Konforme Quantenfeldtheorie

Karl-Henning Rehren

Vorlesung Göttingen WS 1997/98

niedergeschrieben von:

S. Köster, J. Schimmel und H. Tuneke

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **2**

0 Einleitung **3**

1 WIGHTMAN-Theorie **7**
1.1 Axiomatik 8
1.2 Beispiele 13

2 Masselose FERMI-Felder in zwei Dimensionen **17**
2.1 Chirale FERMI-Felder ($m = 0$) 17
2.2 Chirale Skalentransformationen 21
2.3 Innere Symmetrien 23
2.4 Der Energie-Impuls-Tensor 26

3 Die Konforme Gruppe **37**
3.1 $D > 1 + 1$ Dimensionen 37
3.2 $D = 1 + 1$ Dimensionen 41
3.3 Chirale Kompaktifizierung 42

4 Konforme Felder **49**
4.1 Die VIRASORO-Algebra 49
4.2 Höchstgewichtsdarstellungen der VIRASORO-Algebra 50
4.3 Quantisierung von (h, c) 54
4.4 Charaktere der VIRASORO-Algebra 60
4.5 Primäre und quasiprimäre Felder, OPE 63
4.6 Korrelationsfunktionen und Ward-Identitäten 67
4.7 Austauschfelder 73
4.8 Austausch-Algebra 77

5 Modelle mit Eichsymmetrie **81**
5.1 Stromalgebren 81
5.2 SUGAWARA-Formel 92
5.3 Coset-Konstruktion 98
5.4 Charakter-Argumente 100

6 Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie **107**
6.1 Einleitung 107
6.2 CAR- und CCR-Algebren 108
6.3 BOGOLYUBOV-Transformationen 117
6.4 DHR-Theorie der Superauswahlsektoren 123
6.5 DHR-Fusionsregeln 130
6.6 DHR-Austauschalgebra 132

Literaturverzeichnis **137**

Kapitel 0

Einleitung

Konforme Quantenfeldtheorie ist ein Zweig der Quantenfeldtheorie zur Beschreibung von *skaleninvarianten Systemen*. Die Konforme Gruppe ist die Symmetriegruppe der winkeltreuen Transformationen der MINKOWSKI-Raumzeit. Die konforme Gruppe enthält insbesondere die POINCARÉ-Gruppe $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ und insbesondere die Gruppe der globalen Skalierungen $x \mapsto \lambda x$ (Dilatationen), aber, wie wir sehen werden, wird davon nicht ausgeschöpft. Damit ist die konforme Quantenfeldtheorie ein Spezialfall der relativistischen Quantenfeldtheorien mit einer größeren Symmetriegruppe als die letztere im allgemeinen.

Die *physikalische Relevanz* der konformen Quantenfeldtheorie ist vielschichtig. Zum ersten treten skaleninvariante Systeme in Modellen der Statistischen Mechanik auf, wenn bei einem kritischen Punkt die Korrelationslänge (in Einheiten der Gitterkonstanten) divergiert.

Da die Korrelationslänge in der Regel die einzige Größe ist, durch die eine absolute Skala des Systems festgelegt ist (etwa durch die Halbwertslänge eines exponentiellen Abfalls der Korrelation), geht am kritischen Punkt die absolute Skala verloren: das *kritische System* ist skaleninvariant. Kritische Korrelationen fallen mit Potenzgesetzen anstelle von Exponentialfunktionen ab. Mit der Axiomatik der konformen Feldtheorie lassen sich in einigen Fällen die entsprechenden kritischen Exponenten berechnen.

Natürlich sind kritische Modelle der Statistischen Mechanik keine Quantenfeldtheorien. Der Thermodynamische Limes solcher Modelle liefert jedoch eine Kontinuumstheorie im D-dimensionalen euklidischen Raum, die durch eine sogenannte WICK-Rotation ($x^D \mapsto ix^0$) in eine Quantenfeldtheorie im MINKOWSKI-Raum übergeleitet werden kann. Vielfach werden Begriffe aus der einen Sprache in die andere übernommen („Zustandssumme“). Allerdings genügen die WICK-Rotationen *euklidischer Kontinuumstheorien* nicht automatisch allen Anforderungen einer echten Quantenfeldtheorie. Sie besitzt zwar die richtigen Symmetrien und Spektraleigenschaften, jedoch ist die Wahrscheinlichkeitsinterpretation, die an einen HILBERT-Raum mit positiv definitem Skalarprodukt geknüpft ist, in der

Regel nicht gewährleistet. Dafür muß die gegebene euklidische Theorie eine besondere Eigenschaft, OSTERWALDER-SCHRADER- oder Reflexionspositivität, besitzen.

Dennoch werden vielfach auch nicht-OSTERWALDER-SCHRADER-positive euklidische Theorien oder die zugehörigen WICK-rotierten nicht unitären minkowskischen Theorien als „Quantenfeldtheorien" im weiteren Sinne bezeichnet und mit denselben Methoden, soweit wie möglich, studiert.

Zum zweiten kann man davon ausgehen, daß Quantenfeldtheorien der Elementarteilchen, deren Längenskala durch die Masse m der Teilchen (COMPTON-Wellenlänge) bestimmt ist, im *Hochenergieverhalten*, d. h. wenn die Wechselwirkungs-Energien extrem relativistisch $\gg mc^2$ sind, nicht mehr wesentlich von der Masse abhängen. Daher wurden von den 50er bis in die 70er Jahre skaleninvariante und insbesondere konform-invariante Theorien als Modelle für das Hochenergieverhalten der Elementarteilchen studiert. Allerdings hat die Entdeckung der Renormierungsgruppe gezeigt, daß die Verhältnisse nicht so einfach sind und das Hochenergieverhalten (im Falle der Quantenchromodynamik) besser mit dem Konzept der asymptotischen Freiheit beschreibbar ist. Daher nahm das Interesse an der konformen Quantenfeldtheorie Mitte der 70er Jahre abrupt ab.

Zehn Jahre später, angeregt durch bestimmte Vorstellungen aus der (Super-) Stringtheorie, wurde das Interesse an 2-dimensionaler konformer Quantenfeldtheorie wiederbelebt. Der entscheidende Fortschritt kam jedoch von der Seite der Statistischen Mechanik her, mit der *expliziten Lösung* einer ganzen Serie von sogenannten „minimalen" Modellen, die mit dem kritischen ISING-Modell beginnt [2]. Diese Arbeit gab den Anstoß zu einem erneuten Interesse der Quantenfeldtheoretiker (ganz unabhängig von Stringtheorie und Statistischer Mechanik), denn die minimalen Modelle liefern nichttriviale und reichhaltige Beispiele für nichtstörungstheoretische, exakte WIGHTMAN-Quantenfeldtheorien - an denen seit jeher eklatanter Mangel bestand.

Der exakten Lösbarkeit so vieler Modelle liegt ein ungewöhnlicher Mechanismus der Vergrößerung der inneren Symmetrien aufgrund der äußeren Symmetrie der Kovarianz zugrunde. Wir werden sehen, daß eine konform-invariante Theorie mit einem erhaltenen Strom

$$\partial_\mu j^\mu(t,x) = 0$$

und nichttrivialem Generator (= erhaltene Ladung)

$$Q = \int \mathrm{d}x j^0(t,x)$$

automatisch auch die Erhaltung des dualen Stromes

$$\tilde{j}^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} j_\nu \qquad (\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1)$$

erzwingt, und damit eine zweite unabhängige erhaltene Ladung

$$\tilde{Q} = \int \mathrm{d}x \hat{j}^0 = -\int \mathrm{d}x j^1$$

existiert. Mehr noch, die beiden Ströme sind Kombinationen von „chiralen“ Strömen, die nur von jeweils einer Lichtkegel-Koordinate $t \pm x$ abhängen, und entsprechend sind $Q \pm \tilde{Q}$ die Generatoren von chiralen Symmetrien, die nur die „rechts- bzw. linksläufigen Freiheitsgrade“ der Theorie transformieren.

Die Existenz und die strukturelle Einfachheit *chiraler Felder* (und Symmetrien) ist der Ursprung der Lösbarkeit vieler Modelle. Daß die Symmetrieerweiterung auf so vielfältige Art und Weise möglich ist, macht den besonderen Reiz der konformen Quantenfeldtheorien aus.

Zwar beschreiben diese Modelle keine massiven Teilchen und damit keine Streuprozesse im engeren Sinne, jedoch sind sie hervorragend geeignet, viele konzeptionelle Fragen, insbesondere Superauswahlsektoren der allgemeinen lokalen Quantentheorie, an Beispielen zu studieren und zu exemplifizieren. Diese Sichtweise ist auch die meinige, und meine Vorlesung wird im wesentlichen an ihr ausgerichtet sein.

Es ist im gegebenen Rahmen, selbst einer vierstündigen Vorlesung, nicht möglich, alle modernen Entwicklungen seit [2] vorzustellen. An vielen Stellen werde ich auf die Literatur verweisen (müssen) oder Teilgebiete ganz weglassen.

Ich werde mich in meinem Formalismus stets an die WIGHTMANsche Quantenfeldtheorie in der 1+1-dimensionalen MINKOWSKIschen Raum-Zeit halten. Leider stehe ich damit im Gegensatz zu dem Großteil der Literatur, der in einem konzeptionell nicht stets klaren Konglomerat von String- und Statistischer-Mechanik-Interpretation in einer „Grauzone“ zwischen euklidischer und MINKOWSKIscher Quantenfeldtheorie arbeitet. Das ist oft technisch von großem Vorteil, aber steht der eigentlichen quantenfeldtheoretischen Sichtweise im Wege.

Das Ziel dieser Vorlesung wird es sein, aus der Fülle der Beispiele exakt lösbarer Modelle die charakteristischen und quantenfeldtheoretisch interessantesten Strukturen herauszuarbeiten. An die Stelle der größtmöglichen Allgemeinheit (beliebige Symmetriegruppen, ...) soll eher das exemplarische Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen stehen, die man zur Not auch „zu Fuß“ reproduzieren kann.

Ich bedanke mich an dieser Stelle bei SÖREN KÖSTER, JÖRN SCHIMMEL *und* HILMAR TUNEKE *für die Initiative, meine Vorlesungsniederschrift zu “TEX-en”, und für die darauf verwendeten Mühen, meine oft unleserlichen Notizen in das vorliegende ordentliche Manuskript zu verwandeln.*

Kapitel 1

WIGHTMAN-Theorie

Die WIGHTMANsche Quantenfeldtheorie ist ein axiomatischer Zugang zur Quantenfeldtheorie, in dem die grundlegenden physikalischen Strukturen verankert sind:

- Lokalität (Raumartig getrennte Felder sind kausal unabhängig.)
- Kovarianz unter der Wirkung der POINCARÉ-Gruppe
- Stabilität (Es existiert ein Grundzustand der Energie.)
- Unitarität (Es existiert eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation.)

Es gibt im wesentlichen zwei Axiomensysteme: Eines beschreibt die Felder selbst als operatorwertige Distributionen

$$f \mapsto \phi(f) = \int \mathrm{d}^{s+1}x f(x)\phi(x) \,,$$

das andere charakteristiert ihre Korrelationsfunktionen, d. h. Vakuumserwartungswerte

$$\langle \Omega, \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega\rangle = \int \mathrm{d}^{s+1}x_1 \cdots \mathrm{d}^{s+1}x_n f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) W^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \,.$$

Die Vakuumdarstellung der Feldoperatoren $\phi(f)$ kann aus den numerischen Distributionen $W^{(n)}$ rekonstruiert werden, jedoch wird es in der Regel neben der Vakuumdarstellung auch andere interessante Darstellungen derselben Algebra geben. Eine wichtige Klasse sind die Darstellungen positiver Energie, d. h. solche, in denen der Energie-Operator (Generator der Zeitentwicklung) nach unten beschränkt ist („Superauswahlsektoren“ jenseits des Vakuumsektors). Eine andere Klasse sind Temperaturzustände, denen in Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden beliebig viel Energie entzogen werden kann.
Interessiert man sich für alle Darstellungen mit positiver Energie, so muß man entweder

a) die Algebra der Feldoperatoren selbst studieren

oder

b) WIGHTMAN-Distributionen nicht-observabler, ladungstragender Felder, welche die Zustände anderer Superauswahlsektoren aus dem Vakuumsektor erzeugen, zulassen.

Im letzten Falle wird der Rahmen der WIGHTMAN-Theorie erweitert, und manche der Axiome können/müssen abgeschwächt werden: Um Darstellungen mit halbzahligem LORENTZ-Spin zu erzeugen, benötigt man FERMI-Felder, die die Lokalität verletzen (Antivertauschungsrelation); in der Eichtheorie benötigt man Geist-Felder, welche die Unitarität verletzen. Die Existenz und Eigenschaften der nichtobservablen geladenen Felder sind unabhängige - und schwerlich a priori zu rechtfertigende - Postulate.
Bei der ersten Alternative ist die Algebra, die gegebenenfalls aus der Vakuumdarstellung via WIGHTMAN-Rekonstruktion gewonnen wird, als abstraktes Objekt zu betrachten, und es ist zu fragen, ob und welche anderen Darstellungen positiver Energie außer der Vakuumdarstellung diese besitzt. Die Antwort darauf ist in der Regel nicht einfach zu geben und führt zu neuen Quantenzahlen, welche die (Äquivalenzklassen dieser) Darstellungen beschreiben.

1.1 Axiomatik

Es folgt eine kurze Vorstellung der Axiomensysteme für lokale WIGHTMAN-Felder.

1.1.1 Die Felder

HILBERT-Raum und POINCARÉ-Gruppe: Gegeben ist ein HILBERT-Raum mit einer unitären Darstellung $\mathcal{U}(g)$ der POINCARÉ-Gruppe sowie einem eindeutigen Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ (das Vakuum), der unter $\mathcal{U}(g)$ invariant ist. Das Spektrum der Generatoren der Translationen

$$\mathcal{U}(x) = e^{iP_\mu x^\mu}$$

liegt im Abschluß des Vorwärtskegels $\overline{V^+} = \{p^\mu : p_\mu p^\mu \geq 0, p^0 \geq 0\}$ (Spektrumsbedingung).

Felder: Felder sind Multipletts $(\phi_m(x))_m$ von operatorwertigen Distributionen, d. h. lineare Abbildungen

$$f \mapsto \phi(f) =: \sum_m \int \mathrm{d}^{s+1}x f_m(x)\phi_m(x) \ .$$

Die Operatoren $\phi(f)$ sind im allgemeinen unbeschränkt. Sie sind auf einer unter der Wirkung der Feldalgebra invarianten und POINCARÉ-invarianten dichten Domäne $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ definiert, die den Vakuum-Vektor Ω enthält.

Die Testfunktionen f sind im allgemeinen mehrkomponentig. Die Komponenten werden durch LORENTZ-Transformationen gemischt (s. u.). Wo es zu keinen Mißverständnissen führt, werden die Multipletts ohne Angabe des Multiplettindexes bezeichnet: $\phi := (\phi_m)_m$. Verschiedene Felder werden durch die Notation $\phi^{(i)}$ unterschieden.
Die Domäne $\mathcal{D}$ enthält auf jeden Fall die WIGHTMAN-Domäne

$$\mathrm{span}\{\phi_1(f_1)\cdots\phi_n(f_n)\Omega\}$$

und kann oft mit dieser gleichgesetzt werden.

Hermitizität: Mit ϕ ist auch $\overline{\phi} \equiv \phi^*$ ein Feld, das durch

$$\overline{\phi}(f) := \left[\phi(\overline{f})\right]^\dagger \ .$$

definiert ist. † bezeichnet dabei die Adjunktion bezüglich des HILBERT-Raumes.

Ein HERMITEsches Feld erfüllt $\phi = \overline{\phi}$. Enthält die Theorie verschiedene Felder $\phi^{(i)}$, so verwenden wir auch die Notation $\overline{\phi^{(i)}} = \phi^{(\bar{i})}$.

Kovarianz: Die Felder transformieren sich unter der POINCARÉ-Gruppe

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\phi(f)\mathcal{U}(a,\Lambda)^* = \phi(D(\Lambda)f_a)$$

bzw.

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\phi_m\mathcal{U}(a,\Lambda)^* = \sum_n \phi_n(\Lambda x + a)D_{nm}(\Lambda)$$

mit

$$(D(\Lambda)f_a)_n(x) := \sum_m D_{nm}(\Lambda)f(\Lambda^{-1}(x-a))_m \ ,$$

wobei D eine endlichdimensionale (irreduzible) Matrix-Darstellung der LORENTZ-Gruppe ist.

Lokalität: Wenn die Träger der Funktionen f und g raumartig getrennt sind, so kommutieren die Feldoperatoren

$$\left[\phi^{(i)}(f), \phi^{(j)}(g)\right] = 0 \ .$$

Vollständigkeit: Jede (unter der Anwendung der Feldoperatoren) invariante Unterdomäne $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ (insbesondere die WIGHTMAN-Domäne) ist dicht in $\mathcal{H}$, es gibt also ausreichend viele Felder, um den ganzen HILBERT-Raum aus dem Vakuum zu erzeugen.

Die POINCARÉ-Invarianz der Domäne folgt aus ihrer Invarianz unter der Anwendung der Feldoperatoren.

Mit diesen Axiomen erhält man die WIGHTMAN-Distributionen

$$W^{(i_1\cdots i_n)}(f_1,\ldots,f_n) := (\Omega, \phi^{(i_1)}(f_1)\cdots\phi^{(i_n)}(f_n)\Omega)$$
$$= \sum_{m_1,\ldots,m_n} \int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n f_{1,m_1}(x_1)\cdots f_{n,m_n}(x_n) W^{(i_1\cdots i_n)}_{m_1\cdots m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

oder

$$W^{(i_1\cdots i_n)}_{m_1\cdots m_n}(x_1,\ldots,x_n) = (\Omega, \phi^{i_1}_{m_1}(x_1)\cdots\phi^{i_n}_{m_n}(x_n)\Omega)$$

(im Sinne von Distributionen), deren Gesamtheit die physikalischen Aussagen (Streuamplituden) der Theorie bestimmen.

Die Indizes i bezeichnen den Typ eines Feldes, die Indizes m beziehen sich auf die betreffende Darstellung der POINCARÉ-Gruppe.

1.1.2 Vakuumerwartungswerte

Umgekehrt lassen sich die WIGHTMAN-Felder aus den Distributionen $W^{(n)} = \left\{W^{(i_1\cdots i_n)}_{m_1\cdots m_n}\right\}$ rekonstruieren, indem man zunächst symbolische Vektoren

$$\phi^{(i_1)}(f_1)\cdots\phi^{(i_n)}(f_n)\Omega$$

betrachtet, für diese ein Skalarprodukt

$$\langle\phi^{(i_1)}(f_1)\cdots\phi^{(i_n)}(f_n)\Omega, \phi^{(j_1)}(g_1)\cdots\phi^{(j_m)}(g_m)\Omega\rangle :=$$
$$W^{(\bar{i}_n\cdots\bar{i}_1 j_1\cdots j_m)}(\overline{f_n},\ldots,\overline{f_1},g_1,\ldots,g_m)$$

definiert, so ihre $\mathbb{C}$-lineare Hülle zu einem Prä-HILBERT-Raum macht und diesen abschließt. Dafür müssen die WIGHTMAN-Distributionen zunächst den folgenden Axiomen genügen:

Hermitizität: Es gilt

$$\overline{W^{(i_1\cdots i_n)}_{m_1\cdots m_n}(x_1,\ldots,x_n)} = W^{(\bar{i}_n\cdots\bar{i}_1)}_{m_n\cdots m_1}(x_n,\ldots,x_1).$$

Positivität: $W^{(n)}$ sind eine Menge von Distributionen über dem $(\mathbb{R}^{s+1})^{\times n}$ derart, daß die Vektorquadrate

$$\left\| \sum_r \phi^{(i_1^{(r)})}(f_1^{(r)}) \cdots \phi^{(i_{n^{(r)}}^{(r)})}(f_{n^{(r)}}^{(r)})\Omega \right\|^2 \geq 0 \ ,$$

definiert durch die oben angegebene Formel, positiv (semi)definit sind.

Die Felder $\phi(f)$ werden nun dicht definiert durch die Abbildung

$$\phi^{(i_1)}(f_1) \cdots \phi^{(i_n)}(f_n)\Omega \mapsto \phi(f)\phi^{(i_1)}(f_1) \cdots \phi^{(i_n)}(f_n)\Omega$$

und erfüllen automatisch die Hermitizität $\overline{\phi^{(i)}} = \phi^{(\bar{i})}$. Die folgenden Axiome an die WIGHTMAN-Funktionen stellen die Gültigkeit der übrigen Feld-Axiome (s. o.) sicher.

Lokalität: Es gilt

$$W^{(\cdots i_\nu i_{\nu+1} \cdots)}(\ldots, f_\nu, f_{\nu+1}, \ldots) = W^{(\cdots i_{\nu+1} i_\nu \cdots)}(\ldots, f_{\nu+1}, f_\nu, \ldots) \ ,$$

wenn supp f_ν raumartig zu supp $f_{\nu+1}$ liegt.

Kovarianz: Die $W^{(n)}$ sind translations- und LORENTZ-invariant:

$$W^{(i_1 \cdots i_n)}(f_1, \ldots, f_n) = W^{(i_1 \cdots i_n)}(D^{(i_1)}(\Lambda)f_{1,a}, \ldots, D^{(i_n)}(\Lambda)f_{n,a}) \ .$$

Die Darstellung der POINCARÉ-Gruppe wird nun durch das entsprechende Transformationsgesetz der Felder und die Invarianz des Vakuums auf den Vektoren $\phi^{(i_1)}(f_1) \cdots \phi^{(i_n)}(f_n)\Omega$ dicht und unitär definiert.

Spektrumsbedingung: $W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ sind Randwerte von in der „Vorwärtsröhre“ analytischen Funktionen. Die Vorwärtsröhre ist die folgende Menge:

$$\{(z_j = x_j + iy_j)_j | \ \forall j > 1 : \Im m\,(z_j - z_{j-1}) \in V^+\} \ .$$

Diese Analytizitätseigenschaft der WIGHTMAN-Funktionen folgt aus den Axiomen für die Felder als Ausdruck der Spektrumsbedingung. Die Idee dabei ist es, zu definieren

$$\begin{aligned} W^{(n)}(z_1, \ldots, z_n) &:= \langle \Omega, \cdots (e^{iPz_j}\phi(0)e^{-iPz_j}) \cdots \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega, \cdots \phi(0) \underbrace{e^{iP(x_j - x_{j-1})} e^{-P(y_j - y_{j-1})}}_{e^{iP(z_j - z_{j-1})}} \phi(0) \cdots \Omega \rangle. \end{aligned}$$

Solche Ausdrücke sind wohldefiniert und analytisch in z, vorausgesetzt $e^{-P(y_j - y_{j-1})}$ ist ein Dämpfungsfaktor, d. h. falls $P(y_j - y_{j-1}) \geq 0$. Die Spektrumsbedingung garantiert dieses Vorzeichen gerade in der Vorwärtsröhre. Umgekehrt garantiert die

Analytizität der WIGHTMAN-Funktionen in der Vorwärtsröhre die Spektrumsbedingung für die rekonstruierten Felder.
Ein Vollständigkeitsaxiom ist nicht nötig, da $\mathcal{H}$ als der Abschluß der WIGHTMAN-Domäne definiert ist.
Definiert man die FOURIER-Transformierte von $W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ durch

$$W^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) =: \int \frac{\mathrm{d}^{s+1}k_1 \cdots \mathrm{d}^{s+1}k_n}{(2\pi)^{n(s+1)}} e^{\sum ik_jx_j} \widehat{W}^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) \,,$$

wobei $\widehat{W}^{(n)}$ aufgrund der Translationsinvarianz die Formel

$$\widehat{W}^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) = \delta(k_1 + \cdots + k_n)\widetilde{W}^{(n)}(k_2 + \cdots + k_n, \ldots, k_{n-1} + k_n, k_n)$$

erfüllt, so ist eine andere Formulierung der Spektrumsbedingung möglich: $\widetilde{W}^{(n)}$ hat Träger in $\{(k_2+\cdots+k_n, \ldots, k_{n-1}+k_n, k_n) : (k_2+\cdots+k_n, \ldots, k_{n-1}+k_n, k_n) \in \overline{V^+}^{n-1}\}$.

1.1.3 Reeh-Schlieder-Theorem

Eine wichtige Konsequenz der Axiome, die wir wiederholt verwenden werden, ist das REEH-SCHLIEDER-Theorem.

Satz 1.1 (REEH-SCHLIEDER-**Theorem**) *i) Sei $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{s+1}$. Dann spannen alle Vektoren*

$$\phi_1(f_1) \ldots \phi_n(f_n)\Omega \,,$$

deren Testfunktionen f_i Träger in $\mathcal{O}$ haben, einen dichten Unterraum des Hilbertraumes auf. Mit anderen Worten: der Vakuumvektor Ω ist zyklisch für die Polynomalgebra jedes offenen Gebietes.
ii) Sei $\mathcal{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{s+1}$, deren kausales Komplement ein offenes Gebiet $\mathcal{O}$ enthält. Dann gilt

$$P\Omega = 0 \Rightarrow P = 0$$

für jedes Polynom P in Feldoperatoren $\phi_i(f_i)$, deren Testfunktionen f_i Träger in $\mathcal{Q}$ haben. Mit anderen Worten: der Vakuumvektor Ω ist separierend für die Polynomalgebra jedes Gebietes, sofern dessen kausales Komplement nur ein offenes Gebiet enthält.

Beweisskizze: Wir zeigen zunächst, daß *ii)* eine Konsequenz von *i)* ist: Sei P' ein Polynom in der Polynomalgebra von $\mathcal{O}$. Ist $P\Omega = 0$, so ist auch $P'P\Omega = 0$, und wegen Lokalität $PP'\Omega = 0$. Aber die Vektoren der Form $P'\Omega$ liegen dicht im Hilbertraum wegen *i)*. Also ist $P = 0$.

Zum Beweis von i) bemerken wir, daß die Spektrumsbedingung mit demselben Argument wie für die Vakuumswerte (s.o.) auch auf die Übergangs-Matrixelemente zu einem beliebigen Hilbertraumvektor Ψ

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (\Psi, \phi_1(x_1) \ldots \phi_n(x_n)\Omega) = \\ = (\Psi, e^{iPx_1}\phi_1(0)e^{iP(x_2-x_1)} \ldots e^{iP(x_n-x_{n-1})}\phi_n(0)\Omega)$$

anwendbar ist. $F(x_1, \ldots, x_n)$ sind daher ebenfalls Randwerte von analytischen Funktionen, die durch

$$F(z_1, \ldots, z_n) = (\Psi, e^{iPz_1}\phi_1(0)e^{iPz_2} \ldots e^{iPz_n}\phi_n(0)\Omega)$$

definiert sind, $z_1 = x_1 + i\eta_1, z_j = x_j - x_{j-1} + i\eta_j$. Das Analytizitätsgebiet ist die Röhre $\{\eta_j \in V_+\}$.

Wir nehmen nun an, daß ein Vektor Ψ auf allen Vektoren $\phi_1(f_1) \ldots \phi_n(f_n)\Omega$ senkrecht stehe, wenn f_i Träger in $\mathcal{O}$ haben. Dann ist also $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, wenn alle x_j in $\mathcal{O}$ liegen. Wenn die Funktion F aber auf einem offenen Gebiet des Randes ihres Analyzitätsgebietes verschwindet, dann muß F identisch verschwinden. Folglich steht Ψ sogar senkrecht auf der ganzen WIGHTMAN-Domäne, und da diese dicht ist, muß $\Psi = 0$ sein.

Also ist das orthogonale Komplement der Vektoren $P\Omega$, P in der Polynomalgebra von $\mathcal{O}$, trivial, und folglich spannen diese Vektoren einen dichten Unterraum auf. □

1.2 Beispiele

1.2.1 Freies skalares Feld der Masse m auf dem Fock-Raum

Der bosonische FOCK-Raum ist definiert durch einen Vakuum-Vektor Ω und die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger(k)$ und $a(k)$, $k \in \mathbb{R}^{s+1}$, für die gilt: $a(k)\Omega = 0$, $a^\dagger(k) = a(k)^*$. Dabei sind die k auf die positive Massenschale zur Masse m eingeschränkt, d. h. $k^0 = \omega_m(\vec{k}) := \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. Außerdem gelten die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \left[a(k), a^\dagger(l)\right] &= (2\pi)^s 2\omega_m(\vec{k})\delta^s(\vec{k} - \vec{l}) \,, \\ [a, a] &= \left[a^\dagger, a^\dagger\right] = 0 \,. \end{aligned}$$

Das skalare Feld ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \underbrace{\frac{\mathrm{d}^{s+1}k}{(2\pi)^s}\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)}_{\left.\frac{\mathrm{d}^s\vec{k}}{(2\pi)^s}\frac{1}{2\omega_m(\vec{k})}\right|_{k^0=\omega_m(\vec{k})}} \left[e^{-ikx}a(k)+e^{ikx}a^\dagger(k)\right] \\ &= \phi_-(x)+\phi_+(x) \qquad \text{(Vernichter- und Erzeuger-Anteil)}\end{aligned}$$

ϕ genügt konstruktionsgemäß der KLEIN-GORDON-Gleichung $(\Box+m^2)\phi=0$. Die WIGHTMAN-Distribution ist dann

$$\begin{aligned}W^{(2)}(x_1,x_2) &= \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle \\ &= \int \frac{(2\pi)^{-s}\mathrm{d}^s\vec{k_1}}{2\omega_m(\vec{k_1})}\frac{(2\pi)^{-s}\mathrm{d}^s\vec{k_2}}{2\omega_m(\vec{k_2})}e^{-ik_1x_1}e^{ik_2x_2}\underbrace{(2\pi)^s 2\omega_m(\vec{k_1})\delta^s(\vec{k_1}-\vec{k_2})}_{\langle[a(k_1),a^\dagger(k_2)]\rangle} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^{s+1}k}{(2\pi)^s}\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)e^{ik(x_2-x_1)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^{s+1}k_1\mathrm{d}^{s+1}k_2}{(2\pi)^s}\delta^{s+1}(k_1+k_2)\delta(k_2^2-m^2)\theta(k_2^0)\,e^{i(k_2x_2+k_1x_1)} \\ \Rightarrow \widehat{W}^{(2)}(k_1,k_2) &= \delta(k_1+k_2)\cdot\underbrace{(2\pi)^{s+2}\delta(k_2^2-m^2)\theta(k_2^0)}_{\widetilde{W}(k_2)}\end{aligned}$$

Für $x=x_1-x_2$ ergibt sich (bis auf numerische Faktoren)

$$\begin{aligned}W^{(2)}(x) &\sim \int \frac{\mathrm{d}^s\vec{k}}{\omega_m(\vec{k})}e^{-i(\omega_m(\vec{k})t-\vec{k}\cdot\vec{x})} \\ &\sim \int_0^\infty \frac{|\vec{k}|^{s-1}\mathrm{d}|\vec{k}|}{\omega_m(\vec{k})}e^{-i(\omega_m(\vec{k})t-|\vec{k}||\vec{x}|\cos\theta)}\sin^{s-2}\theta\mathrm{d}\theta \\ &\overset{m=0}{=} \int_0^\infty k^{s-2}\mathrm{d}k \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{-ik(t-|\vec{x}|\mu)}(1-\mu^2)^{\frac{s-3}{2}}\mathrm{d}\mu}_{\frac{e^{-ik(t-|\vec{x}|)}-e^{-ik(t+|\vec{x}|)}}{ik|\vec{x}|}\text{ für } s=3} \\ &\sim \begin{cases}\text{logarithmische Divergenz} & \text{für } s=1 \\ \frac{-i}{|\vec{x}|}\left[\left(\frac{-i}{t-|\vec{x}|-i\varepsilon}\right)-\left(\frac{-i}{t+|\vec{x}|-i\varepsilon}\right)\right]=\frac{2}{(t-i\varepsilon)^2-\vec{x}^2} & \text{für } s=3\end{cases}.\end{aligned}$$

Es gibt also kein masseloses skalares Feld in $1+1$ Dimensionen. Der davon abgeleitete Strom hingegen existiert. Das skalare Feld wird dennoch gerne als formale Hilfsgröße benutzt.

1.2.2 Freies Dirac-Feld der Masse m

Der FERMIonische FOCK-Raum ist definiert durch den Vakuumvektor Ω und die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b^\dagger(k), d^\dagger(k)$ und $b(k), d(k)$, $b^\dagger(k) = b(k)^*$, $d^\dagger(k) = d(k)^*$, für alle $k \in \mathbb{R}^{s+1}$, $k^0 = \omega_m(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, mit den Anti-Vertauschungsrelationen

$$\left\{ b_\alpha(k), b^\dagger_\beta(l) \right\} \;=\; \left\{ d_\alpha(k), d^\dagger_\beta(l) \right\} = (2\pi)^s k^0 \delta^s(\vec{k} - \vec{l}) \delta_{\alpha\beta} \; ;$$

alle anderen Anti-Kommutatoren verschwinden. Es gilt $b(k)\Omega = d(k)\Omega = 0$. Das DIRAC-Feld ist

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^s \vec{k}}{(2\pi)^s} \frac{1}{\omega_m(\vec{k})} \sum_\alpha \left[b_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d^\dagger_\alpha(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right] \\ &\equiv \psi_-(x) + \psi_+(x) \end{aligned}$$

Dabei genügen die Spinoren u und v der Eigenwertgleichung $(\not{k} - m)u = 0 = (\not{k} + m)v$, so daß ψ die DIRAC-Gleichung $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$ erfüllt. ψ_+ und ψ_- sind die Erzeugungs- und Vernichtungsanteile des Feldes.

Man kann die v-Spinoren als Elektronen- und die u-Spinoren als Positronenlösungen interpretieren und b_α und $d^\dagger_\alpha$ als die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Die Indizes α bezeichnen die Spinquantenzahlen. Die Spinorfunktionen $u^{(\alpha)}(k)e^{-ikx}$ und $v^{(\alpha)}(k)e^{ikx}$ übernehmen die Rolle eines vollständigen Satzes von „ebenen Wellen“, nach denen die Lösung der DIRAC-Gleichung entwickelt wird.

Eine explizite Darstellung der Spinoren ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} u^{(\alpha)}(k) &:= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2(k^0 + m)}} \, E^{(\alpha)}, \quad \bar{u} := u^\dagger \gamma^0 \\ v^{(\alpha)}(k) &:= \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2(k^0 + m)}} \, F^{(\alpha)}, \quad \bar{v} := v^\dagger \gamma^0 \end{aligned}$$

wobei $E^{(\alpha)}$ bzw. $F^{(\alpha)}$ impuls-unabhängige orthonormale Basen von Eigenvektoren von γ^0 zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 sind. In 3+1 Dimensionen nimmt also α zwei Werte an, und in einer Basis, in der γ^0 die Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

hat, sind $E^{(\alpha)}$ die beiden ersten und $F^{(\alpha)}$ die beiden letzten Basisvektoren. Basis-

unabhängig gelten die Identitäten

$$\sum_\alpha E^{(\alpha)} E^{(\alpha)\dagger} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^0)$$
$$\sum_\alpha F^{(\alpha)} F^{(\alpha)\dagger} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^0).$$

Die Zwei-Punkt-Distributionen sind:

$$\begin{aligned}
\langle \psi\psi \rangle &= 0 = \langle \psi^*\psi^* \rangle \\
\langle \psi(x_1)_\xi \psi^*(x_2)_\eta \rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^s\vec{k}}{(2\pi)^s} \frac{1}{\omega_m(\vec{k})} \left[\sum_\alpha u_\xi^{(\alpha)}(k) \bar{u}_\eta^{(\alpha)}(k) \right] e^{ik(x_2 - x_1)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^s\vec{k}}{(2\pi)^s} \frac{1}{2\omega_m(\vec{k})} \left[(\not{k} + m)\gamma^0 \right]_{\xi\eta} e^{ik(x_2 - x_1)} \ .
\end{aligned}$$

Die entsprechende Impulsraumfunktion lautet:

$$\widetilde{W}^{(2)}(k) = (2\pi)^{s+2} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) (\not{k} + m)\gamma^0 \ .$$

Speziell für die $D = 1 + 1$ dimensionale Raumzeit gilt:

$$\begin{aligned}
W^{(2)}(x = x_1 - x_2) &= (2\pi)^{-s} \int \frac{\mathrm{d}^s\vec{k}}{\omega_m(\vec{k})} (\omega_m(\vec{k}) + k_i\gamma^i\gamma^0 + m\gamma^0) e^{-i(\omega_m(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \\
&\overset{\substack{m=0 \\ s=1}}{=} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}k}{|k|} (|k| + k\gamma^5) e^{-i(|k|t \mp kx)} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^\infty \mathrm{d}k e^{-ik(t+x)}(1 - \gamma^5) + \int_0^\infty \mathrm{d}k e^{-ik(t-x)}(1 + \gamma^5) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{-i}{t + x - i\varepsilon} \right) P_- + \left(\frac{-i}{t - x - i\varepsilon} \right) P_+ \right]
\end{aligned}$$

mit den Spektralprojektoren $P_\pm$ zu γ^5

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \frac{1 \pm \gamma^0\gamma^1}{2} \ .$$

Die Zweipunktfunktion ist eine Summe von rechts- und linkslaufenden Beiträgen, die den beiden Eigenwerten von γ^5 zugeordnet sind (Chiralität).

Kapitel 2

Masselose FERMI-Felder in zwei Dimensionen

2.1 Chirale FERMI-Felder ($m = 0$)

Die DIRAC-Gleichung für zwei-dimensionale masselose FERMI-Felder impliziert

$$\begin{aligned} (i\partial\!\!\!/ - m)\psi &= 0 \\ \Rightarrow i\partial\!\!\!/\psi &= 0 \\ \Rightarrow (\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1)\psi &= 0 \\ \Rightarrow (\partial_0 + \partial_1\gamma^5)\psi &= 0 \qquad \text{mit} \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1,\ \gamma^5\gamma^5 = \mathbb{1}\ . \end{aligned}$$

Setzen wir die Eigenwertprojektoren $P_\pm = \frac{1\pm\gamma^5}{2}$ von γ^5 ein, so folgt

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \partial_1)P_+\psi(t,x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad P_+\psi(t,x) = \psi_R(t-x) \\ (\partial_0 - \partial_1)P_-\psi(t,x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad P_-\psi(t,x) = \psi_L(t+x) \end{aligned}$$

d. h. die entsprechenden Komponenten des Spinorfeldes sind chirale Felder.
Die kanonischen Anti-Vertauschungsrelationen des komplexen FERMI-Feldes in $D = 1+1$ Dimensionen implizieren für die chiralen Komponenten mit $u := t - x$ und $v := t + x$

$$\begin{aligned} \{\psi_R(u), \psi_L(v)\} &= 0 \\ \{\psi_R(u), \psi_R(u')\} &= 0 \\ \{\psi_R(u), \psi_R^*(u')\} &= \delta(u-u') \\ \{\psi_L(v), \psi_L^*(v')\} &= \delta(v-v')\ , \end{aligned}$$

d. h. ψ_R und ψ_L erzeugen zwei entkoppelte (chirale) CAR-Algebren.
Reelle FERMI-Felder: Die DIRAC-Gleichung ist eine komplexe Differentialgleichung, daher ist die Bedingung $\psi = \psi^*$ in der Regel unzulässig, weil ψ^* eine

andere Differentialgleichung löst als ψ. Für masselose FERMI-Felder in $D = 1+1$ mit der Wahl $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wird die DIRAC-Gleichung reell. Mit ψ sind dann auch stets $\psi_{\Re e} = \Re e\, \psi = \frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ und $\psi_{\Im m} = \Im m\, \psi = \frac{1}{2i}(\psi - \psi^*)$ reelle Lösungen der Differentialgleichung (MAJORANA-FERMI-Felder).

Umgekehrt erhält man aus zwei antikommutierenden reellen FERMI-Feldern ψ_1 und ψ_2 ein komplexes FERMI-Feld zurück:

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2 \ .$$

Das reelle FERMI-Feld zerfällt wieder in seine chiralen Bestandteile

$$\psi_{\Re e\,,R} = P_+ \psi_{\Re e} = \frac{1}{2}(\psi_R + \psi_R^*) \qquad \text{etc.}$$

und liefert reelle chirale Felder.
Im Impulsraum ist die folgende γ-Konvention geeigneter:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\not{k} &= \omega\gamma^0 - k\gamma^1 = \begin{pmatrix} \omega & -k \\ k & -\omega \end{pmatrix} \\
u(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \begin{pmatrix} \omega \\ k \end{pmatrix}, \quad v(k) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \begin{pmatrix} k \\ \omega \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir die Entwicklung des Feldes

$$\begin{aligned}
\psi(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\omega} \left[b(k) \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \begin{pmatrix} \omega \\ k \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - kx)} + d(k)^\dagger \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \begin{pmatrix} k \\ \omega \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx)} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega}} \Bigg[\left(b(\omega) e^{-i\omega(t-x)} + d(\omega)^\dagger e^{i\omega(t-x)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\qquad + \left(b(-\omega) e^{-i\omega(t+x)} - d(-\omega)^\dagger e^{i\omega(t+x)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg] \ ,
\end{aligned}$$

denn für $\begin{matrix} k > 0 \\ k < 0 \end{matrix}$ ist $\begin{matrix} k = \omega \\ k = -\omega \end{matrix}$, und damit gilt $\omega t - kx = \begin{cases} \omega(t-x) \\ \omega(t+x) \end{cases}$.
Offenbar zerfällt $\psi(t,x)$ in zwei Anteile, die manifest nur von $x+t$ bzw. $x-t$

abhängen. Für die reellen Felder finden wir ähnlich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\psi(t,x)+\psi^*(t,x)) = \psi_{\mathfrak{Re}}(t,x) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega}}\Bigg[\left(\left(\frac{b+d}{2}\right)(\omega)e^{-i\omega(t-x)} + \left(\frac{b+d}{2}\right)^\dagger(\omega)e^{i\omega(t-x)}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\quad + \left(\left(\frac{b-d}{2}\right)(-\omega)e^{-i\omega(t+x)} + \left(\frac{b-d}{2}\right)^\dagger(-\omega)e^{i\omega(t+x)}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg] \\
&\frac{1}{2i}(\psi(t,x)-\psi^*(t,x)) = \psi_{\mathfrak{Im}}(t,x) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega}}\Bigg[\left(\left(\frac{b-d}{2i}\right)(\omega)e^{-i\omega(t-x)} + \left(\frac{b-d}{2i}\right)^\dagger(\omega)e^{i\omega(t-x)}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\quad + \left(\left(\frac{b+d}{2i}\right)(-\omega)e^{-i\omega(t+x)} + \left(\frac{b+d}{2i}\right)^\dagger(-\omega)e^{i\omega(t+x)}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg] ,
\end{aligned}$$

wobei offenbar

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\binom{1}{1} & = & \binom{1}{1} & = & P_+\binom{1}{1} \\
\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\binom{1}{-1} & = & \binom{1}{-1} & = & P_-\binom{1}{-1} .
\end{array}$$

Die folgende Umnormierung liegt nahe

$$B(k) := \begin{cases} \dfrac{b(k)}{2\pi\sqrt{k}} & \text{für } k>0 \quad \text{(Vernichter)} \\ \dfrac{d(-k)^\dagger}{2\pi\sqrt{-k}} & \text{für } k<0 \quad \text{(Erzeuger)} \end{cases}$$

$$D(k) := B(-k)^* = \begin{cases} \dfrac{d(k)}{2\pi\sqrt{k}} & \text{für } k>0 \quad \text{(Vernichter)} \\ \dfrac{b(-k)^\dagger}{2\pi\sqrt{-k}} & \text{für } k<0 \quad \text{(Erzeuger)} \end{cases}$$

mit der Antivertauschungsrelation $\{D(k),B(l)\} = \frac{1}{2\pi}\delta(k+l)$. Diese neuen Definitionen lassen uns jetzt schreiben:

$$\psi_R(u) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k B(k)e^{-iku} , \quad \psi_R^*(u) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k D(k)e^{-iku} .$$

Für die entsprechenden reellen Fermionen kommt man zu der gleichen Schreibweise durch die Definition

$$C(-k)^* = C(k) := \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{b+d}{2}\right)(k)}{2\pi\sqrt{k}} & \text{für } k>0 \quad \text{(Vernichter)} \\ \dfrac{\left(\frac{b+d}{2}\right)^\dagger(-k)}{2\pi\sqrt{-k}} & \text{für } k<0 \quad \text{(Erzeuger)} \end{cases}$$

mit der Antivertauschungsrelation $\{C(k), C^*(l)\} = \frac{1}{4\pi}\delta(k-l)$.

$$\psi_{\Re e\,,R}(u) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k C(k) e^{-iku}$$

Hieraus, sowie mit der Bedingung, daß die Vernichtungsoperatoren den Vakuumvektor annihilieren, ergeben sich sofort die Korrelationen der chiralen FERMI-Felder.

komplex:

$$\begin{aligned}
\langle\psi\psi\rangle &= 0 \\
\langle\psi(x)\psi^*(y)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\Delta(x-y) \\
&= \langle\psi^*(x)\psi(y)\rangle \\
\Delta(x) &:= \frac{-i}{x-i\varepsilon} = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}k e^{-ikx}
\end{aligned}$$

Für freie Felder gilt die Kontraktionsregel, daß eine N-Punkt-Korrelation die Summe aller möglichen Produkte von Zwei-Punkt-Funktionen (mit FERMI-Vorzeichen) ist. Z. B.:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1\psi_2\psi_3^*\psi_4^*\rangle &= \underbrace{\langle\psi_1\psi_2\rangle}_{=0}\underbrace{\langle\psi_3^*\psi_4^*\rangle}_{=0} - \langle\psi_1\psi_3^*\rangle\langle\psi_2\psi_4^*\rangle + \langle\psi_1\psi_4^*\rangle\langle\psi_2\psi_3^*\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}[\Delta_{14}\Delta_{23} - \Delta_{13}\Delta_{24}]\,.
\end{aligned}$$

Dies läßt sich auf den Hauptnenner bringen:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1\psi_2\psi_3^*\psi_4^*\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{12}\Delta_{34}} \\
\langle\psi_1\cdots\psi_n\psi_{n+1}^*\cdots\psi_{2n}^*\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i<j}(\Delta_{ij})^{-\alpha_i\alpha_j}\,,
\end{aligned}$$

wobei $\alpha = -1$ für ψ und $\alpha = 1$ für ψ^*. Die Äquivalenz der letzten Formel mit der Kontraktionsregel für alle n ist bekannt als CAUCHYs Determinantenformel.

reell:

$$\begin{aligned}
\langle\psi\psi\rangle &= \langle\frac{1}{2}(\psi+\psi^*)\frac{1}{2}(\psi+\psi^*)\rangle \\
&= \frac{1}{4}(\langle\psi\psi^*\rangle + \langle\psi^*\psi\rangle) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Delta(x-y) \\
\langle\psi\psi\psi\psi\rangle &= \frac{1}{(4\pi)^2}[\Delta_{12}\Delta_{34} - \Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23}]
\end{aligned}$$

2.2 Chirale Skalentransformationen

Die angegebenen Zwei-(und N-)Punkt-Funktionen für $m = 0$ sind offenbar homogene Funktionen der Koordinaten-Differenzen, d. h. außer der POINCARÉ-Kovarianz erfüllen sie auch Skaleninvarianz:

$$W^{(2)}(x) = \lambda^{2d} W^{(2)}(\lambda x) \qquad \text{mit} \quad d = \begin{cases} \frac{s-1}{2} & \text{masseloses Skalarfeld} \\ \frac{s}{2} & \text{masseloses FERMI-Feld} \\ \frac{1}{2} & \text{chirales FERMI-Feld} \end{cases},$$

d. h.

$$\mathcal{U}(\lambda)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\Omega := \lambda^{d_1+\cdots+d_n}\phi(\lambda x_1)\cdots\phi(\lambda x_n)\Omega$$

ist ein unitärer Operator mit

$$\mathcal{U}(\lambda)\phi(x)\mathcal{U}(\lambda)^* = \lambda^d\phi(\lambda x), \qquad \mathcal{U}(\lambda)\Omega = \Omega\ .$$

Die Skalentransformation erweitert die POINCARÉ-Gruppe: Sie kommutiert mit den LORENTZ-Transformationen (linear in x) und skaliert die Translationen:

$$\mathcal{U}(\lambda)P^\mu\mathcal{U}(\lambda)^* = \lambda P^\mu\ .$$

d heißt allgemein die Skalendimension eines Operators: dessen natürliche Einheit ist dann [Masse]^d oder [Energie]^d oder [Länge]$^{-d}$.
Wir bemerken auch, daß allgemein in $D = 1+1$ die LORENTZ-Boosts

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

auf den Lichtkegelkoordinaten wie zwei entgegengesetzte Skalierungen operieren:

$$\begin{aligned}
(\Lambda(t)x)^0 + (\Lambda(t)x)^1 &= e^t(x^0+x^1) \\
(\Lambda(t)x)^0 - (\Lambda(t)x)^1 &= e^{-t}(x^0-x^1)\ ,
\end{aligned}$$

während Skalentransformationen $\lambda(t) = e^t \mathbb{1}_2 \equiv \lambda \mathbb{1}_2$ natürlich wie folgt operieren

$$(\lambda x)^0 \pm (\lambda x)^1 = e^t (x^0 \pm x^1) \; .$$

Daher sind chirale Skalentransformationen $(x_+, x_-) \mapsto (e^t x_+, x_-)$ bzw. $(x_+, x_-) \mapsto (x_+, e^t x_-)$ durch simultane Boosts und zweidimensionale Skalentransformationen

$$\lambda_L(t) = \lambda(\frac{t}{2})\Lambda(\frac{t}{2}) \; , \qquad \lambda_R(t) = \lambda(\frac{t}{2})\Lambda(-\frac{t}{2})$$

darstellbar. Sind M und D die Generatoren von Λ und λ, so sind

$$D_\pm = \frac{1}{2}(M \pm D)$$

die Generatoren der chiralen Skalentransformationen λ_L und λ_R. Ein zweidimensionales konformes Feld besitzt daher zwei Skalendimensionen d_L und d_R, die das Transformationsverhalten

$$\mathcal{U}_L(\lambda)\phi(t+x, t-x)\mathcal{U}_L(\lambda)^* = \lambda^{d_L}\phi(\lambda(t+x), t-x)$$

(und entsprechend für $L \leftrightarrow R$) bestimmen. Da die zweidimensionalen Skalen- und LORENTZ-Transformationen durch

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_L(\lambda)\mathcal{U}_R(\lambda) & = & \mathcal{U}(\lambda) \\ \mathcal{U}_L(\lambda)\mathcal{U}_R(\lambda^{-1}) & = & \mathcal{U}(\Lambda) \end{array}$$

gegeben sind, sind $d_L + d_R = d$ die Skalendimension und $d_L - d_R = s$ der Spin gemäß dem Transformationsgesetz

$$\mathcal{U}(\Lambda)\phi(\mathbf{x})\mathcal{U}(\Lambda)^* \;\; = \;\; e^{ts}\phi(\Lambda \mathbf{x}) \; .$$

Durch die Skalendimensionen ist die Zweipunktfunktion bereits fixiert:

$$(\phi(\mathbf{x}_1)\Omega, \phi(\mathbf{x}_2)\Omega) = \frac{C}{[i((t_1+x_1)-(t_2+x_2))+\varepsilon]^{2d_L}[i((t_1-x_1)-(t_2-x_2))+\varepsilon]^{2d_R}} \; ,$$

denn wegen der chiralen Skalentransformation muß $W^{(2)}$ homogen in den Koordinaten sein, wegen ihrer Translationsinvarianz kann sie nur von der Differenz abhängen, und die ε-Vorschrift (Randwert einer in der Vorwärtsröhre analytischen Funktion!) berücksichtigt die Spektrumsbedingung. Hier und im folgenden ist die Distribution

$$(ix+\varepsilon)^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \mathrm{d}k e^{-ikx-\varepsilon k} k^{p-1} =: \Delta(x)^p$$

stets als Randwert $\varepsilon \searrow 0$ zu verstehen. Beide Skalendimensionen d_L, d_R müssen positiv sein, da sonst die Korrelationen nicht für große Abstände abfallen. Wegen der Hilbertraum-Positivität muß auch die Amplitude $C \geq 0$ sein; ist $C = 0$, so ist das Feld selbst trivial, denn nach dem REEH-SCHLIEDER-Theorem folgt $\phi(f)\Omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$.
Schließlich beobachten wir, daß für $x \neq 0$ gilt:

$$\Delta(x)^{2d} = e^{\pm 2\pi i d} \Delta(-x)^{2d} \left(\begin{array}{l} + \text{ für } x > 0 \\ - \text{ für } x < 0 \end{array} \right)$$

Ist aber $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ raumartig, so haben $(t_1 + x_1) - (t_2 + x_2)$ und $(t_1 - x_1) - (t_2 - x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Damit verlangt die Lokalität von ϕ, daß

$$e^{\pm 2\pi i d_L \mp 2\pi i d_R} = 1 \Leftrightarrow d_L - d_R \in \mathbb{Z}$$

ist. Für FERMI-Felder gilt entsprechend $d_L - d_R \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Nichtlokale Felder können beliebige nicht-negative Skalendimensionen haben. (Der Spin ist in 1+1 Dimensionen nicht quantisiert.) Für chirale Felder, die nur von einer Lichtkegel-Variable abhängen, ist offenbar $d_L = 0$ oder $d_R = 0$.

