Topologie

Prof. Dr. R.J. Nessel

Sommersemester 95

Topologie = Einführung in die Mengentheoretische Topologie.
Lokale Strukturen (nicht: globale, allgemeine Topologie etc.), d.h. wichtigste Begriffe aus Analysis I und Analysis II (Konvergenz, Stetigkeit und Kompaktheit etc.) werden analysiert mit dem Ziel, dies in möglichst allgemeinen Mengen zu verstehen (nicht nur in $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$).
$\Rightarrow$ Analyse der Strukturen.
Sukzessives Einbringen von Eigenschaften die wirklich nötig sind.
Hier: Topologie als Verallgemeinerung von (Teilen) Ana I+II und Vorstufe zur Funktionalanalysis (z.B. lineare topologische Räume)
-nicht zum eigentlichen Gebiet der Topologie.
„Geburtsstunde": F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914

Ich hoffe, das Skript ist soweit fehlerlos. Sollte aber jemand von Euch trotzdem etwas finden, das zu bemängeln ist, dann schickt mir (`gomez@math.math.rwth-aachen.de`) oder der Fachschaft eine E-Mail.

Klaus

Kapitel I

Topologische Räume

Kapitel I.a) Offene Mengen

Definition 1 *Sei X eine (nichtleere) Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X (d.h. die Klasse aller Teilmengen von X).*
Ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X (also $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) heißt eine **Topologie** *für X, falls $\mathcal{T}$ den folgenden Axiomen genügt:*

(O_1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.

(O_2) *Gilt $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$, dann*

$$\Rightarrow \cap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T},$$

d.h. Der Durchschnitt von **endlich** *vielen Mengen aus $\mathcal{T}$ gehört auch zu $\mathcal{T}$.*

(O_3) *Ist $\mathcal{G}$ ein beliebiges Teilsystem von $\mathcal{T}$,dann*

$$\Rightarrow \cup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T},$$

d.h. die Vereinigung von **beliebig** *(auch überabzählbar) vielen Mengen aus $\mathcal{T}$ gehört stets zu $\mathcal{T}$.*

Also: Die Klasse $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X sei **abgeschlossen** unter der Bildung von **endlichem Durchschnitt** und von **beliebiger Vereinigung**.
Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die **offenen Mengen von** X (**bezüglich** $\mathcal{T}$). Ist X eine mit einer Topologie $\mathcal{T}$ versehene Menge, so bezeichnet man das Paar $(X, \mathcal{T})$ als einen **topologischen Raum**. Die Elemente von X heißen **Punkte** des topologischen Raums.

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}^1, \mathcal{T}$ = Klasse aller im klassischen Sinne (Ana I) offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ einschließlich $\emptyset$ und $\mathbb{R}$. $\Rightarrow (O_1)$.
   Zu (O_2): Es gilt (Ana I.) $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$, also klassisch offen $\Rightarrow G_1 \cap G_2$ sind klassisch offen, also $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.
   Ebenso für endliche Durchschnitte, aber **nicht** für beliebig viele Klassen von offenen Mengen, denn z.B. für die abzählbar vielen Mengen $G_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\cap_{n=1}^{\infty} G_n = [0, 1]$ $\Rightarrow$ **nicht** offen.
   Bemerkung: Axiom (O_2) reflektiert gerade diese Eigenschaften von $\mathbb{R}$.
   Zu (O_3): Gilt entsprechend (Ana I).
   $\Rightarrow$ Ist $\mathcal{T}$ die Klasse aller im klassischen Sinne offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum (im Sinne von Definition 1). Die so definierte Topologie für $\mathbb{R}$ wird als die **natürliche Topologie** für $\mathbb{R}$ bezeichnet. Bezeichnung: $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{natürlich}})$.

2. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie und $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum. $\mathcal{T}$ heißt die **triviale** (indiskrete) Topologie.

3. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Jede Teilmenge von X ist offen, insbesondere jede einpunktige Menge von X[1]. $\mathcal{T}$ heißt **diskrete** Topologie.

Bemerkung: Offenbar bildet Beispiel 2 eine kleinste, Beispiel 3 eine größte Topologie für die feste Menge X; genauer:

Definition 2 *a) Zwei topologische Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ heißen* **gleich**. $\Leftrightarrow$ *Wenn $X_1 = X_2$ und wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, d.h. falls die Elemente und die offenen Mengen in beiden Räumen übereinstimmen.*

b) Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien für eine Menge X. Falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ (d.h. jedes Element von $\mathcal{T}_1$ ist auch ein Element von $\mathcal{T}_2$, d.h. jede bezüglich $\mathcal{T}_1$ offene Teilmenge von X ist auch bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_2$ offen), dann heißt die Topologie $\mathcal{T}_1$ **kleiner** *(***gröber***) als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$* **größer** *(***feiner***) als $\mathcal{T}_1$.*

Beispiele:

1. Die triviale Topologie einer Menge X ist gröber als die diskrete. Genauer: Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie von X und die diskrete Topologie ist die feinste Topologie von X.

2. Sei $X = \mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^1\}$.
   Sei $\mathcal{T}_1$ =diskrete Topologie. Sei $\mathcal{T}_2$ =System aller im klassischen Sinne offenen Mengen von $\mathbb{R}^2$ (Ana I, vgl. Ü1.A 4), also „die von der Euklidischen Metrik induzierte Topologie".
   Bezeichnung: natürliche Topologie von $\mathbb{R}^2$ $\quad (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{nat}})$.
   Sei $\mathcal{T}_3$ System aller Mengen G_A der Form:

$$G_A := \{(x, y) : x \in A, y \in \mathbb{R}^1\},$$

   wobei A beliebige im klassischen Sinne offene Teilmenge des $\mathbb{R}^1$ ist.
   Bezeichnung: Streifen Topologie (Zeige: Ist Topologie!)
   Sei $\mathcal{T}_4$ =triviale Topologie von $\mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow \text{ vgl. Def. 2(b): } \mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$$
$$\text{gröber} \longleftarrow \qquad \longrightarrow \text{feiner}$$

Bemerkung: Gegebene Menge X kann mit verschiedenen Topologien versehen werden (die nicht immer vergleichbar sind, z.B. „Waagerechte Streifen"), beachte: $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i) \quad , i = 1, 2, 3, 4$ sind verschiedene Topologische Räume.
Ziel: Aufbau einer „Analysis" in topologischen Räumen.

Definition 3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f \in X$ ein beliebiger Punkt. Eine (beliebige) Teilmenge $U \subset X$ heißt eine* **Umgebung von** *f (bezgl. $\mathcal{T}$), falls eine offene Menge G existiert (d.h. $G \in \mathcal{T}$) mit $f \in G \subset U$ (insbesondere $f \in U$). Insbesondere heißt jedes $G \in \mathcal{T}$ mit $f \in G$ eine* **offene Umgebung von** *f.*

Lemma 1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $G \subset X$ beliebig. Dann gilt die folgende* **Charakterisierung von offenen Mengen:**

$$G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \text{ Zu jedem } g \in G \quad \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } g, \text{ so daß } U \subset G.$$

Beziehungweise:

$$G \text{ offen } \Leftrightarrow G \text{ enthält eine Umgebung jedes inneren Punktes.}$$

Beziehungsweise:

$$G \text{ offen } \Leftrightarrow G \text{ ist Umgebung jedes inneren Punktes.}$$

[1] Dies ist auch hinreichend, vgl. Kapitel I.e)

Beweis: „⇒": Sei $G \in \mathcal{T}$ und $f \in G$ beliebig.
⇒ Definition 3: G ist eine (offene) Umgebung von f.
⇒ mit $U = G$: G enthält eine Umgebung jedes inneren Punktes.
„⇐": Zu jedem $f \in G \exists$ Umgebung $U_f \subset G$.
⇒ Definition 3: Zu gegebenem $f \in G \quad \exists$ (offenes) $G_f \in \mathcal{T}$, $f \in G_f \subset U_f \subset G$.
$\Rightarrow G = \cup_{f\in G}\{f\} \subset \cup_{f\in G} G_f \subset G \Rightarrow G = \cup_{f\in G} G_f$
Wegen (O_3), da $G_f \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{f\in G} G_f \in \mathcal{T} \Rightarrow G \in \mathcal{T}$. □

Kapitel I.b) Umgebungen

Lemma 2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.* $\Longrightarrow$

(U_1) *Zu jedem $f \in X$ existiert mindestens eine Umgebung U von f, und jede Umgebung von f enthält f.*

(U_2) *Für jedes $f \in X$ gilt: Ist U eine Umgebung von f und U' eine (beliebige) Teilmenge von X mit der Eigenschaft:*

$$U \subset U', \text{ dann folgt: } U' \text{ ist Umgebung von } f.$$

(U_3) *Für jedes $f \in X$ und jedes Paar U, V von Umgebungen von f ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ eine Umgebung von f.*

(U_4) *Zu jedem $f \in X$ und jeder Umgebung U von $f \quad \exists$ Umgebung $U^\star$ von f mit $U^\star \subset U$ und U ist Umgebung jedes Punktes von $U^\star$.*

Beweis:

Zu (U_1): Sei $f \in X$ beliebig, aber fest.
⇒ Definition 1,3: X ist eine (offene) Umgebung von f, d.h. zu jedem $f \in X$ existiert Umgebung von f.
Sei U beliebige Umgebung von f. Dann ist $f \in U$ (Definition 3), und insbesondere ist $U \neq \emptyset$ für jede Umgebung (von f).

Zu (U_2): Sei U Umgebung von f und $U \subset U' \subset X$.
Nach Definition 3: $\exists$ offenes G, so daß $f \in G \subset U$. $\Longrightarrow f \in G \subset U' \Rightarrow$ Definition 3: U' ist Umgebung von f.

Zu (U_3):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sei } U \text{ Umgebung von } f.\\ \text{Sei } V \text{ Umgebung von } f.\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Def. 3} \left\{\begin{array}{l}\exists \text{ offenes } G, \text{ so daß } f \in G \subset U.\\ \exists \text{ offenes } H, \text{ so daß } f \in H \subset V.\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \in G \cap H \\ \subset U \cap V.\end{array}$$

Da G, H offen. $\Longrightarrow (O_2)$: $G \cap H$ offen. ⇒ Definition 3: $U \cap V$ ist Umgebung von f.

Zu (U_4): Sei $f \in X$ und U Umgebung von f.
⇒ Definition 3: $\exists$ offenes G, so daß $f \in G \subset U$.
Zeige: $U^\star = G$ erfüllt die Bedingung, dazu $G \subset U$ klar.
Da G offen ⇒ Definition 3: Für jedes $g \in G$ ist G eine offene Umgebung von g.
⇒ (U_2) : Für jedes $g \in G$ ist (die Obermenge) U Umgebung von g.

□

Definition 4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f \in X$. Die Klasse $\mathcal{U}_f$ aller Umgebungen von f heißt das* **Umgebungssystem von** *f (in X bzgl. $\mathcal{T}$).*
⇒ *mittels $\mathcal{U}_f$ können die Eigenschaften $(U_1)-(U_4)$ von Lemma 2 folgendermaßen ausgedrückt werden:*

(U_1) *Für jedes $f \in X$ ist $\mathcal{U}_f \neq \emptyset$, und es gilt $f \in U$, für alle $U \in \mathcal{U}_f$.*

(U_2) *Sind $f \in X, U \in \mathcal{U}_f$ und $U' \supset U$. $\Rightarrow U' \in \mathcal{U}_f$.*

(U_3) *Sind* $f \in X$ *und* $U, V \in \mathcal{U}_f$. $\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_f$.

(U_4) *Sind* $f \in X, U \in \mathcal{U}_f$. $\Rightarrow \exists\, U^\star \in \mathcal{U}_f$ *mit* $U^\star \subset U$ *und* $U \in \mathcal{U}_g\, \forall g \in U^\star$.

Bisher: Gegeben $(X, \mathcal{T})$ über Definition 1. $\rightarrow$ Bilde $\mathcal{U}_f\, \forall f \in X$. $\rightarrow$ Eigenschaften $(U_1) - (U_4)$.
Fragen:

1. Gegeben sei Menge X und zu jedem $f \in X$ ein Teilmengensystem $\mathcal{V}_f \subset \mathcal{P}(X)$, das die Bedingungen $(U_1) - (U_4)$ erfüllt.
   Enthält die Klasse der Teilmengen $\{U \subset X : \exists f \in X$, so daß $U \in \mathcal{V}_f\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie $\mathcal{T}^\star$ für X?
   Existenzfrage: Antwort in Lemma 3.

2. Gegeben sei $(X, \mathcal{T})$ und zu jedem $f \in X$ sei $\mathcal{U}_f$ das Umgebungssystem von f (Definition 4), das durch die gegebene Topologie $\mathcal{T}$ bestimmt ist (Lemma 2). Nach Lemma 3 enthält die Klasse $\{U \subset X : \exists f \in X$, so daß $U \in \mathcal{U}_f\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie $\mathcal{T}^\star$ für X.
   Gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\star$? (Frage nach der Eindeutigkeit.)

Definition 5 *Sei* $X\, (\neq \emptyset)$ *eine Menge. Zu jedem* f *aus* X *sei ein System* $\mathcal{V}_f \subset \mathcal{P}(X)$ *gegeben, das die Axiome* $(U_1) - (U_4)$ *erfüllt. Das Paar* $(X, \mathcal{V})$ *mit* $\mathcal{V} := \{V \subset X : \exists f \in X$,*so daß* $V \in \mathcal{V}_f\}$ *heißt ein* **Umgebungsraum**.

Lemma 3 *Sei* $(X, \mathcal{V})$ *ein Umgebungsraum. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{T}_\mathcal{V} := \underbrace{\{G \subset X : G \in \mathcal{V}_g\, \forall g \in G\} \cup \{\emptyset\}}_{Kandidat}$ *ist eine Topologie für* X.

(ii) Für jedes $f \in X$ *gilt:*
$U \in \mathcal{V}_f$ *(*f *irgendwie vorgegeben)* $\Longleftrightarrow$ U *ist Umgebung von* f *bzgl. der Topologie* $\mathcal{T}_\mathcal{V}$.

Beweis:

(i): Zeige $(O_1) - (O_3)$ für das System $\mathcal{T}_\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ (wohldefiniert).
Dazu:

Zu (O_1): Überlegungen über $\emptyset$ und X. $\emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$, da Bedingungen für $G = \emptyset$ trivial. $X \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$, denn gegeben sei $f \in X \Rightarrow (U_1) : \exists\, V \in \mathcal{V}_f\, \forall f \in X$.
Da $V \subset X \Rightarrow (U_2)$: $X \in \mathcal{V}_f\, \forall f \in X \Rightarrow$ Definition von $\mathcal{T}_\mathcal{V} : X \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$.

Zu (O_2): Seien $G, H \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$ gegeben. Zeige $G \cap H \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$.
Dazu: Ist $G \cap H = \emptyset \Rightarrow (O_1)$: $G \cap H \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$.
Sei $G \cap H \neq \emptyset$ und $f \in G \cap H$ beliebig $\Longrightarrow$ Def. $\mathcal{T}_\mathcal{V} : G, H \in \mathcal{V}_f$.
$\Rightarrow (U_3)$: $G \cap H \in \mathcal{V}_f$.
Da $f \in G \cap H$ beliebig $\Rightarrow G \cap H \in \mathcal{V}_f\, \forall f \in G \cap H \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$.
Analog für endlich viele Mengen.

Zu (O_3): Sei $\mathcal{G}$ beliebige Familie von Teilmengen G aus X, so daß $G \in \mathcal{T}_\mathcal{V}\, \forall G \in \mathcal{G}$. Zeige:

$$\cup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}_\mathcal{V},$$

Dazu sei $f \in \cup_{G \in \mathcal{G}} G$ beliebig. $\Rightarrow \exists\, G_0 \in \mathcal{G}$, so daß $f \in G_0$.
Da $G_0 \in \mathcal{T}_\mathcal{V} \Rightarrow G_0 \in \mathcal{V}_f$.
Da $G_0 \subset \cup_{G \in \mathcal{G}} G$. $\Rightarrow (U_2)$: $\cup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{V}_f\, \forall\, f \in \cup_{G \in \mathcal{G}} G$.

$$\Longrightarrow \cup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{T}_\mathcal{V}.$$

Bemerkung: Bisher nur $(U_1) - (U_3)$ benutzt: (U_4) in (ii).

(ii): „⇒": Sei $f \in X$ beliebig, aber fest und $U \in \mathcal{V}_f$. Setze $H := \{h \in U : U \in \mathcal{V}_h\} \Rightarrow (U_1) : f \in H \subset U$.
Zeige: $H \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ (d.h. H ist offen bezüglich $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$), da dann U Umgebung von f bezüglich Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ im Sinne der Definition 3 ($f \in H \subset U$) ist.
Dazu: Nach Definition von H : $U \in \mathcal{V}_h \, \forall \, h \in H$. Nach (U_4) gilt: Zu jedem $h \in H$ und $U \in \mathcal{V}_h \, \exists V_h \in \mathcal{V}_h$, so daß $V_h \subset U$ und $U \in \mathcal{V}_g \, \forall g \in V_h$.
$\Rightarrow$ Def. von H : $V_h \subset H \Rightarrow (U_2)$: $H \in \mathcal{V}_h \, \forall h \in H. \Rightarrow H \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}}$.
„⇐": Sei $f \in X$ beliebig, aber fest und U Umgebung von f bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$. $\Rightarrow$ Def. 3: $\exists \, G \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}}$, so daß $f \in G \subset U$.
Da $f \in G$ und $G \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}} \Rightarrow$ Def. $\mathcal{T}_{\mathcal{V}} : G \in \mathcal{V}_f$, da $G \subset U$. $\Rightarrow (U_2) : U \in \mathcal{V}_f$. □

Bemerkungen: Lemma 3(ii) ist eine **Eindeutigkeitsaussage** (bzgl. Umgebung). Die Elemente des Umgebungsraumes (Def. 5) sind identisch mit der Umgebung bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ (def.: Lemma 3(i)) im Sinne von Definition 3.

Satz 1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und zu jedem $f \in X$ sei $\mathcal{U}_f$ das Umgebungssystem von f bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ (Def. 4). Sind $\mathcal{U} := \{U \subset X : \exists \, f \in X$, so daß $U \in \mathcal{U}_f\}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ die nach Lemma 3(i) konstruierte Topologie auf X (vgl. Lemma 2)*

$$\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T} \qquad \textit{(Def. 2(a))}.$$

Beweis: Sei $f \in X$ beliebig, fest. $\Rightarrow$ Lemma 2: $\mathcal{U}_f$ genügt $(U_1) - (U_4)$. $\Rightarrow$ Def. 5: $(X,\mathcal{U})$ ist ein Umgebungsraum.
$\Rightarrow$ Lemma 3 anwendbar auf $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. $\Rightarrow$ Lemma 3(i): $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ist eine Topologie für X.
Zeige: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, dazu: $G \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. $\Leftrightarrow$ Def. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ und Lemma 3(i): $G \in \mathcal{U}_g \, \forall g \in G \Leftrightarrow$ Def. $\mathcal{U}_g$: G ist eine Umgebung von g bezüglich Topologie $\mathcal{T}$ für jedes $g \in G$.
$\Leftrightarrow$ Lemma 1: $G \in \mathcal{T}$. □
Bemerkung: Statt Einstieg über Def. 1 (offene Mengen: Axiome $(O_1) - (O_3)$ und Definition von Umgebungen [2] ist auch folgendes Vorgehen **äquivalent** möglich (Lemma 3 mit Satz 1): Einstieg über Def. 5 (Umgebungsraum: Axiome $(U_1) - (U_4)$) und Definition von offenen Mengen (Definition in Lemma 3).

Kapitel I.c) Abgeschlossene Mengen: Kuratowski-Axiome

Definition 6 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Ein Punkt $f \in X$ heißt* **Häufungspunkt** *(HP)* **von** *A, falls jede Umgebung (Def. 3) von f mindestens einen von f verschiedenen Punkt $g \in A$ enthält, d.h. f ist HP von A. $\Leftrightarrow (A \cap U) \setminus \{f\} \neq \emptyset \, \forall \, U \in \mathcal{U}_f$ (Def. 4).*
Die **derivierte Menge** *A^+ von A ist die Menge aller HP von A.*

Lemma 4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A, A_1, A_2 \subset X$ beliebig. Dann gilt:*

(i) $\emptyset^+ = \emptyset$.

(ii) Ist $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1^+ \subset A_2^+$.

(iii) Ist $f \in A^+ \Rightarrow f \in (A \setminus \{f\})^+$.

(iv) $(A_1 \cup A_2)^+ = A_1^+ \cup A_2^+$.

Beweis: Übung 2, A?. □

Definition 7 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt* **abgeschlossen**, *falls sie alle ihre HP enthält, d.h. falls $A^+ \subset A$ ist.*

Lemma 5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $F \subset X$ abgeschlossen. Ist $f \notin F \Rightarrow \exists$ offenes G (Definition 1), so daß $f \in G \subset \complement_X F$.*

[2] Definition 3 mit Eigenschaften $(U_1) - (U_4)$ aus Lemma 2

Beweis: Annahme: Jedes offene G (mit $f \in G$) enthalte Punkte aus F.
$\Rightarrow$ Aus $f \in G$ folgt: $G \cap F \neq \emptyset \, \forall G \in \mathcal{T}$.
Da $f \notin F \Rightarrow (G \cap F) \setminus \{f\} \neq \emptyset \, \forall \, G \in \mathcal{T}$ mit $f \in G$.
$\Rightarrow$ Definition 3: $(U \cap F) \setminus \{f\} \neq \emptyset \, \forall \, U \in \mathcal{U}_f$.
$\Rightarrow$ Definition 6: $f \in F^+ \Rightarrow$ Definition 7: $f \in F$. Widerspruch. $\square$

Folgerung 1 *Ist F abgeschlossen $\Rightarrow \complement_X F$ ist offen.*

Beweis: Sei $f \in \complement_X F$ beliebig. $\Rightarrow f \notin F \Rightarrow$ Lemma 5: $\exists \, G \in \mathcal{T}$, so daß $f \in G \subset \complement_X F$.
Da $f \in \complement_X F$ beliebig $\Rightarrow \complement_X F$ ist Umgebung jeder seiner Punkte. $\Rightarrow$ Lemma 1: $\complement_X F$ ist offen. $\square$

Folgerung 2 *Ist $\complement_X F$ offen $\Rightarrow F$ abgeschlossen.*

Beweis: Annahme: F sei nicht abgeschlossen, d.h.: $\exists$ HP f von F, so daß $f \notin F \Rightarrow f \in \complement_X F$.
Da $\complement_X F$ offen. $\Rightarrow$ Lemma 1: $\complement_X F$ enthält eine Umgebung U_f von f: $f \in U_f \subset \complement_X F$.
$\Rightarrow U_f \cap F = \emptyset \Rightarrow (U_f \cap F) \setminus \{f\} = \emptyset$ für mindestens ein $U_f \in \mathcal{U}_f$.
$\Rightarrow$ Definition 6: f ist nicht HP von F. Widerspruch. $\square$

Folgerung 3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $F \subset X$ beliebig. Dann gilt: F abgeschlossen. $\Leftrightarrow \complement_X F$ ist offen.*

Beweis: Folgerungen 1+2. $\square$

Lemma 6 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ die Klasse aller abgeschlossenen Teilmengen von X. Es gelten (vgl. Definition 1):*

(A_1) $\emptyset \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.

(A_2) *Falls* $F_i \in \mathcal{F} \, \forall 1 \leq i \leq n$.

$$\cup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}.$$

(A_3) *Falls* $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{F} \, \forall \, \alpha \in I$ *(beliebige Indexmenge)*

$$\Rightarrow \cap_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}.$$

Beweis:

Zu (A_1): $\complement_X \emptyset = X$ ist offen (Def. 1 (O_1)). $\Rightarrow$ Folgerung 2: $\emptyset \in \mathcal{F}$.
$\complement_X X = \emptyset$ ist offen (Definition 1 (O_1)). $\Rightarrow X \in \mathcal{F}$.

Zu (A_2): De-Morgan-Regeln: $\Rightarrow \complement_X \left(\cup_{i=1}^n F_i\right) = \cap_{i=1}^n \left(\complement_X F_i\right)$
Nach Voraussetzung: F_i abgeschlossen $\forall 1 \leq i \leq n$. $\Rightarrow$ Folgerung 1: $\complement_X F_i$ ist offen $\forall 1 \leq i \leq n$. $\Rightarrow$ (O_2): $\cap_{i=1}^n \left(\complement_X F_i\right)$ ist offen. $\Rightarrow \complement_X \left(\cup_{i=1}^n F_i\right)$ ist offen. $\Rightarrow$ Folgerung 2: $\cup_{i=1}^n F_i$ ist abgeschlossen.

Zu (A_3): De-Morgan-Regeln: $\complement_X \left(\cap_{\alpha \in J} F_\alpha\right) = \cup_{\alpha \in J} \left(\complement_X F_\alpha\right)$.
Nach Voraussetzung: F_α ist abgeschlossen $\forall \, \alpha \in J$. $\Rightarrow$ Folgerung 1: $\complement_X F_\alpha$ ist offen. $\forall \, \alpha \in J$. $\Rightarrow$ $(O_3) : \cup_{\alpha \in J} (\complement F_\alpha)$ ist offen. $\Rightarrow$ $\complement(\cap_{\alpha \in J} F_\alpha)$ ist offen. $\Rightarrow$ Folgerung 2: $\cup_{\alpha \in J} F_\alpha$ ist abgeschlossen. $\square$

Entsprechung zur Situation bei Umgebungen vgl. Lemma 3 + Satz 1.
Die Eigenschaften $(A_1) - (A_3)$ beschreiben als Axiome wieder eindeutig eine Topologie.

Satz 2 *Sei $X (\neq \emptyset)$ eine Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, das die Axiome $(A_1) - (A_3)$ erfüllt. Sei (vgl. Folgerung 1 bzgl. Kandidat)*

$$\mathcal{T}_\mathcal{F} := \left\{G \subset X : G = X \setminus F = \complement_X F \text{ für ein } F \in \mathcal{F}\right\}$$

Dann gilt:

(i) $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ ist eine Topologie für X.

(ii) Sei $\mathcal{F}^\star$ die Klasse aller bzgl. $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ abgeschlossenen Mengen in X (Definition 7).

