Einführung in die Strömungsphysik

Vorlesung von Prof. Dr. H. Eckelmann
Winter 95/96 Sommer 96
Winter 95/96 noch nicht vollständig

Ausarbeitung: Kai Nörthemann

Inhaltsverzeichnis

1.1 Einleitung . . . 3
1.1.1 Dimensionen . . . 3
1.2 Definitionen und Eigenschaften von Fluiden . . . 3
1.3 Verhalten strömender Medien . . . 3
1.3.1 LAGRAGEsche und EULERsche Betrachtungsweise . . . 3
1.3.2 Darstellung von Strömungsfeldern . . . 3
1.3.3 laminar - turbulente Strömungsfelder . . . 3
1.3.4 Unterschall - Überschallströmungen . . . 3
1.3.5 strömende - schwallende Strömung . . . 3
1.4 Änlichkeitsgesetze der Strömungmechanik . . . 3
1.4.1 Herleitung der Kennzahlen aus der Dimensionsanalyse . . . 3
1.4.2 Methode gleichartiger Größen . . . 3
1.4.3 Bedeutung der Kennzahlen . . . 3
1.4.4 Dimensionslose Beiwerte . . . 3

2 Bewegungsgleichungen, Kontiunitätsgleichung 3
2.1 Kontiunitätsgleichung . . . 3
2.2 Flüssigkeitsspannungen . . . 4
2.2.1 Der Spannungszustand im ruhrenden Fluid . . . 5
2.2.2 Der Spannungszustand im zähen Fluid . . . 5
2.2.3 Der Zusammenhang zwischen Spannung und Deformationszustand . . . 6
2.3 Navier – Stokes – Gleichungen . . . 7
2.3.1 Eulergleichung . . . 8
2.3.2 Bernoulli Gleichung . . . 9
2.3.3 Anwendung der Bernoulli Gleichung auf tropfbare Flüssigkeiten . . . 9
2.4 Wirbeltransportgleichung . . . 10
2.4.1 Wirbelsätze . . . 10
2.4.1.1 Zirkulation . . . 10
2.4.1.2 Zeitliche Änderung der Zirkulation einer flüssigen Linie . . . 11
2.4.1.3 Wirbelsätze von BJERKNES und THOMSON . . . 12
2.4.1.4 Wirbelsätze von Helmholz . . . 12
2.4.2 Erzeugung von Wirbeln (Wirbelstärke) . . . 13
2.5 Exakte Lösungen der Navier – Stokes – Gleichungen . . . 13
2.6 Potentialströmung . . . 14
2.6.1 Räumliche Potentialströmung . . . 15
2.6.2 Ebene Potentialströmung . . . 18
2.6.3 Konforme Abbildungen . . . 22
2.6.4 angeströmte Platte . . . 23
2.6.5 Joukowsky Profile . . . 24
2.6.6 Entstehung der Zirkulation am Tragflügel . . . 25
2.6.7 Tragflügel endlicher Spannweite . . . 25
2.6.8 Räumliche, drehsymetrische Potentialströmung . . . 25
2.7 Schleichende Strömung ($Re \to 0$) . . . 26
2.7.1 Schiermittelreibung . . . 27
2.7.2 Grundwasserströmung . . . 28
2.8 Grenzschichtgleichungen ($Re \to \infty$) . . . 28
2.8.1 Aufstellen der Grenzschichtgleichung für den ebenen Fall . . . 29
2.8.2 Grenzschichtablösung . . . 31

2.8.3 Grenzschichtumschlag laminar – turbulent 31
2.9 Transortgleichungen der Strömungsmechanik 31
2.9.1 Transportgleichung in differenieller Form 32
2.9.2 Transportgleichung in integraler Form 32

3 Erhaltungssätze **32**
3.1 Massenerhaltungssatz 32
3.2 Impulssatz 33
3.3 Impulsmonentensatz 34
3.4 Energiesatz 34
3.5 Bilanz 38

1.1 Einleitung

1.1.1 Dimensionen

1.2 Definitionen und Eigenschaften von Fluiden

1.3 Verhalten strömender Medien

1.3.1 LAGRAGEsche und EULERsche Betrachtungsweise

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}}_{\text{substantielle -}} = \underbrace{(\underline{u}\,\mathrm{grad}\,)\underline{u}}_{\text{konvektive -}} + \underbrace{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}}_{\text{lokale -}} \quad \text{Beschleunigung}$$

$$(\underline{u}\,\mathrm{grad}\,)\underline{u} = \mathrm{grad}\,\frac{\underline{u}^2}{2} - \underline{u} \times \mathrm{rot}\,\underline{u}$$

$$\triangleq \underline{u} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\underline{u} - \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\underline{u}$$

1.3.2 Darstellung von Strömungsfeldern

1.3.3 laminar - turbulente Strömungsfelder

1.3.4 Unterschall - Überschallströmungen

1.3.5 strömende - schwallende Strömung

1.4 Änlichkeitsgesetze der Strömungmechanik

1.4.1 Herleitung der Kennzahlen aus der Dimensionsanalyse

1.4.2 Methode gleichartiger Größen

1.4.3 Bedeutung der Kennzahlen

1.4.4 Dimensionslose Beiwerte

2 Bewegungsgleichungen, Kontiunitätsgleichung

2.1 Kontiunitätsgleichung

Satz von der Erhaltung dar Masse

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathrm{Vol}} \varrho\,\mathrm{d}V = -\int\limits_{Vol} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}V - \oint\limits_{\partial \mathrm{Vol}} \varrho\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F}$$

integrale Form der Kontiunitätsgleichung

$$\int\limits_{Vol} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oint\limits_{\partial \mathrm{Vol}} \varrho\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F} = 0$$

$$\int\limits_{V} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \varrho\underline{u}\right)\mathrm{d}V = 0$$

in differentieller Form

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\varrho\underline{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho\,\mathrm{div}\,\underline{u} = 0 \qquad (1)$$

Spezielle Formen der Kontiunitätsgleichung

a) imkompressible
ϱ: räumlich und zeitlich konstant, d.h. $\mathrm{d}\varrho = 0$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} \underline{u} = 0$$

b) homogen
ϱ: räumlich konstant, d.h. $\operatorname{grad} \varrho = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \underline{u} = 0$$

c) stationär
ϱ: zeitlich konstant, d.h. $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} (\varrho \underline{u}) = 0$$

d) Anwendung auf Stromröhre
Das Kontrollvolumen ist eine Stromröhre, das mit den beiden Flächen F_1 und F_2 abgeschlossen wird.

$$\int_{F_1} \varrho \underline{u} \, \mathrm{d}\underline{F} + \int_{F_2} \varrho \underline{u} \, \mathrm{d}\underline{F} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \varrho_1 u_1 F_1 = \varrho_2 u_2 F_2$$

Also wird eine Stromröhre nicht durchströmt.

2.2 Flüssigkeitsspannungen

Das Fluid wird als Kontinuum aufgefaßt. Wir betrachten einen Teilbereich, der so klein ist, daß Änderungen 2. Ordnungen zu vernachlässigen sind im Vergleich zu Größen wie Geschwindigkeiten und Kräften. Auf diesen Teilbereich wirken:

1. Volumenkräfte [Kraft/Volumen]
   z.B.: $K = \varrho g$ g: Schwerebeschleunigung
   $B = \varrho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ Beschleunigungskraft

2. Oberflächenkräfte [Kraft/Fläche]
   Auf die Flächeneinheit bezogene Kräfte werden auch als Spannungen bezeichnet. Spannungen werden wie Kräfte in der Mechanik zerlegt:

   - Normalkomponente σ
   - Tangentialkomponente oder Schubspannung τ

   allgemeinste Form τ_{ik} i: Richtung der Flächennormale; k: Richtung der Schubspannung

   Aus dieser Deklaration ergibt sich:

$$\tau_{ii} \equiv \sigma_{ii}$$

2.2.1 Der Spannungszustand im ruhrenden Fluid

Im ruhenden Zustand treten keine Reibungskräfte auf d.h. es sind keine Schubspannungen vorhanden. Es wirken nur Normalspannungen oder Druck- und äußere Volumenkräfte auf ein kleines im Fluid gedachtes Prisma:

$$\begin{aligned} \sum X &= -\sigma_{xx}\Delta y\Delta z + \sigma_{\alpha\alpha}\sqrt{\Delta x^2+\Delta z^2}\Delta y\cos\alpha = 0 \\ \sum Z &= -\sigma_{zz}\Delta x\Delta y + \sigma_{\alpha\alpha}\sqrt{\Delta x^2+\Delta z^2}\Delta y\sin\alpha = 0 \\ \Rightarrow \quad -p &:= \sigma_{xx} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{zz} \end{aligned}$$

In einem ruhendem Fluid ist also der Druck in alle Richtungen gleich groß.

Der Spannugszustand ist somit durch eine einzige skalare Größe, den örtlichen Druck p, völlig bestimmt. Für den Fall das alles in Ruhe ist wissen wir, daß nur Normalspannngen möglich sind und diese in einem Punkt alle gleich groß sind.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

Das Kräftegleichgewicht an einem Quarder ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sum X \quad : \quad & \sigma_{xx}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \sigma_{xx}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ 0 \quad = \quad & \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{analog} \quad \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \sum Z \quad : \quad & \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \varrho g\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \quad = \quad & -\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho g \end{aligned}$$

allgemein

$$-\mathrm{grad}\,p = \underline{e}_z\varrho g$$

Man sieht, daß $\underline{K}_1 = -\mathrm{grad}\,p$ eine äußere Kraft/Volumen ist, genau wie $\underline{K}_2 = -\varrho\,\mathrm{grad}\bigcup$ mit $\bigcup = gz$. Die Gleichgewichtsbedingung lautet so mit:

$$\mathrm{grad}\,p + \varrho\,\mathrm{grad}\bigcup = 0$$

2.2.2 Der Spannungszustand im zähen Fluid

$$\begin{aligned} \tau \quad &= \quad \mu\frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{ik} \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{2. Zeile Spannung in y–Richtung}$$

$\uparrow$ 1. Spalte haben alle x–Richtung als Flächennormale

Aus der Tatsache, daß auf einen gedachten Quarder keine Momente wirken folgt:

$$\begin{aligned} 0 = M_z \quad &= \quad -\tau_{xy}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \tau_{yx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \Rightarrow \quad \tau_{xy} \quad &= \quad \tau_{yx} \\ \text{analog} \qquad & \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}\,,\ \tau_{zx} = \tau_{zx} \end{aligned}$$

d.h. der Spannungstensor ist in einem zähen Fluid immer symmetrisch, statt 9 gibt es nur noch 6 unterschiedliche Spannungen: τ_{xy}; τ_{xz}; τ_{yz}; σ_{xx}; σ_{yy}; σ_{zz}
Beim reibungsfreien Fluid oder im Ruhezustand sind alle drei Normalspannungen genau so groß wie der örtliche Druck, deshalb empfiehlt es sich von der Normalspannung noch den Druck abzuspalten:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_x - p \\ \sigma_{yy} &= \sigma_y - p \\ \sigma_{zz} &= \sigma_z - p \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Für Kräfte in die drei Richtungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} x &: \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ y &: \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ z &: \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

2.2.3 Der Zusammenhang zwischen Spannung und Deformationszustand

- Scherung γ

$$\begin{aligned} \tan \gamma_{yx} &\approx \gamma_{yx} \approx \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} \\ &\text{analog} \\ \tan \gamma_{xy} &\approx \gamma_{xy} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

beides zusammen ergibt die allgemeinste Form der Schubspannung

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Allgemeiner läßt sich der Zusammenhang zwischen der Schubspannung und den Deformationsgeschwindigkeiten schreiben durch:

$$\tau_{ik} = \tau_{ki} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \qquad \text{für } i \neq k$$