2.3 Innere Symmetrien

Die WIGHTMAN-Distributionen des komplexen DIRAC-Feldes erfüllen Ladungserhaltung (ψ trägt die Ladung -1, ψ^* die Ladung $+1$); N-Punkt-Funktionen von DIRAC-Feldern mit nicht verschwindender Gesamtladung verschwinden. Diese Symmetrie besitzt einen Erzeuger, den sog. Ladungsoperator Q:

$$\begin{array}{rclcrcl} Q\psi & = & \psi(Q-1)\,, & & Q\psi^* & = & \psi^*(Q+1)\,, \\ [Q,\psi] & = & -\psi\,, & & [Q,\psi^*] & = & +\psi^*\,, \\ e^{i\alpha Q}\psi e^{-i\alpha Q} & = & e^{-i\alpha}\psi\,, & & e^{i\alpha Q}\psi^* e^{-i\alpha Q} & = & e^{+i\alpha}\psi^*\,. \end{array}$$

Der Ladungsoperator ist ein Integral über eine Ladungsdichte j^0:

$$Q = \int \mathrm{d}x j^0(x)\,,$$

die die Null-Komponente eines erhaltenen Stromes ist

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,.$$

Der erhaltene Strom ist gegeben durch

$$\begin{array}{rrcll} & j^\mu & = & :(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi): & (\overline{\psi} := \psi^*\gamma^0) \\ \text{insbes.:} & j^0 & = & :(\psi^*\psi): & \end{array}$$

und

$$\partial_\mu j^\mu = \overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \overline{\psi}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}\,\psi = \overline{\psi}(-im\psi) + (im\overline{\psi})\psi = 0 \ .$$

In $D = 1 + 1$ führen wir den dualen Strom ein

$$j^{5\mu} := \varepsilon^{\mu\nu} j_\nu \qquad (\varepsilon^{01} = 1) \ ,$$

für den die Bezeichnung $j^{5\mu}$ üblich ist, da $\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu = \gamma^5\gamma^\mu$. Es ist: $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$, $\gamma_1 = -\gamma^1 = \gamma^0\gamma^1\gamma^0$ und $-\gamma_0 = -\gamma^0 = \gamma^0\gamma^1\gamma^1$.
Die Divergenz des dualen Stroms ergibt sich aus der DIRAC-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^{5\mu} &= -\partial_0 j^1 - \partial_1 j^0 = -\partial_0(\psi^*\gamma^0\gamma^1\psi) - \partial_1(\psi^*\psi) \\
&= -(\psi^*\overleftarrow{\partial}_0\gamma^0)\gamma^1\psi + \psi^*\gamma^1(\overrightarrow{\partial}_0\gamma^0\psi) - \partial_1(\psi^*\psi) \\
&= \psi^*(\overleftarrow{\partial}_1\gamma^1 - im)\gamma^1\psi + \psi^*\gamma^1(-\overrightarrow{\partial}_1\gamma^1 - im)\psi - \partial_1(\psi^*\psi) \\
&= -2im\overline{\psi}\gamma^5\psi \ .
\end{aligned}$$

Im masselosen Fall ist offenbar auch dieser Strom erhalten, und die Ladung

$$Q^5 = \int \mathrm{d}x j^{50} = \int \mathrm{d}x j_1 = -\int \mathrm{d}x j^1$$

erzeugt die Symmetrietransformationen

$$\begin{aligned}
\left[Q^5, \psi\right] &= +\gamma^5\psi \\
\left[Q^5, \psi^*\right] &= -\gamma^5\psi^*
\end{aligned}$$

(Rechtsläufer sind entgegengesetzt zu Linksläufern geladen), und die Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[Q + Q^5, \psi\right] &= -P_-\psi \\
\frac{1}{2}\left[Q - Q^5, \psi\right] &= -P_+\psi
\end{aligned}$$

transformieren nur die Komponenten ψ_R und ψ_L:

$$\begin{aligned}
Q_R &= \tfrac{1}{2}(Q - Q^5) \ , \qquad [Q_R, \psi_R] &&= -\psi_R \ , \\
Q_L &= \tfrac{1}{2}(Q + Q^5) \ , \qquad [Q_R, \psi_L] &&= 0 \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

In der Tat entkoppeln die rechts- und linksläufigen Freiheitsgrade schon auf dem Niveau der Ströme: Aus $\partial_\mu j^\mu = 0 = \partial_\mu j^{5\mu}$ folgt

$$\begin{aligned}
(\partial_0 + \partial_1)(j^0 + j^1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(j^0 + j^1) = j_R(t - x) \\
(\partial_0 - \partial_1)(j^0 - j^1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(j^0 - j^1) = j_L(t + x) \ ,
\end{aligned}$$

und sogar auf dem Niveau der FERMI-Felder:

$$\frac{1}{2}(j^0+j^1) = :\overline{\psi}\left(\frac{\gamma^0+\gamma^1}{2}\right)\psi: = :\psi^*\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi: = :\psi^* P_+\psi: = :\psi_R^*\psi_R: ,$$

also

$$\frac{1}{2}(j^0(t,x))+j^1(t,x)) = j_R(t-x) = :\psi_R^*\psi_R:(t-x)$$

und

$$j_L(t+x) = :\psi_L^*\psi_L:(t+x) .$$

Der hier beobachteten Verdoppelung der Symmetrie liegt ein allgemeiner Sachverhalt zugrunde [1]:

Satz 2.1 *Es sei j^μ ein erhaltener Strom in einer skalen-invarianten Theorie in $D = 1+1$ Dimensionen, und die Ladung $Q = \int j^0 \mathrm{d}x^1 \neq 0$ erzeuge eine Symmetrie, die mit den Skalentransformationen kommutiert. Dann ist auch $j^{5\mu} := \varepsilon^{\mu\nu} j_\nu$ erhalten und*

$$j^\mu \quad = \quad (j^0, j^1) = (j_R + j_L, j_R - j_L) ,$$

wobei

$$j_R = j_R(t-x) \quad \text{und} \quad j_L = j_L(t+x)$$

chirale Ströme sind.

Beweis: Skalen-Kovarianz bedeutet ein Transformationsgesetz

$$\mathcal{U}(\lambda) j^\mu(x) \mathcal{U}(\lambda)^* = \lambda^d j^\mu(\lambda x)$$

mit einer Skalendimension $d \geq 0$ und einem invarianten Vakuumvektor:

$$\mathcal{U}(\lambda)\Omega = \Omega .$$

Die Skaleninvarianz von Q (d. h. $\mathcal{U}(\lambda) Q \mathcal{U}(\lambda)^* = Q$) impliziert $d = 1$ (Substitution $x^1 \mapsto \lambda x^1$), und die Invarianz von Ω impliziert, daß die Zwei-Punkt-Funktion ein LORENTZinvarianter Ausdruck in der Differenzvariablen ist, der homogen vom Grade -2 ist:

$$\begin{aligned} W^{(2)\mu\nu}(x-y) &= \langle \Omega, j^\mu(x) j^\nu(y)\Omega\rangle = \langle \Omega, \mathcal{U}(\lambda) j^\mu j^\nu \mathcal{U}(\lambda)^*\Omega\rangle \\ &= \lambda^2 \langle \Omega, j^\mu(\lambda x) j^\nu(\lambda y)\Omega\rangle = \lambda^2 W^{(2)\mu\nu}(\lambda(x-y)) , \end{aligned}$$

also

$$W^{(2)\mu\nu}(x) = A\frac{x^\mu x^\nu}{(x^2)^2} + B\frac{g^{\mu\nu}}{x^2} \qquad (\tfrac{1}{(x^2)^\nu} \text{ als Randwerte}) .$$

Die Divergenzfreiheit $\partial_\nu W^{(2)\mu\nu} = 0$ impliziert $B = -\frac{1}{2}A$, und dann rechnet man sofort nach, daß auch

$$\partial_\mu \varepsilon^{\mu\mu'} W^{(2)}{}_{\mu'}{}^{\nu} = 0 \ ,$$

also

$$\langle \Omega, \partial_\mu j^{5\mu} \partial_\nu j^{5\nu} \Omega \rangle = 0 \ .$$

Aber $\partial_\mu j^{5\mu}$ ist ein WIGHTMAN-Feld. Da seine Zwei-Punkt-Funktion verschwindet, ist das Feld exakt Null [REEH-SCHLIEDER-Theorem]. Der Rest folgt exakt der Diskussion bei den masselosen FERMI-Felder, d. h.

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\mu j^{5\mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad j^\mu = (j_R + j_L, j_R - j_L) \ .$$

2.4 Der Energie-Impuls-Tensor

Zu den freien Feldern assoziiert ist ein Tensorfeld $T_{\mu\nu}(x)$, das die physikalische Bedeutung von Energie- und Impuls(strom-)dichten hat. Für das FERMI-Feld in 1+1 Dimensionen ist

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \tfrac{i}{2} :\overline{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial^\nu} \psi: \\ &= \tfrac{i}{2} \int \tfrac{\mathrm{d}^s k_1}{(2\pi)^s} \tfrac{\mathrm{d}^s k_2}{(2\pi)^s} \tfrac{1}{\omega_1} \tfrac{1}{\omega_2} \\ &\quad \times b^\dagger_\alpha(k_1) b_\beta(k_2) \overline{u^{(\alpha)}}(k_1) \gamma^\mu (-i)(k_1 + k_2)^\nu u^{(\beta)}(k_2) e^{i(k_1 - k_2)x} \\ &\quad + \text{weitere Terme } (b^\dagger d^\dagger, db, dd^\dagger) \ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das Integral

$$\begin{aligned} P^\nu = \int \mathrm{d}^s x T^{0\nu}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^s k}{(2\pi)^s} \frac{1}{\omega^2} b^\dagger_\alpha(k) b_\beta(k) \underbrace{\overline{u^{(\alpha)}}(k) \gamma^0 k^\nu u^{(\beta)}(k)}_{k^0 k^\nu \delta_{\alpha\beta}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^s k}{(2\pi)^s} \frac{1}{\omega} k^\nu \left[b^\dagger_\alpha(k) b_\alpha(k) + d^\dagger_\alpha(k) d_\alpha(k) \right] \\ \Rightarrow P^\nu b^\dagger_\alpha(k) &= b^\dagger_\alpha(k)(P^\nu + k^\nu) \end{aligned}$$

mißt den Impuls, insbesondere

$$\begin{aligned} e^{iPa} b(k) e^{-ikx} e^{-iPa} &= b(k) e^{i(P-k)a} e^{-ikx} \\ &= b(k) e^{-ik(x+a)} e^{iPa} \ . \end{aligned}$$

Es gilt, wobei das Symbol $\doteq$ signalisiert, daß die Identität bei Anwendung auf Spinoren u gilt ($\not{k} \doteq m \ :\Leftrightarrow \ \forall u : \not{k} u = m u$):

1. Der Energie-Impuls-Tensor ist *erhalten*, da $(\not{k}_1 - \not{k}_2) \doteq m - m$ bzw. $(k_1 + k_2)^\nu (k_1 - k_2)_\nu = k_1^2 - k_2^2 = m^2 - m^2$.

2. Er ist *symmetrisch* in $D = 1 + 1$, da $2k^\nu = \{\not{k}, \gamma^\nu\}$ und $\not{k} \doteq m$.

3. Er ist *spurfrei* für $m = 0$, da $\not{k}_1 + \not{k}_2 \doteq m + m$.

4. Er hat Skalendimension 2 für $D = 1 + 1, m = 0$.

(Wie wir in Satz 2.2 (LÜSCHER-MACK-Theorem) sehen werden, sind diese Eigenschaften modellunabhängig.) $T^{\mu\nu}$ hat also nur zwei unabhängige Komponenten

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} \\ T^{01} & T^{00} \end{pmatrix} .$$

Zusammen mit der Energie-Erhaltung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{01} &= 0 \\ \partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{00} &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus wiederum

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \partial_1)(T^{00} + T^{01}) &= 0 \\ (\partial_0 - \partial_1)(T^{00} - T^{01}) &= 0 , \end{aligned}$$

also haben wir chirale Felder

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(T^{00} + T^{01}) &= T_R(t - x) \\ \frac{1}{2}(T^{00} - T^{01}) &= T_L(t + x) . \end{aligned}$$

In der Tat

$$\begin{aligned} T_R = \frac{1}{2}(T^{00} + T^{01}) &= \frac{i}{4} : \overline{\psi}\gamma^0 (\overleftrightarrow{\partial^0} + \overleftrightarrow{\partial^1})\psi : \\ &= \frac{i}{4} : \psi^* (\overleftrightarrow{\partial_0 - \partial_1})\psi : \\ &= \frac{i}{2} : \psi_R^* \overleftrightarrow{\partial} \psi_R : \qquad \text{da} \quad (\partial_0 - \partial_1)\psi_L = 0 \\ T_L = \frac{1}{2}(T^{00} - T^{01}) &= \frac{i}{2} : \psi_L^* \overleftrightarrow{\partial} \psi_L : \ . \end{aligned}$$

Damit entkoppeln auch die rechts- und linksläufigen Energie-Impuls-Dichten. Zerlegen wir $\psi_R = \psi_1 + i\psi_2$ in zwei reelle FERMI-Felder mit $\{\psi_1, \psi_2\} = 0$, so wird

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{i}{2}(: \psi_1 \overleftrightarrow{\partial} \psi_1 : + : \psi_2 \overleftrightarrow{\partial} \psi_2 :) = T_1 + T_2 \\ \text{mit} \quad T_j &= i : \psi_j \partial \psi_j : \quad , \qquad [T_1, T_2] = 0 , \end{aligned}$$

zu einer Summe zweier Energie-Impuls-Tensoren eines reellen Feldes.
Die folgenden Relationen

$$\begin{aligned}[T(x),\psi(y)] &= \frac{i}{2}\left[\psi(x)\delta'(x-y)-\psi'(x)\delta(x-y)\right] \\ &= i\left[-\psi'(y)\delta(x-y)+\frac{1}{2}\psi(y)\delta'(x-y)\right]\end{aligned}$$

gelten (wg. $\{\psi(x),\psi^*(y)\}=\delta(x-y)$ bzw. $\{\psi_j(x),\psi_j(y)\}=\frac{1}{2}\delta(x-y)$) sowohl im reellen als auch im komplexen Fall. Wir lesen davon ab, daß nicht nur $[P,\psi]=-i\psi'$, sondern auch

$$\begin{aligned}[D,\psi(x)] &= -i\left[x\psi'(x)+\frac{1}{2}\psi(x)\right] \\ \text{und}\quad [K,\psi(x)] &= -i\left[x^2\psi'(x)+x\psi(x)\right]\ ,\end{aligned}$$

wobei $P=\int T(x)\mathrm{d}x$, $D=\int xT(x)\mathrm{d}x$ und $K=\int x^2T(x)\mathrm{d}x$ den Vakuumvektor invariant lassen:

$$\begin{aligned}\int x^r\mathrm{d}x\int y^r\mathrm{d}y\langle T(x)T(y)\rangle &\sim \int x^r\mathrm{d}x y^r\mathrm{d}y\left(\frac{1}{x-y-i\varepsilon}\right)^4 \\ &\sim \int x^r\mathrm{d}x(\partial_y^3 y^r)\Big|_{y=x-i\varepsilon}=0 \qquad \text{für}\quad r=0,1,2\ .\end{aligned}$$

Damit sind (neben P) auch D und K infinitesimale Generatoren von Symmetrien e^{itD} und e^{itK}, und durch Exponentierung der infinitesimalen Transformationen findet man:

$$\begin{aligned}e^{itD}\psi(x)e^{-itD} &= e^{\frac{1}{2}t}\psi(e^t x) \qquad (e^t=\lambda) \\ \text{sowie}\quad e^{ibK}\psi(x)e^{-ibK} &= \frac{1}{1-bx}\psi\left(\frac{x}{1-bx}\right)\ .\end{aligned}$$

Offenbar ist die erste Transformation die Skalentransformation mit Dimension $d=\frac{1}{2}$. Die zweite Transformation ist (zunächst) nur wohldefiniert für $bx\in(-\infty,1)$ (insbesondere für $b\le\frac{1}{|x|}$). Die Gruppe der Transformationen, die hieraus erzeugt wird, ist $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(g)\psi(x)\mathcal{U}(g)^* &= \frac{1}{cx+d}\psi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right), \qquad g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \quad \det g=1 \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x^g}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}}\psi(x^g) \qquad \text{mit}\quad x^g:=\frac{ax+b}{cx+d}\ .\end{aligned}$$

Beweis-Skizze:

1. Die Translationen sind von der Form $x \mapsto x^g$ mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^g = x + a$$

Die Dilatationen sind von der Form $x \mapsto x^g$ mit

$$g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \Rightarrow x^g = \lambda x$$

Die speziellen konformen Transformationen sind von der Form $x \mapsto x^g$ mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^g = \frac{x}{1 - bx}$$

2. Der Differentialquotient ist

$$\frac{\mathrm{d}x^g}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+d)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

3. Das Gruppengesetz ist durch die Matrixmultiplikation gegeben:

$$\begin{aligned} (x^{g_1})^{g_2} &= \frac{a_2 \dfrac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + d_2} \\ &= \frac{a_2(a_1 x + b_1) + b_2(c_1 c + d_1)}{c_2(a_1 x + b_1) + d_2(c_1 x + d_1)} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)x + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)x + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} = x^{g_2 \cdot g_1} \end{aligned}$$

mit

$$g_2 \cdot g_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

und die Differentialquotienten sind multiplikativ:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(g_2)\mathcal{U}(g_1)\psi(x)\mathcal{U}(g_1)^*\mathcal{U}(g_2)^* &= \mathcal{U}(g_2)\left(\frac{\mathrm{d}x^{g_1}}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(x^{g_1})\mathcal{U}(g_2)^* \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x^{g_1}}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(\mathrm{d}x^{g_1})^{g_2}}{\mathrm{d}x^{g_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \psi((x^{g_1})^{g_2}) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x^{g_2 \cdot g_1}}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(x^{g_2 \cdot g_1}) \end{aligned}$$

4. Offenbar operieren g und αg, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash 0$ identisch. Daher können wir die Determinante von g auf 1 normieren und g mit $-g$ identifizieren. Die Symmetriegruppe ist also $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, bekannt als „MÖBIUS-Gruppe“, und wird von 3 Generatoren erzeugt. Diese sind (z.B.) die Generatoren der Translationen, Skalentransformationen und speziellen konformen Translationen p, d und k

$$i\,p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\,d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i\,k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mit

$$[p,d] = i\,p, \quad [p,k] = 2i\,d, \quad [d,k] = i\,k.$$

Ihre Darsteller auf dem HILBERT-Raum nennen wir P, D und K.

Die MÖBIUS-Gruppe enthält auch eine $SO(2)$-Untergruppe

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\tau}{2} & \sin\frac{\tau}{2} \\ -\sin\frac{\tau}{2} & \cos\frac{\tau}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit dem Generator } il_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ l_0 = \frac{p+k}{2}$$

sowie die Inversion

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto -\frac{1}{x}\,.$$

Wir wollen uns überzeugen, daß die WIGHTMAN-Funktionen der chiralen FERMI-Felder in der Tat konform invariant sind: Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x^g - y^g &= \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} \\ &= \frac{(ax+b)(cy+d) - (ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)} \\ &= \frac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{cx+d}\frac{1}{cy+d}W^{(2)}(x^g,y^g) &= W^{(2)}(x,y) \\ &= \langle \mathcal{U}(g)\psi(x)\mathcal{U}(g)^*\Omega, \mathcal{U}(g)\psi(y)\mathcal{U}(g)^*\Omega\rangle \end{aligned}$$

solange $(cx+d)(cy+d) > 0$, also zumindest für hinreichend kleine Transformationen. Für konforme Transformationen, die einen Punkt x über ∞ hinaus transformieren $(1-bx<0)$, ist im Transformationsgesetz der singuläre Vorfaktor $\left(\frac{1}{1-bx}\right)^{2h}$ genauer zu spezifizieren (s. Kap. 4.7).

Auch für andere Testfunktionen als die für die Generatoren P, D und K kann die Vertauschungsrelation mit dem FERMI-Feld als infinitesimale Koordinaten-Transformation interpretiert werden: für infinitesimale Testfunktionen ε kann sie nämlich in der Form

$$i[T(\varepsilon), \psi(x)] = \left(\frac{\mathrm{d}(x + \varepsilon(x))}{\mathrm{d}x} \right)^{\frac{1}{2}} \psi(x + \varepsilon(x))$$

geschrieben werden. Der Exponent $\frac{1}{2}$ ist die Skalendimension des FERMI-Feldes, d.h., das Feld transformiert sich wie eine verallgemeinerte Dichte vom Gewicht $h = \frac{1}{2}$ unter der (infinitesimalen) Koordinatentransformation $x \mapsto x + \varepsilon(x)$. Die Koordinatentransformationen sind aber keine Symmetrien der Theorie, da, wie wir gleich sehen werden, außer den Generatoren der MÖBIUS-Transformationen alle anderen Generatoren $T(\varepsilon)$ den Vakuum-Vektor nicht annihilieren.

Wir haben gesehen, daß der Energie-Impuls-Tensor des reellen oder komplexen FERMI-Feldes selbst in zwei chirale Komponenten zerfällt und daß diese als Dichten der konformen Symmetrie-Generatoren P, D und K interpretiert werden können. Auch dieser Sachverhalt ist allgemein, wie im Theorem von LÜSCHER und MACK 1976 (oder auch schon früher von FERRARA und von SCHROER) bewiesen wurde; das Theorem von LÜSCHER und MACK ist in seiner ursprünglichen Form nie veröffentlicht worden, findet sich aber zum Beispiel in Furlan et al. [8].

Satz 2.2 (LÜSCHER-MACK-Theorem) *Es sei $T^{\mu\nu}$ ein symmetrisches erhaltenes Tensorfeld in einer skaleninvarianten Theorie in $D = 1+1$ Dimensionen, so daß $P^\mu = \int \mathrm{d}x^1 T^{\mu 0}$.*
Dann folgt:

1. *Die Skalendimension ist $d = 2$.*

2. *$T^{\mu\nu}$ ist spurfrei.*

3. $$\begin{aligned} T^{00} + T^{01} &= 2T_R(t - x) \\ T^{00} - T^{01} &= 2T_L(t + x) \end{aligned}$$

   sind chirale Felder der Skalendimension $d_R = 2$ bzw. $d_L = 2$.

4. *Die chiralen Felder*

   $$T(\cdot) = \begin{cases} T_R(t - x) \\ T_L(t + x) \end{cases}$$

   erfüllen die Vertauschungrelation $[T_R, T_L] = 0$ und

   $$[T(x), T(y)] = i \left(-T'(y)\delta(x - y) + 2T(y)\delta'(x - y) - \frac{c}{24\pi}\delta'''(x - y) \right)$$

   mit einer Konstanten $c \geq 0$.

Beweis:

1. Da P^μ Skalendimension 1 hat, hat die zugehörige Dichte $d = 2$. Wegen LORENTZ-Kovarianz haben alle Komponenten von T dieselbe Dimension.

2. Die allgemeinste Zwei-Punkt-Funktion eines symmetrischen Tensors mit $d = 2$ ist

$$\begin{aligned} W^{(2)}_{\mu\nu,\rho\sigma}(x) &= (T_{\mu\nu}(x_1)\Omega, T_{\rho\sigma}(x_2)\Omega) = \sum A_i F^i_{\mu\nu,\rho\sigma} \\ &= A_1 \frac{g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}}{(x^2)^2} + A_2 \frac{g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}}{(x^2)^2} \\ &\quad + A_3 \frac{g_{\mu\nu}x_\rho x_\sigma + g_{\rho\sigma}x_\mu x_\nu}{(x^2)^3} + A_4 \frac{x_\mu x_\nu x_\rho x_\sigma}{(x^2)^4} \\ &\quad + A_5 F^5_{\mu\nu,\rho\sigma} + A_6 F^6_{\mu\nu,\rho\sigma} \end{aligned}$$

   (N. B.: Die exakte Form der beiden paritätsverletzenden Tensoren F^5 und F^6, die mit dem antisymmetrische Symbol $\varepsilon^{\mu\rho}$ gebildet werden können, kann in [8] nachgeschlagen werden. Ein weiterer paritätserhaltender Term der Art $(g_{\mu\rho}x_\nu x_\rho + \ldots)/(x^2)^3$ taucht nicht auf, da er in $D = 1 + 1$ durch die vorhandenen ausgedrückt werden kann:
   $\frac{g_{\mu\rho}x_\nu x_\sigma + \text{drei Permutationen}}{(x^2)^3} = F^2_{\mu\nu,\rho\sigma} - 2 \cdot F^1_{\mu\nu,\rho\sigma} + 2 \cdot F^3_{\mu\nu,\rho\sigma}$.)
   Die Bedingung $\partial^\mu W_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0$ impliziert

$$\begin{aligned} A_1 &= 3\alpha\,, & A_2 &= -\alpha\,, & A_3 &= -4\alpha\,, \\ A_4 &= 8\alpha\,, & A_5 &= \beta\,, & A_6 &= -2\beta\,. \end{aligned}$$

   Setzt man diese relativen Koeffizienten ein und kontrahiert die beiden ersten Indices, so findet man

$$W^\mu{}_{\mu,\rho\sigma} = 0 \Rightarrow W^\mu{}_{\mu,}{}^\rho{}_\rho = 0$$

   also $T_\mu{}^\mu = 0$ (REEH-SCHLIEDER-Theorem, Satz 1.1).

3. Die Behauptung folgt aus den Eigenschaften

   - erhalten
   - symmetrisch
   - spurfrei

   mit denselben Argumenten wie beim freien FERMI-Feld (s.o).

4. $[T_R(t-x), T_L(s+y)] = 0$, da $T_R(t-x) = T_R((t+a)-(x+a))$ und $(t+a, x+a)$ raumartig zu (s, y) ist für geeignetes a.
   Wir betrachten nun den Kommutator

$$F(\xi, y) := [T(x), T(y)], \qquad \xi = x - y\,.$$

F ist eine *operatorwertige* Distribution mit $F(\xi,\cdot)=0$ für $\xi\neq 0$, d. h. F ist bei $\xi=0$ lokalisiert. Wir wollen zeigen, daß

$$F(\xi,y)=\sum_{k=0}^{3}\delta^{(k)}(\xi)\phi_k(y)$$

mit *numerischen* δ-Funktionen und lokalen Feldern $\phi_k(y)$. Dazu definieren wir zunächst operatorwertige Distributionen

$$\phi_k(y):=\frac{(-1)^k}{k!}\int \mathrm{d}\xi\,\xi^k f(\xi)F(\xi,y)$$

Diese sind unabhängig von f, solange $f=1$ in einer Umgebung der Null. Für $y_1\neq y_2$ sind $\phi_{k_1}(y_1)$ und $\phi_{k_2}(y_2)$ Integrale über $[T(y_1+\xi_1),T(y_1)]$ und $[T(y_2+\xi_2),T(y_2)]$. Wir wählen f so, daß $f(\xi)=0$ für $|\xi|\geq|y_1-y_2|$. Dann hat keiner der Operatoren in ϕ_1 einen Überlapp mit den Operatoren in ϕ_2, also $[\phi_{k_1}(y_1),\phi_{k_2}(y_2)]=0$. Damit sind $\phi_k(y)$ selbst lokale Distributionen. Da F Skalendimension $2+2=4$ hat, haben ϕ_k Dimension $d=4-1-k=3-k$. Da die Skalendimension eines lokalen Feldes ≥ 0 sein muß, können nur ϕ_k mit $k\leq 3$ beitragen.

Es bleibt zu zeigen, daß $F(\xi,y)$ keine weiteren Beiträge als die ϕ_k hat: Für jedes Paar von Vektoren ist $\langle\psi|F(\xi,y)|\chi\rangle$ eine numerische Distribution mit Träger bei $\xi=0$, also eine Summe von Ableitungen der δ-Funktion: $\langle\psi,F(\xi,y)\chi\rangle=\sum\delta^{(k)}(\xi)M^k_{\psi,\chi}(y)$. Integration mit ξ^k liefert $\langle\psi,\phi_k(y)\chi\rangle=M^k_{\psi,\chi}(y)$ und $M^k\equiv 0$ für $k>3$. Dann gilt aber die Entwicklung

$$\begin{aligned}\langle\psi,F(\xi,y)\chi\rangle &= \sum\delta^{(k)}(\xi)\langle\psi,\phi_k(y)\chi\rangle\\ &= \langle\psi,(\sum\delta^{(k)}(\xi)\phi_k(y))\chi\rangle \qquad \forall\,\psi,\chi\end{aligned}$$

für alle Matrixelemente. Damit ist die behauptete Entwicklung von F als operatorwertige Distribution bewiesen.

Die vier Felder $\phi_0,\ldots,\phi_3$ sind zu bestimmen. Die Antisymmetrie des Kommutators

$$[T(x),T(y)]=\sum\delta^{(k)}(x-y)\phi_k(y)$$

sowie die Identität

$$\delta^{(l)}(x-y)\phi_l(x)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\delta^{(k)}(x-y)\phi_l^{(l-k)}(y)$$

ergeben durch Koeffizientenvergleich bzgl. $\delta^{(k)}$:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= -(\phi_0+\phi_1'+\phi_2''+\phi_3''')\,,\\ \phi_1 &= +(\phi_1+2\phi_2'+3\phi_3'')\,,\\ \phi_2 &= -(\phi_2+3\phi_3')\,,\\ \phi_3 &= +(\phi_3)\,.\end{aligned}$$

ϕ_3 hat Skalendimension 0, ist also ein Vielfaches der $\mathbb{1}$: $\phi_3 = \frac{c}{24\pi i}\mathbb{1}$, also $\phi_3' = 0$, also $\phi_2 = 0$ und $\phi_0 = -\frac{1}{2}\phi_1'$:

$$[T(x), T(y)] = -\frac{1}{2}\phi_1'(y)\delta(x-y) + \phi_1(y)\delta'(x-y) + \frac{c}{24\pi i}\delta'''(x-y)$$

Die Forderung, daß $\int T(x)\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} P$ mit $[P, T(y)] \stackrel{!}{=} -iT'(y)$, ergibt schließlich $-\frac{1}{2}\phi_1' = -iT'$, $\phi_1 = 2iT(y) + A$.

A muß ein konstantes und lokales Feld sein mit $d = 2$; die ersten beiden Eigenschaften implizieren $A = a \cdot \mathbb{1}$, die letzte dann $a = 0$.

□

Die Konstante c ist unbestimmt. Sie hängt zusammen mit der Amplitude der Zwei-Punkt-Funktion: Sei

$$(\Omega, T(x)T(y)\Omega) = A \cdot \Delta(x-y)^4 \qquad (A \geq 0)\ .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{c}{24\pi i}\delta'''(x-y) &= (\Omega, [T(x), T(y)]\,\Omega) = A(\Delta(x-y)^4 - \Delta(y-x)^4) \\
&= \frac{A}{\Gamma(4)}\int_0^\infty \mathrm{d}k k^3 \left[e^{-ik(x-y)} - e^{-ik(y-x)}\right] \\
&= \frac{A}{3!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k (i\partial_x)^3 e^{-ik(x-y)} = \frac{A}{6i}2\pi\delta'''(x-y)
\end{aligned}$$

also $A = \frac{c}{8\pi^2}$. Insbesondere $c \geq 0$. (Für $c = 0$ liegt also wegen des Reeh-Schlieder-Theorems die triviale Theorie mit $T = 0$ vor.)

Die Lüscher-Mack-Vertauschungsrelationen in der Form

$$i[T(f), T(g)] = T(f'g - g'f) - \frac{c}{24\pi}(f'''g - g'''f)$$

können als zentrale Erweiterung der Lie-Algebra der Diffeomorphismen (Koordinatentransformationen) gelesen werden. Für $c > 0$ ist aber die Norm eines Vektors $T(f)\Omega$ immer dann von Null verschieden, wenn f kein Polynom höchstens zweiter Ordnung in x ist: daher ist die Symmetrie unter Koordinatentransformationen nur für die Möbius-Gruppe ungebrochen. Aus diesem Grunde wird der Parameter c auch als Anomalie bezeichnet.

Für reelle und komplexe Fermi-Felder:

$$\begin{aligned}
\langle\Omega, \psi(x)\psi(y)\Omega\rangle &= \frac{1}{4\pi}\Delta(x-y) \qquad \text{(reell)} \\
\langle\Omega, \psi^*(x)\psi(y)\Omega\rangle &= \frac{1}{2\pi}\Delta(x-y) \qquad \text{(komplex)}
\end{aligned}$$

können wir dann c mit Hilfe von WICK-Kontraktionen unter Beachtung der FERMI-Statistik berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle\Omega, TT\Omega\rangle &= \langle\Omega, (i:\psi\partial\psi:)(i:\psi\partial\psi:)\Omega\rangle \\
&= i^2(\langle\underbrace{\psi\partial\psi}\,\underbrace{\psi\partial\psi}\rangle - \langle\underbrace{\psi\partial\psi}\,\underbrace{\psi\partial\psi}\rangle) \\
&= -\left(\partial_x\frac{\Delta}{4\pi}\right)\left(\partial_y\frac{\Delta}{4\pi}\right) + \left(\partial_x\partial_y\frac{\Delta}{4\pi}\right)\frac{\Delta}{4\pi} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\left[(\Delta')^2 - \Delta\Delta''\right] = \frac{1}{16\pi^2}\left[(-i\Delta^2)^2 - \Delta(-2\Delta^3)\right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\Delta^4, \qquad \text{also} \quad c_{\text{reell}} = \frac{1}{2} \qquad \text{(reell)}
\end{aligned}$$

und ähnlich

$$= \cdots = \frac{1}{8\pi^2}\Delta^4, \qquad \text{also} \quad c_{\text{komplex}} = 1 \qquad \text{(komplex)}\,.$$

N.B.

$$\begin{aligned}
T_{\text{komplex}} = T_1 + T_2 \rightarrow \langle T_{\text{komplex}} T_{\text{komplex}}\rangle &= \langle T_1 T_1\rangle + \langle T_2 T_2\rangle \\
\Rightarrow c_{\text{komplex}} = c_{\text{reell}} + c_{\text{reell}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Die Konforme Gruppe

3.1 $D > 1+1$ Dimensionen

Die Gruppe der konformen Transformationen umfaßt definitionsgemäß alle winkeltreuen Koordinatentransformationen

$$x^\mu \mapsto y^\mu(x) \qquad \text{, so daß} \quad \mathrm{d}y_\mu \mathrm{d}y^\mu = \omega(x)^2 \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

Diese Gruppe umfaßt die Translationen und LORENTZ-Transformationen mit $\omega(x) = 1$, sowie die Skalentransformationen $y = \lambda x$ mit $\omega(x) = \lambda$. Darüberhinaus enthält sie die (singulären) speziellen Transformationen

$$y^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2(b \cdot x) + b^2 x^2}$$

mit $\omega(x) = (1-2(b\cdot x)+b^2x^2)^{-1}$. Die letzteren Transformationen können endliche Punkte in $\mathbb{R}^{s+1}$ nach ∞ abbilden, und sie können raumartig getrennte Punktpaare auf zeitartig getrennte Punktpaare abbilden. Hier bahnt sich ein Konflikt in der Quantenfeldtheorie an: Wenn die Konforme Gruppe unitär implementiert ist, so muß sie kompakt lokalisierte Feldoperatoren in nicht-kompakt lokalisierte Operatoren überführen. Schlimmer noch: es scheint, daß raumartige Kommutativität auch zeitartige Kommutativität impliziert und damit viele interessante Situationen ausschließt. (Kausalitäts-Paradoxon).

Wir werden sehen, daß dies ein voreiliger Schluß ist: Das konforme Transformationsgesetz läßt sich so interpretieren, daß das Kausalitätsparadoxon nicht auftritt. Zu diesem Zweck geht man von der euklidischen Theorie aus, die, wie wir wissen, durch analytische Fortsetzung zu imaginären Zeiten mit der MINKOWSKI-Theorie verknüpft ist. In der euklidischen Theorie tritt das Kausalitätsparadoxon nicht auf, weil es überhaupt keine Unterscheidung zwischen raum- und zeitartigen Abständen gibt. Die MINKOWSKI-Situation läßt sich dann aufklären, wenn man *von der euklidischen Theorie herkommend* die analytische Fortsetzung studiert.

Zunächst vermerken wir, daß – wenigstens in der Umgebung der Gruppen-Eins – die Konforme Gruppe in D Dimensionen im MINKOWSKI-Fall die Form $SO(D,2)$ (mit der Untergruppe $SO(D-1,1)$) bzw. im euklidischen Fall die Form $SO(D+1,1)$ (mit der Unterrgruppe $SO(D)$) hat. Dies wird offenbar, wenn man eine Einbettung der Raumzeit $\mathbb{R}^D$ in den $\mathbb{R}^{D+2}$ mit $D+2 = s+3$ Parametern vornimmt: Im $\mathbb{R}^{D+2}$ führen wir die Metrik

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & & \\ & -1 & \\ & & +1 \end{pmatrix}$$

ein und betrachten zunächst die $(D+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$X_{D+1} = \left\{ \xi = (\mathbf{y}, s, r) \in \mathbb{R}^{D+2} : \xi^2 = 0, r > 0 \right\},$$

d. h. den Mantel eines Vorwärts-Lichtkegels. Die konforme Raumzeit ist nun die Mannigfaltigkeit der Strahlen $X_D = X_{D+1}/\mathbb{R}_+$, d. h. wir identifizieren $\xi \in X_{D+1}$ mit $\lambda\xi$; beispielsweise können wir $r = 1$ fixieren und erhalten

$$X_D = \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{D+1} : \mathbf{y}^2 + s^2 = 1 \right\}.$$

Im euklidischen Fall $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,-1,-1,-1)$ ist dies S^d, die d-dimensionale Einheitskugel. Diese wird mit der Stereographischen Projektion (Abb. 3.1) mit dem kompaktifizierten $\overline{\mathbb{R}^d}$ identifiziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{y}}{s+1} \equiv \frac{\mathbf{y}}{s+r} \qquad (\text{für } r = 1) \\ \text{allg.:} \quad &= \frac{\mathbf{y}/r}{s/r+1} \end{aligned}$$

In dieser Parametrisierung operiert die Konforme Gruppe wie die „LORENTZ-Gruppe“ zu der Metrik g_{AB}: $SO(D+1,1)_e$ bzw. $SO(D,2)_e$:

1. Drehungen bzw. Boosts der $\mathbf{y}$-Hyperfläche $(r, s = \text{const.}) \Rightarrow$ Drehungen bzw. Boosts in $\mathbf{x}$

2. Boosts in (r,s)-Fläche $(\mathbf{y} = \text{const.}) \Rightarrow (r \pm s) \mapsto e^{\pm t}(r \pm s) \Rightarrow$ Skalentransformation $\mathbf{x} \mapsto e^{-t}\mathbf{x}$

3. Drehungen bzw. Boosts in y^i-s und y^i-r-Flächen kombinieren sich zu Translationen und speziellen konformen Transformationen in y^i-Richtung (modulo Skalentransformationen).
   Z. B.

$$\begin{aligned} &(y^0, y^1, \ldots ; s, r) \\ &\quad \mapsto \quad (y^0, \cos\varphi \cdot y^1 + \sin\varphi \cdot s, \ldots ; \cos\varphi \cdot s - \sin\varphi \cdot y^1, r) \\ &\quad \mapsto \quad (y^0, \cosh t(\cos\varphi \cdot y^1 + \sin\varphi \cdot s) + \sinh t \cdot r, \ldots ; \\ &\qquad\quad \cos\varphi \cdot s - \sin\varphi \cdot y^1, \cosh t \cdot r + \sinh t(\cos\varphi \cdot y^1 + \sin\varphi \cdot s)) \end{aligned}$$

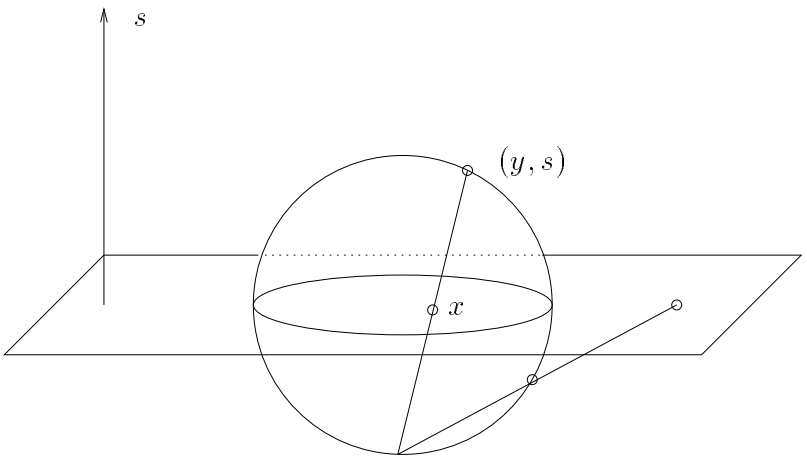

Abbildung 3.1: Stereographische Projektion

mit

$$s' + r' = (\sinh t \cos\varphi - \sin\varphi)y^1 + (\sinh t \sin\varphi + \cos\varphi)\cdot s + \cosh t \cdot r \ .$$

Bei der Wahl der Parameter $\sinh t = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ und $\cosh t = \frac{1}{\cos\varphi}$ wird $s' + r'$ unabhängig von y^1; nach der stereographischen Projektion ergibt sich die (skalierte) Translation um $a = \tan\varphi$

$$\mathbf{x}' = \cos\varphi \cdot (x^0, x^1 + a, x^2, \dots) \ .$$

Ähnlich liefert die Wahl $\sin\varphi = -\frac{\sinh t}{\cosh t}$ und $\cos\phi = \frac{1}{\cosh t}$ die spezielle konforme Transformation um $b = -\sinh t$

$$\mathbf{x}' = \cosh t \cdot \frac{(x^0, x^1 - b\mathbf{x}^2, x^2, \dots)}{1 - 2bx^1 + b^2\mathbf{x}^2} \ .$$

4. Die Spiegelung $\begin{array}{ccc} s & \mapsto & -s \\ r & \mapsto & -r \end{array}$ führt x^μ in $\begin{array}{c} \frac{x^\mu}{x^2} \\ -\frac{x^\mu}{x^2} \end{array}$ über, da $x^2 = \frac{r-s}{r+s}$.

Um das Transformationsverhalten von Quantenfeldern zu verstehen, ist es günstiger, anstelle der Parametrisierung $\xi = (\mathbf{y}, s, r = 1)$ die Parametrisierung

$$\xi = (y^0, \vec{y}, s, r) = (\sinh\tau, \vec{y}, s, \cosh\tau)$$

für den euklidischen konformen Raum X_D zu wählen: Die Nebenbedingung $\xi^2 = 0$ erfordert dann $\vec{y}^2 + s^2 = \cosh^2\tau - \sinh^2\tau = 1$, d. h. $\mathbf{e} = (\vec{y}, s)$ liegt auf der s-dimensionalen Einheitskugel S^{D-1}, und wir erhalten

$$X_D \ \cong \ S^{D-1} \times \mathbb{R} \ni \{\mathbf{e}, \tau\}$$

mit der Zuordnung

$$x^0 = \frac{\sinh\tau}{e^D + \cosh\tau} \quad , \qquad \vec{x} = \frac{\vec{e}}{e^D + \cosh\tau} \qquad (\mathbf{e} = (\vec{y}, s) = (\vec{e}, e^0)) \; .$$

Bei der analytischen Fortsetzung von der euklidischen zur MINKOWSKI-Theorie ist τ durch $i\tau$ zu ersetzen und $(\sinh\tau, \cosh\tau)$ durch $(\sin\tau, \cos\tau)$ [13]. Dabei ergibt sich automatisch eine periodische Abhängigkeit der MINKOWSKI-Raum-Koordinaten

$$t = \frac{\sin\tau}{e^D + \cos\tau} \quad , \qquad \vec{x} = \frac{\vec{e}}{e^D + \cos\tau}$$

von dem Parameter τ, d. h. der MINKOWSKI-Raum ist periodisch [unter $(\tau \mapsto \tau + \pi$ und $\vec{e} \mapsto -\vec{e})$] in $S^{D-1} \times \mathbb{R}$ eingebettet! Ein einzelnes Exemplar von M wird beispielsweise durch den Parameterbereich

$$M = \{(\mathbf{e}, \tau) : -\pi < \tau < \pi, \cos\tau + e^D > 0\}$$

abgedeckt (vgl. Abb. 3.2).

Bei der analytischen Fortsetzung der Wirkung der euklidischen Konformen Gruppe $SO(D+1,1)$, die natürlich stetig in der hyperbolischen Koordinate τ operiert, ergibt sich eine MINKOWSKIsche Konforme Gruppe, die stetig in der periodischen Koordinate τ operiert. Daher wird eine Transformation der Quantenfelder unter dieser Gruppe möglicherweise den Parameterbereich M verlassen und in eine benachbarte "Kopie" der MINKOWSKI-Raum-Zeit führen.

LÜSCHER und MACK [13] haben gezeigt, daß die Überlagerung $\widetilde{M} = S^{D-1} \times \mathbb{R}$ eine globale kausale Struktur besitzt und daß die universelle Überlagerungsgruppe $\widetilde{SO(D,2)}$ auf $\widetilde{M}$ unter Beachtung der kausalen Struktur operiert. Das Kausalitäts-Paradoxon rührt also daher, daß man versucht hat, die verschiedenen Exemplare (Blätter) von M in $\widetilde{M}$ zu identifizieren. Ein konformes Quantenfeld wird also in der Regel auf $\widetilde{M} = S^{D-1} \times \mathbb{R}$ definiert sein. Bestimmte Felder können dabei eine große oder kleine Periodizität aufweisen und etwa auf einer endlichen Überlagerung definiert sein.

