, denn auf ihm ist h ja konstant.

Die Orientierung erhalten wir durch die Richtung, die durch Drehung von $\nabla H(x)$ mittels $J \in \mathrm{SO}(2)$, also um $\pi/2$, erfolgt.

9.20 Beispiel Die Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(p, q) := \frac{1}{2}p^2 + (q^2 - 1)^2$ modelliert die Bewegung eines Teilchens in einem Doppelmuldenpotential.
Für die regulären Werte $E \in (1, \infty)$ der Energie ist die Niveaukurve $H^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^2$ diffeomorph zu S^1, für $E \in (0, 1)$ diffeomorph zu $S^1 \dot{\cup} S^1$. Das Teilchen ist also für niedrige Energien in einer der Mulden gefangen.



Ähnlich wie bei den Gradienten-Differentialgleichungen werden wir zunächst die *linearen* Hamiltonschen Differentialgleichungen untersuchen. Diese besitzen eine Hamilton-Funktion $H : \mathbb{R}^{2n}_x \equiv \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q \to \mathbb{R}$ der Form

$$H(x) = H(0) + \tfrac{1}{2} \langle x, Ax \rangle ,$$

wobei wir o.B.d.A. $A = A^* \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$, und $H(0) = 0$ annehmen dürfen, denn Hinzufügung einer antisymmetrischen Matrix bzw. einer Konstante ändern das hamiltonsche Vektorfeld nicht.

Damit wird die Systemmatrix M der linearen Differentialgleichung von der Form $M = JA$. Für die adjungierte Matrix M^* gilt

$$M^*J = A^*J^*J = -AJJ = A = -JJA = -JM,$$

also $M^*J + JM = 0$. Das führt uns zu folgender Definition:

9.21 Definition $M \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ *heißt* **infinitesimal symplektisch**, *wenn*

$$M^*J + JM = 0.$$

Die Menge der infinitesimal symplektischen Matrizen

$$\mathrm{sp}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R}) \mid M \text{ ist infinitesimal symplektisch}\}.$$

bildet einen Unterraum von $\mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$. Analog sprechen wir von infinitesimal *symplektischen Endomorphismen* des $\mathbb{R}^{2n}$. Es gilt sogar:

9.22 Satz $\mathrm{sp}(n)$ *ist eine bezüglich* $[A, B] := AB - BA$ *Lie-Algebra*[15].

Bew.: • Schon auf $\mathrm{Mat}\,(m, \mathbb{R})$ ist der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ bilinear, antisymmetrisch und erfüllt die Jacobi-Identität. Damit ist $\mathrm{Mat}\,(m, \mathbb{R})$ selbst eine Lie-Algebra.
• Es ist noch zu zeigen, dass mit $A, B \in \mathrm{sp}(n)$ auch $[A, B] \in \mathrm{sp}(n)$ ist. Es gilt

$$[A, B]^* = (AB - BA)^* = [B^*, A^*],$$

also $[A, B]^*J = B^*A^*J - A^*B^*J = JBA - JAB = J[A, B]$. □

Wir nennen $\mathrm{sp}(n)$ auch die *symplektische Lie-Algebra*.

[15] **Def.:** *Eine* **Lie-Algebra** *ist ein Vektorraum L mit bilinearer antisymmetrischer Abbildung $[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$, die die* **Jacobi-Identität** *erfüllt, das heißt*

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \qquad (A, B, C \in L).$$

9.23 Lemma $\mathrm{tr}(M) = 0$ *für* $M \in \mathrm{sp}(n)$.

Bew.: $\mathrm{tr}(M) = -\mathrm{tr}(MJ^2) = -\mathrm{tr}(JMJ) = -\mathrm{tr}(M^*) = -\mathrm{tr}(M)$. □

9.24 Korollar *Lineare Hamiltonsche DGLn sind volumenerhaltend, denn*

$$\det(\exp(Mt)) = \exp(\mathrm{tr}(M)\,t) = 1.$$

9.25 Lemma $\dim(\mathrm{sp}(n)) = 2n^2 + n$.

Bew.: Wir schreiben M in der Form $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, mit $a, b, c, d \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$. Die Gleichung $M^*J + JM = 0$ nimmt dann die Form $\left(\begin{smallmatrix} c^* & -a^* \\ d^* & -b^* \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} -c & -d \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = 0$ an, also $c^* = c$, $b^* = b$ und $d = -a^*$.

c und b sind symmetrisch, a ist beliebig und d eine Funktion von a, also

$$\dim(\mathrm{sp}(n)) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = 2n^2 + n. \qquad \square$$

Die antisymmetrische Matrix J definiert eine schiefsymmetrische Bilinearform

$$(u, v) \mapsto [u, v] := \langle u, Jv \rangle \qquad (u, v \in \mathbb{R}^{2n}). \tag{9.3}$$

Diese ist *nicht degeneriert*, d.h. $[u, v] = 0$ für alle u impliziert $v = 0$.

9.26 Bemerkung Jede nicht degenerierte schiefsymmetrische Bilinearform besitzt in einer geeigneten Basis die Gestalt (9.3), J ist also nur eine Normalform ([AM], Prop. 3.1.2).

9.27 Lemma *Der von einem infinitesimal symplektischen Endomorphismus M erzeugte Fluss $\Phi_t(x) = \exp(Mt)x$ lässt diese schiefsymmetrische Form invariant.*

Bew.: Es ist $[\exp(Mt)u, \exp(Mt)v] = \langle u, (\exp(Mt))^* J \exp(Mt)v \rangle$,

$$\exp(Mt)^* = \exp(M^*t)$$

und $\exp(M^*t)J = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M^*t)^n}{n!}\right) J = J \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Mt)^n}{n!} = J \exp(-Mt)$, also $\exp(Mt)^* J \exp(Mt) = J$ und damit $[\exp(Mt)u, \exp(Mt)v] = [u, v]$. □

Diese Eigenschaft ist vergleichbar mit der der orthogonalen Matrizen, das innere Produkt invariant zu lassen: $\langle Ou, Ov \rangle = \langle u, v \rangle$ für $O \in O(n)$. Die Matrizen und die Endomorphismen mit dieser Eigenschaft verdienen einen eigenen Namen:

9.28 Definition • $S \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ *heißt* **symplektisch**, *wenn* $S^*JS = J$.
• $\mathrm{Sp}(n) := \{S \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R}) \mid S \text{ symplektisch}\}$ *heißt* **symplektische Gruppe**.

Tatsächlich ist $\mathrm{Sp}(n)$ um eine *Gruppe* von Matrizen, denn

- Mit $S, T \in \mathrm{Sp}(n)$ ist auch $(ST)^*J(ST) = T^*S^*JST = T^*JT = J$.
- $\det(S^*JS) = \det(S^*)\det(J)\det(S) = \det(J)$, also ist $|\det S|^2 = 1$ (denn $\det J = 1$), S also invertierbar und $(S^{-1})^*JS^{-1} = (S^{-1})^*S^*JSS^{-1} = J$.

Die Eigenwerte symplektischer Endomorphismen besitzen eine besondere Form:

9.29 Satz (Symplektischer Eigenwertsatz) *Sei* $M \in \mathrm{Sp}(n)$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von* M. *Dann sind auch* $\overline{\lambda}, 1/\lambda$ *und* $1/\overline{\lambda}$ *Eigenwerte von* M *mit gleicher algebraischer Multiplizität wie* λ.

Bew.:

- Dass mit λ auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert ist, folgt aus der Reellität von M.
- Weiter gilt

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &:= \det(M - \lambda\mathbb{1}) = \det(J(M - \lambda\mathbb{1})J^{-1}) \\
&= \det(JMJ^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det((M^*)^{-1} - \lambda\mathbb{1}) \quad \text{wegen } M^*JM = J \\
&= \det(M^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det(M^{-1}(\mathbb{1} - \lambda M)) \\
&= \underbrace{\det(M^{-1})}_{\pm 1}\det(\mathbb{1} - \lambda M) = \pm\lambda^{2n}\det(M - \mathbb{1}/\lambda) \\
&= \pm\lambda^{2n}P(1/\lambda),
\end{aligned}$$

  also ist mit λ auch $1/\lambda$ Eigenwert.

- Die Determinante symplektischer Matrizen ist sogar Plus Eins, das brauchen wir aber nicht für den Beweis.
- Ist die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ von $P(\lambda)$ gleich k, dann ist $P(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k Q(\lambda)$, sodass

$$\pm P(1/\lambda)\lambda^{2n} = (\lambda_0 - \lambda)^k Q(\lambda) = (\lambda\lambda_0)^k \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^k Q(\lambda).$$

Da der Grad des Polynoms Q gleich $2n-k$ ist, ist $\frac{\lambda_0^k}{\lambda^{2n-k}}Q(\lambda)$ ein Polynom in $1/\lambda$. Daher ist $1/\lambda_0$ eine Nullstelle der Multiplizität $l \geq k$ des Polynoms $\pm P(\mu) = \left(\mu - \frac{1}{\lambda_0}\right)^k \underbrace{\lambda_0^k \mu^{2n-k} Q(1/\mu)}_{\text{Polynom in } \mu}$.

Vertauschen der Rollen von λ und $1/\lambda$ zeigt $l = k$. □

Für das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbb{1})$ der *infinitesimal* symplektischen Matrizen $M \in \mathrm{sp}(n)$ gilt analog

$$P(\lambda) = \det(J(M - \lambda\mathbb{1})J) = \det(M^* + \lambda\mathbb{1}) = \det(M + \lambda\mathbb{1}) = P(-\lambda),$$

es ist also gerade. Damit zeigt man analog den

9.30 Satz (Infinitesimal symplektischer Eigenwertsatz) *Sei $M \in \mathrm{sp}(n)$ und λ Eigenwert von M. Dann sind auch $\overline{\lambda}, -\lambda$ und $-\overline{\lambda}$ Eigenwerte mit gleicher algebraischer Multiplizität wie λ.*

Die Multiplizität des etwaigen Eigenwertes Null ist gerade, dann alle anderen Eigenwerte treten in Paaren auf.

Für einen Freiheitsgrad ($n = 1$) kommen also folgende Fälle vor:

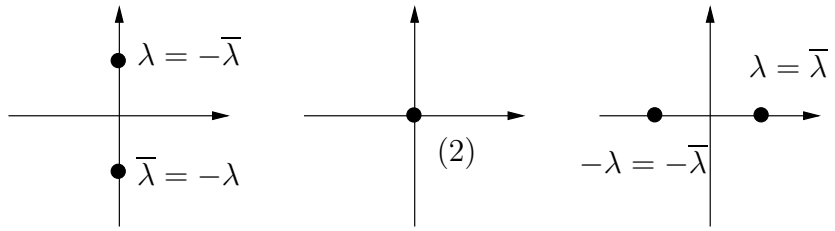


Abbildung 9.2: Komplexe Eigenwerte von infinitesimal symplektischen $M \in \mathrm{sp}(1)$

In den angegebenen Beispielen konnte man die Elemente der Gruppe $\mathrm{Sp}(1)$ in der Form $\exp(M)$ für $M \in \mathrm{sp}(1)$ schreiben, und wir wissen, dass für alle $M \in \mathrm{sp(n)}$ gilt: $\exp(M) \in \mathrm{Sp}(n)$. Für $M \in \mathrm{Sp}$ mit $\|M - \mathbb{1}\| < 1$ klein kann man umgekehrt den Logarithmus bilden und zeigen, dass $\ln(M) \in \mathrm{Sp}(n)$ ist.

$\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{4n^2}$ ist damit nicht nur ein topologischer Raum, sondern eine Untermannigfaltigkeit, und Multiplikation und Inversenbildung sind glatte Abbildungen. Solche Gruppen nennt man *Lie-Gruppen*. Also ist $\mathrm{Sp}(n)$ eine Lie-Gruppe und $\mathrm{sp}(n)$ die zugehörige Lie-Algebra.

Die bisherigen Überlegungen waren algebraisch. Wegen unserer Kenntnisse über die Stabilität linearer DGLn (Satz 5.10) können wir aber schließen:

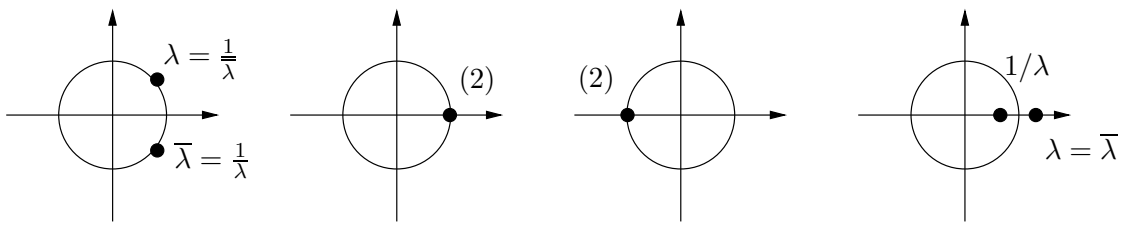


Abbildung 9.3: Komplexe Eigenwerte von symplektischen $M \in \mathrm{Sp}(1)$

9.31 Satz *Für $M \in \mathrm{sp}(n)$ ist die Ruhelage $x = 0$ der Hamiltonschen Differentialgleichung $\dot{x} = Mx$*

- *nie asymptotisch stabil,*
- *instabil, falls Eigenwerte von M mit nicht verschwindendem Realteil existieren,*
- *Liapunov-stabil, falls alle Eigenwerte rein imaginär sind und ihre algebraische und geometrische Multiplizität übereinstimmen.*

Besonders die erste Aussage gibt zu denken, denn es ist klar, dass wir zu einer infinitesimal symplektischen Matrix $M_0 \in \mathrm{sp}(n)$ mit *Spektrum* (Menge der komplexen Eigenwerte)

$$\mathrm{spec}(M_0) \subset i\mathbb{R}$$

eine Störung $M_1 \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ finden können, sodass die Differentialgleichung $\dot{x} = M_\varepsilon x$ mit $M_\varepsilon := M_0 + \varepsilon M_1$ für kein $\varepsilon > 0$ Liapunov-stabil ist, und zwar weil M_ε Eigenwerte mit echt positivem Realteil besitzt.

Nun könnte man folgendermaßen argumentieren: Da man in Anwendungen die Systemmatrix der linearen Differentialgleichung nie ganz genau kennt, lässt sich auch nicht entscheiden, ob ein leicht gestörtes Hamiltonsches System Liapunov-stabil ist.

Die Situation ändert sich aber, wenn man nur *Hamiltonsche* lineare Störungen zulässt.

9.32 Definition *Man nennt $M_0 \in \mathrm{sp}(n)$ und die DGL $\dot{x} = M_0\, x$* **stark stabil**, *wenn für eine geeignete Umgebung $U \subset \mathrm{sp}(n)$ von M_0 die Ruhelage $x = 0$ auch für alle Hamiltonschen DGLn $\dot{x} = Mx$ mit $M \in U$ Liapunov-stabil ist.*

9.33 Satz *Für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht die Menge*

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab} \;:=\; \{M \in \mathrm{sp}(n) \mid \mathrm{spec}(M) \subset i\mathbb{R}, &\text{alle Eigenwerte von} \\ &M \text{ haben alg. Multiplizität } 1\}\end{aligned}$$

aus stark stabilen infinitesimal symplektischen Matrizen und ist offen in $\mathrm{sp}(n)$.