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^\star = \mathcal{F}.$$

(iii) Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ die Klasse aller bzgl. $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Teilmengen von X. Sei $\mathcal{T}_\mathcal{F}$, die nach (i) und Lemma 6 konstruierte Topologie für X.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{F}.$$

Beweis zu (i):

Zu (O_1): Zeige $X, \emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$, dazu
Wegen (A_1) ist $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \text{ Definition: } \mathcal{T}_\mathcal{F} = \begin{cases} X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \\ \emptyset = X \setminus X \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \end{cases}$$

Zu (O_2): Zeige $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$. Dazu:

$$\text{Da } \begin{array}{l} G_1 \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \Rightarrow \exists\, F_1 \in \mathcal{F}, \text{ so daß } G_1 = X \setminus F_1 \\ G_2 \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \Rightarrow \exists\, F_2 \in \mathcal{F}, \text{ so daß } G_2 = X \setminus F_2 \end{array} \Rightarrow (A_2) : F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \complement F_1 \cap \complement F_2$. $\Rightarrow$ De-Morgan: $G_1 \cap G_2 = \complement(F_1 \cup F_2)$.

$$\Rightarrow \text{ Definition } \mathcal{T}_\mathcal{F} : \quad G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_\mathcal{F}.$$

Entsprechend für endlich viele $G_1, \ldots, G_n$.

Zu (O_3): Zeige aus $G_\alpha \in \mathcal{T}_\mathcal{F} \quad \forall\, \alpha \in J$ (beliebige Indexmenge). $\Rightarrow \quad \cup_{\alpha\in J} G_\alpha \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$, dazu: Da $G_\alpha \in \mathcal{T}_\mathcal{F}\, \forall \alpha \in J$. $\Rightarrow \exists\, F_\alpha \in \mathcal{F}$, so daß $G_\alpha = \complement_X F_\alpha\, \forall \alpha \in J$.
$\Rightarrow \cup_{\alpha\in J} G_\alpha = \cup_{\alpha\in J}(\complement_X F_\alpha) \Rightarrow$ De-Morgan $\complement_X(\underbrace{\cap_{\alpha\in J} F_\alpha}_{\in \mathcal{F} \text{ nach } (A_3)})$

$$\Rightarrow \text{ Definition } \mathcal{T}_\mathcal{F} : \cup_{\alpha\in J} G_\alpha \in \mathcal{T}_\mathcal{F}.$$

Beweis (ii),(iii): Ü2, A3. □

Definition 8 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig. Die* **abgeschlossene Hülle** *(**Abschließung**) $\bar{A}$ von A ist definiert durch*

$$\bar{A} := A \cup \underbrace{A^+}_{Def.6}.$$

Lemma 7 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

(i) Sei $A \subset X$ beliebig und $B \subset X$ abgeschlossen, so daß $A \subset B$ ist.

$$\Rightarrow \quad \bar{A} \subset B.$$

(ii) Sei $A \subset X$ beliebig und $f \notin \bar{A}$. $\Rightarrow$ $\exists$ abgeschlossenes $B \subset X$, so daß zwar $A \subset B$, aber auch noch $f \notin B$.

Beweis:

(i): Sei $f \in \bar{A}$ beliebig. Zeige: $f \in B$; dazu:
Da $f \in \bar{A}$. $\Rightarrow$ Definition 8: $f \in A$ oder $f \in A^+$.
Da $A \subset B$ (Voraussetzung). $\Rightarrow f \in B$ oder $f \in B^+$ [Lemma 4 (ii)].
Da B abgeschlossen. $\Rightarrow$ Definition von f: $f \in B$.

(ii): Sei $f \notin \bar{A}$, d.h.: $f \notin A^+$ und $f \notin A$.
Da $f \notin A^+ \Rightarrow$ Definition 6: $\exists$ Umgebung U_f von f, so daß $(U_f \cap A) \setminus \{f\} = \emptyset$.
Da $f \notin A \Rightarrow U_f \cap A = \emptyset$.
Da U_f Umgebung von $f \Rightarrow$ Definition 3: $\exists$ offenes G_f, so daß $f \in G_f \subset U_f$.
$\Rightarrow G_f \cap A = \emptyset$, d.h. $A \subset \complement_X G_f$.
Setze: $B := \complement_X G_f$ und zeige: B hat die gewünschte Eigenschaften. Dazu:
$A \subset B$ und B abgeschlossen nach Folgerung 2.
Da $f \in G_f$. $\Rightarrow f \notin \complement_X G_f =: B$. $\square$

Lemma 8 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig.*

$$\Rightarrow \qquad \bar{A} = \cap_{\substack{B \text{ abg.} \\ A \subset B}} B.$$

Beweis: Zeige $\bar{A} \subset \cap_{\substack{B \text{abg.} \\ A \subset B}} B$, dazu:
$A \subset \cap B$ ist klar. Da B abgeschlossen. $\Rightarrow \quad (A_3) : \cap_{\substack{B \text{abg.} \\ A \subset B}} B$ ist abgeschlossen.

$$\Rightarrow \text{ Lemma 7(i): } \bar{A} \subset \cap_{\substack{B \text{abg.} \\ A \subset B}} B.$$

Zeige $\cap_{\substack{B \text{abg.} \\ A \subset B}} B \subset \bar{A}$. Dazu:
Annahme: $\exists f \in \cap_{\substack{B \text{abg.} \\ A \subset B}} B$ mit $f \notin \bar{A}$.
$\Rightarrow$ Lemma 7 (ii): $\exists$ abgeschlossenes B mit $A \subset B$ und $f \notin B$.

$$\Rightarrow \quad f \notin \cap_{\substack{B \text{abg.} \\ A \subset B}} B. \text{ Widerspruch. } \square$$

Folgerung 4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig.*
$\Rightarrow$ *$\bar{A}$ ist abgeschlossen, und $\bar{A}$ ist die kleinste, abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält {vgl. Ana. I: Minimum, Infinum}.*

Einschub:

Sei X beliebig ($\neq \emptyset$) Menge. Eine **Relation** R in X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$.
Bezeichnung: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1 R x_2$: x_1 steht in Relation zu x_2.

- R ist **reflexiv**, falls xRx, $\forall x \in X$.
- R ist **symmetrisch**, falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $x_1 R x_2$ folgt: $x_2 R x_1$.
- R ist **antisymmetrisch**, falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $x_1 R x_2$ und $x_2 R x_1$ folgt: $x_1 = x_2$.
- R ist **transitiv**, falls aus $x_1, x_2, x_3 \in X$ und $x_1 R x_2$, $x_2 R x_3$ folgt: $x_1 R x_3$.

R heißt **Halbordnung auf** X, falls R reflexiv, antisym. und transitiv ist.
Bezeichnung:

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1 \prec x_2$$

x_1 liegt links von x_2, bzw. x_1 ist kleiner als x_2 (im Sinne der Halbordnung „$\prec$").
$\Rightarrow X$ ist **partiell geordnet** durch R.
Ist „$\prec$" Halbordnung auf X und gilt für alle $x_1, x_2 \in X$: $\quad x_1 \prec x_2$ oder $x_2 \prec x_1$, dann heißt die Halbordnungsrelation **Ordnungsrelation**. X heißt **total geordnet** unter „$\prec$". Sei ein beliebiges X durch „$\prec$" partiell geordnet und $A \subset X$ beliebig. $\Rightarrow$ Ana. I: $x \in X$ heißt eine **obere [untere] Schranke** von A, falls $y \prec x \, [x \prec y] \, \forall \, y \in A$.
Bemerkung: Eine Menge $A \in X$ kann im allgemeinen mehrere obere Schranken haben.
Ein Element $z \in X$ heißt **Supremum [Infinum]** von A, falls z die kleinste obere [größte untere] Schranke von A ist, d.h. falls

(i) $y \prec z \; [z \prec y] \; \forall \, y \in A$. ($z$ ist obere [untere] Schranke).

(ii) Für jede weitere obere [untere] Schranke x von A gilt $z \prec x \; [x \prec z]$.

Beispiel: Sei X beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Durch „$\subset$" (d.h. enthalten oder gleich) wird eine Relation auf $\mathcal{P}(X)$ gegeben. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ist: $ARB \quad \Leftrightarrow A \subset B$.
$\Rightarrow$ „$\subset$" ist reflexiv, antisym. und transitiv, also eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$ (beachte: „$\subset$" ist keine Ordnungsrelation).
Bemerkung: Zur Eindeutigkeit des Supremums. Seien $z_1, z_2 \in X$ Suprema von A.

$\Rightarrow$ (i): z_1, z_2 sind obere Schranken von A.

$\Rightarrow$ (ii): $z_1 \prec z_2$ und $z_2 \prec z_1$. $\Rightarrow$ Antisym.: $z_1 = z_2$.

Beweis zur Folgerung 4: Für die unter „$\subset$" partiell geordnete Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ zeige: $\bar{A}$ ist das Infinum der Familie

$$\mathcal{A} := \{B \subset X : A \subset B \text{ und } B \text{ abgeschlossen}\}$$

dazu (sogar)

(i) $\bar{A}$ ist abgeschlossen und $A \subset \bar{A}$, also $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(ii) $\bar{A}$ ist eine untere Schranke von $\mathcal{A}$

(iii) Für jede weitere untere Schranke C von A gilt, daß $C \subset \bar{A}$ ist, d.h. $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ist die größte untere Schranke (Infinum) von $\mathcal{A}$.

zu (i):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Nach Lemma 8:} & \bar{A} = \cap_{B\in\mathcal{A}} B. \\ \text{Nach } (A_3) \text{ aus Lemma 6:} & \cap_{B\in\mathcal{A}} B \text{ abgeschlossen.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \text{ abgeschlossen.}$$

Klar (Def. 8): $A \subset \bar{A}$, also insbesondere $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

zu (ii): Nach Lemma 8: $\bar{A} = \cap_{B\in\mathcal{A}} B \Rightarrow \bar{A} \subset B \quad \forall\, B \in \mathcal{A}$, also untere Schranke von $\mathcal{A}$.

zu (iii): Sei C eine weitere untere Schranke zu $\mathcal{A}$, d.h.: $C \subset B \,\forall\, B \in \mathcal{A}$. Nach (i) ist $\bar{A} \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow \text{ insbesondere } C \subset \bar{A}. \quad \square$$

Bemerkung: Für die Aussage von Folgerung 4: „$\bar{A}$ ist kleinstes Element von $\mathcal{A}$" hätte es genügt zu zeigen:

(i): $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(ii): $\bar{A} \subset B \quad \forall\, B \in \mathcal{A}$ (vgl. Ü.2,A4,a)(iii)).

hier (sogar) gezeigt: $\bar{A}$ ist größte untere Schranke von $\mathcal{A}$ und $\bar{A} \in \mathcal{A}$ (Minimum von $\mathcal{A}$ vgl. mit Ana I.).

Lemma 9 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig. Dann gilt:*

$$A \textit{ ist abgeschlossen.} \Leftrightarrow \bar{A} = A.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Da A abgeschlossen ist $\Rightarrow$ Definition 7: $A^+ \subset A$. $\Rightarrow$ Definition 8: $\bar{A} := A \cup A^+ = A$.
„$\Leftarrow$": Da $A = \bar{A} = A \cup A^+$. $\Rightarrow A^+ \subset A$. $\Rightarrow$ Definition 7: A ist abschlossen. $\square$

Definition 9 *Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung*

$$h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

heißt **Hüllenoperator**, *falls h den folgenden* **Kuratowskischen Hüllenaxiomen** *genügt:*

(H_1) $h(\emptyset) = \emptyset$.

(H_2) $A \subset h(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

(H_3) $h(h(A)) \subset h(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

(H_4) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Bemerkung: Aus (H_2) und (H_3) folgt $h(h(A)) = h(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

Folgerung 5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*
$\Rightarrow$ Die Abbildung h, definiert durch $h(A) := \bar{A} \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$, ist ein Hüllenoperator.

Beweis: Ü3,A1(a). □

Satz 3 *Sei X eine beliebige Menge und h ein Hüllenoperator auf $\mathcal{P}(X)$: Sei $\mathcal{T}_h := \{G \subset X : \exists A \subset X$ mit $h(A) = A$, so daß $G = \complement_X A\}$ Dann folgt:*

(i) $\mathcal{T}_h$ ist eine Topologie für X.

(ii) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und ein Hüllenoperator h sei definiert durch $h(A) := \bar{A}$. Sei $\mathcal{T}_h$ die nach (i) (und Folgerung 5) konstruierte Topologie für X.

$$\Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}_h.$$

Beweis: Ü3,A1(b). □

Kapitel I.d) Inneres und Äußeres einer Menge

Definition 10 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Menge.*

a) Ein Punkt $f \in X$ heißt **innerer Punkt von** *A, falls eine Umgebung von f existiert, die in A enthalten ist.*
Das **Innere** *von A (Bezeichnung: int A) ist die Menge aller inneren Punkte von A.*

b) Ein Punkt $f \in X$ heißt **äußerer Punkt von** *A, falls eine Umgebung von f existiert, die keinen Punkt von A enthält.*
Das **Äußere** *von A (Bezeichnung: ext A) ist die Menge aller äußeren Punkte von A.*

c) Ein Punkt $f \in X$ heißt **Randpunkt von** *A, wenn in jeder Umgebung von f mindestens ein Punkt von A und ein Punkt von $\complement_X A$ liegt.*
Der **Rand** *von A (Bezeichnung: ∂A) ist die Menge aller Randpunkte von A.*

Lemma 10 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig.*

(i) int A ist offen.

(ii) int $A = \cup_{\substack{G \subset A \\ G \text{ offen}}} G$.

(iii) int A ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

(iv) $\complement_X(int\ A) = \overline{\complement_X A}$.

(v) int $A = \complement_X(\overline{\complement_X A})$.

(vi) $\complement_X \bar{A} =$int $(\complement_X A)$.

(vii) int (int (A)) =int (A).

(viii) $\bar{A} = (int\ A) \cup \partial A$ $(:= A \cup A^+$ nach Definition 8 $)$.

(ix) $\bar{A} = A \cup \partial A$.

(x) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\complement_X A}$.

(xi) $\partial A = \partial(\complement_X A)$.

Beweis: Ü2,A4(a). □

Bemerkung: bzgl. (iii): Falls auf $\mathcal{P}(X)$ über „$\subset$" eine Halbordnung eingeführt ist.
$\Rightarrow$ Kapitel I.c) Einschub: int A ist ein Supremum der Familie

$$\mathcal{B} := \{B \subset X : B \subset A \text{ und } B \text{ offen}\}$$

bzgl. dieser Halbordnung und int $A \in \mathcal{B}$.

Lemma 11 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ beliebig. Äquivalent sind:*

(i) A offen.

(ii) $A \cap \partial A = \emptyset$.

(iii) int $A = A$.

(iv) $\partial A \subset \mathcal{K}_X A$.

Beweis: Ü2,A4(b). □

Definition 11 *Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung*

$$k : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

heißt ein **Kernoperator**, *falls k den folgenden* **Kernaxiomen** *genügt (vgl. Definition 9):*

(K_1) $k(X) = X$.

(K_2) $k(A) \subset A \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

(K_3) $k(A) \subset k(k(A)) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

(K_4) $k(A \cap B) = k(A) \cap k(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Bemerkung: Aus (K_2) und (K_3) folgt: $k(A) = k(k(A)) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

Folgerung 6 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*
$\Rightarrow$ *Die Abbildung k, definiert durch $k(A) :=$int $A \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ ist ein Kernoperator.*

Beweis: Ü3,A2(a). □

Satz 4 *Sei X eine beliebige Menge und k ein Kernoperator auf $\mathcal{P}(X)$.*

$$\text{Sei } \mathcal{T}_k := \{G \subset X : k(G) = G\}.$$

(i) $\mathcal{T}_k$ ist eine Topologie für X.

(ii) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und der Kernoperator k sei definiert durch $k(A) :=$int $A \,\forall\, A \subset X$. Sei $\mathcal{T}_k$ die nach (i) und Folgerung 6) konstruierte Topologie für X.

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{T} = \mathcal{T}_k.$$

Beweis: Ü3,A2(b). □

Also Definitionen einer Topologie können äquivalent eingeführt werden über:
I) Offene Mengen (hier): Definition 1: Axiome $(O_1) - (O_3)$.
II) Umgebung: Axiome $(U_1) - (U_4)$ (vgl. Lemma 2). $\rightarrow$ Lemma 3, Satz 1.
III) Abgeschlossene Mengen: Axiome $(A_1) - (A_3)$ (vgl. Lemma 6). $\rightarrow$ Satz 2.
IV) Abschließungen: (Hüllenoperatoren) Axiome $(H_1) - (H_4)$ (vgl. Definition 9). $\rightarrow$ Satz 3.
V) Kernoperatoren: Axiome $(K_1) - (K_4)$ (vgl. Definition 11). $\rightarrow$ Satz 4.

Kapitel I.e) Basen, Abzählbarkeitsaxiome

Definition 12 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilklasse $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ heißt eine* **Basis** *für $\mathcal{T}$, falls jede offene Teilmenge von X darstellbar ist als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.*

Bemerkung: Zur Darstellung von $\emptyset$ (immer):

$$\emptyset = \cup_{\alpha\in\emptyset} B_\alpha \quad \forall\, B_\alpha \in \mathcal{B}.$$

Lemma 12 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$.*
$\mathcal{B}$ ist eine Basis. $\Leftrightarrow$ Für alle $f\in X$ und jede offene Umgebung $U_f\in\mathcal{T}$ von f $\exists\, B\in\mathcal{B}$, so daß $f\in B\subset U_f$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ eine Basis für $\mathcal{T}$. Sei $f\in X$ und $U_f\in\mathcal{T}\cap\mathcal{U}_f$ beliebig.
Da $U_f\in\mathcal{T}\Rightarrow$ Definition 12: $U_f=\cup_{\alpha\in J}B_\alpha$ mit $B_\alpha\in\mathcal{B}\,\forall\,\alpha\in J$ (J ist geeignete Indexmenge).
Da $f\in U_f$. $\Rightarrow\exists\alpha_0\in J$, so daß $f\in B_{\alpha_0}\subset U_f$.
„$\Leftarrow$": Sei $G\in\mathcal{T}$ beliebig. Ist $f\in G$ beliebig $\Rightarrow G\in\mathcal{U}_f$.
$\Rightarrow$ Voraussetzung: $\exists B_f\in\mathcal{B}$ mit $f\in B_f\subset G$.
$\Rightarrow G=\cup_{f\in G}\{f\}\subset\cup_{f\in G}B_f\subset G\Rightarrow G=\cup_{f\in G}B_f$, d.h. $\mathcal{B}$ ist Basis. □

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $\Rightarrow$ Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für $\mathcal{T}$, z.B. $\mathcal{B}=\mathcal{T}$.
Zu zeigen: $\mathcal{T}$ ist durch Angabe einer Basis $\underbrace{\text{vollständig}}_{\text{Lemma 14}}$ und $\underbrace{\text{eindeutig}}_{\text{Lemma 13}}$ bestimmt.

Lemma 13 *Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien für X und ist $\mathcal{B}$ Basis für $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.*

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2.$$

Beweis: Zu $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$ (und umgekehrt): Sei $A\in\mathcal{T}_1$.
$\Rightarrow\mathcal{B}$ ist Basis für $\mathcal{T}_1$: $A=\cup_{\alpha\in J}B_\alpha$ mit $B_\alpha\in\mathcal{B}\subset\mathcal{T}_1\quad\forall\,\alpha\in J$.
Da $\mathcal{B}$ auch Basis von $\mathcal{T}_2$ (nach Voraussetzung). $\Rightarrow$ Insbesondere: $B_\alpha\in\mathcal{T}_2\quad\forall\,\alpha\in J.\Rightarrow(O_3)$: $A\in\mathcal{T}_2$.
Zu $\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$: Analog. □

Beispiel: Betrachte $X=\mathbb{R}^1$, $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\text{nat.}}$.

a) Für $\alpha>0$, $f\in\mathbb{R}^1$ sei $B_{\alpha,f}:=\{g\in\mathbb{R}^1:|g-f|<\alpha\}$.
$\Rightarrow\mathcal{B}=\{B_{\alpha,f}:f\in\mathbb{R}^1,\alpha>0\}$ ist die Menge aller offenen Intervalle.
Zu zeigen: $\mathcal{B}=\{B_{\alpha,f}:(f,\alpha)\in\mathbb{R}^1\times(\mathbb{R}^+\setminus\{0\})\}$ mit $\mathbb{R}^+:=\{\beta\in\mathbb{R}^1:\beta\geq0\}$ ist eine Basis für $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

b) Sei $\mathbb{Q}^1$:= Menge aller rationalen Zahlen in $\mathbb{R}^1$; und $\mathbb{Q}^+:=\{\beta\in\mathbb{Q}^1:\beta\geq0\}$.
Zu zeigen: Die kleinere Klasse von Teilmengen

$$\mathcal{B}_{\text{rat.}}:=\{B_{\alpha,f}:(f,\alpha)\in\mathbb{Q}^1\times(\mathbb{Q}^+\setminus\{0\})\}$$

ist auch eine Basis für $(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

Beachte: Die Familie $\mathcal{B}_{\text{rat.}}$ aller offenen Intervalle in $\mathbb{R}^1$ mit rat. Mittelpunkt und Länge besteht nur aus $\underbrace{\text{abzählbar}}_{\text{vgl. Def. 13}}$ vielen Elementen.

Frage: Gegeben sei eine beliebige Menge X und eine Klasse $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X. $\Rightarrow$ Existiert eine Topologie für X, so daß $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}$ ist ?
Antwort negativ, denn
Beispiel: (Gegenbeispiel) Sei $X=\{0,1,2\}$, $\mathcal{B}:=\{\emptyset,\{0,1\},\{1,2\},X\}$. $\Rightarrow\quad\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$.
Annahme: Es existiert ein $\mathcal{T}$ für X, so daß $\mathcal{B}$ Basis für $\mathcal{T}$ ist.

$\Rightarrow$ Definition 12: Jede (bzgl. $\mathcal{T}$) offene Menge ist als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellbar und nach Definition 12 ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.
$\Rightarrow (O_2)$: Der Durchschnitt von zwei Elementen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ist als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellbar. Aber: $\{0,1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$ ist nicht als Vereinigung von Bs darstellbar.
$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist keine Basis einer Topologie für X.

Lemma 14 *Sei X eine beliebige (nicht leere) Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein (nichtleeres) System von Teilmengen von X.*
$\mathcal{B}$ ist eine Basis für eine Topologie $\mathcal{T}$ für X. $\Leftrightarrow$

(1) Für jedes $f \in X$ existiert $B \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B$ (vgl. Lemma 12).

(2) Falls $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $f \in X$, so daß $f \in B_1 \cap B_2$.
$\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (vgl. mit Gegenbeispiel).

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie für X.
(1): Da X offen: $X = \cup_{\alpha \in J} B_\alpha$. Ist f aus X beliebig $\Rightarrow \exists B_{\alpha_f} \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_{\alpha_f}$.
(2). Sei $f \in X$ und $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_1 \cap B_2$.
$\Rightarrow (O_2)$: $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$, da $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$.
$\Rightarrow$ Lemma 12: Zu $f \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$, existiert $B \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B \subset B_1 \cap B_2$.
„$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ mit (1),(2) gegeben. Definiere $\mathcal{T} := \{G \in \mathcal{P}(X) : G$ ist als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellbar$\}$.
Zu zeigen: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie für X (Nachweis: Alle Axiome sind erfüllt).

Zu (O_1): Da $\emptyset = \cup_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha$ mit $B_\alpha \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow \quad \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Da nach (1): Zu jedem $f \in X \quad \exists\, B_f \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_f \subset X$ ist.
$\Rightarrow X = \cup_{f \in X} \{f\} \subset \cup_{f \in X} B_f \subset X$. $\Rightarrow X = \cup_{f \in X} B_f$.

$$\Rightarrow X \in \mathcal{T}.$$

Zu (O_2): Seien $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$, so daß $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ (der Fall $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ trivial nach (O_1)).
Sei $f \in G_1 \cap G_2$ beliebig. Da $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists$ Darstellung $G_1 = \cup_{\alpha \in J} B_\alpha$, $G_2 = \cup_{\beta \in K} B_\beta$ mit $B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}$.
$\Rightarrow \exists B_{\alpha_0}, B_{\beta_0} \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_{\alpha_0} \subset G_1$ und $f \in B_{\beta_0} \subset G_2$, d.h. $f \in B_{\alpha_0} \cap B_{\beta_0}$.
$\Rightarrow$ (2): $\exists\, B_f \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_f \subset B_{\alpha_0} \cap B_{\beta_0} \subset G_1 \cap G_2$.
$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \cup_{f \in G_1 \cap G_2} \{f\} \subset \cup_{f \in G_1 \cap G_2} B_f \subset G_1 \cap G_2$. $\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \cup_{f \in G_1 \cap G_2} B_f$ mit $B_f \in \mathcal{B}$.

$$\Rightarrow \text{ Definition: } G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}.$$

Zu (O_3): Sei $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{T}$ beliebig. $\Rightarrow G_\alpha = \cup_{\beta \in J_\alpha} B_{\alpha\beta}$ mit $B_{\alpha\beta} \in \mathcal{B}$. $\Rightarrow \cup_{\alpha \in J} G_\alpha = \cup_{\alpha \in J} \cup_{\beta \in J_\alpha} B_{\alpha\beta} \in \mathcal{T}$.

Also: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie für X und nach Konstruktion ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ auch Basis. $\Rightarrow$ Lemma 13: Eindeutigkeit von $\mathcal{T}$.
Also: Erfüllt $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ Bedingung (1) und (2), dann liegt eindeutig eine Topologie für X fest. $\square$
Also: Ein System $\mathcal{B}$ mit Eigenschaften (1),(2) erzeugt einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.

Lemma 15 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}$. Dann gilt die folgende Charakterisierung von offenen Mengen:*
$A \subset X$ (beliebig) ist offen. $\Leftrightarrow$ Für jedes $f \in A$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B \subset A$.

