1 Newton'sche Prinzipien der Mechanik

Wenn man den ersten Satz einer physikalischen Theorie formuliert, kommen darin notwendigerweise physikalische Begriffe vor, die dann schon vorher erklärt sein sollten. Man kann diese Problematik auch nicht dadurch lösen, daß man der Theorie wie in der Mathematik *Axiome* voranstellt. Ein solches Axiom müßte etwa lauten:

> Es gibt *Körper* mit den folgenden Eigenschaften: (1) Ohne Einwirkung von Kräften bewegen sich Körper geradlinig und gleichförmig. (2) Unter der Einwirkung von Kräften werden Körper beschleunigt, und zwar ... usw.

Das "Es gibt ..." reicht für die Physik nicht. Es müßte heißen: "Man mißt ..." (operative Definition). Dann jedoch müßte die Meßapparatur bereits vorher beschrieben worden sein.

Der pragmatische Ausweg aus dieser Situation besteht darin, daß man sich am Anfang einer Theorie unter Verwendung einer *vorwissenschaftlichen* Sprache über die Gegenstände der Theorie und darüber, wie sie beobachtet werden, zu verständigen sucht. Im Laufe der Theorie-Entwicklung werden diese vorwissenschaftlichen Verständigungen schrittweise präzisiert. Wir wollen dieses Vorgehen anhand der **Newton'schen Prinzipien** skizzieren, die am historischen Beginn der Mechanik stehen. Die Studierenden, die an den erkenntnistheoretischen Grundlagen der Physik interessiert sind, sollten dazu spezielle Literatur lesen[1].

1.1 1. Newton'sches Prinzip, Inertialsysteme, Galilei-Transformation

Der Inhalt des 1. Newton'schen Prinzips lautet:

> **Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig.**

Unter *Körpern* wollen wir sinnlich wahrnehmbare Gegenstände oder Dinge verstehen, z.B. Steine, Holzstücke, Kugeln, Würfel, Kreisel, Stahlfedern, Bälle, "kleine Teilchen" bis hin zu Molekülen, Atomen, ..., aber auch Himmels*körper* wie Erde, Mond, Sonne. Körper besitzen Eigenschaften wie Form, Farbe, Geruch, heiß oder kalt. Sie können veränderbar sein, z.B. deformierbar oder auch chemisch veränderbar.

Zwischen Körpern gibt es *Wechselwirkungen*, z.B. Verdrängung, Abstoßung, Anziehung, Reibung, gegenseitige Deformation beim Stoß, Haftung, Klebung, Mischung, chemische Reaktion. In der Physik kennen wir heute vier grundlegende Typen der Wechselwirkung:

1. Gravitation,
2. die elektromagnetische Wechselwirkung,
3. die "schwache" Wechselwirkung,
4. die "starke" Wechselwirkung.

Die unter 3. und 4. genannten Wechselwirkungen treten nur für sehr kleine Abstände im Bereich der Elementarteilchen auf. Die Stärke der Wechselwirkungen reiht sich in aufsteigender Folge wie 1., 3., 2., 4. Die Theorien der Wechselwirkungen sind Gegenstand der *Feldtheorien*, nicht der Mechanik. So ist z.B. die *Elektrodynamik* die Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung. Zu den heute aktuellen Problemen der Feldtheorien gehört die Frage, ob die verschiedenen Wechselwirkungen nur verschiedene Erscheinungsformen einer universellen Wechselwirkung sind, ob es also eine einheitliche Feldtheorie für alle Wechselwirkungen gibt ("Grand Unification Theory, GUT"). Das Programm der "GUT" wurde bis heute erfüllt für

1. die elektrische und magnetische Wechselwirkung in der Maxwell'schen Theorie der Elek-

Kräftefrei ist eine idealisierte experimentelle oder gedankliche Anordnung, durch die der Einfluß von Wechselwirkungen auf einen Körper näherungsweise ausgeschaltet wird. Das kann z.B. geschehen durch

1. hinreichend großen Abstand von allen anderen Körpern, z.B. im interstellaren Raum,
2. Kompensation von Kräften, z.B. Bewegung einer polierten (reibungsfreien) Stahlkugel auf einer glatten, ebenen und waagerechten Unterlage, so daß die Schwerkraft ausgeschaltet wird,
3. Untersuchung von Bewegung von "Körpern", die unter gewissen Bedingungen nahezu wechselwirkungsfrei sind, z.B. Licht.

Die entscheidenden Begriffe im 1. Newton'schen Prinzip sind jetzt *geradlinig* und *gleichförmig*. Das vorwissenschaftliche Verständnis von *geradlinig* beruht auf der unter irdischen Verhältnissen nahezu wechselwirkungsfreien Bewegung des Lichtes (optische Vermessung). Das außerdem erforderliche Längenmaß im Raum wird durch nahezu undeformierbare Körper realisiert, z.B. das Urmeter. Das vorwissenschaftliche Verständnis von *gleichförmig* orientiert sich an periodischen Abläufen, z.B. Tag und Nacht, Mondumlauf, Pendelbewegungen. Auch die moderne Messung von Zeit greift auf periodische Bewegungen zurück, nämlich auf sehr scharfe Spektrallinien der Elektronenbewegung in Atomen.

