Plasmaphysik
- Skriptum zur Vorlesung im SS 95 -

Prof. Dr. Hans-Jörg Kull

Fraunhofer Institut für Lasertechnik
und
Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik
Institut für Theoretische Physik A
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Aachen

7. März 1996

Vorbemerkungen

Übungen:

Begleitend zur Vorlesung Plasmaphysik findet wöchentlich eine 2-stündige Übung statt. Jedes Übungsblatt enthält Gruppenübungen (G) und Hausaufgaben (H). Die Gruppenübungen sind unter Anleitung, die Hausaufgaben selbstständig zu bearbeiten. Musterlösungen zu den Übungen werden in der physikalischen Bibliothek (Kopierraum) abgelegt.

Die Teilnahme an den Übungen ist freiwillig, wird aber zur Vertiefung des Vorlesungsstoffes ausdrücklich empfohlen. Auf Wunsch kann die erfolgreiche Teilnahme an der Vorlesung und an den Übungen durch einen Übungsschein bestätigt werden.

Literaturhinweise:

1. N.A. Krall, A.W. Trivelpiece: Principles of Plasma Physics
   (McGraw-Hill, New York, 1973)

2. G. Schmidt: Physics of High Temperature Plasmas
   (Academic Press, New York, 1966)

3. F.F. Chen: Introduction to Plasma Physics
   (Plenum Press)

4. K. Miyamoto: Plasma Physics for Nuclear Fusion
   (MIT Press, Cambridge-Massachusetts, 1989)

5. W.L. Kruer: The Physics of Laser Plasma Interactions
   (Addison-Wesley, New-York, 1988)

Maßsysteme:

In der Elektrodynamik sind 2 Maßsysteme gebräuchlich, das SI-System und das Gaußsche Maßsystem. Das SI-System hat den Vorteil, daß man die numerischen Werte der physikalischen Größen unmittelbar in praktischen Einheiten (MKSA) angeben kann. Es empfiehlt sich daher besonders im Experiment und in der Computersimulation.

In der Theoretischen Physik ist es zweckmäßig Variablensubstitutionen so vorzunehmen, daß die Gleichungen möglichst einfach und einprägsam ausschauen. Hierin liegt die Stärke des Gaußschen Maßsystems. In diesen Einheiten besitzt z.B. das elektrische und das magnetische Feld dieselbe Dimension, so daß die Vereinheitlichung der Felder im elektromagnetischen Feldtensor sichtbar unterstützt wird.

Diesem Skriptum liegt die folgende Konvention zugrunde. Zur numerischen Berechnung physikalischer Größen (z.B. elektrische Feldstärke) wird das internationale SI-System (Systéme International d'Unitès) mit den Einheiten m, kg, sec, A verwendet. Einige häufig vorkommende physikalische Konstanten sind in Tabelle 0.1 zusammengefaßt.

Formale Beziehungen (z.B. Maxwell-Gleichungen) werden jedoch im Gaußschen System mit den Einheiten cm, g, sec dargestellt. Die Umrechung ins SI-System erfolgt, indem man für die Ladungen und die Felder, bzw. die Potentiale, die Substitutionen

$$e \longrightarrow 1/\sqrt{4\pi\epsilon_0}\; e$$

$$\mathbf{E} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; \mathbf{E}$$

$$\Phi \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; \Phi$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; c\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; c\mathbf{A}$$

vornimmt.

Für die Temperatur werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$T_{\circ K}$	:	Temperatur in Grad Kelvin
$T = k_B T_{\circ K}$	:	Temperatur in Joule
$T_{eV} = T/1eV$	:	Temperatur in eV

$$1eV \;=\; 1.602 \times 10^{-19} J \;=\; 1.16 \times 10^{4\ 0} K$$

Übung 0.1 *Schreiben Sie i) die Maxwellschen Gleichungen, ii) das Coulombsche Gesetz vom Gaußschen System ins SI-System um. Berechnen sie den Wert des atomaren elektrischen Feldes im Wasserstoff auf der ersten Bohrschen Bahn.*

Tabelle 0.1: Physikalische Konstanten

Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.997(9) \times 10^8$ m/sec
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) = 8.854(1) \times 10^{-12}$ Asec/(Vm)
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \times 10^{-7} = 1.256(6) \times 10^{-6}$ Vsec/(Am)
Elektrische Elementarladung	$e = 1.602(1) \times 10^{-19}$ As
Elektronenruhemasse	$m_e = 9.109(5) \times 10^{-31}$ kg
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380(6) \times 10^{-23}$ J/K
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5.670(5) \times 10^{-8}$ W/(K^{4}m^2)
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6.626(1) \times 10^{-34} = 2\pi \cdot 1.054(5) \times 10^{-34}$ Jsec
Bohrscher Radius	$a_0 = 0.529(1) \times 10^{-10}$ m

Tabelle 0.2: Zehnerpotenzen

10^{-3}	Milli (m)	10^3	Kilo (k)
10^{-6}	Mikro (μ)	10^6	Mega (M)
10^{-9}	Nano (n)	10^9	Giga (G)
10^{-12}	Piko (p)	10^{12}	Tera (T)
10^{-15}	Femto (f)	10^{15}	Peta (P)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

1.1 Eigenschaften und Vorkommen von Plasmen 2

1.2 Charakteristische Längen 3

1.2.1 Klassischer Elektronenradius 3

1.2.2 Landau-Länge: 3

1.2.3 De Broglie-Wellenlänge: 4

1.2.4 Debye-Länge 4

1.2.5 Gyrationsradius 6

1.2.6 Freie Weglänge 6

1.3 Charakteristische Zeiten 7

1.3.1 Plasmafrequenz 7

1.3.2 Gyrationsfrequenz 7

1.3.3 Freie Flugzeit 7

2 Einzelteilchenbewegung **8**

2.1 Konstante Felder 8

2.1.1 Konstantes B-Feld 8

2.1.2 Konstantes B-Feld, konstante Kraft K 9

2.2 Langsam veränderliche Felder 10

2.2.1 Driftnäherung 10

2.2.2 Störungsrechnung 11

2.2.3 Räumlich langsam veränderliche Magnetfelder 14

2.3 Adiabatische Invarianten 15

2.3.1 Hamiltonsche Systeme: 15

2.3.2 Kanonische Transformationen 16

2.3.3 Adiabatische Invarianz der Wirkung 18
2.4 Schnell oszillierendes E-Feld 20
2.4.1 Elektrostatische Welle mit konstanter Amplitude 20
2.4.2 Elektromagnetische Welle mit konstanter Amplitude 21
2.4.3 Ponderomotorisches Potential 22
2.4.4 Ponderomotorische Kraftdichte 23
2.4.5 Ponderomotorischer Druck 24

3 Grundgleichungen der Plasmatheorie 27
3.1 Statistische Beschreibung 27
3.1.1 Liouville-Gleichung 27
3.1.2 BBGKY-Hierarchie 28
3.2 Kinetische Beschreibung 31
3.2.1 Vlasov-Gleichung 31
3.2.2 Boltzmann-Gleichung 32
3.2.3 Landau-Gleichung 35
3.2.4 Fokker-Planck-Gleichung 38
3.3 Flüssigkeitsbeschreibung 39
3.3.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik 39
3.3.2 Momentengleichungen 43
3.3.3 Zweiflüssigkeitsmodell 45
3.3.4 Einflüssigkeitsmodell 47
3.3.5 MHD-Gleichungen 50

4 Wellenausbreitung im Plasma 53
4.1 Wellenausbreitung im homogenen Medium 53
4.1.1 Wellengleichung 53
4.1.2 Wellenenergie 55
4.2 Wellen im kalten stoßfreien Plasma 57
4.2.1 Dielektrizitätstensor 57
4.2.2 Magnetfeldfreies Plasma 59
4.2.3 Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld 60
4.2.4 Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld 63

4.3 Elektrostatische Wellen 65
4.3.1 Lineare Störungsrechnung 65
4.3.2 Dispersionsrelation 66
4.4 Wellenausbreitung im inhomogenen Plasma 66

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Eigenschaften und Vorkommen von Plasmen

Charakterisierung:

- ***Phänomenologisch:*** Feuer, Sonne, Nordlicht
- ***Aggregatzustand:***

  Gas aus vorwiegend geladenen Teilchen (Ionen, Elektronen)
  W. Crookes (1879): 4. Materiezustand (Festkörper, Flüssigkeiten, Gase, Plasmen)
- ***Wechselwirkung:***

  Individuelle Teilchenwechselwirkung durch langreichweitige Coulombkräfte (Thermisches Gleichgewicht)

  Kollektive Wechselwirkung durch gemittelte Ladungs- und Stromdichten (Nichtgleichgewichtsvorgänge, Metastabile Gleichgewichte)
  Tonks und Langmuir (1929): Plasmaschwingungen
- ***Quasineutralität:***

  Bei zeitlich und räumlich langsam veränderlichen Vorgängen gilt die Quasineutralitätsbedingung:

  $$Zn_e \approx n_i$$

  (Z: Mittlere Ladungszahl, n_e: Elektronendichte, n_i: Ionendichte)

  Abweichungen von der Neutralität müssen u.U. in der Poissongleichung berücksichtigt werden, daher nur Quasineutralität.

Vorkommen:

- Sichtbares Universums besteht überwiegend aus Plasma (99.9 %)
- Pulsarmagnetosphären, Interstellares Gas
- Sonnenkorona
- Ionosphäre (Reflektion von langwelligen Radiowellen)
- Gasentladungsplasmen
- Lasererzeugte Plasmen
- Fusionsplasmen (Trägheitseinschluß, magnetischer Einschluß)

1.2 Charakteristische Längen

In diesem Abschnitt werden nur Größenordnungen abgeschätzt. Zahlenfaktoren von der Größenordnung 1 werden dabei vernachlässigt.

1.2.1 Klassischer Elektronenradius

In einem Fusionsplasma müssen sich die Ionen so nahe kommen, daß die anziehende Wirkung der Kernkraft die abstoßende Wirkung der Coulombkraft überwiegt. Ein Maß dafür ist der klassische Elektronenradius r_c:

$$e^2/r_c \;=\; m_e c^2 \qquad \rightarrow \qquad r_c \;=\; \frac{e^2}{m_e\, c^2} \;=\; 2.8 \times 10^{-15} m \tag{1.1}$$

Quantenmechanisch gibt es schon eine merkliche Tunnelwahrscheinlichkeit im Abstand 10 r_c, so daß zur Überwindung der Coulombbarriere nur etwa die Energie $m_e c^2/10 \;\approx\; 50keV$ erforderlich ist. In einem Plasma mit 10 keV Temperatur besitzt etwa 1/10 der Teilchen eine Energie von mehr als 50 keV.

1.2.2 Landau-Länge:

Die Landau-Länge λ_L bezeichnet die kürzeste Entfernung zweier Ladungen (q) bei einem klassischen zentralen Stoß. Innerhalb der Landaulänge dominiert die individuelle Stoßwechselwirkung.

$$\frac{q^2}{\lambda_L} \;=\; T, \qquad \lambda_L \;=\; \frac{q^2}{T} \;=\; \frac{1.44 \times 10^{-9}}{T_{eV}}\ [\mathrm{m}] \tag{1.2}$$

1.2.3 De Broglie-Wellenlänge:

Der kürzeste Abstand zwischen 2 klassischen Teilchen wird durch die Unschärferelation bestimmt und entspricht der de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} des Teilchens.

$$\begin{aligned} r_{min}p &\approx \hbar, \qquad p = mv, \qquad v \approx \sqrt{T/m_e} \\ r_{min} &= \lambda_{dB} = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{\sqrt{mT}} = \frac{2.7 \times 10^{-10}}{\sqrt{T_{eV}}} \ \text{[m]} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Vergleich mit dem mittleren Teilchenabstand:

Mittlerer Teilchenabstand: $\overline{d} = n_e^{-1/3}$
Klassisches Plasma: $\overline{d} \gg \lambda_{dB}$
Entartetes Elektronengas: $\overline{d} \ll \lambda_{dB}$

Vergleich mit der Landaulänge:

$$\left(\frac{\lambda_L}{\lambda_{dB}}\right)^2 = \left(\frac{q^2}{\lambda_{dB}T}\right)^2 = \frac{E_{Ion}}{T}, \qquad E_{Ion} = \frac{q^4 m_e}{\hbar^2} \approx 27 \text{ eV}$$

Heißes, vollionisiertes Plasma: $T \gg E_{Ion}$
Kaltes, partiell ionisiertes Plasma: $T \ll E_{Ion}$
Minimaler Stoßparameter: $b_{min} = max\{\lambda_{dB}, \lambda_L\}$

1.2.4 Debye-Länge

Bringt man eine ruhende Testladung in ein Plasma, so wird dieses in der Umgebung der Ladung polarisiert. Dies führt zu einer Abschirmung der Ladung. Im Abstand einer Debye-Länge ist das Potential der Ladung auf den e-ten Teil des Coulombpotentials abgefallen.

Poisson-Gleichung: Testladung q und Ladungen q_i mit Ladungsdichten n_i

$$\Delta\Phi = -4\pi q\delta(\mathbf{x}) - 4\pi \sum_i q_i n_i(\mathbf{x})$$

Gleichgewichtsverteilung: Boltzmannverteilung im Potential Φ

$$n_i(\mathbf{x}) = n_i(\infty)\, e^{-q_i \Phi(\mathbf{x})/T}$$

Neutralitätsbedingung: Im Plasmavolumen, außerhalb der Debye-Kugel

$$\sum_i q_i n_i(\infty) = 0, \qquad \Phi(\infty) = 0$$

Entwicklung für $T >> E_{Ion}$***:*** Minimaler Teilchenabstand: $\lambda_{dB} >> \lambda_L$

$$\begin{aligned} n_i(\mathbf{x}) &\approx n_i(\infty)(1 - \frac{q_i\Phi}{T}) \\ \Delta\Phi &= \frac{1}{r}\partial_r^2 r\Phi = -4\pi q\delta(\mathbf{x}) + 4\pi \sum_i \frac{q_i^2 n_i(\infty)}{T}\ \Phi \end{aligned}$$

Debye-Potential:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{q}{r}\exp -r/\lambda_D \;=\; \Phi_T + \Phi_P \qquad (1.4)\\
\lambda_D &= \sqrt{\frac{T}{4\pi\sum_i q_i^2 n_i(\infty)}}\\
\Phi_T &= \frac{q}{r}, \qquad \Phi_P \;=\; \frac{q}{r}(\exp -r/\lambda_D - 1)
\end{aligned}$$

Debye-Länge: λ_D, Potential der Testladung: Φ_T, Potential der Polarisationsladung: Φ_P

Debye-Länge eines Wasserstoffplasmas: $n_e = n_i,\ q_e^2 = q_i^2$

$$\lambda_D \;=\; \sqrt{\frac{T}{8\pi q_e^2 n_e}} \;=\; 4.9\,\sqrt{\frac{T_{0K}}{n\ [cm^{-3}]}}\ [\mathrm{cm}] \;=\; 5.3\,\sqrt{\frac{T_{eV}}{n\ [cm^{-3}]}}\ [\mathrm{m}] \qquad (1.5)$$

Polarisationsladung:

$$\begin{aligned}
4\pi r^2\sum_i n_i q_i &= 4\pi r^2\sum_i q_i n_i(\infty)e^{-q_i\Phi/T} \;=\; -4\pi r^2\sum_i q_i^2 n_i(\infty)\frac{1}{T}\Phi\\
&= -\frac{r^2}{\lambda_D^2}\frac{q}{r}e^{-r/\lambda_D} \;=\; -\frac{q}{\lambda_D}\frac{r}{\lambda_D}e^{-r/\lambda_D}\\
\int_0^\infty dr 4\pi r^2\sum_i n_i q_i &= -q\int_0^\infty dx\ x\ e^{-x}\\
&= -q\left[(-xe^{-x})|_0^\infty - \int_0^\infty dx(-e^{-x})\right] \;=\; -q \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Vergleich mit der Landau-Länge: (Wasserstoffplasma)

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_D}{\lambda_L} &= \sqrt{\frac{T}{8\pi q_e^2 n_e}}\,\frac{T}{q_e^2}\,\frac{8\pi n_e}{8\pi n_e} \;=\; 8\pi n_e\lambda_D^3 \;=\; 3N_D\\
N_D &= \frac{4\pi}{3}\lambda_D^3(n_e + n_i), \qquad \text{Zahl der Teilchen im Debye-Volumen} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Plasmanäherung:

- $q\Phi_P(r\to 0) = \dfrac{q^2}{\lambda_D} << T$
- $\dfrac{\lambda_L}{\lambda_D} \ll 1$
- $g \;=\; \dfrac{1}{n_e\lambda_D^3} \;\ll\; 1, \qquad g:$ Plasmaparameter

1.2.5 Gyrationsradius

Definition: Zentrifugalkraft = Lorentzkraft

$$m\frac{v_\perp^2}{r_g} = \frac{q}{c}v_\perp B, \qquad v_\perp = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$r_g = \frac{mcv_\perp}{qB} = \frac{c}{q}\frac{\sqrt{mT}}{B} \tag{1.8}$$

Vergleich mit der Debye-Länge

$$\frac{r_g}{\lambda_D} = \frac{c}{q}\frac{\sqrt{mT}}{B}\sqrt{\frac{8\pi q^2 n_e}{T}} = \sqrt{\frac{8\pi n_e mc^2}{B^2}} = \sqrt{\beta}\sqrt{\frac{mc^2}{2T}}$$

$$\beta = \frac{(n_e+n_i)T}{B^2/8\pi}$$

Beispiel 1.1 (Gyrationsradius)
$\beta = 0.1,\ \ mc^2 = 511\ keV,\ \ T = 25\ keV:\ \ r_g/\lambda_D \approx 1$

1.2.6 Freie Weglänge

Impulsänderung pro Stoß mit Stoßparameter λ_D:

$$\delta(mv)_i \approx \frac{q^2}{\lambda_D^2}\frac{\lambda_D}{v} = \frac{q^2}{\lambda_D\ v}$$

Anzahl der Stöße auf einer Wegstrecke s:

$$N \approx N_D\frac{s}{\lambda_D}$$

Mittleres Impulsschwankungsquadrat bei zufälliger Richtungsänderung:

$$\delta(mv)^2 = N\ (\delta(mv)_i)^2 = N_D\ \frac{s}{\lambda_D}\ \frac{q^4}{\lambda_D^2 v^2} = s\ \frac{q^4 N_D}{v^2\lambda_D^3} \tag{1.9}$$

Mittlere freie Weglänge λ_f:

$$\delta(mv)^2 = (mv)^2 \qquad \rightarrow \qquad s = \lambda_f = \frac{\lambda_D}{N_D}\left(\frac{\lambda_D}{\lambda_L}\right)^2 \approx \lambda_D N_D \tag{1.10}$$

Beispiel 1.2 (Charakteristische Längen) *Die folgenden Parameter geben typische Größenordnungen an und beziehen sich von oben nach unten gelesen auf ein Tokamak-, ein Hochleistungslaser- und ein Materialbearbeitungsplasma.*

$T\ [eV]$	$n\ [cm^{-3}]$	$\lambda_L\ [m]$	$\lambda_{dB}\ \ [m]$	$\lambda_D\ [m]$	g^{-1}	$g^{-1}\lambda_D \approx \lambda_f\ [m]$
10^4	10^{14}	1.4×10^{-13}	2.7×10^{-12}	5.3×10^{-5}	1.5×10^{7}	8×10^{2}
10^3	10^{21}	1.4×10^{-12}	8.7×10^{-12}	5.3×10^{-9}	1.5×10^{2}	8×10^{-7}
10	10^{18}	1.4×10^{-10}	2.7×10^{-11}	1.7×10^{-8}	5	8×10^{-8}

1.3 Charakteristische Zeiten

1.3.1 Plasmafrequenz

In einem Plasma sind elektrostatische Schwingungen der Elektronen gegenüber den Ionen möglich. Ihre Frequenz wird als Plasmafrequenz ω_P bezeichnet. Sie ist proportional zur Wurzel aus der Elektronendichte.

$$\omega_P \;=\; \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} \;=\; 5.6\times 10^4 \sqrt{n_e[cm^{-3}]}\;[s^{-1}] \tag{1.11}$$

Elektromagnetische Wellen können sich in einem Plasma nur ausbreiten, wenn ihre Frequenz ω größer ist als ω_P, d.h. sie können nur bis zu der *kritischen Dichte* n_c eindringen:

$$\omega^2 \;=\; \omega_P^2 \qquad \rightarrow \qquad n_c \;=\; \frac{m_e\omega^2}{4\pi q^2} \;=\; 1.1\times 10^{21}\frac{1}{\lambda^2[\mu m]}\;cm^{-3}$$
$$\lambda \;:\qquad \text{Lichtwellenlänge} \tag{1.12}$$

Ein thermisches Teilchen bewegt sich in in einer Periode der Plasmaschwingung über eine Debye-Länge:

$$\lambda_{De} \;=\; \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n_e}} \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{De}\omega_P = \sqrt{T/m_e} \;=\; v. \tag{1.13}$$

Beispiel 1.3 (Plasmafrequenz)

Elektronendichte $[cm^{-3}]$	*Plasmafrequenz* $[s^{-1}]$	$\lambda \;=\; 2\pi c/\omega_P$
10^{14}	5.6×10^{11}	$3.4\ mm$
10^{19}	1.8×10^{14}	$10\ \mu m$
10^{21}	1.8×10^{15}	$1\ \mu m$

1.3.2 Gyrationsfrequenz

Im Magnetfeld bewegt sich eine Ladung auf einer Kreisbahn um eine Magnetfeldlinie. Die Umlauffrequenz bezeichnet man als *Gyrations-* oder *Larmorfrequenz*:

$$\omega_g \;=\; \frac{v}{r_g} \;=\; \frac{qB}{mc}, \qquad \omega_{ge} \;=\; 1.76\times 10^{11} B\;[T], \qquad 1\;T \;=\; 10\;kG. \tag{1.14}$$

1.3.3 Freie Flugzeit

Die freie Flugzeit τ_f ist die Zeit zwischen 2 aufeinanderfolgenden Stößen:

$$\tau_f \;=\; \frac{\lambda_f}{v} \;=\; \frac{\lambda_D N_D}{v} \;=\; \frac{N_D}{\omega_P} \tag{1.15}$$

Sie ist groß gegenüber der Periode der Plasmaschwingungen.