Bew.: Nach Satz 9.31 besteht die Menge aus stark stabilen Matrizen.
Wir zeigen, dass $\mathrm{Stab} \subset \mathrm{sp}(n)$ offen ist. Für $M_0 \in \mathrm{Stab}$ ist

$$\varepsilon := \tfrac{1}{4} \min \left\{ |\lambda_1 - \lambda_2| \mid \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathrm{spec}(M_0) \right\} > 0,$$

und die ε–Umgebungen voneinander verschiedener Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{spec}(M_0)$ überlappen nicht: $U_\varepsilon(\lambda_1) \cap U_\varepsilon(\lambda_2) = \emptyset$ (siehe Abb. 9.4).

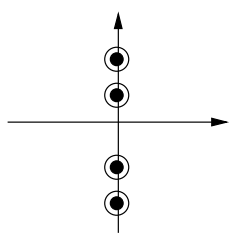


Abbildung 9.4: Die ε–Umgebungen der Eigenwerte von $M_0 \in \mathrm{Stab} \subset \mathrm{sp}(2)$

Die Eigenwerte von M hängen stetig von M ab. Also gibt es eine Umgebung $U \subset \mathrm{sp}(n)$ von $M_0 \in \mathrm{Stab}$, sodass jeweils genau ein Eigenwert λ von $M \in U$ in den ε–Umgebungen $U_\varepsilon(\lambda_0) \subset \mathbb{C}$ der Eigenwerte λ_0 von M_0 liegt.
Die Eigenwerte von M müssen dann aber auch rein imaginär sein, denn nach Satz 9.30 gilt:

$$\lambda \in \mathrm{spec}(M) \implies -\overline{\lambda} \in \mathrm{spec}(M)$$

und für $\lambda \in U_\varepsilon(\lambda_0)$ ist auch $-\overline{\lambda} \in U_\varepsilon(\lambda_0)$, denn $|(-\overline{\lambda}) - \lambda_0| = |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. $\square$

Das bedeutet, dass bei *Hamiltonschen* linearen Störungen die Liapunov-Stabilität nur dann zerstört wird, wenn Eigenwerte kollidieren.

Poisson-Klammer und Kommutator von Vektorfeldern

Unser Ziel ist es, Hamiltonsche Differentialgleichungen, soweit möglich, zu integrieren. Ein Weg, den wir dabei einschlagen können, ist der, möglichst viele

Konstanten der Bewegung, d.h. entlang der Orbits konstante Phasenraumfunktionen, zu finden. Dann liegen die Orbits auf Untermannigfaltigkeiten kleiner Dimension.

Der Formalismus der so genannten Poisson-Klammer kann bei der Suche nach Konstanten der Bewegung hilfreich sein.

Wir betrachten dazu den $\mathbb{R}$–Vektorraum $C^\infty(U,\mathbb{R})$ der glatten Funktionen auf dem Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Wir führen ein schiefsymmetrisches Produkt ein, das $C^\infty(U,\mathbb{R})$ zu einer Lie-Algebra macht.

9.34 Definition *Die* **Poisson-Klammer** *von $f, g \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ ist die Funktion*

$$\{f,g\} \in C^\infty(U,\mathbb{R}) \quad , \quad \{f,g\}(x) := [\nabla f(x), \nabla g(x)] = \langle \nabla f(x), J\nabla g(x)\rangle \,.$$

Die Poisson-Klammer hat die geometrische Interpretation der Änderung der Funktion f in Richtung des Hamiltonschen Vektorfeldes $J\nabla g$.

9.35 Lemma *Eine Funktion f ist eine Konstante der Bewegung eines Hamiltonschen Phasenflusses mit Hamilton-Funktion h genau dann, wenn $\{f,h\} = 0$.*

Bew.: Nach der Kettenregel ist die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t)) &= \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t)\rangle = \langle \nabla f(x(t)), J\nabla H(x(t))\rangle \\ &= [\nabla f(x(t)), \nabla H(x(t))] = \{f,h\}(x(t)). \end{aligned}$$

□

In Impuls- und Ortskoordinaten p, q ist

$$\{f,g\}(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \qquad ((p,q) \in U).$$

9.36 Bemerkungen 1. Wir können die Hamiltonschen Differentialgleichungen auch mittels der Poisson-Klammer ausdrücken:

$$\dot{p}_i = \{p_i, h\} \quad , \quad \dot{q}_i = \{q_i, h\} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

2. Es gilt $\{p_i, p_k\} = \{q_i, q_k\} = 0$ und $\{q_i, p_k\} = \delta_{i,k}$ für $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

9.37 Satz *$C^\infty(U,\mathbb{R})$ mit der Poisson-Klammer ist eine Lie-Algebra.*

Bew.: Offensichtlich ist mit $f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ auch $\{f, g\} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, und $\{g, f\} = [\nabla g, \nabla f] = -\{f, g\}$. Die Jacobi-Identität folgt durch Nachrechnen. $\square$

9.38 Bemerkung Die Jacobi-Identität folgt aus der Geschlossenheit ($d\omega = 0$) der symplektischen Zweiform $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, mit deren Hilfe man die Poisson-Klammer als $\{f, g\} = \omega(J\nabla g, J\nabla f)$ ausdrücken kann.

9.39 Korollar *Die Poisson-Klammer $\{f_1, f_2\}$ zweier Konstanten der Bewegung f_1, f_2 eines Phasenflusses mit Hamilton-Funktion h ist wieder eine Konstante der Bewegung.*

Bew.: Setze $f_3 := \{f_1, f_2\}$. Nach der Jacobi-Identität gilt

$$\{f_3, h\} = -\{\underbrace{\{f_2, h\}}_{0}, f_1\} - \{\underbrace{\{h, f_1\}}_{0}, f_2\} = 0. \qquad \square$$

Manchmal (eher selten!) kann man so neue Konstanten der Bewegung finden.

9.40 Beispiel Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes mit Masse m im $\mathbb{R}^3_q$ unter dem Einfluss einer *Zentralkraft* mit Potential V, also $V(Oq) = V(q)$ für $O \in O(3)$ und Hamilton-Funktion $H : U \to \mathbb{R}$ auf $U := \mathbb{R}^3_p \times \mathbb{R}^3_q$
$H(p, q) := \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$.

Die Komponenten des so genannten Drehimpulsvektors $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ sind Phasenraumfunktionen:

$$L(p, q) := q \times p = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2p_3 - q_3p_2 \\ q_3p_1 - q_1p_3 \\ q_1p_2 - q_2p_1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial L_1}{\partial p_i}\frac{\partial L_2}{\partial q_i} + \frac{\partial L_2}{\partial p_i}\frac{\partial L_1}{\partial q_i} \right) = -q_2p_1 + (-p_2)(-q_1) = L_3,$$

$\{L_2, L_3\} = L_1$ und $\{L_3, L_1\} = L_2$. Andererseits gibt es wegen der Radialsymmetrie von $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein $W : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $V(q) \equiv W(\|q\|)$. Daraus

folgt

$$\begin{aligned}\{L_1, H\} &= \frac{1}{2m}\{L_1, p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\} + \{L_1, W(\|q\|)\} \\ &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial q_i}\frac{\partial(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}{\partial p_i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial p_i}\frac{\partial|q|}{\partial q_i} DW(\|q\|) = 0.\end{aligned}$$

Analog ist auch $\{L_2, H\} = \{L_3, H\} = 0$.

Ist $x_0 = (p_0, q_0)$ der Anfangspunkt im Phasenraum U, $h := H(x_0)$ die Energie und $l_i := L_i(x_0)$ der Wert der i–ten Drehimpulskomponente, so wissen wir, dass der Orbit durch x_0 sich auf der Teilmenge

$$M_{x_0} := \{x \in U \mid H(x) = h, L_i(x) = l_i \quad i = 1, 2, 3\}$$

bewegt. Das ist (für typische Werte von h, l_i) eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von U, denn die Vektorfelder ∇H, ∇L_1, ∇L_2 und ∇L_3 sind (typischerweise) unabhängig.

Wir können durch eine Drehung $(p, q) \mapsto (Op, Oq)$ mit Matrix $O \in \mathrm{SO}(3)$ immer erreichen, dass $l_1 = l_2 = 0$ ist. p und q müssen dann in der $1 - 2$ Ebene liegen, und wir können zum neuen Phasenraum $U_2 := \mathbb{R}^2_p \times \mathbb{R}^2_q$ und der neuen Hamilton-Funktion

$$H_2 : U_2 \to \mathbb{R} \quad , \quad H_2(p, q) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + W(\sqrt{q_1^2 + q_2^2})$$

übergehen. Die dritte Drehimpulskomponente $L : U_2 \to \mathbb{R},\ L(p, q) = q_1p_2 - q_2p_1$ bleibt natürlich weiter konstant.

Wir haben noch nicht die Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichungen des Massepunktes im Zentralpotential gefunden, sie aber immerhin auf eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des Phasenraums U_2 eingezwängt.

Es ergeben sich zwei **Fragen:**

1. Wegen der Radialsymmetrie würden wir gerne zu Polarkoordinaten übergehen, d.h. $q_1 = r\cos\varphi$ und $q_2 = r\sin\varphi$ setzen. Wie verfahren wir dabei mit den Impulsen, wenn wir die Hamiltonsche Form der DGLn beibehalten wollen?

2. Lässt sich noch Weiteres über die Bewegung in der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit aussagen?

Die Beantwortung der *ersten* Frage führt uns auf *kanonische Transformationen*, d.h. Diffeomorphismen, die die Poisson-Klammer invariant lassen (nächstes Unterkapitel).

Die Beantwortung der *zweiten* Frage wird durch eine genauere Untersuchung der Lie-Algebra der Funktionen möglich. Diese zweite Frage soll jetzt angegangen werden, indem auf dem Vektorraum $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ der Vektorfelder auf einem beliebigen Phasenraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lie-Algebrastruktur eingeführt wird. Diese ist dann im Hamiltonschen Fall mit der Poisson-Klammer verträglich.

9.41 Definition *Für die Vektorfelder* $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ *und* $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ *ist der* **Kommutator** $[Y, Z]$ *das Vektorfeld mit den Komponenten*

$$[Y, Z]_j := \sum_{k=1}^n \left(Y_k \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} - Z_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Damit ist der Kommutator zwar unter Verwendung der kanonischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ des $\mathbb{R}^n$ eingeführt, aber er besitzt einen koordinatenunabhängigen geometrischen Gehalt.

Dazu stellen wir fest, dass die Ableitung einer Phasenraumfunktion $f : U \to \mathbb{R}$ in Richtung eines Vektorfeldes $v : U \to \mathbb{R}^n$ wohldefiniert ist, denn die äußere Ableitung $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ von f ist eine 1–Form, die durch Paarung mit v eine Funktion

$$L_v f := df(v) : U \to \mathbb{R}$$

ergibt. In kartesischen Koordinaten ergibt sich mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$L_v f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i.$$

Offensichtlich ist diese so genannte *Lie-Ableitung* von f in Richtung v sowohl in f als auch in v linear. Nun ist

$$\begin{aligned} L_Y L_Z f &= L_Y \sum_{j=1}^n Z_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i,k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(Z_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left(Y_k \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} + Y_k Z_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right), \end{aligned}$$

also wie

$$L_Z L_Y f = \sum_{j,k=1}^{n} \left(Z_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} + Z_k Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

ein Differentialoperator zweiter Ordnung bezüglich f. Die Differenz allerdings

$$(L_Y L_Z - L_Z L_Y) f \quad = \quad \sum_{j,k=1}^{n} \left(Y_k \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} - Z_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} = L_{[Y,Z]} f$$

ist wieder ein Differentialoperator erster Ordnung.

Wir erinnern uns in diesem Zusammenhang an die fast vergessene Tatsache, dass Vektorfelder $Y, Z : U \to \mathbb{R}^n$ Differentialgleichungen

$$\dot{x} = Y(x) \quad \text{und} \quad \dot{x} = Z(x)$$

mit Phasenflüssen $\Phi : D_\Phi \to U$ und $\Psi : D_\Psi \to U$ (mit offenen Definitionsbereichen $D_\Phi, D_\Psi \subseteq \mathbb{R} \times U$) definieren. Es gilt nun

$$L_Y f = \frac{df(\Phi_t)}{dt} \mid_{t=0} \quad \text{und} \quad L_Z f = \frac{df \circ \Psi_s}{ds} \mid_{s=0},$$

sodass $L_Y L_Z - L_Z L_Y = L_{[Y,Z]}$ misst, inwieweit die Flüsse *kommutieren* ($\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$) oder nicht. Kehren wir zurück zu den Hamiltonschen Vektorfeldern.

9.42 Satz *Es seien $A, B \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ Hamiltonsche Vektorfelder mit Hamilton-Funktionen $a, b \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Dann ist $[A, B]$ ein Hamiltonsches Vektorfeld, mit Hamilton-Funktion $-\{a, b\}$.*

Bew.: Mit $c := \{a, b\}$ und einer weiteren Phasenraumfunktion $f \in -C^\infty(U, \mathbb{R})$ hat die Jacobi-Identität für die Poisson-Klammer die Form

$$\{c, f\} = \{a, \{b, f\}\} - \{b, \{a, f\}\}.$$

Nun gilt

$$\{a, f\} = \langle \nabla a, J \nabla f \rangle = - \langle J \nabla a, \nabla f \rangle = -L_{J\nabla a} f \quad \text{und} \quad \{b, f\} = -L_{J\nabla b} f,$$

also für alle f

$$\begin{aligned} L_{-J\nabla c} &= -L_{J\nabla c} f = (L_{J\nabla a} L_{J\nabla b} - L_{J\nabla b} L_{J\nabla a}) f \\ &= (L_A L_B - L_B L_A) f = L_{[A,B]} f. \end{aligned}$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $[A, B] = -J\nabla c$ gilt. □

9.43 Bemerkungen

- Der Kommutator von Vektorfeldern erfüllt die Poisson-Identität und definiert damit eine Lie-Algebra-Struktur auf $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

- Definiert man die Poisson-Klammer mit umgekehrtem Vorzeichen, dann wird die lineare Abbildung

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad f \mapsto J\nabla f$$

  nach Satz 9.42 ein *Lie-Algebra-Homomorphismus*.

  Für den Normalfall eines zusammenhängenden Phasenraumes U besteht der Kern dieser linearen Abbildung nur aus den konstanten Funktionen.

- Es ist also insbesondere so, dass die Hamiltonschen Phasenflüsse Poisson-kommutierender Funktionen kommutieren.

  Haben wir also viele, auch untereinander Poisson-kommutierende Konstanten der Bewegung, dann haben wir viele miteinander kommutierende Hamiltonsche Phasenflüsse auf ihrer gemeinsamen Niveaumenge.

  Diese Bemerkung wird uns zum Begriff der Integrabilität führen.

