Mathematische Grundlagen der Quantentheorie

Hellmut Baumgärtel

WS 96/97

Vorwort

Die folgende Skripte ist aus meiner Vorlesung „Mathematische Grundlagen der Quantentheorie“ hervorgegangen, die ich im WS 1996/97 an der Universität Potsdam gehalten habe.

Herr stud. phys. H. Hohberger, Hörer der Vorlesung, hat unter Benutzung meiner eigenen Aufzeichnungen den TEX–file der Skripte hergestellt. Er wurde dabei von Frau Dr. M. Fritzsche, die Übungen zu dieser Vorlesung gehalten hatte, beraten und unterstützt.

Beiden möchte ich für ihre Arbeit an dieser Skripte danken, Frau Dr. Fritzsche insbesondere auch für Hinweise auf Fehler und Unachtsamkeiten.

Potsdam, im März 1997

Hellmut Baumgärtel

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**

1 Rekapitulation relevanter Begriffe **1**

2 Quantenmechanik und klassische Interpretation **9**

2.1 Klassische Systeme 9

2.2 Quantenmechanische Systeme 10

2.3 Klassische Interpretation quantenmechanischer Systeme 11

2.4 Eine klassische Interpretation eines zweidimensionalen Quantensystems 13

2.5 Unmöglichkeit einer klassischen Interpretation für $\dim \mathcal{H} = 4$ 22

Anhang zum Einstein–Podolsky–Rosen Paradoxon 26

3 Das No–Go–Theorem von J. v. Neumann **29**

3.1 Spuroperatoren, ultraschwach stetige Linearformen 29

3.2 Hilbert–Schmidt Operatoren 37

3.3 Ultraschwache stetige Linearformen und das No–Go–Theorem von v. Neumann . 40

Anhang zum No–Go–Theorem von Jauch und Piron 44

4 Die CCR–Algebra **49**

4.1 Einleitung 49

4.2 Existenz und Eindeutigkeit 54

4.3 Reguläre Darstellungen der CCR–Algebra 60

4.4 Der v. Neumann Projektor 66

4.5 Die Schrödingerdarstellung 71

4.6 Exkurs über die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren 73

4.7 Der harmonische Oszillator 74

4.8 Die Fockdarstellung für einen beliebigen (seperablen) Hilbertraum $\mathfrak{h}$ 79

4.9 Die Fockdarstellung ($\dim \mathfrak{h} = \infty$) 86

Literaturverzeichnis **95**

Einleitung

Die fundamentalen Begriffe zur mathematischen Beschreibung physikalischer Systeme sind

- Observablen,
- Zustände und
- Erwartungswerte (Mittelwerte),

nämlich Mittelwerte von Observablen in vorgegebenen Zuständen.

Dies gilt für die Beschreibung sowohl von klassisch–physikalischen als auch von quantenphysikalischen Systemen.

Die mathematische Fixierung dieser Begriffe ist dabei für beide Fälle zunächst einheitlich:

- Observablen sind die selbstadjungierten Elemente einer $*$–Algebra $\mathcal{A}$,
- Zustände sind positive normierte Linearformen φ auf der Algebra $\mathcal{A}$,
- der Mittelwert der Observablen $A \in \mathcal{A}$ im Zustand φ ist die Zahl $\varphi(A)$.

Der erste und gravierende Unterschied in der Beschreibung klassisch–physikalischer und quantenphysikalischer Systeme liegt darin, daß im klassischen Fall die Observablenalgebra abelsch ist, während sie im quantenphysikalischen Fall nichtkommutierende Elemente enthält.

Deshalb hat es sich eingebürgert, unter *Quantisierung* den wie auch immer gearteten „Übergang“ von einer abelschen zu einer nichtabelschen Algebra zu verstehen.

Typische Beispiele *mathematischer Grundstrukturen* für die Beschreibung physikalischer Systeme sind folgende:

1. Mathematische Grundstruktur eines klassisch–physikalischen Systems: X sei ein kompakter Hausdorff–Raum (Phasenraum) und $\mathcal{A}(X) := C(X)$ die Algebra aller komplexwertigen Funktionen auf X mit der Involution (dem „Stern“ $*$)

   $$f^*(x) := \overline{f(x)}, \qquad x \in X$$

   und der (Sup–) Norm

   $$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in C(X).$$

$\mathcal{A}$ ist eine abelsche unitale C^*–Algebra. Nach dem Theorem von Riesz sind die Zustände φ gegeben durch die positiven normierten Borelmaße μ auf X vermöge

$$\varphi_\mu(f) := \int_X f(x)\,\mu(dx).$$

Spezielle Zustände φ_ξ sind gegeben durch die sog. Dirac–Maße $\delta_\xi(\cdot)$, $\xi \in X$:

$$\varphi_\xi(f) = f(\xi),$$

die den Punkten des Phasenraums entsprechen, die *dispersionsfrei* sind, d.h. es gilt

$$\varphi_\xi(f^2) = (\varphi_\xi(f))^2$$

und aus denen sich alle Zustände superponieren lassen vermöge

$$\varphi_\mu(f) = \int_X \varphi_\xi(f)\,\mu(d\xi).$$

Z.B. erhält man für $X := \mathbb{R}^{2n} \cup \infty$ (Ein–Punkt–Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^{2n}$) den Phasenraum der klassischen Mechanik von n Freiheitsgraden.

2. Mathematische Grundstruktur eines quantenphysikalischen Systems: $\mathcal{H}$ sei ein separabler Hilbertraum und $\mathcal{A} := \mathcal{L}(\mathcal{H})$ die C^*–Algebra aller beschränkten linearen Operatoren in $\mathcal{H}$. Zustände liegen dann im normierten positiven Teil des Dualraums $\mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, der Gesamtheit der stetigen Linearformen auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, stetig in bezug auf die Operatornorm. Da $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbst ein Dualraum ist, nämlich Dualraum der Algebra $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ der Spuroperatoren auf $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})^* = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der Dualitätsbeziehung $\operatorname{tr} XT$, $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, so liefert der positive normierte Teil von $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, also die Gesamtheit aller positiven selbstadjungierten Spuroperatoren D mit $\operatorname{tr} D = 1$ eine spezielle Zustandsmenge $\{\varphi_D\}$ mit

$$\varphi_D(C) := \operatorname{tr} DX, \qquad X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

In der Quantenmechanik heißen diese D auch Dichtematrizen oder Dichteoperatoren.

Es ist historisch ein wichtiger Schritt bei der mathematischen Fixierung der Quantenmechanik durch J. v. Neumann (siehe [7]) gewesen, diese Zustände φ_D durch eine verschärfte Stetigkeitsforderung (ultraschwache Stetigkeit der Linearform) auszuzeichnen und die anderen zunächst zu „vergessen“. Der Kontext dieser Untersuchungen war dabei die Entwicklung der Theorie der v. Neumann–Algebren sowie die Fixierung des Begriffs des „abstrakten Hilbertraums“ durch J. v. Neumann.

Natürlich setzte später vor allem an diesem Punkt (berechtigte) Kritik von physikalischer Seite an dieser v. Neumannschen Grundlegung ein (siehe z.B. R. Haag [5]).

Nach dem Satz über die Spektraldarstellung selbstadjungierter kompakter Operatoren hat man für Dichteoperatoren D eine Spektraldarstellung

$$D = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j, \qquad \lambda_j > 0,\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1,$$

E_j selbstadjungierte Projektoren der Dimension 1. Die E_j sind selbst Dichteoperatoren (reine Zustände). D erhält man also als *Mischung* (konvexe Kombination) aus reinen Zuständen. Reine Zustände E korrespondieren mit eindimensionalen Teilräumen von $\mathcal{H}$ (Projektionsraum von E). Somit ergibt sich nachträglich vermöge $E = (\psi, \cdot)\psi$, $\|\psi\| = 1$, die Interpretation der reinen Zustände durch die „Einheitsstrahlen“ $\alpha\psi$, $|\alpha| = 1$, von Vektoren des Hilbertraums.

Damit ist man bei der übersichtlichen mathematischen Struktur der Quantenmechanik angekommen, wie sie sich etwa um 1930 (wesentlich durch den Einfluß von J. v. Neumann) herausgebildet hatte:

- Observablen sind gewisse (bzw. alle) selbstadjungierte Operatoren aus dem Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, ergänzt durch unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren.
- Reine Zustände sind die Einheitsstrahlen $\alpha\psi$ des Hilbertraums, $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$, $|\alpha| = 1$.
- Ist $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, E(d\lambda)$ die Spektraldarstellung von A, so ist der Mittelwert von A im Zustand ψ gegeben durch

  $$(\psi, A\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\psi, E(d\lambda)\psi),$$

  d.h. der Zustand ψ erzeugt die Verteilungsfunktion $\Delta \mapsto (\psi, E(\Delta)\psi)$ (ein normiertes Borelmaß) auf dem Spektrum von A.
- Die gemischten Zustände entstehen durch Mischung $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_{\psi_j} =: D$ aus den reinen Zuständen ψ_j mit den *Gewichten* λ_j.

Im Gegensatz zum Beispiel 1.7 ergibt sich hier, daß nicht einmal die reinen Zustände dispersionsfrei sind (das ist bereits ein von J. v. Neumann aufgestelltes No–Go–Theorem).

Zu der bisher beschriebenen Struktur treten noch zwei weitere „Grundprinzipien“ hinzu, die die Veränderung der Zustände betreffen:

- Reduktion des Wellenpakets (Reduktion des Zustands φ): Nach Ausführung einer Messung von A mit einem Ergebnis Δ (d.h. der gemessene Wert liegt in der Borelmenge Δ) ist der Zustand ψ durch $E(\Delta)\psi/\|E(\Delta)\psi\|$ zu ersetzen.
- Zeitentwicklung (Dynamik): Es gibt eine ausgezeichnete Observable, den Hamiltonoperator H derart, daß die unitäre Gruppe e^{-itH}, $t \in \mathbb{R}$ die Zeit, die Zeitentwicklung des Systems beschreibt, ausgedrückt durch

  $$e^{itH} A e^{-itH}$$

  an Hand der Observablen (Heisenberg–Bild) oder durch

  $$e^{itH}\psi, \qquad \psi \text{ Zustand zur Zeit } t = 0$$

  an Hand der (reinen) Zustände (Schrödinger–Bild).

Wie schon erwähnt, wurden durch dieses Konzept der Beschreibung quantenmechanischer Systeme verschiedene Fragen aufgeworfen, von denen einige im folgenden etwas genauer analysiert werden sollen, z.B.:

- Wie kommt der Hilbertraum in die Quantentheorie?
- Welchen Sinn haben die algebraischen Operationen in der Observablenalgebra für nichtkommutierende Observablen?
  bzw.
- Welchen Sinn hat die „uneingeschränkte“ volle Linearität für die Fixierung des Zustandsbegriffs (Linearität also auch für nichtkommutierende Observablen)?
- Können wirklich alle selbstadjungierte Operatoren von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ Observablen sein?
  bzw.
- Wie wählt man für ein gegebenes System der Quantentheorie die Algebra der Observablen?

Im folgenden werden zwar Grundkenntnisse der Funktionalanalysis, insbesondere aus der Theorie linearer Operatoren auf dem Hilbertraum sowie elementare Kenntnisse der Quantenmechanik endlich vieler Freiheitsgrade vorausgesetzt, jedoch werden im ersten Kapitel wesentliche mathematische Begriffe wie z.B. Dispersion, Zeitevolution, Reduktion des Wellenpakets an Hand eines endlichdimensionalen Hilbertraums rekapituliert.

Kapitel II beschäftigt sich dann mit dem Problem des Verhältnisses von quantenmechanischer und klassischer Beschreibung, mit anderen Worten mit dem Problem, ob und wann eine quantenmechanische Beschreibung (im Sinne von Punkt 2) klassisch interpretiert werden kann (im Sinne von Punkt 1). Dies ist das Problem der sog. „verborgenen Parameter“. Dieses Problem kulminiert in der Frage, wann einem quantenmechanischen System ein (klassischer) Phasenraum X zugeordnet werden kann, so daß die quantenmechanischen Mittelwerte $\operatorname{tr} AD$ klassisch durch Integrale $\int_X f_A(x)\,\mu_D(x)$ berechnet werden können.

Für $\dim \mathcal{H} = 2$ wird die bekannte klassische Interpretation mit dem Phasenraum S^2 durchexerziert. Im übrigen werden drei No–Go–Theoreme vorgestellt (siehe dazu A. Wightman [10], J. Jauch [6], J. v. Neumann [7]).

Kapitel III rekapituliert in gedrängter Form den mathematischen Hintergrund im Zusammenhang mit dem No–Go–Theorem von J. v. Neumann.

Im Kapitel IV werden die kinematischen Grundlagen der Quantenmechanik endlich vieler Freiheitsgrade untersucht. Ausgangspunkt ist die Heisenberg–Relation

$$qp - pq = ih\mathbf{1} \tag{A}$$

für kanonisch konjugierte Größen q (Ort) und p (Impuls) eines Systems mit einem Freiheitsgrad (h wird im folgenden gleich 1 gesetzt).

Die Kardinalfrage ist die nach „Lösungen“ der Gleichung (A). Bekanntlich gibt es zwei komplementäre Methoden, um dieses Problem zu lösen. Zum Vergleich ziehe man das Problem der Lösung eine algebraische Gleichung, z.B.

$$x^7 + 7x^3 - 17 = 0, \tag{B}$$

heran. Man pflegt sich vorher zu überlegen, was für ein Individuum x überhaupt sein soll (ganz, rational, algebraisch, reell, komplex). Hat man ein Individuum α mit der Eigenschaft (B), so ist α eine „Darstellung“ der Relation (B).

Bei (A) kann man analog vorgehen. Man kann versuchen, konkrete Objekte zu finden, die (A) erfüllen. Natürlich muß man eine gewisse Vorstellung davon haben, was für Individuen p und

q sein könnten. Z.B. scheiden $N \times N$–Matrizen mit Zahleneinträgen von vornherein aus, weil $\mathrm{tr}(qp - pq) = 0$ aber $\mathrm{tr}\,\mathbf{1} = N$ ist.

Denkt man aber bei der Lösungstheorie von Gleichungen der Form (B) z.B. an die sog. „Kroneckersche Stammkörperkonstruktion“, so kommt man dazu, auch für (B) eine zweite Methode in Betracht zu ziehen: Man versuche, abstrakt widerspruchsfrei, also mit „Existenzberechtigung“ Objekte zu konstruieren, die sozusagen „nichts anderes als die Eigenschaft (A)“ aufweisen. Diese Methode, wenn sie gelingt, wäre insofern sogar vorteilhafter, weil man sich bei der vorher beschriebenen u.U. „nichtrelevante“ Eigenschaften einhandelt, die dann erst wieder als solche erkannt und eliminiert werden müssen.

Wir werden beide Wege beschreiten. Der erste Weg wird zur sog. „Schrödingerdarstellung“ von (A) führen. Der zweite Weg hat dann eine prinzipielle Bedeutung:

Wenn nämlich der Ansatz der Quantenmechanik eines Freiheitsgardes richtig ist, daß die Heisenberg–Relation die Kinematik einer solchen Theorie bereits völlig eindeutig beschreibt, so dürfte es eigentlich nur eine einzige Realisierung von (A) geben, die eben genau zu der „konkreten“ Quantenmechanik führt, die man seit 1930 kennt.

M.a.W. die Existenz einer Lösung von (A) (d.h. einer Algebra, die von Objekten p, q mit der Eigenschaft (A) erzeugt wird) ist zwar erwiesen, sobald man die „Schrödingerdarstellung“ kennt. Aber das ist noch völlig unzureichend, denn wenn es völlig verschiedene (algebraisch nichtisomorphe) solche Algebren geben würde, so wäre ja der Begriff „Quantenmechanik eines Freiheitsgrades“ durch (A) überhaupt nicht fixiert. Und selbst wenn es im Sinne der algebraischen Isomorphie nur eine einzige solche Algebra geben sollte, so wäre immer noch zu fragen, ob es womöglich wesentlich verschiedene (nicht unitäräquivalente) Realisierungen auf Hilberträumen geben könnte.

Erst wenn man auch dies ausschließen kann, käme man *dem* Hilbertraum auf die Spur, der in der Quantenmechanik von 1930 die Rolle dieses „deus ex machina“ spielt.

Wir werden diese Frage beantworten. Die Lösung sieht so aus:

- Es gibt bis auf algebraische Isomorphie genau eine C^*–Algebra, die von Elementen p, q mit der Eigenschaft (A) „erzeugt“ wird. Das ist die CCR–Algebra (für einen Freiheitsgrad).

- Es gibt bis auf Unitäräquivalenz genau eine (treue) reguläre irreduzible Darstellung dieser Algebra, d.h. zwei verschiedene solche Darstellungen sind immer „räumlich isomorph“. Damit ist auch der Hilbertraum — bis auf Isomorphie — fixiert.

Dieses letzte Resultat, der Eckstein der Quantenmechanik endlich vieler Freiheitsgrade, ist der berühmte Einzigkeitssatz von Stone/v. Neumann. V. Neumann hat auch gezeigt, daß jede andere reguläre Darstellung ein Vielfaches dieser einzigen irreduziblen Darstellung ist.

Die Schrödingerdarstellung, die regulär und irreduzibel ist, ist also kein (winziger) Spezialfall, sondern das ist gerade diese einzig mögliche (reguläre irreduzible) Darstellung. In dieser Darstellung wird die Zeitevolution der Zustände (im Schrödingerbild) durch eine partielle lineare Differentialgleichung, die berühmte *Schrödinger–Gleichung* gegeben, die zur Lösung sehr vieler Probleme geeignet ist.

Durch diesen Umstand trat eine gewisse Überbetonung des Schrödinger–Bildes auf, die Quantenmechanik erhielt eine gewisse „Schrödingersche Schlagseite“, die z.T. die algebraischen Fundamente der Quantenmechanik etwas verdeckte.

Literatur für Kapitel IV: Baumgärtel/Wollenberg [2], Bratteli/Robinson [3, 4], Petz [8], Thirring [9].

Kapitel 1

Rekapitulation relevanter Begriffe

Sei $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^N$ ein Hilbertraum mit $\dim \mathcal{H} = N < \infty$. Der lineare Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ aller linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$ ist isomorph dem Raum der $N \times N$ Matrizen, d.h. $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$.

Definition 1.1. *Eine Observable ist ein selbstadjungierter Operator $A = A^*$, d.h. es ist $(x, Ay) = (Ax, y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.*

Aus dieser Definition folgt insbesondere, daß für eine Observable A (x, Ax) reellwertig ist. Jeder Operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kann in der Form

$$X = A + iB, \qquad \text{mit } A = A^*,\ B = B^*$$

dargestellt werden ($A = \frac{X+X^*}{2}$, $B = \frac{X-X^*}{2i}$). Aus diesem Grund wollen wir *alle* $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ betrachten, unabhängig davon, ob A und B vertauschbar sind.

Definition 1.2. *Ein Zustand auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist eine positive normierte Linearform φ, d.h. es ist*

$$\varphi(\lambda X + \mu Y) = \lambda\varphi(X) + \mu\varphi(Y) \tag{1.1}$$

für alle $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (Linearität). Insbesondere soll (1.1) auch gelten, wenn X, Y nicht vertauschen. Wenn $X \geq 0$ ist (d.h. $X = X^*$ und $(u, Xu) \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{H}$), soll $\varphi(X) \geq 0$ sein (Positivität). Außerdem ist $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ (Normiertheit).

Z.B. ist $\varphi(X) := \frac{1}{N} \operatorname{tr} X$ ein Zustand.

Wir rekapitulieren zunächst kurz, daß die Gesamtheit aller Zustände gegeben ist durch alle $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $D = D^*$, $D > 0$ mit $\operatorname{tr} D = 1$ vermöge

$$\varphi(X) = \operatorname{tr} XD.$$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle B, A\rangle := \operatorname{tr} B^*A$. In Matrizenform ist $\langle B, A\rangle = \sum_{j,k} \overline{b_{jk}} a_{jk}$. Nach dem Lemma von Riesz sind alle Linearformen φ durch Elemente $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gegeben:

$$\varphi(X) = \operatorname{tr} D^*X$$

Aus der Positivität von φ folgt insbesondere für alle eindimensionalen Projektoren $P = (\psi, \cdot)\psi$, $\|\psi\| = 1$,

$$\varphi(P) = \operatorname{tr} D^*P = \operatorname{tr} PD^* = (\psi, D^*\psi) = (D\psi, \psi) \geq 0$$

Mit Hilfe der Polarisationsformel erhalten wir die Selbstadjungiertheit von D:

$$\begin{aligned} 4\langle\varphi, D\psi\rangle &= \langle\varphi+\psi, D(\varphi+\psi)\rangle - \langle\varphi-\psi, D(\varphi-\psi)\rangle - \\ &\quad - i\langle\varphi+i\psi, D(\varphi+i\psi)\rangle + i\langle\varphi-i\psi, D(\varphi-i\psi)\rangle \\ &= 4\langle\varphi, D^*\psi\rangle, \end{aligned}$$

also ist $D = D^*$ und wegen $(\psi, D\psi) \geq 0$ ist $D \geq 0$. Außerdem ist $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ und das bedeutet $\operatorname{tr} D = 1$.

Im Ergebnis haben wir eine Bijektion

$$\varphi \leftrightarrow D : \varphi(X) = \operatorname{tr} DX$$

zwischen der Gesamtheit der Zustände φ und der Gesamtheit der selbstadjungierten positiven Operatoren D mit $\operatorname{tr} D = 1$.

D besitzt eine Spektralzerlegung

$$D = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j E_j \qquad \lambda_j \geq 0, \qquad \dim E_j = 1$$

wobei die Eigenwerte λ_j entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden. Es gilt dann

$$\varphi(\mathbf{1}) = \operatorname{tr} D = \sum \lambda_j = 1.$$

D heißt Dichtematrix oder -operator.

Zwei Zustände φ_1 und φ_2 (bzw. D_1 und D_2) können zu einem Gemisch $\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2$ (bzw. $\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2$) mit $\mu_1, \mu_2 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ konvex kombiniert werden.

Definition 1.3. *Ein Zustand φ heißt rein genau dann, wenn er sich nicht als Gemisch aus zwei verschiedenen Zuständen darstellen läßt.*

Lemma 1.4. *D ist genau dann rein, wenn $D = P$ ein eindimensionaler Projektor ist.*

Beweis. 1. Sei $D = P$ ein eindimensionaler Projektor und sei

$$D = \underbrace{\mu_1 D_1}_{A\geq 0} + \underbrace{\mu_2 D_2}_{B\geq 0} = P, \qquad \mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0.$$

OBdA sei $\mu_1 > 0$ und $\mu_2 > 0$. Zu zeigen ist $D_1 = D_2 = P$. Es gilt $P \geq A \geq 0$ und $P \geq B \geq 0$ und somit

$$0 \leq (x, Ax) \leq (x, Px), \qquad 0 \leq (x, Bx) \leq (x, Px), \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Weiter folgt sofort $\|Px\|^2 \geq \|A^{1/2}x\|$, d.h. wenn $Px = 0$, so auch $A^{\frac{1}{2}}x = 0$. Das bedeutet aber $A^{\frac{1}{2}}P^{\perp} = 0$, also auch $AP^{\perp} = 0$ und $(AP^{\perp})^* = P^{\perp}A = 0$. Damit gilt

$$A = PAP + P^{\perp}AP + PAP^{\perp} + P^{\perp}AP^{\perp} = PAP. \tag{1.2}$$

Entsprechend gilt

$$B = PBP.$$

Mit $P = (\varphi, \cdot)\varphi$, $\|\varphi\| = 1$ erhalten wir aus (1.2) sofort $A\varphi = PAP\varphi = PA\varphi = (\varphi, A\varphi)\varphi$ und wegen $AP^{\perp} = 0$ ist

$$\mu_1 D_1 = A = (\varphi, A\varphi)P$$

also $\mu_1 = (\varphi, A\varphi)$ und damit $D_1 = P$.

Entsprechend ist $\mu_2 D_2 = B = (\varphi, B\varphi)P$, also $\mu_2 = (\varphi, B\varphi)$ und $D_2 = P$.

2. Mit der Spektralzerlegung ist es trivial zu zeigen, daß D ein Gemisch ist, wenn D kein eindimensionaler Projektor ist. □

Damit haben wir geklärt, daß für einen reinen Zustand φ der zugehörige Dichteoperator $D_\varphi = P$ ein eindimensionaler Projektor ist, und ein Gemisch sich durch

$$D = \sum_{\rho=1}^{N} \lambda_\rho P_\rho \qquad \sum \lambda_\rho = 1$$

mit mindestens zwei verschiedenen Projektoren P_ρ darstellen läßt.

Die nächste Begriffsklärung bezieht sich auf den Terminus *dispersionsfrei* bzw. *streuungsfrei*. Für eine Observable $A = A^*$ gilt gemäß der Hauptachsentransformation

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j$$

mit Eigenwerten λ_j und Eigenprojektoren E_j, wobei $\dim E_j$ die Vielfachheit des Eigenwertes λ_j ist. Das Spektrum von A enthält die Gesamtheit der möglichen Meßwerte:

$$\operatorname{spec} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}.$$

Sei $P = (\varphi, \cdot)\varphi$ ($\|\varphi\| = 1$) ein reiner Zustand. Dann ist

$$\operatorname{tr} AP = (\varphi, A\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\varphi, E_j\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \|E_j\varphi\|^2, \qquad \sum_{j=1}^{n} \|E_j\varphi\|^2 = 1.$$

Der Eigenwert λ_j geht also bei der Berechnung des Mittelwertes mit dem Gewicht $\|E_j\varphi\|^2$ ein. Die Funktion

$$\lambda_j \to \|E_j\varphi\|^2$$

ist eine dem Zustand φ zugeordnete Verteilungsfunktion, die $\|E_j\varphi\|^2$ sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von λ_j im Zustand φ.

Jetzt soll die Streuung/Schwankung (Dispersion) im Zustand φ etwas systematisch betrachtet werden. Dabei braucht φ nicht notwendig rein zu sein, also $\varphi \leftrightarrow D$, für das folgende ist aber die genaue Form von $\varphi(A) = \operatorname{tr} AD$ irrelevant.

Lemma 1.5. *Sei φ ein Zustand und $A = A^*$ eine Observable. Dann ist*

$$\varphi(A^2) - \varphi(A)^2 \geq 0.$$

Beweis. Da φ positiv ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi((A-\varphi(A)\mathbf{1})^2) \\ &= \varphi(A^2 - 2\varphi(A)A + \varphi(A)^2\mathbf{1}) \\ &= \varphi(A^2) - 2\varphi(A)^2 + \varphi(A)^2 \\ &= \varphi(A^2) - \varphi(A)^2 \end{aligned}$$

□

Daher kommen wir zu folgender

Definition 1.6. *Die Zahl*

$$\Delta_\varphi(A) := (\varphi(A^2) - \varphi(A)^2)^{\frac{1}{2}}$$

heißt Schwankung oder Dispersion. Ein Zustand φ heißt genau dann dispersionsfrei, wenn $\Delta_\varphi(A) = 0$ für alle A ist.

Beispiel 1.7. In der klassischen Mechanik ist die Observablenalgebra $C(\mathbb{R}^{2N})$, d.h. der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen über dem Phasenraum $\mathbb{R}^{2N}$, wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist.

Die Zustände sind alle normierten Borelmaße μ. Der Mittelwert wird vermöge

$$\varphi_\mu(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2N}} f(\lambda)\mu(d\lambda)$$

gebildet. Spezielle Zustände sind die Dirac–Maße

$$\delta_{\lambda_0}(\Delta) = \begin{cases} 1 & \lambda_0 \in \Delta, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit

$$\varphi_{\delta_{\lambda_0}}(f) = f(\lambda_0).$$

Die Dirac–Maße sind dispersionsfrei:

$$\varphi_{\delta_{\lambda_0}}(f^2) = (f^2)(\lambda_0) = f(\lambda_0)^2 = \varphi_{\delta_{\lambda_0}}(f)^2$$

Von fundamentaler Bedeutung für die Diskussion der Dispersion ist die *Heisenbergsche Unschärferelation für Zustände.* Zuerst ein paar Hilfssätze:

Lemma 1.8. (Cauchy–Schwarzsche Ungleichung) *Sei φ eine positive Linearform und $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt*

$$|\varphi(A^*B)|^2 \leq \varphi(A^*A)\varphi(B^*B).$$

Beweis. Sei zunächst $\varphi(B^*B) > 0$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi((A+\lambda B)^*(A+\lambda B)) \\ &= \varphi(A^*A) + \overline{\lambda}\varphi(B^*A) + \lambda\varphi(A^*B) + |\lambda|^2\varphi(B^*B) \end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = -\frac{\varphi(B^*A)}{\varphi(B^*B)}$, so erhält man unter Beachtung von $\varphi(A^*B) = \overline{\varphi(B^*A)}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(A^*A) - \frac{\overline{\varphi(B^*A)}}{\varphi(B^*B)}\varphi(B^*A) - \frac{\varphi(B^*A)}{\varphi(B^*B)}\varphi(A^*B) - \frac{|\varphi(B^*A)|^2}{\varphi(B^*B)^2}\varphi(B^*B) \\ &= \varphi(A^*A) - \frac{|\varphi(B^*A)|^2}{\varphi(B^*B)} \end{aligned}$$

und somit folgt $|\varphi(A^*B)|^2 \leq \varphi(A^*A)\varphi(B^*B)$. Für $\varphi(B^*B) = 0$ haben wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi((A+\lambda B)^*(A+\lambda B)) \\ &= \varphi(A^*A) + \overline{\lambda}\varphi(B^*A) + \lambda\varphi(A^*B) \end{aligned}$$

also

$$0 \leq \varphi(A^*A) + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\varphi(A^*B)).$$

Diese Ungleichung kann für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ offenbar nur dann erfüllt sein, wenn $\varphi(A^*B) = 0$ ist, damit ist die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung auch in diesem Fall bewiesen. □

Lemma 1.9. *Sei φ ein Zustand und A, B Observablen. Dann gilt mit $[A,B] = AB - BA$:*

$$\varphi(A^2)\varphi(B^2) \geq \frac{1}{4}|\varphi([A,B])|^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |\varphi([A,B])|^2 &= (\varphi(AB) - \varphi(BA))(\overline{\varphi(AB)} - \overline{\varphi(BA)}) \\ &= \varphi(AB)\overline{\varphi(AB)} - \varphi(BA)\overline{\varphi(AB)} - \varphi(AB)\overline{\varphi(BA)} + \varphi(BA)\overline{\varphi(BA)} \\ &\leq |\varphi(AB)|^2 + |\varphi(BA)||\varphi(AB)| + |\varphi(AB)||\varphi(BA)| + |\varphi(BA)|^2 \\ &\leq 4\varphi(A^2)\varphi(B^2) \end{aligned}$$

□

Hieraus folgt nun folgendes

Theorem 1.10. *Sei φ ein Zustand und A, B Observablen. Dann gilt*

$$\Delta_\varphi(A)\Delta_\varphi(B) \geq \frac{1}{2}|\varphi([A,B])|.$$

Beweis. Unter Anwendung des Lemmas 1.9 für $A \to A - \varphi(A)\mathbf{1}$ und $B \to B - \varphi(B)\mathbf{1}$ erhalten wir

$$\varphi((A-\varphi(A)\mathbf{1})^2)\varphi((B-\varphi(B)\mathbf{1})^2) \geq \frac{1}{4}|\varphi([(A-\varphi(A)\mathbf{1}),(B-\varphi(B)\mathbf{1})])|^2$$

bzw. (durch Wurzelziehen und Definition 1.6)

$$\Delta_\varphi(A)\Delta_\varphi(B) \geq \frac{1}{2}|\varphi\{(A-\varphi(A)\mathbf{1})(B-\varphi(B)\mathbf{1}) - (B-\varphi(B)\mathbf{1})(A-\varphi(A)\mathbf{1})\}|.$$

Mit

$$\begin{aligned}(A-\varphi(A)\mathbf{1})(B-\varphi(B)\mathbf{1})-(B-\varphi(B)\mathbf{1})(A-\varphi(A)\mathbf{1})\\ &= AB-\varphi(B)A-\varphi(A)B+\varphi(A)\varphi(B)\mathbf{1}-BA+B\varphi(A)\\ &\quad+\varphi(B)A-\varphi(B)\varphi(A)\mathbf{1}\\ &= AB-BA\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Definition 1.11. *φ heißt ein Spurzustand, wenn $\varphi(AB)=\varphi(BA)$ für alle A, B gilt.*

Ein Beispiel ist die Dichtematrix $D=\frac{1}{\dim\mathcal{H}}\mathbf{1}$ mit dem zugehörigen Zustand $\varphi_D(A)=\frac{1}{\dim\mathcal{H}}\operatorname{tr}A$. Wegen $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$ ist dies ein Spurzustand.