- Dehnung ϵ
wir machen den Ansatz:

$$\sigma_i = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - k \,\mathrm{div}\, \underline{u} \quad \text{mit } k : 2^{nd} \text{ coefficent of viscosity}$$

zur Bestimmung von k

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 3k \,\mathrm{div}\, \underline{u} \\ &= (2\mu - 3k) \,\mathrm{div}\, \underline{u} \end{aligned}$$

mit der Kontiunitätsgleichung (1)

$$\begin{aligned} &= (2\mu - 3k) \frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \quad k &= \frac{2}{3}\mu \end{aligned}$$

Ansatz

$$\sigma_i = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{u}$$

μ':	Volumenviskosität (engl. bulk viscusity)
$\mu' \hat{=}$	der 2. LAMEschen Konstate im HOOKEschen Gesetz
μ'	spielt in Flüssigkeiten keine Rolle da $\operatorname{div} \underline{u} = 0$
$\mu' = 0$	für Edelgase (einatomige Gase)
μ'	beschreibt Enfluß der Relaxiation

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = -p\,\mathbb{I} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{u}\,\mathbb{I}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{u} \\ \Rightarrow \quad \sigma_x &= \sigma_{xx} + p = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \underline{u} \\ \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

HOOKEsches Gesetz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \overline{\sigma}\,\mathbb{I} + G \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} G \operatorname{div} \underline{s}\,\mathbb{I}$$

mit $\underline{s} = (\xi, \eta, \zeta)$

Beispiele

1. Strömungsfeld nur $\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const}$
   einfache Scherströmung

2. $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \text{const}$
   ebene Scherströmung $\qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

3. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \text{const}$
   $\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$

2.3 Navier – Stokes – Gleichungen

Die Kraft in x-Richtung auf das Volumenelement $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ berechnet sich wie folgt:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

NEWTONsches Gesetz

Dichte * Beschleunigung = Summe der am Volumen angreifenden Kräfte

daraus folgt die Bewegungsgleichung für die x-Richtung:

$$\begin{aligned}\varrho\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} &= K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\ \mathrm{div}\,\underline{u}\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

entsprechendes für die y, z-Richtung
Dies ist die allgemeinste Form, und ist so immer richtig auch wenn nichts konstant ist z.B. $\mu = \mu(T), \mu(\underline{x})$. Gewöhnlich kann die Zähigkeit wenigstens näherungsweise im Strömungsfeld als konstant angesehen werden und $\mu' = 0$ gesetzt werden.

$$\varrho\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta\,u + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{div}\,\underline{u} \tag{3}$$

$$\varrho\frac{\mathrm{d}\,\underline{u}}{\mathrm{d}\,t} = \underline{K} - \mathrm{grad}\,p + \mu\,\Delta\,\underline{u} + \frac{\mu}{3}\,\mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\,\underline{u}) \tag{4}$$

ursprüngliche Form von Stokes (1845) und Navier (1827) für inkommpressible Strömung

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{\underline{u}^2}{2} - \underline{u} \times \mathrm{rot}\,\underline{u} = -\mathrm{grad}\bigcup - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p - \nu\,\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\underline{u} \tag{5}$$

mit $\qquad \underline{K} = -\varrho\,\mathrm{grad}\bigcup \qquad \bigcup = gh$

zu (2) allgemeinste Form der Navier – Stokes – Gleichung hier nur für die x–Komponente
zu (3) mit $\mu' = 0$ und $\mu = \mathrm{const}$
zu (4) Vektorschreibweise von (3)
zu (5) mit $\mu' = 0$, $\mu = \mathrm{const}$ und $\mathrm{div}\,\underline{u} = 0$

Grundgleichung der Fluidmechanik

$$\underline{B} = \underline{K} + \underline{D} + \underline{Z}$$

$\underline{B} = \varrho\frac{\mathrm{d}\,\underline{u}}{\mathrm{d}\,t}$ Beschleunigungskraft oder Trägheitskraft pro Volumen
$\underline{K}$: äußere Kräfte
$\underline{D}$: Druckkräfte
$\underline{Z}$: Zähigkeitskräfte

2.3.1 Eulergleichung

Aus gehend von der Navier–Stokes–Gleichung unter Vernachlässigung der Zähigkeitskräfte erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \underline{K} + \underline{D} \\ \frac{\mathrm{d}\,\underline{u}}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{1}{\varrho}\,(\underline{K} - \mathrm{grad}\,p)\end{aligned} \tag{6}$$

zu (6) mit $\mu' = \mu = 0$ bzw. $\mu = \mathrm{const} \quad \mu' = \mathrm{rot}\,\underline{u} = \mathrm{div}\,\underline{u} = 0$

NSt Gleichung ist DGl 2. Ordnung und kann daher die vollen Randbedingungen erfüllen $u_n = u_t = 0$ an der Wand. Euler kann nur eine Randbedingung erfüllen d.h. $u_n = 0$ (Wand wird nicht durchströmt) beide DGls sind nicht linear!
Bilanz

Wenn die äußere Kraft gegeben ist, so bleiben 5 Unbekannte in der NSt Gleichung und Eulergleichung, das sind $\underline{u} = (u, v, w)$, ϱ und p, hier für gibt es drei Bewegungsgleichungen (NSt oder Euler) und eine Kontiunitätsgleichung $\varrho = \varrho(p)$.

2.3.2 Bernoulli Gleichung

Sie wird aus der EULERgleichung durch integrieren längs einer Stromlinie gewonnen. Für eine Stromlinie gilt $\underline{u} \times \mathrm{d}\underline{s} = 0$. Da $\int \underline{K}\,\mathrm{d}\underline{s}$ eine Arbeit darstellt, liefert die Integration eine Energiegleichung.

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\,\mathrm{d}\underline{s} + \int_{s_0}^{s_1} \operatorname{grad}\left(\frac{\underline{u}^2}{2} + \bigcup + \frac{p}{\varrho}\right)\mathrm{d}\underline{s} = \underbrace{\int_{s_0}^{s_1} (\underline{u} \times \operatorname{rot}\,\underline{u})\mathrm{d}\underline{s}}_{=0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\,\mathrm{d}\underline{s} + \varrho\left(\frac{\underline{u}_1^2 - \underline{u}_0^2}{2}\right) + \left(\bigcup\nolimits_1 - \bigcup\nolimits_0\right) + (p_1 - p_0) = 0$$

Im stationären Fall $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ ist

$$\frac{\varrho}{2}\underline{u}^2 + \varrho \bigcup + p = \text{const}$$

längs einer Stromlinie.

2.3.3 Anwendung der Bernoulli Gleichung auf tropfbare Flüssigkeiten

1. Ausfluß aus einem großen Gefäß

$$\frac{\varrho}{2}\underbrace{\underline{u}_0^2}_{\approx 0} + \varrho\, g h_0 = \frac{\varrho}{2}\underline{u}_1^2 + \varrho g h_1 \qquad \text{da } p_1 \approx p_0$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$$

   TORRICELLIsche Ausflußformal (1640)

2. Druckmessung in einem Strömungsfeld

$$\frac{\varrho}{2}\underline{u}_0^2 + p_0 = \frac{\varrho}{2}\underbrace{\underline{u}_1^2}_{=0} + p_1 \qquad \text{da } h_1 \approx h_0$$

$$\Rightarrow \quad u_0 = \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_1 - p_0)}$$

3. Schwingung einer Flüssigkeit in einem U-Rohr
   Es ist $\varrho = \text{const}$, $\mu = 0$, $\sigma = 0$

$$\varrho \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}s + \varrho\, g h_1 = \varrho\, g h_0 \qquad \text{mit } p_1 \approx p_0,\ u_1 = u_0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}s = g(h_0 - h_1) = -gh(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} l = -gh(t)$$

Zusammenhang zwischen u und h $\quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = u$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2gh}{l} \\ \Rightarrow \quad h &= c\sin(\omega t + \delta) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} \end{aligned}$$

2.4 Wirbeltransportgleichung

Ausgang ist die NSt. Gleichung (5)

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \text{ grad } \frac{\underline{u}^2}{2} - \underline{u} \times \text{ rot } \underline{u} = -\text{ grad } \bigcup -\frac{1}{\varrho} \text{ grad } p \underbrace{-\nu \text{ rot rot } \underline{u}}_{\nu \underline{\Delta} \underline{u}}$$

hierauf „ rot “-Operator anwenden, dann fallen alle „ grad “ Glieder weg.

$$\frac{\partial \text{ rot } \underline{u}}{\partial t} - \text{ rot } (\underline{u} \times \text{ rot } \underline{u}) = \nu \text{ rot } \underline{\Delta} \underline{u}$$

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{u} \qquad \underline{\omega} : \text{Wirbelvektor}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{rot } (\underline{u} \times \text{ rot } \underline{u}) &= \text{rot } (\underline{u} \times \underline{\omega}) = \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{\omega}) = \underline{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{\underline{u}} \times \underline{\omega}) + \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \overset{\downarrow}{\underline{\omega}}) \\ &= (\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla})\underline{u} - \underline{\omega} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})}_{=0} + \underline{u} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega})}_{=0} - (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{\omega} \\ &= (\underline{\omega} \text{ grad })\underline{u} - (\underline{u} \text{ grad })\underline{\omega} \\ \text{rot } \underline{\Delta} \underline{u} &= \underbrace{-\text{ rot rot}}_{-\underline{\Delta}} \text{ rot } \underline{u} = \underline{\Delta} \text{ rot } \underline{u} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{u} \text{ grad })\underline{\omega} = (\underline{\omega} \text{ grad })\underline{u} + \nu \underline{\Delta} \underline{\omega} \tag{7}$$

zu (7) mit $\mu' = 0$, $\mu = \text{const}$ und $\text{div } \underline{u} = 0$

2.4.1 Wirbelsätze

Analogie zwischen Stromlinien und Wirbellinien
Def.: Stromlinie ≡ Integralkurve des Richtungsfeldes $\underline{u}(x, y, z, t)$ in einem bestimmten Moment.
Def.: Wirbellinie ≡ Integralkurve des Richtungsfeldes $\underline{\omega}(x, y, z, t)$ in einem bestimmten Moment.
Eine Wirbelröhre ist ein Bündel von Wirbellinien. Ein Flächenelement der Wirbelröhre entspricht einem Wirbelfaden.

2.4.1.1 Zirkulation

Die Zirkulation Γ ist definiert durch:

$$\Gamma \coloneqq \oint_C \underline{u} \, \mathrm{d}\underline{l}$$

dies ist eine ganz allgemeine Definition die auch für reibungsbehaftete Strömungen gilt.

a) Festkörperrotation ($u(r) = \text{const}\ \ r \equiv \omega r$)
Der Integrationsweg besteht aus zwei Kreisen mit den Radien r_2 und r_1 sowie einer Verbindungsgeraden zwischen beiden, die in Hin- und Rückrichtungen durchlaufen wird.