Kanonische Transformationen

Wie in Beispiel 9.40 suchen wir nach neuen problemangepassten Koordinaten im Phasenraum U, wollen aber in diesen neuen Koordinaten $(P, Q) = (P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n)$ die Struktur der Hamiltonschen Differentialgleichung erhalten. Es soll also gelten

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = J\nabla_{(P,Q)} K(P, Q) \tag{9.4}$$

mit

$$K(P, Q) := h(p(P, Q), q(P, Q))$$

und

$$\nabla_{(P,Q)} K := \begin{pmatrix} \nabla_P K \\ \nabla_Q K \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial P_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial K}{\partial P_n} \\ \frac{\partial K}{\partial Q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial K}{\partial Q_n} \end{pmatrix}.$$

9.44 Lemma *Gleichung (9.4) gilt, wenn der Koordinatenwechsel* $\Phi = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^{2n}$ *die Bedingung*

$$D\Phi(x) \in Sp(n) \qquad (x \in U) \tag{9.5}$$

erfüllt.

Bew.: Die Jacobi-Matrix hat die Blockform

$$D\Phi(p,q) = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix},$$

und aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} J \begin{pmatrix} \nabla_p h \\ \nabla_q h \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} J \begin{pmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial p} & \frac{\partial Q^*}{\partial p} \\ \frac{\partial P^*}{\partial q} & \frac{\partial Q^*}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_P K \\ \nabla_Q K \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} J \left(\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} \right)^* (\nabla_{(P,Q)} K). \end{aligned}$$

Unter der Bedingung (9.5) ist aber $(D\Phi) J (D\Phi)^* = J$. □

Da wir nicht nur für die vorgegebene Hamilton-Funktion h, sondern für alle die Form der Hamilton-Differentialgleichung erhalten wollen, definieren wir:

9.45 Definition *Ein Diffeomorphismus* $\Phi : U \to V$ *der offenen Teilmengen* $U, V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ *heißt* **kanonisch** *oder* **Symplektomorphismus**, *wenn die Jacobi-Matrix von* Φ *symplektisch ist.*

In Beispiel 9.40 kennen wir schon $Q = (r, \varphi)$ und $r = r(q)$, $\varphi = \varphi(q)$.

Wie können wir diese Polarkoordinaten im Konfigurationsraum durch Impuls-Koordinaten $P \equiv (P_r, P_\varphi)$ ergänzen, sodass die Gesamttransformation kanonisch ist?

Hier ist es zunächst einmal sinnvoll, ein Kriterium für die Eigenschaft einer Matrix $M \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ symplektisch zu sein, zu entwickeln.

9.46 Lemma $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *mit* $a, b, c, d \in \mathrm{Mat}\,(2n, \mathbb{R})$ *ist genau dann symplektisch, wenn* $a^t c$ *und* $b^t d$ *symmetrisch sind und* $a^t d - c^t b = \mathbb{1}$ *gilt.*

Bew.: Ist M symplektisch, dann ist

$$M^*JM = \left(\begin{smallmatrix} a^t & c^t \\ b^t & d^t \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c^ta-a^tc & c^tb-a^td \\ d^ta-b^tc & d^tb-b^td \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Die Umkehrung folgt ebenso. □

Kanonische Transformationen können mittels so genannter erzeugender Funktionen geschrieben werden.

9.47 Lemma *Es sei $S = S(p,Q)$ eine glatte reelle Funktion, und für p, Q $X, Y, Z \in \mathrm{Mat}\,(n, \mathbb{R})$ die Matrizen mit Einträgen*

$$X_{ik} := \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_k}(p,Q) \quad , \quad Y_{ik} := \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial Q_k}(p,Q) \quad , \quad Z_{ik} := \frac{\partial^2 S}{\partial Q_i \partial Q_k}(p,Q).$$

Ist $\mathrm{rang}(Y) = n$, dann ist die durch $\tilde{P}_i(p,Q) := \frac{\partial S}{\partial Q_i}(p,Q)$, $\tilde{q}_i(p,Q) = \frac{\partial S}{\partial p_i}(p,Q)$ implizit gegebene Transformation kanonisch.

Bew.: Es ist für $Q = Q(p,q)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p} &= D_1\tilde{P} + D_2\tilde{P}D_1Q = Y + ZD_1Q \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= D_2\tilde{P}D_2Q = ZD_2Q. \end{aligned}$$

Differentiation der Identität $q = D_1S(p, Q(p,q))$ nach q ergibt

$$\mathbb{1} = Y^tD_2Q \quad \text{oder} \quad D_2Q = (Y^t)^{-1},$$

Differentiation der Identität nach p ergibt

$$0 = X + Y^tD_1Q \quad \text{oder} \quad D_1Q = -(Y^t)^{-1}X.$$

Also ist

$$\left(\begin{smallmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} Y-Z(Y^t)^{-1}X & Z(Y^t)^{-1} \\ -(Y^t)^{-1}X & (Y^t)^{-1} \end{smallmatrix}\right) =: \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \tag{9.6}$$

mit

$$\begin{aligned} a^tc &= -X + XY^{-1}Z(Y^t)^{-1}X \quad \text{, also} \quad a^tc = (a^tc)^t \\ b^td &= Y^{-1}Z(Y^t)^{-1} \quad \text{, also} \quad b^td = (b^td)^t \\ a^td &- c^tb = (\mathbb{1} - XY^{-1}Z(Y^t)^{-1}) + XY^{-1}Z(Y^t)^{-1} = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 9.46 ist die Jacobi-Matrix (9.6) symplektisch. □

Mit der Technik der kanonischen Transformationen können wir neue Koordinaten im Phasenraum einführen, in denen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen eine einfachere Form besitzen:

9.48 Beispiel (Bewegung im radialsymmetrischen Potential, Fortsetzung) Wir haben schon festgestellt, dass die Bewegung in einer Ebene durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3_q$ stattfindet, und haben damit auch die Phasenraumdimension reduziert. Wir betrachten also die Hamilton-Funktion

$$H : \mathbb{R}^2_p \times \mathbb{R}^2_q \to \mathbb{R} \quad , \quad H(p,q) = \frac{\|p\|^2}{2m} + W(\|q\|).$$

Statt der kanonischen Ortskoordinaten $(q_1, q_2) \equiv q$ sollen jetzt wegen der Radialsymmetrie Polarkoordinaten $Q := (r, \varphi)$ mit $(q_1, q_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ benutzt werden. Wir suchen also eine erzeugende Funktion $S(p, Q) = S(p_1, p_2, r, \varphi)$ mit $q_1 = r\cos\varphi = \frac{\partial S}{\partial p_1}$ und $q_2 = r\sin\varphi = \frac{\partial S}{\partial p_2}$.

Offensichtlich erfüllt $S(p, Q) := p_1 r\cos\varphi + p_2 r\sin\varphi$ diese Relationen, und es wird $P := (p_r, p_\varphi)$ mit

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = p_1\cos\varphi + p_2\sin\varphi = \frac{\langle p, q\rangle}{\|q\|}$$

und

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = -p_1 r\sin\varphi + p_2 r\cos\varphi = p_2 q_1 - p_1 q_2 = L(p,q).$$

Physikalisch kann p_r also einfach als Radialkomponente des Impulses $p = (p_1, p_2)$ angesehen werden, während p_φ gleich dem Drehimpuls ist.

Nun ist nach den trigonometrischen Additionstheoremen

$$\|p\|^2 \equiv p_1^2 + p_2^2 = p_1^2 + \frac{L^2}{r^2},$$

sodass

$$\tilde{H}(P,Q) = H(p(P,Q), q(P,Q)) = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + W(r)$$

ist.

In diesem Ausdruck kommt aber $Q_2 = \varphi$ nicht vor, sodass wegen $\dot{p}_\varphi = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}$ der Drehimpuls p_φ zeitlich konstant ist. Das wussten wir zwar schon, können es

aber jetzt benutzen. Wir definieren nämlich für vorgegebenen Wert $l := L(x_0)$ des Drehimpulses die neue Hamilton-Funktion

$$K_l : \mathbb{R}_{p_r} \times \mathbb{R}_r^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad K_l(p_r, r) := \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + W(r).$$

Diese besitzt nur noch einen Freiheitsgrad.

Die Lösung $t \mapsto (p_r(t), r(t))$ des zugehörigen AWP stimmt aber mit den (p_r, r)–Komponenten der Lösung des AWP für H überein.

Setzen wir $W_l(r) := \frac{l^2}{2mr^2} + W(r)$ (das so genannte *effektive Potential*), dann gilt für $h := H(x_0)$

$$h = \frac{p_r^2}{2m} + W_l(r) \tag{9.7}$$

oder

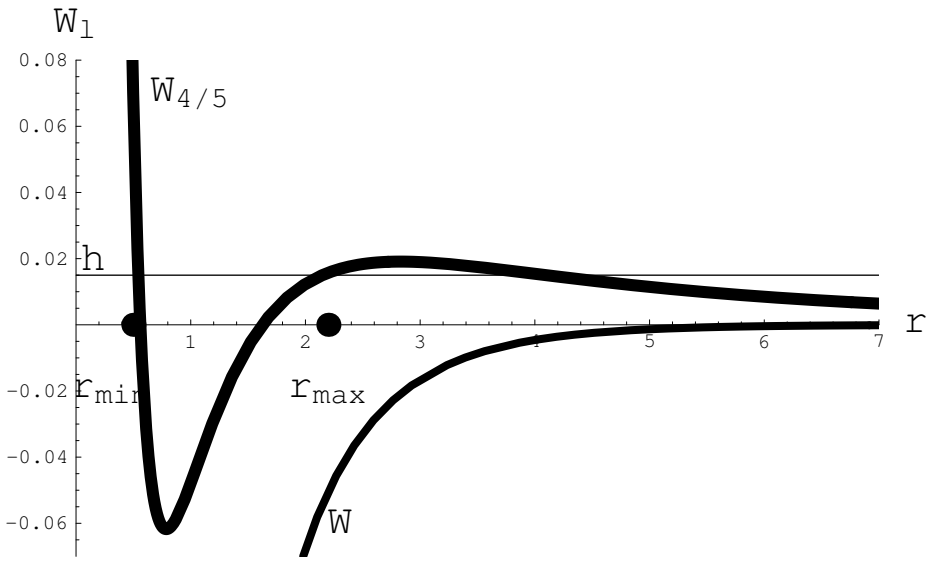
$$p_r = \pm\sqrt{2m(h - W_l(r))},$$

denn der Wert der Hamilton-Funktion ist ja entlang der Lösungskurve konstant.

Wir können o.B.d.A. $l \neq 0$ annehmen, denn im Fall $l = 0$ ist die Bewegung rein radial, etwa in q_1–Richtung und lässt sich entsprechend berechnen.

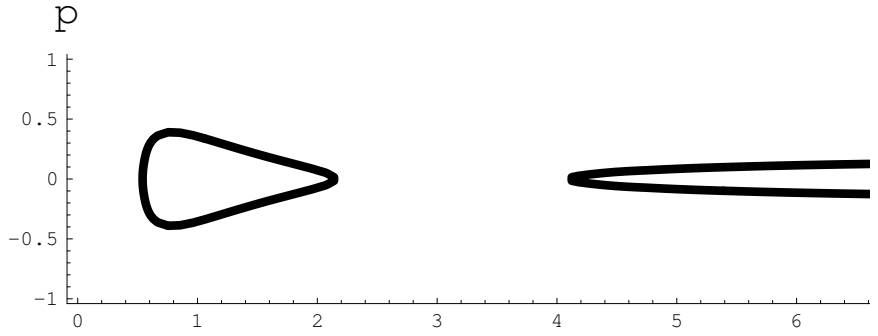
Dann ist wegen unserer Annahme der Stetigkeit von V $\lim_{r \searrow 0} W_l(r) = +\infty$, sodass für diese Energie h nach Gleichung (9.7) das Masseteilchen vom Zentrifugalpotential $\frac{l^2}{2mr^2}$ am Besuch des Vorsprungs gehindert ist. Nehmen wir stattdessen z.B. $V(q) = -\frac{c}{\|q\|}$ an, also $W(r) = -\frac{c}{r}$, dann gilt immer noch das Gleiche.

Unter der Voraussetzung $\lim_{q\to\infty} V(q) = 0$ (oder auch nur $\liminf_{q\to\infty} V(q) > -\infty$) ist die Existenz der Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichung für alle Zeiten gesichert, und der Radialanteil der Bahnform lässt sich durch Kurvendiskussion beschreiben. Es kommen nämlich nur r–Werte mit $W_l(r) \leq h$ in Frage,



eine Bedingung, die in Intervallen in $\mathbb{R}^+$ erfüllt ist. Wir betrachten nur das zu dem Anfangswert gehörende Intervall.

Dies ist entweder von der Form $[r_{\min}, r_{\max}]$ oder $[r_{\min}, \infty)$, entsprechend der gebundenen bzw. ungebundenen Bewegung. Die Energieschale im Phasenraum sieht folgendermaßen aus:



Der Radius des Teilchenortes verändert sich also im gebundenen Fall zeitperiodisch zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$, während er im ungebundenen Fall für $t \to \pm\infty$ gegen unendlich geht.

Die Zeitparametrisierung ergibt sich mit $\dot{r} = \frac{p_r}{m} = \sqrt{\frac{2}{m}(h - W_l(r))}$ durch

Invertierung des Integrals

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(h - W_l(r))}} = t - t_0.$$

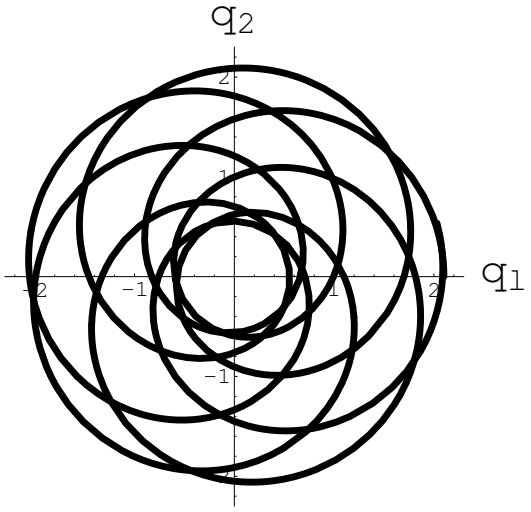
Setzt man die Lösung $r(t)$ in die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{2mr^2} = \frac{l}{2mr^2(t)}$$

ein, so ergibt sich $\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{l}{2m} \int_{t_0}^{t} r^{-2}(s)\, ds$.

Insbesondere ist die Winkelgeschwindigkeit in der Nähe von $r_{\max}$ am kleinsten.

In der Konfigurationsebene ergibt sich also folgende Bewegungsform



Im Phasenraum entspricht die Teilmenge

$$M_{h,l} := \{(p,q) \in \mathbb{R}^4 \mid H(p,q) = h, L(p,q) = l\}$$

im Fall der gebundenen Bewegung einem durch φ und den zeitlichen Abstand vom letzten Perizentrum parametrisierten Torus $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$, im Fall der ungebundenen Bewegung einem Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$.

Wir werden sehen, dass diese Formen der Untermannigfaltigkeiten für integrable Hamiltonsche Systeme typisch ist.

Integrable Systeme

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass die Konstanten der Bewegung nützlich für die Integration Hamiltonscher Differentialgleichungen sind.

9.49 Definition *Es sei* $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ *offen,* $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ **Konstanten der Bewegung** *für* $H := f_1$*, d.h.* $\{f_i, H\} = 0$.