Lemma 1.12. *Außer dem eben genannten Spurzustand $D=\frac{1}{N}\mathbf{1}$ gibt es auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ keinen anderen Spurzustand, d.h. auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert genau ein Spurzustand.*

Beweis. Sei $D=\sum_{\varrho,\sigma}d_{\varrho\sigma}E_{\varrho\sigma}$ eine Dichtematrix, wobei die $E_{\varrho\sigma}$ die Matrixeinheiten sind. D erzeugt einen Spurzustand, wenn

$$\operatorname{tr}ABD=\operatorname{tr}BAD \tag{1.3}$$

für alle A, B. Wir nehmen z.B. $A=E_{ij}$ und $B=E_{jk}$. Dann ist

$$AB=E_{ij}E_{jk}=E_{ik}$$

und

$$BA=E_{jk}E_{ij}=\begin{cases}0 & k\neq i,\\ E_{jj} & k=i.\end{cases}$$

Es ist

$$\sum_{\varrho,\sigma}d_{\varrho\sigma}E_{ik}E_{\varrho\sigma}=\sum_{\varrho,\sigma}d_{\varrho\sigma}\delta_{k\varrho}E_{i\sigma}=\sum_{\sigma}d_{k\sigma}E_{i\sigma}$$

und

$$\sum_{\varrho,\sigma}d_{\varrho\sigma}E_{jj}E_{\varrho\sigma}=\sum_{\varrho,\sigma}d_{\varrho\sigma}\delta_{j\varrho}E_{j\sigma}=\sum_{\sigma}d_{j\sigma}E_{j\sigma}.$$

Aus (1.3) folgt also

$$\operatorname{tr}\Big(\sum_{\sigma}d_{k\sigma}E_{i\sigma}\Big)=\begin{cases}0 & k\neq i,\\ \operatorname{tr}\Big(\sum_{\sigma}d_{j\sigma}E_{j\sigma}\Big) & k=i.\end{cases}$$

Aber die linke Seite dieser Gleichung ist gleich d_{ki} und

$$\operatorname{tr}\Big(\sum_{\sigma}d_{j\sigma}E_{j\sigma}\Big)=d_{jj}$$

also erhalten wir

$$d_{ki}=\begin{cases}0 & k\neq i,\\ d_{jj} & k=i.\end{cases}$$

Es verschwinden bis auf die Diagonalelemente alle Elemente, und die Einträge in der Diagonalen sind alle identisch, also ist $D=\frac{1}{N}\mathbf{1}$. □

Eine Folgerung ist das folgende

Lemma 1.13. *Ist φ ein dispersionsfreier Zustand, so ist φ notwendigerweiser ein Spurzustand.*

Beweis. Wir erhalten das Ergebnis durch Anwenden der Heisenbergschen Unschärferelation:

$$0 = \Delta_\varphi(A)\Delta_\varphi(B) \geq \frac{1}{2}|\varphi([A,B])| \Rightarrow \varphi([A,B]) = \varphi(AB) - \varphi(BA) = 0.$$

□

Daraus erhalten wir das

Theorem 1.14. *Auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt es keine dispersionsfreien Zustände.*

Beweis. Angenommen, φ sei ein dispersionsfreier Zustand. Dann ist wegen Lemma 1.13 φ ein Spurzustand. Nach Lemma 1.12 ist dann notwendig $\varphi(A) = \frac{1}{N}\operatorname{tr} A$, aber dieser Zustand ist nicht dispersionsfrei, denn für $A := P$, P ein Projektor, $0 < P < \mathbf{1}$, wird

$$\Delta_\varphi(P) = \Big(\frac{1}{N}\operatorname{tr} P^2 - \frac{1}{N^2}(\operatorname{tr} P)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{\dim P}{N} - \Big(\frac{\dim P}{N^2}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

weil $0 < \frac{\dim P}{N} < 1$. □

Diese Folgerungen beruhen alle auf der Voraussetzung, daß die Zustände voll–linear sind.

Nun sei etwas zu *Zeitevolution und Reduktion der Wellenpakete* gesagt. Es ist immer noch $\dim \mathcal{H} = N < \infty$. Sei $\Phi \in \mathcal{H}$, $\|\Phi\| = 1$ ein reiner Zustand. Die zeitliche Evolution des Zustandes wird durch den Hamiltonoperator H bestimmt. H ist selbstadjungiert und besitzt somit eine Spektralzerlegung $H = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j$. $\Phi(t)$ sei eine Vektorfunktion, die der Schrödingergleichung genügt

$$\Phi'(t) = iH\Phi(t), \qquad \Phi(0) = \Phi_0. \tag{1.4}$$

Zu diesem Anfangswertproblem gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich

$$\Phi(t) = e^{itH}\Phi_0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zur Interpretation von e^{itH} verwenden wir den Funktionalkalkül:

$$e^{itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(itH)^n = \sum_{\varrho=1}^{k} e^{it\lambda_\varrho} E_\varrho$$

also genügt

$$e^{itH}\Phi_0 = \sum_{\varrho=1}^{k} e^{it\lambda_\varrho} E_\varrho \Phi_0$$

der Differentialgleichung (1.4) und ist stetig differenzierbar.

Zum Zeitpunkt t_0 liegt $\Phi(t_0)$, $\|\Phi(t_0)\| = 1$ vor. Eine Observable A mit

$$\operatorname{spec} A = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$$

und den zugeordneten Wahrscheinlichkeiten $\omega_j = \|P_j\Phi\|^2$ besitzt die Spektralzerlegung

$$A = \sum_{j=1}^{m} \mu_j P_j.$$

Sei $\omega_{j_0} > 0$ und zum Zeitpunkt t_0 (also im Zustand $\Phi = \Phi(t_0)$) werde der Wert μ_{j_0} gemessen. Dann ist der Zustand *nach* der Messung

$$\frac{P_{j_0}\Phi}{\|P_{j_0}\Phi\|}.$$

Er entsteht durch Projektion des Zustandes Φ auf den Eigenraum $P_{j_0}\mathcal{H}$, der zum Meßwert μ_{j_0} gehört. Dafür hat sich der Begriff „Reduktion des Wellenpakets“ eingebürgert.

Bevor wir an die Diskussion der kinematischen Grundlagen der Quantenmechanik gehen, stellen wir uns auf den Standpunkt, daß wir den mathematischen Apparat der Quantenmechanik kennen, nämlich das Tripel $\{\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{S}\}$ aus Hilbertraum, Observablen und Zuständen und versuchen, die Beziehungen zur klassischen Beschreibung zu diskutieren.

Kapitel 2

Quantenmechanik und klassische Interpretation

2.1 Klassische Systeme

Unter einem klassischen System werden wir ein Quadrupel $(\Gamma, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{M})$ verstehen, dabei bezeichnet Γ den *Phasenraum* des Systems, $\mathcal{B}$ eine Borelstruktur auf Γ, $\mathcal{F}$ das System der *Observablen* und $\mathcal{M}$ die Menge der *Zustände*. Erläutern wir diese „Bestandteile“ eines klassischen Systems etwas genauer:

$\mathcal{B}$ ist eine Borelstruktur auf Γ ($\Gamma \neq \emptyset$), d.h. $\mathcal{B}$ ist ein System von Teilmengen mit den Eigenschaften:

$$\emptyset \in \mathcal{B}; \qquad B \in \mathcal{B} \Rightarrow \Gamma \setminus B \in \mathcal{B}; \qquad B_j \in \mathcal{B}\ (j \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}.$$

$(\Gamma, \mathcal{B})$ ist also ein *Borelraum*.

Als Observablenalgebra $\mathcal{F}$ betrachtet man die Algebra der beschränkten (reell– oder komplexwertigen) Borelfunktionen auf Γ, wobei man den Bildraum $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit der „kanonischen“ Borelstruktur versieht. Im Fall komplexwertiger Funktionen definiert man eine Involution (den $*$) durch $F^*(x) := \overline{f(x)}$. $\mathcal{F}$ ist dann eine $*$–Algebra.

$\mathcal{M}$ ist eine Menge normierter Maße auf $(\Gamma, \mathcal{B})$, d.h. für $\mu \in \mathcal{M}$ gilt, daß μ eine σ–additive Abbildung

$$\mathcal{B} \ni B \mapsto \mu(B) \in [0, \infty)$$

ist, für die $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\Gamma) = 1$ ist.

Die Funktionen $f \in \mathcal{F}$ sind bezüglich aller $\mu \in \mathcal{M}$ integrabel:

$$\left| \int_\Gamma f(x)\, \mu(dx) \right| \leq \int_\Gamma |f(x)|\, \mu(dx) < \infty.$$

Das System der Zustände $\mathcal{M} = \{\mu\}$ soll alle Dirac–Maße δ_ξ enthalten. Dabei ist

$$\delta_\xi(B) = \begin{cases} 1 & \xi \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_\xi(f) := \int_\Gamma f(x)\,\delta_\xi(dx) = f(\xi).$$

Die Erwartungswerte werden durch

$$\varrho_\mu(f) := \int_\Gamma f(x)\,\mu(dx)$$

definiert, so daß eine Bijektion $\varrho_\mu \leftrightarrow \mu$ besteht, denn

$$\int_\Gamma f(x)\,\mu_1(dx) = \int_\Gamma f(x)\,\mu_2(dx) \qquad \text{für alle } f$$

bedeutet $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ für alle Borelmengen B, also $\mu_1 = \mu_2$.

Die Begriffe Erwartungswert, Zustand und normiertes Maß werden synonym verwendet. Mit

$$\varrho_\mu(\cdot) = \int_\Gamma \delta_x(\cdot)\,\mu(dx) \tag{2.1}$$

ist jeder Zustand eine (punktweise) Superposition von Dirac–Zuständen, d.h. die Gleichung (2.1) gilt für jedes $f \in \mathcal{F}$. Dispersionsfreiheit von ϱ bedeutet $\varrho(f^2) = \varrho(f)^2$ (für reellwertige f). Damit sind alle Dirac–Zustände dispersionsfrei. Die Dirac–Zustände können mit den „Punkten“ des Phasenraums identifiziert werden. In einem System $\{\Gamma, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{M}\}$ ist jeder Zustand eine (schwache) Superposition von dispersionsfreien Zuständen.

Beispiel 2.1. In einem klassischen mechanischen System mit n Freiheitsgraden ist der Phasenraum $\Gamma = \mathbb{R}^{2n} \ni (q,p)$ mit Orts- und Impulskoordinaten q bzw. p. Γ sei mit der kanonischen Borelstruktur versehen, $\mathcal{M}$ bestehe aus den normierten Maßen. Die Erwartungswerte der Observablen f im Zustand μ sind durch

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(p,q)\,\mu(dp,dq)$$

gegeben. So ist z.B. für $\mu(\cdot) = \delta_{(\xi,\eta)}(\cdot)$ der Erwartungswert $\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(p,q)\,\mu(dp,dq) = f(\xi,\eta)$ der Mittelwert der Observablen im Zustand (ξ,η).

2.2 Quantenmechanische Systeme

Unter einem quantenmechanischen System werden wir ein Tripel $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{S})$ verstehen, dabei ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine $*$–Algebra ($\mathbf{1} \in \mathcal{A}$), die Observablenalgebra, die eigentlichen Observablen sind die selbstadjungierten Operatoren von $\mathcal{A}$. $\mathcal{S}$ die Zustandsmenge des Systems. Der Umfang von $\mathcal{A}$ soll zunächst offen bleiben.

Definition 2.2. *Zustände $\varphi \in \mathcal{S}$ sind positive Funktionale auf $\mathcal{A}$, aber jetzt nur mit partieller Linearität, d.h. es gilt*

(i) $\varphi(\mathbf{1}) = 1$,

(ii) $\varphi(A^*A) \geq 0$ *für* $A \in \mathcal{A}$,

(iii) $[A,B]=0 \Rightarrow \varphi(\lambda A+\mu B)=\lambda\varphi(A)+\mu\varphi(B),\ \lambda,\mu\in\mathbb{C},$

Wir fordern, daß $\mathcal{S}$ alle Spurzustände $\varphi(A)=\operatorname{tr} AD$ ($D\geq 0$, $\operatorname{tr} D=1$) enthält.

Beispiel 2.3. Sei $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{A}$ die $*$–Algebra, die von dem Multiplikationsoperator q und $p:=-i\frac{d}{dx}$ erzeugt wird, also enthält $\mathcal{A}$ endliche Polynome in p und q. Zustände sind normierte Funktionen $\|f\|=1$ bzw. alle positiven Spuroperatoren

$$D=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n E_n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1 \qquad \text{und} \qquad \dim E_n=1.$$

Auch in der Quantenmechanik wird die Frage nach dispersionsfreien Zuständen gestellt. Im Falle der Existenz ist es wichtig zu wissen, ob sich alle Zustände aus dispersionsfreien Zuständen superponieren lassen:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\varrho_\alpha \qquad \text{mit} \qquad \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha=1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_\alpha>0$$

Durch Verschärfung der Anforderungen an $\mathcal{A}$ und $\mathcal{S}$ läßt sich folgendes No–Go–Theorem von v. Neumann formulieren:

Theorem 2.4. *Es sei $\mathcal{A}=\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{S}$ sei die Menge aller voll–linearen und ultraschwach stetigen Zustände. Dann ist jeder Zustand eine Dichtematrix D. Es existieren keine dispersionsfreien Zustände.*

Die ultraschwache Stetigkeit ist eine sehr scharfe Anforderung an das Stetigkeitsverhalten eines Zustandes. Es gibt viel weniger Funktionen, die in diesem Sinne stetig sind, als z.B. solche, die bezüglich der Operatornorm stetig sind.

Im 3. Kapitel wird das notwendige zusammengetragen, um dieses Theorem zu beweisen.

2.3 Klassische Interpretation quantenmechanischer Systeme

Im folgenden werden (nach Wightman) Forderungen für die klassische Interpretierbarkeit eines quantenmechanischen Systems gestellt.

Sei $\{\mathcal{H},\mathcal{A},\mathcal{S}\}$ gegeben. OBdA sei $\mathcal{A}$ eine normabgeschlossene $*$–Algebra auf $\mathcal{H}$, also eine C^*–Algebra, $\mathbf{1}\in\mathcal{A}$. Observablen seien die selbstadjungierten Operatoren $\mathcal{A}_s\subset\mathcal{A}$. Die Zustandsmenge $\mathcal{S}$ (im Sinne der Definition 2.2) soll alle Dichtematrizen enthalten.

$\{\Gamma,\mathcal{F},\mathcal{M}\}$ sei ein klassisches System mit Phasenraum Γ, auf dem eine Borelstruktur $\mathcal{B}$ definiert ist. $\mathcal{F}$ ist ein System von Borelfunktionen.

Definition 2.5. *Ein quantenmechanisches System ist klassisch interpretierbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:*

(i) *Es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathcal{A}_s$ und $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{A}_s\ni A\leftrightarrow f_A\in\mathcal{F},$$

also zwischen den quantenmechanischen und den klassischen Observablen.

(ii) *Die „quantenmechanischen Meßwerte" stimmen mit den „klassischen Meßwerten" überein, d.h.*

$$\operatorname{spec} A = f_A(\Gamma).$$

(iii) *Falls zwei Observablen A und B kommutieren (d.h. $AB = BA$), so ist die Bijektion $A \leftrightarrow f_A$ linear, d.h.*

$$f_{\lambda A+\mu B} = \lambda f_A + \mu f_B. \tag{2.2}$$

(iv) *Die Zustände sollen klassisch interpretiert werden können, d.h. es wird die Existenz einer Bijektion*

$$\mathcal{S} \ni \varphi \leftrightarrow \mu_\varphi \in \mathcal{M}$$

gefordert mit

$$\varphi(A) = \int_\Gamma f_A(\lambda)\,\mu_\varphi(d\lambda), \qquad A \in \mathcal{A}_s. \tag{2.3}$$

Gleichung (2.3) bedeutet, daß die quantenmechanische Vorschrift zur Berechnung des Mittelwertes einer Observablen im Zustand φ sich als Integralmittelwert bezüglich des zugeordneten Maßes „klassisch" deuten läßt.

(v) *Für $A > \mathbf{1}$ gilt*

$$f_{A^2}(\lambda) = f_A(\lambda)^2, \qquad \textit{für alle } \lambda \in \Gamma \tag{2.4}$$

Aus (ii) folgt $f_{\mathbf{1}}(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \Gamma$, weil $\operatorname{spec} \mathbf{1} = \{1\}$, und $f_{\mu\mathbf{1}}(\lambda) = \mu$ $(\lambda \in \Gamma)$, d.h. $f_{\mu\mathbf{1}} = \mu f_{\mathbf{1}}$ in Übereinstimmung mit (2.2). Es gilt $f_0(\lambda) = 0$ für alle λ, weil $\operatorname{spec} 0 = \{0\}$.

Zu (iv) beachte man, daß die Funktionen f_A *a priori* bezüglich jedes finiten Maßes integrabel sind. Insbesondere muß dies für die Dichtematrix gelten:

$$\operatorname{tr} AD = \int_\Gamma f_A(\lambda)\,\mu_D(d\lambda), \qquad A \in \mathcal{A}_s \tag{2.5}$$

Gleichung (2.4) gilt sogar für alle A (ohne Einschränkung auf $A > \mathbf{1}$), denn man kann ein $c > 0$ so wählen, daß $A + c\mathbf{1} > \mathbf{1}$ ist. Dann gilt

$$f_{(A+c\mathbf{1})^2} = f_{A^2+2cA+c^2\mathbf{1}} = f_{A^2}(\lambda) + 2cf_A(\lambda) + c^2$$

und andererseits wegen (2.4)

$$f_{(A+c\mathbf{1})^2} = (f_{A+c\mathbf{1}}(\lambda))^2 = (f_A(\lambda) + c)^2 = f_A(\lambda)^2 + 2cf_A(\lambda) + c^2$$

wird mithin

$$f_{A^2}(\lambda) = f_A(\lambda)^2.$$

Gleichung (2.4) impliziert auch

$$AB = BA \Rightarrow f_{AB}(\lambda) = f_A(\lambda) f_B(\lambda),$$

denn aus $[A, B] = 0$ folgt $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ und damit

$$f_{(A+B)^2}(\lambda) = (f_{A+B}(\lambda))^2 = (f_A(\lambda) + f_B(\lambda))^2 = f_A(\lambda)^2 + 2f_A(\lambda)f_B(\lambda) + f_B(\lambda)^2$$

und andererseits

$$f_{(A+B)^2}(\lambda) = f_{A^2+2AB+B^2}(\lambda) = f_A(\lambda)^2 + 2f_{AB}(\lambda) + f_B(\lambda)^2.$$

2.4 Eine klassische Interpretation eines zweidimensionalen Quantensystems

Es sei $\dim \mathcal{H} = 2$, also gilt OBdA $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2 \ni (x, y)$ mit $x = x_1 + ix_2$ und $y = y_1 + iy_2$ und dem natürlichen Skalarprodukt

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \overline{x}x' + \overline{y}y'.$$

Betrachtet wird $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Da die Observablen alle selbstadjungierten Matrizen sind, gilt sogar

$$A = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & b \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

also ist $\mathcal{A}_s$ ein reell–vierdimensionaler Raum. Als Basis werden die Paulischen Spinmatrizen

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gewählt, es gilt dann

$$A = A(\alpha, \vec{\beta}) = \alpha \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{3} \beta_i \sigma_i = \begin{pmatrix} \alpha + \beta_3 & \beta_1 - i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & \alpha - \beta_3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$.

Das Spektrum (die Menge der Eigenwerte) von A ist

$$\operatorname{spec} A = \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

man berechnet λ_1, λ_2 mittels der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \alpha + \beta_3 - \lambda & \beta_1 - i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & \alpha - \beta_3 - \lambda \end{pmatrix} &= (\alpha + \beta_3 - \lambda)(\alpha - \beta_3 - \lambda) + \beta_1^2 - \beta_2^2 \\ &= (\alpha - \lambda)^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda = \alpha \pm |\vec{\beta}|$ bzw.

$$\operatorname{spec} A = \{\alpha + |\vec{\beta}|, \alpha - |\vec{\beta}|\}, \qquad |\vec{\beta}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}. \tag{2.7}$$

In der Quantenmechanik ist es immer wichtig zu wissen, wann zwei Observablen vertauschbar sind:

Lemma 2.6. *Zwei Observablen $A(\alpha, \vec{\beta})$ und $A(\gamma, \vec{\delta})$ sind genau dann vertauschbar, wenn $\vec{\delta}$ und $\vec{\beta}$ linear abhängig sind.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei $\vec{\delta} = \lambda\vec{\beta}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(\gamma,\vec{\delta}) &= \gamma\mathbf{1} + \lambda(\beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \beta_3\sigma_3) \\ &= \gamma\mathbf{1} + \lambda(A(\alpha,\vec{\beta}) - \alpha\mathbf{1} \\ &= (\gamma-\alpha)\mathbf{1} + \lambda A(\alpha,\vec{\beta}) \end{aligned}$$

Da $A(\alpha,\vec{\beta})$ mit $\mathbf{1}$ und sich selbst vertauscht, ist die Aussage bewiesen.

($\Rightarrow$) Sei $A(\alpha,\vec{\beta})A(\gamma,\vec{\delta}) - A(\gamma,\vec{\delta})A(\alpha,\vec{\beta}) = 0$. Da die Operatoren $A = \alpha\mathbf{1} + A'$ und $B = \beta\mathbf{1} + B'$ genau dann vertauschen, wenn die Operatoren A' und B' vertauschen, genügt es $\sum \beta_j\sigma_j$ und $\sum \delta_j\sigma_j$ zu betrachten. Diese sollen nun vertauschen. Zur expliziten Berechnung der Produkte werden Rechenregeln für die Pauli–Matrizen benötigt:

$$\begin{aligned} \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j &= 0 \qquad (j \neq k) \\ \sigma_j\sigma_k &= i\sigma_l, \end{aligned}$$

wobei (j,k,l) durch zyklische Vertauschung aus $(1,2,3)$ hervorgeht. Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3}\beta_j\sigma_j \sum_{k=1}^{3}\delta_k\sigma_k &= \sum_{k=1}^{3}\delta_k\sigma_k \sum_{j=1}^{3}\beta_j\sigma_j \\ \Leftrightarrow \sum_{j,k}\beta_j\delta_k\sigma_j\sigma_k &= \sum_{j,k}\beta_j\delta_k\sigma_k\sigma_j \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j\neq k}\beta_j\delta_k(\sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j) \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{j<k}\beta_j\delta_k 2\sigma_j\sigma_k \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{j<k}\sigma_j\sigma_k(\beta_j\delta_k - \beta_k\delta_j) \\ \Leftrightarrow 0 &= i\sigma_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{vmatrix} - i\sigma_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \delta_1 & \delta_3\end{vmatrix} + i\sigma_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \delta_2 & \delta_3\end{vmatrix} \end{aligned}$$

Da die Paulimatrizen linear unabhängig sind, muß jede dieser Determinanten verschwinden. Somit ist der Rang der Matrix $\left(\begin{smallmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3\end{smallmatrix}\right)$ gleich 1 und die Vektoren $\vec{\beta}$ und $\vec{\delta}$ sind linear abhängig. □

Zustände sind auf alle Fälle alle Dichtematrizen, d.h. alle $D > 0$ mit $\operatorname{tr} D = 1$. Die Eigenwerte von D sind $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ und den zugehörigen Eigenprojektoren P_1 und P_2 auf die Eigenräume von λ_1 und λ_2. Es gilt

$$D = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2.$$

Die Eigenprojektoren sind selbst Dichtematrizen und somit reine Zustände. Sei φ_j ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ_j. Dann ist

$$P_j = (\varphi_j, \cdot)\varphi_j, \qquad j = 1,2, \qquad \|\varphi_j\| = 1.$$

Jede Dichtematrix D ist eine Superposition (konvexe Kombination) aus reinen Zuständen. Sei P ein reiner Zustand, also $P = (\varphi, \cdot)\varphi$ mit $\|\varphi\| = 1$. Dann hat P die Eigenwerte 1 und 0. Nach (2.7) gilt dann

$$\alpha + |\vec{\beta}| = 1, \qquad \alpha - |\vec{\beta}| = 0,$$

also $\alpha = |\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$. Reine Zustände besitzen also die Form

$$P = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 + \gamma_3\sigma_3), \qquad \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \qquad |\vec{\gamma}| = 1. \tag{2.8}$$

Mit S^2 bezeichnen wir die Einheitssphäre $|x| = 1$ im $\mathbb{R}^3$. Damit haben wir folgendes

Lemma 2.7. *Die Gleichung* (2.8) *stiftet eine Bijektion*

$$P \leftrightarrow \vec{\gamma}, \qquad |\vec{\gamma}| = 1$$

zwischen den reinen Zuständen P und den Punkten auf der Einheitssphäre S^2.

Der Erwartungswert (Mittelwert) einer Observablen A im Zustand D wird in der Quantenmechanik durch die Formel

$$\operatorname{tr} AD = \operatorname{tr} DA$$

gegeben. Zur Erinnerung: Für einen reinen Zustand $D = P = (\varphi, \cdot)\varphi$, $\|\varphi\| = 1$, gilt

$$PAx = (\varphi, Ax)\varphi = (A\varphi, x)\varphi,$$

also mit $\psi \perp \varphi$, $\|\psi\| = 1$,

$$\operatorname{tr} PA = (\varphi, PA\varphi) + (\psi, PA\psi) = (\varphi, A\varphi) + 0 = (\varphi, A\varphi),$$

was den wohlbekannten Mittelwert von A im (Vektor–) Zustand φ liefert. Wir rechnen jetzt $\operatorname{tr} PA$ in Abhängigkeit von den „Parametergrößen“ α, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ aus, wobei $A = A(\alpha, \vec{\beta})$, $P = P_\gamma$ und $|\vec{\gamma}| = 1$ ist. Sei also

$$\begin{aligned} A &= (\alpha\mathbf{1} + \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \beta_3\sigma_3) \\ P_\gamma &= (\mathbf{1} + \gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 + \gamma_3\sigma_3). \end{aligned}$$

Dann wird (mit den Rechenregeln für Paulimatrizen und $\operatorname{tr}\sigma_i = 0$)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} AP = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(&\alpha\mathbf{1} + \sum \beta_i\sigma_i + \alpha\gamma_1\sigma_1 + \beta_1\gamma_1\sigma_1^2 + \beta_2\gamma_1\sigma_2\sigma_1 + \beta_3\gamma_1\sigma_3\sigma_1 + \\ &+ \alpha\gamma_2\sigma_2 + \beta_1\gamma_2\sigma_1\sigma_2 + \beta_2\gamma_2\sigma_2^2 + \beta_3\gamma_2\sigma_3\sigma_2 + \\ &+ \alpha\gamma_3\sigma_3 + \beta_1\gamma_3\sigma_1\sigma_3 + \beta_2\gamma_3\sigma_2\sigma_3 + \beta_3\gamma_3\sigma_3^2) \\ = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\sum \beta_i\gamma_i) &= \alpha + (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \end{aligned}$$

wo $(\cdot, \cdot)$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist.

Nun soll versucht werden, gemäß Definition 2.5 das oben beschriebene zweidimensionale quantenmechanische System klassisch zu interpretieren. Als Borelraum Γ nehmen wir die Einheitssphäre S^2 mit der kanonischen Borelstruktur. Es werden den Observablen A Borelfunktionen $f_A \in S^2$ zugeordnet: Dazu betrachten wir zu gegebenem $\vec{\beta} \neq 0$ folgende Zerlegung der Einheitssphäre in zwei disjunkte Teilmengen. Wir zeichnen einen der durch die Trenngerade von $\vec{\beta}$ gegebenen

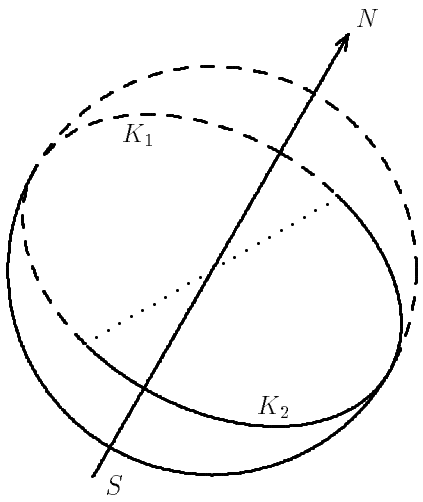

Abbildung 2.1: Zerlegung des Borelraums S^2 in H_+ und H_- sowie die zwei Äquatorhälften K_1 und K_2.

Punkte der Sphäre als „Nordpol“ N aus und zerlegen den „Äquator“ in zwei disjunkte Halbkreise K_1 und K_2 (siehe Abbildung 2.1).

H_+ sei nun die „nördliche“ Halbsphäre zuzüglich K_1, H_- die „südliche“ Halbspäre Zuzüglich K_2. Wir ordnen nun den Observablen $A(\alpha,\vec{\beta})$ wie folgt Treppenfunktionen $F_{A(\alpha,\vec{\beta})}$ auf S^2 zu: Für $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = N$ setzen wir

$$f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi}) := \begin{cases} \alpha + |\vec{\beta}| & \text{falls } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha - |\vec{\beta}| & \text{falls } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \qquad \left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = N\right) \tag{2.9a}$$

und für $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = S$

$$f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi}) := \begin{cases} \alpha + |\vec{\beta}| & \text{falls } \vec{\xi} \in H_-, \\ \alpha - |\vec{\beta}| & \text{falls } \vec{\xi} \in H_+. \end{cases} \qquad \left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = S\right) \tag{2.9b}$$

Für $\vec{\beta} = \vec{0}$ setzen wir für alle $\vec{\xi} \in S^2$

$$f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi}) := \alpha\,, \qquad \left(\vec{\beta} = \vec{0}\right). \tag{2.9c}$$

Es ist notwendig, die in Definition 2.5 geforderten Eigenschaften, welche die Zuordnung $A \mapsto f_A$ erfüllen muß, nachzurechnen:

Die Zuordnung ist bijektiv, denn für $(\alpha_1,\vec{\beta}_1) \neq (\alpha_2,\vec{\beta}_2)$ entstehen verschiedene Funktionen.

Die quantenmechanischen Meßwerte stimmen mit den möglichen Funktionswerten überein, d.h.

$$\operatorname{spec} A(\alpha,\vec{\beta}) = f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(S^2) = \{\alpha + |\vec{\beta}|, \alpha - |\vec{\beta}|\},$$

wie nach (2.9) klar ist. Da $A = \mathbf{1}$ genau dann gilt, wenn $\alpha = 1$ und $\vec{\beta} = 0$ ist, folgt auch $f_{\mathbf{1}}(\vec{\xi}) = 1$ für alle $\vec{\xi} \in S^2$.

Es muß die Linearität der Zuordnung für den Fall, daß $A(\alpha_1, \vec{\beta}_1)$ und $A(\alpha_2, \vec{\beta}_2)$ vertauschen, nachgerechnet werden. Sei also $\vec{\beta}_2 = \lambda\vec{\beta}_1$ und damit (nach Lemma 2.6)

$$A(\alpha_1, \vec{\beta}_1)A(\alpha_2, \vec{\beta}_2) = A(\alpha_2, \vec{\beta}_2)A(\alpha_1, \vec{\beta}_1).$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial, da dann $\vec{\beta}_2 = 0$ und $A(\alpha_2, 0) = \alpha_2\mathbf{1}$ ist. Die Additivität $f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)+A(\alpha_2,0)} = f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)} + f_{A(\alpha_2,0)}$ ist in diesem Fall offensichtlich.

Sei jetzt o.B.d.A $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = N$. Ist $\vec{\beta}_2 = \lambda\vec{\beta}_1$ mit $\lambda > 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) + f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}) &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + |\vec{\beta}_1| + |\vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - |\vec{\beta}_1| - |\vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) + f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}) &= f_{A(\alpha_1+\alpha_2,(1+\lambda)\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) \\ &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist $\vec{\beta}_2 = \lambda\vec{\beta}_1$ mit $\lambda < 0$, so ist wegen $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = S$

$$f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}) = \begin{cases} \alpha_2 - |\vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_2 + |\vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} = \begin{cases} \alpha_2 + \lambda|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_2 - \lambda|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-. \end{cases}$$

Für $\lambda \in [-1, 0]$ ist $\frac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{|\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2|} = N$ wird damit

$$\begin{aligned} f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) + f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}) &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \\ &= f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) + f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}). \end{aligned}$$

Für $\lambda < -1$ haben wir $\frac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{|\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2|} = S$ und damit

$$\begin{aligned} f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) + f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}) &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + |\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_+, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - (1+\lambda)|\vec{\beta}_1| & \text{für } \vec{\xi} \in H_-, \end{cases} \end{aligned}$$

$$= f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) + f_{A(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}).$$

Die Additivität ist damit bewiesen. Ohne Schwierigkeiten rechnet man nach, daß

$$f_{t\cdot A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) = t \cdot f_{A(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Bezüglich der Multiplikation müssen wir

$$f_{A_1(\alpha_1,\vec{\beta}_1)A_2(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi}) = f_{A_1(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}(\vec{\xi}) f_{A_2(\alpha_2,\vec{\beta}_2)}(\vec{\xi})$$

für $[A_1, A_2] = 0$, d.h. für $\vec{\beta}_2 = \lambda\vec{\beta}_1$ überprüfen. Man rechnet die Gültigkeit der Gleichung durch Untersuchung der möglichen Fälle wie oben nach.