Man kann auch versuchen, das 1. Newton'sche Prinzip selbst zur Bestimmung von geradlinig und gleichförmig heranzuziehen. Man wählt dazu die Bewegung eines nahezu kräftefreien "Probekörpers", z.B. Licht. Die Bahnen von Licht definieren dann gerade Linien. Die Zeitintervalle, in denen der kräftefreie Körper gleichlange Abstände durchläuft, definieren das Zeitmaß. Die vom 1. Newton'schen Prinzip dann noch verbleibende Aussage lautet, daß sich nun *alle* kräftefreien Körper relativ zur Bewegung des Probekörpers geradlinig und gleichförmig bewegen. Dieses ist eine experimentell überprüfbare Aussage.

Die räumliche Beschreibung von Bewegungen erfolgt unter Verwendung der analytischen (euklidischen) Geometrie. Zur Beschreibung der Orte von Körpern verwenden wir im allgemeinen *kartesische Koordinatensysteme* K, definiert durch einen Ursprung O und drei orthonormierte Vektoren: $K : O, \boldsymbol{e}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Orthonormiert bedeutet, daß für das Skalarprodukt $\boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta$ gilt

$$\boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Ort P eines zunächst als punktförmig anzunehmenden Körpers wird durch seinen *Ortsvektor* $\boldsymbol{r}$ beschrieben:

$$\boldsymbol{r} := \vec{OP} = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha .$$

Die x_α heißen die *Komponenten* des Ortsvektors bezüglich des verwendeten Koordinatensystems K.

Zur Beschreibung von Bewegungsabläufen, also *Bahnen*, benötigen wir außer der Ortsangabe

auch eine Zeitangabe, also eine Uhr, symbolisch mit dem Koordinatensystem K zusammengefaßt als $\{K, t\}$. Die Bahn eines (immer noch punktförmig gedachten) Körpers besteht dann aus der Angabe des Ortsvektors des Körpers als Funktion der Zeit: $\boldsymbol{r}(t)$. Eine geradlinig und gleichförmige Bewegung in $\{K, t\}$ wird beschrieben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}\, t + \boldsymbol{r}_0. \tag{1}$$

Hier ist $\boldsymbol{v}$ die konstante *Geschwindigkeit* des Körpers, d.h., $\boldsymbol{v}$ ist konstant in Bezug auf Richtung und Betrag, und $\boldsymbol{r}_0$ ist der Anfangsort der Bewegung zur Zeit $t = 0$. Aus (1) gewinnt man die Geschwindigkeit durch Differentiation nach der Zeit:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{r}(t). \tag{2}$$

Diese Differentiation eines Vektors ($\boldsymbol{r}(t)$) nach einem Skalar (Zeit t) kann man sich komponentenweise definiert denken. Es seien x_α und v_α die Komponenten von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ bezüglich eines Koordinatensystems K, also

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_\alpha x_\alpha(t)\, \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \boldsymbol{v} = \sum_\alpha v_\alpha\, \boldsymbol{e}_\alpha.$$

Dann soll (2) definiert sein als

$$v_\alpha := \frac{d}{dt}\, x_\alpha(t).$$

Auch im allgemeinen Fall einer beliebigen Bahn $\boldsymbol{r}(t)$ wird die Geschwindigkeit durch Differentiation nach der Zeit t definiert:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}.$$

(Natürlich müssen Bahn bzw. ihre Komponenten differenzierbare Funktionen der Zeit t sein). Die vektorielle Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ hat die Richtung einer Tangente an die Bahn $\boldsymbol{r}(t)$ zum Zeitpunkt t, wie in der Abbildung 1 skizziert.
Wir führen jetzt den grundlegenden Begriff des *Inertialsystems* ein. Wir wollen ein Koordinatensystem K mit einer Uhr t ein Inertialsystem S nennen, $S : \{K, t\}$, wenn in ihm die Bahnen kräftefreier Körper als geradlinig und gleichförmig beschrieben werden. Daß natürlich nicht jedes System $\{K, t\}$ ein Inertialsystem ist, ergibt sich schon daraus, daß wir uns den Ursprung O eines Koordinatensystems relativ zu einem kräftefreien Körper als nicht geradlinig und gleichförmig bewegt vorstellen können. Wir betrachten jetzt zwei Intertialsysteme $S : \{K, t\}$ und $S' : \{K', t'\}$. Es sei

$$\boldsymbol{s}(t) := \vec{OO'}$$

der Verbindungsvektor vom Ursprung O von S bzw. K zum Ursprung O' von S' bzw. K'. Dieser Verbindungsvektor wird im allgemeinen von der Zeit abhängen, weil sich die Systeme gegeneinander bewegen können. Betrachten wir nun einen Körper, der im Ursprung O' von S' ruht, also kräftefrei ist. Dann ist offenbar $\boldsymbol{r}'(t) = 0$ und $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t)$. Andererseits muß sich dieser Körper von S aus beobachtet geradlinig und gleichförmig bewegen, also

