Mitschrift zur Vorlesung

Versicherungsmathematik

von Jürgen Behne

im Wintersemester 1997/98, Sommersemester 1998

Martin R. Elsner
$\mu_\rho \varepsilon$

4. Januar 1999

Inhaltsverzeichnis

A Lebensversicherung **5**

I Der Zins als erste Rechnungsgrundlage **7**
1 Zins und Zinseszins 7
1.1 Zins 7
1.2 Zinseszins 7
2 Zeitrenten 9

II Die Sterblichkeit als zweite Rechnungsgrundlage **11**
1 Sterbetafeln 11
2 Die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten 11
3 Andere Ausscheideordnungen 12

III Barwerte der Erlebensfallversicherung **13**
1 Kommutationswerte 13
2 Die reine Erlebensfallversicherung 13
3 Jährliche Leibrenten 14
3.1 Sofort beginnende lebenslängliche Leibrente 14
3.2 Aufgeschobene lebenslängliche Leibrente 15
3.3 Temporäre sofort beginnende Leibrente 16
3.4 Aufgeschobene temporäre Leibrente 16
3.5 Dynamische Rente 16

IV Barwerte der Kapitalversicherung **17**
1 Vorbemerkung 17
2 Die reine Todesfallversicherung 17
2.1 Lebenslänglich, sofort beginnend 17
2.2 Aufgeschobene Todesfallversicherung 18
2.3 Temporäre Todesfallversicherung 18
2.4 Die gemischte Versicherung 18

V Nettoprämien **19**
1 Vorbemerkung 19
2 Jahresprämien 19
2.1 Erlebensfallversicherung 19
2.2 Altersrente 19

2.3 Lebenslängliche Todesfallversicherung 19
2.4 Gemischte Versicherung 20
2.5 A-term-fix-Versicherung 20
2.6 Prämienrückgewähr 20

VI Das Nettodeckungskapital **22**
1 Definition 22
2 Beispiele 23
2.1 Reine Erlebensfallversicherung 23
2.2 Altersrente 23
2.3 Gemischte Versicherung 23
2.4 A-Term-Fix-Versicherung 23
2.5 Rekursionsformel (gemischte Versicherung) 24
3 Spar- und Risikoprämie 24
3.1 Gemischte Versicherung 24
3.2 Erlebensfallversicherung 25
4 Rückkaufswert 25

VII Die Kosten als dritte Rechnungsgrundlage **26**
1 Die verschiedenen Kostenarten 26
2 Ausreichende Jahresprämien (Bruttoprämien) 27
2.1 Lebenslängliche Todesfallversicherung 27
2.2 Gemischte Versicherung 28
3 Die Bruttodeckungsrückstellung 28
3.1 Lebenslängliche Todesfallversicherung 28
3.2 Gemischte Versicherung 29
4 Zillmersche Nettoprämie 29

VIII Vertragsänderungen **31**
1 Umwandlung einer gemischten Versicherung in eine prämienfreie gemischte Versicherung 31
2 Erhöhung der Versicherungssumme ohne Nachzahlung (gemischte Versicherung) . 31
3 Zuzahlung zur Abkürzung der Versicherungsdauer bei gleichbleibenden Prämien (gemischte Versicherung) 32

Einführung

Eine **Versicherung** ist eine auf Gegenseitigkeit beruhende wirtschaftliche Einrichtung zur Deckung eines zufällig auftretenden, schätzbaren Vermögensbedarfes unter Verteilung auf eine größere Personenzahl.

Gegenseitigkeit Grundgedanke der Versicherung ist das **Äquivalenzprinzip**:

Leistung=Gegenleistung

d.h. die Summe der Prämien aller Versicherten ist gleich der Summe sämtlicher Versicherungsleistungen. Dabei gilt diese Äquivalenz für jede Person gesehen mit der Wahrscheinlichkeit 0.
Zu unterscheiden ist dabei das individuelle Äquivalenzprinzip (private Versicherungen), bei dem die Einzelprämie vom persönlichen Risiko abhängig gemacht wird, und das Solidaritätsprinzip (gesetzliche Versicherungen), bei dem die Prämie nur von der Summe der Versicherungsleistungen und den persönlichen Verhältnissen[1] des Versicherten bestimmt wird.

zufällig Jeder Versicherung liegt ein Risiko zugrunde. Dieses Risiko besteht je nach Versicherungstyp in einer Unsicherheit in Bezug auf die Prämienzahlungsdauer, die Höhe, den Zeitpunkt oder die Dauer der Versicherungsleistung. Statistiken liefern hierfür Schätzwerte.

größere Personenzahl Das Risiko für den Einzelnen ist niemals abschätzbar. Erst in einer Gruppe von Personen lassen sich mit Hilfe der Statistik Erwartungswerte schätzen. Eine große Zahl risikohomogener Personen ermöglicht einen Ausgleich, der ein permanentes (annäherndes) Gleichgewicht zulässt.

Die Versicherungsmathematik hat nun die Aufgabe, Verfahren zur Berechnung der Höhe der Versicherungsleistung und damit der Prämien in der Zukunft zur Verfügung zu stellen. Hierbei müssen Daten der Vergangenheit (in Form von Statistiken, Sterbetafeln u.s.w.) ausgewertet und zur Schätzung der zukünftigen Entwicklungen benutzt werden.

[1] Einkommen, Familienstand...

Teil A

Lebensversicherung

Kapitel I

Der Zins als erste Rechnungsgrundlage

1 Zins und Zinseszins

1.1 Zins

Man geht von einem Jahreszins $p\%$ aus und setzt $i = \frac{p}{100}$. Bei unterjährigen Perioden ist der Zins dann $\frac{i}{m}$ für $m = 2, 4, 12, 360$ oder ähnliche Werte.
Das Startkapital werde mit K_0 bezeichnet.
Damit beträgt die Höhe der Zinsen $Z_m = \frac{i}{m} K_0$.
Man erhält also eine Reihe von Kapitalwerten $K_0, K_0 + Z_m, K_0 + 2Z_m, \ldots$, bzw.

$$K_{\frac{n}{m}} = K_0 \left(1 + n\frac{i}{m}\right)$$

als Kapital nach n Perioden der Länge $\frac{1}{m}$ Jahre.

1.2 Zinseszins

Außer der Zinszahlung auf das Startkapital werden nun auch die Zinsen auf die Zinszahlungen der vergangenen Perioden berücksichtigt.

Jährliche Verzinsung

Man erhält eine Reihe von Kapitalwerten $K_0, K_0(1+i), K_0(1+i) + K_0(1+i)i = K_0(1+i)^2$, $K_0(1+i)^3, \ldots$ oder allgemein

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

als Wert des Kapitals nach n Jahren.

Meist wird $r = 1 + i$ gesetzt, so dass wir als Endwert

$$K_n = K_0 r^n$$

erhalten. Zudem gilt $K_0 = K_n(\frac{1}{r})^n$, also für $v = \frac{1}{r}$

$$K_0 = K_n v^n$$

r wird dann als **Aufzinsungsfaktor**, v als **Abzinsungsfaktor** bezeichnet.