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l} = \omega r_2 r_2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi - \omega r_1 r_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi\,\omega(r_2^2 - r_1^2) \\ \Gamma &= \oint_C \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l} \overset{\text{Stokes}}{\downarrow} = \int_F \operatorname{rot}\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F} = \int_F 2\underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F}\end{aligned}$$

	$\underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F}$	$\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$	Wirbelfluß
analog	$\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F}$	$\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$	Volumenfluß

b) Potentialwirbel $\left(u(r) = \frac{k}{r}\right)$
Der Integrationsweg ist der gleiche wie bei der Festkörperrotation.

$$\Gamma = \oint_C \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l} = \frac{k}{r_2} r_2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi - \frac{k}{r_1} r_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi\,k - 2\pi\,k = 0$$

Die Integration um nur einen Kreis liefert:

$$\Gamma = \oint_C \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l} = 2\pi\,k$$

Beim Potentialwirbel besteht bei $r = 0$ eine Singulatität, die durch Auslassen des Mittelpunktes bei der Integration umgangen werden kann. Im Außenraum ist dieser Wirbel dann rotationsfrei.

aus a) und b) ist ein realer Wirbel vorstellbar: Im Kern besteht eine Festkörperrotation und im Außenraum herrscht ein Potentialwirbel vor. Die Singularität in der Mitte ist durch die dort bestehende Festkörperrotation nicht gegeben.

Analogie

Strömungsmechanik	Elektrodynamik
$\underline{u}$	$\underline{H}$: Magnetische Feldstärke
Γ	I : Stromstärke
$\Gamma = \oint \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l}$	$I = \oint \underline{H}\,\mathrm{d}\underline{l}$
$\operatorname{rot}\underline{u} = 2\underline{\omega}$	$\operatorname{rot}\underline{H} = \underline{i}$
$\operatorname{div}\underline{u} = 0$ (imkommpressible)	$\operatorname{div}\underline{H} = 0$
$\Gamma = 2\int \underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F}$	$I = \int \underline{i}\,\mathrm{d}\underline{l}$
Selbst das BIOT–SAVARTsche Gesetz gibt es in der Strömungsmechanik	
$\mathrm{d}\underline{u} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\underline{s}\times\underline{r}}{r^3}$	$\mathrm{d}\underline{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\underline{s}\times\underline{r}}{r^3}$

2.4.1.2 Zeitliche Änderung der Zirkulation einer flüssigen Linie

Def.: Flüssige Linien (flüssige Flächen)

Unter einer flüssigen Linie (Fläche) sollen Linien (Flächen) verstanden werden, die ganz in der Flüssigkeit liegen und die dauernd von den selben Flüssigkeitsteilchen gebildet werden.
Wir wollen eine Aussage machen über:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\oint_C}_{\text{Flüssige Linie}} \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l} \\
&= \oint_C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{u}\cdot\mathrm{d}\underline{l}) = \oint_C \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\underline{l} + \oint_C \underline{u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\underline{l} \\
\oint_C \underline{u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\underline{l} &= \oint_C \underline{u}\cdot\mathrm{d}\underline{u} = \left.\frac{\underline{u}^2}{2}\right|_C = 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} &= \oint \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\underline{l}
\end{aligned}$$

2.4.1.3 Wirbelsätze von BJERKNES und THOMSON

Ausgangspunkt ist die EULERgleichung (6)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} &= \oint \Big[-\underbrace{\operatorname{grad}\bigcup}_{=0} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p \Big]\mathrm{d}\underline{l} \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} &= -\oint \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{d}p \qquad \text{von Bjerknes}
\end{aligned}$$

Zwei wichtige Spezialfälle

1. $\varrho = \text{const}$: imkommpressible
$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0$$
2. $\varrho = \varrho(p)$ (ϱ hängig nur von p ab) man nennt dies barotrop
Beispiele:
   (a) Ideales Gas $p = \varrho RT$
   (b) adiabatisch $p = \text{const}\ \varrho^{\kappa}$

   Für barotrope Zustandsfelder gilt somit
$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0$$
   Dies nennt man den THOMSONschen Wirbelsatz

Wenn also eine Strömung zu Anfang wirbelfrei ist, so bleibt sie es nach Thomson auch. Entspechend bleibt eine Strömung wirbelbehaftet, wenn sie es am Anfang auch war.

2.4.1.4 Wirbelsätze von Helmholz

Helmholz hat bei der Aufstellung die elektromagneteische Analogie benutzt

1. Eine Wirbellinie besteht immer aus den selben Fluidteilchen
Bew. Integrationsweg auf der Oberfläche der Wirbelröhre
$$\begin{aligned}
\Gamma &= \oint \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{l} = \int \operatorname{rot}\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F} = 2\int \underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F} = 0 \\
&\text{nach Thomson} \\
\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = 0 \quad \forall t
\end{aligned}$$
   Fluidteilchen die die Mantelfläche sind bleiben immer auf der Mantelfläche. Und da die Schnittlinie zweier Wirbelröhren eine Wirbellinie ist muß eine Wirbellinie immer von den selben Teilchen gebildet werden.

2. Die Zirkkulation um eine Wirbelröhre bleibt zeitlich konstant d.h. kein Fluidteilchen kommt in Drehung, das nicht von Anfang an in Drehung war, oder Wirbel können in einem reibungsfreien Fluid nicht entstehen oder vergehen.

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma \text{ ist zeitlich konstant}$$

3. Der Wirbelfluß durch die Wirbelröhre ist räumlich konstant
Wirbelfluß $\int \underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F}$

$$2\,\mathrm{div}\,\underline{\omega} \quad = \quad 0 = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\underline{u}$$

$$0 = \int\limits_V \mathrm{div}\,\underline{\omega}\,\mathrm{d}V \quad \overset{\text{Gauß}}{=} \quad \oint\limits_{\partial V} \underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F} = \int\limits_{F_1} \underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F} + \int\limits_{F_2} \underline{\omega}\,\mathrm{d}\underline{F}$$

Da auf der Oberfläche der Wirbelröhre das Integral verschwindet, müssen die Flüsse durch F_1 und F_2 gleich groß sein. Da $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{u} = 0$ immer gilt, ist dies ein rein mathematischer und kein hydrodynamischer Satz.

Die Sätze 2 und 3 sagen zusammen aus, daß der Wirbelfluß durch eine Wirbelröhre zeitlich und räumlich konstant ist.

2.4.2 Erzeugung von Wirbeln (Wirbelstärke)

Wirbel könnenerzeugt werden

(A) in einer Grenzschicht

(B) in einem Rohr

(C) beim Zusammenfluß zweier Fluidströme durch den Grenzschichtgradienten

Zur Erzeugung von Zirkulation haben wir schon kennen gelernt:

a) in barotropen Zustandsfeldern durch Schubspannungen in der Grenzschicht

b) für den Fall, daß $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} \neq 0$ (Wirbelsatz von Bjeknes)

c) in nicht konservativen Kraftfeldern, z.B. Corrioliskraft

2.5 Exakte Lösungen der Navier – Stokes – Gleichungen

1. die stationäre laminare Rohrströmung
2. die stationäre laminare Spaltströmung
3. die stationäre Tayler – Couette Strömung (zwischen zwei rotierenden Zylindern)
4. die stationäre Couette Strömung
5. das Abklingen eines Wirbels
6. die ruckartig beschleunigte Platte (1. Stokes Problem)
7. die schwingende Platte (2. Stokes Problem)
8. ebene Staupunktströmung

9. räumliche Staupunktströmung

10. die Strömung in der Umgebung einer in einer ruhenden Flüssigkeit rotierenden Scheibe

11. Strömung in konvektiven und divergenten Kanälen

2.6 Potentialströmung

Vorraussetzungen:

I imkompressibles Fluid $\varrho = \text{const}$

II drehungsfreihes Strömungsfeld $\text{rot}\,\underline{u} = 0$

III äußere Kräfte konservativ $\underline{K} = -\text{grad}\,\bigcup'$

aus I folgt mit der Kontiunitätesgleichung $\quad \text{div}\,\underline{u} = 0$
aus II folgt $\quad \underline{u} = \text{grad}\,\varphi \quad$ bis auf singuläre Stellen
aus I und II folgt:

$$\begin{aligned} \text{div grad}\,\varphi &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \underline{\Delta}\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichung wird als Laplace Gleichung bezeichnet.

φ hießt Potentialfunktion und es gilt:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

wegen II ist $\Gamma = 0$

$$0 = \int_F \text{rot}\,\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F} = \oint_{\partial F} \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{s} = \Gamma$$

Es gilt außerdem, daß

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0$$

da die Strömung rotationsfrei und inkommpressible ist, und somit der Wirbelsatz von Bjerknes anwendbar ist.

Um zu zeigen, daß jede drehungsfreie imkommpressible Strömung eine Lösung der NSt Gleichung oder Euler Gleichung ist gehen wir von der Wirbeltransportgleichung aus:

$$\frac{\partial\underline{u}}{\partial t} + \text{grad}\,\frac{\underline{u}^2}{2} - \underline{u} \times \text{rot}\,\underline{u} = -\text{grad}\,\bigcup - \frac{1}{\varrho}\,\text{grad}\,p - \nu\,\text{rot rot}\,\underline{u}$$

dies ist für $\text{rot}\,\underline{u} = 0$ erfüllt.

a) $\underline{\Delta}\varphi = 0 \quad \Rightarrow$ Kinematik des Strömungsfeldes

b) mit Eulergleichung oder NSt Gleichung können wir den Druck berechnen

Randbed.: Es kann nur gefordert werden, daß die Normalkomponete der Geschwindigkeit an der Wand gleich der Normalkomponente der Wand selber ist. Für die tangential Komponente kann nichts vorgegeben werden d.h. die Strömung kann längs der Wand gleiten. Ein Vorteil der Laplace Gleichung ist ihre Linearität, d.h. die verschiedenen Lösungen können superponiert werden. Und man erhält dadurch wieder eine Lösung der Laplace Gleichung. Die Zeit tritt im allgemeinen in $\underline{\Delta}\varphi = 0$ nicht auf. Sie kommt durch die Randbedingungen in das Problem.

2.6.1 Räumliche Potentialströmung

Beispiele

1. Transversalströmung in x-Richtung

$$\begin{aligned} \varphi &= Vx \\ \Rightarrow \quad \underline{u} &= V\underline{e}_x \end{aligned}$$

2. räumliche Quellströmung

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{E}{4\pi\, r} \qquad \text{mit } r = +\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad E: \text{ Ergiebigkeit} \\ \Delta\varphi &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\ldots)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\phi}(\ldots)}_{=0}\right]\varphi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \frac{E}{4\pi\, r^2} = v_r \end{aligned}$$

3. Strömung um einen Halbkörper (rotationssymmetrisch, bis ins ∞ gehend)
   Durch eine Superposition der beiden vorrangegangenen Potentiale erhält man einen umströmten Halbkörper.

$$\begin{aligned} \varphi &= Vx - \frac{E}{4\pi\, r} \\ \underline{u} &= \operatorname{grad}\varphi = \left(V + \frac{E\,x}{4\pi\, r^3}\right)\underline{e}_x + \frac{E\,y}{4\pi\, r^3}\underline{e}_y + \frac{E\,z}{4\pi\, r^3}\underline{e}_z \end{aligned}$$

   Ein Staupunkt ($\underline{u} = 0$) kann nur auf der x-Achse liegen. Für diesen Punkt x_0 gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= V + \frac{E\,x_0}{4\pi\, r^3} \\ x_0 &= -\sqrt{\frac{E}{4\pi\, V}} \end{aligned}$$

   Wir vermuten die Existens einer Stromfläche, die das gesammte aus der Quelle ausströmende Fluid von dem übrigen Fluid trennt. Wir brauchen eine Bestimmungsgleichung für die Trennfläche. Da hier eine Rotationsymmetrie vorliegt, kann $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ umgeformt werden zu $y\,2\pi\,\mathrm{d}y$.

$$\int_0^{y(x)} u\,2\pi\,y'\mathrm{d}y' = \begin{cases} E & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$2\pi\int_0^{y(x)}\left(V + \frac{E}{4\pi}\frac{x}{\sqrt{x^2+y'^2}^3}\right)y'\mathrm{d}y' = 2\pi\left(\frac{Vy'^2}{2} - \frac{E}{4\pi}\frac{x}{\sqrt{x^2+y'^2}}\right)\Bigg|_0^{y(x)}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{Vy^2(x)}{2} - \frac{E}{4\pi}\frac{x}{\sqrt{\ldots}} + \frac{E}{4\pi}\frac{x}{|x|}\right) &= \begin{cases} E & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad 2\pi\left(\frac{Vy^2(x)}{2} - \frac{E}{4\pi}\frac{x}{\sqrt{\ldots}} - \frac{E}{4\pi}\right) &= 0 \end{aligned}$$

mit $x_0 = -\sqrt{\frac{E}{4\pi V}}$ kann diese Gleichung umgeschrieben werden zu:

$$x = \frac{|y^2(x) - 2x_0^2|}{\sqrt{4x_0^2 - y^2(x)}}$$

für	$y \to 0$	$x = x_0 < 0$	Staupunkt
	$x \to \infty$	$y = \pm 2\,\lvert x_0 \rvert$	
	$x \to 0$	$y = \pm\sqrt{2}\,\lvert x_0 \rvert$	

4. Überlagerung von Parallel und Senkenströmung

$$\varphi = Vx + \frac{E}{4\pi\, r}$$

Dieses gibt wieder den gleichen Halbkörper, der jedoch aus der entgegengesetzten Richtung angrströmt wird.