Kapitel 2

Einzelteilchenbewegung

Die Bewegung einer Masse m mit der Ladung q in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ und magnetischen Feld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ wird durch die Coulomb- und Lorentzkraft bestimmt.

Newtonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v}(t), \tag{2.1}$$

$$m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) \tag{2.2}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_i = \partial_{p_i}H, \qquad \dot{p}_i = -\partial_{q_i}H \tag{2.3}$$

$$H = \frac{(\boldsymbol{P}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\Phi, \qquad \text{Hamilton-Funktion}$$

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}, \qquad \text{kanonischer Impuls}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\Phi \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \qquad \text{Felder} \tag{2.4}$$

Relativistische Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v}(t), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\boldsymbol{v}(t)\right) = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) \tag{2.6}$$

2.1 Konstante Felder

2.1.1 Konstantes B-Feld

Bewegungsgleichung:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{q}{c}\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{B} = (0,0,B)$$

$$\dot{v}_x = \omega_g v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega_g v_x, \qquad \dot{v}_z = 0 \tag{2.7}$$

Bewegung parallel zu B: $v_z = v_\parallel = const$

Bewegung senkrecht zu B: $V = v_x + iv_y$

$$\dot{V} = -i\omega_g V, \qquad V = v_\perp e^{-i\omega_g t + i\phi} \tag{2.8}$$

$$v_x = v_\perp \cos(\omega_g t - \phi), \qquad v_y = -v_\perp \sin(\omega_g t - \phi) \tag{2.9}$$

$$x = x_0 + \frac{v_\perp}{\omega_g}\sin(\omega_g t - \phi), \qquad y = y_0 + \frac{v_\perp}{\omega_g}\cos(\omega_g t - \phi) \tag{2.10}$$

Blickt man entgegen der Magnetfeldrichtung, so umkreist eine positive (negative) Ladung die Feldlinie im (entgegen dem) Uhrzeigersinn. Gyrationsbewegung und Parallelbewegung zusammen ergeben eine Spiralbahn entlang der Feldlinie.

Übung 2.1 *Erklären Sie die Umlaufrichtung der Gyrationsbewegung mit Hilfe der Lorentzkraft*

2.1.2 Konstantes B-Feld, konstante Kraft K

Bewegungsgleichung:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{q}{c}\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{B} = (0,0,B), \quad \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{K}_\perp, K_\parallel)$$

Bewegung parallel zu B: $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_\perp, v_\parallel)$

$$m\dot{v}_\parallel = K_\parallel \qquad \rightarrow \qquad v_\parallel = v_0 + K_\parallel t \tag{2.11}$$

Bewegung senkrecht zu B:

$$\begin{aligned} m\dot{\boldsymbol{v}}_\perp &= \frac{q}{c}\boldsymbol{v}_\perp\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{K}_\perp \\ \boldsymbol{v}_\perp &= \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_K \\ \boldsymbol{v}_K &= \frac{c}{q}\frac{\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \qquad \rightarrow \qquad m\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \frac{q}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die allgemeine Lösung besteht aus einer beschleunigten Bewegung entlang der Feldlinie, einer Drift $\boldsymbol{v}_K$ senkrecht zu $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{K}$ und einer Gyrationsbewegung $\boldsymbol{u}$. Die Kraft $\boldsymbol{K}_\perp$ verschwindet in einem Koordinatensystem, welches sich mit $\boldsymbol{v}_K$ bewegt.

Beispiel 2.1 ($E\times B$ - Drift)

$$\boldsymbol{K} = q\boldsymbol{E} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_E = c\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$$

Die $E\times B$ - Drift ist unabhängig von der Ladung.

Beispiel 2.2 ($g\times B$ **- Drift)**

$$\boldsymbol{K} \;=\; m\boldsymbol{g} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_g \;=\; \frac{cm}{q}\,\frac{\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$$

Die Drift im Schwerefeld führt zur Ladungstrennung. Liegt B in horizontaler Richtung, so erfolgt die Drift in der dazu senkrechten horizontalen Richtung. Durch die Ladungstrennung entsteht ein horizontales zu B senkrechtes elektrisches Feld. Die resultierende $E\times B$ - Drift ist unabhängig vom Vorzeichen der Ladungen vertikal nach unten gerichtet.

Übung 2.2 *Überzeugen Sie sich, daß die resultierende Drift eines Plasmas im Schwerefeld mit einem horizontalen Magnetfeld tatsächlich nach unten gerichtet ist.*

2.2 Langsam veränderliche Felder

2.2.1 Driftnäherung

Führungszentrum:

In räumlich und zeitlich langsam veränderlichen Feldern treten zusätzliche Driftbewegungen auf. Lokal kann man ein Koordinatensystem einführen, in dem das Teilchen in der x,y-Ebene eine Gyrationsbewegung um die z-Achse ausführt. Der Ursprung dieses Koordinatensystems wird als Führungszentrum bezeichnet. Bezeichnet man den Ortsvektor zum Führungszentrum mit $\boldsymbol{R}$, die Position des Teilchens vom Führungszentrum aus mit $\boldsymbol{\rho}$, so folgt für die Bahn $\boldsymbol{r}(t)$ des Teilchens die Darstellung

$$\boldsymbol{r}(t) \;=\; \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \tag{2.13}$$

Das Führungszentrum bewegt sich mit den schon bekannten Driften $\boldsymbol{v}_E$, $\boldsymbol{v}_\parallel$. In inhomogenen Feldern wirken auf das Führungszentrum noch Zusatzkräfte. Die von diesen Zusatzkräften verursachte Drift wird mit $\boldsymbol{v}_g$ bezeichnet. Die Driftbewegung des Führungszentrums besitzt also die Anteile

$$\dot{\boldsymbol{R}} \;=\; \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{R}(t),t) + \boldsymbol{v}_\parallel(\boldsymbol{R}(t),t) + \boldsymbol{v}_g(\boldsymbol{R}(t),t) \tag{2.14}$$

Annahmen der Driftnäherung:

- *Schwach veränderliche Felder:* T sei die Zeit, L die Länge über die sich die Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ merklich ändern. Diese Änderungen sollen bei einem Umlauf um das Führungszentrum klein sein:

$$\epsilon \;\sim\; \frac{r_g}{L} \;\ll\; 1, \qquad \frac{1}{T} \;\sim\; \epsilon\,\omega_g. \tag{2.15}$$

- *Größenordnung der Driftgeschwindigkeiten:* v_g wird durch Inhomogenitäten verursacht und ist daher klein gegenüber den typischen Geschwindigkeiten in homogenen Feldern.

$$v_\parallel \sim v_\perp, \qquad v_E \sim v_\perp, \qquad v_g \sim \epsilon v_\perp \tag{2.16}$$

- *Größenordnung von $E_\parallel$:* Die Geschwindigkeitsänderung der Parallelbewegung soll innerhalb einer Gyrationsperiode klein sein:

$$\frac{q}{m}E_\parallel \frac{1}{\omega_g} \sim \epsilon\, v_\perp \qquad \rightarrow \qquad \frac{q}{m}E_\parallel \sim \epsilon\, \omega_g^2 r_g. \tag{2.17}$$

2.2.2 Störungsrechnung

Bewegungsgleichung: Einsetzen von (2.13) in (2.1) ergibt

$$m(\ddot{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\boldsymbol{R}}) = q\boldsymbol{E}_\parallel + \frac{q}{c}(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{v}_g)\times\boldsymbol{B} \tag{2.18}$$

Entwicklung von $\ddot{\boldsymbol{R}}$ in ϵ:

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{R}} &= \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{R}(t),t) + \boldsymbol{v}_\parallel(\boldsymbol{R}(t),t) + \boldsymbol{v}_g(\boldsymbol{R}(t),t)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{R}(t),t) + \boldsymbol{v}_\parallel(\boldsymbol{R}(t),t)\right] + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E + \frac{d}{dt}(v_\parallel \boldsymbol{e}_\parallel) + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{e}_\parallel \frac{d}{dt}(v_\parallel) + v_\parallel \frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_\parallel) + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{e}_\parallel \frac{d}{dt}(v_\parallel) + v_\parallel(\partial_t + \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{v}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{e}_\parallel \frac{d}{dt}(v_\parallel) + v_\parallel(\partial_t + \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel + v_\parallel^2\,(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel + O(\epsilon^2) \qquad (2.19) \\
\frac{d}{dt} &= (\partial_t + \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{v}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla})
\end{aligned}$$

Im letzten Term kann die Richtungsableitung entlang der Feldlinie durch die Krümmung ausgedrückt werden:

$$(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel = -\frac{1}{R_c}\,\boldsymbol{e}_\perp \tag{2.20}$$

Hierbei ist R_c der Krümmungsradius in einem Punkt P der Feldlinie und $\boldsymbol{e}_\perp$ ein Einheitsvektor, der vom Krümmungsmittelpunkt zum Punkt P gerichtet ist. Die Krümmung der Feldlinie kann auch in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel = \left(\frac{\boldsymbol{B}}{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\frac{\boldsymbol{B}}{B} = \left[\left(\frac{\boldsymbol{B}}{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\frac{\boldsymbol{B}}{B}\right]_\perp = \left[\frac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}}{B^2}\right]_\perp \tag{2.21}$$

Entwicklung der Lorentzkraft $\boldsymbol{F}_L$ in ϵ:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) + (\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) + O(\epsilon^2) \\
\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{r},t) &= \frac{q}{c}\ [\dot{\boldsymbol{\rho}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)] \\
&+ \frac{q}{c}\ [\boldsymbol{v}_g\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) + \dot{\boldsymbol{\rho}}\times(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)] + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Bewegungsgleichung in der Ordnung $O(1)$:

$$\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{\rho}} &= \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{\rho}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)] \\
\dot{\boldsymbol{\rho}} &= v_\perp(\cos(\psi),-\sin(\psi),0), \qquad \boldsymbol{\rho} = \frac{v_\perp}{\omega_g(t)}(\sin(\psi),\cos(\psi),0) + O(\epsilon) \\
\psi &= \int_0^t \omega_g(t')\,dt', \qquad \omega_g(t) = \frac{qB(\boldsymbol{R}(t),t)}{mc}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

In dieser Ordnung erhält man die schnelle Gyrationsbewegung des Teilchens um das Führungszentrum. Die Gyrationsfrequenz besitzt eine langsame Zeitabhängigkeit. Das Magnetfeld ist dabei am Ort des Führungszentrums, nicht am Ort der Ladung, auszuwerten.

Mittelung über ψ:

Die Bewegung des Führungszentrums darf nicht von der schnellen Gyrationsbewegung abhängen. Dies kann durch eine Mittelung der Bewegungsgleichung über ψ erreicht werden. Der einzige schnellveränderliche Term mit einem nichtverschwindenden Mittelwert ist

$$\boldsymbol{F}_s = \frac{q}{c}\,\dot{\boldsymbol{\rho}}\times(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t). \tag{2.24}$$

Im Führungszentrum besitzt $\boldsymbol{B}$ nur eine z-Komponente, die Ableitungen der x- und y-Komponenten sind jedoch i.a. ungleich null. Mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= (0,0,B), \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0, \\
\boldsymbol{\nabla}B &= \frac{1}{B}[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ergibt die Mittelung von (2.24)über ψ

$$\begin{aligned}
<\boldsymbol{F}_s> &= \frac{q}{c}\ <\dot{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})>\times\boldsymbol{B} \\
&= \frac{q}{c}\,\frac{v_\perp^2}{\omega_g}\,\frac{1}{2}\ (\partial_y,-\partial_x,0)\times\boldsymbol{B} \\
&= \frac{q}{c}\,\frac{v_\perp^2}{\omega_g}\,\frac{1}{2}\ (-\partial_x B_z,-\partial_y B_z,\partial_y B_y+\partial_x B_x) \\
&= \frac{q}{c}\,\frac{v_\perp^2}{\omega_g}\,\frac{1}{2}\ (-\partial_x B_z,-\partial_y B_z,-\partial_z B_z) \\
&= -\mu\boldsymbol{\nabla}B = -\frac{\mu}{B}[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}]
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Magnetisches Moment:

μ ist das magnetische Moment des gyrierenden Teilchens:

$$\begin{aligned} I &= q\frac{\omega_g}{2\pi}, \qquad A = \pi r_g^2, \\ \mu &= \frac{1}{c}\,IA = \frac{q}{c}\,\frac{\omega_g}{2\pi}\,\pi r_g^2 = \frac{1}{2}\,\frac{q}{c}\,\frac{v_\perp^2}{\omega_g} = \frac{mv_\perp^2/2}{B} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Bewegung parallel zu B in der Ordnung $O(\epsilon)$:

$$m\frac{d}{dt}(v_\parallel) = qE_\parallel - \mu\nabla_\parallel B - m\left(\frac{d}{dt}v_E\right)_\parallel \tag{2.28}$$

Bewegung senkrecht zu B in der Ordnung $O(\epsilon)$:

Gemittelte Kraft auf das Führungszentrum:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= -\left\{\mu\boldsymbol{\nabla}_\perp B + (m\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E)_\perp + mv_\parallel(\partial_t + \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel + mv_\parallel^2\,(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel\right\} \\ &= -\Big\{(m\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E)_\perp + mv_\parallel(\partial_t + \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel \\ &\quad + \frac{mv_\perp^2/2}{B}\,\boldsymbol{e}_\parallel\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \left(\frac{mv_\perp^2/2}{B} + \frac{mv_\parallel^2}{B}\right)(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B})_\perp\Big\} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Drift des Führungszentrums:

$$0 = \frac{q}{c}\,\boldsymbol{v}_g\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{K}, \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_g = \frac{c}{q}\,\frac{\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{2.30}$$

Beiträge zur Drift

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_g &= \boldsymbol{v}_{\nabla B} + \boldsymbol{v}_{\dot{E}} + \boldsymbol{v}_{\dot{e}_\parallel} \\ \boldsymbol{v}_{\nabla B} &= \frac{1}{\omega_g}\,\boldsymbol{e}_\parallel\times\left[\frac{v_\perp^2/2}{B}\,\boldsymbol{e}_\parallel\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \frac{v_\perp^2/2 + v_\parallel^2}{B}\,(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B})\right] \\ \boldsymbol{v}_{\dot{E}} &= \frac{1}{\omega_g}\,\boldsymbol{e}_\parallel\times\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{v}_E \\ \boldsymbol{v}_{\dot{e}_\parallel} &= \frac{v_\parallel}{\omega_g}\,\boldsymbol{e}_\parallel\times(\partial_t + \boldsymbol{v}_E\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{e}_\parallel \end{aligned} \tag{2.31}$$

Die Driften werden als Gradient-B-Drift ($\boldsymbol{v}_{\nabla B}$) und als Polarisationsdrift ($\boldsymbol{v}_{\dot{E}}$) bezeichnet. Die Drift $\boldsymbol{v}_{\dot{e}_\parallel}$ wird durch zeitliche Richtungsänderungen des Magnetfeldes verursacht.

2.2.3 Räumlich langsam veränderliche Magnetfelder

Ein wichtiger Spezialfall ist die Bewegung in räumlich langsam veränderlichen Magnetfeldern. Hierbei wird angenommen, daß $\boldsymbol{E} = 0,\ \partial_t \boldsymbol{B} = 0$.

Longitudinaler Gradient: $\boldsymbol{\nabla}_\parallel B \neq 0$

- Driftgleichung:

$$m\frac{d}{dt}(v_\parallel) \;=\; -\mu\nabla_\parallel B \tag{2.32}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{q}{c}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v} \;=\; m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) \\ \rightarrow\; \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 \;&=\; \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B \;=\; const. \end{aligned} \tag{2.33}$$

  Gilt exakt, da das Teilchen im Magnetfeld keine Energie aufnehmen kann.

- Erhaltung des magnetischen Momentes:

$$\mu \;=\; const \tag{2.34}$$

  Folgt aus (2.33),(2.32). μ ist eine adiabatische Invariante (Abschnitt 2.3).

- Magnetischer Spiegel:

  Auf das Teilchen wirkt die Kraft $-\boldsymbol{\nabla}_\parallel B$, die entgegen dem Gradienten der Feldstärke gerichtet ist. Teilchen, deren Parallelgeschwindigkeit nicht zu groß ist, werden reflektiert. Für die in einem magnetischen Spiegel gefangenen Teilchen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B \;&\leq\; \mu B_{max} \qquad \Big| : \mu B_{min} \\ \frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2} + 1 \;&\leq\; \frac{B_{max}}{B_{min}} \;=\; R, \qquad \left|\frac{v_\parallel}{v_\perp}\right| \;\leq\; \sqrt{R-1} \end{aligned} \tag{2.35}$$

  Das Gebiet $v_\parallel > \sqrt{R-1}\, v_\perp$ des Geschwindigkeitsraumes wird als Verlustkegel, R als das Spiegelverhältnis bezeichnet.

  Bemerkung 2.1 *Verluste bei Spiegelmaschinen entstehen durch eine instabile Krümmung der Feldlinien (MHD-Instabilitäten) und durch die Streuung von Teilchen (Stöße, Mikroinstabilitäten) in den Verlustkegel.*

Transversaler Gradient: $\boldsymbol{B} = (0, 0, B(y)),\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \neq 0$

- Lorentzkraft:

$$\boldsymbol{K} \;=\; -\mu \boldsymbol{\nabla}_\perp B$$

- Drift:

$$\boldsymbol{v}_{\nabla B} \;=\; \frac{c}{q}\mu \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla}B}{B^2} \tag{2.36}$$

Übung 2.3 *Deuten Sie die Drift kinematisch durch die Änderung des Gyrationsradius im inhomogenen Magnetfeld.*

Gekrümmtes Magnetfeld: $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = 0,\ \boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{e}_\parallel \neq 0$

- Lorentzkraft:

$$\boldsymbol{K}_L \;=\; -\mu\boldsymbol{\nabla}_\perp B \;=\; -\frac{1}{2}\, v_\perp^2\ \boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{e}_\parallel \tag{2.37}$$

- Zentrifugalkraft:

$$\boldsymbol{K}_Z \;=\; v_\parallel^2 \frac{1}{R_c}\ \boldsymbol{e}_\perp \;=\; -v_\parallel^2\ \boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{e}_\parallel \tag{2.38}$$

- Drift:

$$\boldsymbol{v}_{\nabla B} \;=\; \frac{1}{\omega_g}\,(\frac{1}{2}\, v_\perp^2 + v_\parallel^2)\ \boldsymbol{e}_\parallel \times (\boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{e}_\parallel) \tag{2.39}$$

Bemerkung 2.2 *In einem axialsymmetrischen Magnetfeld* $B_\phi = \frac{2I}{cr}$*, das durch einen achsenparallelen Strom* I *erzeugt wird, entsteht durch Gradientendrift ein achsenparalleles elektrisches Feld (entgegen der Stromrichtung). Die resultierende* $E \times B$ *- Drift ist radial nach außen gerichtet. Der Plasmaeinschluß in toroidalen Magnetfeldern ist daher nur möglich, wenn die Ladungstrennung durch eine Verdrehung der Feldlinien (Rotationstransformation) um den Torus kompensiert wird. Die dafür erforderliche Magnetfeldkomponente senkrecht zum toroidalen Feld heißt poloidales Magnetfeld. Es kann entweder durch äußere Spulenströme (Stellarator) oder durch den Plasmastrom selbst (Tokamak) erzeugt werden.*

2.3 Adiabatische Invarianten

2.3.1 Hamiltonsche Systeme:

Die Bewegungsgleichung einer Ladung in elektrischen und magnetischen Feldern kann nach (2.3) auch als Hamiltonsches System geschrieben werden. Hamiltonsche

Systeme, deren Lösungen fast geschlossene Kurven im Phasenraum beschreiben, besitzen adiabatische Invarianten, die sich nur sehr langsam ändern. Ein wichtiges Beispiel bildet die Gyrationsbewegung einer Ladung in einem langsam veränderlichen Magnetfeld. Die zugehörige adiabatische Invariante ist das magnetische Moment.