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{s}_0, \tag{3}$$

Abbildung 1: Bahngeschwindigkeit

vgl. (1). Die beiden Inertialsysteme können sich also gegeneinander höchstens *translatorisch* mit einer konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ bewegen. $\boldsymbol{r}_0$ ist der Abstand der Ursprünge O und O' zur Zeit $t = 0$. Unter *translatorisch* versteht man eine reine Verschiebung unter Ausschluß von Drehungen. Gäbe es zwischen S und S' eine relative Drehung, dann würde ein kräftefreier Körper, der in S' ruht, sich aus der Sicht von S auf einer Kreisbahn oder einer Spirale bewegen, im Widerspruch zur Annahme, daß beide Systeme S und S' inertial sein sollten. Da für beliebige Positionen von Körpern $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} + \boldsymbol{s}(t)$ ist, folgt aus (3) die allgemeine Transformationsbeziehung zwischen Inertialsystemen zu

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{s}_0. \tag{4}$$

Diese Transformationsbeziehung zwischen Inertialsystemen heißt *Galilei-Transformation.*

Bei der Herleitung der Galilei-Transformation zwischen zwei Inertial-Systemen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die *Zeit* t eine universelle Variable ist bzw. *synchron* in allen Inertial-Systemen abläuft. Wir müßten also noch die Relation $t' = t$ zur Galilei-Transformation in (4) hinzufügen. Die Annahme einer universellen Zeit ist nur dann gerechtfertigt, wenn es eine Möglichkeit gibt, die Uhren t, t' in zwei gegeneinander bewegten Systemen $S : \{K, t\}$ und $S' : \{K', t'\}$ instantan, also ohne Zeitverlust, zu vergleichen, bzw., wenn es eine $\infty-$schnelle Signalgeschwindigkeit gibt. Diese Annahme ist physikalisch nicht gerechtfertigt: die uns bekannte, maximale Geschwindigkeit für die Übertragung physikalischer Signale ist die *Lichtgeschwindigkeit* $c \approx 3 \quad 10^8 m/s$. Die konsequente Einbeziehung einer maximalen Signalgeschwindigkeit in die Transformation zwischen Inertialsystemen führt auf die *Lorentz-Transformation* und die *Spezielle Relativitätstheorie.* Die Galilei-Transformation und die nicht-relativistische Mechanik ist eine approximative Theorie, die auf Körperbewegungen mit kleinen Geschwindigkeiten v im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c beschränkt ist: $v \ll c$.

1.2 Das zweite Newton'sche Prinzip: Kraft und Masse

Der Inhalt das zweiten Newton'schen Prinzips lautet:

> **Unter der Einwirkung einer Kraft wird ein Körper proportional zu dieser Kraft beschleunigt.**

Wir wollen analog wie beim ersten Newton'schen Prinzip vorgehen und den physikalischen Inhalt dieser Aussage durch die Beschreibung ausführbarer Experimente, also *operativ*, erklären. Wir beginnen mit dem Begriff *Beschleunigung*, Symbol $\boldsymbol{a}$, die als Änderung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ pro Zeit, gemessen in einem Inertialsystem, definiert wird:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t). \tag{5}$$

Diese Definition ist nach der Einführung des Begriffs des Inertialsystems im vorhergehenden Abschnitt problemlos. Die Beschleunigung ist im allgemeinen längs einer Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ wie der Ort und die Geschwindigkeit ebenfalls eine Funktion der Zeit t. Ihre Einheit (im MKS-System) ist m/s^2. Wenn ein Körper eine konstante Geschwindigkeit besitzt, verschwindet die Beschleunigung: das zweite Prinzip schließt logisch an das erste Prinzip an.

Aus der Aussage *proportional* im zweiten Newton'schen Prinzip ist zu folgern, daß die Kraft, Symbol $\boldsymbol{F}$, wie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ ein Vektor sein muß. Quantitativ läßt sich die Aussage des zweiten Prinzips also fassen als

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{F} \qquad \text{oder } m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{6}$$

worin die *Masse* m zunächst nur ein Proportionalitätsfaktor ist. Wir erweitern die Aussage des zweiten Prinzips durch die Annahme, daß die Aussage *proportional* eine etwaige Abhängigkeit der Masse m von anderen Bewegungsgrößen wie Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, Ort $\boldsymbol{r}$ und Zeit t ausschließt.

Keinesfalls darf das zweite Newton'sche Prinzip als Definition von Kraft mißverstanden werden, denn

1. die Masse ist noch gar nicht definiert und man könnte auch gar nicht Kraft *und* Masse gleichzeitig durch die Aussage in (6) definieren,
2. die Kraft war zumindest begrifflich bereits als Auswirkung einer Wechselwirkung auf einen Körper definiert worden,
3. damit würde das zweite Newton'sche Prinzip zu einer rein lexikalischen Wortbeschreibung, also physikalisch entbehrlich, vgl. Feynman[2]: das zweite Prinzip könnte dann ebensogut "gorce" statt "force" definieren, deutsch vielleicht "Graft" statt "Kraft".