5. Verallgemeinerung
Wenn man nun eine Quelle und Senke gleicher Ergiebigkeit auf der x-Achse mit einem gewissen Abstand mit einer Transversalströmung in x-Richtung überlagert erhält man einen Körper mit vorderem und hinterem Staupunkt auf der x-Achse. Dieser Körper kann als Prandtl-Rohr verwendet werden, wobei der Gesamtdruck im vorderen Staupunkt und der statische Druck p_∞ in einem Abstand von ca. $3 - 5d$ zu bestimmen ist.

6. Dipolströmung
Einen Dipol erhält man durch Überlagerung von Quelle und Senke mit verschwindet kleinem Abstand und unendlich großer Ergiebigkeit.

$$\begin{aligned} \varphi &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{M}{4\pi\, r_1} - \frac{M}{4\pi\, r_2}\right) \\ &\quad \text{mit } r_1 = (x+h, y, z),\ r_2 = (x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{M}{4\pi\, r} \\ \Rightarrow \quad \varphi &= \frac{M}{4\pi}\frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

Bei diesem Dipol zeigt das Dipolmoment in positive x-Richtung.

7. Umströmung einer Kugel
Überlagerung einer Transversalströmung und einem Dipol

$$\begin{aligned} \varphi &= Vx + \frac{M\,x}{4\pi\, r^3} \\ u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= V + \frac{M}{4\pi}\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{M}{4\pi}\frac{xy}{r^5} \\ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{M}{4\pi}\frac{xz}{r^5} \end{aligned}$$

Es ist leicht zu erkennen, daß der Straupunkt auf der x-Achse liegt. Für diesen Punkt x_0 gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= V + \frac{M}{4\pi}\frac{x_0^2 - 3x_0^2}{x_0^5} \\ \Rightarrow \quad x_0 &= \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi\, V}} =: R \end{aligned}$$

R entspricht dem Kugelradius. Hier mit kann das Potential φ vereinfacht werden.

$$\varphi = V x \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right)$$

Bei diesem Problem liegt eine Rotationssymmetrie vor, so daß es angebracht ist das Problem in Kugelkoordinaten zu beschreiben. Hier liegt eine Unabhängigkeit vom Winkel ϕ vor. Wir betrachten einen Schnitt $z = 0$.

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = \sin\vartheta$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= V\cos\vartheta\left(r + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^2}\right) \\
v_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -V\sin\vartheta\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right) \\
&\quad \text{auf der Fläche } r = R \\
v_\vartheta(R) &= -\frac{3}{2}V\sin\vartheta
\end{aligned}$$

Der maximal Wert $|v_{\vartheta\ \max}| = \frac{3}{2}V$ wird bei den Winkeln $\vartheta = 90^o, 270^o$ erreicht.

Berechnung der Druckverteilung mit Bernoulli

$$\begin{aligned}
\frac{\varrho}{2}\underline{u}^2 + p &= \frac{\varrho}{2}V^2 + p_\infty = \text{ const} \\
\frac{\varrho}{2}V^2 + p_\infty &= \frac{\varrho}{2}V^2\frac{9}{4}\sin^2\vartheta + p \\
\Rightarrow \quad \frac{p - p_\infty}{\frac{\varrho}{2}V^2} &= 1 - \frac{9}{4}\sin^2\vartheta \\
p = p_\infty &\qquad \text{für } \sin\vartheta = \pm\frac{2}{3} \mathrel{\hat{=}} 41,8^o
\end{aligned}$$

Da die Druckverteilung symmetrisch ist besitzt die Kugel in der Potentialtheorie keinen Widerstand.

D' Alembertsches Paradoxon:
Ein in einer idealen Flüssigkeit fest gehaltener Körper setzt der Strömung keinen Widerstand entgegen, den es in der Realität gibt! In der Potentialtheorie haben alle Körper den Widerstand Null. Es können aber Momente übertragen werden. Bei beschleunigten Strömungen liefert die Potentialtheorie einen Widerstand.

$$W = \underbrace{\frac{2}{3}\varrho\pi R^3}_{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

8. Allgemeines
Durch andere Verteilungen von Quelle und Senke können andere Körper erzeugt werden, so bekommt man eine Tropfenform in dem man die Senke in mehrere aufteilt und diese dann hintereinander plaziert. Durch Überlagerung eines Dipols wird ein schräg angeströmter Körper erzielt.

2.6.2 Ebene Potentialströmung

Es gilt $w = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Damit vereinfacht sich die Laplacegleichung zu:

$$\triangleq \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Zusätzlich zur Potentialfunktion wird noch die Stromfunktion ψ eingeführt, mit:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

wird dies in die Rotationsfreiheit eingesetzt, ergibt sich:

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\triangleq \psi$$

Somit erfüllen Potentialfkt. $\varphi(x, y)$ als auch Stromfkt. $\psi(x, y)$ die Laplace Gleichung. Es ist also möglich die beiden Funktionen zu vertauschen und man erhält eine weitere Lösung. Die Geschwindigkeiten sind zu errechnen durch

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dies sind die CAUCHY-RIEMANNschen Integrabilitäts Bedingungen, und man kann eine Analytische Funktion $F(z)$ einführen mit:

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \qquad \text{mit } z = x + iy = r\, e^{i\vartheta} \tag{9}$$

Die komplexe Funktion $F(z)$ heißt Strömungsfunktion und darf nicht mit der Stromfunktion ψ verwechselt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right) \\ &= u\left(\frac{\partial x}{\partial z} + i\frac{\partial y}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial y}{\partial z} - i\frac{\partial x}{\partial z}\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} &= u - iv \end{aligned} \tag{10}$$

$\psi=$ const ist eine Stromlinie, denn Durchfluß durch Linie AB mit $\psi=$ const ist:

$$= \int_A^B u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x = \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x = \int_A^B \operatorname{grad}\psi\,\mathrm{d}\underline{l} = \int_A^B \mathrm{d}\psi = 0$$

Stromlininen $\psi=$ const und Potentiallinien $\varphi=$ const stehen sekrecht aufeinander, denn

$$\operatorname{grad}\psi\ \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -v\,u + u\,v = 0$$

Beispiele

1. Transversalströmung

   $$F(z) = V\,z \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = V = u - iv$$

   Für V reinreel Strömung in x – Richtung, bei reinimaginären V in y – Richtung sonst beliebige Richtung.

2. ebene Quellströmung

   $$F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z = \underbrace{\frac{E}{2\pi}\ln r}_{\varphi} + i\,\underbrace{\frac{E}{2\pi}\vartheta}_{\psi}$$

   Quelle für positives E, Senke negatives E. Die Stromlinien sind Geraden durch den Ursprung und Linien gleichen Potentials sind konzentrische Kreise.

   $$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{E}{2\pi\,r} \\ v_\vartheta &= \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0 \end{aligned}$$

3. Potentialwirbel
   Ein Potentialwirbel entsteht aus der ebenen Quellströmung in dem man Potentialfunktion und Stromfunktion vertauscht, d.h. $F(z)$ mit $-i$ multipliziert, aus der Konstanten E, die die Ergiebigkeit wiederspiegelt, wird Γ, die Zirkulation des Wirbels.

   $$F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z = \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}\vartheta}_{\varphi} - i\,\underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r}_{-\psi}$$

   Die Rotationfreiheit ist bei $r = 0$ nicht gegeben, diese Unstimmigkeit mit der Rotationfreiheit der Potentialströmung kann man dadurch beseitigen, daß man den Ursprung ausschließt.

4. ebene Winkel und Eckströmung

   $$\begin{aligned} F(z) &= a\,z^n = a\,r^n\,e^{in\vartheta} \qquad a, n \text{ reel } \ n > 0 \\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} &= a\,n\,z^{n-1} = \underbrace{a\,n\,r^{n-1}\cos\left((n-1)\vartheta\right)}_{u} + i\,\underbrace{a\,n\,r^{n-1}\sin\left((n-1)\vartheta\right)}_{-v} \end{aligned}$$

   (a) $n > 1$
   $u, v \to \infty$ für $r \to \infty$
   $u, v \to 0$ für $r \to 0$
   Stromlinien $\psi = \text{const};\ r^n\sin(n\vartheta) = \frac{\text{const}}{a}$ Stromlinien mit $\psi = 0$ sollen durch Wände ersetzt werden:

   $$\sin n\vartheta = 0 \quad \to \vartheta = \frac{k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

i. $n = 2$

ii. $n = 3$

iii. $n = \frac{3}{2}$

(b) $n < 1$

$u, v \to 0 \quad$ für $r \to \infty$

$u, v \to \infty \quad$ für $r \to 0$

i. $n = \frac{2}{3}$

ii. $n = \frac{1}{2}$

Die Stromlinen bei der Randumströmung sind Parabeln den

$$F(z) = a\, z^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

also gilt für die Stromfunktion ψ

$$\begin{aligned} \psi &= a\sqrt{r}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ \Rightarrow \quad r &= \frac{2\frac{\psi^2}{a^2}}{1-\cos\vartheta} \end{aligned}$$

(c) $n = 1 \longrightarrow$ siehe Transversalströmung

5. ebene Dipolströmung

Wir haben für ebene Quelle (Senke): $F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z \quad$ mit $E > 0$ ($E < 0$). Ein Dipol kommt durch eine Quelle und Senke im Abstand h zustande, deren Ergiebigkeiten $E \propto \frac{1}{h}$ sind und beim Grenzübergang $h \to 0$ erhält man einen Dipol mit $M = Eh$.

$$F(z) = \frac{M}{2\pi\, z} = \frac{M}{2\pi\, r}\,(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

Strom- und Potentiallinien sind Kreise die sich alle im Ursprung berühren. Für φ =const liegen die Kreismittelpunkte auf der x–Achse, bei ψ = const auf der y–Achse.