Annahmen:

- Hamilton-Funktion: $H = H(p, q, \lambda)$
- 1 Freiheitsgrad
- Parameter λ
- $H = const, \lambda = const \;\Rightarrow\; p(t), q(t)$ geschlossene Kurve

Langsame Zeitabhängigkeit:

$$\lambda = \epsilon t, \qquad \Delta t = O(\frac{1}{\epsilon}) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta H = O(1)$$

Definition 2.1 (Adiabatische Invariante)
$I(H, \lambda)$ heißt adiabatische Invariante, wenn gilt:

$$\Delta t = O(\frac{1}{\epsilon}) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta I = O(\epsilon) \tag{2.40}$$

Die Änderung der adiabatischen Invarianten ist also klein im Vergleich zur Änderung der Energie. Um zu zeigen, daß es tatsächlich adiabatische Invarianten gibt, wird zunächst die Methode der kanonischen Transformationen eingeführt.

2.3.2 Kanonische Transformationen

Definition 2.2 (Kanonische Transformation)
Eine Transformation $p\prime = p\prime(p, q),\; q\prime = q\prime(p, q)$ heißt kanonisch, wenn die kanonischen Bewegungsgleichungen ihre Form beibehalten, d.h. es gilt

$$\dot{p\prime} = -\partial_{q\prime} H', \qquad \dot{q\prime} = \partial_{p\prime} H'$$

mit einer neuen Hamilton-Funktion $H' = H'(p\prime, q\prime)$.

Erzeugende Funktion $F(q, q\prime, t)$***:*** Bei einer kanonischen Transformation muß das Prinzip der kleinsten Wirkung auch in den neuen Koordinaten gelten. Daher darf sich die neue Lagrangefunktion $L' = p\prime\dot{q\prime} - H'$ von der alten Lagrangefunktion $L = p\dot{q} - H$ nur durch eine totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion F unterscheiden:

$$\frac{d}{dt}F = L - L' = p\dot{q} - p\prime\dot{q\prime} - (H - H')$$

Für eine Funktion $F = F(q, q\prime, t)$ gilt dann

$$p = \partial_q F, \qquad p\prime = -\partial_{q\prime} F, \qquad H' = H + \partial_t F. \tag{2.41}$$

Man nennt $F = F(q, q\prime, t)$ die *erzeugende Funktion* der kanonischen Transformation. Für eine gegebene erzeugende Funktion sind die Gleichungen (2.41) Transformationsgleichungen für die Koordinaten und für die Hamilton-Funktion.

Erzeugende Funktion $S(q, p\prime, t)$***:*** Durch eine Legendre-Transformation kann man erzeugende Funktionen einführen, die von einem anderen Paar unabhängiger Variablen abhängen. Im folgenden wird eine erzeugende Funktion $S(q, p\prime, t) = F + p\prime q\prime$ verwendet. Die entsprechenden Transformationsgleichungen erhält man aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S &= \frac{d}{dt}(F + p\prime q\prime) = p\dot{q} + q\prime\dot{p\prime} - (H - H'), \\ &\rightarrow \quad p = \partial_q S, \qquad q\prime = \partial_{p\prime} S, \qquad H' = H + \partial_t S. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Erhaltung des Phasenraumvolumens: Bei der Abbildung eines Gebietes des Phasenraumes durch eine kanonische Transformation bleibt das Phasenraumvolumen des Gebietes erhalten:

$$\begin{aligned} t &= const \qquad \Rightarrow \qquad dF = pdq - p\prime dq\prime \\ 0 &= \oint dF = \oint (pdq - p\prime dq\prime) = \oint pdq - \oint p\prime dq\prime. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Definition 2.3 (Wirkungs-, Winkelvariablen) *Die Wirkung I und der Winkel φ werden bei einem festen Wert des Parameters λ in der folgenden Weise definiert:*

$$\begin{aligned} H(p, q, \lambda) &= H \qquad \rightarrow \qquad p = p(H, q, \lambda) \\ I(H, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\lambda = const} p(H, q, \lambda) dq, \qquad \oint d\varphi = 2\pi. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Wirkung ist proportional zur Fläche, die von der Bahn bei festgehaltenem Parameter λ in einem Umlauf umschlossen wird. Der Winkel wächst bei einem Umlauf um 2π.

Erzeugende Funktion für die Abbildung $(p, q) \rightarrow (I, \varphi)$***:*** Die Transformation $(p, q) \rightarrow (I, \varphi)$ ist kanonisch. Dies folgt aus der Existenz einer erzeugenden Funktion:

$$S(I, q) = \int_{q_0}^{q} p(H(I, \lambda), q'', \lambda) dq''$$

Die Wirkungs-, Winkelvariablen (2.44) erfüllen die zugehörigen Transformationsgleichungen (2.42)

$$\begin{aligned} p &= \partial_q S(I, q) = p(H(I, \lambda), q, \lambda) \\ 2\pi &= \partial_I \oint p(H(I, \lambda), q'', \lambda) dq'' \\ H' &= H + \partial_t S = H + \epsilon\, \partial_\lambda S \end{aligned} \tag{2.45}$$

Für ein zeitabhängiges λ ist die kanonische Transformation zeitabhängig und die Hamilton-Funktion wie angegeben zu transformieren.

Ungestörtes System: $\dot{\lambda} = \epsilon = 0$

$$\begin{aligned} H'(I,\lambda) &= H(I,\lambda), \qquad \dot{\varphi} = \omega(I,\lambda), \qquad \dot{I} = 0, \\ \omega(I,\lambda) &:= \partial_I H'(I,\lambda) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Gestörtes System: $\dot{\lambda} = \epsilon \neq 0$

$$\begin{aligned} H'(I,\varphi,\lambda) &= H(I,\lambda) + \epsilon \partial_\lambda S, \\ \dot{\varphi} &= \omega(I,\lambda) + \epsilon f(I,\varphi,\lambda), \\ \dot{I} &= \epsilon g(I,\varphi,\lambda) \\ f &:= \frac{\partial^2 S}{\partial_I \partial_\lambda}, \qquad g := -\frac{\partial^2 S}{\partial_\varphi \partial_\lambda} \end{aligned} \tag{2.47}$$

2.3.3 Adiabatische Invarianz der Wirkung

Beweisidee:

Verkleinerung von $\dot{I}$ durch sukzessive Anwendung kanonischer Transformationen.

Ausgangssystem:

$$H^0 = H^0(p,q,\lambda), \qquad \dot{p} = -\partial_q H^0, \qquad \dot{q} = \partial_p H^0 \tag{2.48}$$

1. Transformation: S^1

$$\begin{aligned} I^1 &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{H^0 = const} p(H^0,q,\lambda) dq \\ H^1 &= H^0 + \epsilon\, \partial_\lambda S^1 \qquad \dot{I}^1 = \epsilon\, g^1 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Die erste Transformation reicht nicht aus um die adiabatische Invarianz nachzuweisen:

$$\Delta t = O(\frac{1}{\epsilon}) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta I^1 = O(\epsilon)\Delta t = O(1).$$

2. Transformation: S^2

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{H^1 = const} I^1(H^1,\varphi^1,\lambda) d\varphi^1 \\ H^2 &= H^1 + \epsilon\, \partial_\lambda S^2, \qquad \dot{I}^2 = \epsilon g^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

I^2 unterscheidet sich nur um $O(\epsilon)$ von I_1:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{H^0=const} I^1(H^0,\varphi^1,\lambda)d\varphi^1 + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{H^0=const} p(H^0,q,\lambda)dq + O(\epsilon) \;=\; I^1 + O(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Die Transformation S^2 unterscheidet sich deshalb von der identischen Abbildung nur in der Ordnung $O(\epsilon)$:

$$S^2 \;=\; I^2 q^1 + \epsilon \tilde{S}^2 \tag{2.52}$$

Dies reicht aus, um die adiabatische Invarianz der Wirkung nachzuweisen:

$$\begin{aligned} \dot{I}^2 &= \epsilon g^2 \;=\; \epsilon^2 \tilde{g^2}, \qquad \tilde{g^2} \;=\; -\frac{\partial^2 \tilde{S}^2}{\partial_{\varphi^2}\partial_\lambda} \\ \Delta t &= O(\frac{1}{\epsilon}) \qquad \Rightarrow \\ \Delta I^2 &= O(\epsilon^2)\Delta t \;=\; O(\epsilon), \qquad \Delta I^1 \;=\; \Delta I^2 + O(\epsilon) \;=\; O(\epsilon). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3 (Adiabatische Invarianten)

1. *I_1 besitzt Schwankungen von der Ordnung ϵ um I_2. I_2 gibt an wie stark sich der Mittelwert von I_1 ändert.*

2. *Durch Iteration des Beweisverfahrens läßt sich zeigen: $\Delta I^n = O(\epsilon^n)\Delta t$. Dies bedeuted, daß ΔI für $\epsilon \to 0$ nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, wie z.B. die Funktion $\Delta I \sim e^{-const/\epsilon}$. Die Änderung ist dann kleiner als die einer beliebigen Potenz:*

$$\frac{\Delta I}{\Delta I^n} \sim \frac{1}{\epsilon^n} e^{-const/\epsilon} \to 0.$$

3. *Bei mehreren Freiheitsgraden gibt es unter Umständen weitere adiabatische Invarianten. Maximal gibt es für jeden Freiheitsgrad eine Invariante. Dazu müssen für jeden Freiheitsgrad fast geschlossene Bahnen existieren, deren Umlaufperioden sich nach Potenzen von $1/\epsilon$ ordnen lassen.*

Beispiel 2.3 (Magnetisches Moment)

- *Vektorpotential*

$$\boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \qquad \Rightarrow \qquad \pi r_g^2 B \;=\; 2\pi r_g A_\varphi \qquad \Rightarrow \qquad A_\varphi \;=\; \frac{r_g}{2} B$$

- *Kanonischer Impuls*

$$P_\varphi \;=\; mv_\varphi + \frac{q}{c}A_\varphi$$

- *Adiabatische Invariante der Gyrationsbewegung*

$$\begin{aligned}\oint P_\varphi ds \;&=\; 2\pi r_g\,(mv_\varphi + \frac{q}{c}A_\varphi) \;=\; 2\pi r_g\,(m\omega_g r_g + \frac{q}{2c}r_g B)\\ &\propto\; Br_g^2 \;\propto\; \mu\end{aligned} \tag{2.53}$$

Beispiel 2.4 (Longitudinale Invariante) *In einem magnetischen Doppelspiegel ist die Bewegung entlang einer Feldlinie periodisch. Die zugehörige adiabatische Invariante ist*

$$I_l \;=\; \oint v_\parallel dl \;=< v_\parallel > L \tag{2.54}$$

Nimmt die Länge des Spiegelsystems mit der Zeit ab, dann erhöht sich die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens (Fermibeschleunigung).

Beispiel 2.5 (Flußinvariante) *Die Driftbewegung senkrecht zum Magnetfeld kann auf einer fast geschlossenen Bahn verlaufen. Die adiabatische Invariante ist der von der Bahn eingeschlossene magnetische Fluß.*

Bemerkung 2.4 (Literatur zum Beweis der adiabatischen Invarianz)

1. *C.S. Gardner, Phys.Rev.* ***115****, 791 (1959)*
2. *V.I. Arnold:* Mathematical Methods of Classical Mechanics *(Springer,New York,1978, S. 299)*

2.4 Schnell oszillierendes E-Feld

2.4.1 Elektrostatische Welle mit konstanter Amplitude

Elektrostatische Welle:

$$\boldsymbol{E} \;=\; E_0\boldsymbol{e}_x\, e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{B} \;=\; 0, \qquad \boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{E}, \qquad \omega \;\approx\; \omega_p \tag{2.55}$$

Teilchenbewegung in der Welle:

$$m\ddot{x} \;=\; qE_0 \sin(kx - \omega t) \tag{2.56}$$

Schwingungen mit kleiner Amplitude: $|kx| \ll 1$

$$\ddot{x} \;=\; -\frac{qE_0}{m}\sin(\omega t), \qquad x \;=\; v_0 t + \frac{qE_0}{m\omega^2}\sin(\omega t) \tag{2.57}$$

Die Näherung ist anwendbar, wenn die Schwingungsamplitude klein ist gegenüber der Wellenlänge und die Translationsgeschwindigkeit v_0 klein gegenüber der Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$ der Welle.

Transformation ins Ruhesystem der Welle:

$$\begin{aligned} v' &= v - v_{ph}, \qquad x' = x - v_{ph}t, \\ m\ddot{x'} &= qE_0 \sin(kx'), \qquad \frac{1}{2}m\dot{x'}^2 + \frac{qE_0}{k}\cos(kx') = W' \end{aligned} \tag{2.58}$$

Bewegung im periodischen Potential $V = \frac{qE_0}{k}\cos(kx')$ mit der Energie W'.

Bedingung für gefangene Teilchen:

$$W' < \frac{qE_0}{k} \tag{2.59}$$

Umlauffrequenz der gefangenen Teilchen:

$$kx' \ll 1 \;\Rightarrow\; \omega_B = \sqrt{\frac{qE_0 k}{m}} \tag{2.60}$$

2.4.2 Elektromagnetische Welle mit konstanter Amplitude

Elektromagnetische Welle:

$$\begin{aligned} A_y &= -\frac{cE_0}{\omega}\sin\eta, \qquad \eta = \omega t - kx, \qquad \omega = kc \\ E_y &= -\frac{1}{c}\partial_t A_y = E_0\,\cos\eta, \qquad B_z = \partial_x A_y = E_0\,\cos\eta. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Nichtrelativistische Bewegung:

$$m\ddot{y} = qE_y \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{qE_0}{m\omega^2}\cos\eta \tag{2.62}$$

Relativistische Bewegung:

Die Bewegungsgleichung (2.5) kann exakt gelöst werden (s.Übungen):

$$\begin{aligned} kx &= -\frac{1}{8}\,\frac{\epsilon^2}{\alpha^2}\,\sin 2\eta, \qquad ky = -\frac{\epsilon}{\alpha}\,\cos\eta, \qquad kz = 0, \\ \epsilon &= \frac{qE_0}{mc^2k}, \qquad \alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\epsilon^2} \end{aligned} \tag{2.63}$$

Die Bahnkurve hat die Form einer langgestreckten "8". Die Amplituden in x- und y-Richtung sind auch für hohe Feldstärken ($\to$) klein gegenüber der Wellenlänge:

$$\begin{aligned} k\delta_x &= -\frac{1}{8}\,\frac{\epsilon^2}{\alpha^2} \;\to\; \frac{1}{4} \qquad k\delta_y = \frac{\epsilon}{\alpha} \;\to\; \sqrt{2} \\ \frac{\delta_x}{\lambda} &\to 0.04, \qquad \frac{\delta_y}{\lambda} \to 0.22, \qquad \frac{\delta_x}{\delta_y} \to 0.18 \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.4.3 Ponderomotorisches Potential

In schnellveränderlichen Feldern mit *ortsabhängiger Amplitude* wirkt auf ein Elektron eine Kraft in Richtung der abnehmenden Feldstärke. Die Kraft kann aus einem Potential, dem *ponderomotorischen Potential*, abgeleitet werden.

Annahmen:

- $\boldsymbol{E}(t),\ \boldsymbol{B}(t)$ periodisch in t , $B <\approx E$
- $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{\xi}(t),\ \boldsymbol{\xi}(t)$ periodisch in t
- $|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}| \ll 1|,\ |\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}| \ll 1,\ |\dot{\boldsymbol{\xi}}/c| \ll 1$
- $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{B}$, ansonsten beliebig

Störungsrechnung:

$$m(\ddot{\boldsymbol{R}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}}) \;=\; q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) + (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)] + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) + O(\epsilon^2) \tag{2.65}$$

Ordnung $O(\epsilon)$***:***

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{\xi}} &= q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t), \\ \boldsymbol{E} &= \Re\{\boldsymbol{E}_0\, e^{-i\omega t}\} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\xi} = \Re\{-\frac{q}{m\omega^2}\,\boldsymbol{E}_0\, e^{-i\omega t}\} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Ordnung $O(\epsilon^2)$***:***

$$m\ddot{\boldsymbol{R}} \;=\; q\,[(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{B}] \tag{2.67}$$

Nebenrechnung: $\{\cdots\}$ begrenzt Wirkungsbereich von ∇

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} &= \{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}\}\cdot\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) \\ &= \frac{m}{q}\{\boldsymbol{\nabla}\ddot{\boldsymbol{\xi}}\}\cdot\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}\times(-\frac{1}{c}\,\partial_t\boldsymbol{B}) \\ &= \partial_t\left[\frac{m}{q}\{\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{\xi}}\}\cdot\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{c}\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}\right] - \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{m}{2q}\dot{\xi}^2\right) - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{2.68}$$

Zeitmittelung:

$$m < \ddot{\boldsymbol{R}} > \;=\; -\boldsymbol{\nabla} < \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 > \tag{2.69}$$

Ponderomotorisches Potential:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_p &= m < \ddot{\boldsymbol{R}} > = -\boldsymbol{\nabla}U_p, \\ U_p &= \frac{1}{2}m < \dot{\xi}^2 > = \frac{q^2}{4m\omega^2}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^* \end{aligned} \tag{2.70}$$

Bemerkung 2.5 (Ponderomotorisches Potential)

1. *Das ponderomotorische Potential ist gleich der zeitgemittelten kinetischen Energie der Oszillationsbewegung.*

2. *Das ponderomotorische Potential ist eine potentielle Energie. Ein Teilchen, welches in das Feld eintritt, wird entweder elastisch reflektiert (Endgeschwindigkeit = - Anfangsgeschwindigkeit) oder es durchquert das Feld vollständig ohne Energieaufnahme (Endgeschwindigkeit = Anfangsgeschwindigkeit).*

3. *Die ponderomotorische Kraft wirkt unabhängig vom Vorzeichen der Ladung in Richtung abnehmender Feldstärke (Feld verdrängt die Ladungen).*

4. *Für eine elektromagnetische Welle ist U_p proportional zur Intensität I und zum Quadrat der Wellenlänge λ:*

$$U_p \;=\; 9.3 \times 10^{-14} I[W/cm^2]\lambda^2[\mu m]eV$$

Übung 2.4 (Kinematische Deutung) *Skizzieren Sie qualitativ die Bewegung einer Ladung in einer elektrostatischen (elektromagnetischen) Welle, wenn sich die Feldstärke in Ausbreitungsrichtung der Welle ändert.*

2.4.4 Ponderomotorische Kraftdichte

Auf ein Plasma mit der Elektronendichte n_e wirkt eine ponderomotorische Kraftdichte, die sich einfach aus der Addition der ponderomotorischen Kräfte auf die einzelnen Elektronen eines Volumenelementes ergibt. Hierbei wird eine kollektive Bewegung angenommen, bei der auf alle Elektronen des Volumenelementes dieselbe mittlere Feldstärke wirkt.

Kraftdichte auf Elektronen:

$$\boldsymbol{f}_p \;=\; -n_e \boldsymbol{\nabla} U_p \;=\; -\frac{q_e^2 n_e}{4 m_e \omega^2} \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right) \;=\; -\frac{1}{16\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right) \qquad (2.71)$$

Bemerkung 2.6 (Ponderomotorische Kraftdichte)

1. *ω_{pe} ist i.a. ortsabhängig und kann daher nicht mit ∇ vertauscht werden.*

2. *Das Feld ist nicht mehr vorgegeben sondern wird durch die Ladungen selbst erzeugt. Trotzdem gilt die Herleitung, solange die in Abschnitt (2.4.3) gemachten Annahmen für jedes Elektron erfüllt sind.*

Gemittelte Elektronengleichung:

$$m_e n_e \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_e \;=\; q_e n_e \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{f}_p \tag{2.72}$$

Im Zeitmittel wirkt auf die Elektronen die ponderomotorische Kraftdichte des schnellveränderlichen Feldes und ein durch Ladungstrennung erzeugtes quasistatisches Feld $\boldsymbol{E}_s$.

Ionengleichung:

$$m_i n_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_i \;=\; q_i n_i \boldsymbol{E}_s \tag{2.73}$$

Wegen der größeren Ionenmasse ist die Oszillationsenergie der Ionen vernachlässigbar.