Nun folgt die Zuordnung der Zustände zu Maßen auf S^2. Wir betrachten dabei nur die Dichtematrizen. Da diese konvexe Kombinationen reiner Zustände sind, brauchen wir die Zuordnung nur für die $P_{\vec{\gamma}}$, $|\vec{\gamma}| = 1$, vorzunehmen:

Sei $w(\cdot)$ das Haarsche Maß auf S^2, also $w(d\theta d\varphi) := \sin\theta\, d\theta d\varphi$ das Oberflächenmaß der Sphäre mit sphärischen Koordinaten θ, φ und

$$H_{\vec{\gamma}} := \{\vec{\xi} :\ (\vec{\xi}, \vec{\gamma}) \geq 0\}$$

die obere Halbsphäre mit dem „Nordpol“ $\vec{\gamma}$. Für eine Borelmenge Δ auf S^2 und gegebenen $P_{\vec{\gamma}}$ definieren wir

$$\mu_{P_{\vec{\gamma}}}(\Delta) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Delta \cap H_{\vec{\gamma}}} (\vec{\gamma}, \vec{\xi})\, w(d\vec{\xi}).$$

Der Ausdruck für den klassischen Mittelwert für die Observable $f_{A(\alpha,\vec{\beta})}$ im Zustand $\mu_{P_{\vec{\gamma}}}$ ist

$$\int\limits_{\Gamma} f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi})\, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi}).$$

Nun muß nachgerechnet werden, daß dieser Ausdruck den quantenmechanischen Mittelwert $\mathrm{tr}(A(\alpha,\vec{\beta})P_{\vec{\gamma}}) = \alpha + (\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ reproduziert. Mit (2.9) gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Gamma} f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi})\, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi}) \\
&= \int\limits_{(\vec{\xi},\vec{\beta})\geq 0} (\alpha + |\vec{\beta}|)\, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi}) + \int\limits_{(\vec{\xi},\vec{\beta})<0} (\alpha - |\vec{\beta}|)\, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi}) \\
&= (\alpha + |\vec{\beta}|)\mu_{P_{\vec{\gamma}}}(\{(\vec{\xi}, \vec{\beta}) \geq 0\}) + (\alpha - |\vec{\beta}|)\mu_{P_{\vec{\gamma}}}(\{(\vec{\xi}, \vec{\gamma}) < 0\}) \\
&= \frac{(\alpha + |\vec{\beta}|)}{\pi} \int\limits_{\{(\vec{\xi},\vec{\beta})\geq 0\}\cap H_{\vec{\gamma}}} (\vec{\gamma}, \vec{\xi})\, w(d\vec{\xi}) + \frac{(\alpha - |\vec{\beta}|)}{\pi} \int\limits_{\{(\vec{\xi},\vec{\beta})<0\}\cap H_{\vec{\gamma}}} (\vec{\gamma}, \vec{\xi})\, w(d\vec{\xi}) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{H_{\vec{\gamma}}} (\vec{\gamma}, \vec{\xi})\, w(d\vec{\xi}) + \frac{|\vec{\beta}|}{\pi}\Big(\int\limits_{\{(\vec{\xi},\vec{\beta})\geq 0\}\cap H_{\vec{\gamma}}} (\vec{\gamma}, \vec{\xi})\, w(d\vec{\xi}) - \int\limits_{\{(\vec{\xi},\vec{\beta})<0\}\cap H_{\vec{\gamma}}} (\vec{\gamma}, \vec{\xi})\, w(d\vec{\xi}) \Big)
\end{aligned}$$

(2.10)

Zur Berechnung des ersten Integrals wählen wir sphärische Koordinaten θ, φ mit dem Nordpol $\vec{\gamma}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{H_{\vec{\gamma}}}(\vec{\gamma},\vec{\xi})\,w(d\vec{\xi}) &= \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cos\theta\sin\theta\\ &= \frac{\alpha}{\pi}2\pi\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cos\theta\sin\theta\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Der linke Summand reproduziert also α. Das ist auch gleichzeitig der Nachweis der Normiertheit des Maßes $\mu_{P_{\vec{\gamma}}}$, nämlich

$$\mu_{P_{\vec{\gamma}}}(S^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{H_{\vec{\gamma}}}(\vec{\gamma},\vec{\xi})\,w(d\vec{\xi}) = 1.$$

Für das zweite Integral wählen wir sphärische Koordinaten mit einem Nordpol orthogonal zu $\vec{\gamma}$ und setzen $\vec{\gamma} = (1,0,0)$. $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ wählen wir in der Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dann ist

$$\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, 0).$$

OBdA sei $0 < \varphi_0 < \pi$. Mit $\vec{\xi} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ erhalten wir

$$(\vec{\xi},\vec{\gamma}) = \sin\theta\cos\varphi.$$

Somit sind die zu berechnenden Integrale:

$$\int\limits_{\{(\vec{\xi},\vec{\beta})\geq 0\}\cap H_{\vec{\gamma}}} \sin\theta\cos\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi - \int\limits_{\{(\vec{\xi},\vec{\beta})<0\}\cap H_{\vec{\gamma}}} \sin\theta\cos\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi. \tag{2.11}$$

Die Integrationsbereiche sind in Abbildung 2.2 veranschaulicht. Demnach gilt

$$\begin{aligned}H_{\vec{\gamma}} &= \left\{\varphi,\theta:\ -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\theta\leq\pi\right\}\\ \{(\vec{\xi},\vec{\beta})\geq 0\} &= \left\{\varphi,\theta:\ \varphi_0-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\varphi_0+\frac{\pi}{2}, 0\leq\theta\leq\pi\right\}\\ \{(\vec{\xi},\vec{\beta})< 0\} &= \left\{\varphi,\theta:\ \varphi_0+\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\varphi_0-\frac{\pi}{2}, 0\leq\theta\leq\pi\right\}.\end{aligned}$$

Damit können wir leicht die Grenzen der Integrale berechnen, und erhalten

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0}\cos\varphi\,d\varphi\right)$$

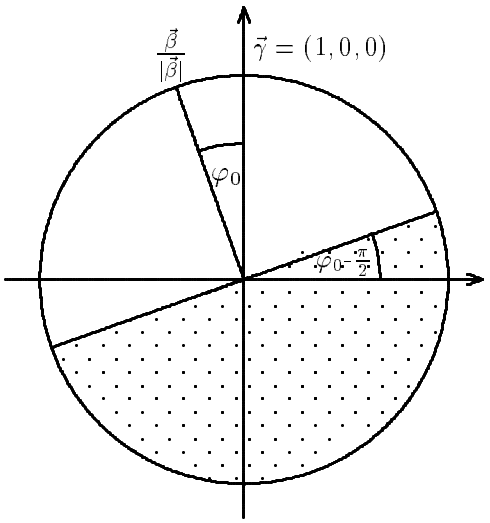

Abbildung 2.2: Veranschaulichung der Integrationsbereiche von (2.11): Schnitt durch die Einheitssphäre in der Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$. $H_{\vec{\gamma}}$ ist die obere Halbsphäre und im schraffierten Bereich ist $(\vec{\beta}, \vec{\xi}) < 0$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \Bigg(\int_{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_0} \cos\varphi \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0} \cos\varphi \, d\varphi \Bigg) \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \Bigg(\int_{-\frac{\pi}{2}+\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_0} \cos\varphi \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_0} \cos\varphi \, d\varphi \Bigg) \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)}^{\frac{\pi}{2}-\varphi_0} \cos\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \pi \cos\varphi_0.
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir aus dem linken Summanden von (2.10) mit der Definition des Skalarprodukts (unter Beachtung von $|\vec{\gamma}| = 1$)

$$\frac{|\vec{\beta}|}{\pi} \pi \cos\varphi_0 = |\vec{\beta}| \cdot \cos\varphi_0 = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}).$$

Insgesamt haben wir nun

$$\int_{\Gamma} f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi}) \, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi}) = \alpha + (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \operatorname{tr} A(\alpha, \vec{\beta}) P_{\vec{\gamma}},$$

also stimmen die klassische und die quantenmechanische Mittelwertberechnung überein. Alle Forderungen von Definition 2.5 sind somit erfüllt, so daß die oben beschriebenen Zuordnungen tatsächlich eine klassische Interpretation eines zweidimensionalen quantenmechanischen Systems ermöglichen.

Bemerkung. Es existieren dispersionsfreie Zustände in einem solchen System, nämlich die Dirac–Maße auf S^2. Für $\vec{\xi} \in S^2$ ist

$$\mu_{\vec{\xi}}(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{\xi} \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

d.h.

$$\int_{S^2} f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\eta})\, \mu_{\vec{\xi}}(d\vec{\eta}) = f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi}).$$

Wegen

$$f_{A(\alpha,\vec{\beta})^2}(\vec{\xi}) = f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi})^2$$

sind natürlich diese Zustände dispersionsfrei. Dies scheint im Widerspruch zum No–Go–Theorem von J. v. Neumann (Theorem 2.4) zu stehen. Jedoch ist die Funktion $f_{A(\alpha,\vec{\beta})}(\vec{\xi})$ nach (2.9) durch die Zuordnung der beiden Eigenwerte von A jeweils zu Halbsphären definiert. Die Eigenwerte verhalten sich jedoch im allgemeinen nicht linear, wenn A und B nicht vertauschen, was einer Voraussetzung (volle Linearität für alle Zustände) im Theorem 2.4 widerspricht. Somit ist die Existenz dispersionsfreier Zustände in diesem Beispiel kein Widerspruch zu diesem No–Go–Theorem.

Bemerkung. Wie in einem „klassischen System“ gefordert, sind alle Zustände Superpositionen dispersionsfreier Zustände, denn die Zustände

$$\varphi_{\vec{\gamma}}(A) = \int_{S^2} f_A(\vec{\xi})\, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi})$$

lassen sich eben durch die dispersionsfreien Zustände $\delta_{\vec{\xi}}(A) = \int f_A(\vec{\xi})\, \mu_{\vec{\xi}}(d\vec{\eta}) = f_A(\vec{\xi})$ gemäß

$$\varphi_{\vec{\gamma}}(\cdot) = \int_{S^2} \delta_{\vec{\xi}}(\cdot)\, \mu_{P_{\vec{\gamma}}}(d\vec{\xi})$$

superponieren. Trotzdem also alle Zustände Superpositionen dispersionsfreier Zustände sind, kommutieren nicht alle Observablen.

Dies scheint einem anderen No–Go–Theorem zu widersprechen, daß von Jauch und Piron stammt (siehe Kapitel 3). Dieses Theorem verwendet jedoch in seinen Voraussetzungen u.a. folgende Eigenschaft:

> Gilt für einen Zustand φ und zwei nicht notwendig vertauschende Projektoren P, Q, daß $\varphi(P) = 1$ und $\varphi(Q) = 1$ ist, so ist auch $\varphi(P \cap Q) = 1$, wobei $P \cap Q$ den Projektor auf $P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$ bezeichnet (es ist $P \cap Q = \text{s-lim}_{n\to\infty}(PQ)^n$).

Diese Eigenschaft ist aber in unserem Beispiel verletzt, wie im folgenden gezeigt wird: Man betrachte

$$P := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{\beta}\vec{\sigma}), \quad Q := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \vec{\beta}\vec{\sigma}), \quad |\vec{\beta}| = 1, \quad \vec{\beta}\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \sigma_i.$$

P und Q kommutieren, denn es gilt

$$PQ = \frac{1}{4}(\mathbf{1} - \vec{\beta}\vec{\sigma} + \vec{\beta}\vec{\sigma} - \vec{\beta}\vec{\sigma} \cdot \vec{\beta}\vec{\sigma})$$

$$= \frac{1}{4}(\mathbf{1} - |\vec{\beta}|^2)\mathbf{1} = 0$$

also auch $QP = 0$. Jetzt betrachten wir einen dispersionsfreien Zustand φ. Dann muß φ für P und Q additiv sein, wegen $P + Q = \mathbf{1}$ haben wir also

$$\varphi(P) + \varphi(Q) = 1.$$

Da φ dispersionsfrei ist, gilt entweder $\varphi(P) = 1$ oder $\varphi(Q) = 1$, weil $\varphi(P^2) = \varphi(P)^2 = \varphi(P)$ sein muß. Jetzt seien $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$ zwei linear unabhängige Vektoren mit $|\vec{\beta}_1| = |\vec{\beta}_2| = 1$. Setzen wir nun

$$P' := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \varepsilon_1 \vec{\beta}\vec{\sigma}), \qquad Q' := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \varepsilon_2 \vec{\beta}\vec{\sigma})$$

mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$ so, daß $\varphi(P') = 1$ und $\varphi(Q') = 1$ gilt. Nun sind $\varepsilon_1\vec{\beta}_1$ und $\varepsilon_2\vec{\beta}_2$ linear unabhängig und (nach Lemma 2.6) P' und Q' somit nicht vertauschbar. Deshalb projizieren sie auf verschiedene eindimensionale Teilräume, es gilt also

$$P' \cap Q' = 0 \Rightarrow \varphi(P' \cap Q') = 0,$$

aber $\varphi(P') = \varphi(Q') = 1$, die fragliche Voraussetzung ist also nicht erfüllt.

2.5 Unmöglichkeit einer klassischen Interpretation für $\dim \mathcal{H} = 4$

Im Gegensatz zum Fall $\dim \mathcal{H} = 2$ zeigen wir jetzt, daß eine klassische Interpretation der vierdimensionalen Quantenmechanik nicht mehr möglich ist, d.h.

Theorem 2.8. *Für* $\dim \mathcal{H} = 4$ *läßt sich die quantenmechanische Vorschrift*

$$\operatorname{tr} AD$$

für die Berechnung des Mittelwertes der Observablen A im Zustand D (Dichtematrix) in keinem Fall klassisch interpretieren.

Der Beweis dieses Theorem knüpft an das Einstein–Podolski–Rosen–Paradoxon (bzw. an eine mathematische Adaption desselben) an und verwendet die Bellsche Ungleichung.

Vor dem Beweis müssen wir noch verschiedene Lemmata und Eigenschaften der Pauli–Matrizen zeigen. Sei im folgenden $\dim \mathcal{H} = 4$, wir setzen $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ($\otimes$ bezeichnet das Tensorprodukt). Physikalisch ist dies ein Raum für zwei reine Spin–Teilchen. Man betrachte die Gruppe $SU(2)$ der unitären 2×2–Matrizen mit Determinante 1 mit den Elementen

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Jedes U kann mit Hilfe einer Basis bestehend aus den Pauli–Matrizen und der Einheitsmatrix dargestellt werden:

$$U = \operatorname{Re}\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \operatorname{Im}\alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1 = \sigma_3} + \operatorname{Re}\beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2 = i\sigma_2} + \operatorname{Im}\beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3 = \sigma_1}$$

Zur Erinnerung: Für zwei 2×2–Matrizen A und B gilt

$$\operatorname{tr} A \otimes B = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B.$$

Wir definieren nun die Zuordnung

$$SU(2) \ni U \mapsto U \otimes U \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2.$$

Dies ist eine (unitäre) Darstellung der Gruppe $SU(2)$ auf dem $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Der Zweck dieser Zuordnung ist folgender: Auf $\mathbb{C}^2$ existiert kein Projektor (außer 0 und $\mathbf{1}$), der mit allen U vertauscht, für $U \otimes U$ gibt es jedoch welche. Wir geben hier einfach einen an:

$$P := \frac{1}{4}\Big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j\Big).$$

Zunächst rechnen wir nach, daß dies ein Projektor ist. Da die Pauli–Matrizen selbstadjungiert sind, gilt $P = P^*$. Zu zeigen ist noch $P^2 = P$:

$$\begin{aligned}
P^2 &= \frac{1}{16}\Big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j\Big)^2 \\
&= \frac{1}{16}\Big(\mathbf{1} \otimes 1 - \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j - \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sum_{j=1}^{3} \sigma_j\sigma_1 \otimes \sigma_j\sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{3} \sigma_j\sigma_2 \otimes \sigma_j\sigma_2 - \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \sum_{j=1}^{3} \sigma_j\sigma_3 \otimes \sigma_j\sigma_3\Big) \\
&= \frac{1}{16}\big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\sigma_1 \otimes \sigma_1 - 2\sigma_2 \otimes \sigma_2 - 2\sigma_3 \otimes \sigma_3 + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \\
&\quad + (-i)\sigma_3 \otimes (-i)\sigma_3 + i\sigma_2 \otimes i\sigma_2 + i\sigma_3 \otimes i\sigma_3 + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (-i)\sigma_1 \otimes (-i)\sigma_1 + \\
&\quad + (-i)\sigma_2 \otimes (-i)\sigma_2 + i\sigma_1 \otimes i\sigma_1 + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\big) \\
&= \frac{1}{16}\left(4(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 4\sigma_1 \otimes \sigma_1 - 4\sigma_2 \otimes \sigma_2 - 4\sigma_3 \otimes \sigma_3\right) = P
\end{aligned}$$

Bekanntlich kann man die Dimension eines Projektors durch seine Spur ausrechnen:

$$\operatorname{tr} P = \frac{1}{4}\Big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{3} \operatorname{tr} \sigma_j \otimes \sigma_j\Big) = \frac{1}{4}(2 \cdot 2) = 1.$$

Also projiziert P auf einen eindimensionalen Teilraum, d.h. $P = (\varphi, \cdot)\varphi$ mit $\|\varphi\| = 1$.

Lemma 2.9. *Es gilt $P \cdot U \otimes U = U \otimes U \cdot P$ für alle $U \in SU(2)$, d.h. der Projektor P reduziert die Darstellung, es gibt einen eindimensionalen invarianten Teilraum.*

Beweis. Wir brauchen nur die Produkte $E_j \otimes E_j \cdot \sigma_k \otimes \sigma_k$ und $\sigma_k \otimes \sigma_k \cdot E_j \otimes E_j$ auszurechnen und zu vergleichen. Für $E_1 = \sigma_3$ erhalten wir z.B.

$$\sigma_3 \otimes \sigma_3 \cdot \begin{cases} \sigma_1 \otimes \sigma_1 \\ \sigma_2 \otimes \sigma_2 \\ \sigma_3 \otimes \sigma_3 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_3\sigma_1 \otimes \sigma_3\sigma_1 \\ \sigma_3\sigma_2 \otimes \sigma_3\sigma_2 \\ \sigma_3\sigma_3 \otimes \sigma_3\sigma_3 \end{cases} = \begin{cases} -\sigma_2 \otimes \sigma_2 \\ -\sigma_1 \otimes \sigma_1 \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{cases}$$

und

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\otimes\sigma_1\\ \sigma_2\otimes\sigma_2\\ \sigma_3\otimes\sigma_3\end{matrix}\right\}\cdot\sigma_3\otimes\sigma_3=\begin{cases}\sigma_1\sigma_3\otimes\sigma_1\sigma_3\\ \sigma_2\sigma_3\otimes\sigma_2\sigma_3\\ \sigma_3\sigma_3\otimes\sigma_3\sigma_3\end{cases}=\begin{cases}-\sigma_2\otimes\sigma_2\\ -\sigma_1\otimes\sigma_1\\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\end{cases}.$$

Also gilt $E_1\otimes E_1\cdot\sum_{j=1}^3\sigma_j\otimes\sigma_j=\sum_{j=1}^3\sigma_j\otimes\sigma_j\cdot E_1\otimes E_1$. Entsprechendes kann für E_2 und E_3 gezeigt werden. □

P definiert einen reinen Zustand über $\mathcal{H}$. Der Mittelwert einer Observablen A in diesem Zustand berechnen sich gemäß

$$\operatorname{tr}AP=(\varphi,A\varphi).$$

Über dem „Einteilchenraum“ $\mathbb{C}^2$ ist durch

$$A_{0,\vec\alpha}=\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2+\alpha_3\sigma_3=:A_{\vec\alpha},\qquad|\vec\alpha|=1$$

eine ausgezeichnete Observable gegeben. Sie entspricht physikalisch der Observablen, die den Spin in Richtung $\vec\alpha$ kennzeichnet. Im Zweiteilchenraum $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ haben wir dementsprechend die Observable

$$A_{\vec\alpha}\otimes A_{\vec\beta},\qquad|\vec\alpha|=|\vec\beta|=1.$$

Physikalisch ist hier der Spin des ersten Teilchens in Richtung $\vec\alpha$, der des zweiten Teilchens in Richtung $\vec\beta$ ausgerichtet. Wir wollen jetzt den Mittelwert dieser Observablen im Zustand P berechnen:

Lemma 2.10. $\operatorname{tr}((A_{\vec\alpha}\otimes A_{\vec\beta})P)=-(\vec\alpha,\vec\beta)$.

Beweis. Unter Verwendung von $\operatorname{tr}\sigma_j=0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((A_{\vec\alpha}\otimes A_{\vec\beta})P)&=\operatorname{tr}\Big(\sum_{i=1}^3\alpha_i\sigma_i\otimes\sum_{j=1}^3\beta_j\sigma_j\cdot\frac14\Big(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}-\sum_{k=1}^3\sigma_k\otimes\sigma_k\Big)\Big)\\&=\frac14\operatorname{tr}\Big(\sum_{i,j=1}^3\alpha_i\beta_j\sigma_i\otimes\sigma_j\Big(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}-\sum_{k=1}^3\sigma_k\otimes\sigma_k\Big)\Big)\\&=\frac14\operatorname{tr}\Big(\sum_{i,j=1}^3\alpha_i\beta_j\sigma_i\otimes\sigma_j-\sum_{i,j,k=1}^3\alpha_i\beta_j\sigma_i\sigma_k\otimes\sigma_j\sigma_k\Big)\\&=-\frac14\sum_{i,j,k=1}^3\alpha_i\beta_j\operatorname{tr}(\sigma_i\sigma_k)\operatorname{tr}(\sigma_j\sigma_k)\\&=-\frac14\sum_{j=1}^3\alpha_j\beta_j\operatorname{tr}\sigma_j^2\operatorname{tr}\sigma_j^2\\&=-\frac14\sum_{j=1}^3\alpha_j\beta_j2\cdot2=-\sum_{j=1}^3\alpha_j\beta_j\\&=-(\vec\alpha,\vec\beta)\end{aligned}$$

□

Als interessante Folgerung erhalten wir

$$\mathrm{tr}((A_{\vec{\alpha}} \otimes A_{\vec{\alpha}})P) = -1.$$

Damit erweist sich der Zustand P (gegeben durch den Einheitsvektor φ) als ein Zustand mit einer „räumlichen“ Isotropieeigenschaft, nämlich:

Bemerkung. Die Spins zweier Teilchen im Zustand P sind für jede gemeinsame Richtung $\vec{\alpha}$ antiparallel.

Nun kann das No–Go–Theorem über die Unmöglichkeit der klassischen Interpretation eines vierdimensionalen quantenmechanischen Systems bewiesen werden:

Beweis des Theorems 2.8. Wir nehmen an, es gäbe eine klassische Interpretation im Sinne von Definition 2.5 für die vierdimensionale Quantenmechanik, also es existiere eine geeignete Bijektion

$$\{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{M}\} \leftrightarrow \{\mathbb{C}^4, \mathcal{A}, \mathcal{S}\},$$

wobei $\mathcal{S}$ *alle* Dichtematrizen umfasst. Dann gibt es die drei Zuordnungen

$$\begin{aligned} A_{\vec{\alpha}} \otimes \mathbf{1} &\mapsto f_{\vec{\alpha}}(\cdot) \\ \mathbf{1} \otimes A_{\vec{\beta}} &\mapsto g_{\vec{\beta}}(\cdot) \\ P &\mapsto \mu_P(\cdot). \end{aligned}$$

Die Borelfunktion $f_{\vec{\alpha}}$ bezieht sich auf die erste Komponente des Tensorprodukts („Teilchen 1“), $g_{\vec{\beta}}$ auf die zweite Komponente („Teilchen 2“). μ_P ist ein normiertes Maß auf Γ. Da $A_{\vec{\alpha}} \otimes \mathbf{1}$ und $\mathbf{1} \otimes A_{\vec{\beta}}$ vertauschen, gilt dann auch

$$A_{\vec{\alpha}} \otimes A_{\vec{\beta}} = (A_{\vec{\alpha}} \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes A_{\vec{\beta}}) \mapsto f_{\vec{\alpha}}(\cdot) g_{\vec{\beta}}(\cdot).$$

Wir setzen $E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} := \mathrm{tr}((A_{\vec{\alpha}} \otimes A_{\vec{\beta}})P)$. Dann muß aber gelten

$$E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = \int_\Gamma f_{\vec{\alpha}}(\lambda) g_{\vec{\beta}}(\lambda)\, \mu_P(d\lambda)$$

und insbesondere

$$-1 = E_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}} = \int_\Gamma f_{\vec{\alpha}}(\lambda) g_{\vec{\alpha}}(\lambda)\, \mu_P(d\lambda).$$

Da das Maß μ_P normiert ist, d.h.

$$\int_\Gamma \mu_P(d\lambda) = 1,$$

erhalten wir

$$\int_\Gamma (1 + f_{\vec{\alpha}}(\lambda) g_{\vec{\alpha}}(\lambda))\, \mu_P(d\lambda) = 0. \tag{2.12}$$

Nun ist ja $A_{\vec{\alpha}}^2 = \mathbf{1}$, also $f_{\vec{\alpha}}^2 = 1$ für alle $\lambda \in \Gamma$, d.h. $f_{\vec{\alpha}}(\lambda) = \pm 1$ und entsprechend $g_{\vec{\alpha}}(\lambda) = \mp 1$. Hieraus folgt

$$1 + f_{\vec{\alpha}}(\lambda) g_{\vec{\alpha}}(\lambda) \geq 0 \tag{2.13}$$

und mit (2.12)

$$f_{\vec{\alpha}}(\lambda) g_{\vec{\alpha}}(\lambda) = -1$$

fast überall bezüglich μ_P.

Nun folgt eine einfache Abschätzung, die direkt zur sogenannten Bellschen Ungleichung führt. Wir betrachten die Differenz $E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} - E_{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}$:

$$\begin{aligned}
|E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} - E_{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}| &= \left| \int_\Gamma f_{\vec{\alpha}}(\lambda)(g_{\vec{\beta}}(\lambda) - g_{\vec{\gamma}}(\lambda))\, \mu_P(d\lambda) \right| \\
&\leq \int_\Gamma |g_{\vec{\beta}}(\lambda) - g_{\vec{\gamma}}(\lambda)|\, \mu_P(d\lambda) \\
&= \int_\Gamma |f_{\vec{\beta}}(\lambda)| \cdot |g_{\vec{\beta}}(\lambda) - g_{\vec{\gamma}}(\lambda)|\, \mu_P(d\lambda) \\
&= \int_\Gamma |f_{\vec{\beta}} g_{\vec{\beta}}(\lambda) - f_{\vec{\beta}} g_{\vec{\gamma}}(\lambda)|\, \mu_P(d\lambda) \\
&= \int_\Gamma |-1 - f_{\vec{\beta}} g_{\vec{\gamma}}(\lambda)|\, \mu_P(d\lambda) \\
&= \int_\Gamma (1 + f_{\vec{\beta}} g_{\vec{\gamma}}(\lambda))\, \mu_P(d\lambda) \\
&= 1 + E_{\vec{\beta},\vec{\gamma}}
\end{aligned}$$

Also gilt für beliebige Richtungen $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ($|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$)

$$|E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} - E_{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}| \leq 1 + E_{\vec{\beta},\vec{\gamma}}. \tag{2.14}$$

Das ist die Bellsche Ungleichung. Wir wählen jetzt $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ so, daß sie in einer Ebene liegen, und $\vec{\alpha}$ mit $\vec{\beta}$ sowie $\vec{\beta}$ mit $\vec{\gamma}$ jeweils einen Winkel von 60° einschließen. Dann gilt

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = (\vec{\beta},\vec{\gamma}) = \frac{1}{2}, \qquad (\vec{\alpha},\vec{\gamma}) = -\frac{1}{2}$$

und, nach Lemma 2.10,

$$E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = E_{\vec{\beta},\vec{\gamma}} = -\frac{1}{2}, \qquad E_{\vec{\alpha},\vec{\gamma}} = \frac{1}{2}.$$

Es gilt also

$$|E_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} - E_{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}| = 1,$$

und

$$1 + E_{\vec{\beta},\vec{\gamma}} = \frac{1}{2}.$$

Also wird die Bellsche Ungleichung (2.14) nicht erfüllt. Die Annahme der Existenz einer klassischen Interpretation führt also zum Widerspruch. □

Bemerkung. Der Unmöglichkeitsbeweis gilt auch für höherdimensionale Quantensysteme, denn für $\mathcal{H} \cong \mathcal{K} \oplus \mathbb{C}^4$ kann man das Ergebnis auf den Teilraum $\mathbb{C}^4$ anwenden.

Die Unmöglichkeit der klassichen Interpretation gilt schon für $\dim \mathcal{H} = 3$, der Beweis ist jedoch sehr langwierig. Er findet sich in [10].

Anhang zum Einstein–Podolsky–Rosen Paradoxon

Der ausgezeichnete Zustand ist

$$P = \frac{1}{4}\Big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \otimes \sigma_j\Big).$$

mit $P^2 = P = P^*$ und $\dim P = 1$. Ein normierter Vektor φ mit $P\varphi = \varphi$ ist z.B.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

der ausgezeichnete Zustand wird also durch diesen Vektor beschrieben. Nun werde der Spin von Teilchen 1 gemessen, sagen wir, mit dem Ergebnis „Spin in Richtung $\vec{\alpha}$ gleich $+1$“. Es ist bekanntlich

$$A_{\vec{\alpha}} = P_+ - P_-, \qquad P_+ = \underbrace{\frac{1}{2}(1 + \vec{\alpha}\vec{\sigma})}_{\hat{=}\ \text{Spin}=+1}, \qquad P_- = \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \vec{\alpha}\vec{\sigma})}_{\hat{=}\ \text{Spin}=-1}.$$

Nach dem Prinzip der „Reduktion des Wellenpakets“ ist der Zustand nach der Messung die Normierung von

$$(P_+ \otimes \mathbf{1})\varphi =: \psi,$$

also $\psi/\|\psi\|$. Nun gilt folgendes

Lemma 2.11. *Der Vektor ψ ist ein Eigenvektor der Observablen $\mathbf{1} \otimes P_-$ zum Eigenwert* 1*, d.h.*

$$(\mathbf{1} \otimes P_-)\psi = \psi.$$

Dies ist gleichbedeutend damit, daß im Zustand ψ der Spin in Richtung $\vec{\alpha}$ mit Sicherheit den Wert -1 bzw. in Richtung $-\vec{\alpha}$ den Wert 1 besitzt. Die Messung vom Spin des Teilchens 1 (was eigentlich eine Messung am Gesamtsystem ist) liefert einen Zustand, in dem auch Teilchen 2 in Richtung $\vec{\alpha}$ einen fixierten Spinwert — den entgegengesetzten — hat.

Beweis. Es ist $(\mathbf{1} \otimes P_-)\psi = \psi$ äquivalent mit $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes P_-)\psi = 0$, also $\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} - P_-)\psi = 0$ und es gilt

$$1 - P_- = \frac{1}{2}(1 + \vec{\alpha}\vec{\sigma}) = P_+.$$

Wegen

$$(\mathbf{1} \otimes P_+)\psi = (\mathbf{1} \otimes P_+)(P_+ \otimes \mathbf{1})\varphi = (P_+ \otimes P_+)\varphi$$

muß $(P_+ \otimes P_+)\varphi = 0$ gezeigt werden. Es wird, wenn wir die Faktoren $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ weglassen,

$$\begin{aligned}
&(1 + \vec{\alpha}\vec{\sigma}) \otimes (1 + \vec{\alpha}\vec{\sigma})\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= (1 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes (1 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} -\\
&\quad - (1 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes (1 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \otimes
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\otimes \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - \\
&- \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \otimes \\
&\otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
= &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \{(1+\alpha_3)(1-\alpha_3) + (-\alpha_1 + i\alpha_2)(\alpha_1 + i\alpha_2)\} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \{(\alpha_1 + i\alpha_2)(1-\alpha_3) + (-1+\alpha_3)(\alpha_1 + i\alpha_2)\} + \\
&\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \{(1+\alpha_3)(\alpha_1 - i\alpha_2) + (-\alpha_1 + i\alpha_2)(1+\alpha_3)\} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \{(\alpha_1 + i\alpha_2)(\alpha_1 - i\alpha_2) + (-1+\alpha_3)(1+\alpha_3)\} \\
= &\, 0
\end{aligned}
$$

□

Kapitel 3

Das No–Go–Theorem von J. v. Neumann

3.1 Spuroperatoren, ultraschwach stetige Linearformen

Im Zusammenhang mit dem No–Go–Theorem von J. v. Neumann könnte es erforderlich sein, einiges aus der diesbezüglichen Hilbertraum–Theorie nachzutragen. Vorausgesetzt wird die Kenntnis der kompakten Operatoren, der s–Zahlen kompakter Operatoren (die Eigenwerte $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \ldots$ von $|A| := (A^*A)^{1/2}$), die „Schmidt–Darstellung“ kompakter Operatoren:

Lemma 3.1. *Die Schmidt–Reihe*

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, \cdot)\psi_j \tag{3.1}$$

mit Orthonormalsystemen $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$, konvergiert für kompakte Operatoren in der Operatornormtopologie.

Die Operatornormtopologie wird auch als *gleichmäßige* Operatortopologie bezeichnet. Die Menge der kompakten Operatoren wird mit $\mathcal{L}_\infty$ bezeichnet.

Nun soll die Spur nichtnegativer Operatoren definiert werden:

Definition 3.2. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$ (d.h. $(x, Ax) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$) und $e_1, e_2, e_3, \ldots$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ (es werden nur seperable Hilberträume betrachtet). Dann ist die Spur*

$$\operatorname{tr} A := \sum_{j=1}^{\infty} (e_j, Ae_j)$$

entweder konvergent ($< \infty$) oder divergent ($= \infty$).

Lemma 3.3. $\operatorname{tr} A$ *ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.*

Beweis. Seien (e_j), (f_σ) zwei Orthonormalbasen in $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} (e_j, Ae_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (A^{1/2}e_j, A^{1/2}e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \|A^{1/2}e_j\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} |(f_\sigma, A^{1/2} e_j)|^2 \right) \\
&= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(f_\sigma, A^{1/2} e_j)|^2 \right) \\
&= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(A^{1/2} f_\sigma, e_j)|^2 \right) \\
&= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \|A^{1/2} f_\sigma\|^2 \\
&= \sum_{\sigma=1}^{\infty} (f_\sigma, A f_\sigma)
\end{aligned}
$$

□

Im folgenden Lemma sind einige Eigenschaften der Spur zusammengefaßt:

Lemma 3.4. (i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *für* $A, B \geq 0$,

(ii) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$ *für* $\lambda \geq 0$ *und* $A \geq 0$,

(iii) *Aus* $0 \leq A \leq B$ *folgt* $\operatorname{tr} A \leq \operatorname{tr} B$.

(iv) $\operatorname{tr} UAU^{-1} = \operatorname{tr} A$ *für* $A \geq 0$, U *unitär;* $\operatorname{tr} V^* AV \leq \operatorname{tr} A$ *wenn* V *partiell isometrisch ist,*

(v) $\operatorname{tr}|A+B| \leq \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B|$ *für* $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

(vi) $\operatorname{tr}|\lambda A| = |\lambda| \operatorname{tr}|A|$ *für* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

(vii) *Aus* $\operatorname{tr}|A| = 0$ *folgt* $A = 0$,

(viii) *Für* $A \in \mathcal{L}_\infty$ *ist* $\operatorname{tr}|A| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)$.

Beweis. Die Eigenschaften (i), (ii), (iii) und (vi) folgen unmittelbar aus der Definition der Spur. Ansonsten gilt:

(iv) Sei (f_n) eine Orthonormalbasis, die die von Null verschiedenen Elemente Ve_n umfaßt. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr} V^* AV &= \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, V^* AV e_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (Ve_n, AVe_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, Af_n) = \operatorname{tr} A
\end{aligned}
$$

Ist U unitär, so ist mit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(Ue_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis und es gilt $\operatorname{tr} UAU^{-1} = \operatorname{tr} A$.