Unterjährige Verzinsung

1. Gemischte Verzinsung (Bankenverzinsung)

Hier ist die Zinseszinsperiode gleich dem Kalenderjahr, so dass unterjährige Zahlungen einfach verzinst werden.
Beispiel: Das Kapital K_0 werde zum 1.10. für n Jahre und 8 Monate zum Zinssatz i angelegt; es ergibt sich am Ende der Laufzeit $K = K_0(1 + 3\frac{i}{12})r^n(1 + 5\frac{i}{12})$.

2. Relative Verzinsung

Hier werden Zinszahlungen schon in der nächsten Periode verzinst; es gilt also

$$K_{\frac{r}{m}} = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^r$$

analog zur jährlichen Verzinsung.
Nach einem Jahr ist dann $K_{\frac{m}{m}} = K_0(1 + \frac{i}{m})^m$; wie man leicht zeigen kann, gilt $(1 + \frac{i}{m})^m > 1 + i$ für $m \geq 2$. Um den Periodenzins vergleichbar zu machen, ermittelt man die Rendite bzw. Effektivverzinsung aus $(1 + \frac{i}{m})^m = 1 + i_{\text{eff}}$.

3. Konforme Verzinsung

Anknüpfend an die relative Verzinsung setzt das Konzept der konformen Verzinsung einen Zins $i_m < i$ (i=Jahreszins) an, so dass gilt $(1 + \frac{i_m}{m})^m = 1 + i$; i_m ist dann konform zu i (bzw. p_m zu p).
Es ergeben sich die Auf- und Abzinsungsfaktoren $r^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{i_m}{m}$, $\qquad v^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{1+\frac{i_m}{m}}$

4. Stetige konforme Verzinsung

Für die konforme Verzinsung gilt:

$$i_m = m(r^{\frac{1}{m}} - 1) = \frac{r^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} = \frac{r^h - 1}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \ln r =: \delta$$

(Der Bruch ist ein Differenzenquotient, der Grenzwert die Ableitung $\frac{d}{dt}r^t|_{t=0}$.)

Für beliebiges t gilt: $K(t + \frac{1}{m}) = K(t)(1 + \frac{i_m}{m})$ bzw.

$$\frac{K(t + \frac{1}{m}) - K(t)}{\frac{1}{m}} = K(t)i_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} K(t)\delta$$

also $K'(t) = K(t)\delta$. Dies führt zu $K(t) = c \cdot e^{\delta t}$, wobei $K(0) = K_0$ ist, also $c = K_0$:

$$K(t) = K_0 e^{\delta t}$$

ist das Kapital zum Zeitpunkt t bei stetiger Verzinsung des Startkapitals K_0.

2 Zeitrenten

Zeitrenten sind Zahlungen, die regelmäßig in bestimmten Abständen geleistet werden; i.d.R. geht man von äquidistanten Zahlungszeitpunkten aus.

Um Zeitrenten bewerten zu können, muss man die Zahlungen auf einen Referenzzeitpunkt ab- bzw. aufzinsen. Liegt dieser Zeitpunkt zeitlich vor den Zahlungen, spricht man von *prospektiver* Betrachtung, liegt er hinter den Zahlungen, ist die Betrachtung *retrospektiv*.

Es soll im weiteren $d := iv = \frac{i}{1+i} = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - v$ sein.

R sei die konstante Höhe der Zahlungen. Betrachtet man eine Zeitrente aus n Zahlungen zum Zeitpunkt der ersten Zahlung, so gilt für den Wert der Zeitrente

$$B_v = R + Rv + Rv^2 + \ldots + Rv^{n-1} = R(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1})$$

Der Ausdruck in der Klammer ist unabhängig von der Höhe der Zahlungen, er gibt den Barwert einer Zahlungsreihe der Höhe 1 wieder. Zur Vereinfachung wird dieser Ausdruck zusammengefasst; man schreibt

$$B_v = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

wobei mit $d := iv$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}$$

der **vorschüssige Zeitrentenbarwert** über n Jahre ist.

Liegt der Referenzzeitpunkt ein Jahr vor der der ersten Zahlung, so erhält man eine analoge Aussage mit dem **nachschüssigen Zeitrentenbarwert**

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot v = \frac{1 - v^n}{i}$$

Die triviale Beziehung $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$ ermöglicht eine einfache Umrechnung der Faktoren.

Ähnliches gilt auch für eine retrospektive Betrachtung:
Die Summe der bis 1 Jahr nach der letzten Zahlung aufgezinsten Zahlungen ergibt den vorschüssige Zeitrentenendwert

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + \ldots + r^n = r(1 + r + \ldots + r^{n-1}) = r\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{r^n - 1}{d}$$

Analog gibt der nachschüssige Zeitrentenendwert

$$s_{\overline{n}|} = 1 + r + \ldots + r^{n-1} = \ddot{s}_{\overline{n}|} \cdot v = \frac{r^n - 1}{i}$$

den Wert der Zeitrente zum Zeitpunkt der letzten Zahlung wieder.
Die Umrechnungsformel lautet hier $s_{\overline{n}|} = 1 + \ddot{s}_{\overline{n}|}$.

Man erhält damit auch den vorschüssigen Barwert einer m Jahre aufgeschobenen n-jährigen Rente:

$${}_{m|n}\ddot{a} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}$$

Mit Hilfe der Rentenbarwerte können nun Zahlungsreihen verglichen werden: Jemand zahle m Jahre die Prämie P, danach vergehen k Jahre, und nun setzt eine n-jährige (Alters-)Rente ein.
Man erhält als individuelle Äquivalenzgleichung je nach Betrachtung

$$P \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|} = R \cdot a_{\overline{n}|} \cdot v^{k+m-1} \tag{2.1}$$

$$P \cdot \ddot{s}_{\overline{m}|} = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} \cdot v^{k-1} \tag{2.2}$$

$$P \cdot s_{\overline{n}|} \cdot r^{k+n-1} = R \cdot s_{\overline{n}|} \tag{2.3}$$

(In 2.1 wird auf den ersten Zahlungstermin abgezinst, 2.2 gilt für das erste Jahr nach Ende der Prämienzahlung, in 2.3 wird der Zeitpunkt der letzten Rentenzahlung betrachtet.)