6. Strömung um einen Kreiszylinder der in x – Richtung mit der Geschwindigkeit V angeströmt wird.

$$F(z) = V\, z + \frac{M}{2\pi\, z}$$

Der Zylinderradius ergibt sich für die Stromlinie $\psi_0 = y\left(V - \frac{M}{2\pi\, r_0^2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad r_0^2 &= \frac{M}{2\pi\, V} \\ F(z) &= V\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) = \varphi + i\psi \\ v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\vartheta \\ v_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -V\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\vartheta \end{aligned}$$

$v_r = 0$ für $r = r_0 \quad$ Oberfläche des Zylinders

$v_\vartheta = -2V\sin\vartheta \quad$ für $r = r_0$, und hat Maximum bei $\vartheta = 90^o$, $\vartheta = 270^o$ bzw. ist Null für

$\vartheta = 0^o$, $\vartheta = 180^o$
Druckverteilung längs der Oberfläche

$$\begin{aligned} p_\infty + \frac{\varrho}{2}V^2 &= p(\vartheta) + \frac{\varrho}{2}v_\vartheta^2 \\ \frac{p(\vartheta) - p_\infty}{\frac{\varrho}{2}V^2} &= 1 - \left(\frac{v_\vartheta}{V}\right)^2 \overset{r=r_0}{=} 1 - 4\sin^2\vartheta \end{aligned}$$

Also ist für $\vartheta = \pm 30^o; \pm 150^o \quad p(\vartheta) = p_\infty$

7. Keiszylinder bei unsymetrischer Umströmung

$$F(z) = V\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\vartheta \\ v_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -V\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi\, r} \end{aligned}$$

auf der Zylinderoberfläche ist $v_\vartheta = -2V\sin\vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi\, r_0}$ und $v_\vartheta = 0$ (d.h. es liegt ein Staupunkt vor) für

$$\sin\vartheta = -\frac{\Gamma}{4\pi\, r_0 V}$$

(a) zwei Staupunkte

$$-1 < -\frac{\Gamma}{4\pi\, r_0 V} < 0$$

(b) ein Staupunkt

$$-\frac{\Gamma}{4\pi\, r_0 V} = -1$$

Die Zirkulation, die nur zu einem Staupunkt führt, wird optimale Zirkulation genannt:

$$\Gamma_0 = 4\pi\, r_0\, V$$

(c) kein Staupunkt, bzw. freier Staupunkt

$$-\frac{\Gamma}{4\pi\, r_0 V} < -1$$

Wird ein Kraft auf den Zylinder ausgeübt?

$$\begin{aligned} \frac{p(\vartheta) - p_\infty}{\frac{\varrho}{2}V^2} &= 1 - \left(\frac{v_\vartheta}{V}\right)^2 = 1 - 4\sin^2\vartheta - \frac{2\Gamma\sin\vartheta}{\pi V r_0} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V^2 r_0^2} \\ \frac{K_x'}{\frac{\varrho}{2}V^2} &= -l\int_0^{2\pi} \frac{p(\vartheta) - p_\infty}{\frac{\varrho}{2}V^2} r_0\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= -lr_0\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\cos\vartheta}_{=0} - \underbrace{4\sin^2\vartheta\cos\vartheta}_{=0} - \underbrace{\frac{2\Gamma\sin\vartheta\cos\vartheta}{\pi V r_0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\Gamma^2\cos\vartheta}{4\pi^2 V^2 r_0^2}}_{=0}\right)\mathrm{d}\vartheta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{K'_y}{\frac{\varrho}{2}V^2} &= -l\int_0^{2\pi}\frac{p(\vartheta)-p_\infty}{\frac{\varrho}{2}V^2}r_0\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= -lr_0\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\sin\vartheta}_{=0}-\underbrace{4\sin^3\vartheta}_{=0}-\frac{2\Gamma\sin^2\vartheta}{\pi V r_0}-\underbrace{\frac{\Gamma^2\sin\vartheta}{4\pi^2V^2r_0^2}}_{=0}\right)\mathrm{d}\vartheta=\frac{2l\Gamma}{V} \\
\Rightarrow\quad K'_y &= \varrho\Gamma l\,V \qquad \text{Magnus–Effekt}
\end{aligned}$$

Beispiele für den Magnus – Effekt

- Seitenabweichung eines Fußballs oder Tennisballs der geschnitten ist
- Seitenabweichung bei Geschossen
- Flettner Rotorschiff (Name Buckau)
- rotierender Zylinder als Tragflügel (Idee von L. Prandtl)

$$\begin{aligned}
c_A &= \frac{A}{\frac{\varrho}{2}V^2F}=\frac{\varrho\Gamma l\,V}{\frac{\varrho}{2}V^2l2r_0}=\frac{\Gamma}{Vr_0} \\
\Rightarrow\quad c_A &= 4\pi \qquad \text{mit optimaler Zirkulation}
\end{aligned}$$

Dies ist ein vergleichbar großer Auftriebsbeiwert, für Tragflügel $c_A \approx 1$ doch entscheidend ist auch der Widerstandsbeiwert und es gilt:

$$\frac{c_A}{c_W}\approx 2,3 \qquad \text{für Tragflügel } \frac{c_A}{c_W}\approx 4,4$$

Kutta – Joukowskysche Auftriebsformel

$$A=\varrho\Gamma l V \tag{11}$$

2.6.3 Konforme Abbildungen

Lit. A. Betz: Konforme Abbildungen. Springer Berlin Göttingen Heidelberg

$$f(z)=f(x+iy)=\zeta=\xi(x,t)+i\eta(x,y)$$

Unter einer konformen Abbildung verstehet man eine Abbildung einer Ebene auf eine andere, der Art, daß:

1. Winkel der einen Ebene übergehen in Winkel der anderen Ebene
2. Im infitesemalen Kleinen das Verhältnis entsprechender Strecken erhalten bleibt.

Abbildungsfunktion $\zeta = f(z)$

$$\underbrace{w(\zeta)}_{w_\zeta}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=\underbrace{w(z)}_{w_z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} \tag{12}$$

2.6.4 angeströmte Platte

Prototyp für einen Tragflügel
Die neue Abbildungsfunktion

$$f(z) = \zeta = z + \frac{a^2}{z} \qquad \text{mit } a^2 = r_0^2$$

bildet die Strömung um den Kreiszylinder vom Radius r_0 auf die Strömmung um eine Platte der Länge $4r_0$ ab.

1. Strömung um eine parallel zur Anströmung liegenden Patte, deren Dicke ∞ klein ist

$$\begin{aligned} F(z) &= u_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) = u_\infty \, \zeta \\ w(\zeta) &= \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta} = u_\infty \end{aligned}$$

2. Strömung um eine senkrecht zur Anströmung liegenden Platte
   Man muß bedenken, daß man einen Dipol nehmen muß dessen Moment nicht wie unter 5 auf Seite 20 in x – Richtung liegt, sondern ein Dipolmoment in y – Richtung braucht.

$$\begin{aligned} F(z) &= -iv_\infty \left(z - \frac{r_0^2}{z} \right) \\ w(\zeta) = w_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} &= -iv_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{z^2} \right) \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right)^{-1} = -iv_\infty \frac{z^2 + r_0^2}{z^2 - r_0^2} \end{aligned}$$

   Man erhält die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von ζ in dem man die Umkehrfunktion bildet

$$w(\zeta) = \pm iv_\infty \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 4r_0^2}} \qquad \begin{cases} + \text{ vor der Platte} \\ - \text{ hinter der Platte} \end{cases}$$

für	$\lvert\zeta\rvert \to \infty$	geht	$w(\zeta) \to \pm iv_\infty$
für	$\zeta = 0$	wird	$w_\zeta = 0$
für	$\zeta = \pm 2r_0$	wird	$w_\zeta = \infty$

3. Die angestellte Platte
   Wir nennen den Winkel zwischen Anströmrichtung und Plattenrichtung den Anstellwinkel $\tan\alpha = \frac{v_\infty}{u_\infty}$

   Um Platte mit Auftieb zu bekommen brauchen wir noch einen Potentialwirbel

$$\begin{aligned} F_1 &= u_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) \\ F_2 &= -iv_\infty \left(z - \frac{r_0^2}{z} \right) \\ F_3 &= \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \\ F_z &= F_1 + F_2 + F_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w(\zeta) = w(z)\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right)^{-1} &= \left((u_\infty - iv_\infty) - (u_\infty + iv_\infty)\frac{r_0^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi\, z}\right)\left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right)^{-1} \\
w(\zeta) &= u_\infty - iv_\infty \frac{z^2 + r_0^2}{z^2 - r_0^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{z}{z^2 - r_0^2} \\
w(\zeta) &= u_\infty \pm i\frac{v_\infty \zeta - \frac{\Gamma}{2\pi}}{\sqrt{\zeta^2 - 4r_0^2}}
\end{aligned}
$$

An den Stellen $\zeta = \pm 2r_0$ verschwindet der Nenner. Dies sind die Plattenenden. Durch Null setzen des Zählers wird diese Singularität bei $\zeta = 2r_0$ beseitigt:

$$
\begin{aligned}
v_\infty \zeta &= \frac{\Gamma}{2\pi} \\
\Rightarrow \quad \Gamma &= 4\pi\, r_0 v_\infty \qquad \text{KUTTAsche Abschlußbedingung}
\end{aligned}
$$

Bei der angestellten Platte stellt sich die Zirkulation abhängig vom Anstellwinkel α nach der KUTTAsche Abschlußbedingung ein:

$$
\begin{aligned}
w_\infty &= \sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2} \qquad \text{Anströmgeschwindigkeit der Plate} \\
l &= 4r_0 \qquad \text{Plattenlänge} \\
\Gamma &= \pi l w_\infty \sin\alpha
\end{aligned}
$$

Einsetzen von Γ in die Kutta – Joukowskysche Auftriebsformel (11)

$$
\begin{aligned}
A &= \varrho \Gamma b w_\infty \\
\Rightarrow \quad A &= \varrho \pi b \sin\alpha\, l w_\infty^2 \\
c_A &= 2\pi \sin\alpha \qquad \text{Auftriebsbeiwert}
\end{aligned}
$$

2.6.5 Joukowsky Profile

Mit der Abbildungsunktion $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$ lassen sich auch Tragflügelprofile erzeugen:

1. $a = r_0$
   Platte de Länge $4a$ auf der x – Achse

2. $r_0^2 = a^2 + y_0^2$
   gebogene Platte

3. $r_0^2 = (x_0 + a)^2$
   Stromlinienform mit scharfer Hinterkante

4. $r_0^2 = (x_0 + a)^2 + y_0^2$
   gebogene Stromlinienform mit scharfer Hinterkante

Die Trefftz – Kármán – Abbildungsfunktion

$$
\frac{\zeta + na}{\zeta - na} = \left(\frac{z + a}{z - a}\right)^n
$$

für $n = 2$ geht Trefftz – Kármán in Joukowsky über. Der Hinterkantenwinkel $\gamma = (2 - n)\pi$ kann durch Wahl von n variiert werden.

2.6.6 Entstehung der Zirkulation am Tragflügel

Anfahrvorgang: An der Hinterkante entsteht ein Unterdruck, da der hintere Staupunkt sich nicht am Ende des Tragflügels befindet. Der Staupunkt wandert zur Hinterkante, und dort löst sich dann ein Anfahrwirbel ab.

Gesamtzirkulation im Gebiet ist und bleibt Null, die Zirkulation die um den Tragflügel entsteht, taucht mit umgekehrtem Vorzeichen wieder als der abgelöste Anfahrwirbel auf.

2.6.7 Tragflügel endlicher Spannweite

Es bildet sich ein geschlossenes Wirbelsystem aus Zirkulation um Tragflügel, Anfahrwirbel und zwei Seitenwirbeln (tip vortex), die dadurch entstehen, daß über der Platte ein Unterdruckgebiet und unterhalb ein Überdruckgebiet liegt. Alle vier Wirbel haben die gleiche Stärke Γ.