(v) Wir betrachten die Polarzerlegungen von A, B und $A+B$:

$$A+B = \underbrace{\operatorname{sgn}(A+B)}_{=:U}|A+B|, \quad A = \underbrace{\operatorname{sgn} A}_{=:V}|A|, \quad B = \underbrace{\operatorname{sgn} B}_{=:W}|B|$$

und beachten

$$A = \operatorname{sgn} A \cdot |A| \Rightarrow |A| = (\operatorname{sgn} A)^* A.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}|A+B| &= \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, |A+B|e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*(A+B)e_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*Ae_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*Be_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*V|A|e_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*W|B|e_n)
\end{aligned}$$

Der erste Summand läßt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*V|A|e_n)| &\le |\sum_{n=1}^{\infty}(|A|^{\frac{1}{2}}V^*Ue_n, |A|^{\frac{1}{2}}e_n)| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{\frac{1}{2}}V^*Ue_n\| \cdot \||A|^{\frac{1}{2}}e_n\| \\
&\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{\frac{1}{2}}V^*Ue_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, U^*V|A|V^*Ue_n)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, |A|e_n)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{(iv)}}{\le} (\operatorname{tr}|A|)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{tr}|A|)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tr}|A|
\end{aligned}$$

Mit der analogen Abschätzung für den zweiten Summanden erhalten wir die Behauptung.

(vii) Aus $\operatorname{tr}|A| = 0$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, |A|e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 = 0$$

und damit $|A|^{\frac{1}{2}} = 0$. Folglich ist $Ae_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $A = 0$.

(vii) Die Zahlen $s_n(A)$ sind Eigenwerte von $|A|$. Wir wählen ein Orthonormalsystem $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, bestehend aus Eigenvektoren von $|A|$. und erhalten

$$\operatorname{tr}|A| = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, |A|e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}s_n(A).$$

□

Definition 3.5. *Der Raum der Spuroperatoren ist*

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \ \mathrm{tr}\,|A| < \infty\}.$$

Lemma 3.6. *Jeder Spuroperator ist kompakt, d.h.* $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_\infty$.

Beweis. Wenn $A \in \mathcal{L}_1$ist, d.h. $|A| \in \mathcal{L}_1$, so ist auch $|A|^2 \in \mathcal{L}_1$, denn

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, |A|^2 e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \||A|e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \||A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 \\ \leq \||A|^{\frac{1}{2}}\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \||A|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 \\ = \||A|^{\frac{1}{2}}\|^2 \,\mathrm{tr}\,|A| < \infty\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{tr}\,|A|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, |A|^2 e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, A^*Ae_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, Ae_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|^2.$$

Wir betrachten

$$A_N := \sum_{n=1}^{N}(e_n, \cdot)Ae_n \in \mathcal{L}_{\mathrm{fin}}, \tag{3.2}$$

wobei $\mathcal{L}_{\mathrm{fin}}$ der Raum der endlichdimensionalen Operatoren ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|A - A_N\| = \sup_{\|f\|=1}\|Af - A_Nf\| = \sup_{\|f\|=1}\| \sum_{n=N+1}^{\infty}(e_n, f)Ae_n\| \\ \leq \sup_{\|f\|=1} \sum_{n=N+1}^{\infty} |(e_n, f)|\|Ae_n\| \\ \leq \sup_{\|f\|=1} \underbrace{\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |(e_n, f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|f\|^2} \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|Ae_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|Ae_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } N \to \infty.\end{aligned}$$

A ist damit Grenzwert (bzgl. der Operatornorm) einer Folge endlich–dimensionaler Operatoren, also kompakt. □

Folgerung 3.7. *Sei* $A \in \mathcal{L}_\infty$. *Dann ist* $A \in \mathcal{L}_1$ *genau dann, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty$$

ist.

Lemma 3.8. $\|A\|_1 := \mathrm{tr}\,|A|$ *ist eine Norm (die Spurnorm) und es gilt* $\|A\| \leq \|A\|_1$.

Beweis. Daß $\|\cdot\|_1$ eine Norm ist, folgt aus den Spureigenschaften (v), (vi) und (vii) von Lemma 3.4. Von Interesse ist nur der Fall $\operatorname{tr}|A| < \infty$. Es ist

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \||A|^2\|$$

und somit

$$\|A\| = \||A|^2\|^{\frac{1}{2}} = \||A|\|.$$

Weil $\operatorname{tr}|A| < \infty$ ist, wissen wir $|A| \in \mathcal{L}_\infty$ ist selbstadjungiert mit Eigenwerten $s_n(A) > 0$. $s_1(A)$ ist die maximale s–Zahl, also ist sie gleich dem Spektralradius $\operatorname{spr}|A|$:

$$s_1(A) = \operatorname{spr}|A| = \||A|\| = \|A\|.$$

Wegen $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)$ ist dann offensichtlich $\|A\| \leq \|A\|_1$. □

Lemma 3.9. *Die Schmidt–Reihe* (3.1) *ist für Spuroperatoren bezüglich der Spurnorm* $\|\cdot\|_1$ *konvergent.*

Beweis. Sei

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} (e_n, \cdot) A e_n,$$

wobei wir als Orthonormalbasis $\{e_n\}$ eine solche wählen, die aus zu A^*A gehörenden Eigenvektoren (und gegebenenfalls weiteren Elementen) besteht. Dann haben wir mit (3.1):

$$A - A_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (e_n, \cdot) A e_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} s_n(A)(e_n, \cdot)\frac{A e_n}{s_n(A)}$$

und es gilt

$$(A - A_N)^* = \sum_{n=N+1}^{\infty} (A e_n, \cdot) e_n.$$

Wir haben schließlich

$$(A - A_N)^*(A - A_N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} (e_n, \cdot)\|A e_n\|^2 e_n.$$

Mit

$$\|A e_n\|^2 = (A e_n, A e_n) = (e_n, A^* A e_n) = s_n(A)^2$$

ist dann

$$((A - A_N)^*(A - A_N))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} (e_n, \cdot) s_n(A) e_n$$

und

$$\|A - A_N\|_1 = \operatorname{tr}((A - A_N)^*(A - A_N))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} s_n(A) \to 0.$$

Die Schmidt–Reihe ist also für Spuroperatoren in der Spurnorm konvergent. □

Lemma 3.10. *Wenn* $A \in \mathcal{L}_1$ *ist, so auch* $A^* \in \mathcal{L}_1$ *und es gilt*

$$\|A\|_1 = \|A^*\|_1.$$

Beweis. Die (von Null verschiedenen) Eigenwerte von A^*A und AA^* stimmen überein, und folglich auch die s–Zahlen von A und A^*. Damit folgt

$$\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A^*) = \|A^*\|_1 .$$

Daraus folgt auch $A^* \in \mathcal{L}_1$. □

Nun soll der Spurbegriff in ganz $\mathcal{L}_1$ eingeführt werden.

Lemma 3.11. *Wenn $A \in \mathcal{L}_1$ ist, so ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f_n, Af_n)| < \infty$$

für eine beiliebige Orthonormalbasis (f_n) und

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, Af_n)$$

ist unabhängig von der gewählten Basis.

Beweis. Wir gehen von der Schmidt–Darstellung (3.1) eines kompakten Operators A aus:

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, \cdot)\psi_j$$

Nach Lemma 3.9 konvergiert die Reihe in der $\|\cdot\|_1$–Norm. Es ist

$$|(f_n, Af_n)| = |\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, f_n)(f_n, \psi_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)|(\varphi_j, f_n)| \cdot |(f_n, \psi_i)|$$

und wir werden sogleich zeigen, daß

$$\sum_{n,j} s_j(A)|(\varphi_j, f_n)| \cdot |(f_n, \psi_i)| < \infty \tag{3.3}$$

ist, also konvergiert. Dann können wir die Summationsreihenfolge, z.B. in

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, Af_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n, (\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, f_n))\psi_j\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, f_n)(f_n, \psi_j) \end{aligned} \tag{3.4}$$

vertauschen. Unter Verwendung der Cauchyschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sum_{n,j} s_j(A)|(\varphi_j, f_n)| \cdot |(f_n, \psi_i)| \\ &= \sum_{n,j} s_j^{\frac{1}{2}}(A)|(\varphi_j, f_n)| \cdot s_j^{\frac{1}{2}}|(f_n, \psi_i)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \Big(\sum_{n,j} s_j(A)|(\varphi_j, f_n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n,j} s_j(A)|(f_n, \psi_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \Big(\sum_{n,j} s_j(A) \underbrace{\sum_{n,j} |(\varphi_j, f_n)|^2}_{\le \|\varphi_j\|^2 = 1}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n,j} s_j(A) \underbrace{\sum_{n,j} |(f_n, \psi_j)|^2}_{\le \|\psi_j\|^2 = 1}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \Big(\sum_{n,j} s_j(A)\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n,j} s_j(A)\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

Damit ist die absolute Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, Af_n)$$

und sogar von (3.3) gezeigt. Jetzt kann die Summation in (3.4) vertauscht werden, es ist also

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, Af_n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, f_n)(f_n, \psi_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\varphi_j, \psi_j).
\end{aligned}$$

Es ist deutlich zu sehen, daß die Basisabhängigkeit aus der Formel herausgefallen ist. □

Dieses Ergebnis ermöglicht folgende

Definition 3.12. *Für $A \in \mathcal{L}_1$ definiert man die Spur vermöge*

$$\operatorname{tr} A := \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, Af_n)$$

für eine Orthonormalbasis f_n.

Als Nebenergebnis haben wir

$$|\operatorname{tr} A| \le \|A\|_1 \qquad (A \in \mathcal{L}_1),$$

denn es gilt

$$|\operatorname{tr} A| = \Big|\sum s_j(A)(\varphi_j, \psi_j)\Big| \le \sum s_j(A) = \|A\|_1.$$

Demnach ist $\operatorname{tr} A$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_1$. Außerdem gilt für alle $A \in \mathcal{L}_1$

$$\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}. \tag{3.5}$$

Weil trivialerweise $\operatorname{tr} A$ linear in A ist, folgt daß die Abbildung $A \mapsto \operatorname{tr} A$ eine stetige Linearform auf $\mathcal{L}_1$ ist.

Lemma 3.13. *$\mathcal{L}_1$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1$, also ein Banachraum.*

Beweis. Sei $T_n \in \mathcal{L}_1$ eine Cauchyfolge, d.h. $\|T_n - T_m\|_1 \to 0$ für $n, m \to 0$. Zu zeigen ist, daß dann ein $T \in \mathcal{L}_1$ mit $\|T_n - T\|_1 \to 0$ existiert. Nach Lemma 3.8 gilt $\|T\| \leq \|T\|_1$, also folgt

$$\|T_n - T_m\| \to 0.$$

Da $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_\infty$ und $\mathcal{L}_\infty$ bezüglich $\|\cdot\|$ vollständig ist, existiert ein kompaktex $T \in \mathcal{L}_\infty$ mit $\|T_n - T\| \to 0$.

Jetzt benutzen wir die Tatsache, daß die k–ten s–Zahlen von T_n gegen die k–ten s–Zahlen von T konvergieren, weil

$$|s_k(T_1) - s_k(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\|, \qquad T_1, T_2 \in \mathcal{L}_\infty. \tag{3.6}$$

Um nicht zu viel von der Theorie kompakter Operatoren rekapitulieren zu müssen, verwenden wir zum Beweis dieser Gleichung folgendes

Lemma 3.14. *Es ist für $A \in \mathcal{L}_\infty$*

$$s_{n+1}(A) = \min_{K \in \mathcal{L}_n} \|A - K\| \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

wobei $\mathcal{L}_n$ der Raum der endlichdimensionalen Operatoren mit Dimension $\leq n$ ist. (Für $\mathcal{L}_0 := \{0\}$ gilt die Gleichung wegen $s_1(A) = \|A\|$.)

Mit diesem Lemma können wir (3.6) leicht zeigen. Für $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_\infty$ gilt

$$\begin{aligned} s_{n+1}(T_1) &= \min_{K \in \mathcal{L}_n} \|T_1 - K\| \\ &= \min_{K \in \mathcal{L}_n} \|T_2 - K + T_1 - T_2\| \\ &\leq \min_{K \in \mathcal{L}_n} \|T_2 - K\| + \|T_1 - T_2\| \\ &\leq s_{n+1}(T_2) + \|T_1 - T_2\| \end{aligned}$$

Aus (3.6) folgt für unsere Zwecke:

$$\lim_{m \to \infty} s_k(T_n - T_m) = s_k(T_n - T)$$

für alle k und n. Hieraus wiederum:

$$\sum_{k=1}^{N} s_k(T_n - T) \leq \limsup_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{N} s_k(T_n - T_m) \leq \limsup_{m \to \infty} \|T_n - T_m\|_1.$$

Im Grenzwert $N \to \infty$ erhalten wir

$$\|T_n - T\|_1 \leq \limsup_{m \to \infty} \|T_n - T_m\|_1$$

und somit

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n - T\|_1 \leq \lim_{m,n \to \infty} \|T_n - T_m\|_1 = 0.$$

□

3.2 Hilbert–Schmidt Operatoren

Um noch weitere Eigenschaften von $\mathcal{L}_1$ herauszudiskutieren, machen wir noch einen Exkurs über die Hilbert–Schmidt–Operatoren.

Definition 3.15. *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt Hilbert–Schmidt–Operator, falls*

$$\operatorname{tr} A^*A = \operatorname{tr}|A|^2 < \infty$$

gilt. Die Klasse der Hilbert–Schmidt–Operatoren wird mit $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ bezeichnet. Für einen Operator $A \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ nennt man

$$\|A\|_2 := (\operatorname{tr} A^*A)^{\frac{1}{2}} = (\operatorname{tr}|A|^2)^{\frac{1}{2}}$$

die Hilbert–Schmidt Norm von A.

$\|A\|_2$ kann sofort umgeformt werden zu

$$\|A\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

für eine beliebige Orthonormalbasis $\{\varphi_n\}$, denn mit Orthonormalbasen $\{e_n\}$, $\{\varphi_j\}$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A^*A &= \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, A^*Ae_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|(\varphi_j, Ae_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|(A^*\varphi_j, e_n)|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\|A^*\varphi_j\|^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch gleich

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

Lemma 3.16. *Für $A \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$, $B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt*

$$\|AC\|_2 \le \|A\|_2\|C\|, \qquad \|CA\|_2 \le \|C\|\|A\|_2,$$

und zusammen

$$\|BAC\|_2 \le \|B\| \cdot \|A\|_2 \cdot \|C\|. \tag{3.7}$$

Beweis.

$$\|CA\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|CA\varphi_n\|^2 \le \|C\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|A\varphi_n\| = \|C\|^2\|A\|_2^2$$
$$\|AC\|_2^2 = \|(AC)^*\|_2^2 = \|C^*A^*\|_2^2 \le \|C^*\|\|A^*\|_2^2 = \|C\|\|A\|_2^2$$

□

Gleichung (3.7) kann so gelesen werde, daß wenn $A \in \mathcal{L}_2$ ist, so ist auch $BAC \in \mathcal{L}_2$ für beliebige $B, C \in \mathcal{L}$. Also ist $\mathcal{L}_2$ ein zweiseitiges Ideal und ein $*$–Ideal.

Lemma 3.17. *Die Hilbert–Schmidt Operatoren sind kompakt, d.h.* $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_\infty$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}_2$. Dann ist $\operatorname{tr} A^*A < \infty$ und somit $|A|^2 \in \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_\infty$. Es ist $|A| \in \mathcal{L}_\infty$, denn es gilt $s_n(|A|^2) = \lambda_n(|A|^2)$ (λ_n sind Eigenwerte) und $s_n(|A|) = (s_n(|A|^2))^{1/2}$. Man hat

$$\|A\| \le \|A\|_2 \le \|A\|_1,$$

denn

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tr}|A|^2)^{\frac{1}{2}} \le \operatorname{tr}|A| \\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{tr}|A|^2 \le (\operatorname{tr}|A|)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ &\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)^2 \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)\Big)^2. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.18. *Wenn* $A, B \in \mathcal{L}_2$ *ist, so ist* $AB \in \mathcal{L}_1$ *und*

$$\|AB\|_1 \le \|A\|_2 \|B\|_2.$$

Beweis. Mit Orthonormalsystemen φ_ρ, ψ_ρ und s–Zahlen s_ρ lautet die Schmidt–Darstellung von AB:

$$AB = \sum_\rho s_\rho(AB)(\varphi_\rho, \cdot)\psi_\rho.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_\rho s_\rho(AB) = \sum_\rho (\psi_\rho, AB\varphi_\rho) = \sum_\rho (A^*\psi_\rho, B\varphi_\rho) \\ &\le \sum_\rho \|A^*\psi_\rho\| \cdot \|B\varphi_\rho\| \le \Big(\sum_\rho \|A^*\psi_\rho\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_\rho \|B\varphi_\rho\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|A^*\|_2 \|B\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2. \end{aligned}$$

Die Endlichkeit der Zahl $\|AB\|_1$ wird durch diese Abschätzung bewiesen. Wegen $\|A\|_2 \le \|A\|_1$ folgt auch noch

$$\|AB\|_2 \le \|A\|_2 \|B\|_2.$$

□

Lemma 3.19. $\mathcal{L}_2$ *mit dem Skalarprodukt* $(A, B) := \operatorname{tr} A^*B$ *ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Die Zahl $\operatorname{tr} A^*B$ ist endlich, weil $A^*B \in \mathcal{L}_1$ ist. Die Eigenschaften des Skalarprodukts müssen noch überprüft werden:

(i) Wegen der Linearität der Spur ist (A, B) linear in B.

(ii) Mit (3.5) gilt $(A, B) = \overline{(B, A)}$.

(iii) Es ist $(A, A) \ge 0$ und $(A, A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$, denn es gilt

$$\operatorname{tr} A^*A = 0 \Leftrightarrow \sum \|A\varphi_n\|^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Damit ist auch gezeigt, daß $\|\cdot\|_2$ eine Norm ist. $\mathcal{L}_2$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_2$, den Beweis lassen wir hier jedoch weg. □

Lemma 3.20. *$\mathcal{L}_1$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mit $A \in \mathcal{L}_1$ und beliebigem $B \in \mathcal{L}$ gilt $BA, AB \in \mathcal{L}_1$ und*

$$\begin{aligned}\|BA\|_1 &\leq \|B\| \cdot \|A\|_1\\ \|AB\|_1 &\leq \|A\|_1 \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

Beweis. Wir nutzen die Polarzerlegung $A = \operatorname{sgn} A \cdot |A|$ aus:

$$BA = B \operatorname{sgn} A \cdot |A| = B \operatorname{sgn} A \cdot |A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}.$$

Wir wissen, daß $|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2$ ist, denn es gilt $\operatorname{tr}((|A|^{\frac{1}{2}})^2) = \operatorname{tr}|A| < \infty$. Nach Lemma 3.16 ist dann auch

$$B \operatorname{sgn} A|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2$$

und

$$\begin{aligned}\|BA\|_1 &\leq \|B \operatorname{sgn} A|A|^{\frac{1}{2}}\|_2 \cdot \||A|^{\frac{1}{2}}\|_2\\ &\leq \|B \operatorname{sgn} A\| \cdot \||A|^{\frac{1}{2}}\|_2^2\\ &\leq \|B\| \cdot \|A\|_1,\end{aligned}$$

da $\|\operatorname{sgn} A\|$ als Norm eines partiell isometrischen Operators gleich 1 ist. Weiter haben wir

$$\|AB\|_1 = \|(AB)^*\|_1 = \|B^*A^*\|_1 \leq \|B^*\| \cdot \|A^*\|_1 = \|B\| \cdot \|A\|_1.$$

□

Analog zu Lemma 3.16 ist für $A \in \mathcal{L}_1$, $B, C \in \mathcal{L}$ auch $BAC \in \mathcal{L}_1$ und

$$\|BAC\|_1 \leq \|B\| \cdot \|A\|_1 \cdot \|C\|.$$

Die Spur ist auf $\mathcal{L}_1$ „kommutativ“:

Lemma 3.21. *Wenn $B \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{L}_\infty$ und $AB, BA \in \mathcal{L}_1$ ist, so gilt*

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA.$$

Beweis. Für $A \in \mathcal{L}_\infty$ haben wir die Schmidt–Darstellung

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)(\varphi_n, \cdot)\psi_n$$

mit Orthonormalsystemen $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$. Daraus folgt

$$BA = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)(\varphi_n, \cdot)B\psi_n$$

und

$$\operatorname{tr} BA = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n, BA\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)(\varphi_n, B\psi_n),$$

wobei wir φ_n zu einer Orthonormalbasis ergänzen, auf der Ergänzung ist jedoch $A = 0$. Ebenfalls haben wir

$$AB = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)(B^*\varphi_n, \cdot)\psi_n$$

und

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n, AB\psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)(B^*\varphi_n, \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)(\varphi_n, B\psi_n).$$

Auch hier wurde ψ_n zu einer Orthonormalbasis ergänzt, wobei wieder auf der Ergänzung das Skalarprodukt verschwindet, da $AB\psi_n$ senkrecht auf den ergänzenden Vektoren steht. Die Gleichheit von $\operatorname{tr} AB$ und $\operatorname{tr} BA$ ist somit gezeigt. □

Lemma 3.21 gilt noch allgemeiner, wenn man den Satz über die Gleichheit von Matrix– und Spektralspur und die Gleichheit des (von Null verschiedenen) Teil des Spektrums von AB und BA zu Hilfe nimmt.

3.3 Ultraschwache stetige Linearformen und das No–Go–Theorem von v. Neumann

Zuerst zeigen wir, daß $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Dualraum ist.

Theorem 3.22. *Der Dualraum von $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ stimmt mit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ überein,*

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{H})^* = \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

mit der „Dualitätsbeziehung“

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L}_1 \ni \{B, X\} \mapsto \operatorname{tr} BX.$$

Beweis. Zuerst zeigen wir $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}_1(\mathcal{H})^*$, wobei die „Einbettung“ (also eine *Injektion*) isometrisch ist, d.h. es stimmt $\|B\|$ für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der Norm der zugeordneten Linearform überein. Sei $B \in \mathcal{L}$ und

$$\mathcal{S}_B(X) := \operatorname{tr} BX, \qquad X \in \mathcal{L}_1.$$

$\mathcal{S}_B$ ist eine Linearform auf $\mathcal{L}_1$ und beschränkt (also stetig), denn

$$|\mathcal{S}_B(X)| = |\operatorname{tr} BX| \le \|BX\|_1 \le \|B\| \cdot \|X\|_1,$$

d.h. $\|\mathcal{S}_B\|_{\mathcal{L}_1^*} \le \|B\|$. Zeigen wir jetzt, daß sogar $\|\mathcal{S}_B\|_{\mathcal{L}_1^*} = \|B\|$ gilt.

Zu diesem Zweck betrachten wir spezielle Operatoren

$$P := (\varphi, \cdot)\psi, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{3.8}$$

Dann ist

$$P^* = (\psi, \cdot)\varphi, \qquad P^*P = \|\psi\|^2(\varphi, \cdot)\varphi,$$

also

$$\|P\|_1 = \|\psi\| \operatorname{tr}((\varphi, \cdot)\varphi)^{\frac{1}{2}} = \|\psi\| \cdot \|\varphi\| = \|P\|.$$

Insbesondere ist $\|P\| = 1$, falls $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Wählen wir jetzt eine Orthonormalbasis $\{e_n\}$ mit $e_1 = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$, so ist

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} BP &= \sum_n (e_n, BPe_n) \\ &= \sum_n (e_n, B(\varphi, e_n)\psi) \\ &= \sum_n (\varphi, e_n)(e_n, B\psi) \\ &= (\varphi, B\psi).\end{aligned}$$

und

$$\|B\| = \sup_{\|\varphi\|=1\|\psi\|=1} |(\varphi, B\psi)| \leq \sup_{\|X\|_1=1} |\operatorname{tr} BX| = \|\mathcal{S}_B\|_{\mathcal{L}_1^*},$$

also haben wir die Gleichheit der Normen.

Nun zeigen wir, daß es keine zusätzlichen Linearformen in $\mathcal{L}_1^*$ geben kann. Sei $g \in \mathcal{L}_1^*$. Wir nehmen wieder die Operatoren (3.8) mit $\|P\| = \|P\|_1 = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ und bilden

$$g((\varphi, \cdot)\psi).$$

Dies ist eine Sesquilinearform in φ und ψ, nämlich linear in ψ und antilinear in φ. Außerdem ist

$$|g((\varphi, \cdot)\psi)| \leq C\|(\varphi, \cdot)\psi\|_1 = C\|\varphi\| \cdot \|\psi\|,$$

d.h. $g((\varphi, \cdot)\psi)$ ist sogar eine beschränkte Sesquilinearform. Nach dem Rieszschen Darstellungstheorem existiert dann ein beschränkter Operator $B \in \mathcal{L}$ mit

$$g((\varphi, \cdot)\psi) = (\varphi, B\psi)$$

und

$$\|B\| \leq \|g\|_{\mathcal{L}_1^*}.$$

Jetzt können wir die beschränkte Linearform

$$\operatorname{tr} BX, \qquad X \in \mathcal{L}_1$$

bilden und brauchen nur noch zu zeigen, daß $\operatorname{tr} BX$ und $g(X)$ übereinstimmen.

Wegen der Gültigkeit der Schmidt–Darstellung in $\mathcal{L}_1$, ihrer Konvergenz in der $\|\cdot\|_1$–Norm und der Stetigkeit der beiden in Frage stehenden Linearformen bezüglich der $\|\cdot\|_1$–Norm brauchen wir die Übereinstimmung der beiden Linearformen nur für $X = P = (\varphi, \cdot)\psi$ zu zeigen:

Also sei $X = (\varphi, \cdot)\psi$. Es ist für jedes $e \in \mathcal{H}$

$$(e, BXe) = (\varphi, e)(e, B\psi).$$

Wählen wir wieder eine Orthonormalbasis $\{e_n\}$ in $\mathcal{H}$ mit $e_1 = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$, dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} BX &= \sum_n (e_n BXe_n) \\ &= \left(\varphi, \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right)\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, B\psi\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}(\varphi, B\psi) = (\varphi, B\psi)$$
$$= g(X).$$

Damit ist das Theorem bewiesen. □

Aus $\mathcal{L}_1^* = \mathcal{L}$ folgt sofort

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_1^{**} = \mathcal{L}^*.$$

Wir betrachten auf $\mathcal{L}$ nun die sogenannte $*$–schwache Topologie, diese ist durch das Halbnormensystem

$$\mathcal{L} \ni X \mapsto |\operatorname{tr} AX|, \qquad A \in \mathcal{L}_1$$

gegeben. Man kann nun diese Topologie auch ein wenig anders beschreiben: Dazu gehen wir von der Schmidt–Darstellung

$$A = \sum_n s_n(A)(\varphi_n, \cdot)\psi_n, \qquad \sum_n s_n(A) < \infty$$

aus. Dann ist

$$\operatorname{tr} AX = \sum_n s_n(A)(\varphi_n, X\psi_n) = \sum_n (s_n^{\frac{1}{2}}(A)\varphi_n, X s_n^{\frac{1}{2}}(A)\psi_n).$$

Mit

$$u_n := s_n^{\frac{1}{2}}(A)\varphi_n, \qquad v_n := s_n^{\frac{1}{2}}(A)\psi_n.$$

haben wir

$$\sum_n \|u_n\|^2 < \infty, \qquad \sum_n \|v_n\|^2 < \infty$$

und

$$\operatorname{tr} AX = \sum_n (u_n, Xv_n).$$

Setzen wir

$$(u_n, Xv_n) = |(u_n, Xv_n)| \cdot \zeta_n, \qquad |\zeta_n| = 1,$$

so ist

$$(\zeta_n u_n, Xv_n) = |(u_n, Xv_n)|$$

und mit $\tilde{\varphi} := \zeta_n \varphi_n$ bzw. $\tilde{A} := \sum_n s_n(A)(\tilde{\varphi}_n, \cdot)\psi_n$ wird

$$\operatorname{tr} \tilde{A}X = \sum_n |(u_n, Xv_n)|,$$

so daß wir Halbnormen von der Form

$$X \mapsto \sum_n |(u_n, Xv_n)|, \qquad \sum_n \|u_n\|^2 < \infty, \qquad \sum_n \|v_n\|^2 < \infty$$

erhalten. Diese Formel suggeriert, eine Topologie auf folgende Art einzuführen: Wir nehmen Folgen $\xi_n, \eta_n \in \mathcal{H}$ mit $\sum \|\xi_n\|^2 < \infty$, $\sum \|\eta_n\|^2 < \infty$. Dann ist für $X \in \mathcal{L}$

$$\sum_n |(\xi_n, X\eta_n)| \le \|X\| \sum_n \|\xi_n\| \cdot \|\eta_n\|$$

$$\leq \|X\|\Big(\sum_n \|\xi_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_n \|\eta_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Also ist durch

$$\mathcal{L} \ni X \mapsto \sum_n |(\xi_n, X\eta_n)|$$

eine Halbnorm gegeben. Die dadurch definierte Topologie wurde die „ultraschwache Topologie“ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ genannt.

Umgekehrt kann eine Halbnorm der Form

$$\sum_n |(\xi_n, X\eta_n)|, \qquad \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty, \quad \sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$$

auch wieder in der Form $\operatorname{tr} AX$ geschrieben werden: Wir setzen

$$u_n := \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}, \qquad v_n := \frac{\eta_n}{\|\eta_n\|}$$

und wählen ζ_n, so daß

$$|(u_n, Xv_n)| = (\zeta_n u_n, Xv_n) \qquad |\zeta_n| = 1$$

wird, und setzen noch $s_n := \|\xi_n\| \cdot \|\eta_n\|$, $\tilde{u}_n := \zeta_n u_n$ und $P_n := (\tilde{u}_n, \cdot)v_n$. Dann ist

$$\|P_n\| = \|P_n\|_1 = 1$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_n |(\xi_n, X\eta_n)| &= \sum_n \|\xi_n\| \cdot \|\eta_n\| \left|\left(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}, X\frac{\eta_n}{\|\eta_n\|}\right)\right| \\
&= \sum_n \|\xi_n\| \cdot \|\eta_n\| |(u_n, Xv_n)| \\
&= \sum_n s_n(\zeta_n u_n, Xv_n) \\
&= \sum_n s_n(\tilde{u}_n, Xv_n) \\
&= \sum_n s_n \operatorname{tr}((\tilde{u}_n, \cdot)v_n X) \\
&= \sum_n s_n \operatorname{tr}(P_n X) \\
&= \operatorname{tr}\Big\{\Big(\sum_n s_n P_n\Big)X)\Big\}.
\end{aligned}$$

Aber $\sum_n s_n P_n$ ist $\|\cdot\|_1$–konvergent, denn

$$\sum_n s_n \|P_n\|_1 = \sum_n s_n < \infty.$$

Also sind die $*$–schwache und die ultraschwache Topologien identisch.

Nun sollen die ultraschwach stetigen Zustände auf $\mathcal{L}$, also die ultraschwach stetigen Linearformen φ mit $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ und $\varphi(X) \geq 0$ falls $X \geq 0$,ausgesondert werden. Ultraaschwach stetige Linearformen sind nach Definition von der Form

$$\varphi(X) = \operatorname{tr} AX, \qquad A \in \mathcal{L}_1.$$

Lemma 3.23. *φ ist genau dann positiv, wenn $A \geq 0$ ist.*

Beweis. Sei φ positiv, d.h. $\operatorname{tr} XA \geq 0$ für alle $X \geq 0$. Setzen wir

$$X := (u, \cdot)u \qquad u \in \mathcal{H}.$$

Dann ist $X \geq 0$, $Xu = \|u\|^2 u$ und

$$\operatorname{tr} AX = \left(\frac{u}{\|u\|}, AX\frac{u}{\|u\|}\right) = (u, Au).$$

Also muß $(u, Au) \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{H}$ sein, d.h. $A \geq 0$. Umgekehrt ist für $A \geq 0$ auch $\operatorname{tr} AX \geq 0$ für $X \geq 0$. □

Damit erhalten wir das Theorem von v. Neumann. Der erste Teil lautet:

Theorem 3.24. *Die voll–linearen ultraschwach stetigen Zustände φ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind bijektiv und normisomorph den Dichtematrizen D zugeordnet vermöge*

$$\varphi(X) = \operatorname{tr} DX \qquad (X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

für eine Dichtematrix D.

Der zweite Teil, das No–Go Theorem, lautet:

Theorem 3.25. (v. Neumann) *In der Klasse der ultraschwach stetigen Zustände φ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt es keine dispersionsfreien.*

Dieses No–Go–Theorem von v. Neumann kann noch schärfer formuliert werden:

Theorem 3.26. *Auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt es keine dispersionsfreien Zustände.*

Beweis. Für $\dim \mathcal{H} < \infty$ ist dies das Theorem 1.14. Sei nun $\mathcal{H}$ unendlichdimensional und separabel. Nach früheren Überlegungen (Kapitel 1, Lemma 1.13) mußte ein dispersionsfreier Zustand notwendig ein Spurzustand sein, d.h. es mußte gelten

$$\varphi(XY) = \varphi(YX)$$

für beliebige X, Y aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Solche Zustände kann es jedoch nicht geben. Um dies einzusehen, wählt man in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ zwei Isometrien V und W mit

$$V^*V = W^*W = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad VV^* + WW^* = \mathbf{1}.$$

Solche Operatoren V, W existieren, wenn $\mathcal{H}$ ein separabler unendlich–dimensionaler Hilbertraum ist. Dazu betrachte man z.B. eine Orthonormalbasis (e_n) in $\mathcal{H}$ und die Operatoren V und W, die wie folgt definiert sind:

$$V := \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, \cdot)e_{2n} \quad \text{und} \quad W = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, \cdot)e_{2n-1}.$$

Für den Zustand φ würde dann gelten:

$$\varphi(V^*V) = \varphi(VV^*) = 1, \qquad \varphi(W^*W) = \varphi(WW^*) = 1$$

im Widerspruch zu

$$\varphi(VV^* + WW^*) = 1.$$

□

Anhang zum No–Go–Theorem von Jauch und Piron

Im folgenden wird ein spezielles quantenmechanisches System betrachtet: $\mathcal{H}$ sei ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum. Die Observablen seien Elemente eines Systems $\mathcal{P} = \{P\}$ aus Orthoprojektoren P (d.h. $P^2 = P$ und $P = P^*$) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \in \mathcal{P}$, $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$.