SCHROER und SWIECA [18] haben diesen Sachverhalt dahingehend konkretisiert, daß sie eine „spektrale Zerlegung" der Feldoperatoren (bzgl. der Elemente $Z \in \widetilde{SO(D,2)}$, die bei der Überlagerung „über" der $\mathbb{1} \in SO(D,2)$ liegen)

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\xi} \phi_\xi(\mathbf{x})$$

angegeben haben, deren nicht-lokale Anteile ϕ_ξ sich zwar infinitesimal gleich, aber global (unter Z) verschieden transformieren:

$$Z\phi_\xi(\mathbf{x})Z^* = \phi_\xi(Z\mathbf{x}) = \omega_\xi \phi_\xi(\mathbf{x}) \; .$$

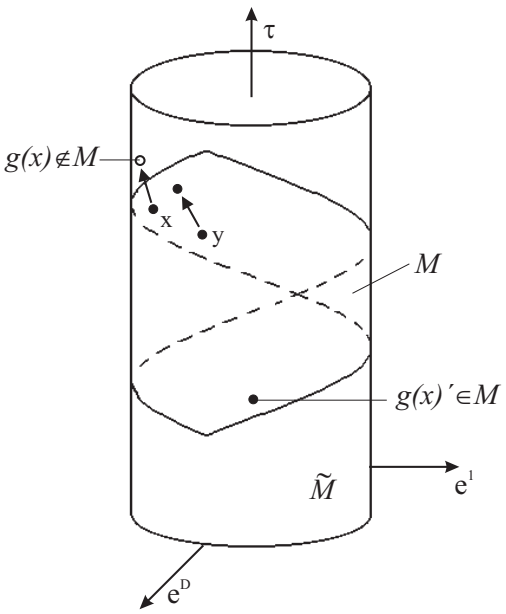

Abbildung 3.2: Die konforme Raum-Zeit $\widetilde{M}$

D. h., sie repräsentieren $\phi(Z(\mathbf{x}))$, wobei $\mathbf{x} \in M$, aber $Z(\mathbf{x}) \notin M$ eine „Kopie" desselben Punktes ist, durch eine andere Linearkombination $\sum \omega_\xi \phi_\xi$ derselben Konstituenten ϕ_ξ.
Die Bedeutung dieser Zerlegung in $D = 2$ und die Interpretation der Konstituenten ϕ_ξ als „Austauschfelder", die zwischen verschiedenen Superauswahl-Sektoren einer Algebra von Observablen Übergänge erzeugen, werden wir später kennenlernen (Kapitel 4.8).

3.2 $D = 1 + 1$ Dimensionen

In $D = 1 + 1$ Dimensionen ist die Gruppe der winkeltreuen Abbildungen wesentlich größer als die Gruppe $SO(2, 2)$. Denn es gilt

$$\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}(t + x)\mathrm{d}(t - x),$$

so daß jeder Diffeomorphismus $t+x = u \mapsto u'(u)$ und $t-x = v \mapsto v'(v)$ winkeltreu ist. Damit erhalten wir für jeden Lichtkegel $t \pm x$ die Diffeomorphismen-Gruppe von $\mathbb{R}$ bzw., nach Kompaktifizierung, von S^1.
Es kann aber gezeigt werden (Kapitel 4.1), daß die Diffeomorphismen-Gruppe nicht mit einem invarianten Vektor dargestellt werden kann, so daß die ungebrochene Symmetriegruppe (im Vakuum-Sektor von chiralen Feldern) nur die MÖBIUS-Gruppe Möb $= SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \cong SU(1, 1)/\mathbb{Z}_2 \subset \mathrm{Diff}(S^1)$ ist. Diese ergibt

sich als Einschränkung der Gruppe $SO(D=2,2)$ des vorigen Abschnitts

$$SO(2,2) \cong [SU(1,1) \times SU(1,1)]/\mathbb{Z}_2$$

(wobei die $\mathbb{Z}_2$-Identifizierung als $(-\mathbb{1}) \times (-\mathbb{1}) \sim e$ durchgeführt wird), wenn eine der $SU(1,1)$ trivial dargestellt ist, d. h. bei der Wirkung auf chirale Felder. Dennoch spielt die Diffeomorphismen-Gruppe bei der exakten Lösung von Modellen eine große Rolle (Kapitel 4).

Wie wir im allgemein-dimensionalen Fall gesehen haben, ist aber i. a. nicht die $SO(2,2)$, sondern ihre Überlagerung $\widetilde{SO(2,2)}$ in der Quantenfeldtheorie dargestellt. Die Felder sind als Distributionen auf einer Überlagerung des $(1+1)$-dimensionalen MINKOWSKI-Raumes definiert. Die Überlagerungsgruppe ist natürlich das Produkt der chiralen Überlagerungs-Gruppe $\widetilde{\mathrm{Mb}} = \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, der überlagerte Raum ist $\widetilde{S^1 \times \mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 = \widetilde{S^1_R} \times \widetilde{S^1_L}$. Wir halten fest, daß—im Unterschied zu $D > 2$—auch der Anteil $S^{D-1} = S^1$ nicht einfach zusammenhängend ist und daher überlagert werden muß.

3.3 Chirale Kompaktifizierung

Die chiralen Koordinaten $t \pm x$ sind in der Parametrisierung des vorigen Abschnittes gegeben durch

$$t \pm x = \frac{\sin\tau}{\cos\sigma + \cos\tau} \pm \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma + \cos\tau} \ ,$$

wobei $\mathbf{e} = (\vec{e}, e^D) = (\sin\sigma, \cos\sigma) \in S^1$ durch σ parametrisiert ist. Nach dem Additionstheorem ist dies

$$\begin{aligned} t \pm x &= \frac{2\sin\frac{\sigma\pm\tau}{2}\cos\frac{\tau\mp\sigma}{2}}{2\cos\frac{\tau+\sigma}{2}\cos\frac{\tau-\sigma}{2}} = \frac{\sin\frac{\tau\pm\sigma}{2}}{\cos\frac{\tau\pm\sigma}{2}} = \tan\frac{\tau\pm\sigma}{2} \\ &= i\frac{1-e^{i(\tau\pm\sigma)}}{1+e^{i(\tau\pm\sigma)}} = i\frac{1-z_\pm}{1+z_\pm} \end{aligned}$$

mit der Umkehrung

$$z_\pm = e^{i(\tau\pm\sigma)} = \frac{1+i(t\pm x)}{1-i(t\pm x)} \ .$$

Es ist oft vorteilhaft, bei der Diskussion chiraler Felder die Variablen $z_\pm$ mit Werten auf dem komplexen Einheitskreis zur Parametrisierung der reellen Lichtkegel-Achse $\mathbb{R} \ni t \pm x$ zu verwenden. Diese Transformation ist als CAYLEY-Transformation bekannt; sie bildet die obere Halbebene auf das Innere des Kreises (und umgekehrt) ab. Ihrer Form nach ist sie eine komplexe MÖBIUS-Transformation

mit $g_c = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{i} & \sqrt{-i} \\ -\sqrt{i} & \sqrt{-i} \end{pmatrix}$; jedoch verwenden wir sie nur als eine Umparametrisierung der Raumzeit mit der induzierten Reparametrisierung der Felder (Kapitel 4)

$$\phi(x) =: \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^h \widetilde{\phi}(z(x)) \ ,$$

d. h. nicht im Sinne einer Transformation

$$\mathcal{U}(g_c)\phi(x)\mathcal{U}(g_c)^{-1} = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^h \phi(z(x)) \ .$$

Natürlich werden i. a. die Felder auf einer Überlagerung von S^1 definiert sein (s.o.) und bestenfalls (zu bestimmende) Periodizitäten $\widetilde{\phi}(e^{2\pi i}z) = \omega\widetilde{\phi}(z)$ erfüllen. Wir stellen einige Formeln zur Umrechnung $x \leftrightarrow z$ zusammen:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1+ix}{1-ix} \\
\Rightarrow 1-ix &= \frac{2}{z+1} \\
\Rightarrow x &= i\frac{1-z}{1+z} \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{2i}{(1-ix)^2} = i\frac{(z+1)^2}{2} \\
\widetilde{\phi}(z) &:= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^h \phi(x) = 2^h \underbrace{(-i)^h}_{e^{-i\frac{\pi}{2}h}} (z+1)^{-2h}\phi(x) \\
x-y &= i\left(\frac{1-z}{1+z} - \frac{1-w}{1+w}\right) = \frac{-2i}{(1+z)(1+w)}(z-w) \\
i(x-y)+\varepsilon &= \frac{2}{(1+z)(1+w)}\left[(z-w)+\varepsilon(1+z)(1+w)\right]
\end{aligned}$$

Da $z \in S^1$ ist, gilt:

$$(1+z)^2 = |1+z|^2 e^{i\arg z} \ ,$$

d. h. $(1+z)^2$ ist ein positives Vielfaches von z. Für die ε-Vorschrift ist nur die Singularität $z = w$ interessant. Da ε stets als Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ zu verstehen ist, ist nur das Vorzeichen von ε relevant, also

$$\begin{aligned}
i(x-y)+\varepsilon &= \frac{2}{(1+z)(1+w)} \underbrace{[z-w+\varepsilon z]}_{z(1+\varepsilon)-w} \\
&= \frac{2}{(1+z)(1+w)} \underbrace{[z-w+\varepsilon w]}_{z-(1-\varepsilon)w} \ .
\end{aligned}$$

Die physikalische Randwertbedingung $\Im m\, y > \Im m\, x$ übersetzt sich also in die radiale Form $|w| < |z|$. Mit der Notation

$$z_> := \lim_{\varepsilon \searrow 0}(1+\varepsilon)z\ , \qquad x_- := \lim_{\varepsilon \searrow 0}(x - i\varepsilon)$$

nehmen die Zwei-Punkt-Funktionen die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\phi}(z)\widetilde{\phi}(w)\rangle &= 4^h(-i)^{2h}(z+1)^{-2h}(w+1)^{-2h}\left[\frac{2}{(z+1)(w+1)}(z_> - w)\right]^{-2h} \\ &= [i(z_> - w)]^{-2h} \\ &\equiv \widetilde{\Delta}(z-w)^{2h}\ ;\end{aligned}$$

dies hat die gleiche Form wie $\Delta(x-y)^{2h} = [i(x_- - y)]^{-2h}$.

Lokale chirale Felder haben ganzzahlige Dimension h, und die Singularitäten ihrer WIGHTMAN-Funktionen bei $x_1 = x_2$ sind stets von der Form ${\Delta_{12}}^{2n}$ $(n \in \mathbb{Z})$. (Andernfalls läge bei $x_1 = x_2$ ein Schnitt vor, und die analytischen Fortsetzungen zu $\cdots\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots$ bzw. $\cdots\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)\cdots$ wären verschieden.) Daher verhalten sich die Vakuumerwartungswerte der $\widetilde{\phi}$ stets wie ganze Potenzen von $\widetilde{\Delta}_{12}$ an den Koinzidenzpunkten und sind anderweitig regulär. Sie sind also periodische Funktionen in allen Variablen z_i, und folglich können die Felder $\widetilde{\phi}$ selber als *periodische* Distributionen, d. h. Distributionen über S^1 – ohne Überlagerung – angesehen werden.

Es ist wichtig anzumerken, daß die Testfunktionen auf $\mathbb{R}$ in der Reparametrisierung durch $z \in S^1$ zu den glatten Funktionen auf S^1 werden, die an der Stelle -1 (dem Bild von ∞) mit allen ihren Ableitungen verschwinden. Für die Testfunktionen auf S^1 ist diese Nebenbedingung fallenzulassen, denn

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \int \mathrm{d}x f(x)\phi(x) \\ &= \int \mathrm{d}z \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^{h-1} f(x(z))}_{\tilde{f}(z)=\left(\frac{i}{2}(z+1)^2\right)^{h-1} f(x(z))} \widetilde{\phi}(z) = \widetilde{\phi}(\tilde{f})\ .\end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ bei $x \to \infty \Leftrightarrow z \to -1$ schneller als jede Potenz in $x \sim (1+z)^{-1}$ abfällt, haben die entsprechenden Funktionen $\tilde{f}$ die Eigenschaft

$$\forall N: \quad \frac{\tilde{f}}{(z+1)^N} \overset{z\to -1}{\longrightarrow} 0\ .$$

Man definiert Teilräume von $\mathcal{S}(S^1)$

$$\mathcal{S}_{z_0}(S^1) = \left\{\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{C} \ \text{ glatt und } \forall N\colon\ (z-z_0)^{-N}\tilde{f}(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0\right\}$$

Damit ist die Interpretation der lokalen chiralen Felder als Distributionen über S^1 eine echte Erweiterung des Definitionsbereichs (von $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}_{-1}(S^1)$ zu $\mathcal{S}(S^1)$). Umgekehrt erkennt man anhand von

$$f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^{h-1} \tilde{f}(z(x)) = \left[\frac{(1-ix)^2}{2i}\right]^{h-1} \tilde{f}(z(x)) \ ,$$

daß die glatten Funktionen auf S^1 zu glatten Funktionen auf $\mathbb{R}$ werden, die wie $|x|^{2(h-1)}$ bei $x \to \pm\infty$ anwachsen dürfen. Dies deckt (im Falle der Energie-Impuls-Tensors) genau die Integrale

$$\begin{aligned} P &= \int x^0 T(x) \mathrm{d}x \\ D &= \int x^1 T(x) \mathrm{d}x \\ K &= \int x^2 T(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ab.
Im Falle des $U(1)$-Stromes $j = :\psi^*\psi:$ mit $h = 1$ liegt $Q = \int j(x)\mathrm{d}x = \tilde{j}(\tilde{f})$ mit $\tilde{f}(z) = 1$ in dieser Erweiterung.
Die Periodizität der Felder $\widetilde{\phi}(z)$ erlaubt eine Entwicklung nach einer Basis von periodischen Funktionen, nämlich den Funktionen

$$z \mapsto z^n \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

Bzgl. der Winkelkoordinate ($z = e^{i\varphi}$) ist dies natürlich die FOURIER-Transformation; die Entwicklung

$$\widetilde{\phi}_h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-h}$$

ist analog zu der Entwicklung freier Felder nach den ebenen Wellen $e^{\pm i(\omega(k)t - kx)}$ als Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung zu verstehen.
Die operatorwertigen FOURIER-Koeffizienten ϕ_n sind gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint \mathrm{d}z \, z^{h+n-1} \widetilde{\phi}(z) \\ &= \frac{1}{\pi}(2i)^{-h} \int_{-\infty}^{\infty} (1-ix)^{h-1-n}(1+ix)^{h-1+n} \phi(x) \\ &= \frac{1}{\pi}(2i)^{-h} \phi(f_n^{(h)}) \\ f_n^{(h)}(x) &= (1-ix)^{h-1-n}(1+ix)^{h-1+n} \ . \end{aligned}$$

Alle diese Testfunktionen liegen in der oben diskutierten Erweiterung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Für FERMI-Felder gilt eine ähnliche Diskussion mit dem Unterschied, daß wegen der Anti-Lokalität die Singularität am Koinzidenzpunkt zweier FERMI-Felder eine *ungerade*, aber immer noch *ganze* Potenz von Δ_{12} bzw. $\widetilde{\Delta}_{12}$ sein muß. Also sind auch FERMI-Felder in der Vakuumdarstellung periodisch; es ist aber $h \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}$, daher ist die Modenentwicklung

$$\widetilde{\psi}_h(z) = \sum_n b_n z^{-n-h}$$

eine Summe über *halb*zahlige $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.
Wir werden später sehen, daß beispielsweise FERMI-Felder in anderen Darstellungen als der Vakuumdarstellung andere Periodizitätseigenschaften haben können. So besitzt das reelle Fermion ψ eine *anti*periodische Darstellung, genannt RAMOND-Sektor, mit der Entwicklung

$$\pi_R(\widetilde{\psi})(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-\frac{1}{2}} \qquad (\Rightarrow \pi_R(\widetilde{\psi}(e^{2\pi i}z)) = -\pi_R(\widetilde{\psi}(z))) \ .$$

Das allgemeine Problem der Periodizitätseigenschaften von chiralen Feldern ist eng an den Begriff der Superauswahl-Sektoren und ihrer Fusions-Regeln geknüpft und kann nicht per Postulat entschieden werden. (siehe Kapitel 4.7)
Das komplexe FERMI-Feld besitzt sogar Darstellungen beliebiger Periodizität:

$$\pi_\alpha(\widetilde{\psi}(e^{2\pi i}z)) = e^{-2\pi i\alpha}\pi_\alpha(\widetilde{\psi}(z)) \ .$$

Wir werden sehen, daß diese Darstellungen solche sind, in denen der Ladungs-Operator der $U(1)$-Symmetrie $Q = \int j(x)\mathrm{d}x$ mit $Q\psi = \psi(Q-1)$ Eigenwerte $\alpha + n$, $n \in \mathbb{Z}$ hat.
Wir halten noch die Vorschrift der hermitischen Konjugation fest, die aus unseren Definitionen folgt:

$$\widetilde{\phi(z)}^* = \widetilde{\phi^*(\overline{z})} \qquad \text{mit} \quad \overline{z} = z^{-1} \ .$$

Wir schauen uns die MÖBIUS-Gruppe im kompakten Bild an: Es sei $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1+ix'}{1-ix'} = \cdots = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \\ \text{mit} \qquad \alpha &= \tfrac{1}{2}\left[(d+a)+i(b-c)\right] \\ \beta &= \tfrac{1}{2}\left[(d-a)+i(b+c)\right] \end{aligned} \ .$$

Diese Transormation wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ beschrieben, wobei wieder die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eine triviale Transformation darstellt. Die

MÖBIUS-Gruppe $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ ist also äquivalent zu $SU(1,1)/\mathbb{Z}_2$. Die $SO(2)$-Untergruppe $\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} : z \mapsto e^{i\varphi}z$, entspricht also der Rotation des Einheitskreises S^1.

Das Transformationsgesetz $\mathcal{U}(g)\phi(z)\mathcal{U}(g)^* = \left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}\right)^h \phi(x')$ überträgt sich in $\mathcal{U}(g)\widetilde{\phi}(z)\mathcal{U}(g)^* = \left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}\right)^h \widetilde{\phi}(z')$. Im Unterschied zu $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{1}{cx+d}\right)^2$ ist $\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{1}{\overline{\alpha}z+\overline{\beta}}\right)^2$ niemals singulär (denn $1 = \det g = \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$). Damit ist der Vorfaktor für $h \in \mathbb{Z}$ (d. h. für lokale Felder) eindeutig definiert. Auch für FERMI-Felder mit $2h$ ungerade ist trotz der Mehrdeutigkeit $g \mapsto -g$ der Vorfaktor wohldefiniert, wenn man ihn von $g = \mathbb{1}$ ausgehend stetig fortsetzt; dies führt aber auf $\left(\frac{1}{\overline{\alpha}z+\overline{\beta}}\right)^{2h} = -1$, wenn $g = -\mathbb{1}$ wird. Mit anderen Worten, wir haben

$$\mathcal{U}(2\pi)\psi(z)\mathcal{U}(2\pi)^* \;=\; -\psi(e^{2\pi i}z)\;.$$

Im Vakuum-Sektor, in dem ψ periodisch ist, ist also

$$\mathcal{U}(2\pi)\psi \;=\; -\psi\mathcal{U}(2\pi)\;.$$

Im anti-periodischen RAMOND-Sektor des reellen FERMI-Feldes ist

$$\mathcal{U}_R(2\pi)\psi \;=\; \psi\mathcal{U}_R(2\pi)\;.$$

Im Ladungssektor α des komplexen FERMI-Feldes ist

$$\mathcal{U}_\alpha(2\pi)\psi \;=\; -e^{2\pi i\alpha}\psi\mathcal{U}_\alpha(2\pi)\;.$$

Es kann also $\mathcal{U}_\alpha(2\pi) = e^{2\pi i\frac{Q^2}{2}}$ gesetzt werden, wenn ψ die Ladung -1 trägt, denn $e^{2\pi i\left[\frac{(Q-1)^2}{2} - \frac{Q^2}{2}\right]} = e^{2\pi i(-Q+\frac{1}{2})} = -e^{-2\pi i\alpha}$.

Kapitel 4

Konforme Felder

4.1 Die VIRASORO-Algebra

Der Energie-Impuls-Tensor (Kapitel 2.4) ist ein lokales skaleninvariantes Feld mit Skalendimension $h = 2$. Seine FOURIER-Transformation gemäß Kapitel 3.3 lautet

$$-2\pi\widetilde{T}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

mit

$$L_n = \frac{1}{2}T(f_n^{(2)}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x(1-ix)^{1-n}(1+ix)^{1+n}T(x)\,,$$

wobei $f_n^{(2)} := (1-ix)^{1-n}(1+ix)^{1+n}$ als Testfunktionen gewählt wurden. Definitionsgemäß gilt $L_m^* = L_{-m}$, und

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x(1+x^2)T(x) = \frac{P+K}{2} = \text{Erzeuger von } z \mapsto e^{it}z \\ L_{\pm 1} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x(1\pm ix)^2 T(x) = \frac{P-K}{2} \pm iD \end{aligned}$$

sind die Erzeuger der MÖBIUS-Gruppe.
Die LÜSCHER-MACK-Vertauschungsrelation

$$-i\,[T(x),T(y)] = (T(x)+T(y))\delta'(x-y) - \frac{c}{24\pi}\delta'''(x-y)$$

führt durch Integration auf die Relation

$$\begin{aligned} -i\,[L_m,T(x)] = &-\frac{1}{2}\left(f_m^{(2)}(x)T'(x) + 2f_m^{(2)\prime}(x)T(x)\right) + \\ &+ \underbrace{\frac{c}{6\pi i}m(m^2-1)(1-ix)^{-2-m}(1+ix)^{-2+m}}_{=\frac{c}{48\pi}f_m^{(2)\prime\prime\prime}(x)}\,, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\left[L_m, \widetilde{T}(z)\right] \;=\; z^m(z\partial_z + 2(m+1))\widetilde{T}(z) - \frac{c}{24\pi}m(m^2-1)z^{m-2}$$

sowie schließlich auf

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\ .$$

Diese Algebra ist als VIRASORO-Algebra *Vir* bekannt. Sie ist eine zentrale Erweiterung der WITT-Algebra $[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}$, die – in der Darstellung $l_m = z^{m+1}\partial_z$ – als LIE-Algebra von Diff(S^1) erkennbar ist. Offenbar ist eine unitäre Darstellung mit $L_m\Omega = 0$ nur möglich, falls $c = 0$. Wie wir in Kapitel 2.4 gesehen haben, ist dann aber $T(x) = 0$ und $L_m = 0$. Die Diffeomorphismen-Symmetrie ist also in nichttrivialen Theorien durch $c \neq 0$ gebrochen. Nur die MÖBIUS-Invarianz kann auf dem Vakuum-Vektor realisiert sein, da der zentrale Term $\sim m(m^2-1)c$ für $m = 0, \pm 1$ verschwindet.

Eine Darstellung des Energie-Impuls-Tensors ist gegeben durch eine Darstellung der VIRASORO-Algebra. Dabei ist nicht jede Darstellung physikalisch zulässig: wir interessieren uns nur für Darstellungen positiver Energie (Spektrums-Bedingung!). In einer solchen ist $P = \frac{1}{2}(P^0 \pm P^1)$ als Erzeuger der lichtartigen Translationen (in Vorwärtsrichtung) ein positiver Operator. Dann ist aber auch K, der Erzeuger der speziellen konformen Transformationen, positiv, denn $g_0 \in$ Mb, $g_0 = \begin{pmatrix} & -1 \\ +1 & \end{pmatrix}$, $g_0(x) = \frac{-1}{x}$ konjugiert die Translationen in die speziellen konformen Transformationen:

$$g_0 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

und damit gilt in jeder Darstellung der MÖBIUS-Gruppe

$$\mathcal{U}(g_0)P\mathcal{U}(g_0)^{-1} = K.$$

Ist also P positiv, so ist auch K positiv, und folglich auch $L_0 = \frac{1}{2}(P+K)$, der Erzeuger der kompakten Untergruppe $SO(2) \subset$ Möb. Damit interessieren wir uns nur für die Darstellungen der VIRASORO-Algebra, in denen L_0 ein positiver Operator ist. In der Vakuum-Darstellung ist natürlich 0 ein Eigenwert von L_0, da $L_0\Omega = 0$.

In der Vakuum-Darstellung des Energie-Impuls-Tensors ist $e^{2\pi i L_0} = \mathcal{U}(2\pi) = \mathbb{1}$, d. h. L_0 hat ganzzahliges Spektrum: spec$L_0 \subset \mathbb{N}_0$

4.2 Höchstgewichtsdarstellungen der VIRASORO-Algebra

Wir nehmen an, daß es neben dem Energie-Impuls-Tensor ein weiteres Quantenfeld ϕ in der Theorie gibt, das mit dem Energie-Impuls-Tensor die Vertauschungs-

relation

$$-i\,[T(x),\phi(y)] = -\phi'(y)\delta(x-y) + h\phi(y)\delta'(x-y) \tag{4.1}$$

erfüllt. Daraus folgt insbesondere

$$\begin{aligned} [D,\phi(x)] &= -i(x\partial_x + h)\phi(x) \\ \Rightarrow \mathcal{U}(\lambda)\phi(x)\mathcal{U}(\lambda)^{-1} &= \lambda^h \phi(\lambda x)\ , \end{aligned}$$

d. h. die Skalendimension von ϕ ist h. Beispiele für ϕ sind freie FERMI-Felder mit $h = \frac{1}{2}$. In der Form

$$i[T(\varepsilon),\phi(x)] = \left(\frac{\mathrm{d}(x+\varepsilon(x))}{\mathrm{d}x}\right)^h \phi(x+\varepsilon(x))$$

für infinitesimale Testfunktionen ε bedeutet die Vertauschungsrelation, daß sich ϕ unter Koordinatentransformationen wie eine Dichte vom Gewicht h transformiert. Wir betrachten den Vektor $e^{iPa}\phi(x)\Omega$ und verwenden die Vertauschungsrelation der MÖBIUS-Gruppe

$$[P,D] = iP, \qquad [P,K] = 2iD, \qquad [D,K] = iK$$

mit

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(L_{+1} + L_{-1}) + L_0 \\ D &= \frac{1}{2i}(L_{+1} - L_{-1}) \\ K &= -\frac{1}{2}(L_{+1} + L_{-1}) + L_0\ . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} L_0 e^{iPa}\phi(x)\Omega &= e^{iPa}\left(\frac{1+a^2}{2}P + aD + \frac{1}{2}K\right)\phi(x)\Omega \\ &= e^{iPa}\left(\frac{1+(x+a)^2}{2i}\partial + \frac{h}{i}(x+a)\right)\phi(x)\Omega \end{aligned}$$

An der Stelle $a = i - x$ ist $x + a = i$, also erhalten wir die Eigenwertgleichung

$$L_0\Psi = h\Psi$$

für

$$\Psi = e^{iP(i-x)}\phi(x)\Omega = e^{-P}\phi(0)\Omega = \phi(i)\Omega\ .$$

Im Gegensatz zu $\phi(x)\Omega$ für reelle x ist Ψ ein echter HILBERT-Raum-Vektor:

$$\begin{aligned}\|\Psi\|^2 &= (e^{-P}\phi(0)\Omega, e^{-P}\phi(0)\Omega) = (\phi(0)\Omega, e^{-2P}\phi(0)\Omega) \\ &= \lim_{x,y\to 0}\frac{1}{\Gamma(2h)}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{2h-1}e^{-2k}e^{-ik(x-y)} = \frac{1}{\Gamma(2h)}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{2h-1}e^{-2k} \\ &= 2^{-2h}\frac{\int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{2h-1}e^{-k}}{\Gamma(2h)} = 2^{-2h}\ .\end{aligned}$$

Wir schreiben auch $|h\rangle = 2^h\Psi$ für den normierten Vektor.[1]
Darüberhinaus gilt $\forall n > 0 : L_n\Psi = 0$, denn

$$\begin{aligned}L_n\phi(x)\Omega &= [L_n, \phi(x)]\,\Omega \\ &= -\frac{i}{2}\left\{(1-ix)^{1-n}(1+ix)^{1+n}\phi'(x) + h\left[(1-ix)^{1-n}(1+ix)^{1+n}\right]'\phi(x)\right\}\Omega\end{aligned}$$

ist auch gültig bei $x = i$, und dort ist $(1+ix)^{1+n} = \partial_x(1+ix)^{1+n} = 0$.
Ein konformes Feld mit der angegebenen Vertauschungsrelation (4.1) („primäres Feld“) macht sich also bemerkbar durch einen HILBERT-Raum-Vektor $|h\rangle$ mit

$$\left.\begin{aligned}L_0|h\rangle &= h|h\rangle \quad \text{und} \\ \forall n > 0 : L_n|h\rangle &= 0\end{aligned}\right\}\ . \tag{4.2}$$

Solche Vektoren sind Grundzustände des konformen HAMILTON-Operators L_0, denn L_{-n} sind für $n > 0$ Auf- und für $n < 0$ Absteigeoperatoren für L_0:

$$L_0L_{-n} = L_{-n}(L_0 + n)\ .$$

Die folgende Diskussion gilt für Grundzustände $|h\rangle$ mit den genannten Eigenschaften (4.2) – unabhängig davon, ob sie von der Art $\phi_h(i)\Omega$ sind.
Durch sukzessive Anwendung von L_{-n} $(n > 0)$ auf $|h\rangle$ erhält man Eigenvektoren zu Eigenwerten $h + k$:

$$L_0L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|h\rangle = (h + (n_1 + \cdots + n_r))L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|h\rangle\ .$$

Unter Verwendung der VIRASORO-Algebra sieht man leicht, daß eine (evtl. übervollständige) Basis solcher Eigenvektoren durch die Nebenbedingung $n_1 \geq \cdots \geq n_r > 0$ gegeben ist und daß die L_n $(n \in \mathbb{Z})$ aus der linearen Hülle solcher Vektoren nicht hinausführen. Daher ist

$$V_h := \mathrm{Span}\left\{L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|h\rangle : n_1 \geq \cdots \geq n_r > 0\right\}$$

[1] Formal würde $\phi(-i)\Omega$ einen Eigenwert $-h$ liefern, jedoch ist $\|\phi(-i)\Omega\|^2$ ein divergentes Integral (e^{+k} statt e^{-k}).

ein Darstellungsraum der VIRASORO-Algebra mit eindeutigem Grundzustand $|h\rangle$. Man bezeichnet solche linearen Räume als Höchstgewichts-Darstellungen oder (im konkreten Fall der VIRASORO-Algebra) als VERMA-Moduln.

Der VERMA-Modul V_h ist im allgemeinen keine HILBERT-Raum-Darstellung. Damit er eine sein kann (oder zu einer vervollständigt werden kann), muß V_h mit einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ ausgestattet sein, in dem die Hermitizitätseigenschaft

$$L_n^\dagger = L_{-n}$$

erfüllt ist. Diese Nebenbedingung *fixiert* aber bereits das Skalarprodukt bis auf eine Normierung $\||h\rangle\|^2$, denn sie impliziert

$$(L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|h\rangle, L_{-m_1}\cdots L_{-m_s}|h\rangle)_{h,c} \stackrel{!}{=} (|h\rangle, L_{n_r}\cdots L_{n_1}L_{-m_1}\cdots L_{-m_s}|h\rangle)_{h,c}\ ,$$

wobei der letztere „Ket"-Vektor mit der VIRASORO-Algebra ausgerechnet werden kann. Für $\sum n_i > \sum m_j$ bleibt am Ende ein Absteige-Operator übrig, der $|h\rangle$ annihiliert. Für $\sum_i n_i < \sum_j m_j$ bleibt ein Aufsteige-Operator übrig, der $\langle h|$ annihiliert. Insbesondere sind also die Eigenräume

$$V_h^{(k)} = \text{Span}\,\{L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|h\rangle : n_1 + \cdots n_r = k\}$$

paarweise orthogonal bzgl. $(\cdot,\cdot)_{h,c}$.

Für $\sum n_i = \sum m_i$ bleibt am Ende ein Ausdruck der Art

$$(|h\rangle, L_{n_r}\cdots L_{-m_s}|h\rangle)_{h,c} = (|h\rangle, P(h,c)|h\rangle)_{h,c}$$

übrig, wobei $P(h,c)$ ein Polynom in h und c ist (, das natürlich von n_i und m_j abhängt). Bis auf die Normierung $(|h\rangle,|h\rangle)_{h,c} = 1$ ist damit das Skalarprodukt in Abhängigkeit von h und c algebraisch fixiert.

Um V_h zu einem HILBERT-Raum zu machen, muß das Skalarprodukt positiv (semi-)definit sein. Diese Bedingung an h und c liefert eine echte Quantisierung der Parameter (siehe Satz 4.1).

Zunächst halten wir fest, daß es grundsätzlich drei Möglichkeiten gibt:

1. $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ ist positiv definit.
2. $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ ist positiv semi-definit.
3. $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ ist indefinit.

Fall 1 liefert sofort einen HILBERT-Raum $\mathcal{H}_{h,c} = \overline{V_h}^{(\cdot,\cdot)_{h,c}}$. Im Fall 2 geht man standardmäßig wie bei der GNS-Konstruktion vor. Die Menge $N = \{n \in V_h : (n,n)_{h,c} = 0\}$ ist ein linearer Unterraum, der zu ganz V_h orthogonal steht; denn $|(v,n)_{h,c}|^2 \le |v|^2|n|^2 = 0$ impliziert $(v,n)_{h,c} = 0\ \forall v \in V_h$ und damit auch $(n_1 +$

$n_2, n_1 + n_2)_{h,c} = 0$.
Das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ ist daher auf dem Quotientenraum V_h/N wohldefiniert durch $([v_1],[v_2])_{h,c} := (v_1, v_2)_{h,c}$ für $v_i \in V_h$.
Es ist auch positiv definit, da $([v],[v])_{h,c} = 0 \Rightarrow (v,v)_{h,c} = 0 \Rightarrow v \in N \Rightarrow [v] = 0$.
Die Vervollständigung liefert dann einen HILBERT-Raum

$$\mathcal{H}_{h,c} = \overline{V_h/N}^{([\cdot],[\cdot])_{h,c}} .$$

Um zu zeigen, daß die VIRASORO-Algebra durch $L_m[v] := [L_m v]$ dargestellt ist, muß man nur überprüfen, daß $L_m N \subset N$. Dies folgt natürlich aus $(L_m n, L_m n)_{h,c} = (L_{-m} L_m n, n)_{h,c} \subset (V_h, N)_{h,c} = 0$.
In der HILBERT-Raum-Sichtweise machen sich Nullvektoren dadurch bemerkbar, daß Linearkombinationen linear unabhängiger Vektoren, z. B. Elementen der kanonischen Basis des VERMA-Moduls V_h $\{L_{-n_1} \cdots L_{-n_r}|h\rangle : n_1 \geq \cdots \geq n_r > 0\}$, als Vektoren in $\mathcal{H}_{h,c}$ verschwinden; d. h. der Grundzustand $|h\rangle$ wird von einem nichttrivialen Polynom der Aufsteigeoperatoren vernichtet.
Der Fall 3 kann nicht zu einer HILBERT-Raum-Darstellung führen, weil Hermitizität und Positivität in diesem Fall offenbar nicht miteinander verträglich sind.

4.3 Quantisierung von (h, c)

Wir haben gesehen, daß die Existenz oder Nicht-Existenz einer unitären Darstellung des Energie-Impuls-Tensors mit niedrigstem L_0-Eigenwert h eine Eigenschaft des Zahlenpaares (h, c) ist. Dabei ist c eine charakteristische Größe, die den Energie-Impuls-Tensor fixiert, und h ein Parameter der Darstellung, der gleich der (chiralen) Skalendimension eines möglichen konform invarianten Feldes ist. Die Existenz eines *niedrigsten* Eigenwertes drückt die Spektrumsbedingung (positive Energie) bzgl. L_0 aus, die wiederum aus der für P folgt.
V. KAC [11] hat eine geschlossene Formel für die Determinante des algebraisch fixierten Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ auf den endlichdimensionalen orthogonalen Unterräumen $V_h^{(k)}$ des VERMA-Moduls V_h in der Basis

$$L_{-n_1} \cdots L_{-n_r}|h\rangle \qquad (n_1 \geq \cdots \geq n_r > 0,\ \sum n_i = k)$$

angegeben. Diese Formel lautet, bis auf irrelevante numerische Faktoren

$$\det M^{(k)}(h,c) \sim \prod_{\substack{p,q \in \mathbb{N} \\ pq \leq k}} (h - h_{p,q}(c))^{P(k-pq)} ,$$

wobei $P(n)$ die Anzahl der Partitionen $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_r$ in positive ganze Zahlen mit der Nebenbedingung $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_r > 0$ ist, und $h_{p,q}(c)$ die Funktion

$$h_{p,q}(c) = \frac{[(m+1)p - mq]^2 - 1}{4m(m+1)} ,$$

wobei m eine Parametrisierung für c ist, definiert durch

$$c =: 1 - \frac{6}{m(m+1)} \ .$$

Offenbar ist $h_{p,p}$ eine rationale Funktion von $m(m+1)$, also von c. Für $p \neq q$ treten $h_{p,q}$ und $h_{q,p}$ stets in der Kombination $(h - h_{p,q})(h - h_{q,p})$ auf, was ebenfalls eine rationale Funktion von $m(m+1)$, also von c, ist. Daher ist die Wahl der Wurzel $m = m(c)$ irrelevant. Sowohl $h_{p,p}$ als auch $h_{p,q} + h_{q,p}$ und $h_{p,q} \cdot h_{q,p}$ sind sogar Polynome in c.

Bevor wir die Quantisierung von (h, c) als eine Quantisierung von m und Einschränkung an p und q zeigen, sollen einige Beispiele berechnet werden.

$k = 1$:

$$\begin{aligned} V_h^{(1)} = \text{span}\,\{L_{-1}|h\rangle\}\ , \quad (L_{-1}|h\rangle, L_{-1}|h\rangle) &= \langle h, L_1 L_{-1}|h\rangle \\ &= \langle h, [L_1, L_{-1}]\,|h\rangle \\ &= \langle h, 2L_0|h\rangle = 2h \\ &= 2(h - h_{11}(c))\ . \end{aligned}$$

Offenbar muß $h \geq 0$ sein.

$k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_h^{(k)} \ni L_{-k}|h\rangle\ , \quad (L_{-k}|h\rangle, L_{-k}|h\rangle) &= \langle h, L_k L_{-k}|h\rangle \\ &= \langle h, [L_k, L_{-k}]\,|h\rangle \\ &= \langle h, (2kL_0 + \frac{c}{12}k(k^2-1))|h\rangle \\ &= k(2h + \frac{c}{12}(k^2-1)). \end{aligned}$$

Da für große k der Term $\frac{c}{12}(k^2-1)$ überwiegt, muß $c \geq 0$ sein, um Zustände negativer Norm auszuschließen. Soweit reproduzieren wir nur Bekanntes.

$k = 2$:

$$\begin{aligned} V_h^{(2)} &= \text{span}\,\{L_{-2}|h\rangle, L_{-1}L_{-1}|h\rangle\} \quad \text{mit} \\ (L_{-2}|h\rangle, L_{-2}|h\rangle) &= 4h + \frac{c}{2} \qquad \text{(s.o.)} \\ (L_{-2}|h\rangle, L_{-1}L_{-1}|h\rangle) &= \langle h, [L_1, L_{-1}]\,|h\rangle = \langle h, 3L_1 L_{-1}|h\rangle \\ &= 3\langle h, [L_1, L_{-1}]\,|h\rangle = 3 \cdot 2h = 6h \\ (L_{-1}L_{-1}|h\rangle, L_{-1}L_{-1}|h\rangle) &= \langle h, L_1\,[L_1, L_{-1}L_{-1}]\,|h\rangle \\ &= \langle h, L_1(2L_0 L_{-1} + L_{-1}2L_0)|h\rangle \\ &= (2(h+1) + 2h)\langle h, L_1 L_{-1}|h\rangle \\ &= 2h(4h+2) = 4h(2h+1) \end{aligned}$$

Dieses sind die Einträge einer symmetrischen Matrix mit der Determinante

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4h+\frac{c}{2} & 6h \\ 6h & 4h(2h+1) \end{vmatrix} &= 4h\left[(2h+1)(4h+\frac{c}{2})-9h\right] \\
&= 32h\left[h^2+\frac{c-5}{8}h+\frac{c}{16}\right] \\
&= 32h\left[h^2-\frac{2m(m+1)+3}{4m(m+1)}h+\frac{m(m+1)-6}{16m(m+1)}\right] \\
&= 32h\left[h-\frac{(1-m)^2-1}{4m(m+1)}\right]\left[h-\frac{(m+2)^2-1}{4m(m+1)}\right] \\
&= 32(h-h_{1,1})(h-h_{1,2})(h-h_{2,1})\ .
\end{aligned}$$

Wir sehen, daß die Determinante negativ wird in dem Intervall

$$0 < h_{1,2}(c) < h < h_{2,1}(c) \qquad \text{für} \quad 0 < 1 < c\ .$$

Diese Determinante ist eine Unterdeterminante der zu dem Skalarprodukt auf dem gesamten Raum gehörigen Matrix; damit das Skalarprodukt positiv semidefinit sein kann, müssen auch alle Unterdeterminanten nicht-negativ sein. FRIEDAN, QIU und SHENKER [7] haben die Indefinitheit der Determinante in dieser Weise systematisch untersucht. Ihr Argument lautet (etwas verkürzt) so:

Im Bereich $c > 1, h > 0$ ist $h - h_{p,q}(c) = 0$ für keine $p, q \in \mathbb{N}$ lösbar, da entweder $1 < c < 25 \Rightarrow h_{p,q}(c) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ oder $c \geq 25 \Rightarrow h_{p,q}(c) \leq 0$. Also hat keine der Determinanten in diesem Bereich eine Nullstelle, und wenn ein positiv definiter Punkt darin existiert, so folgt, daß der gesamte Bereich positiv definit ist. Für halb- und ganzzahlige c ist es aber ein leichtes, unitäre Darstellungen mit $h > 0$ zu konstruieren (mehrere freie Fermionen). Damit ist das ganze Gebiet $c > 1, h > 0$ positiv definit. Die Randpunkte $h = 0$ können dann höchstens semi-definit sein, und sie sind es natürlich auch, da beispielsweise $L_{-1}|h = 0\rangle = 0$ (MÖBIUS-Invarianz des Vakuums).

Es bleibt der Bereich $0 \leq 1 \leq c$. In diesem Bereich wählen wir die positive Wurzel $2 \leq m(c) \leq \infty$ und skizzieren den Verlauf der Funktionen $h_{p,q}(c)$. Es ergibt sich die folgende Systematik (Abb. 4.1):
Alle Funktionen $h_{p,q}(c)$ mit festem $|p-q|$ treffen sich bei $c \to 1$ in dem Punkt $h = \frac{|p-q|}{2}$; jeder Punkt mit $c < 1$ liegt in einem Intervall $h_{q,p} < h < h_{p,q}$ für hinreichend große p, q. Sei $k = pq$ das kleinste Produkt, für das ein gegebenes h in diesem Intervall liegt. Dann enthält die Determinantenformel für $M^{(k)}$ genau einen negativen Faktor $(h - h_{p,q})(h - h_{q,p})$. Die Determinante ist also notwendig negativ, es sei denn ein anderer Faktor ist Null.

Es folgt, daß die Möglichkeit 1 in $(h > 0, c < 1)$ nicht auftreten kann: alle VERMA-Moduln sind entweder indefinit oder semidefinit. Im letzteren Fall muß h auf einer der Kurven $h = h_{q,p}(c)$ liegen.

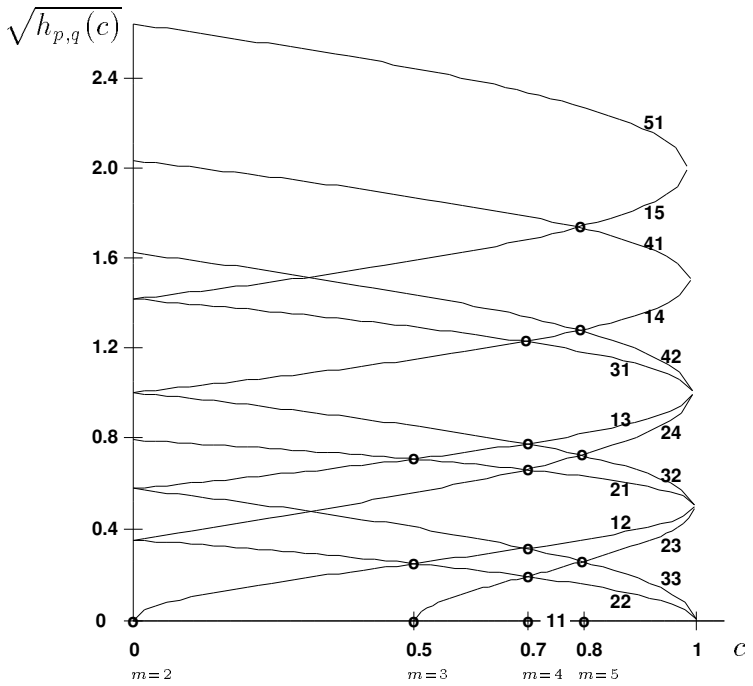

Abbildung 4.1: Kurven mit verschwindender Kac-Determinante

Aber diese Bedingung garantiert noch nicht die Semidefinitheit. Sei $k = pq$ das kleinste Produkt, für das $h = h_{p,q}(c)$ gilt. Dann gibt es möglicherweise p', q' mit $p'q' < k$ sodaß $h_{q',p'} < h < h_{p',q'}$, d. h. der Punkt (h, c) war schon bei der Stufe $k' = p'q'$ als indefinit erkannt worden.

Beispiel: $k = 3$ (Abb. 4.2).
Der Abschnitt $(\circ\,\circ\,\circ)$ war bereits bei $k' = 2$ ausgeschlossen worden. Dagegen ist der Abschnitt $(+++)$ semidefinit bei $k' = 2$ und erhält einen neuen negativen Faktor bei $k = 3$. Es ist nicht offensichtlich, daß dann ein negativer Eigenwert vorliegt, denn die Determinante bei $k = 3$ enthält den verschwindenden Faktor von der Stufe $k' = 2$.
Wir wissen aber, daß der Nullzustand in $V_h^{(2)}$ durch weiteres Aufsteigen mit $L_{-n}, n > 0$ nur neue Nullvektoren produziert (denn $L_{-n}N \subset N$), die alle mit Eigenwerten 0 zur Kac-Determinante auf der Stufe $k > k'$ beitragen. Daher signaliseren die Faktoren $(h - h_{p'q'}(c))^{P(k-k')} = 0$ in $M^{(k)}$ nur die Normierungsfaktoren $\||h + k'\rangle\|^2 = 0$ des Grundzustandes des eingebetteten VERMA-Moduls $V_{h+k'}$ in $V_{h+k'}^{(k-k')}$. Normiert man aber dessen Grundzustand auf 1, so erweist sich $V_{h+k}^{(k-k')}$ als positiv definit. Der negative Faktor in $M_h^{(k)}$ muß also von einem Vektor herrühren, der nicht in $V_{h+k'}^{(k-k')}$ liegt und daher nicht zu den Nullvektoren gehört:

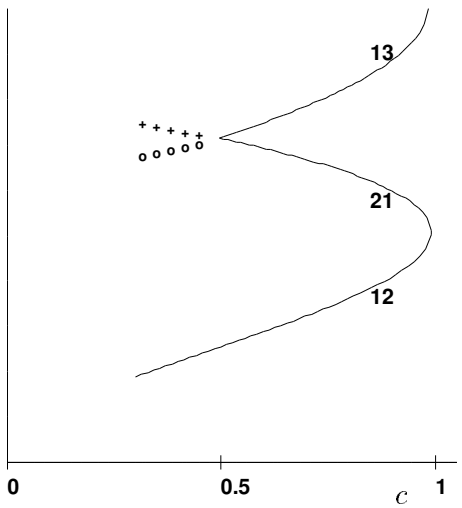

Abbildung 4.2: Zur Semidefinitheit I

Es liegt also ein Vektor negativen Skalarprodukts in $V_h^{(k)}$ vor. Dieses Argument eliminiert die Punkte (+++).

Man geht für höhere Stufen systematisch genauso vor (Abb. 4.3). Eine neu hinzugekommene Kurve $h_{p,q}$ bei $k = pq$ startet in bisher erlaubtem Gebiet (- - -) und schneidet an einem Punkt A erstmals eine frühere Kurve. Danach durchläuft sie ein bereits verbotenes Gebiet (∘ ∘ ∘), das nicht weiter diskutiert zu werden braucht. Gleichzeitig schneidet sie von der alten Kurve ein Segment (+++) ab, das auf niedrigerer Stufe Nullvektoren enthielt. Längs diesem Segment gibt es einen neuen negativen Faktor in der Kac-Determinante. Dieser könnte einen Zustand negativer Norm in dem von dem früheren Nullzustand erzeugten Untermodul $V_{h+k'}^{(k-k')}$ signalisieren. Eingebettet in $V_h^{(k)}$ wäre dieser jedoch auch ein Nullzustand und damit akzeptabel. Diese Alternative läßt sich numerisch durch Untersuchung der Kac-Determinante des Untermoduls ausschließen. Folglich muß der negative Eigenwert von einem echten Zustand negativer Norm in $V_h^{(k)}$ herrühren. Damit ist auch das Segment (+++) der alten Kurve verboten. Am Punkt A erhält die Kac-Determinante zwar einen neuen verschwindenden Eigenwert, sie bleibt jedoch semi-definit.

