Funktionalanalysis

Carsten Schütt

February 9, 2005

Contents

1 Topologische Vektorräume **7**

1.1 Topologische Räume 7
1.2 Metrische Räume 19
1.3 Filter und Netze 25
1.4 Topologische Vektorräume 37
1.5 Metrische Vektorräume 43
1.6 Normierte Vektorräume 48
1.7 Lokalkonvexe Räume 57
1.8 L^p-Räume 58
1.9 Die Ungleichungen von Hanner und Clarkson 71
1.10 Khintchine-Ungleichung 79
1.11 Satz von Stone-Weierstraß 84

2 Lineare Operatoren **89**

2.1 Lineare Operatoren 89
2.2 Lineare Funktionale 98
2.3 Der Satz von Hahn-Banach I: Die analytische Verson 101
2.4 Der Satz von Hahn-Banach II: Die geometrische Version . . . 108
2.5 Dualraum und adjungierte Abbildung 122
2.6 Fortsetzungseigenschaft 128
2.7 Der Satz von Baire 133
2.8 Der Satz von der offenen Abbildung 139
2.9 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen 146
2.10 Der Satz von Banach-Steinhaus 150

3 Hilbertraum **153**

3.1 Hilberträume 153

4 Spektraltheorie **167**
4.1 Das Spektrum beschränkter Operatoren 167
4.2 Das Spektrum kompakter Operatoren 178

5 Dualraum **189**
5.1 Der Dualraum von L^p 189
5.2 Urysohns Lemma und die Zerlegung der Eins 195
5.3 Der Darstellungssatz von Riesz 203
5.4 Funktionen beschränkter Variation und $C[a,b]^*$ 216
5.5 Die schwache Topologie 221
5.6 Der Satz von James 238
5.7 Schauder Basen 251
5.8 Der Raum von R.C. James 264

6 Extremalpunkte **271**
6.1 Strikt konvexe und uniform konvexe Mengen 271
6.2 Der Satz von Krein-Milman 278

7 Approximationseigenschaft **285**

8 Lokale Struktur **293**
8.1 Banach-Mazur Abstand 293
8.2 Der Satz von F. John 299
8.3 Typ und Cotyp 307
8.4 Messbarkeit vektorwertiger Funktionen 316
8.5 Unabhängige Zufallsvariablen 319
8.6 Gaußvariablen 323
8.7 Konzentration von Summen von Gaußvariablen 329
8.8 Äquivalenz von Bernoulli und Gauß Variablen 340
8.9 Die Sätze von Slepian und Sudakov-Fernique 342
8.10 Satz von Chevet 350
8.11 Das Volumen von Einheitskugeln 359
8.12 Der Satz von Marcus-Pisier 369
8.13 Das Supremum mehrerer Gaußfunktionen 374
8.14 Eindeutigkeit symmetrischer Basen 376
8.15 Beispiel von Gowers 376
8.16 Satz von Dvoretzky 376
8.17 Absolutsummierende Operatoren 376

8.18 Unbedingte Basen 378
8.19 Satz von Gluskin 382
8.20 Räume, in denen alle Teilräume komplementiert sind 382
8.21 Raum von Tsirelson 382

9 Sonstiges 383
9.1 Fixpunkte 383
9.2 Unstetigkeitsmengen von Funktionen und ihren Ableitungen . 384
9.3 Fragen und Kommentare 388

Chapter 1

Topologische Vektorräume

1.1 Topologische Räume

Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X, die die drei folgenden Bedingungen erfüllt:
(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{T}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$.
(iii) Für alle $S \subseteq \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{A \in S} A \in \mathcal{T}$.
Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen von X.

Beispiel 1 *(i) Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X.*
(ii) Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X und sie heißt die diskrete Topologie.

Falls auf einer Menge X zwei Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ gegeben sind und $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ gilt, dann sagen wir, dass die Topologie $\mathcal{T}_1$ gröber als die Topologie $\mathcal{T}_2$ ist, bzw. die eine Topologie feiner als die andere ist.

Lemma 1 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. Dann gibt es eine Topologie $\mathcal{T}$, die $\mathcal{S}$ enthält und die gröber als alle Topologien ist, die $\mathcal{S}$ enthalten. Man nennt diese Topologie die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{R} | \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \text{ und } \mathcal{R} \text{ ist eine Topologie}\}$$

Dann ist

$$\mathcal{T} = \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{S}} \mathcal{R}$$

eine Topologie. □

Lemma 2 *Die von einem Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie besteht aus $\emptyset$, X und beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{E}$.*

Beweis. Für jede Topologie, die $\mathcal{E}$ enthält gilt, dass sie $\emptyset$, X und beliebige Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{E}$ enthält.

Umgekehrt reicht es zu zeigen, dass das Mengensystem, das aus $\emptyset$, X und beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{E}$ besteht, eine Topologie ist. □

Eine Teilmenge U von X heißt Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls es eine offene Menge $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ mit $x \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O} \subseteq U$ gibt. Allgemeiner sagen wir, dass eine Menge U Umgebung einer Menge A ist, falls es eine offene Menge $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq \mathcal{O}$ und $\mathcal{O} \subseteq U$ gibt.

Lemma 3 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{O}$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung für alle ihre Elemente ist.*

Beweis. Falls $\mathcal{O}$ offen ist, ist sie Umgebung jedes ihrer Elemente.

Umgekehrt, falls eine Menge $\mathcal{O}$ Umgebung jedes ihrer Elemente ist, dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{O}$ eine offene Menge $\mathcal{O}_x$ mit $x \in \mathcal{O}_x$ und $\mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{O}$. Damit folgt, dass

$$\bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x = \mathcal{O}$$

offen ist. □

Eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert in einem topologischen Raum gegen x, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein N gibt, so dass für alle n mit $n \geq N$ die Relation $x_n \in U$ gilt.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff, wenn es zu allen Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ zwei Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

So ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ nicht Hausdorff, wenn die Menge X mehr als ein Element besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ der Potenzmenge heißt Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X$, falls für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt, dass U Umgebung von x ist und falls es zu jeder Umgebung V von x ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subseteq V$ gibt.

Eine Teilmenge von X heißt abgeschlossen, falls deren Komplement offen ist. Es folgt sofort, dass der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist und dass eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist. Insbesondere können wir folgern, dass zu jeder Menge A eine kleinste abgeschlossene Menge $\overline{A}$ gibt, die A enthält. Diese Menge $\overline{A}$ heißt der Abschluss von A.

Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt einer Menge A, falls es in jeder Umgebung von x einen Punkt der Menge A gibt, der von x verschieden ist. Die Menge der Häufungspunkte von A bezeichnen wir mit $\mathrm{HP}(A)$.

Lemma 4 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle Häufungspunkte von sich enthält.*

Beweis. Wir nehmen an, dass A abgeschlossen ist. Dann ist A^c eine offene Menge. Deshalb ist A^c für jedes $x \in A^c$ eine Umgebung. Also gilt für alle $x \notin A$, dass x nicht Häufungspunkt von A ist.

Wir nehmen nun an, dass A alle seine Häufungspunkte enthält. Damit ist jeder Punkt x, der nicht in A enthalten ist, nicht Häufungspunkt von A. Also gibt es eine Umgebung U von x, die einen leeren Schnitt mit A hat. Somit ist auch A^c Umgebung von x. Also ist A^c für jeden Punkt x Umgebung, der in A^c enthalten ist. Also ist A^c offen. $\square$

Lemma 5 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Die Vereinigung von A mit der Menge aller Häufungspunkte von A ist abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(A \cup HP(A))^c$ offen ist. Es sei x weder ein Element von A noch ein Häufungspunkt von A, also $x \in (A \cup HP(A))^c$. Dann gibt

es eine offene Menge $\mathcal{O}_x$, die x enthält und die einen leeren Schnitt mit $A \cup HP(A)$ hat. Wir überlegen uns dies. Da x kein Häufungspunkt von A ist, gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{O}_x$ von x, deren Schnitt mit A kein Element von A enthält, das verschieden von x ist. Da x auch kein Element von A ist, ist der Schnitt von $\mathcal{O}_x$ mit A leer. Es kann auch nicht sein, dass $\mathcal{O}_x$ ein Element von HP(A) enthält, sonst müsste $\mathcal{O}_x$ ein Element von A enthalten, weil $\mathcal{O}_x$ Umgebung eines Häufungspunktes von A wäre.

Also gilt

$$\mathcal{O}_x \cap (A \cup HP(A)) = \emptyset$$

Damit ist

$$\bigcup_{x \in (A \cup HP(A))^c} \mathcal{O}_x$$

eine offene Menge und es gilt

$$(A \cup HP(A))^c = \bigcup_{x \in (A \cup HP(A))^c} \mathcal{O}_x.$$

□

Ein Punkt x einer Menge A heißt innerer Punkt von A, falls A eine Umgebung von x ist. Das Innere $\overset{\circ}{A}$ einer Menge A ist die Menge aller inneren Punkte von A. Der Abschluss $\overline{A}$ einer Menge A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Der Rand einer Menge A ist $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Lemma 6 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Teilmenge. Der Abschluss von A ist die Vereinigung von A mit der Menge ihrer Häufungspunkte.*

Beweis. Der Abschluss $\overline{A}$ enthält nach Lemma alle Häufungspunkte von $\overline{A}$ und damit enthält der Abschluss auch alle Häufungspunkte von A.

Andererseits ist $A \cup HP(A)$ nach Lemma eine abgeschlossene Menge. Es folgt $\overline{A} \subseteq A \cup HP(A)$. □

Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist in einem Punkt $x \in X$ stetig, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.

Zwei topologische Räume sind homöomorph, wenn es eine bijektive, stetige Abbildung zwischen ihnen gibt, deren Inverse ebenfalls stetig ist.

Lemma 7 *Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist in allen Punkten von X stetig.
(ii) Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.
(iii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus der Definition der abgeschlossenen Mengen.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann enthält V eine offene Umgebung $\mathcal{O}$ mit $f(x) \in \mathcal{O}$. Wegen (ii) ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen und es gilt $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Wegen $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq f^{-1}(V)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Menge in Y. Wir zeigen, dass $f^{-1}(\mathcal{O})$ Umgebung für alle ihre Elemente ist. Mit Lemma folgt, dass $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen ist.

Falls $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$, dann $f(x) \in \mathcal{O}$. Da $\mathcal{O}$ offen ist, ist diese Menge Umgebung von $f(x)$. Wegen (i) ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ Umgebung von x. □

Lemma 8 *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume. Die Topologie $\mathfrak{S}$ werde von $\mathcal{E}$ erzeugt. $f : X \to Y$ ist genau stetig, wenn für alle $V \in \mathcal{E}$ gilt, dass $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Beweis. Für eine Menge $V \in \mathcal{S}$ gilt

$$V = \bigcup_{\iota \in I} \bigcap_{i=1}^{n(\iota)} E_i^\iota \qquad\qquad E_i^\iota \in \mathcal{E}$$

Es folgt

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\iota \in I} \bigcap_{i=1}^{n(\iota)} E_i^\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} \bigcap_{i=1}^{n(\iota)} f^{-1}\left(E_i^\iota\right)$$

□

Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, falls es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt:

Für alle $\mathcal{O}_\iota \in \mathcal{T}$, $\iota \in I$, mit $K \subseteq \bigcup_{\iota \in I} \mathcal{O}_\iota$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $\iota_1, \ldots, \iota_n$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_{\iota_j}$.

Lemma 9 *Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.*

Beweis. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und K eine kompakte Teilmenge von X. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von $f(K)$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{O}_\iota)$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K.

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\iota \in I} \mathcal{O}_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} f^{-1}(\mathcal{O}_\iota)$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_1}), \ldots, f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_n})$ von K

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_i})$$

Hieraus folgt

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{\iota_i}$$

□

Lemma 10 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. X ist genau dann kompakt, wenn jede Familie $\mathcal{F}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} : \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$$

gilt, dass

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst an, dass aus der Kompaktheit von K folgt, dass aus der endlichen Durchschnittseigenschaft folgt, dass der Gesamtschnitt nicht leer ist.

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, aber

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset.$$

Wir zeigen, dass X dann nicht kompakt ist.

Die Bedingung $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$ bedeutet, dass A^c, $A \in \mathcal{F}$, eine offene Überdeckung von X ist. Falls X kompakt wäre, dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Dies kann aber nicht sein, weil die endliche Durchschnittseigenschaft gilt.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Wir nehmen an, dass aus der endlichen Durchschnittseigenschaft folgt, dass der Gesamtschnitt nicht leer ist. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$ eine offene Überdeckung von X, also

$$\bigcap_{\iota\in I} \mathcal{O}_\iota^c = \emptyset$$

Also gibt es endlich viele Indices $\iota_1, \ldots, \iota_n$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\iota_i}^c = \emptyset$$

□

Lemma 11 *Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge ist kompakt.*

Beweis. Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge K. Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von A, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Man beachte, dass die Mengen $B \in \mathcal{F}$ in dem topologischen Raum A abgeschlossen sind. Da A abgeschlossen ist, so sind alle Mengen $B \in \mathcal{F}$ abgeschlossene Teilmengen von K. Da K kompakt ist

$$\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B \neq \emptyset$$

□

Lemma 12 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorff Raum, K eine kompakte Teilmenge und $x \in X$ mit $x \notin K$. Dann gibt es eine Umgebung von x*

und eine Umgebung von K, die disjunkt sind. Insbesondere ist eine kompakte Menge K abgeschlossen.

Die Voraussetzung, dass der topologische Raum Hausdorff ist, ist notwendig. Dazu betrachte man den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. In diesem Raum sind $\emptyset$ und X die einzigen offenen Mengen, andererseits sind sämtliche Teilmengen von X kompakt. Damit ist eine echte Teilmenge von X, die nicht die leere Menge ist, kompakt, aber nicht abgeschlossen.

Beweis. Da X Hausdorff ist, gibt es zu x und jedem $y \in K$ eine offene Umgebung U_y von y und eine offene Umgebung V_y von x mit $U_y \cap V_y = \emptyset$ (x ist fest). Dann ist U_y, $y \in K$, eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung.

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

Die rechte Menge ist eine offen Umgebung von K.

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

ist eine offene Umgebung von x und

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \emptyset$$

Wir folgern, dass K abgeschlossen ist. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie ihre Häufungspunkte enthält. Offenbar sind alle Punkte, die nicht in K enthalten sind, nicht Häufungspunkte von K. $\square$

Es seien $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$, $\iota \in I$, topologische Räume. Es sei $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ die Produktmenge der Mengen X_ι, $\iota \in I$. Dies sind alle Abbildungen

$$x : I \to \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$$

so dass für alle $\iota \in I$ die Relation $x(\iota) \in X_\iota$ gilt. Die Abbildung $p_\eta : \prod_{\iota \in I} X_\iota \to X_\eta$, die durch $p_\eta((x_\iota)_{\iota \in I}) = x_\eta$ definiert ist, heißt Projektion

auf die Koordinate η. Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ ist die von den Mengen

$$\{p_\eta^{-1}(\mathcal{O}_\eta) | \eta \in I \text{ und } \mathcal{O}_\eta \in \mathcal{T}_\eta\}$$

erzeugte Topologie. Auf dem Produktraum von zwei Räumen $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ wird die Produkttopologie von den Mengen

$$\{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 | \mathcal{O}_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ und } \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

erzeugt.

Lemma 13 *Es seien $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$, $\iota \in I$, topologische Räume. Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ ist die gröbste Topologie, für die alle Projektionen p_η stetig sind.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Projektionen stetig sind. Dazu weisen wir nach, dass das Urbild einer offenen Menge offen ist. Dies ist offensichtlich, weil die Produkttopologie die gröbste Topologie ist, so dass alle Mengen $p_\eta^{-1}(\mathcal{O})$ offen sind, falls $\mathcal{O}$ offen ist.

Unter allen Topologien, bzgl. denen die Projektionen stetig sind gibt es eine gröbste. Dies folgt aus Lemma. Aus der Stetigkeit der Projektionen folgt, dass für alle η und alle offenen Mengen $\mathcal{O}$ in X_η gilt, dass $p_\eta^{-1}(\mathcal{O})$ offen ist. Die gröbste Topologie, bzgl. der alle Projektionen stetig sind, umfasst also diese Mengen. Somit ist die gröbste Topologie, bzgl. der alle Projektionen stetig sind, feiner als die Produkttopologie. □

Lemma 14 *Es seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Es sei $\mathcal{T}$ die Familie aller Mengen, die beliebige Vereinigungen von Mengen*

$$\prod_{i \in I} U_i = \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i \middle| \forall i \in I : x(i) \in U_i \right\}$$

sind, die die folgende Eigenschaft erfüllen: Für alle $i \in I$ ist U_i eine offene Menge und bis auf endlich viele i gilt $U_i = X_i$. Dann ist $\mathcal{T}$ gleich der Produkttopologie.

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Die leere Menge ist Element von $\mathcal{T}$. Außerdem sind beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$.

Wir müssen noch zeigen, dass auch endliche Schnitte von Mengen in $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegt.

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left(\bigcup_{j \in J} \prod_{i \in I} U_i^j \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} \prod_{i \in I} V_i^k \right) \\ &= \bigcup_{j \in J, k \in K} \left(\prod_{i \in I} U_i^j \right) \cap \left(\prod_{i \in I} V_i^k \right) = \bigcup_{j \in J, k \in K} \prod_{i \in I} (U_i^j \cap V_i^k) \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie. Wir prüfen nach, dass sie mit der Produkttopolgie übereinstimmt. Die Produkttopologie wird von Mengen

$$p_\eta^{-1}(\mathcal{O}_\eta) = \prod_{i \in I} U_i$$

mit $U_i = X_i$, falls $i \neq \eta$, und $U_\eta = \mathcal{O}$, erzeugt. $\square$

Beispiel 2 *Es sei C die Cantor-Menge, die mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ausgestattet ist. Der zweielementige Raum $\{0,1\}$ sei mit der diskreten Topologie ausgestattet und $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie. Dann sind C und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph.*

Insbesondere ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kompakt.

Beweis. Die Cantor-Menge ist durch

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \middle| c_n \in \{0,2\} \right\}$$

gegeben. Die Abbildung $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$$

ist eine bijektive Abbildung, deren Inverse f^{-1} stetig ist. Da C kompakt ist, so folgt, dass f auch stetig ist und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kompakt.

Wir zeigen, dass f bijektiv ist. Die Surjektivität folgt unmittelbar aus der Definition der Cantor-Menge. Wir weisen nun die Injektivität nach. Es seien $a, b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $f(a) = f(b)$. Es sei n_0 die größte, ganze Zahl, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < n_0$ die Gleichung $a_n = b_n$ gilt. Also gilt $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ und wir können annehmen, dass $a_{n_0} = 1$ und $b_{n_0} = 0$. Damit folgt

$$0 = f(a) - f(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(a_n - b_n)}{3^n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2(a_n - b_n)}{3^n}$$

und weiter

$$0 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} = \frac{1}{3^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} \geq \frac{1}{3^{n_0}} - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n_0}} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n_0}} > 0$$

Dies ist ein Widerspruch und f ist damit injektiv.

Wir zeigen nun, dass f^{-1} stetig ist. Wir untersuchen die Stetigkeit in einem Punkt $f(a)$. Wir weisen nach, dass das Bild jeder Umgebung U von $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ unter f eine Umgebung von $f(a)$ ist.

Wegen Lemma 14 sind die offenen Mengen in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Vereinigungen von Mengen der Form

$$U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

wobei $U_n = \{0,1\}$ bis auf endlich viele n gilt. Eine offene Umgebung U von a enthält a, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Relation $a_n \in U_n$. Deswegen können wir annehmen, dass eine Umgebung U von a von der Gestalt

$$\{a_1\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \{0,1\} \times \cdots$$

ist. Das Bild dieser Menge unter f ist

$$\left\{ \sum_{n=1}^{n_0} \frac{2a_n}{3^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \middle| c_n \in \{0,2\} \right\}$$

Die offenen Mengen in C sind Durchschnitte von offenen Mengen in $\mathbb{R}$ mit C. Deshalb ist

$$C \cap \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} - \frac{1}{3^{n_0+2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n_0+2}} \right)$$

eine offene Umgebung von $f(a)$ und

$$C \cap \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} - \frac{1}{3^{n_0+2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n_0+2}} \right) \subseteq \left\{ \sum_{n=1}^{n_0} \frac{2a_n}{3^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \middle| c_n \in \{0,2\} \right\}$$

Um diese Inklusion nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass in der Menge auf der linken Seite nur solche Elemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$$

auftreten, die $c_n = 2a_n$ für alle n mit $1 \leq n \leq n_0$ erfüllen. Wir weisen dies nach. Es sei also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \in C \cap \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} - \frac{1}{3^{n_0+2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n_0+2}} \right)$$

Es folgt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - 2a_n}{3^n} \right| < \frac{1}{3^{n_0+2}}$$

Es sei m_0 die kleinste Zah aller n mit $c_n \neq 2a_n$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\frac{1}{3^{n_0+2}} > \frac{|c_{m_0} - 2a_{m_0}|}{3^{m_0}} - \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{m_0}}$$

Also gilt $n_0 + 2 < m_0$. $\square$

Ein Satz von Alexandrov und Hausdorff besagt, dass jeder kompakte, metrische Raum stetiges Bild der Cantor-Menge ist [Ben]. Dieser Satz hat eine Reihe von überraschenden Anwendungen.

1.2 Metrische Räume

Es sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Metrik, falls

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Wir bezeichnen das Paar (X, d) als metrischen Raum. Die von der Metrik erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie, die die Mengen

$$\{x|d(x, y) < \epsilon\} \qquad y \in X \quad \epsilon > 0$$

enthält. Wir bezeichnen die Mengen

$$B(y, r) = \{x|d(x, y) < r\}$$

als (offene) Kugeln mit Mittelpunkt y und Radius r. Diese offenen Kugeln sind offene Mengen. Wir bezeichnen

$$\bar{B}(y, r) = \{x|d(x, y) \leq r\}$$

als die abgeschlossene Kugel. Die abgeschlossene Kugel ist eine abgeschlossene Menge. Man beachte, dass der Abschluss $\overline{B(y, r)} = \overline{\{x|d(x, y) < r\}}$ der offenen Kugel in der Menge $\{x|d(x, y) \leq r\}$ enthalten ist, aber i.a. nicht gleich ist.

Wir sagen, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist, wenn es eine Metrik auf X gibt, die die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt.

Beispiel 3 *Es sei X eine Menge und*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(X, d) ist ein metrischer Raum und die erzeugte Topologie ist die diskrete.

Beispiel 4 *Es sei $M = \{-1, 0\} \cup (-\infty, -2] \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$ und d sei die Metrik auf den reellen Zahlen, $d(x, y) = |x - y|$. Dann gilt*

(i) $\bar{B}(0,1)$ *ist nicht der Abschluss von* $B(0,1)$*.*
(ii) $\bar{B}(0,1)$ *ist offen, aber keine offene Kugel, d.h. für alle* x *und* r *gilt* $\bar{B}(0,1) \neq B(x,r)$*.*
(iii) $B(0,1)$ *ist abgeschlossen, aber keine abgeschlossene Kugel. d.h. d.h. für alle* x *und* r *gilt* $B(0,1) \neq \bar{B}(x,r)$*.*

Beweis. Es gilt $B(0,1) = \{0\} \cup (\frac{1}{2},1)$, $\bar{B}(0,1) = \{-1,0\} \cup (\frac{1}{2},1)$ und $\overline{B(0,1)} = B(0,1)$ □

Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy Folge konvergiert.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes heißt total beschränkt, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Kugeln $B(x_1,\epsilon),\ldots,B(x_n,\epsilon)$ mit demselben Radius ϵ gibt, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\epsilon)$$

gilt.

Ein topologischer Raum heißt abzählbar kompakt, falls jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Lemma 15 *Es sei* (M,d) *ein metrischer Raum und* K *eine Teilmenge dieses metrischen Raumes. Dann sind äquivalent:*
(i) K *ist kompakt.*
(ii) K *ist abzählbar kompakt.*
(iii) (Bolzano-Weierstrass) Jede Folge in K *hat eine Teilfolge, die in* K *konvergiert.*
(iv) K *ist vollständig und total beschränkt.*

Für beliebige topologische Räume folgt nicht aus der Folgenkompaktheit die Kompaktheit. Umgekehrt folgt auch nicht aus der Kompaktheit die Folgenkompaktheit.

Lemma 16 *Es sei* X *ein kompakter, topologischer Raum. Dann ist* X *abzählbar kompakt.*

Beweis. Es sei A eine Teilmenge von X, die keine Häufungspunkte besitzt. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, die höchstens ein Element aus A enthält (nämlich x selbst). Es folgt

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Also ist A eine endliche Menge. □

Lemma 17 *X sei ein metrischer Raum und A eine abzählbar kompakte Teilmenge. Dann ist A folgenkompakt.*

Beweis. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in A. Falls die Folge nur endlich viele Elemente enthält, dann gibt es eine konstante Teilfolge, die insbesondere konvergiert.

Falls die Folge unendlich viele verschiedene Punkte enthält, dann hat die Menge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ einen Häufungspunkt und es gibt eine Teilfolge, die konvergiert. □

Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine Überdeckung einer Teilmenge A eines metrischen Raumes X. $\delta > 0$ heisst Lebesgue Zahl für diese Überdeckung, falls zu jeder Teilmenge B von A, deren Durchmesser kleiner als δ ist, ein $\mathcal{O}_\iota$ mit $B \subseteq \mathcal{O}_\iota$ existiert.

Lemma 18 *Jede offene Überdeckung einer folgenkompakten Teilmenge K eines metrischen Raumes hat eine strikt positive Lebesgue Zahl.*

Beweis. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K. Wir nehmen an, dass $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, keine strikt positive Lebesgue Zahl besitzt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge B_n von K, deren Durchmesser kleiner als $\frac{1}{n}$ ist und die in keiner der Mengen $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, enthalten ist.

Wir wählen $b_n \in B_n$. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge.

$$b_0 = \lim_{j\to\infty} b_{n_j}$$

Es gibt ein ι_0 mit $b_0 \in \mathcal{O}_{\iota_0}$. Es folgt, dass ein $\epsilon > 0$ mit $B(b_0, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}_\iota$ existiert. Wir wählen nun j so groß, dass

$$d(b_0, b_{n_j}) < \frac{\epsilon}{4} \qquad\qquad \frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{4}$$

Es folgt

$$B_{n_j} \subseteq B(b_0, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}_{\iota_0}$$

Dies folgt aus der Dreiecksungleichung. Es sei $y \in B_{n_j}$. Dann gilt $d(y, b_{n_j}) < \frac{\epsilon}{4}$.

$$d(y, b_0) \leq d(y, b_{n_j}) + d(b_{n_j}, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

□

Lemma 19 *Es sei X ein metrischer Raum und K eine folgenkompakte Teilmenge. Dann ist K total beschränkt.*

Beweis Wir zeigen, dass K nicht folgenkompakt ist, wenn K nicht total beschränkt ist.

Wir wählen eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, in K, so dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ gilt. Es gibt ein solches $\epsilon > 0$, weil K nicht total beschränkt ist. Eine solche Folge besitzt keine konvergente Teilfolge. □

Lemma 20 *Es sei X ein metrischer Raum und K eine folgenkompakte Teilmenge. Dann ist K kompakt.*

Beweis. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K. Da K folgenkompakt ist, besitzt die Überdeckung eine strikt positive Lebesgue Zahl δ. Außerdem ist K total beschränkt, weil K folgenkompakt ist.

Es gibt also Mengen B_i, $i = 1, \ldots, n$, deren Durchmesser kleiner als δ sind, mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

Dann gibt es zu jedem i ein ι_i mit $B_i \subseteq \mathcal{O}_{\iota_i}$. Also

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\iota_i}$$

□

Beweis von Lemma 15. $(i) \Leftarrow (iv)$: Wir zeigen $\neg(i) \Rightarrow \neg(iv)$. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir zeigen, dass es eine Folge $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, mit
(i) Keine Kugel $B(x_n, \frac{1}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$, wird von endlich vielen Mengen $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, überdeckt.
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \neq \emptyset$.
gibt. Wir zeigen dies durch Induktion. Da K kompakt ist, ist K total beschränkt, also gibt es endlich viele Kugeln $B(x_k^1, \frac{1}{2})$, $k = 1, \ldots, N_1$, mit $x_k^1 \in K$ und

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_1} B(x_k^1, \frac{1}{2}).$$

Es muss ein k_0 geben, so dass $B(x_{k_0}^1, \frac{1}{2})$ nicht von endlich vielen $\mathcal{O}_\iota$ überdeckt wird. Anderenfalls würde es eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{O}_{\iota_i}$, $i = 1, \ldots, n$ von K geben. Wir setzen $x_1 = x_{k_0}^1$.

Wir machen nun den Induktionsschritt von n nach $n+1$. K total beschränkt, also gibt es endlich viele Kugeln $B(x_k^1, \frac{1}{2})$, $k = 1, \ldots, N_1$, mit $x_k^{n+1} \in K$ und

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_{n+1}} B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}).$$

Es sei J die Menge aller k, so dass

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Dann gilt

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \subseteq \bigcup_{k \in J} B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$$

Es muss ein $k_0 \in J$ geben, so dass $B(x_{k_0}^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$ nicht von endlich vielen $\mathcal{O}_\iota$ überdeckt werden kann. Anderenfalls könnten wir $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ durch endlich viele $\mathcal{O}_\iota$ überdecken. Wir setzen $x_{n+1} = x_{k_0}^{n+1}$.

Wir zeigen nun, dass für alle k und ℓ mit $k \leq \ell$

$$d(x_k, x_\ell) \leq \frac{1}{2^{k-2}}$$

gilt. Wegen (1.1) gibt es ein $y \in B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$ und deshalb

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y) + d(y, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Hieraus folgt

$$d(x_k, x_\ell) \leq \sum_{i=k}^{\ell-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=k}^{\ell-1} \frac{1}{2^{i-1}} \leq \frac{1}{2^{k-2}}$$

Somit ist x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge. Falls diese Cauchy-Folge nicht in K konvergiert sind wir fertig, wir haben $\neg(iv)$ gezeigt. Nehmen wir also an, dass die Cauchy-Folge in K konvergiert. Es sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Weil $x \in K$, gibt es ein $\iota_0 \in I$ mit $x \in \mathcal{O}_{\iota_0}$. Da O_{ι_0} offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subseteq \mathcal{O}_{\iota_0}$. Nun wählen wir n so groß, dass $d(x, x_n) < \frac{\delta}{4}$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{4}$. Es folgt

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \subseteq \mathcal{O}_{\iota_0}$$

weil für $y \in B(x_n, \frac{1}{2^n})$ die Ungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\delta}{4} + \frac{1}{2^n} < \delta$$

gilt. Dies kann nicht sein, weil $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ nicht durch endlich viele $\mathcal{O}_\iota$ überdeckt werden kann. $\square$

1.3 Filter und Netze

Die Stetigkeit einer Funktion zwischen metrischen Räumen lässt sich mit Hilfe von konvergenten Folgen charakterisieren: Eine Funktion f ist genau dann in einem Punkt x stetig, wenn für alle Folgen x_n, $n \in \mathbb{N}$, die gegen x konvergieren, gilt, dass die Folgen $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $f(x)$ konvergieren. Die Kompaktheit eines metrischen Raumes lässt sich ebenso durch Folgen charakterisieren: Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Für allgemeine topologische Räume reichen Folgen nicht mehr aus. Wir müssen den Begriff der Folge verallgemeinern. Dies führt auf den Begriff des Netzes.

Eine Menge I mit einer Relation $\leq$ heißt gerichtete Menge, falls
(i) Für alle $\iota \in I$ gilt, dass $\iota \leq \iota$.
(ii) Für alle $\iota_1, \iota_2, \iota_3 \in I$ mit $\iota_1 \leq \iota_2$ und $\iota_2 \leq \iota_3$ gilt, dass $\iota_1 \leq \iota_3$.
(iii) Für alle $\iota_1, \iota_2 \in I$ gibt es ein ι_3 mit $\iota_1 \leq \iota_3$ und $\iota_2 \leq \iota_3$.

Ein Netz in einer Menge M ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge in die Menge M (ebenso wie eine Folge eine Abbildung der natürlichen Zahlen in eine Menge M ist). Jede Folge ist ein Netz.

Ein Netz x_ι, $\iota \in I$, in einem topologischen Raum X konvergiert gegen ein Element x, falls für alle Umgebungen U von x ein ι_0 existiert, so dass für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$ gilt, dass $x_\iota \in U$.

Der Abschluss einer Menge A ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten. Äquivalent ist die Aussage: x gehört zum Abschluss der Menge A, wenn es in jeder Umgebung U von x ein Element der Menge A gibt (Lemma 6).

Für reellwertige Netze lassen sich auch Limesinferior und Limessuperior definieren.

Lemma 21 *Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Ein Element x gehört genau dann zum Abschluss von A, wenn es ein Netz in A gibt, das gegen x konvergiert.*

Beweis. Es sei x im Abschluss von A. Dann besitzt jede Umgebung U von x einen nichtleeren Schnitt mit A. Wir wählen aus jedem Schnitt $U \cap A$ ein Element x_U. Dann ist

$$x_U, \ U \text{ ist Umgebung von } x$$

ein Netz, das gegen x konvergiert, wenn wir sagen, dass U kleiner als V ist, wenn V in U enthalten ist. Wir zeigen, dass es sich um ein Netz handelt. Es gilt trivialerweise $U \leq U$. Falls $U_1 \leq U_2$ und $U_2 \leq U_3$, dann ist also U_2 in U_1 enthalten und U_2 ist in U_3 enthalten. Also ist auch U_3 in U_1 enthalten und $U_1 \leq U_3$. Für je zwei Umgebungen U und V von x gilt, dass auch $U \cap V$ eine Umgebung von x ist und es gilt $U \leq U \cap V$ und $V \leq U \cap V$.

Wir zeigen nun, dass das Netz gegen x konvergiert. Für jede Umgebung U und alle Umgebungen V mit $V \geq U$ gilt $x_V \in U$.

Wir nehmen nun an, dass es ein Netz x_ι, $\iota \in I$, in A gibt, das gegen x konvergiert. Dann gibt es zu jeder Umgebung U von x ein ι_0, so dass für alle ι mit $\iota_0 \leq \iota$ die Relation $x_\iota \in U$ gilt. Insbesondere gilt $A \cap U \neq \emptyset$. $\square$

Es seien X und Y zwei topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f im Punkt x stetig ist, falls für alle Umgebungen V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert, so dass $U \subseteq f^{-1}(V)$.

Lemma 22 *Es seien X und Y zwei topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f ist genau dann in einem Punkt x stetig, wenn für alle Netze x_ι, $\iota \in I$, die gegen x konvergieren, gilt, dass das Netz $f(x_\iota)$, $\iota \in I$, gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz, das gegen x konvergiert und V eine Umgebung von $f(x)$. Da f in x stetig ist, ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Weil das Netz x_ι, $\iota \in I$, gegen x konvergiert, existiert ein ι_0, so dass für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$ die Relation $x_\iota \in f^{-1}(V)$ gilt. Dann folgt für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$

$$f(x_\iota) \in f(f^{-1}(V)) = V$$

Es sei V eine Umgebung von $f(x)$. Wir nehmen an, dass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Wir definieren nun ein Netz, das gegen x konvergiert, aber das Bild dieses Netzes konvergiert nicht gegen $f(x)$. Es sei $\mathcal{U}$ die Familie aller Umgebungen von x. Dies ist eine gerichtete Menge mit der Relation $U_1 \leq U_2$, wenn $U_2 \subseteq U_1$.

Da $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist, gilt

$$U \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Wir wählen ein $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Nach Konstruktion konvergiert das Netz x_U, $U \in \mathcal{U}$, gegen x. Aber für alle U gilt

$$f(x_U) \notin V$$

□

Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz. Weiter sei J eine gerichtete Menge und $\phi : J \to I$ eine Abbildung, so dass für alle $\iota \in I$ ein $j_0 \in J$ existiert, so dass für alle $j \geq j_0$ gilt $\iota \leq \phi(j)$. Dann nennt man das Netz

$$x_{\phi(j)}, j \in J$$

ein Teilnetz von x_ι, $\iota \in I$.

Man beachte, dass ein Teilnetz einer Folge nicht eine Teilfolge sein muss.

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt Filter, falls
(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
(ii) Für alle $A \subseteq X$ mit $B \subseteq A$ und $B \in \mathcal{F}$ gilt $A \in \mathcal{F}$.
(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

Die Familie aller Umgebungen eines Punktes ist ein Filter.

Wir sagen, dass ein Filter $\mathcal{F}_1$ feiner ist als ein Filter $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. "feiner als" ist eine Halbordnung (reflexiv, antisymmetrisch und transitiv) auf der Menge aller Filter. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element (Ein Element ist maximal, wenn es kein Element gibt, das echt größer ist. Es kann natürlich mehrere maximale Elemente geben.). Ein solches maximales Element nennen wir Ultrafilter.

Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten. Um dies einzusehen, betrachten wir alle Filter, die einen gegebenen Filter enthalten. Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass es unter diesen einen maximalen Filter gibt.

Lemma 23 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter in X. $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, falls für alle Teilmengen A und B mit $A \cup B \in \mathcal{F}$ gilt, dass $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ die Eigenschaft besitzt: $\forall A, B \subseteq X, A \cup B \in \mathcal{F} : A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$. Wir zeigen die äquivalente Aussage: Falls diese Eigenschaft nicht gilt, dann ist $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter.

Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter und es gelte

$$A \notin \mathcal{F} \qquad B \notin \mathcal{F} \qquad A \cup B \in \mathcal{F}$$

Wir betrachten nun die Familie $\mathcal{G}$ aller Teilmengen C von X mit

$$A \cup C \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{G}$ ist ein Filter und $\mathcal{G}$ ist strikt feiner als $\mathcal{F}$. Wir prüfen nach, dass $\mathcal{G}$ ein Filter ist.

$\emptyset \notin \mathcal{G}$, weil $A \notin \mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass $D \in \mathcal{G}$, falls $C \in \mathcal{G}$ und $C \subseteq D$. $C \in \mathcal{G}$ bedeutet, dass $A \cup C \in \mathcal{F}$. Weil $A \cup C \subseteq A \cup D$, so gilt auch $A \cup D \in \mathcal{F}$. Also gilt $D \in \mathcal{G}$.

Es seien nun $G_i \in \mathcal{G}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$, dass $A \cup G_i \in \mathcal{F}$. Weil $\mathcal{F}$ ein Filter ist, folgt

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A \cup G_i) \in \mathcal{F}.$$

Deshalb gilt

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i \right) \in \mathcal{F}$$

und somit $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{G}$. Wir prüfen nach, dass $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$ ist. Falls $C \in \mathcal{F}$, dann ist auch $A \cup C \in \mathcal{F}$, weil $C \subseteq A \cup C$. Also folgt $C \in \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist nicht gleich $\mathcal{F}$, weil $B \in \mathcal{G}$ aber $B \notin \mathcal{F}$. Deshalb ist $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter.

Nun zeigen wir die Umkehrung. Wir nehmen nun an, dass für alle Teilmengen A und B mit $A \cup B \in \mathcal{F}$ gilt, dass $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$ gilt. Es sei $\mathcal{G}$ ein Filter, der feiner als $\mathcal{F}$ ist, und $C \in \mathcal{G}$. Dann gilt $C^c \notin \mathcal{G}$, weil sonst $\emptyset = C \cap C^c \in \mathcal{G}$. Weil $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$ ist, folgt $C^c \notin \mathcal{F}$. Da aber $C \cup C^c = X \in \mathcal{F}$ gilt, folgt $C \in \mathcal{F}$. Also gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. $\square$

Ein Netz x_ι, $\iota \in I$, heißt universales Netz, wenn für alle Teilmengen A von X ein ι_0 existiert, so dass entweder für alle $\iota \geq \iota_0$

$$x_\iota \in A$$

oder für alle $\iota \geq \iota_0$

$$x_\iota \in X \setminus A$$

gilt.

Eine konstante Folge ist ein universales Netz. Die Folge $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist kein universales Netz in $\mathbb{R}$. Um dies nachzuweisen, wählen wir die Menge $A = \{\frac{1}{2n} | n \in \mathbb{N}\}$. Es gibt auch keine Teilfolge, die universales Netz ist.

Lemma 24 *Jedes Netz besitzt ein universales Teilnetz.*

Beweis. Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz in X. Wir betrachten die Mengen

$$A_\iota = \{x_j | \iota \leq j\} \qquad \iota \in I$$

und die Familie $\mathcal{F}$ aller Mengen F, so dass ein $\iota \in I$ mit $A_\iota \subseteq F$ existiert. $\mathcal{F}$ ist ein Filter. Wir weisen dies nach. Falls $F \in \mathcal{F}$, dann gibt es ein $\iota \in I$, so dass $A_\iota \subseteq F$. Deshalb gilt $F \neq \emptyset$.

Es seien $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq G$. Dann gibt es ein $\iota \in I$ mit $A_\iota \subseteq F$. Also gilt $A_\iota \subseteq G$ und $G \in \mathcal{F}$.

Es seien $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$. Dann gibt es $A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}$, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Inklusion $A_{\iota_i} \subseteq F_i$ gilt. Deshalb gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\iota_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} F_i.$$

Zu $\iota_1, \ldots, \iota_n$ gibt es ein ι_0, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Relation $\iota_i \leq \iota_0$ gilt. Hiermit folgt

$$A_{\iota_0} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_{\iota_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

und somit $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

$\mathcal{F}$ ist in einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ enthalten. Wir betrachten nun die gerichtete Menge

$$\mathcal{I} = \{(U, \iota) | \; U \in \mathcal{U}, \; \iota \in I, \; x_\iota \in U\} \tag{1.2}$$

mit der Relation $(U_1, \iota_1) \leq (U_2, \iota_2)$, falls $U_2 \subseteq U_1$ und $\iota_1 \leq \iota_2$. (Man beachte, dass U und ι durch $x_\iota \in U$ verknüpft sind.) Wir weisen nach, dass es sich um eine gerichtete Menge handelt.

Es seien $(U_1, \iota_1), (U_2, \iota_2), (U_3, \iota_3) \in J$ mit $(U_1, \iota_1) \leq (U_2, \iota_2)$ und $(U_2, \iota_2) \leq (U_3, \iota_3)$. Das bedeutet

$$U_1 \supseteq U_2 \qquad \iota_1 \leq \iota_2 \qquad U_2 \supseteq U_3 \qquad \iota_2 \leq \iota_3$$

Also folgt

$$U_1 \supseteq U_3 \qquad \iota_1 \leq \iota_3$$

Es seien $(U_1, \iota_1), (U_2, \iota_2) \in J$. Dann gilt $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, weil $\mathcal{U}$ ein Filter ist. Weil I eine gerichtete Menge ist, gibt es ein ι_0 mit $\iota_0 \geq \iota_1$ und $\iota_0 \geq \iota_2$. Es gilt

$$A_{\iota_0} \cap V \neq \emptyset.$$

Falls $A_{\iota_0} \cap V = \emptyset$, dann würde $\emptyset \in \mathcal{U}$ gelten, weil $A_{\iota_0} \in \mathcal{U}$ und $V \in \mathcal{U}$. Die leere Menge ist aber in keinem Filter enthalten.

Also gibt es ein j mit $j \geq \iota_0$ und $x_j \in V$. Nach (1.2) gilt $(V, j) \in \mathcal{I}$ und

$$(U_1, \iota_1) \leq (V, j) \qquad (U_2, \iota_2) \leq (V, j)$$

Also ist $\mathcal{I}$ eine gerichtete Menge.

Wir definieren nun das Teilnetz. Es sei $\phi : \mathcal{I} \to I$ mit

$$\phi(U, \iota) = \iota.$$

Wir zeigen, dass $x_{\phi(U,\iota)}$, $(U, \iota) \in \mathcal{I}$, ein Teilnetz ist. Es sei $\iota_0 \in I$. Dann gilt für alle (U, ι) mit $(U, \iota) \geq (X, \iota_0)$, dass

$$\phi((U, \iota)) = \iota \geq \iota_0$$

Wir zeigen, dass das Teilnetz $x_{\phi(U,\iota)}$, $(U, \iota) \in \mathcal{I}$, universal ist. Es sei $M \subseteq X$. Dann gilt $M \in \mathcal{U}$ oder $M^c \in \mathcal{U}$, weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist. O.E.d.A können wir annehmen, dass der erste Fall vorliegt. Falls

$$M \cap \{x_{\phi(U,\iota)} | (U, \iota) \in \mathcal{I}\} = \emptyset$$

dann gilt

$$M^c \supseteq \{x_{\phi(U,\iota)} | (U, \iota) \in \mathcal{I}\}$$

und die Behauptung ist bewiesen. Falls

$$M \cap \{x_{\phi(U,\iota)} | (U, \iota) \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset$$

dann gibt es ein (U_0, ι_0) mit $x_{\phi(U_0,\iota_0)} = x_{\iota_0} \in M$. Da $(U_0, \iota_0) \in \mathcal{I}$, gilt $x_{\iota_0} \in U_0$. Also gilt $x_{\iota_0} \in M \cap U_0$. Weil $M \in \mathcal{U}$ und $U_0 \in \mathcal{U}$, gilt $U_0 \cap M \in \mathcal{U}$. Damit haben wir nachgewiesen, dass

$$(M \cap U_0, \iota_0) \in \mathcal{I}.$$

Es gilt für alle $(V, \iota) \geq (U_0 \cap M, \iota_0)$, dass $V \subseteq U_0 \cap M$ und $\iota_0 \leq \iota$. Wegen $(V, \iota) \in \mathcal{I}$ gilt $x_\iota \in V$.

$$x_{\phi(V,\iota)} = x_\iota \in V \subseteq M$$

Also gilt für alle (V, ι) mit $(U_0 \cap M, \iota_0) \leq (V, \iota)$

$$x_{\phi(V,\iota)} \in M.$$

□

Man sagt, dass ein topologischer Raum A die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, wenn für alle Familien A_i, $i \in I$, von abgeschlossenen Teilmengen von A mit

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$$

endlich viele Mengen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ existieren, so dass

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Lemma 25 *Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*
(i) A ist kompakt.
(ii) A hat die endliche Durchschnittseigenschaft.
(iii) Jedes universale Netz in A konvergiert in A.
(iv) Jedes Netz in A hat ein Teilnetz, das in A konvergiert.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) hatten wir bereits gezeigt (Lemma 10).

Wir zeigen, dass aus (i) die Eigenschaft (iii) folgt. Wir nehmen dazu an, dass es ein universales Netz x_ι, $\iota \in I$, in A gibt, das nicht in A konvergiert.

Dann gibt es für jedes $z \in A$ eine offene Umgebung $U(z)$, so dass für alle ι ein $j \geq \iota$ mit

$$x_j \notin U(z)$$

existiert. Da das Netz universal ist, muss es ein ι geben, so dass für alle j mit $j \geq \iota$ die Relation $x_j \in U(z)$ oder für alle j mit $j \geq \iota$ die Relation $x_j \in U(z)^c$ gilt. Also gibt es ein ι_z, so dass für alle $j \geq \iota_z$ gilt, dass $x_j \in U(z)^c$.

Da A kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung

$$A \subseteq \bigcup_{z \in A} U(z)$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(z_i)$$

Nach unserer obigen Überlegung gilt dann für alle j, die größer als alle $\iota_{z_1}, \ldots, \iota_{z_n}$ sind, dass

$$x_j \in \bigcap_{i=1}^{n} U(z_i)^c$$

Die letztere Menge hat aber einen leeren Schnitt mit A. Dies kann nicht sein, da das Netz in A liegt.

Wir zeigen, dass (iv) aus (iii) folgt. Nach Lemma 24 besitzt jedes Netz ein universales Teilnetz. Nach (iii) konvergiert dieses Teilnetz.

Nun zeigen wir, dass (i) aus (iv) folgt, bzw. dass $\neg$(iv) aus $\neg$(i) folgt. Wenn A nicht kompakt ist, dann gibt es eine offene Überdeckung,

$$A = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$$

die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Familie aller endlichen Teilmengen von I. Wir setzen $F_1 \leq F_2$, falls $F_1 \subseteq F_2$. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ existiert ein

$$x_F \in A \setminus \bigcup_{\iota \in F} U_\iota$$

Das Netz x_F, $F \in \mathcal{F}$, besitzt kein konvergentes Teilnetz, das in A konvergiert. Falls es ein konvergentes Teilnetz $x_{\phi(j)}$, $j \in J$, gibt, das in A konvergiert, dann gibt es einen Grenzwert x in A.

Deshalb gibt es ein ι mit $x \in U_\iota$. Für diese offene Umgebung U_ι zeigen wir, dass zu jedem j_0 ein j mit $j \geq j_0$ gibt, so dass $x_{\phi(j)} \notin U_\iota$. Da $\phi(j)$, $j \in J$, ein Teilnetz ist, gibt es zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein j_1, so dass für alle $j \geq j_1$ die Relation $F \leq \phi(j)$ gilt. Es gilt

$$x_{\phi(j)} \notin U_\iota \qquad \text{falls } \{\iota\} \leq \phi(j) \text{ bzw. } \iota \in \phi(j)$$

Zu gegebenem j_0 betrachten wir $\phi(j_0) \cup \{\iota\}$. Es gibt ein j_1, so dass für alle j mit $j \geq j_1$ die Relation $\phi(j_0) \cup \{\iota\} \leq \phi(j)$ gilt. Da $j_0 \leq j_1$ nicht gelten muss, wählen wir j_2 mit $j_0 \leq j_2$ und $j_1 \leq j_2$. Dann gilt für alle j mit $j \geq j_2$ die Relation $\phi(j_0) \cup \{\iota\} \leq \phi(j)$. Also gilt für alle j mit $j \geq j_2$, dass $x_{\phi(j)} \notin U_\iota$. Also liegt keine Konvergenz vor. $\square$

Es seien T_α, $\alpha \in A$, Mengen. Die Produktmenge ist

$$\prod_{\alpha \in A} T_\alpha = \left\{ x : A \to \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha \,\middle|\, \forall \alpha \in A : x(\alpha) \in T_\alpha \right\}$$

Die Abbildungen

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} T_\alpha \to T_\beta$$

mit $\pi_\beta(x) = x(\beta)$ bezeichnet man als Koordinatenprojektionen. Falls T_α topologische Räume sind, dann gilt für die Produkttopologie: Eine Teilmenge U von $\prod_{\alpha \in A} T_\alpha$ ist genau dann offen, falls sie Vereinigung von Mengen V der folgenden Form ist: $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$, wobei V_α eine offene Teilmenge in T_α ist und bis auf endlich viele α die Gleichung $V_\alpha = T_\alpha$ gilt.

Satz 1 *(Tichonov) Es seien X_ι, $\iota \in I$, topologische Räume und $K_\iota \subseteq X_\iota$, $\iota \in I$, kompakte Mengen. Dann ist*

$$\prod_{\iota \in I} K_\iota \text{ eine kompakte Menge in } \prod_{\iota \in I} X_\iota$$

Andrei Nikolaevich Tichonov (1906-)
Der Satz von Tichonov ist äquivalent zum Lemma von Zorn.

Beweis. Nach Lemma 39 ist eine Menge genau dann kompakt, wenn jedes universale Netz in ihr konvergiert. Es sei x_α, $\alpha \in J$, ein universales Netz in

$\prod_{\iota \in I} K_\iota$. Für jedes $\iota \in I$ ist dann

$$\pi_\iota(x_\alpha) \qquad \alpha \in J$$

ein universales Netz in K_ι. Wir weisen dies nach. Es sei A eine Teilmenge in X_η. Wir setzen

$$B = \prod_{\iota \in I} Y_\iota$$

mit $Y_\eta = A$ und für alle ι mit $\iota \neq \eta$ gelte $Y_\iota = X_\iota$. Dann ist

$$B^c = \prod_{\iota \in I} Z_\iota$$

wobei $Z_\eta = A^c$ und für alle ι mit $\iota \neq \eta$ die Gleichung $Z_\iota = X_\iota$ gilt. Da x_α ein universales Netz ist, gibt es ein α_0, so dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha \in B$ gilt, oder so dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha \in B^c$ gilt. Es folgt, dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha(\eta) \in A$ gilt, oder dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha(\eta) \in A^c$ gilt. Da K_ι kompakt ist, konvergiert dieses Netz.

$$\lim_\alpha (\pi_\iota(x_\alpha)) = x(\iota)$$

$x = (x(\iota))_{\iota \in I}$ ist ein Element des Produktraumes und das Netz konvergiert gegen dieses Element. Wir prüfen dies nach. Es sei U eine Umgebung von x. Dann können wir annehmen, dass es $n \in \mathbb{N}$ und $\iota_1, \ldots, \iota_n$ gibt, so dass $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$ und für alle $\iota \notin \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$ gilt $U_\iota = X_\iota$ und U_{ι_i} ist eine offene Menge in X_{ι_i}, $i = 1, \ldots, n$. Zu jedem ι_i existiert ein α_i, so dass für alle $\alpha \geq \alpha_i$ gilt

$$x_\alpha(\iota_i) \in U_{\iota_i}.$$

Es gibt ein α_0, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Relation $\alpha_{\iota_i} \leq \alpha_0$ gilt. Deshalb gilt für alle $\alpha \geq \alpha_0$

$$x_\alpha \in U.$$

Also konvergiert das Netz. □

Beispiel 5 *(i) Nach Beispiel ist die Cantor-Menge C homöomorph zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*
(ii) Die Menge $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ mit der Produkttopologie wird als Hilbertquader bezeichnet. Diese Menge ist auch auf natürliche Weise im Hilbertraum enthalten. Ausgestattet mit der vom Hilbertraum induzierten Toplogie ist diese Menge homöomorph zu der Menge mit der Produkttopologie.

Beispiel 6 *Es sei I eine überabzählbare Menge und $T = [0,1]^I$ mit der Produkttopologie. Es sei*

$$S = \{t \in T | \{\iota | t(\iota) \neq 0\} \text{ ist abzählbar}\}$$

Die Menge S ist nicht kompakt, aber S ist folgenkompakt und damit abzählbar kompakt.

Es folgt auch, dass $T = [0,1]^I$ nicht metrisierbar ist.

Beweis. Der Abschluss von S ist gleich T, aber S ist nicht gleich T. Also ist S keine abgeschlossene Menge. Da T ein Hausdorff Raum ist, ist eine kompakte Menge abgeschlossen (Lemma 12). Also ist S nicht kompakt.

Wir überprüfen, dass der Abschluss von S gleich T ist. Es sei $t \in T$ und U eine Umgebung von t. Wir können annehmen, dass $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$, wobei U_ι eine offene Umgebung von t_ι ist und $U_\iota = [0,1]$ bis auf endlich viele ι gilt. Es seien $\iota_1, \ldots, \iota_n$ genau die Indices, für die $U_\iota \neq [0,1]$ gilt. Wir wählen $s \in S$ mit $s(\iota_i) = t(\iota_i)$, $i = 1, \ldots, n$ und die übrigen Koordinaten beliebig. Dann gilt $s \in U$.

Wir zeigen nun, dass S folgenkompakt ist. Es sei t_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in S. Es sei

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\iota | t_n(\iota) \neq 0\}$$

Dies ist eine abzählbare Menge. Es gilt für alle $\iota \notin I_0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $t_n(\iota) = 0$. Mit einem Diagonalisierungsargument zeigt man nun, dass es eine Teilfolge gibt, die konvergiert. □

Beispiel 7 *(i) Es sei $T = [0,1]^{[0,1]}$ mit der Produkttopologie. Dann ist T kompakt und insbesondere abzählbar kompakt, aber nicht folgenkompakt.*
(ii) $\{0,1\}^{[0,1]}$ ist nicht folgenkompakt, aber kompakt.

Es folgt auch, dass $T = [0,1]^I$ nicht metrisierbar ist.

Es kann sein, dass eine Folge keine konvergente Teilfolge besitzt, aber ein konvergentes Teilnetz.

Beweis. (i) Die Kompaktheit von T folgt aus dem Satz von Tichonov.

Wir zeigen nun, dass T nicht folgenkompakt ist. Wir fassen die Elemente von T als Funktionen von $[0,1]$ nach $[0,1]$ auf. Wir setzen für $k = 0, \ldots, 10^n - 1$ und $x \in [\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n})$

$$f_n(x) = 10^n x - k$$

und $f_n(1) = 0$. Die Funktion f_n wächst also auf dem Intervall $[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n})$ linear von 0 nach 1.

Wenn also $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{10^j}$ die Dezimalbruchentwicklung von $x \in [0,1]$ ist, dann gilt

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j}}{10^j}. \tag{1.3}$$

(Wir lassen keine Dezimalbruchentwicklungen zu, deren Koeffizienten bis auf endlich viele gleich 9 sind.) Wir weisen die Gleichung (1.3) nach. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$ hat keine konvergente Teilfolge. Wir prüfen dies nach. Falls $x \in [\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n})$, dann gibt es ein $y \in [0, \frac{1}{10^n})$ mit

$$x = \frac{k}{10^n} + y = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{y_j}{10^j}$$

wobei $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j}$ die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{k}{10^n}$ ist und $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{y_j}{10^j}$ die von y. Wegen der Eindeutigkeit der Dezimalbruchentwicklung (Wir lassen keine Dezimalbruchentwicklungen zu, deren Koeffizienten bis auf endlich viele gleich 9 sind.) stellt die rechte Seite auch die Dezimalbruchentwicklung von x dar. Also

$$x = \frac{k}{10^n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x_j}{10^j}$$

und

$$f_n(x) = 10^n x - k = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x_j}{10^{j-n}}$$

Falls es eine konvergente Teilfolge f_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, gibt, dann konvergiert sie punktweise für alle $x \in [0,1]$. Nun wählen wir einen Punkt x, für dessen Dezimalbruchentwicklung

$$x_{n_k+1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt. Die Folge $f_{n_k}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiert nicht in $\mathbb{R}$. Wir überprüfen dies.

$$f_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n_k+j}}{10^j}$$

Falls k gerade ist, erhalten wir $f_{n_k}(x) = \frac{1}{10} + \cdots \leq \frac{2}{10}$ und falls k ungerade ist $f_{n_k}(x) = \frac{3}{10} + \cdots > \frac{3}{10}$.

(ii) Nach dem Satz von Tychonov ist $\{0,1\}^{[0,1]}$ kompakt. Es sei

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) 2^{-n} \qquad\qquad a_n(x) \in \{0,1\}$$

die dyadische Entwicklung von x. Falls x keine eindeutige dyadische Entwicklung besitzt, dann wählen wir diejenige, deren Koeffizienten ab einem bestimmten Index 0 sind. Dann ist $a_n : [0,1] \to \{0,1\}$ ein Element aus $\{0,1\}^{[0,1]}$ und die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, besitzt keine konvergente Teilfolge. $\square$

1.4 Topologische Vektorräume

Es sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Wir sagen, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist, falls Vektoraddition und Skalarmultiplikation stetige Abbildungen sind, d.h.

$$\begin{aligned} \phi &: X \times X \to X \qquad \phi(x,y) = x + y \\ \psi &: X \times \mathbb{R}(\mathbb{C}) \to X \qquad \psi(x,t) = tx \end{aligned}$$

sind stetig. Hierbei wird die Topologie auf $\mathbb{R}$ wie üblich von den Mengen

$$\{x \| x - y| < \epsilon\} \qquad y \in \mathbb{R} \quad \epsilon > 0$$

erzeugt.

Beispiel 8 *(i) Der $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie ist ein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.*
(ii) Der $\mathbb{R}^n$ mit der diskreten Topologie ist kein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.
(iii) Der $\mathbb{R}^n$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ist ein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Beweis. (ii) Wir zeigen, dass die Skalarmultiplikation $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\psi(t,x) = tx$ nicht stetig ist. Die Menge $\{y\}$ die nur y, $y \neq 0$ als Element hat ist in der diskreten Topologie offen.

$$(1, y) \in \psi^{-1}(\{y\})$$

Aber es gibt kein $\epsilon > 0$ mit

$$(1 + \epsilon, 1 - \epsilon) \times \{y\} \subseteq \psi^{-1}(\{y\})$$

□

Lemma 26 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Dann ist für alle $x, y \in X$ und alle Umgebungen U von x die Menge $y + U$ eine Umgebung von $x + y$. Insbesondere gilt für alle $x \in X$, alle offenen Mengen $\mathcal{O}$, alle abgeschlossenen Mengen A und alle kompakten Mengen K in X, dass $x + \mathcal{O}$ offen, $x + A$ abgeschlossen und $x + K$ kompakt sind.*

Beweis. Die Abbildung ϕ ist in dem Punkt $(x + y, -y)$ stetig. Also ist für alle Umgebungen $U(x)$ von x die Menge $\phi^{-1}(U(x))$ eine Umgebung von

$(x+y,-y)$. Also gibt es Umgebungen $V(x+y)$ von $x+y$ und $W(-y)$ von $-y$, so dass $\phi^{-1}(U(x)) \supseteq V(x+y) \times W(-y)$ bzw.

$$\phi(V(x+y) \times W(-y)) \subseteq U(x).$$

Das bedeutet

$$-y + V(x+y) \subseteq V(x+y) + W(-y) \subseteq U(x)$$

und somit $V(x+y) \subseteq y + U(x)$. Deshalb ist $y + U(x)$ eine Umgebung von $x+y$.

Eine Menge $\mathcal{O}$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Elemente y ist. Deshalb ist für alle $y \in \mathcal{O}$ die Menge $x + \mathcal{O}$ Umgebung von $x+y$. Es folgt, dass $x + \mathcal{O}$ Umgebung aller ihrer Elemente ist. Damit ist $x + \mathcal{O}$ offen.

Die Abgeschlossenheit der Menge $x + A$ folgt durch Komplementbildung.

Es sei K kompakt und $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von $x + K$

$$x + K \subseteq \bigcup_{\iota \in I} \mathcal{O}_\iota.$$

Es folgt

$$K \subseteq \bigcup_{\iota \in I} -x + \mathcal{O}_\iota.$$

Da K kompakt ist und die Mengen $-x + \mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, offen sind, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} -x + \mathcal{O}_{\iota_j}.$$

Dies bedeutet aber

$$x + K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_{\iota_j}.$$

und somit hat $x + K$ eine endliche Teilüberdeckung. $\square$

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes heißt zentralsymmetrisch, wenn aus $x \in A$ folgt, dass für alle t mit $|t| \leq 1$ gilt $tx \in A$.

Lemma 27 *Es sei X ein topologischer Vektorraum und U eine Umgebung der 0. Dann gibt es eine zentralsymmetrische Umgebung V der 0, so dass*

$$V + V \subseteq U$$

Beweis. Da die Multiplikation mit einem Skalar stetig ist, ist die Abbildung ψ in $(0,0)$ stetig. Für alle Umgebungen U von 0 ist also $\psi^{-1}(U)$ eine Umgebung von $(0,0)$ in $X \times \mathbb{R}$. Deshalb gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung V von 0, so dass $\psi^{-1}(U) \supseteq V \times (-\epsilon, \epsilon)$ bzw.

$$U \supseteq \psi(V \times (-\epsilon, \epsilon)) = \bigcup_{|t|<\epsilon} tV.$$

Dann ist

$$W = \bigcup_{|t|<\epsilon} tV$$

eine zentralsymmetrische Umgebung. Also enthält jede Umgebung eine zentralsymmetrische.

Da auch die Addition stetig ist, enthält jede Umgebung U von 0 eine Umgebung V, so dass $V + V \subseteq U$. □

Lemma 28 *Es sei X ein topologischer Vektorraum, A eine abgeschlossene und K eine kompakte Teilmenge von X mit $A \cap K = \emptyset$. Dann gibt es eine zentralsymmetrische offene Umgebung U von 0, so dass*

$$(A + U) \cap (K + U) = \emptyset$$

Beweis. Da A abgeschlossen ist, so ist A^c offen und deshalb eine offene Umgebung für alle $x \in K$. Da X ein topologischer Vektorraum ist, so ist $-x + A^c$ eine offenen Umgebung von 0. Wegen Lemma 27 gibt es eine zentralsymmetrische Umgebung V_x von 0, so dass

$$V_x + V_x + V_x \subseteq -x + A^c$$

bzw.

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap A = \emptyset.$$

Deshalb gilt für alle $y_1, y_2, y_3 \in V_x$, dass $x + y_1 + y_2 + y_3 \notin A$. Also gilt für alle $y_1, y_2, y_3 \in V_x$, dass $x + y_1 + y_2 \notin -y_3 + A$. Aus der Zentralsymmetrie von V_x folgt, dass für alle $y_1, y_2, y_3 \in V_x$ die Relation $x + y_1 + y_2 \notin y_3 + A$ gilt, bzw.

$$(x + V_x + V_x) \cap (A + V_x) = \emptyset.$$

Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$, so dass

$$K \subseteq (x_1 + V_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Wir wählen nun

$$V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}.$$

Dann gilt

$$K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i})$$

Für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (A + V_{x_i}) = \emptyset$$

Deshalb gilt für alle $i = 1, \ldots, n$

$$(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (A + V) = \emptyset$$

und somit

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \right) \cap (A + V) = \emptyset$$

Also

$$(K + V) \cap (A + V) = \emptyset$$

□

Lemma 29 *Es sei X ein topologischer Vektorraum und U eine Umgebung der 0. Dann gilt*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$$

Beweis. Wir können annehmen, dass U offen ist. Die Abbildung

$$\psi : X \times \mathbb{R} \to X \qquad \psi(x,t) = tx$$

ist stetig. Deshalb ist auch die Abbildung $\psi_x : \mathbb{R} \to X$ mit $\psi_x(t) = tx$ stetig. Deshalb ist $\psi_x^{-1}(U) = \{t|\ tx \in U\}$ offen. Da $0 \in \psi_x^{-1}(U)$, so muss ein Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ in $\psi_x^{-1}(U)$ enthalten sein. Also gilt

$$(-\epsilon, \epsilon) \subseteq \{t|\ tx \in U\}$$

und insbesondere $\frac{\epsilon}{2}x \in U$. Es folgt, dass $x \in \frac{2}{\epsilon}U$. $\square$

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt absorbant, wenn

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA = X.$$

Lemma 30 *Es sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum und $\mathcal{S}$ sei eine nichtleere Familie von Teilmengen von X, die kreisförmig und absorbant sind und die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{S}$

(ii) Für alle $U, V \in \mathcal{S}$ gibt es ein $W \in \mathcal{S}$, so dass $W \subseteq U \cap V$.

(ii) Für alle $U \in \mathcal{S}$ existiert ein $V \in \mathcal{S}$, so dass $V + V \subseteq U$.

Dann gibt es genau eine Topologie auf X, bzgl. der X ein topologischer Vektorraum ist und bzgl. der $\mathcal{S}$ eine Nullumgebungsbasis ist.

Lemma 31 *Es seien X und Y topologische Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann stetig, wenn T in 0 stetig ist.*

Beweis. Wir nehmen an, dass T in 0 stetig ist. Es sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $T(x)$. Dann ist $-T(x) + V$ eine Umgebung von 0 in Y. Da T in 0 stetig ist, ist $T^{-1}(-T(x) + V)$ eine Umgebung der 0 in X. Es gilt

$$T^{-1}(-T(x) + V) = -x + T^{-1}(V)$$

weil $y \in T^{-1}(-T(x) + V)$ genau dann, wenn $T(y) \in -T(x) + V$. Dies gilt genau dann, wenn es ein $v \in V$ mit $T(y) = -T(x)+v$ gibt, bzw. $T(y+x) = v$. Also $y + x \in T^{-1}V$.

ist $-x + T^{-1}(V)$ eine Umgebung von 0 in X. Deshalb ist $T^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X und T ist in x stetig. $\square$

Wir sagen, dass ein Netz x_γ, $\gamma \in \Gamma$ in einem topologischen Vektorraum X ein Cauchy-Netz ist, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein γ gibt, so dass für alle α, β mit $\alpha, \beta \geq \gamma$ die Relation $x_\alpha - x_\beta \in U$ gilt.

Wir sagen, dass ein topologischer Vektorraum vollständig ist, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert.

1.5 Metrische Vektorräume

Falls X ein linearer Raum ist und für alle $x, y, z \in X$ die Gleichung $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ gilt, dann sagen wir, dass die Metrik translationsinvariant ist.

Lemma 32 *Es sei (X, d) ein linearer Raum mit translationsinvarianter Metrik. Dann ist die Vektoraddition stetig.*

Ein Vektorraum mit translationsinvarianter Metrik ist i.a. kein topologischer Vektorraum wie das Beispiel der Metrik zeigt, die die diskrete Topologie erzeugt.

Beweis. Wir zeigen, dass die Addition im Punkt (x, y) stetig ist. Wir können annehmen, dass die Umgebung U des Punktes $x + y$ gleich einer Menge $\{z|d(x + y, z) < \epsilon\}$ ist. Die Menge

$$\{v|d(v, x) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \times \{w|d(w, y) < \tfrac{\epsilon}{2}\}$$

ist eine Umgebung von (x, y) und es gilt

$$\begin{aligned}
&\phi(\{v|d(v, x) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \times \{w|d(w, y) < \tfrac{\epsilon}{2}\}) \\
&\quad \subseteq \{v + w|d(v, x) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ und } d(w, y) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \\
&\quad = \{v + w|d(x - v, 0) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ und } d(w - y, 0) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \\
&\quad \subseteq \{v + w|d(x - v, w - y) < \epsilon\} \\
&\quad = \{v + w|d(x + y, v + w) < \epsilon\} = \{z|d(x + y, z) < \epsilon\}
\end{aligned}$$

□

Es sei X ein topologischer Vektorraum. Wir sagen, dass eine Abbildung $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ eine Δ-Norm ist, wenn
(i) $\forall x \neq 0 : \|x\| > 0$
(ii) $\forall t, |t| \leq 1, \forall x \in X : \|tx\| \leq \|x\|$
(iii) $\forall x \in X : \lim_{t \to 0} \|tx\| = 0$
(iv) $\exists C \forall x, y \in X : \|x + y\| \leq C \max\{\|x\|, \|y\|\}$

Wir sagen, dass eine Δ-Norm eine F-Norm ist, wenn

$$\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Wir können durch eine F-Norm eine translationsinvariante Metrik definieren.

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Wir zeigen zunächst, dass man zu jeder Δ-Norm eine F-Norm findet.

Lemma 33 *Es sei $\| \ \|$ eine Δ-Norm auf X und p, so dass für alle $x, y \in X$ die Ungleichung $\|x+y\| \leq 2^{\frac{1}{p}}(\|x\|+\|y\|)$ gilt. Dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in X$*

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 4^{\frac{1}{p}}(\|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Beweis. Durch Induktion folgt

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} 2^{\frac{k}{p}} \|x_k\|$$

Wir definieren $H : X \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 2^{\frac{n}{p}} & \text{falls } 2^{\frac{n-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{n}{p}} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|x\| \leq H(x) \leq 2^{\frac{1}{p}} H(x)$$

Wir zeigen durch Induktion, dass

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 2^{\frac{1}{p}}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Die Aussage für $n = 1$ ist klar. Wir nehmen nun an, dass die Aussage für n richtig ist und schliessen auf $n+1$. Wir können annehmen, dass $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \cdots \geq \|x_{n+1}\|$. Wir nehmen zunächst an, dass die Werte $H(x_i)$, $1 \leq i \leq m+1$, verschieden sind. Weiter gilt $H(x_i) \leq 2^{1-\frac{i}{p}} H(x_1)$ und

$$C^i \|x_i\| \leq C^i H(x_i) \leq 2^{\frac{1}{p}} H(x_1) \leq 2^{\frac{1}{p}}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$

Anderenfalls gibt es ein j mit $H(x_j) = H(x_{j+1})$. Somit gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit

$$2^{\frac{\ell-1}{p}} < \|x_{j+1}\| \leq \|x_j\| \leq 2^{\frac{\ell}{p}}$$

und somit

$$\|x_j + x_{j+1}\| \leq 2^{\frac{\ell+1}{p}}$$

Es folgt

$$H(x_j + x_{j+1})^p \leq H(x_j)^p + H(x_{j+1})^p$$

Wir wenden nun die Induktionsannahme auf die Folge $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{n+1}$ an.

$$\|x_1 + \cdots + x_{n+1}\| \leq 2^{\frac{1}{p}}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_j + x_{j+1})^p + \cdots + H(x_{n+1})^p)^{\frac{1}{p}}$$

□

Lemma 34 *Es sei $\| \ \|$ eine Δ-Norm auf X mit der Konstanten $C = 2^{\frac{1}{p}}$. Dann ist*

$$|||x||| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}$$

eine F-Norm auf X, die dieselbe Topologie liefert.

Beweis. Man beachte, dass

$$\frac{1}{4}\|x\|^p \leq |||x||| \leq \|x\|^p$$

□

Satz 2 *Ein topologischer linearer Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er Hausdorff ist und eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt.*

Beweis. Es sei U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Umgebungsbasis des Nullpunktes, so dass $\bigcap_n U_n = \{0\}$ und so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$$

gilt. Dann ist

$$\|x\| = \sup\{2^{-n} | x \notin U_n\}$$

eine Δ-Norm mit der Konstanten $C = 2$. □

Beispiel 9 *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. $L^0(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ist der Raum der Äquivalenzklassen messbarer Funktionen, die fast überall gleich sind. Wir setzen*

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$$

Dann ist d eine Metrik auf L^0.

Die Topologie, die von dem System von Umgebungen

$$V_\epsilon(f) = \{g|\ \mu(\{x|\ |f(x)-g(x)| \geq \epsilon\}) \leq \epsilon\}$$

erzeugt wird, heißt Topologie der Konvergenz im Maß. Die Topologie, die von der Metrik erzeugt wird, und die Topologie der Konvergenz im Maß sind gleich.

Insbesondere konvergiert eine Folge f_n genau dann in der Metrik d gegen f, wenn die Folge im Maß gegen f konvergiert.

Beweis. Wir zeigen, dass eine Menge genau dann eine Umgebung eines Punktes f in der Topologie der Metrik ist, wenn sie Umgebung in der Topologie der Konvergenz im Maß ist. Wegen der Translationsinvarianz reicht es, dies für $f = 0$ zu zeigen.

Wir zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\{f|d(f,0) < \epsilon^2\} \subseteq \{f|\mu\{x||f(x) \geq \epsilon\} < \epsilon\} \subseteq \{f|d(f,0) < (1+\mu(X))\epsilon\}$$

Die linke Inklusion folgt

$$\epsilon^2 > \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \geq \epsilon\mu\{x||f(x) \geq \epsilon\}$$

und damit

$$\epsilon > \mu\{x||f(x) \geq \epsilon\}$$

Die rechte Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu &= \int_{\{x||f(x)\geq\epsilon\}} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu + \int_{\{x||f(x)<\epsilon\}} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \\ &\leq \mu\{x||f(x) \geq \epsilon\} + \mu(X)\epsilon \leq (1+\mu(X))\epsilon \end{aligned}$$

□

Beispiel 10 *Es sei* $0 < p < 1$. *Dann ist* $L^p(\mu)$ *metrisierbar.*

Die Metrik hier ist

$$d(f,g) = \int |f-g|^p d\mu.$$

1.6 Normierte Vektorräume

Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Norm auf X ist eine Funktion

$$\| \ \| : X \to [0, \infty)$$

so dass
(i) für alle $x \in X$ und alle $t \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\|tx\| = |t| \ \|x\|$$

(ii) $x = 0$ genau dann, wenn $\|x\| = 0$.
(iii) für alle $x, y \in X$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

gilt.

Wir sagen, dass eine Seminorm vorliegt, wenn nur (i) und (iii) gelten. Wir beobachten, dass $\rho : X \times X \to [0, \infty)$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf X ist.

Die Kugel um $x_0 \in X$ mit Radius r ist die Menge

$$B(x_0, r) = \{x | \|x - x_0\| < r\}.$$

Es gilt, dass der Abschluss von $B(x_0, r)$ die Menge $\overline{B}(x_0, r) = \{x | \|x - x_0\| \leq r\}$ ist. Dies gilt, weil die Folge $x_0 + (1 - \frac{1}{n})(x - x_0)$ gegen x konvergiert.

Ein normierter Raum ist ein topologischer Vektorraum. Dazu muss die Stetigkeit der Abbildung $\phi(x, y) = x + y$ nachgewiesen werden. Da diese linear ist, reicht es die Stetigkeit in $(0, 0)$ nachzuweisen. Es gilt

$$\phi^{-1}(\{z | \|z\| < \epsilon\}) = \{(x, y) | \|x + y\| < \epsilon\} \supseteq \{(x, y) | \|x\| < \frac{\epsilon}{2}, \|y\| < \frac{\epsilon}{2}\}$$

Wir sagen, dass zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf X äquivalent sind, falls es Konstanten c_1 und c_2 gibt, so dass für alle $x \in X$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

gilt.

Wir bezeichnen einen vollständigen, normierten Raum als Banachraum.

Lemma 35 *Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\| \ \|_2$ die Euklidische Norm. Jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist bzgl. der Euklidischen Norm eine stetige Funktion. Wir weisen dies nach. Es sei

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|x\| = \quad & \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^n |x_i| \\ & \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\right) \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\right) \sqrt{n}\ \|x\|_2 = c\|x\|_2 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit im Punkt x_0 bedeutet

$$\forall \epsilon > 0 \forall x, \|x - x_0\|_2 < \delta : |\|x\| - \|x_0\|| < \epsilon.$$

Wir wählen $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ und erhalten

$$|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| \leq c\|x - x_0\|_2 < c\delta = \epsilon$$

Damit ist die Stetigkeit gezeigt. Die Menge

$$\partial B_2^n = \{x|\ \|x\|_2 = 1\}$$

ist kompakt. Deshalb werden

$$\inf_{\|x\|_2=1} \|x\| \quad \text{und} \quad \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|$$

angenommen. Es gilt

$$c_1 = \min_{\|x\|_2=1} \|x\| > 0$$

weil das Minimum nicht im Punkt $x = 0$ angenommen werden kann. Somit gilt für alle x mit $\|x\|_2 = 1$

$$c_1 \leq \|x\| \leq c_2$$

Somit gilt für alle x mit $x \neq 0$

$$c_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \leq c_2$$

Also gilt für alle x

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_2$$

□

Beispiel 11 *Es sei X der Raum aller reellen Folgen, von denen nur endlich viele Glieder von Null verschieden sind. Dann sind*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \qquad \textit{und} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

zwei Normen auf X, die nicht äquivalent sind.