Kraft-Norm

Wir beginnen mit der Erklärung des physikalischen Inhalts des zweiten Prinzips im Sinne von operativen Begriffsdefinitionen durch Einführung einer *Kraft-Norm* oder Probekraft, Symbol $\boldsymbol{F}_0$. Wir verstehen darunter z.B. eine bestimmte reversible und reproduzierbare Deformation

[2] Feynman, Leighton, Sands: Lectures on Physics, Vol. 1, chapter 12.1

eines bestimmten deformierbaren Körpers, z.B. einer mechanischen Feder, mit einer bestimmten Richtung. Im Grunde könnten wir schon hier eine quantitative Kraftskala für die Messung von Kräften einführen, indem wir Kräfte durch das Ausmaß der Deformation eines Meßkörpers, z.B. einer Feder, messen. Es bleibt dann jedoch offen, ob diese Deformationsskala für Kräfte mit der unten einzuführenden *dynamischen* Kraftskala übereinstimmt.

Träge Masse
Wir lassen die Probekraft $\boldsymbol{F}_0$ auf verschiedene Körper $i = 1, 2, \ldots$ einwirken und messen deren Beschleunigungen $\boldsymbol{a}_i$. Dabei finden wir

$$\boldsymbol{a}_i \sim \boldsymbol{F}_0, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Daß die gemessene Beschleunigung die Richtung von $\boldsymbol{F}_0$ hat, ist eine erste experimentelle Bestätigung des zweiten Prinzips. Wir ergänzen (7) durch einen Proportionalitätsfaktor m_i,

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_0, \tag{8}$$

der eine individuelle Eigenschaft des Körpers Nr. i beschreibt, denn verschiedene Körper werden durch dieselbe Kraft $\boldsymbol{F}_0$ im allgemeinen verschieden schnell beschleunigt. Der Faktor m_i wird *träge Masse* des Körpers Nr. i genannt: je größer m_i, desto kleiner ist die durch $\boldsymbol{F}_0$ an diesem Körper bewirkte Beschleunigung.

Wir wiederholen dieses Experiment mit denselben Körpern und derselben Kraft $\boldsymbol{F}_0$ an verschiedenen Orten, zu verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten und stellen fest, daß die träge Masse eines Körpers unabhängig von Ort, Zeit und Geschwindigkeit ist. Wir hatten diese Aussage oben bereits als eine Teilaussage des zweiten Prinzips formuliert. Sie ist hiermit experimentell bestätigt.

Massen-Skala
Wir lassen wiederum verschiedene Körper $i = 1, 2, \ldots$ durch dieselbe Kraft $\boldsymbol{F}_0$ beschleunigen, also

$$\boldsymbol{F}_0 = m_1 \boldsymbol{a}_1 = m_2 \boldsymbol{a}_2 = \ldots.$$

Wir wählen einen Körper als Normmasse, z.B. $m_1 = 1\,kg$, und messen die Massen anderer Körper in Einheiten von m_1 durch das Verhältnis der Beträge der Beschleunigungen:

$$m_i = \frac{|\boldsymbol{a}_1|}{|\boldsymbol{a}_i|} m_1, \qquad i = 2, 3 \ldots. \tag{9}$$

Wir erhalten auf diese Weise eine dynamische Skala für träge Massen.

Dynamische Kraft-Skala
Wir wählen eine bestimmte Masse m, z.B. die Massen-Norm m_1, und lassen verschiedene Kräfte $\boldsymbol{F}_k$, $k = 1, 2 \ldots$ auf m einwirken. Wir messen die Beschleunigungen $\boldsymbol{a}_k$, die die Kraft $\boldsymbol{F}_k$ jeweils bei m bewirkt. Mit

$$m \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{F}_k \tag{10}$$

erzeugen wir dann eine dynamische Kraftskala. Als Einheit für Kräfte wählen wir *N(ewton)*: $1\,N = 1\,kg\,m/s^2$ ist eine Kraft, die die Masse $m = 1\,kg$ mit $a = 1\,m/s^2$ beschleunigt.

Wir können diese dynamische Kraftskala nun mit der bereits oben erwähnten Deformationsskala vergleichen und finden, daß die beiden Skalen für hinreichend schwache Deformationen von Körpern, z.B. Federn, linear übereinstimmen. Bei einer Feder ist deren Elongation oder Stauchung Δx ein Maß für die Deformation. Dort finden wir also $\Delta x \sim |\boldsymbol{F}|$, das sogenannte *Hooke'sche Gesetz*. Dieses Hooke'sche Gesetz drückt eine Materialeigenschaft von vielen, aber bei weitem nicht allen deformierbaren Körpern aus. Es ist keinesfalls ein grundlegendes Naturgesetz, also z.B. nicht mit den Newton'schen Prinzipien vergleichbar.