Beweis: Lemma 1 + Lemma 12. $\square$

Definition 13 *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und besitzt $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis, so erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das* **zweite Abzählbarkeitsaxiom** *(2.Abax). Dabei heißt A* **abzählbar**, *falls eine bijektive Abbildung von A in $\mathbb{N}$ existiert.*

Beispiel: $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ erfüllt (2.Abax), denn die Basis $\mathcal{B}_{\text{rat.}}$ ist abzählbar.

Definition 14 *a) Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ heißt* **dicht in** *X, falls $\bar{A} = X$ ist.*

b) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **separabel**, *falls eine abzählbare Teilmenge existiert, die dicht in X ist.*

Beispiele:

a) $\mathbb{Q}^1$ ist dicht in $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

b) $\mathbb{Q}^1$ ist abzählbar. $\Rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist separabel.

Lemma 16 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{B}$ sei eine Basis für $\mathcal{T}$ und $A \subset X$ beliebig. Dann sind äquivalent:*

(i) A ist dicht in X.

(ii) Für jedes abgeschlossene $F \subset X$ mit $A \subset F$ gilt: $F = X$.

(iii) Für jedes nicht leere $B \in \mathcal{B}$ gilt $B \cap A \neq \emptyset$.

(iv) int $(\complement_X A) = \emptyset$.

Beweis: Ü3, A3. □

Lemma 17 *Erfüllt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ das 2.Abax, dann gilt: $(X, \mathcal{T})$ ist separabel. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.*

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis für $\mathcal{T}$. Zu jeder nichtleeren Menge $B \in \mathcal{B}$ wähle ein Element $f_B \in B$. Setze $A := \{f_B : B \in \mathcal{B} \text{ nichtleer}\}$. A ist abzählbar.
Zu zeigen: A ist dicht in X, dazu: Nach Lemma 16. $\Rightarrow$ Zu zeigen: Für jedes nichtleere $B \in \mathcal{B}$ gilt $B \cap A \neq \emptyset$. Dazu: Nach Konstruktion ist $f_B \in B \cap A$.
Gegenbeispiel zur Umkehrung: Ü3, A4. □

Definition 15 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f \in X$. Eine* **Umgebungsbasis von** *f ist eine Teilklasse $\mathcal{B}_f$ von $\mathcal{U}_f$, so daß zu jedem $U \in \mathcal{U}_f$, $\exists\, B \in \mathcal{B}_f$ mit $B \subset U$.*

Beachte: Eine Basis (Definition 12) besteht aus offenen Mengen. Eine Umgebungsbasis besteht aus Umgebungsmengen (nicht notwendigerweise offen).

Definition 16 *Ein topologischer Raum erfüllt das* **erste Abzählbarkeitsaxiom** *(1.Abax), falls jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat.*

Lemma 18 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Dann gilt die folgende Charakterisierung für Umgebungsbasen, die aus offenen Mengen bestehen:*
$\mathcal{B}$ ist eine Basis für $\mathcal{T}$. $\Leftrightarrow$ Für jedes $f \in X$ ist die Familie:

$$\mathcal{B}_f := \{B : B \in \mathcal{B} \text{ und } f \in B\}$$

eine Umgebungsbasis von f.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{B}$ Basis für $\mathcal{T}$ und $f \in X$, $U \in \mathcal{U}_f$ beliebig.
$\Rightarrow$ Definition 3,4: $\exists G \in \mathcal{T}$, so daß $f \in G \subset U$.
Da G offen $\Rightarrow$ Definition 12: G darstellbar als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.
$\Rightarrow \exists B_f \in \mathcal{B}$ mit $f \in B_f \subset G$, also insbesondere $B_f \in \mathcal{U}_f$. $\Rightarrow \exists$ Umgebung B_f von f, weil $f \in B_f \subset G \subset U$. Da $U \in \mathcal{U}_f$ beliebig $\Rightarrow$ Definition 15: $\mathcal{B}_f$ ist eine Umgebungsbasis von f.
„$\Leftarrow$": Sei die angegebene Kollektion $\mathcal{B}_f$ Umgebungsbasis für $f \in X$.
Sei $G \in \mathcal{T}$ beliebig $\Rightarrow$ Lemma 1: Für jedes $f \in G$ ist G offene Umgebung von f.
$\Rightarrow$ Definition 15: $\exists B_f \in \mathcal{B}_f$ mit $f \in B_f \subset G$. $\Rightarrow G = \cup_{f \in G}\{f\} \subset \cup_{f \in G} B_f \subset G$. $\Rightarrow G = \cup_{f \in G} B_f$ mit $B_f \in \mathcal{B}_f \subset \mathcal{B}$.
$\Rightarrow G$ ist darstellbar als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$. $\Rightarrow$ Definition 12: $\mathcal{B}$ ist eine Basis für $\mathcal{T}$. □

Lemma 19 *Erfüllt ein topologischer Raum das 2.Abax, so erfüllt er auch das 1.Abax. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.*

Beweis: $(X, \mathcal{T})$ erfülle das 2.Abax. $\Rightarrow$ Definition 13: $\mathcal{T}$ besitzt abzählbare Basis $\mathcal{B}$. $\Rightarrow$ Lemma 18: Für jedes $f \in X$ enthält $\mathcal{B}$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}_f$. $\Rightarrow$ Definition 16: $(X, \mathcal{T})$ erfüllt 1.Abax. Bezüglich Gegenbeispiel zur Umkehrung: Ü3, A5. $\square$

Definition 17 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilklasse $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ heißt eine* **Subbasis von** $\mathcal{T}$*, falls das aus allen endlichen Durchschnitten von Elementen von $\mathcal{S}$ gebildete Mengensystem eine Basis für $\mathcal{T}$ ist (Definition 12), d.h. wenn jedes Element von $\mathcal{T}$ darstellbar ist als Vereinigung von (beliebig vielen) endlichen Durchschnitten von Elementen von $\mathcal{S}$.*

Bemerkung: Zur Darstellung von $\emptyset$:

$$\emptyset = \cap_{\alpha \in \emptyset} S_\alpha \text{ mit } S_\alpha \in \mathcal{S} \text{ (leerer Durchschnitt).}$$

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum für $\mathcal{T}$. $\Rightarrow$ Es existiert immer eine Subbasis für $\mathcal{T}$, z.B.: $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist auch eine Subbasis für $\mathcal{T}$.

Beispiel:

a) Die Familie $\mathcal{S}$ aller offenen Intervalle der Form $(-\infty, a), (b, \infty)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^1$ ist eine Subbasis für $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

b) Die Familie $\mathcal{S}_{\text{rat.}}$ aller Intervalle der Form $(-\infty, a), (b, \infty)$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^1$ ist eine abzählbare Subbasis für $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

Lemma 20 *a) {Hilfsaussage} Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}$ ist die kleinste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält.*

b) (vgl. Lemma 14): Sei X beliebige (nichtleere) Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige (nicht leere) Familie von Teilmengen von X.
$\Rightarrow$ Für die Menge $Y := \cup_{S \in \mathcal{S}} S$ $\exists$ Topologie $\mathcal{T}$, so daß $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$ ist.
$\mathcal{T}$ ist durch $\mathcal{S}$ eindeutig bestimmt und heißt die **von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie für Y**.

Beweis:

a) Nach Voraussetzung: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält. (Definition 17) Die Aussage „$\mathcal{T}$ ist die kleinste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält" bedeutet (vgl. Definition 2):
Ist $\mathcal{T}_1$ eine weitere Topologie für X, die $\mathcal{S}$ enthält

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1.$$

Sei $\mathcal{T}_1$ eine derartige Topologie für X. Zu zeigen: $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.
Dazu: $\mathcal{T}_1$ ist eine Topologie $\Rightarrow (O_2)$: $\mathcal{T}_1$ enthält alle endlichen Durchschnitte von Elementen von $\mathcal{T}_1$.
Da $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_1 \Rightarrow$ insbesondere $\mathcal{T}_1$ enthält alle endlichen Durchschnitte von Elementen von $\mathcal{S}$.
Da $\mathcal{T}_1$ Topologie $\Rightarrow (O_3)$: $\mathcal{T}_1$ enthält beliebige Vereinigung von Elementen von $\mathcal{T}_1 \Rightarrow$ insbesondere:
$\mathcal{T}_1$ enthält $\underbrace{\text{beliebige Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus } \mathcal{S}}_{\text{Topologie } \mathcal{T}}$.
Da $\mathcal{S}$ Subbasis für $\mathcal{T} \Rightarrow$ Definition 17: enthält die jeweilige Topologie $\mathcal{T}$.

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1.$$

b) Sei $\mathcal{B}$ die Familie aller endlichen Durchschnitte von Elementen S aus $\mathcal{S}$.
Zeige: (vgl. Definition 17): $\mathcal{B}$ ist Basis für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf

$$Y := \cup_{S \in \mathcal{S}} S.$$

$\Rightarrow$ Lemma 14: Zeige:

1. Für jedes $f \in Y \exists B \in \mathcal{B}$ mit $f \in B$.
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $f \in Y$, so daß $f \in B_1 \cap B_2$. $\Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$, so daß $f \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Zu (1): Sei $f \in Y := \cup_{S \in \mathcal{S}} S$ beliebig. $\Rightarrow \exists S_\alpha \in \mathcal{S}$, so daß $f \in S_\alpha$.
Sei $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A \in \mathcal{B}$, denn: $A := A \cap A$ (endlicher Durchschnitt).
$\Rightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$, d.h. insbesondere $S_\alpha \in \mathcal{B}$.
Zu (2): Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $f \in Y$, so daß $f \in B_1 \cap B_2$ ist.
Da $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1, B_2$ sind endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$.
$\Rightarrow B_1 \cap B_2$ ist endlicher Durchschnitt von Elementen aus $\mathcal{S}$, d.h. $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.
$\Rightarrow B_3 := B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ hat gewünschte Eigenschaft.
Zur Eindeutigkeit: Sei $\mathcal{T}_1$ eine weitere Topologie für Y, so daß $\mathcal{S}$ Subbasis für $\mathcal{T}_1$ ist.
Wir haben schon gezeigt: $(Y, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum, so daß $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$ ist.

$$\Rightarrow \text{ a): } \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1.$$

Umgekehrt: Nach Annahme ist $(Y, \mathcal{T}_1)$ ein topologischer Raum, so daß $\mathcal{S}$ Subbasis für $\mathcal{T}_1$ ist.

$$\Rightarrow \text{ a): } \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}.$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{T} = \mathcal{T}_1.$$

□

Kapitel I.f) Stetigkeit, Homöomorphie

Der Begriff der Stetigkeit wurde bereits in Analysis behandelt. Hier soll er verallgemeinert werden [3].

Definition 18 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt* **stetig im Punkte** *$f_0 \in X$, falls zu jeder Umgebung V von Tf_0 in $(Y, \mathcal{T}')$ eine Umgebung U von f_0 in $(X, \mathcal{T})$ existiert, so daß $T(U) \subset V$ ist.*
Eine Abbildung T heißt **stetig auf** *X, falls T in jedem Punkte von X stetig ist.*

Satz 5 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und T eine Abbildung von X in Y. Äquivalent sind folgende Aussagen:*

(a) T stetig auf X.

[3] Analysis I. ⇒

a) Sei f reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^1$, d.h.: $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. f heißt stetig im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^1$ (im klassischen Sinne), falls zu jedem $\varepsilon > 0 \, \exists \delta := \delta(\varepsilon)$, so daß aus $|x_0 - x| < \delta$ folgt $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.
⇒ Topologische Umformulierung im Sinne des topologischen Raumes $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

b) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ heißt stetig im Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^1$, falls zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ in $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ eine Umgebung U von x_0 in $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ existiert, so daß $f(U) \subset V$.

Zunächst zeige: (a),(b) sind äquivalent:
(a)⇐(b): (Zu zeigen ist: Neue Definition enthält die Alte.)
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest ⇒ $V := (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ ist eine Umgebung von $f(x_0)$ im topologischen Raum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$.
⇒ Voraussetzung b): $\exists$ Umgebung U von x_0, so daß $f(x) \in V \, \forall x \in U$.
Da U Umgebung von x_0 ist ⇒ Definition 3: $\exists G \in \mathcal{T}_{\text{nat.}}$, so daß $x_0 \in G \subset U$. ⇒ $f(x) \in V \, \forall x \in G$ (← offene Umgebung von x_0).
Nach Beispiel a) nach Lemma 13 ist die Klasse $\mathcal{B}$ aller offenen Intervalle eine Basis für $\mathcal{T}_{\text{nat.}}$.
⇒ Lemma 12: $\exists B \in \mathcal{B}$ mit $x_0 \in B \subset G \subset U \Rightarrow f(x) \in V \, \forall x \in B$, d.h.: $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \, \forall x \in B$.
Zu jedem offenen Intervall B mit $x_0 \in B \, \exists \delta > 0$, so daß $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset B$.
⇒ Zu $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$, so daß $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \, \forall |x - x_0| < \delta$, d.h. äquivalent zu a).
(b)⇐(a): Für $\delta > 0$ sei $U_{\delta, x_0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^1 : |x_0 - x| < \delta \right\}$, d.h. U_{δ, x_0} ist eine Umgebung von x_0 in $\left(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$.
Für $\varepsilon > 0$ sei $V_{\varepsilon, f(x_0)} := \left\{ z \in \mathbb{R}^1 : |z - f(x_0)| < \varepsilon \right\}$, d.h. $V_{\varepsilon, f(x_0)}$ ist eine Umgebung von $f(x_0)$ in $\left(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$.
Sei $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$ beliebig ⇒ Definition 3 von $\mathcal{T}_{\text{nat.}}$: $\exists \varepsilon > 0$, so daß $V_{\varepsilon, f(x_0)} \subset V$.
⇒ Voraussetzung a): Zu diesem $\varepsilon > 0$, d.h. zu diesem $V_{\varepsilon, f(x_0)} \, \exists U_{\delta, x_0} \in \mathcal{U}_{x_0}$, so daß $f(U_{\delta, x_0}) \subset V_{\varepsilon, f(x_0)} \subset V$, d.h. b).
□
⇒ Zur Definition von Stetigkeit ist nur eine Topologie nötig.

(b) Das Urbild $T^{-1}(F)$ jeder abgeschlossenen Menge F in Y ist abgeschlossen in X.

(c) Für jedes $f_0 \in X$ und jede Umgebung V von Tf_0 in Y ist $T^{-1}(V)$ eine Umgebung von f_0 in X (vgl. Definition 18).

(d) $T(\bar{A}) \subset \overline{T(A)} \quad \forall A \subset X$.

(e) $\overline{T^{-1}(B)} \subset T^{-1}(\bar{B}) \quad \forall B \subset Y$.

(f) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}'$.
$\Rightarrow$ Für jedes $B \in \mathcal{B}$ ist das Urbild $T^{-1}(B)$ offen in X.

(g) Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}'$. $\Rightarrow T^{-1}(S) \in \mathcal{T} \; \forall S \in \mathcal{S}$.

(h) Für jedes $f_0 \in X$ gilt: Ist $\mathcal{B}_{f_0}$ eine Umgebungsbasis von f_0 in $(X, \mathcal{T})$ und $\mathcal{B}_{Tf_0}$ eine Umgebungsbasis von Tf_0 in $(Y, \mathcal{T}')$.
$\Rightarrow$ Zu jedem $B_{Tf_0} \in \mathcal{B}_{Tf_0}$ existiert ein $B_{f_0} \in \mathcal{B}_{f_0}$, so daß $T(B_{f_0}) \subset B_{Tf_0}$[4].

(i) Das Urbild $T^{-1}(G)$ jeder offenen Menge G in Y ist offen in X.

(j) $T^{-1}\left(int\,(B)\right) \subset int\left(T^{-1}(B)\right) \quad \forall B \subset Y$.

Beweis: Hier (a)$\Leftrightarrow$(i)$\Leftrightarrow$(b), Rest: Ü4, A1.

(a)$\Rightarrow$(i): Sei T stetig auf X und G offen in Y.

- Falls $T^{-1}(G) = \emptyset \Rightarrow T^{-1}(G)$ ist offen in X nach (O_1) für die Topologie $\mathcal{T}$.
- Sei also $T^{-1}(G) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, f_0 \in T^{-1}(G)$.
  Zeige: $T^{-1}(G)$ ist offen in $X \Leftrightarrow$ Lemma 1: $T^{-1}(G)$ enthält eine Umgebung jeder seiner Punkte, dazu:
  Sei $f_0 \in T^{-1}(G)$ beliebig $\Rightarrow Tf_0 \in G$ und G offen in Y. $\Rightarrow$ Definition 3: G ist Umgebung von Tf_0 in Y. $\Rightarrow$Voraussetzung a) +Definition 18: $\exists$ Umgebung U von f_0 in X mit $T(U) \subset G$.
  Sei $B_1 \subset B_2 (\subset Y) \Rightarrow T^{-1}(B_1) \subset T^{-1}(B_2) \Rightarrow T^{-1}(T(U)) \subset T^{-1}(G)$.
  Da $A \subset T^{-1}(T(A)) \; \forall A \subset X$. $\Rightarrow U \subset T^{-1}(T(U)) \subset T^{-1}(G)$.
  Da $f_0 \in T^{-1}(G)$ beliebig und U Umgebung von $f_0 \Rightarrow T^{-1}(G)$ enthält eine Umgebung jedes seiner Punkte.

(i)$\Rightarrow$(a): Sei $f_0 \in X$ beliebig und V beliebige Umgebung von Tf_0 in Y.
$\Rightarrow$ Definition 18: Zeige: $\exists$ Umgebung U von f_0 in X mit $T(U) \subset V$.
Dazu: Sei V Umgebung von Tf_0 in Y. $\Rightarrow$ Definition 3: $\exists$ offenes G in Y, so daß $Tf_0 \in G \subset V$ ist. $\Rightarrow$ (i): $T^{-1}(G)$ ist offen in X.
Da $f_0 \in T^{-1}(G)$ ist $\Rightarrow$ Definition 3: $T^{-1}(G)$ ist eine Umgebung von $f_0 \Rightarrow U := T^{-1}(G)$ ist eine Umgebung mit den gewünschten Eigenschaften, denn: Da $T(T^{-1}(B)) = B \cap T(X) \; \forall B \subset Y$. $\Rightarrow$ $T(U) = T(T^{-1}(G)) \subset G \subset V$.

(b)$\Leftrightarrow$(i): F ist abgeschlossen in $Y \Leftrightarrow$ Folgerung 3: $\complement_Y F \in \mathcal{T}'$.
$T^{-1}(F)$ abgeschlossen in $X \Leftrightarrow \complement_X(T^{-1}(F)) \in \mathcal{T}$.
Da $T^{-1}\left(\complement_Y B\right) = \complement_X\left(T^{-1}(B)\right) \; \forall B \subset Y. \Leftrightarrow T^{-1}\left(\complement_Y F\right) \in \mathcal{T}$. $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow T^{-1}(G) \in \mathcal{T} \; \forall G \in \mathcal{T}'$.
$\Leftrightarrow$ mit $G = \complement_Y F \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow T^{-1}(F)$ ist abgeschlossen in X für alle F abgeschlossen in Y. $\Leftrightarrow$ (b). □

Definition 19 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und T eine Abbildung von X in Y. T heißt ein* **Homöomorphismus** *(***topologische Abbildung***), falls T bijektiv ist und T, T^{-1} beide stetig sind. Zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ heißen* **homöomorph**, *falls ein Homöomorphismus von X nach Y existiert.*
Eine Eigenschaft E von topologischen Räumen heißt **topologische Eigenschaft** *(***topologische Invariante***), falls:*
Ist E in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt, dann ist E auch in allen topologischen Räumen erfüllt, die zu $(X, \mathcal{T})$ homöomorph sind.

[4] vgl. (a)$\Leftrightarrow$(b) in $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ zu Beginn von Kapitel I.f)

Beispiel: $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist homöomorph zu $((-1,1), \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ [5].
Ein Homöomorphismus ist gegeben durch die Abbildung (Zeige!) $T : (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}}) \to ((-1,1), \mathcal{T}_{\text{nat.}})$, definiert durch:

$$Tf := \frac{f}{1+|f|} \qquad \forall f \in \mathbb{R}^1.$$

Topologische Eigenschaften sind z.B. (Ü4, A2):

- Ein topologischer Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.
- Ein topologischer Raum erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.
- Ein topologischer Raum ist separabel.

Bemerkung: Die Beziehung, die durch Homöomorphie zwischen topologischen Räumen hergestellt wird, ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation (Kapitel I.c): Einschub), d.h. (L.A.) eine **Äquivalenzrelation**.
Zu Reflexivität: Jeder topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ ist homöomorph zu sich selbst, da die Identitätsabbildung

$$I : X \to X$$

ein Homöomorphismus ist.
Zu Symmetrie: Ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu $(Y, \mathcal{T}')$. $\Rightarrow$ $(Y, \mathcal{T}')$ homöomorph zu $(X, \mathcal{T})$, da: T ist ein Homöomorphismus von X auf Y. $\Rightarrow$ Definition 19: T^{-1} ist ein Homöomorphismus von Y auf X.
Zu Transitivität: Ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu $(Y, \mathcal{T}')$ und $(Y, \mathcal{T}')$ homöomorph zu $(Z, \mathcal{T}'')$.

Dann ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu $(Z, \mathcal{T}'')$,

denn:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 \text{ ist ein Homöomorphismus von } X \text{ auf } Y. \\ T_2 \text{ ist ein Homöomorphismus von } Y \text{ auf } Z. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ vgl. Ü4, A3} \left\{\begin{array}{l} \text{Die Komposition } T_2 \circ T_1 \\ \text{ist ein Homöomorphismus} \\ \text{von } X \text{ auf } Z. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Diese Äquivalenzrelation zerlegt die Gesamtheit aller topologischen Räume in **Äquivalenzklassen**, die sogenannten **Homöomorphismen-Typen** (**Homöomorphieklassen**).
Also: Eine Eigenschaft heißt topologisch, falls sie allen topologischen Räumen gemeinsam ist, die zur gleichen Homöomorphieklasse gehören. (Definition 19)$\Rightarrow$(Einleitung).
„Topologie" beschäftigt sich im wesentlichen mit topologischen Eigenschaften, d.h. mit solchen Eigenschaften, die invariant gegenüber Homöomorphie sind.

Lemma 21 *Sei T eine bijektive Abbildung von $(X, \mathcal{T})$ auf $(Y, \mathcal{T}')$. Äquivalent sind:*

a) T ist ein Homöomorphismus.

b) $G \subset Y$ ist offen. $\Leftrightarrow$ $T^{-1}(G)$ ist offen in X (vgl. Definition 18, Satz 5(i)).

c) $F \subset Y$ ist abgeschlossen. $\Leftrightarrow$ $T^{-1}(F)$ ist abgeschlossen in X (vgl. Satz 5(b)).

d) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}$, dann ist das **Bild** $T(\mathcal{B}) := \{T(B) \subset Y : B \in \mathcal{B}\}$ *eine Basis für $\mathcal{T}'$.*

e) $T(\bar{A}) = \overline{T(A)}\ \forall A \subset X$ (vgl. Satz 5(d)).

Beweis: Ü4, A4 (vgl. Satz 5 für T bzw. T^{-1}). □

Definition 20 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt* **offen**, *falls $T(G) \in \mathcal{T}'\ \forall G \in \mathcal{T}$ (vgl. Definition 18 bzw. Satz 5(i)).*
T heißt **abgeschlossen**, *falls $T(F) \in \mathcal{F}'\ \forall F \in \mathcal{F}$ (bzgl. Bezeichnung Lemma 6, vgl. Satz 5(b)).*

[5] Induzierte Topologie vgl. Kapitel I.g)

Lemma 22 *Seien $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume und T eine bijektive Abbildung von $(X,\mathcal{T})$ auf $(Y,\mathcal{T}')$. Äquivalent sind:*

a) Die Umkehrabbildung $T^{-1}: Y \to X$ ist stetig.

b) $T: X \to Y$ ist eine offene Abbildung.

c) $T: X \to Y$ ist eine abgeschlossene Abbildung.

Beweis: (a)⇔(b) bzw. (a)⇔(c):
Satz 5: (a)⇔(i) bzw. (a)⇔(b) für die Abbildung T^{-1} ($\exists$ nach Voraussetzung). □

Also: Falls T eine bijektive Abbildung von $(X,\mathcal{T})$ auf $(Y,\mathcal{T}')$, sind äquivalent:

a) T ist ein Homöomorphismus.

b) T ist stetig und offen.

c) T ist stetig und abgeschlossen.

Kapitel I.g) Relative Topologie, Unterräume

Definition 21 *Seien $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. $G' \subset Y$ heißt* **relativ offen** *(offen relativ zu Y), falls ein $G \in \mathcal{T}$ existiert, so daß $G' = G \cap Y$.*

Beispiel: $(X,\mathcal{T}) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$, $Y = [a,b]$ (abgeschlossenes Intervall von $\mathbb{R}^1$).
$\Rightarrow G' = [a,x)$ ist offen relativ zu $[a,b]$ für jedes $x \in [a,b]$ (aber nicht offen in X).

Lemma 23 *Die Klasse $\mathcal{T}_{ind.}$ aller relativ offenen Teilmengen von Y bildet eine Topologie für Y, d.h. $(Y,\mathcal{T}_{ind.})$ ist ein topologischer Raum.*

Beweis:

Zu (O_1): Da $X, \emptyset$ offen sind in $X \Rightarrow Y = X \cap Y$ ist offen relativ zu Y und $\emptyset = \emptyset \cap Y$ ist relativ offen zu Y.

Zu (O_2): Seien $G'_1, \ldots, G'_n$ offen relativ zu $Y\ \forall\, 1 \le i \le n$.
$\Rightarrow G'_i = G_i \cap Y$ mit $G_i \in \mathcal{T}\ \forall\, 1 \le i \le n$. $\Rightarrow \cap_{i=1}^n G'_i = \cap_{i=1}^n (G_i \cap Y) = (\cap_{i=1}^n G_i) \cap Y$ mit $\cap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$ nach (O_2) für $\mathcal{T}$.
$\Rightarrow \cap_{i=1}^n G'_i$ ist relativ offen zu Y (vgl. Definition 21).