- *Die Menge* $\{f_1, \ldots, f_k\}$ *von Funktionen ist* **in Involution***, wenn die Poisson-Klammern* $\{f_i, f_j\} = 0$ *für* $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.
- *Sie heißt* **unabhängig***, wenn die Menge*

$$\{x \in U \mid \operatorname{rang}(\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_k(x)) < k\}$$

  das Maß Null besitzt.
- $\{f_1, \ldots, f_k\}$ *heißt* **integrabel***, wenn die* f_i *in Involution und unabhängig sind, und* $k = n$.

Die Differentialgleichung der Hamilton-Funktion $H = f_1$ heißt dann *integrabel*, wenn sich weitere Konstanten der Bewegung $f_2, \ldots, f_n$ finden lassen, sodass $\{f_1, \ldots, f_n\}$ integrabel ist.

Integrabilität in diesem Sinn ist eine Eigenschaft, die Hamilton-Funktionen zukommen kann. Es wird zunächst nicht auf Subjektives, wie unsere Fähigkeit, die Lösung der Differentialgleichung zu finden, angespielt. Auch die Frage, in welchem Sinn man die Lösungen "hinschreiben" kann, als elementare Funktion, als konvergente Reihen, etc., wird nicht behandelt.

Es wird sich aber herausstellen, dass integrable Systeme durch die üblichen Rechenoperationen einschließlich Bilden der Umkehrfunktion und Integration gelöst werden können.

Weiter besitzen die Lösungen eine besondere Struktur. Es handelt sich um bedingt–periodische Bewegungen auf Zylindern.

9.50 Definition *Die* **Kreislinie** S^1 *ist* $S^1 := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$*. Der* k**–dimensionale Torus** $\mathbb{T}^k$ *ist das* k*–fache kartesische Produkt* $\mathbb{T}^k = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{k-\text{mal}}$.

Für $k, l \in \mathbb{N}_0$ *nennt man* $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^l$ *einen* **Zylinder**.

Ebenso werden die Bilder von Diffeomorphismen $\Phi : \mathbb{T}^k \to \Phi(\mathbb{T}^k) \subset \mathbb{R}^{2n}$ Tori genannt und analog für Zylinder.

9.51 Satz (Arnold) *Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ seien integrabel. Mit $F := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^n$ sei $c \in F(U)$ regulärer Wert und $M_c \subset U$ eine Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(c) \subset U$.*

Dann gilt:

- *Ist M_c kompakt, dann ist M_c diffeomorph zum Torus $\mathbb{T}^n$.*
- *Existieren die Hamiltonschen Flüsse $\Phi_t^k : U \to U$ von f_k $k = 1, \ldots, h$, für alle Zeiten t, dann ist M_c diffeomorph zu einem Zylinder.*

Bew.: Wir bezeichnen das Hamiltonsche Vektorfeld von f_k mit $Y_k := J\nabla f_k$. Dann ist Y_k tangential an die Mannigfaltigkeit M_c, denn $L_{Y_k} f_i = \{f_i, f_k\} = 0$, sodass sich in Richtung von Y_k der Wert von f_i nicht ändert.

Unter der Annahme der Kompaktheit von M_c existieren die auf M_c restringierten Flüsse Φ_t^k damit für alle Zeiten, und sogar in einer gewissen Umgebung von $M_c \subset U$.

Außerdem kommutieren sie, d.h.

$$\Phi_{t_1}^k \circ \Phi_{t_2}^l = \Phi_{t_2}^l \circ \Phi_{t_1}^k, \tag{9.8}$$

denn die Vektorfelder kommutieren nach Satz 9.42:

$$[Y_k, Y_l] = [J\nabla f_k, J\nabla f_l] = J\nabla\{f_l, f_k\} = J\nabla 0 = 0.$$

Dass c regulärer Wert von F ist, impliziert, dass für jeden Punkt $x \in M_c$ $\operatorname{rang}(\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_n(x)) = n$ ist. Dann ist aber auch $\operatorname{rang}(Y_1(x), \ldots, Y_n(x)) = n$.

Die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^n \times M_c \to M_c \qquad \varphi(t_1, \ldots, t_n; x) := \Phi_{t_1}^1 \circ \ldots \circ \Phi_{t_n}^n(x)$$

ist eine so genannte *Gruppenwirkung* der Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ auf M_c, d.h.

$$\Psi(0, x) = x \quad \text{und} \quad \Psi(s, \Psi(t, x)) = \Psi(s + t, x) \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}^n.$$

Letzteres sieht man, wenn man sich an die Kommutativität (9.8) der Φ_t^k erinnert und an die Eigenschaft $\Phi_{s_k}^k \circ \Phi_{t_k}^k = \Phi_{s_k+t_k}^k$ der Flüsse.

Diese Gruppenwirkung ist *lokal frei*, d.h. es existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ der Null, sodass die Abbildung

$$V \to M_c \quad , \quad t \mapsto \Psi(t, x)$$

ein Diffeomorphismus aufs Bild

$$\Psi(V, \{x\}) \subset M_c$$

ist.

Die Jacobi-Matrix von $\Psi_x : \mathbb{R}^n \to M_c \quad , \quad \Psi_x(t) := \Psi(t, x) \quad$ bei $\quad t = 0$ ist ja $D\Psi_x(0) = (Y_1(x), \ldots, Y_n(x))$, besitzt also vollen Rang. Daraus folgt die Behauptung.

Damit ist das Bild $\Psi_x(\mathbb{R}^n) \subset M_c$ wegen $\Psi_x(s+t) = \Psi_{\Psi(s,x)}(t)$ in M_c offen (und nicht leer!). Aber auch sein Komplement in M_c ist offen. Denn wenn $y \in M_c - \Psi_x(\mathbb{R}^n)$, dann liegt auch die Umgebung $\Psi(V, \{y\})$ von y im Komplement. Sonst gäbe es ja ein $z \in \Psi(\mathbb{R}^n, \{x\}) \cap \Psi(V, \{y\})$, also $z = \Psi(t, x) = \Psi(s, y)$ mit $s, t \in \mathbb{R}^n$ geeignet, also $y = \Psi(t - s, x)$, also $y \in \Psi_x(\mathbb{R}^n)$.

Nun ist M_c nach Voraussetzung zusammenhängend. Da $\Psi(\mathbb{R}^n, \{x\})$ offen, abgeschlossen und nicht leer ist, muss es gleich M_c sein.

Die Isotropiegruppe Γ eines Punktes $x \in M_c$ ist durch

$$\Gamma := \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(t, x) = x\}$$

definiert und wegen der Kommutativität der Gruppe $\mathbb{R}^n$ offensichtlich von x unabhängig: mit $y = \Psi(s, x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(t, y) = y\} &= \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(t, \Psi(s, (x)) = \Psi(s, x)\} \\ &= \{t \in \mathbb{R}^n \mid \Psi_{t+s}(x) = \Psi(s, x)\} = \Gamma. \end{aligned}$$

Für $t \in \Gamma$ ist t der einzige Punkt in $(t + V) \cap \Gamma$. Untergruppen mit dieser Eigenschaft heißen *diskret*.

Es ist bekannt, dass sie von der Form

$$\Gamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(l_1, \ldots, l_k) = \{n_1 l_1 + \ldots + n_k l_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$$

sind, wobei die Vektoren $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Damit ist $\mathbb{R}^n/\Gamma$ diffeomorph zum Zylinder $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Genau für $k = n$ ist dieser kompakt. $\square$

10 Symbolische Dynamik

Wir haben im letzten Kapitel integrable Hamiltonsche Systeme kennen gelernt. Für zwei oder mehr Freiheitsgrade ist Integrabilität aber die Ausnahme und nicht die Regel. Abschließend wird daher in diesem Kapitel ein einfaches hamiltonsches System mit chaotischen Eigenschaften vorgestellt.

Die bei seiner Analyse benutzten Methoden, insbesondere die Diskretisierung und die Verwendung von Symbolfolgen, spielen auch bei nicht hamiltonschen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

10.1 Das Modellsystem

".. Each pearl by imaging those immediately adjacent to it images the infinity of pearls in the outer space of the whole net, for each pearl is the bearer of its neighbour's image."
Aus dem Avatamsaka Sutra, *zitiert nach*[16]

Es soll die Bewegung eines Teilchens in der Ebene untersucht werden, das an drei disjunkten Scheiben D_1, D_2, D_3 vom Radius 1 nach der Regel

$$\text{Ausfallswinkel} = -\ \text{Einfallswinkel}$$

reflektiert wird und sich ansonsten geradlinig und mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag bewegt. Allgemein nennt man solche Dynamiken mit Reflektionen *Billiards*, und diese bilden ein mit der Theorie der Dynamischen Systeme eng verbundenes Forschungsgebiet (siehe z.B. Tabachnikov [Ta]).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass der Geschwindigkeitsbetrag gleich Eins ist. Der Bezug zu einem Hamiltonschen System wird später geschaffen. Natürlich lässt sich die Bewegung *zwischen* den Reflektionen durch die Hamilton-Funktion $H(p,q) = \frac{1}{2}\|p\|^2$ beschreiben.

Weiter wird der Einfachheit halber angenommen, dass die Mittelpunkte der drei Scheiben ein gleichseitiges Dreieck bilden, dessen Seitenlänge wir mit R bezeichnen. Da die Scheiben disjunkt sind, ist $R > 2$.

Statt der gesamten Bewegung im vierdimensionalen Phasenraum werden wir nur *gebundene* Bahnen betrachten. *Gebunden* bedeutet, dass für sie ein kompaktes Gebiet in der Ebene existiert, das sie nie verlassen.

[16] Berry, M.V.: Quantizing a Classically Ergodic System: Sinai's Billiard and the KKR Method. Annals of Physics **131**, 163–216 (1981)

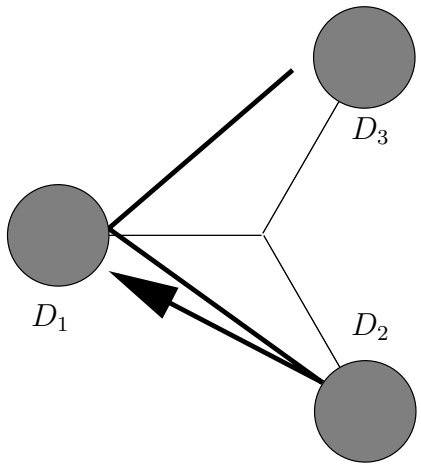
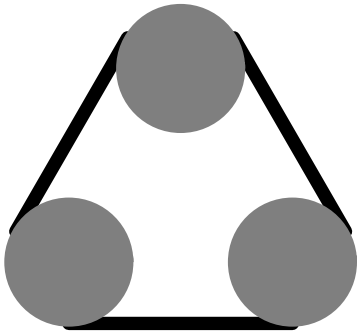


Abbildung 10.1: Streuung an drei Scheiben

Beispielsweise reicht es aus, die konvexe Hülle

$$\operatorname{conv}(D_1 \cup D_2 \cup D_3) \subset \mathbb{R}^2_q$$

der Vereinigung der drei Scheiben zu betrachten, denn wird diese einmal verlassen, dann wird sie wegen der Geradlinigkeit der Bewegung nicht mehr betreten, und die Bahn läuft ins Unendliche.



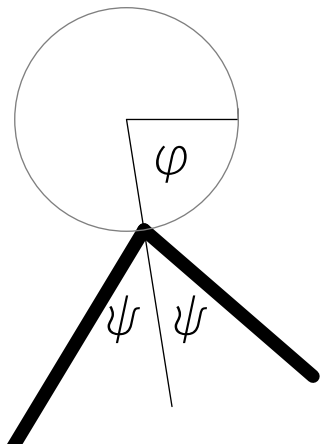
10.2 Diskretisierung

Wir wissen aus dem Satz über die Begradigung (7.8), dass jedes dynamische System in der Nähe einer Nichtgleichgewichtslage lokal diffeomorph zu einem solchen mit konstanten Vektorfeld ist. Die interessanten Phänomene sind also globaler Natur.

Diese können oft durch *Diskretisierung* analysiert werden. Darunter versteht man die Betrachtung der durch den Fluss induzierten Abbildung (der sog. *Poincaré-Abbildung*) einer zum Vektorfeld transversalen Hyperfläche (der sog. *Poincaré-Fläche*) in sich.

Konkret bietet sich für unser System die folgende Diskretisierung an: Statt die gebundenen Bahnen in ihrer Zeitabhängigkeit mit Zeitparameter t zu beschreiben, betrachtet man sie oft nur zu den Zeitpunkten der Reflektionen. Es bieten sich

hierbei wegen der Normierung des Geschwindigkeitsbetrags auf 1 (Konstante der Bewegung) folgende Koordinaten an:



- Der Winkel φ des Kollisionspunktes der Trajektorie mit der Kreisscheibe, wobei man von einer festen 0–Richtung ausgeht (die aber evtl. für die verschiedenen Kreisscheiben unterschiedlich gewählt wird).
- Der Ausfallswinkel ψ gegenüber der Normale des Kreises am Kollisionspunkt. Aus Gründen, die noch erklärt werden, benutzt man

$$u := \sin\psi \in [-1,1] \quad \text{statt} \quad \psi \in [-\pi,\pi].$$

Durch das Paar (φ, u) ist die Bahn zum Zeitpunkt der Reflektion an der Kreisscheibe eindeutig charakterisiert.

Als Nächstes ist die Abbildung dieser Daten zu beschreiben, die entsteht, wenn man Ort und Richtung der nächsten Reflektion berechnet. Dazu betrachten wir die beiden beteiligten Kreisscheiben und wählen als Nullrichtungen für die Winkel φ_1, φ_2 der Kollisionspunkte die Verbindungsgerade zwischen den Zentren der Scheiben (siehe Abb. 10.2). Bezeichnet man mit ψ_1 bzw. ψ_2 die Ausfallswinkel an der ersten bzw. zweiten Scheibe, dann gilt

$$\begin{aligned} u_2 \equiv \sin\psi_2 = u_1 - R\sin\rho &= u_1 - R\sin(\psi_1+\varphi_1) \\ &= u_1 - R\sin(\varphi_1 + \arcsin u_1) \\ &= u_1 - R\left(u_1\cos(\varphi_1) + \sqrt{1-u_1^2}\sin\varphi_1\right). \end{aligned} \tag{10.1}$$

Abb. 10.3 zeigt, dass

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi_1 + \psi_1 + \psi_2 &= \varphi_1 + \arcsin(u_1) - \arcsin(u_1 - R\sin(\psi_1+\varphi_1)) \\ &= \varphi_1 + \arcsin\left(u_1\sqrt{1-R^2\sin^2(\psi_1+\varphi_1)} - R\sin(\psi_1+\varphi_1)\sqrt{1-u_1^2}\right). \end{aligned}$$

Es ist $(\varphi_1, u_1) \in V_{ik} \subset S^1 \times [-1,1]$ der Definitionsbereich und $(\varphi_2, u_2) \in W_{ik} \subset S^1 \times [-1,1],\ i \neq k \in \{1,2,3\}$ der Wertebereich.

$$F_{ik} = (\varphi_{ik}, u_{ik}) : V_{ik} \to W_{ik} \tag{10.2}$$

ist die gesuchte Abbildung.