Aussage des zweiten Newton'schen Prinzips
Wir haben die Aussagen des zweiten Newton'schen Prinzips zur operativen Bestimmung von Skalen für Massen und Kräfte herangezogen, indem wir bestimmte Kraft- und Massen-Normen gewählt haben. Dennoch behält das Prinzip seine volle Aussagekraft, denn es besagt, daß *alle* Massen m und *alle* Kräfte $\boldsymbol{F}$, die auf die Massen m einwirken und sie beschleunigen, die Beziehung

$$m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \tag{11}$$

erfüllen.

Galilei-Invarianz des zweiten Newtonschen Prinzips
Aus der Galilei-Transformation (4) folgen für die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ und die Beschleunigungen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, die in zwei Inertialsystemen S, S' gemessen werden

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0, \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}',$$

so daß aus $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ im Inertialsystem S auch $m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}$ im Inertialsystem S' folgt und umgekehrt: das zweite Newtonsche Prinzip ist *Galilei-invariant*.

Massenpunkt
Das Konzept des *Massenpunkts* ist eine Idealisierung. Man versteht darunter einen starren, d.h., nicht-deformierbaren Körper, dessen Ort mit hinreichender Genauigkeit durch einen einzigen Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ beschrieben werden kann. Ob ein Körper als Massenpunkt idealisiert werden kann, hängt davon ab, mit welcher Präzision er beschrieben werden soll und ob eventuelle weitere Freiheitsgrade des Körpers wie Rotationen oder Schwingungen eine Rolle spielen oder nicht. Erweiterungen des Begriffs des Massenpunktes sind *Systeme von Massenpunkten* wie z.B. Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper, deren Atome oder Moleküle als Massenpunkte aufgefaßt werden. Wenn die gegenseitigen Abstände der Massenpunkte in einem solchen System unveränderbar sind, spricht man von einem *starren Körper*. Für dessen Beschreibung ist außer der Lage eines seiner Massenpunkte noch die Angabe von Orientierungswinkeln erforderlich.

Bewegungsgleichungen für Massenpunkte
Die Aussage des zweiten Newtonschen Prinzips in der Form von (11) stellt eine *Bewegungsgleichung* für den Massenpunkt mit der Masse m dar. Die Kraft $\boldsymbol{F}$ kann noch vom Ort $\boldsymbol{r}$, von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und von der Zeit t abhängen, ausführlich geschrieben

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, t\right). \tag{12}$$

Die Kraft kann nicht mehr von der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ oder gar von noch höheren Zeitableitungen des Orts $\boldsymbol{r}$ abhängen, weil dadurch die Aussage des zweiten Prinzips leer würde. Die Bewegungsgleichung (12) ist eine vektorielle Differential-Gleichung 2. Ordnung oder, in Komponenten ausgeschrieben, ein System von drei Differential-Gleichungen 2. Ordnung. Eine der Problemstellungen der Mechanik besteht darin, Lösungen der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit und den Ort als Funktionen der Zeit zu finden. Diese Lösungen werden im allgemeinen parametrisch von den *Anfangsbedingungen*, z.B. vom Ort $\boldsymbol{r}_0$ und von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ des Massenpunktes zu einer Zeit t_0 abhängen.

1.3 Das dritte und vierte Newtonsche Prinzip: Impulserhaltung, Superpositionsprinzip

Der Inhalt des dritten Newtonschen Prinzips lautet:

> **Die Kräfte, die durch eine Wechselwirkung zwischen zwei Körpern auf die beiden Körper ausgeübt werden, sind entgegengesetzt gleich ("actio=reactio").**

Es sei $\boldsymbol{F}_{12}$ die Kraft, die auf den Körper Nr. 1 vom Körper Nr. 2 ausgeübt wird, entsprechend $\boldsymbol{F}_{21}$. Dann besagt das dritte Newtonsche Prinzip

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0. \tag{13}$$

Alle in diesem Prinzip vorkommenden Begriff sind zuvor schon erläutert bzw. definiert worden; in der Folge unseres Vorgehens können wir dieses Prinzip direkt experimentell überprüfen. Das geschieht am besten durch eine sehr grundlegende Folgerung aus diesem Prinzip. Wir nehmen an, daß die beiden im dritten Prinzip genannten Körper 1 und 2 mit den Massen m_1, m_2 ausschließlich ihren gegenseitigen Wechselwirkungskräften unterliegen, also nicht von dritten Körpern mehr beeinflußt werden. Dann lauten ihre beiden Bewegungsgleichungen

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_{12}, \qquad m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{21}.$$

Die Addition der beiden Bewegungsgleichungen ergibt zusammen mit dem dritten Newton'schen Prinzip in (13)

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = \frac{d}{dt}\left(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\right) = 0$$

bzw.

$$\boldsymbol{P} := m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \text{konstant}. \tag{14}$$

Der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$ der beiden Körper ist als Folge des dritten Newton'schen Prinzips erhalten, *Impulserhaltung*. Die Ausdrücke $m_i\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2$ heißen die Impulse der beiden Körper $i1, 2$. Eine aandere Ausdrucksweise für die Impulserhaltung ist der *Schwerpunktssatz*. Der Ortsvektor $\boldsymbol{R}$ des Schwerpunkts wird definiert als

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\left(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\right), \qquad M := m_1 + m_2. \tag{15}$$

M ist die Gesamtmasse der beiden Körper. Der Vergleich mit (14) zeigt, daß

$$M\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{P},$$

so daß $\boldsymbol{P} = \textit{konstant}$ äquivalent ist zu der Aussage, daß sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig bewegt.