Beweis. Wir betrachten dazu

$$x_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0, \dots) \qquad n = 1, 2, \dots$$

Es gilt

$$\|x_n\|_n = n \quad \text{und} \quad \|x_n\|_\infty = 1$$

□

Lemma 36 *Es sei X ein normierter Raum und es gelte*

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Dann gilt

$$\|x\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$$

Beweis. Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \|x - x_n\| < \epsilon$$

Hieraus folgt sofort mit der Dreiecksungleichung

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |\|x\| - \|x_n\|| < \epsilon$$

□

Wir sagen, dass

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

gilt, falls die Folge der Partialsummen

$$\sum_{n=1}^{k} x_n \qquad k = 1, 2, \ldots$$

gegen x konvergiert. Wir sagen, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergiert, falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

Lemma 37 *Ein normierter Vektorraum X ist genau dann vollständig, falls jede absolut konvergente Reihe in X konvergiert.*

Beweis. Wir nehmen an, dass X vollständig ist und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

gilt. Dann gilt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall k > N : \; \sum_{n=k}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon$$

Hieraus folgt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \qquad \forall k, \ell > N :$$
$$\left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{n=1}^{\ell} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=\ell+1}^{k} x_n \right\| \leq \sum_{n=\ell+1}^{k} \|x_n\| \leq \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon$$

Dies bedeutet aber, dass

$$\sum_{n=1}^{k} x_n \qquad k = 1, 2, \ldots$$

eine Cauchy Folge ist. Da aber jede Cauchy Folge konvergiert, so konvergiert die Reihe.

Wir nehmen nun an, dass jede absolutkonvergente Reihe in X konvergiert. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge. Wir wählen

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \ldots$$

so dass für alle $n, m \geq n_j$

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-j}$$

gilt. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{n_1} \\ y_j &= x_{n_j} - x_{n_{j-1}} \qquad j = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_1} + \sum_{j=2}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) = x_{n_k}$$

und

$$\sum_{j=1}^{k} \|y_j\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{j=2}^{k} \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{j=2}^{k} 2^{-j} \leq \|x_{n_1}\| + \tfrac{1}{2}$$

Deshalb konvergiert die Reihe

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} y_j$$

Dies bedeutet, dass die Folge x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, gegen x konvergiert. Damit konvergiert eine Teilfolge der Cauchy-Folge und somit auch die Cauchy-Folge selbst. Wir geben hier der Vollständigkeit halber das Argument an. Für gegebenes $\epsilon > 0$ wählen wir k so groß, dass für alle n mit $n \geq n_k$

$$\|x_{n_k} - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$$

Hiermit ergibt sich für alle n mit $n > n_k$

$$\|x - x_n\| = \|x - x_{n_k} + x_{n_k} - x_n\| \leq \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2^{-k} < \epsilon$$

gelten. $\square$

Beispiel 12 *(i) Der Raum der stetigen Funktionen $C[a,b]$ mit der Norm*

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

ist ein Banachraum.
(ii) Der Raum der beschränkten Folgen

$$\ell^\infty = \{(x_i)_{i=1}^\infty | \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

ist ein Banachraum.
(iii) Der Raum aller konvergenten Folgen

$$c = \{(x_i)_{i=1}^\infty | \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert}\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

ist ein Banachraum. c ist ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞.
(iv) Der Raum aller gegen 0 konvergenten Folgen

$$c_0 = \{(x_i)_{i=1}^\infty | \lim_{i\to\infty} x_i = 0\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

ist ein Banachraum. c ist ein abgeschlossener Teilraum von c und ℓ^∞.

Lemma 38 *(Lemma von Riesz) Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X, der von X verschieden ist. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein x mit $\|x\| = 1$*

$$\inf_{y\in Y} \|x - y\| \geq 1 - \delta$$

Beweis. Es sei $x \in X \setminus Y$. Weil Y eine abgeschlossene Menge und $\{x\}$ eine kompakte Menge ist, gilt

$$0 < \inf_{y\in Y} \|x - y\|.$$

Deshalb gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $y_\delta \in Y$ mit

$$(1-\delta)\|x - y_\delta\| \leq \inf_{y\in Y} \|x - y\|$$

Wir setzen nun

$$x_\delta = \frac{x - y_\delta}{\|x - y_\delta\|}$$

Offensichtlich gilt $\|x_\delta\| = 1$ und für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \|x_\delta - y\| &= \left\| \frac{x}{\|x - y_\delta\|} - \frac{y_\delta}{\|x - y_\delta\|} - y \right\| \\ &= \frac{\|x - (y_\delta + \|x - y_\delta\| y)\|}{\|x - y_\delta\|} \end{aligned}$$

Weil $y_\delta + \|x - y_\delta\| y \in Y$ folgt

$$\|x_\delta - y\| \geq \frac{\inf_{y \in Y} \|x - y\|}{\|x - y_\delta\|} \geq 1 - \delta$$

□

Lemma 39 *Es sei X ein normierter Raum. Die abgeschlossene Einheitskugel von X ist genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist.*

Beweis. Der Raum sei endlich-dimensional. Dann ist X zu $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim(X)$ algebraisch isomorph. Nach Lemma 35 sind auf einem endlich-dimensionalen Raum alle Normen äquivalent. Deshalb ist ein normierter Raum der Dimension n isomorph zum $\mathbb{R}^n$. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel kompakt.

Nun nehmen wir an, dass der Raum nicht endlich-dimensional ist. Nach dem Lemma von Riesz können wir eine Folge von Vektoren x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ konstruieren. Damit ist die Einheitskugel aber nicht total beschränkt. □

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Menge stetiger Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ in einem Punkt $x \in X$ gleichgradig stetig ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von x gibt, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $y \in \mathcal{U}$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

gilt. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, wenn $\mathcal{F}$ in jedem Punkt gleichgradig stetig ist.

Satz 3 *(Arzela-Ascoli) (i) Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum und $\mathcal{F}$ eine Familie gleichgradig stetiger Funktionen, die in jedem Punkt beschränkt ist. Dann ist $\mathcal{F}$ in dem Raum $C(K)$ mit der Supremumsnorm total beschränkt.*

(ii) Es sei X ein lokalkompakter Hausdorff Raum (jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung), der abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. Dann besitzt jede gleichgradig stetige Folge von Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ eine Teilfolge, die auf allen kompakten Teilmengen von X gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert.

Es sei (K, d) ein kompakter, metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$ heißt gleichstetig, wenn für alle ϵ ein δ existiert, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $s, t \in K$ mit $d(s, t) < \delta$ die Ungleichung $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ gilt.

Korollar 1 *(Arzela-Ascoli) Es sei (K, d) ein kompakter, metrischer Raum und $C(K)$ der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf K mit der Supremumsnorm. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $C(K)$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt, abgeschlossen und gleichstetig ist.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ kompakt ist. Dann ist $\mathcal{F}$ total beschränkt. Es gibt also für jedes ϵ endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ aus $\mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \epsilon)$$

Es gibt also zu jedem $f \in \mathcal{F}$ ein i_0, so dass

$$\|f - f_{i_0}\|_\infty < \epsilon$$

Da K kompakt ist, sind alle Funktionen gleichmäßig stetig. Insbesondere gibt es zu jedem ϵ und i ein δ_i, so dass für alle x und y mit $|x - y| < \delta_i$ die Ungleichung $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$ gilt. Wir setzen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y) + f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)| < 3\epsilon \end{aligned}$$

□

Man kann Den Satz von Arzela-Ascoli auch aus dem Satz von Tichonov herleiten [Ull].

1.7 Lokalkonvexe Räume

1.8 L^p-Räume

Es sei $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $0 < p < \infty$ und f eine messbare, reellwertige Funktion. Wir setzen

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^p(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ist der Raum aller Äquivalenzklassen von Funktionen, für die $\|f\|_p < \infty$ gilt und die fast überall gleich sind.

f sei eine messbare Funktion. Wir bezeichnen

$$\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 |\ \mu\{x \in M |\ |f(x)| > t\} = 0\}$$

als das wesentliche Supremum der Funktion f. Wir können dies auch so

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{M \setminus N} |f(x)| \,\middle|\, \mu(N) = 0 \right\}$$

schreiben. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, gibt es eine Nullmenge N mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{M \setminus N} |f(x)|.$$

$\| \ \|_\infty$ ist auf dem Raum

$$L^\infty(M, \mathfrak{A}, \mu) = \{f : M \to \mathbb{K} |\ \|f\|_\infty < \infty\}$$

eine Norm. Wir weisen die Dreiecksungleichung nach. Es gibt Nullmengen N_f und N_g mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{M \setminus N_f} |f(x)| \qquad \|g\|_\infty = \sup_{M \setminus N_g} |g(x)|$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty &= \sup_{M \setminus N_f} |f(x)| + \sup_{M \setminus N_g} |g(x)| \\ &\geq \sup_{M \setminus (N_f \cup N_g)} |f(x)| + \sup_{M \setminus (N_f \cup N_g)} |g(x)| \\ &\geq \sup_{M \setminus (N_f \cup N_g)} |f(x) + g(x)| \geq \|f + g\|_\infty \end{aligned}$$

Die Räume L^p, $1 \leq p \leq \infty$, sind Banachräume. Die Räume für $0 < p < 1$ sind mit $d(f,g) = \int |f-g| d\mu$ vollständige, metrische Vektorräumeäume. Sie sind aber keine normierten Räume.

Lemma 40 *(Young) Es seien $a \geq 0$, $b \geq 0$ und $0 < t < 1$. Dann gilt*

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$.

Beweis. Falls $a = 0$ oder $b = 0$, dann ist die linke Seite der Ungleichung gleich 0 und die Ungleichung ist erfüllt.

Der Logarithmus ist auf dem Intervall $(0, \infty)$ eine konkave Funktion. Dies gilt, weil die zweite Ableitung

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$$

negativ ist. Hieraus folgt für alle $a, b > 0$ und alle t mit $0 < t < 1$

$$\ln(ta + (1-t)b) \geq t \ln a + (1-t) \ln b = \ln a^t + \ln b^{1-t} = \ln(a^t b^{1-t}).$$

Da die Exponentialfunktion strikt monoton wachsend ist, folgt

$$ta + (1-t)b \geq a^t b^{1-t}$$

und wir haben genau dann Gleichheit, wenn

$$\ln(ta + (1-t)b) = t \ln a + (1-t) \ln b.$$

gilt. Dies gilt genau dann, wenn $a = b$. $\square$

Lemma 41 *(Hölder) Es sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es seien f und g messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Insbesondere folgt, dass $fg \in L^1$, falls $f \in L^p$ und $g \in L^q$. Außerdem gilt für $f \in L^p$ und $g \in L^q$ mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$ genau dann

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q,$$

wenn fast überall

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

gilt .

Als Beispiel betrachten wir den Maßraum mit der Grundmenge $[0,1]$, der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesguemaß. Zu $f(x) = x$ gibt es bis auf Multiplikation mit einem Skalar genau eine stetige, nichtnegative Funktion, für die $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ gilt. Dies ist die Funktion $x^{\frac{q}{p}}$.

Beweis. Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, dann sind f oder g fast überall 0. Deshalb gilt fast überall $fg = 0$ und somit $\|fg\|_1 = 0$. Man beachte hierbei die Konvention, dass $f(x)g(x) = 0$ gilt, falls $f(x) = 0$ und $g(x) = \infty$. Damit ist die Ungleichung in diesem Fall bewiesen und wir können weiterhin annehmen, dass $\|f\|_p > 0$ oder $\|g\|_q > 0$.

Ebenso folgt das Ergebnis sofort, wenn $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_q = \infty$.

Wir können also annehmen, dass $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$. Wir wenden Lemma 40 auf

$$a = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|^p \qquad b = \left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|^q \qquad t = \frac{1}{p}$$

an. Es gilt

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \tfrac{1}{p} a + \tfrac{1}{q} b$$

bzw.

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \tag{1.4}$$

Es folgt

$$\frac{\int_M |f(x)g(x)| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_M |f(x)|^p d\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_M |g(x)|^q d\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Deshalb gilt

$$\int_M |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Wir betrachten nun den Fall der Gleichheit. Falls

$$\int_M |f(x)g(x)|d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$$

dann gilt

$$0 = \int_M \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} - \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} d\mu$$

Wegen (1.4) ist der Integrand eine nichtnegative Funktion und damit fast überall gleich 0. Nach Lemma 40 haben wir genau dann Gleichheit in $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b$, wenn $a = b$. D.h. es gilt fast überall

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

□

Lemma 42 *(Verallgemeinerte Hölder Ungleichung) Es seien $0 < r, u, w < \infty$ mit $\frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{1}{r}$. Es seien f und g messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_u \|g\|_w$$

Insbesondere folgt, dass $fg \in L^r$, falls $f \in L^u$ und $g \in L^w$. Außerdem gilt für $f \in L^u$ und $g \in L^w$ mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$ genau dann

$$\|fg\|_r = \|f\|_u \|g\|_w,$$

wenn fast überall

$$\frac{|f(x)|^u}{\|f\|_u^u} = \frac{|g(x)|^w}{\|g\|_w^w}$$

gilt.

Beweis. Wir wenden die Hölder Ungleichung auf

$$p = \frac{u}{r} \qquad q = \frac{w}{r} \qquad |f|^r \qquad |g|^r$$

an. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int |fg|^r d\mu &\leq \left(\int |f|^{rp} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^{rq} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int |f|^u d\mu\right)^{\frac{r}{u}} \left(\int |g|^w d\mu\right)^{\frac{r}{w}} \end{aligned}$$

□

Lemma 43 *(i) (Minkowski) Es seien $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L^p$. Dann gilt*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Insbesondere ist L^p ein Vektorraum und $\| \ \|_p$ ist auf L^p eine Norm.

(ii) Es seien $0 < p < 1$ und $f, g \in L^p$. Dann gilt

$$\|f+g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Es gibt eine genau Topologie, für die die Mengen

$$\{f \mid \|f\|_p < \epsilon\} \qquad \epsilon > 0$$

eine Nullumgebungsbasis bilden und bzgl. der L^p ein topologischer Vektorraum ist.

$d(f,g) = \int |f-g|^p d\mu$ ist auf L^p eine Metrik, die dieselbe Topologie erzeugt.

Für $0 < p < 1$ ist $\| \ \|_p$ keine Norm, weil die Dreiecksungleichung nicht gilt.

Beweis. (i) Der Fall $p = 1$ ist offensichtlich, ebenso falls fast überall $f+g = 0$ gilt. Wir können also annehmen, dass $\|f+g\|_p > 0$.

Es gilt

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f| + |g|)|f+g|^{p-1}$$

Damit und mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\int_M |f+g|^p d\mu \quad &\leq \int_M (|f| + |g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\
&= \int_M |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_M |g||f+g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_M |f+g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Weiter gilt $p = q(p-1)$. Damit erhalten wir

$$\int_M |f+g|^p d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_M |f+g|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(ii) Die Funktion $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \frac{1+x^r}{(1+x)^r}.$$

nimmt in $x = 1$ ihr absolutes Minimum an. Wir weisen dies nach.

$$\phi'(x) = \frac{rx^{r-1}(1+x)^r - r(1+x^r)(1+x)^{r-1}}{(1+x)^{2r}} = \frac{r(x^{r-1}-1)}{(1+x)^{r+1}}$$

Für $r > 1$ ist ϕ auf $[0,\infty)$ stetig, auf $(0,1)$ monoton fallend und auf $(1,\infty)$ monoton wachsend. Deshalb gilt für alle x mit $x \geq 0$

$$2^{1-r}(1+x)^r \leq 1 + x^r.$$

Wir setzen nun $x = \frac{s}{t}$ und $r = \frac{1}{p}$ und erhalten für alle s, t mit $0 \leq s, t$

$$(s+t)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(s^{\frac{1}{p}} + t^{\frac{1}{p}}).$$

Außerdem gilt für alle s, t mit $0 \leq s, t$

$$|s+t|^p \leq |t|^p + |s|^p$$

Diese Ungleichung folgt aus der Ungleichung

$$\left(a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq a + b$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left\{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\} = 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)
\end{aligned}$$

□

Satz 4 *Es seien* $1 \leq p < \infty$ *und* $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann ist* $L^p(\mu)$ *mit der Norm* $\| \ \|_p$ *ein Banachraum.*

Der Maßraum muss nicht vollständig sein.

Beweis. Wegen Lemma **??** reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

in $L^p(\mu)$ konvergiert, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$. Wir zeigen zuerst, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \quad \text{punktweise fast überall konvergiert und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L^p(\mu)$$

(Man beachte hier, dass die Elemente von L^p Äquivalenzklassen von Funktionen sind.Deshalb spielt es keine Rolle, dass auf einer Nullmenge keine punktweise Konvrgenz vorliegt.) Dazu zeigen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \quad \text{punktweise fast überall konvergiert und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \in L^p(\mu)$$

Die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |f_k| \right)^p \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ist monoton wachsend. Mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k| \right)^p d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right)^p d\mu$$

Hieraus ergibt sich mit der Minkowski Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\int \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty \end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \in L^p$$

Insbesondere gilt fast überall

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konvergiert, so konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fast überall. Wegen

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L^p$.

Wir zeigen nun, dass $\sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, in L^p gegen $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert. Da L^p ein Vektorraum ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\right| \in L^p$$

Damit folgt weiter

$$\left(\int \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt, dass der letzte Ausdruck zu dem folgenden gleich ist.

$$\lim_{N\to\infty} \left(\int \left|\sum_{k=n+1}^{N} |f_k|\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit der Ungleichung von Minkowski folgt, dass der letzte Ausdruck kleiner oder gleich

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_p = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_p$$

ist. Der letzte Ausdruck strebt für $n \to \infty$ gegen 0. $\square$

Lemma 44 *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.*
(i) L^∞ ist ein Banachraum.
(ii) Falls f und g messbare Funktionen sind, dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Es gilt genau dann Gleichheit, wenn auf der Menge $\{x|\ f(x) \neq 0\}$ mit Ausnahme einer Nullmenge

$$|g(x)| = \|g\|_\infty$$

gilt.

Beweis. (ii) Falls $\|g\|_\infty = \infty$ dann ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Es sei also nun $\|g\|_\infty < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $\tilde{g}$, so dass fast überall $g = \tilde{g}$ und und für alle $x \in X$ die Ungleichung $|\tilde{g}(x)| \leq \|g\|_\infty + \epsilon$. Dann gilt

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu \leq \int |f|(\|g\|_\infty + \epsilon) d\mu = \|f\|_1(\|g\|_\infty + \epsilon)$$

□

Es sei $0 < p < \infty$. Wir bezeichnen

$$\ell^p = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \;\middle|\; x_i \in \mathbb{K} \text{ und } \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

ℓ^p wird mit der Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ausgestattet. Für $0 < p < \infty$ ist ℓ^p der Raum $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist. ℓ^∞ ist der Raum aller beschränkten Folgen. Er ist mit der Norm

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

ausgestattet.

Satz 5 *Es sei $0 < p < q \leq \infty$. Dann gilt $\ell^p \subset \ell^q$ und für alle $x \in \ell^q$ gilt*

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall $q = \infty$. Offensichtlich gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|x_k| \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

und damit

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Nun der Fall $q < \infty$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^q &= \textstyle\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p |x_i|^{q-p} \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right) \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^{q-p} \\ &= \left(\textstyle\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right) \left(\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \right)^{q-p} \leq \|x\|_p^p \|x\|_p^{q-p} = \|x\|_p^q \end{aligned}$$

□

Satz 6 *Es sei $0 < p < q \leq \infty$ und $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum mit endlichem Maß $\mu(M) < \infty$. Dann gilt $L^q \subset L^p$ und*

$$\|f\|_p \leq (\mu(M))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Beweis. Wir wenden die verallgemeinerte Hölder Ungleichung auf die Funktionen f und 1 und die Exponenten p, q und $\frac{pq}{q-p}$ an. Es gilt $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{q-p}{pq}$ und wir erhalten

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \|1\|_{\frac{pq}{q-p}}$$

□

Lemma 45 *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Dann ist die Menge der einfachen Funktionen*

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \qquad \mu(E_j) < \infty \quad n \in \mathbb{N}$$

dicht in L^p.

Beweis. Es gibt eine Folge einfacher Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, die punktweise überall gegen f konvergiert und für die fast überall und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|f_n| \leq |f|$ gilt. Wir erhalten $\mu(E_j) < \infty$, weil fast überall $|f_n| \leq |f|$ gilt und $f \in L^p$.

Damit folgt $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p|f|^p$. Wir wenden nun den Konvergenzsatz von Lebesgue auf diese Folge an. Es gilt $2^p|f|^p \in L^1$ und $|f_n - f|^p$ konvergiert fast überall gegen 0. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

□

Lemma 46 *(i) Für alle endlichen Folgen f_i, $i = 1, \ldots, n$, von Vektoren aus $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, gilt*

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) Für alle endlichen Folgen f_i, $i = 1, \ldots, n$, von Vektoren aus $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq 2$, gilt

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis. (i) Mit der Dreiecksungleichung

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{2}{p}} = \left\| \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right\|_{\frac{p}{2}}$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \left\| |f_i|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} = \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right)^{\frac{2}{p}} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2$$

Hieraus folgt

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)\left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega |f_i|^p \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1} d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i|^p \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1} d\omega\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |f_i|^p \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n (|f_i|^p)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{2-p}{2}\frac{1}{2}}$$

und damit

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{p}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Lemma 47 *Es sei $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\left(\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)|dt\right|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |f(t,\omega)|^p \, d\omega\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)|dt\right|^p d\omega &= \int_\Omega \int_0^1 |f(t,\omega)|dt \left(\int_0^1 |f(s,\omega)|ds\right)^{p-1} d\omega \\ &= \int_0^1 \int_\Omega |f(t,\omega)| \left(\int_0^1 |f(s,\omega)|ds\right)^{p-1} d\omega dt\end{aligned}$$

Nun wenden wir wie im Beweis zur Minkowski Ungleichung die Hölder Ungleichung an.

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)|dt\right|^p d\omega \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |f(t,\omega)|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 |f(s,\omega)|ds\right)^{p-1} d\omega\right)^{\frac{1}{q}} dt\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\left(\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)|dt\right|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |f(t,\omega)|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

□

1.9 Die Ungleichungen von Hanner und Clarkson

Die Parallelogrammgleichung besagt, dass die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen ist. In Vektorenschreibweise gilt im $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

Dies ist beim Rechnen mit Vektoren sehr nützlich. Leider gilt diese Gleichung nicht für beliebige Normen. In den L^p-Räumen gelten aber die Ungleichungen von Hanner. Ein einfacher Beweis findet sich in [RoW]. Die Ungleichungen von Hanner besagen: Falls $1 \le p \le 2$ gilt, dann

$$|\|f\|_p + \|g\|_p|^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \le \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

Für $2 \le p < \infty$ gelten die umgekehrten Ungleichungen. Aus den Ungleichungen von Hanner kann man die Ungleichungen von Clarkson herleiten.

Die Ungleichungen von Hanner haben eine Reihe von Anwendungen. Mit ihrer Hilfe kann man nachweisen, dass die Räume L^p, $1 < p < \infty$, uniform konvex sind, und man kann den Konvexitätsmodul dieser Räume berechnen.

Die Existenz einer Bestapproximation in L^p lässt sich ebenfalls mit den Ungleichungen von Hanner nachweisen.

Lemma 48 *(i) Es sei $1 \le p \le 2$. Dann gilt für alle $0 < r \le 1$ und $A, B \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})|A|^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}|B|^p \\ \le |A+B|^p + |A-B|^p\end{aligned}$$

(ii) Falls $2 \le p < \infty$, dann gilt die umgekehrte Ungleichung.

Beweis. Der Fall $p = 1$ ist

$$2|A| \le 2\max\{|A|, |B|\} = |A+B| + |A-B|.$$

Der Fall $p = 2$ ist

$$2|A|^2 + 2|B|^2 = |A+B|^2 + |A-B|^2.$$

Nun betrachten wir die Fälle $1 < p < 2$. Es sei $0 < R \leq 1$ und $F : (0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$F(r) = ((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}) + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}R^p$$

F nimmt ihr absolutes Maximum im Punkt $r = R$ an. Es gilt

$$\begin{aligned}
F'(r) &= \big(((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}) + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}R^p\big)' \\
&= (p-1)\left\{(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\right\} \\
&\qquad +(p-1)((1+r)^{p-2} + (1-r)^{p-2})r^{1-p}R^p \\
&\qquad\qquad +(1-p)((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{-p}R^p \\
&= (p-1)\left\{(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\right\} \\
&\quad +(p-1)\left(\frac{R}{r}\right)^p \left\{r(1+r)^{p-2} + r(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}\right\} \\
&= (p-1)((1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2})\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^p\right)
\end{aligned}$$

Da $p-2 < 0$ folgt, dass F für $r < R$ strikt wachsend ist und für $r > R$ strikt fallend ist.

$$\begin{aligned}
F(R) &= ((1+R)^{p-1} + (1-R)^{p-1}) + ((1+R)^{p-1} - (1-R)^{p-1})R \\
&= (1+R)^p + (1-R)^p
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $0 < r \leq 1$ und alle $0 < R \leq 1$

$$\begin{aligned}
((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}) + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}R^p \\
\leq (1+R)^p + (1-R)^p
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Ausdrücke in R, gilt die Abschätzung auch für $R = 0$. Wir multiplizieren mit A^p

$$\begin{aligned}
((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})A^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}(AR)^p \\
\leq (A+AR)^p + (A-AR)^p
\end{aligned}$$

und setzen $B = AR$

$$\begin{aligned}
((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})A^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}B^p \\
\leq (A+B)^p + (A-B)^p
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Ungleichung für alle A und B mit $0 \leq B \leq A$ gezeigt. (Wir müssen beachten, dass $A - B \geq 0$, weil anderenfalls der Ausdruck $(A-B)^p$ nicht sinnvoll ist.)

Wir beobachten nun, dass für alle r mit $0 < r \leq 1$

$$((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p} \leq (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \tag{1.5}$$

Wir prüfen dies nach. Die Funktion $(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$ ist auf $(0,1]$ monoton fallend. Dies folgt, weil die Ableitung

$$(p-1)\{(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\}$$

auf $(0,1)$ negativ ist. Somit gilt

$$2^{p-1} \leq (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \tag{1.6}$$

Wir betrachten nun die Funktion $((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}$ auf $(0,1]$. Wir setzen $s = \frac{1}{r}$ und erhalten die Funktion $(s+1)^{p-1} - (s-1)^{p-1}$ auf $[1,\infty)$. Diese Funktion ist auf $[1,\infty)$ monoton fallend. Dazu rechnen wir die Ableitung

$$(p-1)\{(s+1)^{p-2} - (s-1)^{p-2}\}$$

aus und stellen fest, dass sie negativ ist, weil $p < 2$. Es folgt

$$2^{p-1} \geq ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p} \tag{1.7}$$

Aus (1.6) und (1.7) folgt nun (1.5). Wir betrachten den Fall $0 \leq A \leq B$.

$$\begin{aligned}
&((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})A^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}B^p \\
&\leq ((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})B^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}A^p \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq (A+B)^p + (B-A)^p
\end{aligned}$$

Also gilt für alle A, B mit $0 \leq A, B$

$$\begin{aligned}
&((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})|A|^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}|B|^p \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq |A+B|^p + |A-B|^p
\end{aligned}$$

Weder die linke, noch die rechte Seite hängt von den Vorzeichen von A und B ab. Also haben wir die Ungleichung für alle A und B gezeigt. $\square$

Lemma 49 *(Hanner) Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$.*
(i) Falls $1 \leq p \leq 2$ gilt, dann

$$\big|\|f\|_p + \|g\|_p\big|^p + \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

und

$$\big|\|f+g\|_p + \|f-g\|_p\big|^p + \big|\|f+g\|_p - \|f-g\|_p\big|^p \leq 2^p \left|\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right|$$

(ii) Falls $2 \leq p < \infty$, dann gelten die umgekehrten Ungleichungen.

Beweis. (i) Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten Ungleichung, indem man für f die Funktion $f+g$ einsetzt und für g die Funktion $f-g$. Wir betrachten zuerst den Fall $p = 1$. Wir können annehmen, dass $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|\|f\|_1 + \|g\|_1| + |\|f\|_1 - \|g\|_1| = 2\|f\|_1 \leq \|f+g\|_1 + \|f-g\|_1.$$

Nun behandeln wir den Fall $p = 2$. Hier sind die Ungleichungen tatsächlich Gleichungen.

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = \int |f+g|^2 d\mu + \int |f-g|^2 d\mu = 2\int f^2 + g^2 d\mu = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2$$

$$|\|f\|_2 + \|g\|_2|^2 + |\|f\|_2 - \|g\|_2|^2 = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2$$

Wir betrachten nun den Fall $1 < p < 2$. Wir können annehmen, dass $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. Nach Lemma gilt für alle r mit $0 < r \leq 1$ und alle $x \in X$

$$\begin{aligned}((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})|f(x)|^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}|g(x)|^p \\ \leq |f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p.\end{aligned}$$

Wir setzen $r = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}$ und erhalten

$$\begin{aligned}&\left(\left(1 + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1} + \left(1 - \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)|f(x)|^p \\ &\qquad + \left(\left(1 + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1} - \left(1 - \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)\frac{\|g\|_p^{1-p}}{\|f\|_p^{1-p}}|g(x)|^p \\ &\qquad \leq |f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p.\end{aligned}$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten

$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}+\left(1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)\|f\|_p^p \\ +\left(\left(1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}-\left(1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)\frac{\|g\|_p^{1-p}}{\|f\|_p^{1-p}}\|g\|_p^p \\ \leq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\left((\|f\|_p+\|g\|_p)^{p-1}+(\|f\|_p-\|g\|_p)^{p-1}\right)\|f\|_p \\ +\left((\|f\|_p+\|g\|_p)^{p-1}-(\|f\|_p-\|g\|_p)^{p-1}\right)\|g\|_p \\ \leq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$(\|f\|_p+\|g\|_p)^p+(\|f\|_p-\|g\|_p)^p \leq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p$$

□

Korollar 2 *Es sei $1 < p < \infty$, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und K eine konvexe Teilmenge vom L^p, die in der Norm-Topologie abgeschlossen ist. Es sei $f \in L^p$. Dann gibt es genau ein $h \in K$, so dass*

$$\|f-h\| = \inf_{g\in K}\|f-g\|$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $f = 0$. Wir setzen $D = \inf_{g\in K}\|g\|$. Es sei h_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in K, so dass

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n\| = D$$

Wir zeigen, dass h_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in der Norm-Topologie ist. Da L^p vollständig ist, gibt es damit ein h mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir zeigen, dass

$$\lim_{n,m\to\infty}\|h_n+h_m\| = 2D.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt $\|h_n + h_m\| \leq \|h_n\| + \|h_m\|$ und deshalb

$$\limsup_{n,m\to\infty} \|h_n + h_m\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|h_n\| + \limsup_{m\to\infty} \|h_m\| \leq 2D$$

Weil K konvex ist, gilt $\frac{1}{2}(h_n + h_m) \in K$. Es folgt

$$\|\tfrac{1}{2}(h_n + h_m)\| \geq D$$

Mit Hanners Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\|h_n + h_m\|_p + \|h_n - h_m\|_p|^p + |\|h_n + h_n\|_p - \|h_n - h_m\|_p|^p \\ \leq 2^p \left|\|h_n\|_p^p + \|h_m\|_p^p\right| \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert für $n, m \to \infty$ gegen $2^{p+1}D$. Falls h_n, $n \in \mathbb{N}$, keine Cauchy-Folge ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass

$$(2D + \epsilon)^p + (2D - \epsilon)^p \leq 2^{p+1}D$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2D + x|^p$, ist strikt konvex. Deshalb

$$(2D)^p = f(0) = f(\tfrac{1}{2}\epsilon - \tfrac{1}{2}\epsilon) < \tfrac{1}{2}(f(\epsilon) + f(-\epsilon)) = \tfrac{1}{2}(2D + \epsilon)^p + (2D - \epsilon)^p$$

Somit gilt

$$2(2D)^p < (2D + \epsilon)^p + (2D - \epsilon)^p$$

Dies ist ein Widerspruch.

Der Vektor h ist eindeutig. Falls nicht, so gäbe es mindestens zwei Vektoren h und $\tilde{h}$ mit minimalem Abstand. Wie wir bereits oben gezeigt haben, ist dann die Folge h_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $h_n = h$, falls n gerade, und $h_n = \tilde{h}$, falls n ungerade, eine Cauchy-Folge. Also gilt $h = \tilde{h}$. □

Satz 7 *(Ungleichungen von Clarkson)[Cla] (i) Es sei $2 \leq p < \infty$.*

$$(\|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(\|x\|_p^{p'} + \|y\|_p^{p'})^{\frac{1}{p'}} \tag{1.8}$$

$$2^{\frac{1}{p'}}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\|x + y\|_p^{p'} + \|x - y\|_p^{p'})^{\frac{1}{p'}} \tag{1.9}$$

(ii) Für $1 < p \leq 2$ gelten die umgekehrten Ungleichungen.

Lemma 50 *Für alle p mit $2 \leq p < \infty$ und alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t, s$ gilt*

$$(|t+s|^p + |t-s|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(t^{p'} + s^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für alle c mit $0 < c < 1$ die Ungleichung

$$(|1+c|^p + |1-c|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(1 + c^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

gilt. Wir ersetzen nun

$$c = \frac{1-z}{1+z}$$

und erhalten für z mit $0 < z < 1$

$$(1+z^p)^{p'-1} \leq \tfrac{1}{2}\{(1+z)^{p'} + (1-z)^{p'}\}$$

Wir entwickeln die Funktion

$$S(z) = \tfrac{1}{2}\{(1+z)^{p'} + (1-z)^{p'}\} - (1+z^p)^{p'-1}$$

in ihre Taylorreihe und zeigen, dass sie für $0 < z < 1$ nicht negativ ist. Es gilt

$$\tfrac{1}{2}\{(1+z)^{p'} + (1-z)^{p'}\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(p'-1)(2-p')\cdots(2k-1-p')}{(2k)!} z^{2k}$$

und

$$(1+z^p)^{p'-1} = 1 + (p'-1)z^p + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(p'-1)(2-p')\cdots(m-p')}{m!} z^{mp}$$

Da $1 \leq p' < 2$

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-p')(3-p')\cdots(2k-p')}{(2k-1)!} z^{2k} \left\{ \frac{1 - z^{\frac{2k-p'}{p'-1}}}{\frac{2k-p'}{p'-1}} - \frac{1 - z^{\frac{2k}{p'-1}}}{\frac{2k}{p'-1}} \right\}$$

Die Funktion $\frac{1}{t}(1-z^t)$ ist für $0 < t$ und $0 < z < 1$ eine fallende Funktion in t. Deshalb sind die Summanden in der Reihenentwicklung von S nicht negativ. $\square$

Beweis. (i) Wir zeigen die Ungleichung (1.8). Die Ungleichung von Hanner ist

$$\big|\|f\|_p + \|g\|_p\big|^p + \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

Nun reicht es zu zeigen, dass für alle $t, s\mathbb{R}$ mit $0 \leq t, s$

$$(|t+s|^p + |t-s|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(t^{p'} + s^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

□

1.10 Khintchine-Ungleichung

Die Rademacher-Funktionen $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, sind durch

$$r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^n \pi t$$

definiert. Sie nehmen nur die Werte -1 und 1 an. Die Rademacher-Funktionen sind im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne unabhängige Zufallsveränderliche.

Satz 8 *(Khintchine-Ungleichung) Zu jedem p mit $1 \leq p < \infty$ existieren positive Konstanten a_p und b_p, so dass für alle endlichen Folgen reeller Zahlen x_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ die Ungleichungen*

$$a_p \left(\sum_{i=0}^{m} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{m} x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq b_p \left(\sum_{i=0}^{m} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für die optimalen Konstanten gilt $a_p \geq \frac{1}{8}$ für $1 \leq p \leq 2$, $a_p = 1$ für $2 \leq p < \infty$, $b_p = 1$ für $1 \leq p \leq 2$ und $b_p \leq \sqrt{2p+4}$ für $2 \leq p < \infty$.

Die optimalen Konstanten in Satz 8 lassen sich genau bestimmen. Szarek [Sza] zeigte, dass $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Es gilt

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{m} x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i x_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Der letztere Ausdruck lässt die folgende Interpretation zu. Man wirft eine Münze m-mal. Zahl bekommt den Wert 1 und Kopf den Wert -1. Der Mittelwert oder Erwartungswert ist 0, d.h. man erwartet genauso oft Kopf wie Zahl. Es ist jedoch nicht immer so, dass man genauso oft Kopf und Zahl wirft, wenn man eine Münze m-mal wirft. Es ist z.B. möglich, dass jedesmal Kopf geworfen wird. Es stellt sich also die Frage, wie sehr typischerweise beim m-maligen Werfen einer Münze das Ergebnis davon abweicht, dass genauso oft Kopf wie Zahl geworfen werden. Die mittlere Abweichung ist

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i x_i \right|$$

Nach der Khintchine-Ungleichung ist dies von der Größenordnung $\sqrt{m}$.

Lemma 51 *Es seien $k_1, \ldots, k_\ell$ natürliche Zahlen. Es gilt genau dann*

$$\int_0^1 r_{i_1}^{k_1}(t) \cdots r_{i_\ell}^{k_\ell}(t) dt = 0,$$

falls eine der Zahlen $k_1, \ldots, k_\ell$ ungerade ist.

Falls alle Zahlen gerade sind, dann ist das Integral gleich 1.

Lemma 52 *Für alle $k, k_1, k_2, \ldots, k_m = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\frac{(2k)!}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \leq 2^{2k} k! \frac{k!}{k_1! \cdots k_m!}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{(2k)!}{k!} &= \frac{(2k)(2k-1)(2k-2)\cdots 2 \cdot 1}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} \\
&= 2^k (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1 \\
&= 2^k \prod_{j=0}^{k-1} (2k - (2j+1)) \\
&\leq 2^k \prod_{j=0}^{k-1} (2k - 2j) = 2^{2k} \prod_{j=0}^{k-1} (k-j) = 2^{2k} k!
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{(2k)!}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \leq 2^{2k} k! \frac{k!}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \leq 2^{2k} k! \frac{k!}{k_1! \cdots k_m!}$$

□

Beweis. Mit Satz 6 folgt, dass für die optimalen Konstanten a_p die Abschätzung $a_p \leq a_q$ für $p \leq q$ gilt und $b_p \leq b_q$ für $p \leq q$.

Wir zeigen zuerst, dass die Ungleichungen für $a_2 = b_2 = 1$ gelten. Wegen Lemma 51 gilt für alle i, j mit $i \neq j$

$$\int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = 0.$$

Hiermit folgt sofort

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i(t) \right|^2 dt = \sum_{i,j=0}^m x_i x_j \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = \sum_{i=0}^m |x_i|^2.$$

Mit Satz 6 folgt, dass für $p \leq 2$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und für $p \geq 2$

$$\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt.

Es sei p eine positive, gerade, ganze Zahl. Die Multinomialentwicklung liefert

$$\left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^p = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = p}}^p \frac{p!}{k_0! \cdots k_m!} x_0^{k_0} \cdots x_m^{k_m} r_0^{k_0} \cdots r_m^{k_m}$$

Hiermit und mit Lemma 51 folgt

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^p dt = \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = p \\ k_i \text{ gerade}}}^p \frac{p!}{k_0! \cdots k_m!} x_1^{k_0} \cdots x_m^{k_m}$$

Wir setzen nun $p = 2k$

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^{2k} dt = \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = k}}^k \frac{(2k)!}{(2k_0)! \cdots (2k_m)!} x_1^{2k_0} \cdots x_m^{2k_m}$$

Weiter gilt

$$\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^k = \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = k}}^k \frac{k!}{k_0! \cdots k_m!} x_1^{2k_0} \cdots x_m^{2k_m}$$

Mit Lemma 52 folgt

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^p dt \leq 2^{2k} k! \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^k \leq 2^p \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

und somit

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{2p} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Damit haben wir auch gezeigt, dass $b_p \leq \sqrt{2p}$. Falls $p \geq 2$, aber keine ganze, gerade Zahl ist, dann gibt es eine ganze, gerade Zahl r mit $2 \leq r \leq p \leq r+2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^{r+2} dt\right)^{\frac{1}{r+2}} \\ &\leq \sqrt{2(r+2)} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2(p+2)} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $a_1 = b_4^{-2}$ die Gleichung erfüllt. Da 4 eine ganze, gerade Zahl ist, gilt $b_4 \leq \sqrt{8}$ und somit $a_1 \geq \frac{1}{8}$. Mit Hölders Ungleichung (Lemma 41) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^m |x_i|^2 &= \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^{\frac{2}{3}} \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^{\frac{4}{3}} dt \\ &\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right| dt\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right| dt\right)^{\frac{2}{3}} b_4^{\frac{4}{3}} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

und somit

$$\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq b_4^2 \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right| dt$$

□

1.11 Satz von Stone-Weierstraß

Für zwei reellwertige Funktionen f und g definieren wir

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad \min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Lemma 53 *Es sei K ein kompakter, topologischer Raum, der mindestens zwei Elemente enthält. Es sei M eine Teilmenge von $C(K,\mathbb{R})$, so dass*
(i) Für alle $f, g \in M$ gilt $\max\{f,g\} \in M$ und $\min\{f,g\} \in M$.
(ii) Für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$ existiert ein $f \in M$ mit $f(x) = s$ und $f(y) = t$.
Dann ist M in $C(K,\mathbb{R})$ bzgl. der Normtopologie dicht.

Beweis. Es seien $f \in C(K,\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Es sei x fest gewählt. Nach Annahme existiert zu allen $x, y \in K$ mit $x \neq y$ eine Funktion $g_y \in M$ mit $g_y(x) = f(x)$ und $f(y) = g_y(y)$. Weiter sei

$$O_y = \{z | g_y(z) > f(z) - \epsilon\}$$

Für alle $y \in K$ ist O_y eine offene Menge und $x, y \in O_y$. Somit ist O_y, $y \in K$ und $y \neq x$, eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilüberdeckung.

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$$

wobei für alle $i = 1, \ldots, n$ die Relation $x \neq y_i$ gilt. Nun setzen wir

$$h_x = \max\{g_{y_1}, \ldots, g_{y_n}\}$$

Durch Induktion erhalten wir $h_x \in M$. Damit erhalten wir

$$h_x(x) = f(x) \text{ und für alle } z \in K : h_x(z) > f(z) - \epsilon$$

Wir setzen nun

$$U_x = \{z \in K | h_x(z) < f(z) + \epsilon\}$$

Damit ist U_x, $x \in K$, eine offene Überdeckung von K und besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}$$

Wir setzen nun

$$h = \min\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_m}\}$$

Damit gilt $f - \epsilon < h < f + \epsilon$ und somit $\|f - h\| < \epsilon$. □

Satz 9 *Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und X ein Teilraum von $C(K, \mathbb{R})$, so dass*
(i) X enthält alle konstanten Funktionen.
(ii) Die Funktionen von X trennen die Punkte von K, d.h. für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gibt es eine Funktion $f \in X$ mit $f(x) \neq f(y)$.
(iii) Für alle $f, g \in X$ gilt $\max\{f, g\} \in X$ und $\min\{f, g\} \in X$.
Dann ist X in $C(K, \mathbb{R})$ bzgl. der Normtopologie dicht.

Beweis. Falls K nur ein Element enthält, ist das Ergebnis klar. Wir nehmen nun an, dass K mindestens zwei Elemente enthält. Es reicht nun, die Voraussetzungen von Lemma 53 nachzuprüfen.

Falls $x, y \in K$ mit $x \neq y$, dann gibt es eine Funktion $f \in X$ mit $f(x) \neq f(y)$. Da die konstanten Funktionen in X liegen, so sind für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktionen $\alpha f + \beta$ Elemente von X. Es gibt zu allen $s, t \in \mathbb{R}$ zwei Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha f(x) + \beta = s$ und $\alpha f(y) + \beta = t$, nämlich

$$\alpha = \frac{s - t}{f(x) - f(y)} \qquad \beta = s - f(x)\frac{s - t}{f(x) - f(y)}$$

Es gilt $\alpha f + \beta \in X$, weil die konstanten Funktionen in X sind und X ein Vektorraum ist. □

Es sei K eine kompakter, topologischer Raum und $\mathcal{A}$ sei ein Teilraum von $C(K)$. Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, wenn aus $f, g \in \mathcal{A}$ die Relation $f \cdot g \in \mathcal{A}$ folgt.

Wir bemerken, dass ein Teilraum $\mathcal{A}$ genau dann eine Algebra ist, wenn für alle $f \in \mathcal{A}$ die Relation $f^2 \in \mathcal{A}$ gilt. Dies folgt, weil

$$f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$$

Lemma 54 *Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge in $C(K, \mathbb{R})$, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Dann konvergiert die Folge gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Wir setzen

$$O_n = \{x \in K | f_n(x) > f(x) - \epsilon\}$$

Dann ist O_n eine offene Überdeckung von K, weil f_n punktweise gegen f konvergieren. Weiter gilt $O_n \subseteq O_{n+1}$, weil f_n monoton wachsend sind. Also gibt es ein N mit $O_N = K$. Somit gilt für alle $x \in K$, dass $f(x) - \epsilon < f_N(x) \leq f(x)$. Weil f_n strikt wachsend sind, gilt für alle $n \geq N$, dass $f(x) - \epsilon < f_N(x) \leq f(x)$. $\square$

Lemma 55 *Es gibt eine Folge von Polynomen p_n, $n \in \mathbb{N}$, die auf $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $|x|$ konvergiert.*

Beweis. Wir setzen $p_0 = 0$ und

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x))$$

p_n ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen die Funktion $|x|$. Mit dem Lemma von Dini folgt, dass die Folge gleichmäßig konvergiert.

Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [-1, 1]$ die Ungleichung $0 \leq p_n(x) \leq |x|$ gilt. Wir benutzen Induktion über n. $p_0 = 0$ erfüllt offen bar die Ungleichung. Wir nehmen nun an, dass wir die Ungleichung für n bewiesen haben. Dann

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x)) \geq p_n(x)$$

und

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x)) \\ &= |x| - (|x| - p_n(x)) + \frac{1}{2}(|x| + p_n(x))(|x| - p_n(x)) \\ &= |x| - (|x| - p_n(x)) \left\{ 1 - \frac{1}{2}(|x| + p_n(x)) \right\} \leq |x| \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass die Folge monoton wachsend ist. Außerdem gilt $p_n \leq p_{n+1}$.

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x)) \geq p_n(x)$$

□

Satz 10 *[Stone-Weierstraß] Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Algebra in dem reellen Raum $C(K)$. $\mathcal{A}$ enthalte die konstanten Funktionen und $\mathcal{A}$ sei punktetrennend, d.h. zu jedem x und y mit $x \neq y$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(K)$.*

Falls $C(K)$ ein komplexer Vektorraum ist, dann muss man noch zusätzlich fordern, dass $\mathcal{A}$ selbstadjungiert ist, d.h. mit $f \in A$ gilt auch $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Beweis. Die Algebra $\mathcal{A}$ enthält alle konstanten Funktionen und sie trennt auch die Punkte von K. Damit gilt dies auch für den Abschluss $\bar{\mathcal{A}}$ der Algebra und $\bar{\mathcal{A}}$ ist wiederum eine Algebra $\bar{\mathcal{A}}$. Dies gilt, weil

$$\|f_n g_n - fg\| \leq \|f_n g_n - f g_n\| + \|f g_n - fg\| \leq \|g_n\|\|f_n - f\| + \|f\|\|g_n - g\|$$

Nach Satz 9 reicht es nun nachzuweisen, dass $\max\{f, g\} \in \bar{\mathcal{A}}$ und $\min\{f, g\} \in \bar{\mathcal{A}}$, falls $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$ gilt.

Nach Lemma **??** gibt es eine Folge von Polynomen p_n, die auf $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $|x|$ konvergiert. damit konvergiert die Folge $p_n(\frac{f}{\|f\|})$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{|f|}{\|f\|}$. Die Funktionen $p_n(\frac{f}{\|f\|})$ sind Elemente von $\bar{\mathcal{A}}$, weil $\bar{\mathcal{A}}$ eine Algebra ist. Weiter folgt, dass $\|f\| p_n(\frac{f}{\|f\|})$ gleichmäßig gegen $|f|$ konvergiert. Somit ist auch $|f|$ in $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten.

Wegen

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \qquad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

sind also auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ in $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten wenn $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$. □

Korollar 3 *Es sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Polynome dicht in dem Raum $C(K, \mathbb{R})$.*

Beweis. Die Menge der Polynome ist offensichtlich eine Algebra. Die Kostanten gehören zum Raum der Polynome. Die Polynome trennen die Punkte von K. Dazu reicht es, die Polynome der Form $x_i + c$ zu betrachten. $\square$

Chapter 2

Lineare Operatoren

2.1 Lineare Operatoren

Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T heißt beschränkt, falls es ein c mit $c > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

gilt. Das Infimum über alle solche c bezeichnen wir als die Norm von T

$$\|T\| = \inf \{c \mid \forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X\}$$

Lemma 56 *(i) Für alle $x \in X$ gilt*

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \ \|x\|_X$$

(ii)

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y | \ \|x\|_X \leq 1\}$$

(iii)

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y | \ \|x\|_X = 1\}$$

(iv)

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Beweis. (i)

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq (\|T\| + \epsilon)\|x\|_X$$

Dies ist dasselbe wie

$$\forall x \in X \forall \epsilon > 0 : \|T(x)\|_Y \leq (\|T\| + \epsilon)\|x\|_X$$

Es folgt sofort

$$\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq \|T\| \ \|x\|_X$$

(ii) Aus (i) folgt sofort

$$\sup\{\|T(x)\|_Y | \ \|x\|_X \leq 1\} \leq \|T\|$$

Umgekehrt gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x \in X$, so dass

$$\|T(x)\|_Y \geq (\|T\| - \epsilon)\|x\|_X$$

Hieraus folgt

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \geq \|T\| - \epsilon$$

Damit folgt für alle $\epsilon > 0$

$$\sup\{\|T(x)\|_Y | \ \|x\|_X \leq 1\} \geq \|T\| - \epsilon$$

□

Mit $L(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen, beschränkten Operatoren von X nach Y.

Lemma 57 *$L(X, Y)$ ist ein Vektorraum und*

$$\|T\| = \inf\{c \ |\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X\}$$

ist eine Norm. Sie wird Operatornorm genannt.

Beweis. Falls $\|T\| = 0$, dann gilt

$$\sup_{\|x\|=1} \|T\| = 0.$$

Also gilt für alle x mit $\|x\| = 1$, dass $Tx = 0$. Hieraus folgt für alle $x \in X$, dass $Tx = 0$. Also $T = 0$.

Es gilt

$$\|tT\| = \sup_{\|x\|=1} \|tT(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |t|\|T(x)\| = |t| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = |t|\|T\|$$

Wir zeigen, dass die Dreiecksungleichung gilt.

$$\begin{aligned}
\|T+S\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T+S)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)+S(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} (\|T(x)\| + \|S(x)\|) \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|S(x)\| = \|T\| + \|S\|
\end{aligned}$$

□

Lemma 58 *X und Y seien normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*
(i) T ist stetig.
(ii) T ist stetig in 0.
(iii) T ist beschränkt.

Beweis. Dass (ii) aus (i) folgt, ist trivial. Wir zeigen, dass (iii) aus (ii) folgt. Da T stetig in 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \delta$ gilt, dass $\|T(x)\| < 1$.

$$\begin{aligned}
\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y |\ \|x\|_X \leq 1\} &= \frac{1}{\delta} \sup\{\|T(\delta x)\|_Y |\ \|x\|_X \leq 1\} \\
&= \frac{1}{\delta} \sup\{\|T(y)\|_Y |\ \|y\|_X \leq \delta\} \leq \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

Aus (iii) folgt (i): Die Beschränktheit von T

$$\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq \|T\|\ \|x\|_X$$

impliziert sofort

$$\forall x, y \in X : \|T(x-y)\|_Y \leq \|T\|\ \|x-y\|_X$$

□

Lemma 59 *Falls X ein normierter Raum und Y ein Banachraum ist, dann ist $L(X,Y)$ ein Banachraum.*

Beweis. Es sei T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $L(X,Y)$. Dann gilt für alle $x \in X$, dass $T_n x$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist. Dies folgt sofort aus

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|_X$$

Da Y ein Banachraum ist, konvergiert $T_n x$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $x \in X$. Wir definieren einen Operator T durch

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Wir prüfen nach, dass T linear ist.

$$\begin{aligned} T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) \quad &= \lim_{n\to\infty} (T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + T(y) \end{aligned}$$

$$T(tx) = \lim_{n\to\infty} T_n(tx) = t \lim_{n\to\infty} T_n(x) = tT(x)$$

Wir prüfen nach, dass T beschränkt ist.

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|\leq 1} \| \lim_{n\to\infty} T_n(x)\|_Y$$

Mit Lemma 36

$$\begin{aligned} \|T\| \quad &= \sup_{\|x\|\leq 1} \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_Y = \sup_{\|x\|\leq 1} \liminf_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_Y \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x)\|_Y = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $L(X,Y)$ ist und damit $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ ist. Wir zeigen nun, dass

die Folge T_n, $n \in \mathbb{N}$, in $L(X,Y)$ gegen T konvergiert.

$$\begin{aligned}
\|T - T_n\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T(x)\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - \lim_{k\to\infty} T_k(x)\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \| \lim_{k\to\infty} (T_n(x) - T_k(x))\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \lim_{k\to\infty} \|T_n(x) - T_k(x)\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \liminf_{k\to\infty} \|T_n(x) - T_k(x)\|_Y \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_k(x)\|_Y \\
&= \liminf_{k\to\infty} \|T_n - T_k\|
\end{aligned}$$

□

Zwei normierte Räume X und Y heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $I : X \to Y$ gibt, so dass I und I^{-1} beschränkt sind.

Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt Projektion, falls $P^2 = P$ gilt. Eine Projektion ist auf dem Bild $P(X)$ die identische Abbildung, d.h. für alle $x \in P(X)$ gilt $P(x) = x$. Dies sieht man leicht ein: Es sei $x \in P(X)$. Dann gibt es ein $y \in X$ mit $x = P(y)$ und somit gilt

$$P(x) = P^2(y) = P(y) = x$$

Wir sagen, dass ein Teilraum Y von X komplementiert ist, wenn Y das Bild einer stetigen Projektion ist.

Lemma 60 *Es sei X ein Banachraum und Y ein Teilraum von X. Y ist genau dann komplementiert in X, wenn es einen weiteren Teilraum Z von X mit $Y \cap Z = \{0\}$ und $X = Y + Z$ gibt, so dass die Norm $\| \ \|_Y + \| \ \|_Z$ äquivalent zu der von X ist.*

Man kann X also als direkte Summe $Y \oplus Z$ darstellen.

Beweis. Es sei Y das Bild der stetigen Projektion P. Es sei $I : X \to X$ die identische Abbildung. Dann ist $I - P$ eine Projektion

$$(I - P)^2 = I^2 - PI - IP + P^2 = I - P.$$

Wir wählen Z als das Bild von $I-P$. Dann ist die Abbildung $J : X \to Y \oplus Z$ mit $J(x) = (P(x), (I-P)(x))$ eine stetige Bijektion. Wir weisen dies nach. J ist linear, weil P und I linear sind.

Falls $J(x) = J(y)$ gilt, dann

$$P(x) = P(y) \qquad \text{und} \qquad x - P(x) = y - P(y)$$

Es folgt $x = y$. Also ist J injektiv.

$$\|J\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|J(x)\| = \sup_{\|x\|_X=1} (\|P(x)\| + \|(I-P)(x)\|) \leq \|P\| + \|I-P\|$$

Mit der Dreiecksungleichung

$$\|J^{-1}\| = \sup_{\|y\|+\|z\|\leq 1} \|y+z\|_X \leq \sup_{\|y\|+\|z\|\leq 1} (\|y\|_X + \|z\|_X) = 1$$

Wenn nun umgekehrt $Y \oplus Z$ isomorph zu X ist, dann wählen wir als Projektion $P : X \to X$ mit $P(y+z) = y$. $\square$

Den Raum Z nennt man auch Komplementärraum zu Y.

Es sei X ein Vektorraum und Y ein Teilraum von X. Wir sagen, dass x und z äquivalent sind, wenn $x - z$ ein Element von Y ist. Wir bezeichnen den Raum aller Äquivalenzklassen als Quotientenraum X/Y. Die Abbildung Q, die x auf ihre Äquivalenzklasse abbildet heißt Quotientenabbildung.

Falls X ein normierter Raum ist und Y ein abgeschlossener Teilraum von X ist, dann ist

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf\{\|z\|_X | z \sim x\} = \inf\{\|x+y\|_X | y \in Y\}$$

eine Norm auf X/Y.

Lemma 61 *Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann gelten*
(i) $\|[x]\|_{X/Y} = \inf\{\|z\|_X | z \sim x\} = \inf\{\|x+y\|_X | y \in Y\}$ *ist eine Norm auf X/Y.*
(ii) $\forall \epsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in Y : \|[x]\| + \epsilon \geq \|x+y\|$
(iii) Die Abbildung $Q : X \to X/Y$ mit $Q(x) = [x]$ hat die Norm 1.
(iv) Falls X vollständig ist, so ist auch X/Y vollständig.

Das Bild der offenen Einheitskugel unter einer Quotientenabbildung ist gleich der offenen Einheitskugel im Quotientenraum. Das Bild der abgeschlossenen Kugel muss nicht gleich der abgeschlossenen Kugel im Quotientenraum sein. Dazu kannn man ein Funktional betrachten, das seine Norm nicht annimmt. Der Quotientenraum ist gleich $\mathbb{R}$.

Beweis. (i) Da Y abgeschlossen ist, gilt für alle $x \notin Y$

$$\|[x]\|_{X/Y} > 0$$

Es folgt, dass genau dann $\|[x]\| = 0$ gilt, wenn $[x] = 0$. Wir weisen die Dreiecksungleichung nach.

$$\begin{aligned}
\|[x]+[y]\| &= \|[x+y]\| \\
&= \inf\{\|x+y+z\|_X | z \in Y\} \\
&= \inf\{\|x+y+z+w\|_X | z, w \in Y\} \\
&\leq \inf\{\|x+z\|_X + \|y+w\|_X | z, w \in Y\} \\
&= \inf\{\|x+z\|_X | z, w \in Y\} + \inf\{\|y+w\|_X | z, w \in Y\} \\
&= \|[x]\| + \|[y]\|
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus der Eigenschaft des Infimums.

(iii) Es gilt

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|=1} \inf\{\|x+y\|_X | y \in Y\}$$

Man sieht sofort, dass $\|Q\| \leq 1$. Wir weisen nun die umgekehrte Ungleichung nach. Es sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $y \in Y$ mit $\|[x]\| \geq \|x-y\|_X - \epsilon$. Es folgt

$$\|Q\| \geq \frac{\|[x-y]\|_{X/Y}}{\|x-y\|_X} = \frac{\|[x]\|_{X/Y}}{\|x-y\|_X} \geq \frac{\|[x]\|_{X/Y}}{\|[x]\|_{X/Y} + \epsilon}$$

(iv) Nach Lemma 37 reicht es zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$ in X/Y konvergiert, falls $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$. Wir können annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\|x_n\| \leq \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$ gilt. Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$$

Da X vollständig ist, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Damit folgt

$$\left\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right] - \sum_{n=1}^{N} [x_n] \right\| = \left\| \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \right] \right\| \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \right\|$$

□

Lemma 62 *Es sei X ein Banachraum und Y ein komplementierter Teilraum von X. Dann ist der Quotientenraum X/Y isomorph zu einem Teilraum von X.*

Beweis. Nach Lemma **??** gibt es einen weiteren Teilraum Z mit $Y \cap Z = \{0\}$ und $X = Y + Z$, so dass die Norm $\| \ \|_Y + \| \ \|_Z$ äquivalent zu der von X ist. Wir zeigen, dass X/Y isomorph zu Z ist. Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ und $z \in Z$, so dass $x = y + z$. Wir definieren $I : X/Y \to Z$ durch

$$I([x]) = z$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und bijektiv. Es sei $x \in X$ und $x = y + z$ mit $y \in Y$ und $z \in Z$. Dann gilt

$$\|x\|_{X/Y} = \inf_{u \in Y} \|x + u\|_X = \inf_{u \in Y} \|y + z + u\|_X \leq \|z\|$$

und

$$\|x\|_{X/Y} = \inf_{u \in Y} \|x+u\|_X = \inf_{u \in Y} \|z+y+u\|_X \geq c \inf_{u \in Y} (\|y+u\|_Y + \|z\|_Z) = c\|z\|_Z$$

□

Lemma 63 *Es seien X ein Banachraum, $T : X \to X$ ein beschränkter Operator mit $\|T\| < 1$ und I die identische Abbildung auf X. Dann ist $I - T$ bijektiv und $(I - T)^{-1}$ ein beschränkter Operator.*

Beweis. Da X ein Banachraum ist, so ist auch $L(X)$ ein Banachraum. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konvergiert in $L(X)$, weil $\|T\| < 1$ und damit die Reihe absolut konvergiert. Es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Die Folge der Operatoren

$$(I - T)\sum_{n=0}^{k} T^n = I - T^{n+1}$$

konvergiert gegen I. $\square$

Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen heisst kompakt, wenn das Bild $T(\overline{B_X})$ der abgeschlossenen Einheitskugel relativ kompakt ist, wenn also der Abschluss von $T(\overline{B_X})$ kompakt ist.

$K(X, Y)$ bezeichnet die kompakten Operatoren.

Lemma 64 *Es seien X, Y und Z Banachräume. Dann gilt*
(i) $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L(X, Y)$.
(ii) Es seien $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$. Falls T oder S kompakt ist, dann ist auch $S \circ T$ kompakt.

Lemma 65 *Es seien X und Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Es sei $T_n \in L(X, Y)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Bild von T_n endlich-dimensional ist und T_n in der Norm gegen T konvergiert. Dann T ist kompakt.*

Beweis. T_n, $n \in \mathbb{N}$ sind kompakt, weil das Bild endlich-dimensional ist. Der Raum $K(X, Y)$ ist vollständig, deshalb ist T kompakt. $\square$

2.2 Lineare Funktionale

Eine lineare Abbildung von einem topologischen Vektorraum X über dem Körper $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ heißt lineares Funktional. Der Vektorraum aller stetigen, linearen Funktionale eines topologischen Vektorraumes X heißt Dualraum von X und wird mit X^* bezeichnet. Falls X ein normierter Vektorraum ist, dann ist X^* mit der Operatornorm wegen Lemma 59 ein Banachraum.

Der Dualraum ist von besonderer Bedeutung in der Funktionalanalysis. Wenn man z.B. eine Eigenschaft eines normierten Raumes überprüfen will, so kann es einfacher sein eine entsprechende Eigenschaft für den Dualraum nachzuweisen.

Lemma 66 *Es sei X ein topologischer, reeller Vektorraum und ϕ ein lineares Funktional auf X. ϕ ist genau dann stetig, wenn es eine Nullumgebung U gibt, auf der ϕ beschränkt ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass aus der Stetigkeit von ϕ die Existenz einer Nullumgebung folgt, auf der ϕ beschränkt ist: Das Urbild des Intervalls $[-1, 1]$ ist eine Nullumgebung.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es gebe eine Nullumgebung U und eine Konstante c, so dass für alle $x \in U$ die Ungleichung $|\phi(x)| \leq c$ gilt. Dann ist $\frac{\epsilon}{c}U$ eine Nullumgebung und

$$\phi^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) \supseteq \tfrac{\epsilon}{c}U.$$

Damit ist für alle $\epsilon > 0$ das Urbild von $(-\epsilon, \epsilon)$ eine Nullumgebung. Somit ist ϕ in 0 stetig. Wegen Lemma **??** ist ϕ damit in allen Punkten stetig. □

Lemma 67 *Es sei X ein topologischer, reeller Vektorraumaum und $\phi : X \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. ϕ ist genau dann stetig, wenn der Teilraum $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen ist.*

Falls das Funktional nicht stetig ist, so ist $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ dicht in X.

Beweis. Falls ϕ stetig ist, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Also ist $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen.

Wir nehmen nun an, dass $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen ist. Falls

$$X = \{x \in X | \phi(x) = 0\}$$

so ist das Funktional ϕ identisch 0 und damit stetig. Falls

$$X \neq \{x \in X | \phi(x) = 0\}$$

dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \{x \in X | \phi(x) = 0\}$. Da $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen ist, gibt es eine Nullumgebung U mit

$$x_0 + U \cap \{x \in X | \phi(x) = 0\} = \emptyset$$

Wir können annehmen, dass U kreisförmig ist, d.h. für alle $x \in U$ und alle t mit $|t| \leq 1$ gilt $tx \in U$. Falls ϕ auf U nicht beschränkt ist, dann gibt es ein $x \in U$ mit

$$|\phi(x)| \geq |\phi(x_0)|$$

Weil U kreisförmig ist, gilt $-\frac{\phi(x_0)}{\phi(x)} x \in U$ und

$$x_0 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)} x \in x_0 + U \quad \text{und} \quad \phi\left(x_0 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)} x\right) = 0$$

Also gibt es einen Vektor in $x_0 + U$, der durch ϕ auf die 0 abgebildet wird. Andererseits gilt $x_0 + U \cap \{x \in X | \phi(x) = 0\} = \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch. □

Beispiel 13 *Es sei $0 < p < 1$. Der topologische Vektorraum $L^p[0,1]$ besitzt genau ein stetiges Funktional, nämlich das 0-Funktional.*

Der Dualraum von ℓ^p, $0 < p < 1$, besteht nicht nur aus dem 0-Funktional. Die Koordinatenfunktionale sind stetig, weil

$$|a_i| \leq \|a\|_p$$

Deshalb separiert der Dualraum von ℓ^p die Punkte von ℓ^p. Man kann sogar zeigen, dass der Dualraum isometrisch isomorph zu ℓ^∞ ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass es ein stetiges Funktional ϕ gibt, das von 0 verschieden ist. Dann gibt es ein $g_0 \in L^p$, so dass $g_0 \neq 0$ und $\phi(g_0) = 1$. Wir zeigen, dass ϕ nicht stetig ist. Dazu konstruieren wir eine Folge g_n, $n = 0, 1, \ldots$ mit

$$\phi(g_1) \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \|g_n\|_p = 2^{1-\frac{1}{p}} \|g_0\|_p$$

Eine solche Folge widerspricht der Stetigkeit, weil

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} \phi(g_n) \geq 1$$

Wir konstruieren die Folge aus der Funktion g_0. Wir machen den Induktionsschritt. Dazu wählen wir x_0, so dass

$$\int_0^{x_0} |g_n|^p dx = \int_{x_0}^1 |g_n|^p dx.$$

Auf Grund der Linearität von ϕ gilt

$$1 = \phi(g_n) = \phi(g_n \chi_{[0,x_0)}) + \phi(g_n \chi_{[x_0,1]}).$$

Somit gilt

$$\tfrac{1}{2} \leq \phi(g_n \chi_{[0,x_0)}) \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \phi(g_n \chi_{[x_0,1]}).$$

Wir setzen

$$g_{n+1} = \begin{cases} 2g_n \chi_{[0,x_0)} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq \phi(g_n \chi_{[0,x_0)}) \\ 2g_n \chi_{[x_0,1]} & \text{falls } \frac{1}{2} > \phi(g_n \chi_{[0,x_0)}). \end{cases}$$

Dann gilt $\phi(g_{n+1}) \geq 1$ und, falls $g_{n+1} = 2g_n \chi_{[0,x_0)}$,

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\|_p &= \left(\int_0^1 |2g_n \chi_{[0,x_0)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2 \left(\int_0^{x_0} |g_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |g_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{1-\frac{1}{p}} \|g_n\|_p \end{aligned}$$

□

Lemma 68 *Es sei X ein topologischer, linearer Raum. Dann gibt es genau dann ein nichttriviales stetiges Funktional auf X, wenn X eine von X verschiedene konvexe Nullumgebung besitzt.*

2.3 Der Satz von Hahn-Banach I: Die analytische Verson

Hans Hahn (1879-1934) wurde in Wien geboren. Er studierte in Wien und Göttingen. Nach dem 1. Weltkrieg hatte er eine Professur in Bonn und ab 1921 in Wien.

Stefan Banach (1892-1945) wurde in Krakau geboren. Er studierte an der Technischen Hochschule in Lwow und wurde dort 1927 Professor.

Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass man ein stetiges, lineares Funktional, das auf einem Teilraum definiert ist, zu einem stetigen linearen Funktional auf den ganzen Raum fortsetzen kann. Diese Aussage ist in dem Fall, dass der Raum endlich-dimensional ist, nicht sehr überraschend, weil alle linearen Abbildungen stetig sind und man mit Hilfe der Linearen Algbra leicht die Existenz einer Fortsetzung nachweist. Der entscheidende Punkt ist also, dass die Räume nicht endlich-dimensional sind.

Der Satz von Hahn-Banach ist ein wichtiges und grundlegendes Ergebnis der Funktionalanalysis. Es wurde 1927 von Hans Hahn, Wien, bewiesen und zwei Jahre später von Stefan Banach. Es handelt sich um ein abstraktes Ergebnis. Seine Bedeutung liegt gerade in dem hohen Abstraktionsgrad. Es findet breite Anwendung, ohne den Satz von Hahn-Banach ist die Funktionalanalysis nicht denkbar [Cas].

Es gibt zwei Formulierungen davon, eine analytische und eine geometrische. Die analytische besagt, dass man jedes stetige Funktional, das auf einem Teilraum eines normierten Raumes definiert ist, zu einem stetigen Funktional auf dem gesamten Raum fortsetzen kann.

Die geometrische Version besagt, dass sich zwei disjunkte, konvexe Mengen, durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen lassen. Hierbei muß man allerdings weitere Bedingungen an die Mengen stellen. So reicht es aus zu fordern, dass eine der Mengen offen ist. Auch reicht es aus zu fordern, dass eine Menge kompakt und die andere abgeschlossen ist. Zwei abgeschlossene, disjunkte, konvexe Mengen lassen sich i.a. nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen.

Es sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in X$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

und für alle $x \in X$ und alle $t \geq 0$

$$p(tx) = tp(x)$$

gelten, heißt Minkowski Funktional. Ein Minkowski Funktional kann auch negative Werte annehmen.

Satz 11 *Es sei X ein reeller Vektorraum und p ein Minkowski Funktional auf X. Y sei ein Teilraum von X und f ein lineares Funktional auf Y, so dass für alle $x \in Y$*

$$f(x) \leq p(x)$$

gilt. Dann gibt es ein lineares Funktional F auf X, so dass für alle $x \in X$

$$F(x) \leq p(x)$$

gilt und so dass für alle $x \in Y$ gilt, dass $F(x) = f(x)$.

Die Räume $L^p[0,1]$ mit $0 < p < 1$ sind Beispiele für Räume, wo der Satz von Hahn-Banach nicht gilt. Es lässt sich auf jedem 1-dimensionalen Teilraum ein stetiges, lineares Funktional definieren, das von 0 verschieden ist. Man kann es aber nicht auf den gesamten Raum fortsetzen, weil es kein stetiges, von 0 verschiedenes Funktional dort gibt.

Beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach geht wie bei vielen weiteren Ergebnissen das Lemma von Zorn ein. Der Satz von Hahn-Banach ist also eine der Früchte des Zorns.

Beweis. Es sei f ein lineares Funktional auf einem Teilraum Z von X mit $Z \neq X$, so dass für alle $x \in Z$ die Ungleichung $f(x) \leq p(x)$ gilt. Dann gibt es einen Vektor $x_0 \notin Z$ und ein Funktional

$$g : V \to \mathbb{R}$$

wobei

$$V = \{z | z = y + tx_0, y \in Z, t \in \mathbb{R}\}$$

die lineare Hülle von x_0 und Z ist und

$$\forall x \in V : g(x) \leq p(x)$$
$$\forall x \in Z : g(x) = f(x)$$

Wir zeigen diese Behauptung. Es gilt

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0)|y \in Z\} \leq \inf\{p(y + x_0) - f(y)|y \in Z\}$$

Wir überprüfen dies. Für alle $y_1, y_2 \in Z$ gilt

$$f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2).$$

Deshalb gilt für alle $y_1, y_2 \in Z$

$$f(y_1) + f(y_2) \leq p(y_1 - x_0 + x_0 + y_2) \leq p(y_1 - x_0) + p(x_0 + y_2).$$

Somit gilt für alle $y_1, y_2 \in Z$

$$f(y_1) - p(y_1 - x_0) \leq p(x_0 + y_2) - f(y_2).$$

Wir wählen α, so dass

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0)|y \in Z\} \leq \alpha \leq \inf\{p(y + x_0) - f(y)|y \in Z\}$$

und setzen

$$g(y + tx_0) = f(y) + t\alpha.$$

Offenbar ist g ein lineares Funktional und stimmt mit f auf Z überein. Wir müssen noch nachprüfen, dass für alle $z \in V$ die Ungleichung $g(z) \leq p(z)$ gilt. Wir betrachten den Fall $t > 0$.

$$\begin{aligned} g(y + tx_0) \quad &= f(y) + t\alpha = t(\tfrac{1}{t}f(y) + \alpha) = t(f(\tfrac{1}{t}y) + \alpha) \\ &\leq t\{f(\tfrac{1}{t}y) + p(x_0 + \tfrac{1}{t}y) - f(\tfrac{1}{t}y)\} = tp(x_0 + \tfrac{1}{t}y) = p(tx_0 + y) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Fall $t < 0$.

$$\begin{aligned} g(y + tx_0) \quad &= f(y) + t\alpha = |t|(f(\tfrac{1}{|t|}y) - \alpha) \\ &\leq |t|\{f(\tfrac{1}{|t|}y) + p(\tfrac{1}{|t|}y - x_0) - f(\tfrac{1}{|t|}y)\} \\ &= p(\tfrac{1}{|t|}y - x_0) = p(y - |t|x_0) = p(y + tx_0) \end{aligned}$$

Nun beenden wir den Beweis mit dem Lemma von Zorn. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{F}$ aller Paare (g, Z) mit
(i) Z ist Teilraum von X und Y ist Teilraum von Z.
(ii) g ist lineares Funktional auf Z, so dass für alle $y \in Z$ gilt, dass $g(y) \leq$

$p(y)$, und so dass für alle $y \in Y$ gilt, dass $g(y) = f(y)$. Wir führen auf $\mathfrak{F}$ eine Halbordnung ein. Wir sagen, dass $(g, Z) \leq (h, W)$ gilt, wenn

$$Z \subseteq W \quad \text{und} \quad \forall y \in Z : g(y) = h(y)$$

Wir zeigen nun, dass jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat. Es sei $\mathfrak{F}_1$ linear geordnet. Wir definieren

$$V = \bigcup_{(g,Z)\in\mathfrak{F}_1} Z \quad \text{und} \quad h(x) := g(x) \quad \text{für } g \text{ mit } (g, Z) \in \mathfrak{F}_1 \text{ und } x \in Z$$

Für alle $y \in V$ gilt $h(y) \leq p(y)$. (h, V) ist eine obere Schranke für $\mathfrak{F}_1$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element (F, W). Wir müssen zeigen, dass $W = X$ gilt. Falls $W \neq X$, dann können wir mit der obigen Konstruktion das Funktional auf einen größeren Teilraum fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität. □

Korollar 4 *Es sei X ein reeller, normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Es sei $f : Y \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$\forall\ x \in Y : F(y) = f(y) \quad \textit{und} \quad \|f\| = \|F\|$$

Beweis. Wir verwenden als Minkowski Funktional $p(x) = \|f\|\ \|x\|_X$. □

Falls der Teilraum Y nicht abgeschlossen ist, so kann man das Funktional mittels der Stetigkeit auf die abgeschlossene Hülle fortsetzen.

Beispiel 14 *(i) Es gibt auf dem Raum ℓ^∞ aller beschränkten Folgen ein lineares Funktional, das jeder konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet. Man spricht hier vom verallgemeinerten Limes oder Banach Limes.*

(ii) Es sei ℓ^∞ der Raum aller reellen, beschränkten Folgen. Es sei τ der Translationsoperator $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$

$$(\tau x)(n) = x(n+1) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional ϕ auf ℓ^∞, so dass
(i) $\phi(\tau x) = \phi(x)$
(ii) Für alle $x \in \ell^\infty$ gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \leq \phi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x(n)$$

Beweis. (i) Auf dem Raum c aller konvergenten Folgen definieren wir das Funktional $\ell : c \to \mathbb{R}$

$$\ell(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$$

Es gilt $\|\ell\| = 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (Satz 11) können wir dieses Funktional auf den Raum ℓ^∞ fortsetzen.

(ii) Wir betrachten

$$a_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k)$$

und

$$X = \left\{ x \in \ell^\infty \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n(x) \text{ existiert} \right\}$$

X ist ein Teilraum von ℓ^∞. Wir definieren $\phi : X \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

Wir setzen

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} a_n(x).$$

Wir zeigen, dass p auf ℓ^∞ ein Minkowski Funktional ist. Es gilt

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \limsup_{n\to\infty} a_n(x+y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) + y(k) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y(k) = p(x) + p(y) \end{aligned}$$

und für $t > 0$

$$p(tx) = \limsup_{n\to\infty} a_n(tx) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} tx(k) = t \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) = tp(x)$$

Für alle $x \in X$ gilt

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \limsup_{n\to\infty} a_n(x) = p(x)$$

Nun können wir den Satz von Hahn-Banach auf den Raum ℓ^∞, den Teilraum X, das Minkowski Funktional p und das lineare Funktional ϕ, das auf X definiert ist, anwenden. Es gibt also eine Fortsetzung $\tilde{\phi}$, die auf ℓ^∞ definiert ist und die für alle $x \in \ell^\infty$

$$\tilde{\phi}(x) \le p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k)$$

erfüllt.