Rentenstrom

Die Jahresrente der Höhe 1 bestehe aus m Raten der Höhe $\frac{1}{m}$. Wir betrachten eine konforme Verzinsung, also
$(1 + \frac{i_m}{m})^m = 1 + i = r, \quad 1 + \frac{i_m}{m} = r^{\frac{1}{m}}, \quad \frac{1}{1+\frac{i_m}{m}} = v^{\frac{1}{m}}$
Die Rente laufe n Jahre. Dann gilt
$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \ldots + \frac{1}{m}v^{\frac{nm-1}{m}} = \frac{1}{m}(1 + v^{\frac{1}{m}} + (v^{\frac{1}{m}})^2 + \ldots + (v^{\frac{1}{m}})^{nm-1}) = \frac{1}{m}\frac{1-(v^{\frac{1}{m}})^{nm}}{1-v^{\frac{1}{m}}} =$
$\frac{1-v^n}{m(1-v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1-v^n}{d_m} = \frac{d}{d_m}\ddot{a}_{\overline{n}|}$
Für $m \to \infty$, $\Delta t = \frac{1}{m}$ erhält man das Integral

$$\ddot{a}(n) = \int_0^n v^t dt$$

Setzt man eine Rentenintensität $R(t)$ an, die von t bis $t + \Delta t$ gilt, so erhält man die Höhe der Rente für dieses Intervall aus $R(t)\Delta t$ und insgesamt

$$\ddot{a}(n, R(t)) = \int_0^n R(t) v^t dt$$

Kapitel II

Die Sterblichkeit als zweite Rechnungsgrundlage

1 Sterbetafeln

Wichtig für die Versicherungsmathematik sind die **Sterbewahrscheinlichkeiten** q_x, $x = 0, 1, 2, \ldots, 100$, die die Wahrscheinlichkeit angeben, im Alter x zu sterben, bzw. die **Überlebenswahrscheinlichkeiten** $p_x = 1 - q_x$.
Sterbetafeln gehen im Allgemeinen von einem fiktiven Bestand an Neugeborenen aus, der mit l_0 bezeichnet wird (z.B. $l_0 = 100000$). Sie listen dann alle Werte l_x auf, wobei $l_{x+1} = l_x(1 - q_x) = l_x - l_x q_x$ die Zahl Lebenden im Alter $x + 1$ angibt.

2 Die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten lassen sich aus den Werten der Sterbetafeln ermitteln: Wie oben angegeben gilt $l_{x+1} = l_x(1 - q_x) = l_x p_x$, also

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Allgemein ist

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

die Wahrscheinlichkeit, die nächsten n Jahre zu überleben.
Analog ist die Zahl derjenigen, die im Alter x sterben, $d_x = l_x - l_{x+1}$ und es gilt

$$q(x) = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten n Jahren zu sterben,

$$_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Zum Beispiel errechnet sich die Wahrscheinlichkeit, n Jahre zu leben und dann zu sterben, durch
$_n p_x \cdot q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_{x+n}} = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}$

3 Andere Ausscheideordnungen

Die genannten Wahrscheinlichkeiten hängen von verschiedenen Faktoren ab; so spielen Geschlecht und Beruf eine entscheidende Rolle. Daher werden spezielle Sterbetafeln benutzt, deren Werte bei der Kalkulation des gewünschten Tarifs möglichst nah an den realen Erwartungswerten liegen. So existieren Berufstafeln, Witwentafeln, Aktiven- und Invalidentafeln in der Sozialversicherung, etc.
Zum Teil ist auch die Art der Versicherungsleistung relevant: z.B. sollten die Sterbewahrscheinlichkeiten in der Rentenversicherung entsprechend niedriger sein als in der Lebensversicherung, um zu garantieren, dass die Prämien die wirkliche Versicherungsleistung abdecken, gerade im Hinblick auf die wachsende Lebenserwartung. Somit sind Rentnersterbetafeln dort vorzuziehen.

In der privaten Krankenversicherung spielt zudem die Wahrscheinlichkeit der Vertragstornierung eine Rolle. q_x wird dann durch $q_x + w_x$ ersetzt, wobei w_x die Stornowahrscheinlichkeit ist, also die Wahrscheinlichkeit des x-Jährigen, im Alter $x + 1$ nicht mehr versichert zu sein. w_x ist Berufs- und Zielgruppenabhängig, zudem ist sie bei Zusatzversicherungen naturgemäß höher als bei Vollversicherungen.

Kapitel III

Barwerte der Erlebensfallversicherung

1 Kommutationswerte

Eingebürgert haben sich folgende Abkürzungen für Daten, die aus den Sterbetafeln ersichtlich sind:
Die **abgezinsten Lebenden** des Alters x sind

$$D_x := l_x \cdot v^x$$

Allgemein wird $i = 3,5\%$ verwendet, also $v = \frac{1}{1,035}$. Weiter setzt man

$$N_x := \sum_{t=0}^{100-x} D_{x+t} = \sum D_x$$

Seltener tritt auch

$$S_x := \sum N_x$$

auf.
Analog sind die **abgezinsten Toten**

$$C_x := d_x \cdot v^{x+1}$$

Wie oben seien dann

$$M_x := \sum C_x$$

und

$$R_x := \sum M_x$$

2 Die reine Erlebensfallversicherung

Es sei S die Versicherungssumme. Zunächst wird statt einer Folge von Prämienzahlungen ein Einmalbeitrag des Versicherten betrachtet:

Aus dem Äquivalenzprinzip erhält man die Gleichung

$$l_x \cdot {}_nE_x^* = l_{x+n} S v^n$$

Es handelt sich hierbei um den **Sterbetafelansatz**.
Teilt man durch l_x, so kommt man zum **Wahrscheinlichkeitsansatz**

$${}_nE_x^* = S \cdot {}_n p_x v^n$$

Die Multiplikation mit D_x führt zum **Versicherungstechnischen Ansatz**

$$D_x \cdot {}_nE_x^* = S D_{x+n}$$

Die letzte Gleichung ergibt nun als erforderlichen Einmalbeitrag

$${}_nE_x^* = S \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

oder für $S = 1$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

3 Jährliche Leibrenten

Leibrenten berücksichtigen außer der Verzinsung noch die Sterblichkeit, die zu einer (zufälligen) Verkürzung der Rentenzahlungen führt.
Wir betrachten den vorschüssigen Fall. Als Rentenhöhe setzen wir allgemein $R = 1$; w sei ein festes Höchstalter (i.A. werden Versicherungen bei einem Alter von 100 Jahren ausgezahlt).

3.1 Sofort beginnende lebenslängliche Leibrente

$\ddot{a}_x$ soll den Wert der Leibrente angeben. Als Äquivalenz erhält man

$$\begin{aligned} l_x \ddot{a}_x &= l_x + l_{x+1} v + \ldots + l_w v^{w-x} \\ \ddot{a}_x &= 1 + {}_1p_x v + \ldots + {}_{w-x}p_x v^{w-x} \\ D_x \ddot{a}_x &= D_x + D_{x+1} + \ldots + D_w \end{aligned}$$

Die rechte Seite entspricht gerade N_x, also ist

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

der (vorschüssige) **Barwert der Leibrente des Alters** x.

(Die nachschüssige Betrachtung führt wegen $1 + a_x = \ddot{a}_x$ zu $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$).