Zentraler Stoß

Als Beispiel für den Impulserhaltungssatz betrachten wir den *zentralen Stoß* zweier Massen m_1, m_2, die sich längs einer Geraden (z.B. auf einer Schiene) bewegen können. Die Geschwindigkeiten der beiden Massen seien definiert durch

$$\begin{aligned} v_1', v_2' &: \textbf{vor} \text{ dem Stoß}, \\ v_1, v_2 &: \textbf{nach} \text{ dem Stoß}. \end{aligned}$$

Wir wenden das dritte Newtonsche Prinzip auf die Wechselwirkungskräfte zwischen den Massen während des Stoßvorgangs an. Dann liefert die Impulserhaltung die Aussage

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

woraus wir

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1' - v_1}{v_2 - v_2'}$$

finden. Diese Beziehung erlaubt die Festlegung einer dynamischen Skala für träge Massen durch Stoßversuche und ohne explizite Verwendung einer Kraftnorm. Implizit ist darin natürlich der Kraftbegriff über das dritte Newtonsche Prinzip verwendet worden.

Ausbreitung von Wechselwirkungen
Das dritte Newtonsche Prinzip macht eine Aussage über zwei Kräfte, die auf zwei Körper an verschiedenen Orten angreifen, $\boldsymbol{F}_{12}$ am Ort $\boldsymbol{r}_1$ des Körpers Nr. 1 und $\boldsymbol{F}_{21}$ am Ort $\boldsymbol{r}_2$ des Körpers Nr. 2. Die Aussage über die beiden Kräfte ist offensichtlich *simultan*, denn die Zeit kommt in (13) gar nicht vor und diese Gleichung ist zu lesen als "stets". Das bedeutet, daß mit dem dritten Newtonschen Prinzip eine $\infty-$schnelle Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle physikalischen Wechselwirkungen vorausgesetzt wird. Das dritte Newtonsche Prinzip ist konsistent mit der Galilei-Transformation, vgl. Abschnitt 1.1, wo eine $\infty-$schnelle Signalgeschwindigkeit angenommen werden mußte, um die Existenz einer universellen Zeit zu rechtfertigen. Wie dort aber bereits gesagt wurde, gibt es keine $\infty-$schnellen Ausbreitungen für Wechselwirkungen oder Signale, sondern eine maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit $c =\approx 3\ 10^8\ m/s$. Für die Wechselwirkung zwischen zwei Köpern bedeutet das, daß eine Impulsänderung des Körpers Nr. 1 immer erst nach einer endlichen Wechselwirkungszeit, die vom Abstand der beiden Körper abhängt, eine Auswirkung auf den Impuls des Körpers Nr. 2 haben wird. Wir werden später sehen, daß es sehr allgemeine Gründe dafür gibt, dennoch an der Impulserhaltung festzuhalten. Unter Vorwegnahme dieser Forderung können wir also schließen, daß es zwischen den wechselwirkenden Körpern offenbar ein "Medium" geben muß, das die Wechselwirkung überträgt und dabei auch selbst Impuls aufnehmen und abgeben kann. Dieses "Medium" ist ein *Feld*, z.B. das Gravitationsfeld oder das elektromagnetische Feld. Felder können außer Impuls auch Energie und Drehimpuls mit den Körpern bzw. den Teilchen austauschen. Wie bei der Galilei-Transformation ist auch das dritte Newtonsche Prinzip eine approximative Aussage für den Grenzfall von Körpergeschwindigkeiten, die sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind.

Das vierte Newtonsche Prinzip besagt:

> **Greifen mehrere Kräfte an einem Körper an, so addieren sich diese unabhängig voneinander** (wie Vektoren).

Das vierte Newtonsche Prinzip macht eine Aussage über das Verhalten von Kräften, also über die Feldtheorie der ihnen zugrundeliegenden Wechselwirkungen. Diese Feldtheorien sollen das Überlagerungs- oder *Superpositionsprinzip* erfüllen, bzw., sie sollen *linear* sein. Inhaltlich geht diese Aussage damit über die eigentlichen Grenzen der Mechanik hinaus. Sie ist dennoch für die Mechanik außerordentlich wichtig, weil sonst das Verhalten eines Körpers immer nur unter der Einwirkung einer einzelnen Kraft studiert werden könnte.