(ii) Für ein System $\{P_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ mit $P_i P_j = \delta_{ik} P_i$ gilt:

$$P := \sum_{j=1}^{\infty} P_j \in \mathcal{P}.$$

(iii) Aus $\{Q_j\} \subset \mathcal{P}$ folgt: Der Projektor $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{K} = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j(\mathcal{H})$, für den wir kurz $\bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j$ schreiben, gehört zu $\mathcal{P}$.

(iv) Aus $Q, P \in \mathcal{P}$ und $Q \leq P$ folgt $P - Q \in \mathcal{P}$.

Als Zustände des Systems werden Abbildungen φ vo $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften betrachtet:

(i) $0 \leq \varphi(P) \leq 1$.

(ii) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.

(iii) $\varphi(\sum_{j=1}^{\infty} P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(P_j)$.

(iv) Aus $\varphi(Q_j) = \mathbf{1}$ $(j \in \mathbb{N})$ folgt $\varphi(\bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j) = 1$.

(v) Für $P \neq Q$ existiert ein Zustand φ mit $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Nun können wir das Theorem von Jauch und Piron formulieren:

Theorem von Jauch und Piron. *Wenn $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}, \{\varphi\}\}$ klassisch interpretierbar ist, dann vertauschen alle Projektoren $P \in \mathcal{P}$.*

Beweis. Wir nehmen an, $\{\mathcal{H}, \mathcal{P}, \{\varphi\}\}$ sei als klassisches System $\{\Gamma, F, M\}$ gemäß Definition 2.5 interpretierbar. Dann existieren Bijektionen

$$P \leftrightarrow f_P(\cdot), \qquad \varphi \leftrightarrow \mu_\varphi(\cdot),$$

so daß

$$\varphi(P) = \int_\Gamma f_P(\xi)\, \mu_\varphi(d\xi). \tag{3.9}$$

Die Zustände $P \mapsto f_P(\xi)$ sind dispersionsfrei wegen

$$(f_P(\xi))^2 = f_{P^2}(\xi) = f_P(\xi)$$

und nach (3.9) ist jeder Zustand Superposition dispersionsfreier Zustände.

Nun seien P, Q zwei Observablen, $R = P \cap Q$ und S sei der Projektor auf clo$\{P\mathcal{H} + Q\mathcal{H}\}$, wir schreiben auch kurz $S = P \cup Q$. Wegen $P^\perp\mathcal{H} \cap Q^\perp\mathcal{H} = \{P\mathcal{H} + Q\mathcal{H}\}^\perp$ und $P^\perp = \mathbf{1} - P \in \mathcal{P}$, $Q^\perp = \mathbf{1} - Q \in \mathcal{P}$ ist $S^\perp \in \mathcal{P}$ und damit auch $S \in \mathcal{P}$.

Wir zeigen jetzt, daß für alle Zustände φ gilt:

$$\varphi(P) + \varphi(Q) = \varphi(R) + \varphi(S); \tag{3.10}$$

dabei genügt es, dies nur für dispersionsfreie Zustände zu zeigen. Für diesen Fall haben wir wegen $P^2 = P$

$$\varphi(P) \in \{0, 1\}.$$

Also müssen wir zum Beweis von (3.10) folgende Fälle betrachten:

1. $(\varphi(P) = \varphi(Q) = 0)$:
   Es ist $R \leq P$ und wegen

   $$\varphi(P) = \varphi(R + (P - R)) = \varphi(R) + \varphi(P - R) = 0$$

   folgt $\varphi(R) = 0$.

   Außerdem ist $\varphi(\mathbf{1} - P) = \varphi(\mathbf{1} - Q) = \mathbf{1}$ und damit

   $$\varphi((\mathbf{1} - P) \cap (\mathbf{1} - Q)) = \varphi(P^\perp \cap Q^\perp) = \varphi(S^\perp) = 1.$$

   Daraus folgt $\varphi(S) = 1 - \varphi(S^\perp) = 0$, also ist für diesen Fall (3.10) bewiesen.

2. $(\varphi(P) = 1, \varphi(Q) = 0)$:
   Aus $\varphi(Q) = 0$ folgt $\varphi(S) = \varphi(P) = 1$ und $\varphi(R) \leq \varphi(Q) = 0$, also $\varphi(R) = 0$. Auch in diesem Fall ist (3.10) richtig.

3. $(\varphi(P) = 0, \varphi(Q) = 1)$:
   Wie 2.

4. $(\varphi(P) = \varphi(Q) = 1)$:
   Wegen (iv) ist $\varphi(R) = 1$, $\varphi(\mathbf{1} - P) = \varphi(\mathbf{1} - Q) = 0$ und folglich $0 = \varphi(P^\perp \cap Q^\perp) = \varphi(S^\perp)$, also $\varphi(S) = 1$. Wieder wird (3.10) erfüllt.

Es gilt nun für beliebige $P, Q \in \mathcal{P}$ und beliebige Zustände φ:

$$\begin{aligned}
\varphi((P \cap Q^\perp) \cup Q) &= \varphi(P \cap Q^\perp) + \varphi(Q) \\
&= \varphi(P) + \varphi(Q\ \perp) - \varphi(P \cup Q^\perp) + \varphi(Q) \\
&= \varphi(P) + \mathbf{1} - \varphi(P \cup Q^\perp) \\
&= \varphi(P) + \varphi((P \cup Q^\perp)^\perp) \\
&= \varphi(P \cup (P^\perp \cap Q)).
\end{aligned}$$

Da die Zustände die Observablen „trennen“ sollten, folgt daraus:

$$(P \cap Q^\perp) + Q = P + (P^\perp \cap Q).$$

Setzen wir jetzt $R := P \cap Q^\perp$ und $S := P^\perp \cap Q$ gilt

$$R + Q = P + S \tag{3.11}$$

und $RQ = 0$, $SP = 0$ sowie $RP = PR = R$ und $SQ = QS = S$. Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} PQ &= (R + Q - S)Q = Q - SQ = Q - S \\ &= P - R = (P - R)P = (P - R + S)P \\ &= QP, \end{aligned}$$

also kommutieren P und Q. □

Kapitel 4

Die CCR–Algebra

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel geht es um eine mathematische Analyse der kinematischen Grundlagen der Quantenmechanik für einen Freiheitsgrad und für endlich viele Freiheitsgrade. Außerdem soll mindestens plausibel gemacht werden, daß die kinematischen Grundgleichungen der Quantenmechanik für endlich bzw. unendlich viele Freiheitsgrade ein total unterschiedliches Verhalten zeigen.

Die kinematische Grundgleichung für die Quantenmechanik eines Freiheitsgrades lautet

$$qp - pq = ih\mathbf{1}, \qquad \text{(Heisenberg–Gleichung)}, \tag{4.1}$$

wo q (Ort) und p (Impuls) kanonisch konjugierte Variablen sind. Die Plancksche Konstante h wird im folgenden immer gleich 1 gesetzt.

„Analyse“ der Gleichung (4.1) heißt Studium ihrer Lösungstheorie als algebraisches Problem. Da wegen

$$\operatorname{tr} qp = \operatorname{tr} pq$$

keine endlichdimensdionalen Lösungen existieren können, müssen Lösungen in einem unendlichdimensionalen Raum gesucht werden. Das bedeutet, daß von vornherein das „algebraische“ Lösungsproblem mit topologischen Fragen verknüpft sein wird.

Von Beginn an ist zu beachten, daß in der Quantenmechanik Kinematik und Dynamik vollkommen getrennt sind, also getrennt behandelt werden können. Der entscheidende Knackpunkt ist, daß die Kinematik durch die rein algebraische Vorgabe von (4.1) *vollkommen eindeutig* festgelegt ist.

Dies soll im folgenden ausführlich auseinandergesetzt werden, wobei auch die alte Frage „Wie kommt der Hilbertraum in die Quantenmechanik?“ eine Antwort finden wird.

Wir beginnen zunächst damit, eine ganz spezielle Lösung von (4.1) zu konstruieren:

Sei $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{D} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Schwartz–Raum der beliebig oft differenzierbaren und “schnell fallenden“ (komplexwertigen) Funktionen. Bekanntlich ist $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ eine dichte lineare Teilmannigfaltigkeit. Wir setzen nun p und q als Operatoren auf $\mathcal{H}$ folgendermaßen an:

$$(qf)(x) := xf(x), \qquad f \in \mathcal{D}, \qquad \text{(Multiplikationsoperator)},$$

$$(pf)(x) := -i\frac{df}{dx}(x), \qquad f \in \mathcal{D}, \qquad \text{(Differentiationsoperator)}.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}((qp - pq)f)(x) &= -ixf'(x) + i\frac{d}{dx}(xf(x)) \\ &= -if'(x) + if(x) + ixf'(x) \\ &= if(x),\end{aligned}$$

also

$$(qp - pq)f = if, \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Bekanntlich sind p und q wesentlich selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{D}$, d.h. ihr Abschluß ist selbstadjungiert. Jedoch sind p und q unbeschränkte Operatoren.

Da wir die Theorie für beschränkte Operatoren formulieren wollen, machen wir uns den Satz von Stone über die stark stetigen unitären Operatorgruppen $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, auf $\mathcal{H}$ und ihre selbstadjungierten Generatoren zunutze: Danach kann eine solche Gruppe immer als $U(t) = e^{-itA}$ mit einem selbstadjungierten Operatoren A (dem Generator der Gruppe) geschrieben werden und umgekehrt erzeugt jedes A vermöge e^{itA} eine solche Gruppe. Mit anderen Worten für unsere prinzipielle Untersuchungen können wir p und q durch die von ihnen erzeugten Gruppen

$$\begin{aligned}q &\mapsto e^{-i\alpha q} =: U(\alpha), \\ p &\mapsto e^{-i\beta p} =: V(\beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

ersetzen. Es ist leicht, die „Wirkung“ der Operatoren $U(\alpha)$ und $V(\beta)$ auf Funktionen $f \in \mathcal{D}$ zu berechnen:

$$(U(\alpha)f)(x) = e^{-i\alpha x}f(x), \qquad f \in \mathcal{D}, \tag{4.2}$$

$$(V(\beta)f)(x) = f(x - \beta), \qquad f \in \mathcal{D}. \tag{4.3}$$

$U(\alpha)$ ist also nichts weiter als der Multiplikationsoperator mit $e^{-i\alpha x}$, während $V(\beta)$ der „Verschiebungsoperator“ um β ist. Man sieht das – heuristisch – sofort, indem man (4.3) nach β differenziert:

$$(-ipe^{-i\beta p}f)(x) = f'(x - \beta)(-1)$$

und $\beta = 0$ setzt: dann ist

$$(pf)(x) = -if'(x).$$

Für die unitäre stark stetige Gruppe $U(\alpha)$, $V(\beta)$ erhält man (als „Ersatz“ für (4.1))

$$U(\alpha)V(\beta) = V(\beta)U(\alpha)e^{-i\alpha\beta}, \tag{4.4}$$

denn

$$(U(\alpha)V(\beta)f)(x) = U(\alpha)\{f(x - \beta)\} = e^{-i\alpha x}f(x - \beta)$$

und

$$(V(\beta)U(\alpha)e^{-i\alpha\beta}f)(x) = V(\beta)\{e^{-i\alpha x}e^{-i\alpha\beta}f(x)\}$$

$$= e^{-i\alpha(x-\beta)}e^{-i\alpha\beta}f(x-\beta)$$
$$= e^{-i\alpha x}f(x-\beta).$$

Die Relation (4.4) heißt *Weyl–Relation.*

Die Relation (4.4) ließe sich übrigens auch durch formale Potenzreihenentwicklung gewinnen, indem man $qp - pq = i\mathbf{1}$ benutzt (sie ist ein Spezialfall der sog. Campbell–Hausdorff–Formel).

Wir knüpfen nun an die konkrete Lösung an und starten für unsere Deduktionen mit „unitären" Operatorgruppen

$$U(x) := e^{-ixq}, \qquad V(y) := e^{-iyp},$$

die die Relation (4.4) erfüllen.

Die Theorie wird nun sehr übersichtlich, wenn wir eine komplexe Ebene
$\mathbb{C} \ni z = x + iy$ einführen und

$$W(z) := e^{\frac{i}{2}xy}U(x)V(y)$$

setzen. Dann lassen sich leicht folgende Eigenschaften nachrechnen:

$$\begin{aligned} W(z_1)W(z_2) &= e^{\frac{i}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)}W(z_1+z_2) \\ &= e^{\frac{i}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}_2 z_1)}W(z_1+z_2) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}_1 z_2)}W(z_1+z_2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\overline{z}_1 z_2$ ist das Skalarprodukt in $\mathbb{C}$. Insbesondere ist

$$W(z)W(-z) = W(0) = \mathbf{1} \tag{4.6}$$

und

$$W(0)W(z) = W(z)W(0) = W(z),$$

d.h. $W(0)$ ist das Einselement im System der $\{W(z)\}_{z\in\mathbb{C}}$. Wir schreiben deshalb $W(0) =: \mathbf{1}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} W(z)^* &= e^{-\frac{i}{2}xy}V(y)^*U(x)^* = e^{-\frac{i}{2}xy}V(-y)^*U(-x)^* \\ &= e^{-\frac{i}{2}xy}\cdot e^{i(-x)(-y)}V(y)^*U(x)^* = e^{\frac{i}{2}xy}V(-y)^*U(-x)^* \\ &= W(-z), \end{aligned}$$

d.h. $W(z)^* = W(z)^{-1}$, also die $W(z)$ müssen „unitär" sein. Man gewinnt also folgende Eigenschaften für die *Weyl–Elemente* $W(z)$:

$$W(z) \neq 0 \tag{4.7}$$
$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}_1 z_2)}W(z_1+z_2) \tag{4.8}$$
$$W(z)^* = W(-z). \tag{4.9}$$

Dies legt die Frage nahe, ob es eine C^*–Algebra

$$\mathcal{A} = C^*(W(z))$$

gibt, die von den Operatoren $W(z)$ erzeugt wird, und wie viele?

Zuerst führen wir eine leichte Verallgemeinerung ein. Betrachtet wir $\mathbb{C}$ als reellen zweidimensionalen Vektorraum und setzen $\sigma(z_1, z_2) = \operatorname{Im} \overline{z}_1 z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$, so ist $\sigma(f, g)$ eine symplektische nicht ausgeartete Bilinearform, d.h. $\sigma(f, g) = -\sigma(g, f)$ und aus $\sigma(x, f) = 0$ für alle x folgt $f = 0$.

Ebenso ist

$$\sigma(z, w) := \operatorname{Im}\langle z, w\rangle = \operatorname{Im}\Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j w_j\Big)$$

eine nicht ausgeartete symplektische Bilinearform in $\mathbb{C}^n$, betrachtet als reeller $2n$–dimensional er Vektorraum.

Wir können auch einen allgemeinen reellen Vektorraum H mit einer symplektischen, nicht–ausgearteten Bilinearform $\sigma(f, g)$ und $W(f) \neq 0$ für $f \in H$ betrachten. Dabei darf auch $\dim H = \infty$ sein, d.h. H kann ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden beschreiben. Als Referenzraum werden wir in Zukunft $\{H, \sigma\}$ schreiben. Es ist also eine Realisierung von W mit den Eigenschaften

$$W(f) \neq 0 \tag{4.10a}$$

$$W(-f) = W(f)^*, \qquad f \in H \tag{4.10b}$$

$$W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)} W(f + g) \tag{4.10c}$$

als C^*–Algebra gesucht. Gefragt ist nach der Existenz und algebraische Einzigkeit einer solchen Algebra.

Der „C^*–Standpunkt“ ist für die folgenden Betrachtungen entscheidend. Er ist von I.E. Segal in die Beschreibung der mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik eingeführt worden.

Aus diesem Grunde sollen in aller Kürze die relevanten Begriffe rekapituliert werden:

Auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ kann man normabgeschlossene $*$–Algebren $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ betrachten. $\mathcal{A}$ kann *unital* sein, $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$, aber auch *nichtunital*, $\mathbf{1} \notin \mathcal{A}$ (z.B. $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{H})$ mit unendlichdimensionalem $\mathcal{H}$).

Diesen Begriff kann man abstrakt fassen:

1. $\mathcal{A}$ soll eine (assoziative) Algebra sein:

$$\lambda A + \mu B \tag{4.11}$$

$$A \cdot B \tag{4.12}$$

   sind definiert.

2. Es existiert eine Involution (ein $*$): $A \mapsto A^*$ mit

$$\begin{aligned} (A + B)^* &= A^* + B^* \\ (AB)^* &= B^* A^* \\ (\lambda A)^* &= \overline{\lambda} A^*. \end{aligned}$$

3. Es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ is bzgl. dieser Norm vollständig. Es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \qquad \|A^*\| = \|A\|,$$

4. Entscheidend ist die C^*–Eigenschaft

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Spektrum und Resolventenmenge von $A \in \mathcal{A}$ sind wie üblich definiert:

$$\begin{aligned} \operatorname{spec} A &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C} :\ (\lambda - A)^{-1} \text{ existiert nicht in } \mathcal{A}\right\}, \\ \operatorname{res} A &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C} :\ (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{A}\right\}. \end{aligned}$$

Für selbstadjungierte Elemente $A = A^*$ ergibt sich $\operatorname{spec} A \subseteq \mathbb{R}$, ihr Spektrum ist reell.

Eine Definition von *Positivität* ist möglich: wenn $A = A^*$, so heißt $A \geq 0$, wenn $\operatorname{spec} A \subseteq [0, \infty)$ und man erhält $A \geq 0$ genau dann, wenn $A = B^*B$ mit einem $B \in \mathcal{A}$.

Eine der wichtigsten unmittelbaren Konsequenzen ist, daß eine rein algebraische Charakterisierung der Norm möglich ist:

$$\|A\| = \left(\sup_{\lambda \geq 0}\{\lambda :\ \lambda - A^*A \text{ nicht invertierbar}\}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mit anderen Worten die Norm einer C^*–Algebra ist durch die algebraische Struktur der Algebra schon völlig eindeutig festgelegt, d.h. eine $*$–Algebra $\mathcal{A}$ kann *nicht* zwei verschiedene C^*–Normen besitzen!

Die Verbindung zum „Ausgangspunkt“ (der Algebra auf einem Hilbertraum) wird dann durch den Satz von Gelfand/Neumark gegeben:

> Jede C^*–Algebra kann als normabgeschlossene $*$–Algebra auf einem Hilbertraum realisiert werden:
>
> $$\mathcal{A} \ni A \leftrightarrow \pi(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$
>
> wobei π ein „Isomorphismus“ ist, verstanden im Sinne eines „algebraischen“, eines $*$– und eines „Normisomorphismus“.

Man spricht von einer *treuen Darstellung* π von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{H}$.

Zwei C^*–Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ werden als *gleich* angesehen, wenn sie isomorph sind:

$$\mathcal{A}_1 \ni A_1 \to \tau(A_1) \in \mathcal{A}_2,$$

τ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Beachte: wegen der Charakterisierungsmöglichkeit der Norm durch algebraische Eigenschaften ist die Isometrie automatisch durch die algebraische $*$–Isomorphie gegeben!

Wenn also gefragt wird, wieviele C^*–Algebren mit einer bestimmten Eigenschaft gibt es, so meint man: wie viele *bis auf Isomorphie*.

Wichtig ist der Begriff der *Darstellung* einer C^*–Algebra auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto \pi(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

π ist ein algebraischer $*$–Homomorphismus. π kann einen Kern haben, $\ker \pi \subset \mathcal{A}$. Ist $\ker \pi = \{0\}$, so liegt ein Isomorphismus vor und die Darstellung ist „treu“.

Eine Darstellung π heißt *zyklisch* mit dem *zyklischen Vektor* $\Omega \in \mathcal{H}$, wenn $\pi(\mathcal{A})\Omega \subset \mathcal{H}$ dicht liegt in $\mathcal{H}$.

Für die mathematische Analyse der Quantentheorie fundamental ist das Wechselspiel von *Zuständen* φ (stetige positive normierte Linearformen auf $\mathcal{A}$) und *Darstellungen* von $\mathcal{A}$, wie es durch das sog. GNS–Theorem (Gelfand–Neumark–Segal) beschrieben wird:

> Zu $\mathcal{A}$ und φ gibt es eine kanonische zyklische Darstellung von $\mathcal{A}$, ein Tripel $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi\}$, $\|\Omega_\varphi\| = 1$, $\Omega_\varphi \in \mathcal{H}$ zyklischer Vektor der zyklischen Darstellung π_φ, so daß
>
> $$\varphi(A) = (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi)_{\mathcal{H}_\varphi}, \qquad A \in \mathcal{A},$$
>
> gibt.

π_φ heißt GNS–Darstellung. Sie ist durch die genannten Bedingungen bis auf Unitäräquivalenz eindeutig bestimmt.

4.2 Existenz und Eindeutigkeit

Wir kehren jetzt zu der Frage nach der Existenz und algebraischen Eindeutigkeit einer C^*–Algebra zurück, die von den Weyl–Elementen $W(f)$, $f \in \mathcal{H}$, mit den Eigenschaften (4.10) erzeugt wird.

Aus diesen Eigenschaften folgt sofort

$$W(-g)W(f)W(g) = e^{-i\sigma(f,g)}W(f), \qquad f, g \in H,$$

denn

$$\begin{aligned} W(-g)W(f)W(g) &= W(-g)\{e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W(f+g)\} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W(-g)W(f+g) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}e^{-\frac{i}{2}\sigma(-g,f+g)}W(-g+f+g) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}e^{\frac{i}{2}\sigma(g,f)}W(f) \\ &= e^{-i\sigma(f,g)}W(f). \end{aligned}$$

Die Existenz einer solchen C^*–Algebra ist fast trivial und wird als erstes vorgeführt.

$\mathfrak{h}$ sei ein beliebiger separabler Hilbertraum und H eine Indexmenge.

$$H \ni f \mapsto \mathfrak{h}_f := \mathfrak{h}$$

Wir nehmen also $\operatorname{card} H$ Exemplare von $\mathfrak{h}$. Der Raum

$$\mathcal{K}_0 := \bigoplus_{f \in H} \mathfrak{h}_f$$

mit den Elementen $F(f) \in \mathfrak{h}$ (nur endlich viele Komponenten sind $\neq 0$; finite Funktionen) und dem Skalarprodukt

$$(F, G) := \sum_{f \in H} (F(f), G(f))_{\mathfrak{h}}$$

ist ein Prähilbertraum. $\mathcal{K} := \mathrm{clo}_{\|\cdot\|}\mathcal{K}_0$ ist ein Hilbertraum. Es ist

$$\mathcal{K} = l^2(H) = \{F : H \to \mathbb{C} : \sum_{f\in H} \|F(f)\|_{\mathfrak{h}}^2 < \infty\}.$$

Definition 4.1. *Zunächst auf $\mathcal{K}_0$ definieren wir*

$$(W(g)F)(f) := e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}F(f+g), \qquad f,g \in H.$$

Hieraus folgt schon $W(0) = 1$. Wir zeigen nun, daß $W(g)$ isometrisch ist und $\mathcal{K}_0$ auf ganz $\mathcal{K}_0$ abbildet:

$$\begin{aligned}\|W(g)F\|^2 &= \sum_f \|(W(g)F)(f)\|_{\mathfrak{h}}^2 \\ &= \sum_f \|e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}F(f+g)\|_{\mathfrak{h}}^2 \\ &= \sum_f \|F(f+g)\|_{\mathfrak{h}}^2 = \|F\|^2.\end{aligned}$$

Zu jedem $G \in \mathcal{K}_0$ ist ein $F(\cdot)$ gesucht, so daß $e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}F(f+g) = G(f)$ für ein festes $g \in H$ ist, also

$$F(f+g) = e^{\frac{i}{2}\sigma(f,g)}G(f), \qquad f \in H.$$

Mit dem Ansatz

$$F(f) = e^{\frac{i}{2}\sigma(f-g,g)}G(f-g)$$

ist dann $W(g)F = G$. Die stetige Fortsetzung von $W(f)$ auf ganz $\mathcal{K}$ liefert einen unitären Operator.

Die Eigenschaften (4.10) müssen für diese Realisierung von $W(f)$ noch nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}(W(f)W(g)F)(x) &= W(f)\{e^{-\frac{i}{2}\sigma(x,g)}F(x+g)\} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(x,f)}e^{-\frac{i}{2}\sigma(x+f,g)}F(x+f+g) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}e^{-\frac{i}{2}\sigma(x,f+g)}F(x+f+g) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}(W(f+g)F)(x),\end{aligned}$$

insbesondere

$$W(f)W(-f) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,-f)}W(0) = e^0 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

also

$$W(-f) = W(f)^{-1} = W(f)^*, \qquad \text{da } W(f) \text{ unitär.}$$

Es existiert also mindestens eine Realisierung von W mit den Eigenschaften (4.10). Bildet man nun die $*$–Algebra $\mathcal{A}_0$ der endlichen Linearkombinationen der $W(f)$,

$$\mathcal{A}_0 := \Big\{\sum_{j=1}^m \alpha_j W(f_j)\Big\},$$

so erhält man durch den Normabschluß

$$\mathcal{A} := \mathrm{clo}_{\|\cdot\|}\mathcal{A}_0 =: C^*(W(f), f \in H),$$

eine C^*–Algebra, die sog. C^*–Hülle der $W(f)$, das ist die kleinste C^*–Algebra, die alle $W(f)$ enthält. Im folgenden wird die Einzigkeit – bis auf Isomorphie – der C^*–Algebra gezeigt, die durch Weyl–Elemente mit den Eigenschaften (4.10) erzeugt wird.

Lemma 4.2. *Sei $\{H, \sigma\}$ gegeben, wobei σ bilinear, symplektisch und nicht ausgeartet ist. H sei vollständig und separabel bezüglich der durch die Halbnorm $|\sigma(\cdot, f)|$ gegebenen Topologie. Dann existiert immer eine „Komplexifizierung " von H und ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezüglich dieser Komplexifizierung, so daß $\sigma(f,g) = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle$ ist.*

Beweis. Der Beweis wird hier weggelassen (siehe z.B. Brattelli/Robinson [4, p. 19]). □

Theorem 4.3. (Einzigkeitssatz) *Sei $\{H, \sigma\}$ mit $\sigma(f,g) = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle$ wie in Lemma 4.2 gegeben und*

$$\mathcal{A}_j = C^*(W_j(f), f \in H), \qquad j = 1, 2,$$

mit

$$W_j(f) \neq 0 \text{ für alle } f, \tag{4.13}$$

$$W_j(-f) = W_j(f)^*, \tag{4.14}$$

$$W_j(f)W_j(g) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W_j(f+g). \tag{4.15}$$

Dann existiert ein algebraischer Isomorphismus $\tau : \mathcal{A}_1 \ni A \mapsto \tau(A) \in \mathcal{A}_2$ mit $W_2(f) = \tau(W_1(f))$.

Beweis. $\mathcal{A}_j$ sei treu dargestellt auf $\mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2)$. Sei

$$\mathfrak{h}_0(H) := \bigoplus_{f\in H} \mathbb{C}_f,$$

wobei $\mathbb{C}_k \equiv \mathbb{C}$. $\mathfrak{h}_0(H)$ ist der Prähilbertraum der finiten Skalarfunktionen auf H. Der Normabschluß von $\mathfrak{h}_0(H)$ ist $\mathfrak{h}(H) = l^2(H, \mathbb{C})$. Wir betrachten

$$\mathfrak{h}(H, \mathcal{H}_j) := \mathfrak{h}(H) \otimes \mathcal{H}_j = l^2(H, \mathcal{H}_j).$$

In $\mathfrak{h}(H)$ haben wir die in Definition 4.1 eingeführten Operatoren

$$(R_\sigma(g)F)(f) := e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}F(f+g), \qquad F(f) \in \mathbb{C},$$

und die gewöhnliche Verschiebungsdarstellung

$$(R(g)F)(f) := F(f+g), \qquad F(f) \in \mathbb{C}.$$

Es läßt sich leicht folgende Beziehung nachrechnen:

$$((R \otimes W_j)(g)F)(f) = W_j(g)F(f+g), \qquad F \in \mathfrak{h}(H, \mathcal{H}_j).$$

Eine weitere kleine Rechnung zeigt, daß der Operator

$$(U_jF)(f) := W_j(f)F(f)$$

unitär ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\{U_j(R\otimes W_j)(g)F\}(f) &= W_j(f)\{(R\otimes W_j)(g)F)(f)\}\\ &= W_j(f)W_j(g)F(f+g)\\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W_j(f+g)F(f+g)\\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}(U_jF)(f+g)\\ &= (R_\sigma(g)\otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_j})(U_jF)(f),\end{aligned}$$

also

$$U_j(R\otimes W_j)(g) = (R_\sigma(g)\otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_j})U_j$$

oder

$$U_j\{(R\otimes W_j)(g)\}U_j^{-1} = R_\sigma(g)\otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_j}. \tag{4.16}$$

Die Elemente $(R\otimes W_j)(g)$ erzeugen eine C^*–Algebra $\mathcal{B}_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}(H)\otimes\mathcal{H}_j)$. Dann liefert (4.16) sofort einen algebraischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$:

$$(R\otimes W_1)(g) \leftrightarrow (R\otimes W_2)(g).$$

Benötigt wird also noch ein algebraischer Isomorphismus zwischen $W_j(g)$ (spannen $\mathcal{A}_j$ auf) und $(R\otimes W_j)(g)$ (spannen $\mathcal{B}_j$ auf). Da zwischen $j=1,2$ nicht mehr unterschieden zu werden braucht, sei von nun an $W_j \equiv W$. Als Zuordnungsansatz haben wir

$$W(g) \mapsto (R\otimes W)(g)$$

und die lineare Fortsetzung

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j W(g_j) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j (R\otimes W)(g_j).$$

Für den Beweis, daß diese Zuordnung eine $*$–algebraische Isomorphie ist, würde es völlig genügen, wenn wir die Normgleichheit beweisen:

$$\|\sum_{j=1}^n \lambda_j W(g_j)\|_{\mathcal{A}} = \|\sum_{j=1}^n \lambda_j (R\otimes W)(g_j)\|_{\mathcal{B}}. \tag{4.17}$$

Dazu müssen wir etwas weiter ausholen: Wir betrachten H als additive abelsche Gruppe, versehen mit der Topologie des Prähilbertraums. $\hat{H}$ sei die Gruppe der (in der Topologie von H stetigen) Charaktere χ von H

$$(\chi : H\to\mathbb{C};\qquad \chi(0)=1,\qquad \chi(f+g)=\chi(f)\chi(g),\qquad |\chi(f)|=1).$$

In $\hat{H}$ haben wir die Topologie der punktweisen Konvergenz, d.h. es konvergiert $\chi_n\to\chi$ genau dann, wenn $\chi_n(f)\to\chi(f)$ für jedes $f\in H$ konvergiert. Umgekehrt ist für festes $f\in H$ die durch $\delta_f(\chi) := \chi(f)$ definierte Funktion δ_f eine S^1–wertige Funktion auf $\hat{H}$, stetig in der Topologie von $\hat{H}$.

Definition 4.4. *Sei $k \in \mathfrak{h}_0(H)$ eine finite Funktion. Vermöge*

$$\hat{k}(\chi) := \sum_{f \in H} k(f)\chi(f).$$

wird k eine stetige Funktion $\hat{k}$ auf $\hat{H}$ zugeordnet, diese Zuordnung liefert eine Abbildung von $\mathfrak{h}_0(H)$ auf den Raum der endlichen Linearkombinationen von Funktionen δ_f, den wir mit $\widehat{\mathfrak{h}_0(H)}$ bezeichnen.

Definiert man

$$(\delta_f, \delta_g) = \begin{cases} 1 & \text{für } f = g, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzt das Skalarprodukt auf $\widehat{\mathfrak{h}_0(H)}$ fort, so wird $\widehat{\mathfrak{h}_0(H)}$ ein (nicht separabler) Prähilbertraum. Sei $\widehat{\mathfrak{h}(H)}$ die Vervollständigung von $\widehat{\mathfrak{h}_0(H)}$. Man rechnet leicht nach, daß

$$\|k\|^2_{\mathfrak{h}(H)} = \|\hat{k}\|^2_{\widehat{\mathfrak{h}(H)}}.$$

Wir haben damit eine Isometrie zwischen $\widehat{\mathfrak{h}(H)}$ und $\mathfrak{h}(H)$. Gefragt ist nun nach dem Verhalten der Verschiebungsdarstellung $R(\cdot)$, wenn wir sie nach $\widehat{\mathfrak{h}(H)}$ übertragen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \widehat{R(g)F}(\chi) &= \sum_f F(f+g)\chi(f) \\ &= \sum_{f'} F(f')\chi(f'-g) \\ &= \chi(-g)\sum_f F(f)\chi(f) \\ &= \chi(-g)\hat{F}(\chi), \end{aligned}$$

d.h. es entsteht die unitäre Darstellung $\hat{R}(\cdot)$, die durch Multiplikation mit der Funktion $\overline{\chi(g)}$ wirkt.

Wir betrachten wieder das Tensorprodukt

$$\mathfrak{h}(H) \otimes \mathcal{H} \leftrightarrow \widehat{\mathfrak{h}(H)} \otimes \mathcal{H}.$$

Auf dem linken Raum wirkt $(R \otimes W)(g)$, auf dem rechten $(\hat{R} \otimes W)(g)$, wobei dies ein reiner Multiplikator ist, d.h.

$$((\hat{R} \otimes W)(g)\hat{F})(\chi) = \overline{\chi(g)}W(g)\hat{F}(\chi).$$

$\overline{\chi(g)}W(g)$ ist eine Funktion von χ mit Werten in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Bildung von Linearkombinationen liefert

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(\hat{R} \otimes W)(g_j) \leftrightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{\chi(g_j)}W(g_j).$$

Die rechte Seite ist ein reiner Multiplikationsoperator $K(\chi)$, eine in der Operatornormtopologie stetige Funktion auf $\hat{H}$.