Der Barwert als Erwartungswert

Der Leibrentenbarwert $\ddot{a}_x$ kann auch als Erwartungswert interpretiert werden:

Die Zufallsvariable X bezeichne die zukünftigen diskontierten Zahlungen; sie besitzt dann den Bildraum $\{1, 1+v, 1+v+v^2, \ldots\}$
Das von X induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß P ordnet diesen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeiten ${}_0p_x \cdot q_x, {}_1p_x \cdot q_{x+1}, {}_2p_x \cdot q_{x+2}, \ldots$ zu[1].
Als Erwartungswert ergibt sich dann

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{t=0}^{w-x} \left({}_tp_x q_{x+t} \sum_{k=0}^{t} v^k \right) &= {}_0p_x \cdot q_x \\ &+ {}_1p_x \cdot q_{x+1} + {}_1p_x \cdot q_{x+1} v \\ &+ {}_2p_x \cdot q_{x+2} + {}_2p_x \cdot q_{x+2} v + {}_2p_x \cdot q_{x+2} v^2 \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^{w-x} \left(v^k \sum_{t=k}^{w-x} {}_tp_x q_{x+t} \right) \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{t=k}^{w-x} {}_tp_x q_{x+t} &= \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+k}} + \frac{l_{x+k+1}}{l_x} \frac{l_{x+k+1} - l_{x+k+2}}{l_{x+k+1}} + \ldots \\ &= \frac{l_{x+k}}{l_x} = {}_kp_x \end{aligned}$$

Also

$$E(X) = \sum_{k=0}^{w-x} {}_kp_x \cdot v^k = \ddot{a}_x$$

3.2 Aufgeschobene lebenslängliche Leibrente

Die Aufschubzeit betrage m Jahre. Der Ansatz

$$D_x \cdot {}_m|\ddot{a}_x = D_{x+m} + D_{x+m+1} + \ldots = N_{x+m}$$

ergibt den Barwert der aufgeschobenen lebenslänglichen Leibrente

$${}_m|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

(Anwendung: Anwartschaft auf Altersrente)

[1] ${}_0p_x = 1$

3.3 Temporäre sofort beginnende Leibrente

Aus der Gleichung

$$D_x\ddot{a}_{x\overline{n}|} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1} = N_x - N_{x+n}$$

folgt als Barwert

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

3.4 Aufgeschobene temporäre Leibrente

$$\begin{aligned} {}_{m|n}\ddot{a}_x &= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_{x+m}}\frac{D_{x+m}}{D_x} \\ &= \ddot{a}_{x+m\overline{n}|} \cdot {}_mp_x v^m \end{aligned}$$

3.5 Dynamische Rente

Geht man von dem einfachen Modell

$$R_k = R_0 + k \cdot \Delta R$$

aus, so ergibt sich für die temporäre Rente

$$\begin{aligned} \vec{\ddot{a}}_{x\overline{n}|}(R_0, \Delta R) &= \sum_{k=0}^{n-1}(R_0 + k\Delta R)\frac{D_{x+k}}{D_x} \\ &= \frac{1}{D_x}\left(\sum_{k=1}^{n-1} R_0 D_{x+k} + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \Delta R \cdot D_{x+k}\right) \\ &= \frac{1}{D_x}\left(R_0(N_x - N_{x+n}) + \Delta R \sum_{k=1}^{n-1} kD_{x+k}\right) \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kD_{x+k} &= D_{x+1}+ \; D_{x+2}+ \; D_{x+3}+ \; \ldots + \; D_{x+n-1}+ \\ &\qquad\quad D_{x+2}+ \; D_{x+3}+ \; \ldots + \; D_{x+n-1}+ \\ &\qquad\qquad\quad D_{x+3}+ \; \ldots + \; D_{x+n-1}+ \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad D_{x+n-1} \\ &= (N_{x+1} - N_{n+n}) + (N_{x+2} - N_{x+n}) + \ldots + (N_{x+n-1} - N_{x+n}) \\ &= S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n} \end{aligned}$$

Also

$$\vec{\ddot{a}}_{x\overline{n}|}(R_0, \Delta R) = R_0\ddot{a}_{x\overline{n}|} + \Delta R\frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}}{D_x}$$

Für eine lebenslängliche Rente gilt dann

$$\vec{\ddot{a}}_x(R_0, \Delta R) = R_0\ddot{a}_x + \Delta R\frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Kapitel IV

Barwerte der Kapitalversicherung

1 Vorbemerkung

Im Gegensatz zur Rentenversicherung sollten hier eher höhere Sterbewahrscheinlichkeiten angenommen werden, da die Versicherungsleistung bei Tod fällig wird.

Im weiteren stehe A_x für den nötigen Einmalbetrag bzw. den barwertigen Erwartungswert der Versicherungsleistung pro versicherter Person im Alter x.

2 Die reine Todesfallversicherung

2.1 Lebenslänglich, sofort beginnend

Der Ansatz für eine Versicherungssumme der Höhe 1

$$l_x A_x = d_x v + d_{x+1} v^2 + \dots$$

führt zu

$$A_x = \frac{C_x + \dots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Ist die Summe nun S, so erhält man $B = S \cdot A_x$ als Einmalbeitrag.

Beispiel: Aus den Werten $x = 35$, $S = 100000$ DM, $A_{35} = 0,275836$ ergibt sich $B = 100000 \cdot A_{35} = 27583,60$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} M_x &= d_x v^{x+1} + \dots = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} + (l_{x+1} - l_{x+2}) v^{x+2} + \dots \\ &= v N_x - N_{x+1} = v N_x - N_x + D_x = D_x - (1-v) N_x \\ &= D_x - d N_x \end{aligned}$$

womit dann A_x auch aus

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x$$

ermittelt werden kann.

2.2 Aufgeschobene Todesfallversicherung

Stichwort Karenzzeit:
Die Versicherung zahlt erst nach m Jahren.

Wie oben ermittelt man

$$ {}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} $$

2.3 Temporäre Todesfallversicherung

Die Versicherungssumme wird nur bei einem Todesfall innerhalb der nächsten n Jahre ausgezahlt:

$$ {}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} $$

2.4 Die gemischte Versicherung

Es handelt sich hierbei um eine Kombination von Todes- und Erlebensfallversicherung: Die vereinbarte Versicherungssumme wird bei Tod oder spätestens nach n Jahren ausgezahlt.

$$ A_{x\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

oder

$$ A_{x\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x\overline{n}|} $$

Kapitel V

Nettoprämien

1 Vorbemerkung

Da Einmalbeiträge selten sind, muss man i.A. auch von Zahlungsströmen auf der Versichertenseite ausgehen; diese entsprechen dann einer Leibrente für die Versicherung.

2 Jahresprämien

2.1 Erlebensfallversicherung

Die n-jährige Prämienzahlung muss für die dann an die Überlebenden auszuzahlende Versicherungssumme ausreichen:

$$\begin{aligned} l_x P({}_nE_x) + l_{x+1} P({}_nE_x) v + \ldots + l_{x+n-1} P({}_nE_x) v^{n-1} &= l_{x+n} v^n \\ P({}_nE_x)(N_x - N_{x+n}) &= D_{x+n} \\ P({}_nE_x) \ddot{a}_{x\overline{n}|} &= {}_nE_x \end{aligned}$$

Also

$$P({}_nE_x) = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

2.2 Altersrente

Analog zu 2.1 ergibt sich:

$$P({}_{n|}\ddot{a}_x) \ddot{a}_{x\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x$$

und somit

$$P({}_{n|}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

2.3 Lebenslängliche Todesfallversicherung

Lebenslängliche Beitragszahlung

Aus der Äquivalenz

$$P(A_x) \ddot{a}_x = A_x$$

folgt

$$P(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d$$

Was würde passieren, wenn man stattdessen von einer Kette einjähriger Todesfall-Versicherungen ausginge?
Die Prämie wäre natürlich nicht mehr konstant, sondern man erhielte eine Folge von (natürlichen) Prämien

$$\frac{C_x}{D_x}, \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}, \dots$$