Quasineutralität:

$$q_e n_e + q_i n_i \;\approx\; 0 \tag{2.74}$$

Adiabatische Näherung:

$$\begin{aligned} q_e n_e \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{f}_p \;&=\; 0, \\ m_i n_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_i \;&=\; q_i n_i \boldsymbol{E}_s \;=\; -q_e n_e \boldsymbol{E}_s \;=\; \boldsymbol{f}_p \end{aligned} \tag{2.75}$$

Die Elektronen folgen dem quasistatischen Kräftegleichgewicht trägheitsfrei. Auf die Ionen wirkt damit die ponderomotorische Kraftdichte. Das Plasma wird insgesamt aus den Feldstärkemaxima verdrängt.

2.4.5 Ponderomotorischer Druck

Die Kraftwirkung auf ein Volumenelement läßt sich in einer Feldtheorie auch als die Resultierende der an der Oberfläche angreifenden Kräfte darstellen. Entsprechend dieser Auffassung gibt es zur ponderomotorischen Kraftdichte einen ponderomotorischen Drucktensor.

Drucktensor:

$$\boldsymbol{f}_p \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_p, \qquad \int_V dV \boldsymbol{f}_p \;=\; -\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Pi}_p \tag{2.76}$$

Impulserhaltung für das Volumen V zur Zeit $t = 0$***:***

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha \int\limits_{V_\alpha(t)} dV m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \;=\; \int\limits_V \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_\alpha \times \boldsymbol{B}) \tag{2.77}$$

α nummeriert die Teilchensorte (Elektronen, Ionen), $V_\alpha(t)$ ist das von der Teilchen der Sorte α zur Zeit t eingenommene Volumen, wobei sich zur Zeit $t = 0$ alle Teilchen im selben Volumen befinden: $V_\alpha(0) = V$

Umformungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{V_\alpha(t)} dV m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha &= \int\limits_V dV\ \partial_t(m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha) + \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}_\alpha\ m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \\ &= \int\limits_V dV\ \{\partial_t(m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E} \\ &= \frac{1}{4\pi}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}\} \\ &= \frac{1}{4\pi}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\nabla}E^2\} \\ &= \frac{1}{4\pi}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\ E^2) - \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\times\partial_t\boldsymbol{B}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha\times\boldsymbol{B} &= \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{B} \\ &= \frac{1}{4\pi}(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}B^2 + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \\ &= \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}B^2] - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

Erhaltungssatz für die Impulsdichte: Das Volumen V ist beliebig. Daher muß der Integrand verschwinden:

$$\begin{aligned}&\partial_t\{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha + \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\} + \\ &\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{v}_\alpha + \frac{1}{8\pi}\ (E^2+B^2) - \frac{1}{4\pi}\ (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B})\} = 0 \qquad (2.78)\end{aligned}$$

Zeitmittelung:

$$\boldsymbol{\Pi}_p = \left\langle m_e n_e \dot{\boldsymbol{\xi}}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{8\pi}\ (E^2+B^2) - \frac{1}{4\pi}\ (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B})\right\rangle \qquad (2.79)$$

Bemerkung 2.7

1. *Der Drucktensor besteht i.a. aus dem kinematischen Drucktensor der Elektronen und dem Drucktensor des elektromagnetischen Feldes.*

2. *Bei der Herleitung des Drucktensors wurden die Maxwellgleichungen für die Strom- und Ladungsdichten verwendet.*

3. *Die Übereinstimmung des Drucktensors (2.79) mit dem Ausdruck (2.71) für die Kraftdichte zeigen die folgenden beiden Beispiele.*

Beispiel 2.6 (Elektromagnetische Welle)

- *Felder:* $\boldsymbol{E} = (E(z), 0, 0),\ \boldsymbol{B} = (0, B(z), 0);\ \propto \exp(-i\omega t)$
- *Oszillationsgeschwindigkeit:* $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{q}{-i\omega m}\boldsymbol{E}$
- *Stromdichte:*

$$\boldsymbol{j} \;=\; qn\dot{\boldsymbol{\xi}} \;=\; \frac{q^2 n\boldsymbol{E}}{-i\omega m} \;=\; \frac{1}{4\pi}\frac{\omega_p^2}{-i\omega}\boldsymbol{E}$$

- *Maxwellgleichungen:*

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \;=\; \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \;=\; -i\frac{\omega}{c}\,\epsilon\boldsymbol{E}, \qquad \epsilon \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \;=\; -\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{B} \;=\; i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}$$

- *Magnetfeld:*

$$\partial_z B \;=\; i\frac{\omega}{c}\epsilon E, \qquad B \;=\; -i\frac{c}{\omega}\,\partial_z E$$

$$\partial_z|B|^2 \;=\; B^*\partial_z B + c.c. \;=\; -\epsilon E\partial_z E^* + c.c. \;=\; -\epsilon\partial_z|E|^2$$

- *Druck:* $\Pi_{zz} = \partial_z\left\langle \frac{1}{8\pi}\,(E^2 + B^2)\right\rangle$
- *Kraftdichte:*

$$f_z = = \;\frac{1}{16\pi}\,\partial_z(|E|^2 + |B|^2) \;=\; \frac{1}{16\pi}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\partial_z|E|^2$$

Beispiel 2.7 (Elektrostatische Welle)

- *Felder:* $\boldsymbol{E} = (0, 0, E(z)),\ \boldsymbol{B} = 0,\ \omega = \omega_p$
- *Oszillationsgeschwindigkeit:*

$$v \;=\; \frac{q}{-i\omega_p m}E, \qquad mn|v|^2 \;=\; \frac{nq^2}{\omega_p^2 m}|E|^2 \;=\; \frac{1}{4\pi}|E|^2$$

- *Druck:*

$$\Pi_{zz} \;=\; mn < v^2 > + \frac{1}{8\pi} < E^2 > - \frac{1}{4\pi} < E^2 > = \frac{1}{16\pi}|E|^2$$

- *Kraftdichte:*

$$f_z \;=\; \frac{1}{16\pi}\partial_z|E|^2$$

Kapitel 3

Grundgleichungen der Plasmatheorie

3.1 Statistische Beschreibung

3.1.1 Liouville-Gleichung

6N-dimensionaler Phasenraum:

Ein System aus N-Teilchen kann in der klassischen Mechanik durch **einen** Punkt $(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N)$ in einem 6N-dimensionalen Phasenraum repräsentiert werden. Der Zeitentwicklung des Systems entspricht die Bewegung des Punktes gemäß den Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_i \;=\; \partial_{\boldsymbol{p}_i} H, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i \;=\; -\partial_{\boldsymbol{q}_i} H \tag{3.1}$$

Liouville-Funktion:

Ein Ensemble von klassischen Systemen aus N-Teilchen wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $F_N(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N, t)$, die als Liouville-Funktion bezeichnet wird, repräsentiert.

Wahrscheinlichkeit, ein System am Ort $(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N)$ im Volumenelement $d^3q_1 d^3p_1 \cdots d^3q_N d^3p_1$ zur Zeit t zu finden:

$$F_N(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N, t) d^3q_1 d^3p_1 \cdots d^3q_N d^3p_1$$

Kontinuitätsgleichung:

Wegen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t F_N + \sum_{i=1}^{N} \partial_{\boldsymbol{q}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{q}}_i F_N) + \partial_{\boldsymbol{p}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{p}}_i F_N) \;=\; 0. \tag{3.2}$$

Volumenerhaltung:

Das Strömungsfeld im Phasenraum ist divergenzfrei:

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_{\boldsymbol{q}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{q}}_i) + \partial_{\boldsymbol{p}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{p}}_i) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \partial_{\boldsymbol{q}_i} \cdot \partial_{\boldsymbol{p}_i} H - \partial_{\boldsymbol{p}_i} \cdot \partial_{\boldsymbol{q}_i} H = 0. \tag{3.3}$$

Divergenzfreie Strömungen nennt man inkompressibel, da ein mitbewegtes Volumen erhalten bleibt. Die Form des Volumens kann sich dabei aber sehr stark ändern (Tintentropfen in Wasser).

Liouville-Gleichung:

Aus (3.2) und (3.3) folgt

$$\frac{d}{dt} F_N \;=\; 0, \qquad \frac{d}{dt} \;=\; \partial_t + \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{q}}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{q}_i} + \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{p}_i} \tag{3.4}$$

Hieraus folgt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsdichte entlang der Bahn eines Systems:

$$F_N(\boldsymbol{q}_1(t), \cdots, \boldsymbol{q}_N(t), \boldsymbol{p}_1(t), \cdots, \boldsymbol{p}_N(t), t) = const.$$

3.1.2 BBGKY-Hierarchie

Durch Integration über den Phasenraum von (N-S)-Teilchen, erhält man eine reduzierte 6S-dimensionale Verteilungsfunktion. Für diese reduzierten Verteilungsfunktionen erhält man ein Gleichungssystem, das nach **B**orn, **B**ogoljubov, **G**reen, **K**irkwood und **Y**von als BBGKY-Hierarchie bezeichnet wird.

x,v- Raum:

Im folgenden wird anstelle des kanonischen Impulses (2.3) die Teilchengeschwindigkeit als unabhängige Variable gewählt. Die Liouville-Gleichung gilt hier entsprechend, da die Strömung in diesen Koordinaten ebenfalls divergenzfrei ist:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i \;=\; \boldsymbol{v}_i, \qquad \dot{\boldsymbol{v}}_i \;=\; \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B})$$

$$\partial_{\boldsymbol{x}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{x}}_i) + \partial_{\boldsymbol{v}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{v}}_i) \;=\; \partial_{\boldsymbol{x}_i} \cdot \boldsymbol{v}_i + \frac{q}{mc} \boldsymbol{B} \cdot (\partial_{\boldsymbol{v}_i} \times \boldsymbol{v}_i) = 0 \tag{3.5}$$

Der erste Term verschwindet, da $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{v}$ unabhängige Koordinaten sind. Der zweite Term verschwindet ebenfalls, da der Geschwindigkeitsvektor im Geschwindigkeitsraum keine Rotation besitzt.

Elektrostatische Wechselwirkung: $\boldsymbol{B} = 0$

Für eine rein elektrostatische Wechselwirkung der Ladungen gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}}_i &= \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \boldsymbol{a}_{ij} \\ \boldsymbol{a}_{ij} &= -\frac{1}{m}\partial_{\boldsymbol{x}_i} V(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j), \qquad V(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) = \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Liouville-Gleichung: mit (3.5) und (3.6)

$$\partial_t F_N + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{x}_i} F_N + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \boldsymbol{a}_{ij} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i} F_N = 0. \tag{3.7}$$

Reduzierte Verteilungsfunktionen: S-Teilchen-Funktion

$$\begin{aligned} F_S(1,\cdots,S) &= \int d^{N-S} F_N(1,\cdots,S,S+1,\cdots,N) \\ d^{N-S} &= d(S+1)\cdots dN, \qquad dj = d^3x_j d^3v_j, \\ (1,\cdots,N) &= (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{v}_N) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Intergration über d^{N-S}***:*** Bei der Integration der Liouville-Gleichung über d^{N-S} treten die folgenden Integrale auf:

$$\int d^{N-S} \partial_t F_n = \partial_t F_S \tag{3.9}$$

$i \in \{1,\cdots,S\}$:

$$\int d^{N-S} \boldsymbol{v}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{x}_i} F_N = \boldsymbol{v}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{x}_i} F_S \tag{3.10}$$

$i \in \{N-S,\cdots,N\}$:

$$\int d^{N-S} \boldsymbol{v}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{x}_i} F_N = \int d^{N-S} \partial_{\boldsymbol{x}_i} \cdot (\boldsymbol{v}_i F_N) = 0 \tag{3.11}$$

$i \in \{N-S,\cdots,N\},\ j \in \{1,\cdots,N\}$:

$$\int d^{N-S} \boldsymbol{a}_{ij} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i} F_N = \int d^{N-S} \partial_{\boldsymbol{v}_i} \cdot (\boldsymbol{a}_{ij} F_N) = 0 \tag{3.12}$$

$i \in \{1,\cdots,S\},\ j \in \{1,\cdots,S\}$:

$$\int d^{N-S} \boldsymbol{a}_{ij} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i} F_N = \int d^{N-S} \boldsymbol{a}_{ij} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i} F_S \tag{3.13}$$

$i \in \{1,\cdots,S\},\ j \in \{N-S,\cdots,N\}$:

$$\sum_{j=S+1}^{N} \int d^{N-S} \boldsymbol{a}_{ij} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i} F_N = \sum_{j=S+1}^{N} \int dj\, \boldsymbol{a}_{ij} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i} F_{S+1}(1,\cdots,S,j)$$

$$= \quad (N-S)\int d(S+1)\boldsymbol{a}_{i(S+1)}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}_i}F_{S+1}(1,\cdots,S+1) \tag{3.14}$$

Hierbei wurde verwendet, daß F_N am Rand des Phasenraumes verschwindet und symmetrisch ist bezüglich Teilchenvertauschung.

BBGKY-Hierarchie: Mit (3.9) - (3.14 folgt aus (3.7):

$$\begin{aligned}\partial_t F_S \;+\; \sum_{i=1}^{S}\boldsymbol{v}_i\cdot\partial_{\boldsymbol{x}_i}F_S \;+\; \sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1,j\neq i}^{S}\boldsymbol{a}_{ij}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}_i}F_S \\ +\;(N-S)\sum_{i=1}^{S}\int d(S+1)\boldsymbol{a}_{i(S+1)}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}_i}F_{S+1}(1,\cdots,S+1) \;=\; 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

Die S-Teilchenfunktion hängt von der (S+1)-Teilchenfunktion ab, so daß sich eine ganze Hierarchie von Gleichungen ergibt. Im S-dimensionalen Phasenraum beschreibt der dritte Term eine individuelle Teilchenwechselwirkung, der vierte eine kollektive Wechselwirkung mit den restlichen Teilchen.

Stoßfreie Plasmen: Für ein Plasma ist die individuelle Wechselwirkung ($\sim g$) klein gegenüber der kollektiven Wechselwirkung ($\sim N_D g$). Bei vollständiger Vernachlässigung der individuellen Wechselwirkung (stoßfreies Plasma) erhält man mit dem Produktansatz (keine Korrelationen)

$$(N-S)^S F_S \;=\; \prod_{i=1}^{S} f(i), \qquad f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \;=\; NF_1 \tag{3.16}$$

die Gleichung

$$\partial_t f + \boldsymbol{v}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} f + <\boldsymbol{a}>\cdot\partial_{\boldsymbol{v}} f \;=\; 0 \tag{3.17}$$

$$<\boldsymbol{a}> \;=\; \int d^3x'd^3v'\; f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}',t)\;\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3.18}$$

Die hierbei auftretende gemittelte Beschleunigung erhält man gerade, wenn man in der Poisson-Gleichung die Ladungsdichte durch die gemittelte Ladungsdichte ersetzt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= -\frac{q}{m}\,\boldsymbol{\nabla}\Phi, \qquad <\boldsymbol{a}> = \; -\frac{q}{m}\,\boldsymbol{\nabla}<\Phi>, \\ <\Phi> &= \int d^3x'd^3v'\; f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}',t)\;\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \triangle<\Phi> &= \int d^3x'd^3v'\; f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}',t)\;\triangle\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ &= \int d^3x'd^3v'\; f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v}',t)\;(-4\pi q)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ &= -4\pi q\int d^3v\; f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.2 Kinetische Beschreibung

In der kinetischen Theorie betrachtet man die Entwicklung der Einteilchenverteilungsfunktion im 6-dimensionalen Phasenraum.

Verteilungsfunktion:

Mittlere Zahl der Teilchen der Sorte i (Elektronen, Ionen) am Ort $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ im Volumen $d^3x d^3v$ zur Zeit t :

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) d^3x d^3v. \tag{3.20}$$

Kinetische Gleichungen:

Gleichung (3.17) ist ein Spezialfall einer kinetischen Gleichung, die hier nur unter sehr einschränkenden Bedingungen (1 Teilchensorte, elektrostatische Wechselwirkung, stoßfreies Plasma) hergeleitet wurde. Allgemeiner besitzen die kinetischen Gleichungen eines Plasmas die Form

$$\frac{d}{dt} f_j \;=\; \partial_t f_j + \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} f_j + \frac{q_j}{m_j} (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \partial_{\boldsymbol{v}} f_j \;=\; C_j \tag{3.21}$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die Änderung der Verteilungsfunktion im mittleren Feld. $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ sind daher durch die Maxwell-Gleichungen mit den gemittelten Ladungs- und Stromdichten

$$\begin{aligned} \tau(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_j q_j \int d^3v f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_j q_j \int d^3v \; \boldsymbol{v} \; f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) \end{aligned} \tag{3.22}$$

zu bestimmen sind. Die rechte Seite (C_j) wird als Stoßterm bezeichnet. Der Stoßterm berücksichtigt die Änderungsrate der Verteilungsfunktion durch individuelle Stöße, die bei der kollektiven Bewegung vernachlässigt werden.

3.2.1 Vlasov-Gleichung

Für Zeiten, die klein sind gegenüber der freien Flugzeit, kann ein Plasma als stoßfrei betrachtet werden. Die kinetische Gleichung des stoßfreien Plasmas wird als *Vlasov-Gleichung* bezeichnet:

$$\partial_t f_j + \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} f_j + \frac{q_j}{m_j} (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \partial_{\boldsymbol{v}} f_j \;=\; 0 \tag{3.23}$$

Die Vlasov-Theorie bildet die Grundlage zur Beschreibung von elektromagnetischen und elektrostatischen Wellen in heißen Plasmen. Dabei spielen Effekte der Teilchen-Welle-Wechselwirkung und der Stabilität von Verteilungsfunktionen eine wichtige Rolle.

3.2.2 Boltzmann-Gleichung

Stoßannahmen:

- 2-er Stöße (Verdünnte Systeme)
- elastische Stöße (Energie- und Impulserhaltung)
- lokale und instantane Stöße $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}', t)$

Bezeichnungen:

$$\begin{array}{rcll} \text{vor dem Stoß} & : & \boldsymbol{v}_i, & f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) = f_i(\boldsymbol{v}) = f_i \\ \text{nach dem Stoß} & : & \boldsymbol{v}_i', & f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}', t) = f_i(\boldsymbol{v}') = f_i' \end{array} \tag{3.24}$$

Stoßgesetze für 2-er Stöße:

1. Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_s &= \frac{m_i \boldsymbol{v}_i + m_j \boldsymbol{v}_j}{m_i + m_j}, \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \\ \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_s + \frac{m_{ij}}{m_i}\boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_s - \frac{m_{ij}}{m_j}\boldsymbol{g}, \\ m_{ij} &= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \qquad d^3 v_i d^3 v_j = d^3 v_s d^3 g \end{aligned} \tag{3.25}$$

2. Impulserhaltung: $\boldsymbol{v}_s' = \boldsymbol{v}_s$,
3. Energieerhaltung: $g' = g$
4. Wirkungsquerschnitt: χ Ablenkwinkel, b Stoßparameter

$$d\sigma = b db = \sigma(g, \chi)\, d\Omega, \qquad d\Omega = \sin(\chi) d\chi d\varphi$$

Coulomb-Potential: $U = q/r$

$$\begin{aligned} \tan(\chi/2) &= \frac{q_i q_j}{m_{ij} g^2 b} \\ \sigma(g, \chi) &= \left(\frac{q_i q_j}{2 m_{ij} g^2 \sin^2(\chi/2)} \right)^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Debye-Potential: $U = (q/r)\exp(-r/\lambda_D)$, Bornsche-Näherung $(\lambda_L \ll \lambda_{dB})$

$$\sigma(g, \chi) = \left(\frac{2 q_i q_j m_{ij}}{(\hbar/\lambda_D)^2 + 4 m_{ij}^2 g^2 \sin^2(\chi/2)} \right)^2 \tag{3.27}$$

Übergangswahrscheinlichkeit:

Für den Übergang $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \to (\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j')$ wird eine Übergangsrate in der Form

$$W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \;\; (d^3v_i' d^3v_j') \;\; (f_i d^3v_i f_j d^3v_j) \tag{3.28}$$

angenommen. Der erste Faktor bezeichnet eine Übergangswahrscheinlichkeit für einen Stoß mit den Anfangsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ und den Endgeschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j'$, der zweite das Volumen der Endzustände. Bei einem Stoß im Schwerpunktsystem entspricht diesen beiden Faktoren der differentielle Streuquerschnitt.

Der dritte Faktor stellt die Zahl der stoßenden Teilchen dar. Diese wird unter Vernachlässigung von Korrelationen durch die Einteilchenverteilungsfunktion ausgedrückt. Diese Annahme wird als *Stoßzahlansatz* bezeichnet. Der Stoßzahlansatz führt zu irreversiblem Verhalten, obwohl den einzelnen Stößen reversible Stoßgesetze zugrunde liegen.