Es entsteht durch die Kantenumströmung ein Widerstand, auch bei reibungsfreier Darstellung, der induzierter Widerstand genannt wird.

Nach Kutta – Joukwosky (11) gilt für den Auftrieb:

$$\mathrm{d}A = \varrho w_\infty \Gamma(b)\mathrm{d}b$$

Der endliche Tragflügel hat den Auftrieb

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A' &= \varrho w_{\infty\mathrm{eff}}\Gamma(b)\mathrm{d}b \\ w_\infty &= w_{\infty\mathrm{eff}}\cos\alpha' \approx w_{\infty\mathrm{eff}} \end{aligned}$$

Der Auftrieb ändert sich also kaum
Hinzu kommt aber der induzierte Widerstand

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_{\mathrm{ind}} &= \varrho w'\Gamma(b)\mathrm{d}b = \varrho w_{\infty\ \mathrm{eff}}\sin\alpha'\Gamma(b)\mathrm{d}b \\ &= \mathrm{d}A'\sin\alpha' \\ \Rightarrow\quad \mathrm{d}W_{\mathrm{ind}} &= \mathrm{d}A\frac{w'}{w_\infty} \end{aligned}$$

Auch Propeller werden mit einem Tragflügelprofil ausgestattet. Dabei tritt noch eine Windung des Propellers auf, da die Rotationsgeschwindigkeit längs des Radius nicht konstant ist und man somit längs des Radius auch einen unterschiedlichen Anstellwinkel braucht. Eine ausführlichere Behandlung dieses Problems soll hier nicht dargestellt werden.

2.6.8 Räumliche, drehsymetrische Potentialströmung

$$v_r(r,z) \quad v_\vartheta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta} = 0 \quad v_z(r,z)$$

$$\underline{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\underline{\Delta}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

Kontiunitätsgleichung

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}v_r = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial r v_z}{\partial z} = 0$$

Die STOKESsche Stromfunktion

$$rv_z = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad rv_r = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Es läßt sich zeigen: $\psi = \mathrm{const}$ ist eine Stromlinie, und

$$\mathrm{grad}\,\psi\ \mathrm{grad}\,\varphi = 0$$

Für die Stromfunktion ergibt sich aus der Rotationsfreiheit der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{u} &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

Es gilt hier nicht das Vertauschungsprinzip, da die Stromfunkton ψ nicht die Laplace – Gleichung erfüllt.

Bisher

$$\text{Navier – Stokes – Gleichung} \begin{cases} \nearrow \text{ exakte Lösungen} \\ \searrow \text{ „rot“ Bildung: Wirbeltransportgleichung} \end{cases}$$

$$\text{Euler – Gleichung } (\mu = 0) \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \text{ Potentialströmung} \end{cases}$$

Jetzt Näherungen

$$\text{Navier – Stokes – Gleichung} \begin{cases} \nearrow Re = \frac{ul}{\nu} \to 0 \\ \searrow Re = \frac{ul}{\nu} \to \infty \end{cases}$$

2.7 Schleichende Strömung ($Re \to 0$)

Definition: Man spricht von einer schleichenden Bewegung oder Strömung oder auch Krichströmung, wenn die Reibungskräfte erheblich größer werden als die Trägheitskräfte.

$$\underbrace{\varrho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \varrho(\underline{u} \operatorname{grad})\underline{u}}_{\text{Trägheitskräfte}} = \underline{K} - \operatorname{grad} p + \underbrace{\mu \Delta \underline{u}}_{\text{Reibungskraft}}$$

nach (4) mit $\operatorname{div} \underline{u} = 0$

$$\begin{aligned} \mu \Delta \underline{u} &\gg \varrho(\underline{u} \operatorname{grad})\underline{u} \\ Re &= \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{\varrho \frac{u^2}{l}}{\mu \frac{u}{l^2}} = \frac{\varrho u l}{\mu} \end{aligned}$$

Wegen der kleinen Reynolszahlen kann man den nichtlinearen Teil, die Geschwindigkeit geht quadratisch ein, der Trägheitskraft vernachlässigen, und man erhält eine DGl der schleichenden Bewegung:

$$\varrho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = \mu \Delta \underline{u} \qquad \text{für } \underline{K} = 0 \tag{13}$$

Diese DGl ist wie man sofort sieht, linear in $\underline{u}$, und von zweiter Ordnung, d.h. man kann die vollen Randbedingungen erfüllen, und es können verschiedene Lösungen superpositioniert werden.

1. wir wenden den „div“ – Operator auf obige DGl an
   Da die schleichende Strömung inkompressibel ist ($\varrho = \text{const}$) und einige Differntialoperatoren vertauschen, gilt:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \underline{u}}_{=0} + \underline{\Delta} p &= \mu \underline{\Delta} \underbrace{\operatorname{div} \underline{u}}_{=0} \\ \Rightarrow \qquad \underline{\Delta} p &= 0 \end{aligned}$$

   Auch für den instationären Fall genügent der Druck der Laplace – Gleichung. Solange $\underline{K} = 0$ angenommen werden darf, ist das Strömungsfeld unabhängig von der Zähigkeit.

2. wenden wir „rot“ Operater auf vorhergehende DGl an, dann erhalten wir für den stationären Fall:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{rot} \underline{\Delta} \underline{u} = \operatorname{rot} \left(\operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \underline{u}}_{=0} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{u} \right) \\ \Rightarrow \quad 0 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{u} \end{aligned}$$

   Lösung für Kugelumströmung

$$K_x = 6\pi\mu r u$$

3. im ebenen und stationären Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

   mit Einführung der Stromfunktion ψ, und partieller Ableitung der oberen Gleichung nach y und der unteren nach x erhält man durch gleich setzen der beiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \, \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} &= 0 \\ \underline{\Delta} \underline{\Delta} \, \psi &= 0 \end{aligned}$$

2.7.1 Schiermittelreibung

$Re \ll 1$ weil 1. ν groß
2. h klein

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\substack{\text{kann aus geometrischen Grün-} \\ \text{den vernachlässigt werden}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Randbedingungen $u = U$ für $y = 0$
$u = 0$ für $y = h(x)$

$$\Rightarrow \quad u(y) = U \left(1 - \frac{y}{h(x)} \right) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \frac{h(x)y - y^2}{2\mu}$$

Somit ergibt sich der Volumenstrom durch den Spalt zu:

$$\dot{Q} = \int_0^{h(x)} u(y)\,\mathrm{d}y = U\frac{h(x)}{2} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h^3(x)}{12\mu}$$

Diese Gleichnung nach $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ umstellen und dann auf integrieren

$$\begin{aligned}
\int_{p(x=0)}^{p(x=l)} \mathrm{d}p &= -\frac{l}{h_1-h_2}6\mu U\int_{h_1}^{h_2}\frac{\mathrm{d}h}{h^2} + \frac{l}{h_1-h_2}12\mu\dot{Q}\int_{h_1}^{h_2}\frac{\mathrm{d}h}{h^3} \\
p(x=l) &= p(x=0) + \frac{l}{h_1-h_2}6\mu\left[\frac{U(h_1-h_2)}{h_1h_2} - 4\frac{\dot{Q}(h_1^2-h_2^2)}{h_1^2h_2^2}\right] \\
\text{da}\quad p(x=l) &= p(x=0) \qquad \text{muß} \\
0 &= \left[\frac{U(h_1-h_2)}{h_1h_2} - 4\frac{\dot{Q}(h_1^2-h_2^2)}{h_1^2h_2^2}\right] \\
\Rightarrow\quad 4\dot{Q} &= \frac{Uh_1h_2}{h_1+h_2} \\
\Rightarrow\quad p(x=l) &= p(x=0) + \frac{6U\mu l}{h_1^2-h_2^2}\frac{(h_1-h(x))\,(h(x)-h_2)}{h^2(x)}
\end{aligned}$$

wesentlich ist die Keilform des Spaltes für den Aufbau einer Druckverteilung. Bei einem parallelen Spalt würde sich keine Druckverteilung aufbauen. So stellt sich die Keilform bei runden Lagern dadurch ein, daß der innere Zylinder sich nicht in der Mitte des äußeren liegt.

2.7.2 Grundwasserströmung

$$\tilde{u} := \frac{\dot{Q}_x}{F_x} \qquad \tilde{v} := \frac{\dot{Q}_y}{F_y} \qquad \tilde{w} := \frac{\dot{Q}_z}{F_z} \qquad \left[\frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit Fläche}}\right]$$

Bei schleichender Bewegung setzt man analog zum Hagen Poisonschen Gesetz:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -k\tilde{u} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -k\tilde{v} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -k\tilde{w}$$

DRACYsches Gesetz

Man erhält mit der Kontunitätsgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial z} &= -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad \Delta p &= 0 \\
\underline{u} &= -\frac{1}{k}\,\mathrm{grad}\,p
\end{aligned}$$

2.8 Grenzschichtgleichungen ($Re \to \infty$)

Trägheitglieder $\gg$ Reibungsglieder

Wir dürfen nicht die Reibungsglieder Null setzen, denn daraus würde die Eulergleichung resultiern, die die Randbedingungen nicht erfüllen kann.

Prandtl (1904) führt den Beriff der Grenzschicht ein.

Der Übergang von der Geschwindigkeit Null an der Wand auf die volle Geschwindigkeit, wie sie

in einiger Entfernung von der Wand vorhanden ist, vollzieht sich in einer sehr dünnen Schicht, der sogenannten Grenzschicht (oder Reibungsschicht), nur hier ist die Zähigkeit voll wirksam.

$$\begin{aligned} Re &= \frac{ul}{\nu} \\ Re &\to \infty \qquad \text{hier für } \nu \to 0 \end{aligned}$$

Grenzübergang für Grenzschicht außerhalb der Grenzschicht kein Geschwindigkeitsgradient. Prandtl unterteilte das Problem in zwei Teile

1. Außenströmung in der wegen $Re \to \infty$ die Trägheitskräfte viel größer als die Zähigkeitskräfte sind. Hier sind keine großen Geschwindgkeitsgradienten vorhanden, so daß die Wirkung der Zähigkeit bedeutungslos bleibt. Es herrscht Näherungsweise Potentialströmumng.

2. Grenzschicht, in der der Gradient $\frac{\partial}{\partial y}$ sehr groß ist, so daß auch schon eine kleine Zähigkeit wegen $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ wesentlich zur Geltung kommt. Hier sind die Träghietsglieder und Zähigkeitsglieder von der gleichen Größenordnung.