Die einzigen Punkte, die nicht auf irgendeiner Stufe durch dieses Argument eliminiert werden, sind die Schnittpunkte A. Diese sind „erste Schnittpunkte“ einer neuen Kurve, ausgehend von $c = 1$, mit einer alten Kurve, $p'q' < pq$. Diese „ersten Schnittpunkte“

$$h = h_{p,q}(c) = h_{p'q'}(c) \begin{cases} q > p \quad \text{und} \quad p' - q' = q - p - 1 \\ \text{oder} \\ q \leq p \quad \text{und} \quad q' - p' = p - q + 1 \end{cases}$$

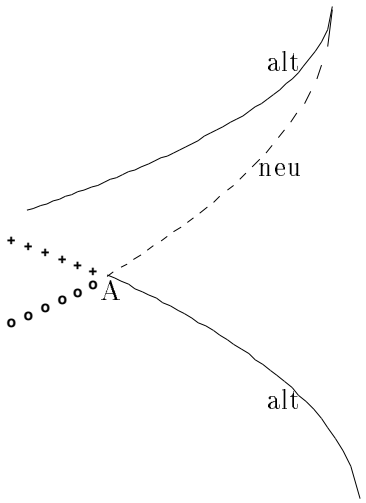

Abbildung 4.3: Zur Semidefinitheit II

sind aber genau die Punkte

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \qquad m \geq 2 \quad \text{ganzzahlig} \\ h = h_{p,q}(c) &= \frac{\left[(m+1)p - mq\right]^2 - 1}{4m(m+1)} \qquad \begin{cases} 1 \leq p \leq m-1 \\ 1 \leq q \leq m \end{cases} \end{aligned}$$

(mit der Symmetrie $p \leftrightarrow m-p$, $q \leftrightarrow m+1-q$). An diesen Punkten $h = h_{p,q}(c) = h_{p',q'}(c)$ gibt es zwei eingebettete VERMA-Untermoduln V_{h+pq} und $V_{h+p'q'}$ von Nullvektoren (die sich auf höheren Stufen überschneiden).

Satz 4.1 *[7] Für $c < 0$ oder $h < 0$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ indefinit.*
Für $(c > 1, h > 0)$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ positiv definit.
Für $(c > 1, h = 0)$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ semidefinit.
Für $(0 < c < 1, h)$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ indefinit mit Ausnahme der obigen Punkte (abzählbar viele Werte von c; endlich viele Werte von h für jeden Wert von c). An letzeren ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ semidefinit.
Für $(c = 1, h \geq 0)$ ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ positiv definit mit Ausnahme von $h = \frac{k^2}{4}, k \in \mathbb{N}_0$. An diesen Stellen ist $(\cdot,\cdot)_{h,c}$ semidefinit.

Die Punkte $(c = 1, h = \frac{k^2}{4})$ sind Schnittpunkte von unendlich vielen Null-Linien. Es erweist sich jedoch, daß die Untermoduln der zugehörigen Null-Grundzustände alle ineinander geschachtelt sind, also z.B. für $h = 0 = h_{11}(1) = h_{22}(1) = h_{33}(1) = \cdots$

$$N_1 \supset N_4 \supset N_9 \supset \cdots \quad \Rightarrow \quad N = N_1,$$

bzw. allgemein

$$N = N_k \qquad \text{wobei} \quad k = \min\left\{ p \cdot q \,\middle|\, h = \frac{(p-q)^2}{4} \right\} = 2\sqrt{h} + 1 \ .$$

Die Schachtelung erkennt man anhand der verschobenen KAC-Determinanten

$$\begin{aligned} & M^{(p+1)(q+1)-pq}\left(\frac{(p-q)^2}{4} + pq, 1\right) \\ = \ & M^{(p+q+1)}\left(\frac{(p+q+1)^2-1}{4}, 1\right) \\ = \ & 0 \ . \end{aligned}$$

Tabelle 4.1: $c = \frac{1}{2}, m = 3$

p \ q	1	2	3
1	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	0

Tabelle 4.2: $c = \frac{7}{10}, m = 4$

p \ q	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{7}{16}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	0

Die Einträge in diesen Tabellen kann man mit bekannten kritischen Exponenten (Skalendimensionen) des ISING-Modells ($m = 3$) und des trikritischen ISING-Modells ($m = 4$) identifizieren. Die Tabelle für $m = 5$ liefert bekannte und unbekannte Exponenten des 3-Zustands-POTTS-Modells.

4.4 Charaktere der VIRASORO-Algebra

Das Spektrum von L_0 in einer Darstellung π ist beschrieben durch die Größe („Charakter“ oder „Zustandssumme“)

$$\chi_\pi(t) = \mathrm{Tr}_\pi e^{-\beta L_0} \qquad \text{wobei} \quad t =: e^{-\beta}.$$

Zu dieser Spur trägt jeder Eigenvektor zum Eigenwert $h + k$ mit t^{h+k} bei. Die Entwicklung

$$\chi_\pi(t) = \sum_k N_k t^{h+k}$$

liefert also die Vielfachheit N_k des Eigenvektors $h+k$. Für eine Höchstgewichtsdarstellung mit Grundzustand $|h\rangle$ fängt diese Reihe mit $t^h(1+\mathcal{O}(t))$ an.
Offenbar ist N_k gleich der Dimension von $V_h^{(k)}$ abzüglich der Dimension des Unterraums $V_h^{(k)} \cap N$ der Nullvektoren. Die Dimension von $V_h^{(k)}$ ist gleich der Anzahl der Partitionen $k = n_1 + \cdots + n_r$ mit $n_1 \geq \cdots \geq n_r$. Diese Anzahl wird generiert durch das erzeugende Funktional (die kombinatorische Zustandssumme)

$$p(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-t^n)^{-1} \ ,$$

wovon man sich durch Entwicklung in geometrische Reihen und Kollektion aller Terme t^k überzeugt. Also gilt für die Darstellungen der Alternative 1 von Seite 53 (keine Nullvektoren) die Formel

$$\chi_h^c(t) = t^h p(t) \ .$$

Tritt ein Nullvektor auf der Stufe k erstmals auf, so ist offenbar N_k um 1 zu verringern. Gleichzeitig besteht ein ganzer Untermodul V_{h+k} aus Nullvektoren. Dessen Dimensionen sind durch das erzeugende Funktional $t^{k+h}p(t)$ gegeben und können durch Subtraktion $t^h(p) - t^{k+h}p(t) = t^h(1-t^k)p(t)$ berücksichtigt werden. Tritt kein weiterer Nullvektor auf, so ist also

$$\chi_\pi(t) = t^h(1-t^k)p(t) \ .$$

Diese Formel gilt für $c=1$, $h = \frac{(p-q)^2}{4} = s^2$ $(s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0)$ mit einem Nullzustand auf der Stufe $k = \min_{(p-q)=2s} pq = 2s+1$, also

$$\chi_{h=s^2}^{c=1}(t) = t^{s^2} \prod_{n \neq 2s+1} (1-t^n)^{-1} \qquad s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0 \ .$$

Die Darstellungen ($h=0$, $c>1$) besitzen den Nullvektor $L_{-1}|0\rangle$, und $N = V_1$, also

$$\chi_{h=0}^{c>1}(t) = \prod_{n \geq 2} (1-t^n)^{-1} \ .$$

Die Darstellungen im Bereich $0 < c < 1$ entsprechen Schnittpunkten von zwei Null-Linien. Der Nullraum besteht aus zwei Untermoduln V_{h+k} und $V_{h+k'}$. Diese haben einen nichtleeren Durchschnitt. Daher ist der Korrekturfaktor ziemlich kompliziert und ist in der Literatur zu finden (z.B. KAC-REINA, FEIGIN-FUCHS):

$$\chi_{h=h_{p,q}}^{c=c(m)}(t) = t^h \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{n^2 m(m+1)} \Big(\underbrace{t^{n[p(m+1)-qm]}}_{\begin{array}{l} n=0 \ : \ 1 \end{array}} - \underbrace{t^{n[p(m+1)-qm]+pq}}_{\begin{array}{ll} n=0 & : \ t^{pq} \\ n=-1 & : \ t^{p'q'} \end{array}} \Big) \ .$$

Beispiel: $m = 3$, $p = q = 1 : t^{h=0}(1 - t - t^6 + t^{11} + t^{13} - t^{20} \cdots)$
Wir erkennen Subtraktionen $-t - t^6$ für die Nullvektoren bei $pq = 1$, $p'q' = 6$ und weitere Korrekturen für den Überlapp der davon erzeugten Untermoduln.

Natürlich divergieren die Charaktere für $t \nearrow 1$ (d. h. $\beta \searrow 0$, $T \nearrow \infty$), da sie dort alle Basisvektoren des HILBERT-Raumes mit Gewicht 1 zählen (anstelle von $e^{-\beta(h+k)}$). Das asymptotische Verhalten der Divergenz bei $t \nearrow 1$ ist ein Maß für das Anwachsen des Zustandsraumes mit wachsender konformer Energie L_0.
Von Interesse ist beispielsweise das Verhältnis zum Vakuumcharakter

$$\lim_{t \nearrow 1} \frac{\chi_\pi(t)}{\chi_0(t)} =: d_{\mathrm{as}}(\pi)$$

das als asymptotische Dimension bezeichnet wird.
Natürlich ist $d_{\mathrm{as}}(\pi_0) = 1$ und $d_{\mathrm{as}}(\pi_1 \oplus \pi_2) = d_{\mathrm{as}}(\pi_1) + d_{\mathrm{as}}(\pi_2)$ als Summe zweier Spuren. (Es wird vermutet, daß $d_{\mathrm{as}}(\pi)$ mit der statistischen Dimension im Sinne von DOPLICHER-HAAG-ROBERTS übereinstimmt, jedoch existiert kein allgemeiner Beweis. In Spezialfällen sind die Beweise sehr indirekt.)

Wie berechnen aus den obigen Produktdarstellungen der Charaktere

- für $c > 1$:

$$d_{\mathrm{as}}(\pi_h) = \lim \frac{t^h}{1 - t} = \infty$$

- für $c = 1$ und $h \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\frac{\mathbb{N}_0}{2}\right)^2$ ebenso

- für $c = 1$ und $h = s^2$, $s \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$:

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{as}}(\pi_h) &= \lim t^{s^2} \frac{1 - t^{2s+1}}{1 - t} \\ &= \lim t^{s^2}(1 + t + \cdots + t^{2s}) = 2s + 1 \end{aligned}$$

- für $c < 1$ und $h = h_{p,q}$: erfordert die Summation der JACOBI-Reihen t^{An^2+Bn+C}. Ergebnis:

$$d_{\mathrm{as}}(\pi_{h_{p,q}}) = \frac{\sin \frac{p\pi}{m+1}}{\sin \frac{\pi}{m+1}} \cdot \frac{\sin \frac{q\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{m}}$$

  Die beiden Faktoren sind 1 für $p = 1$ bzw. $q = 1$ und werden zunächst mit wachsenden p, q größer, um schließlich wieder auf 1 für $p = m$ bzw. $q = m - 1$ abzufallen.

4.5 Primäre und quasiprimäre Felder, OPE

Wir hatten in Kapitel 4.2 gesehen, daß Felder mit den Vertauschungsrelationen (4.1) Grundzustände von L_0 in einer irreduziblen Darstellung der VIRASORO-Algebra erzeugen: $|h\rangle = \phi(i)\Omega = e^{-P}\phi(0)\Omega$ erfüllt $L_0|h\rangle = h|h\rangle$ und $L_n|h\rangle = 0$ $(n > 0)$. Für den Beweis wurden die mit (4.1) äquivalenten Vertauschungsrelationen

$$i\,[L_m, \phi(x)] = \frac{1}{2}\left\{\left[(1-ix)^{1-m}(1+ix)^{1+m}\right]\partial + h\left[(1-ix)^{1-m}(1+ix)^{1+m}\right]'\right\}\phi(x) \quad (4.3)$$

verwendet. Felder mit diesen Vertauschungsrelationen heißen *primäre Felder.*

Dasselbe Argument läßt sich auch auf konform-invariante Felder mit

$$\left.\begin{array}{rcl} i\,[P, \phi(x)] & = & \partial\phi(x) \\ i\,[D, \phi(x)] & = & (x\partial + h)\phi(x) \\ i\,[K, \phi(x)] & = & (x^2\partial + 2hx)\phi(x) \end{array}\right\} \quad (4.4)$$

anwenden. Die Vertauschungsrelationen (4.4) sind äquivalent zu (4.3) für $m = 0, \pm 1$, da ja $L_0 = \frac{1}{2}(P+K), L_{\pm 1} = \frac{1}{2}(P-K) \pm iD$. Man findet dann, daß die Vektoren $|h\rangle = \phi(i)\Omega = e^{-P}\phi(0)\Omega$ Eigenvektoren zu L_0 mit Eigenwert h sind und von L_{+1} annihiliert werden (nicht aber von L_n, $n > 1$).

Felder mit den Vertauschungsrelationen (4.4) heißen *quasiprimäre Felder.* An der Stelle $x = i$ $(z = 0)$ erzeugen sie also Grundzustände von L_0 in einer irreduziblen Darstellung der MÖBIUS-Gruppe aus dem Vakuum. Diese Vektoren brauchen aber keine Grundzustände der VIRASORO-Algebra zu sein.

Die Ableitung ϕ' eines quasiprimären Feldes erzeugt einen Vektor

$$\begin{aligned} -i\phi'(i)\Omega &= [P, \phi(0)]\,\Omega = \left(\frac{1}{2}(L_1 + L_{-1}) + L_0\right)\phi(0)\Omega \\ &= h|h\rangle + \frac{1}{2}L_{-1}|h\rangle. \end{aligned}$$

Offenbar wird dieser Vektor *nicht* von L_1 annihiliert. ϕ' erfüllt auch *nicht* die quasiprimäre Vertauschungsrelation (4.4) mit K, wovon man sich durch Differentiation sofort überzeugt. Ableitungsfelder sind nicht quasiprimär.

Man kann zeigen, daß jeder Vektor in einem VERMA-Modul von einer Linearkombination von quasiprimären und Ableitungsfeldern an der Stelle $x = i$ aus dem Vakuum erzeugt wird. Diese Aussage wird als Zustand-Feld-Korrespondenz bezeichnet. Die Gesamtheit dieser Felder wird als die *sekundären* oder Deszendenten-Felder (zu einem primären Feld) bezeichnet. Das Auftreten eines Nullvektors ist dann eine lineare Relation zwischen Deszendentenfeldern.

Der Charakter einer Darstellung und insbesondere die asymptotische Dimension

ist daher ein Maß für das Anwachsen der Anzahl der Deszendentenfelder mit der Skalendimension.

Die Technik aus dem Beweis des LÜSCHER-MACK-Theorems (Satz 2.2, Seite 32) ergibt die Vertauschungsrelation des Energie-Impuls-Tensors mit einem konformkovarianten Feld

$$i\,[T(x),\phi(y)] = \phi'(y)\delta(x-y) - h\phi(y)\delta'(x-y) + \sum_{3\le k\le h+1} \delta^{(k)}(x-y)\phi_k(y)\ , \quad (4.5)$$

wobei ϕ_k die verringerte Skalendimension $h+1-k<h$ haben. ϕ_k sind entweder wieder quasiprimäre Felder oder Ableitungen von Feldern noch niedrigerer Dimension. Das Fehlen der Zusatzterme für das primäre Feld signalisiert natürlich, daß dieses schon ein Feld minimaler Dimension war. Die Beiträge ϕ_k sind durch die Vertauschungsrelation nicht weiter bestimmt.

Die Deszendentenfelder eines primären Feldes ϕ lassen sich durch Operatorproduktentwicklung des Energie-Impuls-Tensors T mit ϕ gewinnen. Solche Operatorproduktentwicklung für zwei quasiprimäre Felder haben die Form

$$\phi_1(x)\phi_2(y)\Omega = \sum_j \int_I \mathrm{d}z\, K_{1,2;j}(x,y;z)\phi_j(z)\Omega\ ,$$

wobei sich die Integration über das Intervall zwischen x und y erstreckt und ϕ_j neue quasiprimäre Felder sind. Sie lassen sich wie folgt gewinnen [14]:

Vektoren der Art $\phi_1(f_1)\phi_2(f_2)\Omega$ transformieren sich unter der MÖBIUS-Gruppe in bekannter Art und Weise, indem die Wirkung der Erzeuger durch Kommutatorbildung zu Differentialoperatoren auf den Testfunktionen wird. Die resultierende unitäre Darstellung der MÖBIUS-Gruppe wird nach irreduziblen Darstellungen der Form $\phi_j(f_j)\Omega$ mit neuen quasiprimären Feldern ϕ_j zerlegt. (Solche Darstellungen schöpfen die unitären Darstellungen mit positiver Energie aus!) Die „CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten“ der Zerlegung von $\phi_1(f_1)\phi_2(f_2)\Omega$ nach $\phi_j(f_j)\Omega$ werden durch die Integralkerne $K_{1,2;j}$ gegeben, die ihrerseits bei gegebenen Skalendimensionen h_1, h_2 und h_j bis auf eine absolute Normierung durch das Transformationsverhalten der konformen Gruppe vollständig fixiert sind [19, 17]

$$K_{1,2;j}(x,y;z) \sim \Delta(x-y)^{h_1+h_2+h_j-1} \left(\frac{y-z}{z-x}\right)^{h_1-h_2} [(y-z)(z-x)]^{h_j-1}\ .$$

Durch geeignete Differentialoperatoren, Skalenlimes und Translationen lassen sich daraus die Terme $\phi_j(f_j)\Omega$ konstruieren [5]. Die resultierenden Operatoren $\phi_j(f_j)$, die zunächst nur auf dem Vakuumvektor definiert sind, lassen sich dann auf einen dichten Bereich der Vakuumdarstellung des Energie-Impuls-Tensors fortsetzen unter Ausnutzung der Lokalität:

$$\phi_j(f)T(g)\Omega := T(g)\phi_j(f)\Omega\ ,$$

falls $\operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$.

Das dynamische Problem ist die Bestimmung derjenigen Dimensionen h_j, die zu der Operatorproduktentwicklung beitragen, sowie die Amplituden dieser Beiträge (Kapitel 4.6).

In der Literatur findet man oft Operatorproduktentwicklung an einem Punkt, die Summen über *sekundäre*, nicht nur quasiprimäre, Felder enthalten. Solche Entwicklungen erhält man, wenn man formal $\phi_j(z)$ um $\phi_j(x)$ oder $\phi_j(y)$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt und die rein numerischen z-Integrationen ausführt.

Natürlich tragen mit ϕ_j dann auch alle Ableitungen von ϕ_j (mit leicht bestimmbaren relativen Amplituden) bei. Die Koeffizientenfunktionen müssen dann wegen der Translations- und Skaleninvarianz homogene Funktionen in $x - y$ sein, also z.B.

$$\phi_1(x)\phi_2(y)\Omega = \sum_{j,k} C_{1,2;j,k}\Delta(x-y)^{h_1+h_2-h_j-k}\phi_j^{(k)}(y)\Omega \ .$$

Natürlich tragen zu dieser Operatorproduktentwicklung für quasiprimäre Felder auch Ableitungsfelder bei. Durch Differentiation nach x und y erhält man auch Operatorproduktentwicklungen für die Ableitungsfelder selbst.

Es sei nun $\phi_1 = T$ der Energie-Impuls-Tensor, $\phi_2 = \phi$ ein primäres oder quasiprimäres Feld. Wegen der relativen Lokalität bei $x \neq y$ können nur ganzzahlige Potenzen von $\Delta(x-y)$ in der Operatorproduktentwicklung von $T\phi$ auftreten. Die Dimension h_j kann daher nur Werte in $h + \mathbb{Z}$, $h_j \geq 0$, annehmen. Aufgrund der Identitäten $\Delta(x)^n - (-\Delta(-x))^n = 2\pi\frac{(i\partial_x)^{n-1}}{(n-1)!}\delta(x)$ können die Koeffizientenfelder der singulären Beiträge mit den Feldern ϕ, ϕ' und ϕ_k in (4.5) identifiziert werden. Regularisiert man die Ausdrücke $\phi_1(x)\phi_2(y)\Omega$ durch Subtraktion der singulären Terme, so bleiben nur Beiträge mit nicht-negativen ganzen Potenzen von $(x-y)$ und Feldern $\phi_j^{(k)}$ mit $h_j + k \geq h + 2$.

Geeignete Differentiationen nach x oder y und der anschließende Limes $x \to y$ isoliert daher alle Terme einer festen Skalendimension $h_j + k \geq h + 2$. Die entsprechenden Felder werden als

$$:T^{(r)}\phi^{(s)}:(x) = \lim_{y\to x}(\phi_1(y)\phi_2(x) - \text{singuläre Beiträge})$$

bezeichnet. Dabei ist die Subtraktionsvorschrift konventionsabhängig (Entwicklung bei x oder bei y oder bei $\frac{y-x}{2}$ oder ...)! Allerdings unterscheiden sich verschiedene Konventionen stets nur um Ableitungsfelder, während der quasiprimäre Anteil konventionsunabhängig ist.

Die so gewonnen Felder lassen sich erneut mit T und seinen Ableitungen normalgeordnet multiplizieren. Man erhält dadurch iterativ alle sekundären Felder, ausgehend von einem primären Feld.

Nullvektoren in einem Sektor beschreiben also lineare Relationen zwischen normalgeordneten Produkten von ϕ und seinen Ableitungen mit beliebigen Potenzen von T und seinen Ableitungen.

Beispiele Im Vakuum-Sektor:

h	Feld		Vektor
0	$\mathbb{1}$	primär	$\|0\rangle = \Omega$
1	$\partial_x \mathbb{1}$	Null	$L_{-1}\|0\rangle = 0$
2	T	quasiprimär	$L_{-2}\|0\rangle \neq 0$
3	T'	Ableitung	$L_{-3}\|0\rangle$
4	$(:T^2: -\text{Abl.})$	quasiprimär	$L_{-2}L_{-2}\|0\rangle, L_{-4}\|0\rangle$
	T''	Ableitung	
5	$:TT':,\ T'''$	Ableitung	$L_{-3}L_{-2}\|0\rangle, L_{-5}\|0\rangle$

Im einfachsten nichttrivialen minimalen Modell ($c = \frac{1}{2}$) tritt der erste Nullvektor (außer $L_{-1}|0\rangle$ und seinen Deszendenten) bei Stufe 6 auf. Er ist eine Linearkombination von $L_{-6}|0\rangle$, $L_{-4}L_{-2}|0\rangle$, $L_{-3}L_{-3}|0\rangle$ und $L_{-2}L_{-2}L_{-2}|0\rangle$.
Entsprechend verschwindet eine Linearkombination der Felder

$$T'''',\ :T''T:,\ :T'T':\ \text{und}\ :T^3:\ .$$

Die primären Felder dieses Modells haben $h = h_{1,2}(c) = h_{2,2}(c) = \frac{1}{16}$ und $h = h_{2,1}(c) = h_{3,1}(c) = \frac{1}{2}$. Das letztere Feld ist das reelle FERMI-Feld ψ des ISING-Modells. In diesem Sektor gibt es je einen Nullvektor (höchsten Gewichts) auf den Stufen 2 und 3.
Wir haben

h	Feld		Vektor	
$\frac{1}{2}$	ψ	primär	$\|\frac{1}{2}\rangle$	
$\frac{3}{2}$	ψ'	Ableitung	$L_{-1}\|\frac{1}{2}\rangle \neq 0$	
$\frac{5}{2}$	$(:T\psi: -\text{Abl})$	quasiprimär	$L_{-2}\|\frac{1}{2}\rangle,\ L_{-1}L_{-1}\|\frac{1}{2}\rangle$	(Stufe 2)
	ψ''	Ableitung		
$\frac{7}{2}$	$(:T'\psi: -\text{Abl})$	quasiprimär	$L_{-3}\|\frac{1}{2}\rangle,\ L_{-2}L_{-1}\|\frac{1}{2}\rangle,$	(Stufe 3)
	$\psi''',\ (:T\psi:)'$	Ableitungen	$L_{-1}L_{-1}L_{-1}\|\frac{1}{2}\rangle$	

Die Nullvektoren stellen Identitäten dar zwischen $:T\psi:$ und ψ'' sowie zwischen $:T'\psi:$ und $(:T\psi:)'$ und ψ'''. Offenbar sind also $:T\psi:$ und $:T'\psi:$ Vielfache von ψ'' bzw. ψ'''.
Wir erinnern uns, daß T selbst als $:\psi\psi':$ (bzgl. der FERMI-Normalordnung) dargestellt wurde (2.1). Die Deszendentenfelder sollten daher ungerade WICK-Polynome sein. Das niedrigste nichtlineare ungerade WICK-Polynom ist aber $:\psi\psi'\psi'':$ mit Skalendimension $\frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$, sodaß für $h = \frac{5}{2}$ und $\frac{7}{2}$ nur die linearen Felder ψ'' und ψ''' übrigbleiben. Dies erklärt die genannten Relationen auf elementare Weise.

Für das primäre Feld mit Skalendimension $\frac{1}{16}$ gibt es entsprechende Relationen zwischen Deszendentenfeldern der Dimension $\frac{1}{16}+2$ und $\frac{1}{16}+4$. Eine elementare Erklärung der obigen Art gibt es hier (ebenso wie im allgemeinen Fall) *nicht*.

4.6 Korrelationsfunktionen und Ward-Identitäten

Die konforme Invarianz schränkt die Form der Korrelationsfunktionen $W^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$ weitgehend ein. Wir hatten in Kapitel 2.2 bereits gesehen, daß Zwei-Punkt-Funktionen nur die Form

$$\begin{aligned} W^{(2)}(x_1,x_2) &= (\Omega,\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\Omega) \equiv (\overline{\phi}_1(x_1)\Omega,\phi_2(x_2)\Omega) \\ &\sim \delta_{h_1,h_2}\Delta(x_1-x_2)^{2h} \equiv \delta_{h_1,h_2}\left(\frac{-i}{x_1-x_2-i\varepsilon}\right)^{2h} \end{aligned}$$

haben können.
Zur Erinnerung: wegen der Translationsinvarianz kann $W^{(2)}=W(x_1-x_2)$ nur von $x=x_1-x_2$ abhängen. Die Skaleninvarianz verlangt

$$0 = (\Omega,[D,\phi_{h_1}(x_1)\phi_{h_2}(x_2)]\,\Omega) = (x_1\partial_1+h_1+x_2\partial_2+h_2)W^{(2)}(x_1,x_2)$$

da $[D,\phi_i]=(x_i\partial_i+h_i)\phi_i$; und wegen $\partial_2=-\partial_1$ folgt

$$0=(x\partial_x+h_1+h_2)W(x), \qquad \text{also} \quad W(x)\sim\Delta(x)^{(h_1+h_2)}$$

Die Spektrumsbedingung fixiert die $i\varepsilon$-Vorschrift.
Die spezielle konforme Invarianz schließlich liefert

$$0=(\Omega,[K,\phi_1\phi_2]\,\Omega)=(x_1^2\partial_1+2h_1x_1+x_2^2\partial_2+2h_2x_2)W^{(2)}\ ,$$

und Einsetzen von $W(x)\sim\Delta(x)^{(h_1+h_2)}$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \left[x_1^2(-h_1-h_2)\frac{1}{x_1-x_2}+2h_1x_1+x_2^2(h_1+h_2)\frac{1}{x_1-x_2}+2h_2x_2\right]W(x) \\ &= [-(h_1+h_2)(x_1+x_2)+2h_1x_1+2h_2x_2]\,W(x) \\ \Rightarrow 0 &= (h_1-h_2)(x_1-x_2)W(x)\ , \end{aligned}$$

also muß auch $h_1=h_2$ sein.
Für $\overline{\phi}_1=\phi_2$ muß wegen der Positivität der Koeffizient vor Δ^{2h} positiv sein.
Ein ähnliches Argument gilt für Drei-Punkt-Funktionen. Diese müssen von der folgenden Form sein:

$$\begin{aligned} &W^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \\ &= (\Omega,\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\Omega) \\ &= C\cdot\Delta(x_1-x_2)^{-h_1-h_2+h_3}\Delta(x_1-x_3)^{-h_1-h_3+h_2}\Delta(x_2-x_3)^{-h_2-h_3+h_1}\ . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Beweis:
Translationsinvarianz:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Omega, [P, \phi\phi\phi]\,\Omega) = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) W^{(3)} \\ \Rightarrow W^{(3)} &= W(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Skaleninvarianz:

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + h_1 + h_2 + h_3) W^{(3)} \\ \Rightarrow W^{(3)} &= \text{homogen mit Gesamtgrad } -(h_1 + h_2 + h_3) \\ &= \Delta (x_1 - x_2)^{h_1+h_2+h_3} \cdot f(x) \end{aligned}$$

mit der homogenen Variablen $x = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}$.
Spezielle konforme Invarianz:

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1^2\partial_1 + x_2^2\partial_2 + x_3^2\partial_3 + 2x_1h_1 + 2x_2h_2 + 2x_3h_3) W^{(3)} \\ \Rightarrow \frac{f'}{f} &= (h_1 - h_2)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) - h_3\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow f(x) &= A \cdot (x-1)^{h_1-h_2-h_3} x^{-h_1+h_2-h_3} \\ &= A(x_1 - x_2)^{2h_3}(x_1 - x_3)^{-h_1-h_3+h_2}(x_2 - x_3)^{-h_2-h_3+h_1} \end{aligned}$$

□

Im Unterschied zur Zwei-Punkt-Funktion fixiert die konforme Invarianz nur die Form der Drei-Punkt-Funktion und macht keine Aussage über die beteiligten Dimensionen.

Ein alternatives Argument geht so: Durch eine geeignete konforme Transformation kann man stets drei Punkte x_1, x_2, x_3 auf drei beliebige andere Punkte, z. B. 0, 1, 2 abbilden. Da die MÖBIUS-Gruppe drei freie Parameter enthält, ist das Gruppenelement dadurch fixiert. Dann besagt die MÖBIUS-Invarianz

$$W^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \prod_i \left(\frac{\mathrm{d}g(x_i)}{\mathrm{d}x_i}\right)^{h_i} W^{(3)}(0, 1, 2)\ .$$

Der letzte Faktor ist von x_i unabhängig und fixiert die Amplitude. Die Abhängigkeit von x_i steckt nur in den Differentialfaktoren, wobei g selbst von x_1, x_2, x_3 abhängt (d. h. $\frac{\mathrm{d}g(x_i)}{dx_i}$ ist zu lesen als $\partial_x g_{x_1,x_2,x_3}(x)|_{x=x_i}$).

Für höhere N-Punkt-Funktionen sind in Verallgemeinerung der obigen Diskussionen die folgenden Betrachtungen zu machen: Wir bemerken zunächst, daß für mehr als drei Punkte das „konforme Verhältnis“ $x = x_{34}^{12} = \frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}$ von je vier Punkten MÖBIUS-invariant ist. (Translations- und Skaleninvarianz ist klar, spezielle konforme Invarianz: nachrechnen.)

Für N Punkte gibt es genau $N-3$ algebraisch unabhängige solche Verhältnisse, z. B. gilt für $N=4$:

$$\frac{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)} = 1-x, \qquad \frac{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{1-x}{x} \ .$$

Daher kann die MÖBIUS-Invarianz die N-Punkt-Funktionen nur bis auf beliebige Funktionen in $N-3$ konformen Verhältnissen fixieren

$$W^{(N)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} \Delta(x_i - x_j)^{p_{ij}} \cdot F(\{x^{kl}_{mn}\}) \ ,$$

wobei die Bedingung $\sum_i p_{ij} = 2h_j$ sicherstellt, daß $\prod_{i<j} \Delta^{p_{ij}}$ allein konform invariant ist. Allerdings legt diese Bedingung die p_{ij} nicht eindeutig fest: jede unterschiedliche Wahl unterscheidet sich um

$$\prod_{i<j} \Delta(x_i - x_j)^{\delta p_{ij}} \qquad \text{mit} \quad \sum_i \delta p_{ij} = 0 \ ,$$

und solche Faktoren sind wieder von der Form $f(\{x\})$ und können in der unbestimmten Funktion F subsumiert werden.
Die Lösung eines konkreten Modells erfordert die Bestimmung

1. der zulässigen Werte h (vgl. Abschnitt 4.3),
2. der Tripel (h_1, h_2, h_3) mit nichtverschwindender Drei-Punkt-Funktion zusammen mit den Amplituden $W^{(3)} = C\Delta^{\cdots}\Delta^{\cdots}\Delta^{\cdots}$ und
3. der N-Tupel $(h_1, \ldots, h_N)$ mit $W^{(N)} \neq 0$ zusammen mit den Funktionen $F(\{x\})$ (bei gegebener Wahl der p_{ij}).

Für diese Aufgabe erweisen sich die Nullvektoren als äußerst nützlich (wenn es sie gibt). Sei

$$|n\rangle = P(L_{-n_i})\Omega$$

ein Nullvektor. Dann muß für primäre Felder gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= (|n\rangle, \phi_1 \cdots \phi_N \Omega) \\ &= (\Omega, P(L_{-n_i})^\dagger \phi_1 \cdots \phi_N \Omega) \\ &= (\Omega, \tilde{P}(L_{+n_i}) \phi_1 \cdots \phi_N \Omega) \\ &= (\Omega, \left[\tilde{P}(L_{+n_i}), \phi_1 \cdots \phi_N\right] \Omega) = D(\Omega, \phi_1 \cdots \phi_N \Omega) \\ &= DW^{(N)} \ , \end{aligned}$$

wobei D ein Differentialoperator ist, der sich durch die Kommutatoren $[L_n, \phi]$ ergibt. Mit anderen Worten: die WIGHTMAN-Distributionen von primären Feldern

sind Lösungen von bestimmten linearen partiellen Differentialgleichungen, die als WARD-Identitäten bezeichnet werden.

Für nicht-primäre Felder sind die Kommutatoren $[L_n, \phi]$ nicht durch die Skalendimension allein bestimmt, da es Beiträge niederer Deszendenten geben kann. Daher liefern die WARD-Identitäten für Deszendentenfelder inhomogene Differentialgleichungen, deren Inhomogenität WIGHTMAN-Distributionen der niedrigeren Deszendenten enthalten. Diese können rekursiv auf die primären Felder zurückgeführt werden.

Alternativ kann man N-Punkt-Funktionen der Deszendentenfelder aus denen der primären Felder gewinnen, indem man die Definition durch regularisierte Produkte mit dem Energie-Impuls-Tensor T und seinen Ableitungen verwendet. Dazu ist es nötig, zuerst $N + r$-Punkt-Funktionen mit Einsetzungen von r zusätzlichen T-Feldern zu bestimmen. Dies erreicht man durch die Entwicklung von T nach L_n, die bekannten Kommutatoren der L_n mit den N primären Feldern und der Annihilation des Vakuums durch $L_n, n \geq -1$.
Solche Rechnungen sind natürlich in der Praxis sehr aufwendig; aber die Argumentation zeigt, daß es *prinzipell* möglich ist, alle N-Punkt-Funktionen der Deszendentenfelder auf die der primären Felder zurückzuführen. Daher konzentrieren wir uns im folgenden nur auf primäre Felder.

Für $N = 2$, $W^{(2)} \sim \Delta^{2h}$, erweisen sich die WARD-Identitäten einfach als eine Bedingung an die Skalendimension h, die auftreten können.

Beispiel: $c = \frac{1}{2}$: Nullvektor $|n\rangle$ auf der Stufe 6, P = Ordnung 3, D = Ordnung 3 $\Rightarrow$ kubisches Polynom für h.

Für $N = 3$, $W^{(3)} \sim \Delta^{\cdots}\Delta^{\cdots}\Delta^{\cdots}$ liefern die WARD-Identitäten Relationen zwischen h_i, die die Bestimmung der Fusionsregeln ermöglicht: gegeben h_2 und h_3, welche Werte von h_1 sind dann zulässig mit $(\Omega, \phi_1\phi_2\phi_3\Omega) \neq 0$? Die Zustände $\phi_2\phi_3\Omega$ besitzen dann nichtverschwindende Skalarprodukte mit $\overline{\phi}_1\Omega$, d. h. $\overline{\phi}_1$ trägt zu der Operatorproduktentwicklung von $\phi_2\phi_3$ bei, oder mit anderen Worten: ϕ_2 interpoliert zwischen den Teilräumen, die von $\phi_3\Omega$ und $\overline{\phi}_1\Omega$ aufgespannt werden.

Für $N \geq 4$, $W^{(N)} = \prod \Delta^{\cdots} \cdot F(x)$ erhalten wir für gegebene h_i Differentialgleichungen für die unbestimmte Funktion $F(x)$ in $N - 3$ Variablen. Die Ordnung der Differentialgleichung ist gleich der Ordnung des Polynoms $P(L_{-n_i})$, das den Nullvektor beschreibt.
Entsprechend wird es in der Regel mehrere linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung geben. Manche von diesen sind „unphysikalisch“ (z. B. weil sie bei großen Abständen anwachsen) und können eliminiert werden. Es bleiben jedoch in der Regel mehrere Lösungen übrig, deren Bedeutung im folgenden diskutiert werden soll.

Weitere WARD-Identitäten ergeben sich aus den Nullvektoren in dem Sektor ϕ_N. Ist nämlich $|h_N\rangle = \phi_N(i)|\Omega\rangle$ der zugehörige Grundzustand und $N = P(L_{-n_i})|h_N\rangle$, so liefert die Vertauschung der L_{-n_i} nach links eine Differentialgleichung für die

Distribution

$$(\Omega, \phi_1(x_1) \cdots \phi_N(x_N = i)\Omega) \ .$$

Wegen der Translationsinvarianz ist die WIGTHMAN-Distribution für beliebige (reelle) Werte von x_N durch ihre Werte bei $x_N = i$ fixiert.
Die Ordnung dieser WARD-Identität ist in der Regel niedriger als die der Vakuum-Nullvektoren. Schließlich hatten wir gesehen, daß ein Nullvektor im Sektor des primären Feldes ϕ_h einem Nullfeld entspricht, d. h. einer verschwindenden Linearkombination von Deszendentenfeldern, die ihrerseits als normalgeordnete Produkte des primären Feldes mit dem Energie-Impuls-Tensor definiert werden können, schematisch

$$\mathrm{Pol}(L_{-n})|h\rangle = 0 \Rightarrow :\widetilde{\mathrm{Pol}}(T)\phi_h: = 0 \ ,$$

wobei die Polynome Pol und $\widetilde{\mathrm{Pol}}$ dieselbe Ordnung haben. (Die exakte Relation zwischen Pol und $\widetilde{\mathrm{Pol}}$ hängt natürlich von der Definition der Normalordnungsvorschrift ab.)

Jede Einsetzung eines Energie-Impuls-Tensors T in eine Korrelationsfunktion von primären Feldern führt aber, nach Entwicklung von T in seine FOURIERkomponenten L_n und deren Kommutationen nach rechts oder links, zu einem linearen partiellen Differentialoperator (nach den Koordinaten der übrigen Felder). Die Einsetzung von $\widetilde{\mathrm{Pol}}(T)$ zusammen mit der Normalordnungsvorschrift liefert also einen Differentialoperator derselben Ordnung wie das Polynom, und dieser Differentialoperator annihiliert die Korrelationsfunktion, weil $:\widetilde{\mathrm{Pol}}(T)\phi_h:$ verschwindet.

Für die minimalen Modelle ist die Ordnung des Polynoms $\mathrm{Pol}(L_n)$ im Sektor $|h_{p,q}\rangle$ gleich $p \cdot q$. Alle Korrelationen des primären Feldes $\phi_{p,q}$ lösen also eine partielle Differentialgleichung der Ordnung pq, und sind daher Linearkombinationen von pq linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung.
Nun liefert jedes Feld in einer Korrelation primärer Felder eine solche Differentialgleichung, und die Korrelationsfunktion muß im Durchschnitt der Lösungen aller Differentialgleichungen liegen. Diese Bedingung reduziert die Zahl der linear unabhängigen Lösungen weiter. Sie liefert insbesondere auch die „Fusionsregeln“, d. h. manche Tripel von primären Feldern können überhaupt keine nichtverschwindende Drei-Punkt-Funktion besitzen.

Man schreibt $[A] \times [B] = \sum [C]$, falls es eine nichtverschwindene Drei-Punkt-Funktion $(\phi_C\Omega, \phi_A\phi_B\Omega) \neq 0$ gibt. Die Fusionsregeln der minimalen Modelle sind

$$[p,q] \times [k,l] = \sum [s,t]$$

mit $|p-k|+1 \leq s \leq p+k-1$ in geraden Schritten, d. h. $p+k-s \in 2\mathbb{N}_0$ und $|m-p-k|+1 \leq m-s \leq m-p+k-1$ in geraden Schritten (und entsprechend

für $p,k,s,m \to q,l,t,m+1$).
Die jeweils zweite Bedingung rührt von der Symmetrie der Label $(p,q) \leftrightarrow (m-p, m+1-q)$ her und ist äquivalent zu

$$p-k+1 \leq s \leq m-|m-p-k|-1 \ .$$

Die untere Schranke ist bereits durch die erste Bedingung ausgeschöpft; die obere ist das Minimum von $p+k-1$ und $2m-p-k-1$. Also besagen beide Bedingungen zusammen:

$$|p-k|+1 \leq s \leq \min(p+k, 2m-p-k)-1 \quad \text{in geraden Schritten} \ .$$

Insbesondere für $k,l=1,2$ folgt $s=p$ und $t=q\pm 1$, wobei $q-1=0$ für $q=1$ sowie $q+1=m+1$ für $q=m$ entfallen.
Da diese Rechnungen im Allgemeinfall aber aufwendig sind, möchte ich nur ein Beispiel vorrechnen für das Feld ϕ_{12}.
Der zugehörige Nullvektor auf der zweiten Stufe ist

$$|N\rangle = AL_{-2}|h\rangle + BL_{-1}^2|h\rangle, \quad h=h_{1,2}=\frac{[m+1-2]^2-1}{4m(m+1)}=\frac{m-2}{4m(m+1)} \ .$$

Da es keinen Nullvektor auf der Stufe 1 gibt, fixiert die Bedingung $0=L_{+1}|N\rangle$ das Verhältnis $A:B$ wie folgt:

$$\begin{aligned} L_1|N\rangle &= A\cdot 3L_{-1}|h\rangle + B\left[(2L_0)\cdot L_{-1} + L_{-1}\cdot(2L_0)\right]|h\rangle \\ &= (3A+(2(h+1)+2h)B)L_{-1}|h\rangle \ . \end{aligned}$$

Wir wählen $B=1$ und $A=-\frac{4h+2}{3}=-\frac{\frac{m-2}{m+1}+2}{3}=-\frac{3m}{3(m+1)}=-\frac{m}{m+1}$ und betrachten die Gleichung

$$0=\langle h_{1,2}|(mL_2-(m+1)L_1^2)\tilde{\phi}_A(z)\tilde{\phi}_B(w)\Omega\rangle$$

mit

$$[L_2,\cdot] = z^2(z\partial_z+2h_a)+w^2(w\partial_w+3h_B)$$

und

$$\begin{aligned} [L_1,[L_1,\cdot]] &= [L_1, D\cdot] \\ &= D\,[L_1,\cdot] = D^2 \end{aligned}$$

mit $D=z(z\partial_z+2h_A)+w(w\partial_w+2h_B)$.
Aufgrund der konformen Invarianz hat die Drei-Punkt-Funktion die Form

$$\begin{aligned} &\sim (1-ix)^{2h_A}(1-iy)^{2h_B}(-i-x)^{-h-h_A+h_B} \\ &\quad \times(-i-y)^{-h-h_B+h_A}(x-y)^{-h_A-h_B+h} \\ &\sim \left[\frac{(1-ix)(1-iy)}{(x-y)}\right]^{h_A+h_B-h} \sim (z-w)^{h-h_A-h_B} \ . \end{aligned}$$

Setzen wir in der resultierenden Differentialgleichung $w = 0$ (OBdA), so folgt

$$0 = mz^2(z\partial_z + 3h_A) - (m+1)z\underbrace{(z\partial_z + 2h_A)}_{z(z\partial_z+2h_A+1)}z(\partial_z + 2h_A)z^{h-h_A-h_B} \ .$$

Es resultiert die polynomiale Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= m(h - h_A - h_B + 3h_A) \\ &\quad - (m+1)(h - h_A - h_B + 2h_A + 1)(h - h_A - h_B + 2h_A) \\ &= \frac{-1}{16m^2(m+1)}((m+1)(p-s) - m(q-t+1)) \\ &\quad \times((m+1)(p+s) - m(q+t+1)) \\ &\quad \times((m+1)(p-s) - m(q-t-1)) \\ &\quad \times((m+1)(p+s) - m(q+t-1)) \quad (\text{für } h_A = h_{p,q}, h_B = h_{s,t}) \ . \end{aligned}$$

Diese hat für jeden Wert von h_A (maximal) zwei Lösungen $h_B = h_{k,l\pm1}$, da die vier Lösungen für s und t paarweise denselben Wert h_b ergeben. Illustration:
Erster Faktor $= 0$, $p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, $m, m+1$ koprim $\Rightarrow (p-s) = k \cdot m, (q-t+1) = k(m+1)$ $0 < p, s < m \Rightarrow k = 0 \Rightarrow s = p, t = q+1 \Rightarrow h_{s,t} = h_{p,q+1}$
Zweiter Faktor $= 0, p, q, s, t \in \mathbb{Z}, m, m+1$ koprim $\Rightarrow (p+s) = m, (q+t+1) = m+1$ $\Rightarrow s = m - p, t = (m+1) - (q+1) \Rightarrow h_{s,t} \equiv h_{p,q+1}$ etc.
Generell ist die Ordnung der polynomialen Beziehungen zwischen h_A und h_B bei gegebenem $h = h_{p,q}$ gleich der Ordnung pq der Differentialgleichung, so daß es maximal pq Lösungen gibt. Dies ist auch die Höchstzahl der Beiträge in den genannten Fusionsregeln.

4.7 Austauschfelder

Wir kehren zunächst zu den Drei-Punkt-Funktionen zurück und „übersetzen“

$$(\Omega, \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\Omega) = C \prod_{i<j} \Delta(x_i - x_j)^{p_{ij}}$$

in die Form

$$(\Omega, \tilde{\phi}_1(z_1)\tilde{\phi}_2(z_2)\tilde{\phi}_3(z_3)\Omega) = C \prod_{i<j} \tilde{\Delta}(z_i - z_j)^{p_{ij}} \ ,$$

wobei die p_{ij} der Formel (4.6) zu entnehmen sind und $\tilde{\Delta}$ folgende Gestalt (als Randwert einer analytischen Funktion) hat:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(z-w) &= \frac{-i}{z_> - w} \equiv \frac{-i}{(1+\varepsilon)z - w} \\ &= \frac{-i}{z - w_<} \equiv \frac{-i}{z - (1-\varepsilon)w} \ . \end{aligned}$$

Wir wollen die Periodizitätseigenschaften studieren. Dazu betrachten wir $\tilde{\Delta}(e^{it}z - w)^p$, wenn $t \to t + 2\pi$ anwächst. Der Differenzvektor nimmt eine Phase $e^{2\pi i}$ auf und daher, bei analytischer Fortsetzung um S^1 herum,

$$\tilde{\Delta}(e^{2\pi i}z - w)^p = e^{-2\pi ip}\tilde{\Delta}(z - w)^p \ .$$

In w dagegen ist $\tilde{\Delta}$ periodisch, da die Phase des Differenzvektors wieder zum Ausgangswert zurückläuft.
Daher gilt für die Drei-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}^{(3)}(z_1, z_2, e^{2\pi i}z_3) &= \widetilde{W}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) \\
\widetilde{W}^{(3)}(z_1, e^{2\pi i}z_2, z_3) &= e^{2\pi i(h_1 - h_2 - h_3)}\widetilde{W}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) \qquad (\text{von } \Delta_{23}) \\
\widetilde{W}^{(3)}(e^{2\pi i}z_1, z_2, z_3) &= e^{2\pi i(h_2 - h_1 - h_3 + h_3 - h_1 - h_2)}\widetilde{W}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) \quad (\text{von } \Delta_{13} \text{ und } \Delta_{12}) \\
&= e^{-4\pi i h_1}\widetilde{W}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) \ .
\end{aligned}$$

Offenbar besitzen die Felder $\tilde{\phi}$ unterschiedliche Periodizitätseigenschaften, je nachdem ob sie auf Ω wirken, oder zu Ω hinführen, oder zwischen Vektoren $\phi\Omega$ interpolieren. Die Periodizität hängt nur ab von den beteiligten Skalendimensionen, d. h. vom Spektrum von $e^{2\pi iL_0}$: Seien Ψ_i und Ψ_f zwei Vektoren mit $e^{2\pi iL_0}\Psi_i = e^{2\pi ih_i}\Psi_i$ und $e^{2\pi iL_0}\Psi_f = e^{2\pi ih_f}\Psi_f$. Beispielsweise sind alle Vektoren $\phi_h(x)\Omega$ von dieser Art. Für jedes Feld ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 kann $W^{(3)}$ als ein Matrixelement zwischen solchen Vektoren gelesen werden

$$W^{(3)} = \langle \Psi_f, \tilde{\phi}(z)\Psi_i \rangle$$

mit

$$\begin{aligned}
h_i &= 0 \quad , \quad h_f = h_3 \qquad \text{für} \quad \tilde{\phi}_3 \\
h_i &= h_3 \quad , \quad h_f = h_1 \qquad \text{für} \quad \tilde{\phi}_2 \\
h_i &= h_1 \quad , \quad h_f = 0 \qquad \text{für} \quad \tilde{\phi}_1 \ ,
\end{aligned}$$

da zwischen je zwei Feldoperatoren der Wert von $e^{2\pi iL_0}$ bekannt ist:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\Omega, & & \tilde{\phi}_1 & & \tilde{\phi}_2 & & \tilde{\phi}_3 & \Omega) & = \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& 0 & & h_1 & & h_3 & & 0 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
(& & \overline{\tilde{\phi}}_1 & & \Omega, \tilde{\phi}_2\tilde{\phi}_3\Omega) \ . \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& h_1 & & 0 &
\end{array}$$

Dann gilt in jedem Fall die Periodizität

$$\langle \Psi_f, \tilde{\phi}_h(e^{2\pi i}z)\Psi_i \rangle = e^{2\pi i(h_f - h_i - h)}\langle \Psi_f, \tilde{\phi}_h(z)\Psi_i \rangle \ .$$

Dies ist nicht überraschend, da ja das konforme Transformationsgesetz

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{U}(2\pi) & & \tilde{\phi}(z) & & \mathcal{U}(2\pi)^* \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
e^{2\pi iL_0} = e^{2\pi ih_f} & & & & e^{-2\pi iL_0} = e^{-2\pi ih_i}
\end{array}
\qquad = e^{2\pi ih}\tilde{\phi}(e^{2\pi i}z)$$

lautet. Überraschend ist dagegen, daß die WARD-Identitäten für ein gegebenes Feld verschiedene Drei-Punkt-Funktionen mit anderen Feldern zulassen, die verschiedene Periodizitäten $e^{2\pi i(h_f-h_i-h)}$ aufweisen.