Statt zu versuchen F_{ik} explizit anzugeben, stellen wir fest, dass diese Abbildung implizit durch folgende Beziehungen gegeben ist:

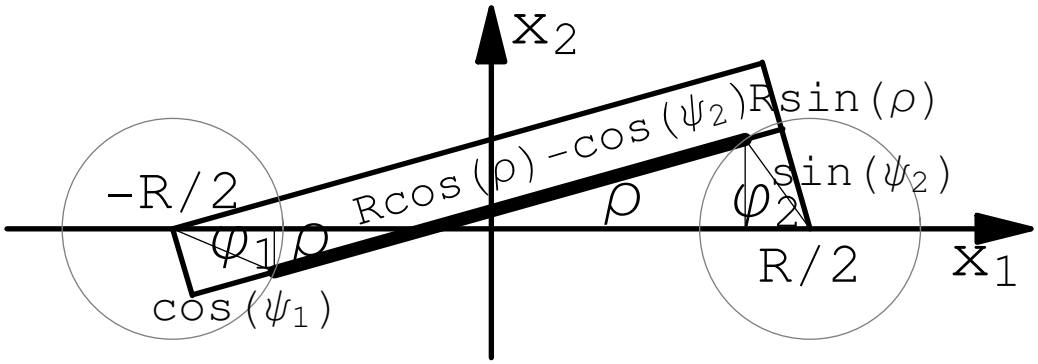


Abbildung 10.2: Trajektorie (fett) zwischen zwei Kreisscheiben. Die parallele Hilfslinie dient der Ableitung der Beziehung $R \sin \rho = \sin(\psi_1) - \sin(\varphi_2)$.

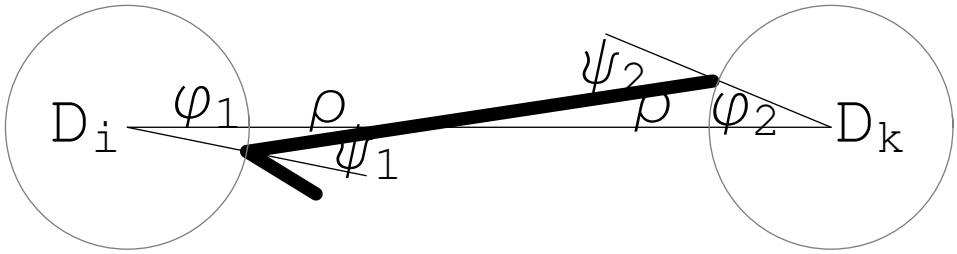


Abbildung 10.3: Es gilt $\psi_1 + \varphi_1 = \rho = \varphi_2 - \psi_2$.

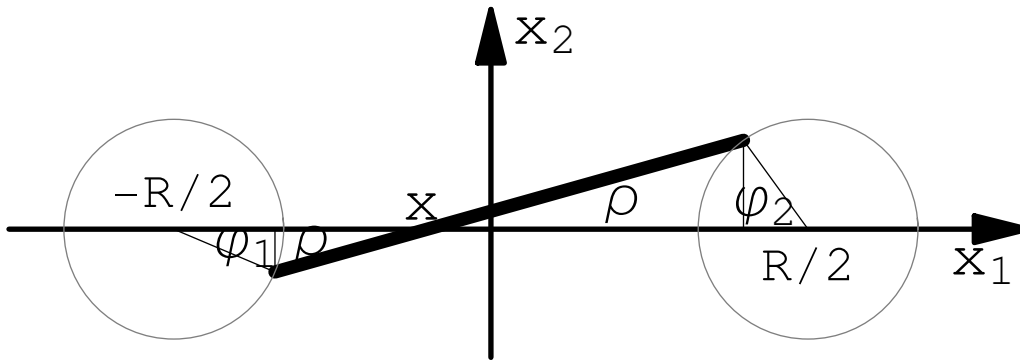


Abbildung 10.4: Durch Addition von Strecken der Längen $\cos\varphi_i$ bzw. $\frac{\sin\varphi_i}{\tan\rho}$ auf der x_1–Achse erhält man die Abstände zwischen x und den Scheibenmittelpunkten.

- Es ist
$$\rho - \varphi_1 + (\pi - \psi_1) = \pi \quad \text{oder} \quad \rho = \psi_1 + \varphi_1$$
und
$$\rho - \varphi_2 + (\pi + \psi_2) = \pi \quad \text{oder} \quad \rho = -\psi_2 + \varphi_2,$$
also
$$-(\psi_2 - \varphi_2) = \psi_1 + \varphi_1.$$

- Für die Koordinate des Schnittpunktes x der Trajektorie mit der Verbindungslinie gilt, falls $\rho \neq 0$, nach Abb. 10.4.
$$R/2 + x = \cos\varphi_1 - \frac{\sin\varphi_1}{\tan\rho} \quad \text{und} \quad R/2 - x = \cos\varphi_2 - \frac{\sin\varphi_2}{\tan\rho},$$
also
$$R = \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 - \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\tan(\rho)},$$
was auch für $\rho = 0$ stimmt, wenn man mit $\tan\rho$ multipliziert:
$$\begin{aligned} R\sin\rho &= \sin\rho(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) - \cos\rho(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \\ &= \sin(\rho - \varphi_1) + \sin(\rho - \varphi_2) = \sin\psi_1 - \sin\psi_2. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Durch äußere Ableitung erhält man $R\cos(\rho)d\rho = \cos\psi_1 d\psi_1 - \cos\psi_2 d\psi_2$.

Multiplikation mit $d\rho = d\psi_1 + d\varphi_1 = -d\psi_2 + d\varphi_2$ ergibt links 0, rechts

$$\cos(\psi_1)d\varphi_1 \wedge d\psi_1 - \cos(\psi_2)d\varphi_2 \wedge d\varphi_2,$$

woraus die Invarianz von

$$d\varphi \wedge du = d\varphi \wedge d(\sin\psi) = \cos(\psi)d\varphi \wedge d\psi$$

unter der Abbildung folgt.

Die in (10.2) definierten Abbildungen F_{ik} sind also flächenerhaltend, und es gilt nach (10.1)

$$u_k = u_i - R\left(u_i\cos\varphi_i + \sqrt{1-u_i^2}\sin\varphi_i\right).$$

10.1 Lemma $\left(\begin{smallmatrix} d\varphi_2 \\ d\psi_2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\cos\psi_2}\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d\varphi_1 \\ d\psi_1 \end{smallmatrix}\right)$ *mit*

$$A := \cos\psi_2 - R\cos(\rho) \qquad B := \cos\psi_1 + \cos\psi_2 - R\cos\rho$$

$$C := -R\cos(\rho) \qquad D := \cos\psi_1 - R\cos\rho.$$

Bew.: Aus der oben stehenden Gleichung erhält man durch Division durch $\cos\varphi_1$ und Benutzen von $d\rho = d\varphi_1 + d\psi_1$

$$d\psi_2 = \frac{1}{\cos\psi_2}(-R\cos(\rho)d\varphi_1 + (\cos\psi_1 - R\cos\rho)d\psi_1),$$

also die zweite Zeile. Die erste ergibt sich daraus mit $d\varphi_2 = d\varphi_1 + d\psi_1 + d\psi_2$. □

10.2 Lemma $A, B, C, D < 0$ *und* $C \le A \le B,\ D \le B$.

Bew.: Offensichtlich ist $C = -R\cos\rho < 0$, und $C \le A \le B,\ D \le B$ ist wegen der Positivität von $\cos\psi_1$ und $\cos\psi_2$ offensichtlich.

Es bleibt zu zeigen, dass $B < 0$, d.h. $R\cos\rho \overset{!}{>} \cos\psi_1 + \cos\psi_2$.

Quadrieren beider Seiten und Subtraktion ergibt mit (10.3)

$$\begin{aligned} & R^2 - R^2\sin^2\rho - \cos^2\psi_1 - \cos^2\psi_2 - 2\cos\psi_1\cos\psi_2 \\ = \ & R^2 - (\sin\psi_1 - \sin\psi_2)^2 - \cos^2\psi_1 - \cos^2\psi_2 - 2\cos\psi_1\cos\psi_2 \\ = \ & R^2 - 2 - 2\cos(\psi_1+\psi_2) \ge R^2 - 4 \quad \text{, aber} \quad R > 2. \end{aligned}$$

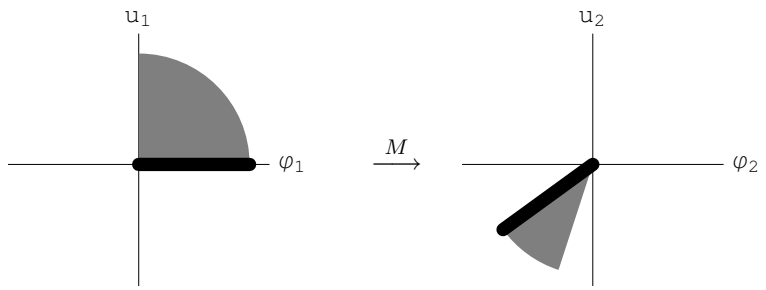


Abbildung 10.5: Abbildungseigenschaften der Ableitung M der Poincaré-Abbildung

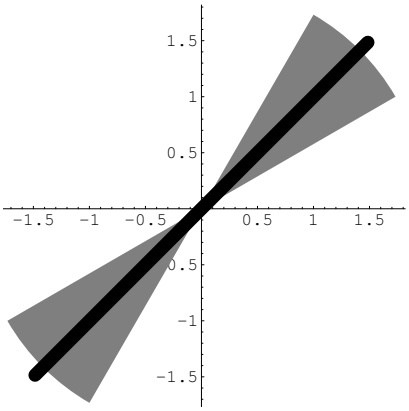
$\square$

Damit ist mit $\binom{d\varphi_2}{du_2} = M(\varphi_1, u_1)\binom{d\varphi_1}{du_1}$ die 2×2–Matrix $M(\varphi_1, u_1)$ nicht nur symplektisch, sondern hat auch die Eigenschaft, dass für $d\varphi_1 > 0,\ du_1 > 0$ folgt $d\varphi_2 < 0,\ du_2 < 0$, wobei genauer sogar der positive Quadrant in einen echt im dritten Quadranten enthaltenen Kegel abgebildet wird.

Wegen der Vorzeichen der Einträge von M und $\det M = 1$ muss $\mathrm{tr} M < -2$ sein:

$$(\mathrm{tr} M)^2 = (A+D)^2 = (A-D)^2 + 4AD = (A-D)^2 + 4 + 4BC > 4.$$

Wegen der Eigenwertgleichung $\lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} M + \det M = 0$, also $\lambda_{1/2} = \frac{\mathrm{tr} M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr} M}{2}\right)^2 - 1}$ ist $\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 0$, M also hyperbolisch.



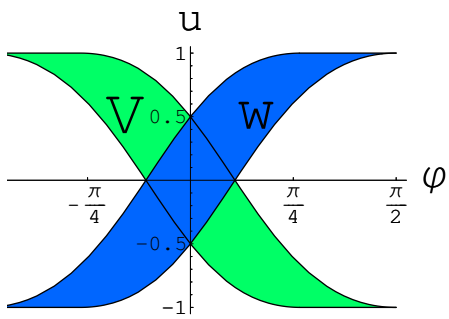
Als Nächstes soll Definitions– und Wertebereich V und W der Abbildung F aus (10.2) berechnet werden (die Indices i, k spielen noch keine Rolle).

10.3 Lemma *Mit* $\Phi_\pm(u) := \arcsin\left(\frac{u\pm 1}{R}\right) - \arcsin(u)$ *ist*

$$V = \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi_-(u) \le \varphi \le \Phi_+(u)\}$$

und

$$W = \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi_-(-u) \le \varphi \le \Phi_+(-u)\}.$$



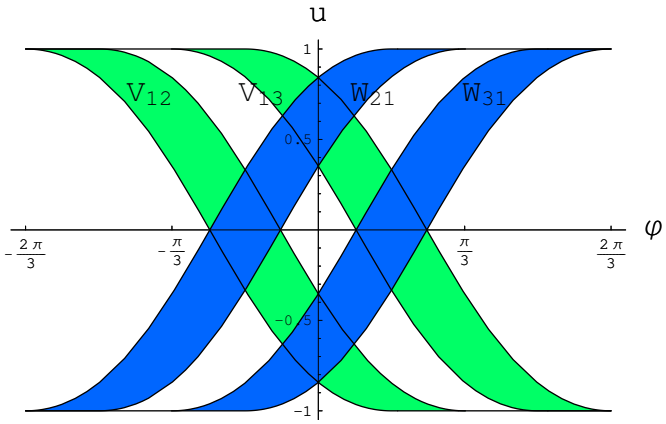
Bew.: Es gilt nach (10.1) $R\sin(\psi_1 + \varphi_1) = \sin\psi_1 - \sin\psi_2 = u_1 - u_2$, also $\psi_1 + \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{u_1-u_2}{R}\right)$ oder $\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{u_1-u_2}{R}\right) - \arcsin(u_1)$. Es ist $-1 \le u_2 \le 1$, woraus die Aussage über den Definitionsbereich V folgt.

Um den Wertebereich W zu beschreiben, benutzt man $\rho = \psi_1 + \varphi_1 = \varphi_2 - \psi_2$, also

$$\varphi_2 - \psi_2 = \arcsin\left(\frac{u_1 - u_2}{R}\right) \quad \text{oder} \quad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{u_1 - u_2}{R}\right) + \arcsin(u_2).$$

□

Nachdem das Zweischeiben–Problem soweit analysiert ist, kann man an das Dreierproblem herangehen. Zunächst ist es günstig, die Vorzugsrichtungen relativ zu der die Winkel φ gemessen werden, zum Zentrum des gleichseitigen Dreiecks zeigen zu lassen. Das bedeutet aber für die Winkel φ eine Verschiebung um $\pi/6$.



Damit ist

$$\begin{aligned} V_{12} &= \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi_-(u) \leq \varphi + \frac{\pi}{6} \leq \Phi_+(u)\}, \\ V_{13} &= \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi_-(u) \leq \varphi - \frac{\pi}{6} \leq \Phi_+(u)\}, \end{aligned}$$

und als Mengen sind

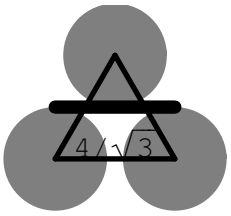
$$V_{23} = V_{31} = V_{12} \quad \text{und} \quad V_{32} = V_{21} = V_{13},$$

auch wenn man sie nicht unbedingt identifizieren möchte, denn sie beschreiben ja Kollisionen auf verschiedenen Scheiben.

Analog ist

$$\begin{aligned} W_{21} &= \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi_-(-u) \leq \varphi + \frac{\pi}{6} \leq \Phi_+(-u)\} \\ W_{31} &= \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi_-(-u) \leq \varphi - \frac{\pi}{6} \leq \Phi_+(-u)\} \end{aligned}$$

und $W_{32} = W_{13} = W_{21},\ W_{23} = W_{12} = W_{31}$. Das obige Bild suggeriert, dass die Schnitte $V_{13} \cap W_{21}$ etc. verzerrte Rechtecke sind. Das ist aber nur dann der Fall, wenn für $u = \pm 1$ sich V_{13} und W_{21} wieder getrennt haben. Dazu muss die Streifenbreite $\Phi_+(u) - \Phi_-(u)$ für $u = \pm 1$ kleiner $\frac{\pi}{6}$ sein, also $\arcsin(2/R) < \frac{\pi}{6}$ oder $R > \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2.309 > 2$. Geometrisch entspricht dies der im folgenden geltenden Bedingung, dass die Scheiben sich *nicht "abschatten"*, jede Gerade also höchstens zwei Scheiben trifft.