Verluste: Summation über alle Stoßpartner und alle Endzustände

$$-d^3v_i \sum_j \int d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \; f_i f_j$$

Gewinne: Summation über alle Anfangszustände und alle Stoßpartner

$$+d^3v_i \sum_j \int d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' W_{ij}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j') \; f_i' f_j'$$

Bilanz: pro Volumenelement d^3v_i

$$C_i \;\; = \;\; \sum_j \int d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' \left\{ W_{ij}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j') \; f_i' f_j' - W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \; f_i f_j \right\}$$

Mikroskopische Reversibilität:

Invarianz gegenüber einer gleichzeitigen Raum- und Zeitspiegelung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \;\; &\to \;\; \boldsymbol{v}, \qquad Anfangszustand \;\to\; Endzustand, \\ W_{ij}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j') \;\; &= \;\; W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \\ C_i \;\; &= \;\; \sum_j \int d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' \; W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \; (f_i' f_j' - f_i f_j) \end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \;\; &= \;\; W_{ij}(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}') \delta(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_s'), \qquad d^3v_i' d^3v_j' \;\; = \;\; d^3g' d^3v_s' \\ C_i \;\; &= \;\; \sum_j \int d^3v_j d^3g' \; W_{ij}(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}') \; (f_i' f_j' - f_i f_j) \end{aligned}$$

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} W_{ij}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}') &= \sigma_{ij}(g,\chi)\ \delta(\frac{1}{2}g'^2 - \frac{1}{2}g^2), \\ d^3g' &= g'^2\ d\Omega\ =\ g'\ d(\frac{1}{2}\ g'^2)d\Omega \\ C_i &= \sum_j \int d^3v_j d\Omega\ g\ \sigma_{ij}(g,\chi)\ (f_i'f_j' - f_if_j) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Der Stoßterm (3.29) wird als *Boltzmann-Stoßterm*, die zugehörige kinetische Gleichung als *Boltzmann-Gleichung* bezeichnet. Man beachte, daß die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j'$, die als Argumente von $f_i'f_j'$ auftreten, nach (3.25) als Funktionen von $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ und dem Ablenkwinkel χ auszudrücken sind.

Entropie: Kinetische Definition, $S_{0K} = k_B S$

$$S = -\sum_i \int d^3v_i d^3x\ f_i \ln f_i \tag{3.30}$$

H-Theorem:

$$f_i \text{ Lösung der Boltzmann-Gleichung} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}S\ \geq\ 0 \tag{3.31}$$

Beweis: $H\ =\ -S$, z.z.: $dH/dt \leq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f_i \ln f_i) &= (\partial_t + \boldsymbol{v}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \partial_{\boldsymbol{v}_i})\,(f_i \ln f_i) \\ &= \partial_t(f_i \ln f_i) + \partial_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{v}_i f_i \ln f_i) + \partial_{\boldsymbol{v}_i} \cdot (\dot{\boldsymbol{v}}_i f_i \ln f_i) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\frac{d}{dt}(f_i \ln f_i) = (1 + \ln f_i)\frac{df_i}{dt}\ =\ (1 + \ln f_i)C_i \tag{3.33}$$

In der zweiten Gleichung wurde (3.21) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H &= \sum_i \int d^3v_i d^3x\ \partial_t(f_i \ln f_i)\ =\ \sum_i \int d^3v_i d^3x\ \frac{d}{dt}(f_i \ln f_i) \\ &= \sum_i \int d^3v_i d^3x\ (1 + \ln f_i)C_i\ =\ \sum_i \int d^3v_i d^3x\ \ln f_i C_i \end{aligned} \tag{3.34}$$

Das Integral über die Divergenzterme aus (3.32) verschwindet, da f_i am Rand des Phasenraumes verschwindet. Das Integral von C_i über d^3v_i verschwindet wegen der Teilchenzahlerhaltung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H &= \sum_{i,j} \int d^3v_i d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' d^3x\ \ln f_i W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)\ (f_i'f_j' - f_if_j) \\ &= \sum_{i,j} \int d^3v_i d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' d^3x\ \ln f_j W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)\ (f_i'f_j' - f_if_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} \int d^3v_i d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' d^3x \;\; \ln f_i' W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \;\; (-1)(f_i' f_j' - f_i f_j) \\
&= \sum_{i,j} \int d^3v_i d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' d^3x \;\; \ln f_j' W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \;\; (-1)(f_i' f_j' - f_i f_j) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int d^3v_i d^3v_j d^3v_i' d^3v_j' d^3x \;\; \ln \left(\frac{f_i f_j}{f_i' f_j'}\right) W_{ij}(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{v}_j' | \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \;\; (f_i' f_j' - f_i f_j)
\end{aligned}
$$

Im ersten Schritt wurde i mit j im zweiten i mit i', j mit j' im dritten i mit j', j mit i' vertauscht. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist invariant gegenüber diesen Vertauschungen. Im vierten Schritt wird die Summe aus vier gleichen Ausdrücken gebildet und durch vier dividiert.

$$
W_{ij}, f_i', f_j' \;\geq\; 0, \qquad (1-x)\,\ln(x) \;\leq\; 0 \;\Longrightarrow\; \frac{dH}{dt} \;\leq\; 0. \tag{3.35}
$$

Bedingung für $\frac{dS}{dt} = 0$***:***

$$
\begin{aligned}
\ln f_i + \ln f_j &= \ln f_i' + \ln f_j' \\
\ln f_i &= -\alpha - \beta E_i - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{p_i} \\
f_i &= const \;\; \exp\left(-\beta E_i - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{p_i}\right)
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

$\ln f_i$ ist hier eine Stoßinvariante und muß daher eine Linearkombination der bekannten Stoßinvarianten (Teilchenzahl, Impuls, Energie) sein. Ausgehend von einer beliebigen Anfangsverteilung muß die Entropie zunehmen, bis eine Gleichgewichtsverteilung der Form (3.36) erreicht ist.

Bemerkung 3.1 (Stoßfreies Plasma) *Im stoßfreien Plasma bleibt die Entropie nach (3.34) erhalten. Hier gibt es metastabile Gleichgewichte, die weit vom thermischen Gleichgewicht entfernt sein können.*

3.2.3 Landau-Gleichung

Der Boltzmann-Stoßterm wird nach kleinen Ablenkwinkeln entwickelt und über den Raumwinkel integriert.

Stoßannahmen:

- kleine Ablenkwinkel
- quasistatisches Debye-Potential

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mu,\nu \quad &: \quad \text{Geschwindigkeitskomponenten} \\ a_\mu b_\mu \quad &= \quad \sum_\mu a_\mu b_\mu, \qquad \text{Summenkonvention} \\ \delta g_\mu \quad &= \quad g'_\mu - g_\mu, \qquad \partial_{i\mu} \;=\; \frac{1}{m_i}\partial_{v_{i\mu}} \end{aligned}$$

Geschwindigkeitsänderungen:

$$v'_{i\mu} \;=\; v_{i\mu} + \frac{m_{ij}}{m_i}\;\delta g_\mu, \qquad v'_{j\mu} \;=\; v_{j\mu} - \frac{m_{ij}}{m_j}\;\delta g_\mu, \tag{3.37}$$

Entwicklung von $f'_i f'_j$ in δg_μ:

$$\begin{aligned} f'_i \quad &= \quad f_i + m_{ij}\delta g_\mu\;\partial_{i\mu} f_i + \frac{1}{2}m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;\partial_{i\mu}\partial_{i\nu} f_i \\ f'_j \quad &= \quad f_j - m_{ij}\delta g_\mu\;\partial_{j\mu} f_i + \frac{1}{2}m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;\partial_{j\mu}\partial_{j\nu} f_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_i f'_j \quad &= \quad f_i f_j + m_{ij}\delta g_\mu\;(\partial_{i\mu} f_i) f_j - m_{ij}\delta g_\mu\;(\partial_{j\mu} f_i) f_i \;-\; m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;(\partial_{i\mu} f_i)(\partial_{j\nu} f_j) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;(\partial_{i\mu}\partial_{i\nu} f_i) f_j \;+\; \frac{1}{2}m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;(\partial_{j\mu}\partial_{j\nu} f_j) f_i \\ &= \quad f_i f_j + m_{ij}\delta g_\mu\;(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) f_i f_j \;+\; \frac{1}{2}m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu})(\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \end{aligned}$$

Stoßterm (3.29) nach der Entwicklung:

$$\begin{aligned} C_i \quad &= \quad \sum_j \int d^3 v_j d\Omega\; g\;\sigma_{ij}(g,\chi)\;\Big(m_{ij}\delta g_\mu\;(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) f_i f_j \\ &\quad + \frac{1}{2}m_{ij}^2 \delta g_\mu\;\delta g_\nu\;(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu})(\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \Big) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Spezielles Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} g_\mu \quad &= \quad (0,0,1), \qquad g'_\mu \;=\; g\;(\sin\chi\cos\varphi, \sin\chi\sin\varphi, \cos\chi) \\ \delta g_\mu \quad &= \quad g\;(\sin\chi\cos\varphi, \sin\chi\sin\varphi, \cos\chi - 1) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Integration über $d\varphi$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi\;\delta g_\mu \quad &= \quad 2\pi g\;(0,0,\cos\chi - 1) \;\approx\; -\pi g\;(0,0,\chi^2) \\ \int_0^{2\pi} d\varphi\;\delta g_\mu \delta g_\nu \quad &= \quad 2\pi g \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2\chi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & (\cos\chi - 1)^2 \end{pmatrix} \\ &\approx \quad \pi g^2 \begin{pmatrix} \chi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Integration über $d\chi$***:***

$$\begin{aligned}
B &= \pi \int_0^\pi \sigma_{ij}(g,\chi)\chi^2 \sin\chi d\chi \\
&\approx \pi \int_0^1 \frac{4q_i^2 q_j^2 m_{ij}^2}{\left((\hbar/\lambda_D)^2 + m_{ij}^2 g^2 \chi^2\right)^2}\ \chi^2 \frac{1}{2} d(\chi^2) \\
&= \frac{2\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4}\ \int_0^1 \frac{\chi^2 d\chi}{(\chi^2 + (\lambda_{dB}/\lambda_D)^2)^2}, \qquad \lambda_{dB} = \frac{\hbar}{m_{ij} g} \\
&\approx \frac{2\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4}\ \int_{\left(\frac{\lambda_{dB}}{\lambda_D}\right)^2}^1 \frac{x - (\lambda_{dB}/\lambda_D)^2}{x^2} \\
&= \frac{2\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4}\ \left(\ln x + \frac{\lambda_{dB}^2}{\lambda_D^2}\ \frac{1}{x}\right)\Big|_{(\lambda_{dB}/\lambda_D)^2}^1 \\
&\approx \frac{4\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4}\ \Lambda, \qquad \Lambda = \ln\left(\frac{\lambda_{dB}}{\lambda_D}\right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Hierbei wurde der Wirkungsquerschnitt (3.27) verwendet. Der Beitrag der oberen Integrationsgrenze ist wegen $\lambda_{dB} \ll \lambda_D$ vernachlässigbar. Damit wird die Annahme kleiner Ablenkwinkel durch das Ergebnis gerechtfertigt. Mit Hilfe des Stoßintegrals B lassen sich alle Integrationen über den Raumwinkel ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\int d\Omega\ \delta g_\mu &= Bg\ (0,0,-1) = -Bg_\mu \\
\int d\Omega\ \delta g_\mu \delta g_\nu &= Bg^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BG_{\mu\nu}, \qquad G_{\mu\nu} = g^2\delta_{\mu\nu} - g_\mu g_\nu
\end{aligned}$$

Stoßterm (3.38) nach der Raumwinkelintegration:

$$\begin{aligned}
C_i = \sum_j \int d^3 v_j \frac{m_{ij}^2}{2} gB \Big\{ &- \frac{2}{m_{ij}} g_\nu (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\
&+ G_{\mu\nu}(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu})(\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \Big\}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Hilfssatz:

$$(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu})[F(g) G_{\mu\nu}] = -\frac{2g_\nu}{m_{ij}}\ F(g) \tag{3.42}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\partial_{v_{i\mu}} G_{\mu\nu} &= 2g_\mu \delta_{\mu\nu} - 3g_\nu - g_\mu \delta_{\mu\nu} = -2g_\nu \\
\partial_{v_{j\mu}} G_{\mu\nu} &= -\partial_{v_{i\mu}} G_{\mu\nu} \\
G_{\mu\nu} \partial_{v_{i\mu}} F(g) &= F'(g) \frac{g_\mu}{g} G_{\mu\nu} = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu})[F(g)G_{\mu\nu}] \;=\; -2g_\nu \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right) F(g) \;=\; -\frac{2g_\nu}{m_{ij}}\, F(g) \tag{3.44}$$

Landau-Stoßterm: Setzte $F(g) \;=\; Bg$

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_j \int d^3v_j \frac{m_{ij}^2}{2}\, (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) Bg G_{\mu\nu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\ &= \sum_j \int d^3v_j \frac{m_{ij}^2}{2}\, \partial_{i\mu} Bg G_{\mu\nu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\ &= \sum_j \frac{2\pi q_i^2 q_j^2 \Lambda}{m_i}\, \partial_{v_{i\mu}} \int d^3v_j\, \frac{1}{g^3}\, G_{\mu\nu}\, (\frac{1}{m_i}\partial_{v_{i\nu}} - \frac{1}{m_j}\partial_{v_{j\nu}})\, f_i f_j \end{aligned} \tag{3.45}$$

Der Landau-Stoßterm besitzt die Form einer Divergenz einer Stromdichte. Die Teilchenzahl in einem Volumen des Geschwindigkeitsraumes ändert sich daher durch den entsprechenden Fluß durch die Oberfläche.

3.2.4 Fokker-Planck-Gleichung

Die Landau-Gleichung kann in der Form einer Fokker-Planck-Gleichung geschrieben werden:

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_j \int d^3v_j\, \frac{m_{ij}^2}{2}\, \partial_{i\mu} Bg G_{\mu\nu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\ &= \sum_j \int d^3v_j\, \frac{m_{ij}^2}{2}\, \partial_{i\mu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) (Bg G_{\mu\nu} f_i f_j) + \\ &\quad \sum_j \int d^3v_j\, \frac{m_{ij}^2}{2}\, \partial_{i\mu} \frac{2Bg}{m_{ij}} g_\mu f_i f_j \\ &= -\frac{\partial}{\partial_{v_{i\mu}}} \left(\frac{<\Delta v_{i\mu}>}{\Delta t} f_i\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial_{v_{i\mu}} \partial_{v_{i\nu}}} \left(\frac{<\Delta v_{i\mu} \Delta v_{i\nu}>}{\Delta t} f_i\right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Reibungsterm:

$$\begin{aligned} \frac{<\Delta v_{i\mu}>}{\Delta t} &= \sum_j \int d^3v_j \frac{Bg}{m_i} m_{ij} (-g_\mu) f_j \\ &= -\sum_j \frac{4\pi q_i^2 q_j^2 \Lambda}{m_i m_{ij}} \int d^3v_j\, \frac{g_\mu}{g^3} f_j \end{aligned} \tag{3.47}$$

Diffusionsterm:

$$\begin{aligned} \frac{<\Delta v_{i\mu} \Delta v_{i\nu}>}{\Delta t} &= \sum_j \int d^3v_j\, m_{ij}^2\, Bg\, G_{\mu\nu}\, f_j \\ &= \sum_j \frac{4\pi q_i^2 q_j^2 \Lambda}{m_i m_j} \int d^3v_j\, \frac{G_{\mu\nu}}{g^3}\, f_j \end{aligned} \tag{3.48}$$

3.3 Flüssigkeitsbeschreibung

3.3.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Makroskopische Transportvorgänge können vielfach mit den Methoden der Kontinuumsmechanik behandelt werden. Diese sind in der Regel anwendbar, wenn makroskopische Dichten definiert werden können und deren Beobachtungszeiten groß sind gegenüber den inneren Relaxationszeiten. Die Auffaltung eines Gebirges kann z.B. über sehr lange Zeiträume (im Vergleich zum menschlichen Leben) kontinuumsmechanisch betrachtet werden. Die Ausbreitung von Schall- und Stoßwellen in Festkörpern ist ein kontinuumsmechanischer Vorgang.

Der Übergang von der Newtonschen Teilchenmechanik zur Kontinuumsmechanik wurde durch Bernoulli (Druck), Euler (Bewegungsgleichung) und Cauchy (elastische Verformung) vollzogen. Die Kontinuumsmechanik ist also wesentlich älter als ihre mikroskopische Begründung (im Rahmen der Boltzmanngleichung). Vom makroskopischen Standpunkt aus umfaßt sie streng gültige Erhaltungssätze (Teilchenzahl, Impuls, Energie) und empirisch zu begründende konstitutive Gleichungen (Zustandsgleichung, Transportkoeffizienten).

Kinematik:

Die Bewegung eines Kontinuums kann als eine Abbildung aufgefaßt werden, die jedem Punkt $\boldsymbol{a}$ eines Gebietes zu einer Anfangszeit 0 einen Punkt $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$ zu einer späteren Zeit t zuordnet. Diese Abbildung soll ein-eindeutig und hinreichend oft differenzierbar sein. Damit definiert sie Teilchenbahn, -geschwindigkeit, -beschleunigung und Volumenänderung nach den folgenden Beziehungen:

- Teilchenbahn: $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t),\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},0) = \boldsymbol{a}$
- Geschwindigkeit: $\partial_t \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{a},t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t),t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$
- Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t) &= \partial_t \boldsymbol{V}(\boldsymbol{a},t) = \partial_t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + \partial_t \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t) \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \\ &= \partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

- Volumenelement: $d^3x = J(\boldsymbol{a},t) d^3a, \qquad J = det \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|$

$$J(\boldsymbol{a}, t+\delta t) = J(\boldsymbol{a},t) J(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t), \delta t)$$

$$J(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t), \delta t) = det \left| \frac{\partial (x_i + v_i \delta t)}{\partial x_j} \right| = 1 + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \delta t + O(\delta t^2)$$

$$\partial_t J(\boldsymbol{a},t) = J(\boldsymbol{a},t)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})$$

Allgemeine Form der Erhaltungssätze:

Für eine beliebige Kontinuumsgröße sei $h(\boldsymbol{x},t)$ die Dichte, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)$ die Stromdichte und $g(\boldsymbol{x},t)$ eine Erzeugungsrate pro Volumeneinheit. Dannn kann die Erhaltung dieser Größe in der folgenden Form (integral, lokal) ausgedrückt werden:

1. *Integrale Form:*

   Beliebiges mitbewegtes Volumen $V(t)$ mit Oberfläche $\partial V(t)$; die Normalenrichtung des Oberflächenelementes ist nach außen gerichtet.

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\ h(\boldsymbol{x},t) \;=\; \int_V d^3x\ g(\boldsymbol{x},t) - \int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.49}$$

2. *Lokale Form:*

   Umformung der Terme aus (3.49) in Volumenintegrale ergibt mit $h(\boldsymbol{x},t) = H(\boldsymbol{a},t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3x\ h(\boldsymbol{x},t) &= \frac{d}{dt}\int_{V(0)} d^3a\ J(\boldsymbol{a},t)H(\boldsymbol{a},t)\\
&= \int_{V(0)} d^3a\ \partial_t(J(\boldsymbol{a},t)H(\boldsymbol{a},t))\\
&= \int_{V(0)} d^3a\ J(\boldsymbol{a},t)(H(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}) + \partial_t H(\boldsymbol{a},t))\\
&= \int_V d^3x\ \left\{h(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{d}{dt}h\right\}\\
&= \int_V d^3x\ \{\partial_t h + \boldsymbol{\nabla}\cdot(h\boldsymbol{v})\}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s} \;=\; \int_V d^3x\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s}$$

Da V beliebig ist gilt:

$$\partial_t h + \boldsymbol{\nabla}\cdot(h\boldsymbol{v}+\boldsymbol{s}) \;=\; g \tag{3.51}$$

Massenerhaltung: Setze $h = \varrho(\boldsymbol{x},t) = \delta(\boldsymbol{a},t),\ \boldsymbol{s}=0,\ g=0$

1. *Integrale Form:*

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\ \varrho \;=\; \int_{V(0)} d^3a\ \partial_t(J\delta) \;=\; 0 \tag{3.52}$$

2. *Lokale Form:*

$$\partial_t\varrho(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)) \;=\; 0 \tag{3.53}$$

Hilfssatz:

$$h = \varrho\varphi \implies \partial_t(\varrho\varphi) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho\varphi\boldsymbol{v}) = \varrho\frac{d}{dt}(\varphi) \tag{3.54}$$

Die lokalen Erhaltungssätze können also immer entweder in der Erhaltungsform (linke Seite) oder als Entwicklungsgleichung für ein Massenelement (rechte Seite) dargestellt werden. Der Beweis beruht auf der Gleichung für die Massenerhaltung.