Zu (O_3): Seien G'_α offen relativ zu $Y\ \forall\, \alpha \in J$.
$\Rightarrow G'_\alpha = G_\alpha \cap Y$ mit $G_\alpha \in \mathcal{T}\ \forall\, \alpha \in J$. $\Rightarrow \cup_{\alpha\in J} G'_\alpha = \cup_{\alpha\in J} (G_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha\in J} G_\alpha) \cap Y$ mit $\cup_{\alpha\in J} G_\alpha \in \mathcal{T}$ nach (O_3) für $\mathcal{T}$.
$\Rightarrow \cup_\alpha G'_\alpha$ ist relativ offen zu Y (vgl. Definition 21). □

Definition 22 *Ist Y Teilmenge eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$ und $\mathcal{T}_{ind.}$ die Topologie für Y entsprechend Lemma 23, so heißt $\mathcal{T}_{ind.}$* **die durch $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie** *(***relative Topologie***) oder* **Spurtopologie von Y bzgl.** *$(X,\mathcal{T})$. $(Y,\mathcal{T}_{ind.})$ heißt dann* **Unterraum** *von $(X,\mathcal{T})$.*

Beispiel:

1. Die relative Topologie des offenen Intervalls $(-1,1) \subset \mathbb{R}^1$ bzgl. $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist:

$$\mathcal{T}_{\text{ind.}} := \{A \cap (-1,1) : A \in \mathcal{T}_{\text{nat.}}\} = \{A \in \mathcal{T}_{\text{nat.}} : A \subset (-1,1)\} \text{ (vgl. Lemma 25(c)).}$$

2. Weiterhin: (vgl. Beispiel nach Lemma 13)
Da $\mathcal{B} = \{B_{\alpha,f} : f \in \mathbb{R}^1, \alpha > 0\}$ mit $B_{\alpha,f} := \{y \in \mathbb{R}^1 : |y - f| < \alpha\}$ eine Basis für $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist
$\Rightarrow \mathcal{B}_{\text{ind.}} := \{B_{\alpha,f} \cap (-1,1) : f \in \mathbb{R}^1, \alpha > 0\}$ ist eine Basis für $((-1,1), \mathcal{T}_{\text{ind.}})$.

Lemma 24 *Ist Y ein Unterraum des topologischen Raums $(X,\mathcal{T})$ und Y_2 ist Unterraum von $(Y,\mathcal{T}_{ind.})$.*
$\Rightarrow$ Y_2 ist eine Unterraum von $(X,\mathcal{T})$.

Beweis: selbst!

Definition 23 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum.*
Eine Umgebung [abgeschlossene Menge] in $(Y,\mathcal{T}_{ind.})$ heißt **Umgebung [abgeschlossen] relativ zu** *Y (vgl. Definition 21 bzw. Lemma 25).*

Lemma 25 *Sei Y Unterraum des topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$. Daraus folgt:*

a) Für $f \in Y$:
Eine Menge $U' \subset Y$ ist Umgebung von f relativ zu Y. $\Leftrightarrow \exists$ Umgebung U von f in X, so daß $U' = U \cap Y$.

b) Eine Menge $F' \subset Y$ ist abgeschlossen relativ zu Y. $\Leftrightarrow \exists F$ abgeschlossen in X, so daß $F' = F \cap Y$.

c) Ist $B \subset Y$ abgeschlossen [offen] in X. $\Rightarrow$ B abgeschlossen [offen] relativ zu Y.

d) Sei $A \subset Y$. $\Rightarrow$ Die abgeschlossene Hülle von A relativ zu Y (Bezeichnung: $\bar{A}^Y$ vgl. Definition 8) ist darstellbar als $\bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$, wobei $\bar{A}^X$ die Abschließung von A in X ist.

Beweis: a),b),c) selbst!
d)Nach Lemma 23 ist $(Y,\mathcal{T}_{\text{ind.}})$ topologischer Raum. Sei $\bar{A}^Y$ die Abschließung von A bzgl. $\mathcal{T}_{\text{ind.}}$.
$\Rightarrow$ Lemma 8: $\bar{A}^Y = \cap_{\substack{B' \text{abgl. rel. zu } Y. \\ A \subset B'}} B'$ nach b):

(i): B abgeschlossen relativ zu Y und $A \subset B'$
$\Rightarrow \exists B^\circ$ abgeschlossen in X, so daß $B' = B^\circ \cap Y$ und $A \subset B^\circ$.

(ii): Ist B° abgeschlossen in X und $A \subset B^\circ \Rightarrow B' := B^\circ \cap Y$ ist abgeschlossen relativ zu Y und $A \subset B^\circ$. Da $A \subset Y \Rightarrow$

$$\bar{A}^Y = \cap_{\substack{B' \text{abgl. rel. zu } Y. \\ A \subset B'}} B' = \cap_{\substack{B^\circ \text{abgl. rel. zu } X. \\ A \subset B^\circ}} (B^\circ \cap Y) = \left(\cap_{\substack{B^\circ \text{abgl. rel. zu } X. \\ A \subset B^\circ}} B^\circ\right) \cap Y$$

$\Rightarrow$ Lemma 8: $\bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$. $\square$

Lemma 26 *Sei Y ein Unterraum des topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$. Dann ist die* **Inklusion** *(natürliche Injektion) $I_Y : Y \rightarrow X$ definiert durch $I_Y f := f \; \forall f \in Y$. I_Y ist eine stetige Abbildung.*

Beweis: Sei $G \subset X$ offen (bzgl. $(X,\mathcal{T})$). Dann ist $I_Y^{-1}(G) = G \cap Y$.
$\Rightarrow$ Definition 21: $I_Y^{-1}(G) \in \mathcal{T}_{\text{ind.}} \; \forall G \in \mathcal{T}$.
$\Rightarrow$ Satz 5(a)$\Leftrightarrow$(i): I_Y ist stetig. $\square$

Kapitel I.h) Vergleich von Topologien

Lemma 27 *Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien für X. Äquivalent sind:*

a)
$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \qquad \textit{(vgl. Definition 2)}$$

b) Die (bijektive) **identische Abbildung** *$I : (X,\mathcal{T}_2) \rightarrow (X,\mathcal{T}_1)$ ist stetig.*

c) Jede bezüglich $\mathcal{T}_1$ abgeschlossene Menge ist bezüglich $\mathcal{T}_2$ auch abgeschlossen.

Beweis: a)$\Leftrightarrow$b): Nach Satz 5(a) $\Leftrightarrow$(i): I ist stetige Abbildung von $(X,\mathcal{T}_2)$ nach $(X,\mathcal{T}_1) \Leftrightarrow I^{-1}(G) = G \in \mathcal{T}_2 \; \forall \overline{G \in \mathcal{T}_1} \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
Rest: selbst! (Im Wesentlichen Komplementenbildung; vgl. Folgerung 3, Satz 5(b)). $\square$

Lemma 28 *Sei Y ein Unterraum eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$.*
Die durch $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie $\mathcal{T}_{ind.}$ ist die kleinste Topologie, für die die Inklusion $I_Y : Y \to X$ stetig ist.

Beweis: Nach Lemma 26 ist $I_Y : (Y, \mathcal{T}_{\text{ind.}}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.
Sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie für Y, so daß $I_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig ist.
Zeige: $\mathcal{T}_{\text{ind.}} \subset \mathcal{T}'$, d.h. (Def. 2) $G^\star \in \mathcal{T}' \,\forall\, G^\star \in \mathcal{T}_{\text{ind.}}$.
Dazu: Sei $G^\star \in \mathcal{T}_{\text{ind.}}$ beliebig $\Rightarrow$ Definition 21: $\exists G \in \mathcal{T}$ mit $G^\star = G \cap Y$.
Da $G \in \mathcal{T}$ und $I_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig $\Rightarrow$ Satz 5 (a)$\Leftrightarrow$(b): $I_Y^{-1}(G) \in \mathcal{T}'$.
Da $I_Y^{-1}(G) := \{f \in Y : I_Y(f) \in G\} = \{f \in Y : f \in G\} = Y \cap G = G^\star$.

$$\Rightarrow \quad G^\star \in \mathcal{T}'. \quad \square$$

Lemma 29 *Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ eine stetige Abbildung.*

a)(Einschränkung des Definitionsbereiches).
Ist $A \subset X$ und $\mathcal{T}_{1,ind.}$ die von $\mathcal{T}_1$ auf A induzierte Topologie, dann ist die **Restriktion**

$$T|_A : \left(A, \mathcal{T}_{1,ind.}\right) \to (Y, \mathcal{T}_2) \text{ stetig.}$$

b) (Einschränkung des Wertebereichs)
Ist $\mathcal{T}_{2,ind.}$ die von $\mathcal{T}_2$ auf den Wertebereich $T(X)$ induzierte Topologie, dann ist

$$T : (X, \mathcal{T}_1) \to \left(T(X), \mathcal{T}_{2,ind.}\right) \text{ stetig.}$$

c) (Triviale Erweiterung des Wertebereichs)
Ist $(Y, \mathcal{T}_2)$ ein Unterraum von $(Z, \mathcal{T}_3)$, dann ist

$$T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Z, \mathcal{T}_3) \text{ stetig.}$$

Beweis: Selbst!

Folgerung 7 *Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$.*
T ist stetig. $\Leftrightarrow$ $T' : (X, \mathcal{T}_1) \to \left(T(X), \mathcal{T}_{2,ind.}\right)$ stetig, wobei $T'f := Tf \,\forall\, f \in X$.

Beweis: Sei $I_{T(X)}$ die Inklusion (im Bildraum) $I_{T(X)} : \left(T(X), \mathcal{T}_{2,\text{ind.}}\right) \to (Y, \mathcal{T}_2)$.
$\Rightarrow$ Lemma 26: $I_{T(X)}$ ist stetig.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \searrow & & \nearrow \\ & T(X) & \end{array}$$

betrachte: $T = I_{T(X)} \circ T'$. $\Rightarrow$ Beweis: Klar nach Lemma 29(b),(c) (vgl. Ü4, A3). $\square$

Kapitel II

Zusammenhang

Kapitel II.a) Definition (Antidefinition)

Definition 1 *a) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt* **nicht zusammenhängend**, *falls zwei nichtleere (offene) disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{T}$ existieren, so daß $X = A \cup B$.*
Andernfalls heißt $(X, \mathcal{T})$ **zusammenhängend**.

b) Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt **zusammenhängend**, *falls A als Unterraum (mit der durch $\mathcal{T}$ induzierten Topologie) zusammenhängend ist.*

c) Eine offene, zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes heißt ein **Gebiet**.

Lemma 1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:*

a) $(X, \mathcal{T})$ ist zusammenhängend.

b) $(X, \mathcal{T})$ ist nicht darstellbar als Vereinigung von zwei nichtleeren, abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen.

c) Die einzigen Teilmenge von X, die zugleich offen und abgeschlossen sind, sind X und $\emptyset$.

d) Ist $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$, dann ist $\partial A \neq \emptyset$.

e) Ist $X = A \cup B$ mit $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. $\Rightarrow X = A$ oder $X = B$.
In diesem Fall muß dann sein: Ist (z.B.) $X = A$, dann ist $B \subset A \cup B = X = A$ und $\emptyset = \bar{A} \cap B = X \cap B$. $\Rightarrow B = \emptyset$.

f) Jede stetige Abbildung $T : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\},$ diskrete Topologie$)$ ist konstant (d.h. $Tf = Tg \; \forall f, g \in X$), bzw. es existiert keine stetige Abbildung von $(X, \mathcal{T})$ auf $(\{0,1\},$ diskrete Topologie$)$.

Beweis: (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d)⇒(e)⇒(a) hier; (a)⇔(f). Ü4, A6.

(a)⇒(b): Annahme: (b) sein falsch, d.h. es existiert eine Darstellung: $X = A \cup B$ mit A, B abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$. $A, B \neq \emptyset$.
⇒ $\complement_X A = B, \complement_X B = A$ und (Folgerung I.3), $X = (\complement_X B) \cup (\complement_X A)$ mit $\complement_X A, \complement_X B$ ist offen, punktweise fremd und nichtleer.
⇒ Definition 1: Widerspruch zu (a).

(b)⇒(c): Annahme (c) sei falsch, d.h. es existiere eine Teilmenge $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$, aber A ist offen und abgeschlossen.
Folgerung I.3: $\complement_X A$ offen+abgeschlossen mit $\complement_X A \neq \emptyset$ und $A \neq X$.
⇒ $X = A \cup (\complement_X A)$ mit $A, \complement_X A$ abgeschlossen, punktfremd und nichtleer.
⇒ Widerspruch zu (b).

(c)⇒(d) Annahme: (d) sei falsch, d.h. es existiere ein $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ und $\partial A = \emptyset$.
⇒ Def. I.10, Lemma I.10.(ii),(iii): $\bar{A} = (\text{int}A) \cup \partial A = \text{int}A$, andererseits ist int $(A) \subset A \subset \bar{A}$.
⇒ $A = \bar{A} = \text{int } A$ ⇒ Lemma I.10.(i), Folgerung I.4: A ist zugleich offen und abgeschlossen. Widerspruch zu (c).

(d)⇒(e): Annahme: (e) wäre falsch, d.h.: Es existiere $A, B \in X$ mit $X = A \cup B$ und $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, sowie $A \neq X$ und $B \neq X$. ⇒ insbesondere: $A \cap B = \emptyset$, da $A \subset \bar{A}$.
⇒ $B = \complement_X A$, $A = \complement_X B$ und $A, B \neq \emptyset$ (denn z.B. $A = \emptyset \Rightarrow X = A \cup B = B$)
⇒ $X \subset A \cup \complement_X A$ mit $A \neq \emptyset$, $A \neq X$.
Aus Voraussetzung $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap \complement_X A = A \cap \overline{\complement_X A} = \emptyset$, folgt $\bar{A} \cap \overline{\complement_X A} = \emptyset$, denn angenommen: Es existiert ein $f \in \bar{A} \cap \overline{\complement_X A} \Rightarrow \underbrace{f \in \bar{A}}_{f \notin \complement_X A}$ und $\underbrace{f \in \overline{\complement_X A}}_{f \notin A}$. ⇒ Widerspruch.
⇒ $\emptyset = \bar{A} \cap \overline{\complement_X A} = \partial A$. ⇒ Widerspruch zu (d), da $A \subset X, A \neq X, A \neq \emptyset$.

(e)⇒(a): Annahme: (a) sei falsch, d.h. (Definition 1): $X = D \cup E$ und E, D seien offen, disjunkt und nichtleer. ⇒ $D = \complement_X E, E = \complement_X D$. ⇒ Folgerung I.3: $D, \complement_X D$ sind abgeschlossen.
Setze $A = D, B = \complement_X D$ ⇒ Voraussetzung von (e) erfüllt, d.h.: $X = A \cup B$ und $\bar{A} \cap B = \bar{D} \cap \complement_X D$.
⇒ D abgeschlossen: $\bar{D} \cap \complement_X D = \emptyset$.
$A \cap \bar{B} = D \cap \overline{\complement_X D}$. ⇒ $\complement_X D$ abgeschlossen: $D \cap \overline{\complement_X D} = \emptyset$.
⇒ Voraussetzungen aus (e): $X = A$ oder $X = B$, d.h.: $\underbrace{X = D}_{\complement_X D = \emptyset}$ oder $\underbrace{X = \complement_X D}_{D = \emptyset}$, da aber $\complement_X D = E$. ⇒ $E = \emptyset$ oder $D = \emptyset$. Widerspruch. □

Beispiel:

1. Sei X eine beliebige Menge mit mindestens zwei Elementen.
   ⇒ Lemma 1 (a)⇔(c):
   - $(X$, indiskrete Topologie) ist zusammenhängend.
   - $(X$, diskrete Topologie) ist nicht zusammenhängend.
2. $\left(\mathbb{Q}^1, \mathcal{T}_{\text{nat., ind.}}\right)$ ist nicht zusammenhängend, denn (Definition 1):
$$\text{Setze } \begin{matrix} A := \{f \in \mathbb{R}^1 : f < \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}^1 \\ B := \{f \in \mathbb{R}^1 : f > \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}^1 \end{matrix}$$
   ⇒ Definition I.21: $A, B \in \mathcal{T}_{\text{nat., ind.}}$ sind nichtleer, disjunkt und $\mathbb{Q}^1 = A \cup B$, denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (nicht zusammenhängend).
3. Zusammenhängende Teilmengen (Definition 1(b)) von $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ sind:
$$\left.\begin{matrix} \emptyset, \mathbb{R}^1, \text{ jede einpunktige Menge } \{f\}\ \forall f \in \mathbb{R}^1 \\ \text{Jedes Intervall } [a,b], [a,b), (a,b], (a,b). \end{matrix}\right\} \text{vollständiger Katalog.}$$
   Alle anderen Teilmengen von $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ sind nicht zusammenhängend (Ü5, A1).

Satz 1 *Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ eine stetige Abbildung. Ist X zusammenhängend, dann folgt $\left(T(X), \mathcal{T}_{2,ind.}\right)$ sind zusammenhängend.*

Also: Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.
Insbesondere: Ist $T : X \to Y$ stetig und surjektiv und ist X zusammenhängend, dann ist Y auch zusammenhängend.
Beweis: Nach Folgerung I.7 ist T' definiert durch $T'f := Tf\ \forall f \in X$, eine stetige Abbildung von $(X, \mathcal{T}_1)$ auf $\left(T(X), \mathcal{T}_{2,\text{ind.}}\right)$.
Annahme: $T(X)$ sei nicht zusammenhängend.

$\Rightarrow$ Definition 1: $\exists\, A, B \in \mathcal{T}_{2,\text{ind.}}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \neq \emptyset$, so daß $T(X) = T'(X) = A \cup B$.
$\Rightarrow X = (T')^{-1}(T(X)) = (T')^{-1}(A \cup B) = (T')^{-1}(A) \cup (T')^{-1}(B)$.
Da $A, B \in \mathcal{T}_{2,\text{ind.}}$ und $T' : (X, \mathcal{T}_1) \to \left(T(X), \mathcal{T}_{2,\text{ind.}}\right)$ stetig $\Rightarrow$ Satz I.5 (a)$\Leftrightarrow$(i): $(T')^{-1}(A), (T')^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$.
Da T' surjektiv ist und A, B nichtleer sind $\Rightarrow (T')^{-1}(A), (T')^{-1}(B)$ sind nichtleer.
Da $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (T')^{-1}(A) \cap (T')^{-1}(B) = \emptyset$, denn: $\exists\, f \in (T')^{-1}(A) \cap (T')^{-1}(B) \Rightarrow T'(f) \in A, T'(f) \in B$. $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.
$\Rightarrow X = (T')^{-1}(A) \cup (T')^{-1}(B)$ ist Darstellung aus Vereinigung zweier offener, nichtleerer, disjunkter Mengen $\Rightarrow$ Definition 1: X ist nicht zusammenhängend. Widerspruch. $\square$

Folgerung 1 *Für homöomorphe topologische Räume $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ gilt*

$$X \text{ ist zusammenhängend.} \Leftrightarrow Y \text{ ist zusammenhängend.}$$

<u>also:</u> Zusammenhängend ist eine topologische Eigenschaft (vgl. Definition I.19).

<u>Beweis:</u> Satz 1 (vgl. Definition I.19). $\square$

Lemma 2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

a) Gilt für zwei Teilmengen $A, B \subset X$, daß $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ und ist C ein zusammenhängender Unterraum von $(A \cup B, \mathcal{T}_{ind.})$ (Definition 1b)).

$$\Rightarrow \text{ entweder } C \subset A \text{ oder } C \subset B.$$

b) Ist $X = U \cup V$ mit $U, V \subset X$ offen, disjunkt, nichtleer und ist A ein zusammenhängender Unterraum von X.

$$\Rightarrow \text{ entweder } A \subset U \text{ oder } A \subset V.$$

c) Ist A ein zusammenhängender Unterraum von $(X, \mathcal{T})$ und ist Y ein weiterer Unterraum, so daß $A \subset Y \subset \bar{A}$. $\Rightarrow \bar{A}$, Y sind zusammenhängend.

d) Enthält $(X, \mathcal{T})$ einen dichten, zusammenhängenden Unterraum. $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ ist zusammenhängend.

<u>Beweis:</u>

a) Beachte Lemma I.24, Lemma I.25(d). Benutze Lemma 1: (a)$\Leftrightarrow$(b) mit $X \to C$, $A \to A \cap C$, $B \to B \cap C$
$\Rightarrow C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
$\Rightarrow$ Lemma 1(e): $C = A \cap C$ oder $C = B \cap C \Rightarrow$ Behauptung.

b) Annahme: Weder $A \subset U$ noch $A \subset V \Rightarrow \begin{smallmatrix} A \cap \complement_X U \neq \emptyset \\ A \cap \complement_X V \neq \emptyset \end{smallmatrix}$.
Da $X = U \cup V$ und U, V offen, disjunkt, nichtleer insbesondere also $U = \complement_X V$, $V = \complement_X U$. $\Rightarrow A \cap V \neq \emptyset, A \cap U \neq \emptyset$.
Setze $\begin{smallmatrix} A_1 := A \cap U \neq \emptyset \\ A_2 := A \cap V \neq \emptyset \end{smallmatrix}$. Da $X = U \cup V \Rightarrow A = A_1 \cup A_2$.
Da $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow$ Definition I.21: $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_{\text{ind.}}$ (bezüglich topologischer Raum $(A, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$).
Da $A_1 \cap A_2 = A \cap (U \cap V) = A \cap \emptyset = \emptyset$.
$\Rightarrow A_1, A_2$ nichtleer, disjunkt. $\Rightarrow$ Definition 1(b): $(A, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist <u>nicht</u> zusammenhängend. Widerspruch.

c) Lemma 1 (a)$\Leftrightarrow$(e): (vgl. (a))

d) mittels (c) (vgl. Definition I.14(a)). $\square$

<u>Beachte:</u> Lemma 2c),d) dienen als hinreichendes Kriterium für Zusammenhang.
ebenso:

Lemma 3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X = \cup_{\alpha \in J} A_\alpha$ mit A_α zusammenhängender Unterraum von X und sei $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \emptyset$. $\Rightarrow X$ ist zusammenhängend.*

Beweis: Annahme: X ist nicht zusammenhängend. $\Rightarrow$ Definition 1: $\exists$ offene, disjunkte, nichtleere Mengen $U, V \subset X$, so daß $X = U \cup V$.
Da $\cap_{\alpha\in J} A_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, f \in \cap_{\alpha\in J} A_\alpha$.
$\Rightarrow$ Entweder $f \in U$ oder $f \in V$: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $f \in U$.
$\Rightarrow$ Da $f \in \cap_{\alpha\in J} A_\alpha \Rightarrow f \in A_\alpha\ \forall \alpha \in J \Rightarrow U \cap A_\alpha \neq \emptyset\ \forall \alpha \in J$.
Da jedes A_α zusammenhängend $\Rightarrow$ Lemma 2(b): entweder $A_\alpha \subset U$ oder $A_\alpha \subset V$.
Da $U \cap A_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow A_\alpha \subset U\ \forall \alpha \in J$.
$\Rightarrow X = \cup_{\alpha\in J} A_\alpha \subset U \Rightarrow V = \emptyset$. Widerspruch. $\square$

Folgerung 2 („Punktweises" Kriterium für Zusammenhang) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so daß zu jedem Paar $f, g \in X$ ein zusammenhängender Unterraum $A \subset X$ existiert, so daß $f, g \in A$.*

$$\Rightarrow \qquad X \text{ ist zusammenhängend.}$$

Beweis: Sei $f \in X$ beliebig, aber fest $\Rightarrow$ Voraussetzungen: Zu jedem $g \in X$ $\exists$ zusammenhängender Unterraum $A(f,g) \subset X$ mit $f, g \in A(f,g)$. $\Rightarrow X = \cup_{g\in X} A(f,g)$ mit $A(f,g)$ zusammenhängend $\forall g \in X$.
Da $f \in \cap_{g\in X} A(f,g)$, also $\neq \emptyset$. $\Rightarrow$ Lemma 3: X ist zusammenhängend. $\square$

Beispiel: $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist zusammenhängend (vgl. Ü5, A1).
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist zusammenhängend, denn $\mathbb{R}^n = \cup$(Geraden durch den Ursprung) (zusammenhängend), da $0 = \cap$(Geraden durch den Ursprung) $\neq \emptyset$.
$\Rightarrow$ (Lemma 3:) $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.

Kapitel II.b) Komponenten; lokaler Zusammenhang

Definition 2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $f \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von X, die f enthalten, heißt* **Komponente** *von f in $(X, \mathcal{T})$.*
Eine Teilmenge $C \subset X$ heißt **Komponente** *von $(X, \mathcal{T})$ falls $\exists\, f \in C$, so daß C Komponente von f in $(X, \mathcal{T})$.*

Klar: Eine Komponente ist immer ein zusammenhängender Unterraum, denn:
Sei $C \subset X$ und $f \in C$, so daß C Komponente von f in $(X, \mathcal{T})$. $\Rightarrow$ Definition 2: $C = \cup_{\alpha\in J} B_\alpha$ mit $B_\alpha \subset X$ zusammenhängender Unterraum und $f \in B_\alpha\ \forall \alpha \in J$. $\Rightarrow \cap_{\alpha\in J} B_\alpha \neq \emptyset$.
Betrachte topologischen Raum $(C, \mathcal{T}_{\text{ind.}}) \Rightarrow$ vgl. Lemma I.24: $B_\alpha \subset C$ ist ein zusammenhängender Unterraum usw. $\Rightarrow$ Lemma 3: C zusammenhängend.
Klar: Ein nicht zusammenhängender topologischer Raum kann aus mehreren Komponenten bestehen, von denen jede einzelne ein zusammenhängender Unterraum ist (siehe oben bzw. Beispiel 1).

Beispiel

1. Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus A$ mit $A := \{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 : f_1 = 0, f_2 \in \mathbb{R}^1\}$ $\Rightarrow$ Definition 1: X nicht zusammenhängend, X hat die Komponenten (vgl. Lemma 4) $C_1 = \{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 : f_1 < 0, f_2 \in \mathbb{R}^1\}$ und $C_2 = \{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 : f_1 > 0, f_2 \in \mathbb{R}^1\}$.

2. Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend $\Rightarrow$ Definition 2: X hat nur eine Komponente, nämlich X.