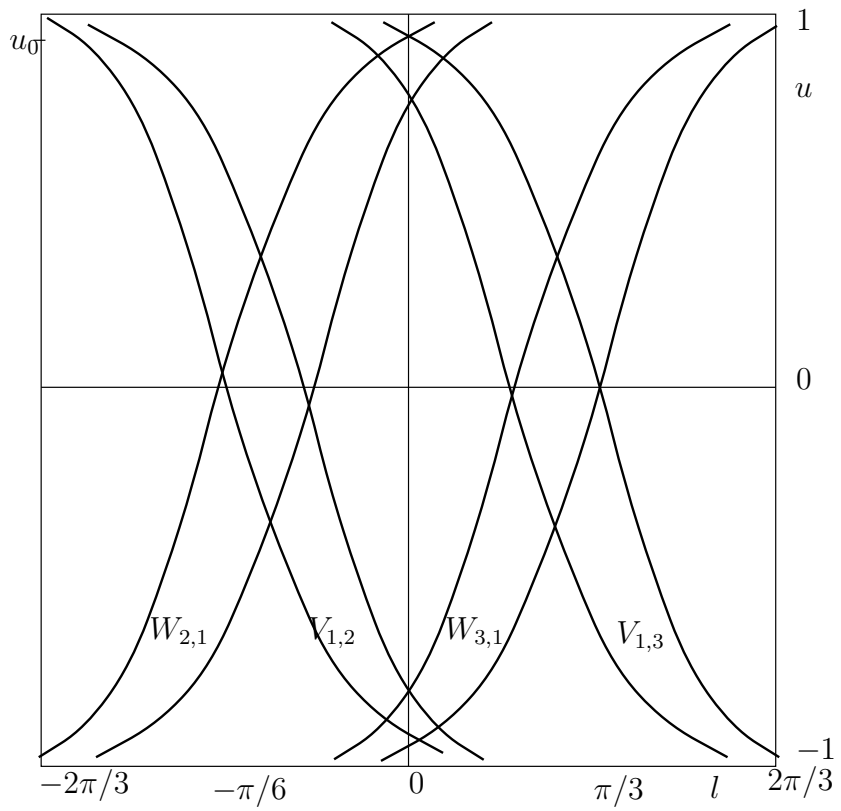


Abbildung 10.6: Die Poincaré–Fläche $\mathcal{P}_1$ für das drei–Scheiben–System

$W_{21} \cap V_{13}$ enthält jetzt die Bahnen bei D_1, die von D_2 kommen und nach D_3 gehen, etc.

Es liegt jetzt nahe, die dreizählige Symmetrie insoweit zu nutzen, dass man

$$\begin{aligned} V_+ &:= V_{13} = V_{21} = V_{32} \quad , \quad V_- := V_{12} = V_{31} = V_{33} \\ W_+ &:= W_{21} = W_{13} = W_{32} \quad , \quad W_- := W_{31} = W_{12} = W_{23} \end{aligned}$$

setzt. Dabei liegen die V_-–Streifen links von den V_+–Streifen, entsprechend einer Orientierung im mathematisch positiven Sinn der beteiligten Scheiben. Man hat dann die Bijektionen $F_+ := F_{13} : V_+ \to W_+,\ F_- := F_{12} : V_- \to W_-$.

10.3 Iteration der Poincaré-Abbildung

Ist $\mathcal{S} = \{+, -\}$ die Menge der beiden benutzten Symbole, dann ist

$$X := \{f : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}\} \equiv \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$$

der Raum der zweifach unendlichen Symbolfolgen. Wir wollen die gebundenen Bahnen durch solche Symbolfolgen beschreiben. Dazu setzen wir induktiv für eine Symbolfolge

$$(k_1, \ldots, k_m) \in \mathcal{S}^m \quad , \quad m > 1,$$

$$V_{(k_1,\ldots,k_m)} := \{x \in V_{(k_1,\ldots,k_{m-1})} \mid F_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(x) \in V_{k_m}\}$$

und

$$F_{(k_1,\ldots,k_m)} := F_{k_m} \circ F_{(k_1,\ldots,k_{m-1})} \mid V_{(k_1,\ldots,k_m)},$$

dann sondern wir alle Phasenraumpunkte aus, die zu Bahnen gehören, die die Folge $(k_1, \ldots, k_m)$ von Kollisionen realisieren.

Weiter definiert man das Bild

$$W_{(k_1,\ldots,k_m)} := F_{(k_1,\ldots,k_m)}(V_{(k_1,\ldots,k_m)}).$$

Offensichtlich ist die m–fach iterierte Poincaré-Abbildung gleich

$$F_{(k_1,\ldots,k_m)} = F_{k_m} \circ F_{k_{m-1}} \circ \ldots \circ F_{k_2} \circ F_{k_1} \mid V_{(k_1,\ldots,k_m)}$$

und nach Definition

$$V_{(k_1,\ldots,k_m)} \subset V_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}.$$

Ähnlich ist

$$W_{(k_1,\ldots,k_m)} \subset W_{(k_2,\ldots,k_m)},$$

denn

$$W_{(k_1,\ldots,k_m)} = F_{(k_1,\ldots,k_m)}(V_{(k_1,\ldots,k_m)})$$
$$= F_{(k_2,\ldots,k_m)} \circ F_{k_1}(V_{(k_1,\ldots,k_m)}) \subset F_{(k_2,\ldots,k_m)}(V_{(k_2,\ldots,k_m)}) = W_{(k_2,\ldots,k_m)}.$$

Für den einfachsten Fall $m = 1$ (mit $V_{(k_1)} \equiv V_{k_1}$ etc.) haben wir schon eine Beschreibung von $V_{(k_1)}$ und $W_{(k_1)}$ als zwischen den Graphen zweier Funktionen eingeschlossener Mengen. Eine solche Darstellung ist auch allgemein möglich. Dazu setzt man den Rand $\partial(S^1 \times [-1,1])$ des Zylinders aus den beiden Kreislinien $\partial^\pm := S^1 \times \{\pm 1\}$ zusammen.

10.4 Lemma

$$W_{(k_1,\ldots,k_m)} = \{(\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi^-_{(k_1,\ldots,k_m)}(u) \leq \varphi \leq \Phi^+_{(k_1,\ldots,k_m)}(u)\},$$

wobei die Graphen von

$$\Phi^\pm_{(k_1,\ldots,k_m)} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

die Bilder $F_{(k_1,\ldots,k_m)}(\partial^{\pm(-1)^m} \cap V_{(k_1,\ldots,k_m)})$ sind. Die $\Phi^\pm_{(k_1,\ldots,k_m)}$ sind glatte, streng monoton wachsende Funktionen. Analoges gilt für $V_{(k_1,\ldots,k_m)}$ (mit fallenden Funktionen).

Bew.: Betrachten wir zunächst die Situation $m = 1$. Dort haben wir schon $W_{(k_1)}$ als Streifen zwischen den Graphen der Funktionen

$$\Phi^\pm_{(k_1)}(u) := \Phi_\pm(-u) - \frac{\pi}{6}k_1 \qquad (u \in [-1,1])$$

bestimmt. Dabei waren die Graphen der $\Phi^\pm_{(k_1)}$ die Bilder von $\partial^\pm \cap V_{k_1}$ unter F_{k_1}.

Untechnischer ausgedrückt waren diese Grenzwinkel durch streifende Bahnen entstanden.

Dies soll jetzt iteriert werden. Dazu muss man die Bilder der horizontalen Kurven $\partial^\pm \cap V_{(k_1,\ldots,k_m)}$ unter $F_{(k_1,\ldots,k_m)}$ betrachten. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} DF_{(k_1,\ldots,k_m)}(x) &= D(F_{k_m} \circ \ldots \circ F_{k_1})(x) \\ &= DF_{k_m}(F_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(x)) \cdot DF_{k_{m-1}}(F_{(k_1,\ldots,k_{m-2}}(x)) \cdot \ldots \cdot DF_m(x). \end{aligned}$$

Die Jacobi–Matrix ist damit Produkt von Matrizen M mit Determinante 1 und besitzt daher ebenfalls Determinante 1.

Unter $DF_{(k_1,\ldots,k_m)}(x)$ wird der erste Quadrant von $\mathbb{R}_\varphi \times \mathbb{R}_u$ auf einen Kegel im ersten bzw. dritten Quadranten abgebildet, je nachdem, ob m gerade oder ungerade ist (siehe Abb. 10.5). In beiden Fällen wird die horizontale Gerade $du = 0$ auf eine streng monoton steigende Gerade abgebildet.

Daher ist $F_{(k)}(\partial^\pm \cap V_{(k)})$ mit $(k) := (k_1, \ldots, k_m)$ eine Kurve, die Graph einer streng monoton steigenden Funktion ist. Diese nennen wir $\Phi^\ell_{(k)}$ mit $\ell = \pm(-1)^m$. Die Signatur von $DF_{(k)}(x)$ ist $\binom{++}{++} \cdot (-1)^m$, sodass sich mit dieser Wahl $\Phi^+_{(k)} > \Phi^-_{(k)}$ ergibt. □

Als Nächstes zeigt man, dass die Streifen $W_{(k)}$ Breiten haben, die in m exponentiell schrumpfen.

10.5 Lemma *Es existieren Konstanten $J_o > J_u > 0$ und $c > 1$ mit*

$$c^{-1} \exp(-mJ_o) \leq \Phi^+_{(k)} - \Phi^-_{(k)} \leq c \exp(-mJ_u)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und $(k) = (k_1, \ldots, k_m) \in S^m$.

Beweisidee: Die Linearisierung M verlängert alle Vektoren im ersten Quadranten mindestens nur $e^{J_u} > 1$, höchstens um $e^{J_u} > e^{J_o}$. Rückrechnen ergibt die Abschätzung. □

10.6 Definition • *Für eine unendliche Folge $f^+ : \mathbb{N} \to \mathcal{S} = \{\pm\}$ und $k_n := f^+(n)$ sei $V_{f^+} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{(k_1,\ldots,k_n)}$.*
• *Für eine unendliche Folge $f^- : \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0 \to \mathcal{S}$ und $k_n := f^-(-n)$ sei $W_{f^-} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{(k_{-n},\ldots,k_0)}$.*

10.7 Lemma *V_{f^+} ist Graph einer lipschitzstetigen, streng monoton fallenden Funktion $\Phi_{f^+} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, W_{f^-} ist Graph einer lipschitzstetigen, streng monoton wachsenden Funktion $\Phi_{f^-} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.*

Bew.: Ich zeige die Aussage für W_{f^-}.

$$\begin{aligned} W_{f^-} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{(k_{-n},\ldots,k_0)} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (\varphi, u) \in S^1 \times [-1,1] \mid \Phi^-_{(k_{-n},\ldots,k_0)}(u) \leq \varphi \leq \Phi^+_{(k_{-n},\ldots,k_0)}(u) \right\} \end{aligned}$$

Nun ist $\Phi^-_{(k_{-n},\ldots,k_0)}$ in n monoton wachsend und $\Phi_{(k_{-n},\ldots,k_0)}$ in n monoton fallend, sodass für beide Funktionenfolgen punktweise Limiten $\Phi^-_{f^-}$ bzw. $\Phi^+_{f^-}$ existieren. Es gilt $\Phi^-_{f^-} \leq \Phi^+_{f^-}$, aber wegen der Abschätzung

$$\Phi^+_{(k_{-n},\ldots,k_0)} - \Phi^-_{(k_n,\ldots,k_0)} \leq ce^{-J_u(n+1)}$$

sogar $\Phi^-_{f^-} = \Phi^+_{f^-} =: \Phi_{f^-}$. Die Tangenten an die Graphen der $\Phi^\pm_{(k)}$ liegen alle in den Kegeln, die die Bilder der ersten und dritten Quadranten unter DF sind. Daher haben diese Funktionen eine gemeinsame Schranke an ihre Ableitungen. Daraus folgen strenge Monotonie und L–Stetigkeit von Φ_{f^-}. □

Es ist an der Zeit, sich zu überlegen, wie die $V_{(k)}$ und die $W_{(k)}$ zusammenhängen.

Dazu betrachten wir die Abbildung

$$T : S^1 \times [-1,1] \to S^1 \times [-1,1] \quad , \quad T(\varphi, u) := (\varphi, -u).$$

Diese Transformation lässt sich als *Zeitumkehr* deuten, denn Einfallswinkel wird zu Ausfallswinkel, der Auftreffort bleibt aber gleich. Es ist $T(V_\pm) = W_\pm$ und umgekehrt $T(W_\pm) = V_\pm$. $F^{-1}_\pm : W_\pm \to V_\pm$ hat die Form $F^{-1}_\pm = TF_\pm T$.

10.8 Lemma $TV_{(k_1,\ldots,k_m)} = W_{(k_m,\ldots,k_1)}$ *und* $TW_{(k_1,\ldots,k_m)} = V_{(k_m,\ldots,k_1)}$.

Bew.: Für $m = 1$ ist das bekannt. Allgemein zeigt man zunächst

$$V_{(k_1,\ldots,k_m)} = F^{-1}_{k_1}(W_{k_1} \cap v_{(k_2,\ldots,k_m)})$$

und

$$W_{(k_1,\ldots,k_m)} = F_{k_m}(V_{k_m} \cap W_{(k_1,\ldots,k_{(-1)})}).$$

Das folgt aber aus

$$\begin{aligned} V_{(k_1,\ldots,k_m)} &= \left\{x \in V_{(k_1,\ldots,k_{m-1})} \mid F_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(x) \in V_{k_m}\right\} \\ &\vdots \\ &= \left\{x \in V_{k_1} \mid F_{k_1}(x) \in V_{k_2}, F_{(k_1,k_2)}(x) \in V_{k_3}, \ldots F_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(x) \in V_{k_m}\right\}, \end{aligned}$$

denn dann ist dies gleich

$$F^{-1}_{k_1}(W_{k_1} \cap V_{(k_2,\ldots,k_m)}) = \{F^{-1}_{k_1}(y) \mid y \in W_{k_1}, F_{k_2}(y) \in V_{u_3}, \ldots F_{(k_2,\ldots,k_m)}(y) \in V_{k_m}\}$$

mit $x = F^{-1}_{k_1}(y)$.