Beweis (integrale Form): $\varphi(\boldsymbol{x},t) = \Phi(\boldsymbol{a},t)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_V d^3x\ (\varrho\varphi) &= \frac{d}{dt}\int_{V(0)} d^3a\ J\delta\Phi = \int_{V(0)} d^3a\ \partial_t(J\delta\Phi)\\ &= \int_{V(0)} d^3a\ J\delta\partial_t\Phi = \int_V d^3x\ \varrho\frac{d}{dt}\varphi\end{aligned} \tag{3.55}$$

Impulserhaltung: Setze

$h = \varrho v_\alpha$	:	α-Komponente der Impulsdichte
$g = \varrho f_\alpha$	:	f_α bezeichnet die α-Komponente der Kraft, die auf ein Massenelement pro Masseneinheit wirken (Volumenkraft)
$\boldsymbol{s}_\beta = -T_{\alpha\beta}$	:	α-Komponente der Kraft, die auf eine Fläche mit Normalenrichtung β pro Flächeneinheit wirkt (Oberflächenkraft, Spannungstensor)

1. *Integrale Form:*

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\ \varrho\boldsymbol{v} = \int_V d^3x\ \varrho\boldsymbol{f} + \int_{\partial V}\boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.56}$$

2. *Lokale Form:*

   Cauchy-Gleichung: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\partial_t(\varrho\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = \varrho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \varrho\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} \tag{3.57}$$

   Euler-Gleichung: $T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}$

$$\varrho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \varrho\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla}p \tag{3.58}$$

   Navier-Stokes-Gleichung: $T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \eta(\partial_{x_\alpha}v_\beta + \partial_{x_\beta}v_\alpha)$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$

$$\varrho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \varrho\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla}p + \eta\Delta\boldsymbol{v}, \qquad \eta : \text{Viskosität} \tag{3.59}$$

Energieerhaltung: Setze

$h = \varrho(\frac{1}{2}v^2 + e)$	:	Energiedichte mit der inneren Energie e pro Masseneinheit
$g = \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + Q$	:	Arbeitsleistung der Volumenkräfte, Heizleistung Q
$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{q}$	:	Arbeitsleistung der Oberflächenkräfte, Wärmestrom $\boldsymbol{q}$

1. *Integrale Form:*

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\ \varrho(\frac{1}{2}v^2+e) \;=\; \int_V d^3x\ (\varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+Q) + \int_{\partial V}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}-\boldsymbol{q})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.60}$$

2. *Lokale Form:*

   Gesamtenergie:

$$\partial_t\{\varrho(\frac{1}{2}v^2+e)\}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\varrho\boldsymbol{v}(\frac{1}{2}v^2+e)\} \;=\; \varrho\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2+e) \;= \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\partial_{x_\beta}(T_{\alpha\beta}v_\alpha)+Q-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q} \tag{3.61}$$

   Enthalpie: $w=e+p/\varrho,\ T_{\alpha\beta}=-p\delta_{\alpha\beta}-\Pi_{\alpha\beta}$

$$\partial_t\{\varrho(\frac{1}{2}v^2+e)\}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\varrho\boldsymbol{v}(\frac{1}{2}v^2+w)\} \;= \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}-\partial_{x_\beta}(\Pi_{\alpha\beta}v_\alpha)+Q-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q} \tag{3.62}$$

   Kinetische Energie: (folgt aus (3.57))

$$\varrho\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2) \;=\; \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+v_\alpha\partial_{x_\beta}T_{\alpha\beta} \tag{3.63}$$

   Innere Energie: Differenz von (3.61) und (3.63)

$$\varrho\frac{d}{dt}e \;=\; Q-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}+T_{\alpha\beta}\partial_{x_\beta}v_\alpha \tag{3.64}$$

   Entropie: $de=Tds-pd(1/\varrho)=Tds+(p/\varrho^2)d\varrho$

$$\begin{aligned}\varrho T\frac{d}{dt}s &= Q-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}+T_{\alpha\beta}\partial_{x_\beta}v_\alpha+p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\\ &= Q-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}-\Pi_{\alpha\beta}\partial_{x_\beta}v_\alpha\end{aligned} \tag{3.65}$$

   Für die Dichteänderung wurde die Kontinuitätsgleichung verwendet. Entropieänderungen ergeben sich durch Wärmeaustausch, Wärmestrom und innere Reibung bei mechanischer Deformation. In idealen Flüssigkeiten bleibt die Entropie entlang der Teilchenbahn konstant.

3.3.2 Momentengleichungen

Kinetische Definitionen: Für jede Teilchensorte i

Mittlere Teilchendichte	:	$n_i(\boldsymbol{x},t) = \int\ d^3v\ f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$
Mittelwerte	:	$n_i < \chi >_i = \int\ d^3v\ \chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$
Momente	:	$< v_\alpha v_\beta v_\gamma \cdots >_i$
Mittlere Geschwindigkeit	:	$\boldsymbol{u}_i =< \boldsymbol{v} >_i$
Temperatur	:	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{v}', \qquad \frac{3}{2} T_i = \frac{m_i}{2}\ < v'^2 >_i,$
	:	$T_i = \frac{m_i}{3}\ < v'^2 >_i$
Wärmestrom	:	$\boldsymbol{q}_i = \frac{n_i m_i}{2} < v'^2 \boldsymbol{v}' >_i$
Drucktensor	:	$\boldsymbol{P}_i = n_i m_i\ < \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' >_i = p_i \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Pi}_i$
	:	$p_i = \frac{n_i m_i}{3}\ < v'^2 >_i = n_i T_i,$
	:	$\Pi_i = n_i m_i\ < \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' - \frac{1}{3} v'^2 \boldsymbol{I} >_i$
Stoßterm	:	$C_i = \sum_j C_{ij}(f_i, f_j)$
	:	$\int d^3v\ C_i = 0$
	:	$\int d^3v\ \boldsymbol{v}(m_i C_{ij} + m_j C_{ji}) = 0$
	:	$\int d^3v\ v^2(m_i C_{ij} + m_j C_{ji}) = 0$
Reibungskraft	:	$\boldsymbol{R}_i = \sum_j \boldsymbol{R}_{ij}$
	:	$\boldsymbol{R}_{ij} = -\boldsymbol{R}_{ji} = \int d^3v\ m_i \boldsymbol{v}' C_{ij}$
Wärmeaustausch	:	$Q_i = \sum_j Q_{ij}$
	:	$Q_{ij} = \int d^3v\ \frac{1}{2} m_i v'^2 C_{ij}$
	:	$Q_{ij} + Q_{ji} = -\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{R}_{ij} - \boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{R}_{ji} = -(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) \cdot \boldsymbol{R}_{ij}$

Mittelung der Boltzmanngleichung: für eine Teilchensorte, ohne Index i

$$\int d^3v \chi(\partial_t + \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}}) f \ = \ \int d^3v \chi C \tag{3.66}$$

Durch partielle Integration folgt für die einzelnen Terme:

$$\begin{aligned}
\int d^3v \chi \partial_t f &= \partial_t(n < \chi >) - n < \partial_t \chi > \\
\int d^3v \chi \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} f &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (n < \chi \boldsymbol{v} >) - n < \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \chi > \\
\int d^3v \chi \boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}} f &= -n < \boldsymbol{a}\boldsymbol{v} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}} \chi >
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Ist χ ein Potenzprodukt aus den Geschwindigkeitskomponenten, so erhält man eine Entwicklungsgleichung für das zugehörige Moment der Verteilungsfunktion. Die Änderung dieses Moments hängt jedoch von den nächsthöheren Momenten ab, so daß sich kein abgeschlossenes Gleichungssystem ergibt. Im Prinzip können aber alle Momente durch die Lösung der Boltzmanngleichung berechnet werden.

Von besonderer Bedeutung sind diejenigen Momentengleichungen, die den kontinuumsmechanischen Erhaltungssätzen entsprechen. Diese werden im folgenden abgeleitet.

Massenerhaltung: $\chi = m$

$$\partial_t(nm) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (nm\boldsymbol{u}) \;=\; 0 \tag{3.68}$$

Da m eine Konstante ist verschwinden die Terme in (3.66), die Ableitungen von χ enthalten.

Impulserhaltung: $\chi = m\boldsymbol{v}$

$$\partial_t(nm\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (nm < \boldsymbol{vv} >) - nm\boldsymbol{a} \;=\; \boldsymbol{R} \tag{3.69}$$

Wegen

$$< \boldsymbol{vv} >=< (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}')(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}') >= \boldsymbol{uu} + < \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' >= \boldsymbol{uu} + \boldsymbol{P}/(nm)$$

folgt daraus:

$$\partial_t(nm\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (nm\boldsymbol{uu} + \boldsymbol{P}) \;=\; nm\boldsymbol{a} + \boldsymbol{R} \tag{3.70}$$

Energieerhaltung: $\chi = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))^2$

Um direkt einen Erhaltungssatz für die innere Energie zu erhalten, wird hier v'^2 gemittelt. Dabei muß man beachten, daß $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ von $\boldsymbol{x}$ und t abhängig ist:

$$\partial_t(nm < \frac{1}{2}v'^2 >) + nm < \boldsymbol{v}' > \cdot \partial_t \boldsymbol{u} \;=\; \partial_t(n\frac{3}{2}T)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (n < \frac{1}{2}mv'^2(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}') >) - nm < v_\alpha \partial_{x_\alpha} \frac{1}{2}v'^2 >=$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (n\frac{3}{2}T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}) - nm < v_\alpha v'_\beta \partial_{x_\alpha} v'_\beta >=$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (n\frac{3}{2}T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}) + nm < v'_\alpha v'_\beta > \partial_{x_\alpha} u_\beta$$

$$-n < \boldsymbol{a} \cdot \partial_{\boldsymbol{v}} \frac{1}{2}mv'^2 >= -n < \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}' >= 0 \tag{3.71}$$

Damit folgt der Energiesatz

$$\partial_t(\frac{3}{2}nT) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\frac{3}{2}nT + \boldsymbol{q}) + P_{\alpha\beta}\partial_{x_\alpha} u_\beta \;=\; Q \tag{3.72}$$

3.3.3 Zweiflüssigkeitsmodell

Behandelt man die Elektronen als eine Flüssigkeit und die Ionen als eine zweite Flüssigkeit, so spricht man von einem *Zweiflüssigkeitsmodell*. Im Gegensatz zum Einflüssigkeitsmodell können hierbei Raumladungseffekte sowie unterschiedliche Elektronen- und Ionentemperaturen berücksichtigt werden.

Freie Flugzeit:

Bei Flüssigkeitsmodellen ist grundsätzlich zwischen stoßfreien und stoßbestimmten Plasmen zu unterscheiden. Unterscheidungsmerkmal ist die freie Flugzeit. Als einfache Abschätzung erhält man

$$\frac{1}{\tau_f} = n < v\sigma > \sim n v_{th}\sigma_{th}(T) \sim n\sqrt{\frac{T}{m}}\,\frac{1}{T^2} \rightarrow \tau_f \sim \sqrt{m}\frac{T^{3/2}}{n}$$

Eine genauere Rechnung ergibt für Elektronen und Ionen

$$\tau_e = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{m_e}\,T_e^{3/2}}{\Lambda q_e^4 Z n_e} = 3.44\times 10^4\,\frac{T_{e,eV}^{3/2}}{(\Lambda/10)Z n_e} \tag{3.73}$$

$$\tau_i = \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{m_i}T_i^{3/2}}{\Lambda q_e^4 Z^3 n_e} = 2.95\times 10^6\,\sqrt{\frac{m_i}{2m_p}}\,\frac{T_{i,eV}^{3/2}}{(\Lambda/10)Z^3 n_e} \tag{3.74}$$

Stoßfreie, kalte Plasmen: $t \ll \tau_f,\ v_{th} \ll \omega/k;\ L \gg \lambda_D$

Die kollektiven Bewegungen in einem stoßfreien kalten Plasma können durch Zweiflüssigkeitsgleichungen beschrieben werden. Unter Vernachlässigung von Temperatur und Stößen ergeben sich aus den Momentengleichungen die Gleichungen für zwei ideale Flüssigkeiten ohne Druck. Häufig berücksichtigt man thermische Korrekturen zu diesem Modell, indem man einen isotropen Druck und adiabatische Zustandsänderungen der Flüssigkeitselemente annimmt. Die entsprechenden Grundgleichungen sind:

$$\partial_t n_j + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n_j \boldsymbol{v}_j) = 0 \tag{3.75}$$

$$n_j m_j(\partial_t + \boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_j = n_j q_j(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\nabla}p_j \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} kaltes Plasma &: p_j = 0, \\ thermisches Plasma &: (\partial_t + \boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{\nabla})\left(\frac{p_j}{n_j^\gamma}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Stoßbestimmte Plasmen: $t \gg \tau_f; L \gg \lambda_f$;

Im stoßbestimmten Fall kann man die Vorgänge weiter nach den Relaxationszeiten für die Elektronen (τ_{ee}), die Ionen (τ_{ii}) und das Gesamtsystem (τ_{ei}) unterscheiden.

Zuerst relaxieren die Elektronen, danach die Ionen (kleinere thermische Geschwindigkeit der Ionen) und zuletzt das Gesamtsystem aus Elektronen und Ionen (geringerer Energieübertrag zwischen leichten und schweren Teilchen). Nach der Einstellung der Gleichgewichte für die Elektronen und die Ionen kann der Ausgleich der unterschiedlichen Elektronen- und Ionentemperaturen durch das Zweiflüssigkeitsmodell beschrieben werden.

Relaxationszeiten: Die Relaxationszeiten stehen in dem Verhältnis

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} \quad = \quad 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e} \tag{3.78}$$

Die Zweiflüssigkeitsgleichungen für stoßbestimmte Plasmen können ausgehend von der Landau-Gleichung abgeleitet werden (S.I.Braginskii, Rev.Plasma Phys. **1**, 215 (1965)). Die Ableitung beruht im wesentlichen auf den folgenden Annahmen:

- Lokales thermodynamisches Gleichgewicht:

$$f \quad \approx \quad n(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{(3/2)} \exp\left(-\beta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))^2\right), \qquad \beta = \frac{m}{2T(\boldsymbol{x},t)}$$

- Quasineutralität: $q_e = -e,\ q_i = Ze,\ n_e = Zn_i$
- Kleines Massenverhältnis: $m_e/m_i \ll 1$

Für nicht magnetisierte Plasmen ($\omega_g \tau_f \ll 1$) lauten die Zweiflüssigkeitsgleichungen:

$$\partial_t n_j + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n_j \boldsymbol{v}_j) = 0 \tag{3.79}$$

$$n_j m_j(\partial_t + \boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_j \quad = \quad n_j q_j(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{R}_j - \boldsymbol{\nabla} p_j - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_j \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} n_j m_j(\partial_t + \boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{\nabla})s_j \quad &= \quad \frac{3}{2}n_j(\partial_t + \boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{\nabla})T_j + p_j\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}_j \\ &= \quad Q_j - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}_j - \Pi_{j,\alpha\beta}\partial_{x_\alpha} v_{j,\beta} + P_j \end{aligned} \tag{3.81}$$

Reibungskraft:

$$\boldsymbol{R}_e \quad = \quad -\boldsymbol{R}_i = -\alpha_0 \frac{m_e n_e}{\tau_e}(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) - \beta_0 n_e \boldsymbol{\nabla} T_e,$$

Reibungskräfte treten auf, wenn sich die Elektronen relativ zu den Ionen bewegen und dabei Impuls durch Stöße abgeben. Eine zweite Ursache sind Temperaturgradienten. Wegen $\tau_f \propto v^3$ geben Teilchen, die eine Grenzfläche in Richtung des Temperaturgradienten passieren im Mittel mehr Impuls ab als die Teilchen, die entgegen dem Temperaturgradienten hindurchtreten. Die Konstanten α_0, β_0 hängen noch von Z ab.

Viskosität:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_j &= -\eta_{0j}\boldsymbol{W}_j, \qquad W_{\alpha\beta} = \partial_{x_\alpha} v_\beta + \partial_{x_\beta} v_\alpha - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \\ \eta_{0e} &= 0.73 n_e T_e \tau_e \ (Z=1), \qquad \eta_{0i} = 0.96 n_i T_i \tau_i \end{aligned} \tag{3.82}$$

Der Viskositätstensor ist proportional zu den Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten. Für $T_e \sim T_i$ ist der Elektronenbeitrag zur Viskosität vernachlässigbar.

Wärmestrom:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_e &= \beta_0 n_e T_e(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) - \kappa_e \boldsymbol{\nabla} T_e, \qquad \boldsymbol{q}_i = -\kappa_i \boldsymbol{\nabla} T_i \\ \kappa_e &= \gamma_0 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} = 6.05 \times 10^{21} \gamma_0 \frac{T_{e,eV}^{5/2}}{(\Lambda/10)Z}, \qquad \kappa_i = 3.9 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i} \ll \kappa_e \end{aligned} \tag{3.83}$$

Der Ionenbeitrag zur Wärmeleitung ist gegenüber der elektronischen Wärmeleitung vernachlässigbar.

Tabelle 3.1: Tabelle der Koeffizienten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$

	$Z=1$	$Z=2$	$Z=3$	$Z=4$	$Z\to\infty$
α_0	0.5129	0.4408	0.3965	0.3752	0.2949
β_0	0.7110	0.9052	1.016	1.090	1.521
γ_0	3.1616	4.890	6.064	6.920	12.471

Wärmeaustausch:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{3m_e}{m_i}\frac{n_e(T_e - T_i)}{\tau_e} \\ Q_e &= -Q_i - \boldsymbol{R}_e \cdot (\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) \end{aligned} \tag{3.84}$$

Für $T_e > T_i$ beschreibt Q_i die Heizung der Ionen durch eine entsprechende Kühlung der Elektronen. Eine Heizung der Elektronen ergibt sich aus dem Reibungsterm.

Energiedepositionsleistungsdichte: Die Deposition von Energie durch Licht- oder Teilchenstrahlung kann durch einen Quellterm P_j im Energiesatz berücksichtigt werden.

3.3.4 Einflüssigkeitsmodell

Einflüssigkeitsvariablen:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sum_j m_j n_j = m_e n_e + m_i n_i \approx m_i n_i \\ \tau &= \sum_j q_j n_j = -e\ (n_e - Z n_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{1}{\varrho}\sum_j m_j n_j \boldsymbol{v}_j \;=\; \frac{m_e n_e \boldsymbol{v}_e + m_i n_i \boldsymbol{v}_i}{m_e n_e + m_i n_i} \;\approx\; \boldsymbol{v}_i \\
\boldsymbol{j} &= \sum_j q_j n_j \boldsymbol{v}_j \;=\; -e\; n_e \boldsymbol{v}_e + Ze\; n_i \boldsymbol{v}_i \;\approx\; -e\; n_e(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) \\
\boldsymbol{P} &= \sum_j \int d^3v\; m_j f_j (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \\
&= \int d^3v (m_e f_e + m_i f_i)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \\
&\approx \boldsymbol{P}_e + \boldsymbol{P}_i, \qquad (v_{th,e} \gg \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_e;\; \boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{v}_i)
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

Massenerhaltung:

$$
\sum_j m_j(\partial_t n_j + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n_j \boldsymbol{v}_j)) \;=\; \partial_t \varrho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.86}
$$

Ladungserhaltung:

$$
\sum_j q_j(\partial_t n_j + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n_j \boldsymbol{v}_j)) \;=\; \partial_t \tau + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{3.87}
$$

Impulserhaltung:

$$
\sum_j \partial_t(m_j n_j \boldsymbol{v}_j) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(m_j n_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j) \;=\; \sum_j n_j q_j (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}_j
$$

$$
\partial_t(\varrho \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \;=\; \varrho \frac{d}{dt}\boldsymbol{u} \;=\; \tau \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} \tag{3.88}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \sum_j \boldsymbol{P}_j + m_j n_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j - m_j n_j \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \\
&= \sum_j m_j n_j \;<(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_j)> \; + m_j n_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j \;-\; m_j n_j \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \\
&= \sum_j m_j n_j \;<\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}> \;-\; m_j n_j \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \\
&= \sum_j m_j n_j \;<(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})>
\end{aligned}
$$

Ohmsches Gesetz:

Stromdichte für quasineutrales Plasma:

$$
\boldsymbol{j} \;\approx\; q_e n_e(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i), \qquad q_i n_i \approx -q_e n_e \tag{3.89}
$$

Elektronengeschwindigkeit für $\boldsymbol{v}_i \approx \boldsymbol{u}$:

$$
\boldsymbol{v}_e \;=\; \frac{1}{q_e n_e}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{u} \tag{3.90}
$$

Eliminiere $\boldsymbol{v}_e$ aus der Elektronenbewegungsgleichung:

$$n_e m_e \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_e = n_e q_e(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{R}_e - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}_e$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} = -\frac{1}{q_e n_e}\,\boldsymbol{R}_e - \frac{1}{q_e n_e c}\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \frac{1}{q_e n_e}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}_e + \frac{m_e}{q_e}\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_e$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sigma}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{q_e n_e c}\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \frac{1}{q_e n_e}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}_e + \frac{m_e}{q_e}\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_e$$

Leitfähigkeit: σ

$$-\frac{1}{q_e n_e}\,\boldsymbol{R}_e = \frac{1}{q_e n_e}\,\frac{\alpha_0 m_e n_e}{\tau_e}(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) = \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{j}, \qquad \sigma = \frac{q_e^2 n_e \tau_e}{\alpha_0 m_e} \tag{3.91}$$

Wegen (3.73) ist σ unabhängig von der Dichte und proportional zu $T^{3/2}$. Mit steigender Temperatur werden die Ohmschen Verluste des Plasmastroms so gering, daß eine Ohmsche Heizung des Plasmas nicht mehr möglich ist.