Das Feld $\tilde{\phi}_h$ besitzt also verschiedene Komponenten der Art

$$P_f\tilde{\phi}_h P_i \equiv {}_j\Big[\tilde{\phi}_h\Big]_i$$

mit Projektoren auf die Spektralwerte von $e^{2\pi i L_0}$, die unterschiedliche Periodizitäten besitzen. Entsprechend besitzen diese Komponenten FOURIER-Zerlegungen

$$P_f\tilde{\phi}_h P_i = \sum_n {}_f\Big[\tilde{\phi}_h\Big]_i z^{-n-h} \ ,$$

für die n über $\mathbb{Z}+(h_f-h_i)$ läuft. Die entsprechenden Beiträge $P_f\phi_h(x)P_i$ zu dem Feld auf $\mathbb{R}$ drücken sich durch unterschiedliche ε-Vorschriften in dem singulären Vorfaktor des Transformationsgesetzes aus:

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}(g)P_f\phi(x)P_i\mathcal{U}(g)^{-1}\\ &\quad= [c(x+i\varepsilon)+d]^{-h+h_i-h_f}\,[c(x-i\varepsilon)+d]^{-h-h_i+h_f}\,P_f\phi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)P_i \ .\end{aligned}$$

Für „kleine“ Transformationen in der Umgebung $cx+d>0$ der Gruppeneins stimmt der Vorfaktor mit den früheren überein. Für große Transformationen g, die über $g(x)=\infty$ hinausgehen, spezifiziert er den bislang undefiniert gebliebenen Faktor.

Ein primäres Feld existiert also nicht in dem naiven Sinne wie bisher angenommen; eine gegebene Linearkombination seiner Komponenten ist nicht stabil unter konformen Transformationen, und durch Addition und Subtraktion einer Kombination mit allen ihren konform-transformierten (an derselben Stelle x) wird es möglich sein, die einzelnen Komponenten zu isolieren. Es ist also sinnvoller, das Objekt $\phi_h(x)$ auf dem ganzen HILBERT-Raum aufzugeben und stattdessen interpolierende primäre Felder $\phi_e : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}_\beta$ zwischen den verschiedenen Sektoren (inäquivalente Darstellungen von T) zu betrachten. Hierbei ist e ein Multi-Index, der sowohl die beiden Quell- und Ziel-Sektoren als auch die konforme Familie γ (also insbesondere die primäre Dimension h) des Feldes ϕ_h angibt. Natürlich sind (α,β,γ) durch die Fusionsregel eingeschränkt. Man spricht auch von (verallgemeinerten) Vertexoperatoren, da ein solches Feld eine „Kopplung“ $\phi_\gamma\phi_\alpha \mapsto \phi_\beta$ beschreibt. Alle ϕ_e zu einem gegebenen γ haben dieselben Vertauschungsrelationen mit dem Energie-Impuls-Tensor, die ja nur von der Skalendimension abhängen. ϕ_e heißen *Austauschfelder*. Wir schreiben auch ${}_\beta[\phi_\gamma]_\alpha = \phi_e$.

Schauen wir uns nun eine Vier-Punkt-Funktion an, so gibt es offenbar i. a. mehrere Möglichkeiten, eine Kette von Austauschfeldern (mit gegebenen γ_i) anzugeben,

die sukzessive den Vakuumsektor mit anderen Sektoren und schließlich wieder mit dem Vakuumsektor verbinden: In dem Produkt von Operatoren

$$(\Omega, {}_0[\phi_{\gamma_1}]_{\overline{\gamma}_1\ \overline{\gamma}_1}[\phi_{\gamma_2}]_{\gamma\ \gamma}[\phi_{\gamma_3}]_{\gamma_4\ \gamma_4}[\phi_{\gamma_4}]_0\,\Omega)$$

ist der „intermediäre“ Sektor γ beliebig und nur durch die Fusionsregeln von $\overline{\gamma}_1 \cdot \gamma_2$ und $\gamma_3 \cdot \gamma_4$ eingeschränkt. ($\overline{\gamma}_1$ ist der Sektor des konjungierten Felder $(\phi_{\gamma_1})^*$; in minimalen Modellen sind aber alle Sektoren durch die primäre Dimension h eindeutig fixiert und daher automatisch selbstkonjungiert.)

Die verschiedenen Lösungen der WARDidentität-Differentialgleichungen sind mit den verschiedenen „Interpolationskanälen“ zu identifizieren. Die richtige Zuordnung erhält man durch Einsetzen eines Operators $e^{2\pi i L_0}$ zwischen den Feldern, der den intermediären Sektor testet:
Im Sektor γ zur Skalendimension h_γ ist $e^{2\pi i L_0} = e^{2\pi i h_\gamma}$.
Da $e^{i\varphi L_0}$ die Transformation $z \mapsto e^{i\varphi} z$ erzeugt, müssen wir das entsprechende Verhalten der Vier-Punkt-Funktionen

$$\begin{aligned}\prod_{i<j} \Delta(x_i - x_j)^{p_{ij}} F\left(x = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}\right) \\ = \prod_{i<j} \tilde{\Delta}(z_i - z_j)^{p_{ij}} F\left(x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}\right)\end{aligned}$$

studieren.
Wir wählen $p_{12} = p_{34} = 0$ und finden, daß bei konstanten z_1 und z_2 und bei der analytischen Fortsetzung $z_3 \mapsto e^{2\pi i} z_3$, $z_4 \mapsto e^{2\pi i} z_4$ alle Differenzen $z_{i>} - z_j$ $(i < j)$ unverändert bleiben mit Ausnahme von $z_{3>} - z_4 \mapsto e^{2\pi i}(z_{3>} - z_4)$, also transformiert sich $x \mapsto e^{2\pi i} x$.
Der erwartete Eigenwert von $e^{2\pi i L_0} = e^{2\pi i h}$ manifestiert sich also durch einen Schnitt der Funktion F bei $x = 0$ der Form $F(x) \sim x^{h - h_3 - h_4}(1 + \text{Potenzreihe})$, denn $e^{2\pi i(h_3 + h_4)} F(e^{2\pi i} x) = e^{2\pi i h} F(x)$.
Beipiel: $m = 3$, $c = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{16}$ und $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_{1,2} = \phi_h$ (ISING-Modell).
Die Differentialgleichung für $W^{(4)}(x) = \left(\frac{\Delta_{12}\Delta_{34}\Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}\Delta_{24}}\right)^{2h} F(x)$ lautet $x(1-x)f'' + \frac{2}{3}(1-4h)(1-2x)f' + \frac{4h}{3}(1-4h)f = 0$ mit $h = \frac{1}{16}$. Sie hat zwei linear unabhängige Lösungen:

$$\begin{aligned} W^{(4)}(x) &= \left(\frac{\Delta_{12}\Delta_{34}\Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}\Delta_{24}}\right)^{\frac{1}{8}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1-x}} \\ &= (\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{13}\Delta_{24})^{\frac{1}{16}} x^{-\frac{1}{8}} (1-x)^{-\frac{1}{16}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1-x}}\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $f_+(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$ ist regulär bei $x = 0$ und läßt sich dort in eine TAYLOR-Reihe entwickeln: $f(x) = \sqrt{2}(1 - \frac{1}{8}x \cdots)$. Die Funktion $f_- =$

$\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ verhält sich bei $x=0$ wie

$$\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\cdots\right)}=\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}\cdots}=\sqrt{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{8}x+\cdots\right)\ .$$

Den beiden Lösungen entsprechen die Eigenwerte $e^{2\pi i L_0}=1$ und $e^{2\pi i L_0}=e^{2\pi i\frac{1}{2}}=-1$, und damit diese wiederum den Fusionskanälen

$$(\Omega,{}_0\phi_{\frac{1}{16}}\phi_0\phi_{\frac{1}{16}}\phi_0\Omega)\quad\text{und}\quad(\Omega,{}_0\phi_{\frac{1}{16}}\phi_{\frac{1}{2}}\phi_{\frac{1}{16}}\phi_0\Omega),$$

bzw. den Fusionsregeln $\left[\frac{1}{16}\right]\times\left[\frac{1}{16}\right]=[0]+\left[\frac{1}{2}\right]$.

4.8 Austausch-Algebra

Die WARD-Identitäten, als Differentialgleichungen formuliert, sind unabhängig von der Reihenfolge der Feldoperatoren, da die Kommutatoren mit L_n aufgrund der LEIBNIZ-Regel sich einfach für alle Felder addieren. Dies bedeutet, daß

$$(\Omega,\phi_1(x_1)\cdots\phi_N(x_n)\Omega)$$

und

$$(\Omega,\phi_{\pi(1)}(x_{\pi(1)})\cdots\phi_{\pi(N)}(x_{\pi(N)})\Omega),\qquad\pi\in S_N\ \text{Permutation}$$

dieselben Differentialgleichungen lösen. Insbesondere ist jeder permutierte konforme Block

$$(\Omega,\phi_{\pi(1)}(x_{\pi(1)})P_{\alpha'}\cdots P_{\gamma'}\phi_{\pi(N)}(x_{\pi(N)})\Omega)$$

eine Linearkombination der konformen Blocks

$$(\Omega,\phi_1(x_1)P_\alpha\cdots P_\gamma\phi_N(x_N)\Omega)\ .$$

Die Koeffizienten solcher Linearkombinationen bilden eine Matrix in den Indexketten $(\alpha\cdots\gamma)$ bzw. $(\alpha'\cdots\gamma')$.
Beispielsweise ändert sich in einer Drei-Punkt-Funktion bei der Vertauschung von ϕ_2 und ϕ_3 nur das Vorzeichen von $x_2-x_3-i\varepsilon\mapsto x_3-x_2-i\varepsilon$. Es ist aber bei $x\neq 0$

$$\Delta(-x)^h=e^{\pm i\pi h}\Delta(+x)^h$$

so daß sich $(\Omega,\phi_1\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\Omega)\sim\Delta_{23}^{h_2+h_3-h_1}$ von $(\Omega,\phi_1\phi_3(x_3)\phi_2(x_2)\Omega)$ nur um eine Phase $e^{\pm i\pi(h_2+h_3-h_1)}$ unterscheidet, deren Vorzeichen $\pm$ mit dem Vorzeichen

von $x_3 - x_2$ übereinstimmt. Wir können dies als Vertauschungsrelation abstrahieren:

$$ {}_1[\phi_2]_3(x_2) \cdot {}_3[\phi_3]_0(x_3) = e^{\pm iu\pi(h_2+h_3-h_1)} {}_1[\phi_3]_2(x_3) \cdot {}_2[\phi_2]_0(x_2) \; . $$

Eingesetzt in eine Vier-Punkt-Funktion mit der Ersetzung $(1,2,3 \mapsto \alpha,3,4)$ mit dem Fusionskanal α folgt $W^{(\alpha)}_{1234} = e^{\pm i\pi(h_3+h_4-h_\alpha)} W^{(\alpha)}_{1243}$.
Hierbei hängt das Vorzeichen im Exponenten nicht etwa vom Vorzeichen von x ab (x ist eine kollektive Koordinate $\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}} = \frac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{12}\Delta_{34}}$); vielmehr sind $F(x)$ als Randwerte von analytischen Funktionen in der Vorwärtsröhre zu betrachten. Als solche sind sie singulär an den Punkten $x_i = x_j$, d. h. $x = 0, x = 1$ und $x = \infty$. Der Vergleich von konformen Blocks an der Stelle x und an der Stelle $\frac{-x}{1-x}$ erfordert eine analytische Fortsetzung um den Punkt $x_3 = x_4$, d. h. $x = 0$ herum, und diese Fortsetzung muß innerhalb der Vorwärtsröhre verlaufen. Es stellt sich heraus, daß das *Vorzeichen* von $x_4 - x_3$ mit dem *Umlaufsinn* der Kurve $x \to \frac{-x}{1-x}$ korreliert ist: Ist etwa $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ $(0 < x < 1)$, so verläuft die Kurve zu $\frac{-x}{1-x} < 0$ über Punkte mit negativem Imaginärteil ($x_3 - x_4 - i\varepsilon$ bei $x_3 \approx x_4$); dies entspricht dem negativen Umlaufsinn um $x = 0$ herum. In diesem Sinne ist also die oben genannte Relation zwischen permutierten konformen Blocks zu verstehen; in der Tat, die Funktionen

$$ f_\pm(x) = \sqrt{1 \pm \sqrt{1-x}} $$

erfüllen

$$ \begin{aligned} f_+\left(\frac{-x}{1-x}\right) &= \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{1-x}}} = (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\sqrt{1+x}+1} \\ &= (1-x)^{-\frac{1}{4}} f_+(x) \\ f_-\left(\frac{-x}{1-x}\right) &= \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{1-x}}} = (1-x)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\sqrt{1-x}-1} \\ &= e^{\pm i\frac{\pi}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} f_+(x) \qquad (\pm = \mathrm{sign}(x_4 - x_3)) \; , \end{aligned} $$

während der zusätzliche Faktor $x^{-\frac{1}{8}}(1-x)^{-\frac{1}{16}}$ unter analytischer Fortsetzung in $e^{\pm i\frac{\pi}{8}}(1-x)^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{8}}(1-x)^{-\frac{1}{16}}$ übergeht, insgesamt

$$ \begin{aligned} W_+(x_1x_2x_3x_4) &= e^{\pm(-i\frac{\pi}{8})} W_+(x_1x_2x_4x_3) \\ W_-(x_1x_2x_3x_4) &= e^{\pm(i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{8})} W_-(x_1x_2x_4x_3) \; . \end{aligned} $$

Komplizierter wird es bei der Vertauschung „in der Mitte“ einer N-Punkt-Funktion. Zunächst sehen wir, daß die Singularität bei $x_i = x_{i+1}$ unabhängig von denen bei $x_j = x_{j+1}$ $(j \neq i)$ ist. Da deren Struktur die Zwischensektoren bestimmt, ist der permutierte konforme Block

$$ (\Omega, (\phi_1)_\alpha \cdots {}_\beta(\phi_{i+1})_\gamma (\phi_i)_\delta \cdots {}_\varepsilon(\phi_N)\Omega) $$

eine Linearkombination der Blocks

$$(\Omega, (\phi_1)_\alpha \cdots {}_\beta(\phi_i)_{\gamma'}(\phi_{i+1})_\delta \cdots {}_\varepsilon(\phi_N)\Omega)$$

wobei nur γ' ein variabler Sektorlabel ist (eingeschränkt durch die Fusionsregeln natürlich). Die Koeffizienten dieser Matrix (in γ, γ') sind nicht allein durch die Werte der konformen Dimension bestimmt. Vielmehr sind sie, etwa durch Berechnung der konformen Blocks und Berechnung ihres Verhaltens bei $x_i \leftrightarrow x_{i+1}$, zu bestimmen.

Beispielsweise lesen wir für die Vier-Punkt-Funktionen des ISING-Modells bei $x_2 \leftrightarrow x_3$, $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$ ab:

$$\begin{aligned} f_+\left(\frac{1}{x}\right) &= \sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = x^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{-i}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}+\sqrt{i}\sqrt{1-\sqrt{1-x}}\right) \\ f_-\left(\frac{1}{x}\right) &= \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = x^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{i}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}+\sqrt{-i}\sqrt{1-\sqrt{1-x}}\right) \end{aligned}$$

bei analytische Fortsetzung in negativem Umlaufsinn um den Schnitt bei $x = 1$ herum (dies entspricht $x_2 > x_3$), also

$$_{\frac{1}{16}}[\phi]_\gamma(x_3)_\gamma\,[\phi]_{\frac{1}{16}}(x_2) = \sum_{\gamma'} M_{\gamma\gamma'}\,{}_{\frac{1}{16}}[\phi]_{\gamma'}(x_2)_{\gamma'}\,[\phi]_{\frac{1}{16}}(x_3)$$

mit

$$(M_{\gamma\gamma'})_{\gamma,\gamma'\in\{0,\frac{1}{2}\}} = e^{i\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{-i} & \sqrt{i}\\ \sqrt{i} & \sqrt{-i}\end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad x_2 > x_3$$

und der inversen Matrix für $x_2 < x_3$.

Diese nicht-lokalen Vertauschungsrelationen treten an die Stelle der Lokalität. Sie sind nicht Input (wie in der WIGHTMAN-Theorie der lokalen Felder), sondern Output der expliziten Konstruktionen der Korrelationsfunktionen.

Die Matrizen $M_{\gamma\gamma'}$ für jedes Paar von Feldern und für jedes Paar von „Randsektoren“ β und δ unterliegen nichtlinearen Nebenbedingungen. Die wichtigste davon folgt aus der Assoziativität der Felder: denn ein Produkt von drei Feldoperatoren

$${}_\alpha(\phi_1)_{\beta'}(\phi_2)_{\gamma'}(\phi_3)_\delta$$

läßt sich auf zwei verschiedene Arten durch drei Vertauschungen in die Umgekehrte Reihenfolge

$${}_\alpha(\phi_3)_{\beta'}(\phi_2)_{\gamma'}(\phi_1)_\delta$$

bringen. Die resultierenden Identitäten zwischen den Vertauschungsmatrizen

$$M_i M_{i+1} M_i = M_{i+1} M_i M_{i+1}$$

(wobei M_i die Matrix für die Felder in Position i und $i+1$ einer N-Punkt-Korrelation ist), ebenso wie die Unabhängigkeit von Vertauschungen, an denen keine gemeinsame Felder beteiligt sind:

$$M_i M_j = M_j M_i \quad , \qquad |i-j| \geq 2$$

definieren eine Darstellung der Zopf-Gruppe. Wir sprechen daher von Zopfgruppen-Vertauschungsrelationen bzw. Zopfgruppen-Statistik. (Die zusätzliche Relation $M_i^2 = \mathbb{1}$, die hier aber nicht gilt, würde die Zopfgruppe auf die Permutationsgruppe reduzieren. Dies wäre die übliche (Para)-Statistik, wie sie in höheren Dimensionen gültig ist.)

Für das Feld $\phi_{\frac{1}{16}}$ des ISING-Modells haben wir also die Darstellung der Zopfgruppe

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-i} & \sqrt{i} \\ \sqrt{i} & \sqrt{-i} \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(bis auf einen gemeinsamen Faktor $e^{i\frac{\pi}{8}}$) gefunden.

Eine vollständige Klassifikation von Darstellungen der Zopfgruppe (oder auch nur solcher des Austausch-Typs, wie hier beschrieben) liegt nicht vor. Jedoch sind die Darstellungen für die minimalen Modelle (und andere) vollständig berechnet worden.

Kapitel 5

Modelle mit Eichsymmetrie

5.1 Stromalgebren

Wir wollen weitere Klassen von lokalen chiralen Quantenfeldtheorien einführen, die über die Algebra des Energie-Impuls-Tensors (Kapitel 2.4) hinausgehen. Als Beispiel hatten wir bereits den Strom eines geladenen chiralen Fermions $j =: \psi^* \psi :$ kennengelernt (Kapitel 2.3). Dieser kommutiert mit dem FERMI-Feld gemäß

$$\begin{array}{rrcl} & [j(x), \psi(y)] & = & -\psi(y)\delta(x-y) \\ \Leftrightarrow & [j(f), \psi(y)] & = & -f(y)\psi(y) \\ \Leftrightarrow & e^{ij(f)}\psi(y)e^{-ij(f)} & = & e^{-if(y)}\psi(y) \ , \end{array}$$

d. h. $W(f) = e^{ij(f)}$ implementiert lokale Eichtransformationen des FERMI-Feldes, und der Strom ist der infinitesimale Erzeuger der lokalen Eichtransformation. Die zugehörige globale Symmetrie ist $U(1)$: $\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi$, die von $Q = \int j(x) \mathrm{d}x = j(f)$ mit der konstanten Testfunktion $f = 1$ erzeugt wird.
Diese Situation läßt sich leicht verallgemeineren. Eine Theorie mit N komplexen FERMI-Feldern

$$\{\psi_i^*(x), \psi_j(y)\} = \delta_{ij}\delta(x-y) \qquad i,j = 1, \ldots, N$$

besitzt offenbar eine globale und lokale $U(N)$-Symmetrie

$$\psi_i \mapsto \psi_j g_{ji} \qquad g \in U(N)$$

($g = \text{const.}$ oder $g = g(x)$).
Die Erzeuger dieser Symmetrie sind die nicht-abelschen Ströme

$$j^a = :\psi_i T^a_{ij} \psi^*_j : = T^a_{ij} :\psi_i \psi^*_j : \ , \tag{5.1}$$

wobei T^a, $a = 0, \ldots, \dim u(N) - 1 = N^2 - 1$, die hermiteschen Erzeuger der LIE-Algebra $u(N)$ sind. Es folgen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{array}{rrcl} & [j^a(x), \psi_j(y)] & = & \psi_i(y) T^a_{ij} \delta(x-y) \\ \Leftrightarrow & [j(f), \psi_j(y)] & = & \psi_i(y)\Lambda(y)_{ij} \\ \Leftrightarrow & W(f)\psi_j(y)W(f)^{-1} & = & \psi_i(y) g(y)_{ij} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rrcl} & [j^a(x), \psi_i^*(y)] & = & -T^a_{ij}\psi_j^*(y)\delta(x-y) \\ \Leftrightarrow & [j(f), \psi_i^*(y)] & = & -\Lambda(y)_{ij}\psi_j^*(y) \\ \Leftrightarrow & W(f)\psi_i^*(y)W(f)^{-1} & = & g^{-1}(y)_{ij}\psi_j^*(y)\ . \end{array}$$

Dabei ist $\Lambda(y) := \sum_{a=0}^{N^2-1} f_a(y)T^a$ eine LIE-Algebra-wertige Funktion und $j(f) := \int \sum_{a=0}^{N^2-1} f_a(x)j^a(x)\mathrm{d}x$, sowie $g(y) := e^{i\Lambda(y)} \in U(N)$ die entsprechende exponentierte gruppenwertige Funktion und $W(f) := e^{ij(f)}$.
Die Ströme sind also wieder die Erzeuger der lokalen Eichtransformationen, wobei sich das Multiplett ψ in der (definierenden) Vektor-Darstellung von $U(N)$ gemäß $\psi \mapsto \psi g$ und ψ^* in der konjugierten Vektor-Darstellung $[(g^{-1})_{ik} = \overline{g_{ki}}]$ gemäß $\psi^* \mapsto g^*\psi^*$ transformiert.
Die Erzeuger der globalen Symmetrie sind natürlich

$$Q^a = \int j^a(x)\mathrm{d}x\ ,$$

so daß

$$[Q^a, \psi] = \psi \cdot T^a\ , \qquad [Q^a, \psi^*] = -\psi^*\overline{T}^a = -T^a\psi^*$$

gilt. Wir haben in (5.1) und allem, was folgt, die Notation gegenüber dem abelschen Fall (Kapitel 2.3) leicht verändert: dort hatten wir die Ströme und Ladungsoperatoren so gewählt, daß das FERMI-Feld („Elektron“) negative Ladung trägt: $[Q, \psi] = -\psi$, was der „konjugierten Vektor-Darstellung“ von $U(1)$ (als Spezialfall von $U(N)$ betrachtet) entspricht. Diese Konvention der negativen Ladung im allgemeinen Fall aufrechtzuerhalten, würde eine Unzahl von störenden Minuszeichen mit sich bringen und wurde hier deswegen aufgegeben. Durch die Ersetzung $\psi \mapsto \psi^*$ (Ladungskonjugation C) kann man jederzeit zu ihr zurückkehren.

Wir schauen uns zunächst eingehender den $U(1)$-Spezialfall an. Wir wissen bereits

$$\begin{array}{rcl} j(x) & := & :\psi\psi^*:(x) \\ & := & \lim\limits_{x'\to x}\left(\psi(x)\psi^*(x') - \dfrac{\Delta(x-x')}{2\pi}\right)\ , \\ [j(x), \psi(y)] & = & \psi(y)\delta(x-y)\ , \\ [j(x), \psi^*(y)] & = & -\psi^*(y)\delta(x-y)\ . \end{array}$$

Den Kommutator von j mit sich selbst berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
[j(x),j(y)] &= [j(x),:\psi\psi^*:(y)] \\
&= \left[j(x),\lim_{y'\to y}\left(\psi(y)\psi^*(y')-\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right)\right] \\
&= \lim_{y'\to y}\left[(\psi(y)\delta(x-y))\psi^*(y')+\psi(y)(-\psi^*(y')\delta(x-y'))\right] \\
&= \lim_{y'\to y}(\delta(x-y)-\delta(x-y'))\psi(y)\psi^*(y') \\
&= \lim_{y'\to y}(\delta(x-y)-\delta(x-y'))\left(\psi(y)\psi^*(y')-\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right) \\
&\quad + \lim_{y'\to y}(\delta(x-y)-\delta(x-y'))\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\ .
\end{aligned}$$

Der erste Limes verschwindet, da der zweite Faktor bei $y'\to y$ regulär ist (er ergibt ja gerade $j(y)$). Der erste Faktor des zweiten Limes kann (als Distribution!) nach y' an der Stelle y in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{y'\to y}[(\delta(x-y)-\delta(x-y'))\Delta(y-y')] &= \\
\lim_{y'\to y}[\delta'(x-y)(y'-y)\Delta(y-y')] &= i\delta'(x-y)\ ,
\end{aligned}$$

da $\Delta(y-y')=\frac{-i}{y-y'-i\varepsilon}$. Also erhalten wir den c-Zahl-Kommutator

$$[j(x),j(y)]=\frac{i}{2\pi}\delta'(x-y)\ .$$

Der $U(1)$-Strom ist, obwohl quadratisch in freien Fermionen, ein kanonisches freies BOSE-Feld der Skalendimension 1.
Nach Integration über x ergibt sich

$$[Q,j(y)]=0\ ,$$

d. h. der Strom ist selber ein neutrales Feld unter der $U(1)$-Symmetrie, da er aus entgegengesetzt geladenen Fermionen konstruiert ist.
In der (höher-dimensionalen) Phänomenologie der schwachen Wechselwirkung ist der c-Zahl-Term des Kommutators als „SCHWINGER-Term“ bekannt; er stellt eine Abweichung („Anomalie“) von der naiven Extrapolation $[Q,j]=0\Rightarrow\int[j,j]=0\overset{??}{\Rightarrow}[j,j]=0$ dar. Er muß natürlich anwesend sein, da seine Amplitude die Zwei-Punkt-Funktion festlegt:

$$\begin{aligned}
(\Omega,j(x)j(y)\Omega) &= A\cdot\Delta(x-y)^2\Rightarrow \\
(\Omega,[j(x),j(y)]\Omega) &= A\left[\Delta(x-y)^2-\Delta(y-x)^2\right]=A2\pi i\delta'(x-y)\ .
\end{aligned}$$

Wäre der Kommutator Null, also $A=0$, so wäre die Zwei-Punkt-Funktion Null und mit dem REEH-SCHLIEDER-Theorem $j\equiv 0$.

Offenbar ist also stattdessen $A = \frac{1}{(2\pi)^2}$, wie auch aus der Definition berechnet werden kann:

$$\begin{aligned}(\Omega, j(x)j(y)\Omega) &= (\Omega, :\psi\psi^*:(x) :\psi\psi^*:(y)\Omega) \\ &= (\Omega, :\underbrace{\psi\psi^*:(x) :\psi\psi^*}:(y)\Omega) \\ &= (\Omega, \psi(x)\psi^*(y)\Omega)(\Omega, \psi^*(x)\psi(y)\Omega) \\ &= \frac{\Delta(x-y)}{2\pi}\frac{\Delta(x-y)}{2\pi} = \frac{\Delta(x-y)^2}{(2\pi)^2} \ .\end{aligned}$$

Wir berechnen die Vertauschungsrelation des Stromes mit dem Energie-Impuls-Tensor der Fermionen $T = \frac{i}{2} :\psi \overleftrightarrow{\partial} \psi^*:$

$$\begin{aligned}[T(x), j(y)] &= \lim_{y' \to y} \left[T(x), \psi(y)\psi^*(y') - \frac{\Delta(y-y')}{2\pi} \right] \\ &= i \lim_{y' \to y} \Big\{ \quad \left(-\psi'(y)\delta(x-y) + \tfrac{1}{2}\psi(y)\delta'(x-y)\right)\psi^*(y') \\ &\qquad + \psi(y)\left(-\psi^{*\prime}(y')\delta(x-y') + \tfrac{1}{2}\psi^*(y')\delta'(x-y')\right) \Big\} \\ &= i \lim_{y' \to y} \Big\{ \quad \delta(x-y)\partial_y \left(\tfrac{\Delta(y-y')}{2\pi} - \psi(y)\psi^*(y')\right) \\ &\qquad + \delta(x-y')\partial_{y'} \left(\tfrac{\Delta(y-y')}{2\pi} - \psi(y)\psi^*(y')\right) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(\delta'(x-y) + \delta'(x-y'))\left(\psi(y)\psi^*(y') - \tfrac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right) \Big\} \\ &\quad + \tfrac{i}{2\pi} \lim_{y' \to y} \Big\{ -(\delta(x-y) - \delta(x-y'))\Delta'(y-y') \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(\delta'(x-y) + \delta'(x-y'))\Delta(y-y') \Big\} \ .\end{aligned}$$

In der ersten Klammer liefert der erste Term $-\delta(x-y) :\psi'\psi^*:(y)$, der zweite $-\delta(x-y) :\psi\psi^{*\prime}:(y)$ und der dritte $\delta'(x-y) :\psi\psi^*:(y)$. Zusammen sind diese $-j'(y)\delta(x-y) + j(y)\delta'(x-y)$.
Die zweite Klammer verschwindet nach TAYLOR-Entwicklung bis zur zweiten Ordnung: Aus

$$\delta(x-y') - \delta(x-y) = -(y'-y)\delta'(x-y) + \frac{1}{2}(y'-y)^2\delta''(x-y)$$

und

$$\Delta'(y-y') = \frac{i}{(y-y'-i\varepsilon)^2} = \frac{1}{y'-y+i\varepsilon}\Delta(y-y')$$

folgt

$$\text{erster Term} \;=\; -\delta'(x-y)\Delta(y-y') + \frac{i}{2}\delta''(x-y)\;.$$

Aus

$$\delta'(x-y') \;=\; \delta'(x-y) - (y'-y)\delta''(x-y)$$

folgt

$$\text{zweiter Term} \;=\; +\delta'(x-y)\Delta(y-y') - \frac{i}{2}\delta''(x-y)\;.$$

Es ergibt sich also das Endresultat

$$\begin{aligned} -i[T(x),j(y)] &= -\partial_y(j(y)\delta(x-y)) \\ &= -j'(y)\delta(x-y) + j(y)\delta'(x-y)\;. \end{aligned}$$

Diese Vertauschungsrelation besagt, daß j ein primäres konform invariantes Feld mit Skalendimension 1 ist (s. Formel (4.1)).
Da j ein freies Feld ist, lassen sich seine WICK-Produkte durch bosonische Normalordnung definieren:

$$:j^2:(x) := \lim_{x'\to x}\left(j(x)j(x') - \frac{1}{(2\pi)^2}\Delta(x-x')^2\right)\;.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \pi\left[:j^2:(x), j(y)\right] &= \frac{1}{2}\lim_{x'\to x}\left(i\delta'(x-y)j(x') + i\delta'(x'-y)j(x)\right) \\ &= ij(x)\delta'(x-y) \\ &= i(j(y)\delta'(x-y) - j'(y)\delta(x-y))\;. \end{aligned}$$

Dies ist derselbe Kommutator wie $[T(x), j(y)]$. Offenbar kommutiert das Feld $T - \pi\,:j^2:$ mit dem Strom!
Dieses Feld ist sogar Null; dazu kann man entweder seine Zwei-Punkt-Funktion berechnen, oder man überprüft, daß es sogar mit dem FERMI-Feld ψ kommutiert.
Da die FOCKraum-Darstellung des Fermions irreduzibel ist, muß $T - \frac{1}{2}\,:j^2:$ ein Vielfaches der 1 sein, und da sein Vakuum-Erwartungswert verschwindet, ist es Null.
Dies liefert die Feldrelation zwischen freien FERMI- und BOSE-Feldern

$$\pi\,:j^2: = T = \frac{i}{2}\,:\psi\overleftrightarrow{\partial}\psi^*:\;,$$

wobei $j = :\psi\psi^*:$ selber quadratisch in FERMI-Feldern ist. (Die Symbole $:\ldots:$ bedeuten hier von Fall zu Fall die bosonische und die fermionische WICK-Ordnung).

Dieser Energie-Impuls-Tensor eines komplexen Fermions bzw. eines $U(1)$-Stroms hat die zentrale Ladung $c = 1$, wie wir schon aus Kapitel 2.4 wissen.

Wir betrachten nun die $U(N)$-Theorie mit N komplexen Fermionen.
Jedes einzelne FERMI-Feld ψ_i hat „seinen“ $U(1)$-Strom $j_i = :\psi_i\psi_i^*:$ und „seinen“ Energie-Impuls-Tensor $T_i = \frac{i}{2} :\psi_i \overleftrightarrow{\partial} \psi_i^*:$. Der totale Energie-Impuls-Tensor ist die Summe der T_i, da die Fermionen voneinander entkoppelt sind:

$$T_{tot} = \sum_{i=1}^{N} T_i = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{N} :\psi_i \overleftrightarrow{\partial} \psi_i^*: ,$$

und hat zentrale Ladung $c_{tot} = N$, da die T_i untereinander kommutieren und folglich die $c_i = 1$ sich addieren.
Jeder einzelne $U(1)$-Strom j_i erzeugt die Transformation $\psi_i \mapsto e^{i\alpha}\psi_i$ und läßt die übrigen Komponenten des FERMI-Feldes invariant. Dagegen erzeugt der „diagonale“ Strom

$$j^0 := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i j_i$$

die simultane Eichtransformation $(\psi_i)_i \mapsto e^{i\alpha}(\psi_i)_i$, die der diagonalen Untergruppe $U(1) = \{e^{i\alpha}\mathbb{1}\} \subset U(N)$ entspricht. j^0 entspricht dem Erzeuger $T^0 = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{1}$ der $u(N)$ (mit der Normierung $\mathrm{Tr}(T^0T^0) = 1$) (s. (5.1)).
Es ist sinnvoll, die LIE-Algebra $u(N)$ in ihr abelsches Ideal $u(1)$ und die einfache Lie-Algebra $su(N)$ zu zerlegen:

$$u(N) = u(1) \oplus su(N) ,$$

und für die Erzeuger der $su(N)$ eine Basis T^a, $a = 1, \ldots, N^2 - 1$ mit den Strukturkonstanten

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{ab}{}_c T^c$$

einzuführen.
Wir wollen nun die Kommutatoren der Ströme j^0 und j^a berechnen.
Zunächst stellen wir fest, daß der $U(1)$-Strom j^0 als normierte Summe der Ströme $j_i = :\psi_i\psi_i^*:$ wieder die Vertauschungsrelation

$$\left[j^0(x), j^0(y)\right] = \frac{i}{2\pi}\delta'(x - y)$$

erfüllt. Denn die j_i kommutieren untereinander, und jedes von ihnen liefert einen Kommutator $\frac{i}{2\pi}\delta'(x-y)$, wobei der Faktor N, der von der Anzahl der Fermionen herrührt, durch die Normierung kompensiert wird.

Als nächstes beobachten wir, daß j^0 für $a = 1, \ldots, N^2-1$ mit j^a kommutiert. Denn $[j^0(x), \psi_i(y)] = \frac{1}{\sqrt{N}}\psi_i(y)\delta(x-y)$ und

$$\begin{aligned}
\left[j^0(x), j^a(y)\right] &= \lim_{y'\to y}\left[j^0(x), T^a_{ij}\left(\psi_i(y)\psi^*_j(y') - \delta_{ij}\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right)\right] \\
&= \lim_{y'\to y}\frac{1}{\sqrt{N}}T^a_{ij}\psi_i(y)\psi^*_j(y')(\delta(x-y)-\delta(x-y')) \\
&= \lim_{y'\to y}\frac{1}{\sqrt{N}}T^a_{ij}\left(\psi_i(y)\psi^*_j(y') - \delta_{ij}\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right)(\delta(x-y)-\delta(x-y')) \\
&\quad + \lim_{y'\to y}\frac{1}{\sqrt{N}}T^a_{ij}\left(\delta_{ij}\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right)(\delta(x-y)-\delta(x-y')) \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Die erste Klammer im ersten Limes ist regulär für $y' \to y$, und die zweite Klammer verschwindet. Da T^a als Erzeuger von $SU(N)$ spurfrei ist, verschwindet auch der c-Zahl-Korrekturterm.
Schließlich berechnen wir nach demselben Verfahren die Kommutatoren der $SU(N)$-Ströme untereinander. Zunächst bekommen wir

$$\begin{aligned}
\left[j^a(x), j^b(y)\right] &= \lim_{y'\to y}\left[j^a(x), T^b_{ij}(\psi_i(y)\psi^*_j(y') - \delta_{ij}\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right] \\
&= \lim_{y'\to y} T^b_{ij}\left\{\delta(x-y)T^a_{ki}\psi_k(y)\psi_j(y') - \delta(x-y')T_{jk}\psi_i(y)\psi^*_k(y')\right\} \\
&= \lim_{y'\to y}\Bigg\{\delta(x-y)(T^aT^b)_{kj}\left(\psi_k(y)\psi^*_j(y') - \delta_{kj}\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right) \\
&\quad - \delta(x-y')(T^aT^b)_{ik}\left(\psi_i(y)\psi^*_k(y') - \delta_{ik}\frac{\Delta(y-y')}{2\pi}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}(T^aT^b)(\delta(x-y)-\delta(x-y'))\Delta(y-y')\Bigg\}\ .
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Terme liefern zusammen

$$\delta(x-y)(T^aT^b - T^bT^a)_{ki} : \psi_k\psi^*_j : (y) = if^{ab}{}_c j^c(y)\delta(x-y)$$

Der letzte Term (wie früher)

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}(T^aT^b)i\delta'(x-y) = \frac{i}{2\pi}g^{ab}\delta'(x-y)$$

mit der CARTAN-Metrik

$$g^{ab} = \mathrm{Tr}(T^aT^b) = -\frac{1}{2N}f^{at}{}_s f^{bs}{}_t$$

der $SU(N)$. Wir haben also die $SU(N)$-Stromalgebra

$$\left[j^a(x), j^b(y)\right] = if^{ab}{}_c j^c(y)\delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} g^{ab}\delta'(x-y) \; .$$

Der $U(1)$-Strom j^0 kommutiert mit den $SU(N)$-Strömen und erfüllt

$$\left[j^0(x), j^0(y)\right] = \frac{i}{2\pi}\delta'(x-y) \; .$$

Die resultierenden zwei Theorien, die $U(1)$-Ströme und die $SU(N)$-Ströme, werden als unabhängige Modelle betrachtet, da sie untereinander kommutieren. Sie sind beide in den FOCK-Raum der N Fermionen eingebettet: das zeigt, daß die Darstellung auf diesem FOCK-Raum und insbesondere die zugehörigen Vakuum-Erwartungswerte den WIGHTMANschen Axiomen (vor allem Positivität) genügen, da die Fermionen WIGHTMAN-Felder sind.
Darüberhinaus ist die FOCKraum-Darstellung für keine der beiden Stromalgebren irreduzibel. Vielmehr enthält sie inäquivalente Unterdarstellungen, die sich beispielsweise durch die Eigenwerte des $U(1)$-Ladungsoperators $Q = \int j^0(x)\mathrm{d}x$ und das Spektrum des Energie-Impuls-Tensors unterscheiden.[1] So tragen Zustände der Art $\psi(f_1)\cdots\psi(f_n)\Omega$ die $U(1)$-Ladung $Q = n$ und gehören zu einem n-fachen Tensorprodukt der Vektordarstellung von $SU(N)$.
Vom gruppentheoretischen Standpunkt ist die Stromalgebra $\mathfrak{g}$ in der Form

$$[j(f), j(g)] = j([f,g]) + \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\int fg'\mathrm{d}x$$

eine zentrale Erweiterung der LIE-Algebra der $\mathfrak{g}$-wertigen Funktionen. Letztere hat definitionsgemäß die Vertauschungsrelation

$$[T(f), T(g)] = T([f,g]) \; .$$

Die zentrale Erweiterung oder SCHWINGER-Term, d. h. der c-Zahl-Term $\frac{i}{2\pi}g^{ab}$ $\delta'(x-y)$, ist natürlich in der Quantenfeldtheorie unverzichtbar, da sie – wie im Falle der VIRASORO-Algebra – die Ampitude der Zwei-Punkt-Funktion angibt.
Ein allgemeiner Ansatz für zentrale Erweiterungen, der natürlich der JACOBI-Identität genügen muß, ergibt, daß die Form

$$i\frac{k}{2\pi}g^{ab}\delta'(x-y)$$

die einzig mögliche lokale Erweiterung ist, wobei k (der „Level“) ein Operator ist, der mit allen Strömen kommutiert und in der (definierenden und irreduziblen) Vakuumdarstellung eine reelle c-Zahl ist.

[1] Die genaue Spezifizierung der Quantenzahlen, die die inäquivalenten Darstellungen (positiver Energie) der nicht-abelschen Strom-Algebren charakterisieren, erfolgt in Satz 5.1.

Stromalgebren zu höherem ganzzahligen Level $k \in \mathbb{N}$ lassen sich aus der bereits durch die obige Konstruktion („Quark-Modell“) bekannten Level-1-Theorie ganz einfach konstruieren:
Man betrachtet k Kopien der Level-1-Stromalgebra $j^a_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, k$, die auf HILBERT-Räumen $\mathcal{H}_{(\alpha)}$ operieren. Die Ströme

$$J^a := \sum_{\alpha=1}^{k} \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes j^a_{(\alpha)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}$$

operieren auf $\mathcal{H} = \bigotimes_{\alpha=1}^{k} \mathcal{H}_{(\alpha)}$. Ihre Vertauschungsrelationen sind gerade die einer Stromalgebra zum Level k, da sich die zentralen Terme der einzelnen Kommutatoren $[j^a_{(\alpha)}, j^b_{(\alpha)}]$ addieren.
Dieselben Ströme J^a kann man auch auffassen als die Ströme der Untergruppe $\mathrm{Diag}(SU(N) \times \cdots \times SU(N)) \subset SU(kN)$. Die Ströme der Gruppe $SU(kN)$ operieren auf dem FOCK-Raum von kN Fermionen $\mathcal{H}_{kN} = (\mathcal{H}_N)^{\otimes k}$. Die Erzeuger der LIE-Unteralgebra sind $T^a \otimes \mathbb{I} = \sum T^a_{(\alpha)} \subset \bigoplus_{\alpha=1}^{k} su(N) \subset su(kN)$; die entsprechenden Ströme sind genau die oben angegebenen.
Die Ströme j^a zum Level k seien primäre Felder der Skalendimension 1 zu einem Energie-Impuls-Tensor T. (Diesen werden wir später konstruieren.) Die Vertauschungsrelation

$$\begin{aligned} [T(x), j^a(y)] &= -ij^{a\prime}(y)\delta(x-y) + ij^a(y)\delta'(x-y) \\ &= ij^a(x)\delta'(x-y) \end{aligned}$$

übersetzt sich für die FOURIER-Anteile

$$\tilde{j}^a(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum j^a_n z^{-n-1}, \qquad j^a_n = \int_{-\infty}^{\infty} (1+ix)^n (1-ix)^{-n} j^a(x) \mathrm{d}x$$

in die Vertauschungsrelation

$$[L_n, j^a_m] = -m j^a_{m+n} \ .$$

Insbesondere sind j^a_m Auf- bzw. Absteigeoperatoren für L_0, wenn $m < 0$ bzw. $m > 0$ ist. Ein Grundzustand einer Darstellung positiver Energie muß also von j^a_m mit $m > 0$ annihiliert werden.
Die lokale Vertauschungsrelation der Ströme untereinander wird zu

$$\left[j^a_m, j^b_n\right] = i f^{ab}{}_c j^c_{m+n} + k g^{ab} m \delta_{m+n,0} \ .$$

In dieser Form ist die Algebra als KAC-MOODY- oder affine LIE-Algebra bekannt. Offenbar ist die globale LIE-Algebra $\mathfrak{g}$ durch ihre Erzeuger

$$Q^a = \int j^a(x)\, \mathrm{d}x = j^a_0$$

in der affinen LIE-Algebra enthalten. Da $Q^a = j_0^a$ mit L_0 kommutiert, bilden alle Eigenräume von L_0 Darstellungen der LIE-Algebra $\mathfrak{g}$. Insbesondere bilden die Grundzustände von L_0 eine Darstellung D_Λ von $\mathfrak{g}$. In Analogie zu der Konstruktion der VERMA-Moduln der VIRASORO-Algebra kann man Moduln der KAC-MOODY-Algebra aus einem Multiplett von Grundzuständen $|\Lambda, h\rangle$ konstruieren mit $L_0|\Lambda, h\rangle = h|\Lambda, h\rangle$, $Q^a|\Lambda, h\rangle = D^a_\Lambda|\Lambda, h\rangle$ (d. h., Q^a operiert auf dem Multiplett von Grundzuständen wie eine Matrixdarstellung von $\mathfrak{g}$) sowie $L_n|\Lambda, h\rangle = 0 = j^a_n|\Lambda, h\rangle$ für $n > 0$ und deren Positivitätseigenschaften studieren: Moduln für verschiedene Λ und h sind automatisch orthogonal zueinander, denn alle Skalarprodukte lassen sich durch Anwenden der Kommutator- und Annihilationsregeln auf Skalarprodukte

$$(|\Lambda', h'\rangle, \mathrm{Pol}(Q^a, L_0)|\Lambda, h\rangle)$$

zurückführen. In einer irreduziblen Darstellung der KAC-MOODY-Algebra ist folglich auch die Matrixdarstellung Λ von $\mathfrak{g}$ auf den Grundzuständen irreduzibel.

Wir betrachten nun die Stromalgebren zum Level k als eine Familie von neuen, unabhängig von irgendwelchen Fermionen oder etwas anderem gegebenen, lokalen Algebren. Der Parameter $k \in \mathbb{R}$ sei zunächst offen, wobei wir bereits wissen, daß alle $k \in \mathbb{N}$ eine HILBERTraum-Realisierung durch WIGHTMAN-Felder besitzen (Quark-Modell). Wir stellen uns die Frage, ob es vielleicht andere Werte von k gibt, für die solche Realisierungen existieren. Die Antwort gibt der

Satz 5.1 *In einer irreduziblen Darstellung positiver Energie der $SU(N)$-Stromalgebra ist $k \in \mathbb{N}$, und die Grundzustände transformieren sich in einer irreduziblen Darstellung Λ von $su(N)$, deren höchste Gewichte λ im „WEYL-Alkoven“*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i e_i \qquad \textit{mit } \lambda_i \in 0, \ldots, k \textit{ und } \sum \lambda_i \leq k$$

liegen. e_i sind die fundamentalen Gewichte $(1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$. Für $SU(2)$ lautet diese Bedingung $2I \leq k$, wobei I der Isospin der Darstellung Λ ist.

Beweis: Da k zentral ist, ist es in einer irreduziblen Darstellung eine Zahl. Die Positivität der Norm von $j^a_{-1}|\Lambda, h\rangle$ verlangt $k \geq 0$. Es sei nun der Einfachheit halber $G = SU(2)$, und die Grundzustände seien $|I, m, h\rangle$ mit $-I \leq m \leq I$. Nun enthält die KAC-MOODY-Algebra, neben der globalen, eine weitere $su(2)$-Unteralgebra, nämlich $X^+ = j^+_1$, $X^3 = j^3_0 + \frac{k}{2}$, $X^- = j^-_{-1}$ ($j^\pm_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^1_n \pm i j^2_n)$), $[X^+, X^-] = X^3$, $[X^3, X^\pm] = \pm X^\pm$.