Wir benötigen noch eine Anleihe aus der Operatortheorie:

Lemma 4.5. *Ist im Hilbertraum* $\widehat{\mathfrak{h}(H)} \otimes \mathcal{H}$ *ein Operator* K *durch eine Schar von Operatoren* $K(\chi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *wie folgt definiert:* $(KF)(\chi) := K(\chi)F(\chi)$*; dann gilt*

$$\|K\| = \sup_{\chi \in \hat{H}} \|K(\chi)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Durch Anwenden dieser Tatsache erhalten wir

$$\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\hat{R} \otimes W)(g_j)\|_{\widehat{\mathfrak{h}(H)} \otimes \mathcal{H}} = \sup_{\chi \in \hat{H}} \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{\chi(g_j)} W(g_j)\|_{\mathcal{H}}.$$

Mit χ ist auch $\overline{\chi}(f) := \overline{\chi(f)}$ ein Charakter, zu untersuchen ist also

$$\sup_{\chi \in \hat{H}} \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi(g_j) W(g_j)\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.18}$$

Die symplektische Form $\sigma(f,g)$ liefert spezielle Charaktere

$$\chi_g(f) := e^{i\sigma(f,g)}.$$

Lemma 4.6. *Die speziellen Charaktere* $\{\chi_g : g \in H\}$ *liegen bezüglich der eingeführten Topologie dicht in* $\hat{H}$*.*

Beim Nachrechnen dieses Resultats wird, benutzt, daß $\sigma(\cdot,\cdot)$ nichtausgeartet ist. Man beachte weiter, daß $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi(g_j) W(g_j)$ eine stetige Funktion von χ ist, so daß es genügt, das Supremum (4.18) über die dichte Menge $\{\chi_g, g \in H\}$ zu erstrecken, also

$$\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\hat{R} \otimes W)(g_j)\| = \sup_{g \in H} \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_g(f_j) W(f_j)\|.$$

Aus der Weyl–Relation (4.15) ergibt sich

$$W(f+g) = e^{\frac{i}{2}\sigma(f,g)} W(f)W(g) = e^{\frac{i}{2}\sigma(g,f)} W(g)W(f),$$

d.h.

$$e^{i\sigma(f,g)} W(f)W(g) = W(g)W(f)$$

oder

$$e^{i\sigma(f_j,g)} W(f_j) = W(g)W(f_j)W(g)^*. \tag{4.19}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{g \in H} \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{i\sigma(f_j,g)} W(f_j)\| &= \sup_{g \in H} \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j W(g)W(f_j)W(g)^*\| \\
&= \sup_{g \in H} \|W(g)\Big\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j W(f_j)\Big\} W(g)^*\| \\
&= \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j W(f_j)\|.
\end{aligned}$$

Damit ist (4.17) bewiesen. Diese Isometrieeigenschaft liefert sofort, daß die Zuordnung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j W(g_j) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (R \otimes W)(g_j)$$

eine eindeutig definierte ist, und daß die stetige Fortsetzung auf ganz $\mathcal{A}$ eine algebraische Isomorphie zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ stiftet. □

4.3 Reguläre Darstellungen der CCR–Algebra

Vorerst betrachten wir den Fall von $n < \infty$ Freiheitsgraden, d.h.

$$H = \mathbb{C}^n, \qquad \sigma(f,g) = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle, \qquad \langle f, g\rangle = \sum \overline{f}_j g_j.$$

Wir haben $\mathrm{CCR}(H,\sigma)$ mit der Erzeugenden $W(f)$ als abstrakte Observablenalgebra des Systems aus n Freiheitsgraden, die die Weyl–Relation erfüllen.

Definition 4.7. *Ein Zustand ω ist eine positive normierte stetige Linearform auf $\mathcal{A} := \mathrm{CCR}(H,\sigma)$, d.h. für $A \geq 0$ ist $\omega(A) \geq 0$ und $\omega(\mathbf{1}) = 1$.*

ω erzeugt eine GNS–Darstellung $\{\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega\}$ von $\mathcal{A}$. Wir untersuchen nun, welche Zustände physikalisch sinnlos sind. Sei $\{\mathcal{H}, \pi\}$ eine Darstellung von $\mathcal{A} = \mathrm{CCR}(H,\sigma)$ auf $\mathcal{H}$, $f \in \mathbb{C}^n$, λ reell, $f \neq 0$. Dann ist

$$\pi(W(\lambda f)) = U_f(\lambda),$$

wobei $U_f(\lambda)$ eine unitäre Operatorgruppe auf $\mathcal{H}$ ist, mit

$$U_f(\lambda_1 + \lambda_2) = U_f(\lambda_1) U_f(\lambda_2), \qquad U_f(0) = 1.$$

$U_f(\lambda)$ sollte diejenige Observable repräsentieren, die Generator dieser Gruppe ist. $U_f(\lambda)$ besitzt nach dem Satz von Stone jedoch genau dann einen Generator A_f, wenn $U_f(\lambda)$ stark stetig auf $\mathcal{H}$ ist. Daher schränken wir uns ein und interessieren uns nur für solche Darstellungen von $\mathcal{A}$, bei denen alle Gruppen $U_f(\lambda)$, $f \neq 0$, $f \in \mathbb{C}^n$, (selbstadjungierte) Erzeugende haben, die u.U. unbeschränkt sein können.

Definition 4.8. *Eine Darstellung heißt regulär, wenn die unitäre Operatorgruppe $U_f(\lambda)$, $f \neq 0$, $f \in \mathbb{C}^n$, einen (selbstadjungierten) u.U. unbeschränkten Generator besitzt.*

Definition 4.9. *Ein Zustand ω von $\mathcal{A}$ heißt regulär, wenn die zugehörige GNS–Darstellung regulär ist.*

Wir betrachten also nur solche Zustände, in denen *Orte* und *Impulse* (als harmonisch konjugierte Variablen) auch als Observablen existieren!

Lemma 4.10. *Ein Zustand ω ist genau dann regulär, wenn $\omega(\lambda f)$ stetig in λ (λ reell) für alle $f \in \mathbb{C}^n$ ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Für einen regulären Zustand ist $\{\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega\}$ regulär und somit

$$\omega(\lambda f) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(W(\lambda f))\Omega_\omega)$$

stetig in λ.

($\Leftarrow$) Wenn $\omega(\lambda f)$ stetig in λ ist, gilt

$$\begin{aligned}
&\|(\pi_\omega(W(\lambda f)) - \mathbf{1})\pi_\omega(W(g))\Omega_\omega\|^2 \\
&= \langle \pi_\omega(W(\lambda f) - \mathbf{1})\pi_\omega(W(g))\Omega_\omega, \pi_\omega(W(\lambda f) - \mathbf{1})\pi_\omega(W(g))\Omega_\omega\rangle \\
&= \langle \pi_\omega(W(\lambda f)W(g))\Omega_\omega, \pi_\omega(W(\lambda f)W(g))\Omega_\omega\rangle + \langle \pi_\omega(W(g))\Omega_\omega, \pi_\omega(W(g))\Omega_\omega\rangle \\
&\quad - \langle \pi_\omega(W(g))\Omega_\omega, \pi_\omega(W(\lambda f)W(g))\Omega_\omega\rangle - \langle \pi_\omega(W(\lambda f)W(g))\Omega_\omega, \pi_\omega(W(g))\Omega_\omega\rangle \\
&= 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \pi_\omega(W(g))\Omega_\omega, \pi_\omega(W(\lambda f)W(g)\Omega)\rangle \\
&= 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \Omega_\omega, \pi_\omega(W(-g)W(\lambda f)W(g))\Omega_\omega\rangle \\
&= 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \Omega_\omega, e^{-i\sigma(\lambda f, g)}\pi_\omega(W(\lambda f))\rangle \\
&= 2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{-i\lambda\sigma(f,g)}\langle \Omega_\omega, \pi_\omega(W(\lambda f))\Omega_\omega\rangle) \\
&= 2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{-i\lambda\sigma(f,g)}\omega(W(\lambda f))) \\
&\to 0 \qquad \text{für } \lambda \to 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\pi_\omega(W(\lambda f))$ stark stetig auf der dichten Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{spa}\{\pi_\omega(W(g))\Omega_\omega, g \in H\}.$$

Da $\pi_\omega(W(\lambda f))$ jedoch unitär ist, gilt die starke Stetigkeit auf ganz $\mathcal{H}$. Nach dem Satz von Stone und Definition 4.8 liefert dies das Ergebnis.

□

Bemerkung. Die Darstellung $R_\sigma(g)$ auf $\bigoplus_{f\in\mathbb{C}^n} \mathbb{C}_f \equiv \mathfrak{h}_0(\mathbb{C}^n)$ bzw. auf $\mathfrak{h}(\mathbb{C}^n)$, die bei den Existenz– und Eindeutigkeitsfragen von $\mathcal{A}$ so gute Dienste geleistet hat, ist nicht regulär, denn es gilt

$$(R_\sigma(g))F(f) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}F(f+g), \qquad R_\sigma(0) = 1,$$

also

$$(R_\sigma(g)F)(f) - (R_\sigma(0)F(f) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}F(f+g) - F(f).$$

Die Norm ist

$$\|R_\sigma(g)F - R_\sigma(0)F\|^2 = \sum_{f\in\mathbb{C}^n} |e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}F(f+g) - F(f)|^2.$$

Sei nun z.B. $g \neq 0$ und

$$F(f) = \begin{cases} 1 & f = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$\|R_\sigma(g)F - R_\sigma(0)F\|^2 = |F(0)|^2 + |e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(-g,g)}F(0)|^2 = 2.$$

Also kann $R_\sigma(g)$ nicht stark stetig sein.

Es muß sogar noch geklärt werden, ob es überhaupt reguläre Darstellungen gibt, welche Eigenschaften sie haben und ob man sie klassifizieren kann. Dazu sollen einige Eigenschaften regulärer Darstellungen hergeleitet werden. Im folgenden sei

$$H := \mathbb{C}^n, \qquad \sigma(f,g) = \mathrm{Im}(f,g), \qquad \mathcal{A} := \mathrm{CCR}(H,\sigma),$$

und $\{\mathcal{H}, \pi(\mathcal{A})\}$ sei eine reguläre Darstellung. Durch

$$U(z) := \pi(W(z))$$

sind unitäre Operatoren auf $\mathcal{H}$ gegeben.

Lemma 4.11. *$U(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C}^n$ stark stetig.*

Beweis. Sei $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ und somit

$$U(z) = U(x + iy) = e^{\frac{i}{2}\langle x,y\rangle} U(x)U(iy).$$

Mit einer Orthonormalbasis (e_ρ) in $\mathbb{R}^n$ gilt $x = \sum_{\rho=1}^n x_\rho e_\rho$,

$$U\Big(\sum_{\rho=1}^n x_\rho e_\rho\Big) = \prod_{\rho=1}^n U(x_\rho e_\rho).$$

Die Komponenten des Produktes sind einzeln stark stetig. Dann ist auch das Produkt stark stetig, denn

$$\begin{aligned} U(x) - \mathbf{1} &= \prod_{\rho=1}^n U(x_\rho e_\rho) - \mathbf{1} \\ &= U(x_1 e_1) \dots U(x_{n-1} e_{n-1})[U(x_n e_n) - \mathbf{1}] + \\ &\quad + U(x_1 e_1) \dots U(x_{n-2} e_{n-2})[U(x_{n-1} e_{n-1}) - \mathbf{1}] + \dots + [U(x_1 e_1) - \mathbf{1}]. \end{aligned}$$

□

Unter Verwendung der starken Stetigkeit von $U(z)$ können wir eine Darstellung von $L^1(\mathbb{C}^n)$ aufbauen. Der Raum $L^1(\mathbb{C}^n)$ der integrablen Funktionen enthält alle Funktionen, für die

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x + iy)|\, dxdy < \infty \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|\, dz < \infty$$

gilt.

Definition 4.12. *Wir definieren einen Operator $U(f)$ für $f \in L^1(\mathbb{C}^n)$ durch*

$$U(f)x := \int_{\mathbb{C}^n} f(z)U(z)x\, dz, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{4.20}$$

Durch die starke Stetigkeit von $U(z)x$ wird (4.20) Bochner–integrabel mit

$$\|f(z)U(z)x\| \le |f(z)|\|x\|$$

und

$$\|U(f)x\| \le \int \|f(z)U(z)x\|\, dz \le \int |f(z)|\, dz \cdot \|x\|,$$

also

$$\|U(f)\| \le \int |f(z)|\, dz = \|f\|_{L^1}.$$

Wir schreiben auch

$$U(f) = \int f(z)U(z)\, dz,$$

gemeint als stark konvergentes Operatorintegral.

Bemerkung. Durch die Bildung von $U(z)$ gemäß (4.20) erhalten wir viel mehr Operatoren als durch einen bloßen Normabschluß, also mehr als in $\pi(\mathcal{A})$ liegen.

Wir definieren nun eine „Faltung“ in $L^1(\mathbb{C}^n)$ so, daß wir für die Darstellung $f \mapsto U(f)$ eine Produktformel erhalten:

$$(f * g)(z) := \int_{\mathbb{C}^n} f(z-w)g(w)e^{-\frac{i}{2}\sigma(z,w)}\,dw.$$

Damit läßt sich leicht

$$U(f * g) = U(f)U(g)$$

nachrechnen.

Lemma 4.13. *Die Zuordnung $L^1(\mathbb{C}^n) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{C}^n} f(z)U(z)\,dz$ ist injektiv, d.h. aus $\int f(z)U(z)\,dz = 0$ folgt $f = 0$.*

Beweis. Sei $U(f) = \int f(z)U(z)\,dz = 0$. Dann ist

$$\int f(z)\langle u, U(z)v\rangle\,dz = 0, \qquad u, v \in \mathcal{H}.$$

Wir wählen $u \mapsto U(z_0)u$, $v \mapsto U(z_0)v$ mit z_0 beliebig, aber fest:

$$\begin{aligned}
0 &= \int f(z)\langle U(z_0)u, U(z)U(z_0)v\rangle\,dz \\
&= \int f(z)\langle u, U(-z_0)U(z)U(z_0)v\rangle\,dz \\
&= \int e^{-i\sigma(z,z_0)}f(z)\langle u, U(z)v\rangle\,dz \qquad \text{nach (4.19)} \\
&= \int e^{i\sigma(z_0,z)}g(z)\,dz, \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

mit $g(z) := f(z)\langle u, U(z)v\rangle \in L^1(\mathbb{C}^n)$, da $\langle u, U(z)v\rangle$ beschränkt ist. Für die symplektische Form haben wir $\sigma(z_0, z) = \mathrm{Im}(z_0, z)_{\mathbb{C}^n}$. Mit $z_0 = x_0 + iy_0$ und $z = x + iy$ gilt

$$(z_0, z) = (\overline{x_0 + iy_0}, x + iy) = (x_0, x) + (y_0, y) + i\{(x_0, y) - (y_0, x)\},$$

und somit

$$\sigma(z_0, z) = (x_0, y) - (y_0, x) = \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

(4.21) kann dann so interpretiert werden, daß die Fouriertransformierte von $g(z)$ als Funktion auf $\mathbb{R}^{2n}$ identisch Null ist. Dann ist auch $g \equiv 0$, und somit auch $f(z)$, denn i.a. ist $\langle u, U(z)v\rangle \neq 0$. □

Wir definieren jetzt den „Schlüssel“ für die Übersicht über alle regulären Darstellungen von $\mathcal{A}$:

Definition 4.14. *Für $z = x + iy$, $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2$ sei*

$$f_0(z) := (2\pi)^{-n}e^{-\frac{1}{4}|z|^2}.$$

Wegen $f_0 \in L^1(\mathbb{C}^n)$ ist $U(f_0)$ wohldefiniert.

Lemma 4.15. *Es gilt*

$$U(f_0)U(z_0)U(f_0) = U(f_0)e^{-\frac{1}{4}|z_0|^2}$$

für alle $z_0 \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Wir haben:

$$\begin{aligned}
&U(f_0)U(z_0)U(f_0)\\
&= \iint e^{-\frac{1}{4}(z,z)}(2\pi)^{-n}U(z)U(z_0)e^{-\frac{1}{4}(w,w)}(2\pi)^{-n}U(w)\,dzdw\\
&= (2\pi)^{-2n}\iint e^{-\frac{1}{4}(z,z)-\frac{1}{4}(w,w)}e^{-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)}U(z+z_0)U(w)\,dzdw\\
&= (2\pi)^{-2n}\iint e^{-\frac{1}{4}(z,z)-\frac{1}{4}(w,w)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z+z_0,w)}U(z+z_0+w)\,dzdw.
\end{aligned}$$

Sei nun $t := z + z_0 + w$ eine neue Integrationsvariable. Dann ist

$$\begin{aligned}
&U(f_0)U(z_0)U(f_0)\\
&\qquad = (2\pi)^{-2n}\iint e^{-\frac{1}{4}(z,z)-\frac{1}{4}(t-z-z_0,t-z-z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z+z_0,t-z-z_0)}\,dz\,U(t)\,dt. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Zuerst werten wir das Integral bezüglich z aus. Sei $\alpha := t - z_0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&\int e^{-\frac{1}{4}(z,z)-\frac{1}{4}(\alpha-z,\alpha-z)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z+z_0,t)}\,dz\\
&= \int e^{-\frac{1}{2}(z,z)-\frac{1}{4}(\alpha,\alpha)+\frac{1}{4}(z,\alpha)+\frac{1}{4}(\alpha,z)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,t)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z_0,t)}\,dz\\
&= e^{-\frac{1}{4}(\alpha,\alpha)}e^{-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z_0,t)}\int e^{-\frac{1}{2}(z,z)+\frac{1}{4}(z,\alpha)+\frac{1}{4}(\alpha,z)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,t)}\,dz \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Dies ist ein Gaußsches Integral, das wir übersichtlichkeitshalber mit reellen Grössen $z = z_1 + iz_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $z_0 + t = \beta_1 + i\beta_2$ berechnen. Der Exponent wird zu

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left((z_1,z_1) - i(z_2,z_1) + i(z_1,z_2) + (z_2,z_2)\right) +\\
&+\frac{1}{4}\left((z_1,\alpha_1) - i(z_2,\alpha_1) + i(z_1,\alpha_2) + (z_2,\alpha_2)\right) +\\
&+\frac{1}{4}\left((\alpha_1,z_1) - i(\alpha_2,z_1) + i(\alpha_1,z_2) + (\alpha_2,z_2)\right) -\\
&-\frac{i}{2}\operatorname{Im}\left((z_1,\beta_1) - i(z_2,\beta_1) + i(z_1,\beta_2) + (z_2,\beta_2)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left((z_1,z_1)+(z_2,z_2)\right) + \frac{1}{2}\left((z_1,\alpha_1)+(z_2,\alpha_2)\right) - \frac{i}{2}\left((z_1,\beta_2)+(z_2,\beta_1)\right),
\end{aligned}$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int e^{-\frac{1}{2}(z,z)+\frac{1}{4}(z,\alpha)+\frac{1}{4}(\alpha,z)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,t)}\,dz\\
&= \iint e^{-\frac{1}{2}|z_1|^2-\frac{1}{2}|z_2|^2+\frac{1}{2}(z_1,\alpha_1)+\frac{1}{2}(z_2,\alpha_2)-\frac{i}{2}(z_1,\beta_2)+\frac{i}{2}(z_2,\beta_1)}\,dz_1dz_2\\
&= \int e^{-\frac{1}{2}|z_1|^2+\frac{1}{2}(z_1,\alpha_1)-\frac{i}{2}(z_1,\beta_2)}\,dz_1\int e^{-\frac{1}{2}|z_2|^2+\frac{1}{2}(z_2,\alpha_2)+\frac{i}{2}(z_2,\beta_1)}\,dz_2 \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|z_1|^2 + \frac{1}{2}(z_1,\alpha_1) &= -\frac{1}{2}((z_1,z_1)-(z_1,\alpha_1))\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left(z_1-\frac{\alpha_1}{2}, z_1-\frac{\alpha_1}{2}\right)-\frac{(\alpha_1,\alpha_1)}{4}\right).\end{aligned}$$

Das linke Integral von (4.24) wird somit zu

$$\int e^{-\frac{1}{2}|z_1-\frac{\alpha_1}{2}|^2+\frac{1}{8}(\alpha_1,\alpha_1)} e^{-\frac{i}{2}(z_1-\frac{\alpha_1}{2},\beta_2)} e^{-\frac{i}{2}(\frac{\alpha_1}{2},\beta_2)}\, dz_1.$$

Nach analoger Rechnung für das zweite Integral folgt

$$\begin{aligned}(4.24) &= e^{\frac{1}{8}|\alpha_1|} e^{-\frac{i}{2}(\frac{\alpha_1}{2},\beta_2)} \int e^{-\frac{1}{2}|z_1-\frac{\alpha_1}{2}|^2} e^{-\frac{i}{2}(z_1-\frac{\alpha_1}{2},\beta_2)}\, dz_1 \cdot\\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{8}|\alpha_2|} e^{-\frac{i}{2}(\frac{\alpha_2}{2},\beta_1)} \int e^{-\frac{1}{2}|z_2-\frac{\alpha_2}{2}|^2} e^{\frac{i}{2}(z_2-\frac{\alpha_2}{2},\beta_1)}\, dz_2\\ &= e^{\frac{1}{8}|\alpha_1|} e^{-\frac{i}{4}(\alpha_1,\beta_2)} \underbrace{\int e^{-\frac{1}{2}|u|^2} e^{-\frac{i}{2}(u,\beta_2)}\, du}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|\frac{\beta_2}{2}|^2}} \cdot\\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{8}|\alpha_2|} e^{-\frac{i}{4}(\alpha_2,\beta_1)} \underbrace{\int e^{-\frac{1}{2}|u|^2} e^{\frac{i}{2}(u,\beta_1)}\, du}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|-\frac{\beta_2}{2}|^2}}\\ &= (2\pi)^n e^{\frac{1}{8}|\alpha_1|} e^{-\frac{i}{4}(\alpha_1,\beta_2)} e^{-\frac{1}{8}|\beta_2|^2} e^{\frac{1}{8}|\alpha_2|} e^{-\frac{i}{4}(\alpha_2,\beta_1)} e^{-\frac{1}{8}|\beta_1|^2}\\ &= (2\pi)^n e^{\frac{1}{8}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{8}|\beta|^2} e^{-\frac{i}{4}\{(\alpha_1,\beta_2)-(\alpha_2,\beta_1)\}}\\ &= (2\pi)^n e^{\frac{1}{8}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{8}|\beta|^2} e^{-\frac{i}{4}\operatorname{Im}(\alpha,\beta)}\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann in (4.23) eingesetzt werden, also

$$\begin{aligned}&\int e^{-\frac{1}{4}(z,z)-\frac{1}{4}(\alpha-z,\alpha-z)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z_0)-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z+z_0,t)}\, dz\\ &\qquad = (2\pi)^n e^{-\frac{1}{4}|\alpha|^2} e^{-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z_0,t)} e^{\frac{1}{8}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{8}|\beta|^2} e^{-\frac{i}{4}\operatorname{Im}(\alpha,\beta)}. \quad (4.25)\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}(t-z_0, z_0+t) &= (t,z_0)-(z_0,z_0)+(t,t)-(z_0,t)\\ &= -((z_0,t)-(t,z_0))+\ldots\\ &= -((z_0,t)-\overline{(z_0,t)})+\ldots\\ &= -2i\operatorname{Im}(z_0,t),\end{aligned}$$

also

$$Im(t-z_0,z_0+t) = \operatorname{Im}(-2i\operatorname{Im}(z_0,t)) = -2\operatorname{Im}(z_0,t)$$

und somit $-\frac{1}{4}(-2\operatorname{Im}(z_0,t)) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z_0,t)$. Damit verbleibt von (4.25) nur noch (unter Anwendung der Parallelogrammgleichung)

$$(2\pi)^n e^{-\frac{1}{8}\{|z-z_0|^2+|t+z_0|^2\}} = (2\pi)^n e^{-\frac{1}{4}|t|^2-\frac{1}{4}|z_0|^2}.$$

Nun kann dieses Ergebnis in (4.22) eingesetzt werden und bezüglich t integriert werden:

$$\begin{aligned} U(f_0)U(z_0)U(f_0) &= (2\pi)^{-n} e^{-\frac{1}{4}|z_0|^2} \int e^{-\frac{1}{4}|t|^2} U(t)\, dt \\ &= e^{-\frac{1}{4}|z_0|^2} U(f_0). \end{aligned}$$

□

4.4 Der v. Neumann Projektor

Wir setzen

$$P := U(f_0) = \int f_0(z) U(z)\, dz \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Der so definierte Operator hängt natürlich von der gewählten Darstellung π der Algebra $\mathrm{CCR}(\mathbb{C}^n)$ ab, will man dies unterstreichen, schreibt man besser P_π anstelle von P. Dieser Operator soll nun etwas näher untersucht werden:

Lemma 4.16. *P besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) $P \neq 0$,

(ii) $P^2 = P$,

(iii) $P = P^*$.

Beweis. (i) Folgt aus Lemma 4.13, denn es ist $f_0 \neq 0$.

(ii) Folgt aus Lemma 4.15 für $z_0 = 0$.

(iii) Es gilt

$$P^* = \int \overline{f_0(z)} U(z)^*\, dz = \int f_0(z) U(-z)\, dz.$$

Da über eine gerade Dimension $2n$ integriert wird, gilt $dz = d(-z)$ und $f_0(z) = f_0(-z)$, so daß $P = P^*$ folgt.

□

Also ist P_π ein von Null verschiedener Orthoprojektor auf $\mathcal{H}$. P_π wird *v. Neumann–Projektor* genannt. Wir beschränken uns im folgenden auf nichtausgeartete Darstellungen π von der Algebra $\mathcal{A}$:

Definition 4.17. *Eine Darstellung heißt nichtausgeartet, wenn sie keine „Nullbestandteile" enthält, es ist also* nicht $\pi = \pi_0 \oplus \{0\}$. *Eine andere Formulierung wäre, daß $x = 0$ ist, wenn $\pi(A)x = 0$ ist für alle $A \in \mathcal{A}$.*

Lemma 4.18. *π sei nichtausgeartet und Q sei ein reduzierender Projektor von π. Dann ist*

$$P_{\pi|Q\mathcal{H}} = P_\pi \restriction Q\mathcal{H}.$$

Beweis. $\pi \restriction Q\mathcal{H}$ und $\pi \restriction Q^\perp\mathcal{H}$ sind beide von Null verschieden. Da Q reduzierend ist, gilt $Q\pi(A) = \pi(A)Q$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Mit

$$P_\pi = (2\pi)^{-n} \int e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \pi(W(z))\, dz$$

folgt $P_\pi Q = Q P_\pi$ und

$$P_{\pi\restriction Q\mathcal{H}} = (2\pi)^{-n} \int e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \pi(W(z)) \restriction Q\mathcal{H}\, dz = P_\pi \restriction Q\mathcal{H}.$$

□

Theorem 4.19. *π sei nichtausgeartet und P der zugehörige v. Neumannprojektor. Dann ist*

$$\mathrm{clo}_{\|\cdot\|} \underbrace{\{\pi(A)P\mathcal{H}, A \in \mathcal{A}\}}_{=:\mathcal{L}} = \mathcal{H}.$$

Beweis. Wir nehmen an, es sei $\mathcal{L}^\perp \neq \{0\}$. $\mathcal{L}^\perp$ ist ein invarianter Teilraum für die $\pi(A)$, denn für $f \in \mathcal{L}^\perp$ und $u \in \mathcal{L}$ gilt

$$(u, \pi(A)f) = (\pi(A)^* u, f) = (\underbrace{\pi(A^*)}_{\in\mathcal{L}} u, f) = 0.$$

Für den Orthoprojektor Q von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{L}^\perp$ ist $\pi \restriction Q\mathcal{H}$ eine von Null verschiedene Darstellung von $\mathcal{A}$. Sei $Qy = y$, dann ist für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$0 = (y, Px) = (Py, x),$$

also $Py = 0$ für alle $y \in Q\mathcal{H}$. Dies widerspricht jedoch der Injektivität bzw. der Tatsache $P \restriction Q\mathcal{H} \neq 0$. □

Lemma 4.20. *Mit einem Vektor $e \in P\mathcal{H}$, $\|e\| = 1$, läßt sich mit dem Darstellungsraum*

$$\mathcal{T}_e := \mathrm{clo}\{\pi(A)e, A \in \mathcal{A}\} = \mathrm{clo\,spa}\{\pi(W(z))e, z \in \mathbb{C}^n\}$$

eine (zyklische) Darstellung aufspannen.

Beweis. Es gilt

$$\pi(W(z'))\pi(W(z))e = e^{-\frac{i}{2}\sigma(z',z)} \pi(W(z'+z))e.$$

e ist zyklischer Vektor dieser Darstellung. □

Bemerkung. Für den Neumann–Projektor haben wir

$$PU(z_0)P = e^{-\frac{1}{4}|z_0|^2} P.$$

Das bedeutet z.B. für Vektoren $e = Pe$, $e' = Pe'$, daß

$$\begin{aligned}(e, U(z_0)e') &= (Pe, U(z_0)Pe') = (e, PU(z_0)Pe') \\ &= (e, e^{-\frac{1}{4}|z_0|^2} Pe') = e^{-\frac{1}{4}|z_0|^2}(e, e')\end{aligned}$$

gilt.

Dieses Resultat verwenden wir sofort im folgenden

Lemma 4.21. *Seien $e, e' \in P\mathcal{H}$ und $e \perp e'$. Dann sind auch die beiden Darstellungsräume $\mathcal{T}_e$ und $\mathcal{T}_{e'}$ orthogonal, $\mathcal{T}_e \perp \mathcal{T}_{e'}$.*

Beweis. Es genügt, die erzeugenden Elemente $W(z)$ bzw. $\pi(W(z)) = U(z)$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}(U(z)e, U(z')e') &= (e, U(z)^* U(z')e') = (e, U(-z)U(z')e') \\ &= (e, e^{-\frac{i}{2}\sigma(-z,z')}U(z'-z)e') = e^{\frac{i}{2}\sigma(z,z')}(e, U(z'-z)e') \\ &= e^{\frac{i}{2}\sigma(z,z')}e^{-\frac{1}{4}(z'-z)^2}(e,e') = 0.\end{aligned}$$

□

Der Neumann–Projektor gibt auch genau Auskunft darüber, wann die Darstellung irreduzibel ist:

Lemma 4.22. *Eine nichtausgeartete Darstellung π ist genau dann irreduzibel, wenn* $\dim P = 1$ *ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei π irreduzibel. Dann muß $\dim P = 1$ sein, denn für $\dim P > 1$ gäbe es in $P\mathcal{H}$ zwei orthogonale Einheitsvektoren $e \perp e'$. Diese würden nichttriviale invariante Teilräume $\mathcal{T}_e \perp \mathcal{T}_{e'}$ der Darstellung π erzeugen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Irreduzibelität von π.

($\Leftarrow$) Sei $\dim P = 1$. Man nehme an, es gäbe einen reduzierenden Projektor $Q \neq 0$, also $Q\pi(A) = \pi(A)Q$. Dann folgt

$$PQ = QP$$

für den Neumannprojektor. Also ist PQ auch ein Orthoprojektor und $P = PQ + PQ^\perp$, d.h. P kann in zwei orthogonale Teilprojektoren zerlegt werden. Wegen $\dim P = 1$ ist oBdA $PQ^\perp = 0$ und somit $P = PQ$. Die Darstellungen π und $\pi \restriction Q\mathcal{H}$ erzeugen ein und denselben Neumannprojektor und nach Theorem 4.19 ist $Q\mathcal{H} = \mathcal{H}$, also π irreduzibel.

□

Mit diesem Kriterium kann man mühelos nachrechnen, daß die Darstellungen $\mathcal{T}_e$ alle irreduzibel sind.

Lemma 4.23. *Die Darstellung π ist auf $\mathcal{T}_e$ irreduzibel.*

Beweis. Wir haben $\{\pi, \mathcal{H}\}$ und den Neumannprojektor P. Es ist $e \in P\mathcal{H}$. Sei Q_e der Orthoprojektor auf $\mathcal{T}_e$. Dann soll $\dim PQ_e = 1$ sein (beachte $PQ_e = Q_e P$). Nehmen wir an, es sei $\dim PQ_e > 1$. Dann gibt es ein $e' \in PQ_e\mathcal{H}$ mit $e' \perp e$ und wir haben die orthogonalen Darstellungsräume $\mathcal{T}_e \perp \mathcal{T}_{e'}$. Weil aber $e' \in Q_e\mathcal{H}$ ist, und $Q_e\mathcal{H}$ ein invarianter Teilraum ist, folgt $\mathcal{T}_{e'} \subseteq \mathcal{T}_e$, also ein Widerspruch. □

Die Teildarstellungen auf den $\mathcal{T}_e$ sind nicht nur irreduzibel, sondern sie sind sogar alle untereinander unitär äquivalent:

Lemma 4.24. *Seien $e, e' \in P\mathcal{H}$, $\|e\| = \|e'\| = 1$. Dann sind die Darstellungen $\pi \restriction \mathcal{T}_e$ und $\pi \restriction \mathcal{T}_{e'}$ unitär äquivalent.*

Beweis. Wir müssen eine isometrische Abbildung von $\mathcal{T}_e$ auf $\mathcal{T}_{e'}$ konstruieren, die mit den Darstellungsoperatoren vertauscht. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned} e &\mapsto e' \\ U(z)e &\mapsto U(z)e' \\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j U(z_j)e &\mapsto \sum_{j=1}^{l} \lambda_j U(z_j)e'. \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen können, daß diese Zuordnung die Norm invariant läßt, so wissen wir sofort, daß sie eine Isometrie von $\mathcal{T}_e$ auf $\mathcal{T}_{e'}$ stiftet (die Abbildung ist dann wohldefiniert, auf und isometrisch). Es ist

$$\begin{aligned} \|\sum_j \lambda_j U(z_j)e\|^2 &= \Big(\sum \lambda_j U(z_j)e, \sum \lambda_k U(z_k)e\Big) \\ &= \sum \overline{\lambda_j}\lambda_k (e, U(-z_j)U(z_k)e) \\ &= \sum \overline{\lambda_j}\lambda_k e^{\frac{i}{2}\sigma(z_j,z_k)}(e, U(z_k - z_j)e) \\ &= \sum \overline{\lambda_j}\lambda_k e^{\frac{i}{2}\sigma(z_j,z_k)} e^{-\frac{1}{4}(z_k-z_j)^2}(e,e). \end{aligned}$$

Wegen $(e,e) = 1 = (e',e')$ folgt hieraus die Gleichheit der Normen. Damit haben wir eine Isometrie $\Phi : \mathcal{T}_e \mapsto \mathcal{T}_{e'}$ und es ist

$$\begin{aligned} U(z)\sum \lambda_j U(z_j)e &= \sum \lambda_j U(z)U(z_j)e \\ &= \sum \lambda_j e^{-\frac{i}{2}\sigma(z,z_j)} U(z+z_j)e \\ &\to U(z)\sum \lambda_j U(z_j)e', \end{aligned}$$

also $\Phi(U(z)f) = U(z)\Phi f$ oder $\Phi U(z) = U(z)\Phi$, d.h.

$$U(z) \restriction \mathcal{T}_{e'} = \Phi U(z) \restriction \mathcal{T}_e \Phi^{-1}.$$

□

Damit erhalten wir mittels des Neumannprojektors eine Zerlegung der gegeben regulären Darstellung π von $\mathcal{A}$ in eine direkte Summe irreduzibler unitär äquivalenter Darstellungen:

Für $\{\pi, \mathcal{H}\}$ gegeben erhalten wir den Neumann–Teilraum $P_\pi \mathcal{H}$ (dessen Dimension möglicherweise überabzählbar ist) mit der Orthonormalbasis e_α und den zugehörigen invarianten Teilräumen $\mathcal{T}_{e_\alpha}$. Dann ist nach Theorem 4.19

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{e_\alpha} \qquad \text{(Hilbertsumme)}.$$

Ist $\mathcal{H}$ separabel, so tritt nur eine abzählbare direkte Summe auf.