Wir zeigen nun, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) \le \limsup_{n\to\infty} x(n).$$

Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \forall n \geq n_\epsilon \sup_{n \leq k} x(k) \leq \limsup_{k \to \infty} x(k) + \epsilon$$

Deshalb

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) \qquad &= \limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_\epsilon} x(k) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_\epsilon+1}^{n} x(k) \right\} \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_\epsilon} x(k) + \frac{n - n_\epsilon}{n} \left(\limsup_{k \to \infty} x(k) + \epsilon \right) \right\} \\
&= \limsup_{k \to \infty} x(k) + \epsilon
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in \ell^\infty$

$$\tilde{\phi}(x) \leq \limsup_{k \to \infty} x(k)$$

Da dieselbe Ungleichung auch für $-x$ gilt, erhalten wir

$$\liminf_{k \to \infty} x(k) \leq \tilde{\phi}(x) \leq \limsup_{k \to \infty} x(k).$$

Wir zeigen nun, dass $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\tau x)$ gilt. Dazu überlegen wir uns, dass $x - \tau x \in X$.

$$a_n(x - \tau x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x(k) - x(k+1)) = \frac{1}{n}(x(1) - x(n+1))$$

Somit gilt

$$\lim_{n \to \infty} a_n(x - \tau x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(x(1) - x(n+1)) = 0$$

Es folgt

$$\tilde{\phi}(x - \tau x) = \phi(x - \tau x) = \lim_{n \to \infty} a_n(x - \tau x) = 0$$

Wegen der Linearität von $\tilde{\phi}$ folgt nun $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\tau x)$. $\square$

Der Satz von Hahn-Banach lässt sich nicht auf lineare Abbildungen ausdehnen, deren Bild ein normierter Raum ist. Falls der Bildraum endlich dimensional ist, so erhält man für lineare, beschränkte Operatoren

$$T : Y \to Z \quad \text{und} \quad Y \subset X$$

dass eine Fortsetzung $\tilde{T}$ auf X mit

$$\|\tilde{T}\| \leq \sqrt{\dim\ Z} \|T\|$$

existiert. I.a. muss keine Fortsetzung existieren. Dazu geben wir das folgende Beispiel an, das wir aber erst später verifizieren können (Lemma 79).

Es sei $id : c_0 \to c_0$ die identische Abbildung. Es gibt keine lineare, beschränkte Abbildung $\tilde{id} : \ell^\infty \to c_0$, so dass für alle $x \in c_0$ gilt, dass $x = id(x) = \tilde{id}(x)$.

Beispiel 15 *Das Funktional* $\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$

$$\phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$$

ist ein Funktional, das nicht sein Supremum annimmt.

2.4 Der Satz von Hahn-Banach II: Die geometrische Version

Die geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach besagt, dass sich zwei disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene trennen lassen. Wir sind hier nur an abgeschlossenen Hyperebenen interesssiert. Damit die Trennungsaussage gilt, müssen wir Voraussetzungen an die Mengen stellen. Es reicht schon, dass eine Menge einen inneren Punkt besitzt (Satz 12), oder dass eine Menge kompakt und die andere abgeschlossen ist (Satz 13).

Andererseits gibt es zwei disjunkte, konvexe, abgeschlossene Mengen, die sich nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen lassen (Beispiel 18). Die meisten Beispiele solcher Mengen A und B haben die Eigenschaft, dass $A - B$ in dem Vektorraum dicht ist. Dann ist der Abschluss von $\phi(A - B)$ gleich $\mathbb{R}$, aber wenn ein Funktional ϕ trennen soll, dann müsste $\phi(A - B) \subseteq [0, \infty)$ oder $\phi(A - B) \subseteq [0, -\infty)$ gelten.

Eine Hyperebene H ist eine Teilmenge eines Vektorraumes X, die die Gestalt $x_0 + Y$ besitzt, wobei $x_0 \in X$ und Y ein Teilraum mit Kodimension 1 ist. H ist genau dann eine Hyperebene, falls es ein lineares Funktional f und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$H = \{x | f(x) = c\}.$$

Eine Hyperebene H eines topologischen Vektorraumes ist genau dann abgeschlossen, wenn es ein stetiges Funktional f und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $H = \{x | f(x) = c\}$ gibt.

Falls f stetig ist, so ist die Menge $f^{-1}(c) = \{x | f(x) = c\}$ abgeschlossen, weil sie Urbild einer abgeschlossenen Menge ist. Umgekehrt, falls die Menge $\{x | f(x) = c\}$ abgeschlossen ist, dann ist auch die Menge $\{x | f(x) = 0\}$ abgeschlossen und nun folgt die Stetigkeit von f mit Lemma 67.

Falls eine Hyperebene in einem topologischen Vektorraum nicht abgeschlossen ist, dann ist sie dicht.

Wir sagen, dass zwei disjunkte Mengen A und B durch eine abgeschlossene Hyperebene bzw. ein stetiges Funktional ϕ getrennt werden, falls

$$\sup_{x \in A} \phi(x) \leq \inf_{x \in B} \phi(x).$$

Dies bedeutet, dass A in dem einen abgeschlossenen Halbraum liegt, B in dem anderen abgeschlossenen Halbraum. Es kann also sein, dass beide Mengen A und B in der Hyperebene liegen. Somit bekommt man den Eindruck, dass dieser Trennungsbegriff etwas schwach ist.

Eine leichte Verschärfung stellt die folgende Trennungsbedingung dar: Für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ gilt die Ungleichung $\phi(x) < \phi(y)$. Geometrisch bedeutet dies, dass A in dem einen offenen Halbraum enthalten ist und B in dem anderen offenen Halbraum. Wir sagen in diesem Fall, dass die Mengen strikt getrennt werden.

Wir sagen, dass zwei disjunkte Mengen stark getrennt werden, wenn es ein stetiges Funktional ϕ gibt, so dass

$$\sup_{x \in A} \phi(x) < \inf_{x \in B} \phi(x).$$

bzw. wenn es ein stetiges Funktional ϕ, ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ die Ungleichungen

$$\phi(x) \leq c - \epsilon \qquad\qquad \phi(y) \geq c + \epsilon$$

gelten.

Der folgende Satz besagt, dass man zwei konvexe, disjunkte Mengen durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen kann, vorausgesetzt, dass eine der beiden Mengen offen ist. Es ist die geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach.

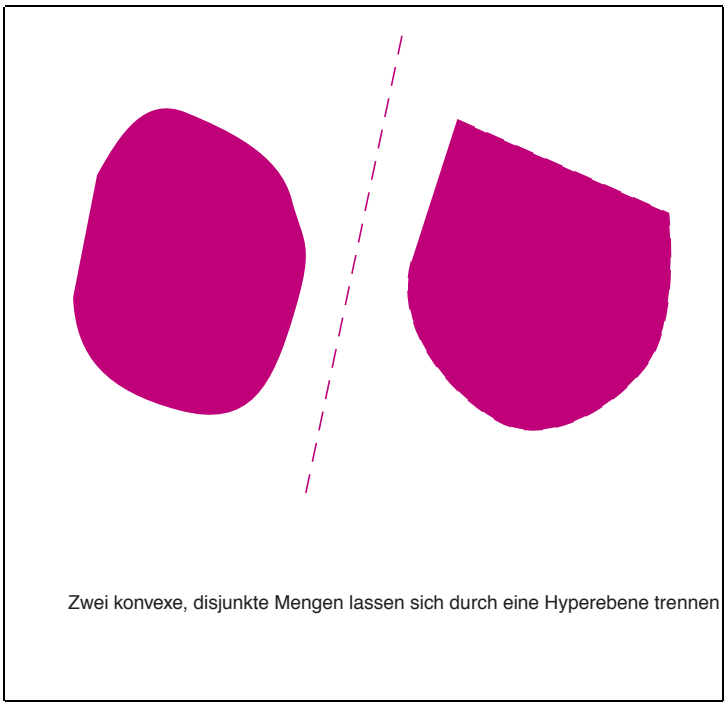
Satz 12 *Es sei X ein normierter, reeller Raum, A eine nichtleere, konvexe Menge, die einen inneren Punkt besitzt, und B eine nichtleere konvexe Menge. Es seien A und B disjunkt. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional f mit $f \neq 0$, so dass*

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x)$$

Falls A überdies offen ist, dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional f, so dass für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ die Ungleichung

$$f(x) < f(y)$$

gilt.



Lemma 69 *Es sei X ein normierter Raum, C eine konvexe Umgebung der*

0 und $p : X \to \mathbb{R}$ sei durch

$$p(x) = \inf \left\{ t > 0 | \tfrac{1}{t} x \in C \right\}$$

definiert. Dann ist p ein Minkowski Funktional und

$$\{x | p(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x | p(x) \leq 1\}.$$

Falls C sogar offen ist, dann gilt

$$C = \{x | p(x) < 1\}.$$

Man bezeichnet p als das von C erzeugte Minkowski Funktional.

Beweis. p ist wohldefiniert, d.h. $p(x)$ ist für alle $x \in X$ endlich. Dies gilt, weil C eine Umgebung der 0 ist und deshalb nach Lemma 29 die Gleichung $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$ gilt.

Wir zeigen, dass p die Dreiecksungleichung erfüllt. Falls $\frac{1}{t}x \in C$ und $\frac{1}{s}y \in C$, dann gilt wegen der Konvexität von C

$$\tfrac{1}{s+t}(x+y) = \tfrac{t}{s+t}(\tfrac{1}{t}x) + \tfrac{s}{s+t}(\tfrac{1}{s}y) \in C. \tag{2.1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} p(x) + p(y) \quad &= \inf\{t | \tfrac{1}{t}x \in C\} + \inf\{s | \tfrac{1}{s}x \in C\} \\ &= \inf\{t + s | \tfrac{1}{t}x \in C, \tfrac{1}{s}x \in C\} \end{aligned}$$

Mit (2.1) folgt

$$p(x) + p(y) \geq \inf \left\{ t + s \,\middle|\, \tfrac{1}{t+s}(x+y) \in C \right\} \geq p(x+y).$$

Wir weisen die Homogenität von p nach. Für $r > 0$

$$p(rx) = \inf \left\{ t \,\middle|\, \tfrac{1}{t} rx \in C \right\} = r \inf \left\{ \tfrac{t}{r} \,\middle|\, \tfrac{1}{t} rx \in C \right\} = rp(x).$$

Falls $x \in C$, so gilt $p(x) \leq 1$ und wir haben $C \subseteq \{x | p(x) \leq 1\}$.

Falls $p(x) < 1$, dann gibt es ein $t < 1$ mit $\frac{1}{t}x \in C$. Wegen der Konvexität von C folgt

$$[0, x] \subseteq [0, \tfrac{1}{t}x] \subseteq C.$$

Wir zeigen nun, dass $C = \{x|p(x) < 1\}$ gilt, falls C offen ist. Es reicht $C \subseteq \{x|p(x) < 1\}$ zu zeigen. Falls C offen ist, dann gibt es zu jedem $x \in C$ ein $\epsilon > 0$, so dass $(1+\epsilon)x \in C$. Deshalb gilt

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$$

□

Lemma 70 *Es sei X ein normierter Raum und C eine konvexe Umgebung der 0 mit dem dazugehörigen Minkowski-Funktional p. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $x \in X$*

$$p(x) \leq c\|x\|_X$$

gilt.

Beweis. Es gibt $\epsilon > 0$, so dass $B(0,\epsilon) = \{x|\|x\| < \epsilon\} \subset C$. Es folgt

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf\{t|\tfrac{1}{t}x \in C\} \leq \inf\{t|\tfrac{1}{t}x \in B(0,\epsilon)\} \\ &= \inf\{t|x \in B(0,t\epsilon)\} = \inf\{t|\tfrac{1}{\epsilon}x \in B(0,t)\} = \|\tfrac{1}{\epsilon}x\|_X \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 12. Wir wählen einen inneren Punkt x_0 in A und einen beliebigen Punkt $y_0 \in B$. Dann ist

$$C = A - B + (y_0 - x_0)$$

eine konvexe Umgebung von 0. Es gilt $0 \in C$, weil $x_0 \in A$ und $y_0 \in B$. C ist konvex: Es seien $u, w \in C$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in A$ und $y_1, y_2 \in B$ mit

$$\begin{aligned} u &= x_1 - y_1 + (y_0 - x_0) \\ w &= x_2 - y_2 + (y_0 - x_0) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &tu + (1-t)w \\ &= tx_1 - ty_1 + t(y_0 - x_0) + (1-t)x_2 - (1-t)y_2 + (1-t)(y_0 - x_0) \\ &= \underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in A} - (\underbrace{ty_1 + (1-t)y_2}_{\in B}) + (y_0 - x_0) \end{aligned}$$

Da x_0 ein innerer Punkt von A ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x_0, \epsilon) \subset A$.

$$C = \{x - y + (y_0 - x_0) | x \in A, y \in B\} \supseteq \{x - x_0 | x \in B(x_0, \epsilon)\} = B(0, \epsilon)$$

Es sei p das zu C gehörige Minkowski Funktional. Es gilt $y_0 - x_0 \notin C$. Falls nämlich $y_0 - x_0 \in C$, dann gibt es $x \in A$ und $y \in B$ mit

$$y_0 - x_0 = x - y + y_0 - x_0$$

Also gilt $x = y$, was nicht sein kann, weil A und B disjunkt sind. Da $y_0 - x_0 \notin C$, so folgt $p(y_0 - x_0) \geq 1$. Wir betrachten den 1-dimensionalen Teilraum

$$Z = \{t(y_0 - x_0) |\ t \in \mathbb{R}\}$$

und darauf das Funktional $f : Z \to \mathbb{R}$

$$f(t(y_0 - x_0)) = t.$$

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t(y_0 - x_0)) \leq p(t(y_0 - x_0)).$$

Wir prüfen dies nach. Für $t \geq 0$ erhalten wir

$$f(t(y_0 - x_0)) = t \leq t\ p(y_0 - x_0) = p(t(y_0 - x_0)).$$

Falls $t < 0$, so gilt

$$f(t(y_0 - x_0)) = t < 0 \leq p(t(y_0 - x_0)).$$

Wir wenden nun den Satz von Hahn-Banach (Satz 11) auf f an und erhalten $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F \leq p$. Es gilt also für alle $x \in X$

$$F(x) \leq p(x)$$

Mit Lemma 70 erhalten wir für alle $x \in X$

$$F(x) \leq c\|x\|.$$

Da dies auch für $-x$ gilt, erhalten wir für alle $x \in X$

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

Also ist F stetig. Für alle $x \in A, y \in B$ gilt

$$F(x) - F(y) + 1 = F(x - y + y_0 - x_0) \leq p(x - y + y_0 - x_0)$$

Da $x - y + y_0 - x_0 \in C$, folgt mit Lemma 69

$$F(x) - F(y) + 1 \leq 1.$$

Deshalb gilt für alle $x \in A$ und $y \in B$

$$F(x) \leq F(y).$$

Also gilt

$$\sup_{x \in A} F(x) \leq \inf_{x \in B} F(y).$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, dass A offen ist. Der Beweis wird nur an einigen Stellen modifiziert. Zunächst beobachten wir, dass $C = A - B + (y_0 - x_0)$ offen ist. Dies folgt aus der Gleichung

$$C = \bigcup_{y \in B} y_0 - x_0 - y + A$$

Die rechte Seite ist eine Vereinigung offener Mengen. Deshalb gilt nach Lemma 69 für alle $x \in C$ die Ungleichung $p(x) < 1$, also insbesondere gilt für alle $x \in A$ und $y \in B$

$$p(x - y + y_0 - x_0) < 1.$$

□

Beispiel 16 *Es sei $L^2([-1,1])$ der Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen bzgl. des Lebesgue Maßes. Für jede Zahl α sei E_α die Menge aller stetigen Funktionen f auf $[-1,1]$ mit $f(0) = \alpha$. Dann ist für alle α die Menge E_α konvex und dicht in $L^2([-1,1])$. Weiter sind für alle $\alpha \neq \beta$ die Mengen E_α und E_β disjunkt und sie lassen sich nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen.*

Beweis. Wir zeigen, dass man E_α und E_β nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen kann. Wir nehmen an, dass es ein stetiges Funktional ϕ gibt, das von 0 verschieden ist und das E_α und E_β trennt. Dann gilt

$$\sup_{x \in E_\alpha} \phi(x) \leq \inf_{y \in E_\beta} \phi(y).$$

Da E_α in L^2 dicht ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in E_\alpha$ mit $\|z\| < \epsilon$. Deshalb

$$\sup_{x \in E_\alpha} \phi(x) \geq \phi(z) \geq -|\phi(z)| \geq -\|\phi\|\|z\| \geq -\|\phi\|\epsilon.$$

Da diese Abschätzung für alle ϵ gilt, folgt

$$\sup_{x \in E_\alpha} \phi(x) \geq 0.$$

Es gibt ein $u \in X$ mit $\phi(u) < 0$. Da E_β dicht in L^2 liegt, gibt es ein $w \in E_\beta$ mit $\|u - w\| < \frac{|\phi(u)|}{4\|\phi\|}$. Es folgt

$$\phi(w) = \phi(u) + \phi(w-u) \leq \phi(u) + \|\phi\|\|u-w\| \leq \phi(u) + \tfrac{1}{4}|\phi(u)| = \tfrac{3}{4}\phi(u) < 0.$$

Deshalb gilt

$$\inf_{y \in E_\beta} \phi(y) < 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

Beispiel 17 *Es seien*

$$A = \{x \in \ell^1 |\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m > n : x_m = 0 \text{ und } x_n > 0\}$$

$$B = \{x \in \ell^1 |\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m > n : x_m = 0 \text{ und } x_n < 0\}$$

A und B sind disjunkte, konvexe Mengen, die durch keine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden können.

Beweis. Es ist offensichtlich, dass A und B disjunkt sind. Wir zeigen, dass A konvex ist. Es seien $x, y \in A$. Dann gilt

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \qquad \text{mit } x_m > 0$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \qquad \text{mit } y_n > 0$$

Es sei $n = m$. Dann gilt

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} (tx_i + (1-t)y_i)e_i$$

$tx + (1-t)y \in A$ weil $tx_n + (1-t)y_n > 0$.

Falls $n < m$, dann gilt

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} (tx_i + (1-t)y_i)e_i + \sum_{i=n+1}^{m} tx_i e_i$$

Es gilt $tx + (1-t)y \in A$, weil $tx_m > 0$. Wir nehmen nun an, dass es eine abgeschlossene Hyperebene gibt, die A und B trennt, und zeigen, dass dann $\phi = 0$ gilt. Wir nehmen an, dass $\phi(e_n) > 0$ gilt. Es gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$se_n + e_{n+1} \in A$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A} \phi(x) &\geq \sup_{s\in\mathbb{R}}(s\phi(e_n) + \phi(e_{n+1})) = \infty \\ \inf_{x\in A} \phi(x) &\leq \inf_{s\in\mathbb{R}}(s\phi(e_n) + \phi(e_{n+1})) = -\infty\end{aligned}$$

Somit lassen sich A und B nicht trennen. Also muss $\phi(e_n) \leq 0$ gelten. Wir gehen genauso vor, um zu zeigen, dass $\phi(e_n) = 0$ gilt. Schliesslich erhalten wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(e_n) = 0$$

gilt. Es folgt für $x \in \ell^1$

$$|\phi(x)| = \left|\phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\right)\right| \leq \|\phi\| \left\|\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\right\| = \|\phi\| \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die rechte Seite und damit auch die linke Seite gegen 0. Damit gilt $f = 0$. Dies ist unwahr. □

Satz 13 *Es seien X ein normierter Raum, A eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von X und B eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge von X. A und B seien disjunkt. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional ϕ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sup_{x\in A} \phi(x) < c < \inf_{x\in B} \phi(x)$$

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Dann sind

$$A_\epsilon = A + B(0,\epsilon) \quad \text{und} \quad B_\epsilon = B + B(0,\epsilon)$$

nichtleere, konvexe, offene Mengen. Die Menge A_ϵ ist offen, weil

$$A_\epsilon = A + B(0,\epsilon) = \bigcup_{a\in A} a + B(0,\epsilon) = \bigcup_{a\in A} B(a,\epsilon)$$

eine Vereinigung von offenen Mengen und somit selbst offen ist. Aus denselben Gründen ist B_ϵ offen.

Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$. Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein

$$z_n \in A_{\frac{1}{n}} \cap B_{\frac{1}{n}}.$$

Damit gibt es $x_n \in A$ mit $\|x_n - z_n\| < \frac{1}{n}$ und $y_n \in B$ mit $\|y_n - z_n\| < \frac{1}{n}$. Damit gilt

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - z_n\| + \|z_n - y_n\| \leq \frac{2}{n}$$

Da B kompakt ist, hat die Folge y_n, $n \in \mathbb{N}$, eine konvergente Teilfolge.

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \quad \text{und} \quad y \in B$$

Andererseits konvergiert auch x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, gegen y:

$$\|y - x_{n_k}\| \leq \|y - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - x_{n_k}\|$$

Da A abgeschlossen ist, gilt auch $y \in A$. Also gilt $A \cap B \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme.

Also gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass A_ϵ und B_ϵ zwei nichtleere, konvexe, offene, disjunkte Mengen sind. Nach Satz 12 gibt es ein ϕ mit $\phi \neq 0$ und

$$\sup_{x\in A_\epsilon} \phi(x) \leq \inf_{x\in B_\epsilon} \phi(x)$$

Es folgt

$$\sup_{\substack{x\,\in\,A\\ y\,\in\,B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y) \leq \inf_{\substack{x\,\in\,B\\ y\,\in\,B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x\,\in\,A\\ y\,\in\,B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y) &= \sup_{\substack{x\,\in\,A\\ y\,\in\,B(0,1)}} \{\phi(x) + \phi(\epsilon y)\}\\ &= \sup_{x\in A} \phi(x) + \sup_{y\in B(0,1)} \epsilon\phi(y) = \sup_{x\in A} \phi(x) + \epsilon\|\phi\|.\end{aligned}$$

Genauso zeigen wir

$$\inf_{\substack{x\,\in\,B\\ y\,\in\,B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y) = \inf_{x\in B} \phi(x) - \epsilon\|\phi\|.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{x\in A} \phi(x) + \epsilon\|\phi\| \leq \inf_{x\in B} \phi(x) - \epsilon\|\phi\|$$

Nun können wir $c = \sup_{x\in A} \phi(x) + \epsilon\|\phi\|$ setzen. $\square$

Satz 14 *Es seien A und B zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die diese beiden Mengen trennt.*

Es ist nicht immer möglich zwei abgeschlossene, konvexe Mengen durch eine abgeschlossene Hyperebene zu trennen.

Beispiel 18 *Es seien a und b zwei nichtnegative,wachsende Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $a_n = 2^n b_n$. Es seien A und B Teilmengen von ℓ^1 mit*

$$A = \{x|\ \forall n \geq 2 : x(n) = 0\}$$

und

$$B = \{x|\ \forall n \geq 2 : x(1) \geq |a_n x(n) - b_n|\}$$

A und B sind abgeschlossene, unbeschränkte, konvexe, disjunkte Mengen. Es gibt keine abgeschlossene Hyperebene, die diese beiden Mengen trennt, d.h. es gibt kein stetiges Funktional ϕ mit $\phi \neq 0$, so dass

$$\sup_{x\in A} \phi(x) \leq \inf_{x\in B} \phi(x).$$

Die Folgen a und b sind so gewählt, dass der Abschluss von $B - A$ der Raum ℓ^1 ist. Dies impliziert, dass A und B nicht getrennt werden können: Falls nämlich A und B getrennt werden können, dann gibt es ein Funktional ϕ, so dass für alle $x \in A$ und $y \in B$ die Ungleichung $\phi(x) \leq \phi(y)$, also $\phi(y - x) \geq 0$ gilt. Damit würde $\phi(B - A) \subseteq [0, \infty)$ gelten. Falls aber der Abschluss von $B - A$ gleich ℓ^1 ist, so kann das nicht sein.

Beweis. e_i, $i \in \mathbb{N}$, sind die Einheitsvektoren, die an der i-ten Stelle eine 1 haben und sonst 0.

Die Menge A ist ein eindimensionaler Teilraum und damit sowohl konvex als auch abgeschlossen.

Die Mengen A und B sind disjunkt. Falls dem nicht so wäre, dann gäbe es ein $x \in A$ mit $x(n) = 0$ für $n \geq 2$ und

$$x(1) \geq |a_n x(n) - b_n| = |b_n|.$$

Dies bedeutet, dass die Folge b beschränkt ist, was nicht wahr ist.

Wir zeigen, dass B eine konvexe Menge ist. Es seien $x \in B$ und $y \in B$. Dann gilt für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned} x(1) &\geq |a_n x(n) - b_n| \\ y(1) &\geq |a_n y(n) - b_n|. \end{aligned}$$

Deshalb gilt für alle $n \geq 2$ und t mit $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} tx(1) &\geq |a_n tx(n) - tb_n| \\ (1-t)y(1) &\geq |a_n(1-t)y(n) - (1-t)b_n|. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt, dass für alle $n \geq 2$

$$tx(1) + (1-t)y(1) \geq |a_n(tx(n) + (1-t)y(n)) - b_n|.$$

Also gilt $tx + (1-t)y \in B$. Wir zeigen, dass B abgeschlossen ist. Es sei x_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in B, die gegen x_0 konvergiert. Wir zeigen, dass $x_0 \in B$. Wegen $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n)$. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq 2$

$$x_k(1) \geq |a_n x_k(n) - b_n|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x_0(1) &= \lim_{k\to\infty} x_k(1) \geq \lim_{k\to\infty} |a_n x_k(n) - b_n| \\ &= |a_n \lim_{k\to\infty} x_k(n) - b_n| = |a_n x_0(n) - b_n|. \end{aligned}$$

Damit gilt $x_0 \in B$. Wir zeigen nun, dass die beiden Mengen nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden können. Wir nehmen an, wir können sie trennen. Es sei ϕ das Funktional. Dann muss

$$\phi(e_1) = 0$$

gelten. Falls $\phi(e_1) \neq 0$, dann folgt, dass $\phi(A) = \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass für alle $n \geq 2$

$$\phi(e_n) = 0$$

gilt. Es gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n < k$

$$x = \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} e_1 + e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i \ \in B$$

$$y = \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n + b_n\right\} e_1 - e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i \ \in B.$$

Wir prüfen dies nach. Es sei $2 \leq \ell \leq k$ und $k \neq n$. Dann gilt $x(\ell) = 0$ und

$$|a_\ell x(\ell) - b_\ell| = b_\ell \leq \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} = x(1).$$

Für $\ell = n$ gilt $x(n) = 1$ und

$$|a_n x(n) - b_n| = a_n - b_n \leq \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} = x(1).$$

Für $\ell \geq k+1$ gilt $x(\ell) = 2^{-\ell}$ und

$$|a_\ell x(\ell) - b_\ell| = |a_\ell 2^{-\ell} - b_\ell| = 0 \leq x(1).$$

Genauso zeigen wir, dass $y \in B$. Weil $\phi(e_1) = 0$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi\left(\max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} e_1 + e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right) \\ &= \phi\left(e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right) = \phi(e_n) + \phi\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right).\end{aligned}$$

Da ϕ beschränkt ist, gilt $\sup_{i\in\mathbb{N}} |\phi(e_i)| \leq \|\phi\|$. Hieraus ergibt sich

$$|\phi(x) - \phi(e_n)| = \left|\phi\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right)\right| \leq \|\phi\| \left\|\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right\| = \|\phi\| 2^{-k}.$$

Ebenso erhalten wir

$$|\phi(y) + \phi(e_n)| \leq \|\phi\| 2^{-k}.$$

Falls $\phi(e_n) > 0$ gilt, dann können wir k so groß wählen, dass

$$\phi(x) > 0 \qquad \text{und} \qquad \phi(y) < 0$$

gelten. Da aber ϕ auf A den Wert 0 annimmt, kann man A und B nicht trennen. Der Fall $\phi(e_n) < 0$ wird genauso behandelt. Insgesamt haben wir nun gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(e_n) = 0$$

gilt. Es folgt für $x \in \ell^1$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\phi(x)| = \left|\phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\right)\right| \leq \|\phi\| \left\|\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\right\| = \|\phi\| \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die rechte Seite und damit auch die linke Seite gegen 0. Damit gilt $\phi = 0$. Dies ist unwahr. □

Korollar 5 *(i) Es sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein Funktional ϕ mit $\|\phi\| = 1$ und $\|x_0\| = \phi(x_0)$.*

(ii) Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X mit $Y \neq X$. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional ϕ mit

$$\phi \neq 0 \qquad \textit{und} \qquad \forall x \in Y : \phi(x) = 0$$

Beweis. (i) Die Mengen $B(0, \|x_0\|)$ und $\{x_0\}$ sind konvex und disjunkt. Die erste Menge ist offen. Deshalb können wir den Satz von Hahn-Banach (Satz 12) anwenden. Es gibt ein Funktional ϕ, das die beiden Mengen trennt.

$$\sup_{\|x\|<\|x_0\|} \phi(x) \leq \phi(x_0)$$

Es folgt

$$\|\phi\|\|x_0\| \leq \phi(x_0) \leq \|\phi\|\|x_0\|$$

Das gesuchte Funktional ist dann $\frac{\phi}{\|\phi\|}$.

(ii) Es gibt ein $x_0 \notin Y$. $\{x_0\}$ ist eine kompakte Menge. Dann gibt es nach Satz 13 ein ϕ mit

$$\sup_{x \in Y} \phi(x) < \phi(x_0)$$

Wir zeigen nun, dass für alle $x \in Y$ gilt, dass $\phi(x) = 0$. Falls nicht, so würde $\phi(Y) = \mathbb{R}$ gelten, weil Y ein Teilraum ist. Dann kann ϕ aber Y und $\{x_0\}$ nicht trennen. □

Eine Teilmenge H^+ ist ein Halbraum, wenn es ein Funktional ϕ mit

$$H^+ = \{x|\ \phi(x) \geq c\}$$

gibt. H^+ ist ein abgeschlossener Halbraum, wenn H^+ als Menge abgeschlossen ist. H^+ ist genau dann abgeschlossen, wenn ϕ stetig ist.

Korollar 6 *Es sei X ein normierter Raum und A eine abgeschlossene, konvexe Menge. Dann ist A der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die A enthalten*

$$A = \bigcap_{A \subseteq H^+} H^+$$

Beweis. Es sei $x \notin A$. Dann sind $\{x\}$ und A konvexe, disjunkte Mengen, wobei die erste kompakt und die zweite abgeschlossen ist. Wir können den Satz von Hahn-Banach (Satz 13) anwenden. Es gibt eine Hyperebene die x und A strikt trennt. □

2.5 Dualraum und adjungierte Abbildung

Satz 15 *Es sei X ein reeller, normierter Raum. Für $x \in X$ definieren wir $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ durch*

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x)$$

Dann ist $\hat{x}$ ein stetiges Funktional auf X^* und $\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Die Abbildung $I : X \to X^{**}$ mit $I(x) = \hat{x}$ ist eine lineare Isometrie.

$\hat{x}$ wird also dadurch definiert, dass man die Rollen von x und x^* vertauscht.

Beweis. Wir zeigen, dass $\hat{x}$ ein lineares, stetiges Funktional ist.

$$\hat{x}(x^* + y^*) = (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) = \hat{x}(x^*) + \hat{x}(y^*)$$

$$\hat{x}(tx^*) = tx^*(x) = t\hat{x}(x^*)$$

Das Funktional ist beschränkt.

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|=1} |\hat{x}(x^*)| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \leq \sup_{\|x^*\|=1} \|x^*\|_{X^*}\|x\|_X = \|x\|_X$$

Nach Korollar 5 folgt, dass es für jedes $x \in X$ ein Funktional $x^* \in X^*$ gibt, so dass $\|x^*\|_{X^*} = 1$ und $x^*(x) = \|x\|$ gelten. Hieraus folgt

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} \geq \hat{x}(x^*) = x^*(x) = \|x\|.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildung I linear ist.

$$\widehat{x+y}(x^*) = x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y) = \hat{x}(x^*) + \hat{x}(y^*)$$

$$\widehat{tx}(x^*) = x^*(tx) = tx^*(x) = t\widehat{x}(x^*)$$

□

Wir sagen, dass ein Banachraum X reflexiv ist, falls die Abbildung I surjektiv ist. Insbesondere bedeutet dies, dass X und der Bidual X^{**} isometrisch isomorph sind. Dies heißt jedoch nicht, dass ein Banachraum reflexiv ist, wenn er und sein Bidual isometrisch isomorph sind. Ein Beispiel hierzu ist der Raum von James (Satz 43).

Lemma 71 *Es sei X ein Banachraum, dessen Dualraum separabel ist. Dann ist X auch separabel.*

Beispiel 19 *(i) Der Dualraum von c_0 ist isometrisch isomorph zu ℓ^1. Die Abbildung $I : c_0^* \to \ell^1$ mit*

$$I(\phi) = (\phi(e_i))_{i=1}^{\infty}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus. Es gilt für alle $y \in \ell^1$

$$(I^{-1}(y))(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

(ii) Der Dualraum von ℓ^1 ist isometrisch isomorph zu ℓ^∞.
(iii) c_0 und ℓ^1 sind nicht reflexiv.

Beweis. (iii) Der Bidualraum von c_0 ist isometrisch isomorph zu ℓ^∞. Da c_0 separabel ist und ℓ^∞ nicht separabel ist, sind diese Räume nicht isomorph.

Nach Lemma ist der Dualraum von ℓ^∞ nicht separabel. Da ℓ^1 separabel ist, kann ℓ^1 nicht isomorph zu senem Bidualraum sein. □

Beispiel 14 zeigt bereits, dass ℓ^1 nicht reflexiv ist. Die dort angegebenen Funktionale auf ℓ^∞ lassen sich nicht durch Elemente aus ℓ^1 darstellen.

Korollar 7 *Dualraum von ℓ^∞.*

Korollar 8 *(i) Jeder separable Banachraum ist zu einem Teilraum von ℓ^∞ isometrisch.*

(ii) Jeder separable Banachraum ist ein Quotientenraum von ℓ^1.

Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator. Der zu T adjungierte Operator $T^* : Y^* \to X^*$ bildet das Funktional y^* auf das Funktional $y^* \circ T$ ab. Es gilt also für alle $x \in X$ und alle $y^* \in Y^*$

$$(T^*(y^*))(x) = y^*(T(x)).$$

Lemma 72 *(i) Es seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator. Dann ist T^* ein stetiger, linearer Operator und $\|T\| = \|T^*\|$.*
(ii) Es seien X, Y und Z normierte Räume und $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$ stetige, lineare Abbildungen. Dann gilt $(ST)^* = T^*S^*$.

Beweis. (i) Mit Korollar 5 folgt, dass es zu $T(x)$ ein Funktional y^* mit $\|y^*\| = 1$ und $y^*(T(x)) = \|T(x)\|$ gibt. Deshalb

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y^*\|\leq 1} |y^*(T(x))| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |y^*(T(x))| \\ &= \sup_{\|y^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |(T^*(y^*))(x)| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \|T^* y^*\| = \|T^*\|\end{aligned}$$

(ii)

$$(ST)^*(z^*) = z^*(ST) = (z^*S)T = (S^*(z^*))T = T^*(S^*(z^*))$$

□

Lemma 73 *Es seien X und Y Banachräume und $I : X \to Y$ ein stetiger Isomorphismus, dessen Inverse ebenfalls stetig ist. Dann sind auch X^* und Y^* isomorph.*

Man beachte, dass die Umkehrung nicht richtig ist. Falls X^* und Y^* isomorph sind, so müssen X und Y nicht notwendig isomorph sein.

Beweis. Nach Lemma 72 gilt $\|I\| = \|I^*\|$ und $\|I^{-1}\| = \|I^{-1*}\|$. Außerdem gilt nach Lemma 72, dass $I^* I^{-1*} = (I^{-1} I)^*$ und somit ist I^{-1*} die Inverse zu I^*. □

Es sei Y ein Teilraum von X. Dann bezeichnen wir die Abbildung $I : Y \to X$, die jedem Element $y \in Y$ dasselbe Element in X zuordnet, als Einbettung. Die duale Abbildung $I^* : X^* \to Y^*$ ist eine Quotientenabbildung. Wir bezeichnen den Teilraum $Y^\perp = \{x^* \in X^* | \forall y \in Y : x^*(y) = 0\}$ als Orthogonalraum von Y. Dann ist I^* gleich der Quotientenabbildung von X^* nach $X^*/Y^\perp$.

Lemma 74 *Es sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Teilraum. Dann gilt*
(i) $(X/U)^*$ ist isometrisch isomorph zu $U^\perp$.
(ii) U^* ist isometrisch isomorph zu $X^*/U^\perp$.

Beweis. (i) Es sei $q : X \to X/U$ die Quotientenabbildung. Der Isomorphismus $A : (X/U)^* \to U^\perp$ ist durch $A(\phi) = \phi \circ q$ gegeben. Es sei $u \in U$. Dann

gilt

$$A(\phi)(u) = (\phi \circ q)(u) = \phi(q(u)) = \phi(0) = 0$$

Weiter gilt

$$\|A(\phi)\| = \|\phi \circ q\| = \sup_{\|x\|=1} |\phi(q(x))| \leq \sup_{\|x\|=1} \|\phi\|\|q(x)\| = \|\phi\|$$

Es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein $u \in U$ mit $\|q(x)\| = \|[x]\| \geq \|x - u\|_X - \epsilon$.

(ii) Es sei hier $q : X^* \to X^*/U^\perp$ die Quotientenabbildung. Hier wählen wir den Isomorphismus $B : U^* \to X^*/U^\perp$, der durch $B(u^*) = q(u^*)$ gegeben ist. Offensichtlich gilt

$$\|B(u^*)\| = \|q(u^*)\| \leq \|u^*\|$$

□

Lemma 75 *(Dixmier) Es sei X ein Banachraum. Dann ist X^* ein komplementierter Teilraum von X^{***}.*

Beweis. X ist ein abgeschlossener Teilraum von X^{**}. Die gesuchte Projektion bildet ein Funktional x^{***} auf dessen Einschränkung auf X ab $x^{***}_{|X}$.

Wir wollen dies nun präziser fassen. Es seien

$$i_X : X \to X^{**} \qquad \forall x \in X \forall x^* \in X^* : \ (i_X(x))(x^*) = x^*(x)$$

$$i_{X^*} : X^* \to X^{***} \qquad \forall x^* \in X^* \forall x^{**} \in X^{**} : \ (i_{X^*}(x^*))(x^{**}) = x^{**}(x^*)$$

die natürlichen Einbettungen in den Bidualraum und den Dualraum des Bidualraums. Natürlich ist bei der Aussage des Satzes gemeint, dass $\mathrm{Bild}(i_{X^*})$ in X^{***} komplementiert ist. Die gesuchte Projektion ist $P = i_{X^*} \circ i_X^*$. Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(P) = i_{X^*}(X^*)$ und dass für alle $w \in \mathrm{Bild}(P)$ die Gleichung $P(w) = w$ gilt.

Es gilt

$$\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Bild}(i_{X^*} \circ i_X^*) \subseteq \mathrm{Bild}(i_{X^*})$$

Es sei nun $x^{***} \in \mathrm{Bild}(i_{X^*})$, d.h. es gibt ein $x^* \in X^*$ mit $i_{X^*}(x^*) = x^{***}$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$(i_{X^*}(x^*) \circ i_X)(x) = (i_X(x))(x^*) = x^*(x)$$

Somit gilt $x^* = i_{X^*}(x^*) \circ i_X$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} P(i_{X^*}(x^*)) &= (i_{X^*} \circ i_X^*)(i_{X^*}(x^*)) \\ &= i_{X^*}(i_X^*(i_{X^*}(x^*))) = i_{X^*}((i_{X^*}(x^*) \circ i_X) = i_{X^*}(x^*) \end{aligned}$$

□

Satz 16 *(Schauder) Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator. T ist genau dann kompakt, wenn T^* kompakt ist.*

Beweis. Es sei T kompakt. Wir wollen zeigen, dass $\overline{T^*(B_{Y^*})}$ kompakt ist. Dazu betrachten wir eine Folge $x_n^* \in \overline{T^*(B_{Y^*})}$ und zeigen, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzt. Zu der Folge x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, existiert eine beschränkte Folge $y_n^* \in Y^*$, $n \in \mathbb{N}$, mit $x_n^* = T^*(y_n^*)$, $n \in \mathbb{N}$.

Weil T kompakt ist, ist $\overline{T(B_X)}$ eine kompakte Menge. Deshalb ist $\overline{T(B_X)}$ mit der durch die Norm gegebenen Metrik ein kompakter, metrischer Raum und $f_n : \overline{T(B_X)} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(y) = y_n^*(y)$ ist eine beschränkte, gleichstetige Menge. Wir zeigen dies. Es gilt

$$|f_n(y) - f_n(z)| = |y_n^*(y) - y_n^*(z)| \leq \|y_n^*\| \|y - z\|$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli (Korollar 1) ist der Abschluss dieser Menge im Raum aller stetigen Funktionen kompakt und deshalb gibt es eine Teilfolge f_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, die konvergiert. Insbesondere ist diese Folge eine Cauchy-Folge und es gilt

$$\begin{aligned} \|f_{n_k} - f_{n_\ell}\|_\infty &= \sup_{y \in \overline{T(B_X)}} |f_{n_k}(y) - f_{n_\ell}(y)| \\ &= \sup_{y \in T(B_X)} |y_{n_k}^*(y) - y_{n_\ell}^*(y)| \\ &= \sup_{x \in B_X} |y_{n_k}^*(Tx) - y_{n_\ell}^*(Tx)| \\ &= \sup_{x \in B_X} |(T^*(y_{n_k}^*))(x) - (T^*(y_{n_\ell}^*))(x)| \\ &= \|T^*(y_{n_k}^*) - T^*(y_{n_\ell}^*)\| \end{aligned}$$

Also ist $T^*(f_{n_k})$, $k \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge. Sie konvergiert, weil X^* vollständig ist.

(ii) Aus (i) folgt, dass T^{**} kompakt ist, falls T^* kompakt ist. Wir wissen, dass X isometrisch isomorph zu einem Teilraum von X^{**} und Y zu einem

Teilraum von Y^{**} ist. Die Idee ist, dass wir, wenn wir T^{**} auf X einschränken, T erhalten.

Es sei $i_X : X \to X^{**}$ die Einbettung. Dann ist $T^{**} \circ i_X$ nach Lemma **??** kompakt, weil T^{**} kompakt ist. Weiter gilt, dass

$$T^{**} \circ i_X = i_Y \circ T$$

Dies gilt, weil

$$(T^{**}(i_X(x)))(y^*) = (i_X(x)))(T^*(y^*)) = (T^*(y^*))(x) = y^*(Tx) = (i_Y(Tx))(y^*)$$

Also ist $i_Y \circ T$ eine kompakte Abbildung. Da $i_Y(Y)$ ein abgeschlossener Teilraum von Y^{**} ist, gilt $\overline{i_Y \circ T(B_X)} \subseteq i_Y(Y)$ und $\overline{i_Y \circ T(B_X)}$ ist eine kompakte Teilmenge von $i_Y(Y)$. Es folgt, dass $\overline{T(B_X)}$ eine kompakte Teilmenge von Y ist. $\square$

2.6 Fortsetzungseigenschaft

Wir wollen hier auf die Frage eingehen, warum der Satz von Hahn-Banach nicht für lineare Abbildungen von einem Teilraum eines Banachraumes in einen Banachraum gilt. Wir sagen, dass ein Banachraum X die t-Fortsetzungseigenschaft besitzt, wenn für alle Banachräume Y und Z mit $Y \subseteq Z$ und alle Operatoren $T \in L(Y, X)$ ein Operator $\tilde{T} \in L(Z, X)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq t\|T\|$ und $\tilde{T}_{|Y} = T$ existiert.

Die Fortsetzungskonstante $\gamma_\infty(X)$ eines Banachraumes X ist

$$\inf\{t | X \text{ hat die t-Fortsetzungseigenschaft}\}.$$

Die allerwenigsten Banachräume besitzen die Fortsetzungseigenschaft. Die Banachräume mit der 1-Fortsetzungseigenschaft sind die Räume $C(K)$ aller stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge K mit der Supremumsnorm, wobei K total unzusammenhängend ist [Nac]. Ein topologischer Raum X heißt total unzusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$, zwei disjunkte, offene Mengen U, V mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cup V = X$ gibt.

Es ist ein offenes Problem, ob jeder Raum mit der Fortsetzungseigenschaft isomorph zu einem Raum mit der 1-Fortsetzungseigenschaft ist.

Eine Projektion P auf einem Banachraum X ist eine Abbildung in $L(X)$ mit $P^2 = P$. Eine Projektion ist auf ihrem Bild gleich der Identität. Wir sagen auch, dass ein Teilraum komplementiert ist, wenn es eine stetige Projektion gibt, deren Bild gleich diesem Teilraum ist. Falls ein Teilraum Y von X komplementiert ist, dann gibt es einen weiteren Teilraum Z mit $Y \cap Z = \{0\}$ und $X = Y + Z$, so dass die Norm von X zu der Norm $\| \|_Y + \| \|_Z$ äquivalent ist.

Ein Banachraum X hat die t-Projektionseigenschaft, falls zu jedem Banachraum Y, der X als Teilraum enthält, eine Projektion P von Y auf X mit $\|P\| \leq t$ existiert. Die Projektionskonstante eines Banachraumes X ist

$$\inf\{t | X \text{ hat die t-Projektionseigenschaft}\}.$$

Lemma 76 *Der Raum $\ell^\infty(I)$ hat die 1-Fortsetzungseigenschaft.*

Beweis. □

Lemma 77 *Ein Banachraum X hat genau dann die t-Fortsetzungseigenschaft, wenn er die t-Projektionseigenschaft besitzt.*

Beweis. □

Wir wollen nun ein Beispiel eines Raumes angeben, der keine Fortsetzungseigenschaft besitzt. Es handelt sich dabei um den Raum c_0. Um nachzuweisen, dass c_0 keine Fortsetzungseigenschaft besitzt, zeigen wir, dass c_0 nicht in ℓ^∞ komplementiert ist.

Beispiel 20 *c_0 ist nicht in ℓ^∞ komplementiert.*

Um dies zu zeigen, weisen wir eine stärkere Aussage nach. Dazu brauchen wir das folgende Lemma [Pel1] und [Whi].

Lemma 78 *Es gibt überabzählbar viele unendliche Teilmengen N_i, $i \in I$, von $\mathbb{N}$, so dass für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ die Menge $N_i \cap N_j$ endlich ist.*

Beweis. Weil $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ dieselbe Mächtigkeit besitzen, reicht es Teilmenge N_i von $\mathbb{Q}$ mit den gewünschten Eigenschaften nzu finden.

Es sei $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir wählen als N_i eine Folge rationaler Zahlen, die gegen i konvergiert. Da i irrational ist, so ist N_i als Menge unendlich. Die Menge $N_i \cap N_j$ ist für $\neq j$ endlich, weil die Grenzwerte verschieden sind. □

Lemma 79 *Es sei E ein komplementierter Teilraum von ℓ^∞, der c_0 in seiner natürlichen Identifikation enthält. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge N von $\mathbb{N}$, so dass $\ell^\infty(N) = \{x \in \ell^\infty | \forall i \notin N : x(i) = 0\}$ ein Teilraum von E ist.*

Tatsächlich lässt sich mehr zeigen: Ein unendlich-dimensionaler Teilraum von ℓ^∞ ist genau dann komplementiert, wenn er isomorph zu ℓ^∞ ist [Lin1].

Beweis. Wegen Lemma 78 gibt es eine überabzählbare Familie N_γ, $\gamma \in \Gamma$, von unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, so dass für alle γ und β mit $\gamma \neq \beta$ die Menge $N_\gamma \cap N_\beta$ endlich ist.

Wir betrachten die Teilräume

$$\ell^\infty(N_\gamma) = \{x \in \ell^\infty | \forall i \notin N_\gamma : x(i) = 0\}$$

von ℓ^∞ und behaupten, dass es ein γ gibt, so dass $\ell^\infty(N_\gamma) \subseteq E$.

Es sei $\Phi : \ell^\infty \to \ell^\infty/E$ die Quotientenabbildung. Da E in ℓ^∞ komplementiert ist, ist ℓ^∞/E zu einem Teilraum von ℓ^∞ isomorph. Deshalb gibt es eine Folge $f_j \in (\ell^\infty/E)^*$, $j \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \ell^\infty/E$ gilt: $x = 0$ gilt genau dann, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f_j(x) = 0$ gilt. Wir weisen dies nach.

Es sei F ein Teilraum von ℓ^∞, der zu ℓ^∞/E isomorph ist, und $I : \ell^\infty/E \to F$ sei der Isomorphismus. Es seien e_i^*, $i \in \mathbb{N}$, die Koordinatenfunktionale

$$e_i^*(x) = x_i$$

Es gilt für alle $x \in \ell^\infty$, dass genau dann $x = 0$ gilt, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung $e_i^*(x) = 0$ gilt. Insbesondere gilt diese Aussage für alle Vektoren in dem Teilraum F. Wir schränken nun die Funktionale auf den Teilraum F ein und nennen diese $\tilde{e}_i^*$, $i \in \mathbb{N}$. Also gilt dieselbe Aussage für die Folge $f_i = I^*(\tilde{e}_i^*)$, $i \in \mathbb{N}$, und alle Vektoren im Raum ℓ^∞/E. Wir überprüfen dies. Für alle i gilt

$$0 = I^*(\tilde{e}_i^*)(z) = \tilde{e}_i^*(I(z))$$

Also gilt $I(z) = 0$. Da I Isomorphismus ist, folgt $z = 0$.

Wir nehmen nun an, dass es kein γ mit $\ell^\infty(N_\gamma) \subseteq E$ gibt. Es folgt, dass für alle γ ein $x_\gamma \in \ell^\infty(N_\gamma)$ mit $x_\gamma \notin E$ existiert. Wir können außerdem fordern, dass $\|x_\gamma\| = 1$ gilt. Wir beobachten nun, dass für alle Vorzeichen $\epsilon_i = \pm 1$ und alle endlichen Folgen x_{γ_i}, $i = 1, \ldots, n$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i}) \right\|_{\ell^\infty/E} \leq \|\Phi\| \tag{2.2}$$

gilt. Dies folgt, weil c_0 im Kern von Φ liegt und $N_\gamma \cap N_\beta$ für $\gamma \neq \beta$ eine endlich Menge ist.

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i}) \right\|_{\ell^\infty/E} = \left\| \Phi\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_{\gamma_i} \right) \right\|_{\ell^\infty/E} = \left\| \Phi\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i} \right) \right\|_{\ell^\infty/E}$$

wobei

$$\tilde{x}_{\gamma_i}(k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \in \bigcup_{i \neq j} (N_{\gamma_i} \cap N_{\gamma_j}) \\ x_{\gamma_i}(k) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir weisen die letzte Gleichheit nach. Weil $\bigcup_{i\neq j}(N_{\gamma_i} \cap N_{\gamma_j})$ eine endliche Menge ist, unterscheiden sich die Vektoren x_{γ_i} und x_{γ_j} für $i \neq j$ nur in endlich vielen Koordinaten. Deshalb $x_{\gamma_i} - x_{\gamma_j} \in c_0$ und somit

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{\gamma_i} - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i} \in c_0$$

und $c_0 \subseteq E$. Deshalb gilt

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{\gamma_i}\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}\right)$$

Wir schätzen weiter ab. Man beachte, dass die Vektoren x_{γ_i}, $i = 1, \ldots, n$, paarweise disjunkte Träger haben und für alle $i = 1, \ldots, n$ die Gleichung $\|x_{\gamma_i}\| = 1$. Deshalb gibt es für jedes k in der Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}(k)$$

höchstens einen Summanden, der von 0 verschieden ist. Es folgt

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}\right\|_\infty \leq 1$$

Damit

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i})\right\|_{\ell^\infty/E} \leq \|\Phi\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}\right\|_\infty \leq \|\Phi\|$$

Damit haben wir (2.2) nachgewiesen. Aus (2.2) folgt, dass für alle $f \in (\ell^\infty/E)^*$ mit $\|f\| = 1$ und für alle $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$

$$\begin{aligned} \|\Phi\| &\geq \sup_{\epsilon} \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i})\right\|_{\ell^\infty/E} \\ &= \sup_{\epsilon} \sup_{\|f\|=1} f\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i})\right) = \sum_{i=1}^{n} |f(\Phi(x_{\gamma_i}))| \end{aligned} \tag{2.3}$$

gilt. Hieraus folgt, dass es nur abzählbar viele γ mit $f(\Phi(x_\gamma)) \neq 0$ gibt. Wir weisen dies nach. Falls es nämlich überabzählbar viele γ mit $|f(\Phi(x_\gamma))| > 0$ gibt, dann gibt es ein n, so dass für unendlich viele γ die Ungleichung

$$|f(\Phi(x_\gamma))| \geq \frac{1}{n}$$

Dies widerspricht aber (**??**). Also gibt es für jedes j nur abzählbar viele γ, so dass $f_j(\Phi(x_\gamma)) \neq 0$. Die Menge dieser γ bezeichnen wir mit N_j. Dann ist $\bigcup_j N_j$ abzählbar und das Komplement deshalb nicht leer. Also gibt es ein γ, so dass für alle j

$$f_j(\Phi(x_\gamma)) = 0$$

gilt. Es folgt $\Phi(x_\gamma) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Ein topologischer Raum heißt extrem unzusammenhängend, wenn der Abschluss jeder offenen Menge offen ist.

Ein normierter Raum hat die binäre Durchschnittseigenschaft, wenn jede Familie von abgeschlossenen Kugeln, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Satz 17 *Es sei X ein reeller Banachraum. Dann sind äquivalent:*
(i) Es gibt eine extrem unzusammenhängende, kompakte Menge K, so dass X isometrisch isomorph zu $C(K)$ ist.
(ii) X hat die binäre Durchschnittseigenschaft.
(iii) X hat die 1-Fortsetzungseigenschaft.

Beweis. □

Die zur Fortsetzungseigenschaft duale Eigenschaft ist die Lifting-Eigenschaft. Ein Banachraum X besitzt die Lifting-Eigenschaft, wenn es zu jeder surjektiven Abbildung $S : Y \to Z$ und zu jeder Abbildung $T : X \to Z$ eine Abbildung $\hat{T} : X \to Y$ mit $S \circ \hat{T} = T$ gibt.

Es sei I ein Indexbereich. Dann besitzt $\ell_1(I)$ die Lifting-Eigenschaft

2.7 Der Satz von Baire

René Louis Baire (1874-1932) wurde in Paris geboren. Er war Schüler an der Ecole Normale Supérieure. Nachdem er als Lehrer an Gymnasien in Troyes, Bar-le-Duc und Nancy gearbeitet hatte, lehrte er ab 1902 an der Universität von Montpellier und ab 1905 an der von Dijon. Da er seit seiner Jugend krank war, musste er ab 1914 auf jede Forschungs-und Lehrtätigkeit verzichten. Er zog sich an den Genfer See zurück und starb in Chambéry [Dieu].

Der Satz von Baire besagt, dass in einem vollständigen, metrischen Raum der Schnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ von offenen, dichten Mengen U_n, $n \in \mathbb{N}$, dicht im metrischen Raum ist.

Dieser Satz ist grundlegend und hat viele Anwendungen und wir benötigen ihn, um den Satz von der offenen Abbildung und den Satz vom abgeschlossenen Graphen zu beweisen.

Es stellt sich die Frage, ob die Aussage des Satzes von Baire auch in metrische Räumen gilt, die nicht vollständig sind. Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Der Satz von Baire gilt auch in lokalkompakten Räumen. Lokalkompakte Räume sind i.a. nicht vollständig, wie z.B. das offene Intervall $(0, 1)$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik.

Der Satz von Baire gilt auch in metrischen Räumen, in denen das Spiel von Choquet [HiLa, p.20] eine Gewinnstrategie besitzt.

Es sei X ein metrischer Raum. Zwei Spieler, Adam und Eva, spielen das Spiel von Choquet: Adam darf eine offene, nichtleere Teilmenge U_1 von X wählen. Dann wählt Eva eine offene, nichtleere Teilmenge V_1 von U_1. Dann wählt Adam wieder eine offene, nichtleere Teilmenge U_2 von V_1. Auf diese Weise entstehen zwei Folgen U_n, $n \in \mathbb{N}$, und V_n, $n \in \mathbb{N}$, von offenen, nichtleeren Mengen mit

$$U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1}$$

Es gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

Wir nennen diesen Schnitt U. Adam hat gewonnen, wenn U die leere Menge ist, und Eva hat gewonnen, wenn U nicht die leere Menge ist.

Wir sagen, dass einer der Spieler eine Gewinnstrategie hat, wenn es eine Methode gibt, so dass dieser Spieler immer gewinnen kann. Falls der zweite

Spieler eine Gewinnstrategie hat, dann gilt in dem metrischen Raum der Satz von Baire.

Falls der metrische Raum X vollständig ist, so kann man immer erreichen, dass der Schnitt nicht leer ist. Wir wollen dies nachweisen. Nachdem der Gegenspieler eine offene Menge U_n gewählt hat, wählen wir eine offene Kugel in U_n, deren Radius kleiner oder gleich 2^{-n} ist. Die Folge der Kugelmittelpunkte ist dann eine Cauchy-Folge. Der Grenzwert ist Element des Durchschnittes U.

Satz 18 *(Baire) Es sei X ein vollständiger, metrischer Raum. Falls U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von offenen Teilmengen von X ist, die dicht in X sind, dann ist auch*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

in X dicht.

Die Vollständigkeit im Satz von Baire ist eine hinreichende, aber keinesfalls notwendige Voraussetzung.

Es gibt einen metrischen Raum, der die Aussage des Satzes von Baire erfüllt, aber das Produkt dieses Raumes mit sich erfüllt nicht die Aussage. Dies wurde von Oxtoby mit der Kontinuumshypothese in den 30er Jahren bewiesen.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $y \in X$ und für alle offenen Umgebungen W von y

$$W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \neq \emptyset$$

gilt.

Wir zeigen, dass es eine Folge von Punkten x_n, $n \in \mathbb{N}$, und Radien r_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $r_n < \frac{1}{2^n}$, $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq W$ und

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \subseteq \overline{B(x_n, r_n)} \subseteq U_n$$

Da U_1 und W offen sind, ist $U_1 \cap W$ eine offene Menge. $U_1 \cap W$ ist nicht leer, weil sonst U_1 nicht dicht in X wäre. Deshalb gibt es x_1 und $0 < r_1 < 1$ mit

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq U_1 \cap W$$

Wir nehmen an, dass wir n Punkte gewählt haben. Es sind U_{n+1} und $B(x_n, r_n)$ offene Mengen, somit ist $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ eine offene Menge. Sie ist nicht leer, weil U_{n+1} sonst nicht dicht in X wäre. Also gibt es $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Da $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ offen ist, gibt es $r_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$ mit

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$$

Die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Cauchy Folge. Für alle $n, m > N$ gilt

$$B(x_n, r_n) \subseteq B(x_N, r_N) \qquad B(x_m, r_m) \subseteq B(x_N, r_N)$$

Also gilt $d(x_n, x_m) < 2^{-N+1}$. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Es gilt

$$x \in W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)$$

Wir prüfen das nach.

$$\forall N \forall n > N : x_n \in B(x_N, r_N)$$

Es folgt

$$\forall N : x \in \overline{B(x_N, r_N)}$$

$$\forall N : x \in \overline{B(x_N, r_N)} \subseteq U_N \cap B(x_1, r_1) \subset U_N \cap W$$

$$x \in W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)$$

□

Man kann den Satz von Baire folgendermaßen verallgemeinern. Falls der metrische Raum immer für das Spiel von Choquet eine Strategie zulässt, so dass der Schnitt nicht leer ist, dann gilt die Aussage vom Satz von Baire. Wir zeigen dies. Es seien U_n, $n \in \mathbb{N}$, offene Mengen, die sämtlich dicht in X sind und W die offene Umgebung eines Punktes in X. Zu $U_1 \cap W$ wählen wir gemäß unserer Strategie die offene Menge V_1, $V_1 \subseteq U_1$. Der Gegenspieler antwortet mit $V_1 \cap U_2$. Diese Menge ist nicht leer, weil U_2 dicht ist. Nun wählen wir gemäß unserer Strategie die offene Menge V_2, $V_2 \subseteq V_1 \cap U_2$, usw.

Lemma 80 *Es sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent.*
(i) Falls U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von offenen Teilmengen von X ist, die dicht in X sind, dann ist auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

in X dicht.
(ii) Für alle Folgen abgeschlossener Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, die sämtlich leeres Inneres haben, gilt, dass auch die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

leeres Inneres hat.
(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, deren Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

einen inneren Punkt enthält, gilt dass mindestens eine der Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, einen inneren Punkt enthält.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Die Mengen $U_n = A_n^c$, $n \in \mathbb{N}$, sind offen und dicht in X. Nach (i) ist auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$$

dicht in X. Also enthält $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ keinen inneren Punkt.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir setzen $A_n = U_n^c$. Da U_n dicht in X sind, haben A_n leeres Inneres und nach (ii) auch die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)^c .$$

Also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ dicht in X.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: (ii) ist die Kontraposition von (iii). $\square$

Eine Menge heißt nirgends dicht, falls das Innere vom Abschluss die leere Menge ist.

Korollar 9 *Es sei X ein vollständiger, metrischer Raum. X ist nicht abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen.*

Beweis. Es seien E_n, $n \in \mathbb{N}$, nirgends dichte Mengen. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\overset{\circ}{\overline{E_n}} = \emptyset.$$

Da X ein vollständiger, metricher Raum ist, gilt der Satz von Baire (Satz 18). Mit Lemma 80 folgt, dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$$

keinen inneren Punkt enthält. Es ergibt sich

$$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

□

Wir sagen, daß eine Teilmenge A eines topologischen Raumes von erster Kategorie ist, falls A abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist. Andernfalls sagen wir, dass A von zweiter Kategorie ist.

Beispiel 21 *(i) $\mathbb{Q}$ ist eine Menge erster Kategorie.*
(ii) $\mathbb{R}$ ist von zweiter Kategorie.
(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist von zweiter Kategorie.
(iv) In dem metrischen Raum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt der Satz von Baire.
(v) $\mathbb{Q}$ ist keine G_δ-Menge.

Beweis. (i) Jede abzählbare Menge ist abzählbare Vereinigung einpunktiger Mengen. (ii) folgt mit dem Satz von Baire. (iii) folgt aus (ii). Dazu nehmen wir an, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von erster Kategorie ist.

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$$

q_n, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Abzählung der rationalen Zahlen. Wir setzen $B_{2n} = A_n$ und $B_{2n+1} = \{q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{und} \quad \overset{\circ}{\overline{B_n}} = \emptyset$$

(v) Wir nehmen an, dass $\mathbb{Q}$ eine G_δ-Menge ist. Dann gibt es offene Mengen O_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n.$$

Deshalb

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^c.$$

Die abgeschlossenen Mengen O_n^c enthalten keine inneren Punkte, weil kein rationaler Punkt Element dieser Mengen ist. Damit ist $\mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen, also von erster Kategorie. Dies ist falsch. $\square$

Beispiel 22 *Die Hamel-Basis (algebraische Basis) eines unendlich-dimensionalen Banachraumes X ist überabzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dies sei nicht so. x_n sei eine abzählbare Hamel-Basis. Wir setzen

$$E_n = [x_1, \ldots, x_n] \qquad n \in \mathbb{N}$$

E_n sind abgeschlossene Teilräume und $X = \bigcup_n E_n$. Nach dem Satz von Baire gibt es ein n_0, so dass E_{n_0} nichtleeres Inneres besitzt. Also $B(x_0, r) \subset E_{n_0}$. Wegen $-x_0 \in E_{n_0}$ folgt $B(0, r) \subset E_{n_0}$. Es folgt $B(0, mr) \subset E_{n_0}$ und damit $X = E_{n_0}$. $\square$

2.8 Der Satz von der offenen Abbildung

Wir sagen, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen offen ist, falls $f(U)$ für alle offenen Mengen U offen ist.

Der Satz von der offenen Abbildung besagt, dass eine stetige, surjektive, lineare Abbildung zwischen Banachräumen eine offene Abbildung ist. Beim Beweis benutzen wir den Satz von Baire. Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung ist, dass eine stetige, bijektive Abbildung zwischen Banachräumen eine stetige Inverse besitzt.

Die Abbildung $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung, die nicht offen ist, weil $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Die identische Abbildung $id : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ zwischen dem Raum $\mathbb{R}$, einmal mit der diskreten Topologie ausgestattet und zum anderen mit der üblichen Metrik, ist stetig, bijektiv, aber nicht offen.

Lemma 81 *Es seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(i) $T : X \to Y$ ist eine offene Abbildung.
(ii) Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass

$$B_Y(0, \epsilon) \subseteq T(B_X(0, 1)).$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Falls T offen ist, dann ist die Menge $T(B_X(0, 1))$ offen. Weil $0 = T(0) \in T(B_X(0, 1))$, so ist 0 innerer Punkt von $T(B_X(0, 1))$.

Nun zeigen wir $(ii) \Rightarrow (i)$. Es sei U eine offene Menge in X. Wir müssen zeigen, dass $T(U)$ offen ist. Es sei $y_0 \in T(U)$. Dann gibt es $x_0 \in U$ mit $y_0 = T(x_0)$. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x_0, \epsilon) \subseteq U$.

$$T(B_X(x_0, \epsilon)) = T(x_0) + \epsilon T(B_X(0, 1)) \supseteq T(x_0) + \epsilon B_Y(0, 1) = B_Y(y_0, \epsilon)$$

□

Satz 19 *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare, stetige Abbildung. Falls T surjektiv ist, dann ist T offen.*

Korollar 10 *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare, stetige Abbildung. Falls T bijektiv ist, dann ist auch T^{-1} eine stetige Abbildung.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B_Y(0,r) \subseteq T(B_X(0,1))$$

gilt. Wir zeigen zunächst, dass es ein $r > 0$ mit

$$B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

gibt. Wegen Lemma 29 gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)$. Somit

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0,n)).$$

Es folgt

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_X(0,n))}.$$

Nach dem Kategoriensatz von Baire (Satz 18 und Lemma 80) gibt es ein n_0, so dass

$$\overline{T(B_X(0,n_0))}$$

einen inneren Punkt besitzt. Wegen $\overline{T(B_X(0,n_0))} = n_0\overline{T(B_X(0,1))}$ besitzt auch $\overline{T(B_X(0,1))}$ einen inneren Punkt. Deshalb gibt es ein y_0 und ein $r > 0$ mit

$$B_Y(y_0,4r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

Tatsächlich wollen wir erreichen, dass eine Kugel mit Zentrum 0 in $\overline{T(B_X(0,1))}$ enthalten ist. Ein Verschieben von $B_Y(y_0,4r)$ um den Vektor y_0 führt nicht zum Ziel, weil y_0 nicht in $T(B_X(0,1))$ liegen muss. Es gilt zwar

$$B_Y(0,4r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))} - y_0 = \overline{T(B_X(0,1)) - y_0},$$

aber an dieser Stelle brauchen wir, dass es ein $x_0 \in B(0,1)$ mit $T(x_0) = y_0$. Es gibt aber ein $x_1 \in B_X(0,1)$ mit

$$\|T(x_1) - y_0\| < 2r.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$B_Y(T(x_1),2r) \subseteq B_Y(y_0,4r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} B_Y(0,2r) &= B_Y(T(x_1),2r) - T(x_1) \\ &\subseteq \overline{T(B_X(0,1))} - T(x_1) \\ &= \overline{T(B_X(0,1)) - T(x_1)} = \overline{T(B_X(x_1,1))}. \end{aligned}$$

Wegen $\|x_1\| < 1$ gilt $B_X(x_1,1) \subseteq B_X(0,2)$ und es folgt

$$B_Y(0,2r) \subseteq \overline{T(B_X(0,2))}.$$

Also gilt

$$B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Nun zeigen wir, dass

$$B_Y(0,\tfrac{1}{2}r) \subseteq T(B_X(0,1))$$

gilt.

Es sei $y \in B_Y(0,r)$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| < 2^{-n+1}$ und

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^n}$$

Wir zeigen dies durch Induktion. Da $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$ gilt, gibt es ein x_1 mit $\|x_1\| < 1$, so dass

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2}$$

Wir nehmen an, dass wir $x_1, \ldots, x_n$ gewählt haben, und wählen nun x_{n+1}. Wegen

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^n} \quad \text{bzw.} \quad \left\| 2^n y - \sum_{i=1}^{n} T(2^n x_i) \right\| < r$$

und wegen $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$ gibt es ein x_{n+1} mit $\|2^n x_{n+1}\| < 1$ und

$$\left\| \left(2^n y - \sum_{i=1}^{n} T(2^n x_i) \right) - T(2^n x_{n+1}) \right\| < \frac{r}{2}.$$

Also gilt

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n+1} T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1} = 2$$

konvergiert die Reihe $\sum x_i$ absolut. Da X ein Banachraum ist, konvergiert die Reihe gegen ein x in X mit $\|x\| < 2$. Außerdem konvergiert

$$\sum_{i=1}^{n} T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

gegen y. Wegen der Stetigkeit von T folgt

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = T(x).$$

Es folgt, dass $B_Y(0,r) \subseteq T(B_X(0,2))$. □

Im Satz von der offenen Abbildung wird vorausgesetzt, dass beide Räume X und Y Banachräume sind. Wir wollen mit einem Beispiel zeigen, dass man darauf nicht verzichten kann.

Beispiel 23 *X sei der Raum ℓ^1 mit der Norm $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ und Y sei der Raum ℓ^1 mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Dann ist die Identität $id : X \to Y$ eine bijektive, stetige Abbildung, aber die Inverse ist nicht stetig.*

Beweis. Wegen

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$$

gilt $\|\mathrm{id}\| \leq 1$. Andererseits gilt

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|_\infty = 1 \qquad \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|_1 = n$$

Also ist id^{-1} nicht beschränkt. □

Im Satz von der offenen Abbildung wird vorausgesetzt, dass die Abbildung T stetig ist. Wir wollen ein Beispiel dafür angeben, dass man auf diese Voraussetzung nicht verzichten kann.

Beispiel 24 *Die Räume c_0 und ℓ^1 sind algebraisch isomorph, aber es gibt zwischen ihnen keine lineare, bijektive, stetige Abbildung.*

Beweis. Wir werden später das genaue Argument kennenlernen, das zeigt, dass c_0 und ℓ^1 nicht topologisch isomorph sind. Kurz gefasst lautet es: Der Dualraum von c_0 ist separabel und der von ℓ^1 ist nicht separabel, was nicht sein kann, wenn beide Räume topologisch isomorph wären.

Wir zeigen nun, dass beide Räume dieselbe algebraische Dimension besitzen, nämlich gleich der Kardinalität der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Beide Räume sind Teilmengen des Raumes aller Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Diese Menge hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$. Somit haben die Basen eine Kardinalität, die kleiner oder gleich der von $\mathbb{R}$ ist.

Nach Beispiel 22 ist die Kardinalität der algebraischen Basis eines unendlich-dimensionalen Banachraumes überabzählbar. Mit der Kontinuumshypothese folgt, dass die Kardinalität größer oder gleich der Kardinalität des Kontinuums ist. □

Lemma 82 *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator, so dass* $\operatorname{Bild}(T)$ *abgeschlossen ist. Dann sind* $\operatorname{Bild}(T)$ *und* $X/\operatorname{Kern}(T)$ *isomorph und* $\hat{T} : X/\operatorname{Kern}(T) \to \operatorname{Bild}(T)$ *mit* $\hat{T}([x]) = T(x)$ *ist ein stetiger Isomorphismus.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\hat{T} : X/\operatorname{Kern}(T) \to \operatorname{Bild}(T)$ mit $\hat{T}([x]) = T(x)$. Die Abbildung $\hat{T}$ ist wohldefiniert, weil für x und y mit $[x] = [y]$ die Gleichung $T(x) = T(y)$ gilt. Außerdem ist sie bijektiv.

Die Abbildung $\hat{T}$ ist stetig, es gilt $\|T\| = \|\hat{T}\|$. Wir weisen die Gleichung nach. Es gilt immer $\|x\| \geq \|[x]\|$. Es folgt $\|T\| \leq \|\hat{T}\|$. Es gilt

$$\|[x]\| = \inf\{\|x + y\| | T(y) = 0\}$$

Deshalb gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein y mit $T(y) = 0$ und

$$\|[x]\| + \epsilon \geq \|x + y\|$$

Es folgt

$$\|\hat{T}([x])\| = \|T(x)\| = \|T(x + y)\| \leq \|T\|\|x + y\| \leq \|T\|(\|[x]\| + \epsilon)$$

Da X und Y Banachräume sind, $\operatorname{Bild}(T)$ abgeschlossen ist, sind $\operatorname{Bild}(T)$ und $X/\operatorname{Kern}(T)$ Banachräume und aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt, dass $\hat{T}^{-1}$ stetig ist. □

Lemma 83 *Es seien X und Y Banachräume, $S : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator und Bild(S) abgeschlossen. Dann gilt*

$$(\operatorname{Kern}(S))^{\perp} = \operatorname{Bild}(S^*)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Bild}(S^*) \subseteq (\mathrm{Kern}(S))^\perp$. Falls $x^* \in \mathrm{Bild}(S^*)$

$$x^*(x) = S^* y^*(x) = y^*(Sx)$$

Für alle x mit $Sx = 0$ ist der letztere Ausdruck 0. Also gilt $x^* \in (\mathrm{Kern}(S))^\perp$.

Nun die umgekehrte Inklusion. Es sei $x^* \in (\mathrm{Kern}(S))^\perp$. Wir konstruieren nun ein y^* mit $x^* = S^* y^*$. Es sei $y_0^* : \mathrm{Bild}(S) \to \mathbb{R}$ durch

$$y_0^*(y) = x^*(x) \qquad \text{falls} \quad S(x) = y$$

gegeben. Wir weisen nach, dass y_0^* ist wohldefiniert und stetig ist. Es seien x_1 und x_2 mit $y = S(x_1) = S(x_2)$. Dann $0 = S(x_1 - x_2)$ und somit $x^*(x_1 - x_2) = 0$

$$x^*(x_1) = x^*(x_2)$$

Wir zeigen nun, dass y_0^* stetig ist. Nach Lemma 82 ist $\hat{S} : X/\mathrm{Kern}(S) \to \mathrm{Bild}(S)$ mit $\hat{S}([x]) = S(x)$ ein stetiger Isomorphismus.

$\hat{x}^* : X/\mathrm{Kern}(S) \to \mathbb{R}$ sei durch $\hat{x}^*([x]) = x^*(x)$ gegeben. Dieses Funktional ist wohldefiniert und stetig. Wir überprüfen die Stetigkeit. Für jedes $\epsilon > 0$ und $x \in X$ gibt es ein y mit $Sy = 0$, so dass

$$\|[x]\| + \epsilon \geq \|x + y\|$$

Deshalb

$$|\hat{x}^*([x])| = |x^*(x)| = |x^*(x+y)| \leq \|x^*\|\|x+y\| \leq \|x^*\|(\|[x]\| + \epsilon)$$

Wir beobachten, dass $y_0^* = \hat{x}^* \circ \hat{S}^{-1}$: Es sei $y \in \mathrm{Bild}(S)$, also $y = Sx$. Dann gilt $y_0^*(y) = x^*(x)$ und

$$\hat{x}^* \circ \hat{S}^{-1}(y) = \hat{x}^*(\hat{S}^{-1}(y)) = \hat{x}^*([x]) = x^*(x)$$

Deshalb ist y_0 stetig. Mit dem Satz von Hahn-Banach können wir das Funktional y_0^* zu einem Funktional y^* auf Y fortsetzen. Es folgt für alle $x \in X$

$$x^*(x) = y_0^*(Sx) = y^*(Sx) = (S^* y^*)(x)$$

Es folgt $x^* = S^* y^*$. $\square$

Beispiel 25 *Es seien X ein Banachraum und Y ein abgeschlossener Teilraum. Dann gilt*

$$q(\overline{B}_X) = \overline{B}_{X/Y}$$

Wenn man die Voraussetzung, dass X und Y vollständig sind, fallen lässt, dann gibt es Gegenbeispiele [Wer].

Beweis. Es gilt

$$q(B_X) = B_{X/Y}$$

Ausserdem ist q nach dem Satz von der offenen Abbildung eine offene Abbildung. Also bildet q auch abgesclossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. Da

$$q(\overline{B}_X) \subseteq \overline{B}_{X/Y}$$

folgt die Behauptung.

2.9 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Es seien X und Y Mengen und $T : X \to Y$ eine Abbildung. Der Graph dieser Abbildung ist

$$\mathrm{Graph}(T) = \{(x, y) | y = T(x)\}$$

Falls X und Y Vektorräume sind und T eine lineare Abbildung ist, dann ist $\mathrm{Graph}(T)$ ein Teilraum von $X \times Y$.

Wir sagen, dass der Graph von T abgeschlossen ist, wenn $\mathrm{Graph}(T)$ im Raum $X \times Y$ eine abgeschlossene Menge ist.

Falls X und Y normierte Räume sind, dann ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ durch die Norm $\| \ \|_X + \| \ \|_Y$ gegeben. (Wir könnten auch die Norm $\max\{\| \ \|_X, \| \ \|_Y\}$ verwenden.) Die Stetigkeit von T bedeutet, dass für alle $x \in X$ und alle Folgen x_n, $n \in \mathbb{N}$, die gegen x konvergieren

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$$

gilt. Die Abgeschlossenheit des Graphen von T bedeutet, dass für alle $(x, y) \in X \times Y$ und alle Folgen $(x_n, y_n) \in \mathrm{Graph}(T)$, $n \in \mathbb{N}$, die gegen (x, y) konvergieren, gilt

$$(x, y) \in \mathrm{Graph}(T)$$

Dies bedeutet, dass für alle $(x, y) \in X \times Y$ und alle Folgen $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$$

folgt, dass $T(x) = y$. Offenbar impliziert die Stetigkeit von T die Abgeschlossenheit des Graphen. Die Umkehrung ist i.a. falsch. Wenn wir die Abgeschlossenheit eines Graphen nachprüfen, betrachten wir nur solche Folgen x_n, $n \in \mathbb{N}$, die konvergieren und für die die Folgen $T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, konvergieren.