Vereinfachtes Ohmsches Gesetz:

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) = \sigma\boldsymbol{E}' \tag{3.92}$$

$\boldsymbol{E}$' ist die Feldstärke in einem Inertialsystem, welches sich mit der momentanen und lokalen Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ eines Plasmaelementes bewegt (Feldstärke im Ruhesystem des Plasmas).

Ideale Leitfähigkeit: $\sigma \to \infty$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} = 0. \tag{3.93}$$

Ideale Gase:

$$\begin{aligned}
p &= p_e + p_i = n_e T_e + n_i T_i \approx (1+Z) n_i T \approx \varrho T/M; \qquad M = \frac{m_i}{1+Z} \\
\epsilon &= \varrho e = \frac{f}{2}\,p = \frac{1}{\gamma-1}\,p; \qquad \gamma = \frac{f+2}{f} \\
e &= c_v T; \qquad c_v = \frac{1}{M}\,\frac{1}{\gamma-1} \\
w &= e + p/\varrho = c_p T; \qquad c_p = \frac{1}{M}\,\frac{\gamma}{\gamma-1} \\
\chi &= \frac{\kappa}{\varrho c_p} = 1.0\times 10^{-3}\gamma_0 \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{A}{Z(1+Z)}\,\frac{T_{eV}^{5/2}}{\Lambda\varrho}\,\frac{cm^2}{sec}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

3.3.5 MHD-Gleichungen

Die Einflüssigkeitsgleichungen können unter den folgenden Annahmen noch weiter vereinfacht werden. Sie beschreiben dann eine leitfähige Flüssigkeit, in der quasistationäre Ströme große Magnetfelder induzieren können. Da die Bewegung der Flüssigkeit wesentlich durch die Magnetfelder mitbestimmt wird, spricht man von der *Magnetohydrodynamik* (MHD).

Annahmen:

- **Langsame Änderungen:** Für hinreichend langsame Vorgänge ($\omega^2 \ll \omega_p^2$) kann der Verschiebungsstrom in den Maxwellschen-Gleichungen vernachlässigt werden, d.h. es gelten die Prä-Maxwell-Gleichungen:

$$|\partial_t \tau| \approx \frac{\omega}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \approx \frac{\omega E}{4\pi L}; \qquad |\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}| \approx qnv/L \approx qn \frac{qE}{m\omega L} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega E}{4\pi L}$$

$$\longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0; \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \tag{3.95}$$

- **Hohe Leitfähigkeit:** In nichtrelativistischen Plasmen mit hoher Leitfähigkeit ist das elektrische Feld ($E \sim \frac{v}{c} B$) klein gegenüber dem Magnetfeld. Daher kann die Coulomb-Kraft gegenüber der Lorentzkraft vernachlässigt werden:

$$\tau E \sim E^2/L \sim (v/c)^2 B^2/L, \qquad \frac{1}{c} jB \sim B^2/L \gg \tau E$$

- **Ideales Gas:** f Freiheitsgrade, Adiabatenindex $\gamma = \frac{f+2}{f}$, $s_{o_K} = k_B s$

$$\begin{aligned} e &= (f/2)\,(T/m); \qquad p = \varrho T/m; \\ de &= Tds - pdv = Tds - (\varrho T/m)\, d(1/\varrho), \\ s &= const + \frac{1}{m} ln \left(\frac{T^{f/2}}{\varrho} \right) = const + \frac{f}{2m} ln \left(\frac{p}{\varrho^\gamma} \right) \end{aligned} \tag{3.96}$$

Grundgleichungen:

$$\partial_t \varrho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varrho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.97}$$

$$\varrho \frac{d}{dt} \boldsymbol{v} = \frac{1}{c} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{\nabla} p \tag{3.98}$$

$$\frac{d}{dt} s = 0; \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \tag{3.99}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} \;=\; -c\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; 0. \tag{3.100}$$

$$\boldsymbol{E} \;=\; -\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{j} \;=\; \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}, \qquad \tau \;=\; \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.101}$$

Gleichung (3.99) drückt die Entropieerhaltung eines Flüssigkeitselementes aus. Die Entropie kann aber im allgemeinen in jedem Punkt der Flüssigkeit einen anderen Wert besitzen.

Die drei Gleichungen (3.101) bestimmen in expliziter Form das elektrische Feld, die Stromdichte und die Raumladung. Letztere wird zur Lösung der restlichen Gleichungen jedoch nicht benötigt.

Magnetischer Druck:

Mit

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \;=\; \frac{1}{4\pi}\,(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} \;=\; -\frac{1}{4\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\frac{1}{2}\,B^2 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\} \tag{3.102}$$

lautet der Impulssatz:

$$\varrho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{(p+\frac{B^2}{8\pi})\boldsymbol{I} - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\right\} \tag{3.103}$$

Legt man die z-Achse des Koordinatensystems in Richtung des Magnetfeldes, $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$ so besitzt der magnetische Drucktensor die Form:

$$\frac{B^2}{8\pi}\boldsymbol{I} - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{B^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{8\pi} \end{pmatrix} \tag{3.104}$$

Das Magnetfeld übt parallel zu den Feldlinien einen Zug $(-B^2/8\pi)$ und senkrecht dazu einen Druck $(B^2/8\pi)$ aus.

Entwicklung des Magnetfeldes:

Mit

$$\begin{aligned} -c\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \;&=\; \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - c\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{j}/\sigma) \\ &=\; \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - \frac{c^2}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}), \end{aligned}$$

folgt für die Zeitentwicklung des Magnetfeldes die Gleichung:

$$\partial_t\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}) \;=\; -\frac{c^2}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.105}$$

Flußerhaltung:

Für ein ideal leitfähiges Plasma bleibt der magnetische Fluß durch eine mitbewegte Fläche S(t) erhalten:

$$\frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \int_S d\boldsymbol{f}\cdot\{\partial_t\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\} \;=\; 0 \tag{3.106}$$

Beweis der Flußerhaltung: Wegen (3.105) muß nur die Gleichheit des linken und mittleren Ausdrucks in (3.106) gezeigt werden. Dazu betrachtet man eine allgemeine Variation des Flußintegrals:

$$\delta\int_S d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \int_S d\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{B}+\int_{\delta S_1} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B}+\int_{\delta S_2} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.107}$$

Der erste Summand beschreibt die Flußänderung aufgrund der expliziten Änderung des Magnetfeldes. Der zweite Summand beschreibt die Flußänderung infolge einer Verschiebung $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)$ im Innern der Fläche bei festgehaltenem Rand. Die ursprüngliche Fläche S und die verschobene Fläche S' bilden zusammen eine geschlossene Oberfläche O. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\delta S_1} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B} \;&=\; \int_{S'} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B}-\int_S d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B}\\ &=\; \int_O d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \int_{\delta V}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \int_S \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}\;\boldsymbol{\xi}\cdot d\boldsymbol{f} \;=\; 0\end{aligned} \tag{3.108}$$

Der dritte Summand beschreibt die Flußänderung bei einer Verschiebung des Randes, wobei das Innere der Fläche festgehalten wird:

$$\begin{aligned}\int_{\delta S_2} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B} \;&=\; \int_{\partial S}\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\xi}\times d\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\partial S}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\xi})\cdot d\boldsymbol{x}\\ &=\; \int_S \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\xi})\cdot d\boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{3.109}$$

Faßt man diese Beiträge zusammen, so ergibt sich mit $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{v}\delta t$ Gleichung (3.106).

Magnetische Diffusion:

Bei endlicher Leitfähigkeit kann das Magnetfeld in das Plasma diffundieren. Nimmt man ein ruhendes Plasma mit konstanter Leitfähigkeit an, so ergibt (3.105) die Diffusionsgleichung

$$\partial_t\boldsymbol{B} \;=\; \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\boldsymbol{B}. \tag{3.110}$$

Die Eindringtiefe eines Magnetfeldes mit Frequenz ω ist daher:

$$d \;=\; c/\sqrt{4\pi\omega\sigma}. \tag{3.111}$$

Bei langsamen Vorgängen kann die Diffusion auch bei einer hohen Leitfähigkeit eine Rolle spielen. In der Astrophysik kann die magnetische Diffusion trotz einer relativ geringen Leitfähigkeit häufig vernachlässigt werden, da die relevanten Ausdehnungen groß sind im Vergleich zur Eindringtiefe.

Kapitel 4

Wellenausbreitung im Plasma

4.1 Wellenausbreitung im homogenen Medium

Zunächst sollen einige allgemeine Eigenschaften von Wellen in einem homogenen Medium betrachtet werden. Die Welle wird durch eine Frequenz ω und einen Wellenvektor $\boldsymbol{k}$, das Medium durch einen Dielektrizitätstensor $\boldsymbol{\epsilon}(\omega, \boldsymbol{k})$ beschrieben.

4.1.1 Wellengleichung

Wellenansatz:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t\right) , \qquad \boldsymbol{B} = \frac{c}{\omega}\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} , \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{n} . \tag{4.1}$$

Dielektrizitätstensor:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\omega,\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{I} + \frac{4\pi i}{\omega}\boldsymbol{\sigma}(\omega,\boldsymbol{k}) , \qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{\sigma}(\omega,\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E} . \tag{4.2}$$

Wellengleichung:

$$\frac{1}{4\pi}\,\partial_t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} - \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\frac{-i}{4\pi}\,\left[\omega\boldsymbol{E} + 4\pi i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{c^2}{\omega}\,\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\right] = 0,$$

$$\boldsymbol{D}(\omega,\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E} = 0, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{D}(\omega,\boldsymbol{k}) = \frac{c^2}{\omega}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - k^2\boldsymbol{I}) + \omega\boldsymbol{\epsilon}(\omega,\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n} - n^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\epsilon}) .$$

Dispersionsrelation:

Die Wellengleichung (4.3) ist ein algebraisches Gleichungssystem für den Vektor $\boldsymbol{E}$. Es gibt nur dann nichtverschwindende Lösungen, falls

$$\Lambda(\omega, \boldsymbol{k}) = \det |D_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k})| = 0. \tag{4.4}$$

Zu einem gegebenen Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ können sich demnach nur Wellen mit bestimmten Frequenzen $\omega = \omega_j(\boldsymbol{k})$ im Medium ausbreiten. Die verschiedenen Lösungszweige werden hier durch den Index j gekennzeichnet. Ist die Lösbarkeitsbedingung (4.4) z.B. ein Polynom n-ter Ordnung in ω, so gibt es zu jedem $\boldsymbol{k}$ genau n komplexe Lösungen für ω.

Ausbreitung, Dämpfung und Verstärkung von Wellen:

$$\begin{array}{lcll} \Im(\omega) & = & 0 & \rightarrow \quad \text{ungedämpfte Welle} \\ \Im(\omega) & < & 0 & \rightarrow \quad \text{gedämpfte Welle} \\ \Im(\omega) & > & 0 & \rightarrow \quad \text{anwachsende Welle} \end{array} \tag{4.5}$$

Schwache Dämpfung, kleine Anwachsraten:

In manchen Fällen kann es physikalisch sinnvoll sein auch komplexe Wellenvektoren zu betrachten. Sei $\omega = \omega_r + i\omega_i,\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i,\ \Lambda = \Lambda_r + i\Lambda_i$. Für kleine Imaginärteile läßt sich (4.4) in der folgenden Weise entwickeln,

$$\begin{aligned} \Lambda(\omega, \boldsymbol{k}) &= \Lambda_r(\omega, \boldsymbol{k}) + i\Lambda_i(\omega, \boldsymbol{k}) \\ &= \Lambda_r(\omega_r, \boldsymbol{k}_r) + i\Lambda_i(\omega_r, \boldsymbol{k}_r) \\ &\quad + i\omega_i \partial_\omega \Lambda_r(\omega_r, \boldsymbol{k}_r) + ik_{i\alpha}\partial_{k_\alpha}\Lambda_r(\omega_r, \boldsymbol{k}_r) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Durch Nullsetzen von Real- und Imaginärteil folgt dann

$$\Lambda_r(\omega_r, \boldsymbol{k}_r) = 0, \qquad \Lambda_i + \omega_i \partial_\omega \Lambda_r + k_{i\alpha}\partial_{k_\alpha}\Lambda_r = 0 \tag{4.7}$$

Beispiel 4.1 (Zeitlich gedämpfte Welle)

$$k_{i\alpha} = 0, \qquad \rightarrow \qquad \omega_i = -\frac{\Lambda_i}{\partial_\omega \Lambda_r}$$

$$|E|^2 \propto e^{2\int \omega_i dt} = e^{-2\int \frac{\Lambda_i}{\partial_\omega \Lambda_r} dt}$$

Beispiel 4.2 (Räumlich gedämpfte Welle)

$$\omega_i = 0, \qquad k_r = (0, 0, k) \qquad \rightarrow \qquad k_i = -\frac{\Lambda_i}{\partial_k \Lambda_r}$$

$$|E|^2 \propto e^{2\int k_i dz} = e^{-2\int \frac{\Lambda_i}{-\partial_k \Lambda_r} dz}$$

4.1.2 Wellenenergie

Die zeitgemittelte Energiedichte der Welle wird als Wellenenergie bezeichnet. In einem Medium können neben der elektromagnetischen Feldenergie weitere Energieformen auftreten, wie z.B. kinetische Energie oder Kompressionsenergie. Diese Energien können durch die elektrische Feldstärke ausgedrückt werden. Der allgemeine Ausdruck für die Wellenenergie ist dann eine Bilinearform in der elektrischen Feldstärke, die im folgenden hergeleitet wird.

Poynting-Theorem:

Der Energiesatz des elektromagnetischen Feldes wird durch das Poynting-Theorem beschrieben:

$$\partial_t W + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{4.8}$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\,(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2), \qquad \boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

W bezeichnet die Energiedichte, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Der Term $\boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$ beschreibt die vom Medium aufgenommene oder abgegebene Leistungsdichte.

Zeitmittelung über eine Schwingungsperiode:

Die Zeitmittel bilinearer Ausdrücke können nach den folgenden Regeln durch Produkte von komplexen Amplituden ersetzt werden. Der Imaginärteil der Frequenz wird dabei als klein angenommen.

$$< \mathcal{AB} >=< \frac{1}{2}(A + A^*)\ \frac{1}{2}(B + B^*) >= \frac{1}{4}(AB^* + A^*B) = \frac{1}{2}\Re\{AB^*\}$$

$$< \partial_t \mathcal{A}^2 >=< 2\mathcal{A}\partial_t \mathcal{A} >= \frac{1}{2}\Re\{2A^*\partial_t A\} =$$

$$\frac{1}{2}\Re\{2|A|\partial_t|A|\} = \frac{1}{2}\partial_t|A|^2 = \partial_t < \mathcal{A}^2 >$$

Damit ergibt die Zeitmittelung von (4.8)

$$\partial_t \frac{1}{16\pi}\left(|E|^2 + |B|^2\right) + \nabla\cdot < \mathbf{S} > + \frac{1}{2}\Re\{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}^*\} = 0 \tag{4.9}$$

Energiesatz für den Wellenoperator D:

Der zeitgemittelte Energiesatz (4.9) kann mit Hilfe des Wellenoperators (4.3) in der folgenden Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\,\Re\{\frac{-i}{4\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\} \qquad = \qquad \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2i}\left(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*\cdot\boldsymbol{E}^*\right) \\ &= \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\frac{1}{2i}\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^+\right)\cdot\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Entwicklung für kleine Imaginärteile:

Für kleine Imaginärteile läßt sich der zeitgemittelte Energiesatz wie folgt darstellen

$$\frac{1}{2i}\,\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^+\right) \;=\; \boldsymbol{D}_A + \omega_i\partial_\omega\boldsymbol{D}_H + k_{i\alpha}\partial_{k_\alpha}\boldsymbol{D}_H$$

$$\omega_i\frac{1}{8\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\partial_\omega\boldsymbol{D}_H\cdot\boldsymbol{E} + k_{i\alpha}\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\partial_{k_\alpha}\boldsymbol{D}_H\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D}_A\cdot\boldsymbol{E} \;=\; 0, \tag{4.11}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_r + i\omega_i, \qquad k = k_r + ik_i, \\ \boldsymbol{D}_A &= \frac{1}{2i}\,\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^+\right)\Big|_{\omega=\omega_r,k=k_r}, \qquad \boldsymbol{D}_H = \frac{1}{2}\,\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^+\right)\Big|_{\omega=\omega_r,k=k_r}. \end{aligned}$$

Wegen $\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E} \propto \exp\left(2\omega_i t - 2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{x}\right)$ erhält man damit den Energiesatz

$$\partial_t < W > + \nabla\cdot < J > = - < P > \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} < W > &= \frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\partial_\omega\boldsymbol{D}_H\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \frac{1}{16\pi}\,\left\{|B|^2 + \boldsymbol{E}^*\cdot\partial_\omega(\omega\boldsymbol{\epsilon}_H)\cdot\boldsymbol{E}\right\} \\ < J >_\alpha &= -\frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\partial_{k_\alpha}\boldsymbol{D}_H\cdot\boldsymbol{E} \;=< S >_\alpha \; - \frac{\omega}{16\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\partial_{k_\alpha}\boldsymbol{\epsilon}_H\cdot\boldsymbol{E} \\ < P > &= \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D}_A\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \frac{\omega}{8\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_A\cdot\boldsymbol{E} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke bestimmen die Wellenenergie $< W >$, die Wellenenergiestromdichte $< \boldsymbol{J} >$ und die dissipierte Leistung $< P >$.

Energietransportgeschwindigkeit:

In einem dissipationsfreien Medium ($\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_H$) gilt für die Energiestromdichte der Welle

$$< J >_\alpha \;=\; v_{gr,\alpha} < W >, \qquad v_{gr,\alpha} = \frac{d\omega(\boldsymbol{k})}{dk_\alpha}. \tag{4.13}$$

Die Energie breitet sich also mit der Gruppengeschwindigkeit der Welle aus.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
f(\omega,\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D}_H\cdot\boldsymbol{E} \;=\; 0\ , \\
\frac{df(\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})}{dk_\alpha} &= \frac{d\omega(\boldsymbol{k})}{dk_\alpha}\,\partial_\omega f(\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}) + \partial_{k_\alpha} f(\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}) \;=0\ , \\
v_{gr,\alpha} &= \frac{-\partial_{k_\alpha} f}{\partial_\omega f} \;=\; \frac{<J>_\alpha}{<W>}\ .
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.3 (Elektromagnetische Welle)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \frac{c^2}{\omega}(\boldsymbol{kk}-k^2\boldsymbol{I})+\omega\epsilon\boldsymbol{I}\ , \qquad \epsilon = n^2 = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\ , \\
& \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\ , \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0. \\
<W> &= \frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{-\frac{c^2}{\omega^2}(\boldsymbol{kk}-k^2\boldsymbol{I})+\partial_\omega(\omega\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E} \\
&= \frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\,\{\epsilon+\partial_\omega(\omega\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I}\} \\
&= \frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\left\{2(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})+2\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right\} \;=\; \frac{1}{8\pi}\,\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E} \\
<J> &= -\frac{1}{16\pi}\,\frac{c^2}{\omega}\,(-k)\,\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E} \;=\; cn<W> = \;v_{gr}<W>
\end{aligned}
$$

4.2 Wellen im kalten stoßfreien Plasma

Näherung:

- Kaltes Plasma: $v_{th} \;<<\; \omega/k$
- Stoßfreies Plasma: $\nu \;<<\; \omega$

4.2.1 Dielektrizitätstensor

Bewegungsgleichung:

Für ein kaltes stoßfreies Plasma können in der Momentengleichung (3.70) der Drucktensor und die Reibungskraft vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung für die Teilchensorte j ist damit

$$
m_j(\partial_t+\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_j = q_j(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{B}). \tag{4.14}
$$

Linearisierung:

Die Welle kann als kleine Störung (1) eines Plasmagleichgewichtes (0) betrachtet werden. Nimmt man an, daß das Plasma im Gleichgewicht ruht und frei von elektrischen Feldern ist, so folgt der Ansatz

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j,1} \ , \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \ , \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1, \tag{4.15}$$

wobei die Störungen durch ebene Wellen beschrieben werden und $\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0)$ ein statisches homogenes äußeres Magnetfeld in z-Richtung bezeichnet. In linearer Ordnung in den Störungen lautet die Bewegungsgleichung (4.14)

$$-i\omega m_j \boldsymbol{v}_{j,1} - \frac{q_j}{c}\, \boldsymbol{v}_{j,1} \times \boldsymbol{B}_0 = q_j \boldsymbol{E}_1 \ . \tag{4.16}$$

Stromdichte:

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{j,1}$ kann man durch eine einfache Matrixinversion erreichen:

$$\boldsymbol{A}_j \cdot \boldsymbol{v}_{j,1} = \frac{q_j}{-i\omega m_j}\, \boldsymbol{E}_1 \ , \qquad \boldsymbol{v}_{j,1} = \frac{q_j}{-i\omega m_j}\, \boldsymbol{A}_j^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_1 \ , \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{A}_j \ = \ \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i\sigma_j\omega_{gj}}{\omega} & 0 \\ \frac{i\sigma_j\omega_{gj}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{A}_j^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} \frac{1}{a_j} & \frac{i\sigma_j\omega_{gj}}{a_j\omega} & 0 \\ \frac{-i\sigma_j\omega_{gj}}{a_j\omega} & \frac{1}{a_j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hierbei bezeichnet $\omega_{gj} = |q_j|B_0/(m_j c)$ die Gyrationsfrequenz, $\sigma_j = sgn(q_j)$ das Vorzeichen der Ladung, und $a_j = 1 - \omega_{gj}^2/\omega^2$ die Determinante von $\boldsymbol{A}_j$.