Lemma 4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $\Rightarrow$*

a) Für jedes $f \in X$ existiert genau eine Komponente (Insbesondere: Zwei Komponenten von X sind entweder disjunkt oder identisch).

b) Für jede Komponente C von X gilt:
Ist A ein zusammenhängender Unterraum von X, der C enthält. $\Rightarrow A = C$.

c)Sei $f \in X$ beliebig und $\mathcal{R}$ die Familie aller zusammenhängenden Unterräume von X, die f enthalten. $\Rightarrow$ Die Komponente C von f in X ist das Supremum von $\mathcal{R}$ unter „$\subset$" (vgl. Kapitel I.(c) Einschub).
Genauer: $C \in \mathcal{R}$ und C ist Maximum von $\mathcal{R}$.

d) Jeder zusammenhängende Unterraum von X ist in genau einer Komponente enthalten.

e) Jede Komponente von X ist abgeschlossen.

f) Sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Der Unterraum $(A, \mathcal{T}_{ind.})$ ist eine Komponente von $(X, \mathcal{T})$, falls $(A, \mathcal{T}_{ind.})$ ein zusammenhängender Unterraum von $(X, \mathcal{T})$ und A offen und abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$ ist.

g) Sei $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ die Familie aller verschiedenen Komponenten C_α von X.
Dann ist $X = \cup_{\alpha \in J} C_\alpha$ und aus $\alpha_1 \neq \alpha_2$ folgt $C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2} = \emptyset$.

Beweis:

a) Sei $f \in X$ beliebig. $\Rightarrow \{f\}$ ist zusammenhängend (und $f \in \{f\}$), denn die einelementige Menge $\{f\}$ (vgl. Definition 1) ist nicht darstellbar als $\{f\} = U \cup V$ mit offenen, disjunkten, nichtleeren U, V. $\Rightarrow$ Die Familie $\{B_\alpha(f)\}_{\alpha \in J}$ aller zusammenhängenden Unterräume von X, die f enthalten ist nicht leer, also: $f \in \cup_{\alpha \in J} B_\alpha(f)$ und $J \neq \emptyset$. $\Rightarrow \exists$ Komponente $C(f) := \cup_{\alpha \in J} B_\alpha(f)$ von f in X (nicht trivial).
Eindeutigkeit: Sei $D(f)$ eine weitere Komponente von f in X.
$\Rightarrow$ (Bemerkung nach Definition 2), $D(f)$ ist ein zusammenhängender Unterraum, der f enthält $\Rightarrow D(f) \in \{B_\alpha(f)\} \Rightarrow D(f) \subset C(f)$.
Auch umgekehrt, da $D(f)$ Komponente von f in $X \Rightarrow$ Definition 2: $B_\alpha(f) \subset D(f) \, \forall \alpha \in J$. $\Rightarrow$ $C(f) \subset D(f)$
$\Rightarrow D(f) = C(f)$.

b) Sei C Komponente von X. $\Rightarrow$ Definition 2: $\exists f \in X$, so daß C Komponente von f in X, $\Rightarrow$ Definition 2: $C = \cup_{\alpha \in J} B_\alpha$, wobei $B_\alpha \subset X$ die zusammenhängenden Unterräume durchläuft, für die $f \in B_\alpha \, \forall \alpha \in J$.
Da $f \in C$ und nach Voraussetzung $C \subset A \Rightarrow f \in A$.
Da A nach Voraussetzung zusammenhängender Unterraum $\Rightarrow \exists \alpha_0 \in J$, so daß $A = B_{\alpha_0} \Rightarrow$ $A \subset C$.
$\Rightarrow A = C$.

c) Wegen Bemerkung nach Definition 2 $\Rightarrow C$ ist ein zusammenhängender Unterraum, der f enthält $\Rightarrow C \in \mathcal{R}$.
Nach Definition 2 ist $C = \cup_{B \in \mathcal{R}} B \Rightarrow$

(i): $B \subset C \, \forall B \in \mathcal{R}$, d.h. C ist eine obere Schranke für $\mathcal{R}$.

(ii): Sei A eine weitere obere Schranke für $\mathcal{R}$. $\Rightarrow$ Da $C \in \mathcal{R}$: $C \subset A$.

$\Rightarrow C$ ist die kleinste obere Schranke (Supremum).

d) Sei $A \subset X$ ein beliebiger zusammenhängender Unterraum.
Für beliebiges $f \in A$ sei $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ die Familie aller zusammenhängenden Unterräume von X, die f enthalten. $\Rightarrow A \in \{B_\alpha\}_{\alpha \in J} \Rightarrow A \subset \cup_{\alpha \in J} B_\alpha =: B \Rightarrow$ Definition 2: B ist Komponente von X, die A enthält.
Dazu: Sei C eine weitere Komponente von X, die A enthält.
$\Rightarrow$ Bemerkung nach Definition 2: C ist zusammenhängender Unterraum, da $f \in A \subset C \Rightarrow$ $C \in \{B_\alpha\}_{\alpha \in J} \Rightarrow C \subset B$.
Nun ist B zusammenhängender Unterraum, der die Komponente C enthält. $\Rightarrow (b)$: $B = C$.

e) Sei C eine beliebige Komponente. Annahme: C ist nicht abgeschlossen. $\Rightarrow C \subset \bar{C}$ echt und C ist zusammenhängend.
$\Rightarrow$ Lemma 2(c): $\bar{C}$ ist zusammenhängender Unterraum von X, der C echt enthält. $\Rightarrow$ Widerspruch zu (b). $\Rightarrow$ Behauptung.

f) Sei A zusammenhängender Unterraum mit $A \neq \emptyset$ offen+abgeschlossen. $\Rightarrow$ (d): $\exists$ Komponente K von X, so daß $A \subset K$.
Zu zeigen $A = K$. Dazu: Annahme: $A \subset K$ echt $\Rightarrow K \cap \complement_X A \neq \emptyset$.
Aber:

- $K = (K \cap A) \cup (K \cap \complement_X A)$ und $K \cap A \neq \emptyset$ abgeschlossen (da A abgeschlossen und K abgeschlossen wegen (e)); $(K \cap \complement_X A) \neq \emptyset$ abgeschlossen (da $\complement_X A$ abgeschlossen (Folgerung I.3) und K abgeschlossen wegen (e)).
- $(K \cap A) \cap (K \cap \complement_X A) = \emptyset$.

$\Rightarrow K$ kann dargestellt werden als Vereinigung von abgeschlossenen, disjunkten, nichtleeren Mengen. $\Rightarrow$ Lemma 1 ((a)$\Leftrightarrow$(b)): K ist nicht zusammenhängend.
$\Rightarrow$ Widerspruch, da K als Komponente zusammenhängend ist (Bemerkung nach Definition 2).

g) wegen (a). $\square$

Definition 3 *a) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt* **lokal zusammenhängend in** *f, falls jede Umgebung U von f eine zusammenhängende Umgebung V von f enthält.*

b) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **lokal zusammenhängend**, *falls X lokal zusammenhängend in jedem $f \in X$ ist.*

Beispiele:

1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist zusammenhängend und lokal zusammenhängend.
2. Sei $A \subset \mathbb{R}^1$ z.B. $A := (0,1) \cup (2,3)$. Der Unterraum $(A, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ von $\left(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$ ist lokal zusammenhängend (vgl. Ü5, A1) aber nicht zusammenhängend (vgl. Definition 1).
3. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch (vgl. Ü5, A5) $A := \left\{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2; f_2 = \sin \frac{1}{f_1}, f_1 > 0\right\} \cup \{(0,0)\}$.
Ü5, A5: Der Unterraum $(A, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ von $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$ ist zusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend.

Also: Zusammenhang (vgl. Definition 1) und lokaler Zusammenhang (vgl. Definition 3) sind Begriffe, die einander nicht einschließen.

Lemma 5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

a) X ist lokal zusammenhängend.

b) Die Familie aller offenen, zusammenhängenden Teilmengen von X ist eine Basis für $\mathcal{T}$.

c) Jede Komponente jedes offenen Unterraumes von X ist offene Teilmenge von X.

d) Ist K Komponente eines Unterraumes Y von $X \Rightarrow \partial K \subset \partial Y$.

Bemerkung: Wegen (a)$\Rightarrow$(c) folgt insbesondere. Jede Komponente eines lokal zusammenhängenden Raumes ist offen (vgl. Lemma 4(e),(f)).

Beweis:

(a)$\Rightarrow$(d): Sei $f \in \partial K$. Zeige: $f \in \partial Y$.
Dazu (nach Lemma I.10(ix)) gilt $\bar{K} = K \cup \partial K$ und da $K \subset Y \Rightarrow$ Lemma I.7(i): $\bar{K} \subset \bar{Y} \Rightarrow f \in \bar{K} \subset \bar{Y}$.
Nach Lemma I.10(viii) ist $\bar{Y} = (\text{int } Y) \cup \partial Y$. Annahme: $f \notin \partial Y \Rightarrow f \in \text{int } Y$.
Da X lokal zusammenhängend und int Y eine offene Umgebung von f ist $\Rightarrow$ Definition 3: $\exists$ eine zusammenhängende Umgebung U von f, so daß $f \in U \subset \text{int } Y \subset Y$, da $f \in \partial K \cap U \Rightarrow$ vgl. Definition I.10(c): $K \cap U \neq \emptyset$.
Da K als Komponente zusammenhängend ist (vgl. Bemerkung nach Definition 2) und U nach

Voraussetzung zusammenhängend ist $\Rightarrow$ Lemma 3: $K \cup U$ ist zusammenhängend und $K \cup U \subset Y$.
$\Rightarrow$ Lemma 4(c): K ist maximal, d.h. $K \cup U = K \Rightarrow U \subset K \Rightarrow f \in \text{int } K$, denn f ist innerer Punkt von K (Definition I.10(a)).
Widerspruch, da int $K \cap \partial K = \emptyset$. $\Rightarrow$ Behauptung.

(d)$\Rightarrow$(c): Sei K Komponente von offenem Unterraum Y von X.
Da nach Voraussetzung (d) $\partial K \subset \partial Y$ und $K \subset Y \Rightarrow K \cap \partial K \subset Y \cap \partial Y$.
Da Y offen $\Rightarrow Y = \text{int } Y$ und int $Y \cap \partial Y = \emptyset \Rightarrow K \cap \partial K$ ist leer.
$\Rightarrow$ Lemma I.11(ii)$\Rightarrow$(i): K ist offen.

(c)$\Rightarrow$(b): Sei $A \in \mathcal{T}$ beliebig. $\Rightarrow (A, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist offener Unterraum (vgl. Definition I.22).
Voraussetzung (c): Die Komponenten von A sind offene Teilmengen von X. $\Rightarrow$ Lemma 4(g): A ist Vereinigung aller seiner Komponenten, d.h. von offenen, zusammenhängenden Teilmengen von X (vgl. Bemerkung nach Definition 2).
Da $A \in \mathcal{T}$ beliebig $\Rightarrow$ Definition I.12: Die Familie aller offenen, zusammenhängenden Teilmengen von X ist eine Basis für $\mathcal{T}$.

(b)$\Rightarrow$(a): Sei $f \in X$ beliebig und U beliebige Umgebung von f.
$\Rightarrow$ Definition I.3: $\exists$ offene Umgebung U_1, so daß $f \in U_1 \subset U \Rightarrow$ Voraussetzung (b), Lemma I.12: $\exists$ offenes, zusammenhängendes $V \subset X$ mit $f \in V \subset U_1 \Rightarrow$ Definition 3(a): $(X, \mathcal{T})$ ist lokal zusammenhängend in f.
$\Rightarrow$ Da $f \in X$ beliebig $\Rightarrow$ Definition 3(b): $(X, \mathcal{T})$ ist lokal zusammenhängend. $\square$

Lemma 6 *Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und die Abbildung $T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ stetig. Ist $(X, \mathcal{T}_1)$ lokal zusammenhängend, dann heißt dies im allgemeinen nicht, daß $(T(X), \mathcal{T}_{ind.})$ lokal zusammenhängend ist.*

Beweis: Mittels Gegenbeispiel vgl. Ü5, A6. $\square$

Satz 2 *a) Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und die Abbildung $T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ sei stetig, offen und surjektiv. Ist $(X, \mathcal{T}_1)$ lokal zusammenhängend, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}_2)$ lokal zusammenhängend.*

b) (vgl. Folgerung 1) Der lokale Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft (Definition I.19).

Beweis:

a) Zeige zunächst Eigenschaft:
($\star$) Sei $T : X \to Y$ offen, U Umgebung von f in X. $\Rightarrow T(U)$ ist Umgebung von Tf in Y.
Dazu: Da U Umgebung von f in X ist $\Rightarrow$ Def. I.3: Es existiert offenes G, so daß $f \in G \subset U$.
$\Rightarrow$ Def. I.20: $T(G)$ offen in $Y \Rightarrow Tf \in T(G) \subset T(U) \Rightarrow$ Definition I.3: $T(U)$ ist Umgebung von Tf in Y, d.h. ($\star$).
Zeige:$(Y, \mathcal{T}_2)$ ist lokal zusammenhängend.
Für beliebiges $g \in Y$ und beliebige Umgebung U von g existiert eine zusammenhängende Umgebung W von g, so daß $g \in W \subset U$.
Dazu: Sei $g \in Y$ beliebig, U beliebige Umgebung von g in Y. Da T surjektiv ist, folgt $\exists\, f \in X$ mit $Tf = g$.
Da T stetig ist $\Rightarrow$ Satz I.5 (a),(b),(c): $T^{-1}(U)$ ist Umgebung von f in X.
Da X lokal zusammenhängend ist $\Rightarrow$ Definition 3: Es existiert zusammenhängende Umgebung V von f in X, so daß $f \in V \subset T^{-1}(U)$.
Da V zusammenhängend ist $\Rightarrow$ Definition 3(b): $\left(V, \mathcal{T}_{1,\text{ind.}}\right)$ ist zusammenhängender Unterraum von $(X, \mathcal{T}_1)$. $\Rightarrow$ Satz 1: $\left(T(V), \mathcal{T}_{2,\text{ind.}}\right)$ ist zusammenhängender Unterraum von $(Y, \mathcal{T}_2)$, d.h. $W = T(V)$ ist zusammenhängend und $g = Tf \in T(V)$.
Da V Umgebung von f in X und T offen ist $\Rightarrow$ ($\star$): $T(V)$ ist Umgebung von $Tf = g$ in Y.
$V \subset T^{-1}(U)$ und T surjektiv $\Rightarrow T(V) \subset T\left(T^{-1}(U)\right) = U$.

b) Nach Definition I.19 zeige: Für homöomorphe Räume $(X,\mathcal{T}_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ gilt: X ist lokal zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Y lokal zusammenhängend.
Dazu: Sei T ein Homöomorphismus von X auf Y. $\Rightarrow$ Lemma I.22: $T: X \to Y$ ist stetig, offen und surjektiv.
Da auch $T^{-1}: Y \to X$ ein Homöomorphismus ist $\Rightarrow$ $T^{-1}: Y \to X$ ist stetig, offen und surjektiv. $\Rightarrow$ Behauptung mit (a). $\square$

Definition 4 *Ein topologischer Raum heißt* **total unzusammenhängend**, *falls für jedes $f \in X$ die Komponente von f in X gleich der einpunktigen Menge $\{f\}$ ist.*

Beispiele:

1. $(X,\mathcal{T}_{\text{diskret}})$ ist total unzusammenhängend (und lokal zusammenhängend).
2. $\left(\mathbb{Q}^1,\mathcal{T}_{\text{nat., ind.}}\right)$ ist total unzusammenhängend in $\left(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$.
3. $\left(\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}^1,\mathcal{T}_{\text{nat., ind.}}\right)$ ist ebenso total unzusammenhängend (Unterraum der irrationalen Zahlen).

Kapitel II.c) Wegzusammenhang

Definition 5 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\left([0,1],\mathcal{T}_{nat.,\ ind}\right)$ ein Unterraum von $\left(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_{nat.}\right)$.*
Eine stetige Abbildung $W: [0,1] \to X$ heißt ein **Weg** *in X.*
$W(0) \in X$ heißt **Anfangspunkt**, *$W(1) \in X$ heißt* **Endpunkt** *des Weges W in X und W* **verbindet** *die Punkte $W(0)$ und $W(1)$ in X.*
Ist W ein Weg, so heißt das Bild $W([0,1]) \subset X$ eine **Kurve** *in X.*

Definition 6 *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt* **wegzusammenhängend**, *falls zu zwei beliebigen Punkten $f,g \in X$ ein Weg W in X existiert, so daß $W(0)=f$ und $W(1)=g$.*

Sprechweise: f,g sind **durch den Weg W verbunden** oder f,g sind **in X verbindbar**.
Eine (nichtleere) Teilmenge $A \subset X$ heißt **wegzusammenhängend**, falls $(A,\mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ein wegzusammenhängender, topologischer Raum ist, d.h.:
Sind $f,g \in A$, dann existiert ein Weg W, so daß $W([0,1]) \subset A$, $\quad W(0)=f$ und $W(1)=g$.
Beispiel:

1. $\left(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$ ist wegzusammenhängend.
2. $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist wegzusammenhängend.
3. Der Kreis $\left\{(f_1,f_2) \in \mathbb{R}^2 : f_1^2+f_2^2=1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist wegzusammenhängend.
4. (Beispiel (3) nach Definition 3) Die Menge

$$A := \left\{ f=(f_1,f_2) \in \mathbb{R}^2 : f_2 = \sin\frac{1}{f_1}, f_1 > 0 \right\} \cup \{(0,0)\}$$

ist nicht wegzusammenhängend (vgl. Ü5, A5).

Lemma 7 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $(X,\mathcal{T})$ wegzusammenhängend, dann ist $(X,\mathcal{T})$ zusammenhängend. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.*

Beweis: Seien $f,g \in X$ beliebig. Da $(X,\mathcal{T})$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ Definition 6: $\exists$ Weg $W_{f,g}$: $[0,1] \to X$ mit $W_{f,g}(0)=f$, $W_{f,g}(1)=g$.
Da $\left([0,1],\mathcal{T}_{\text{nat., ind}}\right)$ zusammenhängend (vgl. Ü5, A1) und $W_{f,g}: [0,1] \to X$ stetig (Definition 5) ist $\Rightarrow$ Satz 1: Die Kurve $(W_{f,g}([0,1]),\mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist zusammenhängend, d.h.:
Zu jedem Paar $f,g \in X$ existiert eine zusammenhängende Kurve $W_{f,g}([0,1])$, so daß $f,g \in W_{f,g}([0,1])$.
$\Rightarrow$ Folgerung 2: X ist zusammenhängend.
Zur Umkehrung Ü5, A5. $\square$

Lemma 8 *Für offene $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$A \text{ ist zusammenhängend.} \Leftrightarrow A \text{ ist wegzusammenhängend.}$$

Beweis: Ü6, A4. □

Satz 3 *a) Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $T : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ eine stetige und surjektive Abbildung.*
Ist $(X, \mathcal{T}_1)$ wegzusammenhängend, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}_2)$ wegzusammenhängend.

b) Wegzusammenhang ist eine topologische Eigenschaft.

Beweis:

a) Seien $g_1, g_2 \in Y$ beliebig. Zeige: (Definition 6) Es existiert eine stetige Abbildung $S : [0,1] \to Y$ mit $S(0) = g_1$ und $S(1) = g_2$.
Dazu: Da $T : X \to Y$ surjektiv $\Rightarrow \exists\, f_1, f_2 \in X$, so daß $Tf_j = g_j$, $j = 1, 2$ für alle $g \in Y$.
Da X wegzusammenhängend $\Rightarrow$ Definition 6: $\exists$ stetige Abbildung $W : [0,1] \to X$ mit $W(0) = f_1$ und $W(1) = f_2$.
Sei $S := T \circ W \Rightarrow$ Ü4, A3: $S : [0,1] \to Y$ stetig mit $S(0) = T(W(0)) = Tf_1 = g_1$ usw.

b) Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ homöomorph.
$\Rightarrow$ Definition I.14: $\exists$ Homöomorphismus $T : X \to Y$, insbesondere ist T stetig und surjektiv und T^{-1} ist ein Homöomorphismus von Y nach X und insbesondere gilt: T^{-1} ist stetig und surjektiv. $\Rightarrow$ (a): Behauptung. □

Kapitel III

Trennungsaxiome, Kompaktheitsbegriffe

Kapitel III.a) Trennungsaxiome; Hausdorff-Räume

Definition 1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

T_0-Axiom (Kolmowgorov)
Zu je zwei verschiedenen Punkten $f, g \in X$ besitzt einer eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.

T_1-Axiom (Frechet)
Zu je zwei verschiedenen Punkten $f, g \in X$ besitzen beide eine Umgebung, die jeweils den anderen nicht enthält.

T_2-Axiom (Hausdorff)
Je zwei verschiedene Punkte $f, g \in X$ besitzen disjunkte Umgebungen.

T_3-Axiom (Vistoris)
Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem nicht in A enthaltenem Punkt $f \in X$ existiert eine offene Menge $B \subset X$ mit $A \subset B$ und einer Umgebung U von f mit $B \cap U = \emptyset$.

T_4-Axiom (Tietze)
Zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ existieren zwei A, B jeweils umfassende, offene Mengen, die zueinander disjunkt sind.

Ein topologischer Raum, der das Axiom T_j $(j = 0, \ldots, 5)$ erfüllt, heißt ein **T_j-Raum**.
Ein T_2-Raum heißt auch **Hausdorff-Raum** *oder* **separierter Raum**.
Ein T_3-Raum, der gleichzeitig T_1-Raum ist, heißt **regulär**.
Ein T_4-Raum, der gleichzeitig T_1-Raum ist, heißt **normal**.

Definition 2 *Eine Eigenschaft E eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt* **erblich** *falls gilt:*
Hat $(X, \mathcal{T})$ die Eigenschaft E, dann hat auch jeder Unterraum von $(X, \mathcal{T})$ die Eigenschaft E.

Lemma 1 *Die Trennungseigenschaften T_0, T_1, T_2, T_3 sind erblich, ebenso regulär, aber T_4 und normal sind nicht erblich.*

Beweis: Ü6, A4. □

Definition 3 *Ein topologischer Raum heißt* **T_5-Raum**, *falls jeder Unterraum ein T_4-Raum ist.*
Ein T_5-Raum, der zugleich T_1-Raum ist, heißt **erblich normal**.

Klar: T_5 und erblich normal sind erbliche Eigenschaften.

Lemma 2 *Die Trennungsaxiome T_1 - T_5 sowie regulär, normal, erblich normal sind topologische Eigenschaften.*

Beweis: Ü6, A6. □

Lemma 3 *Die Eigenschaften T_0 - T_2 bleiben bei Verfeinerung der Topologie erhalten.*

Beweis: Selbst! (Beachte Definition I.2). □

Nun zur Charakterisierung der Trennungseigenschaften:

Lemma 4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum:*
$(X, \mathcal{T})$ ist T_0-Raum. $\Leftrightarrow$ Für je zwei verschiedene Punkte $f, g \in X$ gilt $\overline{\{f\}} \neq \overline{\{g\}}$.

Beweis:

„$\Leftarrow$": Sei $\overline{\{f\}} \neq \overline{\{g\}}$ für je zwei verschiedene Punkte $f, g \in X$. $\Rightarrow f \notin \overline{\{g\}}$ oder $g \notin \overline{\{f\}}$ (denn: Annahme: $f \in \overline{\{g\}}$ und $g \in \overline{\{f\}} \Rightarrow \{f\} \subset \overline{\{g\}} \Rightarrow$ Lemma I.7(i) und Folgerung I.4: $\overline{\{f\}} \subset \overline{\{g\}}$ $\Rightarrow \overline{\{g\}} \subset \overline{\{f\}} \Rightarrow \overline{\{f\}} = \overline{\{g\}}$. Widerspruch zur Annahme.)

- Falls $f \notin \overline{\{g\}} \Rightarrow$ Folgerung I.3: $\complement_X\left(\overline{\{g\}}\right)$ ist eine offene Umgebung von f, die g nicht enthält.
- $g \notin \overline{\{f\}}$ analog.

Da Definition g beliebig ist $\Rightarrow T_0$ erfüllt.

„$\Rightarrow$": Sei $(X, \mathcal{T})$ T_0-Raum und f, g beliebige Punkte aus X mit $f \neq g$. $\Rightarrow$ Definition 1(a): Mindestens einer besitzt eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
O.B.d.A. $\exists$ Umgebung U_0 von f mit $g \notin U_0 \Rightarrow f \notin \overline{\{g\}}$ (Annahme: $f \in \overline{\{g\}} \Rightarrow$ Definition I.8: $f \in \{g\} \cup \{g\}^+ \Rightarrow f \in \{g\}^+ \Rightarrow f$ ist ein HP von $\{g\}$, d.h.: (Definition I.6) Jede Umgebung von f enthält mindestens einen von f verschiedenen Punkt von $\{g\}$, d.h. jede Umgebung enthält g selbst. $\Rightarrow$ Widerspruch zur Existenz obiger Umgebung U_0.)
$\Rightarrow f \notin \overline{\{g\}} \Rightarrow \overline{\{f\}} \neq \overline{\{g\}}$, denn: $f \in \overline{\{f\}}$, aber $f \notin \overline{\{g\}}$. □

Lemma 5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

a) $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_1-Raum.

b) Für jedes $f \in X$ gilt $\{f\} = \overline{\{f\}}$, d.h. jede einpunktige Menge ist abgeschlossen.

c) Für jede Teilmenge $A \subset X$ und jeden Häufungspunkt f von A gilt: In jeder Umgebung von f liegen unendlich viele Elemente von A (vgl. Definition I.6).

Beweis: Ü7, A?. qed

Lemma 6 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

a) $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_2-Raum.

b) Für jedes $f \in X$ gilt:
$\{f\} = \cap_{U_f \in \mathcal{U}_f} \bar{U}_f$ (vgl. Definition I.4), d.h. f ist der einzige Punkt in $\cap \bar{U}_f$ (vgl Definition I.3, vgl Satz IV.1;4).

Beweis: Ü7, A?. □

Lemma 7 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

a) $(X, \mathcal{T})$ ist T_3-Raum.

b) Die abgeschlossenen Umgebungen eines jeden Punktes bilden eine Umgebungsbasis (d.h. Definition I.15) für jedes $f \in X$ und in jeder Umgebung U von f existiert eine Umgebung V von f, so daß $f \in \bar{V} \subset U$.