Bezüglich dieser Unteralgebra ist jeder Basisvektor $|I, m, h\rangle$ ein Höchstgewichtsvektor von $su(2)$, denn er wird von X^+ annihiliert, und Eigenvektor von X^3 mit Eigenwert $m + \frac{k}{2}$. Das übliche $su(2)$ Argument zur rekursiven Berechnung von

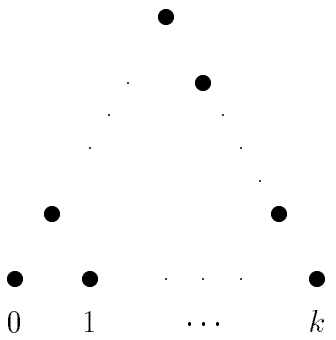

Abbildung 5.1: WEYL-Alkoven (für $SU(3)$)

$\|(X^-)^n|I,m,h\rangle\|^2 \overset{!}{\geq} 0$ verlangt $m + \frac{k}{2} = s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ (der Isospin bzgl. X^a). Es folgt $k = 2(s-m) \in \mathbb{Z}$ und $m \geq -\frac{k}{2}$. Da zu jedem Isospin I alle Eigenwerte $-I \leq m \leq I$ vorkommen, muß $I \leq \frac{k}{2}$ sein.
Für andere Gruppen betrachtet man dasselbe Argument für alle eingebetteten $su(2)$-Unteralgebren. Es folgt, daß die Darstellung Λ bei Einschränkung auf $su(2)$ nur in Unterdarstellungen des Isospin $I \leq \frac{k}{2}$ zerfallen darf. Dies liefert nach einer Analyse im Detail die Behauptung.
Die Stromalgebra des Quarkmodells kommutiert mit den definierenden Fermionen gemäß

$$[j^a(x), \psi(y)] = \psi(y) T^a \delta(x-y) \; .$$

Analog zu der Situation beim Energie-Impuls-Tensor erwarten wir für die Sektoren mit Grundzustands-Darstellung Λ primäre Felder, die diese Sektoren aus dem Vakuum erzeugen. Diese sollen die primäre Vertauschungsrelation mit den Strömen

$$[j^a(x), \psi_\Lambda(y)] = \psi_\Lambda(y) D_\Lambda(T^a) \delta(x-y)$$

und gleichzeitig die früheren primären Vertauschungsrelationen mit dem Energie-Impuls-Tensor mit $h = h(\Lambda)$ (s. Formel (5.2)) erfüllen. Der Begriff „primär“ wird hier jetzt relativ zu der Stromalgebra und ihrem kanonisch assoziierten Energie-Impuls-Tensor (s. Kapitel 5.2) verstanden.
Nullzustände in den (verallgemeinerten) VERMA-Moduln für KAC-MOODY-Algebren führen dann auf gekoppelte lineare Differentialgleichungen für die Korrelationen der Komponenten von ψ_Λ, die durch die Darstellungsmatrizen D^a_Λ gekoppelt sind. Auch solche Differentialgleichungen kann man systematisch (etwa durch Linienintegrale) lösen. Die Mehrdeutigkeit der Lösungen führt wieder auf Austauschfelder und Austauschalgebren, in voller Analogie zu der Situation beim Energie-Impuls-Tensor. (Tatsächlich ist das Konzept der Austauschfelder ganz modell-unabhängig aus der algebraischen Quantenfeldtheorie herleitbar [6].)

5.2 SUGAWARA-Formel

Wir wollen nun den Energie-Impuls-Tensor studieren. Wir haben oben stillschweigend vorausgesetzt, daß auf dem irreduziblen Darstellungsraum der $SU(N)$-Level-k-Stromalgebra auch ein Energie-Impuls-Tensor mit den gegebenen Vertauschungsrelationen existiert. Man sieht aber leicht, daß der „fermionische" Energie-Impuls-Tensor $\frac{i}{2}\sum :\psi_i \overleftrightarrow{\partial} \psi_i^*:$ nicht auf einem irreduziblen Darstellungsraum der Stromalgebra existiert. Denn dieser transformiert auch die $U(1)$-Ströme. Wegen der Entkopplung der $U(1)$- und $SU(N)$-Ströme ist aber die Vakuumdarstellung der $U(N)$-Algebra ein Tensorprodukt $\pi_U \otimes \pi_{SU}$, und der fermionische Energie-Impuls-Tensor muß auf beiden HILBERT-Räumen $\mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_{SU}$ operieren.
Beispielsweise für $N = 2$ und $k = 1$ wissen wir bereits, daß

$$\frac{i}{2} :\psi_i \overleftrightarrow{\partial} \psi_i^*: = T_i = \pi :j_i:^2 ,$$

also

$$T_{Fermi} = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{2}[:(j_1 + j_2)^2: + :(j_1 - j_2)^2:] = \pi :(j^0)^2: + \pi :(j^3)^2: ,$$

wobei der erste Beitrag der Energie-Impuls-Tensor der $U(1)$-Theorie ist und folglich der zweite Beitrag, der auf dem HILBERT-Raum $\mathcal{H}_{SU}$ definiert ist, der Energie-Impuls-Tensor der $SU(N)$-Ströme ist. Eine solche elementare Zerlegung funktioniert noch für beliebige N bei Level $k = 1$, jedoch nicht für höhere Level. Denn der fermionische Energie-Impuls-Tensor enthält alle diagonalen Ströme der einbettenden $U(k \cdot N)$-Theorie, während auf dem HILBERT-Raum der $SU(N)_k$-Theorie nur die speziellen Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^{k} j^{a,i} \equiv \sum \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes j^a \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$$

entsprechend $X^a \otimes \mathbb{1}_k$ operieren.
Die folgende Formel liefert stattdessen einen „kanonischen" Energie-Impuls-Tensor für jede (einfache) Stromalgebra zu beliebigem Level k, der offensichtlich auf jedem Darstellungsraum dieser Algebra definiert ist.

Satz 5.2 (SUGAWARA-Formel) *Das* WIGHTMAN-*Feld*

$$T = \frac{\pi}{k+N} g_{ab} :j^a j^b:$$

kommutiert mit j^a *gemäß*

$$\begin{aligned} -i\,[T(x), j^a(y)] &= -j^{a\prime}(y)\delta(x-y) + j^a(y)\delta'(x-y) \\ &= -\partial_y(j^a(y)\delta(x-y)) \end{aligned}$$

und mit sich selbst wie ein Energie-Impuls-Tensor mit zentraler Ladung

$$c = \frac{k(N^2-1)}{k+N} \ .$$

(Für andere einfache LIE*-Algebren ist (N^2-1) durch die Dimension der Gruppe und $k+N$ durch $k+h^\vee$ zu ersetzen, wobei $h^\vee$ die duale* COXETER*-Zahl der* LIE*-Algebra ist.)*

In einer Basis, in der g_{ab} diagonal ist, treten in der SUGAWARA-Formel nur normalgeordnete Produkte $:j^a j^a:$ auf. Diese werden nach der üblichen WICKschen Vorschrift durch Subtraktion des Vakuumerwartungswertes definiert, denn die Vertauschungsrelationen von j^a – und damit auch die Singularitäten von $j^a j^a$ – sind die eines freien Feldes. Dieselbe Vorschrift versagt aber für $:j^a j^b:$, wenn $f^{ab}{}_c \neq 0$ ist, denn der nichtabelsche Anteil der Vertauschungsrelation von $[j^a, j^b]$ zeigt, daß die Korrelationsfunktionen weitere singuläre Terme enthalten müssen, deren Differenzen bei Umkehrung der Operator-Ordnung gerade diese Kommutatorterme liefern. Die „richtige" Normalordnungsvorschrift für nichtabelsche Ströme ist daher

$$:j^a j^b:(x) := \lim_{x' \to x} \left(j^a(x) j^b(x') - \frac{\Delta^2(x-x')}{(2\pi)^2} k g^{ab} - i f^{ab}{}_c j^c(x) \frac{\Delta(x-x')}{2\pi} \right) \ ,$$

wobei die Ersetzung $j^c(x) \mapsto j^c(x')$ im letzten Term einen regulären Zusatzterm $f^{ab}{}_c j^{c\prime}(x)$ produzieren würde. Wegen der Kontraktion mit g^{ab} ist diese Willkür der Definitionen von $:j^a j^b:$ in der Definition von T irrelevant.
Wir berechnen den Kommutator von T mit j:

$$\begin{aligned}
&\left[g_{ab} :j^a j^b:(x), j^c(y) \right] = \\
&= \lim_{x' \to x} g_{ab} \Bigg\{ \left(i f^{ac}{}_d j^d(x) \delta(x-y) + i \frac{k}{2\pi} g^{ac} \delta'(x-y) \right) j^b(x') \\
&\quad + j^a(x) \left(i f^{bc}{}_d j^d(x') \delta(x'-y) + i \frac{k}{2\pi} g^{bc} \delta'(x'-y) \right) \Bigg\} \\
&\quad (\text{da } g_{ab} f^{ab}{}_e = 0) \\
&= g_{ab} \left(i f^{ac}{}_d :j^d j^b:(x) + i f^{bc}{}_a :j^a j^d:(x) \right) \delta(x-y) \\
&\quad + g_{ab} \lim_{x' \to x} \Bigg\{ i f^{ac}{}_d \left(i f^{db}{}_e j^e(x) \frac{\Delta(x-x')}{2\pi} + g^{db} \left(\frac{\Delta(x-x')}{2\pi} \right)^2 \right) \delta(x-y) \\
&\quad + i f^{bc}{}_d \left(i f^{ad}{}_e j^e(x) \frac{\Delta(x-x')}{2\pi} + g^{ad} \left(\frac{\Delta(x-x')}{2\pi} \right)^2 \right) \delta(x'-y) \Bigg\} \\
&\quad + i \frac{k}{2\pi} 2 j^c(x) \delta'(x-y) \ .
\end{aligned}$$

Die erste Zeile verschwindet (nach Umbenennung der Indices im zweiten Term $a \mapsto d$, $d \mapsto b$, $b \mapsto a$) wegen

$$g_{ab} f^{ac}{}_d + g_{da} f^{ac}{}_b = f_b{}^c{}_d + f_d{}^c{}_b = 0 \ .$$

In der zweiten und dritten Zeile verschwinden die Δ^2-Terme, da z. B.

$$g_{ab} f^{ac}{}_d g^{db} = g_{ab} f^{acb} = 0 \ .$$

Die Koeffizienten der $j\Delta$-Terme sind (JACOBI-Identität)

$$\begin{aligned} g_{ab} f^{ac}{}_d f^{db}{}_e &= (-f^{ca}{}_d)(-f^{df}{}_a g_{fe}) = 2N g^{cf} g_{fe} = 2N \delta^c_e \\ g_{ab} f^{ac}{}_d f^{ad}{}_e &= -2N \delta^c_e \ , \end{aligned}$$

also erhalten wir für diese Terme zusammen

$$-2N j^c(x) \frac{\Delta(x-x')}{2\pi} (\delta(x-y) - \delta(x'-y)) = i \frac{N}{\pi} j^c(x) \delta'(x-y) \ .$$

Der gesamte Kommutator ist damit

$$\frac{k+N}{\pi} i j^c(x) \delta'(x-y) = \frac{k+N}{\pi} (-i j^{c\prime}(y) \delta(x-y) + i j^c(y) \delta'(x-y)) \ .$$

Also erfüllt T die angegebene primäre Vertauschungsrelation mit j. Für den Kommutator $[T,T]$ berechnen wir

$$\begin{aligned} &\big[T(x), g_{ab} :j^a j^b: (y)\big] = \\ &\quad = g_{ab} \lim_{y' \to y} \left\{ -i\partial_y (j^a(y) j^b(y') \delta(x-y)) - i\partial_{y'} (j^a(y) j^b(y') \delta(x-y')) \right\} \\ &\quad = g_{ab} \Bigg\{ -i\partial_y (:j^a j^b: (y)) \delta(x-y) + 2i \, :j^a j^b: (y) \delta'(x-y) \\ &\qquad -ikg^{ab} \lim_{y' \to y} \left\{ \partial_y \left(\left(\frac{\Delta(y-y')}{2\pi} \right)^2 \delta(x-y) \right) \right. \\ &\qquad \left. + \partial_{y'} \left(\left(\frac{\Delta(y-y')}{2\pi} \right)^2 \delta(x-y') \right) \right\} \Bigg\} \ . \end{aligned}$$

Im letzten Term mit $g_{ab} g^{ab} = \dim G = N^2 - 1$ entwickeln wir

$$\begin{aligned} &\delta(x-y') = \\ &\quad = \delta(x-y) + (y-y') \delta'(x-y) + \frac{(y-y')^2}{2} \delta''(x-y) + \frac{(y-y')^3}{6} \delta'''(x-y) \end{aligned}$$

und ordnen nach $\delta^{(k)}(x-y)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{ik(N^2-1)}{(2\pi)^2}\left(\partial_y\frac{\delta(x-y)}{(y-y')^2}+\partial_{y'}\frac{\delta(x-y')}{(y-y')^2}\right)= \\
&= \quad \frac{ik(N^2-1)}{(2\pi)^2}\Bigg(-\frac{2\delta(x-y)}{(y-y')^3}-\frac{\delta'(x-y)}{(y-y')^2}+\frac{2}{(y-y')^3} \\
&\qquad \left(\delta(x-y)+(y-y')\delta'(x-y)+\frac{(y-y')^2}{2}\delta''(x-y)+\frac{(y-y')^3}{6}\delta'''(x-y)\right) \\
&\qquad -\frac{1}{(y-y')^2}\left(\delta'(x-y)+(y-y')\delta''(x-y)+\frac{(y-y')^2}{2}\delta'''(x-y)\right)\Bigg) \\
&\overset{y'\to y}{\longrightarrow} \quad \frac{ik(N^2-1)}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\delta'''(x-y)=\frac{-i}{24\pi}\frac{k(N^2-1)}{\pi}\delta'''(x-y)\ .
\end{aligned}$$

Nach Skalierung mit $\frac{\pi}{k+N}$ ergibt sich der Kommutator

$$-i\left[T(x),T(y)\right]=-T'(y)\delta(x-y)+2T(y)\delta'(x-y)-\frac{24\pi}{c}\delta'''(x-y)$$

mit $c=\frac{k(N^2-1)}{k+N}$.
Die Zerlegung des SUGAWARA-Energie-Impuls-Tensors in seine FOURIER-Komponenten ergibt die Formel

$$L_n=\frac{g_{ab}}{2(k+N)}\sum_{n_1+n_2=n}:j^a_{n_1}j^b_{n_2}:\ ,$$

wobei

$$g_{ab}:j^a_{n_1}j^b_{n_2}:=\begin{cases} g_{ab}j^a_{n_1}j^b_{n_2} & \text{für} \quad n_2>n_1 \\ g_{ab}j^b_{n_2}j^a_{n_1} & \text{für} \quad n_2<n_1 \end{cases}\ .$$

(Zusätzliche Beiträge der Form $f^{ab}{}_c j^c_{n_1+n_2}$ fallen wegen der Kontraktion mit g_{ab} nicht an.) Insbesondere wird

$$L_0=\frac{1}{k+N}g_{ab}\left(\frac{1}{2}Q^aQ^b+\sum_{n>0}j^a_{-n}j^b_n\right)\ ,$$

wobei $C=\frac{1}{2}g_{ab}Q^aQ^b$ der quadratische Casimir-Operator von $SU(N)$ ist.
In einer irreduziblen Darstellung Λ habe C den Eigenwert C_Λ. Dann hat L_0 auf den Grundzuständen $|\Lambda,m\rangle$ den Eigenwert

$$\begin{aligned} h \quad &= \quad \frac{C_\Lambda}{k+N} \\ &\overset{SU(2)}{=} \quad \frac{I(I+1)}{k+2}\ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Entsprechend erhält man für den $U(1)$-Strom

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{n_1+n_2=n} :j_{n_1} j_{n_2}: \qquad \text{und} \qquad L_0 = \frac{1}{2} Q^2 + \sum_{n>0} j_{-n} j_n$$

sowie

$$h = \frac{1}{2} q^2 \ ,$$

wenn der Grundzustand die Ladung q trägt ($Q|q\rangle = q|q\rangle$).
Auf demselben FOCK-Raum von kN Fermionen (Quarkmodell) sind also drei Energie-Impuls-Tensoren definiert:

T_{Fermi}	mit	$c_F = kN$	($c = 1$ für jedes komplexe Fermion)
$T_{U(1)}$	mit	$c_U = 1$	
$T_{SU(N)_k}$	mit	$c_S = \frac{k(N^2-1)}{k+N}$.	

Die beiden letzten kommutieren untereinander. Ihre Summe T ist wieder ein Energie-Impuls-Tensor mit $c = c_U + c_S$, der mit allen ($U(1)$- und $SU(N)_k$-) Strömen dieselben Vertauschungsrelationen erfüllt wie T_F, also kommutiert $T_F - T$ mit diesen Strömen und auch mit T, da T aus den letzteren aufgebaut ist. Aus $[T_F, T] = [T, T]$ und der Kenntnis von $[T_F, T_F]$ und $[T, T]$ kann man den Kommutator $[T_F - T, T_F - T]$ bestimmen und findet, daß $T_F - T$ wieder ein Energie-Impuls-Tensor ist, dessen zentrale Ladung $c_F - c$ ist. Für $k = 1$ ist $c_F - c = N - 1 - \frac{N^2-1}{N+1} = 0$, also $T_F - T = 0$,

$$T_F = T_{U(1)} + T_{SU(N)_1} \ . \tag{5.3}$$

Da andererseits $T_F = \sum T_i$ ist, kann T_F auch ausschließlich aus den diagonalen Strömen aufgebaut werden ($T_i = \pi : j_i^2 :$). Es folgt z. B. für $SU(2)$ (und leicht verallgemeinerbar auf $SU(N)$):

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{3} g_{ab} :j^a j^b: &= T_F - T_{U(1)} \\ &= \pi :(j_1^2 + j_2^2 - (j^0)^2): \\ &= \pi :(j^0)^2 + (j^3)^2 - (j^0)^2: \\ &= \pi :(j^3)^2: \ , \end{aligned} \tag{5.4}$$

da $j^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + j_2)$ und $j^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 - j_2)$.
Die nichtabelsche SUGAWARA-Formel kann also durch eine abelsche Formel ersetzt werden, die nur Ströme einer CARTAN-Unteralgebra enthält. Da die Wahl der CARTAN-Unteralgebra beliebig ist, ergeben sich nichttriviale Identitäten für $SU(2)$. Diese Ergebnisse gelten nur für Level $k = 1$, aber beliebige N.
Wir bleiben beim Quarkmodell, der Einfachheit halber für $SU(2)$. Die FERMI-Felder in der Vakuum-Darstellung besitzen die FOURIER-Entwicklung

$$\tilde{\psi}_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{i,n} z^{n-\frac{1}{2}} \ ,$$

die wie Auf- und Absteigeoperatoren für den fermionischen Energie-Impuls-Tensor wirken:

$$[L_{Fermi,0}, \psi_{i,n}] = -n\psi_{i,n} \ .$$

Insbesondere annihilieren $\psi_{i,n>0}$ den Vakuumvektor. Die niedrigsten „angeregten" Zustände sind die Dubletts

$$\psi_{i,-\frac{1}{2}}\Omega \qquad \text{sowie} \quad \psi^*_{i,-\frac{1}{2}}\Omega$$

($L_{Fermi,0} = \frac{1}{2}$), die Singletts

$$\psi_{1,-\frac{1}{2}}\psi_{2,-\frac{1}{2}}\Omega, \quad \psi^*_{1,-\frac{1}{2}}\psi^*_{2,-\frac{1}{2}}\Omega \quad \text{und} \quad (\psi_{1,-\frac{1}{2}}\psi^*_{2,-\frac{1}{2}} - \psi_{2,-\frac{1}{2}}\psi^*_{1,-\frac{1}{2}})\Omega$$

sowie das Triplett

$$\left\{ \quad \psi_{1,-\frac{1}{2}}\psi^*_{1,-\frac{1}{2}}\Omega, \quad (\psi_{1,-\frac{1}{2}}\psi^*_{2,-\frac{1}{2}} + \psi_{2,-\frac{1}{2}}\psi^*_{1,-\frac{1}{2}})\Omega, \quad \psi_{2,-\frac{1}{2}}\psi^*_{2,-\frac{1}{2}}\Omega \quad \right\}$$

(alle mit $L_{F,0} = 1$). Die Dubletts tragen $U(1)$-Ladung $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, die Singletts $+\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ und 0, das Triplett $Q = 0$. (Beachte: Die Normierung von $j^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + j_2)$ skaliert die „Elektronenladung" auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$!)
Der Vakuumvektor ($s = 0, Q = 0, h_F = 0$) wird natürlich von allen $j^a_{n>0}$ annihiliert und ist ein Grundzustand sowohl für die $U(1)$-Stromalgebra als auch für die $SU(2)_1$-Stromalgebra.
Es ergibt sich für die $U(1)$- und $SU(2)$-Energie-Impuls-Tensoren

$$h_U = 0 \quad \text{und} \quad h_{SU} = 0 \ .$$

Die beiden Dubletts ($s = \frac{1}{2}, Q = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, h_F = \frac{1}{2}$) sind ebenfalls Grundzustände für beide Stromalgebren, da j_n den Eigenwert von $L_{F,0}$ nur um ganze Zahlen verringern können. Unsere Formeln ergeben

$$h_U = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad h_{SU} = \frac{1}{4} \ .$$

Die zweifach geladenen Singletts erweisen sich ebenfalls als Grundzustände der $U(1)$-Stromalgebra ($q = \sqrt{2} \Rightarrow h_U = 1$) und der $SU(2)$-Stromalgebra ($s = 0 \Rightarrow h_{SU} = 0$).
Das neutrale Singlett ist von der Form $j^0_{-1}\Omega$: Es ist ein Grundzustand für die $SU(2)$-Ströme ($h_{SU} = 0$) und ein angeregter $q = 0$-Zustand ($h_U = 0 + 1 = 1$) für die $U(1)$-Ströme.
Das neutrale Triplett ist von der Form $j^a_{-1}\Omega$: Es ist ein Grundzustand für $U(1)$ ($H_U = 0$) und ein angeregter Zustand in der ($s = 0$)-Darstellung von $SU(2)$ ($h_{SU} = 0 + 1 = 1$).
In jedem Fall ist $h_F = h_U + h_{SU}$. Offenbar sind beide Darstellungen $s = 0$ und

$s = \frac{1}{2}$ der $SU(2)_1$-Ströme in der FOCK-Darstellung der Fermionen enthalten, ebenso wie alle Darstellungen der $U(1)$-Ströme mit $q = \frac{n}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Der gesamte FOCK-Raum zerfällt in eine direkte Summe

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in 2\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_0) \ \oplus \bigoplus_{n \in 2\mathbb{Z}+1} (\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}) \ ,$$

wobei $\mathcal{H}_n$ die irreduziblen Darstellungsräume der $U(1)$-Ströme mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind und $\mathcal{H}_{s=0,\frac{1}{2}}$ die irreduziblen Darstellungsräume der $SU(2)$ mit Grundzuständen des Isospins s.
Das FERMI-Dublett ψ_i interpoliert zwischen Darstellungen $(n, 0) \mapsto (n+1, \frac{1}{2})$ sowie $(n, \frac{1}{2}) \mapsto (n+1, 0)$, da es selbst die Ladung $q = \frac{1}{2}$ und Isospin $s = \frac{1}{2}$ trägt. Es ist also ein Tensorprodukt von Austauschfeldern

$$\psi_i = {}_{n+1}(\phi)_n \odot \left[{}_{\frac{1}{2}}(\phi_i)_0 + {}_0(\phi_i)_{\frac{1}{2}} \right] \ ,$$

wobei das Symbol $\odot$ für das p-Produkt [22] (Tensoren als Operatoren, punktweise Multiplikation als Distribution) steht.
Diese Zerlegung ist (wegen LEIBNIZ-Regel und Additivität von h) konsistent mit den primären Vertauschungsrelationen mit T (und mit j. Sie kann explizit durch Vertexoperatoren angegeben werden).
Entsprechendes gilt für $U(1) \otimes SU(N) \subset U(N)$. Der FOCK-Raum trägt alle $U(1)$-Darstellungen mit $q = \frac{n}{\sqrt{N}}$, $n \in \mathbb{Z}$, sowie alle nach dem Satz zulässigen Level-1-Darstellungen von $SU(N)_1$. Der FOCK-Raum von kN Fermionen trägt alle Darstellungen von $SU(N)_k$ (siehe Kapitel 5.4).

5.3 Coset-Konstruktion

Wir haben gesehen (beispielsweise in Formel (5.3)), daß nicht nur die Summe zweier Energie-Impuls-Tensoren einen neuen Energie-Impuls-Tensor $T_1 + T_2$ der Ladung $c_1 + c_2$ erzeugt, falls $[T_1, T_2] = 0$, sondern daß auch die Differenz $T_1 - T_2$ ein Energie-Impuls-Tensor der Ladung $c_1 - c_2$ ist, falls $[T_1(x), T_2(y)] = [T_2(x), T_2(y)]$. Das Argument (s.o.) ist

$$\begin{aligned} [T_1 - T_2, T_1 - T_2] &= [T_1, T_1] - [T_2, T_1] - [T_1, T_2] + [T_2, T_2] \\ &= [T_1, T_1] - [T_2, T_2] \\ &= (T_1 + c_1) - (T_2 + c_2) \\ &= (T_1 - T_2) + (c_1 - c_2) \ , \end{aligned}$$

wobei T_i und c_i symbolisch für die Operatoren und c-Zahl-Anteile des Kommutators stehen.
Weil die Summenvorschrift die zentrale Ladung nur vergrößern kann und alle

$SU(N)_k$-SUGAWARA-Energie-Impuls-Tensoren $c \geq 1$ haben, kann man damit nicht in den interessanten Bereich $c < 1$ eindringen. Durch die Differenzbildung ist dies jedoch möglich. Es stellt sich die Frage, wie sich die Bedingung $[T_1 - T_2, T_2] = 0$ erfüllen läßt.
Es seien j_k^a $SU(2)$-Ströme zum Level k und j_ℓ^a solche zum Level ℓ. Dann sind $J^a = j_k^a + j_\ell^a$ solche zum Level $k + \ell$, die auf dem Produkt-HILBERT-Raum definiert sind.
Es seien $T_k = \frac{\pi}{k+2}\, g_{ab} : j_k^a j_k^b :$, $T_\ell = \frac{\pi}{\ell+2}\, g_{ab} : j_\ell^a j_\ell^b :$ und $T = \frac{\pi}{k+\ell+2}\, g_{ab} : J^a J^b :$ die zugehörigen SUGAWARA-Tensoren. T_k bzw. T_ℓ haben die kanonischen Vertauschungsrelationen mit j_k bzw. j_ℓ, also hat $T_k + T_\ell$ die kanonische Vertauschungsrelation mit $j_k + j_\ell = J$. Aber T hat konstruktionsgemäß dieselben Vertauschnungrelationen mit J, und $T_k + T_\ell - T$ kommutiert mit J und folglich auch mit T. Dann ist $T_c = T_k + T_\ell - T$ ein Energie-Impuls-Tensor mit $c = c_k + c_\ell - c_{k+\ell}$. Für $\ell = 1$ ergibt sich $c = \frac{3k}{k+2} + 1 - \frac{3(k+1)}{k+3} = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}$. Dies sind genau die Werte, die nach der FQS-Klassifikation unterhalb $c = 1$ zulässig sind.
Dieser Energie-Impuls-Tensor T_c operiert auf dem Tensorprodukt der HILBERT-Räume einer Level-k- und einer Level-1-Theorie und ist damit manifest positiv definit. Bettet man ihrerseits die Stromalgebra in FOCK-Räume von $2k$ und 2 Fermionen ein, so ist T_c sogar auf dem Produkt-FOCKraum von $2(k+1)$ Fermionen definiert. Dieser enthält alle FQS-Darstellungen mit primärer Dimension $h = h_{p,q}(c)$ von T_c.[2] Damit ist die Existenz all der durch Satz 4.1 nicht ausgeschlossenen Darstellungen gezeigt.
Die beschriebene Konstruktion (von GODDARD, KENT und OLIVE) wird als Coset-Konstruktion bezeichnet. Sie ist vielfältig verallgemeinerbar. Ihr liegt das folgende Schema zugrunde. Es sei $H \subset G$ eine Inklusion von halbeinfachen kompakten LIE-Gruppen. Bei GKO ist $G = SU(2) \times SU(2)$ ein Produkt von zwei einfachen kompakten LIE-Gruppen, und $H = \mathrm{Diag}(SU(2) \times SU(2)) \cong SU(2)$ ist die darin diagonal enthaltene $SU(2)$. Es seien $j^{(G)}$ die Ströme von G zu einem gegebenen Level (bei GKO: Level $(k, 1)$ für die beiden einfachen Faktoren) und $j^{(H)}$ die darin enthaltenen Ströme der Untergruppe H; deren Level ist dann fixiert ($k+1$ bei GKO). Seien $T^{(G)}$ und $T^{(H)}$ die SUGAWARA-Tensoren. Dann haben sowohl $T^{(G)}$ als auch $T^{(H)}$ dieselben Vertauschungsrelationen mit $j^{(H)}$, und $[T^{(G)} - T^{(H)}, j^{(H)}] = 0$. Diese Vertauschungsrelation kann auch so interpretiert werden, daß $T^{(G)} - T^{(H)} = T_c$ invariant ist unter den von $j^{(H)}$ erzeugten lokalen Eichtransformationen der Algebra $j^{(G)}$. Der Coset-Energie-Impuls-Tensor T_c gehört zu den Eichinvarianten einer lokalen Eichsymmetrie. (In der Regel wird es neben T_c noch weitere Eichinvariante geben.)
Es kann auch vorkommen, daß $T_c = 0$ ist. Solche Inklusionen heißen „konforme Einbettungen“. Sie sind offenbar durch die Bedingung $c^{(G)} - c^{(H)} = 0$ vollständig

[2] siehe Kapitel 5.4

charakterisiert. Dies passiert regelmäßig bei $SU(N)_k \times SU(N)_k \subset SU(k \cdot N)_1$, da

$$c = \frac{(kN)^2 - 1}{kN + 1} - \frac{k(N^2 - 1)}{N + k} - \frac{N(k^2 - 1)}{N + k} = 0 \; .$$

Es passiert auch für eine bestimmte Einbettung von $SU(2) \subset SU(3)$, die durch die dreidimensionale Spin-1-Darstellung von $SU(2)$ gegeben ist. Bei dieser Einbettung vervierfacht sich der Level von $SU(3)$, als Level von $SU(2)$ gesehen, weil sich die Metrik skaliert: die PAULI-Matrizen mit $g^{ab} = \mathrm{Tr}(T^a T^b) = 2\delta^{ab}$ werden durch die Matrizen $(X^a)_{bc} = 2\varepsilon_{abc}$ mit $\mathrm{Tr}(X^a X^b) = 8\delta^{ab}$ in $SU(3)$ eingebettet. Für $SU(2)_4 \subset SU(3)_1$ erhält man dann wieder

$$c = \frac{8}{4} - \frac{12}{6} = 0 \; .$$

Obwohl die einbettende und die eingebettete Theorie verschieden sind, haben beide denselben Energie-Impuls-Tensor. Die Gleichheit der durch unterschiedliche SUGAWARA-Formeln gegebenen Felder ist ein weiteres Beispiel für nichtlineare Identitäten in Stromalgebren („Nullfelder"; s. a. (5.4)).

5.4 Charakter-Argumente

Stromalgebren enthalten mit den Operatoren Q^i, den Erzeugern der CARTAN-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und mit L_0 eine Menge untereinander kommutierender Operatoren. Diese Operatoren können deshalb in jeder Darstellung simultan diagonalisiert werden und so zur Charakterisierung der jeweiligen Darstellung benutzt werden. Das Charakterfunktional

$$\begin{aligned} \chi_\pi(t, q_i) &= \mathrm{Tr}_\pi \left(e^{-\beta(L_0 + \sum h_i Q^i)} \right) \\ &= \sum_{h, m^i} N(h, m^i) t^h q_i^{m^i} \qquad \text{mit} \quad t = e^{-\beta}, q_i = e^{-\beta h_i} \end{aligned}$$

gibt also Auskunft über die Vielfachheit $N(h, m^i)$ der simultanen Eigenwerte h von L_0 und m^i von Q^i (physikalische Interpretation im Sinne der statistischen Mechanik: χ_π = Zustandssumme, β = inverse Temperatur, h_i = Magnetfelder, h = Energie, m^i = magnetische Momente).
Man könnte auch Casimiroperatoren als weitere kommutierende Operatoren hinzunehmen, um Auskunft zu erhalten, zu welcher Darstellung von $SU(2)$ etwa ein Eigenwert m von Q^3 gehört; jedoch sind solche Funktionale nicht mehr mathematisch kontrolliert. Die angegebenen Charaktere sind durch gruppentheoretische Formeln als gewisse JACOBIsche Theta-Funtionen ausdrückbar; für $SU(2)$ hat man (Level k, primärer Isospin s):

$$\chi_s^{(k)}(t, q) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} [2(k+2)n + 2s + 1]_q \cdot t^{h + n((k+2)n + 2s + 1)}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} [4n + 1]_q \cdot t^{n(2n+1)}}$$

und $h = \frac{s(s+1)}{k+2}$, wobei $[N]_q := \frac{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ und daher $[2I+1]_q = q^{-I} + q^{-I+1} + \cdots + q^{I-1} + q^I = \sum_{m=-I}^{I} q^m$ den Beitrag eines vollen Isospin-I-Multipletts signalisiert. Schränkt man eine irreduzible Darstellung auf eine Unteralgebra ein, so wird sie in der Regel reduzibel werden. Da die Spur additiv ist bzgl. der direkten Summe von Darstellungen, muß der Charakter der irreduziblen Darstellung gleich der Summe der Charaktere der Darstellungen der Unteralgebra sein.
Dieses einfache Argument erlaubt es in vielen Fällen, die Zerfällung („branching") von Darstellungen bei Einschränkung exakt zu kontrollieren. Sie liegt den Behauptungen in Kapitel 5.2 und 5.3 über das Auftreten aller Level-k-Darstellungen im Quark-Modell bzw. aller FQS-Darstellungen in der GKO-Coset-Konstruktion zugrunde.
Einige einfache Beispiele sollen das Verfahren illustrieren.
Wir betrachten zunächst ein einzelnes reelles FERMI-Feld ψ mit der FOURIER-Zerlegung

$$\tilde{\psi}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}} \ .$$

Die Moden ψ_n mit $n > 0$ annihilieren das Vakuum; die Moden ψ_n mit $n < 0$ erhöhen den Eigenwert von L_0 um $-n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Wegen der Anti-Vertauschungsrelation (PAULI-Prinzip) ist $\psi_n \psi_n = 0$, und die Vektoren $\psi_{n_1} \cdots \psi_{n_r} \Omega$ mit $0 > n_r > \cdots > n_1$ bilden eine Basis von Eigenvektoren von L_0 mit Eigenwerten $-n_1 - \cdots - n_r$. Die Zustandssumme $\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}(e^{-\beta L_0})$ im FOCK-Raum ist also gleich

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\left(e^{-\beta L_0}\right) = \prod_{n=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots} (1+t^n) =: P_F(t) \qquad (t = e^{-\beta}) \ ,$$

wobei jeder Term $t^{n_1} \cdots t^{n_r}$ genau einem Eigenvektor wie oben entspricht.
In einem System von zwei reellen (= einem komplexen) FERMI-Feldern kann jede „Frequenz" n durch die Operatoren 1, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ und $\psi_{1,n}\psi_{2,n}$ bzw. durch die Operatoren 1, ψ_n, ψ_n^* und $\psi_n \psi_n^*$ maximal zweifach angeregt sein, wobei es zwei Möglichkeiten der einfachen Anregung gibt. Die Zustandssumme ist in diesem Fall

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\left(e^{-\beta L_0}\right) = \prod_{n=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots} (1+2t^n+t^{2n}) = \prod_{n=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots} (1+t^n)^2 = P_F(t)^2 \ .$$

Dieses einfache Potenzgesetz spiegelt die Tensorprodukt-Struktur des FOCK-Raumes zweier freier Felder sowie die Additivität der Energie (hier: L_0) wider.
Will man gleichzeitig die Ladung, etwa durch ein angelegtes („elektrisches") Feld E kontrollieren, so tragen alle FOURIER-Komponenten von ψ mit $q = 1$ zur Gesamtladung Q, und ψ^* mit $q = -1$ bei; also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\left(e^{-\beta(L_0+EQ)}\right) &= \prod (1 + zt^n + z^{-1}t^n + t^{2n}) \qquad (z = e^{-\beta E}) \\ &= \prod (1+zt^n)(1+z^{-1}t^n) = \chi_{\text{kompl. F.}}(z,t) \ . \end{aligned}$$

Hierbei liefern alle Beiträge z^q die Zustände der Gesamtladung $\langle Q \rangle = q$. Es gibt die bemerkenswerte JACOBIsche Dreifachprodukt-Identität

$$\prod_{r\in\mathbb{N}}(1+zw^{2r-1})(1+z^{-1}w^{2r-1})(1-w^{2r}) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} z^q w^{q^2} \ .$$

Setzt man hier $2r-1 = 2n$ und $t = w^2$, so folgt

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(L_0+EQ)}\right) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} z^q t^{\frac{q^2}{2}} p(t) \ ,$$

wobei $p(t) = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-t^n)^{-1}$ die kombinatorische Zustandssumme (vgl. Kapitel 4.4) ist. Letztere ist gleichzeitig die Zustandssumme des kanonischen BOSE-Feldes j mit FOURIER-Komponenten

$$\tilde{j} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} j_n z^{-n-1} \ ,$$

da alle Moden j_n, $n \in -\mathbb{N}$, mit beliebiger Besetzungszahl auftreten können:

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta L_0}\right) = p(t) \ .$$

Der Vergleich der geladenen fermionischen Zustandssumme und der bosonischen Zustandssumme ergibt, daß der neutrale Sektor $Q = 0$ der ersteren genau durch die letztere gegeben ist. Jedem neutralen Eigenvektor von L_0 im fermionischen FOCK-Raum entspricht genau ein Eigenvektor von L_0 im bosonischen FOCK-Raum. Diese Eigenschaft wird als „Bosonisierung“ bezeichnet. Sie bedeutet, daß alle neutralen Kombinationen von FERMI-Feldern auch durch den Strom j ausgedrückt werden können. Dies gilt nicht nur im neutralen Sektor, der den Vakuum-Zustand Ω enthält, sondern auch in jedem anderen Ladungssektor $Q = q$. Denn der Grundzustand von L_0 in einem solchen Sektor des Stromes j hat, wegen der SUGAWARA-Formel (Kapitel 5.2) den Eigenwert $L_0 = \frac{q^2}{2}$, während das Anregungsspektrum wieder durch dieselbe kombinatorische Zustandssumme $p(t)$ gegeben ist:

$$\mathrm{Tr}_{Q=q}\left(e^{-\beta L_0}\right) = t^{\frac{q^2}{2}} p(t) \ .$$

Dies ist genau der Beitrag zu z^q in der fermionischen Zustandssumme.
Die Verhältnisse werden komplizierter mit N komplexen Fermionen. Wir betrachten $N = 2$ der Einfachheit halber. Das Fermionen-Dublett ψ_i, $i = 1,2$, trägt die Quantenzahlen $q = 1$ („elektrischen Ladung“) und $m = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ („Isospin“ oder „magnetisches Moment“). Die Zustandssumme ist, analog zu dem vorherigen,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(L_0+EQ+HQ^3)}\right) = \\
&= \prod_{n=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots} (1+zq^{\frac{1}{2}}t^n)(1+zq^{-\frac{1}{2}}t^n)(1+z^{-1}q^{\frac{1}{2}}t^n)(1+z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}t^n) \\
&= \chi_{2\text{ kpl. F.}}(z,q,t) \qquad (q = e^{-\beta H}, t = e^{-\beta}, z = e^{-\beta E}) \ .
\end{aligned}$$

Dies ist offenbar gleich

$$\begin{aligned}\chi_{2\text{ kpl. F.}}(z,q,t) &= \chi_{\text{kpl. F.}}(zq^{\frac{1}{2}},t)\chi_{\text{kpl. F.}}(zq^{-\frac{1}{2}},t)\\ &= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}}(zq^{\frac{1}{2}})^{n_1}t^{\frac{n_1^2}{2}}p(t)\sum_{n_2\in\mathbb{Z}}(zq^{-\frac{1}{2}})^{n_2}t^{\frac{n_2^2}{2}}p(t)\\ &= \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} z^{n_1+n_2}q^{\frac{n_1-n_2}{2}}t^{\frac{n_1^2+n_2^2}{2}}p(t)^2\ .\end{aligned}$$

Der neutrale Sektor hat die Zustandssumme (Beiträge $n_1+n_2=0$)

$$\text{Tr}_{Q=0}\left(e^{-\beta(L_0+EQ+HQ^3)}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^nt^{n^2}p(t)^2\ .$$

Wir organisieren die Beiträge q^n zu vollständigen Multipletts:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^nt^{n^2} &= 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}(q^n+q^{-n})t^{n^2}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0}[2n+1]_q\,(t^{n^2}-t^{(n+1)^2})\end{aligned}$$

(Beweis: Koeffizientenvergleich für t^{m^2} bzw. $q^n+q^{-n}=[2n+1]_q-[2n-1]_q$) und finden

$$\text{Tr}_{Q=0}\left(e^{-\beta(L_0+EQ+HQ^3)}\right)=p(t)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}[2n+1]_q\,(t^{n^2}-t^{(n+1)^2})p(t)\right)\ .$$

Der erste Faktor ist gleich der bosonischen Zustandssumme des $U(1)$-Stromes, der zweite ist gleich dem Level-1-Vakuum-Charakter der $SU(2)$-Stromalgebra

$$\chi_0^{(1)}(t,q)=\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}[6n+1]_q\,t^{n(3n+1)}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}}[4n+1]_q\,t^{n(2n+1)}}$$

(vgl. [16], Section 14.3). Wieder können wir alle neutralen Zustände im FOCK-Raum auch durch die $U(1)$- und $SU(2)$-Ströme aus dem Vakuum erzeugen (nicht-abelsche Bosonisierung).
Ähnlich finden wir für die Sektoren gerader Ladung

$$\text{Tr}_{Q=2k}\left(e^{-\beta(L_0+EQ+HQ^3)}\right)=z^{2k}t^{k^2}p(t)\sum_{n\in\mathbb{N}_0}[2n+1]_q\,(t^{n^2}-t^{(n+1)^2})p(t)$$

und für die Sektoren ungerader Ladung

$$\text{Tr}_{Q=2k+1}\left(e^{-\beta(L_0+EQ+HQ^3)}\right)=z^{2k+1}t^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}p(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{\frac{2n+1}{2}}t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}p(t)\ ,$$

wobei der letzte Faktor umsummiert werden kann:

$$\sum_{s=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots} [2s+1]_q \, (t^{s^2} - t^{(s+1)^2}) p(t) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} [6n+2]_q \, t^{n(3n+2)+\frac{1}{4}}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} [4n+1]_q \, t^{n(2n+1)}} = \chi^{(1)}_{\frac{1}{2}}(q,t) \; .$$

Alle Ladungssektoren $Q = q$ der FOCK-Raumes werden also durch die $U(1)$- und $SU(2)$-Ströme aus den Grundzuständen $\left|Q^0 = \frac{q}{\sqrt{2}}\right\rangle$ bzgl. j^0 und $|I = 0, m = 0\rangle$ (falls $q = 2k$) oder $\left|I = \frac{1}{2}, m = \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ (falls $q = 2k+1$) bzgl. j^a erzeugt.
Da diejenigen fermionischen Operatoren, die die Gesamtladung Q invariant lassen, gerade die neutrale Unteralgebra der Fermionenalgebra bilden, schließen wir, daß die Ströme die neutrale Unteralgebra der Fermionen bereits ausschöpfen:

> neutrale Unteralgebra von $N = 2$ komplexen FERMI-Feldern = $U(2)$-Stromalgebra = $\widehat{U(1)} \otimes \widehat{SU(2)}_{Level\ 1}$.

Mit ähnlichen Argumenten zeigt man, daß die Invarianten der $\widehat{SU(2)}_1$ unter der globalen CARTAN-Unteralgebra (Erzeuger Q^3) gleich der CARTAN-Stromalgebra (Feld $j = \sqrt{2}j^3$) sind, denn:

$$\chi^{(1)}_0(q,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n t^{n^2} p(t)$$

(der Koeffizient von q^0 ist $p(t)$ = Vakuumcharakter von j), und daß die Invarianten von $\widehat{SU(2)}_1$ unter der globalen $SU(2)$ (Erzeuger Q^a) gleich der Algebra des SUGAWARA-Energie-Impuls-Tensors ist, denn:

$$\chi^{(1)}_0(q,t) = \sum_{s\in\mathbb{N}_0} [2s+1]_q \, t^{s^2}(1 - t^{2s+1}) p(t)$$

(der Koeffizient von $[1]_q$ ist $(1-t)p(t)$ = Vakuum-Charakter von $T_{c=1}$).
Der jeweils erste Faktor in diesen Summen fixiert die Quantenzahlen bezüglich der Symmetriegruppe, während der zweite das Spektrum von L_0 in dem zugehörigen Ladungssektor angibt. Diese letzteren Faktoren stimmen mit den Charakteren der CARTAN-Stromalgebra bzw. des SUGAWARA-Energie-Impuls-Tensors mit $c = 1$ (siehe Kapitel 4.4) überein.
Die Aussage über die CARTAN-Unteralgebra gilt für beliebige N; die über den SUGAWARA-Tensor ist eine Besonderheit für $N = 2$. Beide Aussagen werden falsch für Level $k > 1$.
Da der SUGAWARA-Energie-Impuls-Tensor in jedem Fall unter der globalen $SU(N)$ invariant ist, folgt, daß er bei Level $k = 1$ für alle N durch die CARTAN-Ströme allein ausgedrückt werden kann. Wir hatten dies für $N = 2$ bereits früher gesehen. Für $N > 2$ gibt es weitere unabhängige globale $SU(N)$-Invarianten der Art

$$W^{(r)} = \sum d_{a_1\cdots a_r} :j^{a_1}\cdots j^{a_r}: \; ,$$

die analog zu den höheren Casimiroperatoren $C^{(r)} = \sum d_{a_1 \cdots a_r} Q^{a_1} \cdots Q^{a_r}$ gebildet werden, $r = 2, 3, \ldots, N$. Diese definieren neue Observablenalgebren, sogenannte $\mathcal{W}$-Algebren, die außer dem Energie-Impuls-Tensor $T_{Sug} \sim W^{(2)}$ weitere (T_{Sug})-primäre Felder $W^{(3)}, \ldots, W^{(N)}$ mit Skalendimension $3, \ldots, N$ enthalten. Die obige Konstruktion der $W^{(r)}$ führt zu sehr speziellen Beispielen von $\mathcal{W}$-Algebren, den CASIMIR-Algebren.
Das Charakter-Argument gibt Auskunft über die a priori unbekannten Darstellungstheorien der $\mathcal{W}$-Algebren. Denn die Entwicklung der Charaktere der Stromalgebren nach den Darstellungen der globalen Symmetriegruppe liefert in jedem Fall die Spektren von L_0 in den Unterräumen mit fixierten $SU(N)$-Quantenzahlen. Diese sind aber die irreduziblen Darstellungsräume der Algebra der $SU(N)$-Invarianten.
In der Coset-Konstruktion tritt an die Stelle der globalen LIE-Algebra (als Unteralgebra der Stromalgebra) eine Strom-Unteralgebra. An die Stelle der Invarianten (= Operatoren, die mit Q^a kommutieren) treten die Eichinvarianten bzgl. der Untergruppe (= Operatoren, die mit den Ströme der Unteralgebra kommutieren). Um die Darstellungstheorie der Eichinvarianten zu studieren, muß man die Charaktere der einbettenden Stromalgebra nach denen der Stromunteralgebra entwickeln. Die Koeffizientenfunktionen ergeben dann das Spektrum von L_0^{coset} in den entsprechenden eingebetteten Multiplizitätsräumen:

$$\begin{aligned} \chi_\Lambda^G &= \sum \chi_{\Lambda'}^H \cdot b_{\Lambda\Lambda'} \\ \Rightarrow \mathcal{H}_\Lambda^G &\cong \bigoplus \mathcal{H}_{\Lambda'}^H \otimes \mathcal{H}_{\Lambda\Lambda'}^{coset} \ . \end{aligned}$$

Hier bezeichnen Λ und Λ' die (durch ihre Grundzustandsmultipletts gekennzeichneten) irreduziblen Darstellungen der Stromalgebren zu den LIE-Gruppen G und $H \subset G$ und $\mathcal{H}$ die Darstellungsräume. Die Coset-Algebra = Eichinvarianten operieren auf $\mathcal{H}_{\Lambda\Lambda'}^{coset}$. Die Verzweigungs- („branching"-) Funktionen $b_{\Lambda\Lambda'}$ sind die Charaktere der Coset-Algebra.

Kapitel 6

Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie

6.1 Einleitung

In der phänomenologischen Quantenfeldtheorie (z. B. LAGRANGEsche Störungstheorie) beschreibt man Teilchen durch Felder. Die implizierte Zuordnung zwischen Teilchen und Feldern ist jedoch alles andere als befriedigend: Manche Teilchen sind zusammengesetzte Objekte, für die kein eigenes Feld eingeführt zu werden braucht, und manche Felder beschreiben gar keine Teilchen (z. B. Quark-Felder). Auch wurde gezeigt, daß es auf dem HILBERT-Raum eines (WIGHTMAN-) Feldes eine unendlich große Klasse (BORCHERS-Klasse) von anderen Feldern gibt, die dieselbe Streumatrix – im Sinne der LSZ Streutheorie – besitzen. Die BORCHERS-Klasse eines Feldes besteht in gewissem Sinne aus „Funktionen" des Feldes (z. B. besteht im Falle des freien Feldes die BORCHERS-Klasse aus den WICK-Polynomen des freien Feldes). Offenbar ist für die Streutheorie nicht die Wahl eines Feldes in seiner BORCHERS-Klasse relevant, sondern nur die Algebra, die von diesem Feld erzeugt wird.

Diese (und andere) Überlegungen führten HAAG und KASTLER dazu, die Quantenfeldtheorie zu reformulieren, indem sie nur von einem „Netz von Algebren" der Observablen ausgehen, d. h. einer isotonen Zuordnung

$$\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$$

von C^*-Algebren zu Raum-Zeit-Gebieten. Isotonie bedeutet die Inklusion

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2) \; .$$

Alle weiteren Eigenschaften dieser Algebren werden rein algebraisch formuliert, ohne den Begriff eines Feldes zu verwenden. Die heuristische Idee besteht aber darin, daß $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ die beschränkten Funktionen der Operatoren $\phi(f)$ und $\phi(f)^*$

enthält und von diesen erzeugt wird, wobei die Testfunktionen f Träger in $\mathcal{O}$ haben. Die Elemente einer solchen Algebra haben im Gegensatz zu den $\phi(f)$ und $\phi(f)^*$ die angenehme Eigenschaft, beschränkt zu sein, und damit können sie problemlos miteinander multipliziert werden.