Mit der Geschwindigkeit (4.17) ergibt sich die Stromdichte

$$\boldsymbol{j}_1 = \sum_j q_j n_j \boldsymbol{v}_{j,1} = \sum_j \frac{q_j^2 n_j}{-i\omega m_j}\, \boldsymbol{A}_j^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_1 \tag{4.18}$$

Leitfähigkeitstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_j \frac{q_j^2 n_j}{-i\omega m_j}\, \boldsymbol{A}_j^{-1} = -\frac{\omega}{4\pi i} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \boldsymbol{A}_j^{-1} \tag{4.19}$$

Dielektrizitätstensor: Mit (4.2) und (4.19) ergibt sich der Dielektrizitätstensor für das kalte stoßfreie Plasma zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{I} + \frac{4\pi i}{\omega}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \epsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel \end{pmatrix} \qquad (4.20)\\
\epsilon_\perp &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_{gj}^2} \ , \\
\epsilon_\parallel &= 1 - \frac{\sum_j \omega_{pj}^2}{\omega^2} \ , \\
g &= -\sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \sigma_j \omega_{gj}}{\omega(\omega^2 - \omega_{gj}^2)} \ .
\end{aligned}$$

4.2.2 Magnetfeldfreies Plasma

Ein einfacher Spezialfall liegt vor, wenn kein statisches Magnetfeld vorhanden ist ($B_0 = 0$), bzw. die Gyrationsfrequenzen hinreichend klein sind ($\omega_{gj} << \omega$). Dann gilt

$$\epsilon_\parallel = \epsilon_\perp = \epsilon = 1 - \frac{\sum_j \omega_{pj}^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ , \qquad g = 0. \qquad (4.21)$$

Wählt man den Ausbreitungsvektor in x-Richtung, $\boldsymbol{k} = (k_0 n, 0, 0)$, so folgt aus der allgemeinen Wellengleichung (4.3)

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0 \qquad (4.22)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die folgenden Lösungen:

Longitudinale elektrostatische Wellen: $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= (E_{1x}, 0, 0), \qquad \boldsymbol{E}_1 \| \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = 0 \\
\omega &= \omega_p, \qquad v_{ph} = \omega_p / k, \qquad v_{gr} = 0. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Die Schwingungsfrequenz der elektrostatischen Wellen ist gleich der Plasmafrequenz. Da die Frequenz unabhängig von der Wellenzahl ist, breiten sich Wellenpakete nicht aus ($v_{gr} = 0$). Die elektrostatischen Wellen beschreiben somit einfache Raumladungsschwingungen der Elektronen gegenüber dem festen Ionenhintergrund. Dies ist allerdings nur für langwellige Störungen richtig. Für $k >\approx \omega_p / v_{th}$ führen thermische Effekte zur räumlichen Ausbreitung von Plasmawellen und zu deren Dämpfung.

Transversale elektromagnetische Wellen: $\epsilon = n^2$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= (0, E_{1y}, E_{1z}), \qquad \boldsymbol{E}_1 \perp \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1, \\ \omega^2 &= \omega_{pe}^2 + c^2 k^2, \qquad 2\omega d\omega = c^2 2k dk \\ v_{ph} &= \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} > c, \qquad v_{gr} = c^2 \frac{k}{\omega} = cn < c, \qquad v_{gr} v_{ph} = c^2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Mit wachsender Elektronendichte nimmt ϵ ab und wird schließlich negativ. Die Dichte, bei der ϵ verschwindet, bezeichnet man als die *kritische Dichte*. An der kritischen Dichte gilt

$$\epsilon = 0, \qquad \omega = \omega_{pe}, \qquad n_e = n_c = \frac{\omega^2 m_e}{4\pi q_e^2} \tag{4.25}$$

Für einen Nd-Laser mit $1,06 \mu m$ Wellenlänge ist die kritische Dichte z.B. $10^{21} cm^{-3}$. Elektromagnetische Wellen können sich im Plasma nur bis zur kritischen Dichte ausbreiten und werden von dort in das Gebiet unterkritischer Dichte zurückreflektiert.

4.2.3 Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld

Wählt man den Ausbreitungsvektor parallel zum Magnetfeld, $\boldsymbol{k} = (0, 0, k_0 n)$, so folgt aus der allgemeinen Wellengleichung (4.3)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\perp - n^2 & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_\perp - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.26}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die im folgenden diskutierten Lösungen.

Longitudinale Wellen: $\epsilon_\parallel = 0$

$$\boldsymbol{E}_1 = (0, 0, E_{1z}), \qquad \boldsymbol{E} \| \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{B} = 0, \qquad \omega = \omega_p.$$

Die longitudinalen Wellen, die sich parallel zu $\boldsymbol{B}_0$ ausbreiten, verhalten sich also genauso wie im magnetfeldfreien Fall. Wie man an der Bewegungsgleichung (4.16) erkennt, übt das Magnetfeld in diesem Fall keinen Einfluß aus.

Transversale Wellen: $\epsilon_\perp - n^2 = \pm g$

$$E_{1y} = \pm i E_{1x}, \qquad E_{1z} = 0 \tag{4.27}$$

- Rechtszirkular polarisierte Welle

$$\boldsymbol{E}_R = (\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y) E_0 e^{ik_R z - \omega t} \tag{4.28}$$

- Linkszirkular polarisierte Welle

$$\boldsymbol{E}_L = (\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y)E_0 e^{ik_L z-\omega t} \tag{4.29}$$

Auswertung von $n_{R,L}$***:***

$$\begin{aligned} n_{R,L}^2 &= \epsilon_\perp \mp g \\ &= 1 - \sum_j \frac{\omega\omega_{pj}^2 \mp \omega_{pj}^2\sigma_j\omega_{gj}}{\omega(\omega^2-\omega_{gj}^2)} \\ &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2(\omega \mp \sigma_j\omega_{gj})}{\omega(\omega-\sigma_j\omega_{gj})(\omega+\sigma_j\omega_{gj})} \\ &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega(\omega \pm \sigma_j\omega_{gj})} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Speziell folgt für ein 2-Komponenten-Plasma aus Elektronen und Ionen:

$$\begin{aligned} n_{R,L}^2 &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ge})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{gi})} \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2(\omega \pm \omega_{gi})\omega_{pi}^2(\omega \mp \omega_{ge})}{\omega(\omega \mp \omega_{ge})(\omega \pm \omega_{gi})} \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega \mp \omega_{ge})(\omega \pm \omega_{gi})}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Im letzten Schritt wurde die Beziehung

$$\omega_{pe}^2\omega_{gi} = \frac{4\pi q_e^2 n_e \; q_i B_0}{m_e \quad cm_i} = \frac{4\pi q_i|q_e|n_e \; |q_e|B_0}{m_i \; cm_e} = \omega_{pi}^2\omega_{ge} \tag{4.32}$$

für ein quasineutrales Plasma mit $|q_e|n_e = q_i n_i$ ausgenutzt.

Resonanzen

Frequenzen bei denen $k(\omega) \to \infty$ bezeichnet man als Resonanzen. Resonanzen sind in der Regel mit Absorption verbunden. Im vorliegenden Fall divergiert n_R bei der Gyrationsfrequenz der Elektronen und n_L bei der Gyrationsfrequenz der Ionen. Blickt man in $(-z)$ - Richtung auf die xy-Ebene, so dreht sich $\boldsymbol{E}_R$ im mathematisch positiven, $\boldsymbol{E}_L$ im mathematisch negativen Sinn. Der Drehsinn von $\boldsymbol{E}_R$ ($\boldsymbol{E}_L$) entspricht somit dem Drehsinn der Elektronengyration (Ionengyration). Die Resonanzen bei $\omega_{ge,gi}$ werden auch als *Zyklotronresonanzen* bezeichnet.

Cutoffs

Frequenzen bei denen $k(\omega) \to 0$ werden als Cutoff bezeichnet. Ein Cutoff ist mit Reflexion verbunden, da sich die Welle mit positivem k an dieser Stelle in eine Welle mit negativem k umwandeln kann. Setzt man $n_{R,L}^2 = 0$ so folgt aus (4.31):

$$(\omega \mp \omega_{ge})(\omega \pm \omega_{gi}) - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) = 0$$

$$\omega^2 \mp (\omega_{ge} - \omega_{gi})\omega - (\omega_{ge}\omega_{gi} + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) = 0$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{\omega_{ge} - \omega_{gi}}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_{ge} + \omega_{gi})^2}{4} + \omega_{pe}^2\omega_{pi}^2}$$

$$\omega_{1,2} \approx \pm\frac{\omega_{ge}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{ge}^2}{4} + \omega_{pe}^2} \tag{4.33}$$

Die Nullstelle von n_R liegt oberhalb der Elektronenzyklotronresonanz, die Nullstelle von n_L oberhalb der Ionenzyklotronresonanz. Zwischen dem Cutoff und der zugehörigen Zyklotronresonanz ist keine Wellenausbreitung möglich.

Übung 4.1 (Dielektrizitätsfunktionen für $k||B_0$) *Skizzieren Sie den Verlauf der Dielektrizitätsfunktion $n^2(\omega)$ als Funktion der Frequenz ω für die einzelnen Wellen.*

Grenzfälle:

- Elektromagnetische Wellen: $\omega \gg \omega_{ge}$

  $$n_{R,L}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}(1 \pm \frac{\omega_{ce}}{\omega}) \tag{4.34}$$

  Eine linear polarisierte Welle kann als Überlagerung einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle dargestellt werden. Da sich die rechts- und linkszirkular polarisierten Wellen mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten entlang dem Magnetfeld ausbreiten, ergibt sich eine Drehung der Polarisationsebene fr die linear polarisierte Welle. Diese wird als *Faraday-Drehung* bezeichnet. Messungen der Faraday-Drehung ermöglichen die Bestimmung von Magnetfeldern in Plasmen.

- Whistler oder Helikonwelle: $\omega_{gi} \ll \omega \ll \omega_{ge}$

  $$n_R^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ge}}, \qquad k_R^2 = \frac{\omega}{c^2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ge}}, \qquad \omega = \omega_{ge}\frac{c^2k_R^2}{\omega_{pe}^2} \tag{4.35}$$

  Diese Wellen breiten sich unterhalb der Elektronenzyklotronresonanz aus. Die Gruppengeschwindigkeit $d\omega/dk = 2\omega/k_R \propto \sqrt{\omega}$ nimmt mit der Frequenz zu. Whistler können sich entlang dem Erdmagnetfeld ausbreiten und im Frequenzbereich von etwa 10 kHz mit Radioempfängern hörbar gemacht werden. Der Name Whistler bezieht sich auf die charakteristischen Pfeiftöne, die dadurch verursacht werden, daß die hohen Frequenzen vor den niedrigen eintreffen.

- Alvén-Wellen: $\omega \ll \omega_{gi}$

$$n_R^2 = n_L^2 = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{gi}^2} = 1 + \frac{c^2}{u_A^2}, \qquad u_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n_i}}$$

$$\omega^2 = \frac{u_A^2 k^2}{1 + u_A^2/c^2}$$

Dies sind magnetohydrodynamische Wellen, die sich mit der Alvén - Geschwindigkeit u_A ausbreiten. Ähnlich einer eingespannten Saite können die Magnetfeldlinien durch den magnetischen Zug entlang der Feldlinien zu Schwingungen angeregt werden. Die Alvén - Geschwindigkeit ergibt sich auch aus der Energiebilanz $\frac{1}{2} m n_i u_A^2 = \frac{B_0^2}{8\pi}$.

4.2.4 Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld

Wählt man den Ausbreitungsvektor senkrecht zum Magnetfeld, $\boldsymbol{k} = (k_0 n, 0, 0)$, so folgt aus der allgemeinen Wellengleichung (4.3)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_\perp - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.36}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die im folgenden diskutierten Lösungen.

Ordentliche Welle:

$$n^2 = \epsilon_\parallel, \qquad \boldsymbol{E}_1 = (0, 0, E_{1z}) \tag{4.37}$$

Die ordentliche Welle ist eine linear polarisierte elektromagnetische Welle mit denselben Eigenschaften wie im magnetfeldfreien Fall. Wegen $\boldsymbol{E}_1 \| \boldsymbol{B}_0$ verschwindet die Lorentzkraft in der Bewegungsgleichung.

Außerordentliche Welle:

$$\epsilon_\perp(\epsilon_\perp - n^2) - g^2 = 0,$$

$$n^2 = \frac{\epsilon_\perp^2 - g^2}{\epsilon_\perp} = \frac{(\epsilon_\perp - g)(\epsilon_\perp + g)}{\epsilon_\perp} = \frac{n_R^2 n_L^2}{\epsilon_\perp} \tag{4.38}$$

Polarisation: Aus der x-Komponente der Wellengleichung folgt

$$\epsilon_\perp E_{1x} + ig E_{1y} = 0, \qquad E_{1x} = -i\frac{g}{\epsilon_\perp} E_{1y}. \tag{4.39}$$

Bei der außerordentlichen Welle besitzt das elektrische Feld im allgemeinen eine longitudinale und eine transversale Komponente. Für $\epsilon_\perp \to 0$ tritt eine Resonanz auf und die Welle wird rein longitudinal.

Resonanzen:

$$\epsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ge}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{gi}^2} = 0. \tag{4.40}$$

Für hohe Frequenzen kann man den Ionenanteil in (4.40) vernachlässigen und erhält dann

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ge}^2} = 0, \qquad \omega_{OH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ge}^2}. \tag{4.41}$$

Die Resonanzfrequenz ω_{OH} wird als *obere Hybridfrequenz* bezeichnet. Sie liegt oberhalb der Plasmafrequenz und der Gyrationsfrequenz der Elektronen.

Für niedrige Frequenzen, im Bereich der Ionengyrationsfrequenz, spielt der Ionenanteil eine Rolle. Hier ist $\omega \ll \omega_{ge}$ und man erhält mit dieser Näherung

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ge}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{gi}^2} = 0,$$

$$(\omega^2 - \omega_{gi}^2)\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{gi}^2) - \omega_{pi}^2\omega_{ge}^2 = 0,$$

$$\omega^2(\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2) = \omega_{gi}^2\omega_{ge}^2 + \omega_{pi}^2\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2\omega_{gi}^2$$

Der letzte Term ist um das Massenverhältnis m_e/m_i kleiner als der vorletzte Term und kann daher vernachlässigt werden. Unter Verwendung der Beziehung (4.32) ergibt sich dann als Resonanzfrequenz die *untere Hybridfrequenz*

$$\omega_{UH} = \sqrt{\frac{\omega_{gi}^2\omega_{ge}^2 + \omega_{pi}^2\omega_{ge}^2}{\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2}} = \sqrt{\omega_{gi}\omega_{ge}}\sqrt{\frac{\omega_{gi}\omega_{ge} + \omega_{pe}^2}{\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2}} \tag{4.42}$$

Für Plasmen mit niedriger Dichte, $\omega_{pe} \ll \omega_{ge}$, liegt die untere Hybridresonanz nahe bei der Ionenzyklotronresonanz. Für Plasmen mit hoher Dichte, $\omega_{pe} \gg \omega_{ge}$, ergibt sich der Grenzwert $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{gi}\omega_{ge}}$.

Cutoffs

Die Cutoffs sind die Nullstellen von n_R und n_L. Diese wurden bereits bei der Ausbreitung parallel zum Magnetfeld bestimmt.

Übung 4.2 (Dielektrizitätsfunktionen für $k \perp B_0$) *Skizzieren Sie den Verlauf der Dielektrizitätsfunktionen $n^2(\omega)$ für die ordentliche und die außerordentliche Welle. Im Grenzfall $\omega \to 0$ geht die außerordentliche Welle in die sogenannte magnetosonische Welle über mit $n^2 \to 1 + c^2/u_A^2$.*

4.3 Elektrostatische Wellen

Die Wellenausbreitung in stoßfreien Plasmen kann durch die Vlasov-Maxwell-Theorie beschrieben werden. Im Gegensatz zum Modell des kalten Plasmas gilt die Vlasov-Maxwell-Theorie auch noch dann, wenn die thermische Geschwindigkeit der Elektronen mit der Phasengeschwindigkeit der Welle vergleichbar wird. Ein wichtiger Effekt der Welle-Teilchen-Wechselwirkung ist die *Landau-Dämpfung*. Sie wird im folgenden für elektrostatische Wellen in einem magnetfeldfreien Plasma hergeleitet.

4.3.1 Lineare Störungsrechnung

Elektrostatische Näherung

Im elektrostatischen Fall kann das elektrische Feld aus einem Potential abgeleitet werden, $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$, und die Vlasov-Maxwell-Gleichungen reduzieren sich auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t f &+ \boldsymbol{v}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} f - \frac{q}{m}\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\partial_{\boldsymbol{v}} f = 0, \\ \Delta\Phi &= -4\pi q \int d^3v (f - f_0), \end{aligned}$$

wobei f die Verteilungsfunktion der Elektronen und f_0 die Verteilungsfunktion für einen festen homogenen Ionenhintergrund bezeichnet.

Linearisierung

Setzt man $f = f_0 + f_1, \quad \Phi = \Phi_1$ mit kleinen Störungen $f_1, \Phi_1 \propto \exp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$, so erhält man durch lineare Störungsrechnung die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t f_1 &+ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} f_1 - i\frac{q}{m}\boldsymbol{k}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}} f_0 \Phi_1 = 0, \\ k^2\Phi_1 &= 4\pi q \int d^3v f_1. \end{aligned}$$

Ersetzt man die Zeitableitung wie bisher einfach durch $-i\omega$, so wird die Verteilungsfunktion an der Stelle $\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ singulär. Zur eindeutigen Interpretation dieser Singularität ist eine Laplace-Transformation hilfreich, bei der ω von der reellen Achse weg in die komplexe Ebene verschoben werden kann.

Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformierte einer Funktion $h(t)$, die für $t > 0$ definiert sei, ist

$$\hat{h}(\omega) = \int_0^\infty dt\ h(t) e^{i\omega t}. \tag{4.43}$$

Ist $h(t) < e^{st}$ für $t \to \infty$, dann ist $\hat{h}(\omega)$ in der Halbebene $\Im\{\omega\} >= s$ absolut konvergent. Die analytische Fortsetzung von $\hat{h}(\omega)$ in die Halbebene $\Im\{\omega\} < s$ besitzt im allgemeinen an einigen Stellen Singularitäten.

Die Laplace-Transformierte der Ableitung $\partial_t h(t)$ ist

$$\hat{\partial_t h(\omega)} = \int_0^\infty dt(\partial_t h(t)) e^{i\omega t} = -h(0) - i\omega \hat{h}(\omega) \tag{4.44}$$

Die inverse Laplace-Transformation ist

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+is}^{\infty+is} d\omega \ \hat{h}(\omega) e^{-i\omega t}. \tag{4.45}$$

Mit dem Anfangswert $f_1(k, v, t = 0) = g(k, v)$ ergibt die Laplace-Transformation des Gleichungssystems (4.43) die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \frac{-\frac{q}{m}\boldsymbol{k}\cdot\partial_{\boldsymbol{v}}}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \ \hat{\Phi}_1 + \frac{ig}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \\ \hat{\Phi}_1 &= \frac{4\pi q}{k^2} \int d^3v \ \hat{f}_1. \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.3.2 Dispersionsrelation

4.4 Wellenausbreitung im inhomogenen Plasma