Beispiel 26 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

besitzt einen abgeschlossenen Graphen, aber die Funktion ist nicht stetig. Diese Beispiel widerspricht nicht dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, weil f nicht linear ist.

Satz 20 *(Satz vom abgeschlossenen Graphen) Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann stetig, wenn der Graph von T abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir leiten den Satz vom abgeschlossenen Graphen aus dem Satz von der offenen Abbildung her.

Es ist offensichtlich, dass die Stetigkeit von T die Abgeschlossenheit von $\mathrm{Graph}(T)$ impliziert.

Wir nehmen nun an, dass der Graph von T abgeschlossen ist. Wir betrachten die Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ mit

$$\pi_X(x, y) = x \qquad \pi_Y(x, y) = y$$

Wir schränken die beiden Projektionen auf den Graphen von T ein und behaupten, dass

$$\pi_Y|_{\mathrm{Graph}(T)} \quad \text{und} \quad \left(\pi_X|_{\mathrm{Graph}(T)}\right)^{-1}$$

beschränkte Operatoren sind. Wegen $\|\pi_Y\| = 1$ gilt $\|\pi_Y|_{\mathrm{Graph}(T)}\| \leq 1$.

Da X und Y Banachräume sind, so ist auch $X \times Y$ ein Banachraum. Damit ist $\mathrm{Graph}(T)$ ein abgeschlossener Teilraum eines Banachraumes und somit selbst ein Banachraum. $\pi_X|_{\mathrm{Graph}(T)}$ ist eine Bijektion. Wir prüfen dies nach.

$$x_1 = \pi_X(x_1, T(x_1)) = \pi_X(x_2, T(x_2)) = x_2$$

Also ist die Abbildung injektiv. Sie ist auch offensichtlich surjektiv. Ausserdem gilt

$$\|\pi_X|_{\mathrm{Graph}(T)}\| \leq 1.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von der offenen Abbildung erfüllt. Damit gibt es ein c, so dass

$$\left\| \left(\pi_X|_{\mathrm{Graph}(T)}\right)^{-1} \right\| < c.$$

Damit ist auch der Operator

$$\pi_Y \left(\pi_X|_{\mathrm{Graph}(T)}\right)^{-1}$$

beschränkt und es gilt

$$T = \pi_Y \left(\pi_X|_{\mathrm{Graph}(T)}\right)^{-1}.$$

□

Beispiel 27 *Es sei X der Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Y sei der Raum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm. Es sei $D : X \to Y$ die Ableitungsabbildung

$$D(f) = f'$$

D ist eine unbeschränkte, lineare Abbildung, deren Graph abgeschlossen ist.

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen lässt sich offenbar deshalb nicht auf dieses Beispiel anwenden, weil der Raum X nicht vollständig ist. Der Raum Y ist vollständig.

Beweis. Wir zeigen, dass die Abbildung nicht beschränkt ist. Es gelten

$$\|x^n\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|D(x^n)\|_\infty = \|nx^n\|_\infty = n$$

Wir zeigen nun, dass der Graph von D abgeschlossen ist. Es gelte

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{und} \quad g = \lim_{n\to\infty} Df_n$$

d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein n_0, so dass für alle $n > n_0$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \text{und} \quad \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f_n'(x)| < \epsilon$$

gilt. Es folgt, dass $f' = g$. $\square$

Beispiel 28 *Es sei Y der Raum ℓ^1 mit der Norm*

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

X sei der Teilraum von ℓ^1, der aus allen Folgen x mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|x_n| < \infty$$

besteht, ausgestattet mit derselben Norm $\| \ \|_1$.

(i) Die Abbildung $T : X \to Y$ mit $T(x) = (nx_n)_{n=1}^\infty$ hat einen abgeschlossenen Graphen, ist aber nicht stetig.

(ii) Die Abbildung $T^{-1} : Y \to X$ ist surjektiv, beschränkt und nicht offen.

Beweis. T ist nicht stetig: Es sei e_n, $n \in \mathbb{N}$, die Folge, die an der n-ten Stelle eine 1 hat, die andern Koordinaten sind 0.

$$\|T(e_n)\| = n$$

T^{-1} ist nicht offen, weil T sonst stetig wäre. T^{-1} ist stetig:

$$\|T^{-1}(x)\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| = \|x\|$$

Der Graph von T ist abgeschlossen. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$. Wir haben zu zeigen, dass $T(x) = y$. Da T^{-1} stetig ist, folgt

$$T^{-1}(y) = T^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} T(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Damit folgt $y = Tx$. $\square$

2.10 Der Satz von Banach-Steinhaus

Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972) wurde in Jaslo geboren. Er studierte in Lwow und promovierte 1911 in Göttingen bei Hilbert. Er lehrte in Wroclaw an der Universität.

Satz 21 *(Satz von Banach-Steinhaus/Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) Es seien X und Y normierte Räume und $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $L(X,Y)$.*
(i) Falls U eine Menge zweiter Kategorie ist und für alle $x \in U$

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\| < \infty$$

gilt, dann folgt

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| < \infty$$

(ii) Falls X ein Banachraum ist und falls für alle $x \in X$

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\| < \infty$$

gilt, dann folgt

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| < \infty$$

Beweis. (ii) folgt aus (i), weil X von zweiter Kategorie ist. Wir beweisen (i). Wir betrachten

$$E_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\| \le n \right\} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Es gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\| < \infty \right\} \supseteq U$$

Deshalb ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

von zweiter Kategorie. Außerdem sind die Mengen E_n, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Mengen.

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \sup_{T \in \mathcal{A}} \|T(x)\| \leq n \right\} = \{x \in X \mid \forall T \in \mathcal{A} : \|T(x)\| \leq n\} \\ &= \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{x \in X \mid \|T(x)\| \leq n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} T^{-1}(\overline{B_Y(0,n)}) \end{aligned}$$

$T^{-1}(\overline{B_Y(0,n)})$ ist abgeschlossen, weil T stetig ist. Also ist E_n der Durchschnitt abgeschlossener Mengen und deshalb selbst abgeschlossen. Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ von zweiter Kategorie ist, ist diese Menge nicht abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen. Deshalb gibt es ein n_0, so dass E_{n_0} einen inneren Punkt enthält. Es gibt ein x_0 und ein $r > 0$, so dass

$$\overline{B_X(x_0, r)} \subseteq E_{n_0}$$

Es folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\overline{B_X(0, r)} \subseteq E_{n_0} - x_0 \subseteq E_{2n_0}.$$

Also gilt

$$\overline{B_X(0, r)} \subseteq \left\{ x \in X \;\middle|\; \sup_{T \in \mathcal{A}} \|T(x)\| \leq 2n_0 \right\}.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{\|x\| \leq r} \sup_{T \in \mathcal{A}} \|T(x)\| \leq 2n_0$$

und schliesslich

$$2n_0 \geq \sup_{T \in \mathcal{A}} \sup_{\|x\| \leq r} \|T(x)\| = \sup_{T \in \mathcal{A}} r\|T\|.$$

□

Als Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus lässt sich zeigen, dass es eine stetige Funktion gibt, deren Fourier Reihe in einem Punkt divergiert ([Ho], S. 64).

Chapter 3

Hilbertraum

3.1 Hilberträume

Es sei X ein Vektorraum über den rellen oder komplexen Zahlen. Eine Abbildung $< \, , \, >: X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt oder auch inneres Produkt, falls

(i) $\forall x, y, z \in X :< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

(ii) $\forall x, y \in X \forall t \in \mathbb{R} :< tx, y >= t < x, y >$

(iii) $\forall x, y \in X :< x, y >= \overline{< y, x >}$

(iv) $\forall x \in X : 0 \leq < x, x >$

(v) $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt Prähilbertraum.

Lemma 84 *(Cauchy-Schwarz Ungleichung) Es sei X ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Dann gilt für alle $x, y \in X$*

$$| < x, y > |^2 \leq < x, x >< y, y >$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Falls $y = 0$, dann gilt auch $< x, y >= 0$. Damit folgt die Behaup-

tung. Wir nehmen nun an, dass $y \neq 0$. Es sei $t \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq < x+ty, x+ty > \\ &= < x,x > + < ty,x > + < x,ty > + < ty,ty > \\ &= < x,x > + t\overline{< x,y >} + \overline{t} < x,y > + |t|^2 < y,y > \end{aligned}$$

Wir setzen

$$t = -\frac{< x,y >}{< y,y >}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \left\langle x - \frac{< x,y >}{< y,y >} y, x - \frac{< x,y >}{< y,y >} y \right\rangle \\ &= < x,x > - \frac{| < x,y > |^2}{< y,y >} - \frac{| < x,y > |^2}{< y,y >} + \frac{| < x,y > |^2}{< y,y >} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{| < x,y > |^2}{< y,y >} \leq < x,x >$$

□

In einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt definieren wir

$$\|x\|_2 = < x,x >^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 85 *Es sei X ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Dann ist*

$$\|x\|_2 = < x,x >^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf X.

Ein Vektorraum H mit einem Skalarprodukt heißt Hilbertraum, falls H mit der Norm $\sqrt{< .,. >}$ vollständig ist.

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung.

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 \quad &= < x+y, x+y >^2 \\ &= < x,x > + < x,y > + < y,x > + < y,y > \\ &= \|x\|_2^2 + 2\Re < x,y > + \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$\|x+y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

□

Beispiel 29 *(i) ℓ^2 mit dem Skalarprodukt*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

ist ein Hilbertraum.
(ii) $L^2[0,1]$ mit dem Skalarprodukt

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

ist ein Hibertraum.
(iii) $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist, ist mit

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}d\mu$$

ein Hilbertraum.

Lemma 86 *Es sei H ein Prähilbertraum. Dann ist das Skalarprodukt $< .,. >: H \times H \to \mathbb{K}$ bezüglich der Norm $\| \ \|_2$ stetig.*

Beweis.

$$\begin{aligned} | < w, x > - < y, z > | \quad &= | < w-y, x > + < y, x-z > | \\ &\leq \|w-y\|_2\|x\|_2 + \|y\|_2\|x-z\|_2 \end{aligned}$$

□

Lemma 87 *(Parallelogrammgleichung) Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn für alle $x, y \in X$*

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$$

gilt, d.h. es gibt auf X ein Skalarprodukt $<,>$, so dass für alle $x \in X$

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Beweis. Falls X ein Prähilbertraum ist, so gilt

$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 =< x+y, x+y > + < x-y, x-y >= 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$

Wir zeigen die Umkehrung für den Fall reeller Zahlen. Das Skalarprodukt definieren wir als

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Damit gilt

$$\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$$

und wir weisen nach, dass wir auf diese Weise ein Skalarprodukt definiert haben. Wir beobachten, dass $< 0, z >= 0$ und $< x, z >=< z, x >$.

$$\begin{aligned} < 2x, z > \quad &= \frac{1}{4}(\|2x+z\|^2 - \|2x-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x+(x+z)\|^2 - \|x+(x-z)\|^2) \end{aligned}$$

Mit der Parallelogrammgleichung folgt

$$\begin{aligned} < 2x, z > \quad &= \frac{1}{4}(2\|x\|^2 + 2\|x+z\|^2 - \|z\|^2) - \frac{1}{4}(2\|x\|^2 + 2\|x-z\|^2 - \|z\|^2) \\ &= 2 < x, z > \end{aligned}$$

Durch Induktion erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$< nx, z >= n < x, z >$$

Nun der Induktionsschritt

$$\begin{aligned} < (n+1)x, z > \quad &= \frac{1}{4}\{\|(n+1)x+z\|^2 - \|(n+1)x-z\|^2\} \\ &= \frac{1}{4}\{\|x+(nx+z)\|^2 - \|x+(nx-z)\|^2\} \end{aligned}$$

Mit der Parallelogramm-Gleichung

$$\begin{aligned} < (n+1)x, z > \quad &= \frac{1}{4}\{2\|x\|^2 + 2\|nx+z\|^2 - \|(n-1)x+z\|^2\} \\ &-\frac{1}{4}\{2\|x\|^2 + 2\|nx-z\|^2 - \|(n-1)x-z\|^2\} \\ &= \frac{1}{4}\{2\|nx+z\|^2 - 2\|nx-z\|^2\} \\ &-\frac{1}{4}\{\|(n-1)x+z\|^2 - \|(n-1)x-z\|^2\} \\ &= 2 < nx, z > -(n-1) < x, z >= (n+1) < x, z > \end{aligned}$$

Wiederum durch Induktion erhalten wir für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$< \tfrac{n}{m}x, z >= \tfrac{n}{m} < x, z >$$

Da $<,>$ stetig ist, folgt für alle $t \in \mathbb{R}_+$, dass $< tx, z >= t < x, z >$.

$$\begin{aligned} < x+y, z > \quad &= \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2) \\ &-\frac{1}{4}(2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y-z\|^2) \\ &= 2 < x, z > - < x-y, z > \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$< x+y, z > + < x-y, z >=< 2x, z >$$

Für beliebige $u, v \in X$ setzen wir $u = x + y$ und $v = x - y$ und erhalten dann

$$< u, z > + < v, z >=< u+v, z >$$

Damit ergibt sich insbesondere

$$< -x, z >= - < x, z >$$

□

Wir sagen, dass zwei Vektoren $x, y \in H$ orthogonal sind, falls $< x, y >= 0$ gilt. Allgemeiner sagt man, dass zwei Teilmengen A und B orthogonal sind, wenn für alle $x \in A$ und $y \in B$

$$< x, y >= 0$$

gilt.In Hilberträumen gilt der Satz von Pythagoras: Falls $x, y \in H$ zwei orthogonale Vektoren sind, dann

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Satz 22 *(i) Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn alle zweidimensionalen Unterräume isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Norm sind.*
(ii) Unterräume von Prähilberträumen sind Prähilberträume.
(iii) Die Vervollständigung eines Prähilbertraumes ist ein Hilbertraum.

Beweis. (i) Falls jeder zweidimensionale Unterraum isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Norm ist, dann gilt für alle $x, y \in X$ die Parallelogrammgleichung. Nach Lemma **??** ist X damit ein Prähilbertraum. $\square$

Lemma 88 *Es sei H ein Hilbertraum, K sei eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H und $x_0 \in H$. Dann existiert genau ein $x \in K$ mit*

$$\|x - x_0\|_H = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|_H$$

Beweis. Falls $x_0 \in K$, so muss $x = x_0$.

Falls $x_0 \notin K$, dann gibt es eine Folge $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\lim_{n \to \infty} \|x_0 - x_n\|_H = \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|_H$$

Wir können annehmen, dass $x_0 = 0$. Wir zeigen, dass x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist. Aus der Parallelogrammgleichung folgt

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_H^2 + \left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|_H^2 = \tfrac{1}{2}(\|x_n\|_H^2 + \|x_m\|_H^2)$$

und damit

$$\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|_H^2 = \tfrac{1}{2}(\|x_n\|_H^2 + \|x_m\|_H^2) - \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_H^2$$

Außerdem gilt

$$\tfrac{1}{2}(x_n + x_m) \in K$$

weil K konvex ist. Damit folgt

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_H^2 \geq (\inf_{y \in K} \|y\|_H)^2$$

Es folgt

$$\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|_H^2 \leq \tfrac{1}{2}(\|x_n\|_H^2 + \|x_m\|_H^2) - (\inf_{y \in K} \|y\|_H)^2$$

Die rechte Seite strebt gegen 0. Also ist x_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy Folge. Da H vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Grenzwert z. Da K abgeschlossen ist, gilt $z \in K$ und

$$\|x_0 - z\|_H = \|z\|_H = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_H = \inf_{y\in K} \|y\|_H$$

Damit haben wir einen Punkt z konstruiert, für den das Infimum angenommen wird. Wir zeigen nun, dass dieser Punkt eindeutig ist. Falls nämlich zwei Punkte z und $\bar{z}$ existierten, für die das Infimum angenommen wird,

$$\left\|\frac{z+\bar{z}}{2}\right\|_H^2 < \left\|\frac{z+\bar{z}}{2}\right\|_H^2 + \left\|\frac{z-\bar{z}}{2}\right\|_H^2$$

Es folgt mit der Parallelogrammgleichung

$$\left\|\frac{z+\bar{z}}{2}\right\|_H^2 < \tfrac{1}{2}\|z\|_H^2 + \tfrac{1}{2}\|\bar{z}\|_H^2 = (\inf_{y\in K} \|x_0 - y\|_H)^2$$

Das kann nicht sein, weil

$$\frac{z+\bar{z}}{2} \in K$$

□

Es sei U ein Unterraum eines Hilbertraumes H. Dann bezeichnen wir

$$U^\perp = \{x \in H |\ \forall y \in U :< x, y >= 0\}$$

als Orthogonalraum von U. Es gilt $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Man beachte, dass wir dasselbe Symbol bei Banachräumen für einen ähnlichen Begriff verwenden. Diese Begriffe sind auseinanderzuhalten.

Lemma 89 *Es sei H ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Dann existiert eine lineare Projektion auf H, deren Bild U ist und deren Norm 1 ist.*

Der Kern dieser Projektion ist $U^\perp$ und es gilt, dass H isometrisch isomorph zu

$$U \bigoplus U^\perp$$

mit der Norm $\|x+y\|_H = (\|x\|_U^2 + \|y\|_{U^\perp}^2)^{\frac{1}{2}}$ ist.

Die in Lemma 89 gegebene Projektion heißt Orthogonalprojektion. Wir zeigen also insbesondere, dass in einem Hilbertraum jeder abgeschlossene Teilraum komplementiert ist. Es gibt keine weiteren Banachräume, für die dies gilt. Ein Raum ist genau dann isomorph zu einem Hilbertraum, wenn alle abgeschlossenen Teilräume komplementiert sind.

Beweis. Wir zeigen, dass es für jedes $x \in H$ genau eine Darstellung $x = y+z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$ gibt. Nach Lemma 88 gibt es zu jedem $x \in H$ genau ein $y \in U$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{u \in U} \|x - u\|$$

Wir zeigen nun, dass $x - u \in U^\perp$. Wir betrachten für gegebenes $w \in U$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \|(x - y) + tw\|^2$$

f nimmt für $t = 0$ ein globales Minimum an, weil

$$\|x - y\| = \inf_{u \in U} \|x - u\| \leq \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x - y + tw\| \leq \|x - y\|$$

Wegen

$$f(t) =< x - y + tw, x - y + tw >= \|x - y\|^2 + 2t < x - y, w > +t^2\|w\|^2$$

ist f ein quadratisches Polynom. Da f in 0 ein Minimum hat, gilt $f'(0) = 0$.

$$f'(t) = 2 < x - y, w > +2t\|w\|^2$$

und somit $0 = f'(0) = 2 < x - y, w >$. Da dies für alle $w \in U$ gilt, folgt $x - y \in U^\perp$. Also gibt es eine Darstellung $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$. Wir nehmen nun an, dass es zwei verschiedene Darstellungen gibt, $x = y + z$ und $x = \bar{y} + \bar{z}$. Dann

$$y - \bar{y} = \bar{z} - z$$

Es folgt

$$\|y - \bar{y}\|^2 =< y - \bar{y}, y - \bar{y} >=< \bar{z} - z, y - \bar{y} >= 0$$

Also $y = \bar{y}$ und damit auch $z = \bar{z}$.

Es sei $y \in U$ und $z \in U^\perp$. Dann

$$\|y + z\|^2 =< y + z, y + z >=< y, y > +2 < y, z > + < z, z >= \|y\|^2 + \|z\|^2$$

Als Projektion wählen wir $P : H \to H$ mit $P(y+z) = y$, wobei $y \in U$ und $z \in U^{\perp}$. Dann gilt

$$\|P\| = \sup_{\|y+z\|=1} \|P(y+z)\| = \sup_{\|y\|^2+\|z\|^2=1} \|y\| = 1$$

□

Satz 23 *(Darstellungssatz von Frechet-Riesz) Es sei H ein Hilbertraum und H^* sein Dualraum. Dann ist die Abbildung $\phi : H \to H^*$, die durch*

$$\forall x, y \in H : \quad \phi(y)(x) =< x, y >$$

gegeben ist, bijektiv, isometrisch und konjugiert linear ($\phi(ty) = \bar{t}\phi(y)$).

Aus dem Satz folgt, dass ein Hilbertraum reflexiv ist. Außerdem ist der Dualraum eines Hilbertraumes isometrisch isomorph zum Hilbertraum. Diese Eigenschaft wird allerdings von anderen Räumen auch erfüllt. Die Räume $(\ell^p \bigoplus \ell^{p^*})_2$ mit $1 < p < \infty$ und der Norm

$$\|(x, y)\| = (\|x\|_p^2 + \|y\|_{p^*}^2)^{\frac{1}{2}}$$

haben auch diese Eigenschaft.

Beweis. Wir zeigen, dass ϕ eine Isometrie ist. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$\|\phi(y)\|_{H^*} = \sup_{\|x\|_H \leq 1} (\phi(y))(x) = \sup_{\|x\|_H \leq 1} < x, y > \leq \sup_{\|x\|_H \leq 1} \|x\|_H \, \|y\|_H = \|y\|_H$$

Außerdem gilt

$$\|\phi(y)\|_{H^*} = \sup_{\|x\|_H \leq 1} (\phi(y))(x) = \sup_{\|x\|_H \leq 1} < x, y > \geq \left\langle \frac{y}{\|y\|_H}, y \right\rangle = \|y\|_H$$

Also ist ϕ eine Isometrie. Wir zeigen nun, dass ϕ auch surjektiv ist. Wir müssen also zeigen, dass zu jedem Funktional $x^* \in H^*$ ein $y \in H$ existiert, so dass für alle $x \in H$

$$x^*(x) =< x, y >$$

gilt. Das 0-Funktional wird durch $y = 0$ dargestellt. Es sei nun $x^* \neq 0$. Wir setzen

$$Y = \{x | x^*(x) = 0\}$$

Y ist ein abgeschlossener Teilraum, weil x^* stetig ist. Außerdem gilt $Y \neq X$. Nach Lemma 89 gibt es ein $z \in Y^\perp$ mit $\|z\| = 1$. Wir behaupten, dass für alle $x \in H$

$$x^*(x) =< x, \overline{x^*(z)}z > .$$

Dazu beobachten wir, dass

$$x^*(x)z - x^*(z)x \in Y$$

Dies folgt aus

$$x^*(x^*(x)z - x^*(z)x) = 0$$

Deshalb gilt

$$< x^*(x)z - x^*(z)x, z >= 0$$

und somit

$$x^*(x) = x^*(z) < x, z >$$

□

Eine Teilmenge S eines Hibertraumes H heißt Orthonormalsystem, falls für allle $e \in S$ gilt, dass $\|e\|_H = 1$, und falls für alle $e, f \in S$ mit $e \neq f$ gilt, dass $< e, f >= 0$.

Ein Orthonormalsystem heißt vollständig, wenn es kein größeres gibt. Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt auch Orthonormalbasis.

Lemma 90 *Jeder Hilbertraum hat ein vollständiges Orthonormalsystem.*

Dieses Lemma folgt aus dem Lemma von Zorn. Der Beweis wird genauso geführt wie der Beweis zur Existenz einer Basis in einem Vektorraum.

Mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt kann man eine Anzahl Vektoren in orthonormale transformieren.

Beispiel 30 *(i) Die Menge*

$$e_n, n \in \mathbb{N}$$

ist ein vollständiges Orthonormalsystem in ℓ^2.

(ii) Die Menge, die aus der konstanten Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und den Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \qquad n \in \mathbb{N}$$

ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2[0, 2\pi]$.

Beweis. (i) Wegen

$$< e_n, e_m >= \sum_{i=1}^{\infty} e_n(i)e_m(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases}$$

ist die Folge e_n, $n \in \mathbb{N}$, ein Orthonormalsystem. Wir zeigen nun, dass es auch vollständig ist. Es sei x ein von 0 verschiedener Vektor. Dann gibt es eine Koordinate x_k, die von 0 verschieden ist. Deshalb

$$< e_k, x >= \bar{x}_k \neq 0$$

□

Lemma 91 *(Bessel-Ungleichung) Es sei H ein Hilbertraum und x_n, $n \in \mathbb{N}$, ein Orthonormalsystem in H. Dann gilt für alle $x \in H$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, x_n > |^2 \leq \|x\|_H^2$$

Beweis. Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $x \in H$. Wir setzen $x_N = x - \sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n$. Dann sind x_N und $\sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n$ orthogonal:

$$\left\langle x_N, \sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n \right\rangle = \left\langle x - \sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n, \sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n \right\rangle = 0$$

Nun können wir den Satz von Pythagoras anwenden.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x_N\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n \right\|^2 \\ &= \|x_N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} | < x, e_n > |^2 \geq \sum_{n=1}^{N} | < x, e_n > |^2 \end{aligned}$$

Nun gehen wir auf der rechten Seite zum Limes über. □

Lemma 92 *Es sei H ein Hilbertraum und e_n, $n \in \mathbb{N}$, ein Orthonormalsystem. Dann konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$$

für alle $x \in H$ in der Norm.

Beweis. Wir zeigen, dass $\sum_{n=1}^{N} < x, e_n > e_n$, $N \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge ist. Aus Lemma 91 folgt, dass $\sum_{n=1}^{N} | < x, e_n > |^2$, $N \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge ist. Da die e_n orthonormal sind, gilt

$$\left\| \sum_{n=M}^{N} < x, e_n > e_n \right\|^2 = \sum_{n=M}^{N} | < x, e_n > |^2$$

□

Satz 24 *Es sei H ein Hilbertraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*
(i) e_n, $n \in \mathbb{N}$, ist ein vollständiges Orthonormalsystem.
(ii) Für alle $x \in H$ gilt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$$

(iii) Für alle $x, y \in H$ gilt

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >< e_n, y >$$

(iv) Für alle $x \in H$ gilt

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2$$

(iv) wird als Parseval-Gleichung bezeichnet. Der Satz lässt sich auch für überabzählbare Orthonormalsysteme formulieren.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Wir zeigen $\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$. Wir nehmen an, dass es ein $x \in H$, gibt, so dass $x \neq \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$. Man beachte, dass nach Lemma 92 die unendliche Summe in H konvergiert. Dann ist

$$x - \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$$

zu allen e_n, $n \in \mathbb{N}$, orthogonal. Wir prüfen dies nach. Nach Lemma 86 ist das Skalarprodukt bezüglich der Norm stetig. Deshalb gilt

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n, e_k \right\rangle =< x, e_k > - \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >< e_n, e_k >= 0$$

Dann ist das Orthonormalsystem nicht vollständig.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es gelten

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n \qquad\qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} < y, e_k > e_k$$

Es folgt

$$< x, y >= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n, \sum_{k=1}^{\infty} < y, e_k > e_k \right\rangle$$

Nach Lemma 86 ist das Skalarprodukt bezüglich der Norm stetig. Es folgt

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >< e_n, y >$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Wir setzen $x = y$. $\square$

Korollar 11 *ℓ^2 und $L^2[0, 2\pi]$ sind isometrisch isomorph.*

Chapter 4

Spektraltheorie

4.1 Das Spektrum beschränkter Operatoren

Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein linearer Operator. λ ist Eigenwert von T, wenn es einen Vektor $x \neq 0$ mit $T(x) = \lambda x$ gibt. Ein Vektor $x \neq 0$ heißt Eigenvektor von T, wenn es ein λ mit $T(x) = \lambda x$ gibt.

Wenn I die identische Abbildung auf X bezeichnet, dann ist es üblich für $\lambda I - T$ auch $\lambda - T$ zu schreiben. Es liegt genau dann ein Eigenwert λ vor, wenn $\lambda - T$ nicht injektiv ist. Falls X endlichdimensional ist, dann ist dies dazu äquivalent, dass $\lambda - T$ nicht surjektiv ist.

Falls X endlich dimensional ist und $T = T^*$ gilt, dann gibt es eine Basis von X, die aus Eigenvektoren besteht, und die Matrix zu T ist bzgl. dieser Basis eine Diagonalmatrix.

Eigenvektoren sind in vielen Bereichen der Mathematik wichtig. Beim Lösen von Differentialgleichungen können sie sehr hilfreich sein, hier nennt man sie Eigenfunktionen. Ein gutes Beispiel in diesem Zusammenhang ist die Wellengleichung.

Die Resolventenmenge von T ist

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} | \lambda - T \text{ ist ein stetiger Isomorphismus}\}$$

Wir fordern also, dass $\lambda - T$ bijektiv ist und die Inverse $(\lambda - T)^{-1}$ stetig ist. Da X ein Banachraum ist, reicht es wegen des Satzes von der offenen Abbildung zu fordern, dass $\lambda - T$ bijektiv ist. Die Resolventenabbildung $R : \rho(T) \to L(X)$ ist durch

$$R_\lambda(T) = (\lambda - T)^{-1}$$

definiert. Das Spektrum von T ist die Menge $\sigma(T) = \mathbb{K}\backslash\rho(T)$. Das Spektrum ist in die folgenden Teilmengen unterteilt. Das Punktspektrum ist

$$\sigma_p(T) = \{\lambda | \lambda - T \text{ ist nicht injektiv}\}$$

Das stetige Spektrum ist

$$\sigma_c(T) = \{\lambda | \lambda - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, mit dichtem Bild}\}$$

Das Restspektrum ist

$$\sigma_r(T) = \{\lambda | \lambda - T \text{ ist injektiv, kein dichtes Bild}\}$$

Es gilt

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

Die Inklusion $\sigma(T) \supseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ ist offensichtlich. Die umgekehrte Inklusion folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung (Korollar 10): $\lambda - T$ ist genau dann ein stetiger Isomorphismus, wenn $\lambda - T$ stetig und bijektiv ist. Da aber die Stetigkeit von T vorausgesetzt wird, reicht es die Bijektivität von $\lambda - T$ nachzuprüfen.

Lemma 93 *Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein stetiger, linearer Operator. Dann gilt $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.*

Beweis. Nach Lemma 72 ist $\lambda - T$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $(\lambda - T)^* = \lambda - T^*$ ein Isomorphismus ist. □

Wir bezeichnen

$$r(T) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

als Spektralradius von T. Für $n = 1$ ergibt sich hieraus $r(T) \leq \|T\|$. Deshalb ist der Spektralradius endlich.

Lemma 94

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Um dieses Lemma zu zeigen, brauchen wir das folgende.

Lemma 95 *Es sei a_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$*

$$0 < a_{n+m} \leq a_n a_m$$

gilt. Dann gilt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Beweis. Wir wählen N, so dass

$$\sqrt[N]{a_N} \leq \epsilon + \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$$

(Falls das Infimum angenommen wird, dann wählen wir dieses N. Falls das Infimum nicht angenommen wird, dann wählen wir N hinreichend groß.) Wir können jede Zahl n als $n = kN + r$ mit $r < N$ schreiben.

$$\sqrt[n]{a_n} = (a_{kN+r})^{\frac{1}{n}} \leq \left((a_N)^k a_r\right)^{\frac{1}{n}} \leq (\epsilon + \inf_{\ell\in\mathbb{N}} \sqrt[\ell]{a_\ell})^{\frac{kN}{n}} (\max_{1\leq i\leq N} a_i)^{\frac{1}{n}}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $\frac{kN}{n}$ gegen 1 und $\frac{1}{n}$ gegen 0. □

Beweis. Die Folge der reellen Zahlen $\|T^n\|$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 95. □

Man beachte im Folgenden, dass T^0 die identische Abbildung ist.

Satz 25 *Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein stetiger, linearer Operator.*
(i) Für alle λ mit $|\lambda| > r(T)$ gilt

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n .$$

(ii) Für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt

$$|\lambda| \leq r(T)$$

Beweis. (i) Wir zeigen, dass $(\lambda - T)^{-1}$ existiert, falls $r(T) < |\lambda|$. Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung der von Neumann Reihe (Lemma 63) Falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right\|$$

konvergiert, dann gilt

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n .$$

Wir weisen dies nach. Aus der absoluten Konvergenz folgt, dass

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

in $L(X)$ konvergiert, weil $L(X)$ vollständig ist. Wegen

$$(\lambda - T)\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = I - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}$$

gilt

$$I = (\lambda - T)\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

Also gilt

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

Um die absolute Konvergenz sicherzustellen reicht

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right\|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Dies gilt jedoch, wenn $|\lambda| > r(T)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|\lambda|} \limsup_{n\to\infty} \|(T)^n\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|\lambda|} \lim_{n\to\infty} \|(T)^n\|^{\frac{1}{n}} = \frac{r(T)}{|\lambda|}$$

□

Lemma 96 *(i) Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen.*
(ii) Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt.

Beweis. (i) Es sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Wir zeigen, dass dann auch alle λ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \left\|(\lambda_0 - T)^{-1}\right\|^{-1}$$

zu $\rho(T)$ gehören. Es gilt

$$\lambda - T = (\lambda_0 - T) + (\lambda - \lambda_0) = (\lambda_0 - T)\left(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right) \tag{4.1}$$

Nach Lemma 63 ist $I - S$ invertierbar, wenn $\|S\| < 1$.

(ii) Wegen (i) ist das Spektrum eine abgeschlossene Menge und wegen Satz 25 ist das Spektrum eine beschränkte Menge. □

Lemma 97 *(i) Die Resolventenabbildung ist analytisch, sie wird lokal durch eine Potenzreihe dargestellt, deren Koeffizienten stetige, lineare Operatoren sind. Für alle λ_0 und λ in $\rho(T)$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|^{-1}$ gilt*

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n ((\lambda_0 - T)^{-1})^{n+1}$$

(ii) Falls X ein Vektorraum über den komplexen Zahlen ist, dann $\sigma(T) \neq \emptyset$.

(iii) Falls X ein Vektorraum über den komplexen Zahlen ist, dann gibt es ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$.

Beweis. (i) Aus (4.1) folgt

$$(\lambda - T)^{-1} = (\lambda_0 - T)^{-1}\left(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right)^{-1}$$

Wegen Lemma **??** gilt für S mit $\|S\| < 1$

$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$$

Deshalb erhalten wir mit $S = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}$

$$(\lambda - T)^{-1} \quad = (\lambda_0 - T)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n ((\lambda_0 - T)^{-1})^n$$

(ii) Wir nehmen an, dass $\sigma(T) = \emptyset$. Dann ist die Resolventenabbildung in jedem Punkt von $\mathbb{C}$ analytisch. Wir wollen nun den Satz von Liouville für ganze Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ anwenden. Es sei $\phi \in L(X)^*$. Dann ist

$$\phi((\lambda - T)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \phi(((\lambda_0 - T)^{-1})^{n+1})$$

eine in jedem Punkt analytische, komplexwertige Funktion. Die Funktion ist auch beschränkt. Es gilt nämlich für alle $|\lambda| > 2\|T\|$

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n \tag{4.2}$$

und somit

$$|\phi((\lambda - T)^{-1})| = \left|\phi\left(\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda})^{-1}\right)\right)\right| \leq \|\phi\|\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n \leq \frac{\|\phi\|}{\|T\|}$$

Nach dem Satz von Liouville ist die Funktion $\phi((\lambda - T)^{-1})$ konstant. Insbesondere sind alle Koeffizienten in den Potenzreihenentwicklungen bis auf den ersten 0. Für $\lambda_0 = 0$ und $n = 1$ ergibt sich, dass für alle $\phi \in L(X)^*$ die Gleichung $\phi(T^{-2}) = 0$ gelten muss (Wir schreiben T^{-2} für $(T^{-1})^2$.). Nach Korollar 5 muss dann $T^{-2} = 0$ gelten. Dies ist nicht wahr, weil, weil T^{-1} und damit auch T^{-2} ein Isomorphismus ist (mit der Inversen T^2).

(iii) Nach Satz 25 gilt für alle λ mit $|\lambda| > r(T)$

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n.$$

Deshalb ist für jedes Funktional ϕ und alle λ mit $|\lambda| > r(T)$

$$\phi\left(\lambda(\lambda - T)^{-1}\right) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi(T^n)\lambda^{-n}$$

analytisch. Dies folgt aus

$$\limsup_{n\to\infty}|\phi(T^n)|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty}\|\phi\|^{\frac{1}{n}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T).$$

Die Laurententwicklung konvergiert in dem größten Kreisring, der in dem Holomorphiegebiet enthalten ist. Deshalb konvergiert die Laurentreihe für

alle μ mit $|\mu| > \sup\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(T)\}$. Die Reihe konvergiert für jedes μ mit $|\mu| > \sup\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(T)\}$ sogar absolut

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi(T^n)\mu^{-n}| < \infty.$$

Es folgt, dass für alle ϕ eine Konstante C_ϕ existiert, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \phi\left(\frac{T^n}{\mu^n}\right) \right| \leq C_\phi$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 21) gibt es eine Konstante C, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{T^n}{\mu^n} \right\| \leq C$$

(Wenn wir den Satz von Banach-Steinhaus anwenden, fassen wir $\frac{T^n}{\mu^n}$ als Elemente des Bidualraums $L(X)^{**}$ auf.) Hieraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|T^n\| \leq C\mu^n$$

Dies impliziert

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}}\mu$$

Deshalb $r(T) \leq \mu$. $\square$

Beispiel 31 *(i) Falls X endlich-dimensional ist, dann ist $\sigma(T)$ gleich der Menge der Eigenwerte.*

(ii) Es sei $S : \ell^1 \to \ell^1$ durch $S(x(1), x(2), \dots) = (x(2), x(3), \dots)$ definiert. S wird als Shiftoperator bezeichnet. Es gilt

$$\sigma_p(S) = (-1, 1) \qquad \sigma_c(S) = \{-1, 1\} \qquad \sigma_r(S) = \emptyset$$

und der Spektralradius von S ist 1.

Die adjungierte Abbildung $S^* : \ell^\infty \to \ell^\infty$ ist durch $S^*(y(1), y(2), \dots) = (0, y(1), y(2), \dots)$ gegeben. Es gilt

$$\sigma_p(S^*) = \emptyset \qquad \sigma_c(S^*) = \emptyset \qquad \sigma_r(S^*) = [-1, 1]$$

(iii) Es sei $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ durch

$$Tf(s) = \int_0^s f(t)dt$$

gegeben. Dann gilt

$$\sigma_p(T) = \emptyset \qquad \sigma_c(T) = \emptyset \qquad \sigma_r(T) = \{0\}$$

(iv) Es sei X der Teilraum von $C[0,1]$ mit $f(0) = 0$ und T dieselbe Abbildung wie in (iii). Dann gilt

$$\sigma_p(T) = \emptyset \qquad \sigma_c(T) = \{0\} \qquad \sigma_r(T) = \emptyset$$

(v) Es sei X der Raum aller beschränkten Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die in 0 und 1 stetig sind und $f(0) = 0$ erfüllen. X sei mit der Supremumsnorm ausgestattet. Es sei $T : X \to X$ durch $(Tf)(t) = tx(t)$ definiert. Dann gilt

$$\sigma_p(T) = (0,1) \qquad \sigma_c(T) = \{0\} \qquad \sigma_r(T) = \{1\}$$

Beweis. (i) Falls X endlich-dimensional ist, dann folgt aus der Injektivität die Surjektivität.

(ii) Nach Satz 25 gilt $\sigma(S) \subseteq [-1,1]$, weil $\|S\| = 1$. Für $|\lambda| < 1$ ist $\lambda - S$ nicht injektiv.

$$0 = (\lambda - S)x = (\lambda x(1) - x(2), \lambda x(2) - x(3), \dots)$$

gilt genau dann, wenn für alle $i = 1, 2, \dots$

$$\lambda x(i) = x(i+1)$$

Es folgt $x = x(1)(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$. Da $x \in \ell^1$, folgt $|\lambda| < 1$.

1 und -1 liegen im stetigen Spektrum. Wir weisen dies für den Wert 1 nach. y liegt im Bild von $I - S$, wenn es ein x mit $y = (I - S)x$ bzw.

$$y(i) = x(i) - x(i+1)$$

Dies bedeutet für alle $i = 1, 2, \dots$

$$x(i) = \sum_{k=i}^{\infty} y(k)$$

(Da $y \in \ell^1$, sind die $x(i)$ wohldefiniert.) Wenn wir $y(i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ wählen, dann erhalten wir $x(i) = \frac{1}{i}$. Diese Folge ist aber kein Element von ℓ^1.

Das Bild von $I - S$ liegt in ℓ^1 dicht, weil wir alle Vektoren mit höchstens endlich vielen von 0 verschiedenen Koordinaten im Bild liegen. Um wiederum dies einzusehen, reicht es zu zeigen, dass die Einheitsvektoren e_i, $i \in \mathbb{N}$,

$$e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = k \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq k \end{cases}$$

im Bild liegen. Dazu betrachten wir die Vektoren $z_n = (1, \dots, 1, 0, \dots)$, bei denen die ersten n Koordinaten 1 sind und die folgenden 0. Es gilt

$$e_n = (I - S)z_n$$

Nun berechnen wir das Spektrum von S^*. Wegen Lemma 93 wissen wir bereits, dass $\sigma(S) = \sigma(S^*)$. $(\lambda - S^*)$ ist für alle λ injektiv. Es gilt

$$0 = (\lambda - S^*)x = (\lambda x(1), \lambda x(2) - x(1), \lambda x(3) - x(2), \dots)$$

genau dann, wenn $\lambda x(1) = 0$ und für $i = 1, 2, \dots$

$$\lambda x(i+1) - x(i) = 0$$

gelten. Falls $\lambda = 0$, dann erhalten wir $x = 0$ und ebenso falls $\lambda \neq 0$. Damit ist $\lambda - S^*$ für alle λ injektiv und $\sigma_p(S^*) = \emptyset$.

Für alle λ mit $|\lambda| \leq 1$ gilt $\lambda \in \sigma_r(T)$. Falls $\lambda = 0$, dann ist $\lambda - S^* = -S^*$ nicht surjektiv und das Bild ist auch nicht dicht, weil die erste Koordinate jedes Bildvektors gleich 0 ist. Also gilt $0 \in \sigma_r(T)$.

y liegt im Bild von $\lambda - S^*$, falls es ein x mit

$$\begin{aligned} \lambda x(1) &= y(1) \\ \lambda x(i+1) - x(i) &= y(i+1) \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$x(i) = \sum_{k=1}^{i} \frac{y(k)}{\lambda^{i-k+1}}$$

Falls $0 < \lambda \leq 1$, dann liegt die Menge der Vektoren

$$\{y \in \ell^\infty | \forall i \in \mathbb{N} : y(i) \geq 1\}$$

nicht im Bild. Falls ein solches y im Bild liegen würde, dann folgt

$$x(i) = \sum_{k=1}^{i} \frac{y(k)}{\lambda^{i-k+1}} \geq \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{\lambda^{i-k+1}} \geq i$$

Dann kann x aber nicht Element von ℓ^∞ sein.

Falls $-1 \leq \lambda < 0$, dann liegt die Menge der Vektoren

$$\{y \in \ell^\infty | \forall i \in \mathbb{N} : (-1)^i y(i) \geq 1\}$$

nicht im Bild. Falls ein solches y im Bild liegen würde, dann folgt für alle ungeraden i

$$\begin{aligned} x(i) &= \sum_{k=1}^{i} \frac{y(k)}{\lambda^{i-k+1}} = \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i-k+1} \frac{y(k)}{|\lambda|^{i-k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \frac{y(k)}{|\lambda|^{i-k+1}} \geq \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{|\lambda|^{i-k+1}} \geq i \end{aligned}$$

Dann kann x aber nicht Element von ℓ^∞ sein.

(iii) Wir zeigen, dass $0 \in \sigma_r(T)$.Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist T injektiv. T hat kein dichtes Bild, weil $Tf(0) = 0$.

Nun betrachten wir $\lambda \neq 0$. Wir zeigen, dass es zu jedem g genau ein f mit

$$\lambda f - Tf = g$$

gibt. Zunächst die Injektivität. Es gelte $\lambda f - Tf = 0$, d.h.

$$\lambda f(s) = \int_0^s f(t)dt$$

Es folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass f stetig differenzierbar ist. Deshalb gilt $\lambda f' = f$ mit $f(0) = 0$. Diese Differentialgleichung hat eine eindeutige Lösung.

Nun die Surjektivität. Zu gegebenem g wählen wir

$$f(s) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^s g(t)e^{\frac{s-t}{\lambda}}dt + \frac{1}{\lambda}g(s) = \frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{s}{\lambda}}\int_0^s g(t)e^{\frac{-t}{\lambda}}dt + \frac{1}{\lambda}g(s)$$

Mittels partieller Integration weisen wir nach, dass $\lambda f - Tf = g$ gilt.

$$\lambda f - Tf = \frac{1}{\lambda}e^{\frac{s}{\lambda}}\int_0^s g(t)e^{\frac{-t}{\lambda}}dt + g(s) - \int_0^s \frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{r}{\lambda}}\int_0^r g(t)e^{\frac{-t}{\lambda}}dt + \frac{1}{\lambda}g(r)dr$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^s \frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{r}{\lambda}}\int_0^r g(t)e^{\frac{-t}{\lambda}}dtdr = \frac{1}{\lambda}e^{\frac{s}{\lambda}}\int_0^s g(t)e^{\frac{-t}{\lambda}}dt - \frac{1}{\lambda}\int_0^s g(t)dt$$

(v) Man sieht sofort, dass $\|T\| = 1$. Nach Satz 25 folgt, dass $\sigma(T) \subseteq [-1, 1]$.

Falls $\lambda \notin [0, 1]$, dann definiert

$$((\lambda - T)^{-1}f)(t) = \frac{1}{\lambda - t}f(t)$$

den zu $\lambda - T$ inversen Operator.

Für $\lambda \in (0, 1)$ ist $\lambda - T$ nicht injektiv, weil

$$\lambda\chi_{\{\lambda\}} = T\chi_{\{\lambda\}}.$$

Also gilt $(0, 1) \subseteq \sigma_p(T)$. Nun betrachten wir $\lambda = 0$. T ist injektiv, weil $0 = Tf(t) = tf(t)$ für $t \neq 0$ impliziert, dass $f(t) = 0$. Alle Funktionen des Raumes erfüllen $f(0) = 0$. Also ist T injektiv. T ist nicht surjektiv, weil die Wurzelfunktion nicht im Bild liegt. Wir weisen dies nach.

$$\sqrt{t} = Tf(t) = tf(t)$$

impliziert

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Damit wäre f aber keine beschränkte Funktion. T hat aber dichtes Bild: Es sei $f \in X$ gegeben. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir δ, so dass für alle t mit $0 \leq t \leq \delta$ die Ungleichung $|f(t)| \leq \epsilon$. Nun setzen wir

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \delta] \\ \dfrac{f(t)}{t} & t \in (\delta, 1] \end{cases}$$

Es gilt $\|Tf_\epsilon - f\| \leq \epsilon$. Also gilt $0 \in \sigma_r(T)$.

Nun betrachten wir $\lambda = 1$. $I - T$ ist injektiv. $f = Tf$ bedeutet

$$f(t) = tf(t)$$

Falls $t < 1$, dann folgt $f(t) = 0$. Wegen der Stetigkeit in 1 folgt $f(1) = 0$. Also ist $I - T$ injektiv. $I - T$ hat kein dichtes Bild, weil $(I - T)f(1) = 0$. $\square$

4.2 Das Spektrum kompakter Operatoren

Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen heißt kompakt, wenn das Bild $T(\overline{B_X})$ der abgeschlossenen Einheitskugel relativ kompakt ist, wenn also der Abschluss von $T(\overline{B_X})$ kompakt ist.

Ein Operator $S : X \to X$, dessen Kern endlich-dimensional ist, dessen Bild abgeschlossen ist und für den der Quotientenraum $X/\text{Bild}(S)$ endlich-dimensional ist, heißt Fredholm Operator.

Satz 26 *(Riesz-Schauder) Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Dann gelten*
(i) Der Kern von $I - T$ ist endlich-dimensional.
(ii) Der Operator $I - T$ hat abgeschlossenes Bild und $X/\text{Bild}(I - T)$ ist endlich-dimensional.

Beweis. (i) Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge in $\text{Kern}(I - T)$. Weil T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $T(x_{n_k})$, $k \in \mathbb{N}$, die in X konvergiert. Wegen

$$0 = (I - T)x_{n_k} = x_{n_k} - Tx_{n_k}$$

gilt $x_{n_k} = Tx_{n_k}$ und somit konvergiert x_{n_k}. Da $\text{Kern}(I-T)$ abgeschlossen ist, konvergiert diese Folge auch in diesem Teilraum. Also ist die Einheitskugel von $\text{Kern}(I - T)$ kompakt und somit $\text{Kern}(I - T)$ nach Lemma 39 endlich-dimensional.

(ii) Wir zeigen, dass das Bild von $I-T$ abgeschlossen ist. Wir betrachten die Faktorisierung von $I-T$ durch den Raum $X/\operatorname{Kern}(I-T)$. Wir definieren den Operator $\widehat{I-T} : X/\operatorname{Kern}(I-T) \to X$ durch

$$\widehat{I-T}([x]) = (I - T)(x)$$

Wir überzeugen uns davon, dass $\widehat{I-T}$ wohldefiniert ist, d.h. dass $(I-T)(x)$ nicht vom Repräsentanten der Klasse $[x]$ abhängt. Falls $y, z \in [x]$, dann gilt $(I - T)(y) = (I - T)(z)$.

Weiter gilt $I - T = \widehat{I-T} \circ q$, wobei $q : X \to X/\operatorname{Kern}(I - T)$ die Quotientenabbildung ist, $q(x) = [x]$. $\widehat{I-T}$ ist injektiv und stetig. Zunächst zeigen wir, dass $\widehat{I-T}$ injektiv ist. Falls

$$\widehat{I-T}([x]) = \widehat{I-T}([y])$$

dann gilt $(I-T)(x) = (I-T)(y)$ und damit $(I-T)(x-y) = 0$. Also $[x] = [y]$. Nun die Stetigkeit.

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in \operatorname{Kern}(I-T) : \|[x]\| + \epsilon \geq \|x+y\|$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\widehat{I-T}([x])\| &= \|(I-T)(x)\| = \|(I-T)(x+y)\| \\ &\leq \|I-T\|\|x+y\| \leq \|I-T\|(\|[x]\| + \epsilon) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $\widehat{I-T}$ als Operator von $X/\operatorname{Kern}(I-T)$ nach $\operatorname{Bild}(\widehat{I-T})$. Der Operator ist dann bijektiv und stetig.

Wir zeigen nun, dass auch der Inverse stetig ist (Wir können hier nicht den Satz von der offenen Abbildung anwenden, weil wir nicht wissen, dass der Bildraum vollständig ist, das wollen wir ja gerade zeigen.). Wir nehmen an, dass die Inverse nicht stetig ist. Dann ist die Norm der Inversen nicht beschränkt und es gibt eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|[x_n]\| = 1 \qquad \|x_n\| \leq 2 \qquad \lim_{n\to\infty}(I-T)(x_n) = 0$$

In jeder Klasse $\|[x_n]\|$ mit $\|[x_n]\| = 1$ gibt es einen Repräsentanten x_n mit $\|x_n\| \leq 2$. Da T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge Tx_{n_k} von Tx_n, die konvergiert. Damit konvergiert auch

$$x_{n_k} = (I-T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k})$$

Es folgt

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|[x_{n_k}]\| = \left\| \lim_{k\to\infty} [x_{n_k}] \right\| = \left\| \left[\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \right] \right\|$$

Andereseits gilt

$$(I-T)(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = 0$$

und somit

$$\left[\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \right] = 0$$

Also ist die Inverse von $\widehat{I-T}$ stetig und $X/\operatorname{Kern}(I-T)$ und $\operatorname{Bild}(I-T)$ sind isomorph. X ist vollständig und $\operatorname{Kern}(I-T)$ ist abgeschlossen. Deshalb ist $X/\operatorname{Kern}(I-T)$ vollständig, und so auch $\operatorname{Bild}(I-T)$. Also ist das Bild von $I-T$ in X abgeschlossen.

Wir zeigen nun, dass $X/\mathrm{Bild}(I-T)$ endlich-dimensional ist. Weil $\mathrm{Bild}(I-T)$ abgeschlossen ist, ist

$$(X/\operatorname{Bild}(I-T))^*$$

nach Lemma 74 isometrisch isomorph zu $(\mathrm{Bild}(I-T))^\perp$. Außerdem

$$(\mathrm{Bild}(I-T))^\perp = \mathrm{Kern}(I-T)^*$$

Somit ist $(X/\operatorname{Bild}(I-T))^*$ isometrisch isomorph zu $\mathrm{Kern}(I-T)^*$. Nach dem Satz von Schauder (Satz 16) ist T^* kompakt. Wir wenden (i) auf $(I-T)^* = I^* - T^*$ an und erhalten, dass $\mathrm{Kern}(I-T)^*$ endlich-dimensional ist. □

Satz 27 *(Riesz-Schauder) Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\dim(X/\operatorname{Bild}(I-T)) &= \dim(\mathrm{Kern}(I-T)) \\ &= \dim(X^*/\operatorname{Bild}(I-T)^*) = \dim(\mathrm{Kern}(I-T)^*)\end{aligned}$$

Im allgemeinen ist eine solche Aussage natürlich falsch. Man betrachte dazu den Shift-Operator $S : \ell^2 \to \ell^2$ mit $S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Es gilt $\dim(\mathrm{Kern}(S))$=1 und $\mathrm{Bild}(S) = \ell^2$, also $\dim(X/\operatorname{Bild}(S)) = 0$.

Lemma 98 *Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Wir bezeichnen*

$$N_m = \mathrm{Kern}(I-T)^m \qquad N_0 = \{0\} \qquad R_m = \mathrm{Bild}(I-T)^m \qquad R_0 = X$$

(i) Es existiert eine kleinste Zahl $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ mit $N_p = N_{p+1}$.
(ii) Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq p$ gilt $N_\ell = N_p$.
(iii) $N_p \cap R_p = \{0\}$
(iv) Es existiert eine kleinste Zahl $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ mit $R_q = R_{q+1}$.
(v) Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq q$ gilt $R_q = R_\ell$.
(vi) $N_q + R_q = X$
(vii) $p = q$

Beweis. Bevor wir die einzelnen Punkte beweisen, bemerken wir, dass

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \qquad\qquad R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots$$

Diese Inklusionen sind offensichtlich, denn falls $x \in N_\ell$, dann gilt $(I-T)^\ell x = 0$ und es folgt $(I-T)^{\ell+1}x = 0$. Falls $x \in R_{\ell+1}$, d.h. es gibt ein $y \in X$ mit $(I-T)^{\ell+1}y = x$, dann gilt für $(I-T)y = z$, dass $x = (I-T)^\ell z \in R_\ell$.

Weiter hat $(I-T)^m$ die Form

$$(I-T)^m = I - \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k+1} T^k = I - S$$

wobei S eine kompakte Abbildung ist. Nach Satz 26 ist der Kern N_m von $I - S = (I-T)^m$ endlich-dimensional. Das Bild $R_m = (I-S)(X)$ ist nach Satz 26 abgeschlossen, weil S kompakt ist. Ebenfalls mit Satz 26 folgt dass, X/R_m endlich-dimensional ist.

(i) Wir nehmen an, dass es kein solches p gibt. Die Räume N_k sind alle abgeschlossen, weil sie Kerne stetiger Abbildungen sind (Wir wissen sogar, dass die Räume N_k endlich-dimensional sind.). Außerdem ist N_k in N_{k+1} enthalten, aber nicht gleich. Nach dem Lemma von Riesz (Lemma 38) gibt es dann ein $x_{k+1} \in N_{k+1}$ mit $d(x_{k+1}, N_k) > \frac{1}{2}$ und $\|x_{k+1}\| = 1$. Dann gilt für $k > \ell$

$$\|Tx_k - Tx_\ell\| = \|x_k - (I-T)x_k + x_\ell - (I-T)x_\ell\| \geq \frac{1}{2}$$

weil $-(I-T)x_k + x_\ell - (I-T)x_\ell \in N_{k-1}$. Dies gilt, weil $x_\ell \in N_\ell \subseteq N_{k-1}$, $(I-T)(N_k) \subset N_{k-1}$. Deshalb besitzt Tx_k keine konvergente Teilfolge und T kann nicht kompakt sein.

(ii) Wir haben uns bereits überlegt, dass $N_p \subseteq N_\ell$. Außerdem wissen wir wegen (i), dass $N_p = N_{p+1}$. Wir wenden nun Induktion an. Wir nehmen an, dass $N_\ell = N_p$ und $x \in N_{\ell+1}$. Es folgt, dass $(I-T)x \in N_\ell = N_{\ell-1}$. Da also $(I-T)x \in N_{\ell-1}$, so muss $x \in N_\ell$.

(iii) Es sei $x \in N_p \cap R_p$. Wegen $x \in N_p$ gilt $(I-T)^p x = 0$ und wegen $x \in R_p$ gibt es ein y mit $x = (I-T)^p y$. Es folgt $(I-T)^{2p}y = 0$ und damit $y \in N_{2p}$ Nach (ii) gilt $N_p = N_{2p}$. Deshalb gilt $(I-T)^p y = 0$ und $x = 0$.

(iv) Wir nehmen an, dass es keine Zahl q mit $R_q = R_{q+1}$ gibt. Dann gibt es zu jedem $n \in N$ ein $x_n \in R_n$ mit $d(x_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Dies folgt aus dem Lemma von Riesz (Lemma 38). Dann gilt für alle $k < \ell$

$$\|Tx_k - Tx_\ell\| = \|x_k - (I-T)x_k + x_\ell - (I-T)x_\ell\| \geq \frac{1}{2}$$

weil $-(I-T)x_k + x_\ell - (I-T)x_\ell \in R_{\ell+1}$. Damit ist T keine kompakte Abbildung, was nicht richtig ist.

(v) Wir haben uns bereits überlegt, dass $R_q \supseteq R_\ell$. Wir benutzen Induktion. Nach (iv) gilt $R_q = R_{q+1}$. Wir nehmen an, dass $R_q = R_\ell$ und wollen schließen, dass $R_q = R_{\ell+1}$. Wegen $R_{\ell-1} = R_\ell$ gilt $R_{\ell+1} = (I-T)R_\ell = (I-T)R_{\ell-1} = R_\ell$.

(vi) Es sei $x \in X$. Dann gilt $(I-T)^q x \in R_q$ und, weil $R_q = R_{2q}$, gibt es ein $y \in X$ mit $(I-T)^q x = (I-T)^{2q} y$. Nun stellen wir x durch

$$x = (x - (I-T)^q y) + (I-T)^q y$$

dar. Es gilt $(I-T)^q y \in R_q$ und $x - (I-T)^q y \in N_q$. Die letztere Relation gilt, weil

$$(I-T)^q(x - (I-T)^q y) = (I-T)^q x - (I-T)^{2q} y = 0$$

(vii) Falls $p > q$, dann gilt nach (v), dass $R_p = R_q$, und nach (ii), dass $N_p \setminus N_q \neq \emptyset$. Es sei $x \in N_p \setminus N_q$. Nach (vi) gilt

$$x = y + z \qquad\qquad y \in N_q, z \in R_q = R_p$$

Es folgt $x - y = z$ mit $z \in R_p$ und $x - y \in N_p$. Nach (iii) gilt dann $z = 0$ und $x = y$. Also gilt $x \in N_q$.

Wir nehmen nun an, dass $q > p$. Dann gilt $N_p = N_q$ und $R_p \setminus R_q \neq \emptyset$. Wir wählen $x \in R_p \setminus R_q$. Nach (vi)

$$x = y + z \qquad\qquad y \in N_q = N_p, z \in R_q$$

Dann gilt $x - z = y$ mit $y \in N_p$ und $x - z \in R_p$. Es folgt $y = 0$ und $x = z$. Also $x \in R_q$. □

Lemma 99 *Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Dann existiert ein endlich-dimensionaler Unterraum N und ein abgeschlossener Unterraum R von X, so dass*
(i) X ist die direkte topologische Summe $X = N \oplus R$.
(ii) $(I-T)(N) \subseteq N$ und $(I-T)(R) = R$
(iii) $I - T_{|R} : R \to R$ ist ein stetiger Isomorphismus.

Beweis. Wir wählen $N = N_p$ und $R = R_p$ wie in Lemma 98 angegeben.

(i) Nach Lemma 98sind N und R abgeschlossen, also vollständig. Der Raum $N \oplus R$ sei mit der Norm $\| \ \|_N + \| \ \|_R$ ausgestattet. Die Abbildung

$I : N \oplus R \to X$ mit $I(y,z) = y + z$ ist stetig und nach dem Satz von der offenen Abbildung damit auch die Inverse.

(ii) Weiter gilt

$$(I-T)(N) = (I-T)(N_p) \subseteq N_{p-1} \subseteq N_p = N$$
$$(I-T)(R) = (I-T)(R_p) = R_{p+1} = R_p = R$$

(iii) Außerdem ist $(I-T)_{|R}$ surjektiv. $(I-T)_{|R}$ ist injektiv: Falls $(I-T)(y) = 0$ und $y \in R = R_p$, dann gilt $y = (I-T)^p x$ und somit $0 = (I-T)^{p+1}x$. Damit $x \in N_{p+1} = N_p = N$ und folglich $y = (I-T)^p x = 0$. Also ist $(I-T)_{|R}$ auch injektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $(I-T)_{|R}$ ein stetiger Isomorphismus. □

Beweis von Satz 27. Wegen Lemma 74 sind $(\mathrm{Kern}(I-T))^*$ und $X^*/(\mathrm{Kern}(I-T))^\perp$ isometrisch. Nach Satz 26 ist $\mathrm{Kern}(I-T)$ endlich-dimensional. Deshalb

$$\dim(X^*/(\mathrm{Kern}(I-T))^\perp) = \dim(\mathrm{Kern}(I-T))$$

Nach Satz 26 ist das Bild von $I-T$ abgeschlossen und nach Lemma 83 gilt

$$\mathrm{Kern}(I-T)^\perp = \mathrm{Bild}((I-T)^*)$$

Es folgt

$$\dim(X^*/(\mathrm{Bild}((I-T)^*)) = \dim(\mathrm{Kern}(I-T))$$

Somit bleibt noch

$$\dim(X/\,\mathrm{Bild}(I-T)) = \dim(\mathrm{Kern}(I-T)) \tag{4.3}$$

zu zeigen. Dazu betrachten wir N und R von Lemma 99 und die direkte Summe $X = N \oplus R$. Außerdem betrachten wir $\widehat{I-T} = (I-T)_{|N}$. Wir zeigen

(i) $\dim(X/\,\mathrm{Bild}(I-T)) = \dim(N/\,\mathrm{Bild}(\widehat{I-T}))$

(ii) $\mathrm{Kern}(I-T) = \mathrm{Kern}(\widehat{I-T})$

Hieraus ergibt sich (4.3), weil N endlich-dimensional ist und deshalb

$$\dim(N/\,\mathrm{Bild}(\widehat{I-T})) = \dim(\mathrm{Kern}(\widehat{I-T}))$$

Wir zeigen (i). Die Abbildung $\Phi : N/\,\mathrm{Bild}(\widehat{I-T}) \to X/\,\mathrm{Bild}(I-T)$

$$\Phi\left([x]_{N/\,\mathrm{Bild}(\widehat{I-T})}\right) = [x]_{X/\,\mathrm{Bild}(I-T)}$$

ist wohldefiniert und bijektiv. Sie ist wohldefiniert, weil $\operatorname{Bild}(\widehat{I-T}) \subseteq \operatorname{Bild}(I-T)$.

Die Abbildung ist injektiv: Es sei $x \in N$ mit $\Phi([x]_{N/\operatorname{Bild}(\widehat{I-T})}) = 0$, also

$$[x]_{X/\operatorname{Bild}(I-T)} = 0$$

Somit liegt x im Bild von $I-T$. Es gibt also ein $y \in X$ mit $x = (I-T)y$. Außerdem können wir y durch

$$y = y_1 + y_2 \qquad\qquad y_1 \in N, y_2 \in R$$

darstellen. Es folgt

$$x = (I-T)y_1 + (I-T)y_2$$

Nach Lemma **??** gelten $(I-T)R = R$ und $(I-T)N \subseteq N$, folgt $(I-T)y_1 \in N$ und $(I-T)y_2 \in R$. Da auch $x \in N$

$$(I-T)y_2 = x - (I-T)y_1 \in N \cap R$$

Es folgt $(I-T)y_2 = 0$. Nach Lemma **??** ist $I-T$ auf R ein Isomorphismus, deshalb $y_2 = 0$. Weiter folgt $x = (I-T)y_1 \in (I-T)(N)$ und somit

$$[x]_{N/\operatorname{Bild}(\widehat{I-T})} = 0$$

Nun zeigen wir, dass Φ surjektiv ist. Für jedes $x \in X$ gilt

$$x = x_1 + x_2 \qquad\qquad x_1 \in N, x_2 \in R$$

Da $I-T$ auf R ein Isomorphismus ist, gilt $x_2 \in \operatorname{Bild}(I-T)$ und somit

$$[x]_{X/\operatorname{Bild}(I-T)} = [x_1]_{X/\operatorname{Bild}(I-T)}$$

Es folgt

$$\Phi([x_1]_{N/\operatorname{Bild}(\widehat{I-T})}) = [x_1]_{X/\operatorname{Bild}(I-T)} = [x]_{X/\operatorname{Bild}(I-T)}$$

Nun zeigen wir $\operatorname{Kern}(I-T) = \operatorname{Kern}(\widehat{I-T})$. Zu $x \in \operatorname{Kern}(I-T)$ betrachten wir die Darstellung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in N$ und $x_2 \in R$. Wegen $(I-T)x = 0$ gilt

$$(I-T)x_1 = -(I-T)x_2.$$

Nach Lemma **??** ist $I-T$ auf R ein Isomorphismus und $(I-T)N \subseteq N$. Deshalb gilt $(I-T)x_1 \in N$ und $(I-T)x_2 \in R$. Es folgt

$$(I-T)x_2 \in N \cap R$$

und folglich $(I-T)x_2 = 0$. Da $I-T$ auf R ein Isomorphismus ist, folgt $x_2 = 0$. Hieraus folgt $x = x_1 \in N$, also

$$x \in \operatorname{Kern}(I-T)_{|N}$$

Die inverse Inklusion erhält man, indem man die einzelnen Schritte rückwärts verfolgt. □

Satz 28 *(Fredholmsche Alternative) Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Dann hat entweder die homogene Gleichung*

$$\lambda x - Tx = 0$$

nur die triviale Lösung und in diesem Fall ist die inhomogene Gleichung

$$\lambda x - Tx = y$$

für jedes $y \in X$ eindeutig oder der Lösungsraum hat die endliche Dimension $\dim(\operatorname{Kern}(\lambda - T))$.

Die Fredholmsche Alternative besagt auch: $\lambda \neq 0$ ist entweder kein Spektralwert oder ein Eigenwert.

Beweis. Es gilt $\lambda - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$. Deshalb

$$\operatorname{Bild}(\lambda - T) = \operatorname{Bild}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right) \qquad \operatorname{Kern}(\lambda - T) = \operatorname{Kern}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)$$

Nach Satz 27

$$\dim\left(X/\operatorname{Bild}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Kern}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)\right)$$

Wir betrachten nun zwei Fälle. Der erste Fall ist

$$\dim\left(X/\operatorname{Bild}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Kern}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)\right) = 0$$

Dann ist $I - \frac{1}{\lambda}T$ bijektiv. Deshalb hat $\lambda x - Tx = 0$ nur die triviale Lösung und für jedes $y \in X$ existiert genau ein x mit $\lambda x - Tx = y$.

Der zweite Fall ist, dass die Dimensionen ungleich 0 sind. Dann hat der Lösungsraum von $\lambda x - Tx = 0$ die Dimension $\dim(\operatorname{Kern}(I - \frac{1}{\lambda}T))$. □

Satz 29 *Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ ein kompakter Operator.*
(i) Falls X unendlich-dimensional ist, dann $0 \in \sigma(T)$.
(ii) Jedes Element des Spektrums, das verschieden von 0 ist, ist Eigenwert von T und der zugehörige Eigenraum ist endlich-dimensional.
(iii) Zu jedem von 0 verschiedenen Eigenwert λ gibt es zwei Teilräume $N(\lambda)$ und $R(\lambda)$, so dass $N(\lambda)$ endlich-dimensional ist und den Eigenraum von λ umfasst und $\lambda - T$ ein Isomorphismus von $R(\lambda)$ nach $R(\lambda)$ ist.
(iv) Das Spektrum $\sigma(T)$ ist abzählbar.
(v) $\sigma(T)$ besitzt keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt.

Beweis. (i) Falls 0 nicht im Spektrum liegt, dann ist T invertierbar und die Inverse ist stetig. Damit ist $I = TT^{-1}$ kompakt. Nach Lemma 39 kann die identische Abbildung nur dann kompakt sein, wenn X endlich-dimensional ist.

(ii) folgt aus der Fredholmschen Alternative. Entweder $\lambda - T$ ist bijektiv oder nicht injektiv. Der Kern von $\lambda - T$ ist nach Satz 26 endlich-dimensional.

(iii) Wir wählen die Räume N und R von Lemma 99.

(iv) und (v) Wir weisen nach, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Menge

$$\{\lambda \in \sigma(T) | |\lambda| \geq \epsilon\}$$

endlich ist. Dazu nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Dann gibt es ein ϵ, eine Folge λ_n, $n \in \mathbb{N}$, von paarweise verschiedenen Eigenwerten und eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, von Eigenvektoren, die von 0 verschieden sind, mit

$$|\lambda_n| \geq \epsilon \qquad\qquad Tx_n = \lambda_n x_n$$

Die Eigenvektoren sind linear unabhängig. Wäre dem nicht so, dann gibt es ein N, so dass $x_1, \ldots, x_{N-1}$ linear unabhängig sind, aber $x_1, \ldots, x_N$ nicht linear unabhängig sind. Somit finden wir Koeffizienten a_n mit

$$x_N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n x_n$$

Es folgt

$$Tx_N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n T x_n = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n a_n x_n$$

und

$$Tx_N = \lambda_N x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_N a_n x_n$$

Deshalb

$$0 = \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_N) a_n x_n$$

Da alle $x_1, \ldots, x_{N-1}$ linear unabhängig sind, folgt für alle n, dass $(\lambda_n - \lambda_N)a_n = 0$. Da die Eigenwerte sämtlich verschieden sind, muss dann für alle n die Gleichung $a_n = 0$ gelten. Dies bedeutet aber $x_N = 0$. Dies ist ein Widerspruch, weil alle Eigenvektoren von 0 verschieden sind. Also sind die Eigenvektoren linear unabhängig.

Wir setzen $E_n = LH(x_1, \ldots, x_n)$ und es gilt $E_n \subset E_{n+1}$ mit $E_n \neq E_{n+1}$. Nach dem Lemma von Riesz (Lemma 38) gibt es Vektoren $y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und

$$\inf_{z \in E_{n-1}} \|y_n - z\| \geq \frac{1}{2}$$

Es gilt für $n > m$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - (Ty_m + \lambda_n y_n - Ty_n)\|$$

Wegen $y_m = \sum_{i=1}^m a_i^m x_i$ und $y_n = \sum_{i=1}^n a_i^n x_i$ gelten

$$Ty_m = \sum_{i=1}^m a_i^m \lambda_i x_i \in E_m \qquad \lambda_n y_n - Ty_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^n (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in E_{n-1}$$

Es folgt

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - (Ty_m + \lambda_n y_n - Ty_n)\| \geq |\lambda_n| \inf_{z \in E_{n-1}} \|y_n - z\| \geq \frac{1}{2}\epsilon$$

Damit hat die Folge Ty_n, $n \in \mathbb{N}$, keine konvergente Teilfolge und T ist im Widerspruch zur Annahme nicht kompakt. □

Nach Satz 29 ist 0 immer im Spektrum enthalten, 0 muss aber keinesfalls ein Eigenwert sein, wie das folgende Beispiel belegt.

Beispiel 32 *(i) Es sei* $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *durch*

$$Tf(s) = \int_0^s f(t)dt$$

gegeben. Dann ist T *ein kompakter Operator und es gilt*

$$\sigma_p(T) = \emptyset \qquad \sigma_c(T) = \emptyset \qquad \sigma_r(T) = \{0\}$$

(ii) Es sei $k \in L^2[0,1]^2$ *und* $T_k : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ *sei durch*

$$T_k f(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt$$

gegeben. Dann gilt $\|T_k\| \leq \|k\|$ *und* T_k *ist kompakt.*
(iii) (Volterra) Es sei $k \in C[0,1]^2$ *und* $T_k : C[0,1] \to C[0,1]$ *sei durch*

$$T_k f(s) = \int_0^s k(s,t)f(t)dt$$

gegeben. Dann ist T_k *ist kompakt. Der Spektralradius ist* 0*. Weiter gilt* $\sigma(T) = \{0\}$ *(siehe [Wer], S. 219).*

Beweis. (i) Wir hatten bereits in Beispiel 31 das Spektrum bestimmt. Um die Kompaktheit von T nachzuweisen, benutzen wir den Satz von Arzela-Ascoli. Wir weisen nach, dass die Familie der Funktionen $Tf \in C[0,1]$ mit

$$Tf(t) = \int_0^t f(u)du \qquad\qquad \|f\| \leq 1$$

gleichstetig sind. Es gilt

$$|Tf(s) - Tf(t)| = \left| \int_0^s f(u)du - \int_0^t f(u)du \right| \leq \int_t^s |f(u)|du| \leq |s-t|$$

(ii) Nach Satz ist 0 immer Element des Spektrums. □

Chapter 5

Dualraum

5.1 Der Dualraum von L^p

Es sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Außerdem sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man kann auf natürliche durch eine Funktion $f \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Funktional auf $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ erzeugen. Der Operator $I : L^q \to (L^p)^*$ sei durch

$$I(f)(g) = \int fgd\mu$$

gegeben. Umgekehrt kann man jedes Funktional durch eine solche Funktion darstellen. Dazu beobachtet man, dass für ein gegebenes Funktional Φ

$$\nu(A) = \Phi(\chi_A)$$

ein signiertes Maß ist. Nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es dann eine Funktion mit

$$\nu(A) = \int_A fd\mu$$

Im folgenden Satz stellen wir fest, dass der Dualraum von L^p der Raum L^q ist, falls $1 \leq p < \infty$ und der Maßraum σ-endlich ist. Falls $1 < p < \infty$, dann kann man auf die Annahme, dass der Maßraum σ-endlich ist, verzichten [Beh]. Dies kann man nicht im Fall $p = 1$. Das folgende Lemma stellt sicher, dass der Bildraum von I tatsächlich $(L^p)^*$ ist.

Lemma 100 *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Der Operator I ist eine Isometrie von L^q in den Dualraum von L^p.*

Das Lemma stellt nicht sicher, dass das Bild von I gleich dem Dualraum von L^p ist.

Beweis. Wir behandeln den Fall $1 < p < \infty$. Es gilt

$$\|I(f)\|_{(L^p)^*} = \sup_{\|g\|_p=1} |I(f)(g)| = \sup_{\|g\|_p=1} \left| \int fgd\mu \right|.$$

Mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\|I(f)\|_{(L^p)^*} \leq \sup_{\|g\|_p=1} \|f\|_q \|g\|_p = \|f\|_q.$$

Es bleibt zu zeigen, dass auch $\|I(f)\| \geq \|f\|_q$ gilt. Für $f = 0$ ist dies offensichtlich. Wir können also annehmen, dass $f \neq 0$ gilt. Wir wählen

$$g = \frac{\operatorname{sgn}(f)|f|^{q-1}}{\|f\|_q^{q-1}}.$$

Wir zeigen, dass $g \in L^p$.

$$\|g\|_p^p = \int \left| \frac{\operatorname{sgn}(f)|f|^{q-1}}{\|f\|_q^{q-1}} \right|^p d\mu = \|f\|_q^{-q} \int |f|^q d\mu = 1$$

Es ergibt sich hiermit

$$\begin{aligned} \|I(f)\|_{(L^p)^*} &= \sup_{\|h\|_p=1} |I(f)(h)| \geq |I(f)(g)| = \left| \int fgd\mu \right| \\ &= \left| \int f \frac{\operatorname{sgn}(f)|f|^{q-1}}{\|f\|_q^{q-1}} d\mu \right| = \|f\|_q^{1-q} \int |f|^q d\mu = \|f\|_q. \end{aligned}$$

□

Lemma 101 *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es sei g eine messbare Funktion und es gebe eine Konstante C, so dass für alle einfachen Funktionen f, die außerhalb einer Menge von endlichem Maß verschwinden und deren p-Normen kleiner gleich 1 sind, die Ungleichung*

$$\int_X fgd\mu \leq C$$

gilt. Dann gilt $g \in L^q$ und

$$\|g\|_q = \sup_f \int_X fgd\mu$$

wobei sich das Supremum über alle einfachen Funktionen erstreckt, die ausserhalb einer Menge von endlichem Maß verschwinden und deren p-Normen kleiner gleich 1 *sind.*

Beweis. Wir behandeln den Fall $1 < p < \infty$. Wir betrachten hier den Fall, dass X ein endliches Maß hat.

Es gibt eine Folge von einfachen, nichtnegativen Funktionen g_n, $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichungen $g_n(x) \leq |g(x)|$ und $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ gelten und so dass $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = |g(x)|$. Nach dem Satz über die monotone Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_n|^q d\mu = \int_X |g|^q d\mu.$$

(An dieser Stelle wissen wir noch nicht, dass das Integral auf der rechten Seite endlich ist.) Wir setzen

$$h_n = \frac{\operatorname{sgn}(g)|g_n|^{q-1}}{\|g_n\|_q^{q-1}}.$$

Da g_n einfache Funktionen mit einem Träger von endlichem Maß sind, gilt $g_n \in L^q$. Dann gilt

$$\|h_n\|_p^p = \|g_n\|_q^{p(1-q)} \int_X |g_n|^{p(q-1)} d\mu = \|g_n\|_q^{-q} \int_X |g_n|^q d\mu = 1.$$

Also gilt $\|h_n\|_p = 1$. Mit den Annahmen des Lemmas folgt

$$C \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X h_n g d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n g d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X \frac{|g||g_n|^{q-1}}{\|g_n\|_q^{q-1}} d\mu.$$

Da $|g_n| \leq |g|$ gilt, folgt weiter

$$C \geq \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_q^{-q+1} \int_X |g_n|^q d\mu = \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_q = \|g\|_q$$

so dass $g \in L^q$. Insbesondere folgt auch

$$\|g\|_q \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X h_n g d\mu \leq \sup_f \int_X f g d\mu.$$

Mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\sup_f \int_X f g d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Satz 30 *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für jedes $\phi \in (L^p)^*$ existiert ein $g \in L^q$, so dass für alle $f \in L^p$*

$$\phi(f) = \int_X fg d\mu$$

gilt. Weiter gilt $\|\phi\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$. Insbesondere sind $(L^p)^*$ und L^q isometrisch.