Beweis:

(a)⇒(b): Sei $(X,\mathcal{T})$ T_3-Raum.
Seien $f \in X$ beliebig und U eine beliebige Umgebung von f. ⇒ Lemma I.10 (a): int U ist offen.
Da U Umgebung von f ⇒ Definition I.3: ∃ offenes G, so daß $f \in G \subset U$.
Da G offen und $G \subset U$ ⇒ Lemma I.10(ii): $G \subset \text{int } U$ ⇒ $f \in \text{int } U$ ⇒ Folgerung I.3: $\complement_X(\text{int } U)$ ist abgeschlossen in X und $f \notin \complement_X(\text{int } U)$.
Wegen T_3: ∃ offenes B mit $\complement_X(\text{int } U) \subset B$ und ∃ Umgebung V von f mit $V \cap B = \emptyset$. ⇒ $V \subset \complement_X B$ ⇒ Lemma I.7(i): $\bar{V} \subset \overline{\complement_X B}$ ⇒ Folgerung I.3: $= \complement_X B \subset \complement_X(\complement_X(\text{int } U)) = \text{int } U$.
Also: $f \in V$ und V ist Umgebung von f, so daß $\bar{V} \subset \text{int } U \subset U$, d.h. (b).

(b)⇒(a): Sei $A = \bar{A}$ eine abgeschlossene Menge in X (Lemma I.9) und $f \notin A$.
Setze $U := \complement_X A$ ⇒ Folgerung I.3: $f \in U$ und U ist offene Umgebung von f (Definition I.3).
⇒ (b): ∃ Umgebung V von f mit $f \in \bar{V} \subset U$. ⇒ Folgerung I.3: $B := \complement_X(\bar{V})$ ist offen und es gilt: $A = \complement_X U \subset \complement_X \bar{V} =: B$ und $B \cap V := \complement_X \bar{V} \cap V$ ⇒ Lemma I.10(vi): $(\text{int } (\complement_X V)) \cap V \subset \complement_X V \cap V = \emptyset$, also:
Zu gegebenem A und f ∃ offenes B mit $A \subset B$ und Umgebung V von f mit $B \cap V = \emptyset$, d.h. T_3. □

Lemma 8 (Urysohm-Lemma) *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*
$(X,\mathcal{T})$ ist T_4-Raum. ⇔ Für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset X$ ∃ stetige Abbildung

$$T : X \to \left([0,1], \mathcal{T}_{ind,\ nat}\right) \text{ mit } T(A) \subset \{0\},\ T(B) \subset \{1\}.$$

Ohne Beweis.

Satz 1 (Tietze Fortsetzungssatz) *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*
$(X,\mathcal{T})$ ist T_4-Raum. ⇔ Für jedes abgeschlossene $A \subset X$ und jede stetige Abbildung

$$S : A \to \left([0,1], \mathcal{T}_{ind,\ nat}\right)$$

existiert stetige Fortsetzung T auf ganz X, d.h. ∃ stetige Abbildung $T : X \to [0,1]$, so daß $T|_A = S$.

Ohne Beweis.

Definition 4 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum:*

*a) $(X,\mathcal{T})$ heißt T_{2a}-**Raum** ($T_{2\frac{1}{2}}$-**Raum**, **Urysohn-Raum**), falls je zwei verschiedene Punkte aus X disjunkte, abgeschlossene Umgebungen besitzen (vgl. Definition 1(c)).*

*b) $(X,\mathcal{T})$ heißt T_{3a}-**Raum** ($T_{3\frac{1}{2}}$-**Raum**), falls zu jeder nichtleeren, abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und zu jedem $f \in \complement_X A$ eine stetige Abbildung existiert:*

$$T : X \to [0,1] \text{ mit } T(A) = \{1\},\ T(f) = 0.$$

c) $(X,\mathcal{T})$ heißt **vollständig regulärer Raum** (**Tyshonov-Raum**), *falls $(X,\mathcal{T})$ ein T_{3a}-Raum und ein T_1-Raum ist.*

Lemma 9 *a) Die Trennungseigenschaft T_{2a} bleibt bei Verfeinerung der Topologie (Definition I.2) erhalten.*

b) Die Trennungseigenschaften T_{2a}, T_{3a}, sowie vollständig regulär sind erblich (Definition 2) und topologisch (Definition I.19).

Ohne Beweis.

Satz 2 *Es gelten folgende Beziehungen zwischen den Trennungseigenschaften topologischer Räume:*

$$
\begin{array}{lccc}
 & \textit{erblich normal } (T_5+T_1) & \Rightarrow_{def.} & T_5 \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & \textit{normal } (T_4+T_1) & \Rightarrow_{def.} & T_4 \\
 & \Downarrow & & \\
 & \textit{vollst. regulär } (T_{3a}+T_1) & \Rightarrow_{def.} & T_{3a} \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
(T_3+T_0 \quad \Leftrightarrow) & \textit{regulär } (T_3+T_1) & \Rightarrow_{def.} & T_3 \\
 & \Downarrow & & \\
 & T_{2a} & & \\
 & \Downarrow & & \\
 & T_2 & & \\
 & \Downarrow & & \\
 & T_1 & & \\
 & \Downarrow & & \\
 & T_0 & &
\end{array}
$$

Die umgekehrten Implikationen sind falsch, insbesondere gilt: Bemerkungen:

1. Aus T_0 folgt nicht T_1, denn Gegenbeispiel:
   Sierpinski-Raum: $X = \{0,1\}$ mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$ ist eine Topologie. Es gilt aber

   (i) $\{0\}$ ist eine Umgebung von 0, die 1 nicht enthält, d.h. T_0 ist erfüllt.

   (ii) Es existiert keine Umgebung von 1, die 0 nicht enthält, d.h. T_1 ist nicht erfüllt.

2. Aus T_1 folgt nicht T_2, denn Gegenbeispiel:
   Sei X eine unendliche (d.h. nicht endlich viele Elemente) Menge und $\mathcal{T}$ die **Topologie der endlichen Komplemente**, d.h. (Ü1, A1(a)):

   $$\mathcal{T} = \{\{A \subset X : X \setminus A \text{ endlich}\}, \{\emptyset\}\}.$$

   (i) $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_1-Raum, denn:
   Sei $f \in X$ beliebig. $\Rightarrow (X \setminus (X \setminus \{f\})) = \{f\}$ ist endlich. $\Rightarrow (X \setminus \{f\})$ ist offen. $\Rightarrow$ Folgerung I.3: $\{f\}$ ist abgeschlossen. $\Leftrightarrow$ Lemma 5: $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_1-Raum.

   (ii) $(X, \mathcal{T})$ ist nicht T_2-Raum, denn:
   Angenommen: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum.
   Seien $f, g \in X$ verschiedene Element $\Rightarrow$ Definition 1(c), Definition I.3: $\exists$ offene Umgebung $U_f, U_g \in \mathcal{T}$, so daß $U_f \cap U_g = \emptyset$.
   $\Rightarrow X = \complement_X \emptyset = \complement_X (U_f \cap U_g) = \complement_X U_f \cup \complement_X U_g$, sowohl $\complement_X U_f$,als auch $\complement_X U_g$ sind aber endlich, denn $U_f, U_g \in \mathcal{T}$. $\Rightarrow X$ ist endlich. Widerspruch zur Definition. $\Rightarrow$ Behauptung.

3. Aus T_3 folgt nicht T_0 (also insbesondere auch nicht T_{2a}, T_2 und T_1), denn Gegenbeispiel:
   Sei X einen mindestens zweielementige Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie.

   (i) $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_3-Raum nach Definition 1(d) (beachte nach Folgerung I.3 sind $\emptyset, X$ auch die einzigen abgeschlossenen Mengen).

   (ii) $(X, \mathcal{T})$ ist kein T_0-Raum nach Definition 1(a) (denn beachte: $\exists f, g \in X$ mit $f \neq g$) $\Rightarrow$ Behauptung.

4. Zur Äquivalenz: $T_3 + T_0 \Leftrightarrow T_3 + T_1$

   $T_3 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_0$: Trivial nach Definition 1.

$T_3 + T_0 \Rightarrow T_3 + T_1$: Zeige: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein $T_3 + T_0$-Raum $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_1-Raum.
Dazu: Seien $f, g \in X$, so daß $f \neq g$. $\Rightarrow$ Da $(X, \mathcal{T})$ ein T_0-Raum ist $\Rightarrow$ o.E.d.A.: $\exists$ eine Umgebung U von g, so daß $f \notin U$.
Da $(X, \mathcal{T})$ auch ein T_3-Raum ist $\Rightarrow$ Zu U existiert eine offene Umgebung V von g, so daß $\bar{V} \subset U$.
Setze $W := X \setminus \bar{V} \Rightarrow f \in W$ und W ist offene Umgebung von f, so daß $V \cap W = \emptyset$. $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ ist T_2-Raum, also insbesonder T_1-Raum.

5. Aus T_2 folgt nicht T_3 und (beachte (3)) folgt auch aus T_3 nicht T_2. $\Rightarrow$ T_2 und T_3 sind ohne Beziehung, vgl. mit Schema (nur mit T_1 kompleter Stammbaum).
Denn: Betrachte $X = \mathbb{R}^1$ und definiere auf X dadurch eine Topologie, daß ein Umgebungsraum erklärt wird (vgl. Definition I.5, Lemma I.3, Satz I.1). Dazu: Sei $f \in X$ beliebig.

   Ist $f \neq 0$: $\mathcal{W}_f :=$ System aller Teilmengen von $\mathbb{R}^1$, die ein offenes Intervall enthalten, das f enthält (also $\mathcal{U}_{f,\text{nat.}}$ vgl. Definition I.4).

   Ist $f = 0$: $\mathcal{W}_f :=$ System aller Teilmengen von $\mathbb{R}^1$, die eine Menge vom Typ $(-a, a) \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ für ein $a > 0$ enthalten.

   $\{\mathcal{W}_f\}_{f \in \mathbb{R}^1}$ erfüllt $(U_1) - (U_4)$, ist also Umgebungsraum.
   Z.B.: (U_4) für $f = 0$: Sei $U \in \mathcal{W}_0 \Rightarrow U$ enthält $(-a, a) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ für ein $a > 0$.
   Nehme $U^\star := (-a, a) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow U^\star \in \mathcal{W}_0$, $U^\star \subset U$ und $U \in \mathcal{W}_g$ für alle $g \in U^\star$, denn: Sei $g \in U^\star$, z.B. mit $0 < g < 1$ (o.E.d.A.). Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{1}{n+1} < g < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists b > 0$, so daß $(g - b, g + b) \subset U^\star \subset U \Rightarrow$ Definition: $U \in \mathcal{W}_g$.
   $\Rightarrow$ Lemma I.3, Satz I.1: Durch $\{\mathcal{W}_f\}_{f \in \mathbb{R}^1}$ wird auf $\mathbb{R}^1$ eindeutig eine Topologie festgelegt, wobei die Umgebungen bzgl. $\mathcal{T}$ genau die Elemente des vorangegangenen Systems $\{\mathcal{W}_f\}_{f \in \mathbb{R}^1}$ sind.
   $(X, \mathcal{T})$ ist ein T_2-Raum, denn sind $f, g \in \mathbb{R}$ mit $f \neq g$, dann gilt:

   Sei $f \neq 0 \neq g$: Es existieren zwei disjunkte Umgebungen (vgl. $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$).

   Sei $g \neq f = 0$: Es existieren auch disjunkte Umgebungen, aber kein Unterschied zu $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$.

   $(X, \mathcal{T})$ ist aber kein T_3-Raum, denn:
   Betrachte: $f = 0$ und $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow f \notin A$ und A ist abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$, denn: Sei $g \in \mathbb{R}^1$, so daß $g \notin A \Rightarrow$ Es existiert eine Umgebung U von g, so daß $U \cap A = \emptyset$. Dazu:

   $g \neq 0$: Klar.

   $g = 0$: Nehme $U = (-a, a) \setminus A$ (Definition!), also: Ist $g \neq A \Rightarrow$ Definition I.6: g ist kein HP von $A \Rightarrow$ Definition I.7: A ist abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.

   Beachte: A ist nicht abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ (denn 0 ist HP von A und $0 \notin A$).
   Sei nun $U \in \mathcal{W}_0 \Rightarrow$ Definition: $\exists a > 0$, so daß $(-a, a) \setminus A \subset U$. Sei V eine offene Menge (bzgl. $(X, \mathcal{T})$), so daß $A \subset V \Rightarrow$ Definition: V ist offen bzgl. $(X, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ und $U \cap V \neq \emptyset$, da $(-a, a) \cap A$ unendlich viele Elemente enthält.
   Also: Wie auch immer offenes V mit $A \subset V$ und Umgebung U von 0 gewählt wird $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$, d.h. T_3 ist nicht erfüllt (aber $(X, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist wohl ein T_3-Raum). $\square$

Kapitel III.b) Kompaktheit

Definition 5 *a) Sei A Teilmenge einer Menge X. Eine Familie $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ von Teilmengen von X, heißt eine* **Überdeckung von** *A, falls $A \subset \cup_{\alpha \in J} G_\alpha$.*

b) Die Familie $\mathcal{G}$ heißt **Überdeckung von** *X, falls $X = \cup_{\alpha \in J} G_\alpha$.*

c) Ist J endlich [oder abzählbar], so heißt die Überdeckung $\mathcal{G}$ **endlich [abzählbar]**.

d) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{G}$ eine Überdeckung von X [bzw. $A \subset X$], so heißt $\mathcal{G}$ eine **offene Überdeckung von** *X [bzw. $A \subset X$], falls $G_\alpha \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in J$.*

e) Ist $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *eine Überdeckung der Menge* X *und* $I \subset J$*, so daß* $\mathcal{G}' := \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *auch schon eine Überdeckung von* X *ist.*

$\Rightarrow \mathcal{G}'$ *heißt* **Teilüberdeckung** *von* X.

Definition 6 *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum.*

a) $(X, \mathcal{T})$ *heißt* **Lindelöf-Raum**, *falls jede offene Überdeckung von* X *eine abzählbare Teilüberdekkung enthält (vgl. Definition I.13).*

b) $(X, \mathcal{T})$ *hat die* **Heine-Borel-Eigenschaft**, *falls jede offene Überdeckung von* X *eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

c) Eine Familie $\mathcal{G}$ *von Teilmengen von* X *hat die* **endliche Durchschnittseigenschaft**, *falls jede endliche Teilfamilie von* $\mathcal{G}$ *einen nichtleeren Durchschnitt besitzt, d.h. ist* $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *und* $J' \subset J$ *mit* J' *endlich, dann ist* $\cap_{\alpha \in J'} G_\alpha \neq \emptyset$.

Lemma 10 *Ist* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum, der das 2.Abax erfüllt (Definition I.13), dann ist* $(X, \mathcal{T})$ *ein Lindelöf-Raum.*

Beweis: Ü7, A5. □

Folgerung 1 $\left(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{nat.}\right)$ *ist ein Lindelöf-Raum, aber kein Heine-Borel-Raum.*

Beweis: Da $\left(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$ das 2.Abax erfüllt (vgl. Beispiel nach Definition I.13) $\Rightarrow$ Lemma 10: $\left(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}}\right)$ ist Lindelöf-Raum.
Rest: Analysis (vgl. Lemma 11(ii)$\Leftrightarrow$(vii)). □

Ziel: Definition der Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen.
Ausgangspunkt: Situation im $\mathbb{R}^1$; dazu:

Lemma 11 *Sei* $A \subset \mathbb{R}^1$ *beliebige Teilmenge und betrachte den topologischen Raum* $\left(A, \mathcal{T}_{nat.,\ ind.}\right)$. *Äquivalent sind:*

i) A *hat die Heine-Borel-Eigenschaft und es gilt* (T_2).

ii) A *hat die Heine-Borel-Eigenschaft.*

iii) Jede Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *von abgeschlossenen Mengen* G_α *mit der endlichen Durchschnittseigenschaft besitzt einen nichtleeren Durchschnitt.*

iv) Jede Folge in A *hat einen Verdichtungspunkt (VP) in* A*, d.h. in jeder Umgebung des Verdichtungspunktes liegen unendlich viele Glieder der Folge (vgl. Definition I.6, Lemma 5).*

v) Jede unendliche Teilmenge von A *hat einen Häufungspunkt in* A.

vi) Jede Folge in A *besitzt eine in* A *konvergente Teilfolge (vgl. Definition IV.1).*

vii) A *ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis: Analysis. □

Lemma 12 *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum. Äquivalent sind (vgl. Lemma 11 (ii)*$\Leftrightarrow$*(iii)):*

a) Jede offene Überdeckung von X *besitzt eine endliche Teilüberdeckung (Heine-Borel-Eigenschaft).*

b) Jede Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *von abgeschlossen Mengen* G_α *mit der endlichen Durchschnittseigenschaft besitzt einen nichtleeren Durchschnitt.*

Beweis:

(a)⇒(b): Seien G_α abgeschlossen $\forall \alpha \in J$ und $\cap_{\alpha\in J'} G_\alpha \neq \emptyset$ für endliche $J' \subset J$.
Annahme: $\cap_{\alpha\in J} G_\alpha = \emptyset \Rightarrow \complement_X (\cap_{\alpha\in J} G_\alpha) = X$. Da G_α abgeschlossen ⇒ Folgerung I.3: $\complement_X G_\alpha$ offen $\forall \alpha \in J$.
⇒ De Morgan, Lemma I.6: $\cup_{\alpha\in J} (\complement_X G_\alpha) = \complement_X (\cap_{\alpha\in J} G_\alpha) = X$ ist eine offene Überdeckung von X. ⇒ (a): ∃ endliches $J' \subset J$, so daß $\cup_{\alpha\in J'} (\complement_X G_\alpha) = X$.
⇒ $\cap_{\alpha\in J} G_\alpha = \cap_{\alpha\in J'} (\complement_X G_\alpha) = \complement_X (\cup_{\alpha\in J'} (\complement_X G_\alpha)) = \complement_X X = \emptyset$. Widerspruch zu endlicher Durchschnittseigenschaft.

(b)⇒(a): (analog) dual. □

Definition 7 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt:*

A Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **kompakt**, *falls $(X, \mathcal{T})$ die Heine-Borel-Eigenschaft hat und auch T_2 gilt.*

B Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **quasikompakt**, *falls $(X, \mathcal{T})$ die Heine-Borel-Eigenschaft hat.*

C Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **abzählbar kompakt** *(Lemma 13), falls jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ einen VP f (in X) hat, d.h. zu jedem $U \in \mathcal{U}_f$ (Definition I.4) existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \in U$.*

D Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Bolzano-Weierstraß-kompakt (BW-kompakt)**, *falls jede unendliche Teilmenge von X einen Häufungspunkt (in X, vgl. Definition I.6) hat.*

E Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **folgenkompakt**, *falls jede Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset X$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ hat (Definition IV.1).*

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **kompakt**, **quasikompakt**, *etc., falls der Unterraum $(A, \mathcal{T}_{ind.})$ die entsprechende Eigenschaft hat.*

Satz 3 *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gelten die folgenden Implikationen:*

$$\boxed{kompakt} \underset{\Longleftarrow}{\overset{\Longrightarrow}{}}_{+(T_2)} \boxed{quasikompakt} \underset{(+Lindelöf)}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \boxed{abz.\ kompakt} \underset{\Longleftarrow}{\overset{\Longrightarrow}{}}_{+(T_1)} \boxed{BW\ kompakt}$$

$$\boxed{abz.\ kompakt} \Uparrow \Downarrow_{(1.Abzz)} \boxed{folgenkompakt}$$

Die mit Zusatzbedingung versehenen Implikationen sind ohne diese Zusatzbedingungen im allgemeinen falsch (insbesondere beachte: quasikompakt $\overset{\Leftarrow}{\neq}$ folgenkompakt).

Lemma 13 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist abz. kompakt ⇔ Jede offene abzählbare Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.*

Beachte: (Definition 6) Heine-Borel: Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdekkung.
Lindelöf: Jede offene Überdeckung von X hat eine abzählbare Teilüberdeckung.

Beweis:

„⇒": Annahme: ∃ abzählbare, offene Überdeckung $X = \cup_{k=1}^\infty G_k$, die keine endliche Teilüberdeckung hat.
⇒ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $f_n \in X$, so daß $f_n \notin \cup_{k=1}^n G_k$. ⇒ $(f_n)_{n=1}^\infty$ hat keinen Verdichtungspunkt. ⇒ Widerspruch zur Voraussetzung: abzählbar kompakt, dazu:
Angenommen es existiere VP $f \in X$, so daß f ein VP von (f_n). Da $X = \cup_{k=1}^\infty G_k \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $f \in G_{n_0}$. Da G_{n_0} offen ist ⇒ G_{n_0} ist Umgebung von f. Da f VP von (f_n) ⇒ Definition 7(C): In G_{n_0} liegen unendlich viele der Glieder f_n. Andererseits folgt aus der Definition von (f_n): $f_m \notin \cup_{k=1}^m G_k \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow f_m \notin G_{n_0}\ \forall m \geq n_0 \Rightarrow G_{n_0}$ enthält höchstens endlich viele der f_n. Widerspruch.

„⇐": Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine beliebige Folge. Zeige (f_n) hat einen VP (in X), dazu:
$A_n := \{f_k : k > n\}$ und $G_n = \complement_X \overline{A_n} \Rightarrow$ Folgerung I.3: G_n ist offen.
$\Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, denn: Angenommen: $\complement_X \left(\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = X \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \left(\complement_X \overline{A_n}\right) = \complement_X \left(\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = X$, d.h. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine offene Überdeckung von X, die abzählbar ist.
$\Rightarrow$ Voraussetzung: $\exists$ endliche Teilüberdeckung $X = \cup_{\text{endl.}} G_n = \cup_{\text{endl.}} \left(\complement_X \overline{A_n}\right) = \complement_X \left(\cap_{\text{endl.}} \overline{A_n}\right)$
$\Rightarrow \emptyset = \cap_{\text{endl.}} \overline{A_n}$. Widerspruch zur Definition der Menge A_n.
Also $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists f \in X$, so daß $f \in \overline{A_n}\, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ Für jede beliebige offene Umgebung G von f gilt: $f \in G \cap \overline{A_n} \neq \emptyset\, \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow f \in G \cap A_n \neq \emptyset\, \forall n \in \mathbb{N}$, denn: Angenommen $\exists\, k \in \mathbb{N}$, so daß $G \cap A_k = \emptyset \Rightarrow$ Folgerung I.3: $A_k \subset \complement_X G$ abgeschlossen. $\Rightarrow$ Lemma I.7(b): $\overline{A_k} \subset \complement_X G \Rightarrow \overline{A_k} \cap G = \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch. $\Rightarrow$ Definition von A_n: Zu jdem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k > n$, so daß $f_k \in G$. $\Rightarrow$ Unendlich viele der Glieder f_n liegen in G. $\Rightarrow$ Sei U beliebige Umgebung von f. $\Rightarrow$ Definition I.3: Es existiert offenes G, so daß $f \in G \subset U$. $\Rightarrow$ G enthält unendlich viele der Glieder f_n, also auch U. $\Rightarrow$ Definition 7(c): f ist VP von (f_n).

Beweis von Satz 3:

i) Kompakt $\Leftrightarrow +T_2$: Quasikompakt: Trivial nach Definition 7.

ii) Quasikompakt $\Rightarrow$ Abzählbar kompakt: Nach Definition 6+7(b) quasikompakt, d.h. Heine-Borel, d.h. jede offene Überdeckung hat endliche Teilüberdeckung $\Rightarrow$ insbesondere: Jede abzählbare offene Überdeckung hat endliche Teilüberdeckung. $\Rightarrow$ Lemma 13: Abzählbar kompakt.

iii) Quasikompakt $\Leftarrow$ Lindelöf: Abzählbar kompakt. Wegen Lindelöf (Definition 6(a)): Jede offene Überdeckung hat abzählbare offene Teilüberdeckung; Wegen abzählbar kompakt + Lemma 13 $\Rightarrow$ diese abzählbare offene Überdeckung hat endliche Teilüberdeckung. $\Rightarrow$ Heine-Borel, d.h. quasikompakt.

iv) Abzählbar kompakt $\Rightarrow$ BW kompakt. Sei $A \subset X$ Menge mit unendlich vielen (verschiedenen) Elementen. $\Rightarrow \exists f : 1 \in A, \exists f_2 \in A \setminus \{f_1\}, \exists f_3 \in A \setminus \{f_1, f_2\}, \ldots \Rightarrow \exists\, (f_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ und alle f_n sind verschieden. Nach Voraussetzung ist $(X, \mathcal{T})$ abzählbar kompakt $\Rightarrow$ Definition 7(c): $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ hat VP $f \in X$, d.h.: in jder Umgebung U von f liegen unendlich viele Glieder $f_n \Rightarrow$ Definition I.6: f ist Häufungspunkt von A, d.h. in jeder Umgebung von f liegt mindestens ein von f verschiedener Punkt von A.

v) Abzählbar kompakt $\Leftarrow +T_1$: BW kompakt. Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine beliebige Folge. Zeige (f_n) hat VP, dazu:

1. Fall: $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine endliche Menge in X. $\Rightarrow \exists f \in A \subset X$ mit $f = f_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ Definition 7(c): f ist VP von $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. Fall: A ist eine unendliche Menge $\Rightarrow$ BW-kompakt: A hat HP $f \in X$, d.h. (Definition I.4, 6) $(A \setminus \{f\}) \cap U \neq \emptyset\, \forall\, U \in \mathcal{U}_f$, da T_1 erfüllt $\Rightarrow$ Lemma 5 ???: In jeder Umgebung von f liegen unendlich viele Elemente von A. $\Rightarrow$ Insbesondere: In jeder Umgebung von f liegen unendlich viele Glieder f_n, d.h. (Definition 7(c)): f ist VP von der Folge (f_n).

vi) Abzählbar kompakt $\Leftarrow$ folgenkompakt $\Rightarrow$ + 1.Abax: abzählbar kompakt (später in Kapitel IV a).

vii) quasikompakt $\Rightarrow$ Lindelöf: trivial nach Definition 7(b), 6(a,b).

Für Gegenbeispiele zu den Implikationen mit Zusatzbedingung siehe Literatur. □

Folgerung 2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der T_2 und 2.Abax erfüllt, dann gilt (vgl. Lemma 11):*
Kompakt $\Leftrightarrow$ Quasikompakt $\Leftrightarrow$ abz. Kompakt $\Leftrightarrow$ BW-Kompakt $\Leftrightarrow$ Folgenkompakt.