Definition: für δ 99% Dicke
$\delta(x)$ bezeichnet den Wandabstand, bei dem $u(x,y) = 0{,}99 u_\infty$ ist.
Definition: für δ_1 Verdrängungsdicke

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &:= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{u_\infty}\right) \mathrm{d}y \\ \delta_1(x) u_\infty &= \int_0^\infty (u_\infty - u(x,y))\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Die Verdrängungsdicke ist gerade die Breite, um die die Platte stärker wäre, wenn die Geschwindigkeit u_∞ bis an die Platte reichen würde, damit der Durchfluß konstant bleibt. Man kann also nach verbreitern der Platte um die Verdrängungsdicke die Potentialtheorie anwenden, weil die Viskosität außerhalb der Grenzschicht keine wesendliche Rolle spielt.
Definition: für δ_2 Impulsverlußtdicke

$$\delta_2(x) := \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{u_\infty} \left(1 - \frac{u(x,y)}{u_\infty}\right) \mathrm{d}y$$

Definition: für δ_3 Energieverlußtdicke

$$\delta_3(x) := \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{u_\infty} \left(1 - \frac{u^2(x,y)}{u_\infty^2}\right) \mathrm{d}y$$

2.8.1 Aufstellen der Grenzschichtgleichung für den ebenen Fall

Es gilt $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ $w = 0$ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\varrho = \text{const}$ $\underline{K} = 0$ damit vereinfacht sich die Navier–Stokes–Gleichung zu:

$$(\underline{u} \operatorname{grad}) \underline{u} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \underline{\Delta} \underline{u}$$

mit den Randbedingungen:
$u = v = 0$ für $y = 0$ $\forall x > 0$
$u = u_\infty$ für $y \to \infty$

$$\overline{\delta} := \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir normieren hiermit y:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{y}{\overline{\delta}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{\overline{\delta}} \frac{\partial}{\partial y^*} \\ \operatorname{div} \underline{u} &= \frac{\partial u(x,y^*)}{\partial x} + \frac{1}{\overline{\delta}} \frac{\partial v(x,y^*)}{\partial y^*} = 0 \\ \Rightarrow \quad v &= -\overline{\delta} \int_0^{y^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y^* \end{aligned}$$

Damit lautet die Navier–Stokes–Gleichung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y^*}}_{\overline{\delta}\frac{\partial u}{\partial y}} \underbrace{\int_0^{y^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y^*}_{-\frac{v}{\overline{\delta}}} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\overline{\delta}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}}\right) \tag{14}$$

$$-\overline{\delta}\,u \int_0^{y^*} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y^* + \overline{\delta}\frac{\partial u}{\partial x}\int_0^{y^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y^* = -\frac{1}{\varrho\overline{\delta}}\frac{\partial p}{\partial y^*} + \nu\left(\overline{\delta}\int_0^{y^*} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,\mathrm{d}y^* + \frac{1}{\overline{\delta}}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^*}\right) \tag{15}$$

Annahmen für $Re \to \infty$

1. $\overline{\delta} \to 0 \qquad u\overline{\delta} \to 0$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}}$ soll endlich bleiben
3. $\frac{\partial u}{\partial x}$ soll endlich bleiben, dann muß wegen $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ auch $\frac{\partial v}{\partial y}$ endlich bleiben.

Aus Gleichung (15) folgt mit $\overline{\delta} \to 0$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y^*} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^*} \qquad \begin{cases} \text{für} & Re \to \infty \\ \text{für} & \overline{\delta} \to 0 \end{cases}$$

denn alle anderen Terme gehen wie $\overline{\delta}^2 \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho}\int_0^{y^*} \mathrm{d}p &= \nu \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^{y^*} \\ \frac{1}{\varrho}(p - p_{\text{Wand}}) &= \nu \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^{y^*} \quad \text{für } \nu \to 0 \quad Re \to \infty \\ \Rightarrow \quad p(y^*) &= p(y^* = 0) = p_{\text{Wand}} \end{aligned}$$

Haupttheorem der Grenzschichttheorie

Der Druck ändert sich in der Grenzschicht nicht mit dem Wandabstand. Der Druck wirkt durch die Grenzschicht hindurch, und er wird der Grenzschicht von der äußeren Strömung aufgeprägt.

Kennen wir die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht. So können wir mittels der Bernoulli – Gleichung daraus den Druck an der Wand berechnen:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\varrho}{2}u^2(x) = \text{const} \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\varrho u(x)\frac{\mathrm{d}\,u(x)}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Gleichung (14) mit $\overline{\delta}^2$ multiplizieren und man erhält für $Re \to \infty \quad (\overline{\delta} \to 0)$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ muß } \nu \sim \overline{\delta}^2 \to 0 \quad \text{oder } \frac{1}{Re} \sim \overline{\delta}^2 \text{ oder } \delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \ll \quad \frac{1}{\overline{\delta}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}} \quad \text{gilt nicht an der Plattenvorderkante}$$

Rücktransformation
PRANDTLsche Grenzschichtgleichungen

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= U(x)\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\varrho u(x)\frac{\mathrm{d}\, u(x)}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Randbedingungen für $y = 0$ soll $u, v = 0$
$y \to \infty$ soll $u = U(x)$
Grenzschichtgleichungen gelten nicht an der Plattenvorderkante!

2.8.2 Grenzschichtablösung

2.8.3 Grenzschichtumschlag laminar – turbulent

Stabililätsproblem, Tollmien 1929
Prinzip wie Tollmien eine Lösung angegeben hat.
stationärte parallel Strömung $u(y)$ z.B. Grenzschichtprofil und eine Überlagerung einer zwei dimensionalen Dtörung u',v' die aus Partialschwingungen verschiedener Wellenlängen λ aufgebaut sind. Die Stromfunktion

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$$

mit $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$
$c = c_r + ic_i$ wobei c_r: Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit
c_i: Dämpfungsanteil
mit diesem Ansatz in die Navier–Stokes–Gleichung einsetzen, nicht in die Grenzschichtgleichung, und man erhält nach Eliminierung des Druckes die ORR–SOMMERFELD–Gleichung

$$(u - c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - u''\phi = \frac{i\nu}{\alpha}(\phi^{(4)} - 2\alpha\phi'' + \alpha^4\phi)$$

mit den Randbedingungen $\phi = 0, \phi' = 0$ für $y = 0, \infty$

2.9 Transortgleichungen der Strömungsmechanik

Geschwindigkeit $\underline{u}$ Dichte ϱ, Impuls(dichte) $\varrho\underline{u}$, Energie(dichte) $\frac{\varrho}{2}\underline{u}^2$
Eigenschaften des Strömungfeldes $\epsilon(\underline{r}, t) =$ z.B. $\underline{u}, \varrho, \cdots$ für dV

$$\underline{E} = \int_{V(t)} \underline{\epsilon}(\underline{r}, t)\, \mathrm{d}V \qquad \text{für } V(t)$$

von $\underline{E}$ wollen wir den zeitlichen und räumlichen Transport bestimmen.

2.9.1 Transportgleichung in differenieller Form

Die am Ort x, y, z und der Zeit t herrschende Eigenschaft $\epsilon(x, y, z, t)$ eines bestimmten Massenteilchens befinde sich in einer stetig verlaufenden Strömung (Trennwände und Verdichtungsstöße sollen ausgeschlossen werden). Es soll ϵ stetig differentierbar und es wird gesucht $\epsilon(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\underline{\epsilon}}{\mathrm{d}t}}_{\text{substantielle-}} = \underbrace{\frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial t}}_{\text{lokale-}} + \underbrace{(\underline{u}\ \mathrm{grad}\ )\underline{\epsilon}}_{\text{konvektive-}} \quad \text{Änderung von } \underline{\epsilon}$$

2.9.2 Transportgleichung in integraler Form

sie hat gegenüber der differentiellen Form den Vorteil, daß nicht die Vorraussetzung der stetigen räumlichen Differentierbarkeit gemacht wird.

$$\frac{\mathrm{d}\underline{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V(t)} \underline{\epsilon}(\underline{r}, t)\, \mathrm{d}V$$

Das Volumen sei zur Zeit t gleich $V(t)$ und hat zuzr Zeit $t + \Delta t$ das Volumen $V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta V(t + \Delta t) = V + \Delta V$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\underline{E}}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int\limits_{V(t+\Delta t)} \underline{\epsilon}(t + \Delta t)\, \mathrm{d}V - \int\limits_{V(t)} \underline{\epsilon}(t)\, \mathrm{d}V \right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\underbrace{\int\limits_{V(t)} (\underline{\epsilon}(t + \Delta t) - \underline{\epsilon}(t))\ \mathrm{d}V}_{I} + \underbrace{\int\limits_{\Delta V(t+\Delta t)} \underline{\epsilon}(t + \Delta t)\, \mathrm{d}V}_{II} \right]
\end{aligned}$$

$$I. \qquad \underline{\epsilon}(t + \Delta t) = \underline{\epsilon}(t) + \frac{\partial \underline{\epsilon}(t)}{\partial t} \Delta t + \cdots$$

$$II. \qquad \mathrm{d}V = \mathrm{d}F\, u_n \Delta t = \mathrm{d}\underline{F}\, \underline{u} \Delta t$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{E}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\int\limits_{V} \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial t}\, \mathrm{d}V}_{\substack{\text{lokale Änderung der Eigen-} \\ \text{schaft im Kontrolvolumen}}} + \underbrace{\int\limits_{\partial V} \underline{\epsilon}\, (\underline{u}\, \mathrm{d}\underline{F})}_{\substack{\text{Fluß der Eigenschaft durch} \\ \text{das Kontrolvolumen}}}$$

3 Erhaltungssätze

3.1 Massenerhaltungssatz

$$\begin{aligned}
\epsilon(\underline{r}, t) &= \varrho && : \text{Dichte} \\
E(\underline{r}, t) &= \int\limits_V \epsilon\, \mathrm{d}V = \int\limits_V \varrho\, \mathrm{d}V = m && : \text{Masse} \\
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \int\limits_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, \mathrm{d}V + \int\limits_F \varrho\, (\underline{u}\, \mathrm{d}F) + \int\limits_D \varrho\, (\underline{u}\, \mathrm{d}F) + \underbrace{\int\limits_{F_1'} \varrho\, (\underline{u}\, \mathrm{d}F) - \int\limits_{F_1'} \varrho\, (\underline{u}\, \mathrm{d}\underline{F})}_{\text{heben sich gegenseitig auf}}
\end{aligned}$$

Es wird am Tragflügel keine Masse ausgeblasen oder abgesaugt, dann folgt mit dem Satz von Gauß:

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\, (\varrho \underline{u}) \right) \mathrm{d}V = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \underline{u}) = 0$$

3.2 Impulssatz

Die zeitliche Änderung des Impulses einer abgegrenzten Masse m ist gleich der vektoriellen Summe der an ihr angreifenden Kräfte.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \underline{\tilde{K}}_i \\ \underline{I} &= \sum_i \underline{I}_i = \sum_i m_i \underline{u}_i \end{aligned}$$

1. Schritt Formulieren des Impulsintegrals

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}(\underline{r},t) &= \varrho \underline{u} \qquad\qquad \text{: Impulsdichte} \\ \underline{I} = \underline{E} &= \int_V \varrho \underline{u}\, \mathrm{d}V \\ \frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}t} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \underline{u})\mathrm{d}V + \int_{\partial V} (\varrho \underline{u})(\underline{u}\, \mathrm{d}\underline{F}) \end{aligned}$$

2. Schritt Formulierung der äußeren Kräfte die auf die Masse m wirken

   (a) Volumenkraft (Schwerkraft)

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{K}}_1 &= \int_V \underline{K}_1\, \mathrm{d}V \qquad \underline{K}_1 = -\varrho g \underline{e}_z \\ &= -g\underline{e}_z \int_V \varrho\, \mathrm{d}V \end{aligned}$$

   (b) Oberflächenkraft

$$\underline{\tilde{K}}_2 = -\int_{\partial V} p\, \mathrm{d}\underline{F}$$

   (c) Reaktionskraft $-\underline{\tilde{R}}$, die auf den Körper im Kontrollvolumen ausgeübt wird. (Soll i.A. berechnet werden)

Impulssatz

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial \varrho \underline{u}}{\partial t}\, \mathrm{d}V + \int_{\partial V} (\varrho \underline{u})(\underline{u}\, \mathrm{d}\underline{F})}_{\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}t}} = \underbrace{\overbrace{\int_V \underline{K}_1\, \mathrm{d}V}^{\underline{\tilde{K}}_1} \overbrace{- \int_{\partial V} p\, \mathrm{d}\underline{F}}^{\underline{\tilde{K}}_2} - \underline{\tilde{R}}}_{\sum_i \underline{\tilde{K}}_i}$$

Von der Wahl des Kontrollvolumens V hängt es ab, wie leicht die Integrale zu lösen sind. Man kann das Volumen so wählen, daß möglichst viele Stromlinien Begrenzungen des Volumens sind, dann gild für diese Flächen $\underline{u}\, \mathrm{d}\underline{F} = 0$, so daß ein Integral Null wird. Eine andere Wahl wäre das Volumen auf Isobaren abzuschließen, so daß $\underline{\tilde{K}}_2$ verschwindet, aber dafür das erst genannte einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Der Impulssatz stellt die integrale Form der Bewegungsgleichung (NSt–Gl) dar, und ist ebenfals eine Vektorgleichung.