Diese Prämien steigen monoton - und sind im Alter kaum mehr zu bezahlen. Die konstante Prämie ermöglicht daher eine Verteilung des zu zahlenden Gesamtbeitrags, so dass die am Anfang zu hohen Prämien (im Vergleich zum Erwartungswert der Auszahlungssumme) zu einem Gewinn führen, der im Alter zum Ausgleich der gleichbleibenden Zahlungen herangezogen wird. Dieser Gewinn bildet das **Deckungskapital** (auch **Deckungsrückstellung** oder **Alterungsrückstellung**).

abgekürzte Prämienzahlungsdauer

Es ändert sich nur der Leibrentenbarwert:

$$P\ddot{a}_{x\overline{n}|} = A_x$$

2.4 Gemischte Versicherung

$$P_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} = A_{x\overline{n}|}$$

also

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} - d$$

2.5 A-term-fix-Versicherung

Es handelt sich hierbei um eine Versicherung mit festem Auszahlungstermin (unabhängig vom eventuellen Todesfällen). Eine Unsicherheit besteht hier also nur in der Prämienzahlungsdauer:

$$P\ddot{a}_{x\overline{n}|} = Sv^n$$

2.6 Prämienrückgewähr

Reine Erlebensfallversicherung

Die Versicherungsleistung besteht hier aus zwei Teilen: einer Erlebensfallversicherung und einer Todesfallversicherung, deren Höhe von der Prämie abhängt und ansteigt.

$$P\ddot{a}_{x\overline{n}|} = {}_nE_x + P_{|n}\vec{A}_x$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}
{}_n\vec{A}_x &= \frac{1}{D_x}(C_x + 2C_{x+1} + \ldots + nC_{x+n-1}) \\
&= \frac{1}{D_x}\begin{array}{llll} (C_x+ & C_{x+1}+ & \ldots+ & C_{x+n-1}+ \\ & C_{x+1}+ & \ldots+ & C_{x+n-1}+ \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & C_{x+n-1}) \end{array} \\
&= \frac{1}{D_x}((M_x - M_{x+n}) + (M_{x+1} - M_{x+n}) + \ldots + (M_{x+n-1} - M_{x+n})) \\
&= \frac{1}{D_x}(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})
\end{aligned}$$

Die Nettoprämie ist also

$$P = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|} - {}_{|n}\vec{A}_x}$$

Altersrente mit Prämienrückgewähr und garantierter Rentenzahlungsdauer

Die Rente soll z.B. 5 Jahre lang an alle Versicherten gezahlt werden, die das Alter n (z.B. 65) erreichen, unabhängig von eventuellen Todesfällen innerhalb der 5 Jahre.

$$P\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \ddot{a}_5 \cdot {}_nE_x + {}_{n+5|}\ddot{a}_x + P \cdot {}_{|n}\vec{A}_x$$

Also

$$P = \frac{\ddot{a}_5 \cdot {}_nE_x + {}_{n+5|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|} - {}_{|n}\vec{A}_x}$$

Kapitel VI

Das Nettodeckungskapital

1 Definition

Unter dem **Gesamtdeckungskapital** zum Zeitpunkt t einer Versicherungsgemeinschaft gleichartiger Risiken versteht man die Summe, die die Gesellschaft von den Prämien reservieren muss, um ihren Verpflichtungen in der Zukunft nachkommen zu können. Dies ist dann möglich, wenn das Deckungskapital gleich ist dem Kapitalwert der künftigen Ausgaben abzüglich dem Kapitalwert der noch zu erwartenden Prämieneinnahmen.

Beispiel: Lebenslängliche Todesfallversicherung

a) Einmalbeitrag:
Gesamtdeckungskapital=$l_{x+t} \cdot {}_tV_x$
künftige Verpflichtungen=$d_{x+t}v + d_{x+t+1}v^2 + \ldots$
Die Definition führt zu der Gleichung

$$D_{x+t} \cdot {}_tV_x = C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots = M_{x+t}$$

woraus sich

$${}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = A_{x+t}$$

ergibt.

b) Jährliche Prämienzahlung:
Hier ist retrospektiv

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = l_x P_x r^t + l_{x+1} P_x r^{t-1} + \ldots + l_{x+t+1} P_x r - (d_x r^{t-1} + \ldots + d_{x+t+1})$$

Also

$$l_{x+t} v^x \cdot {}_tV_x = r^t (P_x (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t}))$$

Nun ist

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x} \text{ bzw. } N_x P_x = M_x$$

Somit

$$D_{x+t} \cdot {}_tV_x = M_{x+t} - P_x N_{x+t}$$

und

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

2 Beispiele

2.1 Reine Erlebensfallversicherung

$${}_tV_x = {}_{n-t}E_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}$$

2.2 Altersrente

Hier ist zu unterscheiden zwischen $t < n$:

$${}_tV_x = {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}$$

und $t \geq n$:

$${}_tV_x = \ddot{a}_{x+t}$$

2.3 Gemischte Versicherung

Es gilt hier $P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$, $A_{x\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x\overline{n}|}$, $P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} - d$
Also

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= A_{x+t\overline{n-t}|} - P_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \\ &= 1 - d\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + d\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \end{aligned}$$

und somit

$${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

Ist z.B. ${}_0V_x = 0$, ${}_nV_x = 1$, dann ist ${}_tV_x \in [0,1]$ monoton steigend und somit $S \cdot {}_tV_x \uparrow S$: Das Deckungskapital wächst auf die vereinbarte Versicherungssumme an.

2.4 A-Term-Fix-Versicherung

Die prospektive Betrachtung der gesamten Deckungsrückstellung ${}_tV_x^g$ aller im Alter x Versicherten ist

$$\begin{aligned} V^g &= l_x v^{n-t} - P(l_{x+t} + l_{x+t+1}v + \ldots + l_{x+n-1}v^{n-t-1}) \\ &= l_x v^{n-t} - P(N_{x+t} - N_{x+n})r^{x+t} \\ &= l_{x+t}v^{n-t} + (l_x - l_{x+t})v^{n-t} - P\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}l_{x+t} \\ &= l_{x+t}(v^{n-t} - P\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}) + (l_x - l_{x+t})v^{n-t} \end{aligned}$$

Der erste Summand gibt den Rückstellungsbedarf für die Lebenden des Alters $x+t$ an, der zweite dagegen den Bedarf für die zwischen x und $x+t$ gestorbenen Versicherten. Es gilt

$$\frac{V^g}{l_x} = v^{n-t} - P\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \cdot {}_tP_x$$

2.5 Rekursionsformel (gemischte Versicherung)

Die Rückstellung verändert sich jedes Jahr: zur alten Rückstellung ${}_tV_x$ kommen neue Prämienzahlungen hinzu, dagegen müssen Versicherungsleistungen für die Todesfälle d_{x+t} des Jahres abgezogen werden. Die neue Rückstellung muss nun noch für l_{x+t+1} Personen ausreichen:

$$l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_x = l_{x+t} \cdot {}_tV_x r + l_{x+t}P_{x\overline{n}|}r - d_{x+t}$$

$$D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_x = D_{x+t} \cdot {}_tV_x + D_{x+t}P_{x\overline{n}|} - C_{x+t} \tag{2.1}$$