Beweis: Aus T_2 folgt T_1 (Satz 2 bzw. Definition 1). Aus 2.Abax folgt Lindelöf (Lemma 10) $\Rightarrow$ 1.Abax (Lemma I. 19). $\Rightarrow$ Behauptung mit Satz 3. $\square$

Bemerkung: Voraussetzung „2.Abax" in Folgerung 2 ist sehr stark $\Rightarrow$ in Verallgemeinerung zu $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ betrachte kompakte **metrische Räume**.

Definition 8 (vgl. Ü1 Def.+A5) *Sei X eine beliebige (nichtleere) Menge. Eine Abbildung $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ heißt eine* **Metrik auf** *X, falls für beliebige $f, g, h \in X$ gilt:*

(M_1) $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ (Eindeutigkeitseigenschaft)

(M_2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ (Symmetrie)

(M_3) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ (Dreiecksungleichung)

Falls ρ eine Metrik auf X ist, heißt (X, ρ) ein **metrischer Raum** *(MR). Für zwei Elemente $f, g \in X$ heißt dann $\rho(f, g)$ der* **Abstand zwischen f und g**.

Lemma 14 *Sei (X, ρ) ein metrischer Raum.*
Zu $f \in X, \varepsilon > 0$ sei

$$S(f, \varepsilon) = \{g \in X : \rho(g, f) < \varepsilon\}$$

(offene ε-Menge bzw. ε-Umgebung von f). $\Rightarrow$ Zu jedem $f \in X$ erfüllt die Familie $\mathcal{U}_f := \{U \subset X : \exists \varepsilon > 0$, so daß $S(f, \varepsilon) \subset U\}$ die Umgebungsaxiome (U_1)-(U_4) aus Lemma I.2 und legt somit nach Lemma I.3 eine Topologie $\mathcal{T}_\rho$ auf X fest. $\mathcal{T}_\rho$ heißt die **durch die Metrik ρ induzierte Topologie**. *In ihr ist insbesondere eine Menge $G \subset X$ offen. $\Leftrightarrow$ Zu jedem $f \in G\, \exists \varepsilon > 0$, so daß $S(f, \varepsilon) \subset G$.*

Beweis: Ü1, A4 + Ü2, A1,2. $\square$

Bemerkung In $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ stimmt $\mathcal{T}_{\text{nat.}}$ mit der durch die Metrik $\rho(f, g) = |f - g| \, \forall f, g \in \mathbb{R}^1$ induzierten Topologie überein (vgl. Basis $\mathcal{B}$ für $\mathcal{T}_{\text{nat.}}$ in Beispiel (a) nach Lemma I.13).

Lemma 15 *Sei $(X, \mathcal{T}_\rho)$ ein metrischer Raum. Dann gilt:*

1. *$(X, \mathcal{T}_\rho)$ ist ein Hausdorff-Raum (d.h. T_2) und somit (T_1).*
2. *$(X, \mathcal{T}_\rho)$ erfüllt 1.Abax.*
3. *$(X, \mathcal{T}_\rho)$ erfüllt 2.Abax. $\Leftrightarrow$ Lindelöf. $\Leftrightarrow$ Separabel.*
4. *Jeder abzählbar kompakte, metrische Raum ist separabel.*

Beweis: 1,4 Ü8, A1; 2,3 Ü7, A6. $\square$

Folgerung 3 *Sei (X, ρ) beliebiger metrischer Raum. Dann gilt:*
Kompakt $\Leftrightarrow$ Quasikompakt $\Leftrightarrow$ abz. kompakt $\Leftrightarrow$ BW-kompakt $\Leftrightarrow$ folgenkompakt.

Beweis: Nach Lemma 15 abz. komp $\Rightarrow$(4): separabel $\Rightarrow$(3): Lindelöf: Weiter nach Lemma 15 (1) T_2 erfüllt $\Rightarrow T_1$; (2): 1.Abax erfüllt. Das ist Satz 3 einbringen $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$
Beachte der Beweis folgt nicht über Folgerung 2 (2.Abax in allgemeinen metrischen Räumen nicht erfüllt).

Lemma 16 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und $T : X \to Y$ eine beliebige Abbildung.*

a) Sei T stetig, bijektiv und offen: Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}')$ kompakt.

b) Sei T stetig und surjektiv: Ist $(X, \mathcal{T})$ quasikompakt, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}')$ quasikompakt.

c) Sei T stetig und surjektiv: Ist $(X, \mathcal{T})$ abz kompakt, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}')$ abz kompakt.

d) Sei T stetig und bijektiv: Ist $(X, \mathcal{T})$ BW kompakt, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}')$ BW kompakt

e) Sei T stetig und surjektiv: Ist $(X,\mathcal{T})$ folgenkompakt, dann ist auch $(Y,\mathcal{T}')$ folgenkompakt.

Beweis:

a) Nach Lemma I.22 ist T ein Homöomorphismus und nach Lemma 2 ist T_2 eine topologische Eigenschaft. Also: Ist $(X,\mathcal{T})$ ein T_2-Raum $\Rightarrow$ Definition I.19: $(Y,\mathcal{T}')$ ist T_2-Raum. Rest folgt mit (b) vgl. Definition 7.

b) Sei $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ ist eine beliebige offene Überdeckung von Y. $\Rightarrow$ T surjektiv: $T(X)=Y$
Da T stetig $\Rightarrow$ Satz I.5: $\left\{T^{-1}(G_\alpha)\right\}_{\alpha\in J}$ ist eine offene Überdeckung von X. Da $(X,\mathcal{T})$ quasikompakt $\Rightarrow \exists J'\subset J$ mit J' endlich, so daß $X=\cup_{\alpha\in J'}T^{-1}(G_\alpha)$,dann $T(A_1\cup A_2)=T(A_1)\cup T(A_2)\ \forall A_1,A_2\subset X$; $T\left(T^{-1}(B)\right)=B\cap T(X)=B\ \forall B\subset Y$, da T surjektiv ist. $\Rightarrow$ $\cup_{\alpha\in J'}G_\alpha=\cup_{\alpha\in J'}T\left(T^{-1}(G_\alpha)\right)=T\left(\cup_{\alpha\in J'}T^{-1}(G_\alpha)\right)$, da J' endlich ist. $T\left(\cup_{\alpha\in J'}T^{-1}(G_\alpha)\right)=T(X)=Y\Rightarrow\{G_\alpha\}_{\alpha\in J'}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von Y. $\Rightarrow$ Definition 7(b): Y ist quasikompakt.

c),d) Ü8, A4.

e) Später (wegen Folgenkonvergenz Kapitel IV.A).

Folgerung 4 *Die Eigenschaften: kompakt, quasikompakt, abz. kompakt, BW kompakt, folgenkompakt sind topologische Eigenschaften.*

Beweis: Lemma 16 + Definition I.19 $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$
Beachte: Diese Kompaktheitseigenschaften sind im allgemeinen nicht erblich (Definition 2), d.h. sie treffen i.a. nicht auf jeden Unterraum (Definition I.22) zu. $\Rightarrow$ Zusatzbedingung an Unterraum.
Beispiel: $\left([0,1],\mathcal{T}_{\text{nat.,\,ind.}}\right)$ ist quasikompakt, aber $\left((0,1),\mathcal{T}_{\text{nat.,\,ind.}}\right)$ ist nicht quasikompakt (vgl. Lemma I.24). Zum Beweis von Satz III.2:

b) aus normal $(T_4+T_1)\Rightarrow$ regulär (T_3+T_1); denn (Definition III.1): Seien $A\subset X$ abgeschlossen und $f\in X$, $f\notin A$ beliebig vorgegeben. Da $(X,\mathcal{T})$ T_1-Raum $\Rightarrow$ Lemma III.5: $\{f\}\subset X$ abgeschlossen, da die abgeschlossene Teilmengen $A,\{f\}\subset X$ disjunkt sind $\Rightarrow$ (T_4): $\exists$ offene $G_1,G_2\subset X$, so daß $A\subset G_1,\{f\}\subset G_2$ und $G_1\cap G_2=\emptyset$. Da G_2 Umgebung von f (Definition I.3) $\Rightarrow$ Definition III.1: (T_3). $\square$

$\Rightarrow$ Beweis zu Lemma III.22: vollständig. Lemma III.20: Seien $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume und $T: X\to Y$ stetig, bijektiv und offen. Falls $(X,\mathcal{T})$ lok (quasi) kompakt $\Rightarrow$ $(Y,\mathcal{T}')$ ist lokal (quasi) komp.
Beweis: Fall lokal quasikompakt: alter Beweis mit kompakt $\Rightarrow$ quasikompakt. Fall lokal kompakt: Da $(X,\mathcal{T})$ Hausdorff (Definition 9) $\Rightarrow$ Lemma III.2: $(Y,\mathcal{T}')$ ist Hausdorff-Raum $\Rightarrow$ Alte Version: Behauptung. $\square$

Kapitel III.c) Lokal kompakte Räume

Beispiel: $(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_{\text{nat.}})$ erfüllt T_2, aber nicht quasikompakt (vgl. Folge 1):
Betracte z.B. die offene Überdeckung $\{(j,j+2)\}_{j\in Z}$!
Aber: Jeder Punkt in $(\mathbb{R}^1,\mathcal{T}_{\text{nat.}})$ besitzt eine (quasi-)kompakte Umgebung (Definition II.3).

Definition 9 *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt* **lokal quasikompakt**, *falls jeder Punkt $f\in X$ eine quasikompakte Umgebung (vgl. Definition 7) besitzt.*
Ein lokal quasikompakter Hausdorff-Raum heißt **lokal kompakt** *(vgl. Lemma 1).*

Bemerkung: Vgl. Definition II.3 (lokal zusammenhängende Räume) mit Definition 9. Siehe auch Lemma 22.

Beispiele:

1. Jeder (quasi-)kompakte topologische Raum ist lokal (quasi-)kompakt, denn X selbst bildet eine entsprechende Umgebung.

2. Sei X eine beliebige, unendliche Menge, versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist $(X, \mathcal{T}_{\text{disk.}})$ lokal kompakt, aber nicht kompakt, denn:

   Zu T_2: Seien $f, g \in X$ beliebig mit $f \neq g$. $\{f\}$, $\{g\}$ sind disjunkte, offene Umgebungen.

   Zu Heine-Borel: Betrachte $X = \cup_{f \in X} \{f\}$. Dies ist eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

   Zu lokal Heine-Borel: Sei $f \in X$ beliebig, dann ist $\{f\}$ eine offene Umgebung von f, die die Heine-Borel-Eigenschaft hat.

3. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{nat.}})$ ist lokal kompakt, aber nicht kompakt.

Lemma 17 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ zwei Hausdorff-Räume und $T : X \to Y$ eine stetige, bijektive und offene Abbildung (d.h. Lemma I.22: Homöomorphismus). Falls $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ist, dann ist auch $(Y, \mathcal{T}')$ lokal kompakt.*

Beweis: Sei $g \in Y$ beliebiger Punkt. Da $(Y, \mathcal{T}')$ ein Hausdorff-Raum ist $\Rightarrow$ Definition 9, Lemma 1: zeige: $\exists$ kompakte Umgebung von g, dazu:
Da T surjektiv ist $\Rightarrow \exists\, f \in X$ und $Tf = g$.
Da $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ist $\Rightarrow$ Definition 9, Lemma 1: $\exists$ kompakte Umgebung U_g von f.
Da $T : X \to Y$ stetig, offen und bijektiv ist $\Rightarrow$ Definition I.20, Lemma I.29(a): $T : U_f \to T(U_f)$ ist stetig offen, bijektiv, denn beachte: $T(A_1 \cap A_2) = T(A_1) \cap T(A_2)$ für alle $A_1, A_2 \subset X$, da T injektiv ist.
$\Rightarrow$ Lemma 16(a): $T(U_f)$, d.h. $\left(T(U_f), \mathcal{T}'_{\text{ind.}}\right)$ ist kompakt.
Da T offen ist $\Rightarrow$ Definition I.20: $T(U_f)$ ist Umgebung von $Tf = g$. $\Rightarrow T(U_f)$ ist kompakte Umgebung von g. $\square$

Folgerung 5 *Lokal (quasi-)kompakt sind topologische Eigenschaften.*

Beweis: Lemma I.22 + Lemma 20, Lemma 2 (vgl. Definition 9 + Lemma 1). $\square$

Bemerkung: Lokal (quasi-)kompakt sind im allgemeinen keine erblichen Eigenschaften, aber:

Lemma 18 *Sei $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakter Hausdorff-Raum (vgl. Definition 9).*
Jeder abgeschlossene und jeder offene Unterraum ist lokal kompakt.

Beweis:

Fall $F \subset X$ abgeschlossen: Sei $f \in F$ beliebig. Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff-Raum ist $\Rightarrow$ Lemma 1, Definition 9: Zeige, daß $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist lokal (quasi-)kompakt, d.h. zu jedem $f \in F$ existiert quasikompakte Umgebung U (bzgl. $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$).
Dazu: Da X lokal kompakt $\Rightarrow$ Definition 9, Lemma ?: Es existiert eine Umgebung U_f von f in $(X, \mathcal{T})$. $\Rightarrow$ Lemma 18(a): U_f ist abgeschlossen, bzgl. $(X, \mathcal{T})$.
Setze $K := F \cap U_f$. Da F, U_f abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ sind $\Rightarrow$ Lemma I.6: K abgeschlossen bzgl. $(x, \mathcal{T})$. $\Rightarrow$ Lemma I.25(e): K abeschlossen bzgl. $(U_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ und $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$, denn: Nach Definition I.21: Offene Mengen in $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ sind darstellbar als $G \cap F$ mit $G \in \mathcal{T}$. $\Rightarrow$ Offene Mengen in K sind als Unterräume von $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ darstellbar als $G \cap F \cap K$ mit $G \in \mathcal{T}$.
Sei $\cup_{\alpha \in J} (G_\alpha \cap F \cap K) = K$ beliebige, offene Überdeckung von K. Da $F \cap K = K = K \cap U_f$ $\Rightarrow \cup_{\alpha \in J} (G_\alpha \cap U_f \cap K) = K$ offene Überdeckung von K. Da $G_\alpha \cap U_f \cap U_f \cap K$ eine typisch offene Menge von K als Unterraum von $(U_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist und K als Unterraum von $(U_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ kompakt ist. $\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $\exists\, I \subset J$, I endlich, so daß $K = \cup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap U_f \cap K) = \cup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap F \cap K)$. $\Rightarrow K$ als Unterraum von $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ hat Heine-Borel-Eigenschaft. $\Rightarrow$ Zwischenbehauptung.
Da U_f Umgebung von f in $(X, \mathcal{T}) \Rightarrow$ Lemma I.25(a): $K = F \cap U_f$ ist Umgebung von f in $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$.
Also: Im Unterraum $(F, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ existiert zu jeem $f \in F$ eine kompakte Umgebung K von f. $\Rightarrow$ F lokal kompakt.

Fall $G \subset X$ offen: Literatur. $\square$

Lemma 19 (vgl. Definition 9 und Definition II.3 bzw. Lemma 7) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum. Äquivalent sind:*

a) $(X, \mathcal{T})$ ist lokal kompakt.

b) Die kompakte Umgebung eines jeden Punktes bilden eine Umgebungsbasis (Defintion I.15).

Beweis:

(b)⇒(a): Trivial (vgl. Definition 9).

(a)⇒(b): Sei $f \in X$ beliebig ⇒ Zeige (Definition I.15): Ist U_f beliebige Umgebung von f ⇒ ∃ kompakte Umgebung W_f von f, so daß $f \in W_f \subset U_f$, dazu:
Da $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ⇒ Definition): Jedes $f \in X$ hat mindestens eine kompakte Umgebung K_f.
Sei M_f eine beliebige Umgebung von f, dann setze $V_f :=$int $(U_f \cap K_f)$. ⇒ Lemma I.10(i), Definition I.3: V_f ist offen bzgl. $(X, \mathcal{T})$, $V_f \neq \emptyset$, $U_f \subset K_f$.
Also: (Definition 7+9) $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist kompakter topologischer Raum und V_f ist offene Umgebung von f in $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ (vgl. Definition I.21). ⇒ Lemma 19(a): $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist normal $(T_1 + T_4)$. ⇒ Satz 2(nicht bewiesen): $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist regulär $(T_1 + T_3)$.
Setze $A := K_f \setminus V_f$ ⇒ Folgerung I.3: A abgeschlossen bzgl. $(U_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ und $f \in K_f \setminus A = V_f$. ⇒ (T_3): ∃ offenes O mit $A \subset O$ und Umgebung W_f von f, so daß $W_f \cap O = \emptyset$ (alles relativ zu K_f) ⇒ W_f ist (relative) Umgebung von f, so daß $W_f \subset W_f \subset K_f$ und $W_f \subset V_f \subset U_f$. Da $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist T_3-Raum ⇒ Lemma 7: Zu jeder Umgebung W_f ∃ abgeschlossene Umgebung W_f' mit $f \in W_f' \subset W_f$.
Da W_f' abgeschlossen (bzgl. $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$) Unterraum des kompakten topologischen Raumes $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ⇒ Lemma 18(b): W_f' ist kompakter Unterraum von $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ⇒ Definition 7: W_f' ist kompakter Unteraraum von $(X, \mathcal{T})$ (vgl. Lemma 14 bzw. Beweis zur Zwischenbehauptung zu Lemma 2). Da W_f' Umgebung von f in $(K_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ist ⇒ zeige: W_f' ist Umgebung von f in $(X, \mathcal{T})$, dazu: Da W_f' Umgebung von f in $(U_f, \mathcal{T}_{\text{ind.}})$ ⇒ Definition I.3: ∃ relativ offene Umgebung von f in K_f ⇒ Definition I.21: ∃ $B \in \mathcal{T}$ mit $f \in B \cap K_f \subset W_f' \subset W_f \subset V_f \subset K_f$ ⇒ $B \cap K_f \cap V_f = B \cap V_f \subset W_f'$ $B \cap K_f \cap V_f \in \mathcal{T}$ und $f \in B \cap K_f \cap V_f \subset W_f'$ ⇒ Definition I.3: W_f' ist Umgebung von f in $(X, \mathcal{T})$. $\square$

Kapitel IV

Konvergenz

Kapitel IV.a) Konvergenz von Folgen

Definition 1 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Folge $(f_n) \subset X$* **konvergiert gegen** *$f \in X$, falls in jeder offenen Umgebung (Definition I.3) U von f $\exists : N = N(U) > 0$, so daß $f_n \in U\, \forall n \geq N(U)$.*

Bemerkung: Statt sich nur (o.E.d.A.) auf offene Umgebungen zu beschränken, genügt es sogar, U nur eine (offene) Basis durchlaufen zu lassen (vgl. Lemma I.12). $\Rightarrow$ Definition der Folgenkonvergenz aus ANALYSIS bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ der offenen Intervalle für $\mathcal{T}_{\text{nat.}}$ (vgl. Beispiel nach Lemma I.13).

Bezeichnung: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ und f heißt ein **Grenzwert** (GW) der Folge. Eine Folge (f_n) heißt **konvergent**, falls mindestens ein $f \in X$ existiert, so daß (f_n) gegen f konvergiert.

Folgerung 1 *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent (mit dem gleichen GW).*

Beweis: Klar nach Definition 1. $\square$

Lemma 1 *In einem Hausdorff-Raum hat eine konvergente Folge einen eindeutigen Grenzwert.*

Beweis: Annahme: Sei $(f_n)_1^\infty \subset X$ konvergent gegen zwei verschieden Grenzwerte $f, f^\star$: Da $(X,\mathcal{T})$ T_2-Raum ist $\Rightarrow$ Definition III.1: $\exists$ offene, disjunkte Mengen $G, G^\star \subset X$ mit $f \in G$ und $f^\star \in G^\star$, da $(f_n) \to f$ und $(f_n) \to f^\star$
$\Rightarrow$ Definition 1: $\exists\, N(G)$, so daß $f_n \in G\, \forall n \geq N(G)$ und $\exists\, N^\star(G^\star)$, so daß $f_n \in G^\star\, \forall n \geq N^\star(G^\star)$. $\Rightarrow$ $f_n \in G \cap G^\star\, \forall n \geq \max\{N(G), N^\star(G^\star)\}$. Da $G \cap G^\star = \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch.
$\Rightarrow$ Behauptung (eindeutiger Grenzwert). $\square$
Bemerkung: Umkehrung gilt, falls X 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Satz 1 (später).

Lemma 2 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $f \in X$ und $(f_n)_1^\infty \subset X$ eine Folge von zu f verschiedenen Punkten $f_n \in A \subset X$. Konvergiert (f_n) gegen $f \Rightarrow f$ ist Häufungspunkt von A.*

Beweis: Klar nach Definition 1 und Definition I.6. $\square$
Bemerkung: Umkehrung gilt, falls X 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Satz 2(a) (später).

Lemma 3 *Seien $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume und $T : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $(f_n)_1^\infty \subset X$ eine gegen $f \in X$ konvergente Folge. $\Rightarrow$ Die Folge $(Tf_n)_1^\infty \subset Y$ konvergiert gegen Tf.*

Beweis: Sei V beliebige offene Umgebung von $Tf \in Y$. Da T stetig $\Rightarrow$ Satz I.5: $T^{-1}(V) \subset X$ offen, also offene Umgebung vom Grenzwert f. Da $(f_n) \to f \Rightarrow$ Definition 1: $\exists\, N(V)$, so daß $f_n \in T^{-1}(V)$ $\forall n \geq N(V)$. $\Rightarrow$ $Tf_n \in V\ \forall n \geq N(V) \Rightarrow$ Behauptung. $\square$
Bemerkung: Umkehrung gilt, falls X 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Satz 2(b) (später).

Satz 1 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der dem 1.Abax genügt (Definition I.16). $(X,\mathcal{T})$ ist ein Hausdorff-Raum. $\Leftrightarrow$ Jede konvergente Folge in X hat einen eindeutigen Grenzwert.*

Bemerkung: Falls $(X,\mathcal{T})$ nicht 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Satz 4.
Beweis:

„$\Rightarrow$": Folgt mit Lemma 1 (beachte: 1.Abax nicht nötig).

„$\Leftarrow$": Angenommen: $(X,\mathcal{T})$ sei kein Hausdorff-Raum $\Rightarrow$ Definition III.1: $\exists$ mindestens zwei verschiedene Punkte $f,g\in X$, so daß jede Umgebung U von f einen nichtleeren Durchschnitt mit jeder Umgebung V von g hat. Da $(X,\mathcal{T})$ 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Definition I.16: Zu f und g existieren abzählbare Umgebungsbasen $(B_n(f))_1^\infty$ und $(B_n(g))_1^\infty$.
Setze: $B_n^\star(f) := \cap_{k=1}^n B_k(f)$ und $B_n^\star(g) := \cap_{k=1}^n B_k(g) \Rightarrow f\in B_{n+1}^\star(f)\subset B_n^\star(f)$ und $g\in B_{n+1}^\star(g)\subset B_n^\star(g)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $(B_n^\star(f))_1^\infty$ bzw. $(B_n^\star(g))_1^\infty$ sind entsprechende Umgebungsbasen von f und g (vgl. Lemma I.2: (U_3) und Definition I.15). Da jedes $B_n^\star(f)$ bzw. jedes $B_n^\star(g)$ Umgebung von f bzw. g ist.
Annahme: $B_n^\star(f)\cap B_n^\star(g)\neq\emptyset$ für alle $n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow$ Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ existiert ein $f_n\in X$ mit $f_n\in B_n^\star(f)\cap B_n^\star(g)$.
Zeige: Für die so konstruierte Folge $(f_n)_1^\infty$ existieren zwei verschiedene Grenzwerte (nämlich f und g), dazu: Seien G_f bzw. G_g beliebige offene Umgebungen von f bzw. g. Da $(B_n^\star(f))_1^\infty$ eine Umgebungsbasis für f bildet $\Rightarrow$ Definition I.15: Zu G_f existiert $n_0\in\mathbb{N}$, so daß $B_{n_0}^\star(f)\subset G_f$. Da die $(B_n^\star(f))$ monoton fallend sind bzgl. Inklusion $\Rightarrow B_{n_0}^\star(f)\subset G_f\ \forall n\geq n_0$. Entsprechend existiert $n_1\in\mathbb{N}$, so daß $B_{n_0}^\star(g)\subset G_g\ \forall n\geq n_1$. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f_n\in G_f\,\forall n\geq n_0\\ f_n\in G_g\,\forall n\geq n_1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ Definition 1: } \begin{array}{l} f_n\to f\\ f_n\to g\end{array} \text{ und } f\neq g,$$

d.h. (f_n) konvergiert und zwar gegen zwei verschiedene Grenzwerte. $\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung. $\Rightarrow (X,\mathcal{T})$ ist ein Hausdorff-Raum. □

Analog: Umkehrung zu Lemma 2+3:

Satz 2 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der das 1.Abax erfüllt (Definition I.16).*

a) $f\in X$ ist ein HP von $A\subset X$. $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Folge von zu f verschiedenen Punkten aus A, die gegen f konvergiert.

b) (Übertragungsprinzip) Eine Abbildung T von $(X,\mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y,\mathcal{T}')$ ist stetig im Punkt $f\in X$. $\Leftrightarrow$ Für jede gegen f konvergierende Folge $(f_n)\subset X$ konvergiert die Folge $(Tf_n)\subset Y$ gegen $Tf\in Y$.

Beweis: Ü9, A4 (vgl. Lemma 2) bzw. Lemma 3 (Definition I.18). □
Bemerkung: Falls $(X,\mathcal{T})$ nicht 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Satz 3 (für (b)).

Lemma 4 (vgl. Satz III.3) *Für einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ gilt:*
folgenkompakt $\underset{+\not\Leftarrow 1.Abax}{\Rightarrow}$ abz. kompakt.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei $(f_n)_1^\infty\subset X$ eine beliebige Folge. Da $(X,\mathcal{T})$ folgenkompakt $\Rightarrow$ Definition III.7(c): $\exists$ konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_1^\infty$ mit Grenzwert $f\in X$. $\Rightarrow$ Definition 1: Zu jeder offenen Umgebung V von f existiert ein $N=N(V)$, so daß $f_{n_k}\in U$ für alle $k\geq N$. $\Rightarrow$ Definition I.3: Zu jeder beliebigen Umgebung V von f existiert $N'=N'(V)$, so daß $f_{n_k}\in V$ für alle $k\geq N'$. $\Rightarrow$ Definition III.7(c): $(f_n)_1^\infty$ hat einen VP f in X, d.h. $(X,\mathcal{T})$ ist abz. kompakt.