Theorem 4.25. (Ergebnistheorem)

(i) CCR($\mathbb{C}^n$) *besitzt nur eine einzige irreduzible reguläre Darstellung (bis auf unitäre Äquivalenz).*

(ii) *Jede reguläre Darstellung ist eine direkte Summe dieser einen irreduziblen Darstellung, oder: jede reguläre Darstellung ist ein* Vielfaches *dieser einen irreduziblen Darstellung.*

Bemerkung. Die Matrixelemente in Bezug auf die zyklischen Vektoren e_α sind

$$(e_\alpha, \pi(W(z))e_\beta) = (e_\alpha, P_\pi(W(z))Pe_\beta) = e^{-\frac{1}{4}|z|^2}\delta_{\alpha\beta}. \tag{4.26}$$

für die erzeugenden Elemente $W(z)$

Wir wissen jetzt, daß $\mathrm{CCR}(\mathbb{C}^n)$ genau eine irreduzible reguläre Darstellung besitzt, wir wissen jedoch nicht, wie sie konkret aussieht. Aus physikalischen Überlegungen heraus sind wir jedoch ziemlich sicher, daß es es sich um die „Schrödingerdarstellung“ handeln muß. Wir geben nun zwei Formen an: die „Schrödingerdarstellung“ und die „Fockdarstellung“.

4.5 Die Schrödingerdarstellung

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur den Fall $n = 1$.

In der Einleitung 4.1. ist eine Darstellung bereits eingeführt worden. Wir rekapitulieren kurz: $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$. Sei $x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir die Darstellung mit π, so müssen

$$U(x) := \pi(W(x))$$
$$V(y) := \pi(W(iy))$$

auf $\mathcal{H}$ stark stetige unitäre Gruppen sein. Es ist für $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$(U(x)f)(\lambda) := e^{-ix\lambda} f(\lambda),$$
$$(V(y)f)(\lambda) := f(\lambda - y).$$

Daß $V(\cdot)$ stark stetig ist sieht man sofort so: es muß $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda - y) - f(\lambda)|^2 \, d\lambda$ gegen Null konvergieren für $y \to 0$. Weil $\|V(y) - 1\| \leq 2$ ist, genügt es, eine dichte Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zu betrachten, z.B. $\mathcal{H} := C_0^\infty(\mathbb{R})$. Für $f \in \mathcal{D}$ ist dann $|f(\lambda)| < C$ und $|f(\lambda - y) - f(\lambda)| < 2C$, sowie $f(\lambda - y) - f(\lambda) \to 0$ für $\lambda \to 0$ punktweise, nach dem Satz von Lebesgue folgt dnn die Behauptung.

Setzt man nun

$$\pi(W(z)) := e^{\frac{i}{2}xy} U(x)V(y)$$

so sind alle Weyl–Beziehungen erfüllt, d.h. π ist eine reguläre Darstellung von CCR($\mathbb{C}$). Sie heißt die *Schrödingerdarstellung.*

Lemma 4.26. *Die Schrödingerdarstellung ist irreduzibel.*

Beweis. Es genügt, den. v. Neumann–Projektor P ausurechnen, ist $\dim P = 1$, so sind wir fertig. Es ist

$$\begin{aligned}(Pf)(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}|x+iy|^2} e^{\frac{i}{2}xy} e^{-ix\lambda} f(\lambda - y) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)} e^{\frac{i}{2}xy} e^{-ix\lambda} f(\lambda - y) \, dx \, dy \\ &=: \mathcal{I}.\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2 + \frac{i}{2}xy - i\lambda x} \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}i\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda} \, dx \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 + it\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\lambda\right)} \, dt \\ &= \sqrt{2}(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\lambda\right)},\end{aligned}$$

wobei $\frac{x}{\sqrt{2}} =: t$ gesetzt ist. Dann wird

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}y^2} f(\lambda - y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2\lambda y + 2\lambda^2\right)} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \lambda y} f(\lambda - y) \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} f(t) \, dt \qquad t := \lambda - y \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}t^2} f(t) \, dt
\end{aligned}$$

Setzt man

$$e(t) := \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

so ist $\|e\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, e ist der Grundzustand des harmonischen Oszillators und es ist

$$\mathcal{I} = (e, f)e(\lambda),$$

d.h.

$$P = (e, \cdot)e$$

Der v. Neumann Projektor in der Schrödingerdarstellung ist also ein eindimensionaler Projektor, der auf den Grundzustand des harmonischen Oszillators projiziert, also $\dim P = 1$. Folglich handelt es sich bei der Schrödingerdarstellung um eine reguläre irreduzible Darstellung. □

Es ergibt sich weiter

$$(e, \pi(W(z))e) = e^{-\frac{1}{4}|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Als irreduzible Darstellung ist π insbesondere zyklisch. Die GNS–Darstellung $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi\}$ des Zustands

$$\varphi(A) := (e, \pi(A)e), \qquad A \in \mathrm{CCR}(\mathbb{C}),$$

ist also nach dem Eindeutigkeitssatz für GNS–Darstellungen (bis auf Unitäräquivalenz) gerade die Schrödingerdarstellung $\{L^2(\mathbb{R}), \pi, e\}$.

Lemma 4.27. *Man hat eine Bijektion der reinen Zustände φ von* $\mathrm{CCR}(\mathbb{C})$ *zu den Vektoren u der Einheitssphäre im Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$ der Schrödingerdarstellung (modulo eines Phasenfaktors λ, $|\lambda| = 1$), die gegeben ist durch*

$$\varphi(A) = (u, \pi(A)u), \qquad \|u\| = 1.$$

Beweis. Sei φ rein und regulär. Dann ist die GNS–Darstellung $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi\}$ irreduzibel. Also existiert eine Isometrie Φ von $\mathcal{H}_\varphi$ auf $\mathcal{H}$ mit $\pi(A) = \Phi\pi_\varphi(A)\Phi^{-1}$. Sei $\Phi\Omega_\varphi =: e' \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A), \Omega_\varphi)\\ &= (\Phi\Omega_\varphi, \Phi\pi_\varphi(A)\Omega_\varphi)\\ &= (\Phi\Omega_\varphi, \Phi\pi_\varphi(A)\Phi^{-1}\Phi\Omega_\varphi)\\ &= (e', \pi(A)e'),\end{aligned}$$

d.h. φ kann durch den Einheitsvektor $u := e' \in \mathcal{H}$ realisiert werden.

Umgekehrt, zu jedem $u \in \mathcal{H}$ gehört der Zustand $\varphi(A) := (u, \pi(A)u)$, $\|u\| = 1$, und dieser ist regulär und rein, denn betrachtet man

$$\mathrm{clo}\{\pi(A)u : \ A \in \mathrm{CCR}(\mathbb{C})\} =: \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H},$$

so ist $\mathcal{K}$ invariant gegen $\pi(A)$, aber π ist ja irreduzibel, also folgt $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ und φ ist rein. □

Die Einheitssphäre eines GNS–Hilbertraumes $\mathcal{H}_\varphi$ bezeichnet man gelegentich als das durch φ erzeugte *Folium* von Zuständen.

Es erhebt sich die Frage: wodurch ist eigentlich die Schrödingerdarstellung ausgezeichnet? Antwort: der Ortsoperator Q, d.h. also der Generator der Gruppe $U(x) = e^{-ixQ}$ hat Diagonalgestalt, es ist ja $(U(x)f)(\lambda) = e^{-ix\lambda}f(\lambda)$, hieraus ergibt sich sofort $(Qf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$. Q ist der Multiplikationsoperator mit der Variablen λ, die damit als „Ortsvariable“ identifiziert ist.

Wir gehen jetzt daran, eine andere Darstellungsform der einzigen irreduziblen regulären Darstellung von $\mathrm{CCR}(\mathbb{C}^n)$ herzuleiten, in der ein anderer ausgezeichneter Operator diagonal ist, nämlich der Hamiltonoperator des isotropen harmonischen Oszillators mit n Freiheitsgraden. Diese Darstellung heißt *Fockdarstellung* und sie ist besonders für den Übergang zur Feldtheorie bedeutsam. Zuvor folgt ein ganz kurzer Exkurs über die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren.

4.6 Exkurs über die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren A auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ besagt, daß jedem A ein Spektralmaß $E(\cdot)$ auf $\mathbb{R}$ zugeordnet werden kann, so daß $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda E(d\lambda)$ im Falle eines beschränkten A ein Operatornormkonvergentes Spektralitegral und $Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda E(d\lambda)f$ im Falle eines unbeschränkten A für $f \in \mathrm{dom}\, A$ ein stark konvergentes Spektralintegral ist. Der Spektralsatz wirft bekanntlich das Problem auf, das Spektralintegral so umzuschreiben bzw. auszuwerten, daß die Wirkungsweise vn A in Evidenz gesetzt wird. Dies hängt zusammen mit der Angabe eines „vollständigen Systems unitärer Invarianten“ für A und damit mit der *Multiplizitätstheorie* und der Theorie der *Direkten Integrale* (Einzelheiten z.B. in Baumgärtel/Wollenberg [2]). Ein direktes Integral auf $\mathbb{R}$ wird als Hilbertraum aufgebaut mittels eines positiven Borel–maßes auf $\mathbb{R}$ und einer Familie $\mathbb{R} \ni \lambda \to \mathcal{H}_\lambda$ von Hilberträumen, indem man Funktionen $\mathbb{R} \ni \lambda \to f(\lambda) \in \mathcal{H}_\lambda$ betrachtet, für die $\|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}$ Borel–meßbar in Bezug auf μ ist und $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}\, \mu(d\lambda) < \infty$ gilt (es kommt noch eine weitere Bedingung technischer Art hinzu, die hier weggelasen wird). Diese Funktionen $u \in \{f(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ bilden dann einen Hilbertraum, der mit $L^2(\mathbb{R}, d\mu, \mathcal{H}_\lambda)$ bezeichnet wird: das ist das direkte Integral der Hilberträume $\mathcal{H}_\lambda$ bezüglich μ.

Es gibt nun zu jedem A ein direktes Integral $L^2(\mathbb{R}, d\mu, \mathcal{H}_\lambda)$ und einen Isomorphismus auf $\mathcal{H}$, so daß A unitäräquivalent wird zum Multipikationsoperator mit λ (das ist die Diagonalisierung von A). Ein vollständiges System unitärer Invarianten von A wird dann gebidlet durch

- die Maßklasse $\{\mu\}$, μ_1 unitäräquivalent zu μ_2, wenn sie gegenseitig absolut stetig sind,
- die (meßbare) Dimensionsfunktion $m(\lambda) := \dim \mathcal{H}_\lambda$, die die *Vielfachheit* bechreibt,
- das Spektrum von A, $\operatorname{spec} A = \operatorname{supp} \mu$.

Die Anwendung auf den Ortsoperator Q in unserem Fall ergibt also – und das ist vom spektraltheoretischen Standpunkt aus durchaus überraschend: Es ist ja $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, also erhält man folgende Invarianten:

- die Maßklasse des Lebesgue–Maßes, insbesondere das Lebesgue–Maß selbst,
- $\mathcal{H}_\lambda := \mathbb{C}$, also $m(\lambda) = 1$,
- $\operatorname{spec} Q = \mathbb{R}$,

d.h. es ergibt sich sozusagen eine *totale Homogenität*: Q hat homogene Vielfachheit (nämlich 1), $\operatorname{spec} Q$ ist homogen (translationsinvariant) und das Lebesgue–Maß μ ist ebenfalls homogen (translationsinvariant).

Es sei betont, daß diese spektraltheoretischen außerordentlich wichtigen Nebenergebnisse sämtlich Folegrungen aus den Weyl–Relationen sind! Man erkennt in diesem Zusammenhang auch die grundsätzliche Rolle der *Fouriertransformation*, die nur die Rollen von Q und P vertauscht.

4.7 Der harmonische Oszillator

Ein schwingender harmonischer Oszillator auf der reellen Achse besitzt die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2.$$

Quantisierung liefert den Hamiltonoperator

$$H := -\frac{1}{2m} h^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

der auf $L^2(\mathbb{R})$ ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator ist. Wir setzen $\frac{m\omega}{h} = 1$ und betrachten die Eigenwertgleichung $Hf = \lambda f$. Das Spektrum von H ist

$$\operatorname{spec} H = \{E_n : \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

mit $E_n := h\omega(n + \frac{1}{2})$. Jeder Eigenwert E_n ist einfach. Die Eigenzustände

$$e_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)$$

mit den Hermiteschen Polynomen

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

bilden eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R})$, z.B. ist der Grundzustand durch

$$e_0(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

gegeben.

Die selbstadjungierten Operatoren $(Qf)(x) = xf(x)$ und $(Pf)(x) = -i\frac{d}{dx}f(x)$ sind auf der dichten Menge

$$\mathcal{H} \supset \mathcal{D} := \text{spa}\left\{e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)\right\} = \left\{e^{-\frac{1}{2}x^2} p(x)\right\}$$

wohldefiniert und wesentlich selbstadjungiert. Wir setzen

$$A := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP).$$

Der Operator A besitzt einen adjungierten A^*, den wir hier aber nur auf $\mathcal{D}$ betrachten: $A^* \equiv A^* \restriction \mathcal{D}$. Mit

$$N := A^*A, \qquad N \text{ Anzahloperator},$$

gilt

$$AA^* - A^*A = \mathbf{1}$$

und

$$H = h\omega\left(N + \frac{1}{2}\mathbf{1}\right),$$

woraus sich sofort

$$\text{spec}\, H = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ergibt. Jede Zahl m ist einfacher Eigenwert. Zugehörige Eigenfunktion ist e_m:

$$Ne_m = me_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Wegen $N(Ae_m) = (m-1)Ae_m$ heißt A *Vernichtungsoperator*. Aus $\|Ae_m\|^2 = m\|e_m\|^2$ folgt

$$Ae_m = \sqrt{m}e_{m-1}, \qquad Ae_0 = 0.$$

Analog gilt $N(A^*e_m) = (m+1)A^*e_m$, weswegen A^* *Erzeugungsoperator* genant wird. Wir haben $\|A^*e_m\|^2 = \|A^*e_m\|^2 + \|e_m\|^2 > 0$, also $A^*e_m \neq 0$ und

$$A^*e_m = \sqrt{m+1}e_{m+1}.$$

In der *Fockdarstellung* (der einzigen irreduziblen Darstellung von CCR($\mathbb{C}$)) soll der Anzahloperator diagonal sein: also muß $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ in bezug auf N spektral zerlegt werden und das ist die Zerlegung in die Hilberträume

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \qquad \mathcal{H}_n = \mathbb{C} e_n. \tag{4.27}$$

Im übrigen bleibt alles beim alten, es ist jetzt

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*),$$
$$P = \frac{i}{\sqrt{2}}(A - A^*),$$

und die von Q und P erzeugten Gruppen e^{-ixQ} und e^{-iyP} erfüllen alle Weyl–Bedingungen.

In dieser Fockdarstellung nennt man Q bisweilen den „Feldoperator“.

Ein wichtiger Aspekt der Fockdarstellung tritt erst dann deutlich hervor, wenn man mehrere Freiheitsgrade betrachtet; die Weyl–Bedingungen ziehen nämlich automatisch eine *Symmetrisation* nach sich.

Sei also jetzt die Anzahl der Freiheitsgrade gleich $1 < p < \infty$. Die zugehörige Algebra ist $\mathcal{A} := \mathrm{CCR}(\mathbb{C}^p, \sigma)$. In der Schrödingerdarstellung π_S ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^p) = \bigotimes_{j=1}^{p} L^2(\mathbb{R})$ und

$$(Q_j f)(x) = x_j f(x) \qquad \text{(Multiplikationsoperator)},$$
$$(P_j f)(x) = -ih\frac{df}{dx_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Der v. Neumann Projektor ist gegeben durch

$$P = (2\pi)^{-p} \int_{\mathbb{C}^p} e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \pi_S(W(z))\, dz, \qquad \pi_S(W(z)) = \prod_{j=1}^{p} e^{\frac{i}{2}(x,y)} U_j(x_j) V_j(y_j),$$
$$z = x + iy,$$

wobei U_j, V_j die durch Q_j, P_j erzeugten Gruppen sind. Dann erhält man

$$\begin{aligned}(Pf)(\lambda) &= (2\pi)^p \int_{\mathbb{R}^{2p}} e^{-\frac{1}{4}(|x|^2+|y|^2)} e^{\frac{i}{2}(x,y)} e^{-i(x,\lambda)} f(\lambda - y)\, dxdy \\ &= \pi^{-\frac{p}{4}} e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^p} \pi^{-\frac{p}{4}} e^{-\frac{|t|^2}{2}} f(t)\, dt \\ &= (e, f) e(\lambda)\end{aligned}$$

wobei

$$e(\lambda) := \frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}}{\pi^{\frac{p}{4}}}.$$

Setzen wir $m = \omega = 1$, so lautet der Hamiltonoperator des isotropen harmonischen Oszillators in p Freiheitsgraden

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p} (Q_n^2 + P_n^2).$$

H_0 sei der Hamiltonoperator für $p = 1$. Dann ist

$$H = \sum_{n=1}^{p} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{te Stelle}}}{H_0} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}.$$

Mit $e_0, e_1, e_2, \ldots$ bezeichnen wir die bereits eingeführte Orthonormalbasis (für den Fall $p = 1$) in $L^2(\mathbb{R})$ und erinnern an die Formel

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^*)^n e_0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wir haben jetzt zu jedem Freiheitsgrad $n = 1, 2, \ldots, p$ Erzeuger und Vernichter: A_n und A_n^*. Eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R}^p)$ ist gegeben durch

$$e_{n_1} \otimes e_{n_2} \otimes \cdots \otimes e_{n_p}, \quad n_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \quad \rho = 1, 2, \ldots, p.$$

Grundzustand ist jetzt

$$(e_0 \otimes e_0 \otimes \cdots \otimes e_0)(x) = \prod_{n=1}^{p} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}|x_n|^2} = \pi^{-\frac{p}{4}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$$

und das ist wieder die v. Neumann–Funktion. Jetzt ist,

$$\operatorname{spec} H = \left\{ E_{n_1} + E_{n_2} + \ldots + E_{n_p} : \; E_{n_\rho} \in \operatorname{spec} H_0 \right\},$$

z.B. ist $E_0 + E_0 + E_0 + \ldots + E_0 = h\frac{p}{2}$ ein Eigenwert. Dieser Eigenwert ist notwendig einfach, denn wenn $E = h\frac{p}{2}$, so müssen notwendig alle $N_\rho = 0$ sein, denn es ist ja $E = h(n_1 + n_2 + \ldots + n_p + \frac{p}{2})$. Der Anzahloperator wird jetzt durch

$$N := \sum_{n=1}^{p} A_n^* A_n$$

definiert, d.h. man hat sofort

$$H = h\left(N + \frac{p}{2}\mathbf{1}\right) \qquad \text{oder} \qquad N = \frac{1}{h}H - \frac{p}{2}\mathbf{1}$$

und damit ist

$$\operatorname{spec} N = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

wie es sich gehört.

Fockdarstellung heißt – wie vorher: Man bestimme die Spektralzerlegung von $\mathcal{H}$ in bezug auf den Anzahloperator N, m.a.W. N soll diagonalisiert werden. D.h. $\mathcal{H}$ ist darstellbar als Hilbertsumme

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k,$$

$\mathcal{H}_k$ ist der Eigenraum von N zum Eigenwert k, $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$. Anschaulich oder symbolisch ist n_j die Anzahl der „Quanten“ der Sorte j. Dann ist ein p–tupel $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$

eine *Konfiguration* von Quanten, die zu genau einem Basisvektor, nämlich $e_{n_1} \otimes e_{n_2} \otimes \cdots \otimes e_{n_p}$ gehört. Demzufolge ist $\dim \mathcal{H}_k$ gleich der Anzahl der Konfigurationen mit der Summe $\sum n_j = k$.

Das ist ein einfaches kombinatorisches Problem: *k ununterscheidbare Objekte sind in p Zellen unterzubringen* (die Objekte sind die einzelnen Quanten). Diese Anzahl ist bekanntlich $\binom{k+p-1}{p-1} = \binom{k+p-1}{k} = \frac{(k+p+1)!}{(p-1)!k!}$. Damit wird

$$\dim \mathcal{H}_k = \binom{k+p-1}{k}. \tag{4.28}$$

Z.B. ist $\dim \mathcal{H}_1 = \binom{p}{1} = p$: das ist der „Einquantenraum“, d.h. der lineare Raum der „Zustände der ersten Anregungsstufe“. Zugrunde liegt also die Vorstellung eines Quants, das p linear unabhängige Zustände (erster Stufe) einnehmen kann, m.a.W. es sind p Zellen vorhanden, in denen das Quant sein kann. Die Quanten sind aber ununterscheidbar.

Aufgrund der Dimensionsformel (4.28) ist folgende „Deutung“ von $\mathcal{H}_k$ natürlich: Die Zahl $\binom{k+p-1}{k}$ ist nämlich gerade die Dimension des *symmetrisierten* Tensorprodukts von k Exemplaren von $\mathcal{H}_1$.

Auf dem Hilbertraum

$$\underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{k \text{ mal}},$$

der durch die Tensoren $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$, $f_j \in \mathcal{H}_1$, $j = 1, 2, \ldots, k$ aufgespannt wird, ist ein (Ortho–) Projektor, der sog. *Symmetrisator*, definiert durch

$$S_k(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{P}_k} f_{\pi(1)} \otimes f_{\pi(2)} \otimes \cdots \otimes f_{\pi(k)},$$

also z.B. für $k = 2$ ist

$$S_2(f_1 \otimes f_2) = \frac{1}{2}(f_1 \otimes f_2 + f_2 \otimes f_1).$$

S_k ist, wie man sofort nachrechnet, ein Orthoprojektor. Während

$$\dim(\underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{k \text{ mal}}) = p^k$$

ist, erhält man für den Teilraum $S_k(\underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{k \text{ mal}})$ die Dimension $\binom{k+p-1}{k}$. Wir können also den Eigenraum $\mathcal{H}_k$ des Anzahloperators zum Eigenwert k auffassen als

$$\mathcal{H}_k = S_k(\mathcal{H}_1^k), \qquad \mathcal{H}_1^k := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{k \text{ mal}}.$$

Diese Auffassung entspricht der bereits angedeuteten Vorstellung

- es sind in $\mathcal{H}_k$ genau k Quanten vorhanden,
- jedes dieser k Quanten kann in einer der p Zellen liegen,
- die Quanten, die in einundderselben Zelle liegen, sind nicht unterscheidbar.

Für jede „Zelle“ haben wir Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren A_j, A_j^*; in $\mathcal{H}_1$ haben wir die Othonormalbasis $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Wir setzen jetzt

$$A_j = A(e_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, p,$$

und setzen diesen Operator antilinear auf $\mathcal{H}_1$ fort. So entstehen die Operatoren $A(f)$, $f \in \mathcal{H}_1$ und $A(f)^*$. Diese Operatoren hängen ab von den Vektoren f von $\mathcal{H}_1$, des sog. „*Einteilchenraumes*“.

Wir verzichten im moment darauf, die charakteristischen Eigenschaften von $A(f)$, $A(f)^*$ in $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(\mathcal{H}_1^k)$ nachzurechnen, dafür halten wir folgendes fest:

Der Einteilchenraum $\mathcal{H}_1$, $\dim \mathcal{H}_1 = p$, in der „Fockform“ der Schrödingerdarstellung (der Darstellungsraum ist spektral so zerlegt, daß der Anzahloperator diagonalisiert ist) kann letztlich wieder mit $\mathbb{C}^p$ identifiziert werden. D.h. $\mathcal{H}_1$ kann als „Referenzraum“ für die CCR–Algebra aufgefaßt werden: $\mathrm{CCR}(\mathcal{H}_1, \sigma)$.

Diese Fockform der einzigen irreduziblen regulären Darstellung von $\mathrm{CCR}(\mathcal{H}_1, \sigma)$ suggeriert jetzt, zu einem *beliebigen* Refernzhilbertraum $\mathfrak{h}$ mit $\sigma(f, g) := \mathrm{Im}(f, g)_{\mathfrak{h}}$ eine (reguläre) Darstellung der Algebra $\mathrm{CCR}(\mathfrak{h}, \sigma)$ durch eine analoge Konstruktion zu gewinnen.

4.8 Die Fockdarstellung für einen beliebigen (seperablen) Hilbertraum $\mathfrak{h}$

Wir betrachten jetzt einerseits die einzige irreduzible reguläre Darstellung von $\mathrm{CCR}(\mathfrak{h}, \sigma)$, $\dim \mathfrak{h} < \infty$, noch einmal von einem anderen Standpunkt aus. Dieser hat – andererseits – den Vorteil, auch für $\dim \mathfrak{h} = \infty$ eine *reguläre* Darstellung von $\mathrm{CCR}(\mathfrak{h}, \sigma)$ zu liefern, von der wir einige Eigenschaften herleiten. Sei also $\mathfrak{h}$ ein seperabler Hilbertraum und $\sigma(f, g) := \mathrm{Im}(f, g)_{\mathfrak{h}}$. Wir betrachten die Hilberträume $\mathbb{C}, \mathfrak{h}, \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} =: \mathfrak{h}^2, \ldots, \mathfrak{h}^n, \ldots$ und ihre symmetrisierten Teilräume $S_n \mathfrak{h}^n$ und bilden den *Fockraum* als Hilbertsumme

$$\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathfrak{h}^n.$$

Zwei Elemente $f, g \in \mathcal{F}_+$ haben die Form $f = \{f_0, f_1, \ldots\}$ bzw. $g = \{g_0, g_1, \ldots\}$. Das Skalarprodukt ist dann durch

$$(f, g)_{\mathcal{F}_+} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathfrak{h}^n} \qquad \text{mit } \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathfrak{h}^n}^2$$

gegeben.

Definition 4.28. *Für $x \in \mathfrak{h}$ definieren wir die Exponentialabbildung*

$$\mathcal{F}_+ \ni \exp x := \mathbf{1} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} x^n,$$

wobei $x^n := x \otimes x \otimes \cdots \otimes x \in \mathfrak{h}^n$.

Es ist $\|x^n\| = \|x\|^n$, so daß wir sofort die Relation

$$\begin{aligned}\|\exp x\|^2 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\|x^n\|^2 \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\|x\|^{2n} \\ &= e^{\|x\|^2} < \infty\end{aligned}$$

erhalten. Hieraus folgt $\exp x \in \mathcal{F}_+$. Es gilt

$$(\exp x, \exp y) = e^{(x,y)}.$$

Lemma 4.29. *Die Menge* $\{\exp x : x \in \mathfrak{h}\}$ *ist total in* $\mathcal{F}_+$*, d.h. die lineare Hülle dieser Menge liegt dicht in* $\mathcal{F}_+$*.*

Zum Beweis benötigen wir noch ein Hilfslemma:

Lemma 4.30. *Für* $f \in \mathfrak{h}$ *ist die Funktion* $\mathbb{C} \ni z \to \exp(zf) \in \mathcal{F}_+$ *eine ganze (holomorphe) Vektorfunktion.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß die Zuordnung

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(z \cdot f) \in \mathcal{F}_+$$

eine ganze Funktion ist, d.h. sie ist in der $\|\cdot\|$–Topologie holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Da die starke Holomorphie (in der $\|\cdot\|$–Topologie) der schwachen Holomorphie (in der $(\cdot,\cdot)$–Topologie) äquivalent ist, genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$z \mapsto (u, \exp(zf))$$

für alle u der Form

$$u = u_0 \oplus u_1 \oplus u_2 \oplus \ldots, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$$

holomorph ist. Es gilt

$$(u, \exp(zf)) = u_0 + z(u_1, f) + \frac{z^2}{\sqrt{2!}}(u_2, f^2) + \frac{z^3}{\sqrt{3!}}(u_3, f^3) + \ldots$$

Wir haben die Abschätzung

$$\left|\frac{z^n}{\sqrt{n!}}(u_n, f^n)\right| \leq \frac{|z^n|}{\sqrt{n!}}\|u_n\| \cdot \|f\|^n$$

und somit

$$\begin{aligned}\|(u, \exp(zf))\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{\sqrt{n!}}(u_n, f^n)\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{\sqrt{n!}}\|u_n\| \cdot \|f\|^n\end{aligned}$$

$$\leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{\sqrt{n!}} \|f\|^{2n}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|u\| e^{\frac{1}{2}\|f\|^2 |z|^2} < \infty.$$

Dies zeigt die Holomorphie, denn die Potenzreihe ist für jedes z absolut konvergent. □

Beweis des Lemmas 4.29. Behauptet wird, daß es keinen orthogonalen Vektor $0 \neq u \in \mathcal{F}_+$ gibt, so daß $(u, \exp f)$ für alle $f \in \mathfrak{h}$ verschwindet. Sei also $u \in \mathcal{F}_+$ und $(u, \exp f) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{h}$. Dann ist auch $(u, \exp zf) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann sind auch alle Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung 0, also $(u_n, f^n) = 0$. Wir setzen jetzt

$$f = \sum_{j=1}^{r} w_j g_j, \qquad w_1, w_2, \ldots, w_r \in \mathbb{C}.$$

Dann ist f^n ein homogenes Polynom n–ten Grades in $w_1, w_2, \ldots, w_r$, ebenso (u_n, f^n) und es gilt mit $n = r$

$$(u_r, f^r) = w_1 w_2 \ldots w_r S_r(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_r).$$

Die Menge aller $S_r(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_r)$ ist total in $S_r \mathfrak{h}^r$, so daß die lineare Hülle dicht in $S_r \mathfrak{h}^r$ ist. Also muß jedes $u_r = 0$ sein, und damit auch $u = 0$. □

Für den Hilbertraum $\mathfrak{h}$ haben wir den Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Wir definieren jetzt die angekündigte Darstellung auf $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ so:

$$U(f) \exp x := e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(f,x)} \exp\left(\frac{f}{\sqrt{2}} + x\right). \tag{4.29}$$

Lemma 4.31. *Die Abbildung* (4.29) *ist isometrisch, d.h.*

$$(U(f) \exp x, U(f) \exp y) = (\exp x, \exp y).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&(U(f) \exp x, U(f) \exp y) \\
&= \left(e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(f,x)} \exp\left(\frac{f}{\sqrt{2}} + x\right), e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(f,y)} \exp\left(\frac{f}{\sqrt{2}} + y\right)\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}((f,y) + \overline{(f,x)})} \left(\exp\left(\frac{f}{\sqrt{2}} + x\right), \exp\left(\frac{f}{\sqrt{2}} + y\right)\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}((f,y) + \overline{(f,x)})} e^{\left(\frac{f}{\sqrt{2}} + x, \frac{f}{\sqrt{2}} + y\right)} \\
&= e^{(x,y)} \\
&= (\exp x, \exp y).
\end{aligned}$$

□

Nun kann (4.29) linear durch

$$U(f)\sum_{j=1}^{r}\lambda_j \exp x_j := \sum_{j=1}^{r}\lambda_j U(f)\exp x_j$$

fortgesetzt werden. $U(f)$ ist isometrisch auf der linearen Hülle der Exponentiale

$$\mathrm{spa}\{\exp x : x \in \mathfrak{h}\} =: \mathcal{D}.$$

$U(f)$ ist eine Abbildung auf ganz $\mathcal{D}$. Mittels isometrischer Fortesetzung auf $\mathcal{F}_+$ erhalten wir einen unitären Operator mit $u(0) = \mathbf{1} \in \mathcal{F}_+$.

$U(\mathfrak{h})$ ist eine Darstellung der Algebra $\mathrm{CCR}(\mathfrak{h},\sigma)$ und erfüllt offensichtlich $U(f) \neq 0$. Die anderen Eigenschaften werden in den folgenden Lemmata nachgerechnet:

Lemma 4.32. *$U(\cdot)$ erfüllt die Weyl–Relation*

$$U(f)U(g) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}U(f+g). \tag{4.30}$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Relation (4.30) auf der totalen Menge aller Exponentiale gilt:

$$\begin{aligned}
&e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}U(f)U(g)\exp x\\
&= e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}U(f)e^{-\frac{1}{4}\|g\|^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(g,x)}\exp\left(\frac{g}{\sqrt{2}}+x\right)\\
&= e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(f,g)}e^{-\frac{1}{4}\|g\|^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(g,x)}e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(f,\frac{g}{\sqrt{2}}+x)}\exp\left(\frac{f+g}{\sqrt{2}}+x\right)\\
&= e^{-\frac{1}{4}\|f+g\|^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(f+g,x)}\exp\left(\frac{f+g}{\sqrt{2}}+x\right)\\
&= U(f+g)\exp x.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.33. *Es gilt $U(f)^* = U(-f)$.*

Beweis. Da U unitär ist, gilt $U(f)^* = U(f)^{-1}$. Mit

$$U(-f)U(f) = U(-f+f) = U(f-f) = U(f)U(-f) = U(0) = \mathbf{1}$$

folgt die Behauptung. □

Die $U(f)$ bilden somit eine Darstellung der Weylelemente $W(f)$, wir definieren $\pi(W(f)) := U(f)$. π operiert auf $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Zu zeigen bleibt die Regularität der Darstellung.