Analog die zweite Relation. Nun ist

$$\begin{aligned} TV_{(k_1,\ldots,k_m)} &= TF_{k_1}^{-1}(W_{k_1} \cap V_{(k_2,\ldots,k_m)}) \\ &= F_{k_1}T(W_{k_1} \cap V_{(k_2,\ldots,k_m)}) \\ &= F_{k_1}(TW_{k_1} \cap T(V_{k_2,\ldots,k_m})) \\ &= F_{k_1}(V_{k_1} \cap W_{(k_m,\ldots,k_2)}) \\ &= W_{(k_m,\ldots,k_1)}. \end{aligned}$$

Die Aussage für $TW_{(k)}$ folgt wegen $TT = \mathrm{Id}$ aus der ersten. □

Es folgt

$$\begin{aligned} TV_{f^+} &= T\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{(k_1,\ldots,k_n)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} TV_{(k_1,\ldots,k_n)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{(k_n,\ldots,k_1)} \\ &= W_{f^-} \quad \text{für} \quad f^-(-n) := f^+(n+1). \end{aligned}$$

10.9 Lemma *Für alle $f^+ : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ und $f^- : (\mathbb{Z}/\mathbb{N}) \to \mathcal{S}$ besteht $V_{f^+} \cap W_{f^-}$ aus genau einem Punkt.*

Bew.: Die Schnittmenge kann höchstens einen Punkt umfassen, denn V_{f^+} ist Graph einer streng monoton fallenden Funktion Φ_{f^+} und W_{f^-} Graph einer streng monoton wachsenden Funktion Φ_{f^-}. Da die Differenz $\Phi_{f^+} - \Phi_{f^-}$ streng monoton fallend ist, kann sie höchstens einmal den Wert Null annehmen. Nun sind Φ_{f^+} und Φ_{f^-} stetig, sodass es nach dem Zwischenwertsatz ausreicht zu zeigen, dass $\Phi_{f^+}(1) < \Phi_{f^-}(1)$ und $\Phi_{f^+}(-1) > \Phi_{f^-}(-1)$.

Dies ist aber so, weil die Graphen von Φ_{f^+} bzw. Φ_{f^-} in den Streifen V_{k_1} bzw. W_{k_0} mit $k_1 := f^+(1)$ und $k_0 := f^-(0)$ liegen, und diese trennen sich in der angegebenen Weise bei $u \to \pm 1$. □

10.4 Der Shiftraum

Es liegt jetzt nahe, den Raum

$$X = \{f : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}\}$$

der zweifach unendlichen Symbolfolgen mit der Aufspaltung

$$X \cong X^+ \times X^-$$

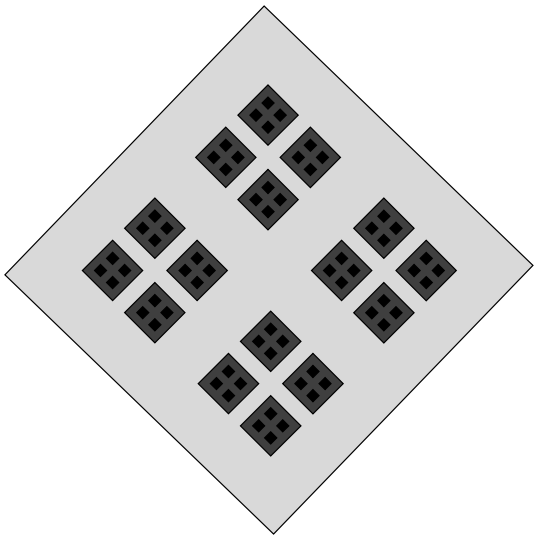


Abbildung 10.7: Die ersten Schritte bei der Konstruktion der invarianten Menge Λ

$$X^+ = \{f^+ : \mathbb{N} \to \mathcal{S}\} \quad , \quad X^- := \{f^- : \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N} \to \mathcal{S}\}$$

zu betrachten. Eine solche Symbolfolge codiert die Reihenfolge der Kollisionen in Vergangenheit und Zukunft. Man hat dann eine bijektive Abbildung

$$\mathcal{H} : X \to \Lambda \subset S^1 \times [-1, 1] \quad , \quad (f^+, f^-) \mapsto V_{f^+} \cap W_{f^-}.$$

(Ganz exakt ist diese Schreibweise nicht, $V_{f^+} \cap W_{f^-}$ ist eine einelementige Menge, man meint aber das Element.) Man kann jetzt X zu einem topologischen Raum machen, indem man $\mathcal{S} = \{+, -\}$ mit der diskreten Topologie (offene Mengen $\emptyset, \{+\}, \{-\}, \mathcal{S}$) und $X = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}$ mit der *Produkttopologie* versieht.

10.10 Definition *Ist $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume, dann ist die* **Produkttopologie** *auf $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ die gröbste Topologie, unter der die Projektionen $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ auf die Faktoren stetig sind.*

Eine Basis der Produkttopologie wird durch die "offenen Kästchen", d.h. Mengen der Form

$$\left\{\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\lambda_r}^{-1}(U_{\lambda_r})\right\} \qquad (\lambda_i \in \Lambda,\ U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i} \text{ offen})$$

gegeben. In unserem Fall schreibt man also die Werte der Folgen $f : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}$ an endlich vielen Stellen vor.

10.11 Lemma *Der Folgenraum X ist kompakt.*

Bew.: $X = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}$, und die Faktoren sind trivialerweise als endliche Mengen kompakt. Nach dem Satz von Tychonov (siehe [Ja], Kap. 10) ist ein beliebiges Produkt kompakter Räume in der Produkttopologie kompakt. □

10.12 Lemma *Definiert man $d : X \times X \to \mathbb{R}$,*

$$d(f,g) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{-|i|}(1-\delta_{f(i),g(i)}) \quad , \quad f,g \in X,$$

dann ist (X,d) ein metrischer Raum, und die von der Metrik erzeugte Topologie die Produkttopologie.

Bew.: 1) $d \geq 0$. $\qquad d(f,g) = 0 \iff f(i) = g(i) \quad (i \in \mathbb{Z})$

2) $d(f,g) = d(g,f)$

3) $d(f,h) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{-|i|}(1-\delta_{f(i),h(i)}) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{-|i|}(1-\delta_{f(i),g(i)} + 1 - \delta_{g(i),h(i)})$
$\qquad = d(f,g) + d(g,h)$

Ist $\varepsilon = 2^{-h+1}$, dann ist die ε–Umgebung von $f \in X$ von der Form

$$U_\varepsilon(f) := \{g \in X \mid d(f,g) < \varepsilon\} \supseteq \{g \in X \mid g(i) = f(i), |i| \leq n+1\}$$

und

$$U_\varepsilon(f) \subseteq \{g \in X \mid g(i) = f(i), |i| < n\}.$$

Die Basen der beiden Topologien sind also ineinander enthalten, sodass die Topologien gleich sind. □

10.13 Lemma *$\mathcal{H} : X \to \Lambda$ ist ein hölderstetiger Homöomorphismus, d.h. es existieren $C > 0$ und $\alpha > 0$*

$$\operatorname{dist}(\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)) \leq C(d(f,g))^\alpha \qquad (f,g \in X).$$

Bew.: Nach Definition von $\Lambda = \mathcal{H}(X)$ ist $\mathcal{H}$ surjektiv. Sind $f,g \in X$ und $f \neq g$, dann existiert ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $f(i) \neq g(i)$.

- Für $i \in \mathbb{N}$ ist dann $\mathcal{H}(f) \in V_{(f(1),\ldots,f(i))}$ und $\mathcal{H}(g) \in V_{(g(1),\ldots,g(i))}$, aber diese beiden Streifen sind disjunkt. Analog ist

- für $i \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{H}(f) \in W_{(f(i),\ldots,f(0))}$ und $\mathcal{H}(g) \in W_{(g(i),\ldots,g(0))}$ und wieder sind diese beiden Streifen disjunkt. So folgt $\mathcal{H}(f) \neq \mathcal{H}(g)$.

Damit ist $\mathcal{H} : X \to \Lambda$ bijektiv.

Um die Hölder-Stetigkeit von $\mathcal{H}$ bez. der Metrik d auf X und einer beliebigen Metrik dist (die mit der Topologie verträglich ist) auf $S^1 \times [-1,1]$ zu zeigen, erinnern wir uns an die Abschätzungen

$$\frac{1}{c} e^{-J_o \cdot m} \leq \Phi^+_{(k)} - \Phi^-_{(k)} \leq c e^{-J_u \cdot m}$$

für die Breite der Streifen $V_{(k)} = V_{(k_1,\ldots,k_m)}$ bzw. W_k. Da die Steigungen der Funktionen

$$\Phi^{\pm}_{(k)} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

von oben und unten durch Konstanten (unabhängig von (k)) beschränkt sind, ergibt sich daraus auch eine Abschätzung der Form

$$D_{(k_{-n},\ldots,k_m)} \leq \tilde{c} e^{-J_k \min(|n|,m)}$$

für den Durchmesser $D_{(k-n,\ldots,k_m)} := \sup\{\mathrm{dist}(x,y) \mid x,y \in W_{(k-n,\ldots,k_0)} \cap V_{(k_1,\ldots,k_m)}\}$ des Rechtecks

$$W_{k_{-n},\ldots,k_0)} \cap V_{(k_1,\ldots,k_m)}.$$

Setzt man $\alpha := \frac{J_u}{\ln(2)}$, dann ist $\mathcal{H}$ α–hölderstetig.

Sind nämlich $f, g \in X$, $f \neq g$, dann existiert ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f(i) = g(i)$ für $|i| < |m|$ und $f(m) \neq g(m)$ oder $f(-m) \neq g(-m)$.

Damit ist $d(f,g) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{-|i|}(1 - \delta_{f(i),g(i)}) \geq 2^{-|m|}$,

- aber falls $m > 0$, dann sind

$$\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g) \in W_{(f(-|m|+1,\ldots,f(0))} \cap V_{(f(1),\ldots,f(|m|-1)},$$

  also

$$\mathrm{dist}(\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)) \leq \underbrace{(\tilde{c} \cdot e^{+J_u})}_{\tilde{c}_1} \cdot e^{-J_u|m|} = \tilde{c}_1 \cdot (2^{-|m|})^\alpha \leq \tilde{c}_1 d(f,g).$$

- Ist $m = 0$, dann ist der Abstand $\mathrm{dist}(\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g))$ einfach durch den endlichen Durchmesser c_2 des reduzierten Phasenraumes $S^1 \times [-1,1]$ von oben beschränkt, und man setzt $c_1 := \max(\tilde{c}_1, c_2)$. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung $\mathcal{H}^{-1}$ gewinnt man ähnlich mittels unterer Abschätzungen an Streifenbreiten. $\square$

Man zeigt jetzt, dass Λ homöomorph zur Cantormenge ist, indem man die analoge Aussage für X beweist.

10.14 Lemma *Es sei* $\Omega := \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ *mit der Produkttopologie. Dann ist* $\Psi : X \to \Omega$,

$$(\Psi f)(2i) := \begin{cases} 2 & , \quad f(i) = + \\ 0 & , \quad f(i) = - \end{cases} \quad , \; i \in \mathbb{N}$$

$$(\Psi f)(2i+1) := \begin{cases} 2 & , \quad f(+i) = + \\ 0 & , \quad f(i) = - \end{cases} \quad , \; i \in \mathbb{N}_0$$

ein Homöomorphismus.

Bew.: Für $i \in \mathbb{N}$ ist

$$(\Psi^{-1}h)(i) := \begin{cases} + & , \quad h(2i) = 2 \\ - & , \quad h(2i) = 0 \end{cases} .$$

Für $i \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ist

$$(\Psi^{-1}h)(i) := \begin{cases} + & , \quad h(-2i+1) = 2 \\ - & , \quad h(-2i+1) = 0 \end{cases} ,$$

Ψ ist also bijektiv. Ψ und Ψ^{-1} bilden Zylindermengen in Zylindermengen ab. Ψ ist also ein Homöomorphismus. $\square$

Ω ist aber homeomorph zur Cantormenge. Daraus folgt der

10.15 Satz Λ *ist homöomorph zur Cantormenge.*

Ist $F : \Lambda \to \Lambda$ durch

$$F(x) := \begin{cases} F_+(x) & , \quad x \in V_+ \\ F_-(x) & , \quad x \in V_- \end{cases}$$

definiert, dann ist dies die Kollisionsabbildung, die dem alten Kollisionspunkt x den neuen Kollisionspunkt $F(x)$ zuordnet.

10.16 Lemma *Die* **Shiftabbildung** $\sigma : X \to X,\ (\sigma f)(i) := f(i+1) \quad (i \in \mathbb{Z})$ *ist ein Homöomorphismus, und das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle \mathcal{H}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}} \\ \Lambda & \xrightarrow{F} & \Lambda \end{array} .$$

kommutiert, d.h. $F = \mathcal{H} \circ \sigma \circ \mathcal{H}^{-1}$.

Bew.: $\sigma^{-1} : X \to X$ ist die Abbildung $(\sigma^{-1}g)(k) = g(k-1) \quad (k \in \mathbb{Z})$. Damit ist σ bijektiv. σ und σ^{-1} bilden Zylindermengen auf Zylindermengen ab. Daher ist σ ein Homöomorphismus.

Im Zusammenhang der Zeitumkehrabbildung haben wir die Relationen

$$F_{k_1}(V_{(k_1,\ldots,k_m)}) = V_{(k_2,\ldots,k_m)} \cap W_{k_1}$$

und

$$F_{k_m}(W_{(k_1,\ldots,k_{m-1})} \cap V_{k_m}) = W_{(k_1,\ldots,k_m)}$$

abgeleitet. Ist nun $X \in \Lambda$ von der Form $X = \mathcal{H}(g)$, mit $g = (g_-, g_+)$, also $X = W_{g^-} \cap V_{g^+}$, dann folgt wegen

$$V_{g^+} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{(g(1),\ldots,g(n))}$$

und

$$W_{g^-} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_{(g(-n),\ldots,g(0))}$$

$$F(\mathcal{H}(g)) = F(x) = F(W_{g^-} \cap V_{g^+}) = W_{(\sigma(g))^-} \cap V_{\sigma(g)^+} = F(\mathcal{H}(\sigma(g))).$$

□

Mithilfe dieses Satzes kann man nun *symbolische Dynamik* betreiben, d.h. Fragen über die gebundenen Bahnen unseres Billardsystems beantworten, indem man sie in Fragen über die Shiftabbildung $\sigma : X \to X$ übersetzt. Z.B. gilt

10.17 Satz *1. Das Streusystem besitzt abzählbar unendlich viele periodische Lösungen und überabzählbar viele gebundene Lösungen.*

2. Es gibt eine gebundene Bahn, die in der Menge **aller** *gebundenen Bahnen dicht liegt.*

Bew.:

1. Wir müssen die Zahl der periodischen bzw. aller Bahnen von $\sigma : X \to X$ bestimmen. Eine solche Bahn ist ein Orbit der Gruppenwirkung

$$\Sigma : \mathbb{Z} \times X \to X \quad , \quad (n, x) \mapsto \sigma^n(x),$$

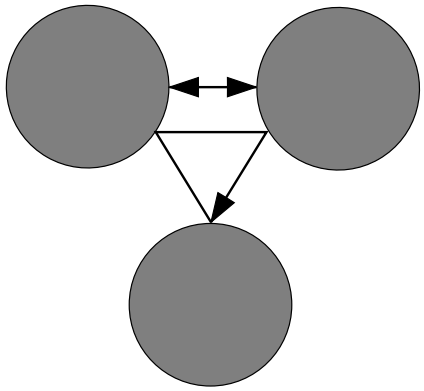


Abbildung 10.8: Die kürzesten geschlossenen Orbits für drei Scheiben.

also von der Form

$$\ldots, \sigma^{-2}(x), \sigma^{-1}(x), x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots$$

Nun ist die Kardinalität der Cantormenge X dieselbe wie die der reellen Zahlen, also insbesondere überabzählbar. Zwar bilden wir in X Äquivalenzklassen bez. der Relation "Zugehörigkeit zum gleichen Orbit", aber die Orbits besitzen höchstens abzählbar viele Elemente. Wäre die Zahl der Orbits (= Zahl der gebundenen Bahnen) abzählbar, dann auch X, denn abzählbar $\times$ abzählbar = abzählbar. Also gibt es überabzählbar viele gebundene Bahnen.