Man erhält die **Rekursionsformel**

$${}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t} \cdot {}_tV_x + D_{x+t}P_{x\overline{n}|} - C_{x+t}}{D_{x+t+1}},\ {}_0V_x = 0$$

3 Spar- und Risikoprämie

3.1 Gemischte Versicherung

Es gilt $C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1})v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}$, also $D_{x+1} = D_x v - C_x$ bzw. $D_{x+t+1} = D_{x+t}v - C_x + t$.
Setzt man dies in Gleichung 2.1 ein, so erhält man

$$D_{x+t}v \cdot {}_{t+1}V_x - C_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x = D_{x+t} \cdot {}_tV_x + D_{x+t}P_{x\overline{n}|} - C_{x+t}$$

und, nach der Prämie aufgelöst,

$$P_{x\overline{n}|} = \underbrace{(1 - {}_{t+1}V_x)v \cdot q_{x+t}}_{\text{Risikoprämie}} + \underbrace{({}_{t+1}V_x - {}_tV_x)}_{\text{Sparprämie}}$$

Der erste Summand gibt die **Risikoprämie** ${}_tP^R_{x\overline{n}|}$ an: er besteht aus der unter Risiko stehenden Differenz $(1 - {}_{t+1}V_x)$, die abgezinst und mit der Sterbewahrscheinlichkeit gewogen wird (Erwartungswert des Prämienausfalls).
Der zweite Summand ist die Differenz der Deckungsrückstellungen und somit die **Sparprämie** ${}_tP^S_{x\overline{n}|}$.

Beispiel: Sei $x = 60,\ n = 5,\ S = 10000, -$, Geschlecht: männlich

t	0	1	2	3	4	5
${}_tV_{60}$	0	1815,75	3713,33	5702,50	7793,82	10000
${}_tP^S_{60\overline{5}|}$	1754,35	1772,01	1796,33	1827,76	1868,07	
${}_tP^R_{60\overline{5}|}$	113,72	96,06	71,74	40,31	0	

3.2 Erlebensfallversicherung

Hier entfällt die Auszahlung bei Todesfall:

$$D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_x = D_{x+t} \cdot {}_tV_x + D_{x+t}P$$

Ersetzt man wieder D_{x+t+1} durch $vD_{x+t} - C_{x+t}$, so ergibt sich

$$D_{x+t}P = D_{x+t}({}_{t+1}V_x v - {}_tV_x) - C_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$$

und damit ist die Prämie

$$P = ({}_{t+1}V_x v - {}_tV_x) - {}_{t+1}V_x q_{x+t} v$$

bzw. auf die Veränderung der Rückstellung bezogen

$${}_{t+1}V_x - {}_tV_x = P \cdot r + i \cdot {}_tV_x + {}_{t+1}V_x q_{x+t}$$

Zur Rückstellung kommen also die (aufgezinsten) Prämien und die Zinsen auf die Rückstellung hinzu, außerdem wird die Rückstellung der d_{x+t} Verstorbenen auf die Versicherungsgemeinschaft verteilt. Die Prämie ist also durch die vererbte Rückstellung vermindert.

4 Rückkaufswert

Bei Kündigung (Stornierung) von Versicherungen, bei denen die Rückstellung nicht vererbt wird (u.a. gemischte Versicherung), steht dem Versicherten ein festgelegter Rückkaufwert zu.
Z.B. $R_t = 0,96 \cdot {}_tV_x$; d.h. die gezahlten Risikoprämien verfallen.

Kapitel VII

Die Kosten als dritte Rechnungsgrundlage

Jedem Versicherungsunternehmen entstehen Kosten, z.B. durch Vertreterprovisionen. Diese müssen rechnungsmäßig in genügender Größe berücksichtigt werden; in der Bilanz muss die Deckung der Kosten nachgewiesen werden.

1 Die verschiedenen Kostenarten

a) **Abschlusskosten** sind Kosten, die nicht anfallen, wenn es nicht zum Abschluss eines Vertrages kommt.
Im Außenbereich ist hier vor allem die Vertreterprovision zu nennen, intern fallen entsprechende Bearbeitungskosten bzw. Gehälter an, u.U. auch Kosten für eine ärztliche Untersuchung.
Die Abschlusskosten werden in Tausendstel der *Versicherungssumme* angegeben, meist 30 bis maximal 35 promille.

b) **Inkassokosten** sind Kosten, die durch den Geldverkehr entstehen.
Sie werden in % der *Bruttoprämie* gemessen und betragen ca. 3 % .

c) **Laufende Verwaltungskosten** sind schließlich alle Kosten, die nicht unter Abschluss- und Inkassokosten fallen; dies sind Steuern, Abschreibungen, Mieten, etc.
Wie die Abschlusskosten werden die laufenden Verwaltungskosten in Tausendstel der *Versicherungssumme* gemessen und liegen etwa bei $3 - 5$ promille.

Anhand von *Nettoprämie* und Kosten kann nun die *Bruttoprämie* ermittelt werden, so dass man *Tarifprämien* erhält. Diese sind Ausgangspunkt für die Ermittlung der *Einzelprämien*, wobei Zuschläge (Risikozuschlag) und Rabatte zu berücksichtigen sind.

2 Ausreichende Jahresprämien (Bruttoprämien)

2.1 Lebenslängliche Todesfallversicherung

Lebenslängliche Beitragszahlung

Die Bruttoprämieneinnahme muss außer der Auszahlungssumme noch die verschiedenen Kostenarten decken:

$$\begin{aligned} P_x^a(A_x)\ddot{a}_x &= A_x + \alpha \cdot 1 + \beta P_x^a \ddot{a}_x + \gamma \cdot 1 \cdot \ddot{a}_x \\ P_x^a(A_x) &= P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta P_x^a + \gamma \end{aligned}$$

Es gilt $\frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_x = \alpha$: die Abschlusskosten werden also durch eine Leibrente gezahlt; dies bedeutet für das Versicherungsunternehmen allerdings einen Liquiditätsengpass.
Ein Versicherungsmathematiker namens **Zillmer** hatte nun die Idee, die Abschlusskosten durch die Rückstellung zu finanzieren; dies hat zur Folge, dass ein Versicherter mit einer negativen Rückstellung beginnt, die dann im Laufe der Jahre positiv wird und sich der Nettorückstellung nähert. Die negative Rückstellung bedeutet ein Darlehen der Versichertengemeinschaft an den Versicherten, das in den ersten Jahren zurückgezahlt wird.

Den Quotienten $\frac{\alpha}{\ddot{a}_x}$ nennt man **Zillmerquote**, die Prämie $P_x^{(Z)} = P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x}$ **Zillmerprämie**. Damit lässt sich die Bruttoprämie auch schreiben als

$$P_x^a = \frac{P_x^{(Z)} + \gamma}{1 - \beta}$$

Abgekürzte Beitragszahlungsdauer

Während Beitragszahlung und Inkassokosten (β) nach n Jahren entfallen, wird der Versicherte lebenslänglich an den Verwaltungskosten (γ) beteiligt:

$$\begin{aligned} P_x^a \ddot{a}_{x\overline{n}|} &= A_x + \alpha + \beta \ddot{a}_{x\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_x \\ P_x^a &= P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + \beta P_x^a + \gamma \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} \\ P_x^a &= \frac{P_x^{(Z)} + \gamma \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}}{1 - \beta} \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei hier $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$ und $P_x^{(Z)} = P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$ gilt.