Die WIGHTMAN-Axiome Lokalität, Kovarianz und Spektrumsbedingung lassen sich sehr leicht formulieren, nämlich:

Lokalität:

$$[\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1), \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)] = 0$$

(als Unteralgebren von $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ hinreichend groß), wenn $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ raumartig getrennt zueinander liegen.

Kovarianz: Es existiert eine Darstellung der POINCARÉ-Gruppe durch Automorphismen α_g des Netzes derart, daß

$$\forall g \in \mathcal{P} : \alpha_g(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(g\mathcal{O}) \ .$$

In einer kovarianten Darstellung π der Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ ist die Automorphismengruppe implementiert, d. h. es exisitiert eine Darstellung $\mathcal{U}_\pi$ der POINCARÉ-Gruppe durch unitäre Operatoren derart, daß

$$\mathcal{U}_\pi(g)\pi(a)\mathcal{U}_\pi(g)^* = \pi(\alpha_g(a)) \ .$$

Spektrumsbedingung: Die Darstellung $\mathcal{U}_\pi(x)$ der Translationen ist stark stetig, und ihre Erzeuger P_μ haben Spektrum in $\overline{V}_+$.

Viele Aspekte der Quantenfeldtheorie, insbesondere die Theorie der Superauswahlsektoren (inäquivalente Darstellungen positiver Energie) und Statistik lassen sich in diesem Rahmen studieren; die Problematik der Fusionsregeln, die in Kapitel 4 stets etwas vage geblieben ist, wird so zu einer klar definierten Frage. Selbst das Spin-Statistik-Theorem läßt sich ganz ohne Verwendung von WIGHTMAN-Feldern formulieren.

Wir wollen die Diskussion dieses Programmes zu einem späteren Zeitpunkt vertiefen. Zunächst wollen wir die Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, die zu freien Feldern gehören, studieren und auf den Fall der konform-invarianten Felder (FERMI-Felder, Ströme) anwenden.

6.2 CAR- und CCR-Algebren

Die Abkürzungen CAR und CCR stehen für „canonical (anti-)commutation relations“ und bezeichnen die algebraische Formulierung freier FERMI- bzw. BOSE-Felder. Diese Formulierung ist – bis auf die Spezifikation der lokalen Struktur –

universell und z. B. von der Dimension der Raum-Zeit oder der Masse der Teilchen unabhängig. Diese Daten gehen nur durch die Spezifikation eines Einteilchen-HILBERT-Raums $\mathcal{H}$ ein. Die CAR- bzw. CCR-Algeben (und ihre lokalen Unteralgebren) sind funktoriell diesem HILBERT-Raum $\mathcal{H}$ und gewissen Unterräumen assoziiert. Der CAR-Fall ist technisch einfacher und soll hier zuerst skizziert werden.

6.2.1 CAR-Algebren

Die CAR-Algebra ist eine Darstellung der CLIFFORD-Algebra über einem reellen HILBERT-Raum $\mathcal{H}$ gerader oder unendlicher Dimension. Die CLIFFORD-Algebra ist definiert durch ihre Erzeuger $R(f)$, wobei

$$f \mapsto R(f)$$

eine (reell-) lineare Abbildung ist, mit den Relationen

$$R(f) = R(f)^*$$

und

$$R(f)^2 = (f,f)_{\mathcal{H}} \cdot \mathbb{1} \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}\ .$$

Die letztere Relation ist äquivalent zu

$$\{R(f), R(g)\} = 2(f,g)_{\mathcal{H}}\ .$$

Die Relation fixiert die C^*-Norm auf der Algebra bereits eindeutig; beispielsweise ist notwendig

$$\|R(f)\|^2 = \|R(f)^* R(f)\| = \|R(f)^2\| = \|f\|_{\mathcal{H}}{}^2$$

(und ähnlich für Polynome in $R(f)$). Die CLIFFORD-Algebra Cliff($\mathcal{H}$) ist die von den $R(f)$ erzeugte C^*-Algebra.[1]

Satz 6.1 *Cliff($\mathcal{H}$) ist bis auf Isometrie eindeutig. Sie ist eine einfache Algebra, d. h. sie hat keine zweiseitigen Ideale ($\Rightarrow$ alle Darstellungen sind treu oder trivial). Für* $\dim \mathcal{H} = 2n$ *ist Cliff($\mathcal{H}$)* $\cong Mat(2^n, \mathbb{C})$.

[1] Zur Erinnerung: eine C^*-Algebra ist eine normabgeschlossene komplexe Algebra mit antilinearer Involution $*$ und Norm $\|\ \cdot\ \|$, so daß

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| = \|a^*\|^2$$

gilt.

Zur Illustration der letzten Aussage betrachte man zunächst die Matrixalgebra $Mat(2,\mathbb{C})$ und überlege sich, daß die PAULI-Matrizen σ_1 und σ_2 die Relationen der CLIFFORD-Algebra erfüllen und die ganze Matrixalgebra erzeugen. Für beliebiges n erhält man eine solches Erzeugendensystem mit $i \leq n$ durch $\gamma_i = R(e_i)$, wobei $\gamma_{2i+1} := \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{i-\text{mal}} \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{(n-i-1)-\text{mal}}$ und $\gamma_{2i+2} := \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{i-\text{mal}} \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{(n-i-1)-\text{mal}}$. Diese erfüllen die Relationen $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$ und erzeugen die volle Matrixalgebra.

Eine Klasse von Darstellungen von Cliff($\mathcal{H}$) verschafft man sich wie folgt. Man wählt einen orthogonalen Operator I auf $\mathcal{H}$ mit $I^2 = -\mathbb{1}$ (existiert nicht für $\dim \mathcal{H} = 2n+1$). Dieser definiert eine komplexe Struktur auf $\mathcal{H}$, indem man setzt

$$if := If$$

$\mathcal{H}$ wird dann zu einem komplexen HILBERT-Raum $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

$$(f,g)_\mathbb{C} := (f,g)_\mathbb{R} + i(If,g)_\mathbb{R} \equiv (f,g)_\mathbb{R} - i(f,Ig)_\mathbb{R}$$

(Nachrechnen: $(f,g)_\mathbb{C}$ ist linear in g, antilinear in f, positiv definit. Umgekehrt gilt $(f,g)_\mathbb{R} = \mathfrak{Re}\,(f,g)_\mathbb{C}$.)
Anschließend definiert man die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcll} f & \mapsto & a(f) & \text{antilinear} \\ f & \mapsto & a^*(f) = a(f)^* & \text{linear} \end{array} \qquad \forall f \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$$

durch

$$a(f) = \frac{R(f) + iR(If)}{\sqrt{2}}, \qquad a^*(f) = \frac{R(f) - iR(If)}{\sqrt{2}}$$

und verifiziert die Äquivalenz der Anti-Vertauschungsrelation der R mit den kanonischen Anti-Vertauschungsrelationen (CAR)

$$\{a(f), a(g)\} = 0 \qquad \text{und} \quad \{a(f), a^*(g)\} = (f,g)\mathbb{1}\,.$$

Diese Relationen sind aber auf dem antisymmetrischen FOCK-Raum $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}_\mathbb{C})$ definitionsgemäß durch die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren realisiert, vgl. Abschnitt 1.2.2.

Mit anderen Worten: jede Wahl der komplexen Struktur I definiert eine FOCK-Raum-Darstellung π_I der CLIFFORD-Algebra. Die dargestellte Algebra wird auch als CAR-Algebra bezeichnet. Man beachte dabei, daß die Algebra selbst darstellungsunabhängig definiert war und daß die Darstellungen π_I für verschiedene I

nicht unitär äquivalent zu sein brauchen (im unendlich-dimensionalen Fall, vgl. Abschnitt 6.3)!

Eine alternative Form der Beschreibung der CAR-Algebra ist die sogenannte selbstduale CAR-Algebra. Hierzu sei $\mathcal{K}$ ein *komplexer* HILBERT-Raum mit einer antiunitären Involution Γ. Dann ist die C^*-Algebra Cliff$(\mathcal{K},\Gamma)$ der (wiederum eindeutige) Normabschluß der Algebra mit Erzeugern $B(f)$, wobei

$$f \mapsto B(f)$$

komplex linear ist, und die Relationen

$$B(f)^* = B(\Gamma f), \quad \{B(f), B(g)\} = (\Gamma f, g) \cdot \mathbb{1} \quad (\Leftrightarrow B(f)^2 = \frac{1}{2}(\Gamma f, f))$$

gelten.

Die Äquivalenz mit der vorigen Formulierung sieht man wie folgt: Ist $\mathcal{H}$ ein reeller HILBERT-Raum, so ist $\mathcal{K} := \mathcal{H} \oplus i\mathcal{H} \equiv \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}$ ein komplexer HILBERT-Raum mit Skalarprodukt

$$(f_1 + if_2, g_1 + ig_2)_{\mathcal{K}} = (f_1, g_1)_{\mathcal{H}} + i(f_1, g_2)_{\mathcal{H}} - i(f_2, g_1)_{\mathcal{H}} + (f_2, g_2)_{\mathcal{H}}$$

und anti-unitärer Involution $\Gamma : f_1 + if_2 \mapsto f_1 - if_2$. Für $R(f) \in$ Cliff$(\mathcal{H})$ erfüllen

$$B(f_1 + if_2) := \frac{1}{\sqrt{2}}(R(f_1) + iR(f_2))$$

die definierenden Relationen von Cliff$(\mathcal{K},\Gamma)$.

Ist umgekehrt $\mathcal{K}$ ein komplexer HILBERT-Raum mit antiunitärer Involution Γ, so ist der Eigenraum $\Gamma f = f$ ein reeller Unterraum $\mathcal{H}$ von $\mathcal{K}$ mit Skalarprodukt

$$\forall f, g \in \mathcal{H} : (f, g)_{\mathcal{H}} = (f, g)_{\mathcal{K}} \, .$$

Sind $B(f)$, $f \in \mathcal{K}$, die Erzeuger von Cliff$(\mathcal{K},\Gamma)$, so sind

$$\forall f \in \mathcal{H} : R(f) := \sqrt{2}B(f)$$

die Erzeuger von Cliff$(\mathcal{H})$.

In der selbstdualen Schreibweise ist die feldtheoretische Interpretation sehr einfach. Beispielsweise sei ψ ein reelles oder komplexes chirales FERMI-Feld, vgl. Kap. 2. Wir wählen $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ mit Involution $(\Gamma f)(x) = \overline{f(x)}$ bzw. $(\Gamma f)_1(x) = \overline{f_2(x)}$, $(\Gamma f)_2(x) = \overline{f_1(x)}$. Man überzeugt sich sofort, daß die Identifikationen

$$B(f) = \psi(f) = \int \mathrm{d}x f(x)\psi(x)$$

bzw.

$$B(f) = \psi(f_1) + \psi^*(f_2) = \int \mathrm{d}x[f_1(x)\psi(x) + f_2(x)\psi^*(x)]$$

den CAR-Relationen genügen.

In dieser Formulierung ist eine Klasse von Darstellungen durch die Wahl eines Projektionsoperators P auf $\mathcal{K}$ gegeben mit der Eigenschaft, daß

$$\Gamma P \Gamma = 1 - P \ ,$$

d. h. die Involution bildet P in sein Komplement ab. Die physikalische Bedeutung von P ist die, daß er die Testfuntkion f in einen Anteil „positiver Energie“ und einen Anteil „negativer Energie“ zerlegt, so daß die Zerlegung

$$B(f) = B(Pf) + B((1-P)f)$$

der Aufteilung in Erzeuger- und Vernichteranteile entspricht. Man definiert dann eine Zwei-Punkt-Funktion durch

$$\omega_P(B(f)B(g)) := (\Gamma f, Pg)_{\mathcal{K}}$$

und alle anderen N-Punkt-Funktionen durch $\omega(B(f_1)\cdots B(f_{2n+1})) = 0$ und

$$\begin{aligned}\omega_P(B(f_1)\cdots B(f_{2n})) &= \\ &= \sum_{\pi_{2i-1}<\pi_{2i}} (-1)^{\pi} \prod \omega_P(B(f_{\pi_1})B(f_{\pi_2}))\cdots\omega_P(B(f_{\pi_{2n-1}})B(f_{\pi_{2n}}))\end{aligned}$$

gemäß der üblichen FERMI-Kombinatorik. (Ein Zustand, in dem die N-Punkt-Funktionen auf diese Art durch die Zwei-Punkt-Funktionen ausgedrückt werden können, heißt quasifrei.)

Dadurch ist der Zustand ω_P auf ganz $\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma)$ definiert. Die GNS-Konstruktion ordnet dem Zustand eine Darstellung π_P zu. Man kann sich überzeugen, daß die Darstellungen $\{\pi_P\}$ von $\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma)$ und $\{\pi_I\}$ von $\mathrm{Cliff}(\mathcal{H})$ unter dem beschriebenen Isomorphismus der Algebra ineinander übergehen, wobei eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Projektoren P auf $\mathcal{K}$ und den komplexen Strukturen I auf $\mathcal{H}$ besteht.

Die Darstellung der $B(f)$ als FERMI-Felder mit Testfunktionen f zeigt, wie die CAR-Algebra die Struktur eines Netzes von Algebren erhält. Man betrachtet die Unterräume $\mathcal{K}_I \subset \mathcal{K}$, die von den Testfunktionen mit Träger in Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ erzeugt werden. Diese werden durch Γ in sich abgebildet. Die Algebren $\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_I, \Gamma)$ sind in natürlicher Weise Unteralgebren von $\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma)$, da alle ihre Erzeuger $B(f)$ mit $\operatorname{supp} f \subset I$ auch in der letzteren Algebra liegen. Die Unteralgebren $\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_I, \Gamma)$ und $\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_J, \Gamma)$ erfüllen miteinander getwistete Lokalität (Antikommutativität) in dem Sinne, daß ihre Erzeuger $B(f)$, $\operatorname{supp} f \subset I$, und $B(g)$, $\operatorname{supp} g \subset J$, $I \cap J = \emptyset$, antikommutieren (denn $(f,g)_{\mathcal{K}} = \int \overline{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$).

Getwistete Lokalität formuliert man wie folgt: Die Abbildung $\alpha : B(f) \mapsto -B(f)$ induziert einen Automorphismus der CAR-Algebra, $\alpha^2 = \mathrm{id}$. Diese $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie „mißt die Fermionenzahl“ eines beliebigen Operators $C \in \mathrm{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma)$. Jeder Operator C zerfällt in $C = C_+ + C_-$, $C_+ = \frac{1}{2}(C + \alpha(C))$, $C_- = \frac{1}{2}(C - \alpha(C))$, so daß $\alpha(C_\pm) = \pm C_\pm$. Dann gilt

$$[C_+, D_+] = [C_+, D_-] = 0 = \{C_-, D_-\}$$

für $C \in \mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_I, \Gamma)$, $D \in \mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_J, \Gamma)$, $I \cap J = \emptyset$.
Ist in einer Darstellung α implementiert: $\alpha(C) = UCU$ mit $U^2 = \mathbb{1}$, so besitzt $U = P_+ - P_-$ die zwei Eigenwerte ± 1. Man definiert $K = \sqrt{U} = P_+ + iP_-$. Dann gilt äquivalent die getwistete Vertauschungsrelation

$$[C, D^t] = 0$$

mit

$$D^t = KDK^{-1} = K(D_+ + D_-)K^{-1} = D_+ + iD_-U \ .$$

Besondere Bedeutung kommt den Automorphismen zu, die die komplexe Struktur von $\mathcal{K}$ respektieren. Als Beispiel betrachten wir die Translationen: Durch die unitäre Abbildung $u_a : f \mapsto f_a$, $f_a(x) := f(x - a)$ wird ein Automorphismus $\alpha_a : \mathrm{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma) \to \mathrm{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma)$ durch Fortsetzen von $B(f) \mapsto B(f_a)$ induziert, so daß $\alpha_a(\mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_I, \Gamma)) = \mathrm{Cliff}(\mathcal{K}_{I+a}, \Gamma)$. Beachte, daß für die Automorphismuseigenschaft wichtig ist, daß u_α unitär ist und mit Γ kommutiert! Solche Transformationen des HILBERT-Raumes $\mathcal{K}$ heißen BOGOLYUBOV-Transformationen. Andere BOGOLYUBOV-Transformationen werden später eine größere Rolle spielen (s. Kapitel 6.3).

6.2.2 CCR-Algebren

Das hermitesche freie Skalarfeld ϕ der Masse m wird durch seine Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^* und a mit $[a^*, a^*] = [a, a] = 0$ und

$$[a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = (2\pi)^s 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^s(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

beschrieben. Für

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^s\mathbf{k}}{(2\pi)^s} \frac{1}{(2\omega_{\mathbf{k}})} \left[e^{-ikx} a(\mathbf{k}) + e^{ikx} a^*(\mathbf{k})\right]$$

mit $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ und $kx = k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ folgt

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{\mathrm{d}^s\mathbf{k}}{(2\pi)^s} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^{s+1}k}{(2\pi)^s} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) e^{-ik(x-y)} \\
&= i\Delta_m(x - y),
\end{aligned}$$

und zu gleichen Zeiten $t = x^0 - y^0 = 0$

$$\left[\phi(t,\mathbf{x}), \dot{\phi}(t,\mathbf{y})\right] = i\delta^s(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \; .$$

(ϕ und $\pi = \dot{\phi}$ sind kanonisch konjugierte Felder.)
Für eine Ortsraum-Testfunktion $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{s+1})$ findet man

$$\phi(F) = \int \mathrm{d}^{s+1}x F(x)\phi(x) = a^*(f_+) + a(f_-), \quad \dot{\phi}(F) = i\left[a^*(\omega f_+) - a(\omega f_-)\right]$$

mit den Impulsraum-Wellenfunktionen positiver und negativer Energie

$$\begin{aligned} f_+(\mathbf{k}) &= \int \frac{\mathrm{d}^{s+1}x}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} e^{ikx} F(x) =: \tilde{F}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \\ f_-(\mathbf{k}) &= \overline{\tilde{F}(-\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k})} =: \tilde{\overline{F}}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \end{aligned}$$

und den Zuordnungen

$$\begin{aligned} f &\mapsto a^*(f) = \int \frac{\mathrm{d}^s\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} f(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) \qquad \text{linear} \; , \\ f &\mapsto a(f) = \int \frac{\mathrm{d}^s\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \overline{f(\mathbf{k})} a^*(\mathbf{k}) \qquad \text{antilinear} \; . \end{aligned}$$

Konstruktionsgemäß gilt $a(f)^* = a^*(f)$ und

$$[a,a] = [a^*,a^*] = 0, \quad [a(f), a^*(g)] = (f,g) = \int \mathrm{d}^s\mathbf{k} \overline{f(\mathbf{k})} g(\mathbf{k}) \; .$$

Auf den Impulsraum-Testfunktionen $f(\mathbf{k})$ operiert ω als Multiplikationsoperator: $(\omega f)(\mathbf{k}) := \omega_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})$.
Man beachte, daß die Größen $a(\mathbf{k})/\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}$ und damit $a(f)$ massenunabhängige Vertauschungsrelationen erfüllen; auch der von diesen erzeugte FOCK-Raum ist von der Masse m unabhängig. Erst die Felder $\phi(x)$ hängen durch die Gewichtsfaktoren $\omega_{\mathbf{k}}$ in den Integraldarstellungen von m ab. Diese sind so konstruiert, daß sie zur Zeit $t = 0$ die kanonischen, massenunabhängigen Vertauschungsrelationen $[\phi, \pi] = i\delta$ erfüllen und dabei die massenabhängige Bewegungsgleichung $(\Box + m^2)\phi = 0$ lösen. Der nichtdynamische, kanonische "Kern" sind die Vertauschungsrelationen der $a(f)$ mit ihren Adjungierten. Nur diese werden im Folgenden betrachtet und umformuliert.
Reellen Ortsraum-Testfunktionen F entsprechen Impulsraumfunktionen f_+, f_- mit der Nebenbedingung $f_+(\mathbf{k}) = f_-(\mathbf{k})$. Die reell verschmierten Felder sind also von der Form $\phi(F) = a^*(f) + a(f)$. Die letzteren Kombinationen, als reell-lineare Abbildungen

$$f \mapsto A(f) = a^*(f) + a(f), \qquad A(f) = A(f)^*$$

eines komplexen Vektorraums von Impulsraum-Testfunktionen betrachtet, erzeugen aber bereits die ganze Algebra, da sie mit

$$A(if) = i(a^*(f) - a(f))$$

auch die Erzeugungs- und Vernichtungsanteile getrennt erzeugen. Die $A(f)$ erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[A(f), A(g)] = (f,g) - (g,f) = 2i\Im m\,(f,g) = 2i\sigma(f,g)\ ,$$

wobei $\sigma(f,g) := \Im m\,(f,g)$ eine reellwertige, reell-lineare, antisymmetrische, nichtausgeartete Bilinearform mit der Eigenschaft $f \neq 0 \Rightarrow \sigma(f,if) > 0$ ist (symplektische Form).

Als freie BOSE-Felder sind die CCR-Operatoren im allgemeinen notwendig unbeschränkt. Die entsprechenden exponenzierten Operatoren sind allerdings beschränkt. Exponenziert hat obige Vertauschungsrelation die folgende Form:

$$e^{iA(f)}e^{iA(g)} = e^{-i\sigma(f,g)}e^{iA(f+g)} = e^{-2i\sigma(f,g)}e^{iA(g)}e^{iA(f)}$$

mit

$$\left(e^{iA(f)}\right)^* = e^{-iA(f)}\ .$$

In obiger Gestalt werden die kanonischen Vertauschungsrelationen als CCR-Algebra axiomatisiert. Zu einem reellen symplektischen Raum $\mathcal{X}$ mit symplektischer Form σ ist die WEYL-Algebra die durch die unitären Elemente $W(f)$, $f \in \mathcal{X}$, mit den Relationen

$$W(f)W(g) = e^{-i\sigma(f,g)}W(f+g)$$

erzeugte Algebra, und $\mathrm{CCR}(\mathcal{X},\sigma)$ der C^*-Abschluß der WEYL-Algebra. Man beachte, daß Unitarität und WEYL-Relation zusammen auch $W(0) = \mathbb{1}$ und $W(f)^* = W(-f)$ implizieren. Es folgt $\|W(f)\| = 1$ und $\|W(f) - W(g)\| = 2$ für $f \neq g$. (Anm.: Die Ähnlichkeitstransformation $W(f)W(g)W(f)^* = e^{-i\sigma(f,g)}W(g)$ zeigt, daß das Spektrum von $W(g)$ unter dem Shift um $e^{-i\sigma(f,g)}$ invariant ist. Da f beliebig und σ nichtentartet ist, ist diese Phase beliebig, also muß das Spektrum von $W(g)$ den ganzen Einheitskreis umfassen. Es folgt $\|W(g) - \mathbb{1}\| = 2$ und $\|W(f) - W(g)\| = 2$ für $f \neq g$.) Die Norm von Linearkombinationen ist dann

$$\left\|\sum_i c_i W(f_i)\right\| = \sum_i |c_i|\ .$$

Im Gegensatz zur CAR-Algebra ist also die Abbildung $f \mapsto W(f)$ nicht normstetig, sondern diskret. Dies führt dazu, daß – ebenfalls im Gegensatz zur CAR-Algebra – die CCR-Algebra eines Prä-HILBERT-Raumes oder eines dichten Unterraumes echt kleiner ist als die CCR-Algebra des ganzen HILBERT-Raumes.

Der Weg von der CCR-Algebra zurück zu den Feldern ist daher in der Regel nicht möglich; die naive Umkehrformel

$$iA(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(tf)\Big|_{t=0}$$

ist wegen der Unstetigkeit in t in der Norm nicht algebraisch möglich. Es ist eine nichttriviale Eigenschaft einer Darstellung π der CCR-Algebra, daß die Ableitung als schwacher Limes existiert; in diesem Fall heißt die Darstellung *regulär*.

Wie im Falle der CAR-Algebra kann man FOCK-Darstellungen durch Angabe einer symplektischen komplexen Struktur I auf $\mathcal{X}$ erhalten (vgl [16], Kapitel 9.5). Dies ist ein reell-linearer Operator auf $\mathcal{X}$ mit den Eigenschaften $I^2 = -\mathbb{1}$, $\sigma(If, Ig) = \sigma(f, g)$ und $\sigma(f, If) \geq 0$. Setzt man $if := If$, so definieren

$$a^*(f) = \frac{1}{2}[A(f) - iA(If)], \quad a(f) = \frac{1}{2}[A(f) + iA(If)]$$

die Erzeuger- und Vernichteranteile mit Zwei-Punkt-Funktionen

$$(\Omega_I, a(f)a^*(g)\Omega_I) = [a(f), a^*(g)] = i[\sigma(f, g) - i\sigma(f, Ig)] =: (f, g)_I \ .$$

Man kann stattdessen auch den Erwartungswert von $W(f)$ angeben:

$$\omega(W(f)) = \exp\left(-\frac{\|f\|_I^2}{2}\right)$$

(wobei $\|f\|_I^2 = [a(f), a^*(f)] = \sigma(f, If)$).

Auch die CCR-Algebra erhält eine lokale Struktur von den Testfunktionen. Sind F und G reell mit raumartig getrennten Trägern, so sind die entsprechenden Impulsraum-Wellenfunktionen f und g symplektisch orthogonal: $\sigma(f, g) = 0$, und die WEYL-Operatoren kommutieren. Die lokalen CCR-Unteralgebren sind also von der Art $\mathrm{CCR}(\mathcal{X}_\mathcal{O}, \sigma) \subset \mathrm{CCR}(\mathcal{X}, \sigma)$.

Das chirale freie BOSE-Feld ist der $U(1)$-Strom j mit den Vertauschungsrelationen

$$[j(f), j(g)] = \frac{i}{2\pi} \int f(x) g'(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(-k)\tilde{g}(k) k \mathrm{d}k = 2i\sigma(f, g)$$

Die WEYL-Operatoren sind $W(f) = e^{ij(f)}$ (f reell), der Vakuumerwartungswert ist

$$(\Omega, W(f)\Omega) = \exp\left[-\frac{1}{2}\omega(j(f)^2)\right]$$

mit

$$\omega(j(f)^2) = (\Omega, j(f)j(f)\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k \mathrm{d}k |\tilde{f}(k)|^2 \ .$$

Die zugehörige komplexe Struktur I operiert auf $\tilde{f}(k)$ wie $i\varepsilon(k)$ und führt reelle Ortsraumtestfunktionen in reelle Ortsraumtestfunktionen über.

6.3 BOGOLYUBOV-Transformationen

Wir kehren zur CAR-Algebra in ihrer selbstdualen Form zurück

$$\mathcal{K} \ni f \mapsto B(f) \text{ komplex linear}, \quad B(f)^* = B(\Gamma f), \quad \{B(f), B(g)\} = (\Gamma f, g) \; .$$

Eine Darstellung auf dem FOCK-Raum $\mathcal{F}_-(P\mathcal{K})$ ist gegeben durch eine Projektion P mit $\Gamma P \Gamma = 1 - P$ und die Zwei-Punkt-Funktion

$$\omega_P(B(f)B(g)) = (\Gamma f, Pg) \; .$$

Die Projektion P entscheidet, welche „Hälfte" des komplexen HILBERT-Raumes $\mathcal{K}$ als Erzeugungsanteil betrachtet werden soll; für die Vakuum-Darstellung projiziert $P = P_0$ gerade auf die positiven Frequenzanteile der Wellenfunktion. Dies entspricht der „Auffüllung des DIRAC-Sees": Alle Zustände negativer Energie sind besetzt und nur noch Zustände positiver Energie können angeregt werden.

Man kann P jedoch auch anders wählen; im Extremfall projiziert $P = P_\infty$ auf die negativen Frequenzanteile. Die dadurch induzierte Darstellung besitzt nur Anregungen negativer Energie; der „umgekehrte" Grundzustand wird als „Deckenzustand" (ceiling state) bezeichnet. Im allgemeinen wird P zwischen diesen Extremen liegen; der Grundzustand des entsprechenden FOCK-Raumes wird dann gegenüber dem Vakuumzustand mehrere angeregte Elektronen enthalten, die in dieser Darstellung annihiliert werden können (Erzeugung der entsprechenden Löcher), und der Grundzustand des FOCK-Raumes ist nicht länger Zustand niegdrigster Energie. Ob der FOCK-Raum $\mathcal{F}_-(P\mathcal{K})$ überhaupt einen Zustand niedrigster Energie enthält, ist nicht von vornherein klar: der FOCK-Raum über dem Deckenzustand enthält keinen Zustand niedrigster Energie. Je nach Wahl von P kann aber $\mathcal{F}_-(P\mathcal{K})$ mit dem Vakuum-FOCK-Raum $\mathcal{F}_-(P_0\mathcal{K})$ identisch sein – auch wenn die Grundzustände verschieden sind.

Damit dies zutrifft, dürfen die beiden Projektionsoperatoren sich nicht zu stark unterscheiden:

Satz 6.2 ([15]) *Die durch Projektoren P und P' induzierten* FOCK*-Raum-Darstellungen sind genau dann unitär äquivalent, wenn die Differenz $P - P'$ ein* HILBERT-SCHMIDT*-Operator ist.*

Erinnerung: X heißt HILBERT-SCHMIDT oder $X \in L^2(\mathcal{K})$, falls $\mathrm{Tr}(X^*X) < \infty$ existiert (X^*X liegt dann in der Spurklasse $L^1(\mathcal{K})$). In einem endlichdimensionalen HILBERT-Raum sind alle beschränkten Operatoren in der Spurklasse und also auch HILBERT-SCHMIDT: für endlich viele Freiheitsgrade sind alle FOCK-Darstellungen der CAR-Algebra äquivalent; dies ist nicht überraschend, da $\mathrm{Cliff}(\mathbb{C}^{2n}, \Gamma)$ die ganze Matrixalgebra $\mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ ist. Im unendlich dimensionalen Fall ist aber $P_0 - P_\infty$ sicher nicht HILBERT-SCHMIDT, da $P_0 - P_\infty = P_0 - (\mathbb{1} - P_0) = 2P_0 - \mathbb{1}$, $(2P_0 - \mathbb{1})^2 = \mathbb{1}$ und $\mathrm{Tr}\mathbb{1} = \infty$.

Übersetzt in die Terminologie für Cliff($\mathcal{H}$) lautet das Kriterium für die Äquivalenz von FOCK-Raum-Darstellungen $\pi_I \sim \pi_{I'} \Leftrightarrow I - I' \in L^2(\mathcal{H})$. In dieser Form gilt dieselbe Aussage auch für die FOCK-Darstellungen der CCR-Algebra. Die Grundidee der Beweise besteht darin, den Grundzustand der einen Darstellung im FOCK-Raum der anderen Darstellung zu charakterisieren.

Wir betrachten nun unitäre Operatoren u auf $\mathcal{K}$, die mit Γ kommutieren. Dann ist

$$\alpha_u : B(f) \mapsto B(uf)$$

ein BOGOLYUBOV-Automorphismus der CAR-Algebra, da $\alpha_u(B(f))$ dieselben Relationen erfüllen. Es ist außerdem

$$\begin{aligned} \omega_P\big(\alpha_u(B(f))\alpha_u(B(g))\big) &= \omega_P\big(B(uf)B(ug)\big) = (\Gamma uf, Pug) \\ &= (\Gamma f, u^*Pug) = \omega_{u^*Pu}(B(f)B(g)) \ . \end{aligned}$$

Also $\omega_P \circ \alpha_u = \omega_{u^*Pu}$. Es seien π_P und π_{u^*Pu} die GNS-Darstellungen zu ω_P und ω_{u^*Pu}. Dann folgt (bis auf kanonische Äquivalenz)

$$\pi_P \circ \alpha_u = \pi_{u^*Pu} \ ,$$

d. h. die beiden Darstellungen unterscheiden sich um einen BOGOLYUBOV-Automorphismus.

Andererseits besagt aber der Satz, daß $\pi_{u^*Pu} \cong \pi_P$ ist, falls $(u^*Pu - P)$ HILBERT-SCHMIDT ist; in diesem Fall gibt es also einen unitären Operator U auf $\mathcal{F}_-(P\mathcal{K})$, so daß

$$\pi_P \circ \alpha_u(X) = \pi_{u^*Pu}(X) = U\pi_P(X)U^* \qquad X \in \text{Cliff}(\mathcal{K}, \Gamma)$$

[20, 21]. Der Operator U implementiert den BOGOLYUBOV-Automorphismus. Man rechnet sofort nach, daß UV den BOGOLYUBOV-Automorphismus $\alpha_U \circ \alpha_V = \alpha_{UV}$ implementiert, wenn U und V die BOGOLYUBOV-Automorphismen α_U und α_V implementieren.

Die Abbildung $\{\text{unitär auf } \mathcal{K}, u\Gamma = \Gamma u, u^*Pu - P \text{ ist HILBERT-SCHIMDT}\} \ni u \mapsto U \in \{\text{unitär auf } \mathcal{F}_-(P\mathcal{K})\}$ ist also eine projektive Darstellung. (Nebenbemerkung: wenn U und U' denselben Automorphismus implementieren, so können sie sich nur um eine komplexe Phase unterscheiden; die implementierenden Operatoren sind also überhaupt nur bis auf eine komplexe Phase eindeutig bestimmt.) Es gilt $U_uU_v = e^{i\omega(u,v)}U_{uv}$, wobei die Phase $\omega(u,v)$ ein Kozykel ist:

$$\omega(u,v) + \omega(uv,w) = \omega(u,vw) + \omega(v,w) \mod 2\pi \ .$$

Beispiele für BOGOLYUBOV-Transformationen:

1. Translation:

$$(u_a f)(x) \equiv f_a(x) = f(x-a)$$

2. Eichtransformation:

$$\begin{aligned}(u_\lambda f)_1(x) &= e^{i\lambda(x)} f_1(x)\\ (u_\lambda f)_2(x) &= e^{-i\lambda(x)} f_2(x)\end{aligned}$$

3. Diffeomorphismen:

$$(u_g f)(x) = \left(\frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} f \circ g^{-1}(x)$$

Alle diese Beispiele kommutieren mit $\Gamma : f \mapsto \overline{f}$ bzw. $\Gamma : (f_1, f_2) \mapsto (\overline{f}_2, \overline{f}_1)$ für reelle bzw. komplexe FERMI-Felder (die Eichtransformation ist nur für letztere definiert). Sie sind alle unitär. Die induzierten BOGOLYUBOV-Transformationen sind $\alpha_a \psi(x) = \psi(x+a)$, $\alpha_\lambda \psi(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x)$ und $\alpha_g \psi(x) = \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(g(x))$. u_a kommutiert sogar mit dem Projektor auf die positiven Frequenzen (da u_a im Impulsraum wie e^{ika} wirkt), also ist $\alpha_a : B(f) \mapsto B(f_a)$ in der Vakuum-Darstellung implementiert

$$\pi_0(\alpha_a(x)) = U_a \pi_0(x) U_a^* \,.$$

Die Abbildung der *Translation* $a \mapsto U_a$ ist eine projektive Darstellung von $\mathbb{R}$ und kann durch eine geeignete Wahl $U(a) = \varphi(a) U_a$ zu einer echten Darstellung gemacht werden. Der Kozykel $\omega(a,b)$ ist also ein Ko-Rand, d. h. $\exists \varphi : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$:

$$e^{i\omega(a,b)} = \frac{\varphi(a)\varphi(b)}{\varphi(a+b)} \,.$$

Die *Eichtransformation* kommutiert nicht mit P. Die HILBERT-SCHMIDT-Bedingung $uPu^* - P \in L^2(\mathcal{H}) \Leftrightarrow uP - Pu \in L^2(\mathcal{H})$ kann man explizit überprüfen (vgl. [16], Abschnitt 6.3.1): Der Projektionsoperator P hat im Ortsraum den Integralkern $\frac{1}{2\pi}\Delta(x-y)$. Der Kommutator $[u_\lambda, P]$ hat daher den Integralkern

$$\frac{1}{2\pi}\left[e^{i\lambda(x)} - e^{i\lambda(y)}\right]\Delta(x-y) \,.$$

Die HILBERT-SCHMIDT-Bedingung ist also

$$I = \int \left|e^{i\lambda(x)} - e^{i\lambda(y)}\right|^2 |\Delta(x-y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \,.$$

Ist $\lambda(x) = \lambda = \text{const}$, so ist offenbar $I = 0$; folglich sind globale Eichtransformationen in der Vakuum-Darstellung implementiert. (Wir kennen den implementierenden Operator $e^{i\lambda Q}$ bereits.) Ist $\lambda(x) = \lambda_+$ für $x > x_+$ und $\lambda(x) = \lambda_-$ für $x < x_-$, so verschwindet der Integrand in $x, y > x_+$ und in $x, y < x_-$. Der Beitrag von $y < x_- < x_+ < x$ ist

$$\left|e^{i(\lambda_+ - \lambda_-)} - 1\right|^2 \int_0^{x_-} \mathrm{d}y \int_{x_+}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{(x-y)^2}$$

und divergiert logarithmisch – es sei denn, $\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, daß Eichtransformationen, die „auf dem Kreis“ $z = -1$, $x = \pm\infty$ unstetig sind, nicht implementierbar sind. Dies ist auch zu erwarten, da wir wissen, daß das FERMI-Feld in der Vakuum-Darstellung periodisch ist und nicht durch eine unitäre Ähnlichkeitsabbildung aperiodisch gemacht werden kann.

Ist dagegen $q_\lambda = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ und die Funktion λ hinreichend glatt, so kann man auch zeigen, daß die restlichen Beiträge zum Integral endlich sind; beispielsweise erhält man für $x_- < y < x_+ < x$

$$4 \int_{x_-}^{x_+} \mathrm{d}y \int_{x_+}^{\infty} \mathrm{d}x \sin^2 \frac{\lambda_+ - \lambda(y)}{2} \frac{1}{(x-y)^2} = 4 \int_{x_-}^{x_+} \mathrm{d}y \sin^2 \frac{\lambda_+ - \lambda(y)}{2} \frac{1}{x_+ - y} \,.$$

Die Singularität bei $y \to x_+$ wird durch den Sinus kompensiert, falls λ bei x_+ differenzierbar ist. Aus ähnlichen Gründen ist für $x_- < x, y < x_+$ die Singularität in

$$4 \int_{x_-}^{x_+} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \sin^2 \frac{\lambda(x) - \lambda(y)}{2} \frac{1}{(x-y)^2}$$

kompensiert, falls λ differenzierbar ist. Es folgt, daß differenzierbare Eichtransformationen, die sich nur lokal von einer konstanten Eichtransformation unterscheiden, implementierbar sind. Dabei darf $\lambda_+ \neq \lambda_-$ sein, solange die beiden Werte sich nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden.

Ähnliche Abschätzungen folgen für lokalisierte Diffeomorphismen g, d. h. glatte Bijektionen (mit glatter Umkehrfunktion), für die $g(x) = x$ für $x > x_+$ oder $x < x_-$ gilt (vgl. [16], Abschnitt 6.8.2):

Auch diese BOGOLYUBOV-Automorphismen sind in der Vakuum-Darstellung implementierbar. Die Translationen, Eichtransformationen und Diffeomorphismen u_a, u_λ und u_g erfüllen offensichtlich Vertauschungsrelationen untereinander. Beispielsweise $u_a u_\lambda u_{-a} = u_{\lambda_a}$, $u_g u_\lambda u_{g^{-1}} = u_{\lambda \circ g^{-1}}$, $u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} = u_{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Soweit sie implementierbar sind, gelten dieselben Relationen bis auf eine unbestimmte komplexe Phase auch für die implementierenden Operatoren

$$\begin{aligned} U_a U_\lambda U_{-a} &= e^{i\omega(a,\lambda)} U_{\lambda_{-a}} \ , \\ U_g U_\lambda U_{g^{-1}} &= e^{i\omega(g,\lambda)} U_{\lambda \circ g^{-1}} \ , \\ U_{\lambda_1} U_{\lambda_2} &= e^{i\omega(\lambda_1,\lambda_2)} U_{\lambda_1+\lambda_2} \ . \end{aligned}$$

Nichtimplementierbare Eichtransformationen mit $\frac{(\lambda_- - \lambda_+)}{2\pi} = q_\lambda \notin \mathbb{Z}$ führen zu Darstellungen $\pi_\lambda = \pi_0 \circ \alpha_\lambda$, die zu der Vakuum-Darstellung unitär inäquivalent sind. (Wären sie äquivalent, so wäre α_λ implementierbar.) Dann sind aber π_{λ_1} und π_{λ_2} unitär äquivalent, wenn $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$: denn $u_{\lambda_2} = u_{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot u_{\lambda_1}$, also $\alpha_{\lambda_2} = \alpha_{\lambda_2-\lambda_1} \circ \alpha_{\lambda_1}$ und $\pi_{\lambda_2}(\cdot) = U_{\lambda_2-\lambda_1} \pi_{\lambda_1}(\cdot) U^*_{\lambda_2-\lambda_1}$. Die unitären Äquivalenzklassen der so erzeugten Darstellungen sind also durch die Ladung $q \mod \mathbb{Z}$ eindeutig charakterisiert. Diese Darstellungen sind kovariant, da $\lambda - \lambda_a$ implementierbar ist:

$$\begin{aligned} \pi_\lambda \circ \alpha_a = \pi_0 \circ \alpha_\lambda \circ \alpha_a = \pi_0 \circ \alpha_a \circ \alpha_{\lambda_a} = U_a \pi_0 \alpha_{\lambda_a}(\cdot) U_a^* \\ = U_a U_{\lambda_a - \lambda} \pi_0 \circ \alpha_\lambda(\cdot) U^*_{\lambda_a - \lambda} U_a = U \pi_\lambda(\cdot) U^* \ . \end{aligned}$$

(Sie erfüllen auch die Spektrumsbedingung.)

Man kann zeigen, daß der antisymmetrische Anteil $\frac{1}{2}[\omega(\lambda_1,\lambda_2) - \omega(\lambda_2,\lambda_1)]$ des Kozykels gleich

$$-\frac{1}{8\pi}\left[\int \lambda_1 \overleftrightarrow{\partial} \lambda_2 - \lambda_{1+}\lambda_{2-} + \lambda_{1-}\lambda_{2+}\right] =: -\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$$

ist (vgl. [16], Abschnitte 4.7.5 und 6.7.1)[2], und daß für $\lambda_i = f_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$-\omega(f_1,f_2) = \sigma(f_1,f_2) = \frac{1}{4\pi}\int f_1 f_2' \mathrm{d}x$$

mit der symplektischen Form σ der CCR-Algebra übereinstimmt. Also ist $W(f) = U_{\lambda=f}$ für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine Darstellung von $\mathrm{CCR}(\mathcal{D}(\mathbb{R}),\sigma)$ auf dem FOCK-Raum der FERMI-Felder. Diese Darstellung ist natürlich die WEYL-Form der uns bekannten Stromalgebra:

$$W(f) = e^{ij(f)} \qquad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ ,$$

denn $e^{ij(f)}$ implementiert dieselben Eichtransformationen $\alpha_{\lambda=f}$ wie $W(\lambda = f)$. Jedoch sind $W(f)$ jetzt auch für $\lambda' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $q_\lambda \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert – dies sind die glatten Funktionen, die außerhalb eines Intervalls konstant sind und sich dort nur

[2] Vorzeichenunterschied wegen unterschiedlicher Konvention bzgl. positiver Energie; entspricht $\theta \leftrightarrow -\theta$ in [16]

um ein Vielfaches von 2π unterscheiden. Insbesondere ist $W(\lambda = t = \text{const}) = e^{itQ}$ und erfüllt die Vertauschungsrelation

$$e^{itQ}W(\lambda)e^{-itQ} = e^{2i\sigma(t,\lambda)}W(\lambda)$$

mit

$$2i\sigma(t,\lambda) = -\frac{i}{4\pi}\left[\int t\lambda' - t\lambda_- + t\lambda_+\right] = -\frac{it}{2\pi}(\lambda_+ - \lambda_-) = itq_\lambda,$$

also

$$e^{itQ}W(\lambda)e^{-itQ} = e^{itq_\lambda}W(\lambda)\ .$$

Dies bedeutet, daß $W(f)$ als Operator auf dem FOCK-Raum die Ladung $Q = q_\lambda$ trägt.

Sei nun $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: Dann gilt

$$U_\lambda W(f)U_\lambda^{-1} = e^{-2i\sigma(\lambda,f)}W(f) = e^{\frac{i}{2\pi}\int\lambda' f}W(f) =: \alpha(W(f))\ .$$

Diese Transformation ist ein Automorphismus der CCR-Algebra $W(f) = e^{ij(f)}$, der als Transformation

$$\alpha_\lambda(j(f)) = \int\left(j(x) + \frac{\lambda'(x)}{2\pi}\right)f(x)\mathrm{d}x$$

oder

$$\alpha_\lambda(j(x)) = j(x) + \frac{\lambda'(x)}{2\pi}$$

gelesen werden kann.

Obwohl U_λ auf dem FOCK-Raum nur für $q_\lambda \in \mathbb{Z}$ existiert, ist die Transformation α_λ der CCR-Algebra für beliebige λ mit $\lambda' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ wohldefiniert. Daher besitzt die $U(1)$-Stromalgebra außer den Darstellungen ganzzahliger Ladung q_λ ein ganzes Kontinuum von Darstellungen mit $q_\lambda \in \mathbb{R}$, die nicht auf einem fermionischen FOCK-Raum realisiert sind.

Ist π_0 die Vakuum-Darstellung der CAR-Algebra, so sind die Darstellungen $\pi_\lambda = \pi_0 \circ \alpha_\lambda$ durch $\pi_\lambda = W(\lambda)\pi_0(\cdot)W(\lambda)^*$ gegeben, d.h., sie sind unitär äquivalent zu π_0. Wir können diese unitäre Äquivalenz jedoch nicht auf die Vakuum-Darstellung der CCR-Algebra, die dem Unterraum von π_0 mit $Q = 0$ entspricht, einschränken, da $W(\lambda)$ nicht mit dem Projektor $P_{Q=0}$ kommutiert; vielmehr ist

$$\begin{aligned}\pi_\lambda(\cdot)P_{Q=0} &= W(\lambda)\pi_0(\cdot)W(\lambda)^*P_{Q=0} \\ &= W(\lambda)\pi_0(\cdot)P_{Q=-q_\lambda}W(\lambda)^*\ ,\end{aligned}$$

so daß $W(\lambda)$ die unitäre Äquivalenz zwischen den Unter-Darstellungen $[\pi_0(\cdot)P_{Q=0}]\circ\alpha_\lambda$ mit $[\pi_0(\cdot)P_{Q=-q_\lambda}]$ etabliert. Dagegen sind $[\pi_0(\cdot)P_{Q=0}]\circ\alpha_\lambda$ und $[\pi_0(\cdot)P_{Q=0}]$ als Darstellungen der CCR-Algebra inäquivalent: Der Ladungsoperator ist in beiden Darstellungen als schwacher Limes $\lim_{\mathcal{D}(\mathbb{R})\ni f\to 1}\pi[j(f)]$ definiert; aber wegen $\alpha_\lambda j(f) = j(f) + \frac{1}{2\pi}\int\lambda' f$ konvergiert dieser Operator in der Vakuum-Darstellung gegen $Q=0$ und in der transformierten Darstellung gegen $Q+\frac{1}{2\pi}\int\lambda' = 0 - q_\lambda = -q_\lambda$. Dies zeigt die Inäquivalenz der Darstellungen.

Diese Überlegungen für die $U(1)$-Eichtransformationen eines komplexen Fermions verallgemeinern sich auf die $U(N)$-Eichtransformationen von N komplexen Fermionen; dabei werden $\lambda(x)$ LIEalgebra-wertige Funktionen, und Ausdrücke wie $\int\lambda_1\lambda_2'$ sind durch $\mathrm{Tr}\int\lambda_1\lambda_2'$ zu ersetzen.

Schließlich bleibt noch die Implementierung der Diffeomorphismen α_g durch U_g zu diskutieren. Wir hatten bereits in den Abschnitten 2.4 und 4.2 gesehen, daß die LIE-Algebra des Energie-Impuls-Tensors eine zentrale Erweiterung der LIE-Algebra der Diffeomorphismen-Gruppe ist und daß die Kommutatoren mit $T(f)$ auf den FERMI-Feldern wie infinitesimale Diffeomorphismen $x\mapsto x+f(x)$ operieren. Es liegt daher nahe, die implementierenden Operatoren U_g als $e^{iT(f)}$ zu interpretieren, wobei $g\in\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ durch die Exponentialabbildung aus dem infinitesimalen Diffeomorphismus $\delta x = f(x)$ hervorgeht. Tatsächlich läßt sich diese Interpretation auch beweisen. Jedoch ist zu warnen, daß diejenigen $g\in\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$, die in dieser Form darstellbar sind, eine nirgends dichte Teilmenge von $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ bilden (vgl. [16], Abschnitt 3.3.1); sie erzeugen aber wenigstens eine dichte Untergruppe.

6.4 DHR-Theorie der Superauswahlsektoren

Die folgende Analyse geht auf S. DOPLICHER, R. HAAG und J. E. ROBERTS [3, 4] zurück und wird entsprechend als DHR-Theorie bezeichnet.