Der Beweis verwendet entscheidend den Satz von Radon-Nikodym: *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und ν ein signiertes, σ-endliches Maß auf $\mathfrak{A}$, das bzgl. μ absolutstetig ist. Dann gibt es eine μ-messbare Funktion g mit $d\nu = gd\mu$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für den Fall, dass der Maßraum endlich ist. Wir zeigen zunächst, dass es eine Funktion $g \in L^q$ gibt, so dass für alle charakteristischen Funktionen messbarer Mengen E

$$\phi(\chi_E) = \int_X \chi_E g d\mu.$$

Dazu setzen wir

$$\nu(E) = \phi(\chi_E).$$

Wir weisen nach, dass ν ein endliches, signiertes Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist, das bzgl. μ absolutstetig ist. Es gilt

$$\nu(\emptyset) = \phi(\chi_\emptyset) = \phi(0) = 0$$

Ein signiertes Maß nimmt nur einen der Werte $-\infty$ und ∞ an. Wir weisen dies für ν nach. Weil $\mu(X) < \infty$, folgt für alle $A \in \mathfrak{A}$, dass $\mu(A) < \infty$. Deshalb gilt $\chi_A \in L^p$ und damit ist $\phi(\chi_A)$ definiert und endlich. Deshalb ist

$$\nu(A) = \phi(\chi_A)$$

eine relle Zahl und insbesondere endlich. Also nimmt ν weder den Wert ∞ noch den Wert $-\infty$ an. Hieraus folgt auch, dass ν σ-endlich ist: Mit der Hahnschen Zerlegung ist X die disjunkte Vereinigung von einer Menge positiven Maßes mit einer Menge negativen Maßes. Beide Mengen haben

aber endliches Maß. Es seien E_j, $j = 1, \ldots, n$, disjunkte, messbare Mengen. Dann gilt

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \phi(\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}) = \phi\left(\sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j)$$

und ν ist additiv.

Wir zeigen die σ-Additivität. Es seien E_j, $j \in \mathbb{N}$, disjunkte, messbare Mengen. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ eine messbare Menge, die endliches μ-Maß hat, weil X endliches μ-Maß hat. Also ist $\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}$ eine Funktion in L^p. Damit ist $\phi(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j})$ definiert. Ausserdem gilt

$$\|\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j} - \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}\|_p^p = \|\chi_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j}\|_p^p = \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(E_j)$$

Der letzte Ausdruck konvergiert für n gegen ∞ gegen 0. Das bedeutet, dass die Folge $\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}$, $n \in \mathbb{N}$, in $L^p(\mu)$ gegen $\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}$ konvergiert. Da ϕ stetig ist

$$\lim_{n\to\infty} \phi\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}\right) = \phi\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}\right).$$

Dies bedeutet aber, dass

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \phi\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \phi\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \phi(\chi_{E_j}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)\end{aligned}$$

und ν ist σ-additiv. Wir zeigen nun, dass $\nu \ll \mu$ gilt. Falls $\mu(E) = 0$ gilt, dann gilt fast überall $\chi_E = 0$. D.h. dass χ_E in L^p den Vektor 0 darstellt. Deshalb gilt $\phi(\chi_E) = 0$ und somit auch $\nu(E) = 0$.

Nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es eine μ-messbare Funktion g, so dass für alle messbaren Mengen E

$$\nu(E) = \int_E g d\mu$$

gilt. (Wir wissen zunächst nur, dass g messbar ist, wir wissen noch nicht, dass g in L^q ist.) Also gilt für alle charakteristischen Funktionen messbarer

Mengen

$$\phi(\chi_E) = \int_X \chi_E g d\mu.$$

Damit gilt auch für alle einfachen Funktionen f

$$\phi(f) = \int_X f g d\mu.$$

Lemma stellt sicher, dass die einfachen Funktionen in L^p dicht sind. Mit der Stetigkeit von ϕ folgt nun für alle $f \in L^p$

$$\phi(f) = \int_X f g d\mu.$$

Mit Lemma folgt, dass $\|\phi\| = \|g\|_q$ gilt. $\square$

Korollar 12 *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\mu)$ reflexiv.*

Wir sagen, dass ein Banachraum X ein Prädualraum eines Banachraumes Y ist, falls der Dualraum von X isometrisch isomorph zu Y ist. Für reflexive Banachräume ist der Prädualraum eindeutig. Dies ist i.a. nicht richtig.

Bemerkung 1 *Der Dualraum von $C(\omega^\omega)$ ist isometrisch zu ℓ^1. Der Raum $C(\omega^\omega)$ ist nicht isomorph zu c_0.*

Beispiel 33 *Es gibt eine Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, in $L^2[0,1]$ die schwach gegen 0 konvergiert, die jedoch keine Teilfolge besitzt, die punktweise f.ü. gegen 0 konvergiert.*

5.2 Urysohns Lemma und die Zerlegung der Eins

P.S. Urysohn wurde am 3.2.1898 in Odessa geboren. Er ertrank am 17.8.1924 bei einem Badeunfall in Batz, Frankreich. Er war Prvat-Dozent an der Moskauer Universität und ab 1923 Professor an der 2. Moskauer Universität, dem späteren Pädagogischen Institut.

Es sei X eine nichtleere Menge. Eine Topologie auf X ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, die die leere Menge $\emptyset$ und X enthält, und unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen offenen Mengen. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum.

Falls $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, dann sagen wir, dass die Topologie $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{E}$ erzeugt wird, falls sie der Durchschnitt aller Topologien ist, die $\mathfrak{E}$ enthalten. Ein topologischer Raum heißt normaler Raum, falls

$$\begin{aligned} \forall x, y\ \exists U \in \mathfrak{T}: &\qquad x \in U \quad \text{und} \quad y \notin U \\ \forall A, B \text{ abgeschlossen und disjunkt} & \\ \exists U, V \text{ offen und disjunkt}: &\qquad A \subseteq U \quad \text{und} \quad B \subseteq V \end{aligned}$$

Der Träger einer stetigen Funktion f mit Werten in den reellen Zahlen ist der Abschluss der Menge aller Punkte, für die f von 0 verschieden ist.

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$$

Lemma 102 *Jeder kompakte Hausdorff Raum X ist normal.*

Beweis. Es seien A und B abgeschlossene Mengen. Da X kompakt ist, sind auch A und B kompakt. Zu jedem $x \in A$ und jedem $y \in B$ existieren zwei disjunkte, offene Mengen $U_{x,y}$ und $V_{x,y}$ mit $x \in U_{x,y}$ und $y \in V_{x,y}$, weil X Hausdorff ist. Dann ist $V_{x,y}$, $y \in B$, eine offene Überdeckung von B und besitzt eine endliche Teilüberdeckung

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$$

Weiter gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i} \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i} = \emptyset$$

und

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i} \qquad x \in A$$

ist eine offene Überdeckung von A. Weil A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_j,y_i}$$

Weiter gilt

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_j,y_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_j,y_i} \right) = \emptyset$$

□

Lemma 103 *Jeder normale Raum ist Hausdorff.*

Beweis. Die einpunktigen Mengen sind abgeschlossen, weil es zu je zwei verschiedenen Punkten x und y eine offene Menge U mit $x \in U$ und $y \notin U$ existiert.

Da die einpunktigen Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ abgeschlossen sind und der Raum normal ist, finden sich zwei offene, disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $y \in V$. □

Lemma 104 *Es seien $(X, \mathfrak{T})$ ein normaler Raum und A und B disjunkte, abgeschlossene Mengen in X. Es sei*

$$M = \left\{ \frac{k}{2^n} \middle| \; k, n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq k \leq 2^n \right\}$$

Dann gibt es eine Familie U_r, $r \in M$, von offenen Mengen, so dass

$$A \subseteq U_r \subseteq B^c \qquad \text{und} \qquad \forall r < s : \overline{U_r} \subseteq U_s$$

gelten.

Beweis. Wir verwenden Induktion über n. Für $n = 1$ sind die Mengen $U_{\frac{1}{2}}$ und U_1 zu wählen. Wir setzen $U_1 = B^c$. Da X normal ist, gibt es disjunkte, offene Mengen V und W, so dass $A \subseteq V$ und $B \subseteq W$. Wir wählen $U_{\frac{1}{2}} = V$. Dann gilt

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W^c \subseteq B^c$$

oder

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq W^c \subseteq U_1$$

Damit haben wir für $n = 1$ die Mengen konstruiert. Wir benutzen nun Induktion über n. Wir nehmen an, dass wir die Mengen

$$U_r \qquad r = \frac{k}{2^n} \quad 1 \leq k \leq 2^n \quad 1 \leq n \leq N-1$$

konstruiert haben. Nun wählen wir diejenigen U_r, $r = \frac{k}{2^N}$, $1 \leq k \leq 2^N$, die noch nicht gewählt wurden. Man beachte, dass die Mengen für gerades k bereits gewählt wurden, weil $\frac{k}{2^N} = \frac{k/2}{2^{N-1}}$.

Es bleibt, die Mengen

$$U_r \qquad r = \frac{2j+1}{2^N} \quad j = 0, \ldots, 2^{N-1} - 1$$

zu wählen. Wir beginnen mit $j = 0$. $U_{\frac{2}{2^N}}$ ist bereits gewählt und weil X normal ist, gibt es zwei offene, disjunkte Mengen V und W mit

$$A \subseteq V \qquad \left(U_{\frac{2}{2^N}}\right)^c \subseteq W$$

Wir setzen $U_{\frac{1}{2^N}} = V$ und es gilt

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2^N}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2^N}}} \subseteq W^c \subseteq U_{\frac{2}{2^N}}$$

Es gilt

$$\frac{j}{2^{N-1}} = \frac{2j}{2^N} < \frac{2j+1}{2^N} < \frac{2j+2}{2^N} = \frac{j+1}{2^{N-1}}$$

Die Mengen $U_{\frac{j}{2^{N-1}}}$ und $U_{\frac{j+1}{2^{N-1}}}$ sind bereits gewählt und es gilt $\overline{U_{\frac{j}{2^{N-1}}}} \subseteq U_{\frac{j+1}{2^{N-1}}}$.

Da X normal ist, gibt es zwei offene, disjunkte Mengen V und W mit

$$\overline{U_{\frac{j}{2^{N-1}}}} \subseteq V \qquad \left(U_{\frac{j+1}{2^{N-1}}}\right)^c \subseteq W$$

Wir setzen

$$U_{\frac{2j+1}{2^N}} = V$$

Es gilt

$$\overline{U_{\frac{2j+1}{2^N}}} \subseteq U^c_{\frac{j+1}{2^{N-1}}}$$

□

Lemma 105 *(Urysohn) Es sei X ein normaler Raum und A und B seien abgeschlossene, disjunkte Mengen in X. Dann gibt es eine stetige Funktion f auf X mit Werten in $[0,1]$, so dass f auf A identisch 0 ist und auf B identisch 1 ist.*

Wir konstruieren die Funktion mit Hilfe der Mengen U_r, $r \in M$. Typischerweise sind die Ränder dieser Mengen die Höhenlinien der Funktion f. Die Funktion f hat also auf dem Rand von U_r den Wert r.

Beweis. Es sei U_r, $r \in M$ die Familie offener Mengen von Lemma 104. Für $r > 1$ setzen wir $U_r = X$. Wir definieren

$$f(x) = \inf\{r|\ x \in U_r\}$$

Es gilt für alle $x \in A$, dass $f(x) = 0$. Dies gilt, weil für alle $r \in M$ die Inklusion $A \subseteq U_r$ gilt.

Andererseits gilt für alle $x \in B$, dass $f(x) = 1$. Dies gilt, weil für alle $r \in M$ gilt, dass $U_r \cap B = \emptyset$, und für $r > 1$ gilt $U_r = X$.

Da für alle $r > 1$ gilt, dass $U_r = X$, folgt $f(x) \leq 1$. Wir müssen zeigen, dass f stetig ist. Nach Lemma 8 reicht es nachzuprüfen, dass

$$f^{-1}(-\infty, t) \quad \text{und} \quad f^{-1}(t, \infty)$$

Die Aussage

$$x \in f^{-1}((-\infty, t))$$

ist äquivalent zu

$$f(x) \in (-\infty, t)$$

oder

$$\inf\{r|\ x \in U_r\} < t$$

Dies gilt genau dann, wenn es ein $t_0 < t$ gibt, so dass $x \in U_{t_0}$. Also folgt, dass

$$f^{-1}((-\infty, t)) = \{x | \exists s < t : x \in U_s\} = \bigcup_{s<t} U_s$$

Umgekehrt gilt

$$f^{-1}((t, \infty)) = \bigcup_{t<s} \overline{U_s}^c$$

Wir überlegen uns dies. Es gilt genau dann $t < f(x)$, wenn es ein $s > t$ gibt, so dass $x \notin U_s$. Da für $s < r$ die Relation $\overline{U_s} \subseteq U_r$ gilt, folgt weiter, dass $t < f(x)$ genau dann gilt, wenn es ein $s < t$ gibt, so dass $x \notin \overline{U_s}$ gilt. □

Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ein topologischer Raum heißt Hausdorff, wenn für alle $x \neq y$ zwei offene, disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $y \in V$ existieren.

Lemma 106 *Es sei X ein lokalkompakter, Hausdorff Raum, U eine offene Menge und $x \in U$. Dann gibt es eine kompakte Umgebung C von x mit $C \subseteq U$.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $\bar{U}$ kompakt ist: Da X lokalkompakt ist besitzt x eine kompakte Umgebung C. Es folgt, dass $\overset{\circ}{C} \cap U$ offen ist und $\overline{\overset{\circ}{C} \cap U}$ ist eine kompakte Menge, weil $\overline{\overset{\circ}{C} \cap U} \subseteq C$. Also können wir annehmen, dass $\bar{U}$ kompakt ist.

Weil $\bar{U}$ kompakt ist, ist $\bar{U}$ in der induzierten Topologie ein normaler Raum. ∂U und $\{x\}$ sind in X und damit auch in $\bar{U}$ abgeschlossene Mengen. Da $\bar{U}$ normal ist, gibt es zwei in $\bar{U}$ offene, disjunkte Mengen V und W mit $\partial U \subseteq V$ und $\{x\} \subseteq W$.

$W \cap U$ ist eine in X offene Menge, die x enthält, $W \cap U$ ist also Umgebung von x in X. Wir weisen dies nach. Da W in $\bar{U}$ offen ist, gibt es eine in X offene Menge $\tilde{W}$ mit $W = \tilde{W} \cap \bar{U}$. Deshalb ist $W \cap U = \tilde{W} \cap \bar{U} \cap U = \tilde{W} \cap U$ in X offen.

Somit ist $\overline{W \cap U}$ (Abschluss in X)eine Umgebung von x, die kompakt ist, weil $\bar{U}$ kompakt ist. Außerdem gelten wegen $W \cap V = \emptyset$ und $\partial U \subseteq V$ die Inklusionen $W \subseteq V^c$ und $V^c \subseteq (\partial U)^c$. Hierbei nehmen wir die Komplemente

bzgl. $\bar{U}$. V^c ist bzgl. $\bar{U}$ abgeschlossen und deshalb auch bzgl. X. Somit ist der Abschluss $\bar{W}$ bzgl. X in V^c enthalten.

$$\overline{W \cap U} \subseteq \bar{W} \cap \bar{U} \subseteq V^c \cap \bar{U} = (U \cap \partial U) \cap V^c \subseteq U$$

□

Lemma 107 *(Urysohn) Es sei X ein lokalkompakter Hausdorff Raum, K eine kompakte Teilmenge von X und U eine offene Teilmenge von X, so dass*

$$K \subseteq U \subseteq X$$

Dann gibt es eine stetige Funktion f auf X mit Werten in $[0,1]$, die auf K konstant 1 und außerhalb einer kompakten Teilmenge von U konstant 0 ist.

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, dass es eine offene Menge V mit

$$K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

gibt, wobei $\bar{V}$ kompakt ist. Wegen Lemma 106 gibt es zu jedem $x \in K$ eine kompakte Umgebung $C(x)$ mit $C(x) \subseteq U$.

$\overset{\circ}{C}(x)$, $x \in K$, ist eine offene Überdeckung von K, die wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{C}(x_i) \ .$$

Wir wählen nun

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{C}(x_i) \ .$$

$\bar{V}$ ist wegen

$$\bar{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C(x_i)$$

kompakt. Nach Lemma 102 ist $\bar{V}$ in der von X induzierten Topologie normaler Hausdorff Raum. Nach Lemma 105 gibt es eine stetige Funktion

$f : \bar{V} \to [0,1]$ mit $f = 1$ auf K und $f = 0$ auf ∂V. Wir setzen f auf ganz X fort

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bar{V} \\ 0 & x \notin \bar{V} \end{cases}$$

Es sei E eine abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]$. Dann gilt

$$\tilde{f}^{-1}(E) = \begin{cases} f^{-1}(E) & 0 \notin E \\ f^{-1}(E) \cup V^c & 0 \in E \end{cases}$$

Wir überprüfen, dass $\tilde{f}^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cup V^c$ gilt, falls $0 \in E$. Gemäß der Definition von $\tilde{f}$ gilt $\tilde{f}^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cup \bar{V}^c$, falls $0 \in E$. Andererseits

$$\begin{aligned} f^{-1}(E) \cup \bar{V}^c &= f^{-1}(E) \cup \partial V \cup \bar{V}^c = f^{-1}(E) \cup \partial V \cup (V \cup \partial V)^c \\ &= f^{-1}(E) \cup \partial V \cup (V^c \cap (\partial V)^c) \supseteq f^{-1}(E) \cup V^c \end{aligned}$$

Es folgt

$$f^{-1}(E) \cup \bar{V}^c = f^{-1}(E) \cup V^c$$

Da die Mengen $f^{-1}(E)$ und $f^{-1}(E) \cup V^c$ abgeschlossen sind, ist $\tilde{f}$ stetig. □

Lemma 108 *(Zerlegung der Eins) Es sei X ein lokalkompakter Hausdorff Raum, K eine kompakte Teilmenge von X und U_j, $j = 1, \ldots, n$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es stetige Funktionen f_j, $j = 1, \ldots, n$ auf X mit Werten in $[0,1]$ und mit $supp(f_j) \subseteq U_j$, so dass für alle $x \in K$*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = 1$$

Beweis. Wegen Lemma 106 hat jedes $x \in K$ eine kompakte Umgebung C_x, die in einer der Mengen U_j enthalten ist.

$$\forall x \in K \exists j \exists C(x) : C(x) \subseteq U_j$$

Es gilt

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} \overset{\circ}{C}_x \, .$$

Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{C}_{x_i} \, .$$

Es sei

$$F_j = \bigcup_{C(x_i)\subseteq U_j} C_{x_i} \qquad j = 1\ldots,n$$

Nach dem Lemma von Urysohn (Lemma 107) existieren Funktionen f_j, deren Werte in $[0,1]$ liegen, die auf F_j den Wert 1 annehmen und die außerhalb U_j den Wert 0 annehmen. Damit gilt für alle $x \in K$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \geq 1$$

Wir wenden noch einmal das Lemma von Urysohn auf die kompakte Menge K und die offene Menge $\{x|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) > 0\}$ an. Es gibt eine Funktion f, die auf K konstant 1 ist, die außerhalb der Menge $\{x|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) > 0\}$ verschwindet und die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt.

Wir setzen nun $f_{n+1} = 1 - f$ und

$$h_j = \frac{f_j}{\sum_{i=1}^{n+1} f_i} \qquad j = 1,\ldots,n$$

Die Funktionen h_j sind wohldefiniert, weil für alle $x \in X$

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) > 0$$

gilt. Für $x \in \{x|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) > 0\}$ ist diese Funktion trivialerweise strikt größer als 0. Für $x \notin \{x|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) > 0\}$ gilt $f(x) = 0$ und damit $f_{n+1}(x) = 1$. Für alle $x \in K$ gilt $f_{n+1}(x) = 0$. Damit folgt für alle $x \in K$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} h_j(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(x)}{\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)}{\sum_{j=1}^{n+1} f_j(x)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)} = 1\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{supp}(h_j) = \operatorname{supp}(f_j) \subseteq U_j$$

□

5.3 Der Darstellungssatz von Riesz

Frédéric Riesz wurde am 22.1.1880 in Györ geboren, er starb am 28.2.1956 in Budapest.

Es sei X ein topologischer Raum. Ein Borel Maß μ auf X heißt von außen regulär, falls für alle Borelmengen A in X

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U)|\ A \subseteq U \text{ und } U \text{ ist offen}\}$$

gilt. Ein Borel Maß μ heißt von innen regulär, falls für alle Borelmengen A

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)|\ K \subseteq A \text{ und } K \text{ ist kompakt}\}$$

gilt. Ein Radon Maß auf X ist ein von außen und innen reguläres Borel Maß, das auf allen kompakten Mengen endlich ist. Ein signiertes Radon Maß ist ein signiertes Borel Maß, dessen positive und negative Variation Radon Maße sind.

Beispiel 34 *(i) Das Lebesgue Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist ein Radon Maß.*
(ii) Das Dirac- oder Punktmaß ist auf einem Hausdorff Raum mit der Borel σ-Algebra ein Radon Maß.

Falls K ein kompakter Hausdorff Raum ist, dann ist

$$M(K, \mathbb{R}) = \{\mu|\ \mu \text{ ist signiertes Radon Maß auf } K\}$$

ein Vektorraum, weil die signierten Maße μ nur endliche Werte annehmen. $M(K, \mathbb{R})$ wird mit der Norm

$$\|\mu\| = |\mu|(K) = \mu_+(K) + \mu_-(K)$$

ausgestattet. Wir bezeichnen $|\mu|$ auch als totale Variation von μ. $M(K)$ ist vollständig. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis, weil wir zeigen werden, dass $M(K)$ isometrisch isomorph zum Dualraum von $C(K)$ ist, also insbesondere vollständig.

Jede stetige Funktion können wir in ihren Positiv- und Negativanteil zerlegen

$$f^+ = \max\{f, 0\} \qquad\qquad f^- = -\min\{f, 0\}$$

Wir sagen, dass ein (nicht notwendig stetiges) Funktional ϕ positiv ist, falls für jede stetige, nichtnegative Funktion f die Ungleichung $\phi(f) \geq 0$ gilt.

Lemma 109 *Es sei K eine kompakte Menge. Dann ist jedes positive (nicht notwendig stetiges) Funktional ϕ auf $C(K)$ stetig und besitzt die Norm $\|\phi\| = \phi(1)$, wobei 1 die konstante Funktion mit Wert 1 bezeichnet.*

Beweis. Es gilt $\|1\| = 1$ und deshalb $\|\phi\| \geq \phi(1)$.

Es sei $f \in C(K)$ mit $\|f\| = 1$. Dann gilt $1-f \geq 0$ und somit $\phi(1-f) \geq 0$. Also gilt $\phi(f) \leq \phi(1)$ und weiter

$$\|\phi\| = \sup_{\|f\|=1} \phi(f) \leq \phi(1)$$

□

Lemma 110 *Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum und $\phi \in C(K)^*$. Dann gibt es positive Funktionale $\phi^+, \phi^- \in C(K)^*$ mit*

$$\phi = \phi^+ - \phi^-.$$

Beweis. Wir definieren für $0 \leq f$

$$\phi^+(f) = \sup\{\phi(g)|\ g \in C(K) \text{ und } 0 \leq g \leq f\}$$

Wir beobachten, dass $\phi^+(f)$ immer endlich ist. Wegen der Stetigkeit von ϕ gilt für $0 \leq g \leq f$

$$|\phi(g)| \leq \|\phi\|\|g\| \leq \|\phi\|\|f\|$$

und damit

$$\sup_{0 \leq g \leq f} |\phi(g)| \leq \|\phi\|\|f\|$$

ϕ^+ ist damit für alle nichtnegativen Funktionen definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi^+(rf) &= r\phi^+(f) \qquad r \geq 0 \\ \phi^+(f_1 + f_2) &= \phi^+(f_1) + \phi^+(f_2) \qquad\qquad f_1, f_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Wir weisen die zweite Gleichung nach.

$$\begin{aligned} \phi^+(f_1 + f_2) &= \sup\{\phi(g)|0 \leq g \leq f_1 + f_2\} \\ &\geq \{\phi(g_1 + g_2)|0 \leq g_1 \leq f_1, 0 \leq g_2 \leq f_2\} \\ &= \{\phi(g_1) + \phi(g_2)|0 \leq g_1 \leq f_1, 0 \leq g_2 \leq f_2\} \\ &= \phi^+(f_1) + \phi^+(f_2) \end{aligned}$$

Umgekehrt setzen wir $g_1 = \min\{g, f_1\}$ und $g_2 = g - g_1$. Dann gelten $0 \leq g_1 \leq f_1$ und $0 \leq g_2 \leq f_2$.

$$\begin{aligned}
\phi^+(f_1 + f_2) &= \sup\{\phi(g) | 0 \leq g \leq f_1 + f_2\} \\
&= \sup\{\phi(g_1) + \phi(g_2) | 0 \leq g \leq f_1 + f_2\} \\
&\leq \sup\{\phi(g_1) + \phi(g_2) | 0 \leq g_1 \leq f_1, 0 \leq g_2 \leq f_2\} \\
&= \phi^+(f_1) + \phi^+(f_2)
\end{aligned}$$

Nun definieren wir ϕ^+ auf ganz $C(K)$. Wir setzen

$$\phi^+(f) = \phi^+(f^+) - \phi^+(f^-)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\phi^+(rf) &= r\phi^+(f) \qquad r \in \mathbb{R} \\
\phi^+(f_1 + f_2) &= \phi^+(f_1) + \phi^+(f_2) \qquad\qquad f_1, f_2 \in C(K)
\end{aligned}$$

Wir weisen die zweite Gleichung nach. Es gibt eine nichtnegative Funktion g mit $f_1^+ + f_2^+ = (f_1 + f_2)^+ + g$. Somit gilt auch $f_1^- + f_2^- = (f_1 + f_2)^- + g$, weil

$$f_1^+ + f_2^+ - (f_1^- + f_2^-) = f_1 + f_2 = (f_1 + f_2)^+ - (f_1 + f_2)^-$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\phi^+(f_1 + f_2) &= \phi^+((f_1 + f_2)^+) - \phi^+((f_1 + f_2)^-) \\
&= \phi^+(f_1^+ + f_2^+ - g) - \phi^+(f_1^- + f_2^- - g) \\
&= \phi^+(f_1^+ + f_2^+ - g) + \phi^+(g) - \phi^+(f_1^- + f_2^- - g) - \phi^+(g) \\
&= \phi^+(f_1^+ + f_2^+) - \phi^+(f_1^- + f_2^-) \\
&= \phi^+(f_1) + \phi^+(f_2)
\end{aligned}$$

□

Lemma 111 *Es sei X ein topologischer Raum und $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit einem Borel Maß μ, das von außen regulär ist und das für alle offenen Mengen von innen regulär ist, d.h. für alle offenen Mengen U gilt*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) |\ K \subseteq U \text{ und } K \text{ ist kompakt}\}$$

Dann ist μ von innen regulär.

Beweis. Es sei A eine Borel Menge. Weil X σ-endlich ist können wir annehmen, dass die Menge A ein endliches Maß hat. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es zu A eine offene Menge U mit $A \subseteq U$ und

$$\mu(U) \leq \mu(A) + \epsilon$$

U wiederum enthält eine kompakte Menge K mit $\mu(U) \leq \mu(K) + \epsilon$. Außerdem gibt es eine offene Menge V mit

$$U \setminus A \subseteq V \quad \text{und} \quad \mu(V) \leq \mu(U \setminus A) + \epsilon \leq 2\epsilon$$

Damit ist $C = K \setminus V$ eine kompakte Menge mit $C \subseteq A$ und

$$\mu(C) = \mu(K) - \mu(K \cap V)$$

Wegen $\mu(K) \geq \mu(U) - \epsilon$ und $\mu(V) \geq \mu(K \cap V)$ folgt

$$\mu(C) \geq \mu(U) - \epsilon - \mu(V)$$

Wegen $A \subseteq U$ und $\mu(V) \leq 2\epsilon$ gilt

$$\mu(C) \geq \mu(A) - 3\epsilon$$

□

Ein gutes Beispiel, das die Aussage des Lemmas erklärt ist, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$ und die Teilmenge $A = [0,1| \setminus \mathbb{Q}$. Wir konstruieren die Menge direkt. q_n, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Dann ist

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$$

eine kompakte Menge und es gilt $\mu(A \setminus C) \leq 2\epsilon$.

Satz 31 *Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum und $C(K)$ der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf K mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

(i) Zu jedem positiven Funktional ϕ gibt es ein Radon Maß μ, so dass für alle $f \in C(K)$

$$\phi(f) = \int_K f d\mu$$

Das zu dem positiven Funktional gehörige Radon Maß erfüllt die folgende Eigenschaft: Für alle offenen Mengen U und alle kompakten Mengen C

$$\mu(U) = \sup\{\phi(f)|\ f \in C(K) \text{ und } supp(f) \subseteq U \text{ und } f(K) \subseteq [0,1]\}$$
$$\mu(C) = \inf\{\phi(f)|\ f \in C(K) \text{ und } \chi_C \leq f\}$$

Korollar 13 *Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum. $C(K)^*$ ist isometrisch isomorph zu $M(K,\mathbb{R})$ und der isometrische Isomorphismus $I : M(K,\mathbb{R}) \to C(K)^*$ ist durch*

$$I(\mu)(f) = \int_K f d\mu$$

gegeben.

Beweis von Korollar 13. Es sei $\mu = \mu^+ - \mu^-$ die Jordan Zerlegung und $K = K^+ \cup K^-$ die Hahn Zerlegung (K^+ und K^- sind i.A. natürlich nicht kompakt.). Es sind μ^+ und μ^- positive Maße und es gilt

$$\mu^+_{|K^-} = 0 \qquad \mu^-_{|K^+} = 0$$

Wir zeigen, dass I wohldefiniert und eine Isometrie ist.

$$\begin{aligned}\|I(\mu)\|_{C(K)^*} &= \sup_{\|f\|=1} |(I(\mu))(f)| = \sup_{\|f\|=1} \left|\int_K f d\mu\right| \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \left|\int_{K^+} f d\mu\right| + \sup_{\|f\|=1} \left|\int_{K^-} f d\mu\right| \leq |\mu|(K)\end{aligned}$$

Da μ regulär ist, so sind auch μ^+ und μ^- regulär. Deshalb gibt es für jedes $\epsilon > 0$ kompakte Mengen $C^+ \subseteq K^+$ und $C^- \subseteq K^-$ mit

$$\mu^+(C^+) \leq \mu^+(K^+) \leq \mu^+(C^+) + \epsilon$$
$$\mu^-(C^-) \leq \mu^-(K^-) \leq \mu^-(C^-) + \epsilon$$

Nach dem Satz von Urysohn (Lemma 105) gibt es eine stetige Funktion $g : K \to [-1,1]$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in C^+ \\ -1 & x \in C^- \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|I(\mu)\|_{C(K)^*} &\geq I(\mu)(g) = \int_K g d\mu \\
&= \int_{C^+} g d\mu + \int_{K^+\setminus C^+} g d\mu + \int_{C^-} g d\mu + \int_{K^-\setminus C^-} g d\mu \\
&\geq \mu^+(C^+) - \mu^+(K^+ \setminus C^+) + \mu^-(C^-) - \mu^-(K^- \setminus C^-) \\
&= |\mu|(K) - 4\epsilon
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 31. Zu ϕ möchten wir das Maß angeben, das ϕ darstellt. Falls A in der Borel σ-Algebra liegt und falls χ_A stetig ist, können wir $\mu(A) = \phi(\chi_A)$ setzen. I.a. ist χ_A jedoch nicht stetig, also kein Element aus $C(K)$. Deshalb werden wir χ_A durch stetige Funktionen approximieren.

Wir setzen für alle offenen Teilmengen U von K

$$\tilde{\mu}(U) = \sup\{\phi(f)|\ 0 \leq f \leq 1 \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subseteq U\}$$

Außerdem definieren wir für eine beliebige Teilmenge A von K

$$\mu^*(A) = \inf\{\tilde{\mu}(U)|\ A \subseteq U \text{ und } U \text{ ist offen}\}$$

Es gilt für alle offenen Mengen U

$$\tilde{\mu}(U) = \mu^*(U)$$

Es ist offensichtlich, dass $\tilde{\mu}(U) \geq \mu^*(U)$ gilt. Andererseits gilt für offene Mengen U und V mit $U \subseteq V$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(U) &= \sup\{\phi(f)|\ f(K) \subseteq [0,1] \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subseteq U\} \\
&\leq \sup\{\phi(f)|\ f(K) \subseteq [0,1] \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subseteq V\} = \tilde{\mu}(V)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\tilde{\mu}(U) \leq \mu^*(U)$.

Wir zeigen nun, dass μ^* ein äußeres Maß ist.

$$\mu^*(\emptyset) = \sup\{\phi(f)|\ f(K) \subseteq [0,1] \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subseteq \emptyset\} = \phi(0) = 0$$

Für alle Teilmengen A von K gilt $\mu^*(A) \geq 0$, weil ϕ positiv ist.

Es seien A und B Teilmengen von K mit $A \subseteq B$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf\{\tilde{\mu}(U) |\ A \subseteq U \text{ und } U \text{ ist offen}\} \\ &\leq \inf\{\tilde{\mu}(U) |\ B \subseteq U \text{ und } U \text{ ist offen}\} = \mu^*(B)\end{aligned}$$

Es seien U_n, $n \in \mathbb{N}$, offene Teilmengen von K. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n)$$

Es sei f eine Funktion mit

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \qquad f(K) \subseteq [0,1]$$

$\operatorname{supp}(f)$ ist eine kompakte Menge, weil K kompakt ist. Deshalb gibt es $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$ mit

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$$

Es gibt eine Zerlegung der Eins (Lemma 108) für $\operatorname{supp}(f)$. Es gibt Funktionen g_j, $j = 1, \ldots, m$ mit

$$\begin{aligned}&\forall x \in \operatorname{supp}(f) : \sum_{j=1}^{m} g_j(x) = 1 \\ &\forall j = 1, \ldots, m : \operatorname{supp}(g_j) \subseteq U_{i_j} \\ &\forall j = 1, \ldots, m : g_j(K) \subseteq [0,1]\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}&f = \sum_{j=1}^{m} f g_j \\ &\forall j = 1, \ldots, m : \operatorname{supp}(f g_j) \subseteq U_{i_j} \\ &\forall j = 1, \ldots, m : f g_j(K) \subseteq [0,1]\end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^{m} \phi(f g_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mu}(U_{i_j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) &= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \\
&= \sup\left\{\phi(f) \,\middle|\, f(K) \subseteq [0,1] \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige Teilmengen A_i, $i \in \mathbb{N}$, von K

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Nach Definition von μ^* gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine offene Menge U_i, so dass $\mu^*(U_i) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$.

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \inf\left\{\mu^*(U) \,\middle|\, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq U\right\} \\
&\leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \epsilon
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass μ^* ein äußeres Maß ist.

Wir können nun den Satz von Caratheodory anwenden. Die Menge aller μ^*-messbaren Mengen bildet eine σ-Algebra und die Einschränkung μ von μ^* auf diese σ-Algebra ist ein Maß.

Wir zeigen nun, dass alle offenen Mengen μ^*-messbar sind. Wir müssen also zeigen, dass für alle offenen Mengen U und alle Teilmengen E von X

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U)$$

gilt. Wir müssen nur die Ungleichung

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U)$$

zeigen, weil μ^* ein äußeres Maß ist. Dazu betrachten wir zunächst den Fall, dass E eine offene Menge ist. Dann ist auch $E \cap U$ offen und es gibt eine Funktion f mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq E \cap U$, $f(K) \subseteq [0,1]$ und $\phi(f) > \mu^*(E \cap U) - \epsilon$.

Dann ist $E \setminus \operatorname{supp}(f)$ eine offene Menge und es gilt

$$E \setminus \operatorname{supp}(f) \supset E \setminus (E \cap U) = E \cap (E \cap U)^c = E \cap (E^c \cup U^c) = E \setminus U$$

Es gibt eine Funktion g mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq E \setminus \operatorname{supp}(f)$, $g(K) \subseteq [0,1]$ und $\phi(g) > \mu^*(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - \epsilon$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) \quad &= \sup\{\phi(h) |\ \operatorname{supp}(h) \subseteq E \text{ und } h(K) \subseteq [0,1]\} \\
&\geq \phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g) \\
&\geq \mu^*(E \cap U) - \epsilon + \mu^*(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - \epsilon \\
&\geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U) - 2\epsilon
\end{aligned}$$

Damit haben wir für alle offenen Mengen U und E gezeigt, dass

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U)$$

Wir zeigen nun, dass dies auch für beliebige Mengen E gilt. Nach der Definition von μ^* gibt es eine offene Menge V mit $E \subseteq V$, so dass

$$\mu^*(V) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

Hiermit folgt

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U)$$

Da $E \subseteq V$ folgt weiter

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U)$$

Also sind alle offenen Mengen μ^*-messbar und die σ-Algebra umfasst die Borel σ-Algebra. Die Einschränkung von μ^* auf diese σ-Algebra nennen wir μ.

Die äußere Regularität von μ folgt aus der Definition von μ^* und aus $\tilde{\mu} = \mu^*$.

Es folgt aus der Definition von μ, dass für alle offenen Mengen U gilt

$$\mu(U) = \sup\{\phi(f) |\ f \in C(K) \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subseteq U \text{ und } f(K) \subseteq [0,1]\}$$

Wir wollen nun für kompakte Mengen C

$$\mu(C) = \inf\{\phi(f) |\ f \in C(K) \text{ und } \chi_C \leq f\}$$

zeigen. Nach dem Satz von Urysohn (Lemma **??**) gibt es für alle offene Mengen U mit $C \subseteq U$ eine Funktion f_U mit $\mathrm{supp}(f_U) \subseteq U$ und $f_U(K) \subseteq [0,1]$, die auf C konstant gleich 1 ist. Es folgt wegen der äußeren Regularität

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \inf\{\mu(U)|\ U \text{ ist offen und } C \subseteq U\} \\ &\geq \inf\{\phi(f_U)|\ U \text{ ist offen und } C \subseteq U\} \geq \inf\{\phi(h)|\ \chi_C \leq h\}\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die inverse Ungleichung. Es sei $f \geq \chi_C$. Wir setzen

$$U_\epsilon = \{x|\ f(x) > 1 - \epsilon\}$$

Wegen der äußeren Regularität

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \inf\{\mu(U)|\ U \text{ ist offen und } C \subseteq U\} \leq \mu(U_\epsilon) \\ &= \sup\{\phi(g)|\ \mathrm{supp}(g) \subseteq U_\epsilon \text{ und } g(K) \subseteq [0,1]\} \leq \phi\left(\tfrac{1}{1-\epsilon} f\right)\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $\frac{1}{1-\epsilon} f \geq g$ und damit $\phi(\frac{1}{1-\epsilon} f) \geq \phi(g)$ gilt. Es folgt für alle $\epsilon > 0$

$$\mu(C) \leq \tfrac{1}{1-\epsilon}\phi(f)$$

Wir zeigen die innere Regularität. Nach Lemma **??** brauchen wir nur zu zeigen, dass für alle offenen Mengen U gilt

$$\mu(U) = \sup\{\mu(C)|\ C \text{ ist kompakt und } C \subseteq U\}$$

Es sei $\epsilon > 0$ und U eine offenen Menge. Dann gibt es eine Funktion f mit $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$, $f(C) \subseteq [0,1]$ und $\phi(f) + \epsilon \geq \mu(U)$. Dann ist $\mathrm{supp}(f)$ eine kompakte Teilmenge von U. Für alle g mit $\chi_{\mathrm{supp}(f)} \leq g$ gilt $f \leq g$. Damit gilt

$$\phi(f) \leq \phi(g)$$

und

$$\mu(U) - \epsilon \leq \phi(f) \leq \phi(g)$$

Wenn wir nun das Infimum über alle Funktionen g bilden, erhalten wir

$$\mu(U) - \epsilon \leq \mu(\mathrm{supp}(f))$$

Also ist μ von innen regulär. Nun zeigen wir, dass für alle $f \in C(K)$

$$\phi(f) = \int_K f d\mu$$

gilt. Es reicht, dies für $f \in C(K)$ mit $f(K) \subseteq [0,1]$ zu zeigen. Wir können f nämlich in ihren positiven und negativen Teil aufspalten $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$. Es gilt $f = f^+ - f^-$ und

$$\frac{f^+}{\|f\|_\infty}, \frac{f^-}{\|f\|_\infty} \in C(K)$$

Wir können also annehmen, dass $f(K) \subseteq [0,1]$ gilt. Für $N \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$C_0 = \operatorname{supp}(f)$$

und

$$C_j = \{x|\ f(x) \geq \frac{j}{N}\} \qquad j = 1 \ldots, N$$

und für $j = 1, \ldots, N$

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & x \notin C_{j-1} \\ f(x) - \dfrac{j-1}{N} & x \in C_{j-1} \setminus C_j \\ \dfrac{1}{N} & x \in C_j \end{cases}$$

oder auch

$$f_j = \min\left\{\max\left\{f - \frac{j-1}{N}, 0\right\}, \frac{1}{N}\right\}$$

Aus der letzteren Darstellung entnimmt man sofort, dass f_j stetig ist. Wir weisen die Gleichheit nach. Falls $x \notin C_{j-1}$, dann gilt $f(x) < \frac{j-1}{N}$ und folglich $f(x) - \frac{j-1}{N} < 0$. Deshalb gilt $\max\left\{f(x) - \frac{j-1}{N}, 0\right\} = 0$ und schließlich $\min\left\{\max\left\{f - \frac{j-1}{N}, 0\right\}, \frac{1}{N}\right\} = 0$. Falls $x \in C_{j-1} \setminus C_j$, dann gilt $\frac{j-1}{N} \geq f(x) < \frac{j}{N}$ und somit $0 \geq f(x) - \frac{j-1}{N} < \frac{1}{N}$. Der letzte Fall wird genauso behandelt.

Dann gilt

$$f = \sum_{j=1}^{N} f_j \qquad\qquad \frac{1}{N}\chi_{C_j} \leq f_j \leq \frac{1}{N}\chi_{C_{j-1}}$$

f wird durch eine Teleskopsumme dargestellt. Wir weisen die Gleichung nach. Es sei $x \in C_{\ell-1} \setminus C_\ell$. Dann

$$\begin{aligned} \forall m = 1, \ldots, \ell-1: \quad & f_m(x) = \frac{1}{N} \\ & f_\ell(x) = f(x) - \frac{\ell-1}{N} \\ \forall m = \ell+1, \ldots, N: \quad & f_m(x) = 0 \end{aligned}$$

Aus der Monotonie des Integrals folgt

$$\frac{1}{N}\mu(C_j) \leq \int_K f_j d\mu \leq \frac{1}{N}\mu(C_{j-1})$$

und damit

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(C_j) \leq \int_K f d\mu \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(C_{j-1})$$

Wegen () gilt

$$\mu(C_j) = \inf\{\phi(g)|g \geq \chi_{C_j}\} \leq \phi(Nf_j)$$

Weiter gilt für alle offenen Mengen U mit $C_{j-1} \subseteq U$, dass $\operatorname{supp}(f_j) \subseteq U$. Also gilt für alle U

$$\mu(U) = \sup\{\phi(h)|\operatorname{supp}(h) \subseteq U \text{ und } h(K) \subseteq [0,1]\} \geq \phi(Nf_j)$$

Da μ von außen regulär ist, folgt

$$\mu(C_{j-1}) \geq \phi(Nf_j)$$

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{1}{N}\mu(C_j) \leq \phi(f_j) \leq \frac{1}{N}\mu(C_{j-1})$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(C_j) \leq \sum_{j=1}^{N}\phi(f_j) \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(C_{j-1})$$

bzw.

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(C_j) \leq \phi(f) \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\mu(C_{j-1})$$

Andererseits gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(C_j) \leq \int_K f d\mu \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\mu(C_{j-1})$$

Damit ergibt sich

$$\left|\phi(f) - \int_K f d\mu\right| \leq \frac{1}{N}(\mu(C_0) - \mu(C_N))$$

Dies konvergiert für $N \to \infty$ gegen 0. $\square$

Beispiel 35 *Es sei $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{T}$, so dass*
(i) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist offen.
(ii) Eine Teilmenge, die ∞ als Element enthält ist genau dann offen, wenn das Komplement endlich ist.

$(X, \mathcal{T})$ ist ein kompakter, topologischer Raum. Es gilt $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{P}(X)$. Das Zählmaß

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Borel Maß, das nicht von außen regulär ist.

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{P}(X)$. Da $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}(X)$, folgt, dass $\mathbb{R}^c \in \mathfrak{B}(X)$. Es gilt aber $\mathbb{R}^c = \{\infty\}$. $\square$

5.4 Funktionen beschränkter Variation und $C[a,b]^*$

Die totale Variation eines signierten Maßes ist das Maß $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, wobei μ^+ und μ^- der positive und negative Teil von μ sind.

Lemma 112 *Es sei μ ein signiertes Maß. Dann gilt*

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| \,\middle|\, A = \bigcup_{j=1}^n A_j,\ A_j \textit{ paarweise disjunkt}\right\}$$

Häufig wird auch der in Lemma **??** angegebene Ausdruck als Definition für die totale Variation benutzt.

Beweis. Es gilt $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. $\mathbb{R} = P \cup N$ sei die Hahn-Zerlegung von$\mathbb{R}$. Dann gilt

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) = \mu^+(A \cap P) + \mu^-(A \cap N) = |\mu(A \cap P)| + |\mu(A \cap N)|$$

und es folgt

$$|\mu|(A) \leq \sup\left\{\sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| \,\middle|\, A = \bigcup_{j=1}^n A_j,\ A_j \text{ paarweise disjunkt}\right\}$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| &\leq \sum_{j=1}^n |\mu(A_j \cap P)| + |\mu(A_j \cap N)| \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^+(A_j \cap P) + \mu^-(A_j \cap N) = \mu^+(A) + \mu^-(A)\end{aligned}$$

□

Für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $T_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$T_F(x) = \sup\left\{\sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \,\middle|\, -\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Wir bezeichnen T_F als die totale Variation von F und wir sagen, dass F beschränkte Variation besitzt, wenn T_F beschränkt ist.

Für $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $T_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \;\middle|\; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Lemma 113 *(i) Falls $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkte Variation besitzt, dann sind die Funktionen $T_F + F$ und $T_F - F$ wachsende Funktionen.*

(ii) Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn F die Differenz zweier beschränkten, wachsenden Funktionen ist.

(iii) Falls F von beschränkter Variation und rechtsseitig stetig ist, dann ist T_F rechtsseitig stetig.

(iv) Falls F von beschränkter Variation ist, dann gilt $\lim_{z\to-\infty} T_F(z) = 0$.

Beweis. □

Lemma 114 *Für jede wachsende, rechtsseitig stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutiges Maß μ_F auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, so dass für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$*

$$\mu_F((s,t]) = F(t) - F(s)$$

gilt. Falls G eine weitere Funktion dieser Art ist und falls $\mu_F = \mu_G$ gilt, dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.

Falls μ ein Maß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ist, das auf allen beschränkten Borelmengen endlich ist, dann ist

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

eine wachsende, rechtsseitig stetige Funktion.

Lemma 115 *Es sei μ ein Lebesgue-Stieltjes Maß und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Mengen, die bzgl. des äußeren Maßes μ^* messbar sind. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(U) | A \subseteq U \text{ und } U \text{ ist offen}\} \\ &= \sup\{\mu(K) | A \supseteq K \text{ und } K \text{ ist kompakt}\} \end{aligned}$$

Lemma 116 *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige Funktion von beschränkter Variation.*

(i) Es gibt genau ein signiertes Radon-Maß μ_F auf $\mathbb{R}$, so dass für alle $s, t \in \mathbb{R}$

$$\mu_F((s,t]) = F(t) - F(s)$$

gilt.

(ii) Es gilt $|\mu_F| = \mu_F^+ + \mu_F^- = \mu_{T_F}$.

Beweis. (ii) Nach Lemma **??** gilt

$$\begin{aligned}
&|\mu|((-\infty, x]) \\
&\geq \sup\left\{ \sum_{j=1}^n |\mu((x_{j-1}, x_j])| \,\middle|\, -\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x \right\} \\
&= \sup\left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \,\middle|\, -\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x \right\} \\
&= T_F(x) = \mu_{T_F}((-\infty, x])
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung muss man beachten, dass $\lim_{z \to -\infty} T_F(z) = 0$ (Lemma **??**).

Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung. Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$

$$|\mu_F((s,t])| = |F(t) - F(s)| \leq \mu_{T_F}((s,t])$$

Hieraus folgt für alle Borelmengen A

$$|\mu_F(A)| \leq \mu_{T_F}(A)$$

Wegen Lemma **??** existieren zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jeder Borelmenge A paarweise disjunkte Borelmengen A_j, $j = 1, \ldots, n$ mit $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ und

$$|\mu_F|(A) + \epsilon \leq \sum_{j=1}^n |\mu_F(A_j)| \leq \sum_{j=1}^n \mu_{T_F}(A_j) = \mu_{T_F}(A)$$

□

$\mathcal{BV}([a,b])$ ist der Raum aller reellwertigen Funktionen mit beschränkter Variation auf $[a,b]$. $\mathcal{NBV}([a,b])$ ist der Teilraum aller derjenigen Funktionen, die rechtsseitig stetig sind.

Wir führen auf $\mathcal{BV}([a,b])$ die Norm

$$\|F\|_{BV} = |F(a)| + T_F(b)$$

ein.

Satz 32 *Zu jedem $\phi \in C([a,b])$ gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{NBV}([a,b])$ mit $\|\phi\|_{C([a,b])} = \|F\|$, so dass für alle $g \in C([a,b])$*

$$\phi(g) = \int_a^b g(x) d\mu_F(x)$$

$C([a,b])^*$ ist isometrisch isomorph zu $\mathcal{NBV}([a,b])$. Der isometrische Isomorphismus ordnet $F \in \mathcal{NBV}([a,b])$ das Maß $F(a)\delta_a + \mu_F$ zu, wobei $\mu_F((a,x]) = F(x) - F(a)$

Beweis. Es sei $\phi \in C[a,b]^*$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz **??**) gibt es ein signiertes Radon-Maß $\tilde{\mu}$ auf $[a,b]$, das ϕ darstellt. Es gilt $\|\phi\| = |\tilde{\mu}|([a,b])$ Wir können $\tilde{\mu}$ auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$$\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cap [a,b])$$

fortsetzen. Dann gibt es zwei (positive) Radon-Maße μ^+ und μ^- mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Wegen Lemma **??** gibt es zwei wachsende, rechtsseitig stetige Funktionen G und H mit $\mu^+ = \mu_G$ und $\mu^- = \mu_H$. Damit gilt

$$\mu = \mu_G - \mu_H$$

und wir setzen $F = G - H$ und es gilt $\mu = \mu_F$. Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $\mu = \mu_F = \mu_{F+c}$. Als neues F wählen wir unter allen $F + c$ dasjenige, das $\mu(\{a\}) = F(a)$ erfüllt.

Nach Lemma **??** gilt $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ und somit erhalten wir

$$\|\phi\| = \mu([a,b]) = \mu_{T_F}([a,b]) = \mu_{T_F}(\{a\}) + \mu_{T_F}((a,b]) = \mu_{T_F}(\{a\}) + T_F(b) - T_F(a)$$

Wegen $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ gilt $T_F(x) = 0$ für $x < a$. Daraus ergibt sich

$$\|\phi\| = \mu_{T_F}(\{a\}) + T_F(b) - T_F(a) = T_F(b)$$

Es sei $F_{[a,b]}$ die Einschränkung von F auf $[a,b]$. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$

$$T_{F_{[a,b]}}(x) = T_F(x) - T_F(a)$$

Weiter gilt $T_F(a) = |\mu(\{a\})| = |F(a)|$. Somit

$$\|\phi\| = T_{F_{[a,b]}}(b) + |F(a)|$$

□

Beispiel 36 *Eine Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, in $C[a,b]$ konvergiert genau dann in der schwachen Topologie gegen f, wenn die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$, in der Norm beschränkt ist und wenn die Folge punktweise gegen f konvergiert.*

Lemma 117 *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige Funktion von beschränkter Variation. Dann gilt*

$$\mu_F^+ = \mu_{\frac{1}{2}T_F+F} \qquad\qquad \mu_F^- = \mu_{\frac{1}{2}T_F-F}$$

Satz 33 *(Müntz)[HiLa] Es sei r_k, $k \in \mathbb{N}$, eine strikt wachsende Folge reeller Zahlen mit $r_0 = 0$, $r_1 \geq 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} = \infty$. Dann ist die Menge der Funktionen x^{r_k}, $k \in \mathbb{N}$, in $C[0,1]$ total.*

5.5 Die schwache Topologie

Es sei X ein normierter Vektorraum. Die schwache Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist die von den Mengen

$$\{x|\ x^*(x) < t\} \qquad t \in \mathbb{R} \text{ und } x^* \in X^*$$

erzeugte Topologie. Die schwache* Topologie auf X^* ist die von den Mengen

$$\{x^*|\ x^*(x) < t\} \qquad t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in X$$

erzeugte Topologie.

Falls X reflexiv ist, dann sind die schwache* Topologie auf X^* und die schwache Topologie auf X^*, d.h. die Topologie, die von den Mengen

$$\{x^*|x^{**}(x^*) < t\} \qquad t \in \mathbb{R}, x^{**} \in X^{**}$$

erzeugt wird, identisch.

Lemma 118 *Es sei X ein normierter Raum.*
(i) Die offenen Mengen der schwachen Topologie sind alle Vereinigungen von endlichen Schnitten von Mengen der Form

$$\{x|\ x^*(x) < t\} \qquad t \in \mathbb{R} \text{ und } x^* \in X^*$$

(ii) Eine Menge U ist genau dann in der schwachen Topologie Umgebung von x_0, wenn es ein $\epsilon > 0$, ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ gibt, so dass

$$\left\{ x \,\middle|\, \max_{1 \le i \le n} x_i^*(x - x_0) < \epsilon \right\} \subseteq U$$

Man kann statt der oben angegebenen Mengen auch die Mengen mit

$$\left\{ x \,\middle|\, \max_{1 \le i \le n} |x_i^*(x - x_0)| < \epsilon \right\} \subseteq U$$

betrachten.

Beweis. (i) Es ist offensichtlich, dass die leere Menge sich so darstellen lassen kann. Außerdem ist offensichtlich, dass beliebige Vereinigungen solcher Mengen wieder diese Gestalt haben.

Wir zeigen, dass endliche Schnitte solcher Mengen wieder diese Form haben. Es seien $A(k,\iota)$, $k = 1,\ldots,n$, $\iota \in I_k$ endliche Schnitte von offenen Halbräumen. Es gilt

$$\bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{\iota\in I_k} A(k,\iota) = \bigcup_{\iota_1\in I_1,\ldots,\iota_n\in I_n} \bigcap_{k=1}^{n} A(k,\iota_k).$$

Wir prüfen dies nach. Für alle $\iota_1,\ldots,\iota_n$ gilt $A(k,\iota_k) \subseteq \bigcup_{\iota\in I_k} A(k,\iota)$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A(k,\iota_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{\iota\in I_k} A(k,\iota)$$

Deshalb gilt

$$\bigcup_{\iota_1\in I_1,\ldots,\iota_n\in I_n} \bigcap_{k=1}^{n} A(k,\iota_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{\iota\in I_k} A(k,\iota)$$

(ii) Die Menge

$$\left\{ x \,\middle|\, \max_{1\le i\le n} x_i^*(x-x_0) < \epsilon \right\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x|\ x_i^*(x-x_0) < \epsilon\}$$

ist als endlicher Durchschnitt offener Mengen offen.

Falls $x_0 \in U$, dann gibt es x_j^* und t_j, so dass

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \{x|x_j^*(x) < t_j\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{x|x_j^*(x-x_0) < t_j - x_j^*(x_0)\} \subseteq U$$

Wir setzen $s_j = t_j - x_j^*(x_0)$. Es gilt $0 < s_j$, weil

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \{x|x_j^*(x-x_0) < s_j\} \subseteq U$$

Wir setzen $s = \min_{1\le j\le n} s_j$. Dann gilt

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \{x|x_j^*(x-x_0) < s\} \subseteq U$$

□

Lemma 119 *Es sei X ein normierter Vektorraum.*
(i) X mit der schwachen Topologie und X^* mit der schwachen Topologie sind topologische Vektorräume.*
(ii) Die Norm Topologie ist feiner als die schwache Topologie.
(iii) Die Norm-Topologie auf X^* ist feiner als die schwache Topologie. Die schwache Topologie auf X^* ist feiner als die schwache Topologie.*

Falls der normierte Raum unendlich-dimensional ist, dann sind die offenen Mengen der schwachen Topologie unbeschränkte Mengen. Die offene Einheitskugel ist also eine Menge, die in der Norm-Topologie offen, aber in der schwachen Topologie nicht offen ist.

Beweis. (i) Wir zeigen, dass die Addition $\phi : X \times X \to X$ mit $\phi(x, y) = x+y$ eine stetige Abbildung ist. Es sei U eine Umgebung von $x_0 + y_0$ in X. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und stetige Funktionale $x_1^*, \ldots, x_n^*$, so dass

$$\begin{aligned} U &\supseteq \left\{ z \,\middle|\, \max_{1\le i\le n} |x_i^*(z - (x_0 + y_0))| < \epsilon \right\} \\ &= \left\{ x + y \,\middle|\, \max_{1\le i\le n} |x_i^*(x + y - (x_0 + y_0))| < \epsilon \right\} \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$U \supseteq \left\{ x + y \,\middle|\, \max_{1\le i\le n} |x_i^*(x - x_0)| < \tfrac{1}{2}\epsilon, \max_{1\le i\le n} |x_i^*(y - y_0)| < \tfrac{1}{2}\epsilon \right\}$$

Hieraus folgt, dass

$$\phi^{-1}(U) \supseteq \left\{ x \,\middle|\, \max_{1\le i\le n} |x_i^*(x - x_0)| < \tfrac{1}{2}\epsilon \right\} \times \left\{ y \,\middle|\, \max_{1\le i\le n} |x_i^*(y - y_0)| < \tfrac{1}{2}\epsilon \right\}$$

(ii) Die Mengen $\{x|\ x^*(x) < t\}$ sind in der Norm-Topologie offen, weil x^* ein normstetiges Funktional ist. Andererseits erzeugen diese Mengen die schwache Topologie. □

Lemma 120 *(i) Es sei X ein normierter Vektorraum. Ein Netz x_ι, $\iota \in I$, konvergiert genau dann in der schwachen Topologie gegen ein Element x_0, wenn für alle $x^* \in X^*$*

$$\lim_\iota x^*(x_\iota) = x^*(x_0)$$

gilt.

(ii) Es seien X und Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann normstetig, wenn $y^* \circ T$ für alle $y^* \in Y^*$ stetig ist.

Das Lemma legt nahe, dass man die schwache Konvergenz auch als punktweise Konvergenz bezeichnet.

Beweis. (i) Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz, das gegen x_0 konvergiert. Für alle $\epsilon > 0$ und alle $x^* \in X^*$ ist

$$\{x|\ |x^*(x - x_0)| < \epsilon\}$$

eine Umgebung von x_0. Deshalb gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes x^* ein ι_0, so dass für alle $\iota \geq \iota_0$

$$|x^*(x_\iota - x_0)| < \epsilon$$

und es gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\lim_\iota x^*(x_\iota) = x^*(x_0).$$

Wir nehmen nun an, dass für alle $x^* \in X^*$ $\lim_\iota x^*(x_\iota) = x^*(x_0)$ gilt. Es sei U eine Umgebung von x_0. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und Funktionale $x_1^*, \ldots, x_n^*$, so dass

$$\left\{ x \,\middle|\, \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^*(x - x_0)| < \epsilon \right\} \subseteq U$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ und $i = 1, \ldots, n$ gibt es ein ι_i, so dass für alle ι mit $\iota \geq \iota_i$

$$|x_i^*(x_\iota - x_0)| < \epsilon$$

Wir wählen ι_0 mit $\iota_1, \ldots, \iota_n \leq \iota_0$. Dann gilt für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$ und alle $i = 1, \ldots, n$

$$|x_i^*(x_\iota - x_0)| < \epsilon$$

Also gilt für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^*(x_\iota - x_0)| < \epsilon$$

□

Beispiel 37 *(i) Es sei $1 < p < \infty$ und e_i, $i \in \mathbb{N}$, seien die Einheitsvektoren. Dann konvergiert die Folge e_i, $i \in \mathbb{N}$, in der schwachen Topologie gegen 0.*

(ii) Die Folge e_i, $i \in \mathbb{N}$, konvergiert in ℓ^1 nicht in der schwachen Topologie.

Beweis. (i)

$$\lim_{i\to\infty} x^*(e_i) = \lim_{i\to\infty} x^*(i)$$

Da $x^* \in \ell^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist der Grenzwert 0.

(ii) Der Dualraum von ℓ^1 ist ℓ^∞. Wir wählen $x^* = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$. Damit gilt

$$x^*(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$

□

Satz 34 *Es sei X ein normierter Raum und C eine konvexe Menge in X. Dann ist der Abschluss von C in der Norm Topologie gleich dem Abschluss von C in der schwachen Topologie.*

$$\overline{C}^{\|\ \|} = \overline{C}^{schw}$$

Die analoge Aussage für die schwache* Topologie ist nicht richtig. Dazu betrachtet man einen Banachraum X, der nicht reflexiv ist, und seinen Bidualraum X^{**}. X ist isometrisch isomorph zu einem in der Norm Topologie abgeschlossenen Teilraum von X^{**}. Andererseits ist, wie wir in Lemma feststellen werden, X in X^{**} schwach* dicht. Damit ist der schwache* Abschluss von X in X^{**} gleich X^{**}.

Die Voraussetzung der Konvexität ist notwendig. Das Komplement der offenen Einheitskugel ist in der Norm-Topologie abgeschlossen, aber in der schwachen Topologie nicht abgeschlossen.

Beweis. Nach Lemma ist die Norm Topologie feiner als die schwache Topologie. Deshalb ist jede Menge, die in der schwachen Topologie abgeschlossen ist, auch in der Norm-Topologie abgeschlossen. Es folgt

$$\overline{C}^{\|\ \|} = \bigcap_{\substack{C\subseteq A \\ A \text{ norm-abgeschlossen}}} A \subseteq \bigcap_{\substack{C\subseteq A \\ A \text{ schwach-abgeschlossen}}} A = \overline{C}^{\text{schw}}$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Es sei $x_0 \notin \overline{C}^{\| \ \|}$. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional $x^* \in X^*$, so dass

$$x^*(x_0) > 1 \quad \text{und für alle } x \in \overline{C}^{\| \ \|} : x^*(x) \leq 1$$

Also gilt

$$x_0 \notin \overline{C}^{\text{schw}}$$

□

Lemma 121 *Es sei X ein Vektorraum und $f, g_1, \ldots, g_n$ lineare Funktionale auf X, so dass*

$$Kern(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} Kern(g_i)$$

Dann ist f eine Linearkombination der Funktionale $g_1, \ldots, g_n$

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$$

Beweis. Wir benutzen Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist offensichtlich. Wir nehmen an, dass wir die Aussage für n bewiesen haben und schliessen nun auf $n + 1$. Es gelte

$$\text{Kern}(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Kern}(g_i)$$

Das heisst, dass für alle x, die für alle $i = 1, \ldots, n+1$ die Gleichung $g_i(x) = 0$ erfüllen, gilt, dass $f(x) = 0$. Wir betrachten nun

$$f_{|\text{Kern}(g_{n+1})}, g_{1|\text{Kern}(g_{n+1})}, \ldots, g_{n|\text{Kern}(g_{n+1})}$$

Dann gilt

$$\text{Kern}\left(f_{|\text{Kern}(g_{n+1})}\right) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \text{Kern}\left(g_{i|\text{Kern}(g_{n+1})}\right)$$

Die Induktionsannahme liefert nun

$$f_{|\text{Kern}(g_{n+1})} = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{i|\text{Kern}(g_{n+1})}$$

Also gilt für alle $x \in \mathrm{Kern}(g_{n+1})$ die Gleichung

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) = 0.$$

Damit folgt

$$\mathrm{Kern}\left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) \supseteq \mathrm{Kern}(g_{n+1})$$

Nun folgt mit dem Fall $n = 1$ die Behauptung. □

Lemma 122 *Es sei X ein normierter Vektorraum.*
(i) Der Raum aller Funktionale auf X, die bzgl. der schwachen Topologie stetig sind, ist gleich dem Raum aller beschränkten Funktionale X^*.
(ii) Der Raum aller Funktionale auf X^*, die bzgl. der schwachen Topologie stetig sind, ist gleich X.*

Beweis. (i) Da die Norm-Topologie feiner als die schwache Topologie ist, so ist jedes Funktional, das schwach stetig ist, auch normstetig.

Es sei nun ϕ ein normstetiges Funktional. Wir wollen zeigen, dass ϕ schwach stetig ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass ϕ in 0 schwach stetig ist. Wir müssen zeigen, dass $\phi^{-1}((-\epsilon, \epsilon))$ eine Umgebung von 0 in X ist.

$$\phi^{-1}((-\epsilon, \epsilon)) = \{x | |\phi(x)| < \epsilon\}$$

ist eine Umgebung von 0.

(ii) Es sei ϕ schwach* stetig auf X^*. Dann ist $\{x^* | \ |\phi(x^*)| < 1\}$ eine schwache Umgebung von 0. Also gibt es $\epsilon > 0$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit

$$\left\{x^* \,\middle|\, \max_{1 \le i \le n} |x_i(x^*)| < \epsilon\right\} \subseteq \{x^* | \ |\phi(x^*)| < 1\}.$$

Es folgt insbesondere

$$\mathrm{Kern}(\phi) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Kern}(x_i).$$

Mit Lemma **??** folgt

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Damit gilt $\phi \in X$. Die Umkehrung folgt genauso wie in (i). □

Satz 35 *(Goldstine) Es sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist $\{x \in X|\ \|x\|_X \leq 1\}$ schwach* dicht in $\{x^{**} \in X^{**}|\ \|x^{**}\|_{X^{**}} \leq 1\}$.*

Beweis. Im folgenden benutzen wir, dass X isometrisch nach X^{**} und X^* nach X^{***} eingebettet werden kann.

Wir zeigen, dass für $x_0^{**} \in X^{**}$ mit

$$x_0^{**} \notin \overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*}$$

die Ungleichung $\|x_0^{**}\|_{X^{**}} > 1$ gilt, also

$$x_0^{**} \notin \{x^{**} \in X^{**}|\ \|x^{**}\|_{X^{**}} \leq 1\}.$$

Dazu zeigen wir, dass es ein Funktional $\phi : X^{**} \to \mathbb{R}$ gibt, das x_0^{**} von $\overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*}$ strikt trennt. Dieses Funktional erfüllt $\phi(x_0^{**}) > 1$, $\phi \in X^*$ und $\|\phi\|_{X^*} = \|\phi\|_{X^{***}} \leq 1$. Hiermit folgt

$$1 < \phi(x_0^{**}) \leq \|\phi\|_{X^{***}} \|x_0^{**}\|_{X^{**}} = \|\phi\|_{X^*} \|x_0^{**}\|_{X^{**}} \leq \|x_0^{**}\|.$$

Wir konstruieren nun das Funktional ϕ. Es ist $\{x_0^{**}\}$ eine kompakte Menge und $\overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*}$ eine abgeschlossene Menge. Nach Lemma 28 gibt es eine offene Umgebung U von 0 in der schwachen* Topologie, so dass

$$(\{x_0^{**}\} + U) \cap (\overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*} + U) = \emptyset$$

Wir können annehmen, dass U konvex ist. Wir setzen $V = \overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*} + U$ und wählen das zugehörige Minkowski Funktional $p_V(x) = \inf\{t|\ \frac{1}{t}x \in V\}$. V ist eine konvexe Menge, weil U und $\overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*}$ konvexe Mengen sind. Das Minkowski Funktional ist wohldefiniert, weil V konvex ist und weil nach Lemma 29

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$$

gilt. Auf dem von x_0^{**} erzeugten, 1-dimensionalen Teilraum definieren wir das Funktional ϕ durch $\phi(x_0^{**}) = p_V(x_0^{**})$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein Funktional ϕ auf X^{**}, das

$$\phi(x_0^{**}) = p_V(x_0^{**}) \qquad \forall x^{**} \in X^{**} : |\phi(x^{**})| \leq p_V(x^{**})$$

erfüllt. Es gilt $\phi(x_0^{**}) = p_V(x_0^{**}) > 1$. Wir zeigen dies. Es gilt $(x_0^{**}+U)\cap V = \emptyset$ und es gibt $\epsilon > 0$ und $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ so dass

$$\left\{ x^{**} \,\middle|\, \max_{1\leq i\leq n} |x_i^*(x_0^{**} - x^{**})| < \epsilon \right\} \subseteq x_0^{**} + U$$

Also gilt $tx_0^{**} \in x_0^{**} + U$, falls $\max_{1\leq i\leq n} |x_i^*((1-t)x_0^{**})| < \epsilon$ bzw.

$$(1-t) \max_{1\leq i\leq n} |x_i^*(x_0^{**})| < \epsilon$$

Falls $\max_{1\leq i\leq n} |x_i^*(x_0^{**})| = 0$, dann gilt für alle t, dass $tx_0^{**} \in x_0^{**} + U$. Falls $\max_{1\leq i\leq n} |x_i^*(x_0^{**})| > 0$, dann gilt für alle t mit

$$|1-t| < \frac{\epsilon}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^*(x_0^{**})|},$$

dass $tx_0^{**} \in x_0^{**}+U$ und damit $tx_0^{**} \notin V$. Es gibt also ein $t_0 < 1$ mit $t_0 x_0^{**} \notin V$. Damit gilt

$$\phi(x_0^{**}) > 1.$$

Weil für alle $x^{**} \in V$ die Ungleichung $p_V(x^{**}) \leq 1$ gilt, folgt für alle $x^{**} \in \overline{\{x|\ \|x\|_X \leq 1\}}^{\text{schw}^*}$

$$|\phi(x^{**})| \leq 1.$$

Insbesondere gilt für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X \leq 1$, dass $|\phi(x)| \leq 1$. Wenn wir außerdem gezeigt haben, dass $\phi \in X^*$, dann gilt $\|\phi\| \leq 1$.

Wir zeigen, dass $\phi \in X^*$. Wir zeigen, dass ϕ schwach* stetig ist. Mit Lemma 122 folgt dann, dass $\phi \in X^*$. Dazu zeigen wir, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge $W \subset X^{**}$ mit $0 \in W$ existiert, so dass für alle $x^{**} \in W$

$$|\phi(x^{**})| < \epsilon$$

Wir wählen $W = \epsilon U$. Es gilt für alle $x^{**} \in U$

$$|x^*(x^{**})| \leq p_V(x^{**}) \leq p_U(x^{**}) \leq 1$$

und deshalb für alle $x^{**} \in \epsilon U$

$$|x^*(x^{**})| \leq p_U(x^{**}) \leq \epsilon$$

□

Die Aussage vom Satz von Goldstine ist nur im nichtreflexiven Fall interessant. Wir wollen hier explizit zeigen, dass die abgeschlossene Einheitskugel von c_0 schwach* dicht in der abgeschlossenen Einheitskugel von ℓ^∞ ist.

Zu $x \in \ell^\infty$ wählen wir

$$x_n(i) = \begin{cases} x(i) & \text{falls } i \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann konvergiert die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, schwach* gegen x. Für $x^* \in \ell^1$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x^*(i)x(i) - \sum_{i=1}^{\infty} x^*(i)x(i) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |x^*(i)x(i)| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=n+1}^{\infty} |x^*(i)|$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$$

Satz 36 *(Alaoglu) Es sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X^* schwach* kompakt.*

Leonidas Alaoglu (1914-)

Ins besondere folgt aus dem Satz von Alaoglu, dass in der Norm beschränkte, schwach*-abgeschlossene Mengen schwach*-kompakt sind. Umgekehrt ist jede schwach*-kompakte Menge K in der Norm beschränkt. Dies folgt aus dem Satz von Banach-Steinhaus: Jedes $x \in X$ stellt ein schwach* stetiges Funktional dar und nimmt als solches auf einer schwach* kompakten Menge sein Supremum an.

$$\sup_{x^* \in K} x^*(x) < \infty$$

Mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt $\sup_{x^*\in K} \|x^*\| < \infty$.

Beweis. Es sei $I : \overline{B_{X^*}} \to [-1,1]^{\overline{B_X}}$ durch

$$I(x^*) = (x^*(x))_{x \in \overline{B_X}}$$

gegeben. Wir statten $\overline{B_{X^*}}$ mit der schwachen* Topologie und $[-1,1]^{\overline{B_X}}$ mit der Produkttopologie aus. Wir zeigen, dass I injektiv ist und dass die Inverse

von I auf dem Bild $I(\overline{B_{X^*}})$ existiert und stetig ist. Nach dem Satz von Tychonov ist $[-1,1]^{\overline{B_X}}$ in der Produkttopologie kompakt. Wir werden zeigen, dass das Bild von I in $[-1,1]^{\overline{B_X}}$ abgeschlossen ist, also auch kompakt. Damit ist auch $\overline{B_{X^*}}$ als Bild unter der stetigen Abbildung I^{-1} kompakt.

Die Injektivität von I ist offensichtlich. Um die Stetigkeit von I^{-1} nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass für alle $x_0 \in X$ und alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $I(\{x^* |\, x^*(x) < t\})$ offen im Bild von I ist. Dies reicht aus, weil eben diese Mengen die schwache* Topologie erzeugen. Es gilt für $t \leq 1$

$$\begin{aligned} I(\{x^* |\, x^*(x_0) < t\}) &= \{(x^*(x))_{x\in\overline{B_X}} | x^* \in \overline{B_{X^*}} \text{ und } x^*(x_0) < t\} \\ &= \{(x^*(x))_{x\in\overline{B_X}} | x^* \in \overline{B_{X^*}}\} \cap \prod_{x\in\overline{B_X}} U_x \end{aligned}$$

wobei für alle $x \neq x_0$ die Gleichung $U_x = [-1,1]$ und für $x = x_0$ die Gleichung $U_{x_0} = [-1,t)$ gilt. Dieses sind offene Mengen in Bild(I) in der von der Produkttopologie induzierten Topologie.

Wir wollen nun zeigen, dass Bild(I) in $[-1,1]^{\overline{B_X}}$ abgeschlossen ist. Dazu überlegen wir uns, dass ein Element $(z_x)_{x\in\overline{B_X}} \in [-1,1]^{\overline{B_X}}$ genau dann im Bild von I ist, wenn für alle t mit $|t| \leq 1$ und alle $x \in \overline{B_X}$ die Gleichung $z_{tx} = tz_x$ gilt und für alle $x, y \in \overline{B_X}$ und alle t mit $0 \leq t \leq 1$ die Gleichung $z_{tx+(1-t)y} = tz_x + (1-t)z_y$ gilt. Wir weisen dies nach. Falls $(z_x)_{x\in\overline{B_X}} \in [-1,1]^{\overline{B_X}}$ dann gibt es ein x^* mit $(z_x)_{x\in\overline{B_X}} = (x^*(x))_{x\in\overline{B_X}}$. Dann gilt

$$z_{tx} = x^*(tx) = tx^*(x) = tz_x$$

und

$$z_{tx+(1-t)y} = x^*(tx + (1-t)y) = tx^*(x) + (1-t)x^*(y) = tz_x + (1-t)z_y.$$

Falls wir umgekehrt ein Element $(z_x)_{x\in\overline{B_X}} \in [-1,1]^{\overline{B_X}}$ haben, das die obigen Gleichungen erfüllt, dann definieren wir ein Funktional x^* durch

$$x^*(x) = \|x\| z_{\frac{x}{\|x\|}}.$$

Dieses Funktional ist linear und es ist stetig, weil

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |x^*(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |z_x| \leq 1.$$

Nun weisen wir nach, dass das Bild von I in $[-1,1]^{\overline{B_X}}$ abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir ein Netz $(x_\iota^*(x))_{x\in\overline{B_X}}$, $\iota \in J$, das in $[-1,1]^{\overline{B_X}}$ gegen einen Grenzwert $(z_x)_{x\in\overline{B_X}}$ konvergiert. Es gilt

$$z_{tx} = \lim_\iota x_\iota^*(tx) = t\lim_\iota x_\iota^*(x) = tz_x$$

und

$$z_{tx+(1-t)y} = \lim_\iota x_\iota^*(tx+(1-t)y) = \lim_\iota tx_\iota^*(x) + (1-t)x_\iota^*(y) = tz_x + (1-t)z_y$$

Deshalb ist $(z_x)_{x\in\overline{B_X}}$ im Bild von I und Bild(I) ist abgeschlossen. □

Satz 37 *Es sei X ein Banachraum. X ist genau dann reflexiv, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\}$ schwach kompakt ist.*

Beweis. Es sei X reflexiv. Damit gilt $X = X^{**}$. Nach dem Satz von Alaoglu ist $\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\}$ schwach* kompakt, was in diesem Fall dasselbe wie schwach kompakt ist.

Es sei $\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\}$ schwach kompakt. Damit ist $\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\}$ auch schwach* kompakt in X^{**}. Also gilt

$$\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\} = \overline{\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\}}^{schw*}$$

Nach dem Satz von Goldstine gilt

$$\overline{\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\}}^{schw*} = \{x^{**} \in X^{**}|\ \|x^{**}\| \leq 1\}$$

Also gilt

$$\{x \in X|\ \|x\| \leq 1\} = \{x^{**} \in X^{**}|\ \|x^{**}\| \leq 1\}$$

und somit $X = X^{**}$. □

Korollar 14 *Es sei Y ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Banachraumes. Dann ist Y reflexiv.*

Aus diesem Korollar folgt, dass ℓ^∞ nicht reflexiv ist, weil c_0 Teilraum von ℓ^∞ ist und nicht reflexiv ist.