Andererseits gibt es abzählbar viele periodische Folgen $x \in X$, d.h. Folgen mit $\sigma^t(x) = x$ für eine Periode $t \in \mathbb{N}$. Ist t die Minimalperiode, dann gehören genau die Punkte $x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{t-1}(x)$ zum gleichen σ–Orbit und entsprechen damit Kollisionspunkten $\mathcal{H}(x), \ldots, \mathcal{H}(\sigma^{t-1}(x))$ der gleichen periodischen Lösung des Streuproblems.

Die Kardinalität $N(t) := |\{x \in X \mid \sigma^t(x) = x\}|$ der Symbolfolgen mit Periode t ist offensichtlich $N(t) = 2^t$, denn wir können genau die Werte $x(0), \ldots, x(t-1) \in \mathcal{S}$ beliebig wählen. Die Zahl

$$N_{\min}(t) := |\{x \in X \mid \sigma^t(x) = x \text{ und } \sigma^e(x) \neq x, e \in \{1, \ldots, t-1\}|$$

der Symbolfolgen mit *Minimal*periode t ist von der Größenordnung

$$N_{\min}(t) = N(t) - \mathcal{O}(N(t/2)) = 2^t - \mathcal{O}(2^{t/2}),$$

denn die Minimalperiode teilt jede Periode. Ist die Minimalperiode also kleiner als t, ist sie höchstens $t/2$. Die Zahl der periodischen *Orbits* mit Minimalperiode t ist gleich

$$\mathcal{O}_{\min}(t) = \frac{N_{\min}(t)}{t} = \frac{2^t}{t} + \mathcal{O}(2^{t/2}).$$

Damit wird die Zahl aller periodischen Orbits abzählbar unendlich.

2. Wir betrachten die gebundene Bahn $\mathcal{H}(f)$ mit der Symbolfolge $f \in X$, die wir wie folgt konstruieren:

$$f = \ldots, \overset{f(0)}{+}, \overset{f(1)}{-}, ++, +-, -+, --, +++, ++-, \ldots$$

Ist $g \in X$, dann kommt der Orbit $\mathcal{H}$ von f g beliebig nah. Denn in f kommt jede endliche Symbolfolge vor, insbesondere die Folge

$$(g(-m), \ldots, g(0), \ldots, g(m)) \qquad m \in \mathbb{N} \text{ bel.}$$

Ist $(\sigma^t(f))(k) = g(k)$ für $|k| \leq m$, dann ist

$$d(\sigma^t(f), g) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}_1 \\ |i| > m}} 2^{-|i|}(1 - \delta_{(\sigma^t f)(i), g(i)}) \leq 2^{-m+1}.$$

□

10.18 Bemerkung Die hergeleitete Formel

$$\mathcal{O}_{\min}(t) \sim \frac{2^t}{t} \quad , \quad t \to \infty$$

für die Zahl der Orbits mit Minimalperiode t ist von unabhängigem Interesse. Ist nämlich $\mathcal{O}(t)$ die Zahl der Orbits, deren Minimalperiode kleiner als t ist, dann ist ebenfalls

$$\mathcal{O}(t) = \sum_{k=1}^{t-1} \mathcal{O}_{\min}(t) \sim \sum_{k=1}^{t-1} \frac{2^k}{k} \sim \frac{2^t}{t},$$

denn die meisten Perioden sind lang.

Dies erinnert für $t = \log(x)$ an die Zahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$. Es gilt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}.$$

Der damit suggerierte Zusammenhang lässt sich tatsächlich herstellen, und die Untersuchung von sog. dynamischen Zetafunktionen für dynamische Systeme hat heute eine der Untersuchung der Riemannschen Zetafunktion in der Zahlentheorie vergleichbare Bedeutung. Die Größe $\mathcal{O}(\sqrt{x})$ des Fehlerterms zeigt, dass das Analogon der Riemannschen Vermutung hier gilt.

Wie schon angekündigt, lässt sich die beschriebene symbolische Dynamik auch zur Analyse von DGL–Systemen verwenden. Es sei dazu $\widehat{V} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ein Potential von der Form $\widehat{V}(q) = \widehat{W}(\|q\|)$ mit $\widehat{W} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ monoton fallend.

$\widehat{V}$ ist also ein radialsymmetrischer Potentialberg mit endlichem Träger. Wegen dieser Radialsymmetrie gilt für die Hamilton-Funktion $\widehat{H}\,(p,q) := \frac{1}{2}\|p\|^2 + \widehat{V}(q)$ und den Drehimpuls $L(p,q) := p_1 q_2 - p_2 q_1$: $\{L, \widehat{H}\,\} = 0 = p \times q$. D.h. der Drehimpuls bleibt entlang der Lösungskurven erhalten. Wir haben gesehen, dass die *radiale* Bewegung in diesem Potential durch die Hamilton-Funktion $\frac{1}{2}p_r^2 + W_l(r)$ mit dem effektiven Potential $W_l(r) = \frac{l^2}{2r^2} + W(r)$ für Drehimpulswerte beschrieben wird. Weiter haben wir gesehen, dass die symplektische Zweiform

$$dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = dp_r \wedge dr + dL \wedge d\varphi$$

ist, L also zu φ kanonisch konjugiert ist. Auch W_l ist monoton fallend, also

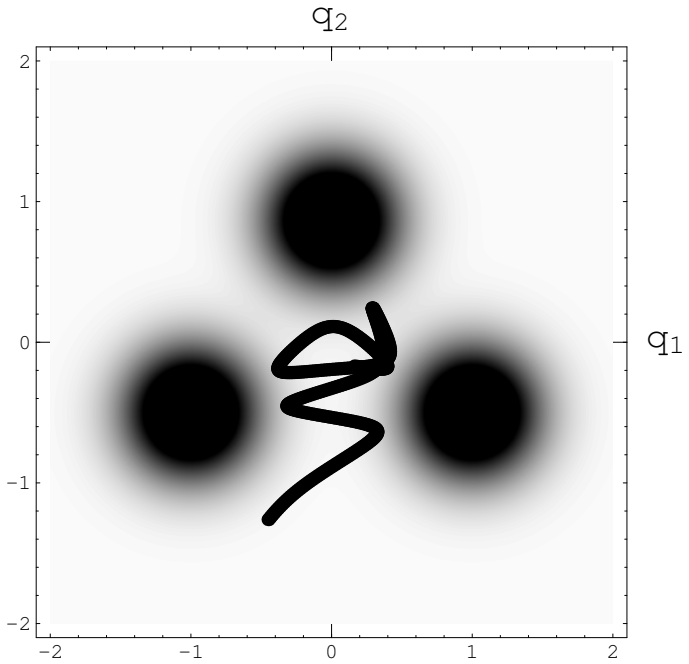
$$\dot{p}_r = -\frac{\partial W_l}{\partial r} > 0 \quad \text{und} \quad \dot{v} = p_r,$$

also $\ddot{r} > 0$. D.h. es gibt nur höchstens einen Punkt der Bahn mit minimalem Radius $r_{\min}$ (und Winkel $\varphi_{\min}$).

Die Punkte $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}_q^2$ mit $s_1 = \binom{R}{0}$ und $s_2 = \binom{-R/2}{+R\sqrt{\frac{3}{2}}}$, $s_3 = \binom{-R/2}{-R\sqrt{\frac{3}{2}}}$ bilden ein gleichseitiges Dreieck. Für große Seitenlänge R besteht das Potential

$$V(q) := \widehat{V}(q - s_1) + \widehat{V}(q - s_2) + \widehat{V}(q - s_3) \qquad (q \in \mathbb{R}^2)$$

aus drei nicht überlappenden Potentialbergen.



Will man die von der Hamilton-Funktion

$$H : \mathbb{R}^2_p \times \mathbb{R}^2_q \to \mathbb{R} \quad , \quad H(p,q) := \tfrac{1}{2}\|p\|^2 + V(q)$$

beschriebene Bewegung analysieren, dann bietet sich die Verwendung der Drehimpulse

$$L_i(p,q) := p \times (q - s_i) \qquad (i = 1,2,3)$$

und der Relativwinkel φ_i für die Punkte der Bahn an, die den s_i am nächsten sind. Man erhält eine Streuabbildung $(\varphi_i, l_i) \mapsto (\varphi_j, l_j)$, von der sich (mit Verwendung der obigen Darstellung von W_0) zeigen lässt, dass sie Flächen erhaltend ist. Wählt man $\widehat{W}$ von der folgenden Form, dann nähert man die Streuung an einer Scheibe vom Radius 1 an. Es ist sogar so, dass für Energie $H = \frac{1}{2}$ die Streuabbildung $(\varphi_i, l_i) \mapsto (\varphi_j, l_j)$ die Streuabbildung $F_{ij} : (\varphi_i, u_i) \mapsto (\varphi_j, u_j)$ für die Scheiben approximiert, denn dann ist die Geschwindigkeit 1, und mit $u_i = \sin\Psi$ ist u_i die Geschwindigkeitskomponente radial zu der Scheibe, sodass $u_i = l_i$.

Es stellt sich heraus, dass man die Lösungen der Differentialgleichung in einem Energieintervall in $[0, V_{\max}]$ mit den in diesem Kapitel vorgestellten Methoden analysieren kann. Übrigens hat man damit auch einen Zugang zu nicht gebundenen Bahnen.

Literatur

[AM] R. Abraham, J.E. Marsden: *Foundations of Mechanics*. Reading: Benjamin 1978

[AF] I. Agricola, T. Friedrich: *Globale Analysis*. Vieweg, 2001

[Am] H. Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* de Gruyter

[Ar] V.I. Arnold: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer 1980

[Ar1] V.I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Graduate Texts in Mathematics **60**. Berlin: Springer

[Ar2] V.I. Arnold: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 250. Springer 1988, 2. Aufl.

[De] M. Denker: *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme.* Springer, 2005

[DB] P. Deuflhard, F. Bornemann: *Numerische Mathematik II: Gewöhnliche Differentialgleichungen.* de Gruyter, 2002

[DH] F. Diacu; P. Holmes: *Celestial encounters.* Princeton Univ. Press, 1996

[Fo] Forster, O.: *Analysis, Bd. 1-3*. Vieweg, 1999

[He] H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Teubner, 1995

[Ja] Jänich, K.: *Topologie*. Springer, 1999

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 1995

[Kn] A. Knauf: *Vorlesungen Analysis I-III*. Skripten, Erlangen 2006; erhältlich unter www.mi.uni-erlangen.de/∼knauf

[Ma] A. Martinez: *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Springer 2002

[MV] Meyberg, K., Vachenauer, P.: Höhere Mathematik, Bd 2. Springer, 1999

[PdM] J. Palis, Jr., W. de Melo: *Geometric theory of dynamical systems*. Springer, New York, 1982

[Pe] L. Perko: *Differential equations and dynamical systems.* Springer, 2. Aufl., 1991

[Ta] S. Tabachnikov: *Geometry and Billiards.* American Mathematical Society 2005

[Wa] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer 1996

[Wu] R. Wüst: Höhere Mathematik für Physiker, Bd. 1. de Gruyter, 1995

Index

Ähnlichkeits-Differentialgleichung 72
Airy-Differentialgleichung 74
Anfangsbedingung 13
Anfangswertproblem 13
asymptotisch stabil 63, 64, 67, 113
Banachscher Fixpunktsatz 14
Bassin 68
Billiard 130
Definitionsbereich des Flusses 83
Diffeomorphismus 33
Differentialgleichung 6
    autonome 12
    explizite 9
    explizit zeitabhängige 12
    Gradienten- 97
    Hamiltonsche 107
    homogene 8
    lineare 8
    Ordnung der 8
Dreikörperproblem 6
Duhamel-Prinzip 38
dynamisches System 12
Eigenwert (Sturm-Liouville) 95
erzeugende Funktion 122
Euler-Verfahren 78
Fluchtzeiten 83
Fluss 24
Freiheitsgrad 107
Fundamentalsystem 35
Gleichgewichtslage 24
Gradienten-Vektorfeld 97
Gronwall-Ungleichung 66
Gruppenwirkung 128
Hamilton-Funktion 60, 108
harmonischer Oszillator 41
Heun-Verfahren 78
hölderstetig 146
Impuls 107
Index 46
infinitesimal symplektisch 109
instabil 62, 64, 113
instabiler Unterraum 46
integrabel 127
Jacobi-Identität 109
Jordan-Normalform 29
    reelle 32
Jordanscher Kurvensatz 76
kanonische Transformation 121
Kegel 136
Knoten 51
Kommutator 118
Konfigurationsraum 107
konjugiert 44
Konstanten der Bewegung 73, 127
Kraftfunktion 1
k-Schrittverfahren 77
Liapunov-Funktion 64
Liapunov-stabil 62, 64, 113
Lie-Ableitung 118
Lie-Algebra 109, 120
Lie-Gruppe 112
Linearisierung 59
Lipschitz-Bedingung 13
Lösung 12
    allgemeine 9
    singuläre 10
    spezielle 9
    vollständige 10
Lösungsraum 35
Matrix

hyperbolische 46
Systemmatrix 26
Modellierung 59
Morse-Theorie 106
nicht degeneriert 100
oberhalbstetig 83
ω-Limesmenge 24
Operatornorm 27
Orbit 24
geschlossener 24
Ort 107
Parameter 90
Pendel 59
Periode 24
Phasenporträt 43
Phasenraum 12
erweiterter 12
Picard-Abbildung 17
Poisson-Klammer 115
Poincaré-Abbildung 131
Potential 73
Produkttopologie 145
Quasipolynom 40
Randwertproblem 91
Ruhelage 24
Runge-Kutta-Verfahren 78
Satz
Arnold 128
über die Begradigung 89
Bendixson 76
Hauptsatz 87
Picard-Lindelöf 15
Poincaré-Bendixson 77
Poincaré-Lemma 97
selbstadjungiert 95
Separation der Variablen 70
Shiftabbildung 148
singulärer Punkt 24
Sphäre 105
Spirale 52
stabile Mannigfaltigkeit 100
stabiler Unterraum 46
Störfunktion 26
Sturm-Liouville-Randwertproblem 94
Supremumsmetrik 19
symplektisch 111
Symplektomorphismus 121
Systemmatrix 26
topologischer Raum 76
einfach zusammenhängender 76
zusammenhängender 76
Torus 105, 127
unterhalbstetig 83
Untermannigfaltigkeit 73
Vektorfeld
zeitabhängiges 12
Lipschitz-Bedingung für 13
Verfahrensfehler
globaler 81
lokaler 80
Weierstraß-Kriterium 28
Wellengleichung 7
Wronski-Determinante 36
Zeitumkehr 143
Zentrum 52
Zylinder 127