Wir betrachten ein lokales Netz $\mathcal{O}\mapsto\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ in der Vakuumdarstellung $\pi_0(a)=a$ mit der Eigenschaft der HAAG-Dualität:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' \ .$$

(Lokalität verlangt $\mathfrak{A}(\mathcal{O})\subset\mathfrak{A}(\mathcal{O})''\subset\mathfrak{A}(\mathcal{O}')'$, wobei die Doppelkommutante X'' gleich dem schwachen Abschluß ist. HAAG-Dualität ist also eine Maximalitätseigenschaft der lokalen Observablen. Sie wird auch oft in der etwas schwächeren Form $\mathfrak{A}(\mathcal{O})''=\mathfrak{A}(\mathcal{O}')'$ formuliert – dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ nicht notwendig schwach abgeschlossen, d. h. keine VON-NEUMANN-Algebra. Für lokal normale Darstellungen (alle Einschränkungen auf lokale Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ sind unitär äquivalent; diese Eigenschaft ist sehr allgemein gültig) bedeutet die Ersetzung $\mathfrak{A}(\mathcal{O})\mapsto\mathfrak{A}(\mathcal{O})''$ keinen Verlust der Allgemeinheit.)

Wir betrachten die Klasse der DHR-Darstellungen π, die durch die Eigenschaft

$$\forall \mathcal{O} \ : \ \pi|\mathfrak{A}(\mathcal{O}') \cong \pi_0|\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$$

charakterisiert sind. Solche Darstellungen sind also nur im kausalen Einflußbereich eines Doppelkegels $\mathcal{O}$ von der Vakuum-Darstellung zu unterscheiden – heuristisch hat man also zu einer Anfangszeit t eine lokale Anregung des Vakuums, die natürlich kausal propagiert.

DHR-Darstellungen können auch durch einen Endomorphismus beschrieben werden. Sei nämlich $U : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\pi$ ein unitärer Operator, der für einen gegebenen Doppelkegel $\mathcal{O}$ die geforderte Äquivalenz implementiert:

$$\forall a' \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}') \ : \ \pi_0(a') = U^* \pi(a') U \ .$$

Dieselbe Abbildung auf ganz $\mathfrak{A}$ ausgedehnt:

$$\varrho(a) := U^* \pi(a) U$$

ist ein Homomorphismus $\varrho : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_0)$. Sie operiert definitionsgemäß trivial auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$, da $\pi_0(a)$ für $a \in \mathfrak{A}$ mit a identifiziert wird. Sie bildet aber $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ ab: Sei $a \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$, dann können wir $\mathcal{O}_2$ so groß wählen, daß es sowohl $\mathcal{O}_1$ als auch $\mathcal{O}$ enthält. Dann kommutiert $\varrho(a)$ mit $b \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2')$, denn

$$\varrho(a)b = \varrho(a)\varrho(b) = \varrho(ab) = \varrho(ba) = \varrho(b)\varrho(a) = b\varrho(a) \ .$$

Haag-Dualität impliziert dann, daß $\varrho(a) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$ ist. Alle lokalen Operatoren werden auf lokale Operatoren (gegebenenfalls mit vergrößertem Lokalisationsgebiet) abgebildet, und der C^*-Abschluß $\mathfrak{A} = \overline{\cup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})}$ wird wegen Normstetigkeit ebenfalls in sich abgebildet ($\|\varrho(a)\| = \|\pi(a)\| \leq \|a\|$).

Umgekehrt liefert jeder lokalisierte Endomorphismus von $\mathfrak{A}$:

$$\varrho(a') = a' \qquad a' \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$$

trivialerweise eine DHR-Darstellung $\pi \cong \pi_0 \circ \varrho$.

Wir haben bereits lokalisierte Endomorphismen kennengelernt; z. B. die Bogolyubov-Transformation u_λ (Eichtransformation) oder u_g (Diffeomorphismus) der CAR-Algebra bzw. ihrer geraden (bosonischen) Unteralgebra, wenn $e^{i\lambda}$ und $g - \mathrm{id}$ kompakten Träger haben. Ebenso ist die Transformation der Stromalgebra in der Weyl-Form:

$$\varrho_\lambda : W(f) \mapsto e^{\frac{i}{2\pi} \int \lambda' f} W(f)$$

ein lokalisierter Automorphismus, wenn sogar nur λ' kompakten Träger hat.

Diese Beipiele sind sogar Automorphismen, also invertierbar. Beispiele für echte Endomorphismen sind sehr schwierig explizit anzugeben; letztere sind aber

grundsätzlich nicht auszuschließen und treten als „Regelfall“ auch tatsächlich auf. Obwohl wir immer nur mit abstrakten Endomorphismen arbeiten müssen, kann man über diese quantitative Aussagen machen. Dazu ist ein sehr wirkungsvolles Kalkül entwickelt worden.

Zunächst betrachten wir Äquivalenzklassen. ϱ_1 und ϱ_2 heißen unitär äquivalent, wenn dieses für die Darstellungen $\pi_0 \circ \varrho_1$ und $\pi_0 \circ \varrho_2$ gilt. Aufgrund von HAAG-Dualität ist der unitäre Operator, der die Äquivalenz implementiert, dann selbst eine lokale Observable, deren Lokalisationsgebiet die Lokalisationsgebiete der beiden Endomorphismen enthält. Unitäre Äquivalenz ist also dasselbe wie innere unitäre Äquivalenz:

$$\varrho_1 \cong \varrho_2 \;\Leftrightarrow\; \exists U \in \mathfrak{A}\; \forall a \in \mathfrak{A} : U\varrho_1(a) = \varrho_2(a)U \;.$$

Die Äquivalenzklassen $[\varrho]$ werden als Sektoren (oder verallgemeinerte Ladungen) bezeichnet.

Die direkte Summe zweier DHR-Darstellungen π_1 und π_2 ist wieder eine DHR-Darstellung. Zur Konstruktion eines entsprechenden Endomorphismus

$$\varrho \cong \varrho_1 \oplus \varrho_2$$

wählen wir in $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ eine beliebige nichttriviale Projektion $E \neq 0, \mathbb{1}$. Ein allgemeines Strukturtheorem über lokale VON-NEUMANN-Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ besagt, daß diese Faktoren vom Typ III sind; die Typ-III-Eigenschaft ist äquivalent zu der Eigenschaft, daß jede Projektion $p \neq 0$ in der Form $p = ww^*$, $w^*w = \mathbb{1}$ in der Algebra faktorisiert. Es gibt also zwei Isometrien $W_i \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ mit $W_1W_1^* = E$, $W_2W_2^* = \mathbb{1} - E$. Es folgt $W_i^*W_j = \delta_{ij}$, und

$$\varrho(a) := W_1\varrho_1(a)W_1^* + W_2\varrho_2(a)W_2^*$$

ist ein Endomorphismus der Algebra $\mathfrak{A}$. Man sieht sofort, daß ϱ wieder lokalisiert ist und als Darstellung zu $\varrho_1 \oplus \varrho_2$ äquivalent ist, denn der Operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$$U : \Psi \mapsto W_1^*\Psi \oplus W_2^*\Psi, \quad U^* : \Psi_1 \oplus \Psi_2 \mapsto W_1\Psi_1 + W_2\Psi_2$$

ist unitär und vermittelt die Darstellungen. Die Definition von ϱ hängt zwar über die W_i von der Wahl der Projektion E ab, jedoch variiert ϱ nur in seiner unitären Äquivalenzklasse.

Ist umgekehrt π_1 als Unterdarstellung in ϱ enthalten, so ist auch π_1 wieder eine DHR-Darstellung, und $\pi_1 \cong \pi_0 \circ \varrho_1$ mit einem DHR-Endomorphismus ϱ_1. Sei nämlich $E \in B(\mathcal{H}_0)$ die Projektion auf den Unterraum der Darstellung ϱ_1. Dann gilt $\forall \Psi \in \mathcal{H}_0 \;:\; E\varrho(a)\Psi = E\varrho_1(a)\Psi = \varrho_1(a)E\Psi = \varrho(a)E\Psi$, also $\forall a \in \mathfrak{A} \;:\; E\varrho(a) = \varrho(a)E$, und wegen HAAG-Dualität folgt $E \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Wir wählen wieder $W_1 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ mit $W_1W_1^* = E$, $W_1^*W_1 = \mathbb{1}$ und setzen $\varrho_1 := W_1^*\varrho W_1$, und (falls $E \neq \mathbb{1}$) $W_2 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ mit $W_2W_2^* = 1 - E$, $W_2^*W_2 = \mathbb{1}$ und $\varrho_2 := W_2^*\varrho W_2$. Man

überzeugt sich sofort, daß beide ϱ_i wieder lokaliserte Endomorphismen sind, daß $\pi_1 \cong \pi_0 \circ \varrho_1$ und daß $\varrho \cong \varrho_1 \oplus \varrho_2$ ist.

Sowohl bei der direkten Summe, als auch bei der Zerlegung erfüllen die W_i die Vertauschungsrelationen

$$\forall a \in \mathfrak{A} : W_i \varrho_i(a) = \varrho(a) W_i \ .$$

Allgemein wird ein Operator T mit der Eigenschaft

$$\forall a \in \mathfrak{A} : T\sigma(a) = \varrho(a) T$$

als Intertwiner bezeichnet (Verketter, Vermittler); man schreibt auch $T : \sigma \to \varrho$ oder $T \in (\sigma, \varrho)$ oder $T \in (\varrho|\sigma)$. HAAG-Dualität besagt, daß jeder Intertwiner zwischen lokalisierten Endomorphismen ein lokaler Operator (in einem Gebiet, das beide Lokalisationsgebiete von σ und ϱ umfaßt) ist.

Es gilt die offensichtliche Verknüpfungsregel

$$S : \sigma \to \varrho \text{ und } T : \varrho \ \to \ \tau \quad \Rightarrow \quad TS : \sigma \to \tau$$

sowie

$$S : \sigma \to \varrho \ \Leftrightarrow \ S^* : \varrho \to \sigma \ .$$

Es folgt, daß S^*S ein Selbst-Intertwiner von σ ist, und wenn σ irreduzibel ist, so ist S^*S ein Vielfaches der Eins (SCHURsches Lemma). Skalieren wir $S^*S = \mathbb{1}$, so folgt, daß $E = SS^*$ eine Projektion ist. Diese ist ein Selbstintertwiner von ϱ und entspricht der Projektion auf die Unterdarstellung $\pi \cong \pi_0 \circ \sigma$ von $\pi_0 \circ \varrho$. Allgemein (auch wenn σ nicht irreduzibel ist) schreiben wir

$$\sigma \prec \varrho \ :\Leftrightarrow \ \exists S : \sigma \to \varrho \text{ mit } S^*S = \mathbb{1}$$

d. h. σ ist (als Darstellung $\pi_0 \circ \sigma$) in ϱ enthalten. Es gilt

$$\sigma \prec \varrho \text{ und } \varrho \prec \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \cong \varrho \ .$$

Das Produkt zweier lokalisierter Endomorphismen ist ebenfalls ein lokalisierter Endomorphismus. Es gilt (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} S_1 : \sigma_1 \to \varrho_1 \quad \text{und} \quad S_2 : \sigma_2 \to \varrho_2 \\ \Rightarrow S_1 \times S_2 \equiv S_1 \sigma_1(S_2) \equiv \varrho_1(S_2) S_1 : \sigma_1\sigma_2 \to \varrho_1\varrho_2 \ . \end{aligned}$$

Dadurch ist ein Produkt von Darstellungen definiert:

$$\pi_1 \times \pi_2 := \pi_0 \circ \varrho_1\varrho_2 \qquad \text{wenn} \quad \pi_i \cong \pi_0 \circ \varrho_i \ .$$

Die unitäre Äquivalenzklasse hängt nur von der Äquivalenzklasse der π_i ab; d. h. die Wahl der Repräsentanten ϱ_i ist irrelevant (wählt man stattdessen $\sigma_i \cong \varrho_i$ und $U_i : \sigma_i \to \varrho_i$ unitär, so implementiert $\pi_0(U_1 \times U_2)$ die behauptete Äquivalenz).

Um die Symmetrie $\pi_1 \times \pi_2 \stackrel{?}{\cong} \pi_2 \times \pi_1$ dieses Produktes zu untersuchen, müssen wir kovariante lokalisierte Endomorphismen betrachten. Dies ist sowieso sinnvoll, da diese den kovarianten Darstellungen entsprechen. Eine etwas schwächere Eigenschaft als Kovarianz, die aber für unsere Zwecke ausreicht, ist Transportierbarkeit:

ϱ heißt kovariant, falls $\alpha_g \circ \varrho \circ \alpha_g^{-1} \cong \varrho$ für alle POINCARÉ- (oder MÖBIUS-) Automorphismen des kovarianten Netzes $\mathfrak{A}$. Im folgenden sei $\mathcal{U}_0$ die Darstellung der POINCARÉ- oder MÖBIUS-Gruppe in der Vakuumdarstellung. Ist ϱ in $\mathcal{O}$ lokalisiert, so ist $\alpha_g \circ \varrho \circ \alpha_g^{-1}$ in $g\mathcal{O}$ lokalisiert.

Ist ϱ kovariant und $U_g : \varrho \to \alpha_g \varrho \alpha_g^{-1}$, so folgt

$$\pi(\alpha_g(a)) = \mathcal{U}_\pi(g)\pi(a)\mathcal{U}_\pi(g)^*$$

mit $\mathcal{U}_\pi(g) := \mathcal{U}_0(g)\pi_0(U_{g^{-1}})$. Bis auf einen Kozykel in der Kommutante von π ist dann $\mathcal{U}_\pi$ eine unitäre Darstellung der POINCARÉ- (oder MÖBIUS-) Gruppe. Ist umgekehrt die DHR-Darstellung π kovariant, so ist

$$U_g = \mathcal{U}_0(g)\mathcal{U}_\pi(g^{-1})$$

ein Intertwiner $U_g : \varrho \to \alpha_g \varrho \alpha_g^{-1}$, also eine lokale Observable. ϱ heißt DHR-Endomorphismus, falls es lokalisiert und kovariant ist.

ϱ heißt transportierbar, wenn es in $\mathcal{O}$ lokalisiert ist und für jedes verschobene Gebiet $\mathcal{O}+x$ ein äquivalenter Endomorphismus $\hat{\varrho}$ existiert, der in $\mathcal{O}+x$ lokalisiert ist (beispielsweise $\hat{\varrho} = \alpha_x \circ \varrho \circ \alpha_{-x}$). Ein unitärer Intertwiner $U : \varrho \to \hat{\varrho}$ wird dann als Ladungstransporter bezeichnet.

Für transportierbare (insbesondere DHR-) Endomorphismen gilt

1. $\varrho_1\varrho_2 = \varrho_2\varrho_1$, falls ϱ_i in $\mathcal{O}_i$ lokalisiert und $\mathcal{O}_1$ raumartig getrennt von $\mathcal{O}_2$ ist,
2. $\varrho_1\varrho_2 \cong \varrho_2\varrho_1$ für beliebige relative Lokalisierungen.

Beweis von 1: Sei $a \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, wähle x_i raumartig, so daß $\forall t_i \geq 0$ das Gebiet $\mathcal{O}_1 + t_1x_1$ raumartig zu $\mathcal{O}_2 + t_2x_2$ ist. Für hinreichend große t_i sind dann $\mathcal{O}_i + t_ix_i$ auch zu $\mathcal{O}$ raumartig. Setze $y_i = t_ix_i$ und wähle $\hat{\varrho}_i \sim \varrho_i$ lokalisiert in $\mathcal{O}_i + y_i$ und unitäre Intertwiner $U_i : \varrho_i \to \hat{\varrho}_i$. Dann sind auch U_i raumartig zueinander lokalisiert und kommutieren miteinander. Es folgt $\varrho_1\varrho_2(a) = U_1^*\hat{\varrho}_1(U_2^*\hat{\varrho}_2(a)U_2)U_1 = U_1^*U_2^*aU_2U_1$, da $\hat{\varrho}_2$ auf a und $\hat{\varrho}_1$ auf a und U_2 trivial wirken. Dies ist symmetrisch in $1 \leftrightarrow 2$.

Beweis von 2: Wähle äquivalente Vertreter $\hat{\varrho}_i \cong \varrho_i$ mit raumartig getrennten Lokalisationsgebieten und Ladungsoperatoren $U_i : \varrho_i \to \hat{\varrho}_i$. Dann ist $U_1 \times U_2 : \varrho_1\varrho_2 \to \hat{\varrho}_1\hat{\varrho}_2$ und $U_2 \times U_1 : \varrho_2\varrho_1 \to \hat{\varrho}_1\hat{\varrho}_2$. Wegen 1 ist der Statistikoperator

$$\varepsilon := (U_2 \times U_1)^*(U_1 \times U_2) \equiv \varrho_2(U_1)^*U_2^*U_1\varrho_1(U_2)$$

ein unitärer Intertwiner $\varepsilon : \varrho_1\varrho_2 \to \varrho_2\varrho_1$.

Die entscheidende Eigenschaft von ε ist seine Stabilität. Variiert man die Hilfsgebiete $\hat{\mathcal{O}}_i \to \widehat{\hat{\mathcal{O}}_i}$ und die Vertreter $\hat{\varrho}_i \to \widehat{\hat{\varrho}_i}$ und Ladungstransporter $U_i \to \widehat{\hat{U}_i}$, so ist der Unterschied V_i in $\hat{U}_i = V_i U_i$ also $V = \hat{U}_i U_i^* : \varrho_1 \to \widehat{\hat{\varrho}_i}$ in $\widetilde{\mathcal{O}}_i \supset \hat{\mathcal{O}}_i \cup \widehat{\hat{\mathcal{O}}_i}$ lokalisiert. Für kleine Variationen der Gebiete so, daß $\widetilde{\mathcal{O}}_i$ zueinander raumartig bleiben, gilt dann $\hat{U}_1 \times \hat{U}_2 = V_1 U_1 \varrho(V_2 U_2) = V_1 \hat{\varrho}_1(V_2) \cdot U_1 \varrho_1(U_2) = V_1 V_2 (U_1 \times U_2)$ und entsprechend für $\hat{U}_1 \times \hat{U}_2$. Schließlich kommutieren V_i miteinander, so daß ε unter der Variation invariant ist. Man überzeugt sich leicht, daß man durch eine Sukzession kleiner Variationen in $D \geq 2+1$ Dimensionen jedes Paar von raumartig getrennten Hilfsgebieten in jedes andere überführen kann. Der Statistik-Operator ε hängt dann ausschließlich von ϱ_1 und ϱ_2 ab und wird als $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ bezeichnet. Offenbar gilt $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \varepsilon(\varrho_2, \varrho_1)^*$. In $D = 1+1$ Dimensionen oder chiralen Theorien existiert eine topologisch invariante Unterscheidung, ob $\mathcal{O}_1$ in der linken oder rechten Zusammenhangskomponente des raumartigen Komplements von $\mathcal{O}_2$ liegt ($\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2$ oder $\mathcal{O}_2 < \mathcal{O}_1$). Dementsprechend gibt es zwei Statistikoperatoren, und man definiert $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ durch die obige Formel für $\hat{\mathcal{O}}_2 < \hat{\mathcal{O}}_1$. Für $\hat{\mathcal{O}}_1 < \hat{\mathcal{O}}_2$ liefert dieselbe Formel dann den anderen statistischen Operator $\varepsilon(\varrho_2, \varrho_1)^*$, der in $D = 1+1$ Dimensionen im allgemeinen nicht identisch mit $\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ ist.

Illustration: Sei $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{F}(\mathcal{O})$ die gerade Unteralgebra einer fermionischen Feldalgebra. Sei $\psi \in \mathfrak{F}(\mathcal{O})$ ein unitärer fermionischer Operator (z. B. $\psi = R(f)$ in der CLIFFORD-Form oder $\psi = B(f)$, $\Gamma f = f$, in der selbstdualen Form der CAR-Algebra). Dann ist

$$\varrho : a \mapsto \psi a \psi^*$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$ (das Bild ist wieder ein bosonischer Operator), der nicht in $\mathfrak{A}$ implementiert ist ($\psi \notin \mathfrak{A}$!), und der in $\mathcal{O}$ lokalisiert ist ($\psi \in \mathfrak{F}(\mathcal{O})$ kommutiert mit $a \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$). $\varrho^2 = \mathrm{Ad}_{\psi^2}$ ist inner ($\psi^2 \in \mathfrak{A}$), also ist $[\varrho^2] = [\mathrm{id}] = [\pi_0]$ gleich der Vakuum-Darstellung.

Ist das Netz $\mathfrak{F}$ kovariant, so gilt

$$\hat{\varrho}(a) = \alpha_x \circ \varrho \circ \alpha_{-x} = \alpha_x(\psi \alpha_{-x}(a) \psi^*) = \psi_x a \psi_x^* \,,$$

wobei $\psi_x = \alpha_x(\psi)$ der verschobene geladene Operator ist, und der Ladungstransporter $U_x : \varrho \to \hat{\varrho}$ ist $\psi_x \psi^* \in \mathfrak{A}$.

Zur Berechnung des Statistik-Operators $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, \varrho)$ wählen wir $x \gg 0$, so daß $\hat{\mathcal{O}}_2 = \mathcal{O} < \mathcal{O} + x = \hat{\mathcal{O}}_1$, und erhalten

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varrho(U_x)^* U_x = \psi(\psi \psi_x^*) \psi^* (\psi_x \psi^*) \\ &= \psi\psi(-\psi^* \psi_x^*) \psi_x \psi^* = -\mathbb{1} \,. \end{aligned}$$

So wie das Produkt der DHR-Endomorphismen durch das Produkt der implementierenden Felder bestimmt ist, spiegelt der Statistik-Operator die fermionischen Vertauschungsrelationen $\psi\psi_x = -\psi_x\psi$ der implementierenden geladenen

Felder wider. Es ist jedoch wesentlich, daß sowohl das DHR-Produkt, als auch der Statistik-Operator ε ganz ohne Bezug auf geladene Felder definiert sind; diese intrinsische Strukturen machen daher Vorhersagen über die (gegebenenfalls zu konstruierenden) geladenen Felder.

Beispiel: Die Automorphismen $\varrho = \varrho_\lambda$

$$\varrho_\lambda(W(f)) = e^{\frac{i}{2\pi}\int \lambda' f}\, W(f), \quad \lambda' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

der CCR-Algebra ($U(1)$-Strom-Algebra) sind in $\operatorname{supp}\lambda'$ lokalisiert. Wir wissen, daß ϱ_λ durch $W(\lambda)$ implementiert ist, falls $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Offensichtlich ist $\varrho_{\lambda_1}\varrho_{\lambda_2} = \varrho_{\lambda_1+\lambda_2}$ für beliebige $\lambda_1', \lambda_2' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\varrho_{\lambda_2} = W(\lambda_2 - \lambda_1)\varrho_{\lambda_1}W(\lambda_2-\lambda_1)^*$, falls $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Damit ist die innere Äquivalenzklasse durch die Ladung $q_\lambda = \frac{1}{2\pi}(\lambda_- - \lambda_+)$ eindeutig charakterisiert, und die Fusionsregeln der Sektoren lauten

$$[q_1] \times [q_2] = [q_1 + q_2]\ .$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \alpha_x\varrho_\lambda\alpha_{-x}(W(f)) &= \alpha_x\varrho_\lambda(W(f_{-x})) = e^{\frac{i}{2\pi}\int \lambda' f_{-x}}\, W(f) \\ &= \varrho_{\lambda_x}(W(f))\ . \end{aligned}$$

Da $\lambda_x - \lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ist ϱ_λ transportierbar (auch skalenkovariant mit demselben Argument, indem man α_x durch Skalentransformation ersetzt), und der Ladungstransporter ist $U_x = W(\lambda_x - \lambda)$. Dann ergibt sich der Statistikoperator für hinreichend große $x \gg 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\varrho_\lambda, \varrho_\lambda) &= \varrho_\lambda(U_x)^* U_x = \left[e^{\frac{i}{2\pi}\int \lambda'(\lambda_x-\lambda)} W(\lambda_x - \lambda)\right]^* W(\lambda_x - \lambda) \\ &= e^{+\frac{i}{2\pi}\int \lambda'(\lambda-\lambda_x)}\ . \end{aligned}$$

Die Integrale $\int \lambda'\lambda = \frac{1}{2}\int(\lambda^2)' = \frac{1}{2}(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)$ und $-\lambda'\lambda_x = -\lambda_- \int \lambda' = -\lambda_-(\lambda_+ - \lambda_-)$ ergeben zusammen $\frac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda_-)^2 = 2\pi^2 q_\lambda^2$, also $\varepsilon(\varrho_\lambda, \varrho_\lambda) = e^{i\pi q_\lambda^2}$. Dies reproduziert $\varepsilon = -1$ für $q_\lambda = \pm 1$, U_λ = fermionischer Operator in CAR, und verallgemeinert sich zu

$$\varepsilon(\varrho_\lambda, \varrho_\mu) = \varrho_\mu(U_x)^* U_x = e^{i\pi q_\lambda q_\mu}\ .$$

Die Statistikoperatoren erfüllen wichtige algebraische Identitäten. Man rechnet leicht nach, daß für Intertwiner $T_i : \varrho_i \to \sigma_i$

$$(T_2 \times T_1)\cdot\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \varepsilon(\sigma_1, \sigma_2)\cdot(T_1 \times T_2)$$

gilt („Naturalität"), und daß

$$\begin{aligned} \varepsilon(\varrho_1, \varrho_2\varrho_3) &= \varrho_2(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_3))\cdot\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) \\ \varepsilon(\varrho_1\varrho_2, \varrho_3) &= \varepsilon(\varrho_1, \varrho_3)\cdot\varrho_1(\varepsilon(\varrho_2, \varrho_3)) \end{aligned}$$

gilt („Multiplikativität"). Ersetzt man in der Naturalitätsgleichung ϱ_2 durch $\varrho_2\varrho_3$, $\sigma_1 = \varrho_1$ und $\sigma_2 = \varrho_3\varrho_2$ und wählt $T_1 = 1$, $T_2 = \varepsilon(\varrho_2, \varrho_3)$, so impliziert die Multiplikativität die Relation

$$\varepsilon(\varrho_2, \varrho_3)\varrho_2(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_3))\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \varrho_3(\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2))\varepsilon(\varrho_1, \varrho_3)\varrho_1(\varepsilon(\varrho_2, \varrho_3))$$

(„Zopf-Relation"). Wählt man speziell $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$ und setzt $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, \varrho)$, so folgt

$$\varepsilon\varrho(\varepsilon)\varepsilon = \varrho(\varepsilon)\varepsilon\varrho(\varepsilon) \ .$$

Da $\varepsilon \in (\varrho^2, \varrho^2)$ mit $\varrho^2(\mathfrak{A})$ kommutiert, kommutiert auch $\varrho^i(\varepsilon)$ mit $\varrho^j(\varepsilon)$ für $|i - j| \geq 2$. Dies bedeutet, daß die Abbildung

$$b_i \mapsto \varrho^{i-1}(\varepsilon)$$

die definierenden Relationen der Zopfgruppe

$$\begin{aligned} b_i b_{i+1} b_i &= b_{i+1} b_i b_{i+1} \\ b_i b_j &= b_j b_i \qquad (|i - j| \geq 2) \end{aligned}$$

erfüllen. Jedem DHR-Endomorphismus ϱ ist also eine unitäre Darstellung der Zopfgruppe intrinsisch zugeordnet. Diese Darstellung hängt bis auf unitäre Äquivalenz nur von dem Sektor $[\varrho]$ ab und wird als „die Statistik des Sektors" bezeichnet. Ihre Bedeutung für die Vertauschungsrelationen geladener Felder wird in Abschnitt 6.6 deutlich werden.

6.5 DHR-Fusionsregeln

Die Fusionsregeln von DHR-Sektoren sind die Zerlegung

$$[\pi_A] \times [\pi_B] = \bigoplus_C N_{AB}^C [\pi_C]$$

eines Produkts von irreduziblen Sektoren in deren irreduzible Komponenten. Auf dem Niveau der Endomorphismen entspricht dies der Zerlegung

$$\varrho_A \circ \varrho_B \cong \bigoplus_C N_{AB}^C \varrho_C \ ,$$

wobei die Beiträge ϱ_C alle inäquivalent sind.
Sei $\varrho \cong \bigoplus N^C \varrho_C$ ein (i. a. reduzibler) DHR-Endomorphismus, ϱ_C irreduzibel. Dann ist

$$\varrho(a) = \sum_C \sum_{i=1}^{N^C} W_{C,i}\, \varrho_C(a)\, W_{C,i}^*$$

mit Isometrien $W_{C,i}$, deren zugehörige Projektionen $E_{C,i} = W_{C,i}W_{C,i}^*$ eine Zerlegung der Eins sind: $\sum_C \sum_i E_{C,i} = \mathbb{1}$. Äquivalent dazu ist die Orthogonalität ($W_{C,i}^* W_{C'i'} = \delta_{CC'}\delta_{ii'}$) und Vollständigkeit ($\sum_C \sum_i W_{C,i}W_{C,i}^* = \mathbb{1}$) des Systems von Isometrien. Die $\{W_{C,i}\}$ für festes ϱ und festes ϱ_C bilden eine Orthonormalbasis des Intertwiner-Raumes (ϱ_C, ϱ).

Da $W_{C,i} : \varrho_C \to \varrho$ konstruktionsgemäß Intertwiner sind, sind alle Operatoren $W_{C,i}W_{C,j}^*$ Selbstintertwiner von ϱ. Diese bilden für jedes feste C einen Matrixring von $N^C \times N^C$-Matrizen. Die Gesamtheit $(\varrho, \varrho) = \varrho(\mathfrak{A})'$ der Selbstintertwiner von ϱ ist also einer direkten Summe von Matrixringen $\bigoplus_C \mathrm{Mat}_{N^C}(\mathbb{C})$ isomorph. Deren zentrale Projektionen $E_C = \sum_i W_{C,i}W_{C,i}^*$ entsprechen den inäquivalenten Untersektoren von ϱ, während eine Zerlegung in minimale Projektionen $E_{C,i} = W_{C,i}W_{C,i}^*$ der Zerlegung in irreduzible Untersektoren entspricht.

Das Problem der Fusionsregeln besteht also in der Untersuchung der Kommutanten $\varrho_A\varrho_B(\mathfrak{A})'$, genauer gesagt in deren Zerlegung in Matrixringe, und der Bestimmung der Äquivalenzklasse der den einzelnen Matrixringen entsprechenden Untersektoren.

Im Falle von DHR-Automorphismen („einfache Sektoren“) ist nichts zu tun, da die Kommutante eines Automorphismus trivial ist: das Produkt ist wieder ein Automorphismus und damit bereits irreduzibel. Es gilt auch der umgekehrte Satz: ist ϱ ein DHR-Endomorphismus und ϱ^2 irreduzibel, so ist ϱ ein Automorphismus [3, 4].

Die Bestimmung der Kommutanten von $\varrho_A\varrho_B$ ist in der Regel sehr schwierig. In niederen Dimensionen kann man sich aber leicht Elemente in $\varrho_A\varrho_B(\mathfrak{A})'$ verschaffen, nämlich die Monodronie-Operatoren

$$\varepsilon(\varrho_A, \varrho_B)\varepsilon(\varrho_B, \varrho_A)$$

(in $D \geq 2 + 1$ sind diese automatisch gleich $\mathbb{1}$ wegen der Permutationsgruppenstatistik, siehe oben) und deren Spektralprojektionen. In vielen Modellen sind diese Spektralprojektionen bereits mit den zentralen Projektionen in $\varrho_A\varrho_B(\mathfrak{A})'$ identisch.

Zwei wichtige Konzepte sind konjugierte Sektoren und die statistische Dimension. Sei ϱ (der Einfachheit halber) irreduzibel. Dann heißt ein irreduzibler DHR-Endomorphismus $\overline{\varrho}$ konjugiert zu ϱ, falls $\mathrm{id} \prec \overline{\varrho}\varrho$. (Der konjugierte Endomorphismus ist bis auf Äquivalenz eindeutig, und ϱ ist konjugiert zu $\overline{\varrho}$.) Dann gibt es eine (bis auf eine komplexe Phase) eindeutige Isometrie $R : \mathrm{id} \to \overline{\varrho}\varrho$, und die lineare Abbildung

$$\phi_\varrho(a) := R^*\overline{\varrho}(a)R$$

hat die Eigenschaften

1. ϕ_ϱ ist eine positive Abbildung,

2. $\phi_\varrho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ und

3. $\phi_\varrho(\varrho(a)b\varrho(c)) = a\phi_\varrho(b)c$.

Insbesondere ist $\phi_\varrho \circ \varrho = \mathrm{id}$. Diese Eigenschaften bilden die Definiton eines Linksinversen; die Operation $\varrho \circ \phi_\varrho$ ist dann eine bedingte Erwartung der Algebra $\mathfrak{A}$ auf ihre Unteralgebra $\varrho(\mathfrak{A})$. (Natürlich ist das Linksinverse eines Automorphismus gleich dem inversen Automorphismus, dann ist etwa $\overline{\varrho} = \varrho^{-1}$ und $R = \mathbb{1}$; im allgemeinen ist aber ϕ_ϱ kein Endomorphismus).

Das Linksinverse hat die (mit 3. leicht nachzurechnende) Eigenschaft

$$\phi_\varrho(T) : \sigma \to \tau \ , \quad \text{falls } T : \varrho\sigma \to \varrho\tau.$$

Insbesondere ist $\phi_\varrho(\varepsilon(\varrho,\varrho)) : \varrho \to \varrho$ als Element von $\varrho(\mathfrak{A})'$ ein komplexer Skalar, dessen Polarzerlegung

$$\phi_\varrho(\varepsilon(\varrho,\varrho)) = \frac{\varkappa_\varrho}{d_\varrho}$$

eine komplexe Phase $\varkappa_\varrho$ und eine reelle Zahl $d_\varrho \geq 1$ liefert. Diese Zahlen hängen nur von dem Sektor $[\varrho]$ ab. (Es wurde z. B. von LONGO gezeigt, daß $\phi_\varrho(\varepsilon(\varrho,\varrho)) \neq 0$ ist, falls ϕ_ϱ von der Form $R^*\overline{\varrho}(\cdot)R$ ist.) Es gilt ein Spin-Statistik-Theorem, daß $\varkappa_\varrho = e^{2\pi i s}$ bzw. $e^{2\pi i h}$ ist, wobei s der „Spin“ in $1+1$ Dimensionen bzw. h die konforme Skalendimension in chiralen Theorien ist [9, 6]. Die Zahl d_ϱ wird als statistische Dimension bezeichnet. Sie ist additiv und multiplikativ für direkte Summen und Produkte von Sektoren, insbesondere gilt

$$d_A \cdot d_B = \sum N_{AB}^C d_C \ ,$$

falls N_{AB}^C die Fusionsregeln beschreibt. Es konnte gezeigt werden [10, 12], daß d_ϱ unterhalb von $d_\varrho = 1$ nur die Werte $d_\varrho = 2\cos\frac{\pi}{m}$, $m = 3, 4, 5, \ldots$ annehmen kann und daß, falls $\varrho^2 \cong \varrho_1 \oplus \varrho_2$ nur zwei irreduzible Komponenten hat, d_ϱ nur Werte der Form $\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}$ mit $m = 3, 4, 5, \ldots$, $k = 2, 3, \ldots, m-2$ annehmen kann.

6.6 DHR-Austauschalgebra

Die beschriebenen Daten erlauben eine algebraische Version der Austausch-Algebra (vgl. Abschnitte 4.7 und 4.8), das sogenannte reduzierte Feldbündel. Wir wählen für jeden irreduziblen DHR-Sektor π_s Repräsentanten ϱ_s, darunter $\varrho_0 = \mathrm{id}$. Wir wählen für jedes Tripel von Sektoren eine Orthonormalbasis $\{T_e\}$ von $(\varrho_r, \varrho_s\varrho_t)$ aus. (e ist ein Multiindex, der das Tripel (r,s,t) sowie einen Multiplizitätsindex $i = 1, \ldots, N_{st}^r$ beinhaltet. Für $t = 0$ oder $s = 0$ wählen wir

$T_e = 1$.) Wir definieren den HILBERT-Raum $\mathcal{H} := \bigoplus \mathcal{H}_s$, wobei die Observablen auf $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_0$ in der Darstellung $\pi_s = \pi_0 \circ \varrho_s$ operieren, d. h.

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varrho_s(a) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} .$$

Auf diesem HILBERT-Raum definieren wir Operatoren $F = (e, a)$ durch

$$F\Psi_{s'} := \delta_{ss'}(T_e^* \varrho_s(a)\Psi)_r \ ,$$

wobei Ψ_s das Bild von $\Psi \in \mathcal{H}_0$, als Vektor in $\mathcal{H}_s$ betrachtet, unter der natürlichen Einbettung in $\mathcal{H}$ bedeutet:

$$\Psi_s = (0, \ldots, 0, \Psi, 0, \ldots, 0) \ .$$

$F = (e, a)$ ist also eine Abbildung von $\mathcal{H}_s$ („source“) nach $\mathcal{H}_r$ („range“) als Teilräumen von $\mathcal{H}$, analog zu den Austauschfeldern ${}_r(\phi)_s$ aus Abschnitt 4.7. Es seinen $T_{e_i} \in (\varrho_{r_i}, \varrho_{s_i}\varrho_{t_i})$, $i = 1, 2$ und $r_1 = r_2$. Dann ist $T_{e_1}T_{e_2} \in (\varrho_{r_2}, \varrho_{s_2}\varrho_{t_1}\varrho_{t_2})$ und besitzt eine Entwicklung nach der Basis $\varrho_{s_1}(T_f)T_e$ dieses Unterraumes, $T_f \in (\varrho_t, \varrho_{t_1}\varrho_{t_2})$, $T_e \in (\varrho_{r_2}, \varrho_{s_1}\varrho_t)$, t beliebig.
Diese Operatoren bilden eine Orthonormalbasis, da sie wieder vollständig und orthogonal sind. Die Entwicklung lautet also:

$$\begin{aligned} T_{e_1}T_{e_2} &= \sum_{e,f} \overline{D_{f,e}^{e_2,e_1}} \varrho_{s_1}(T_f)T_e \Leftrightarrow \\ T_{e_2}^* T_{e_1}^* &= \sum_{e,f} D_{f,e}^{e_2,e_1} T_e^* \varrho_{s_1}(T_e^*) \end{aligned}$$

mit

$$D_{f,e}^{e_2,e_1} = T_{e_2}^* T_{e_1}^* \varrho_{s_1}(T_f)T_e \in (\varrho_{r_2}, \varrho_{r_2}) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} \ .$$

Es folgt, daß die Operatoren F_e eine Algebra bilden:

$$F_{e_2}F_{e_1} = \sum \overline{D_{e_2,e_1}^{f,e}} F_e^{(f)} \tag{6.1}$$

mit

$$F_e^{(f)} = (e, T_f^* \varrho_{t_1}(a_2)a_1) \ .$$

Diese Algebra enthält die Observablen, da

$$\pi(a) = \sum_e (e, a) \ ,$$

wobei sich die Summe über alle e erstreckt, für die $t = 0$, also $r = s$ und $T_e = \mathbb{1}$ ist. Insbesondere ist auch

$$(e, a) = (e, \mathbb{1}) \cdot \pi(a) \ ,$$

und es gilt konstruktionsgemäß die Vertauschungsrelation

$$(e, \mathbb{1}) \cdot \pi\varrho_t(a) = \pi(a)(e, \mathbb{1}) \ .$$

Die „geladenen Felder“ $(e, \mathbb{1})$ sind also Intertwiner für den Endomorphismus ϱ_t, oder genauer: $(e, \mathbb{1}) : \pi\varrho_t \to \pi$. Wir bezeichnen daher t als die „Ladung“ von F_e und erkennen in der Multiplikationsregel (6.1) in der Summe über die Ladungen $t \prec t_1 t_2$ eine algebraische Variante der Operatorproduktentwicklung (vgl. Abschnitt 4).

Die von F_e erzeugte Algebra ist eine *-Algebra. Denn

$$\begin{aligned}(\Psi_s, (e, a)^*\Phi_r) &:= ((e, a)\Psi_s, \Phi_r) = \\ &= (T_e^*\varrho_s(a)\Psi, \Phi) = (\Psi, \varrho_s(a^*)T_e\Phi) \sim (\Psi, \varrho_s(a^*\overline{R}^*\varrho_t(R)))T_e\Phi \ ,\end{aligned}$$

wobei $R \in (\mathrm{id}, \overline{\varrho}_t\varrho_t)$ und $\overline{R} \in (\mathrm{id}, \varrho_t\overline{\varrho}_t)$ Isometrien sind, so daß $\overline{R}^*\varrho_t(R) \in (\varrho_t, \varrho_t) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ nicht verschwindet (dies ist sichergestellt, wenn die statistische Dimension von ϱ_t endlich ist). Nun ist

$$\varrho_s(\overline{R}^*)\varrho_s\varrho_t(R)T_e = \varrho_s(\overline{R}^*)T_e\varrho_r(R)$$

und $\varrho_s(\overline{R}^*)T_e \in (\varrho_r\overline{\varrho}_t, \varrho_s) = (\varrho_s, \varrho_r\overline{\varrho}_t)^*$. Mit einer Basis $\{T_e\}$ von $(\varrho_s, \varrho_r\overline{\varrho}_t)$ ist also $\varrho_s(\overline{R}^*)T_e\varrho_r(R)$ eine Linearkombination von $T_{\overline{e}}^*\varrho_r(R)$, und das obige Skalarprodukt ist eine Linearkombination von

$$\begin{aligned}(\Psi, \varrho_s(a^*)T_{\overline{e}}^*\varrho_r(R)\Phi) &= (\Psi, T_{\overline{e}}^*\varrho_r(\overline{\varrho}_t(a^*)R)\Phi) \\ &= (\Psi_s, (\overline{e}, \overline{\varrho}_t(a^*)R)\Phi_r) \ .\end{aligned}$$

Es folgt, daß $(e, a)^*$ eine Linearkombination der Elemente $(\overline{e}, \overline{\varrho}_t(a^*)R)$ ist; deren Multi-Index $\overline{e}$ unterscheidet sich von e durch die Vertauschung von „source“ und „range“ $s \leftrightarrow r$ und durch die Konjugation der Ladung $t \leftrightarrow \overline{t}$. Der adjungierte Operator trägt also die konjugierte Ladung.

Aufgrund der Intertwiner-Eigenschaft kommutieren $(e, \mathbb{1})$ mit den Observablen, die im Komplement von $\mathcal{O}_t$ lokalisiert sind, falls ϱ_t in $\mathcal{O}_t$ lokalisiert ist. Offenbar ist also $(\overline{e}, \mathbb{1}) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{red}}(\mathcal{O}_t)$, wenn wir die lokalisierten Feldalgebren definieren als

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{red}}(\mathcal{O}) := \{F_e : F_e\pi(a) = \pi(a)F_e \quad \forall a \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')\}'' \ .$$

Man rechnet nach, daß $\mathfrak{F}_{\mathrm{red}}(\mathcal{O})$ von allen Elementen der Form $(e, u^* \cdot c)$ aufgespannt wird, wobei $c \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, $u : \varrho_t \to \hat{\varrho}_t$ unitär und $\hat{\varrho}_t$ in $\mathcal{O}$ lokalisiert ist.

Die lineare Hülle dieser Elemente bildet eine Algebra und ist invariant unter der *-Operation. $\mathfrak{F}_{\mathrm{red}}(\mathcal{O})$ ist also eine VON-NEUMANN-Algebra.

Um die Vertauschungsrelationen zweier geladener Felder in raumartigen Abstand zu berechnen, betrachten wir $F_i = (e_i, u_i c_i) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{red}}(\mathcal{O}_i)$ mit $\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2$ und $r_1 = s_2$. Dann ist

$$F_2 F_1 \Psi_{s_1} = \left(T^*_{e_2} \varrho_{s_2}(u_2^* c_2) T^*_{e_1} \varrho_{s_1}(u_1^* c_1) \Psi \right)_{r_2} \ .$$

Die Intertwiner- und Lokalisierungseigenschaften erlauben die Umformungen

$$T^*_{e_2} \varrho_{s_2}(u_2^* c_2) T^*_{e_1} \varrho_{s_1}(u_1^* c_1) = T^*_{e_2} T^*_{e_1} \varrho_{s_1}(\varrho_{t_1}(u_2^* c_2) u_1^* c_1)$$

und

$$\begin{aligned} \varrho_{t_1}(u_2^* c_2) u_1^* c_1 = \varrho_{t_1}(u_2^*) u_1^* \hat{\varrho}_{t_1}(c_2) c_1 &= \varrho_{t_1}(u_2^*) u_1^* \cdot c_2 c_1 \\ &= \varepsilon(\varrho_{t_2}, \varrho_{t_1}) \varrho_{t_2}(u_1^*) u_2^* \cdot c_1 c_2 \ . \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$T^*_{e_2} T^*_{e_1} \varrho_{s_1}(\varepsilon(\varrho_{t_2}, \varrho_{t_1})) : \varrho_{s_1} \varrho_{t_2} \varrho_{t_1} \to \varrho_{r_2}$$

und besitzt eine Entwicklung

$$\sum R^{e_2, e_1}_{e_1', e_2'} T^*_{e_1'} T^*_{e_2'}$$

mit $R^{e_2,e_1}_{e_1',e_2'} = T^*_{e_2} T^*_{e_1} \varrho_{s_1}(\varepsilon(\varrho_{t_2}, \varrho_{t_1})) T_{e_2'} T_{e_1'} \in (\varrho_{r_2}, \varrho_{r_2}) \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, wobei für die Ladungen $t_i' = t_i$ und für die „source“ und „range“ Sektoren $s_2' = s_1$, $r_1' = r_2$ gilt und über $r_2' = s_1$ summiert wird. Eingesetzt in das Produkt $F_2 F_1 \Psi_{s_1}$ ergibt sich

$$F_2 F_1 = \sum R^{e_2, e_1}_{e_1', e_2'} F_1' F_2' \qquad (\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2)$$

mit $F_i' = (e_i', a_i)$. Diese Operatoren tragen dieselbe Ladung wie F_i, müssen aber zwischen verschiedenen Sektoren interpolieren, um den Definitionsbereichen und den Fusionsregeln genügen zu können. Diese Vertauschungsrelationen sind die algebraische Version der Austausch-Algebra (Abschnitt 4.8). In Modellen mit konformer Invarianz lassen sich lokalisierte Felder ${}_r(\phi)_s(x)$ durch geeignete Skalenlimiten aus den beschränkten Operatoren $F = (e, a)$ gewinnen [5].

Offenbar ist für $\mathcal{O}_2 < \mathcal{O}_1$ die Matrix $R(-)$ zu wählen, die ebenso wie $R(+) \equiv R$ mit der Ersetzung $\varepsilon(\varrho_{t_2}, \varrho_{t_1}) \mapsto \varepsilon(\varrho_{t_1}, \varrho_{t_2})^*$ gebildet wird. Diese Matrizen sind unitär (als Matrixelemente der unitären Statistikoperatoren auf bestimmten Intertwinerräumen) und erfüllen dieselben Zopf-Relationen $R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}$ wie die Matrizen M aus Abschnitt 4.8, wobei R_i die Matrix für die Vertauschung der Felder an den Positionen i und $i+1$ in einem Produkt von mehreren Feldern ist.

Literaturverzeichnis

[1] I. Affleck: *Critical behavior of two-dimensional systems with continuous symmetries*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1355-1358.

[2] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov: *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.

[3] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts: *Local observables and particle statistics*, I, Comm. Math. Phys. **23** (1971) 199-230.

[4] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts: *Local observables and particle statistics*, II, Comm. Math. Phys. **35** (1974) 49-85.

[5] K. Fredenhagen, M. Jörss: *Conformal Haag-Kastler nets, pointlike localized fields, and the existence of operator product expansions*, Comm. Math. Phys. **176** (1996) 541-554.

[6] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, B. Schroer: *Superselection sectors with braid group statitics and exchange algebras*, I and II, Rev. Math. Phys. **Special Issue** (1992) 113-157, Comm. Math. Phys. **125** (1989) 201-226.

[7] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker: *Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro algebra*, Comm. Math. Phys. **107** (1986) 535-542.

[8] P. Furlan, G.M. Sotkov, I.T. Todorov: *Two-dimensional conformal quantum field theory*, Riv. del Nuovo Cimento **12** (1989) 1-203.

[9] D. Guido, R. Longo: *Relativistic invariance and charge conjugation in quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **148** (1992) 521-551.

[10] V.F.R. Jones: *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983) 1-25.

[11] V. Kac: Funct. Anal. and Appl. **16** (1982) 114.

[12] R. Longo: *Index of subfactors and statistics of quantum fields*, I, Comm. Math. Phys. **126** (1989) 217-247.

[13] M. Lüscher, G. Mack: *Global conformal invariance in quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **41** (1975) 203-234.

[14] M. Lüscher: *Operator product expansions on the vacuum in conformal quantum field theory in two spacetime dimensions*, Comm. Math. Phys. **50** (1976) 23-52.

[15] R.T. Powers, E. Størmer: *Free states of the canonical anticommutation relation*, Comm. Math. Phys. **16** (1970) 1.

[16] A. Pressley, G. Segal: *Loop groups*, Clarendon Press, Oxford 1986.

[17] K.-H. Rehren, B. Schroer: *Quasiprimary fields: an approach to positivity of 2D conformal quantum field theory*, Nucl. Phys. **B295** (1988) 229-242.

[18] B. Schroer, J.A. Swieca: *Conformal transformations for quantizied fields*, Phys. Rev. **D 10** (1974) 480-485.

[19] B. Schroer, J.A. Swieca, A.H. Völkel: *Global operator expansion in conformally invariant relativistic quantum field Theory*, Phys. Rev. **D 11** (1975) 1509-1520.

[20] D. Shale, W.F. Stinespring Ann. Math. **80** (1964) 365.

[21] D. Shale, W.F. Stinespring J. Math. Mech. **14** (1965) 315.

[22] R.F. Streater, A.S. Wightman: *PCT, Spin and Statistics, and All That*, W. Benjamin, New York 1964.