Beweis. Falls X reflexiv ist, dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_X}$ $\sigma(X, X^*)$-kompakt. Der Teilraum Y ist in der Norm-Topologie abgeschlossen und somit auch in der schwachen Topologie. Dies folgt aus Satz 34. Deshalb ist $Y \cap \overline{B_X}$ $\sigma(X, X^*)$-kompakt. Da die $\sigma(X, X^*)$-Topologie auf Y feiner ist als die $\sigma(Y, Y^*)$-Toplogie, ist $Y \cap \overline{B_X}$ auch $\sigma(Y, Y^*)$-kompakt. □

Korollar 15 *Ein Banachraum ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum reflexiv ist.*

Aus diesem Korollar folgt, dass ℓ^1 und ℓ^∞ nicht reflexiv sind. Die beiden Korollare folge auch unmittelbar aus dem Satz von Han-Banach ([Wer], S. 105).

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass X reflexiv ist. Nach Satz ist die abgeschlossene Einheitskugel B_{X^*} $\sigma(X^*, X)$-kompakt. Weil X reflexiv ist, sind die $\sigma(X^*, X)$-Topologie und die $\sigma(X^*, X^{**})$-Topologie gleich. Deshalb ist die abgeschlossene Einheitskugel B_{X^*} $\sigma(X^*, X^{**})$-kompakt. Hieraus folgt, dass X^* reflexiv ist.

Wir nehmen nun an, dass X^* reflexiv ist. Nach dem ersten Teil wissen wir, dass X^{**} reflexiv ist. X ist isometrisch isomorph zu einem Teilraum von X^{**}. Nach Korollar 14 ist dieser Teilraum reflexiv, weil X^{**} reflexiv ist. □

Lemma 123 *Es seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann bzgl. der Norm Topologien stetig, wenn T bzgl. der schwachen Topologien stetig ist.*

Beweis. Es sei $T : X \to Y$ bzgl. der schwachen Topologien auf X und Y stetig. Dies gilt genau dann, wenn für alle $y^* \in Y^*$ die Abbildung $y^*T : X \to \mathbb{R}$ bzgl. der schwachen Topologie auf X stetig ist. Dies wiederum gilt genau dann, wenn die Abbildungen $y^*T : X \to \mathbb{R}$ bzgl. der Norm Topologie auf X stetig sind. Hieraus folgt mit Lemma 120, dass T schwach stetig ist, wenn T normstetig ist.

Für die Umkehrung benutzen wir den Satz von Banach-Steinhaus. Falls nämlich T schwach stetig ist, dann ist für jedes $y^* \in Y^*$ das Funktional schwach stetig und damit normstetig. Es gilt also

$$\forall y^* \in Y^* : \sup_{\|x\|=1} |y^*(T(x))| < \infty \tag{5.1}$$

Die Funktionale $\phi_x : Y^* \to \mathbb{R}$

$$\phi_x(y^*) = y^*(T(x))$$

sind wegen

$$\|\phi_x\| = \sup_{\|y^*\|=1} |y^*(T(x))| \leq \sup_{\|y^*\|=1} \|y^*\|\|T(x)\| = \|T(x)\|$$

normstetig und wegen (5.1) punktweise beschränkt. Somit können wir den Satz von Banach-Steinhaus (Satz 21) anwenden. Es folgt $\sup_{\|x\|=1} \|\phi_x\| < \infty$ bzw.

$$\sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} |y^*(T(x))| < \infty$$

und somit $\|T\| < \infty$. □

Korollar 16 *Es sei X ein reflexiver Banachraum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann ist X/Y reflexiv.*

Beweis. Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_X}$ ist $\sigma(X, X^*)$-kompakt. Die Quotientenabbildung $q : X \to X/Y$ ist normstetig und nach Lemma 123 damit schwach stetig, also $\sigma(X, X^*)$-$\sigma(X/Y, (X/Y)^*)$-stetig ist. Da das stetige Bild einer kompakten Menge kompakt ist, folgt, dass $q(\overline{B_X})$ kompakt in der $\sigma(X/Y, (X/Y)^*)$ -Topologie ist.

Wir zeigen nun, dass $\overline{B_{X/Y}} = q(\overline{B_X})$. (Dies ist i.A. nicht der Fall. Man betrachte dazu ein Funktional, das nicht seine Norm annimmt.) Da q die Norm 1 besitzt, folgt für die offenen Kugeln $B_{X/Y} \supseteq q(B_X)$. Außerdem gilt auch $B_{X/Y} \subseteq q(B_X)$. Falls nämlich $\|[x]\| < 1$, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $y \sim x$ mit $\|y\| - \epsilon \leq \|[x]\|$. Wir wählen $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)$. Also $\|y\| < 1$.

Insgesamt erhalten wir für die offenen Kugeln $B_{X/Y} = q(B_X)$. Mit Satz 34 folgt, dass der Normabschluss gleich dem schwachen Abschluss ist.

$$\overline{B_{X/Y}}^{\|\ \|} = \overline{B_{X/Y}}^{\text{schw}} = \overline{q(B_X)}^{\text{schw}} \subseteq q(\overline{B_X}^{\text{schw}})$$

Damit ist $\overline{B_{X/Y}}^{\|\ \|}$ als abgeschlossene Teilmenge einer schwach kompakten Menge schwach kompakt. □

Beispiel 38 *Die abgeschlossene Einheitskugel von c_0 ist nicht schwach kompakt.*

Beweis. Wir betrachten die Folge $\sum_{i=1}^{n} e_i$, $n \in \mathbb{N}$, und zeigen, dass diese Folge kein konvergentes Teilnetz besitzt. Wir nehmen an, dass es ein Teilnetz

$$\sum_{i=1}^{\phi(\iota)} e_i \qquad \iota \in I$$

gibt, das gegen einen Vektor x konvergiert. Es gilt

$$e_k^* \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right) = 1$$

für $n \geq k$. Andererseits gilt

$$e_k^*(x) = \lim_{\iota} e_k^* \left(\sum_{i=1}^{\phi(\iota)} e_i \right) = 1$$

Demnach gilt $x = (1, 1, 1, \dots)$. Dies ist aber kein Vektor in c_0. □

Beispiel 39 *Die abgeschlossene Einheitskugel von ℓ^1 ist nicht schwach kompakt.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge e_n, $n \in \mathbb{N}$, kein konvergentes Teilnetz besitzt. Wir nehmen an, dass es ein Teilnetz gibt, das gegen einen Vektor x konvergiert. Es gilt

$$e_k^*(e_n) = 0 \qquad \text{für } k > n$$

Damit gilt auch

$$0 = \lim_{\iota} e_k^*(e_{\phi(\iota)}) = e_k^*(x) = x_k$$

Also gilt $x = 0$. Dies kann aber nicht sein, weil für $x^* = (1, 1, 1, \dots)$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$x^*(e_n) = 1$$

gilt. □

Wir sagen, dass eine Menge folgenkompakt ist, wenn jede Folge in dieser Menge eine Teilfolge besitzt, die in dieser Menge konvergiert.

Beispiel 40 *Die abgeschlossene Einheitskugel von $\ell^\infty(\mathbb{R})$ ist schwach* kompakt, aber nicht schwach* folgenkompakt.*

Insbesondere besitzt jede Folge in der abgeschlossenen Einheitskugel von $\ell^\infty(\mathbb{R})$ ein konvergentes Teilnetz.

Beweis. Die abgeschlossene Einheitskugel ist nach dem Satz von Alaoglu schwach* kompakt.

$\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ bezeichnet die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ hat dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$. Deshalb gibt es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. Wir definieren

$$x_n^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \phi(t) \\ 0 & \text{falls } n \notin \phi(t) \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass es eine Teilfolge $x_{n_k}^*$, $k \in \mathbb{N}$, gibt die konvergiert. Dann gibt es ein x^* mit

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*$$

Für alle $e_s \in \ell^1$, $s \in \mathbb{R}$, mit $e_s(t) = 1$, falls $t = s$ und $e_s(t) = 0$ sonst, gilt dann

$$x^*(s) = x^*(e_s) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*(s)$$

Wir wählen ein solches t_0, so dass

$$\phi(t_0) = \{n_{2j} |\ j \in \mathbb{N}\}$$

Dann ergibt sich

$$x_{n_k}^*(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

□

Beispiel 41 *Es sei e_n, $n \in \mathbb{N}$, die Einheitsvektoren in ℓ^2 und*

$$A = \{e_m + me_n |\ 1 \le m < n < \infty\}$$

Dann liegt 0 im schwachen Abschluss der Menge A, $0 \in \overline{A}^{schw}$, aber es gibt keine Folge in A, die schwach gegen 0 konvergiert.

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine Folge $e_{m_i} + m_i e_{n_i}$, $i \in \mathbb{N}$, gibt, die schwach gegen 0 konvergiert. Dann gilt für alle $x^* \in \ell^2$

$$0 = \lim_{i\to\infty} x^*(e_{m_i} + m_i e_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} (x^*(m_i) + m_i x^*(n_i))$$

Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $m_i \le N$, dann wählen wir

$$x^* = (\underbrace{1, \dots, 1}_{N}, 0, 0, \dots)$$

und erhalten

$$x^*(e_{m_i} + m_i e_{n_i}) \ge 1$$

Diese Folge konvergiert nicht gegen 0. Also muss gelten, dass die Zahlen m_i, $i \in \mathbb{N}$, keine obere Schranke besitzen. Indem wir zu einer weiteren Teilfolge übergehen. können wir annehmen, dass

$$m_i < m_{i+1} \quad \text{und} \quad n_i < n_{i+1} \qquad\qquad i \in \mathbb{N}$$

Nun wählen wir als Funktional

$$x^*(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_i} & \text{falls } k = n_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt

$$\|x^*\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dann gilt

$$x^*(e_{m_i} + m_i e_{n_i}) \geq 1$$

Diese Folge konvergiert nicht gegen 0.

Wir zeigen nun, dass 0 im schwachen Abschluss der Menge A liegt. Es sei U eine schwache Umgebung von 0. Dann gibt es $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $x_1^*, \ldots, x_k^* \in \ell^2$ mit

$$\left\{ x \;\middle|\; \max_{1 \leq i \leq k} x_i^*(x) < \epsilon \right\} \subseteq U$$

Wir wählen n und m, $m < n$, so groß, dass

$$\max_{1 \leq i \leq k} x_i^*(m) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad\qquad \max_{1 \leq i \leq k} m x_i^*(n) < \tfrac{\epsilon}{2}$$

Damit gilt

$$e_m + m e_n \in U$$

□

Beispiel 42 *Ein Banachraum ist genau dann in der schwachen Topologie vollständig, wenn er endlich-dimensional ist.*

Beispiel 43 *Die schwache Topologie eines Banachraumes ist genau dann metrisierbar, wenn der Raum endlich-dimensional ist.*

5.6 Der Satz von James

Satz 38 *(Variationsprinzip von Ekeland) Es sei X ein Banachraum und $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nach unten halbstetige Funktion, die nach unten beschränkt ist. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x_0 \in X$, so dass für alle $x \in X$*

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|$$

gilt.

ϕ heißt halbstetig nach unten in x_0, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ die Ungleichung

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) - \epsilon$$

gilt.

Beweis. ϵ ist gegeben. Wir wählen ein beliebiges $y_1 \in X$ und wir wählen $y_n \in X$ induktiv, so dass

$$\phi(y_{n+1}) + \epsilon\|y_n - y_{n+1}\| \leq \inf\{\phi(x) + \epsilon\|y_n - x\| | x \in X\} + \frac{1}{2^n}$$

Dies ist offensichtlich möglich, es geht nur die Eigenschaft des Infimums ein. Es folgt für $x = y_n$

$$\phi(y_{n+1}) \leq \phi(y_{n+1}) + \epsilon\|y_n - y_{n+1}\| \leq \phi(y_n) + \frac{1}{2^n}$$

Es folgt für alle $m \geq n$

$$\phi(y_m) \leq \phi(y_n) + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Wegen dieser Abschätzung und weil ϕ nach unten beschränkt ist, existiert $\lim_{k\to\infty} \phi(y_k)$ und ist endlich. Wir weisen dies nach.

Falls $\phi(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, nicht konvergiert, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen n_1 und n_2 mit $n_1, n_2 \geq n$ und $|\phi(y_{n_1}) - \phi(y_{n_2})| \geq \delta$ existieren. Für $\delta > 2^{-n+1}$ ergibt sich

$$\phi(y_{n_2}) - \phi(y_{n_1}) \leq -\delta$$

Wir wählen nun entsprechende $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ mit

$$\phi(y_{n_{2k}}) - \phi(y_{n_{2k-1}}) \leq -\delta$$

Damit erhalten wir

$$\phi(y_{n_{2k}}) \leq -k\delta + \phi(y_{n_1}) + 2^{-n_1+2}$$

und $\phi(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist nicht nach unten beschränkt, was falsch ist. Deshalb konvergiert die Folge $\phi(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\epsilon\|y_n - y_{n+1}\| \leq \phi(y_n) - \phi(y_{n+1}) + \frac{1}{2^n}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\epsilon\|y_m - y_n\| \quad &= \epsilon \left\| \sum_{j=n}^{m-1} y_{j+1} - y_j \right\| \leq \epsilon \sum_{j=n}^{m-1} \|y_{j+1} - y_j\| \\
&\leq \sum_{j=n}^{m-1} \left(\phi(y_j) - \phi(y_{j+1}) + \frac{1}{2^j} \right) \leq \phi(y_n) - \phi(y_m) + \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Somit konvergiert die Folge y_n, $n \in \mathbb{N}$.

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Für alle $x \in X$ gilt

$$\phi(y_{n+1}) \leq \phi(x) + \epsilon\|x - y_n\| + \frac{1}{2^n} - \epsilon\|y_n - y_{n+1}\|$$

und weiter

$$\lim_{n\to\infty} \phi(y_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} (\phi(x) + \epsilon\|x - y_n\| + \frac{1}{2^n} - \epsilon\|y_n - y_{n+1}\|)$$

Da ϕ nach unten halbstetig ist, folgt

$$\phi(x_0) \leq \phi(x) + \epsilon\|x - x_0\|$$

□

Satz 39 *(Bishop-Phelps) Es sei X ein Banachraum. Dann ist die Menge aller stetigen Funktionale, die ihre Norm annehmen, dicht in X^*.*

Beweis. Es sei $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$. Wir konstruieren ein Funktional y^*, so dass $\|y^*\| \leq \epsilon$ und so dass $x^* + y^*$ seine Norm annimmt.

Wir setzen für alle $x \in X$

$$\phi(x) = \|x\|^2 - x^*(x)$$

Dann ist ϕ auf X nach unten beschränkt, weil

$$\phi(x) = \|x\|^2 - x^*(x) \geq \|x\|^2 - \|x\| \geq -\frac{1}{4}$$

(Die Funktion $t^2 - t$ nimmt ihr Minimum in $t = 1/2$ an.) Nach Satz 38 gibt es ein $x_0 \in X$, so dass für alle $x \in X$

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|$$

gilt. Deshalb gilt für alle $x \in X$

$$\|x\|^2 - x^*(x) \geq \|x_0\|^2 - x^*(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein stetiges Funktional y^* und eine Konstante c, so dass für alle $x \in X$

$$\|x\|^2 - x^*(x) \geq y^*(x) + a \geq \|x_0\|^2 - x^*(x_0) - \epsilon\|x - x_0\| \tag{5.2}$$

gilt. Wir weisen dies nach. Die Mengen

$$A = \{(x,t) | \|x\|^2 - x^*(x) < t\}$$

$$B = \{(x,t) | \|x_0\|^2 - x^*(x_0) - \epsilon\|x - x_0\| > t\}$$

sind disjunkte, offene und konvexe Teilmengen in $X \times \mathbb{R}$. Wir weisen die Konvexität von A nach. Es seien (x,t) und (y,s) Elemente von A. Dann gilt

$$\alpha\|x\|^2 - \alpha x^*(x) + (1-\alpha)\|y\|^2 - (1-\alpha)x^*(y) < \alpha t + (1-\alpha)s$$

$$\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - x^*(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha t + (1-\alpha)s$$

Es gilt

$$\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 \geq \alpha^2\|x\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\|x\|\|y\| + (1-\alpha)^2\|y\|^2$$

weil dies zu

$$\alpha(1-\alpha)\left\{\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\right\} \geq 0$$

äquivalent ist. Somit folgt

$$\alpha^2\|x\|^2+2\alpha(1-\alpha)\|x\|\|y\|+(1-\alpha)^2\|y\|^2-x^*(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha t+(1-\alpha)s$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^2-x^*(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha t+(1-\alpha)s$$

Damit $(\alpha x+(1-\alpha)y,\alpha t+(1-\alpha)s)\in A$.

Da die Mengen A und B offen, disjunkt und konvex sind, gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional ϕ, das diese Mengen trennt. Es gilt für alle $(x,t)\in A$ und alle $(y,s)\in B$

$$\phi(x,s)\geq\phi(y,s)$$

Es gibt ein Funktional $z^*\in X^*$ und eine Konstante $c\in\mathbb{R}$, so dass $\phi(x,t)=z^*(x)+ct$. Damit folgt für alle $(x,t)\in A$ und alle $(y,s)\in B$

$$z^*(x)+ct\geq z^*(y)+cs$$

(Man beachte, dass $c\neq 0$, weil die Ungleichung $z^*(x)\geq z^*(y)$ für alle $x,y\in X$ nur dann gelten kann, wenn $z^*=0$. Dann wäre aber das Funktional $\phi=0$, was nicht sein kann, weil der Satz von Hahn-Banach ein von 0 verschiedenes Funktional liefert.) und somit

$$z^*(x)+c(\|x\|^2-x^*(x))\geq z^*(y)+c(\|x_0\|^2-x^*(x_0)-\epsilon\|y-x_0\|)$$

Für $y=x_0$ erhalten wir

$$c(\|x\|^2-x^*(x))\geq -z^*(x)+z^*(x_0)+c(\|x_0\|^2-x^*(x_0)) \tag{5.3}$$

und für $x=x_0$ erhalten wir

$$-z^*(y)+z^*(x_0)+c(\|x_0\|^2-x^*(x_0))\geq c(\|x_0\|^2-x^*(x_0)-\epsilon\|y-x_0\|) \tag{5.4}$$

Hieraus folgt, dass für alle $y\in X$ die Ungleichung $z^*(y)-c\epsilon\|y-x_0\|\leq z^*(x_0)$ gilt. Also $c>0$.

Wenn wir

$$y^*=-\frac{1}{c}z^* \qquad\qquad a=\frac{1}{c}z^*(x_0)+\|x_0\|^2-x^*(x_0)$$

setzen, erhalten wir (5.2).

Hieraus folgt $y^*(x_0) + a = \|x_0\|^2 - x^*(x_0)$. Wir beobachten weiter, dass $x_0 \neq 0$.

Somit erhalten wir für alle x mit $\|x\| = \|x_0\|$

$$x^*(x) + y^*(x) + a \leq \|x\|^2 = \|x_0\|^2 = x^*(x_0) + y^*(x_0) + a$$

Also nimmt die Funktion $x^*(x) + y^*(x) + a$ auf der Menge $\{x | \|x\| = \|x_0\|\}$ ihr Supremum an. Deshalb nimmt auch das Funktional $x^* + y^*$ auf derselben Menge sein Supremum an. Da $\|x_0\| > 0$, nimmt $x^* + y^*$ auch auf $\{x | \|x\| = 1\}$ sein Supremum an.

Es bleibt zu zeigen, dass $\|(x^* + y^*) - x^*\| = \|y^*\| < \epsilon$. Wegen $y^*(x_0) + a = \|x_0\|^2 - x^*(x_0)$ folgt aus

$$y^*(x) + a \geq \|x_0\|^2 - x^*(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|$$

die Ungleichung

$$y^*(x - x_0) = y^*(x) - y^*(x_0) \geq -\epsilon\|x - x_0\|$$

Wenn wir für x den Vektor $-x + 2x_0$ einsetzen erhalten wir

$$y^*(-x + x_0) \geq -\epsilon\|x - x_0\|$$

□

Es sei K eine nichtleere, kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes X und μ ein reguläres Borelmaß mit $\mu(K) = 1$. Wir sagen, dass ein Punkt $x \in X$ durch das Maß μ dargestellt wird, wenn für alle $x^* \in X^*$

$$x^*(x) = \int_K x^* d\mu$$

gilt. Man sagt auch, dass x der Schwerpunkt von μ ist.

Lemma 124 *Es sei A eine kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes X. (In unserem Fall: Eine Topologie, die gröber als die Norm-Topologie und feiner als die schwache Topologie ist.) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann in der abgeschlossenen, konvexen Hülle von A, wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf A gibt, das x darstellt.*

Beweis. Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf A, das x darstellt. Dann gilt für alle $x^* \in X^*$

$$x^*(x) = \int_A x^* d\mu \leq \sup_{y \in A} x^*(y) \leq \sup_{y \in \overline{CH(A)}} x^*(y)$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt, dass $x \in \overline{CH(A)}$.

Wir nehmen nun an, dass $x \in \overline{CH(A)}$. Dann gibt es ein Netz

$$y_\gamma = \sum_{i=1}^{n_\gamma} a_i^\gamma x_i^\gamma \qquad\qquad a_i^\gamma \geq 0, \sum_{i=1}^{n_\gamma} a_i^\gamma = 1, x_i^\gamma \in A, \gamma \in \Gamma$$

das gegen x konvergiert. Wir gehen nun zu den Maßen

$$\mu_\gamma = \sum_{i=1}^{n_\gamma} a_i^\gamma \delta_{x_i^\gamma}$$

über. Nach dem Darstellungssatz von Riesz kann der Dualraum von $C(A)$ durch den Raum der signierten Radon-Maße dargestellt werden. Die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße ist in $C(A)^*$ schwach*-kompakt. Deshalb gibt es ein Teilnetz μ_{γ_ι}, $\iota \in I$, das in dieser Menge in der schwachen* Topologie konvergiert

$$\mu = \lim_\iota \mu_{\gamma_\iota}$$

Das bedeutet, dass für alle $f \in C(A)$

$$\int_A f d\mu = \lim_\iota \int_A f d\mu_{\gamma_\iota}$$

Insbesondere sind die Einschränkungen von $x^* \in X^*$ auf A stetige Funktionen und somit gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\int_A x^* d\mu = \lim_\iota \int_A x^* d\mu_{\gamma_\iota}$$

Wegen $x = \lim_\gamma y_\gamma$ gilt auch $x = \lim_\iota y_{\gamma_\iota}$. Deshalb

$$x^*(x) = \lim_\iota x^*(y_{\gamma_\iota}) = \lim_\iota \int_A x^* d\mu_{\gamma_\iota} = \int_A x^* d\mu$$

□

Eine Stützfunktion einer konvexen Menge C ist ein Funktional x^*, für das ein $x_0 \in C$ mit

$$x^*(x_0) = \sup\{x^*(x)|x \in C\}$$

existiert.

Satz 40 *Es sei C eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge eines Banachraumes X. Dann ist die Menge der Stützfunktionen von C bzgl. der Norm-Topologie dicht in X^*.*

Satz 41 *(James) Es sei A eine abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge eines reellen Banachraumes X. Dann sind äquivalent:*
(i) A ist schwach kompakt.
(ii) Jedes stetige Funktional nimmt auf A sein Supremum an.
Insbesondere ist ein Banachraum genau dann reflexiv, wenn jedes stetige Funktional auf der abgeschlossenen Einheitskugel sein Supremum annimmt.

Der folgende Satz stammt von Rode, der Beweis hier von Fonf, Lindenstrauss und Phelps [].

Satz 42 *Es sei X ein reeller Banachraum, K eine konvexe, schwach*-kompakte Teilmenge von X^* und $S \subseteq K$ eine in der Norm-Topologie separable Teilmenge, so dass für jedes $x \in X$ ein $x^* \in S$ mit*

$$x^*(x) = \sup\{y^*(x)|y^* \in K\}$$

existiert. Dann ist K der Abschluss der konvexen Hülle von S in der Norm-Topologie

$$K = \overline{CH(S)}^{\| \ \|_*}$$

Beweis von Satz 41 Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist offensichtlich. Wir zeigen die Richtung $(ii) \Rightarrow (i)$ für den Fall, dass A separabel ist. Wir wenden Satz 42 an. Wir wählen $S = A$ und K den schwachen* Abschluss von A in X^{**}. Nach Annahme nimmt jedes Funktional $x^* \in X^*$ auf $A = S$ sein Supremum an, also existiert für jedes $x^* \in X^*$ ein $x \in A$ mit

$$x^*(x) = \sup\{x^*(y)|y \in A\}$$

Nach Satz **??** gilt

$$K = \overline{CH(A)}^{\| \ \|_{**}}$$

Da $A \subseteq X$ und X ein abgeschlossener Teilraum von X^{**} in der Norm-Topologie ist, folgt

$$K = \overline{CH(A)}^{\| \ \|}$$

Da konvexe, abgeschlossene Mengen in der Norm-Topologie und der schwachen Topologie gleich sind, folgt, dass $K = A$. Nach dem Satz von Alaoglu (Satz 36) ist A schwach*-kompakt in X^{**}. □

Wir beweisen nun Satz 42. Bevor wir den Beweis beginnen, weisen wir noch einmal darauf hin, dass eine Menge genau dann schwach*-kompakt ist, wenn sie in der Norm beschränkt und schwach* abgeschlossen ist.

Beweis von Satz 42. Es sei $0 < \epsilon < 1$ gegeben und ϵ_i, $i \in \mathbb{N}$, mit $0 < \epsilon_i < \epsilon$ und $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$. h_j, $j \in \mathbb{N}$, sei eine Folge, die bzgl. der Norm-Topologie in S dicht ist.

$$\begin{aligned} C_0 &= \epsilon\overline{B_{X^*}} \\ C_i &= S \cap \{h_i + \epsilon\overline{B_{X^*}}\} \qquad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Außerdem setzen wir

$$K_1 = CH(K \cup C_0)$$

$$S_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty}(1+\epsilon_i)C_i \qquad\qquad V^* = \overline{CH(S_1)}^{\text{schw*}}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &S \subseteq CH(S_1) \\ &K_1 \subseteq V^* \\ &0 \text{ ist innerer Punkt von } V^* \text{ in der Norm-Topologie} \\ &V^* \text{ ist eine beschränkte, schwach*-abgeschlossene,} \\ &\quad \text{also schwach*-kompakte Menge} \end{aligned}$$

Wir weisen $S \subseteq CH(S_1)$ nach. Es sei $x^* \in S$, dann gibt es ein h_i mit $x^* \in \{h_i + \epsilon B_{X^*}\}$. Damit $(1+\epsilon_i)x^* \in (1+\epsilon_i)C_i$. Außerdem $0 \in C_0$. Also $0 \in S_1$ und $(1+\epsilon_i)x^* \in S_1$. Es folgt, dass x^* Konvexkombination von 0 und $(1+\epsilon_i)x^*$ ist.

V^* ist in der Norm beschränkt, weil K schwach* kompakt ist und somit in der Norm beschränkt.

Wir weisen $K_1 \subseteq V^*$ nach. Es gilt $C_0 \subseteq V^*$. Außerdem gilt

$$K = \overline{CH(S)}^{\text{schwach}^*}$$

Wegen $S \subseteq K$ gilt $\overline{CH(S)}^{\text{schw}^*} \subseteq K$. Falls diese beiden Mengen nicht gleich wären, dann gäbe es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $x^* \in K$, das von der Menge $\overline{CH(S)}^{\text{schw}^*}$ durch ein Element $x \in X$ getrennt werden kann. Da die Mengen kompakt sind, kann man strikt trennen.

$$x^*(x) > \sup\{y^*(x) | y^* \in S\}$$

Dies widerspricht aber der Annahme des Satzes. Also gilt

$$K = \overline{CH(S)}^{\text{schw}^*}$$

Damit $K \subseteq V^*$ und folglich $K_1 \subseteq V^*$.

0 ist innerer Punkt von V^* in der Norm-Topologie, weil $C_0 \subseteq V^*$.

Es bezeichne V die Polare von V^*

$$V = \{x \in X | \forall x^* \in V^* : x^*(x) \leq 1\}$$

V ist beschränkt, konvex und schwach abgeschlossen. V ist schwach abgeschlossen, weil

$$V = \bigcap_{x^* \in V^*} \{x \in X | x^*(x) \leq 1\}$$

Da 0 innerer Punkt von V^* ist, so ist V beschränkt. Dann gilt

$$\overline{S_1}^{\text{schw}^*} \cap \Sigma(V) \cap \partial V^* \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{(1+\epsilon_i)C_i}^{\text{schw}^*} \tag{5.5}$$

wobei $\Sigma(V)$ die Menge der Stützfunktionen von V ist. (Ein stetiges Funktional x^* ist eine Stützfunktion von V, wenn es ein $x \in V$ mit $x^*(x) = \sup_{y \in V} x^*(y)$ gibt.) ∂V^* ist der Rand von V^* in der Norm-Topologie. Wir nehmen an, dass die Inklusion (5.5) nicht gilt. Dann gibt es ein $x^* \in \overline{S_1}^{\text{schw}^*}$ und ein $x \in V$ mit $x^*(x) = 1$ und

$$x^* \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{(1+\epsilon_i)C_i}^{\text{schw}^*}$$

Wir wiesen zunächst nach, dass es ein x mit $x^*(x) = 1$ gibt. Für alle $z \in V$ gilt $x^*(z) \leq 1$. Da $x^* \in \Sigma(V)$, gibt es ein $x_0 \in V$ mit

$$x^*(x_0) = \sup\{x^*(z)|z \in V\}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass $\sup\{x^*(z)|z \in V\} = 1$. Da $x^* \in \partial V^*$, gibt es zu jedem η ein $z^* \notin V^*$ mit $\|x^* - z^*\| < \eta$. Da V^* schwach*-kompakt ist, kann z^* durch ein Funktional $x \in X$ von V^* getrennt werden

$$z^*(x) > \sup_{y^* \in V^*} y^*(x)$$

Wir können annehmen, dass $\sup_{y^* \in V^*} y^*(x) = 1$. Damit gilt $x \in V$ und

$$x^*(x) = z^*(x) - (z^*(x) - x^*(x)) \geq 1 - \|z^* - x^*\|\|x\| \geq 1 - \eta\|x\|$$

Es bleibt zu bemerken, dass V beschränkt ist, und es folgt, dass es ein $x_0 \in V$ mit $x^*(x_0) = 1$ gibt.

Deshalb gibt es ein Netz

$$x^*_\gamma \in \bigcup_{i=0}^{\infty}(1 + \epsilon_i)C_i \qquad\qquad \gamma \in \Gamma$$

mit

$$x^* = \lim_\gamma x^*_\gamma$$

Zu jedem γ gibt es ein i mit $x^*_\gamma \in (1+\epsilon_i)C_i$. Wir schreiben $x^*_\gamma = (1+\epsilon_{i(\gamma)})y^*_\gamma$ mit $y^*_\gamma \in C_{i(\gamma)}$. Wir beobachten, dass $\lim_\gamma i(\gamma) = \infty$. Anderenfalls gäbe es ein i_0 und ein Teilnetz $x^*_{\gamma_\iota}$, $\iota \in I$, mit $i(\gamma_\iota) = i_0$. $x^* \in (1 + \epsilon_{i_0})C_{i_0}$ im Widerspruch zur Annahme.

Da $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$ folgt

$$x^* = \lim_\gamma x^*_\gamma = \lim_\gamma (1 + \epsilon_{i(\gamma)})y^*_\gamma = \lim_\gamma y^*_\gamma$$

Für $i = 1, 2, \ldots$ gilt $C_i \subseteq S \subseteq K$. Da K schwach*-kompakt ist, folgt $x^* \in K$.

Wegen $x^*(x) = 1$ und $x^* \in K \subseteq V^*$

$$1 = x^*(x) \leq \sup\{y^*(x)|y^* \in K\} \leq \sup\{y^*(x)|y^* \in V^*\} = 1$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $x \in V$. Also gilt

$$1 = \sup\{y^*(x)|y^* \in K\}$$

Nach Annahme vom Satz gibt es ein $z^* \in S$ mit $z^*(x) = 1$. Wegen $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ muss es also ein i_0 mit $z^* \in C_{i_0}$ geben.

Dann gilt aber $(1+\epsilon_{i_0})z^* \in V^*$ und

$$(1+\epsilon_{i_0})z^*(x) \geq 1 + \epsilon_{i_0}$$

im Widerspruch zu $x \in V$. Damit ist (5.5) gezeigt.

Wir wollen nun zeigen

$$\forall \epsilon > 0 \forall x^* \in \Sigma(V) \cap \partial V^* \exists z^* \in \overline{CH(S)}^{\| \ \|_*} : \|x^* - z^*\| \leq \epsilon \tag{5.6}$$

Wegen

$$V^* = \overline{CH(S_1)}^{\text{schw}*}$$

ist V^* die schwach*-abgeschlossene, konvexe Hülle einer schwach*-kompakten Menge, nämlich $\overline{S_1}^{\text{schw}*}$. Nach Lemma **??** gibt es zu jedem $x^* \in V^*$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\overline{S_1}^{\text{schw}*}$, das x^* darstellt. Für alle $x \in X$ gilt

$$x^*(x) = \int_{\overline{S_1}^{\text{schw}*}} y^*(x) d\mu(y^*)$$

Wir beobachten weiter, dass für alle $x^* \in \Sigma(V) \cap \partial V^*$ das Maß μ außerhalb

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{(1+\epsilon_i)C_i}^{\text{schw}*} \tag{5.7}$$

verschwindet, d.h. das Komplement dieser Menge ist eine μ-Nullmenge. Dazu reicht es zu zeigen, dass für alle $x^* \in \Sigma(V) \cap \partial V^*$ das Maß μ außerhalb

$$\overline{S_1}^{\text{schw}*} \cap \Sigma(V) \cap \partial V^*$$

verschwindet, d.h. das Komplement dieser Menge ist eine μ-Nullmenge. Wir weisen dies nach. Da $x^* \in \Sigma(V)$ gibt es ein $x_0 \in V$ mit $x^*(x_0) = \sup\{x^*(x) | x \in V\}$. Da wir außerdem annehmen, dass $x^* \in \partial V^*$, folgt

$$\sup_{x \in V} x^*(x) = 1$$

Die letztere Gleichung folgt aus dem Satz von Hahn-Banach: Da V^* eine abgeschlossene, konvexe Menge ist, können wir jeden Punkt $z^* \notin V^*$ durch ein Funktional $x \in X$ trennen. Also

$$z^*(x) \geq \sup_{y^* \in V^*} y^*(x)$$

O.E.d.A. können wir annehmen, dass $\sup_{y^* \in V^*} y^*(x) = 1$. Dann gilt $x \in V$ und wenn wir z^* hinreichend dicht bei x^* wählen, sehen wir, dass $x^*(x) \geq 1 - \eta$. Insgesamt ergibt sich

$$1 = x^*(x_0) = \sup\{y^*(x_0) | y^* \in V^*\}$$

Wir behaupten, dass das Maß außerhalb der Menge

$$\{y^* \in V^* | y^*(x_0) = 1\}$$

verschwindet, d.h. das Maß vom Komplement dieser Menge ist 0. Dies gilt, weil

$$1 = x^*(x_0) = \int_{\overline{S_1}^{\text{schw}*}} y^*(x_0) d\mu(y^*)$$

Da das Supremum von $y^*(x_0)$ gleich 1 ist, ist die Menge, auf der $y^*(x_0) < 1$ gilt, eine Nullmenge. Damit verschwindet das Maß μ außerhalb der Menge

$$\overline{S_1}^{\text{schw}*} \cap \Sigma(V) \cap \partial V^*$$

Mit (5.5) folgt, dass das Maß außerhalb der Menge

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{(1+\epsilon_i)C_i}^{\text{schw}*}$$

verschwindet. Wir setzen nun

$$D_0 = (1+\epsilon_0)C_0$$

$$D_n = \overline{(1+\epsilon_n)C_n}^{\text{schw}*} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{(1+\epsilon_i)C_i}^{\text{schw}*} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Wir bezeichnen $\sigma = \{i | m_i = \mu(D_i) > 0\}$. w_i sei der Schwerpunkt des Maßes $\frac{1}{m_i}\mu_{|D_i}$. Es gilt

$$w_i \in (1+\epsilon_i)h_i + \epsilon(1+\epsilon_i)B_{X^*}$$

weil

$$D_n = \overline{(1+\epsilon_n)C_n}^{\text{schw}*} \subseteq \overline{(1+\epsilon_n)\{h_n + \epsilon B_{x^*}\}}^{\text{schw}*} = (1+\epsilon_n)\{h_n + \epsilon B_{x^*}\}$$

Weiter folgt

$$w_i \in h_i + (\epsilon_i \|h_i\| + \epsilon(1+\epsilon_i))B_{X^*} \subseteq h_i + \epsilon(L+2)B_{X^*}$$

wobei

$$L = \sup\{\|y^*\| | y^* \in K\}$$

Wir setzen

$$z^* = \sum_{i \in \sigma} m_i h_i$$

Wegen $1 = \mu(K) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i$ gilt

$$z^* \in \overline{CH(S)}^{\| \ \|_*}$$

Nun weisen wir nach, dass

$$\|x^* - z^*\| \leq \epsilon(L+2)$$

Es gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} x^*(x) - z^*(x) &= \int_K y^*(x) d\mu(y^*) - \sum_{i=1}^{\infty} m_i h_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{D_i} y^*(x) d\mu(y^*) - \sum_{i=1}^{\infty} m_i h_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m_i w_i(x) - m_i h_i(x) \end{aligned}$$

Wir bilden das Supremum über alle x mit $\|x\| = 1$

$$\|x^* - z^*\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_i \|w_i - h_i\| \leq \epsilon(L+2) \sum_{i=1}^{\infty} m_i = \epsilon(L+2)$$

Somit haben wir gezeigt, dass zu jedem $x^* \in \Sigma(V) \cap \partial V^*$ ein $z^* \in \overline{CH(S)}^{\| \ \|_*}$ mit $\|x^* - z^*\| \leq \epsilon(L+2)$ existiert. Die Annahme, dass $x^* \in \Sigma(V)$ gilt, bedeutet, dass x^* eine Stützfunktion ist. Nach dem Satz von Bishop-Phelps liegen die Stützfunktionen dicht bzgl. der Norm-Topologie. Also existiert für jedes $x^* \in \partial V^*$ ein z^* mit $\|x^* - z^*\| \leq \epsilon(L+2)$ und damit auch für jedes $x^* \in V^*$. Insbesondere also für alle $x^* \in K$. Wenn wir nun $\epsilon \to 0$ betrachten, erhalten wir $K = \overline{CH(S)}^{\| \ \|}$. $\square$

5.7 Schauder Basen

Juliusz Schauder (21.9.1899- Sept. 1943) wurde in Lemberg (Lwow) geboren. Er studierte in Lwow.

Eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, in einem Banachraum X heißt Schauder Basis von X, falls für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge von Skalaren a_n, $n \in \mathbb{N}$, existiert, so dass

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

gilt. Dies heißt, dass die Partialsummen in der Norm gegen x konvergieren

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0$$

Die Einheitsvektoren e_i, $i \in \mathbb{N}$, bilden in c_0 und ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ eine Basis. ℓ^∞ besitzt keine Basis, weil der Raum nicht separabel ist.

Falls ein Raum eine Schauder Basis besitzt, dann kann man häufig leichter in diesen Räumen rechnen. Die Koordinatenfunktionale $x_n^* : X \to \mathbb{R}$ einer Basis sind durch

$$x_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_n$$

gegeben. Sie sind stetig und es gilt für alle $x \in X$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

Man kann leicht zeigen, dass jeder Banachraum mit einer Schauder-Basis separabel sein muss. Umgekehrt kann man sich die Frage stellen, ob jeder separable Banachraum eine Schauder-Basis besitzt. Von P. Enflo wurde 1973 ein separabler Banachraum konstruiert, der keine Basis besitzt.

Lemma 125 *Es sei X ein Banachraum mit einer Schauder Basis x_n, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Projektionen $P_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

stetige, lineare Operatoren und es gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty.$$

Die in Lemma 125 eingeführten Projektionen P_n bezeichnen wir als natürliche Projektionen.

Zunächst wissen wir nicht, dass die Abbildungen P_n stetig sind. Wenn wir dies bereits wüssten, dann würde das Lemma aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgen.

Beweis. Wir führen auf X eine neue Norm ein. Für $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ definieren wir

$$|||\, x|||\, = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

Die Norm ist wohldefiniert: $\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \|$ ist endlich, weil

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|x_i\|.$$

Das Supremum über diese Ausdrücke ist endlich, weil

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \|x\|\,.$$

Es gilt für alle $x \in X$, dass $\|x\| \leq |||x|||$. Außerdem ist X mit der Norm $|||\ |||$ ein Banachraum. Wir weisen dies nach.

Es sei $z_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i$, $k \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in X bzgl. der Norm $|||\ |||$. Dann sind für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folgen

$$a_i^k \qquad\qquad k \in \mathbb{N}$$

Cauchy-Folgen, deren Grenzwerte wir mit a_i^0 bezeichnen. Wir weisen nach, dass die Folgen Cauchy-Folgen sind.

$$\begin{aligned} |a_j^k - a_j^\ell| \|x_j\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{j} (a_i^k - a_i^\ell) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{j-1} (a_i^k - a_i^\ell) x_i \right\| \\ &\leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^\ell) x_i \right\| \leq |||z_k - z_\ell||| \end{aligned}$$

Wir setzen $z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0 x_i$ und behaupten, dass $z_0 \in X$ und z_k bzgl. $|||\ |||$ gegen z_0 konvergiert. Da z_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist, gibt es ein k_0, so dass für alle $k, \ell \geq k_0$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^\ell) x_i \right\| = |||z_k - z_\ell||| < \epsilon.$$

Also gilt für alle $k, \ell \geq k_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^\ell) x_i \right\| < \epsilon.$$

Zu n wählen wir ℓ so groß, dass $\ell > k_0$ und dass für alle i mit $1 \leq i \leq n$

$$|a_i^0 - a_i^\ell| < \frac{\epsilon}{n \|x_i\|}.$$

Deshalb gilt für alle $k \geq k_0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^0) x_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^\ell - a_i^0) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^\ell) x_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i^\ell - a_i^0| \|x_i\| + \epsilon \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Also gilt für alle k mit $k \geq k_0$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^0) x_i \right\| < 2\epsilon. \tag{5.8}$$

Dies bedeutet, dass z_k, $k \in \mathbb{N}$, in der Norm $|||\ |||$ gegen z_0 konvergiert, falls wir wissen, dass $z_0 \in X$. Wir weisen nun nach, dass $z_0 \in X$. Dazu zeigen wir, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^0 x_i \qquad n \in \mathbb{N}$$

in X bzgl. der Norm $\|\ \|$ eine Cauchy Folge ist. Da der Raum X bzgl. dieser Norm vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^0 x_i$ in X bzgl. dieser Norm.

Wir zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle n, m mit $n, m \geq n_0$

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} a_i^0 x_i \right\| \leq \epsilon$$

gilt. Wegen (5.8) gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} (a_i^k - a_i^0) x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^0) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{m} (a_i^k - a_i^0) x_i \right\| < 4\epsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} a_i^0 x_i \right\| \leq 4\epsilon + \left\| \sum_{i=m}^{n} a_i^k x_i \right\|$$

Wir wählen nun $k = k_0$. Zu diesem k gibt es ein n_0, so dass für alle n, m mit $n, m > n_0$

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} a_i^k x_i \right\| < \epsilon$$

gilt. Also gibt es ein n_0, so dass für alle n, m mit $n, m > n_0$

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} a_i^0 x_i \right\| < 5\epsilon.$$

Somit ist X bzgl. der Norm $|||\ |||$ vollständig.

Nun wenden wir den Satz von der offenen Abbildung an und erhalten, dass die Normen äquivalent sind. Es gibt also ein $c > 0$, so dass für alle $x \in X$

$$c|||x||| \leq \|x\| \leq |||x|||$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\|\le 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \\ &= \sup_{\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\|\le 1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \le \frac{1}{c}\end{aligned}$$

□

Die Zahl $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|$ nennen wir die Basiskonstante der Basis x_n, $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass eine Basis monoton ist, wenn die Basiskonstante gleich 1 ist. Die Koordinatenfunktionale $x_n^* : X \to \mathbb{R}$ einer Basis sind durch

$$x_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_n$$

gegeben. Man beachte, dass die Funktionale stetig sind. Die Funktionale sind stetig, weil die Projektionen P_n stetig sind. Es ist damit $P_n - P_{n-1}$ stetig

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = x_n^*(x) x_n.$$

Wir wählen ein stetiges Funktional y_n^* mit $y_n^*(x_n) = 1$. Dann ist

$$x_n^* = y_n^* \circ (P_n - P_{n-1})$$

stetig,

Die Basis in c_0 und ℓ^p, $1 \le p < \infty$, die aus den Einheitsvektoren besteht, hat die Basiskonstante 1 und die Koordinatenfunktionale haben auch die Norm 1.

Lemma 126 *Es sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum.*
(i) Falls x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von X ist und x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, die Koordinatenfunktionale dieser Basis, so gilt für alle $x \in X$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

(ii) Falls x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von X ist und die Koordinatenfunktionale dieser Basis x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von X^* sind, dann gilt für alle $x^* \in X^*$

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n) x_n^*$$

Beweis. (i) Es sei $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$x_m^*(x) = x_m^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = a_m$$

□

Lemma 127 *Es sei X ein Banachraum und x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in X. x_n, $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann eine Basis von X, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind*
(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \neq 0$.
(ii) Es gibt eine Konstante C, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und alle Folgen a_i, $i \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$$

(iii) Die abgeschlossene, lineare Hülle von x_n, $n \in \mathbb{N}$, ist gleich X.

Beweis. Wir nehmen an, dass x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis ist. (i) folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung der Vektoren. (iii) gilt, weil sich jeder Vektor in X darstellen lässt. Nach Lemma 125 gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \sup_n \|P_n\| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Wir zeigen nun die Umkehrung. Wir zeigen zunächst, dass die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, linear unabhängig ist. Falls dem nicht so wäre, so existieren Skalare $a_1, \ldots, a_m$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$$

wobei mindestens zwei Skalare von 0 verschieden sind. Es sei i_0 die kleinste Zahl, so dass $a_{i_0} \neq 0$. Dann gilt

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \geq \frac{1}{C} \left\| \sum_{i=1}^{i_0} a_i x_i \right\| = |a_{i_0}| \; \|x_{i_0}\| > 0$$

Wegen (iii) gibt es zu jedem $x \in X$ eine Folge von Vektoren

$$\sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i \qquad k \in \mathbb{N}$$

die in der Norm gegen x konvergiert. Wir definieren $a_i^k = 0$ für $i > n_k$. Wir wollen zeigen, dass

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (\lim_{k \to \infty} a_i^k) x_i.$$

Dazu zeigen wir zuerst, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Grenzwerte

$$a_i = \lim_{k \to \infty} a_i^k$$

existieren. Es gibt für alle $\epsilon > 0$ ein N, so dass für alle $k, \ell \geq N$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i - \sum_{i=1}^{n_\ell} a_i^\ell x_i \right\| < \epsilon$$

gilt. Es folgt mit (ii), dass für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $k, \ell \geq N$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^\ell x_i \right\| < C\epsilon.$$

Insbesondere gilt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $k, \ell \geq N$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^\ell x_i \right\| < C\epsilon$$

gilt. Da die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind, ist $\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ für den Vektor $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Homogenität und Dreiecksungleichung sind klar. Weiter gilt genau dann $\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| = 0$, wenn

$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $c = 0$, weil die Vektoren linear unabhängig sind. Deshalb ist $(a_1^k, \ldots, a_n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}^n$, die konvergiert. Insbesondere konvergieren die Koordinaten.

Wir zeigen nun, dass $\sum_{i=1}^\infty a_i x_i \in X$. Wir nehmen an, dies sei nicht so. Dann ist die Folge der Partialsummen keine Cauchy-Folge. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle M natürliche Zahlen $n, m > M$ existieren, so dass

$$\left\| \sum_{i=n+1}^m a_i x_i \right\| \geq \epsilon.$$

Nun wählen wir N so groß, dass für alle $k, \ell > N$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i - \sum_{i=1}^{n_\ell} a_i^\ell x_i \right\| < \frac{\epsilon}{4C}.$$

Nun wählen wir n und m für $M = n_k$. Dann wählen wir n_ℓ so groß, dass für alle $i = 1, \ldots, m$

$$|a_i - a_i^\ell| < \frac{\epsilon}{4 \sum_{i=1}^m \|x_i\|}$$

Hieraus folgt

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i - \sum_{i=1}^m a_i^\ell x_i \right\| < \frac{\epsilon}{4} \tag{5.9}$$

Es gelten wegen (ii)

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i^k x_i - \sum_{i=1}^n a_i^\ell x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i - \sum_{i=1}^{n_\ell} a_i^\ell x_i \right\| < \frac{\epsilon}{4}$$

und

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i^k x_i - \sum_{i=1}^m a_i^\ell x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i - \sum_{i=1}^{n_\ell} a_i^\ell x_i \right\| < \frac{\epsilon}{4}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\frac{\epsilon}{4} > \left\| \sum_{i=1}^m a_i^k x_i - \sum_{i=1}^m a_i^\ell x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i^\ell x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^m a_i^k x_i - \sum_{i=1}^n a_i^\ell x_i \right\|$$

Weil $n > n_k = M$, gilt für $i = n+1, \ldots$ die Gleichung $a_i^k = 0$. Deshalb

$$\frac{\epsilon}{4} > \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i^\ell x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n a_i^k x_i - \sum_{i=1}^n a_i^\ell x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i^\ell x_i \right\| - \frac{\epsilon}{4}$$

Mit der Dreiecksungleichung und (5.9) folgt

$$\frac{\epsilon}{2} \geq \left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i^\ell x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i x_i \right\| - \left\| \sum_{i=n+1}^{m} (a_i^\ell - a_i) x_i \right\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{4} = \frac{3\epsilon}{4}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Folge $\sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i$, $k \in \mathbb{N}$, in der Norm gegen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ konvergiert. Wir nehmen an, dies sei nicht so. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle N ein $k > N$ mit

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i \right\| > \epsilon$$

Wir wählen N so groß, dass für alle $k, \ell \geq N$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_\ell} a_i^\ell x_i - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i \right\| < \frac{\epsilon}{8C}.$$

Zu N wählen wir nun n_k, so dass $k \geq N$ und $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i \right\| > \epsilon$. Wir wählen m_0 so groß, dass für alle $m > m_0$

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i x_i \right\| < \frac{\epsilon}{8}.$$

Außerdem wählen wir ℓ so groß, dass für alle $i = 1, \ldots, M$ mit $M = \max\{m_0, n_k\}$

$$|a_i - a_i^\ell| < \frac{\epsilon}{8 \sum_{i=1}^{M} \|x_i\|}$$

gilt. Es folgt

$$\left\| \sum_{i=1}^{M} (a_i - a_i^\ell) x_i \right\| < \frac{\epsilon}{8} \tag{5.10}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{8} &> C \left\| \sum_{i=1}^{n_\ell} a_i^\ell x_i - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^{M} a_i^\ell x_i - \sum_{i=1}^{M} a_i^k x_i \right\| \end{aligned}$$

Wegen $a_i^k = 0$ für $i > n_k$ und wegen (5.10)

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{8} &> \left\|\sum_{i=1}^{M} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{M}(a_i - a_i^\ell)x_i\right\| \\ &\geq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k x_i\right\| - \left\|\sum_{i=M+1}^{\infty} a_i x_i\right\| - \frac{\epsilon}{8} \geq \frac{3}{4}\epsilon\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Darstellungen eindeutig sind. Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n = 0$, falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$. Da für alle n, m mit $n \leq m$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

gilt, folgt

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| = 0$$

Da die Vektoren linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten 0 sein. □

Lemma 128 *Es sei X ein Banachraum mit einer Schauder Basis x_n, $n \in \mathbb{N}$. Die Koordinatenfunktionale x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, bilden genau dann eine Basis des Dualraumes X^*, wenn für jedes $x^* \in X^*$ die Folge der Normen der Einschränkungen von x^* auf den von $x_n, x_{n+1}, \ldots$ erzeugten abgeschlossenen Teilraum gegen 0 konvergiert.*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^*_{|[x_i]_{i=n}^\infty}\| = 0$$

Falls x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von X^* ist, so ist die Basiskonstante von x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, gleich der von x_n, $n \in \mathbb{N}$.

Eine Basis mit der Eigenschaft, dass für alle $x^* \in X^*$

$$\lim_{n\to\infty} \|x^*_{|[x_i]_{i=n}^\infty}\| = 0$$

gilt, nennen wir schrumpfend.

Beweis. Wir benutzen Lemma, um nachzuweisen, dass x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis ist. Bedingung (i) ist offensichtlich erfüllt.

Wir betrachten die zu P_n adjungierte Abbildung P_n^*. Es gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und alle Folgen a_i, $i \in \mathbb{N}$,

$$P_n^* \left(\sum_{i=1}^m a_i x_i^* \right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$$

Dies folgt sofort aus

$$x_i^*(P_n(x_j)) = P_n^*(x_i^*)(x_j)$$

Da $\|P_n\| = \|P_n^*\|$ gilt, ist auch (ii) erfüllt.

Wir weisen (iii) nach. Es gilt

$$P_n^*(x^*) = \sum_{j=1}^n x^*(x_j) x_j^*$$

Dazu zeigen wir, dass für alle $x \in X$ die Gleichung $P_n^*(x^*)(x) = \sum_{j=1}^n x^*(x_j) x_j^*(x)$ gilt. Dies folgt, weil

$$P_n^*(x^*) \left(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i x^*(x_i)$$

$$\sum_{j=1}^n x^*(x_j) x_j^* \left(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i x^*(x_i)$$

Insbesondere gilt also $P_n^*(x^*) \in \mathrm{LH}(x_1, \ldots, x_n)$.

$$(x^* - P_n^*(x^*))(x) = x^*((I - P_n)x) \leq (C+1) \|x^*_{|[x_i]_{i=n+1}^\infty}\|$$

wobei C die Basis Konstante von x_n, $n \in \mathbb{N}$, ist. Hieraus folgt

$$\|P_n^*(x^*) - x^*\| \leq (C+1) \|x^*_{|[x_i]_{i=n+1}^\infty}\|$$

Nach Annahme konvergiert die rechte Seite aber gegen 0. □

Das folgende Lemma liefert eine Darstellung des Bidualraumes. Es versetzt uns in die Lage, den Bidualraum zu berechnen.

Lemma 129 *Es sei X ein Banachraum und x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine schrumpfende Basis von X. Es sei Z der Raum aller reellen Folgen a_i, $i \in \mathbb{N}$, mit*

$$|\|a\|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| < \infty$$

Dann ist Z mit der Norm $|||\ |||$ ein Banachraum und $I : X^{**} \to Z$

$$I(x^{**}) = (x^{**}(x_i^*))_{i\in\mathbb{N}}$$

ist ein stetiger Isomorphismus. Falls die Basiskonstante von x_n, $n \in \mathbb{N}$, gleich 1 ist, so ist I sogar eine Isometrie.

Für reflexive Räume ist die Aussage offensichtlich. Das Lemma lässt sich auf c_0 anwenden und liefert als Bidualraum ℓ^∞.

Beweis. Wir zeigen, dass

$$\|x^{**}\| \le |||I(x^{**})|||_Z \le C\|x^{**}\|$$

wobei C die Basiskonstante von x_n, $n \in \mathbb{N}$, ist, die wegen Lemma **??** mit der von x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, identisch ist.

$$\|x^{**}\| = \sup_{\|x^*\|\le 1} x^{**}(x^*) = \sup_{\|x^*\|\le 1} x^{**}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i)x_i^*\right)$$

Da x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine schrumpfende Basis ist, so ist x_n^*, $n \in \mathbb{N}$ eine Basis für den Dualraum X^*. Deshalb konvergiert $\sum_{i=1}^n x^*(x_i)x_i^*$, $n \in \mathbb{N}$, in der Norm von X^* gegen $\sum_{i=1}^\infty x^*(x_i)x_i^*$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\|x^{**}\| &\le \sup_{\|x^*\|\le 1}\sup_{n\in\mathbb{N}} x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*\right) = \sup_{\|x^*\|\le 1}\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x^{**}(x_i^*)\\ &= \sup_{\|x^*\|\le 1}\sup_{n\in\mathbb{N}} x^*\left(\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*)x_i\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*)x_i\right\|\end{aligned}$$

Nun zeigen wir $|||I(x^{**})|||_Z \le C\|x^{**}\|$. Wegen Lemma **??** gilt für alle $x^* \in X^*$

die Gleichung $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i)x_i^*$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|x^{**}\| &= \sup_{\|x^*\|=1} x^{**}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i)x_i^*\right) \\
&\geq \frac{1}{C} \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*\right) \\
&= \frac{1}{C} \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} x^{*}\left(\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*)x_i\right) \\
&= \frac{1}{C} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*)x_i\right\| = |||I(x^{**})|||_Z
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass I surjektiv ist, d.h. dass eine Folge a mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

Bild eines Elementes x^{**} ist. Die Folge

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

ist beschränkt und besitzt nach dem Satz von Alaoglu (Satz 36) als Teilmenge von X^{**} ein in der schwach* Topologie konvergentes Teilnetz. Wir bezeichnen den Grenzwert mit x^{**}. Dann gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\lim_{\iota} x^*\left(\sum_{i=1}^{\phi(\iota)} a_i x_i\right) = x^{**}(x^*)$$

Insbesondere erhalten wir für $x^* = x_j^*$ und alle $j \in \mathbb{N}$

$$x^{**}(x_j^*) = a_j$$

Also stellt die Folge a das Element x^{**} dar. $\square$

5.8 Der Raum von R.C. James

Der Raum J von James liefert ein Beispiel dafür, dass ein Raum isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum sein kann, obwohl er nicht reflexiv ist. Es stellt sich heraus, dass J in der natürlichen Einbettung in J^{**} die Codimension 1 besitzt, also die Reflexivität so knapp wie nur möglich verfehlt.

Auf dem Raum aller reellen Folgen $(x(i))_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} x(i) = 0$ definieren wir

$$\|x\|_J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup \Big\{ (|x(i_1) - x(i_2)|^2 + |x(i_2) - x(i_3)|^2 + \cdots + |x(i_n) - x(i_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \Big| \\ 2 \le n \text{ und } i_1 < i_2 < \cdots < i_n \Big\}$$

Der Raum von James J ist der der Raum aller reellen Folgen x, die gegen 0 konvergieren und für die $\|x\|_J < \infty$ gilt.

Lemma 130 *$\| \ \|_J$ ist eine Norm auf dem Raum von James J. J ist mit dieser Norm ein Banachraum.*

Beweis. Wir zeigen, dass für alle $x \in J$ und alle $i \in \mathbb{N}$

$$x(i)| \le \|x\|_J.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Koordinate $x(j)$ mit $i < j$ und $|x(j)| < \epsilon$. Weiter folgt

$$\|x\|_J \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \big(2|x(i) - x(j)|^2\big)^{\frac{1}{2}} = |x_i - x_j| \ge (|x(i)| - \epsilon).$$

Nun zeigen wir, dass $\| \ \|_J$ eine Norm ist. Homogenität und Dreiecksungleichung folgen, weil die Euklidische Norm dies erfüllt. Wir zeigen nun, dass $x = 0$ gilt, wenn $\|x\|_J = 0$ gilt. Falls $x \neq 0$, dann gibt es eine Koordinate $x(i) \neq 0$. Es folgt $0 < |x(i)| \le \|x\|_J$.

Wir zeigen nun die Vollständigkeit. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in J. Dann konvergiert für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge der Koordinaten $x_n(i)$, $n \in \mathbb{N}$. Dies gilt, weil für alle $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|x(i)| \le \|x\|_J$ gilt. Wir setzen

$$x_0(i) = \lim_{n\to\infty} x_n(i)$$

und behaupten, dass $x_0 \in J$ und $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zuerst zeigen wir, dass $x_0 \in J$. Hierzu zeigen wir, dass $\lim_{i\to\infty} x_0(i) = 0$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein N so dass für alle $n, m > N$ die Ungleichung $\|x_n - x_m\| < \epsilon$. Wir wählen $n > N$. Zu n wählen wir i_0, so dass für alle $i > i_0$ die Abschätzung $|x_n(i)| < \epsilon$ gilt. Damit gilt für alle $m > N$ und alle $i > i_0$ die Abschätzung $|x_m(i)| < 2\epsilon$. In der Tat,

$$\epsilon > \|x_n - x_m\| \geq \sqrt{2}|x_n(i) - x_m(i)| \geq \sqrt{2}|x_m(i)| - \epsilon$$

und somit für alle $m > N$ und $i > i_0$

$$(1 + \sqrt{2})\epsilon \geq |x_m(i)|.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ und i gibt es ein m mit $|x_0(i) - x_m(i)| < \epsilon$. Also gilt für alle i mit $i > i_0$

$$|x_0(i)| < (2 + \sqrt{2})\epsilon.$$

Wir zeigen nun, dass $\|x_0\|_J < \infty$. Es seien $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Dann gibt es ein x_m, so dass für alle $j = 1, \ldots, k$

$$|x_0(i_j) - x_m(i_j)| < \frac{1}{k}.$$

Damit ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&(|x_0(i_1) - x_0(i_2)|^2 + |x_0(i_2) - x_0(i_3)|^2 + \cdots + |x_0(i_k) - x_0(i_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq (|x_m(i_1) - x_m(i_2)|^2 + |x_m(i_2) - x_m(i_3)|^2 + \cdots + |x_m(i_k) - x_m(i_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad +(|(x_0(i_1) - x_0(i_2)) - ((x_m(i_1) - x_m(i_2))|^2 \\
&\qquad\qquad + \cdots + |(x_0(i_k) - x_0(i_1)) - (x_m(i_k) - x_m(i_1))|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq \|x_m\|_J + \tfrac{2}{k}\sqrt{k}
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist beschränkt und unabängig von der Wahl der Koordinaten $i_1, \ldots, i_k$. Also $x_0 \in J$.

Wir zeigen nun die Vollständigkeit von J. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in J. Wir wählen N so groß, dass für alle n, m mit $n, m > N$ die Abschätzung $\|x_n - x_m\|_J < \epsilon$ gilt. Es sei $n > N$ gegeben. Mit der Dreieck-

sungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&(|(x_0(i_1) - x_0(i_2)) - ((x_n(i_1) - x_n(i_2))|^2 \\
&\qquad + \cdots + |(x_0(i_k) - x_0(i_1)) - (x_n(i_k) - x_n(i_1))|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (|(x_0(i_1) - x_0(i_2)) - ((x_m(i_1) - x_m(i_2))|^2 \\
&\qquad + \cdots + |(x_0(i_k) - x_0(i_1)) - (x_m(i_k) - x_m(i_1))|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&+(|(x_n(i_1) - x_n(i_2)) - ((x_m(i_1) - x_m(i_2))|^2 \\
&\qquad + \cdots + |(x_n(i_k) - x_n(i_1)) - (x_m(i_k) - x_m(i_1))|^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Wir wählen nun m so groß, dass $m > N$ und so dass für alle $j = 1, \ldots, k$ die Abschätzung

$$|x_0(i_j) - x_m(i_j)| < \frac{\epsilon}{k}.$$

Dann ist der obige Ausdruck kleiner als

$$\|x_n - x_m\|_J + \frac{2\epsilon}{k}\sqrt{k} \leq \epsilon + \frac{2\epsilon}{\sqrt{k}} \leq 3\epsilon.$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten $i_1, \ldots, i_k$. □

Lemma 131 *Es seien $n_k < m_k < n_{k+1}$ und $1 \leq k \leq N$. Es seien*

$$v_k = \sum_{i=n_k}^{m_k} a_i e_i$$

Dann gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} v_k \right\|_J \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \|v_k\|_J^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis. □

Lemma 132 *Die Einheitsvektoren e_n, $n \in \mathbb{N}$, bilden in J eine monotone, schrumpfende Basis.*

Beweis. Wir zeigen, dass e_n, $n \in \mathbb{N}$, eine monotone Basis ist. Dazu müssen wir zeigen, dass für alle $x \in J$ und alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x(i) e_i \right\|_J \leq \|x\|_J$$

gilt. Um die Norm von $P_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x(i) e_i$ auszurechnen, bilden wir das Supremum über

$$(|(P_n x)(i_1) - (P_n x)(i_2)|^2 + |(P_n x)(i_2) - (P_n x)(i_3)|^2 + \cdots + |(P_n x)(i_n) - (P_n x)(i_1)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Falls $i_n \leq k$, dann erhalten wir

$$(|x(i_1) - x(i_2)|^2 + |x(i_2) - x(i_3)|^2 + \cdots + |x(i_n) - x(i_1)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

und ein solcher Ausdruck tritt auch bei der Berechnung der Norm von x auf. Falls $i_n > k$, dann erhalten wir

$$(|x(i_1) - x(i_2)|^2 + |x(i_2) - x(i_3)|^2 + \cdots + |x(i_\ell)|^2 + |x(i_1)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

wobei i_ℓ die grösste Zahl ist die kleiner oder gleich k ist. Bis auf einen beliebig kleinen Fehler tritt ein solcher Ausdruck auch bei der Berechnung der Norm von x auf: Wir wählen die Folge $i_1, \ldots, i_\ell, \tilde{i}_{\ell+1}$, wobei $\tilde{i}_{\ell+1}$ so gross gewählt ist, dass $x(\tilde{i}_{\ell+1})$ kleiner als ein vorgegebener Fehler ist.

Wir zeigen, dass die Basis e_n, $n \in \mathbb{N}$, schrumpfend ist. Wir nehmen an, dies sei nicht so. Dann gibt es ein $x^* \in J^*$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x^*_{|[e_i]_{i=n}^\infty} \right\|_J$$

nicht existiert oder ungleich 0 ist. Es folgt

$$\exists x^* \exists \epsilon > 0 \forall N \exists n > N : \quad \left\| x^*_{|[e_i]_{i=n}^\infty} \right\|_J > \epsilon$$

$$\exists x^* \exists \epsilon > 0 \forall N \exists n > N \exists x \in [e_i]_{i=n}^\infty, \|x\| \leq 1 : \quad x^*(x) > \epsilon$$

$$\exists x^* \exists \epsilon > 0 \forall N \exists n, m > N \exists a_n^n, \ldots, a_m^n, \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^n e_i \right\| \leq 1 : \quad x^* \left(\sum_{i=n}^{m} a_i^n e_i \right) > \epsilon$$

Nun wählen wir Blöcke

$$u_k = \sum_{i=n_k}^{m_k} a_i^k e_i \qquad \text{mit } \|u_k\|_J = 1$$

mit $n_k < m_k < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $x^*(u_k) > \epsilon$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k \qquad n \in \mathbb{N}$$

nicht in J, weil

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} u_k \right\|_J \geq \frac{x^*}{\|x^*\|_{J^*}} \left(\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} u_k \right) = \frac{1}{\|x^*\|_{J^*}} \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} x^*(u_k) \geq \frac{1}{\|x^*\|_{J^*}} \epsilon \ln(\tfrac{m}{n})$$

Andererseits können wir zeigen, dass eine solche Summe in J konvergiert. Mit Lemma folgt

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} u_k \right\|_J \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} \|u_k\|_J^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

Satz 43 *(i) J hat mit seiner natürlichen Einbettung in J^{**} die Codimension 1. Insbesondere ist J nicht reflexiv.*
(ii) J ist isometrisch isomorph zu J^{**}.

Beweis. (i) Die Voraussetzungen von Lemma **??** erfüllt und der Bidualraum J^{**} besteht aus allen Folgen a_i mit

$$\|a\|_{J^{**}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_J < \infty$$

Man sieht sofort, dass die konstante Folge $(1, 1, 1, \dots)$ im Bidualraum enthalten ist und die Norm 1 besitzt. Da alle Folgen, die in J enthalten sind, gegen 0 konvergieren, erhält man, dass die Codimension von J im Bidualraum mindestens 1 ist.

Andererseits konvergiert jede Folge, die Element des Bidualraums ist. Wir weisen dies nach. Es sei $a \in J^{**}$ und wir nehmen an, dass $\lim_{i \to \infty} a(i)$ nicht existiert. Dann

$$\exists \epsilon > 0 \forall N \exists n, m \geq N : \ |a(n) - a(m)| \geq \epsilon$$

Es folgt

$$\exists \epsilon > 0 \exists n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots : \ |a(n_i) - a(m_i)| \geq \epsilon$$

Somit

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{m_k} a_i e_i \right\| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} (|a(n_1) - a(m_1)|^2 + |a(m_1) - a(n_2)|^2 + \cdots + |a(m_k) - a(n_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k} \epsilon \end{aligned}$$

Jede konvergente Folge $a \in J^{**}$ lässt sich als Summe einer Nullfolge b und einer konstanten Folge c schreiben. Da $c \in J^{**}$ und $a \in J^{**}$, so gilt auch $b \in J^{**}$. Aus

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \right\|_J < \infty$$

folgt $\|b\|_J < \infty$. Deshalb ist die Codimension von J in J^{**} gleich 1.

(ii) Als Isomorphismus wählen wir $U : J^{**} \to J$

$$U(x^{**}) = (-\lambda, x^{**}(e_1) - \lambda, x^{**}(e_2) - \lambda, \dots)$$

wobei $\lambda = \lim_{i \to \infty} x^{**}(e_i)$.

Wir berechnen die Norm von $U(x^{**})$. Wenn $i_1 > 1$, dann erhalten wir

$$\left(|x^{**}(e_{i_1}) - x^{**}(e_{i_2})|^2 + |x^{**}(e_{i_2}) - x^{**}(e_{i_3})|^2 + \cdots + |x^{**}(e_{i_n}) - x^{**}(e_{i_1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Falls $i_1 = 1$, so erhalten wir

$$\left(|x^{**}(e_{i_2})|^2 + |x^{**}(e_{i_2}) - x^{**}(e_{i_3})|^2 + \cdots + |x^{**}(e_{i_n})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nun berechnen wir die Norm von x^{**} in J^{**}. Um

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x^{**}(i) e_i \right\|_J$$

zu berechnen erhalten wir die folgenden Fälle. Im Fall $k \geq i_n$

$$\left(|x^{**}(e_{i_1}) - x^{**}(e_{i_2})|^2 + |x^{**}(e_{i_2}) - x^{**}(e_{i_3})|^2 + \cdots + |x^{**}(e_{i_n}) - x^{**}(e_{i_1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Falls $k < i_n$, dann sei ℓ die größte Zahl, so dass $i_\ell \leq k$. Damit erhalten wir

$$\left(|x^{**}(e_{i_1}) - x^{**}(e_{i_2})|^2 + \cdots + |x^{**}(e_{i_{\ell-1}}) - x^{**}(e_{i_\ell})|^2 + |x^{**}(e_{i_\ell})|^2 + |x^{**}(e_{i_1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

Chapter 6

Extremalpunkte

6.1 Strikt konvexe und uniform konvexe Mengen

Es sei X ein Vektorraum und K eine konvexe Teilmenge von X. Ein Punkt $x \in K$ ist nicht Extremalpunkt von K, wenn es $y, z \in K$ mit $y \neq z$ und $t \in (0,1)$ gibt, so dass

$$x = ty + (1-t)z$$

Die Menge der Extremalpunkte einer Menge K bezeichnen wir mit $\mathrm{Ext}(K)$.

Eine Menge K heißt strikt konvex, wenn jeder Randpunkt von K Extremalpunkt ist. Ein normierter Raum heißt strikt konvex, wenn die abgeschlossene Einheitskugel strikt konvex ist.

Ein normierter Raum bzw. seine Einheitskugel heißt uniform konvex, wenn

$$\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 2, \exists \delta > 0 \forall x, y, \|x\| = \|y\| = 1 \text{ und } \|x-y\| \geq \epsilon : \|\tfrac{1}{2}(x+y)\| \leq 1-\delta$$

Der Konvexitätsmodul eines uniform konvexen Raumes X ist eine Funktion $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| = \|y\| = 1 \text{ und } \|x-y\| = \epsilon \right\}.$$

Lemma 133 *Jeder uniform konvexe Raum ist strikt konvex.*

Beweis. □

Lemma 134 *(i) Es sei $1 \leq p \leq 2$. Dann gilt für den Konvexitätsmodul von L^p die Abschätzung $a\epsilon^2 \leq \delta(\epsilon) \leq b\epsilon^2$.*

(ii) Es sei $2 \leq p < \infty$. Dann gilt für den Konvexitätsmodul von L^p die Abschätzung $a\epsilon^p \leq \delta(\epsilon) \leq b\epsilon^p$.

Beweis. Wir beobachten, dass $\delta_X(\epsilon)$ eine wachsende Funktion ist. Dazu zeigen wir, dass

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ und } \|x-y\| \geq \epsilon\right\}.$$

Als ersten Schritt zeigen wir

$$\begin{aligned}&\inf\left\{1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ und } \|x-y\| \geq \epsilon\right\}\\ &= \inf\left\{1 - \tfrac{1}{2}\|u+v\| \mid \|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1 \text{ und } \|u-v\| = \epsilon\right\}\end{aligned}$$

Zu gegebenen x und y wählen wir

$$u = \frac{x+y}{2} + \frac{\epsilon}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \qquad v = \frac{x+y}{2} - \frac{\epsilon}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|}$$

Dann gilt $\|u-v\| = \epsilon$ und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|u\| = \left\|\frac{x+y}{2} + \frac{\epsilon}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| = \frac{1}{2}\left\|x\left(1 + \frac{\epsilon}{\|x-y\|}\right) + y\left(1 - \frac{\epsilon}{\|x-y\|}\right)\right\| \leq 1$$

Ebenso $\|v\| \leq 1$. Außerdem gilt

$$\frac{x+y}{2} = \frac{u+v}{2}$$

Nun zeigen wir

$$\begin{aligned}&\inf\left\{1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ und } \|x-y\| = \epsilon\right\}\\ &= \inf\left\{1 - \tfrac{1}{2}\|u+v\| \mid \|u\| = 1, \|v\| \leq 1 \text{ und } \|u-v\| = \epsilon\right\}\end{aligned}$$

Dazu wählen wir α, so dass

$$\left\|x + \alpha\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \qquad \left\|y + \alpha\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1$$

oder umgekehrt. Wir betrachten den angegebenen Fall. Wir setzen

$$u = x + \alpha \frac{x+y}{2} \qquad\qquad v = y + \alpha \frac{x+y}{2}$$

und erhalten

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\| = \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \|x+y\|$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| = 1, \|y\| \leq 1 \text{ und } \|x-y\| \geq \epsilon \right\}.$$

Nun zeigen wir

$$\begin{aligned} &\inf \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| = 1, \|y\| \leq 1 \text{ und } \|x-y\| = \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\|u+v\| \mid \|u\| = 1, \|v\| = 1 \text{ und } \|u-v\| = \epsilon \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \tfrac{1}{2}\|x+y\| \mid \|x\| = 1, \|y\| \leq 1 \text{ und } \|x-y\| = \epsilon \right\} \\ &= \sup \left\{ \tfrac{1}{2}\|u+v\| \mid \|u\| = 1, \|v\| = 1 \text{ und } \|u-v\| = \epsilon \right\} \end{aligned}$$

Wir können auch annehmen, dass X 2-dimensional ist. Dann werden die Suprema angenommen. Wir nehmen an, dass das Supremum auf der linken Seite für x_0 mit $\|x_0\| = 1$ und y_0 mit $\|y_0\| < 1$ angenommen wird. Es sei

$$A = \{w \mid \|w - x_0\| = \epsilon\}$$

Weiter sei ϕ ein Funktional mit $\|\phi\| = 1$ und

$$\phi(x_0 + y_0) = \|x_0 + y_0\|$$

Weil das Supremum für x_0 und y_0 angenommen wird, gilt für alle $w \in A$

$$\phi(x_0 + w) \leq \|x_0 + w\| \leq \|x_0 + y_0\| = \phi(x_0 + y_0)$$

Deshalb gilt für alle $w \in A$

$$\phi(w) \leq \phi(y_0)$$

Somit gilt für alle w mit $\|w - x_0\| = \epsilon$

$$\phi(w - x_0) \leq \phi(y_0 - x_0)$$

Weil $\|\phi\| = 1$

$$\epsilon = \sup_{\|z\|=\epsilon} \phi(z) \leq \phi(y_0 - x_0) \leq \|y_0 - x_0\| = \epsilon$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|x_0\| \leq \tfrac{1}{2}(\|x_0 + y_0\| + \|y_0 - x_0\|) = \tfrac{1}{2}(\phi(x_0 + y_0) + \phi(y_0 - x_0)) = \phi(y_0) < 1$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $\|\phi\| = 1$ und $\|y_0\| < 1$. Dies ist ein Widerspruch, weil $\|x_0\| = 1$.