Satz 4.34. *Die Darstellung $\pi(W(f)) = U(f)$ ist regulär.*

Beweis. Zu beweisen ist: Die unitäre Gruppe $\pi(W(\lambda f)) = U(\lambda f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist für jedes $f \in \mathfrak{h}$ stark stetig. Dann genügt es, eine dichte Teilmenge in $\mathcal{F}_+$ zu betrachten, es genügt sogar, eine totale Teilmenge, also z.B. $\{\exp x : x \in \mathfrak{h}\}$ zu nehmen. Es ist

$$U(\lambda f)\exp x = e^{-\frac{1}{4}\lambda^2\|f\|^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda(f,x)}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda f + x\right)$$

und $\exp(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda f + x)$ ist eine in z holomorphe Vektorfunktion, was analog zu der vorhergehenden Abschätzung bewiesen wird. Also ist $U(\lambda f)\exp x$ sogar holomorph in λ, also insbesondere stark stetig. □

Lemma 4.35. *Die Darstellung* $\pi(W(f)) = U(f)$ *ist treu.*

Beweis. Für $f_1 \neq f_2$ ist $U(f_1)\exp x \neq U(f_2)\exp x$. Wir haben eine Abbildung $W(f) \leftrightarrow U(f)$. Die $U(f)$ erzeugen die Weyl–Algebra, da aber die Weyl–Algebra einzig ist, läßt sich $W(f) \to U(f)$ zu einem Isomorphismus $\alpha(A) = \pi(A)$, d.h. $\alpha(W(f)) = U(f) = \pi(W(f))$ erweitern. □

Wir haben also eine reguläre, treue Darstellung für beliebige Hilberträume. Für $\dim \mathfrak{h} < \infty$ muß die Darstellung ein Vielfaches der Schrödingerdarstellung sein:

Satz 4.36. *Wenn* $\dim \mathfrak{h} < \infty$ *ist, dann ist die Darstellung* $\pi(W(f)) = U(f)$ *irreduzibel (dann ist sie unitär äquivalent zur Schrödingerdarstellung).*

Beweis. Wir rechnen den v. Neumann Projektor aus und zeigen, daß er eindimensional ist:

$$P_\pi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{1}{4}|z|^2} U(z)\, dz.$$

Die Matrixelemente von P_π sind (mit $f = \exp y$, $g = \exp x$):

$$\begin{aligned}
(f, P_\pi g) &= (\exp y, P_\pi \exp x) \\
&= (2\pi)^{-n} \left(\exp y, \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{1}{4}|z|^2} e^{-\frac{1}{4}|z|^2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(z,x)} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + x\right) dz \right) \\
&= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} \left(\exp y, e^{-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(z,x)} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + x\right) \right) dz \\
&= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(z,x)} e^{(y, \frac{z}{\sqrt{2}} + x)}\, dz \\
&= (2\pi)^{-n} e^{(y,x)} \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-\left|\frac{z}{\sqrt{2}}\right|^2 - (\frac{z}{\sqrt{2}} x) + (y, \frac{z}{\sqrt{2}})}\, dz
\end{aligned}$$

Sei nun $w = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $dz = 2^n dw$. Dann wird

$$\begin{aligned}
(f, P_\pi g) &= \pi^{-n} e^{(y,x)} \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-|w|^2 - (w,x) + (y,w)}\, dw \\
&= \pi^{-n} e^{(y,x)} \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-(w-y, w+x) - (y,x)}\, dw
\end{aligned}$$

Wir substituieren nun $w := w - y$ und $t := x + y$:

$$(f, P_\pi g) = \pi^{-n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} e^{-|w|^2 - (w,t)}\, dw$$

Dies ist ein Gaußsches Integral. Wenn wir $w = w_1 + iw_2$, $t = t_1 + it_2$ ansetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}(f, P_\pi g) &= \pi^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-|w_1|^2-|w_2|^2-(w_1,t_1)-(w_2,t_2)-i(w_1,t_2)+i(w_2,t_1)}\, dw_1 dw_2 \\ &= \pi^{-n} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|w_1|^2-(w_1,t_1)-i(w_1,t_2)}\, dw_1}_{=:I_1} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|w_2|^2-(w_2,t_2)+i(w_2,t_1)}\, dw_2}_{=:I_2}\end{aligned}$$

Zuerst beschäftigen wir uns mit dem ersten Integral, I_1:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|w_1+\frac{t_1}{2}|^2+|\frac{t_1}{2}|^2-i(w_1+\frac{t_1}{2},t_2)+\frac{i}{2}(t_1,t_2)}\, dw_1 \\ &= e^{|\frac{t_1}{2}|^2+\frac{i}{2}(t_1,t_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|w_1|^2} e^{-i(w_1,t_2)}\, dw_1 \\ &= e^{|\frac{t_1}{2}|^2+\frac{i}{2}(t_1,t_2)} 2^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}t_2}{2})^2} \\ &= \pi^{\frac{n}{2}} e^{\frac{1}{4}|t_1|^2-\frac{1}{4}|t_2|^2+\frac{i}{2}(t_1,t_2)}.\end{aligned}$$

Durch eine Substitution $t_1 \mapsto t_2$, $t_2 \mapsto -t_1$ kann das Integral I_2 analog behandelt werden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}(f, P_\pi g) &= \pi^{-n} \pi^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} e^{\frac{1}{4}|t_1|^2-\frac{1}{4}|t_2|^2+\frac{i}{2}(t_1,t_2)+\frac{1}{4}|t_2|^2-\frac{1}{4}|t_1|^2-\frac{i}{2}(t_1,t_2)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Also ist $(\exp x, P_\pi \exp y) = 1$ für alle $x, y \in \mathfrak{h}$. Wir müssen nun $\dim P_\pi = 1$ zeigen. Setze $\Omega = (1, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, das Fock–Vakuum. Es ist $\exp 0 = \Omega$, also folgt $(\Omega, P_\pi \exp x) = 1$ und $(\Omega, P_\pi \Omega) = 1$. Daraus folgt

$$\|P_\pi \Omega\|^2 = 1 = \|P_\pi \Omega\|.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist außerdem

$$1 = |(\exp 0, P_\pi \exp x)| \leq \|\exp 0\| \cdot \|P_\pi \exp x\| = \|P_\pi \exp x\|. \tag{4.31}$$

Im Fall $y = x$ ist jedoch

$$(\exp x, P_\pi \exp x) = 1 = \|P_\pi \exp x\|^2 = \|P_\pi \exp x\|.$$

Also gilt in (4.31) das „=“. Aus der Hilbertraumtheorie ist bekannt, das dann $P_\pi \exp x = \lambda_x \Omega$ und speziell $P_\pi \Omega = \lambda_0 \Omega$ gilt. Wegen $1 = (\Omega, P_\pi \Omega) = \lambda_0 (\Omega, \Omega) = \lambda_0$ ist sogar $P_\pi \Omega = \Omega$. Daraus folgt $P_\pi \exp x = (\Omega, \exp x)\Omega$ und durch Fortsetzung $P_\pi f = (\Omega, f)\Omega$. Also ist P_π der Projektor auf $\mathbb{C}\Omega$, auf das Fock–Vakuum. D.h. $\dim P_\pi = 1$ und damit ist π irreduzibel. □

Wir haben also das Ergebnis, daß für $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$ die Darstellung $W(f) \mapsto U(f)$ auf $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ irreduzibel ist. $\pi(W(f)) = U(f)$ ist also unitär äquivalent zur Schrödingerdarstellung. Es existiert ein Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^p) & \overset{\Phi}{\longleftrightarrow} & \mathcal{F}_+(\mathbb{C}^p) \\ \pi_S(\cdot) & & \pi(\cdot) \end{array}$$

mit $\Phi\pi_S(W(z)) = \pi(W(z))\Phi$. Es ist sehr schwierig Φ analytisch anzugeben, so daß der v. Neumann Projektor eine sehr elegante Methode zum Nachweis der äquivalenz der Darstellungen bietet.

Wie nehmen nun $\mathfrak{h}$ ($\dim \mathfrak{h} \leq \infty$), $U(f)$ und $\Omega \in \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned}(\Omega, U(f)\Omega) &= (\exp 0, U(f)\exp 0) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2}\left(\exp 0, \exp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Durch diese Relation ist der zugehörige Zustand

$$\varphi(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$$

eindeutig festgelegt. π ist zyklisch mit dem zyklischen Vektor Ω, denn aus

$$\pi(W(f))\Omega = e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2}\exp\frac{f}{\sqrt{2}}$$

erhält man eine durch Bildung der linearen Hülle dichte Menge.

Die Darstellung ist also die GNS–Darstellung desjenigen Zustandes, der durch die Gleichung

$$\varphi(W(f)) = e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2} \qquad \text{(Fockzustand)} \tag{4.33}$$

gegegeben ist. (4.33) läßt sich zu $\varphi(A)$ fortsetzen.

Definition 4.37. *Die Darstellung* π *(d.h. die GNS–Darstellung des Fockzustandes* (4.33)*) heißt Fock–Darstellung der* CCR*–Algebra* $\mathrm{CCR}(\mathfrak{h}, \sigma)$ *und wird mit* π_F *bezeichnet.*

Bemerkung. Für endlichdimensionale Hilberträume $\mathfrak{h}$ haben wir zwei Argumente für die Tatsache, daß die Fock–Darstellung unitär äquivalent zur Schrödingerdarstellung π_S:

1. Es kann nur eine irreduzible reguläre Darstellung existieren und

2. Beide Darstellungen, π_S und π_F, sind zyklisch mit e bzw. Ω als zyklische Vektoren und haben die Eigenschaft

$$\begin{aligned}(e, \pi_S(W(z))e) &= e^{-\frac{1}{4}\|z\|^2} && \text{(siehe (4.26))} \\ (\Omega, \pi_F(W(f))\Omega) &= e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2} && \text{(siehe (4.32)).}\end{aligned}$$

   Die GNS–Darstellung ist jedoch bis auf Unitäräquivalenz eindeutig, also $\pi_F \cong \pi_S$. Die Isometrie $\Phi : \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) \to L^2(\mathbb{R}^p)$ hat die Eigenschaft $\Phi\Omega = e$.

Es stellt sich die Frage, ob die Fockdarstellung auch für unendlichdimensionale Hilberträume $\mathfrak{h}$ irreduzibel ist.

4.9 Die Fockdarstellung ($\dim \mathfrak{h} = \infty$)

Zunächst erinnern wir daran, daß $z \to \exp(zf + g)$ für beliebige $f, g \in \mathfrak{h}$ eine ganze Funktion ist, da für jedes $u \in \mathcal{F}_+$

$$\sum_n \left| \left(u_n, \frac{(zf+g)^n}{\sqrt{n!}} \right) \right| \leq \|u\| e^{\frac{1}{2}\|zf+g\|^2}$$

gilt. Wir wissen bereits, daß die unitäre Gruppe $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto U(\lambda f)$ für jedes $f \in \mathfrak{h}$ stark stetig auf $\mathcal{F}_+$ ist. Nach dem Satz von Stone–v. Neumann gibt es dann einen selbstadjungierten Generator $\Phi(f)$ dieser Gruppe, d.h.

$$U(\lambda f) = e^{-i\lambda\Phi(f)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $\mathbb{R} \ni \lambda \to e^{-i\lambda\Phi(f)} \exp x \in \mathcal{F}_+$ eine stark stetige Vektorfunktion, aber wir wissen, daß diese Funktion sogar ganz in λ ist, weil

$$U(\lambda f) \exp x = e^{-\frac{1}{4}\lambda^2\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda(f,x)}} \exp\left(\lambda \frac{f}{\sqrt{2}} + x \right) \tag{4.34}$$

gilt. Wenn aber $e^{-i\lambda\phi(f)} \exp x$ eine ganze Funktion ist, so folgt, daß

$$\exp x \in \operatorname{dom} \Phi(f)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$(-i\Phi(f))^n \exp x = \frac{d^n}{d\lambda^n} (e^{-i\lambda\Phi(f)} \exp x)|_{\lambda=0}$$

gilt, d.h. die Potenzreihenentwicklung von (4.34) um $\lambda = 0$ herum kann geschrieben werden in der Form

$$e^{-i\lambda\Phi(f)} \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (-i\Phi(f))^n \exp x.$$

Hieraus folgt dann sofort die absolute Konvergenz der Reihe für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, man hat also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} \|\Phi(f)^n \exp x\| < \infty, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Definition 4.38. *Ein $u \in \mathcal{F}_+$ heißt analytischer Vektor der unitären Gruppe $e^{-i\lambda\Phi(f)}$, wenn $u \in \operatorname{dom} \Phi(f)^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und es ein $t > 0$ gibt, so daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|\Phi(t)^n u\| < \infty \tag{4.35}$$

ist.

Die dichte Menge $\mathcal{D} = \operatorname{spa}\{\exp x : \ x \in \mathfrak{h}\} \subset \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ ist also eine Menge analytischer Vektoren, d.h. es gilt

$$\mathcal{D} \subseteq \bigcap_{\substack{n=1 \\ f \in \mathfrak{h}}}^{\infty} \operatorname{dom} \Phi(f)^n$$

und die Vektoren in $\mathcal{D}$ erfüllen (4.35). Die Bedeutung dieser Tatsache wird im folgenden Satz offensichtlich:

Satz 4.39. *Wenn ein symmetrischer Operator A auf $\mathcal{H}$ eine Menge $\mathcal{D}$ analytischer Vektoren besitzt und $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt, so ist A wesentlich selbstadjungiert (d.h.* $\mathrm{clo}(A \restriction \mathcal{D}) =: B$ *ist selbstadjungiert).*

Diese Aussage bedeutet, daß keine Information verlorengeht, wenn A auf $\mathcal{D}$ eingeschränkt wird.

Lemma 4.40. *$\Phi(f)$ ist reell–linear in f.*

Beweis. Es ist $U(\lambda\mu f) = e^{-i\lambda\Phi(\mu f)} = e^{-i\lambda\mu\Phi(f)}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $\Phi(\mu f) = \mu\Phi(f)$. □

Definition 4.41. *Der Anzahloperator N auf $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) \ni (f_0, f_1, \dots)$, $f_n \in S_n\mathfrak{h}^n$, $\sum \|f_n\|^2 < \infty$ ist durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\, N &:= \left\{ f : \sum n^2 \|f_n\|^2 < \infty \right\} \\ N(f_0, f_1, \dots) &:= (0, f_1, 2f_2, 3f_3, \dots) \end{aligned}$$

bzw.

$$N = \bigoplus_{n=0}^{\infty} n \mathbf{1}_{S_n\mathfrak{h}^n}$$

gegeben.

N ist ein selbstadjungierter Operator mit dem Spektrum

$$\mathrm{spec}\, N = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (N+1)(f_0, f_1, \dots) &= (f_0, 2f_2, 3f_3, \dots), \\ (N+1)^{\frac{1}{2}}(f_0, f_1, \dots) &= (f_0, \sqrt{2}f_1, \sqrt{3}f_2, \dots). \end{aligned}$$

Das Fockvakuum ist durch $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ gegeben. Für $\dim \mathfrak{h} < \infty$ ist Ω der v. Neumann Vektor, d.h. der zyklische Vektor der Fockdarstellung.

Definition 4.42. *Die dichte Linearmannigfaltigkeit der finiten Partikelvektoren $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}} \subset \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ ist durch Elemente der Form*

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_N, 0, 0, \dots), \qquad N = N(\Psi)$$

gegeben.

Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$. Es gilt sogar:

Lemma 4.43. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{F}_{\mathrm{fin}} = \mathbb{C}\Omega$.*

Wir haben den Refernzraum $\mathfrak{h}$, den Fockraum $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ und den symmetrisierten Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Wir beschreiben jetzt eine Übertragung von Operatoren von $\mathfrak{h}$ auf $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ bzw. $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$.

Sei zuerst A selbstadjungiert auf $\mathfrak{h}$. Wir definieren $(d\Gamma(A))_n$ auf $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$, $f_j \in \mathrm{dom}\, A_j$ durch

$$(d\Gamma(A))_n := A \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes +\mathbf{1} \otimes A \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes A.$$

Durch lineare Fortsetzung und Bildung der direkten Summe erhalten wir:

$$d\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (d\Gamma(A))_n.$$

Lemma 4.44. *$d\Gamma(A)$ ist wesentlich selbstadjungiert auf dem entstehenden Bereich in $\mathcal{F}_{\text{fin}}$.*

Ohne Beweis.

Beispiel 4.45. Für $A = \mathbf{1}$ ist

$$(d\Gamma(\mathbf{1}))_n = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \ldots \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} = n\mathbf{1}_{\mathfrak{h}^n},$$

also $d\Gamma(\mathbf{1}) = N$.

Sei nun U ein unitärer Operator auf $\mathfrak{h}$. Dann ist

$$(\Gamma(U))_n := \underbrace{U \otimes U \otimes \cdots \otimes U}_{n \text{ mal}}$$

und

$$\Gamma(U) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\Gamma(U))_n.$$

Lemma 4.46. *$\Gamma(U)$ ist unitär auf $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ und*

$$\Gamma(e^{itA}) = e^{itd\Gamma(A)}.$$

Ohne Beweis.

Das nächste Ziel besteht darin, aus den Generatoren $\Phi(f)$ der unitären Gruppe $U(\lambda f)$ Operatoren herauszudiskutieren, die die Rolle der Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren übernehmen (und die im Fall $\dim \mathfrak{h} < \infty$ auch mit den bereits aufgeführten Erzeugern und Vernichtern zusammenfallen).

Der erste Schritt zu diesem Ziel ist die Berechnung von $\Phi(f) \exp x$. Dazu erinnern wir an die Relation

$$\frac{d}{d\lambda} U(\lambda f) \exp x \Big|_{\lambda=0} = -i\Phi(f) \exp x.$$

Es ist

$$\frac{d}{d\lambda}(U(\lambda f) \exp x)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\Big(e^{-\frac{1}{4}\lambda^2\|f\|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda(f,x)} \exp\Big(\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x\Big)\Big)\Big|_{\lambda=0}$$

Dazu wird insbesondere benötigt:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\left(\exp\left(\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x\right)\right) \\
&= \frac{d}{d\lambda}\Big(\mathbf{1} \oplus (\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x) \oplus \frac{1}{\sqrt{2!}}(\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x) \oplus \frac{1}{\sqrt{3!}}(\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x) \oplus \ldots\Big)\Big|_{\lambda=0} \oplus \ldots \\
&= \frac{d}{d\lambda}\Big(\mathbf{1} \oplus (\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x) \oplus \Big(\frac{1}{\sqrt{2!}}\lambda\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x + x \otimes \frac{f}{\sqrt{2}}\Big)\Big) \\
&\quad \oplus \Big(\frac{1}{\sqrt{3!}}\lambda\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x \otimes x + x \otimes \frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x + x \otimes x \otimes \frac{f}{\sqrt{2}}\Big)\Big) \oplus \ldots\Big)\Big|_{\lambda=0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\lambda}\Big(\mathbf{1} \oplus \Big(\lambda\frac{f}{\sqrt{2}} + x\Big) \oplus \Big(\frac{1}{\sqrt{2!}}\lambda 2! S_2\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x\Big)\Big) \\
&\quad \oplus \Big(\frac{1}{\sqrt{3!}}\lambda 3! S_3\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x\Big)\Big) \oplus \dots\Big)\Big|_{\lambda=0} \\
&= 0 \oplus \frac{f}{\sqrt{2}} \oplus \sqrt{2!} S_2\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x\Big) \oplus \sqrt{3!} S_3\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x\Big) \oplus \dots
\end{aligned}
$$

Mit der Kurzschreibweise

$$x^n := \underbrace{x \otimes x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n \text{ mal}}$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\Phi(f)\exp x &= i\frac{d}{d\lambda}(U(\lambda f)\exp x)|_{\lambda=0} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}(f,x)\exp x + i\Big(0 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n!}} S_n\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x^{n-1}\Big)\Big), \\
\Phi(-if)\exp x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(f,x)\exp x - \Big(0 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n!}} S_n\Big(\frac{f}{\sqrt{2}} \otimes x^{n-1}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Wir haben also

$$(\Phi(-if) + i\Phi(f))\exp x = \sqrt{2}(f,x)\exp x.$$

Wir definieren auf $\mathcal{D}$ den Operator

$$A(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(-if) + i\Phi(f)), \tag{4.36}$$

es gilt also

$$A(f)\exp x = (f,x)\exp x. \tag{4.37}$$

Diesen Operator $A(f)$ können wir in eine noch viel übersichtlichere Form bringen, in der seine Wirkung auf seinem vollen Definitionsbereich deutlich wird.

Dazu schreiben wir (4.37) in Koordinatenform:

$$
\begin{aligned}
&A(f)\left(1, x, \frac{x^2}{\sqrt{2!}}, \frac{x^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \\
&= \left((f,x), \frac{(f,x)x}{\sqrt{1!}}, \frac{(f,x)x^2}{\sqrt{2!}}, \frac{(f,x)x^3}{\sqrt{3!}}, \dots\right) \\
&= \operatorname{diag}\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\right\}\left((f,x), \frac{(f,x)x}{\sqrt{2!}}, \frac{(f,x)x^2}{|\sqrt{3!}}, \frac{(f,x)x^3}{\sqrt{4!}}, \dots\right).
\end{aligned}
$$

Nun erinnern wir an den Anzahloperator $N = \operatorname{diag}\{0,1,2,\dots\}$. Dann ist

$$\operatorname{diag}\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\right\} = (N+1)^{\frac{1}{2}},$$

d.h. wir erhalten

$$A(f)\exp x = (N+1)^{\frac{1}{2}} B_+(f)\exp x,$$

wobei

$$B_+(f) := (N+1)^{-\frac{1}{2}} A(f)$$

gesetzt ist. Diesen Operator $B_+(f)$ können wir ohne Schwierigkeit in seiner vollen Wirkung aufschreiben.

Zunächst definieren wir einen Operator

$$B_{n-1}(f) : \mathfrak{h}^n \to \mathfrak{h}^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

durch

$$B_{n-1}(f)(\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n := (f, \psi_1)\psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

und lineare Fortsetzung auf ganz $\mathfrak{h}^n$. Dann erhält man sofort

$$\|B_n(f)x_n\| \leq \|f\| \cdot \|x_n\|, \qquad x_n \in \mathfrak{h}^n.$$

Durch

$$B(f) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_{n-1}(f), \qquad B_{-1}(f) := 0$$

ist dann ein beschränkter Operator auf ganz $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ definiert. Man rechnet sofort folgende Eigenschaften nach:

1. $\|B(f)\| = \|f\|$,
2. $B(f)$ ist mit der Symmetrisation verträglich, d.h. bezeichnet P_+ den Symmetrisationsprojektor $P_+ : \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, so gilt

   $$P_+ B(f) P_+ = B(f) P_+,$$

   d.h. $B(f) \restriction \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ ist ein beschränkter Operator auf $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, $B(f) \restriction \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}))$.

Wir berechnen jetzt einmal $B(f)\exp x$. Es ergibt sich

$$B(f)\left(1, x, \frac{x^2}{\sqrt{2!}}, \frac{x^3}{\sqrt{3!}}, \ldots\right) = \left((f,x), \frac{(f,x)x}{\sqrt{2!}}, \frac{(f,x)x^2}{|\sqrt{3!}}, \ldots\right).$$

Die linke Seite ist aber nach den vorhergehenden Rechnungen gleich $B_+(f)\exp x$. Weil aber $\mathcal{D}$ dicht liegt in $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, so erhält man die Gleichung

$$B(f) \restriction \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) = B_+(f).$$

Diese Gleichung liefert uns eine hinreichende Übersicht über die Wirkung des in f antilinearen Operators $B_+(f)$ und wir können nun schreiben

$$A(f) = (N+1)^{\frac{1}{2}} B_+(f). \tag{4.38}$$

Die Formel (4.37) zeigte zunächst nur, wie $A(f)$ auf Vektoren der Form $\exp x$ wirkt. Die Struktur von $B_+(f)$ lehrt nun folgendes:

Lemma 4.47. *Die Linearmannigfaltigkeit $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ der finiten Partikelvektoren liegt im Definitionsbereich von $A(f)$,*

$$\mathcal{F}_{\text{fin}} \subset \operatorname{dom} A(f).$$

Beweis. Unmittelbar klar aufgrund der Definition von $B_+(f)$. □

Es zeigt sich durch leichte Rechnung, daß

$$\operatorname{dom} A(f) = \operatorname{dom} N^{\frac{1}{2}}$$

gilt. $A(f)$ heißt der zu $f \in \mathfrak{h}$ gehörende *Vernichtungsoperator.*

Um die Erzeugungsoperatoren einzuführen, berechnen wir den adjungierten Operator von $B(f)$. Zunächst betrachten wir wieder $B_n(f) : \mathfrak{h}^{n+1} \to \mathfrak{h}^n$. Dann erfüllt $B_n(f)^* : \mathfrak{h}^n \to \mathfrak{h}^{n+1}$ die Gleichung

$$(u, B_n(f)^* v) = (B_n(f)u, v), \qquad u \in \mathfrak{h}^{n+1}, \quad v \in \mathfrak{h}^n$$

und für $u := \psi_0 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n$, $v := \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ erhält man

$$(\psi_0 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n, B_n(f)^* \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = (\psi_0, f)(\psi_1, \varphi_1) \ldots (\psi_n, \varphi_n).$$

Man erkennt, daß $B_n(f)^*$ nicht mit der Symmetrisation verträglich ist. Der Operator $B(f)^* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n(f)^*$, der zunächst auf $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ gegeben ist, muß aber noch symmetrisiert werden, d.h. der gesuchte adjungierte Operator $B_+(f)^+$ von $B_+(f)$ lautet

$$B_+(f)^* = P_+ B(f)^* \restriction \mathcal{F}_+(f).$$

Dann erhält man aus (4.38)

$$A(f)^* = B_+(f)^* (N+1)^{\frac{1}{2}},$$

d.h. $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ gehört wiederum zum Definitionsbereich von $A(f)^*$,

$$\mathcal{F}_{\text{fin}} \subset \operatorname{dom} A(f)^*.$$

$A(f)^*$ heißt der zu $f \in \mathfrak{h}$ gehörende *Erzeugungsoperator.* Aus der Formel (4.36)

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi(-if) + i\Phi(f))$$

erhalten wir

$$A(f)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi(-if) - i\Phi(f))$$

und diese Gleichungen können wir – unabhängig von f – auf $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ betrachten. Die Relation

$$\Phi(-if) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A(f) + A(f)^*)$$

lehrt dann, daß $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ zum Definitionsbereich *aller* Generatoren $\Phi(f)$ der unitären Gruppe $U(\lambda f)$ gehört. Die Funktion

$$\mathfrak{h} \ni f \mapsto \Phi(-if),$$

die jedem Vektor f des Referenzraums $\mathfrak{h}$ „seinen“ Generator $\Phi(-if)$ zuordnet, heißt *Segalscher Feldoperator* (der Fockdarstellung).

Wir schreiben auch

$$A(f)^* =: C(f),$$

C wie *creation*, A wie *annihilation*.

Wir können jetzt unter Benutzung der Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren beweisen, daß die Fockdarstellung π_F auch für $\dim \mathfrak{h} = \infty$ irreduzibel ist.

Theorem 4.48. *Die Fockdarstellung π_F ist für $\dim \mathfrak{h} = \infty$ irreduzibel.*

Beweis. Wir benutzen das Schursche Lemma, nehmen also ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}))$ mit $T\pi_F(W(f)) = \pi_F(W(f))T$ für alle $f \in \mathfrak{h}$ und müssen zeigen, daß T ein Skalaroperator ist. Zunächst folgt aus der Vertauschungsrelation

$$T \operatorname{dom} \Phi(f) \subseteq \operatorname{dom} \Phi(f)$$

und

$$\Phi(f)T\varphi = T\Phi(f)\varphi, \qquad \varphi \in \operatorname{dom} \Phi(f).$$

Wir können uns auf $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{fin}}$ beschränken und wegen (α) und (β) haben wir

$$\begin{aligned} TA(f)\varphi &= A(f)T\varphi, \\ TC(f)\varphi &= C(f)T\varphi. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} (C(f_1)C(f_2)\dots C(f_n)\Omega, TC(g_1)\dots C(g_m)\Omega) \\ = (T^*\Omega, A(f_n)A(f_{n-1})\dots A(f_1)C(g_1)\dots C(g_m)\Omega) \end{aligned}$$

und behaupten, daß er gleich

$$(T^*\Omega, \Omega) \cdot (\Omega, A(f_n)A(f_{n-1})\dots A(f_1)C(g_1)\dots C(g_m)\Omega)$$

ist. Das beweisen wir durch Fallunterscheidung:

1. $n > m$: es wird mehr vernichtet als erzeugt, also

   $$A(f_n)A(f_{n-1})\dots A(f_1)C(g_1)\dots C(g_m)\Omega = 0.$$

   Dann sind beide Seiten der behaupteten Gleichung Null.

2. $n < m$: hier betrachten wir die Ausdrücke

   $$A(g_m)A(g_{m-1})\dots A(g_1)C(f_1)\dots C(f_n)\Omega$$

   und beachten, daß wir T^* durch das Produkt durchziehen können. Dann zeigt sich, daß wieder beide Seiten der Gleichung Null sind.

3. $n = m$: Wir setzen

$$A(f_n)A(f_{n-1})\ldots A(f_1)C(g_1)\ldots C(g_m)\Omega =: \Phi.$$

Dann haben wir auf jeden Fall eine Gleichung

$$\Phi = \lambda\Omega, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die linke Seite der fraglichen Gleichung erhält also die Gestalt

$$(T^*\Omega, \Phi) = (T^*\Omega, \lambda\Omega) = \lambda(T^*\Omega, \Omega)$$

und die rechte Seite wird gleich

$$(T^*\Omega, \Omega)\cdot(\Omega, \Phi) = (T^*\Omega, \Omega)\cdot\lambda,$$

weil $(\Omega, \Omega = 1$ ist.

Damit haben wir die fragliche Gleichheit der beiden Ausdrücke bewiesen. Wir könen diese Gleichung so schreiben:

$$(C(f_1)C(f_2)\ldots C(f_n)\Omega, TC(g_1)\ldots C(g_m)\Omega) \\ = (T^*\Omega, \Omega)\cdot(C(f_1)C(f_2)\ldots C(f_n)\Omega, C(g_1)\ldots C(g_m)\Omega).$$

Die lineare Mannigfaltigkeit $\{C(f_1)C(f_2)\ldots C(f_n)\Omega\}$ liegt also direkt in $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ und T ist beschränkt. Somit ergibt sich

$$(u, Tv) = (T^*\Omega, \Omega)(u, v), \qquad u, v \in \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$$

also

$$T = (\Omega, T\Omega)\mathbf{1}.$$

□

Die bisherigen Ergebnisse erlauben es z.B., ein sog *Wick–Theorem* zu beweisen. Sei $f \in \mathfrak{h}$ und

$$A^\# = A^\#(f) := \begin{cases} A(f) \\ A(f)^* = C(f) \end{cases} \text{ oder }.$$

Ist dann n eine feste natürliche Zahl, so gilt

$$\sum(\Omega, \underbrace{A^\#\ldots A^\#}_{2n \text{ Faktoren}}\Omega) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\|f\|^{2n},$$

wobei sich die Summe über alle möglichen Konfigurationen erstreckt, in denen n Erzeuger und n Vernichter vorkommen. Zum Beweis gehen wir aus von

$$\Phi(-if)^n = 2^{-\frac{n}{2}}(A(f) + A(f)^*)^n = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{2^n \text{ Summanden}} \underbrace{A^\#\ldots A^\#}_{2n \text{ Faktoren}}$$

und bilde mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{-\frac{1}{4}\|\lambda f\|^2} = (\Omega, e^{-i\lambda\Phi(-if)}\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{(2n)!} 2^{-n} \sum (\Omega, A^{\#} \dots A^{\#}\Omega),$$

wobei jetzt in der letzten Summe nur noch die Terme mit gleicher Erzeuger– und Vernichteranzahl vorkommen, weil alle anderen Terme verschwinden. Anderer seits ist

$$e^{-\frac{1}{4}\|\lambda f\|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}} \|f\|^{2n}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$(-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2^{2n}} \|f\|^{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum (\Omega, A^{\#} \dots A^{\#}\Omega),$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] H. Baumgärtel and M. Wollenberg. *Mathematical Scattering Theory.* Birkhäuser, 1983.

[2] H. Baumgärtel and M. Wollenberg. *Causal Nets of Operator Algebras.* Akademie–Verlag, 1992.

[3] O. Bratteli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I.* Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1987.

[4] O. Bratteli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II.* Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1997.

[5] R. Haag. Vorwort in dem letzen Nachdruck von [7] von 1996.

[6] J.M. Jauch. *Foundation of Quantum Mechanics.* Addison–Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1973. (2^{nd} printing).

[7] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 38. Springer Verlag, 1968. unveränderter Nachdruck der ersten Auflage von 1932.

[8] D. Petz. *An invitation to the Algebra of Canonical Commutation Relations.* Leuven Univ. Press, 1990.

[9] W. Thirring. *Lehrbuch der Mathematischen Physik 3, Quantenmechanik von Atomen und Molekülen.* Springer–Verlag, Wien, New York, 1979.

[10] A.S. Wightman. Hilbert's sixth problem; Mathematical treatment of the axioms of physics; Mathematical development arising from Hilbert problems. In F.E. Browder, editor, *Proc. Sympos. Pure Math.*, volume 28, 1976.