3.3 Impulsmonentensatz

Die zeitliche Änderung des Impulsmomenten (Drehimpuls) der Masse m bezüglich einem Aufpunkt A ist gleich der Vektorsumme der Monemte $\underline{M}$ aller an der Masse wirkenden Kräfte in Bezug auf A.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\underline{D}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \underline{r}_i \times \underline{I}_i = \sum_i \underline{M}_i \\ \mathrm{d}\underline{D} &= \underline{r} \times \mathrm{d}\underline{I} = \underline{r} \times \underline{u}\mathrm{d}\, m = \varrho(\underline{r} \times \underline{u})\mathrm{d}V \end{aligned}$$

1. Schritt Formulieren des Impulsmomentenintegrals

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}(\underline{r},t) &= \varrho(\underline{r} \times \underline{u}) \\ \underline{D} = \underline{E} &= \int_V \varrho(\underline{r} \times \underline{u})\,\mathrm{d}V \\ \frac{\mathrm{d}\underline{D}}{\mathrm{d}t} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho(\underline{r} \times \underline{u}))\,\mathrm{d}V + \int_{\partial V} \varrho(\underline{r} \times \underline{u})(\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F}) \end{aligned}$$

2. Schritt Formulierung der äußeren Momente, die auf das Kontrollvolumen wirken.

   (a) volumenbezogene Momente

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{M}}_{1A} &= \int_V \underline{r} \times \underline{K}_1\,\mathrm{d}V = -g\int_V \varrho(\underline{r} \times \underline{e}_z)\,\mathrm{d}V \\ &= \underline{r}_{\mathrm{Schw}} \times \tilde{\underline{K}}_1 \end{aligned}$$

   (b)

$$\tilde{\underline{M}}_{2A} = -\int_{\partial V} p(\underline{r} \times \mathrm{d}\underline{F})$$

   (c) Reaktionsmoment $-\tilde{\underline{M}}_R$ (Soll i.A. berechnet werden)

Impulsmomentensatz

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho(\underline{r} \times \underline{u}))\mathrm{d}V + \int_{\partial V} \varrho(\underline{r} \times \underline{u})(\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F}) = \int_V (\underline{r} \times \underline{K}_1)\mathrm{d}V - \int_{\partial V} p(\underline{r} \times \mathrm{d}\underline{F}) - \tilde{\underline{M}}_R$$

3.4 Energiesatz

Der Enerdiesatz muß immer beachtet werden, besonders wenn neben mechanischer auch thermische Energie auftritt.

Es kommen neue Begriffe

1. Reibungswärme, die an den Wänden entsteht
2. Wärmeaustausch, mit den Wänden
3. Dissipation, in der Strömung von kin. Energie in Wärme

Energiesatz der Mechanik:

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie einer abgegrenzten Masse m ist gleich der Summe der an ihr, von den angreifenden Kräften, hervorgerufenen Arbeitsleistung.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_i N_i$$

Für das Kontrollvolumen muß Energiebilanz aufgestellt werden.

hineingeströmte Energie + im Kontrollvolumen erzeugte Energie =
hinausgeströmte Energie + im Kontrollvolumen gespeicherte Energie

im Volumen gespeicherte Energie
1. kinetische Energie
2. innere Energie
3. von der Volumenkraft am System geleistete Arbeit

hinein – herausgeströmte Energie = über die Volumengrenze gehede Energie
1. Anteil der Oberflächenkräfte
2. Warmeaustausch

$$\epsilon(\underline{r},t) = \varrho\left(\frac{\underline{u}^2}{2} + e\right) \qquad \text{mit} \begin{cases} \frac{\underline{u}^2}{2} & : \text{ kinetische Energie/Masse} \\ e & : \text{ innere Energie/Masse} \end{cases}$$

$$E = E_t = \int_V \varrho\left(\frac{\underline{u}^2}{2} + e\right)\,\mathrm{d}V$$

1. Schritt

$$\frac{\mathrm{d}E_t}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\varrho\left(\frac{\underline{u}^2}{2} + e\right)\right]\,\mathrm{d}V + \int_{\partial V} \varrho\left(\frac{\underline{u}^2}{2} + e\right)(\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F})$$

2. Schritt

(a) Schwerkraft $\underline{K}_1$

$$N_1 = \int_V \underline{K}_1\underline{u}\,\mathrm{d}V = -g\int_V \varrho w\,\mathrm{d}V$$

Bei horizontalen Bewegungen und bei Gasströmungen ist N_1 zu vernachlässigen.

(b)

Arbeit am Volumen Element in x–Richtungvon Normalkräften bei Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung

$$\left[u\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x + \sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Die Arbeit alle in x–Richtung wirkenden Spannungen am Volumenelement

$$\left[\frac{\sigma_{xx}u}{\partial x} + \frac{\tau_{yx}u}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}u}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left[-\frac{pu}{partialx}\frac{\sigma_x u}{\partial x} + \frac{\tau_{yx}u}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}u}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

An der Oberfläche des Raumelements geleistete Arbeit

$$N_2 = \overbrace{-\int_V \mathrm{div}\,(p\underline{u})\,\mathrm{d}V}^{\text{Druckanteil}} + \overbrace{\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau_{yx}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \sigma_z w\right]\right\}\mathrm{d}V}^{\text{Spannungsanteil}}$$

Dne Druckanteil kann man mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Oberfächenintegral umwandeln.

(c) Körper im Kontrollvolumen
z.B. Turbienenschaufel
N_M : Maschinenleistung
N_M > 0 bei Entnahme von Energie
< 0 bei Zufuhr von Energie

(d) Die die Leistungen N_1, N_2 und N_3 hervorrufenden Kräfte traten ebenfals beim Impuls– und Impulsmomentensatz auf. Hier beim Energiesatz kommt jetzt noch die Wärmeleitfähigkeit hinzu.

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \qquad \left[\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}}\frac{1}{\mathrm{m}^2}\right] \\ N_4 &= \int\limits_{\partial V} \lambda \,\mathrm{grad}\, T \,\mathrm{d}\underline{F} \end{aligned}$$

$$\int\limits_V \frac{\partial \varrho \left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int\limits_{\partial V} \varrho\left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)(\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F}) = \int\limits_V \underline{K}_1\,\underline{u}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\partial V} p\underline{u}\,\mathrm{d}\underline{F} + \int\limits_{\partial V} \lambda\,\mathrm{grad}\,T\,\mathrm{d}\underline{F} - N_M$$
$$+\int\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau_{yx}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \sigma_z w\right]\right\}\mathrm{d}V \quad (16)$$

Die Änderunggeschwindigkeit der kinetischen und inneren Energie ist gleich der Leistung der Volumen und Oberflächenkräfte vermehrt um den Wärmestrom in Folge Wärmeleitung minus abgeführte Maschinenleistung.

Frage:
Welcher Anteil der Arbeit der äußeren Kräfte wirkt zur Erhöhung der kinetischen Energie $\frac{\underline{u}^2}{2}$ benutzt und welcher Anteil findet sich in inneren Energie wieder?

die linke Seite kann man wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \int\limits_V \frac{\partial \varrho\left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\varrho\underline{u}\left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)\right)\mathrm{d}V &= \int\limits_V \varrho\frac{\partial \frac{\underline{u}^2}{2}+e}{\partial t} + \left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)\mathrm{div}\left(\varrho\underline{u}\right) \\ &\quad +\varrho\underline{u}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_V \varrho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right) + \left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)\underbrace{\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\varrho\underline{u}\right)\right]}_{=0 \quad \text{Kontiunitätsgl.}}\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_V \varrho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\underline{u}^2}{2}+e\right)\mathrm{d}V \end{aligned}$$

Über den Anteil der kinetischen kann eine weitere Aussage gemacht werden:

$$\int\limits_V \varrho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\underline{u}^2}{2}\,\mathrm{d}V = \int\limits_V \varrho\underline{u}\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

mit Hilfe der Navier–Stokes–Gleichung

$$\begin{aligned} \varrho\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} &= \underline{K}_1 - \mathrm{grad}\,p + \underline{e}_x\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \underline{e}_y\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \\ &\quad +\underline{e}_z\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) - \underline{R} \end{aligned}$$

$$\int_V \varrho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V \overbrace{-\operatorname{div}(p\underline{u}) + \underline{u}\operatorname{grad} p}^{\text{Kompressionarbeit}} + \overbrace{\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}}^{=\Phi \quad \text{Rayleighsche Diseptionsfkt.}}$$
$$\underbrace{+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{zu } \Phi} + \underbrace{\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)}_{=\Lambda \quad \text{Wärmeleitungsarbeit}} \mathrm{d}V$$

der Teil der Kompressionarbeit kann noch weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p\underline{u}) &= -\underline{u}\operatorname{grad} p - p\operatorname{div}\underline{u} \\ \operatorname{div}\underline{u} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \quad -\operatorname{div}(p\underline{u}) + \underline{u}\operatorname{grad} p &= \frac{p}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Da dies für jedes beliebige Kontrollvolumen gilt:

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \frac{\Phi}{\varrho} + \frac{\Lambda}{\varrho}$$

mit dem 1. Hauptsatz

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q &= \mathrm{d}e + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\varrho} \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\Phi}{\varrho} + \frac{\Lambda}{\varrho} \end{aligned} \tag{17}$$

Φ soll für eine laminare ebene Strömung berechnet werden, mit $\mu' = 0$, dann bleibt:

$$\begin{aligned} \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} &= 2\mu\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right\} \\ \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} &= \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \\ \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} &= \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} &= 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \end{aligned}$$

aufsummieren ergibt dann:

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}$$

Wie man sieht kommen in Φ nur quadratische Glieder vor, d.h. diese Größe ist richtungsunabhängig. Man kann also nicht durch Umkehrung der Bewegung Energie „zurück“ erhalten.

3.5 Bilanz

Es gibt im Strömungsfeld 7 unabhänginge Variable $\underline{u}$, p, ϱ, T, e, oder i; mit $i = e + \frac{p}{\varrho}$:Entalpie. An Glechungen stehen zur Verfügung

- 3 Bewegungsgleichungen (Eulergl., NSt, bzw. Impulssatz)
- 1 Kontiumitätsgleichung (Massenerhaltung)
- 1 Energiegleichung
- 1 Termische Zustandsgleichung, z.B. ideale Gasgl. $p = \varrho RT$
- 1 kalorische Zustandsgleichung ($e = f(\varrho, T)$ $\quad i = g(p, T)$)

Diese Gleichungen reichen im stationären Fall zum Lösen aus, denn man hat sieben Unbekannte und sieben unabhängige Gleichungen. Wenn man zeitlich schwankende Geschwindigkeiten hat, ist es sinnvoll mittlere Geschwindigkeiten $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ und Schwankungsgrößen $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ einzuführen, mit $u = \overline{u} + \tilde{u}$. Nun reichen die sieben Gleichungen nicht mehr aus um das Problem zu lösen.