Es sei $1 < p \leq 2$. Wir verwenden die Ungleichung von Hanner.

$$|\|f+g\|_p + \|f-g\|_p|^p + |\|f+g\|_p - \|f-g\|_p|^p \leq 2^p \left|\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right|$$

Es folgt

$$|\|f+g\|_p + \epsilon|^p + |\|f+g\|_p - \epsilon|^p \leq 2^{p+1}$$

bzw.

$$\|f+g\|_p^p \left\{ \left|1 + \frac{\epsilon}{\|f+g\|_p}\right|^p + \left|1 - \frac{\epsilon}{\|f+g\|_p}\right|^p \right\} \leq 2^{p+1}$$

Mit der Taylorentwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p \Bigg\{ & 1 + p\frac{\epsilon}{\|f+g\|_p} + \frac{p(p-1)}{2}\frac{\epsilon^2}{\|f+g\|_p^2} + \cdots \\ & +1 - p\frac{\epsilon}{\|f+g\|_p} + \frac{p(p-1)}{2}\frac{\epsilon^2}{\|f+g\|_p^2} + \cdots \Bigg\} \leq 2^{p+1} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|f+g\|_p^p \left\{ 2 + p(p-1)\frac{\epsilon^2}{\|f+g\|_p^2} + \cdots \right\} \leq 2^{p+1}$$

und

$$\|\tfrac{1}{2}(f+g)\|_p^p \left\{ 1 + \frac{p(p-1)}{2}\frac{\epsilon^2}{\|f+g\|_p^2} + \cdots \right\} \leq 1$$

Also gibt es eine Konstante c, so dass

$$\|\tfrac{1}{2}(f+g)\|_p^p \leq 1 - c\epsilon^2$$

Mit einer neuen Konstanten folgt

$$\|\tfrac{1}{2}(f+g)\|_p \leq 1 - c\epsilon^2$$

Damit gilt für den Konvexitätsmodul $\delta(\epsilon) \geq c\epsilon^2$. Wir schätzen nun den Konvexitätsmodul nach oben ab. Dazu betrachten wir die Funktionen

$$f = \frac{1+a}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}\chi_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{1-a}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}\chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

und

$$g = \frac{1-a}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}\chi_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{1+a}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}\chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

Es gilt

$$f - g = \frac{2a}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}\chi_{[0,\frac{1}{2})} - \frac{2a}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}\chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

und

$$\|f-g\|_p = \frac{2|a|}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}}$$

Somit ist a von der Größenordnung ϵ. Weiter gilt

$$\tfrac{1}{2}\|f+g\|_p = \frac{1}{(\frac{1}{2}|1+a|^p+\frac{1}{2}|1-a|^p)^{\frac{1}{p}}} \sim 1 - \tfrac{p-1}{2}a^2$$

Also gibt es eine Konstante c mit $\delta(\epsilon) \leq c\epsilon^2$.

Es sei $2 \leq p < \infty$. Wir benutzen die Ungleichung von Hanner.

$$|\|f\|_p + \|g\|_p|^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

Es folgt

$$2^p \geq \|f+g\|_p^p + \epsilon^p$$

und damit

$$\tfrac{1}{2}\|f+g\|_p \leq \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Also ist L^p für $2 \leq p < \infty$ uniform konvex und für den Konvexitätsmodul gilt $\delta(\epsilon) \geq c\epsilon^p$.

Wir wollen nun den Konvexitätsmodul von oben abschätzen. Dazu betrachten wir die Funktionen

$$f = \frac{1}{|1-a|^{\frac{1}{p}}}\chi_{[0,1-a]} \qquad g = \frac{1}{|1-a|^{\frac{1}{p}}}\chi_{[a,1]}$$

Dann gilt

$$\|f-g\|_p = \frac{|2a|^{\frac{1}{p}}}{|1-a|^{\frac{1}{p}}}$$

Also ist ϵ von der Größenordnung $a^{\frac{1}{p}}$. Weiter gilt

$$\tfrac{1}{2}\|f+g\|_p = \frac{1}{|1-a|^{\frac{1}{p}}}\left\{2^{-p}2a+1-2a\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{1-a\frac{1-2^{1-p}}{1-a}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Also ist $1-\frac{1}{2}\|f+g\|_p$ von der Größenordnung ϵ^p. $\square$

Satz 44 *[Milman-Pettis] Jeder uniform konvexe Banachraum ist reflexiv.*

Beweis. Es sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $i : X \to X^{**}$ die natürliche Einbettung von X in X^{**}. Weiter sei $x^{**} \in X^{**}$ mit $\|x^{**}\| = 1$. Nach dem Satz von Goldstine gibt es ein Netz x_γ, $\gamma \in \Gamma$, in der Einheitskugel von X so dass $i(x_\gamma)$, gegen x^{**} in der schwachen* Topologie konvergiert.

Wir definieren nun auf $\Gamma \times \Gamma$ durch $(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2)$, falls $\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $\beta_2 \leq \beta_2$. eine Halbordnung. Dann ist $(i(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)))$, $(\alpha, \beta) \in \Gamma \times \Gamma$, ein Netz, das in der schwachen* Topologie gegen x^{**} konvergiert. Wir weisen dies nach.

Wegen $\lim_\gamma i(x_\gamma) = x^{**}$ gibt es zu jeder Nullumgebung U ein γ_0, so dass für alle γ mit $\gamma_0 \leq \gamma$ die Relation $i(x_\gamma) - x^{**} \in U$ gilt. Da X^{**} mit der schwachen* Topologie ein topologischer Vektorraum ist, gibt es nach Lemma 27 zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V mit $V + V \subseteq U$. Wir wählen γ_0, so dass für alle $\gamma \geq \gamma_0$ die Relation $x_\gamma \in V$ gilt. Deshalb gilt für alle $(\alpha, \beta) \geq (\gamma_0, \gamma_0)$

$$i(x_\alpha) + i(x_\beta) - 2x^{**} \in V + V \subseteq U$$

Da wir annehmen können, dass U absolutkonvex ist, folgt

$$\frac{1}{2}(i(x_\alpha) + i(x_\beta)) - x^{**} \in U$$

Es folgt, dass das Netz $\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\|$ gegen 1 konvergiert. Wir weisen dies nach. Nach Lemma **??** gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\lim_{(\alpha,\beta)} x^*(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)) = x^{**}(x^*)$$

Es folgt

$$\sup_{\|x^*\|=1} \lim_{(\alpha,\beta)} x^*(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)) = 1$$

Also gibt es zu jedem ϵ ein x^* mit $\|x^*\| = 1$, so dass

$$1 - \epsilon \leq \lim_{(\alpha,\beta)} x^*(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)) = 1$$

Es folgt, dass es zu jedem ϵ ein (α_0, β_0) gibt, so dass für alle (α, β) mit $(\alpha_0, \beta_0) \leq (\alpha, \beta)$

$$1 - \epsilon \leq x^*(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)) = 1$$

Andererseits gilt $\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| \leq 1$, weil $\|x_\alpha\| \leq 1$. Deshalb gibt es zu jedem ϵ ein (α_0, β_0), so dass für alle (α, β) mit $(\alpha_0, \beta_0) \leq (\alpha, \beta)$

$$1 - \epsilon \leq \|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\| = 1$$

Aus der uniformen Konvexität von X folgt nun, dass das Netz $\|x_\alpha - x_\beta\|$ gegen 0 konvergiert. Falls das Netz $\|x_\alpha - x_\beta\|$ nicht gegen 0 konvergiert, dann

$$\exists \epsilon \forall (\alpha_0, \beta_0) \exists (\alpha_1, \beta_1) : \|x_{\alpha_1} - x_{\beta_1}\| \geq \epsilon$$

Mit der uniformen Konvexität folgt

$$\exists \delta \forall (\alpha_0, \beta_0) \exists (\alpha_1, \beta_1) : \frac{1}{2}\|x + x\| \leq 1 - \delta$$

Somit ist x_α, $\alpha \in \Gamma$, ein Cauchy-Netz in X bzgl. der Norm-Topologie. Da X vollständig ist, konvergiert dieses Netz gegen ein $x_0 \in X$ in der Norm-Topologie von X. Damit konvergiert $i(x_\gamma)$ gegen $i(x_0)$ in der Norm-Topologie von X^{**}. Da die schwache* Topologie auf X^{**} schwächer als die Norm-Topologie ist, konvergiert $i(x_\gamma)$ gegen $i(x_0)$ in der schwachen* Topologie. Somit $i(x_0) = x^{**}$. Also gilt $i(X) = X^{**}$. $\square$

6.2 Der Satz von Krein-Milman

Es sei K eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes. Eine nichtleere Teilmenge S von K heißt Extremalmenge, falls für alle $x, y \in K$, für die ein $t \in (0,1)$ mit $(1-t)x + ty \in S$ existiert, gilt, dass

$$x \in S \qquad \text{und} \qquad y \in S$$

K ist Extremalmenge von sich selbst.

Falls eine Extremalmenge nur aus einem Punkt besteht, so ist dieser Punkt ein Extremalpunkt.

Satz 45 *(Krein-Milman) (i) Es sei X ein normierter Raum und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, die feiner als die schwache Topologie ist und die gröber als die Norm Topologie ist. Falls K eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge in $(X, \mathcal{T})$ ist, dann ist K gleich der abgeschlossenen, konvexen Hülle der Extremalpunkte von K.*

$$K = \overline{CH(Ext(K))}^{schw} = \overline{CH(Ext(K))}^{\| \ \|} = \overline{CH(Ext(K))}^{\mathcal{T}}$$

(ii) Es sei X^* ein Dualraum eines normierten Raumes X und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X^*, die feiner als die schwache Topologie ist und die gröber als die Norm Topologie ist. Falls K eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge in $(X^*, \mathcal{T})$ ist, dann ist K gleich der abgeschlossenen, konvexen Hülle der Extremalpunkte von K.*

$$K = \overline{CH(Ext(K))}^{\mathcal{T}}$$

Die abgeschlossene, konvexe Hülle einer Menge A ist die kleinste abgeschlossene, konvexe Menge, die A umfasst. Dies ist der Durchschnitt über alle abgeschlossenen, konvexen Mengen, die A umfassen.

Die abgeschlossene, konvexe Hülle von A ist gleich dem Abschluss der konvexen Hülle von A. Wir überlegen uns dies. Die abgeschlossene, konvexe Hülle von A enthält die konvexe Hülle von A und damit auch den Abschluss von der konvexen Hülle von A.

Der Abschluss der konvexen Hülle von A ist eine abgeschlossene, konvexe Menge, die A umfasst. Also enthält sie die abgeschlossene, konvexe Hülle von A.

Beweis. (i) Es gilt

$$\overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}^{\,\mathrm{schw}} = \overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}^{\|\ \|} = \overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}^{\mathcal{T}}$$

weil die abgeschlossenen Mengen in der schwachen und der Norm-Topologie gleich sind. Offensichtlich gilt

$$\overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))} \subseteq K$$

Wir zeigen nun, dass sich in jeder kompakten Extremalmenge S von K ein Extremalpunkt von K befindet. Dazu betrachten wir die Familie $\mathcal{D}$ aller kompakten Extremalmengen von K. $\mathcal{D}$ ist nichtleer, weil K eine kompakte Extremalmenge von sich selbst ist. $\mathcal{D}$ erfüllt die beiden Eigenschaften:
(i) Der Durchschnitt einer Teilfamilie von $\mathcal{D}$ gehört wieder zu $\mathcal{D}$ oder der Durchschnitt ist leer.
(ii) Falls $S \in \mathcal{D}$ und $x^* \in X^*$, dann gilt

$$\left\{ x \in S \;\middle|\; x^*(x) = \max_{z \in S} x^*(z) \right\} \in \mathcal{D}$$

(i) ist offensichtlich. Wir zeigen (ii). Die Menge ist nicht leer, weil S kompakt ist und x^* darauf sein Maximum annimmt. Die Menge ist kompakt, weil S kompakt ist und $\{x \in X \mid x^*(x) = \max_{z \in S} x^*(z)\}$ abgeschlossen ist.

Es seien $u, v \in K$ und $0 < t < 1$ mit

$$(1-t)u + tv \in \left\{ x \in S \;\middle|\; x^*(x) = \max_{z \in S} x^*(z) \right\}.$$

Dann gilt $(1-t)u + tv \in S$ und somit $u \in S$ und $v \in S$. Weiter folgt

$$\max_{z \in S} x^*(z) = x^*((1-t)u + tv) = (1-t)x^*(u) + tx^*(v).$$

Es folgt, dass

$$\max_{z \in S} x^*(z) = x^*(u) = x^*(v)$$

Deshalb gilt

$$u, v \in \left\{ x \in S \;\middle|\; x^*(x) = \max_{z \in S} x^*(z) \right\}$$

und diese Menge ist eine Extremalmenge.

Wir führen auf $\mathcal{D}$ eine Halbordnung ein: $S_1 \leq S_2$, falls $S_2 \subseteq S_1$. Wir wenden nun das Lemma von Zorn an, um zu zeigen, dass zu jedem S ein maximales Element $S_{\max}$ existiert, das größer ist.

Zu $S \in \mathcal{D}$ betrachten wir die Teilfamilie aller $T \in \mathcal{D}$ mit $T \subseteq S$. Jede wohlgeordnete Teilfamilie S_ι, $\iota \in I$, die S enthält, besitzt eine obere Schranke, nämlich den Durchschnitt

$$\bigcap_{\iota \in I} S_\iota$$

Dieser Durchschnitt ist nicht leer, weil sämtliche Mengen kompakt sind und endlich viele jeweils einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $S_{\max}$.

Dieses maximale Element kann nur aus einem Punkt bestehen. Wenn dem nicht so ist, wenn es also mindestens zwei Punkte u und v in $S_{\max}$ gibt, so wählen wir ein Funktional x^* mit

$$x^*(u) > x^*(v).$$

Ein solches Funktional existiert nach dem Satz von Hahn-Banach. Wir betrachten die Menge

$$\{x \in S_{\max} |\ x^*(x) = \max_{z \in S_{\max}} x^*(z)\}$$

v ist nicht in dieser Menge und diese Menge ist in $\mathcal{D}$. Dies widerspricht der Maximalität von $S_{\max}$. Also ist $S_{\max}$ eine Extremalmenge, die nur aus einem Punkt besteht. Damit ist dieser Punkt ein Extremalpunkt.

Wir erhalten also, dass die Menge S einen Extremalpunkt enthält. Wir nehmen nun an, dass es ein $x_0 \in K$ gibt mit $x_0 \notin \overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}$. Die Menge $\overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}$ ist konvex und abgeschlossen in der Topologie $\mathcal{T}$, damit aber auch abgeschlossen in der schwachen und der Norm Topologie. Deshalb gibt es ein Funktional x_0^*, das x_0 strikt von der Menge $\overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}$ trennt. Es gilt

$$x_0^*(x_0) > \max\left\{x_0^*(x) \,\middle|\, x \in \overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}\right\}$$

Nun betrachten wir die Menge

$$\left\{x \in K \,\middle|\, x_0^*(x) = \max_{z \in K} x_0^*(z)\right\}$$

Diese Menge ist eine Extremalmenge von K und enthält deshalb einen Extremalpunkt. Andererseits ist der Schnitt mit der Menge $\overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}$ leer, weil

$$\max_{z\in K} x_0^*(z) \geq x_0^*(x_0) > \max\left\{x_0^*(x) \,\middle|\, x \in \overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}\right\}.$$

Dies kann aber nicht sein, weil $\overline{\mathrm{CH}(\mathrm{Ext}(K))}$ sämtliche Extremalpunkte enthält.
□

Beispiel 44 *(i) Jeder Punkt des Randes der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B_{\ell^p}}$ von ℓ^p, $1 < p < \infty$, ist Extremalpunkt.*
(ii) Die Extremalpunkte von $\overline{B_{\ell^1}}$ sind

$$\{\pm e_n |\ n \in \mathbb{N}\}$$

$\overline{B_{\ell^1}}$ ist die abgeschlossene, konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.
(iii) $\overline{B_{c_0}}$ besitzt keine Extremalpunkte. Insbesondere ist c_0 nicht isometrisch isomorph zu einem Dualraum.

Man kann sogar zeigen, dass c_0 nicht isomorph zu einem Dualraum ist.
(iv) $\overline{B_{L^1[0,1]}}$ besitzt keine Extremalpunkte. Insbesondere ist $L^1[0,1]$ nicht isometrisch isomorph zu einem Dualraum.
(v) Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum. f ist genau dann ein Extremalpunkt der abgeschlossenen Einheitskugel von $C(K)$, wenn $|f| = 1$. Falls K zusammenhängend ist, dann sind 1 und -1 die einzigen Extremalpunkte.

Die Extremalpunkte von $\overline{B_{C[a,b]}}$ sind die konstanten Funktionen 1 und -1. Insbesondere ist $C[a,b]$ nicht isometrisch isomorph zu einem Dualraum.
(vi) Die Extremalpunkte von $\overline{B_{\ell^\infty}}$ sind

$$\{(\epsilon(n))_{n\in\mathbb{N}} |\ \epsilon(n) = \pm 1\}$$

(vii) Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum. Dann sind die Punktmaße $\pm\delta_x$, $x \in K$, die Extremalpunkte von der Einheitskugel in $C(K)^*$.

Beweis. (iii) Nach dem Satz von Alaoglu (Satz 36) ist die abgeschlossene Einheitskugel eines Dualraumes schwach* kompakt. Nach dem Satz von Krein-Milman (Satz 45) ist die abgeschlossene Einheitskugel damit die abgeschlossene, konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte. Also ist c_0 nicht isometrisch isomorph zu einem Dualraum.

Wir nehmen nun an, dass c_0 isomorph zu einem Dualraum X^* ist. Dann ist X^{**} isomorph zu ℓ^1 und X^{***} isomorph zu ℓ^∞. Nach dem Ergebnis von Dixmier ist X^* in X^{***} komplementiert. Dann müsste aber auch c_0 in ℓ^∞ komplementiert sein, was wegen Beispiel 20 falsch ist.

(vii) Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz **??**) kann man den Dualraum von $C(K)^*$ mit dem Raum der signierten Radon Maße identifizieren. Wir zeigen, dass jedes Punktmaß ein Extremalpunkt ist.

Es sei $\delta_x = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu$ und $\|\mu\| = \|\nu\| = 1$. Wir überlegen uns zuerst, dass μ und ν positive Maße sein müssen. Es seien $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $\nu = \nu^+ - \nu^-$ die Jordanzerlegungen von μ und ν. Es folgt

$$\mu^+ + \nu^+ - 2\delta_x = \mu^- + \nu^-$$

und weiter

$$\mu^+(K) + \nu^+(K) - 2 = \mu^-(K) + \nu^-(K)$$

Weil $\mu^+(K) \leq 1$ und $\nu^+(K) \leq 1$

$$0 \geq \mu^+(K) + \nu^+(K) - 2 = \mu^-(K) + \nu^-(K) \geq 0$$

Also $\mu^-(K) = 0$ und $\nu^-(K) = 0$.

Wegen $\delta_x = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu$ gilt

$$0 = \frac{1}{2}\mu(K \setminus \{x\}) + \frac{1}{2}\nu(K \setminus \{x\})$$

Da μ und ν positive Maße sind, folgt $\mu = \nu = \delta_x$.

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Extremalpunkt ein Punktmaß ist. Dazu werden wir den Satz von Stone-Weierstraß anwenden.

Wir überzeugen uns zunächst davon, dass ein Extremalpunkt μ positiv ist oder aber $-\mu$ positiv ist. Wir können μ als

$$\mu = \mu^+ - \mu^- = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\mu^+ - \left(1 + \frac{\mu^+(K)}{2\mu^-(K)}\right)\mu^-\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\mu^+ - \left(1 - \frac{\mu^+(K)}{2\mu^-(K)}\right)\mu^-\right\}$$

schreiben. Wir zeigen nun, dass für alle $f, g \in C(K)$

$$\int fg d\mu = \int f d\mu \int g d\mu$$

Als ersten Schritt zeigen wir, dass diese Gleichung für alle f mit $0 < f < 1$ und alle $g \in C(K)$ gilt. Da entweder μ oder $-\mu$ positiv ist, nehmen wir an, dass μ positiv ist. Zu einer gegebenen Funktion $f : K \to (0, 1)$ definieren wir die Maße

$$\mu_1 = \frac{1}{\int f d\mu} f\mu \qquad \mu_2 = \frac{1}{1 - \int f d\mu}(1 - f)\mu$$

Es gilt $\|\mu_1\| = \|\mu_2\| = 1$

$$\mu = \left(\int_K f d\mu\right)\mu_1 + \left(1 - \int_K f d\mu\right)\mu_2$$

Da μ Extremalpunkt ist, folgt $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Hieraus folgt für alle $g \in C(K)$ die Gleichung $\int g d\mu_1 = \int g d\mu_2$ bzw.

$$\frac{\int g f d\mu}{\int f d\mu} = \frac{\int g(1 - f) d\mu}{1 - \int f d\mu}$$

Es folgt

$$\int gf d\mu = \int f d\mu \int g d\mu \tag{6.1}$$

Weiter folgt, dass diese Gleichung für alle $f \in C(K)$ gilt.

Wir betrachten nun die abgeschlossene Hyperebene

$$H = \left\{ f \in C(K) \,\middle|\, \int f d\mu = 0 \right\}$$

Diese Hyperebene ist eine Algebra. Wegen (6.1) folgt aus $f, g \in H$, dass $fg \in H$. Weiter gilt, dass die Funktionen in H die Punkte von K separieren. Wir betrachten zwei Punkte x und y mit $x \neq y$. Falls es eine Funktion f mit $f(x) \neq f(y)$ gibt, dann haben wir die Separiertheit nachgewiesen. Falls nicht, dann haben alle $f \in H$ auf x und y dieselben Werte. Wir können ausschließen, dass alle Funktionen sowohl in x als auch in y den Wert 0 annehmen. Wäre dies so, dann wäre die Kodimension von H gleich 2 oder kleiner, was nicht der Fall ist. Somit gibt es zumindest eine Funktion, die in x und y denselben Wert annimmt, dieser ist aber nicht 0.

Zu je zwei Punkten x und y existiert nach dem Lemma von Urysohn (Lemma **??**) eine Funktion g mit $g(x) = 0$ und $g(y) = 1$. Für $f \in H$ ist auch $fg \in H$ wegen (6.1) ein Element von H und die Funktion fg nimmt in x und y verschiedene Werte an. Also separieren die Funktionen in H die Punkte von K.

Wir behaupten, dass es einen Punkt $x \in K$ gibt, so dass für alle $f \in H$ die Gleichung $f(x) = 0$ gilt. Wir nehmen an, dies sei nicht so. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ eine Funktion $f \in H$ mit $f(x) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit der Funktionen gibt es zu jedem x eine Umgebung $U(x)$ und eine Funktion f_x, die auf der Umgebung $U(x)$ den Wert 0 nicht annimmt. Wegen der Kompaktheit, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n$, so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$ und f_{x_i} verschwindet nicht auf $U(x_i)$. Deshalb gilt für alle $x \in K$

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 > 0$$

Wegen $f_i \in H$ gilt auch $f_i^2 \in H$ und somit $\sum_{i=1}^n f_i^2 \in H$. Mit (6.1) können wir schließen, dass $1 \in H$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß folgt dann aber, dass $H = C(K)$.

Also gibt es einen Punkt x, so dass für alle $f \in H$ die Gleichung $f(x) = 0$ gilt. Es kann keinen weiteren geben, weil sonst die Kodimension von H größer als oder gleich 2 wäre.

Hieraus folgt, dass $K \setminus \{x\}$ eine Nullmenge ist. Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall, also $\mu(K \setminus \{x\}) > 0$. Da μ von innen regulär ist, gibt es dann eine kompakte Menge A mit $A \subseteq K \setminus \{x\}$ und $\mu(A) > 0$. Dann gibt es nach Urysohn eine Funktion g mit $g(x) = 0$ und $g(y) = 1$ für alle $y \in A$. Es folgt

$$0 = \int_K g d\mu \geq \int_A g d\mu = \mu(A) > 0$$

Damit folgt $\mu = \delta_x$. $\square$

Im obigen Beweis muss man letztendlich den Satz von Stone-Weierstraß nicht benutzen. Wenn man weiß, dass die konstanten Funktionen in H liegen, dann folgt $0 = \int_K d\mu = 1$. Dann kann man auch darauf verzichten nachzuweisen, dass H id ePunkte von K trennt.

Korollar 17 *Es seien X und Y kompakte Hausdorff Räume und $T : C(X) \to C(Y)$ eine isometrische Isomorphie. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi : Y \to X$ und eine stetige Abbildung $a : Y \to \{-1, 1\}$, so dass für alle $y \in Y$*

$$(Tf)(y) = a(y)f(\phi(y))$$

Beweis. Wir benutzen Beispiel 44 (vii). □

Chapter 7

Approximationseigenschaft

Wir sagen, dass ein Banachraum X die Approximationseigenschaft hat, wenn für jede kompakte Teilmenge K von X und jedes $\epsilon > 0$ ein linearer, stetiger Operator T mit endlich-dimensionalem Bild existiert, so dass für alle $x \in K$ die Ungleichung $\|Tx - x\| < \epsilon$ gilt.

Man kann diese Eigenschaft auch so beschreiben: Auf kompakten Mengen kann man die identische Abbildung gleichmäßig durch endlich-dimensionale Operatoren approximieren.

Lemma 135 *Jeder Banachraum mit einer Schauder Basis hat die Approximationseigenschaft. Die zur Basis gehörigen natürlichen Projektionen P_m approximieren die Identität auf jeder kompakten Menge gleichmäßig.*

Beweis. Es bezeichne x_n, $n \in \mathbb{N}$, die Schauder Basis in X. K sei eine kompakte Menge. Wir zeigen, dass es zu jedem ϵ ein m gibt, so dass für alle $x \in K$

$$\|P_m(x) - x\| < \epsilon$$

gilt. Da K kompakt ist, ist K total beschränkt und gibt es zu jedem ϵ endlich viele $z_1, \ldots, z_k$, so dass zu jedem $x \in K$ ein i mit

$$\|x - z_i\| < \epsilon$$

existiert. Für alle i gilt

$$z_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i x_n$$

Deshalb gibt es zu jedem i ein n_i, so dass für alle $\ell \geq n_i$

$$\left\| z_i - \sum_{n=1}^{\ell} a_n^i x_n \right\| < \epsilon$$

Wir setzen $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Dann gilt für alle i

$$\left\| z_i - \sum_{n=1}^{m} a_n^i x_n \right\| < \epsilon$$

Damit folgt für alle $x \in K$

$$\begin{aligned} \|P_m(x) - x\| \quad &\leq \|P_m(x) - P_m(z_i)\| + \|P_m(z_i) - z_i\| + \|z_i - x\| \\ &\leq (1 + \|P_m\|)\|x - z_i\| + \epsilon \end{aligned}$$

Für entsprechend gewähltes i folgt

$$\|P_m(x) - x\| \leq (2 + \|P_m\|)\epsilon$$

□

Lemma 136 *Eine abgeschlossene Teilmenge K eines Banachraumes X ist genau dann kompakt, wenn es eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ gibt, so dass*

$$K \subseteq \overline{CH(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$$

Beweis. Falls $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, dann gilt

$$\overline{\mathrm{CH}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \,\middle|\, a_n \geq 0 \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1 \right\} \tag{7.1}$$

Die Menge auf der rechten Seite ist wohldefiniert. Dazu muss man nur einsehen, dass

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \qquad\qquad k \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge ist. Dies ist der Fall, weil

$$\left\| \sum_{n=\ell}^{k} a_n x_n \right\| \leq \sum_{n=\ell}^{k} |a_n| \|x_n\|$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Menge in der linken enthalten ist. Dazu zeigen wir, dass für alle $a_1, \ldots, a_k$ mit $a_i \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{k} a_n \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \in \overline{\mathrm{CH}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$$

gilt. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n + \left(1 - \sum_{n=1}^{k} a_n\right) x_\ell \in \mathrm{CH}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$$

Wegen $\lim_{\ell\to\infty} \|x_\ell\| = 0$ folgt

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n x_n + \left(1 - \sum_{n=1}^{k} a_n\right) x_\ell = \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \in \overline{\mathrm{CH}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$$

Für alle a_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1$ ist

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \qquad\qquad k \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge. Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in \overline{\mathrm{CH}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$$

Nun zeigen wir, dass die linke Menge in der rechten enthalten ist. Dazu zeigen wir, dass die rechte Menge konvex und kompakt ist und, dass sie die Punkte x_n enthält. Dass die Punkte x_n in der rechten Menge enthalten sind, ist offensichtlich. Wir zeigen nun, dass die Menge konvex ist. Es seien

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \qquad\qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$$

mit $\sum a_n \leq 1$ und $\sum b_n \leq 1$. Dann gilt

$$(1-t)x + ty = \sum_{n=1}^{\infty} ((1-t)a_n + tb_n) x_n$$

und dieser Punkt ist Element der Menge. Nun die Kompaktheit. Es sei

$$y_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i x_n \qquad\qquad i \in \mathbb{N}$$

eine Folge in der Menge. Wir werden zeigen, dass es eine Teilfolge gibt, die in der Menge konvergiert. Dazu benutzen wir das Diagonalfolgenargument.

Aus der Folge y_i, $i \in \mathbb{N}$, wählen wir eine Teilfolge y_i^1, $i \in \mathbb{N}$, aus, so dass die Koeffizienten $a_1^{i,1}$ von x_1 in $\mathbb{R}$ konvergieren. Wir wählen nun sukzessive Teilfolgen von Teilfolgen, so dass die ersten n Koeffizienten der n-ten Teilfolge y_i^n, in $\mathbb{R}$, konvergieren. Nun wählen wir die Folge y_i^i, $i \in \mathbb{N}$. Dies ist eine Teilfolge von y_i und die Koeffizienten konvergieren.

Damit haben wir eine Teilfolge von y_i gefunden, die wir mit z_i bezeichnen wollen, die die folgenden Eigenschaften besitzt.

$$z_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^i x_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^i \leq 1 \qquad b_n^i \geq 0 \qquad \lim_{i\to\infty} b_n^i = b_n$$

Wir zeigen nun, dass die Folge z_i gegen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ konvergiert. Wir wählen n_0 so groß, dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\|x_n\| \leq \epsilon$ gilt. Weiter wählen wir i_0 so groß, dass für alle i mit $i \geq i_0$ und alle n mit $1 \leq n \leq n_0$ die Ungleichungen $|b_n - b_n^i| \leq \frac{\epsilon}{n_0}$ gelten. Dann gilt für alle $i \geq i_0$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n^i - b_n)x_n\right\| &\leq \left\|\sum_{n=1}^{n_0}(b_n^i - b_n)x_n\right\| + \left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(b_n^i - b_n)x_n\right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} |b_n^i - b_n| \, \|x_n\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |b_n^i - b_n| \, \|x_n\| \\
&\leq \left(\max_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\right) \sum_{n=1}^{n_0} |b_n^i - b_n| + 2\epsilon \\
&\leq \left(2 + \max_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\right) \epsilon
\end{aligned}$$

□

Lemma 137 *Es seien X und Y Banachräume und $L(X,Y)$ sei der Raum aller stetigen Operatoren von X nach Y mit der Topologie der gleichmäßigen*

Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X. Dann gibt es zu jedem stetigen Funktional ϕ auf dem Raum $L(X,Y)$ mit dieser Topologie zwei Folgen $x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$ und $y_i^* \in Y^*$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i^*\| < \infty$, so dass für jedes $T \in L(X,Y)$

$$\phi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(Tx_i)$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen, dass ein Funktional mit einer solchen Darstellung stetig ist. Wir wählen eine Folge a_i, $i \in \mathbb{N}$, strikt positiver Zahlen, die gegen ∞ konvergiert und die

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \|x_i\|\|y_i^*\| = C < \infty$$

erfüllt. Nun wählen wir als kompakte Menge $K = \{\frac{x_i}{a_i\|x_i\|} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} |\phi(T)| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(Tx_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\|\|Tx_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\|\|x_i\|a_i \left\|T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|a_i}\right)\right\| \\ &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \left\|T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|a_i}\right)\right\| \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\|\|x_i\|a_i \end{aligned}$$

Es sei nun ϕ ein stetiges Funktional auf $L(X,Y)$. Es gibt also eine Konstante C und eine kompakte Menge K in X, so dass

$$|\phi(T)| \leq C\|T\|_K$$

Wegen Lemma **??** gibt es eine Nullfolge x_n, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subseteq M = \overline{\mathrm{CH}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$$

Nach Lemma **??** ist M eine kompakte Menge. Deshalb gilt

$$|\phi(T)| \leq C\|T\|_M$$

Wir betrachten nun die Abbildung $S : L(X,Y) \to (Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$, wobei der Raum $(Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$ aus allen Folgen $(y_1, y_2, \dots)$ mit $y_i \in$, $i \in \mathbb{N}$, und

$\lim_{i\to\infty} \|y_i\| = 0$ besteht. Die Norm auf diesem Raum ist $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|y_i\|$. Die Abbildung S ist durch

$$S(T) = (Tx_1, Tx_2, \dots)$$

gegeben.

Der Dualraum zu $(Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$ ist $(Y^* \oplus Y^* \oplus \cdots)_0$. Dieser Raum besteht aus allen Folgen $(y_1^*, y_2^*, \dots)$ mit $\sum_{i=1}^\infty \|y_i^*\|$ als Norm.

□

Satz 46 *Es sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent*
(i) X besitzt die Approximationseigenschaft.
(ii) Für alle Folgen $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, und $x_n^* \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|\|x_n^*\| < \infty$ und so dass für alle $x \in X$ die Gleichung $\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)x_n = 0$ erfüllt ist, gilt

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x_n) = 0$$

Beweis. X besitzt genau dann die Approximationseigenschaft, wenn die identische Abbildung im Abschluss der Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen liegt. Dies gilt genau dann, wenn jedes Funktional auf $L(X)$, das bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen stetig ist und das auf allen Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild 0 ist, auch für die identische Abbildung 0 ist. Nach Lemma **??** liegt genau dies vor. □

Satz 47 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*
(i) Jeder Banachraum besitzt die Approximationseigenschaft.
(ii) Für jede Matrix von Skalaren $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ mit $\lim_{j\to\infty} a_{i,j} = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^\infty \max_j |a_{i,j}| < \infty$ und $A^2 = 0$ gilt $\operatorname{tr}(A) = \sum_{n=1}^\infty a_{n,n} = 0$.
(iii) Für jede stetige Funktion $K(s,t)$ auf $[0,1) \times [0,1]$, die für alle s und u die Gleichung

$$\int_0^1 K(s,t)K(t,u)dt = 0$$

erfüllt, gilt $\int_0^1 K(t,t)dt = 0$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ eine Matrix, die (ii) nicht erfüllt. Wir setzen

$$x_i = (a_{i,j})_{j=1}^{\infty} \qquad\qquad i \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $x_i \in c_0$ und X sei die abgeschlossene, lineare Hülle von x_i, $i \in \mathbb{N}$, in c_0. Dann besitzt X nicht die Approximationseigenschaft. Um dies nachzuprüfen benutzen wir Lemma 46. Die Folge x_i, $i \in \mathbb{N}$, und e_i^*, $i \in \mathbb{N}$, wobei e_i^* die Einschränkung des Einheitsvektors in ℓ_1 auf X ist, erfüllen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|e_i^*\| = \sum_{i=1}^{\infty} \max_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| < \infty$$

Da X die abgeschlossene, lineare Hülle von den Vektore x_i ist, reicht es die folgende Bedingung nur für die Vektoren x_i nachzu prüfen.

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x_k) x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} (a_{i,j})_{j=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} a_{i,j} \right)_{j=1}^{\infty} = 0$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $A^2 = 0$. Weiter gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i} \neq 0$$

□

Satz 48 *Es gibt eine unendliche Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ von komplexen Zahlen, so dass*
(i) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele j mit $a_{i,j} \neq 0$.
(ii)Für jedes r mit $\frac{2}{3} < r$ gilt $\sum_{i=1}^{\infty} (\max_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}|)^r < \infty$.
(iii) $A^2 = 0$
(iv) $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i} \neq 0$

Lemma 138

Chapter 8

Lokale Struktur

8.1 Banach-Mazur Abstand

Es seien X und Y Banachräume. Falls es keinen stetigen Isomorphismus zwischen X und Y gibt, dann setzen wir den Banach-Mazur Abstand $d(X,Y)$ gleich ∞. Falls es einen stetigen Isomorphismus zwischen X und Y gibt, dann setzen wir

$$d(X,Y) = \inf\{\|I\|\|I^{-1}\| | I \in L(X,Y)\}.$$

Tatsächlich ist der Banach-Mazur Abstand keine Metrik auf einer Menge von Banachräumen, allerdings ist $\ln d(X,Y)$ eine Metrik.

Falls X und Y endlich-dimensional sind, dann bedeutet $d(X,Y) = 1$, dass es eine Isometrie zwischen X und Y gibt. Dies folgt aus der Kompaktheit. Im unendlich-dimensionalen Fall ist dies falsch.

Falls X und Y endlich-dimensionale Banachräume sind, dann lässt sich jedes $T \in L(X,Y)$ durch

$$T = \sum_{j=1}^{m} x_j^* \otimes y_j$$

bzw.

$$T(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j^*(x) y_j$$

darstellen.

Die Spur von $T \in L(X,X)$ mit $T = \sum_{j=1}^m x_j^* \otimes x_j$ ist durch

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{j=1}^m x_j^*(x_j)$$

gegeben.

Lemma 139 *Es seien X, Y und Z Banachräume. Dann gilt*

$$d(X,Z) \leq d(X,Y)d(Y,Z)$$

Beweis. Es seien $I : X \to Y$ und $J : Y \to Z$ stetige Isomorphismen. Dann gilt

$$\|J \circ I\| \leq \|J\|\|I\| \qquad \|(J \circ I)^{-1}\| \leq \|J^{-1}\|\|I^{-1}\|$$

□

Lemma 140

$$d(X,Y) = d(X^*,Y^*)$$

Lemma 141 *Auf der Menge aller n-dimensionalen Banachräume ist $\Theta(X,Y) = \ln d(X,Y)$ eine Metrik und der metrischer Raum ist vollständig.*

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\Theta(X,Z) = \ln(d(X,Z)) \quad &\leq \ln(d(X,Y)d(Y,Z)) \\ &= \ln(d(X,Y)) + \ln(d(Y,Z)) = \Theta(X,Y) + \Theta(Y,Z)\end{aligned}$$

□

Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Wir sagen, dass das Produkt $A = U_1 D U_2$ eine polare Zerlegung von A ist, falls U_1 und U_2 orthogonale, $n \times n$-Matrizen und D eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonalelemente der Matrix D heißen singuläre Werte der Matrix A.

Im folgenden wollen wir zeigen, dass jede Matrix eine polare Zerlegung besitzt und ihre singuläre Werte wohldefiniert sind.

Lemma 142 *Es sei A eine reelle, $n \times n$-Matrix. Es sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren der symmetrischen Matrix $A^t A$ und die Eigenwerte seien λ_i. Dann sind die Vektoren $Ax_1, \ldots, Ax_n$ orthogonal und $\|Ax_i\|_2 = \sqrt{\lambda_i}$*

Beweis. Die Eigenwerte λ_i sind nichtnegativ, weil die Matrix $A^t A$ positiv semidefinit ist.

$$< Ax_i, Ax_j >=< x_i, A^t Ax_j >=< x_i, \lambda_j x_j >= \lambda_j < x_i, x_j >$$

□

Lemma 143 *Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Dann besitzt A eine polare Zerlegung und ihre singulären Werte sind wohldefiniert.*

Beweis. Es sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren der Matrix $A^t A$.

$$U_1 = (y_1, \ldots, y_n) \qquad\qquad U_2 = (x_1, \ldots, x_n)$$

wobei $y_i = \|Ax_i\|_2^{-1} Ax_i$, falls $\|Ax_i\|_2 > 0$. Die übrigen y_i erhalten wir, indem wir das Vektorensystem zu einer Orthonormalbasis komplettieren. □

Lemma 144 *(Polare Zerlegung) (i) Es sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix, die nur nicht-negative Eigenwerte besitzt. Dann gibt es genau eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix B mit nicht-negativen Eigenwerten*

$$A = B^2$$

(ii) Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann gibt es genau eine symmetrische $n \times n$-Matrix $|A|$ mit nicht-negativen Eigenwerten und genau eine orthogonale $n \times n$-Matrix U mit

$$|A|^2 = A^t A$$

$$A = U|A| \text{ und } |A| = U^t A$$

Die unendlich-dimensionale Version hiervon findet man in [Ring].

Beweis. (i) Es gibt $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, und eine orthonormale Basis x_i, $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \otimes x_i$$

Wir wählen

$$B = \sum_{1}^{k} \sqrt{\lambda_i} x_i \otimes x_i$$

Falls es eine weitere symmetrische $n \times n$-Matrix C geben sollte, die nicht-negative Eigenwerte besitzt und $C^2 = A$:

$$C = \sum_{1}^{l} \alpha_i y_i \otimes y_i \implies C^2 = \sum_{1}^{l} \alpha_i^2 y_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \otimes x_i$$

$$y_i \text{ orthonormal} \qquad \underset{\text{elementar}}{\implies} \quad C = B$$

(ii) $A^t A$ ist symmetrisch: $B = |A|$

$$A = \sum_{1}^{k} \lambda_i x_i \otimes y_i \qquad \begin{matrix} x_i, i = 1, \ldots, k \\ y_i, i = 1, \ldots, k \end{matrix} \quad \text{orthonormal}$$

$$A^t A = \left(\sum_{1}^{k} \lambda_i y_i \otimes x_i \right) \left(\sum_{1}^{k} \lambda_i x_i \otimes y_i \right) = \sum_{1}^{k} \lambda_i^2 x_i \otimes x_i$$

$$|A| = \sum_{1}^{k} |\lambda_i| x_i \otimes x_i$$

$U(x_i) = (\text{sign } \lambda_i) y_i \quad i = 1, \ldots, k$ und entsprechend fortgesetzt.

$U^t(y_i) = (\text{sign } \lambda_i) x_i \quad i = 1, \ldots, k$ und entsprechend fortgesetzt.

□

C_p^n, $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum aller $n \times n$-Matrizen mit der Norm $\|A\|_{C_p} = \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_p$ wobei λ_i, $i = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte von $|A|$ sind.

Die Räume C_p^n heißen Schattenklasse.

Lemma 145 *(i)* $\|\cdot\|_{C_p^n}$ *ist eine Norm.*
(ii)

$$\|A\|_{C_2^n} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis. □

Lemma 146 *(i) Für alle* $A \in C_p^n$ *und alle orthogonalen* $n \times n$*-Matrizen* U *und* V *gilt*

$$\|A\|_{C_p} = \|UAV\|_{C_p}$$

(ii) Die Abbildung $\phi : C_{p^*}^n \to (C_p^n)^*$*, die durch*

$$\phi(A)(B) = \mathrm{tr}(A^t B)$$

definiert ist, ist eine lineare Isometrie. Der Dualraum von C_p^n *ist isometrisch isomorph zu* $C_{p^*}^n$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$*.*

Beweis. (i) Wir müssen nur einsehen, dass die singulären Zahlen von A gleich denen von UAV sind. Es sei $A = U_1 D V_1$, wobei U_1 und V_1 orthogonale Matrizen sind und D eine Diagonalmatrix. Dann gilt $UAV = UU_1DV_1V$ und dies ist eine polare Zerlegung von UAV.

(ii) Man beachte, dass der Dualraum von C_p^n die Dimension n^2 besitzt, also reicht es nachzuweisen, dass die Abbildung eine lineare Injektion ist.

$$\|\phi(A)\| = \sup_{\|B\|=1} \mathrm{tr}(A^t B)$$

Es gibt orthogonale Matrizen U und V und eine Diagonalmatrix D^A, so dass $A = UD^AV$. Nun wählen wir eine Diagonalmatrix D^B, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} d_{i,i}^A d_{i,i}^B = \left(\sum_{i=1}^{n} |d_{i,i}^B|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |d_{i,i}^A|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

und

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |d_{i,i}^B|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dann setzen wir $B = UD^BV$

$$\begin{aligned}
\|\phi(A)\| &= \sup_{\|B\|=1} \operatorname{tr}(A^tB) \geq \operatorname{tr}(V^tD^AU^tUD^BV) \\
&= \operatorname{tr}(V^tD^AD^BV) = \operatorname{tr}(VV^tD^AD^B) = \operatorname{tr}(D^AD^B) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |d_{i,i}^A|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|A\|_{C_{p^*}^n}
\end{aligned}$$

□

8.2 Der Satz von F. John

Eine konvexe, kompakte Menge K des $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren heißt konvexer Körper. K heißt zentralsymmetrisch, wenn es ein $x_0 \in K$ gibt, so dass für alle x mit $x \in K$ auch $x_0 - (x - x_0) \in K$ gilt. Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthogonalbasis der $\mathbb{R}^n$. Dann heißt die Menge

$$\left\{ x \left| \sum_{i=1}^{n} < x - x_0, v_i >^2 \leq 1 \right. \right\}$$

(nicht entartetes) Ellipsoid. Der Punkt x_0 ist der Mittelpunkt des Ellipsoides.

Ellipsoide lassen sich auch so beschreiben: Es sei H eine symmetrische, reelle $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte sämtlich strikt positiv sind. Dann ist

$$\left\{ x \left| x^T H x \leq 1 \right. \right\}$$

ein Ellipsoid.

Wir untersuchen hier das Ellipsoid $\mathcal{E}$ maximalen Volumens, das in einem konvexen Körper K enthalten ist. Die Punkte $\partial K \cap \partial \mathcal{E} = \partial K \cap \mathcal{E}$ bezeichnen wir als Kontaktpunkte.

Lemma 147 *Eine Menge im $\mathbb{R}^n$ ist genau dann Ellipsoid, wenn sie affines Bild der Euklidischen Einheitskugel ist und einen inneren Punkt besitzt.*

Satz 49 *(F. John) (i) Jeder konvexe Körper enthält ein eindeutiges Ellipsoid maximalen Volumens.*

(ii) Die Euklidische Kugel B_2^n ist genau dann das Ellipsoid maximalen Volumens des konvexen Körpers K, wenn $B_2^n \subseteq K$ und es ein $m \in \mathbb{N}$, Vektoren $u_1, \ldots, u_m \in \partial K$, deren Euklidische Normen gleich 1 sind, und positive Zahlen c_i, $i = 1, \ldots, m$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0 \tag{8.1}$$

und für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i < x, u_i >^2 \tag{8.2}$$

gelten.

Falls K zentralsymmetrisch ist, so ist die Bedingung (8.1) überflüssig. Dies liegt daran, dass $-u$ auch ein Kontaktpunkt ist, wenn u einer ist. An Stelle der Vektoren $u_1, \ldots, u_m$ können wir dann zu $u_1, -u_1, \ldots, u_m, -u_m$ übergehen.

Man beachte, dass die Bedingung (8.2) äquivalent zu

$$I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i \tag{8.3}$$

ist, wobei I_n die identische Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Wir weisen dies nach. Aus der Bedingung (8.3) folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i < u_i, x > u_i$$

und somit

$$< x, x >= \left\langle \sum_{i=1}^{m} c_i < u_i, x > u_i, x \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i < u_i, x >< u_i, x >$$

Nun die Umkehrung. Man beachte, dass die Abbildung

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i$$

selbstadjungiert ist und damit diagonalisierbar. Es sei x ein Eigenvektor der Abbildung mit Eigenwert λ. Dann gilt

$$\lambda < x, x >= \sum_{i=1}^{m} c_i < u_i, x >< u_i, x >= \|x\|^2$$

Also gilt $\lambda = 1$. Damit sind alle Eigenwerte gleich 1 und die Abbildung ist die Identität.

Weiter gilt

$$n = \sum_{i=1}^{m} c_i \tag{8.4}$$

Wir überlegen uns dies. Aus $\|u_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, m$, und $I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i$ folgt

$$n = \operatorname{tr}(I_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i \operatorname{tr}(u_i \otimes u_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{k=1}^{n} u_i(k)^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i$$

Der Beweis von Satz 49 folgt [Bal].

Beweis. Wir zeigen den Satz nur für zentralsymmetrische, konvexe Körper. Wir zeigen zuerst (ii) und hierzu zunächst, dass aus (8.2) bzw. (8.3) folgt, dass B_2^n ein Ellipsoid maximalen Volumens ist. Darüber hinaus zeigen wir, dass das Ellipsoid maximalen Volumens eindeutig ist, wenn (8.2) gilt.

Es seien v_j, $j = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis und

$$\mathcal{E} = \left\{ x \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{< x, v_j >^2}{\lambda_j^2} \leq 1 \right. \right\}$$

ein Ellipsoid, das in K enthalten ist. Wir zeigen, dass

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1.$$

Wegen $\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \, \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ folgt dann, dass B_2^n ein Ellipsoid maximalen Volumens ist.

Da $B_2^n \subseteq K$ und u_i, $i = 1, \ldots, m$, Kontaktpunkte dieser beiden Körper sind, sind die Hyperebenen $\{x| < x, u_i >= 1\}$, $i = 1, \ldots, m$, Stützhyperebenen von K, d.h. $K \subseteq \{x| < x, u_i >\leq 1\}$. Wir überlegen uns dies. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Stützhyperebene an K im Punkt u_i. Da $u_i \in \partial B_2^n$ und $B_2^n \subseteq K$, so ist diese Stützhyperebene auch Stützhyperebene von B_2^n. Diese Stützhyperebene ist aber durch $< u_i, x >= 1$ gegeben.

Dies bedeutet, dass für alle $i = 1, \ldots, m$ die Relation $u_i \in K^\circ$ gilt. Da $\mathcal{E} \subseteq K$, folgt

$$K^\circ \subseteq \mathcal{E}^\circ = \left\{ x \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 < x, v_j >^2 \leq 1 \right. \right\}$$

Somit gilt für alle $i = 1, \ldots, m$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 < u_i, v_j >^2 \leq 1$$

Mit (8.4) folgt

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 < u_i, v_j >^2 \leq \sum_{i=1}^{m} c_i = n$$

Mit (8.2) folgt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \sum_{i=1}^{m} c_i < u_i, v_j >^2 \leq n$$

Weiter folgt

$$\left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \leq 1$$

Damit ergibt sich $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1$. Also ist B_2^n ein Ellipsoid maximalen Volumens in K. Da in der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel genau dann Gleichheit gilt, wenn alle Zahlen λ_j gleich sind, folgt sogar, dass es außer B_2^n kein weiteres Ellipsoid maximalen Volumens gibt.

Nun zeigen wir, dass (8.2) bzw. (8.3) gilt, vorausgestzt dass B_2^n ein Ellipsoid maximalen Volumens in K ist. Dazu zeigen wir, dass B_2^n kein Ellipsoid maximalen Volumens in K ist, falls (8.3) nicht gilt. Falls (8.3) nicht gilt, dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, alle Kontaktpunkte $u_1, \ldots, u_m \in \partial K \cap B_2^n$ und alle positive Zahlen c_i, dass

$$I_n \neq \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i$$

Dies bedeutet insbesondere, dass $\frac{1}{n} I_n$ keine Konvexkombination von Operatoren $u \otimes u$ ist, wobei u Kontaktpunkte sind.

Somit liegt $\frac{1}{n} I_n$ nicht in der konvexen Hülle der Operatoren $u \otimes u$, wobei u Kontaktpunkt ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach läßt sich $\frac{1}{n} I_n$ also durch eine Hyperebene von den Operatoren $u \otimes u$ trennen. Es sei ϕ das Funktional, das diese Ebene definiert. Es gilt für alle Kontaktpunkte u

$$\phi\left(\frac{1}{n} I_n\right) < \phi(u \otimes u).$$

Wir können dieses Funktional ϕ durch eine $n \times n$-Matrix $H = (h_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ darstellen

$$\phi(A) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} a_{i,j}$$

Wir können annehmen, dass H symmetrisch ist. Falls H nicht symmetrisch ist, gehen wir zu der Matrix $\frac{1}{2}(H + H^T)$ über. Dies ist möglich, weil

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(H + H^T)_{i,j}(u \otimes u)_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j}(u \otimes u)_{i,j}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(H + H^T)_{i,j} \left(\frac{1}{n} I_n\right)_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} \left(\frac{1}{n} I_n\right)_{i,j}$$

Weiter können wir annehmen, dass die Spur von H gleich 0 ist. Falls dem nicht so ist, dann gehen wir zu dem Funktional

$$\phi(A) - \operatorname{tr}(H)\operatorname{tr}(A) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} a_{i,j} - \operatorname{tr}(H)\operatorname{tr}(A)$$

Da für alle Kontaktpunkte $u \in \partial K \cap B_2^n$

$$1 = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{n} I_n\right) = \operatorname{tr}(u \otimes u)$$

gilt, bleibt für alle Kontaktpunkte die Ungleichung

$$\phi\left(\frac{1}{n} I_n\right) - \operatorname{tr}(H)\operatorname{tr}\left(\frac{1}{n} I_n\right) < \phi(u \otimes u) - \operatorname{tr}(H)\operatorname{tr}(u \otimes u)$$

erhalten.

Da

$$0 = \phi\left(\frac{1}{n} I_n\right) - \operatorname{tr}(H)\operatorname{tr}\left(\frac{1}{n} I_n\right)$$

haben wir eine Matrix H gefunden, so dass für alle Kontaktpunkte u die Ungleichung

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j}(u \otimes u)_{i,j} = u^T H u$$

gilt. Die Matrix H liefert uns nun ein Ellipsoid größeren Volumens in K. Wir setzen

$$\mathcal{E}_\delta = \left\{ x \,\middle|\, x^T(I_n + \delta H)x \leq 1 \right\}$$

wobei wir $\delta > 0$ so klein wählen werden, dass $\mathcal{E}_\delta$ ein Ellipsoid ist und so dass $\partial K \cap \mathcal{E}_\delta = \emptyset$.

Um sicherzustellen, dass $\mathcal{E}_\delta$ ein Ellipsoid ist, müssen wir δ nur so klein wählen, dass die Eigenwerte von $I_n + \delta H$ strikt positiv sind.

Wir zeigen nun $\partial K \cap \mathcal{E}_\delta = \emptyset$. Da die Menge $KP = \partial K \cap B_2^n$ der Kontaktpunkte kompakt ist, gibt es sogar ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle Kontaktpunkte u

$$0 < \delta_0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j}(u \otimes u)_{i,j} = u^T H u$$

gilt. Da die Funktion $x^T H x$ auf der kompakten Menge ∂K stetig ist, ist sie dort auch gleichmäßig stetig. Somit gibt es ein $\eta_0 > 0$, so dass für alle x in der Menge

$$\mathrm{KP}_{\eta_0} = \{x \in \partial K | \exists u \in \mathrm{KP} : \|x - u\| < \eta_0\}$$

die Ungleichung $\frac{1}{2}\delta_0 \leq x^T H x$ gilt. Die Menge $(\mathrm{KP}_{\eta_0})^c \cap \partial K$ ist kompakt und die Funktion $\|x\|$ nimmt darauf ihr Minimum an, das strikt größer als 1 ist, also größer als $1 + \theta_0$ mit einem $\theta_0 > 0$.

(Für dieses δ ist diese Menge ein Ellipsoid, weil $I_n + \delta H$ eine symmetrische Matrix ist, die nur strikt positive Eigenwerte besitzt.) Für alle $x \in \mathrm{KP}_{\eta_0}$ gilt

$$x^T(I_n + \delta H)x \geq 1 + \delta x^T H x \geq 1 + \frac{1}{2}\delta\delta_0 > 1$$

und für alle $x \in \partial K \cap \mathrm{KP}_{\eta_0}^c$ gilt

$$x^T(I_n + \delta H)x = \|x\|^2 + \delta x^T H x \geq (1 + \theta_0)^2 + \delta x^T H x$$

Da H nur positive Eigenwerte besitzt, folgt weiter

$$x^T(I_n + \delta H)x \geq (1 + \theta_0)^2$$

Also gilt $\partial K \cap \mathcal{E}_\delta = \emptyset$.

Da $\partial K \cap \mathcal{E}_\delta = \emptyset$, folgt mit der Kompaktheit, dass

$$\inf\{\|x - y\| | x \in \partial K, y \in \mathcal{E}_\delta\} > 0$$

undkönnen wir das Ellipsoid $\mathcal{E}_\delta$ etwas ausblasen und es ist immer noch in K enthalten. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\mathrm{vol}_n(B_2^n) \leq \mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_\delta). \tag{8.5}$$

Es seien α_i die Eigenwerte der Matrix $I_n + \delta H$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_\delta) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^{-1} \mathrm{vol}_n(B_2^n).$$

und wegen

$$\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(I_n + \delta H) = 1$$

folgt (8.5). □

Korollar 18 *(i) Es sei K ein konvexer Körper im $\mathbb{R}^n$, und $\mathcal{E}$ das Ellipsoid maximalen Volumens in K. Wir nehmen an, dass $\mathcal{E}$ bez. 0 zentralsymmetrisch ist. Dann gilt*

$$\mathcal{E} \subseteq K \subseteq n\mathcal{E}$$

Die Konstante n ist optimal.

(ii) Es sei K ein konvexer Körper im $\mathbb{R}^n$, der bez. 0 zentralsymmertisch ist, und $\mathcal{E}$ das Ellipsoid maximalen Volumens in K. Dann gilt

$$\mathcal{E} \subseteq K \subseteq \sqrt{n}\mathcal{E}$$

Die Konstante $\sqrt{n}$ ist optimal.

Beweis. (ii) Wir können annehmen, dass $\mathcal{E}$ gleich der Euklidischen Kugel ist. Dann gilt für alle $x \in K$ und alle $i = 1, \ldots, m$, dass $| < x, u_i > | \leq 1$. Mit (**??**) folgt weiter

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i < x, u_i >^2 \leq \sum_{i=1}^m c_i = n$$

und somit $\|x\| \leq \sqrt{n}$. □

Korollar 19 *(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle normierten Räume E der Dimension n gilt*

$$d(E, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle normierten Räume E und F der Dimension n gilt

$$d(E, F) \leq n$$

Beweis. (i) Jeder reelle, normierte, n-dimensionale Raum ist isometrisch zum $\mathbb{R}^n$ mit einer entsprechenden Norm. Dazu wählen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ in E und statten den $\mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$\|x\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right\|$$

aus. B_E sei die Einheitskugel dieser Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Nach Satz **??** gibt es ein Ellipsoid $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} \subseteq B_E \subseteq \sqrt{n}\mathcal{E}$. Der $\mathbb{R}^n$ mit der Norm, die $\mathcal{E}$ als Einheitskugel hat, ist isometrisch zu ℓ_2^n.

(ii) Wegen (i) gelten $d(E, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$ und $d(F, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. Mit Lemma 139 folgt

$$d(E, F) \leq d(E, \ell_2^n) d(F, \ell_2^n) \leq n.$$

□

8.3 Typ und Cotyp

Ein Banachraum X ist vom Typ p, wenn es eine Konstante C gibt, so dass für alle endlichen Folgen x_i, $i = 1, \ldots, n$, von Vektoren aus X die Ungleichung

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{8.6}$$

Die Typ-p-Konstante $T_p(X)$ eines Raumes X ist das Infimum über alle Konstanten C, die die Ungleichung (8.6) erfüllen. Falls ein Raum keinen Typ p besitzt, dann setzen wir $T_p(X) = \infty$. Die Definition des Typs ist nur für $1 \leq p \leq 2$ sinnvoll. Dazu betrachtet man eine konstante Folge, also eine Folge, in der jedes Folgenglied gleich demselben Vektor ist. Mit der Khintchine-Ungleichung ergibt sich die Behauptung.

Ein Banachraum X ist vom Cotyp q, wenn es eine Konstante C gibt, so dass für alle endlichen Folgen x_i, $i = 1, \ldots, n$, von Vektoren aus X die Ungleichung

$$C \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \geq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Die Cotyp-q-Konstante $C_q(X)$ eines Raumes X ist das Infimum über alle Konstanten C, die die Ungleichung (**??**) erfüllen. Falls ein Raum keinen Cotyp q besitzt, dann setzen wir $C_q(X) = \infty$. Die Definition des Cotyps ist nur für $2 \leq q < \infty$ sinnvoll. Dazu betrachtet man eine konstante Folge, also eine Folge, in der jedes Folgenglied gleich demselben Vektor ist. Mit der Khintchine-Ungleichung ergibt sich die Behauptung.

Man beachte, dass ein Teilraum eines Raumes mit Typ p auch wieder Typ p besitzt. Ebenso für den Cotyp.

Lemma 148 *Es seien $1 \leq p \leq 2$ und $2 \leq q < \infty$ und X und Y Banachräume. Dann gilt*

$$T_p(X) \leq d(X,Y) T_p(Y) \qquad\qquad C_q(X) \leq d(X,Y) C_q(Y)$$

Beweis. Es sei $I : Y \to X$ ein stetiger Isomorphismus.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt &= \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) I(y_i) \right\| dt \\
&\leq \|I\| \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) y_i \right\| dt \\
&\leq \|I\| T_p(Y) \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|I\| T_p(Y) \left(\sum_{i=1}^n \|I^{-1}(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|I\| \|I^{-1}\| T_p(Y) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

□

Satz 50 *(i) Die Räume $L^p[0,1]$, $1 \leq p \leq 2$, haben Cotyp 2 und Typ p. Die Räume besitzen nicht Typ r für $r > p$.*

Weiter gilt $C_2(L^p[0,1]) \leq \sqrt{2}$ und $T_p(L^p[0,1]) = 1$.

(ii) Die Räume $L^p[0,1]$, $2 \leq p < \infty$, haben Cotyp p und Typ 2. Die Räume besitzen nicht Cotyp r für $r < p$.

Weiter gilt $C_p(L^p[0,1]) \leq \sqrt{2}$ und $T_2(L^p[0,1]) \leq \sqrt{2p+4}$.

Korollar 20 *(i) Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$. $L^p[0,1]$ ist genau dann isomorph zu $L^q[0,1]$, wenn $p = q$.*

(ii) Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Räume ℓ^p und $L^p[0,1]$ sind genau dann isomorph, wenn $p = \infty$. ℓ^∞ und $L^\infty[0,1]$ sind nicht isometrisch.

Beweis. (ii) Die Räume $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, enthalten einen Teilraum, der isomorph zu ℓ^2 ist, z.B. der Teilraum, der von den Rademacher-Funktionen erzeugt wird. Ebenso können wir einen Teilraum nehmen, der von einer Folge unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen erzeugt wird.

Andereseits enthalten die Räume ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ keinen Teilraum, der zu ℓ^2 isomorph ist. □

Beweis. (i) Wir zeigen zuerst, dass L^p, $1 \leq p \leq 2$ den Cotyp 2 besitzen. Wegen Lemma 46.(ii) gilt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |x_i(\omega)|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2 d\omega\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|\end{aligned}$$

Mit der Khintchine Ungleichung (Satz 8)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right| dt\right)^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit Lemma 47

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

Also besitzt L^p, $1 \leq p \leq 2$, Cotyp 2 und die Cotyp$_2$ Konstante ist kleiner oder gleich $\sqrt{2}$.

Wir zeigen nun, dass L^p, $1 \leq p \leq 2$, den Typ p besitzen. Da die L^1-Norm auf einem Wahrscheinlichkeitsraum kleiner als die L^p-Norm ist, folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| dt &\leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right|^p d\omega dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right|^p dt d\omega\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Da $1 \leq p \leq 2$, ist die 2-Norm größer als die p-Norm. Somit

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| dt \leq \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} d\omega\right)^{\frac{1}{p}}$$

Weil die Rademacher Funktionen ein orthonormales System in $L^2[0,1]$ sind, gilt weiter

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

Da $1 \leq p \leq 2$, ist die ℓ^p-Norm größer als die ℓ^2-Norm (Satz 5).

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |x_i|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Damit besitzt L^p, $1 \leq p \leq 2$ Typ p und die Typ p Konstante ist 1.

Wir zeigen, dass L^p nicht den Typ r für $r > p$ besitzt. Dazu wählen wir

$$x_i = \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Dann gilt

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(\omega) \right|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} dt = 1$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}} = n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}$$

(ii) Es sei $2 \leq p < \infty$. Wir zeigen, dass die Räume den Typ 2 besitzen. Da die 1-Norm auf $[0,1]$ kleiner als die p-Norm ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \quad &\leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i(\omega) \right|^p dt d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Mit der Khintchine Ungleichung (Satz 8) folgt

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leq \sqrt{2p+4} \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit Lemma 46 (i) folgt

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leq \sqrt{2p+4} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i(\omega)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir zeigen, dass die Räume den Cotyp p besitzen. Mit Lemma 47 folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt &= \int_0^1 \left(\int \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i(\omega) \right|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &= \left(\int \left| \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i(\omega) \right| dt \right|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Mit der Khintchine-Ungleichung (Satz **??**) folgt

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

Weil $2 \leq p$, ist die ℓ^p-Norm kleiner als die ℓ^2-Norm (Satz 5). Somit

$$\sqrt{2} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \geq \left(\int \sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Korollar 21 *(i) Es sei $1 \leq p \leq q \leq 2$ oder $2 \leq p \leq q \leq \infty$. Dann gilt*

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

(ii) Es sei $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \max \left\{ n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \right\} \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \max \left\{ n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \right\}$$

Beweis. (i) Nach Lemma 140 gilt $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = d(\ell_{p^*}^n, \ell_{q^*}^n)$. Deshalb reicht es, den Fall $1 \leq p \leq q \leq 2$ zu betrachten.

Es bezeichne I die identische Abbildung von ℓ_p^n nach ℓ_q^n. Dann

$$\|I\| = 1 \qquad\qquad \|I^{-1}\| = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Wir weisen dies nach. Es gilt

$$\|I\| = \max_{\|x\|_p=1} \|x\|_q \leq \max_{\|x\|_p=1} \|x\|_p = 1$$

und mit der Hölder-Ungleichung

$$\|I^{-1}\| = \max_{\|x\|_q=1} \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \max_{\|x\|_q=1} \|x\|_q = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Damit gilt $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \|I\|\|I^{-1}\| = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

Es sei $1 \leq p \leq q \leq 2$. Dann gelten

$$T_q(\ell_q^n) = 1 \qquad\qquad T_q(\ell_p^n) \geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Die erste Gleichung gilt nach Satz 50. Wir weisen die zweite Ungleichung nach. Dazu betrachten wir die Einheitsvektoren e_i, $i = 1, \ldots, n$. Es gilt

$$\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} = n^{\frac{1}{q}} \qquad\qquad \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) e_i\right\|_p dt = n^{\frac{1}{p}}$$

Mit Lemma 139 folgt

$$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq T_q(\ell_p^n) \leq T_q(\ell_q^n) d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n)$$

Der Fall $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ergibt sich mittels Dualisierens.

(ii) Es sei $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Nach Lemma 140 gilt $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = d(\ell_{p^*}^n, \ell_{q^*}^n)$. Deshalb reicht es, den Fall $p \leq q^*$ zu betrachten.

Es gelten

$$C_2(\ell_p^n) \leq \sqrt{2} \qquad\qquad n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \leq C_2(\ell_q^n)$$

Die erste Ungleichung folgt aus Satz 50. Wir weisen die zweite nach. Dazu betrachten wir wieder die Einheitsvektoren e_i, $i = 1, \ldots, n$. Es gilt

$$\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) e_i\right\|_q dt = n^{\frac{1}{q}}$$

Mit Lemma 139 folgt

$$n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \leq C_2(\ell_q^n) \leq C_2(\ell_p^n) d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \sqrt{2} d(\ell_p^n, \ell_q^n)$$

Es bleibt noch $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} d(\ell_p^n, \ell_q^n)$ nachzuweisen. Dies folgt mittels Dualisierens.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \max\left\{ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right\} \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n)$$

Für die Abschätzung nach oben benutzen wir die Walsh Matrizen.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad W_{k+1} = \begin{pmatrix} W_k & W_k \\ W_k & -W_k \end{pmatrix}$$

Walsh-Matrizen sind bis auf Normalisierung symmetrische, orthogonale Matrizen. Es gilt $W_k W_k = 2^k I_{2^k}$. Die Walsh-Matrix W_k ist eine $2^k \times 2^k$-Matrix. Deshalb betrachten wir zunächst nur Räume der Dimension $n = 2^k$. Wir werden zeigen, dass

$$\|W_{k+1}\|_{p,q} \leq \begin{cases} 2^{\frac{1}{q}} \|W_k\|_{p,q} & p \leq q^* \\ 2^{\frac{1}{p^*}} \|W_k\|_{p,q} & q^* \leq p \end{cases} \tag{8.7}$$

Der Index (p, q) bedeutet, dass wir W_k als Operator in $L(\ell_p^n, \ell_q^n)$ auffassen. Hieraus ergibt sich sofort für $n = 2^k$

$$\|W_k\|_{p,q} \leq \begin{cases} n^{\frac{1}{q}} & p \leq q^* \\ n^{\frac{1}{p^*}} & q^* \leq p \end{cases}$$

Es gilt

$$\|W_{k+1}\|_{p,q} = \max_{\|x\|_p = 1} \|W_{k+1}(x)\|_q$$

Wir setzen $x = (y, z)$. Dann folgt

$$\|W_{k+1}\|_{p,q} = \max_{\|y\|_p^p + \|z\|_p^p = 1} (\|W_k(y) + W_k(z)\|_q^q + \|W_k(y) - W_k(z)\|_q^q)^{\frac{1}{q}}$$

Mit der Ungleichung von Clarkson (Satz 7) folgt

$$\begin{aligned} \|W_{k+1}\|_{p,q} &\leq 2^{\frac{1}{q}} \max_{\|y\|_p^p + \|z\|_p^p = 1} (\|W_k(y)\|_q^{q^*} + \|W_k(z)\|_q^{q^*})^{\frac{1}{q^*}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{q}} \|W_k\|_{p,q} \max_{\|y\|_p^p + \|z\|_p^p = 1} (\|y\|_p^{q^*} + \|z\|_p^{q^*})^{\frac{1}{q^*}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun (8.7). Nun zeigen wir für $n = 2^k$

$$\|W_k\|_{q,p} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} \tag{8.8}$$

Dazu

$$\begin{aligned}\|W_k\|_{q,p} \leq \|I\|_{q,2}\|W_k\|_{2,2}\|I\|_{2,p} \qquad &= (2^k)^{\frac{1}{2}}\|I\|_{q,2}\|I\|_{2,p} \\ &= (2^k)^{\frac{1}{2}}(2^k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(2^k)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Damit haben wir den Fall erledigt, dass die Dimension eine Potenz von 2 ist. Nun der allgemeine Fall. Wir betrachten zunächst den Fall $p \leq q^*$. Wir zerlegen den Raum der Dimension n in Räume, deren Dimensionen Potenzen von 2 sind. $n = \sum_{i=1}^m n_i$, wobei $n_i = 2^{k_i}$ und $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$. Wir betrachten

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m : \ell_p^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ell_p^{n_m} \to \ell_q^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ell_q^{n_m}$$

wobei

$$U_i = n_i^{-\frac{1}{q}} W_{k_i} \qquad\qquad U_i^{-1} = n_i^{-\frac{1}{q^*}} W_{k_i}$$

und

$$U^{-1} = U_1^{-1} \oplus U_2^{-1} \oplus \cdots \oplus U_m^{-1}$$

Die Norm auf $\ell_p^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ell_p^{n_m}$ ist durch

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\| = \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}\|U\|_{p,q} \qquad &= \max \frac{\left(\sum_{i=1}^m \|U_i(x_i)\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \max \frac{\left(\sum_{i=1}^m \|U_i\|^q \|x_i\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \max \frac{\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leq 1\end{aligned}$$

$$\|U^{-1}\|_{q,p} = \max \frac{\left(\sum_{i=1}^m \|U_i^{-1}(y_i)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^m \|y_i\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \max \frac{\left(\sum_{i=1}^m \|U_i^{-1}\|^p \|y_i\|_q^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^m \|y_i\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Wegen (8.8)

$$\|U^{-1}\|_{q,p} \leq \max \frac{\left(\sum_{i=1}^m (2^{k_i})^{1-\frac{p}{2}} \|y_i\|_q^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^m \|y_i\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Mit der verallgemeinerten Hölder Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|U^{-1}\|_{q,p} &\leq \left(\sum_{i=1}^m (2^{k_i})^{\frac{pq}{q-p}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k_m} (2^{i})^{\frac{pq}{q-p}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \\
&= (2^{k_m})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(\sum_{i=0}^{k_m} (2^{-i})^{\frac{pq}{q-p}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \\
&\leq (2^{k_m})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (2^{-i})^{\frac{pq}{q-p}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \\
&\leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-2^{-\frac{pq}{q-p}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}
\end{aligned}$$

Wegen $p \leq q^* \leq 2$

$$\frac{pq}{q-p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) = \frac{pq}{q-p}\frac{2-p}{2p} \geq \frac{1}{2}$$

Hiermit

$$\|U^{-1}\| \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} 2^{\frac{q-p}{pq}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

□

Satz 51 *Typ und Cotyp von* C_p^n

Satz 52

$$d(C_p^n, C_r^n) = d(\ell_p^n, \ell_r^n)$$

8.4 Messbarkeit vektorwertiger Funktionen

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt einfach, falls es eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$ in E und meßbare Mengen $A_i, i = 1, \ldots, n$ gibt, so daß

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \chi_{A_i}$$

f heißt $\mathbb{P}$-meßbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen f_n und eine Nullmenge N gibt, so daß für alle $\omega \in \Omega \setminus N$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$$

Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt schwach $\mathbb{P}$-meßbar, falls für alle $x^* \in X^*$ die Funktion

$$x^*(f)$$

$\mathbb{P}$-messbar ist. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ Maßräume und $F : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ eine messbare Funktion. Dann nennt man das Maß μ_F, das durch

$$\mu_F(A) = \mu(F^{-1}(A)) \qquad\qquad A \in \mathcal{A}'$$

gegeben ist, das Bildmaß von F.

Wir sagen, dass zwei Funktionen F und G dieselbe Verteilung besitzen, wenn für alle messbaren Mengen A

$$\mu(F^{-1}(A)) = \mu(G^{-1}(A))$$

Satz 53 *(Pettis Messbarkeitstheorem) Eine Funktion $f : \Omega \to E$ ist genau dann $\mathbb{P}$-meßbar, wenn*

(i) f hat $\mathbb{P}$-wesentliches separables Bild, d.h. es gibt A mit $\mathbb{P}(A) = 0$ und $f(\Omega \setminus A)$ ist (Norm-)separabel in X.

(ii) f ist schwach $\mathbb{P}$-meßbar.

Eine $\mathbb{P}$-messbare Funktion $f : \Omega \to X$ heißt Bochner integrierbar, wenn es eine Folge von einfachen Funktionen $f_n : \Omega \to X$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mathbb{P} = 0.$$

Das Integral wird durch

$$\int_\Omega f d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f d\mathbb{P}$$

definiert. (Man kann zeigen, dass das Integral wohldefiniert ist.)

Der Raum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, X)$ ist der Raum aller $\mathbb{P}$-Bochner integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to X$, so dass

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{8.9}$$

Dieser Raum ist mit (8.9) als Norm ein Banachraum.

Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Zufallsvariablen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist durch

$$F(x) = \mathbb{P}\{\omega | f(\omega) < x\}$$

definiert.

Die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mu \in M_0(\mathbb{R})$ ist

$$\hat{\mu}(t) := \int_\mathbb{R} e^{+its} \mu(ds)$$

Die charakteristische Funktion φ_f von $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist

$$\varphi_x(t) := \int e^{+its} \mu_x(ds) = \int e^{+itf(\omega)} d\mu(\omega)$$

wobei μ_f das Bildmaß bezeichnet.

Lemma 149 *(Bauer, p.94) Es sei (Ω, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_\Omega f d\mu_T = \int_{\Omega'} f \circ T d\mu$$

Korollar 22 *Es sei* $(\Omega, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Funktion mit Verteilungsdichte* ϕ*. Dann gilt*

$$\int_\Omega g \circ f d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$$

8.5 Unabhängige Zufallsvariablen

Eine Familie von meßbaren Mengen A_i, $i \in I$ heißt unabhängig, falls für alle endlichen Teilmengen

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1,\ldots,n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

Eine Familie von Zufallsvariablen $x_i, i \in I$ heißt unabhängig, falls für alle endlichen Teilfamilien und für alle Borelmengen B_j aus E gilt

$$\mathbb{P}\left(x_{i_1} \in B_1, \ldots, x_{i_n} \in B\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(x_{i_j} \in B_j)$$

Falls von drei Zufallsvariablen f, g, h jeweils zwei immer unabhängig sind, so müssen die drei Variablen f, g, h keinesfalls unabhängig sein. Dazu betrachtet man drei Mengen A, B und C, die paarweise unabhängig sind, aber nicht insgesamt unabhängig, also

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

(Man kann hierfür als Maßraum das Intervall $[0, 1]$ mit dem Lebesguemaß wählen und als Mengen $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$, $C = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$.) Dann sind χ_A, χ_B und χ_C, paarweise, aber nicht insgesamt unabängig.

Lemma 150 *Eine Familie von Zufallsvariablen $x_i, i \in I$ ist genau dann unabhängig, falls die von $x_i, i \in I$ erzeugten σ-Algebren $\mathcal{A}(x_i)$ unabhängig sind, d.h. für alle $A_{i_j} \in \mathcal{A}(x_{i_j})$ $j = 1, \ldots, n$ gilt*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

(Bauer, S. 41-42).

Satz 54 *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und X und Y Banachräume. Es seien $x, y : \Omega \to X$ zwei unabhängige Zufallsveränderliche. Außerdem seien $g, f : X \to Y$ Borel-meßbare Funktionen. Dann sind auch $f(x), g(y)$ unabhängig.*

x heißt symmetrisch, falls x und $-x$ dieselbe Verteilung haben, d.h.

$$\forall B, \text{ Borel } : \mathbb{P}(x \in B) = \mathbb{P}(-x \in B)$$

Lemma 151 *Es sei X ein Banachraum, $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f_i : \Omega \to X$, $i = 1, \ldots, n$, symmetrische und unabhängige Zufallsveränderliche. Dann gilt für alle Borelmengen $A_1, \ldots, A_n$ und alle Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$*

$$\mathbb{P}(f_1 \in A_1, \ldots, f_n \in A_n) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 f_1 \in A_1, \ldots, \varepsilon_n f_n \in A_n) \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f_1 \in A_1, \ldots, f_n \in A_n) \quad &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(f_i \in A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon_i f_i \in A_1) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon_1 f_1 \in A_1, \ldots, \varepsilon_n f_n \in A_n) \end{aligned}$$

□

Lemma 152 *(Borel-Cantelli) Sei $A_n, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Ereignissen und*

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$$

Eine n-dimensionale Zufallsveränderliche ist eine Abbildung f von einem Wahrscheinlichkeitsraum in den $\mathbb{R}^n$, wobei jede Koordinatenfunktion von $f = (f_1, \ldots, f_n)$ eine Zufallsvariable ist.