Beispiel: Seien $x = 31, S = 100000, \alpha = 0,035, \beta = 0,02, \gamma = 0,003, G = M$
Berechnung der Netto- und Bruttoprämie:
$\ddot{a}_{31} = 22,3498, A_{31} = 0,244215$
$S \cdot P_{31} = \frac{A_{31}}{\ddot{a}_{31}} \cdot S = 1092,6943;\ S \cdot P_{31}^{(Z)} = S \cdot (P_{31} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{31}}) = 1249,2953$
$S \cdot P_{31}^a = S \cdot \frac{P_{31}^{(Z)} + \gamma}{(1-\beta)} = 1580,9135$

2.2 Gemischte Versicherung

$$\begin{aligned} P^a_{x\overline{n}|} &= P_{x\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + \beta P^a_{x\overline{n}|} + \gamma \\ P^a_{x\overline{n}|} &= \frac{P^{(Z)}_{x\overline{n}|} + \gamma}{1-\beta} \end{aligned}$$

3 Die Bruttodeckungsrückstellung

3.1 Lebenslängliche Todesfallversicherung

Lebenslängliche Beitragszahlung

Unter Einbeziehung der Bruttodeckungsrückstellung gilt nach t Jahren

$$\begin{aligned} {}_tV^a_x + P^a_x \ddot{a}_{x+t} &= A_{x+t} + \beta P^a_x \ddot{a}_{x+t} + \gamma \ddot{a}_{x+t} \\ {}_tV^a_x &= A_{x+t} - ((1-\beta)P^a_x - \gamma)\ddot{a}_{x+t} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} P^a_x &= P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta P^a_x + \gamma \\ \Leftrightarrow (1-\beta)P^a_x - \gamma &= P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} = P^{(Z)}_x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (3.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_tV^a_x &= A_{x+t} + P^{(Z)}_x \ddot{a}_{x+t} =: {}_tV^{(Z)}_x \\ &= {}_tV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+t} \end{aligned}$$

${}_tV^{(Z)}_x$ wird als **Zillmer-Rückstellung** oder **gezillmerte Rückstellung** bezeichnet. Dies wird umso verständlicher, wenn man $t = 0$ einsetzt und die Gleichung ${}_0V^{(Z)}_x = -\alpha$ erhält, was gerade dem oben beschriebenen Darlehen in Höhe der Abschlusskosten entspricht.

Abgekürzte Beitragszahlungsdauer

Sei zunächst $t < n$:

$$\begin{aligned} {}_tV^a_x + P^a_x \ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} &= A_{x+t} + \beta P^a_x \ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} + \gamma \ddot{a}_{x+t} \\ {}_tV^a_x &= A_{x+t} - \left((1-\beta) P^a_x - \gamma \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}} \right) \ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \end{aligned}$$

Ersetzt man P^a_x nach Gleichung (2.1), so erhält man

$$\begin{aligned} {}_tV^a_x &= A_{x+t} - P^{(Z)}_x \ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} + \left(\gamma \ddot{a}_{x+t} - \gamma \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} \ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \right) \\ &= {}_tV^{(Z)}_x + {}_tU_x \end{aligned}$$

wobei ${}_tU_x$ die Verwaltungskostenrückstellung ist; sie besteht aus der Differenz zwischen dem Leibrentenbarwert $\gamma\ddot{a}_{x+t}$ und dem Prämienbarwert $P_\gamma\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|}$ $(P_\gamma\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \gamma\ddot{a}_x)$

Für $t \geq n$ gilt

$$ {}_tV_x = A_{x+t} + \gamma\ddot{a}_{x+t} $$

so dass ein stetiger Übergang erfolgt.

3.2 Gemischte Versicherung

Es gilt $P^{(Z)}_{x\overline{n}|} = P_{x\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$. Also

$$ \begin{aligned} {}_tV^a_x &= {}_tV^{(Z)}_x = A_{x+t\overline{n-t}|} - P^{(Z)}_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \\ &= {}_tV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+t\overline{n-t}|} \end{aligned} $$

und es gilt

$$ {}_0V^{(Z)}_x = -\alpha, \quad {}_nV^{(Z)}_x = {}_nV_x = 1 $$

Für den Fall von Stornierungen vor dem Punkt ${}_tV^{(Z)}_x = 0$ müssen Rücklagen gebildet werden, da die Finanzierung der Abschlusskosten nicht mehr durch Prämieneinnahme erfolgen kann.

4 Zillmersche Nettoprämie

(Lebenslängliche Todesfallversicherung)

Wie oben gezeigt ist die Äquivalenzgleichung für eine konstante Nettoprämie $P_x\ddot{a}_x = A_x$; die Bruttoprämie ist tariflich festgelegt, doch die Nettoprämie kann durchaus variieren, und man erhält allgemeiner

$$ \sum_{t\geq 0} {}_tP^{(netto)}_x \cdot D_{x+t} = A_xD_x \tag{4.3} $$

Nehmen wir nun an, die Prämie sei in den ersten k Jahren variabel, wobei die Deckung des Risikos gewährleistet sein muss, und danach sei die Pämie fest, also

$$ \begin{aligned} 0 \leq t \leq k-1 \quad &: \quad {}_tP^{(netto)}_x < P_x,\ {}_tP^{(netto)}_x \geq {}_tP^R_x \\ t \geq k \quad &: \quad P^{(F)}_x > P_x \end{aligned} $$

Gleichung (4.3) lautet dann

$$ \sum_{t=0}^{k-1} {}_tP^{(netto)}_x D_{x+t} + P^{(F)}_x N_{x+k} = A_xD_x \tag{4.4} $$

Setzt man nun die Prämie ${}_tP_x = P^{(F)}_x, t \geq 0$, so kann man die Differenz zwischen der anfänglich niedrigen Prämie ${}_tP^{(netto)}_x$ und der konstanten Prämie zur Deckung der Abschlusskosten in den

ersten k Jahren nutzen:

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{k-1}(P_x^{(F)} - {}_tP_x^{(netto)})D_{x+t} &\stackrel{!}{=} \alpha D_x \\ P_x^{(F)}(N_x - N_{x+k}) - \sum_{t=0}^{k-1} {}_tP_x^{(netto)} D_{x+t} &= \alpha D_x\end{aligned}$$

Ersetzt man die Summe nach Gleichung (4.4), so erhält man

$$\begin{aligned}P_x^{(F)}(N_x - N_{x+k}) - \alpha D_x + P_x^{(F)} N_{x+k} &= A_x D_x \\ P_x^{(F)} N_x &= (A_x + \alpha) D_x \\ P_x^{(F)} &= \frac{A_x + \alpha}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{A_x + \alpha}{\ddot{a}_x} = P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \\ &= P_x^{(Z)}\end{aligned}$$

Die Zillmerprämie $P_x^{(Z)}$ ist also eine Nettoprämie.