„$\Leftarrow$": Sei $(f_n)_1^\infty\subset X$ eine beliege Folge. Da $(X,\mathcal{T})$ abz. kompakt $\Rightarrow$ Definition III.7(c): (f_n) hat einen VP $f\in X$, d.h. zu jeder Umgebung U von f existieren unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ mit $f_n\in U$; da $(X,\mathcal{T})$ 1.Abax erfüllt $\Rightarrow$ Definition I.16: Jeder Punkt hat abzb. Umgebungsbasis insbesondere VP $f\in X$. $\Rightarrow\exists$ Umgebungsbasis $(U_j)_1^\infty$ von f, die wie in Beweis zu Satz 1 als monoton fallend bzgl. ? (c) angenommen werden kann: $f\in U_{j+1}\subset U_j$ für alle $j\in\mathbb{N}$. Also insbesondere zu jedem $j\in\mathbb{N}$ existieren unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ mit $f_n\in U_j$. Sei n_1 die kleinste natürliche Zahl mit $f_{n_1}\in U_1$. Sei n_2 die kleinste natürliche Zahl $n_2\neq n_1$ und $f_{n_2}\in U_2\subset U_1$ usw. $\Rightarrow (f_{n_j})_1^\infty$ ist eine Teilfolge von (f_n) mit $f_{n_j}\in U_j\subset U_{j-1}\subset\ldots\subset U_1$ und konvergiert gegen f, denn für jedes $j\in\mathbb{N}$ gilt $f_{n_k}\in U_j$ für alle $k\geq j$ und $(U_j)_1^\infty$ ist eine Umgebungsbasis von f. $\Rightarrow (f_n)$ besitzt konvergente Teilfolge, d.h. (Definition III.7(a)): $(X,\mathcal{T})$ ist folgenkompakt.

Kapitel IV.b) Konvergenz von Filtern

Erfüllt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ das 1.Abax nicht $\Rightarrow$ Die Charakterisierungen (Übertragungsprinzip) aus Satz 1+2 gelten im allgemeinen nicht (vgl. Ü9, A5) $\Rightarrow$ Folgenkonvergenz muß verallgemeinert werden.

Definition 2 *Sei X eine beliebige (nichtleere) Menge. Ein nichtleeres System $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein* **Filter auf** *X, falls gilt:*

(F_1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F_2) *Sind $A, B \in \mathcal{F}$, dann ist auch $A \cap B \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung endlichen Durchschnittes.*

(F_3) *$A \in \mathcal{F}$ und $A \subset B$ für $B \subset X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Obermengen.*

Beispiele:

a) $X \neq \emptyset$ sei eine beliebige Menge $\Rightarrow \mathcal{F} = \{X\}$ ist ein Filter auf X.

b) Seien $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $A \subset X$ und $A \neq \emptyset$.
$\mathcal{F} = \{B \subset X : A \subset B\}$ ist ein Filter auf X.

c) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f \in X$. $\Rightarrow$ Die Familie $\mathcal{U}_f$ aller Umgebungen von f bilden einen Filter auf X, den **Umgebungsfilter** (vgl. Definition I.4, insbesondere Axiome $(U_1) - (U_3)$).

Definition 3 *Sei X eine beliebige (nichtleere) Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein nichtleeres System, für das gilt:*

(FB_1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

(FB_2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow$ *Es existiert ein $B \in \mathcal{B}$, für das gilt $B \subset B_1 \cap B_2$.*

Dann heißt $\mathcal{B}$ eine **Filterbasis auf** *X (vgl. Lemma I.14).*

Bemerkung: Jeder Filter ist eine Filterbasis (Definition 2+3).

Folgerung 2 *Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf einer Menge X.*
$\mathcal{F} = \{A \subset X : \exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset A\}$ ist ein Filter auf X und insbesondere gilt: $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ heißt der **von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter**, *bzw. $\mathcal{F}$ besitzt die Basis $\mathcal{B}$.*
Genauer: $\mathcal{F}$ ist der kleinste Filter, der $\mathcal{B}$ als Basis enthält.

Beweis: Definition 2+3 (vgl. Kapitel I.c): Einschub). □

Beispiele:

d) Sei X eine beliebige Menge und $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine beliebige Folge. Dann ist $\mathcal{B} = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $B_n := \{f_k : k \geq n\}$ ist eine Filterbasis auf X.

e) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f \in X$. Dann ist (vgl. Definition I.15 + Beispiel (c)) jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}_f$ eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}_f$.

Definition 4 *Sei X eine beliebige (nichtleere) Menge und $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine beliebige Folge.*

$$\mathcal{F} = \{U \subset X : f_n \in U \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ist ein Filter auf X und heißt der zur Folge (f_n) gehörige **Elementarfilter**.

Insbesondere: (Beispiel (d)) Eine Basis für den Elementarfilter der Folge (f_n) ist $\mathcal{B} = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $B_n = \{f_k : k \geq n\}$.

Definition 5 (vgl. Definition I.2) *Seien $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ zwei Filterbasen auf einer Menge X. Gilt $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$, dann heißt $\mathcal{F}_2$* **gröber** *(***kleiner***)* **als** *$\mathcal{F}_1$ bzw. $\mathcal{F}_1$* **feiner** *(***größer***)* **als** *$\mathcal{F}_2$.*

Lemma 5 *Seien $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ zwei Filterbasen auf einer Menge X. Äquivalent sind:*

a) Der durch $\mathcal{B}_1$ erzeugte Filter $\mathcal{F}_1$ ist feiner als der durch $\mathcal{B}_2$ erzeugte Filter $\mathcal{F}_2$, also $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

b) Jedes Element von $\mathcal{B}_2$ umfaßt ein Element aus $\mathcal{B}_1$.

Beweis:

(a)⇒(b): Sei $A \in \mathcal{B}_2$ beliebig ⇒ Folgerung 2, (a): $A \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ ⇒ Definition aus Folgerung 2: $\exists\, B \in \mathcal{B}_1$, so daß $B \subset A$.

(b)⇒(a): Sei $A \in \mathcal{F}_2$ beliebig ⇒ Folgerung 2: $\exists\, B \in \mathcal{B}_2$, so daß $B \subset A$ ⇒ (b): $\exists\, C \in \mathcal{B}_1$, so daß $C \subset B \subset A$ ⇒ Folgerung 2: $A \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. □

Folgerung 3 *Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ konvergiert gegen ein Element $f \in X$ genau dann, wenn ihr Elementarfilter feiner als der Umgebungsfilter von f ist.*

Beweis: Setze $\mathcal{B}_1 = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $B_n := \{f_k : k \geq n\}$ und $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_f \Rightarrow \mathcal{B}_1$ ist Basis des Elementarfilters $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{B}_2$ ist gleich dem Umgebungsfilter $\mathcal{F}_2$.
$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen f ⇔ Definition 1: In jeder Umgebung von f existiert ein $B_n \in \mathcal{B}_1$ mit $B_n \subset U$, d.h.: Jedes Element von $\mathcal{B}_2$ ist Obermenge eines Elements von $\mathcal{B}_1$. ⇔ Lemma 5: $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}_1$. □

Diese Formulierung motiviert folgende Definition:

Definition 6 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt* **konvergent gegen einen Grenzwert** *$f \in X$, falls $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter von f auf X ist.*

Schreibweise: $\mathcal{F} \to f$ bzw. $\lim \mathcal{F} = f$.
Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt **konvergent**, falls er gegen mindestens ein $f \in X$ konvergiert (vgl. Definition 1).

Lemma 6 *Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Elementen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ konvergiert gegen ein $f \in X$. ⇔ Ihr Elementarfilter konvergiert gegen f.*

Beweis: Definition 6 + Folgerung 3. □

Lemma 7 *Konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ gegen f (in $(X, \mathcal{T})$), so konvergiert auch jeder feinere Filter gegen f.*

Beweis: Trivial nach Definition 6. □

Definition 7 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Ein Punkt $f \in X$ heißt* **Verdichtungspunkt** *(VP)* **des Filters** *$\mathcal{F}$ (vgl. Definition III.7(c) bzw. Lemma III.11 für Folge), falls $f \in \cap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$, bzw. äquivalent dazu (Zeige!) falls $f \in \cap_{B \in \mathcal{B}} \bar{B}$ für eine Filterbasis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{F}$, bzw. äquivalent dazu, falls ein feinerer Filter existiert, der gegen f konvergiert.*

Lemma 8 *Konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gegen ein $f \in X$, dann ist f ein VP von $\mathcal{F}$.*

Beweis: Selbst! □

Lemma 9 *Seien X, Y beliebige Mengen und $T : X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X ⇒ Das* **Bild von $\mathcal{B}$ unter** *T, d.h.: $T(\mathcal{B}) = \{T(B) \subset Y : B \in \mathcal{B}\}$ ist eine Filterbasis auf Y.*

Beweis: Zeigge (FB_1) und (FB_2) aus Definition 3 für $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{P}(Y)$, dazu:

Zu (FB_1): Zeige: $\emptyset \notin T(\mathcal{B})$, d.h. zeige $T(B) \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$.
Dazu: Da $\mathcal{B}$ Filterbasis auf X ist $\Rightarrow (FB_1)$: $B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B} \Rightarrow T(B) \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Zu (FB_2): Zeige: Zu jedem Paar $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$, so daß $T(B) \subset T(B_1) \cap T(B_2)$.
Dazu: Da $\mathcal{B}$ Filterbasis auf X ist $\Rightarrow (FB_2)$: Es existiert ein $B \in \mathcal{B}$, so daß $B \subset B_1 \cap B_2 \Rightarrow T(B) \subset T(B_1 \cap B_2) \subset T(B_1) \cap T(B_2)$. $\square$

Bemerkung: Insbesondere ist das Bild eines Filters im allgemeinen nur eine Filterbasis, kein Filter, denn:
Bzgl. (F_2) gilt im allgemeinen nicht $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B)$.

Satz 3 (vgl. Satz 2(b)) *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{Y})$ beliebige topologische Räume.*
Die Abbildung $T : X \to Y$ ist stetig in $f \in X$. $\Leftrightarrow$ Für jeden gegen f konvergierenden Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert der von der Filterbasis $T(\mathcal{F})$ erzeugte Filter auf Y gegen Tf.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei T eine Abbildung von X nach Y, die stetig in $f \in X$ ist, d.h. (Definition I.18): Zu jeder Umgebung vom Bildpunkt Tf in $(Y, \mathcal{T}')$ existiert eine Umgebung U von f in $(X, \mathcal{T})$, so daß $T(U) \subset V$.
Sei $\mathcal{U}_f$ das Umgebungssystem von f in $(X, \mathcal{T})$ und $\mathcal{V}_{Tf}$ das Umgebungssystem von Tf in $(Y, \mathcal{T}')$.
$\Rightarrow$ Jedes Element von $\mathcal{V}_{Tf}$ umfaßt ein Element von $T(\mathcal{U}_f)$.
Zeige: $\mathcal{V}_{Tf}$ und $T(\mathcal{U}_f)$ sind Filterbasen.
Da $\mathcal{V}_{Tf}$,$\mathcal{U}_f$ Umgebung $\Rightarrow$ Beispiel (c): $\mathcal{V}_{Tf}$, $\mathcal{U}_f$ sind Filter $\Rightarrow$ Definition 3: $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{V}_{Tf}$ sind Filterbasen $\Rightarrow$ Lemma 9: $\mathcal{V}_{Tf}$, $T(\mathcal{U}_f)$ sind Filterbasen.
Also: $(\star)$ Jedes Element der Filterbasis $\mathcal{V}_{Tf}$ umfaßt ein Element der Filterbasis $T(\mathcal{U}_f)$.
Zeige: $(\star\star)$ Konvergiert der Filter $\mathcal{F}$ auf X gegen $f \in X$. $\Rightarrow$ Jedes Element der Filterbasis $T(\mathcal{U}_f)$ umfaßt ein Element der Filterbasis $T(\mathcal{F})$.
Da $\mathcal{F}$ Filter auf X $\Rightarrow$ Definition 3: $\mathcal{F}$ ist Filterbasis $\Rightarrow$ Lemma 9: $T(\mathcal{F})$ ist Filterbasis auf Y.
Da $\mathcal{F}$ gegen f konvergiert $\Rightarrow$ Definition 6: $\mathcal{F}$ feiner als $\mathcal{U}_f$. Sei $V \in T(\mathcal{U}_f)$ beliebig $\Rightarrow$ Es gibt ein $U \in \mathcal{U}_f$ mit $V = T(U)$.
Da $\mathcal{F}$ feiner als $\mathcal{U}_f$, d.h.: $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{F} \Rightarrow \exists\, F \in \mathcal{F}$, so daß $U = F \Rightarrow T(F) = T(U) = V \Rightarrow (\star\star)$.
$(\star)$ und $(\star\star) \Rightarrow (\star\star\star)$ Jedes Element der Filterbasis $\mathcal{V}_{Tf}$ umfaßt ein Element der Filterbasis $T(\mathcal{F})$. $\Leftrightarrow$ Lemma 5: Der von $T(\mathcal{F})$ erzeugte Filter auf Y ist feiner als der von $\mathcal{V}_{Tf}$ erzeugte Filter auf Y,
d.h.: (Beispiel (c)) Der von $T(\mathcal{F})$ erzeugte Filter auf Y ist feiner als der Umgebungsfilter von Tf auf Y,
d.h.: (Definition 6) Der von $T(\mathcal{F})$ erzeugte Filter auf Y konvergiert gegen Tf.

„$\Leftarrow$": Falls der von $T(\mathcal{F})$ erzeugte Filter auf Y gegen Tf konvergiert für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X, der gegen $f \in X$ konvergiert, $\Rightarrow$ gilt $(\star\star\star)$,
d.h.: Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X, der gegen $f \in X$ konvergiert gilt: Jedes $V \in \mathcal{V}_{Tf}$ umfaßt ein Element von $T(\mathcal{F})$.
Nach Beispiel (c) + Definition 6 ist insbesondere $\mathcal{U}_f$ ein Filter auf X, der gegen f konvergiert $\Rightarrow (\star\star\star)$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{U}_f$:
Jedes $V \in \mathcal{V}_{Tf}$ umfaßt ein Element von $T(\mathcal{U}_f)$, d.h. für jedes $V \in \mathcal{V}_{Tf}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}_f$ mit $T(U) \subset V \Rightarrow$ Definition I.18: T stetig in f. $\square$

Lemma 10 *Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{M} := \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ eine Familie von Filtern auf X.*
Es existiert ein gröbster Filter $\mathcal{F}$ auf X, der feiner als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}$ ist. $\Leftrightarrow$ $(\star)$ Für je endlich viele Elemente $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_n}$ aus $\mathcal{M}$ und jedes Element $F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}_{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq n$ gilt $\cap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$ (vgl. Definition III.6(c)).

Bemerkung zur Terminologie: „$\mathcal{F}$ ist gröbster Filter auf X, der feiner als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}$ ist." bedeutet (vgl. Kapitel I.c) Einschub): Die Familie aller Filter auf X wird durch „$\subset$" halbgeordnet (feiner, gröber). $\Rightarrow$ Für die Teilfamilie $\mathcal{M}$ ist dann $\mathcal{F}$ (falls $\exists$) das Supremum, d.h. es existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X, so daß $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}$ (obere Schranke) und $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ für alle Filter $\mathcal{F}'$ mit der

Eigenschaft, daß $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}'$ für alle $\alpha \in J$ (kleinste obere Schranke).

Beweis:

„$\Rightarrow$": Es existiert ein gröbster Filter $\mathcal{F}$, der feiner als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}$ ist.
Seien $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_n} \in \mathcal{M}$ beliebig. $\mathcal{F}$ ist feiner als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M} \Rightarrow$ Insbesondere: $\mathcal{F}_{\alpha_i} \subset \mathcal{F}\ \forall 1 \leq i \leq n. \Rightarrow F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}$ für alle $F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}_{\alpha_i} \forall 1 \leq i \leq n$
Da $\mathcal{F}$ Filter $\Rightarrow (F_2)$: $\cap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow (F_1)$: $\cap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$, d.h.: $(\star)$.

„$\Leftarrow$": Sei $(\star)$ erfüllt. Setze $\mathcal{F} := \{\cap_{k\in K} F_k,\ F_k \in \mathcal{F}_k\ \forall k \in K$ für beliebiges $K \subset J$ endlich$\}$.
Zeige: $\mathcal{F}$ ist der gesuchte Filter, dazu:

I) Zeige, daß $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

Zu (F_1): $\emptyset \notin \mathcal{F}$ wegen $(\star)$.

Zu (F_2): $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegen Bildung endlicher Durchschnitte nach Konstruktion (beachte (F_2) für $\mathcal{F}_\alpha$).

Zu (F_3): $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegen Bildung von Obermengen,denn:
Sei $F \subset \mathcal{F}$ beliebig, d.h. $F = \cap_{k\in K} F_k$ mit $K \subset J$ endlich, $F_k \in \mathcal{F}_k$.
Sei $V \subset X$ beliebig ,so daß $F \subset V$. Zeige: $V \in \mathcal{F}$.
Dazu: Da $\mathcal{F}_k$ Filter und $F_k \in \mathcal{F}_k \Rightarrow (F_3)$: $F_k \subset F_k \cup V \in \mathcal{F}_k$.
$\Rightarrow V = V \cup F$, da $F \subset V \ \ldots = V \cup (\cap_{k\in K} F_k) = \cap_{k\in K} \underbrace{(V \cup F_k)}_{\in \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}$ nach Definition von F.

II) Zeige: $\mathcal{F}$ ist feiner als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}$.
Trivial nach Konstruktion, denn: $F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ für ein $J \Rightarrow$ Definition $\mathcal{F}$: $F_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}\ \forall \alpha \in J$.

III) Zeige: $\mathcal{F}$ ist der gröbste Filter auf X, der feiner als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}$ ist, dazu:
Sei $\mathcal{F}'$ ein zweiter Filter auf X, der feiner ist als alle $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{M}, d.h.: \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}'$ für alle $\alpha \in J$.
Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig, d.h. $F \subset X$ und es existiert ein endliches $K \subset J$ endlich und $F_k \in \mathcal{F}_k$, so daß $F = \cap_{k\in K} F_k \Rightarrow F_k \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}'\ \forall k \in K$.
Da $\mathcal{F}'$ Filter auf $X \Rightarrow (F_2)$: $F \in \mathcal{F}'$, also $F \in \mathcal{F}'\ \forall F \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. □

Satz 4 (vgl. Satz 1) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum.*
$(X, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorff-Raum. $\Leftrightarrow$ Jeder Filter auf X hat höchstens einen Grenzwert.

Bemerkung: vgl. Lemma III.6.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_2-Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der gegen zwei Punkte $f, g \in X$ mit $f \neq g$ konvergiert. $\Rightarrow$ Definition 6: $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}_g \subset \mathcal{F}$.
Wegen T_2 (Definition III.1) existiert ein $U_f \in \mathcal{U}_f$ und ein $U_g \in \mathcal{U}_g$ mit $U_f \cap U_g = \emptyset$.
$U_f, U_g \in \mathcal{F} \Rightarrow (F_2)$: $U_f \cap U_g \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$. Widerspruch zu (F_1).

„$\Leftarrow$": Annahme: $(X, \mathcal{T})$ erfülle nicht (T_2), d.h. (Definition II.1) es gibt Punkte $f, g \in X$ mit $f \neq g$, so daß $U_f \cap U_g \neq \emptyset\ \forall U_g \in \mathcal{U}_g$ und $U_f \in \mathcal{U}_f$.
Da $\mathcal{U}_f$ und $\mathcal{U}_g$ Filter auf X sind $\Rightarrow$ Betrachte $\mathcal{M} = \{\mathcal{U}_f, \mathcal{U}_g\}$ in Verbindung mit Lemma 10 $\Rightarrow$ Annahme: Bedingung $(\star)$ aus Lemma 10 erfüllt. $\Rightarrow$ Lemma 10: $\exists$ Filter $\mathcal{F}$ auf X, der feiner als $\mathcal{U}_f, \mathcal{U}_g$ ist (und der gröbste Filter mit dieser Eigenschaft ist), d.h.: $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}_g \subset \mathcal{F}$.
Da $\mathcal{U}_f \to f$ und $\mathcal{U}_g \to g$ (vgl. Definition 6) $\Rightarrow$ Lemma 7: $\mathcal{F} \to f$ und $\mathcal{F} \to g$.
Da $f \neq g \Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung. □

Definition 8 *Ein Filter $\mathcal{F}_U$ auf einer Menge X heißt ein* **Ultrafilter**, *falls es keinen Filter $\mathcal{F}$ auf X gibt mit $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_U \neq \mathcal{F}$.*

Einschub:

(vgl. Einschub in Kapitel I.c)): Sei eine beliebige (nichtleere) Menge X durch „$\prec$" partiell geordnet. Ein Element $f \in X$ heißt **maximal** [**minimal**], falls aus $g \in X$ und $f \prec g$ [$g \prec f$] stets $g = f$ folgt.
Zorn-Lemma: Sei X eine nichtleere, partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, daß jede total geordnete Teilmenge eine obere [untere] Schranke besitzt $\Rightarrow$ X enthält ein maximales [minimales] Element.

Also: (Definition 8) Ein Filter $\mathcal{F}_U$ auf einer Menge X heißt Ultrafilter, falls $\mathcal{F}_U$ ein maximales Element in der durch „ $\subset$ " partiell geordneten Familie aller Filter ist (feiner, gröber).

Satz 5 (Ultrafiltersatz) *Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ auf einer (nichtleeren) Menge X existiert ein Ultrafilter auf X, der feiner als $\mathcal{F}$ ist.*

Beweis: Sei Φ die Familie aller Filter auf X, die $\mathcal{F}$ enthalten. Φ ist partiell geordnet durch die Relation $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ (feiner, gröber). Sei $\mathcal{M}$ eine total geordnete Teilfamilie vo Φ, d.h. (vgl. Kapitel I.c): Einschub) für je zwei Elemente $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{M}$ gilt entweder $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ oder $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ oder beides. Betrachte beliebige, endlich viele Elemente $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \in \mathcal{M}$.
Da $\mathcal{M}$ total geordnet $\Rightarrow$ Ohne Einschränkung kann angenommen werden: $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{F}_n$.
Sei $F_i \in \mathcal{F}_i \, \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow F_i \in \mathcal{F}_1 \, \forall 1 \leq i \leq n$.
Da $\mathcal{F}_1$ ein Filter ist $\Rightarrow$ (F_1) und (F_2): $\cap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{M}$ erfüllt Bedingung $(\star)$ aus Lemma 10 $\Rightarrow$ Lemma 10: $\mathcal{M}$ hat eine obere Schranke. $\Rightarrow$ Zorn-Lemma: Die Familie Φ enthält ein maximales Element $\mathcal{F}^\star$, d.h. $\exists$ mindestens ein $\mathcal{F}^\star \in \Phi$ mit der Eigenschaft:
$(\triangle)$ Für jeden Filter $\mathcal{F}' \in \Phi$ mit $\mathcal{F}^\star \subset \mathcal{F}' \Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}^\star$, da $\mathcal{F}^\star \in \Phi \Rightarrow$ Definition Φ: $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\star$.
Zeige: $\mathcal{F}^\star$ ist ein Ultrafilter, d.h. (Definition 8): $\mathcal{F}^\star$ ist nicht nur maximales Element von Φ, sondern auch maximales Element der Familie aller Filter. Dazu:
Sei $\mathcal{F}''$ beliebiger Filter auf X (zunächst nicht notwendigerweise in Φ) mit $\mathcal{F}^\star \subset \mathcal{F}''$.
Da $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\star \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\star \subset \mathcal{F}'' \Rightarrow$ Definition Φ: $\mathcal{F}'' \in \Phi \Rightarrow (\triangle)$: $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}''$.
Also: $\mathcal{F}^\star$ ist ein Ultrafilter auf X, der $\mathcal{F}$ enthält. $\square$

Lemma 11 *Sei X eine beliebige (nichtleere) Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Äquivalent sind:*

a) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf X.

b) Aus $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ folgt $F_1 \in \mathcal{F}$ oder $F_2 \in \mathcal{F}$.

c) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $\complement_X A \in \mathcal{F}$.

d) Ist $A \subset X$ und $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

Beweis: Elementar (benutze Lemma 10) $\Rightarrow$ Selbst oder Literatur. $\square$

Beispiel: Sei X eine beliebige Menge und $f \in X \Rightarrow \mathcal{F} := \{C \subset X : f \in C\}$ ist ein Ultrafilter auf X, denn: Entweder direkt oder mit Lemma 11(d)$\Rightarrow$(a). Dazu: Sei $A \subset X$ und $A \cap F \neq \emptyset \, \forall F \in \mathcal{F}$.
Da $\{f\} \in \mathcal{F} \Rightarrow$ Insbesondere: $A \cap \{f\} \neq \emptyset$, d.h.: $f \in A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

Lemma 12 *Seien (X, T) ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f \in X$ ein VP von $\mathcal{F}$. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ konvergiert gegen f.*

Beweis: Definition 7 (insbesondere die Äquivalenz) + Definition 8. $\square$

Folgerung 4 *Für die Ultrafilter eines topologischen Raumes (X, T) sind die Begriffe Verdichtungspunkt und Grenzwert äquivalent (vgl. Lemma 8).*

Lemma 13 *Seien X, Y beliebige Mengen und $T : X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $X \Rightarrow T(\mathcal{F})$ ist Basis eines Ultrafilters auf Y.*

Beweis: Einfache Folgerung aus Lemma 11(a)$\Leftarrow$(b). $\square$

Lemma 14 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Äquivalent sind:*

a) $(X, \mathcal{T})$ ist quasikompakt (vgl. Definition III.7(b)).

b) Jeder Filter auf X hat mindestens einen VP (vgl. Definition III.7(C)+Satz III.3).

c) Jeder Ultrafilter auf X ist konvergent.

Beweis: Selbst! □