Die Verteilungsfunktion F von f ist durch

$$F(t) = \mathbb{P}(f_1 < t_1, \ldots, f_n < t_n)$$

Die Zufallsvariablen $f_1, \ldots, f_n$ sind also genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}(f_1 < t_1, \ldots, f_n < t_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(f_i < t_i)$$

Wir betrachten hier Zufallsveränderliche mit Werten im $\mathbb{R}^n$. Die Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Zufallsveränderlichen $F = (f_1, \ldots, f_n)$ ist

$$\begin{aligned} &\nu_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \\ &\nu_F(x) = \mathbb{P}(f_1 \leq x_1, \ldots, f_n \leq x_n) \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion ist

$$\begin{aligned} ch_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} & \\ ch_F(x) &= \int_\Omega \exp(i < x, F(\omega) >) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i < x, \xi >) d\nu_F(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i < x, \xi >) d_F(\xi) d\xi \end{aligned}$$

wobei d_F die Dichtefunktion von F ist (sie existiert, falls die Verteilungsfunktion absolut stetig ist).

$$\nu_F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} d_F(\xi) d\xi$$

Satz 55 *Es sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable und ch_F ihre charakteristische Funktion. Dann gilt für $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$*

$$\mathbb{P}(F \in I) = \lim_{T \to \infty} (2\pi)^{-n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} \underset{F}{\mathrm{ch}}(t) dt$$

vorausgesetzt, dass die Verteilungsfunktionen der Zufallsveränderlichen f_k an den Stellen a_k und b_k stetig sind.

Insbesondere ist damit eine Verteilungsfunktion eindeutig durch die charakteristische Funktion bestimmt.

Falls ch_F eine integrierbare Funktion ist, dann gilt

$$d_F(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i < x, \xi >) ch_F(x) dx$$

Die Verteilungsfunktion einer Summe $f_1 + \cdots + f_n$ ist

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i < t\right) = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} s_i < t} \mathbb{P}(f_1 < s_1, \ldots, f_n < s_n) ds_1 \cdots ds_n$$

Falls die Summanden unabhängige Zufallsvariablen sind, gilt weiter

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i < t\right) = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} s_i < t} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(f_i < s_i) ds_1 \cdots ds_n$$

Falls wir eine Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen f_1 und f_2 haben, dann ergibt sich die Faltungsformel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(f_1 + f_2 < t\right) &= \iint_{s_1+s_2<t} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2) ds_2 ds_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-s_1} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2) ds_2 ds_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2 - s_1) ds_2 ds_1 \\
&= \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2 - s_1) ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

Das innere Integral ist die Faltung der Funktionen $\mathbb{P}(f_1 < s_1)$ und $\mathbb{P}(f_2 < s_2)$.

8.6 Gaußvariablen

Eine Zufallsvariable $x : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit Erwartungswert α und Streuung σ, falls die Verteilungsfunktion von x gleich

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{(s-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) ds$$

ist. (Insbesondere gilt $\mathbb{E}x = \alpha,\ \mathbb{E}(x - \mathbb{E}x)^2 = \sigma^2$). Die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$$

bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsdichte.

Lemma 153 *Es sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine normalverteilte Funktion mit*

$$\int_\Omega g d\mathbb{P} = m \qquad\qquad \int_\Omega (g-m)^2 = \sigma^2$$

Dann gilt für die charakteristische Funktion von g

$$ch_g(t) = \exp\left(imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

Lemma 154 *Für alle x mit $x > 0$*

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{(\pi-1)x + \sqrt{x^2+2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \leq \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \tfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Lemma 155 *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) e^{-t^2/2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{t}\ e^{-t^2/2}$$

Beweis. Mittels Differentiation erhalten wir für alle $t > 0$

$$\frac{1}{t} \exp\left(-t^2/2\right) = \int_t^\infty \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) e^{s^2/2} ds \tag{8.10}$$

Tatsächlich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right)\right) = \left(-\frac{1}{t^2} - 1\right) e^{-t^2/2}$$

Damit stimmen die beiden Seiten in (8.10) bis auf eine Konstante überein. Die Konstante muss aber 0 sein, wie man für $t \to \infty$ sieht.

Aus (8.10) folgt sofort für $t > 0$

$$\int_t^\infty \exp\left(-s^2/2\right) ds < \frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right)$$

Hieraus folgt für $t > 0$

$$\int_t^\infty \frac{1}{s^2}\exp\left(-s^2/2\right) ds \leq \frac{1}{t^2}\int_t^\infty \exp\left(-s^2/2\right) ds < \frac{1}{t^3}\exp\left(-t^2/2\right)$$

Hiermit und mit $(*)$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right) &= \int_t^\infty \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\exp\left(-s^2/2\right) ds \\ &< \int_t^\infty \exp\left(-s^2/2\right) ds + \frac{1}{t^3}\exp\left(-t^2/2\right)\end{aligned}$$

□

Lemma 156 *Es gibt zwei positive Konstanten c_1 und c_2, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle normalisierten, unabhängigen, Gauß-verteilten Zufallsvariablen $g_1, \ldots, g_n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und Erwartungswert 0*

$$c_1\sqrt{\log n} \leq \int \sup_{1\leq i\leq n} |g_i(w)| d\mathbb{P}(w) \leq c_2\sqrt{\log n}$$

gilt.

Beweis. Wir schätzen die Verteilungsfunktion ab.

$$\mathbb{P}\left(\sup_i |g_i(w)| > t\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{|g_i(w)| \leq t\}\right)$$

Wegen der Unabhängigkeit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_i |g_i(w)| > t\right) &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(|g_i| \leq t\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \mathbb{P}(|g_i| > t)\right)\end{aligned}$$

Mit Lemma 8.10

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_i |g_i(w)| > t\right) &\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) e^{-t^2/2}\right)^n \\ &\geq 1 - \left\{\exp - \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) e^{-t^2/2}\right)\right\}^n \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) e^{-t^2/2}\right)\end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sup_i |g_i(w)| d\mathbb{P}(w) &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\sup_i |g_i(w)| > t\right) dt \\ &\geq \int_0^\infty 1 - \exp\left(-\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) e^{-t^2/2}\right) dt \\ &\geq C \cdot \sqrt{\log n} \text{ für } n \text{ hinreichend groß}\end{aligned}$$

□

Die Verteilung der Summe einer beliebigen Anzahl gleichverteilter unabhängiger Zufallsveränderlicher wurde zuerst von N.I. Lobatschewski [Lob] bestimmt. Er wollte dadurch den Fehler astronomischer Messungen abschätzen, um die Frage zu entscheiden, ob im Weltall die Gestze der euklidischen oder nicheuklidischen Geometrie gelten.

Satz 56 *Die Summe von unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen $g_1, \ldots, g_n$ ist wieder normalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von $g_1 + \cdots + g_n$ ist*

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_n^2 + \cdots + \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(t - (m_1 + \cdots + m_n))^2}{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}\right)$$

wobei

$$\int_\Omega g_i d\mathbb{P} = m_i \qquad \int_\Omega (g_i - m_i)^2 d\mathbb{P} = \sigma_i^2 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Eine Zufallsveränderliche $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Gauß- oder normalverteilt, falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$< f, \xi >: \Omega \to \mathbb{R} \tag{8.11}$$

ist Gauß- oder normalverteilt.

Insbesondere muss jede Koordinatenfunktion von f normalverteilt sein. Dies allein reicht jedoch nicht aus, um sicherzustellen, dass f selbst normalverteilt ist. Es gibt zwei normalverteilte Funktionen g und h mit Werten in $\mathbb{R}$, so dass deren Summe $g + h$ nicht normalverteilt ist. Genau genommen ist dies der typische Fall.

In der Literatur wird häufig eine restriktivere Definition für eine mehrdimensionale Gaußfunktion verwendet. Es wird gefordert, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion von f eine Dichte der Gestalt

$$d(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det(A^{-1}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)\right)$$

hat, wobei A eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Diese Bedingung ist im Wesentlichen zur Definition (8.11) äquivalent, lässt jedoch im Gegensatz zu (8.11) nicht zu, dass die Matrix A nur positiv semidefinit ist.

Wir sagen, dass eine Menge $\{g_i | i \in I\}$ von reellwertigen Zufallsvariablen ein Gaußprozess ist, wenn sämtliche Linearkombinationen Gaußvariable sind.

Satz 57 *$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \ldots, f_n)$, sei normalverteilt und zentriert und A sei die Matrix mit den Koordinaten*

$$a_{ij} = \int_\Omega f_i f_j \, d\mathbb{P}(\omega) \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

Dann gilt

(i) A ist positiv semidefinit.

(ii)

$$ch_F(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} < Ax, x >\right)$$

(iii) Falls A positiv definit ist, so gilt

$$d_F(x) = (2\pi)^{-n} \det(A)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} < A^{-1}x, x >\right)$$

Beweis. (i) Wegen

$$0 \leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i\right)^2 d\mathbb{P} = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_\Omega f_i f_j d\mathbb{P}$$

ist die Matrix positiv semidefinit. Es spielt hier keine Rolle, welche Funktionen f_i sind.

(ii)

$$\mathrm{ch}_F(x) = \int_\Omega \exp(i < x, F(\omega) >) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \exp\left(i \sum_{k=1}^n x_k f_k\right) d\mathbb{P}(\omega)$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k=1}^n x_k f_k$ normalverteilt. Mit

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^n x_k f_k d\mathbb{P} = 0 \qquad \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n x_k f_k\right|^2 d\mathbb{P} = \sum_{k,\ell=1}^n x_k x_\ell \int_\Omega f_k f_\ell d\mathbb{P}$$

und Lemma 153 ergibt sich

$$\mathrm{ch}_F(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n x_k x_\ell \int_\Omega f_k f_\ell d\mathbb{P}\right)$$

(iii) wird mit Satz 55 bewiesen. □

Satz 58 *Es seien $g_1, \ldots, g_n$ normalverteilte, unabhängige Zufallsveränderliche. Dann gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion*

$$\mathbb{P}(g_1 < s_1, \ldots, g_n < s_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \sigma_k^{-1} \int_{-\infty}^{s_k} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(t-m_k)^2}{\sigma_k^2}\right) dt$$

wobei

$$m_k = \int_\Omega g_k d\mathbb{P} \qquad \sigma_k = \int_\Omega |g_k - m_k|^2 d\mathbb{P}$$

Die n-dimensionale Verteilungsdichte von $(g_1, \ldots, g_n)$ ist

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \sigma_k^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m_k)^2}{\sigma_k^2}\right)$$

Satz 59 *Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Maßraum. Für jedes p mit $1 \leq p < \infty$ gibt es eine positive Konstante a_p, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und alle normalverteilten, unabhängigen Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ mit $\int g_i d\mathbb{P} = 0$ und $\int |g_i|^2 d\mathbb{P} = 1$*

$$a_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} x_i g_i\right|^p d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt.

Beweis.

$$\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} x_i g_i\right|^p d\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{t^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) dt$$

Wir substituieren

$$s = \frac{t}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und erhalten

$$\int \left|\sum_{i=1}^{n} x_i g_i\right|^p d\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{p}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^p \exp\left(-\frac{1}{2} s^2\right) ds$$

□

8.7 Konzentration von Summen von Gaußvariablen

Theorem 8.7.1 *Es sei X ein Banachraum, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ und $g_1, \ldots, g_n$ unabhängige, normalverteilte Zufallsveränderliche, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Gleichungen $\int g_i d\mathbb{P} = 0$ und $\int |g_i|^2 d\mathbb{P} = 1$ gelten. Dann gilt für alle $\alpha > 0$*

$$\mathbb{P}\left\{\omega \left| \left|\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)x_i\right\|_X - \int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\eta)x_i\right\|_X d\mathbb{P}(\eta)\right| > \alpha\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{K\alpha^2}{\sigma^2}\right) \tag{8.12}$$

wobei

$$\sigma = \sup_{\|x^*\|=1}\left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und K eine Konstante ist, die nicht kleiner als $2/\pi^2$ ist.

Dies bedeutet, dass eine große Konzentration um den Mittelwert vorliegt.

In dem Buch von Pisier ist das Theorem für unendliche Reihen $\sum_{i=1}^\infty g_i x_i$ formuliert.

Die Forderung, dass die Variablen unabhängig sind, ist notwendig. Dazu betrachten wir die Folge $x_1 g_1 = \cdots = x_n g_n$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{P}\left\{\omega \mid |n|g_1(\omega)|\|x_1\|_X - \mathbb{E}_\eta n|g_1(\eta)|\|x_1\|_X| > \alpha\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{K\alpha^2}{n\|x_1\|^2}\right)$$

Weiter folgt

$$\mathbb{P}\left\{\omega \left| \, ||g_1(\omega)| - \mathbb{E}_\eta|g_1(\eta)|| > \frac{\alpha}{n\|x_1\|}\right.\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{K\alpha^2}{n\|x_1\|^2}\right)$$

Hieraus erhalten wir

$$\mathbb{P}\left\{\omega \mid ||g_1(\omega)| - \mathbb{E}_\eta|g_1(\eta)|| > \beta\right\} \leq 2\exp\left(-K\beta^2 n\right)$$

Dies kann nicht sein.

Wir möchten noch bemerken, dass

$$\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\eta)x_i\right\|_X d\mathbb{P}(\eta) \geq \sup_{\|x^*\|=1}\left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.13}$$

Dies folgt im Wesentlichen aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\eta) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\eta) &= \int_\Omega \sup_{\|x^*\|=1} \left| x^* \left(\sum_{i=1}^n g_i(\eta) x_i \right) \right| d\mathbb{P}(\eta) \\ &\geq \sup_{\|x^*\|=1} \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n g_i(\eta) x^*(x_i) \right| d\mathbb{P}(\eta)\end{aligned}$$

Mit Satz 59 folgt weiter

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\eta) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\eta) \geq a_1 \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beispiel 45 *Let $1 \leq p < \infty$ und $X = \ell_p^n$. Die Vektoren e_i seien die Einheitsvektoren.*

$$B_p \|a\|_p \leq \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i a_i e_i \right\| d\mathbb{P} \leq C_p \|a\|_p$$

Beweis von Beispiel. Nach Satz ist das Rademacher-Mittel kleiner als das Gaußmittel.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i a_i e_i \right\| d\mathbb{P} &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |g_i a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} d\mathbb{P} \\ &\leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |g_i a_i|^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

□

Beweis. Es sei γ_n das Gauß-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$, also

$$\gamma_n(A) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \int_A e^{-\frac{\|t\|^2}{2}} dt$$

Weiter sei $u : \ell_2^n \to X$ durch

$$u(t) = \sum_{i=1}^n t_i x_i$$

definiert.

Wir zeigen, dass die Ungleichung (8.12) zu der Ungleichung

$$\gamma_n \left\{ t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left| \|u(t)\| - \int_{\mathbb{R}^n} \|u(s)\| d\gamma_n(s) \right| > \alpha \right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{K\alpha^2}{\|u\|^2} \right) \tag{8.14}$$

äquivalent ist.

Dazu zeigen wir, dass $\sigma = \|u^*\|$ gilt. (Wegen $\|u\| = \|u^*\|$ ergibt sich, dass die rechte Seite in (8.12) gleich der rechten Seite in (8.14) ist.) Wir überzeugen uns, dass $u^* : X^* \to \ell_2^n$ durch

$$u^*(x^*) = (x^*(x_i))_{i=1}^n$$

gegeben ist. Dies gilt, weil für alle $t \in \mathbb{R}^n$ und alle $x^* \in X^*$

$$u^*(x^*)(t) = x^*(u(t))$$

also

$$u^*(x^*)(t) = x^* \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n t_i x^*(x_i)$$

Damit folgt

$$\|u^*\| = \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir betrachten nun die Abbildung $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\Theta(\omega) = (g_1(\omega), \ldots, g_n(\omega))$$

und μ sei das Bildmaß von Θ, d.h.

$$\mu(A) = \mathbb{P}(\Theta^{-1}(A))$$

Dann gilt $\mu = \gamma_n$. Wir überzeugen uns davon. Dazu reicht es, dies für Mengen der Form

$$A = (-\infty, a_1) \times \cdots \times (-\infty, a_n)$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mathbb{P}(\Theta^{-1}(A)) \\ &= \mathbb{P}\left\{\omega | (g_1(\omega), \ldots, g_n(\omega)) \in A\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\omega | g_1(\omega) < a_1, \ldots, g_n(\omega) < a_n\right\} \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit folgt

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{\omega | g_i(\omega) < a_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Also gilt $\mu = \gamma_n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\gamma_n \left\{ t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left| \|u(t)\| - \int_{\mathbb{R}^n} \|u(s)\| d\gamma_n(s) \right| > \alpha \right\} \\
&= \mathbb{P}\left(\Theta^{-1} \left\{ t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left| \|u(t)\| - \int_{\mathbb{R}^n} \|u(s)\| d\gamma_n(s) \right| > \alpha \right\} \right) \\
&= \mathbb{P}\left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, t = (g_1(\omega), \ldots, g_n(\omega)) \text{ und } \left| \|u(t)\| - \int_{\mathbb{R}^n} \|u(s)\| d\gamma_n(s) \right| > \alpha \right\}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\|u(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|_X$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|u(s)\| d\gamma_n(s) = \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\omega)$$

(Die letztere Gleichung folgt, weil man das Bildmaß integriert.) Wir weisen nun (8.14) nach. Hierzu betrachten wir den $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit dem Maß $\gamma_n \times \gamma_n$. Außerdem betrachten wir

$$t \sin\theta + s \cos\theta$$

mit deren Ableitung nach θ

$$t \cos\theta - s \sin\theta$$

Weiter betrachten wir $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = \|u(t)\|$. F ist eine konvexe Funktion. Deshalb ist F nach dem Satz von Rademacher Lebesgue fast überall differenzierbar.

Wir wollen uns nun überlegen, dass für fast alle $(t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und für fast alle $\theta \in [0, 2\pi]$ die Ableitung F' in $t \sin\theta + s \cos\theta$ existiert (Die θ-Nullmenge hängt also von t und s ab.). Dies zeigen wir mit dem Satz von Fubini. Wir werden nämlich zeigen, dass dann F auf einer Menge positiven Maßes nicht differenzierbar ist, was dem Satz von Rademacher widerspricht.

Dazu überlegen wir uns, dass die Menge aller Tripel (t, s, θ), so dass F in diesem Punkt differenzierbar ist, eine messbare Menge ist. Die Funktion $r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$

$$r(t, s, \theta) = t \cos\theta + s \sin\theta$$

ist stetig und somit ist das Urbild einer Borelmenge eine Borelmenge. Die Abbildung F ist konvex und somit ist die Menge aller Punkte, in denen sie differenzierbar ist eine Borelmenge (Nach dem Satz von Rademacher ist dies auch eine Nullmenge). Dies sieht man so ein: Eine konvexe Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist genau dann in einem Punkt differenzierbar, wenn die Stützhyperebene an den Graphen eindeutig ist. Dies ist wiederum dazu äquivalent, dass die links- und rechtsseitigen partiellen Ableitungen gleich sind.

Wir setzen nun $h(t) = \lim_{k\to\infty} h_k$, wobei

$$h_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{F(t + \frac{1}{k}e_i) - F(t)}{\frac{1}{k}} - \frac{F(t) - F(t - \frac{1}{k}e_i)}{\frac{1}{k}} \right]$$

h_k sind stetige Funktionen. h ist nichtnegativ und genau dann gleich 0, wenn F differenzierbar ist. Außerdem ist h eine messbare Funktion, weil sie punktweiser Limes einer Folge von stetigen Funktionen ist. Da F konvex ist, ist die Folge h_k monoton fallend. Der Limes existiert, weil die Folge h_k monoton fallend ist.

$$\begin{aligned}
\{t | F \text{ ist nicht in } t \text{ differenzierbar}\} &= \{t | h(t) > 0\} \\
&= \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \{t | h(t) \geq \frac{1}{\ell}\} \\
&= \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \{t | \forall k : h_k(t) \geq \frac{1}{\ell}\} \\
&= \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{t | h_k(t) \geq \frac{1}{\ell}\}
\end{aligned}$$

Da h_k stetige Funktionen sind, ist die letztere Menge eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen, also insbesondere eine Borelmenge.

Falls nicht gilt: Für fast alle $(t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die Ableitung F' in $t \sin\theta + s \cos\theta$ für fast alle $\theta \in [0, 2\pi]$ existiert, dann besitzt die Menge aller Tripel (t, s, θ), so dass F in diesem Punkt nicht differenzierbar ist, positives Maß.

Es bezeichne $C_{t,\theta}$ den Schnitt für festes t und θ. Deshalb

$$C_{t,\theta} = \{s|F \text{ ist nicht in } t\sin\theta + s\cos\theta \text{ differenzierbar}\}$$

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma_n \times \gamma_n \times \lambda_1\{(t,s,\theta)|F \text{ ist nicht in diesem Punkt differenzierbar}\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{2\pi} \gamma_n(C_{t,\theta})d\lambda_1(\theta)d\gamma_n(t) \end{aligned}$$

Also muss es eine Teilmenge von $[0, 2\pi]$ mit positivem Maß geben, so dass $\gamma_n(C_{t,\theta}) > 0$. Deshalb können wir annehmen, dass $\gamma_n(C_{t,\theta}) > 0$ für θ mit $\cos\theta \neq 0$. Für ein solches θ gilt, dass $s \neq s'$ die Ungleichung

$$t\sin\theta + s\cos\theta \neq t\sin\theta + s'\cos\theta$$

impliziert. Deshalb ist die Abbildung $T : C_{t,\theta} \to \mathbb{R}^n$

$$T(s) = t\sin\theta + s\cos\theta$$

eine bijektive affine Abbildung, deren Determinante gleich $(\cos\theta)^n$ ist. Hieraus folgt, dass F auf der Menge $T(C_{t,\theta})$ nicht differenzierbar ist, aber diese Menge positives Maß besitzt. Dies widerspricht dem Satz von Rademacher.

Insbesondere haben wir gezeigt, dass

$$\{(t,s,\theta)|F \text{ ist nicht in diesem Punkt differenzierbar}\}$$

eine Nullmenge ist.

Für alle t und s ist die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(\theta) = F(t\sin\theta + s\cos\theta) = \left\|\sum_{i=1}^n (t_i\cos\theta + s_i\sin\theta)x_i\right\|$$

absolutstetig. Deshalb existiert f' fast überall und wir können den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf die Funktion f anwenden.

$$F(t) - F(s) = f(\pi/2) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta}F(t\sin\theta + s\cos\theta)d\theta$$

Falls F in dem Punkt $t\sin\theta + s\cos\theta$ differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{d\theta}F(t\sin\theta + s\cos\theta) =< F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >$$

Da für fast alle t, s die Funktion F in fast allen $t\sin\theta + s\cos\theta$ differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel, dass für fast alle t und s

$$F(t) - F(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta > d\theta$$

Es sei $\lambda > 0$. Da die Funktion $\exp(\lambda u)$ konvex ist, folgt mit der Ungleichung von Jensen

$$\begin{aligned}&\exp\left(\lambda(F(t) - F(s))\right)\\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >\right) d\theta\end{aligned}$$

Nun integrieren wir beide Seiten und erhalten

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda(F(t) - F(s))\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)\\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >\right) d\theta d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)\end{aligned}$$

Wir wollen nun den Satz von Fubini anwenden. Dazu überprüfen wir die Messbarkeit der Funktion

$$\exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >\right)$$

Da $\{(t, s, \theta)|F$ ist nicht in diesem Punkt differenzierbar$\}$ eine Nullmenge ist, ist diese Funktion fast überall punktweiser Grenzwert von

$$\begin{aligned}&H_k\\ &= \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^n k\left[F(t\sin\theta + s\cos\theta + \frac{1}{k}e_k) - F(t\sin\theta + s\cos\theta)\right](t_k\cos\theta - s_k\sin\theta)\right)\end{aligned}$$

und H_k ist eine stetige Funktion. Mit dem Satz von Fubini erhalten wir nun

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda(F(t) - F(s))\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)\\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)d\theta\end{aligned}$$

Da die e-Funktion konvex ist, folgt mit der Jensen Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\left(F(t) - \int_{\mathbb{R}^n} F(s))d\gamma_n(s)\right)\right) d\gamma_n(t)$$
$$\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)d\theta$$

Nun kommen wir zu dem entscheidenden Punkt. Das Maß $\gamma_n \times \gamma_n$ ist invariant unter der Abbildung

$$(t,s) \to (t\sin\theta + s\cos\theta, t\cos\theta - s\sin\theta)$$

Diese Abbildung ist eine Isometrie auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, weil

$$\begin{aligned}
&\|(t\sin\theta + s\cos\theta, t\cos\theta - s\sin\theta)\|^2 \\
&= \|t\sin\theta + s\cos\theta\|^2 + \|t\cos\theta - s\sin\theta\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |t_i\sin\theta + s_i\cos\theta|^2 + \sum_{i=1}^n |t_i\sin\theta - s_i\cos\theta|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left(|t_i\sin\theta + s_i\cos\theta|^2 + |t_i\sin\theta - s_i\cos\theta|^2\right) \\
&= \|t\|^2 + \|s\|^2
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$d\gamma_n(t) \times d\gamma_n(s) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\|t\|^2}{2}}dte^{-\frac{\|s\|^2}{2}}ds = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\|t\|^2+\|s\|^2}{2}}dtds$$

und das Maß $\gamma_n \times \gamma_n$ is invariant unter der angegebenen Abbildung.

Hieraus ergibt sich für alle θ

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t\sin\theta + s\cos\theta), t\cos\theta - s\sin\theta >\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t), s >\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\left(F(t) - \int_{\mathbb{R}^n} F(s))d\gamma_n(s)\right)\right) d\gamma_n(t)$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda\frac{\pi}{2} < F'(t), s >\right) d\gamma_n(t)d\gamma_n(s)$$

Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(<\xi, t>) d\gamma_n(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right)$$

Wir weisen diese Formel nach. Da das Maß γ_n rotationsinvariant ist, können wir annehmen, dass $\xi = e_1$. Es bleibt also nachzuweisen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(t_1) d\gamma_n(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \exp(t_1) d\gamma_n(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(t_1) e^{-\frac{1}{2}\|t\|^2} dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(t_1 - \frac{1}{2}t_1^2) dt_1 \\
&= \frac{\sqrt{e}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}(t_1 - 1)^2) dt_1
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda(F(t) - \int_{\mathbb{R}^n} F(s)) d\gamma_n(s)\right) d\gamma_n(t) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda^2 \frac{\pi^2}{8} \|F'(t)\|^2\right) d\gamma_n(t)$$

Aus

$$|F(t) - F(s)| = |\|u(t)\| - \|u(s)\|| \leq \|u(t-s)\| \leq \|u\| \|t-s\|$$

folgt

$$\|F'(t)\| \leq \|u\|$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda(F(t) - \int_{\mathbb{R}^n} F(s)) d\gamma_n(s)\right) d\gamma_n(t) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda^2 \frac{\pi^2}{8} \|F'(t)\|^2\right) d\gamma_n(t) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda^2 \frac{\pi^2}{8} \|u\|^2\right) d\gamma_n(t) \\
&= \exp\left(\lambda^2 \frac{\pi^2}{8} \|u\|^2\right)
\end{aligned}$$

Mit Chebychevs Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&\exp(\lambda\alpha)\gamma_n\left\{t\,\middle|\,F(t)-\int_{\mathbb{R}^n}F(s))d\gamma_n(s)\geq\alpha\right\}\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\lambda(F(t)-\int_{\mathbb{R}^n}F(s))d\gamma_n(s)\right)d\gamma_n(t)\\
&\leq\exp\left(\lambda^2\frac{\pi^2}{8}\|u\|^2\right)
\end{aligned}$$

und somit

$$\gamma_n\left\{t\,\middle|\,F(t)-\int_{\mathbb{R}^n}F(s))d\gamma_n(s)\geq\alpha\right\}\leq\exp\left(\lambda^2\frac{\pi^2}{8}\|u\|^2-\lambda\alpha\right)$$

Wir wählen jetzt

$$\lambda=\alpha\frac{4}{\pi^2\|u\|^2}$$

und erhalten

$$\gamma_n\left\{t\,\middle|\,F(t)-\int_{\mathbb{R}^n}F(s))d\gamma_n(s)\geq\alpha\right\}\leq\exp\left(-\frac{2}{\pi^2\|u\|^2}\right)$$

Dieselbe Abschätzung zeigen wir für $-F$ und erhalten dann

$$\gamma_n\left\{t\,\middle|\,\left|F(t)-\int_{\mathbb{R}^n}F(s))d\gamma_n(s)\geq\alpha\right|\right\}\leq 2\exp\left(-\frac{2}{\pi^2\|u\|^2}\right)$$

□

Korollar 23 *Es gibt Konstanten $C_{p,q}$, $1\leq q<p<\infty$, so dass für alle Banachräume X, $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n\in X$ und alle unabhängigen, gleichverteilten, normalverteilten Zufallsveränderlichen $g_1,\ldots,g_n$*

$$\left(\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)x_i\right\|_X^p d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}}\leq C_{p,q}\left(\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)x_i\right\|_X^q d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{q}}$$

gilt.

Beweis. Nach (8.13) gilt

$$\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\eta)x_i\right\|_X d\mathbb{P}(\eta)\geq\sup_{\|x^*\|=1}\left(\sum_{i=1}^n|x^*(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Deshalb folgt aus (8.12)

$$\mathbb{P}\left\{\omega \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|_X - \alpha \right| > \ell\alpha \right\} \leq 2\exp\left(-K\ell^2\right)$$

mit

$$\alpha = \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\eta) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\eta)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\eta) x_i \right\|_X^p d\mathbb{P}(\eta) \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^p \alpha^p \mathbb{P}\left\{\omega \left| (\ell-1)\alpha \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|_X \leq \ell\alpha \right.\right\} \\
&= \alpha^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^p \mathbb{P}\left\{\omega \left| (\ell-1)\alpha \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|_X \leq \ell\alpha \right.\right\} \\
&\leq \alpha^p + \alpha^p \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell^p 2\exp\left(-K(\ell-1)^2\right)
\end{aligned}$$

□

8.8 Äquivalenz von Bernoulli und Gauß Variablen

Lemma 157 *(Pisier) Es sei X ein Banachraum und $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum Es seien $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängige, symmetrische Zufallsveränderliche und $p \geq 1$. Für alle i und j mit $1 \leq i, j \leq n$ gelte $\int_\Omega |f_i| d\mathbb{P} = \int_\Omega |f_j| d\mathbb{P}$. Dann gilt für alle Vektoren $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$*

$$\int_0^1 \left\| \sum_1^n r_i(t) x_i \right\|^p dt \leq \left(\int_\Omega |f_1| d\mathbb{P} \right)^{-p} \int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(\omega) x_i \right\|^p d\mathbb{P}$$

wobei r_i, $i = 1, \ldots, n$, Rademacher-Funktionen sind.

Falls f_i, $i = 1, \ldots, n$, normalverteilte, zentrierte, normalisierte Zufallsveränderliche sind, dann

$$\int_0^1 \left\| \sum_1^n r_i(t) x_i \right\|^p dt \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(\omega) x_i \right\|^p d\mathbb{P}$$

Beweis. Eine Zufallsvariable f heißt symmetrisch, wenn $-f$ dieselbe Verteilung besitzt. Mit Lemma 151 folgt, dass für alle Vorzeichen ϵ_i

$$\sum_{i=1}^n f_i x_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i x_i$$

dieselbe Verteilung besitzen. Hiermit folgt, dass für alle $t \in [0, 1]$

$$\int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(w) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \left\| \sum_1^\infty r_i(t) f_i(\omega) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega)$$

Hieraus folgt

$$\int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(w) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) = \int_0^1 \int_\Omega \left\| \sum_1^\infty r_i(t) f_i(\omega) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) dt$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(w) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) &= \int_\Omega \int_0^1 \left\| \sum_1^\infty r_i(t) f_i(\omega) x_i \right\|^p dt d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \left\| \sum_1^\infty r_i(t) \operatorname{sgn}(f_i(\omega)) |f_i(\omega)| x_i \right\|^p dt d\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

Da r_i, $i = 1, \ldots, n$ symmetrische Zufallsvariablen sind

$$\int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(w) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \int_0^1 \left\| \sum_1^\infty r_i(t) |f_i(\omega)| x_i \right\|^p dt d\mathbb{P}(\omega)$$

Wir benutzen den Satz von Fubini und wir benutzen, dass die L^1-Norm kleiner als die L^p-Norm ist.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(w) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) &= \int_0^1 \int_\Omega \left\| \sum_1^\infty r_i(t) |f_i(\omega)| x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) dt \\ &\geq \int_0^1 \left(\int_\Omega \left\| \sum_1^\infty r_i(t) |f_i(\omega)| x_i \right\| d\mathbb{P}(\omega) \right)^p dt \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Dreiecksungleichung an.

$$\int_\Omega \left\| \sum_1^n f_i(w) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_0^1 \left\| \sum_1^\infty r_i(t) \left(\int_\Omega |f_i(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) \right) x_i \right\|^p dt$$

Falls die f_i normalverteilt sind, folgt mit Korollar 22

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_i| d\mathbb{P} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

□

Satz 60 *(Maurey-Pisier) Es sei X ein Banachraum, $g_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängige zentrierte, normalisierte Gaußvariablen und $r_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängige Z.V. mit $\mathbb{P}(r_i = 1) = \mathbb{P}(r_i = -1) = \frac{1}{2}$. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle Folgen von Vektoren $x_i, i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_\Omega \left\| \sum_1^n g_i(w) x_i \right\|^2 \mathbb{P} \leq C \int_\Omega \left\| \sum_1^n r_i(w) x_i \right\|^2 d\mathbb{P}$$

(ii) X enthält nicht gleichmäßig l_n^∞'s.

(iii) X besitzt einen nichttrivialen Cotyp.

(X enthält gleichmäßig l_n^∞'s: $\exists C > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists E \subseteq X : d(E, l_n^\infty) \leq C$)

8.9 Die Sätze von Slepian und Sudakov-Fernique

Lemma 158 *(Slepian) Es seien F und G zentrierte Gaußfunktionen mit Werten im $\mathbb{R}^n$. Es gelte*

$$(i) \qquad \int_\Omega |f_i|^2 d\mathbb{P} = \int_\Omega |g_i|^2 d\mathbb{P} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$(ii) \qquad \int_\Omega g_i g_k d\,\mathbb{P} \leq \int_\Omega f_i f_k d\,\mathbb{P} \qquad i, k = 1, \ldots, n$$

Dann gilt

$$\int_\Omega \sup_{1 \leq i \leq n} f_i \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \sup_{1 \leq i \leq n} g_i \, d\mathbb{P}$$

Lemma 159 *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Es sei $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $t \in [a, b]$ die Funktion $f_t : X \to \mathbb{R}$ mit $f_t(x) = f(x, t)$ integrierbar ist. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial t}$ existieren und es gibt eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ und $t \in [a, b]$ die Ungleichung $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$ gilt. Dann ist die Funktion, die t auf die Zahl $\int_X f(x, t) d\mu(x)$ abbildet nach t differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x, t) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass F und G unabhängig sind (anderenfalls gehen wir zu dem Produktraum $\Omega \times \Omega$ über).

Wir nehmen hier o.E.d.A. an, dass A_F und A_G positiv definit sind. Andernfalls stören wir die Matrizen um ε, indem wir unabhängige Zufallsveränderliche addieren. Wir betrachten dazu normalverteilte, normalisierte zentrierte, unabhängige Gaußveränderliche h_i, $i = 1, \ldots, n$, die überdies auch noch unabhängig von allen f_i sind. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n a_i (f_i + \epsilon h_i) \right|^2 d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_\Omega f_i f_j d\mathbb{P} + 2\epsilon \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_\Omega f_i h_j d\mathbb{P} + \epsilon^2 \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_\Omega h_i h_j d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Wegen $\int_\Omega f_i h_j d\mathbb{P} = 0$

$$\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n a_i(f_i + \epsilon h_i) \right|^2 d\mathbb{P} \geq \epsilon^2 \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_\Omega h_i h_j d\mathbb{P} = \epsilon^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Also ist die Matrix

$$\left(\int_\Omega (f_i + \epsilon h_i)(f_j + \epsilon h_j) d\mathbb{P} \right)_{i,j=1}^n$$

positiv definit.

Wir werden zeigen, daß für die Verteilungsfunktion gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{f_i > \lambda_i\} \right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{g_i > \lambda_i\} \right) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n$$

Hieraus folgt dann die Behauptung.

Wir betrachten für festes λ

$$\varphi(C) = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \dots \int_{-\infty}^{\lambda_n} (2\pi)^{-n}\, det(C)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} < C^{-1}x, x > \right) dx$$

auf der Menge der positiv-definiten Matrizen und stellen fest, dass φ dort wohldefiniert ist, weil für alle $x \neq 0$ die Ungleichung $< C^{-1}x, x > > 0$ gilt.

Wir zeigen nun, dass für alle i und j mit $i \neq j$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_{ij}} \geq 0 \tag{8.15}$$

gilt. Die Menge aller positiv definiten Matrizen ist offen in der Menge aller Matrizen, weil es zu jeder positiv definiten Matrix C ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle Matrizen B mit $\|B\| \leq 1$ gilt, dass $C + \epsilon B$ positiv definit ist. Damit ist φ auf einer offenen Menge definiert und wir können somit Ableitungen betrachten. Wir wollen uns überlegen, dass φ als Funktion von C differenzierbar ist. Dazu können wir ein hinreichend kleine Umgebung von C betrachten. überlegen wir uns, dass die Ableitung des Integranden gleichmäßig durch eine integrierbare Funktion beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial C_{ij}} \det(C)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} < C^{-1}x, x > \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \det(C)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \det(C) \exp\left\{ -\frac{1}{2} < C^{-1}x, x > \right\} \\
&-\frac{1}{2} \det(C)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial C_{ij}} < C^{-1}x, x > \exp\left\{ -\frac{1}{2} < C^{-1}x, x > \right\}
\end{aligned}$$

Der entscheidende Term $\exp\left\{-\frac{1}{2} < C^{-1}x, x >\right\}$ kann auf einer Umgebung von C gleichmäßig durch $\exp(-\delta\|x\|_2^2)$ abgeschätzt werden. Diese Funktion ist auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar, und sie bleibt auch integrierbar, wenn sie mit einem Polynom multipliziert wird. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}}\int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}(2\pi)^{-n}\det(C)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2} < C^{-1}x, x >\right\}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}\frac{\partial}{\partial C_{ij}}(2\pi)^{-n}\det(C)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2} < C^{-1}x, x >\right\}dx\end{aligned}$$

Mit Satz 57 folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} = \int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}\left\{\frac{1}{(2\pi)^{-n}}\frac{\partial}{\partial C_{ij}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right)d\xi\right\}dx$$

Wir vertauschen Integration und Differentiation. Dies ist möglich, weil

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial C_{ij}}\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\xi_i\xi_j\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\xi_i\xi_j\exp\left(-\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\xi_i\xi_j\exp\left(-\delta\|\xi\|_2^2\right)\right|\end{aligned}$$

die Ableitungen gleichmäßig durch eine integrierbare Funktion beschränkt sind (δ ist das Minimum der minimalen Eigenwerte von C über eine kleine Umgebung.).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} = \int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}\left\{\frac{1}{(2\pi)^{-n}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial C_{ij}}\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right)d\xi\right\}dx$$

Für alle $i \neq j$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial C_{ij}}\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right) \\ &= -\frac{1}{2}\xi_i\xi_j\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\exp\left(-i < x,\xi > -\frac{1}{2} < C\xi,\xi >\right)\end{aligned}$$

Deshalb

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_n} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{-n}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \exp\left(-i < x, \xi > -\frac{1}{2} < C\xi, \xi > \right) d\xi \right\} dx$$

Wir wenden wieder Satz 57 an

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ (2\pi)^{-n} \det(C)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} < C^{-1}x, x > \right) \right\} dx$$

Es sei

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (x_1, \ldots, x_{i-1},\ \lambda_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, \lambda_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ \hat{x}^{i,j} &= (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} &= \frac{1}{(2\pi)^{-n}} \det(C)^{-1/2} \\ &\int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_{i-1}} \int_{-\infty}^{\lambda_{i+1}} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_{j-1}} \int_{-\infty}^{\lambda_{j+1}} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} < C^{-1}\tilde{x}, \tilde{x} > \right\} d\hat{x}^{i,j} \end{aligned}$$

Insbesondere ist dies größer gleich 0.

Damit erhalten wir für die Funktionen $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\Phi(t) = \varphi(tA_F + (1-t)A_G)$$

und $C : [0,1] \to \mathbb{R}^{n^2}$

$$C(t) = tA_F + (1-t)A_G$$

Es gilt

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial C_{ij}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial t}$$

Weil nach Voraussetzung für alle $i = 1, \ldots, n$ die Gleichung $a_{ii}^F = a_{ii}^G$ gilt, gilt für alle $t \in [0,1]$ die Gleichung $C_{i,i}(t) = a_{ii}^F = a_{ii}^G$. Die Koordinatenfunktionen $C_{i,i}$ sind also konstantund deren Ableitungen gleich 0. Somit

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \sum_{i \neq j} \frac{\partial\varphi}{\partial C_{i,j}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial t}$$

Mit $\frac{\partial C_{i,j}}{\partial t} = a^F_{i,j} - a^G_{i,j}$ folgt

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \sum_{i \neq j} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{i,j}} \, (a^F_{i,j} - a^G_{i,j})$$

Nach Voraussetzung gilt aber, dass $a^F_{ij} \geq a^G_{ij}$. Ausserdem gilt wegen (8.15) $\frac{\partial \varphi}{\partial C_{ij}} \geq 0$. Also gilt für alle $t \in (0,1)$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \geq 0$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{f_i < \lambda_i\}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_n} (2\pi)^{-n} \det(A_F)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} < A_F^{-1} x, x >\right\} dx \\
&= \Phi(1) \geq \Phi(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_n} (2\pi)^{-n} \det(A_G)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} < A_G^{-1} x, x >\right\} dx \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{f_i < \lambda_i\}\right)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{f_i \geq \lambda_i\}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{f_i < \lambda_i\}\right) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{f_i < \lambda_i\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{g_i \geq \lambda_i\}\right)
\end{aligned}$$

□

Lemma 160 *(Sudakov-Fernique) Es seien $F, G : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F = (f_0, \ldots, f_n)$, $G = (g_0, \ldots, g_n)$ normalverteilte, zentrierte Zufallsveränderliche mit*

$$f_0 \equiv g_0 \equiv 0$$

und

$$\int_\Omega |f_i - f_k|^2 \, d\mathbb{P} \le \int_\Omega |g_i - g_k|^2 \, d\mathbb{P} \qquad i,k = 0,1,\dots,n$$

Dann gilt

$$\int_\Omega \sup_i f_i \, d\mathbb{P} \le 2 \int_\Omega \sup_i g_i \, d\mathbb{P}$$

Tatsächlich ist der Faktor 2 in der Abschätzung von Satz 160 nicht notwendig. Man kann zeigen, dass $\int_\Omega \sup_i f_i \, d\mathbb{P} \le \int_\Omega \sup_i g_i \, d\mathbb{P}$ gilt.

Satz 160 besagt, dass unter der Voraussetzung, dass die Funktionen g_i im Raum L^2 paarweise größere Abstände haben als die Funktionen f_i, das Supremum der g_i im Integral größer ist als das der f_i.

Ein analoges Problem, das noch offen ist, ist das folgende [Grom]. Gegeben seien zwei Familien von Euklidischen Kugeln im $\mathbb{R}^n$,

$$B_2^n(x_i, r_i) \qquad B_2^n(y_i, r_i) \qquad i = 1,\dots,N$$

wobei die Abstände zwischen den Mittelpunkten der einen Familie größer ist als die der anderen

$$\|x_i - x_j\| \le \|y_i - y_j\| \qquad i,j = 1,\dots,N$$

Dann ist das Volumen vom Schnitt der einen Familie größer als das der anderen

$$\mathrm{vol}_n \left(\bigcap_{i=1}^N B_2^n(y_i, r_i) \right) \le \mathrm{vol}_n \left(\bigcap_{i=1}^N B_2^n(x_i, r_i) \right)$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass aus den Voraussetzungen folgt, dass für alle $i = 1,\dots,n$

$$\int_\Omega |f_i|^2 d\mathbb{P} \le \int_\Omega |g_i|^2 d\mathbb{P} \tag{8.16}$$

g sei eine zentrierte, normalverteilte Z.V., $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int |g|^2 d\mathbb{P} = 1$, die von allen $f_i, g_i, i = 0,\dots,n$ unabhängig sei. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= f_i + Cg \\ \tilde{g}_i &= g_i + \left(C^2 + \int f_i \, d\mathbb{P} - \int g_i \, d\mathbb{P} \right)^{1/2} g \qquad i = 0,1,2,\dots,n \end{aligned}$$

wobei $C^2 = \sup_j \int |g_j|^2 \, d\mathbb{P}$.

Wir prüfen zunächst nach, daß für $\tilde{f}_i$ und $\tilde{g}_i$, $i = 1, \ldots, n$ die Voraussetzungen von Lemma **??** erfüllt sind. Da g von allen f_i unabhängig ist, folgt

$$\int_\Omega \tilde{f}_i^{\,2} \, d\mathbb{P} = \int f_i^2 + 2\, f_i C g + C^2 g^2 d\mathbb{P} = \int f_i^2 + C^2 g^2 d\mathbb{P}$$

$$\begin{aligned} \int \tilde{g}_i^{\,2} \, d\mathbb{P} \quad &= \int_\Omega g_i^2 + 2 g_i g \left(C^2 + \int_\Omega f_i^2 d\mathbb{P} - \int_\Omega g_i^2 d\mathbb{P} \right) \\ &+ \left(C^2 + \int_\Omega f_i^2 d\mathbb{P} - \int_\Omega g_i^2 d\mathbb{P} \right) g^2 d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Da g von allen g_i unabhängig ist, folgt

$$\int_\Omega \tilde{g}_i^{\,2} \, d\mathbb{P} = \int_\Omega g_i^2 + \left(C^2 + \int f_i^2 d\mathbb{P} - \int_\Omega g_i^2 d\mathbb{P} \right) g^2 d\mathbb{P}$$

Wegen $\int g_i^2 d\mathbb{P} = 1$

$$\int_\Omega \tilde{g}_i^{\,2} \, d\mathbb{P} = \int_\Omega g_i^2 d\mathbb{P} + C^2 + \int_\Omega f_i^2 d\mathbb{P} - \int_\Omega g_i^2 d\mathbb{P} = C^2 + \int_\Omega f_i^2 d\mathbb{P}$$

Also folgt

$$\int_\Omega \tilde{f}_i^2 d\mathbb{P} = \int_\Omega \tilde{g}_i^2 d\mathbb{P}$$

Analog folgt

$$\int_\Omega |\tilde{f}_i - \tilde{f}_k|^2 \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |\tilde{g}_i - \tilde{g}_k|^2 \, d\mathbb{P}$$

Aus diesen beiden Abschätzungen folgt

$$\int_\Omega \tilde{g}_i \tilde{g}_k \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \tilde{f}_i \tilde{f}_k \, d\mathbb{P}$$

Nun wenden wir Lemma 158 an:

$$\int_\Omega \sup_i \tilde{f}_i \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \sup_i \tilde{g}_i \, d\mathbb{P}$$

Wir müssen also noch zeigen, daß

$$\int_\Omega \sup_i f_i \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \sup_i \tilde{f}_i \, d\mathbb{P} \qquad \text{und} \qquad \int_\Omega \sup_i \tilde{g}_i \, d\mathbb{P} \leq 2 \int_\Omega \sup_i g_i \, d\mathbb{P}$$

Die erste Ungleichung ist offensichtlich. Wir benutzen $\int_\Omega g d\mathbb{P} = 0$.

$$\int_\Omega \sup_i \tilde{f}_i \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \sup_i (f_i + Cg) d\mathbb{P} = \int_\Omega (\sup_i f_i) + Cg \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \sup_i f_i \, d\mathbb{P}$$

Wir weisen nun die zweite Ungleichung nach. Wegen (8.16) gilt $\int_\Omega |f_i|^2 d\mathbb{P} - \int_\Omega |g_i|^2 d\mathbb{P} \leq 0$. Außerdem gilt für alle $i = 1, \ldots, n$ die Ungleichung $C^2 \geq \int_\Omega |g_i|^2 d\mathbb{P}$. Deshalb

$$\tilde{g}_i = g_i + \left(C^2 + \int_\Omega f_i^2 d\mathbb{P} - \int_\Omega g_i^2 d\mathbb{P} \right)^{1/2} g \leq g_i + Cg \leq g_i + Cg^+$$

wobei

$$g^+ = \begin{cases} g & g \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es reicht daher zu zeigen, dass

$$C \int_\Omega |g^+| d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \sup_i g_i \, d\mathbb{P}$$

Weil für alle Gaußverteilten Zufallsveränderlichen f gilt: $\int |f| = \int |g| (\int |f|^2)^{1/2}$, wobei $\int |g|^2 = 1$, folgt

$$\begin{aligned} C \int_\Omega |g^+| d\mathbb{P} \quad &= \frac{1}{2} C \int_\Omega |g| d\mathbb{P} = \sup_i \left(\int_\Omega |g_i|^2 d\mathbb{P} \right)^{1/2} \cdot \int_\Omega |g| d\mathbb{P} \\ &= \sup_i \int_\Omega |g_i| d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \sup_i |g_i| d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Weil $\sup_i |g_i| \leq \sup_i g_i + \sup_i (-g_i)$ und weil die g_i symmetrisch sind

$$C \int_\Omega |g^+| d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \sup_i g_i + \sup_i (-g_i) d\mathbb{P} = 2 \int_\Omega \sup_i g_i \, d\mathbb{P}$$

□

8.10 Satz von Chevet

Wir schätzen hier den Erwartungswert der Norm eines Operators ab, bei dem die Koordinaten der darstellenden Matrix normalverteilte oder Bernoulliverteilte Zufallsveränderliche sind.

Es seien X und Y Banachräume und $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ und $y_i,\ j = 1, \ldots, m$ Folgen in den Räumen X und Y. Dann ist $\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} x_i \otimes y_j$ ein Operator von X^* nach Y

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} x_i \otimes y_j \right)(x^*) = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} x^*(x_i) y_j \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

Die Operatornorm ist

$$\left\| \sum_{i,j=1} a_{i,j} x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon = \sup_{\substack{\|x^*\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \left| \sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} x^*(x_i) y^*(y_j) \right|$$

Satz 61 *(Chevet) Es seien X und Y Banachräume. Es seien $g_{i,j},\ g_i,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ m \leq n$ unabhängige, normalisierte zentrierte Gaußfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle endlichen Folgen $\{x_i\}_{i=1}^n$ und $\{y_j\}_{j=1}^m$ aus X bzw. Y*

$$\frac{\Lambda}{2} \leq \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j}(\omega) x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon d\mathbb{P}(\omega) \leq 2\sqrt{2}\,\Lambda$$

wobei

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(\sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} \right) \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^m g_i y_i \right\|_Y d\mathbb{P} \\ &+ \left(\sup_{\|y^*\|=1} \left(\sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|^2 \right)^{1/2} \right) \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_X d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die linke Abschätzung. Sie ist einfach nachzuweisen und folgt im Wesentlichen aus der Dreiecksungleichung.

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j}(\omega) x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon d\mathbb{P}(\omega)$$
$$\geq \sup_{\|y^*\|=1} \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j}(\omega) y^*(y_j) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\omega)$$

$\sum_{j=1}^m y^*(y_j) g_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$ sind unabhängige, Gaußverteilte Zufallsveränderliche. Da die $g_{i,j}$ normalisiert sind, gilt

$$\int_\Omega \left| \sum_{j=1}^m y^*(y_j) g_{i,j} \right|^2 d\mathbb{P} = \sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|^2$$

Also können wir $\sum_{j=1}^m y^*(y_j) g_{i,j}$ durch $\left(\sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|^2\right)^{1/2} g_i$ ersetzen.

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j}(\omega) x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon d\mathbb{P}(\omega)$$
$$\geq \sup_{\|y^*\|=1} \left(\sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|^2 \right)^{1/2} \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\omega)$$

Wir weisen nun die rechte Ungleichung nach. Hierbei wenden wir das Lemma von Sudakov-Fernique (Lemma 160) an. O.E.d.A. können wir annehmen, dass X, Y endlich-dimensional sind und daß die Einheitskugeln in X^*, Y^* nur endlich viele Extremalpunkte haben. (Wir betrachten ja nur die Teilräume in X und Y, die von den Folgen, x_i, $i = 1, \ldots, n$, und y_j, $j = 1, \ldots, m$, aufgespannt werden.) Es sei

$$M = \{(x^*, y^*) \mid x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*}),\ y^* \in \operatorname{ext}(B_{Y^*})\} \cup \{(0,0)\}$$

und

$$F_{x^*,y^*}(\omega) = \sum_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j}(\omega) x^*(x_i) y^*(y_j)$$

$$F_{0,0}(\omega) = 0$$

$$G_{x^*,y^*}(\omega) = \sqrt{2} \left\{ \sup_{\|\xi^*\|=1} \left(\sum_1^n |\xi^*(x_j)|^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^m h_j(\omega) y^*(y_j) \right.$$

$$\left. + \sup_{\|\eta^*\|=1} \left(\sum_1^m |\eta^*(y_j)|^2 \right)^{1/2} \sum_{i=1}^n g_i(\omega) x^*(x_i) \right\}$$

$$G_{0,0}(\omega) = 0$$

wobei g_i, h_j sämtlich unabhängige, zentrierte, normalisierte Gaußvariablen sind. Wir stellen nun fest:

(i) $F : \Omega \to \mathbb{R}^{\#M}$, $F = (F_{x^*,y^*})_{(x^*,y^*)\in M}$, ist eine Gaußfunktion.

(ii) $G : \Omega \to \mathbb{R}^{\#M}$, $F = (F_{x^*,y^*})_{(x^*,y^*)\in M}$, ist eine Gaußfunktion.

(iii) F und G erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas 160.

Wir weisen (i) nach. Für alle reelle Zahlen a_{x^*,y^*}, $(x^*, y^*) \in M$ gilt

$$\sum_{(x^*,y^*)\in M} a_{x^*,y^*} F_{x^*,y^*} = \sum_{i,j=1}^{n,m} \left(\sum_{(x^*,y^*)\in M} a_{x^*,y^*} x^*(x_i) y^*(y_j) \right) g_{i,j}$$

Da $g_{i,j}$ unabhängig sind, ist die Summe wieder Gaußverteilt und damit ist F ein Gaußvektor. Ebenso zeigt man, dass G ein Gaußvektor ist.

Wir weisen nun (iii) nach. Wir müssen also zeigen, dass

$$\int_\Omega |F_{x^*,y^*} - F_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P} \le \int_\Omega |G_{x^*,y^*} - G_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P}$$

Wir zeigen dies.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |G_{x^*,y^*} - G_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P} \\
&= 2\int_\Omega \left| \left(\sup_{\|\xi^*\|=1} \sum_1^n |\xi^*(x_j)|^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^m h_j(w)(y^* - \tilde{y^*})(y_j) \right. \\
&\qquad \left. + \sup_{\|\eta^*\|=1} \left(\sum_1^m |\eta^*(y_j)|^2 \right)^{1/2} \sum_{i=1}^n g_i(w)(x^* - \tilde{x}^*)(x_i) \right|^2 d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der g_i und h_j folgt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |G_{x^*,y^*} - G_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P} \\
&\qquad = 2\left\{ \sum_{j=1}^m |(y^* - \tilde{y^*})(y_j)|^2 \sup_{\|\xi^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\xi^*(x_j)|^2 \right) \right. \\
&\qquad\quad \left. + \sum_{i=1}^n |(x^* - \tilde{x}^*)(x_i)|^2 \sup_{\|\eta^*\|=1} \left(\sum_{j=1}^m |\eta^*(y_j)|^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

wähle $\xi^* = x^*,\ \eta^* = \tilde{y}^*$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |G_{x^*,y^*} - G_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P} \\
&\geq \sqrt{2}\left\{ \sum_{ij=1}^{n,m} |x^*(x_i)(y^* - \tilde{y^*})(y_j)|^2 + \sum_{ij=1}^{n,m} |\tilde{y}^*(y_j)(x^* - \tilde{x^*})(x_i)|^2 \right\}
\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{2}(a^2+b^2)^{1/2} \geq |a+b|$ bzw. $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}|a+b|^2$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |G_{x^*,y^*} - G_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P} \\
&\geq \sum_{ij=1}^{n,m} |x^*(x_i)y^*(y_j) - \tilde{x}^*(x_i)\tilde{y}^*(y_j)|^2 \\
&= \int_\Omega \left| \sum_{ij=1}^{n,m} g_{ij}(\omega)(x^*(x_i)y^*(y_j) - \tilde{x}^*(x_i)\tilde{y}^*(y_j) \right|^2 d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega |F_{x^*,y^*} - F_{\tilde{x}^*,\tilde{y}^*}|^2 d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Mit Lemma 160 folgt

$$\int \sup_{x^*,y^*} F_{x^*,y^*}(\omega)d\mathbb{P} \leq 2\int \sup_{x^*,y^*} G_{x^*,y^*}(\omega)d\mathbb{P}$$

Dies ist aber genau die rechte Ungleichung. □

Korollar 24 *Es sei e_i, $i = 1,\ldots,n$, die Einheitsvektorbasis in ℓ_p^n und f_i, $i = 1,\ldots,n$, die Einheitsvektorbasis in ℓ_r^n. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\} &\leq \int_\Omega \left\|\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(\omega)e_i^* \otimes f_j\right\|_{L(\ell_p^n,\ell_r^n)} d\mathbb{P}(\omega)\\ &\leq C\sqrt{\max\{r,p^*\}}\max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\}\end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen den Satz von Chevet.

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left(\sup_{\|x\|_p=1}\left(\sum_{i=1}^n |e_i^*(x)|^2\right)^{1/2}\right)\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i f_i\right\|_r d\mathbb{P}\\ &+ \left(\sup_{\|y^*\|_{r^*}=1}\left(\sum_{j=1}^n |y^*(f_j)|^2\right)^{1/2}\right)\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i e_i^*\right\|_{p^*} d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left(\sup_{\|x\|_p=1}\|x\|_2\right)\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |g_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} d\mathbb{P}\\ &+ \left(\sup_{\|y^*\|_{r^*}=1}\|y^*\|_2\right)\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |g_i|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} d\mathbb{P}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda &= \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |g_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} d\mathbb{P}\\ &+ \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r^*}}\}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |g_i|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Wir wenden nun die stetige Dreiecksungleichung an.

$$\begin{aligned}\Lambda &\geq \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\int_\Omega |g_i| d\mathbb{P}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &+ \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r^*}}\}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\int_\Omega |g_i| d\mathbb{P}\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g_i| d\mathbb{P} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\Lambda &\geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}n^{\frac{1}{r}} + \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r^*}}\}n^{\frac{1}{p^*}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\}\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\Lambda &\leq \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\}\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}|g_i|^r d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad + \max\{1, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r^*}}\}\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}|g_i|^{p^*} d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}\}\left[\left(\int_\Omega |g_1|^r d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_\Omega |g_1|^{p^*} d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p^*}}\right]\end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_\Omega |g_1|^r d\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^r e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty t^r e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Wir substituieren $s = t^2/2$

$$\int_\Omega |g_1|^r d\mathbb{P} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{r+1}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{r+1}{2}} e^{-s} ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)$$

Hieraus folgt

$$\Lambda \leq \max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}\} \left[\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{p^*+1}{2}} \Gamma\left(\frac{p^*+3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}} \right]$$

Die Stirling Formel liefert

$$\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{r+3}{2}} \left(\frac{r+3}{2}\right)^{\frac{r+3}{2}}$$

□

Lemma 161 *Es seien X und Y Banachräume und x_i, $i = 1, \ldots, n$, und y_j, $j = 1, \ldots, m$ unbedingte Basen von X und Y. Es seien $r_{i,j}$ Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{i,j}(\omega) x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon d\mathbb{P}(\omega) \quad &\geq \quad \left(\sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} \right) \left\| \sum_{i=1}^m y_i \right\|_Y \\ &+ \quad \left(\sup_{\|y^*\|=1} \left(\sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|^2 \right)^{1/2} \right) \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_X \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{i,j}(\omega) x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon d\mathbb{P}(\omega) \\ &\qquad \geq \sup_{\|y^*\|=1} \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{i,j}(\omega) y^*(y_j) x_i \right\|_X d\mathbb{P}(\omega) \\ &\qquad \geq \sup_{\|y^*\|=1} \left\| \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^m r_{i,j}(\omega) y^*(y_j) \right| d\mathbb{P}(\omega) x_i \right\|_X \end{aligned}$$

Mit der Khintchine Ungleichung folgt

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{i,j}(\omega) x_i \otimes y_j \right\|_\varepsilon d\mathbb{P}(\omega)$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{\|y^*\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} |y^*(y_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} x_i \right\|_X$$

□

Korollar 25 *Es sei e_i, $i = 1, \ldots, n$, die Einheitsvektorbasis in ℓ_p^n und f_i, $i = 1, \ldots, n$, die Einheitsvektorbasis in ℓ_r^n. Außerdem seien $r_{i,j}$ Bernoulli-verteilte Zufallsveränderliche. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} \max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\} \quad &\leq \min_{\omega\in\Omega} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} r_{i,j}(\omega) e_i^* \otimes f_j \right\|_{L(\ell_p^n, \ell_r^n)} \\
&\leq \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} r_{i,j}(\omega) e_i^* \otimes f_j \right\|_{L(\ell_p^n, \ell_r^n)} d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq C\sqrt{\max\{r, p^*\}} \max\{n^{\frac{1}{r}}, n^{\frac{1}{p^*}}, n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Mittelwert über alle ± 1-Matrizen von derselben Größenordnung wie das Minimum ist.

Man vergleiche dies mit unserer Abschätzung für die Normen der Walsh-matrizen. Diese Normen liegen also auch beim Minimum.

Beweis. Wir zeigen die Abschätzung nach oben. Nach Satz 157 gilt

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} r_{i,j}(\omega) e_i^* \otimes f_j \right\|_{L(\ell_p^n, \ell_r^n)} d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(\omega) e_i^* \otimes f_j \right\|_{L(\ell_p^n, \ell_r^n)} d\mathbb{P}(\omega)$$

Nun wenden wir Korollar 24 an.

Wir weisen nun die Abschätzung nach unten nach.

$$\|\epsilon\|_{L(\ell_p^n, \ell_r^n)} \geq \|\epsilon(e_1)\|_r = n^{\frac{1}{r}}$$

$$\|\epsilon\|_{L(\ell_p^n,\ell_r^n)} = \left\|\epsilon^t\right\|_{L(\ell_{r^*}^n,\ell_{p^*}^n)} \geq \left\|\epsilon^t(e_1)\right\|_{p^*} = n^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\begin{aligned}
\|\epsilon\|_{L(\ell_p^n,\ell_r^n)} &\geq n^{-\frac{1}{p}} \max_{\delta} \|\epsilon(\delta_1,\ldots,\delta_n)\|_r \\
&\geq n^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{2^n} \sum_{\delta} \|\epsilon(\delta_1,\ldots,\delta_n)\|_r \\
&\geq n^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{2^n} \sum_{\delta} \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n \epsilon_{i,j}\delta_j \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\geq n^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{2^n} \sum_{\delta} \left| \sum_{j=1}^n \epsilon_{i,j}\delta_j \right| \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

Mit der Khintchine-Ungleichung folgt

$$\|\epsilon\|_{L(\ell_p^n,\ell_r^n)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |\delta_j|^2 \right)^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$$

□

Bemerkung 2 *In [CMP] wurde gezeigt, dass für alle* $0 < q < \infty$

$$\left(\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{i,j} e_i^* \otimes f_j \right\|_{L(\ell_2^m,\ell_r^n)}^q d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{q}} \leq K(q,r) \max\{m^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{r}}\}$$

gilt, wobei e_i, $i = 1,\ldots,m$, *die Einheitsvekoren in* ℓ_2^m *und* f_j, $j = 1,\ldots,n$, *die Einheitsvektoren in* ℓ_r^n *sind.*

8.11 Das Volumen von Einheitskugeln

Wir sagen, dass eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ eines n-dimensionalen normierten Raumes X symmetrisch ist, falls für alle Permutationen σ und alle Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i a_{\sigma(i)} x_i \right\|$$

gilt.

Es seien x_i^*, $i = 1, \ldots, n$, die biorthogonalen Funktionale zu x_i, $i = 1, \ldots, n$. Sie sind durch $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$ gegeben. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass x_i^*, $i = 1, \ldots, n$, eine symmetrische Basis von X^* ist.

In einem solchen Fall kann man das Volumen der Einheitskugel $\{a \in \mathbb{R}^n | \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \| \leq 1\}$ von unten leicht dadurch abschätzen, indem man feststellt, dass ein Würfel der Kantenlänge $2/\| \sum_{i=1}^n x_i \|$ in $\{a \in \mathbb{R}^n | \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \| \leq 1\}$ enthalten ist.

$$\frac{2}{\| \sum_{i=1}^n x_i \|} B_\infty^n \subseteq \left\{ a \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq 1 \right\}$$

Falls keine unbedingte Basis vorliegt, so ist dies schwerer. Man kann jedoch das Mittel über alle Vorzeichen benutzen.

$$2^n \left(\frac{1}{2^n} \sum_\epsilon \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| \right)^{-n} \leq \mathrm{vol} \left\{ a \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq 1 \right\}$$

Satz 62 *Es sei X ein n-dimensionaler Banachraum und $x_1, \ldots, x_n$ eine symmetrische Basis von X. Dann gilt*

$$2^n \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^{-n} \leq vol_n \left\{ a \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq 1 \right\} \leq (2e)^n \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^{-n}$$

Für die Einheitskugeln B_p^n von ℓ_p^n erhalten wir

$$2^n n^{-\frac{n}{p}} \leq \mathrm{vol}_n(B_p^n) \leq (2e)^n n^{-\frac{n}{p}}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_i| &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|x_i\right)\\ &\le \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n}|a_i|x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle a und b mit $|a_i| \le |b_i|$, $i = 1, \dots, n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right\|$$

Offensichtlich reicht es, dies für den Fall $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, 0 \le a_n < b_n$ zu zeigen. Dazu wählen wir t mit $0 < t < 1$ und $a_n = tb_n - (1-t)b_n$, bzw. $t = (a_n + b_n)/(2b_n)$. Dann gilt

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right\| = t\left\|\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right\| + (1-t)\left\|\sum_{i=1}^{n-1}b_ix_i - b_nx_n\right\| \ge \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|$$

Nun wollen wir noch

$$n = \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right\|$$

zeigen. Es gilt

$$n = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \le \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein Funktional $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^*$ mit $\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^*\| = 1$ und

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}a_i$$

Da x_i^*, $i = 1, \dots, n$ eine symmetrische Basis von X^* ist, gilt für alle Permutationen σ

$$1 = \left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^*\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)}x_i^*\right\|$$

Somit

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}x_i^*\right\| \\ &\geq \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma} a_{\sigma(i)}\right)x_i^*\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)x_i^*\right\| \end{aligned}$$

Es folgt weiter

$$n \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|$$

Hieraus folgt

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right\|^{-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \max\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|$$

oder äquivalent

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^{-1} B_\infty^n \subseteq \left\{a \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq 1\right\} \subseteq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right\| B_1^n$$

Diese Inklusionen lassen sich benutzen, um das Volumen von B_X abzuschätzen. Mit der Formel von Stirling $\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} < n!$

$$\begin{aligned} 2^n\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^{-n} &\leq \mathrm{vol}_n\left\{a \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq 1\right\} \\ &\leq \frac{2^n}{n!}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right\|^n \leq (2e)^n\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^{-n} \end{aligned}$$

□

Dies ist ein einfaches und effektives Verfahren, das Volumen einer Einheitskugel eines normierten Raumes abzuschätzen. Leichte Modifikationen lassen diese Methode auch auf Räume anwenden, in denen eine unbedingte Basis vorhanden ist, d.h. wenn für alle a_i und Vorzeichen ϵ_i

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i e_i\right\|$$

In Räumen, wo keine solche Basis vorliegt, ist dies viel schwieriger. Beispiele solcher Räume sind Operatorenräume.

Frage Es sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ ausgestattet mit dem Lebesguemaß. Es seien X und Y Banachräume und x_i, $i = 1, \ldots, n$, und y_j, $j = 1, \ldots, m$ unbedingte Basen von X und Y. Gilt dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}_{n^2}(B_{X\otimes_\epsilon Y}) \\
&\quad \sim 2^{\frac{nm}{2}} \left(\sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} \left\| \sum_{i=1}^m y_i \right\|_Y \right. \\
&\qquad \left. + \sup_{\|y^*\|=1} \left(\sum_{j=1}^m |y^*(y_j)|^2 \right)^{1/2} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_X \right)^{-nm}
\end{aligned}$$

Satz 63 *Es sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ ausgestattet mit dem Lebesguemaß. $B_{p,q}$ sei die Einheitskugel von $l_n^p \otimes_\varepsilon l_n^q$. Dann gilt*

$$\left(\frac{C}{\sqrt{\max\{p,q\}} n^{\beta(p,q)}} \right)^{n^2} \leq \mathrm{vol}_{n^2}\ (B_{p,q}) \leq \left(\frac{e\sqrt{2}}{n^{\beta(p,q)}} \right)^{n^2}$$

wobei

$$\beta(p,q) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} & \textit{falls } 1 \leq q \leq p \leq 2 \\ \dfrac{1}{q} & \textit{falls } 1 \leq q \leq p \textit{ und } p \geq 2 \end{cases}$$

Das Oberflächenmaß ν auf ∂B_2^n kann man sich auf verschiedene Weisen verschaffen. Man kann es als die Einschränkung des $n-1$-dimensionalen Hausdorff-Maßes definieren. Eine weitere Möglichkeit ist

$$\nu(A) = n\lambda_n([0, A])$$

oder wir können es als Bildmaß der Abbildung $\Phi : [0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to$

$\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos\phi_1 \\
\xi_2 &= \sin\phi_1\cos\phi_2 \\
\xi_3 &= \sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 \\
&\vdots \\
\xi_{n-1} &= \sin\phi_1\ldots\sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1} \\
\xi_n &= \sin\phi_1\ldots\sin\phi_{n-2}\sin\phi_{n-1}
\end{aligned}$$

Für alle messbaren Mengen A in ∂B_2^n und alle Isometrien T vom $\mathbb{R}^n$ gilt $\nu(A) = \nu(T(A))$. Hieraus ergibt sich

$$\int_{\partial B_2^{n-1}} f(\xi)d\nu(\xi) = \int_{\partial B_2^{n-1}} f(T(\xi))d\nu(\xi)$$

Lemma 162 *Es sei μ das normalisierte Oberflächenmaß auf S^{n-1} und $\|\ \|$ sei eine Norm im $\mathbb{R}^n$ und B deren Einheitskugel. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)\int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n}d\mu$$

wobei B_2^n die Euklidische Einheitskugel ist, $\mathrm{vol}_n(B_2^n) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

Beweis. Es gilt

$$B = \{x|\|x\| \le 1\} = \left\{x \,\middle|\, \|x\|_2 \le \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|^{-1}\right\}$$

Wir integrieren nun bzgl. Polarkoordinaten

$$g : [0,R]\times[0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^n$$
$$g(r,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}) = x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi_1 \\
x_2 &= r\sin\phi_1\cos\phi_2 \\
x_3 &= r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\phi_1\ldots\sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1} \\
x_n &= r\sin\phi_1\ldots\sin\phi_{n-2}\sin\phi_{n-1}
\end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$\int_B d\lambda_n(x) = \int_I \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})} \right| d(r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$$

Damit ist das Volumen gleich

$$\begin{aligned} &\int_I \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})} \right| d(r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}) \\ &\quad = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\|\xi\|^{-1}} r^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \cdots \sin \phi_{n-2} dr d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \phi_1 \\ \xi_2 &= \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ \xi_3 &= \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ &\vdots \\ \xi_{n-1} &= \sin \phi_1 \ldots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1} \\ \xi_n &= \sin \phi_1 \ldots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1} \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\int_B d\lambda_n(x) \quad = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \|\xi\|^{-n} \sin^{n-2} \phi_1 \cdots \sin \phi_{n-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1}$$

□

Lemma 163 *Es seien T_i, $i = 1, \ldots, N$ Isometrien des n-dimensionalen Euklidischen Raumes und $\| \ \|$ eine Norm mit Einheitskugel B. Außerdem sei*

$$\|x\|_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \|T_i(x)\|$$

und B_T sei die Einheitskugel dieser Norm. Dann gilt

$$\mathrm{vol}_n(B_T) \leq \mathrm{vol}_n(B)$$

Beweis. Nach Lemma **??** gilt

$$\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(B_2^n) \int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n} d\mu$$

Da T_i eine Isometrie und μ das Oberflächenmaß ist, folgt weiter

$$\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(B_2^n) \int_{S^{n-1}} \|T_i(x)\|^{-n} d\mu$$

Deshalb folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(B)^{1/n} &= \mathrm{vol}_n(B_2^n)^{1/n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{S^{n-1}} \|T_i(x)\|^{-n} d\mu \right)^{1/n} \\ &\geq \mathrm{vol}_n(B_2^n)^{1/n} \left(\int_{S^{n-1}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \|T_i(x)\|^{-1} \right|^n d\mu \right)^{1/n} \end{aligned}$$

Für positive Folgen $a_1, \ldots, a_N$ gilt

$$N^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{-1} \right)$$

Also

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(B)^{1/n} &= \mathrm{vol}_n(B_2^n)^{1/n} \left(\int_{S^{n-1}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \|T_i(x)\| \right|^{-n} d\mu \right)^{1/n} \\ &= \mathrm{vol}_n(B_T)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

□

Lemma 164 *Es sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ die Einheitsvektorbasis im $\mathbb{R}^n$ und B die Einheitskugel einer Norm $\| \ \|$ mit $\|e_i\| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt*

$$2^n \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i \right\| \right)^{-n} \leq \mathrm{vol}_n(B)$$

Beweis. Zu jeder Vorzeichenwahl $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ wählen wir $T_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$T_\varepsilon\left((a_i)_{i=1}^n\right) = (\varepsilon_i a_i)_{i=1}^n$$

als Isometrien. Mit Lemma 163 folgt dann

$$\mathrm{vol}_n(B_T) \leq \mathrm{vol}_n(B)$$

Andererseits ist B_T die Einheitskugel einer 1-unbedingten Norm. Deshalb gilt

$$B_T \supset \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|_{B_T}^{-1} B_{l_n^\infty}$$

Also

$$\mathrm{vol}_n(B_T) \geq \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|_{B_T}^{-n} \mathrm{vol}_n(B_{l_n^\infty}) = 2^n \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|_{B_T}^{-n}$$

□

Lemma 165 *Für alle $n \times n$-Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ gilt*

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}| \leq \sqrt{2}\, n^{1/p^*+1/q^*+1/2} \|A\|_{l_p^n \otimes_\varepsilon l_q^n} \qquad \textit{falls } 1 \leq q \leq p \leq 2$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}| \leq n^{1/q^*+1} \|A\|_{l_p^n \otimes_\varepsilon l_q^n} \qquad \textit{falls } 1 \leq q \leq p \textit{ und } 2 \leq p$$

Beweis. Es seien $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ und $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ Vektoren, deren Koordinaten 1 oder -1 sind.

$$\begin{aligned}
\max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right| &= \max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \max_{\delta,\epsilon} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \epsilon_i x_i \delta_j y_j \right| \\
&= \max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \max_{\delta} \sum_{i=1}^n |x_i| \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \delta_j y_j \right| \\
&\geq \max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \sum_{i=1}^n |x_i| 2^{-n} \sum_{\delta} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \delta_j y_j \right|
\end{aligned}$$

Mit der Khintchine Ungleichung folgt

$$\max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} y_j|^2 \right)^{1/2}$$

Wir wählen $x = n^{-\frac{1}{p^*}}(1, \ldots, 1)$ und $y = n^{-\frac{1}{q^*}}(1, \ldots, 1)$

$$\begin{aligned} \max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-1/p^*-1/q^*} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-1/p^*-1/q^*-1/2} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \end{aligned}$$

Wir wählen $x = (\pm 1, \ldots, \pm 1)$ und $y = e_i$

$$\max_{\|x\|_{p^*}=\|y\|_{q^*}=1} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right| \geq n^{-1/q^*} \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \geq n^{-1/q^*-1} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

□

Beweis von Satz ?? Die rechte Ungleichung ist eine einfache Konsequenz von Lemma 165. Weil

$$\begin{aligned} B_{p,q} &\subset \sqrt{2}\, n^{1/p^*+1/q^*+1/2} B_{l^1_{n^2}} && 1 \leq q \leq p \leq 2 \\ B_{p,q} &\subset n^{1/q^*+1} B_{l^1_{n^2}} && 1 \leq q \leq p \text{ und } p \geq 2 \end{aligned}$$

folgt für $1 \leq q \leq p \leq 2$

$$\mathrm{vol}_{n^2}(B_{p,q}) \leq \left(\sqrt{2}\, n^{1/p^*+1/q^*+1/2} \right)^{n^2} \cdot 2^{n^2} \cdot \frac{1}{(n^2)!} \leq \left(\frac{\sqrt{2} e}{n^{1/p+1/q-1/2}} \right)^{n^2}$$

und für $1 \leq q \leq p$ und $p \geq 2$

$$\mathrm{vol}_{n^2}(B_{p,q}) \leq \left(n^{1+1/q^*} \right)^{n^2} \frac{2^{n^2}}{(n^2)!} \leq \left(\frac{e}{n^{1/q}} \right)^{n^2}$$

Die linke (nicht triviale) Ungleichung folgt aus Lemma 25 und Lemma **??**:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_{n^2}(B_{p,q}) &\geq 2^{n^2}\left(\operatorname*{Ave}_{\pm}\left\|\sum_{i,j=1}^{n} \pm e_i \otimes f_j\right\|\right)^{-n^2} \\
&\geq 2^{n^2}\left(C\sqrt{\max\{p,q\}}\max\{n^{\frac{1}{q}}, n^{\frac{1}{p}}, n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\}\right)^{-n^2}
\end{aligned}$$

□