Beispiel: Lebenslängliche Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Beitragzahlungsdauer
${}_mV_x^{(Z)} = A_{x+m} - P_x^{(Z)}\ddot{a}_{x+m};\ P_x^{(Z)} = P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x}$
$x = 40; S = 100000; \alpha = 3\%; G = M$
$S \cdot P_{40} = 100000 \cdot P_{40} = 100000\frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40}} = 1596,48$
$S\frac{\alpha}{\ddot{a}_{40}} = \frac{0,03 \cdot 100000}{20,0877} = 149,35$
Als Zillmerprämie ergibt sich also $P_{40}^{(Z)} = 1745,83$
Entwicklung der Zillmerrückstellung (zum 30.6.) und der bilanzierten Rückstellung (zum 31.12. des Jahres, linear interpoliert):

m	${}_mV_{40}$	${}_mV_{40}^{Bil}$
0	-3000,11	-2270,00
1	-1539,87	-792,52
2	-45,16	720,14
3	1485,44	

Kapitel VIII

Vertragsänderungen

Es folgen drei Beispiele für Vertragänderungen.

1 Umwandlung einer gemischten Versicherung in eine prämienfreie gemischte Versicherung

Ist ${}_mV_x^{(Z)} > 0$, so ist $s \cdot {}_mV_x^{(Z)}$ ein Guthaben des Versicherten und wird als Einmalbeitrag betrachtet. Damit gilt dann

$$S \cdot {}_mV_x^{(Z)} = S'(A_{x+m\overline{n-m}|} + \gamma \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|})$$

so dass die neue Versicherungssumme

$$S' = \frac{S \cdot {}_mV_x^{(Z)}}{A_{x+t\overline{n-m}|} + \gamma \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|}}$$

beträgt.

2 Erhöhung der Versicherungssumme ohne Nachzahlung (gemischte Versicherung)

Statt S soll die Versicherungssumme nun $S' > S$ betragen. Bisher betrug die Prämie $s \cdot P^a_{x\overline{n}|}$; da diese schon m Jahre gezahlt wurde, ist $S' \cdot P^a_{x\overline{n}|}$ für S' nicht ausreichend.
Die erforderliche Prämie ist $S'' \cdot P^a_{x\overline{n}|}$ für ein $S'' > S'$, also

$$S \cdot {}_mV_x^{(Z)} + S'' P^a_{x\overline{n}|} \ddot{a}_{x+t\overline{n-m}|} = S' A_{x+m\overline{n-m}|} + \alpha(S' - S) + \beta S'' P^a_{x\overline{n}|} \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|} + \gamma S' \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|}$$

Setzt man $S'' = S' + \Delta S$, so ergibt dies

$$\begin{aligned}
(1-\beta)\Delta S P^a_{x\overline{n}|} \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|} &= S' A_{x+m\overline{n-m}|} + \gamma S' \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|} - S \cdot {}_mV_x^{(Z)} \\
&- (1-\beta) S' P^a_{x\overline{n}|} \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|} + \alpha(S' - S) \\
&= S' \cdot {}_mV_x^{(Z)} - S \cdot {}_mV_x^{(Z)} + \alpha(S' - S) \\
&= ({}_mV_x^{(Z)} + \alpha)(S' - S)
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\Delta S \cdot P^a_{x\overline{n}|} = \frac{(S'-S)({}_mV^{(Z)}_x + \alpha)}{(1-\beta)\ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|}}$$

Der neue Zahlbetrag für S' ist damit

$$S'P^a_{x\overline{n}|} + \Delta S \cdot P^a_{x\overline{n}|}$$

3 Zuzahlung zur Abkürzung der Versicherungsdauer bei gleichbleibenden Prämien (gemischte Versicherung)

Die neue Dauer betrage $n' < n$. Dann

$$S \cdot {}_mV^{(Z)}_{x\overline{n}|} + S \cdot P^a_{x\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} + Z$$

$$= S \cdot A_{x+m\overline{n'-m}|} + S \cdot \gamma\ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} + S \cdot \beta P^a_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} + \beta Z$$

Der Anteil βZ entfällt bei Bonus-Anrechnung[1].

$$\begin{aligned}(1-\beta)Z &= S(A_{x+m\overline{n'-m}|} + \gamma\ddot{a}_{x+t\overline{n'-m}|} + \beta P^a_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t\overline{n'-m}|} - P^a_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t\overline{n'-m}|} - {}_mV^{(Z)}_{x\overline{n}|}) \\ &= S(A_{x+m\overline{n'-m}|} - P^{(Z)}_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} - (A_{x+m\overline{n'-m}|} - P^{(Z)}_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|}))\end{aligned}$$

Bei der Zuzahlung ist n' bekannt, gesucht wird Z; Z ist bei Bonus-Anrechnung bekannt, hier sucht man n'.
Es ist $A_{x\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x\overline{n}|}, d = iv$, und $\ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|} - \ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} = \frac{N_{x+m}-N_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{N_{x+m}-N_{x+n'}}{D_{x+m}} = \frac{N_{x+n'}-N_{x+n}}{D_{x+m}}$. Also

$$\begin{aligned}(1-\beta)Z &= S(1 - d\ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} - (1 - d\ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|} - P^{(Z)}_{x\overline{n}|}(\ddot{a}_{x+m\overline{n'-m}|} - \ddot{a}_{x+m\overline{n-m}|})) \\ &= S(P^{(Z)}_{x\overline{n}|} + \alpha)\frac{N_{x+n} - N_{x+n'}}{D_{x+m}}\end{aligned}$$

Um beim Bonus-Problem nun n' zu finden, stellt man dies ($\beta = 0$) um zu

$$N_{x+n'} = \frac{Z \cdot D_{x+m}}{S(P^{(Z)}_{x\overline{n}|} + \alpha)} + N_{x+n}$$

und sucht das $\tilde{n}$, für das

$$N_{x+\tilde{n}} < N_{x+n'} \leq N_{x+\tilde{n}+1}$$

Nun wird die Dauer auf $n = \tilde{n} + 1$ festgelegt. Der daraus resultierende Zahlbeitrag $\tilde{Z}$ ist größer als Z; die Differenz wird dann angespart.

[1] Anrechnung von Gewinnanteilen zur Verkürzung der Versicherungsdauer

Index

abgezinste Lebende, 13
abgezinste Tote, 13
Abzinsungsfaktor, 8
Äquivalenzprinzip, 4
Alterungsrückstellung, 20
Aufzinsungsfaktor, 8

Bonus-Anrechnung, 32

Deckungskapital, 20
Deckungsrückstellung, 20

Gesamtdeckungskapital, 22

Kosten
    Abschluss-, 26
    Inkasso-, 26
    laufende Verwaltungs-, 26

Leibrentenbarwert, 14

Rückkaufswert, 25
Rekursionsformel, 24
Risikoprämie, 24

Sparprämie, 24
Sterbetafel
    -ansatz, 14
Sterbewahrscheinlichkeit, 11

Überlebenswahrscheinlichkeit, 11

Versicherung, 4
versicherungstechnischer Ansatz, 14

Wahrscheinlichkeit
    -sansatz, 14

Zeitrente
    -nbarwert, 9
Zeitrenten, 9
Zillmer, 27
    -Prämie, 27
    -Quote, 27
    -Rückstellung, 28