Grenzen der Newtonschen Mechanik
Es gibt zwei wesentliche Grenzen der Newtonschen Mechanik.

1. Die Newtonsche Mechanik ist *nicht-relativistisch*, d.h., sie geht aus von der Existenz einer $\infty-$schnellen Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wechselwirkungen und Signale. Anders ausgedrückt: sie ist nur auf solche Bewegungsvorgänge anwendbar, deren Geschwindigkeiten sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c sind.

2. Die Newtonsche Mechanik ist *klassisch*, d.h. sie geht aus von dem Begriff von Teilchen, deren Ort und deren Impuls (bzw. Geschwindigkeit) prinzipiell mit beliebiger Genauigkeit angebbar sind. (Anderenfalls dürften wir Vektoren für den Ort $\boldsymbol{r}$ und den Impuls $\boldsymbol{p}$ gar nicht simultan verwenden.) Die *Quantentheorie* wird zeigen, daß das klassische

Teilchenkonzept im Bereich "kleinster" Teilchen im atomaren Bereich zusammenbricht. Anders ausgedrückt: die Newtonsche Mechanik, allgemeiner als *Klassische Mechanik* bezeichnet, ist nur auf makroskopische Bewegungsvorgänge anwendbar, in denen die beteiligten Körper oder Teilchen groß gegen atomare Teilchen sind. (Tatsächlich ist nicht die räumliche Größe ausschlaggebend, sondern die *Wirkung*, die wir erst später in dieser Vorlesung kennenlernen werden. Sie muß groß sein gegen das Wirkungsquantum h bzw. $\hbar$.

2 1-dimensionale Bewegungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Bewegungsgleichungen vom Typ

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \qquad \dot{x} := \frac{d}{dt}x, \qquad \ddot{x} := \frac{d^2}{dt^2}x. \tag{16}$$

Im allgemeinen verstehen wir darunter eine 1-dimensionale Bewegung eines Körpers der Masse m auf einer Geraden in $x-$Richtung unter der Einwirkung einer Kraft F, die vom Ort x, der Geschwindigkeit $\dot{x}$ und (explizit) von der Zeit t abhängen kann. Aber natürlich könnte die Bewegung auch auf einer vorgegebenen Kurve ablaufen, und x könnte dann die Bogenlänge auf dieser Kurve bedeuten.

2.1 Kraft als Funktion der Zeit

Die Bewegungsleichung lautet

$$m\ddot{x} = F(t) \tag{17}$$

Wir gewinnen die Lösung aus (17) durch direkte Integration:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 + (1/m)\int_{t_0}^{t} dt'\, F(t'), \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + (1/m)\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, F(t''). \end{aligned} \tag{18}$$

Die *Integrationskonstanten* v_0, x_0 werden durch die *Anfangsbedingungen* festgelegt, d.h. durch die vorzugebenden Werte von Ort und Geschwindigkeit zu einer Anfangszeit t_0: $v_0 = \dot{x}(t_0), \quad x_0 = x(t_0)$.

Beispiel: konstante Kraft.

$$\ddot{x} = F/m,$$

z.B. Gewichtskraft $F = -mg$, g =Erdbeschleunigung, $x-$Richtung senkrecht nach oben gezählt. Durch Integration finden wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + \frac{F}{m}(t - t_0), \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{F}{2m}(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Beispiel: periodische Kraft

$$F(t) = F_0 \cos \omega t, \qquad \ddot{x} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Die Bewegungsgleichung für $\ddot{x}$ ist eine lineare, inhomogene Differential-Gleichung. Nach einem Satz über solche Differential-Gleichungen kann man deren allgemeine Lösung dadurch gewinnen, daß man eine partikuläre Lösung sucht und dazu die Gesamtheit aller Lösung der zugehörigen homogenen Differential-Gleichung addiert. Eine partikuläre Lösung finden wir durch den Ansatz

$$x(t) = A \cos \omega t,$$

wo A eine Konstante ist. Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$\left(A\omega^2 + \frac{F_0}{m} \right) \cos \omega t = 0.$$

Da dieser Ausdruck für alle Zeiten t verschwinden soll, muß der Klammerausdruck verschwinden: $(\ldots) = 0$. Daraus folgt

$$A = -\frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Die zugehörige homogene Differential-Gleichung lautet $\ddot{x} = 0$, und die Gesamtheit ihrer Lösungen $x(t) = a + bt$, a, b konstant. Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differential-Gleichung

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + a + bt.$$

Die Konstanten a, b bestimmen wir aus Anfangsbedingungen, z.B. bei $t_0 = 0$: $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$. Für die Geschwindigkeit $\dot{x}$ finden wir durch Differentiation nach t:

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + b.$$

Die Konstanten a, b sind also zu bestimmen aus

$$b = v_0, \qquad a - \frac{F_0}{m\omega^2} = x_0.$$

Einsetzen in die Lösung führt schließlich auf deren endgültige Form

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + x_0 + v_0 t.$$

2.2 Kinetische Energie und Leistung

In diesem Abschnitt geht es noch einmal um den allgemeinen Fall der Bewegungsgleichung (16): die Kraft F soll von Ort, Geschwindigkeit und Zeit abhängen können: $F = F(\dot{x}, x, t)$. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$:

$$m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x} F(\dot{x}, x, t).$$

Durch Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung finden wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = \frac{d}{d\dot{x}}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right)\frac{d\dot{x}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x}. \tag{19}$$

Dieses ist eine typische Umformung in der Mechanik, die uns noch mehrfach und in verallgemeinerter Weise begegnen wird. Wir haben also gefunden, daß

$$\frac{d}{dt}T = L, \tag{20}$$

worin die *kinetische Energie* T der Masse m und die *Leistung* L der Kraft $F(\dot{x}, x, t,)$ definiert sind durch

$$T := \frac{m}{2}\dot{x}^2, \qquad L := \dot{x}F(\dot{x}, x, t). \tag{21}$$

Gleichungen vom Typ (20) heißen *Bilanzgleichungen*. Hier handelt es sich um die Bilanz der kinetischen Energie: ihre Veränderung pro Zeit ist durch die Leistung gegeben.

2.3 Kraft als Funktion des Ortes, Energie-Erhaltung

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = F(x). \tag{22}$$

Wir können sogleich die Bilanzgleichung (20) aus dem vorhergehenden Abschnitt anwenden und finden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = \dot{x}F(x).$$

Wir definieren jetzt ein *Potential* $V(x)$ durch

$$V(x) = -\int_{x_1}^{x} dx'\, F(x'), \qquad F(x) = -\frac{d}{dx}V(x). \tag{23}$$

x_1 ist ein beliebiger, konstanter $x-$Wert; das Potential $V(x)$ ist also nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Durch nochmaliges Anwenden der Kettenregel finden wir jetzt

$$\frac{d}{dt}V(x) = \frac{dV(x)}{dx}\dot{x} = -\dot{x}F(x).$$

Dann können wir die Bilanz der kinetischen Energie offenbar in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(T + V(x)\right) = 0$$

oder auch

$$T + V(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E = \text{konstant}. \tag{24}$$

formulieren. Gleichungen vom Typ (24) heißen *Erhaltungssätze*. Aus der Bilanz für die kinetische Energie ist in dem Fall, daß die Kraft längs einer einzigen Dimension x nur vom Ort x abhängt, ein Erhaltungssatz für die Summe aus der kinetischen Energie T und dem Potential

$V(x)$ geworden. Man nennt das Potential $V(x)$ deshalb auch die *potentielle Energie* und die Konstante E die *Gesamtenergie*. Erhaltungssätze spielen in der gesamten Theoretischen Physik an vielen verschiedenen Stellen eine sehr prominente Rolle. Wir hatten ja bereits ein anderes Beispiel kennengelernt: die Erhaltung des Impulses zweier wechselwirkender Körper als Folge des 3. Newton'schen Prinzips. Die Frage, unter welchen Bedingungen ein Erhaltungssatz für die Energie, kurz *Energiesatz*, gilt, wird uns im folgenden noch eingehend beschäftigen. So wird z.B. die Frage, ob eine Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, die in 3 Dimensionen vom Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ abhängt, ebenfalls immer ein Potential $V(\boldsymbol{r})$ besitzt, Anlaß für einen Exkurs in die Vektoranalysis sein.

Ein anderer Aspekt des Energiesatzes (24) ist die Tatsache, daß er uns ein *erstes Integral* der Bewegungsgleichung liefert, nämlich die Gesamtenergie E, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist, z.B. durch $\dot{x}(t_0) = v_0$ und $x(t_0) = x_0$:

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 + V(x_0).$$

Da $V(x)$ nur bis auf eine additive Konstante definiert ist, vgl. (23), gilt dasselbe auch für E. Durch das Auffinden eines Integrals der Bewegungsgleichung reduziert sich die Ordnung der Differentialgleichung: im Gegensatz zur Bewegungsgleichung (22), die eine Differential-Gleichung 2. Ordnung darstellt, ist (24) nur mehr eine Differential-Gleichung 1. Ordnung. Wir können nämlich nach $\dot{x}$ auflösen und finden

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}. \tag{25}$$

Diese Differential-Gleichung läßt sich stets durch *Trennung der Variabeln* auf eine gewöhnliche Integration zurückführen. Aus (25) folgt nämlich

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

und daraus durch Integration und unter Verwendung der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}. \tag{26}$$

Hieraus ist $t(x)$ und durch Umkehrung die "Bahn" $x(t)$ zu bestimmen.

Bewegungen sind offenbar nur in dem $x-$Bereich mit $V(x) \leq E$ möglich, vgl. Abbildung 2.
Die erlaubten Bereiche der Bewegung sind offenbar von der Gesamtenergie E und damit von den Anfangsbedingungen abhängig.

Ein besonders interessanter Fall liegt vor, wenn $V(x)$ die Form einer *Potentialmulde* hat, also ein Minimum bei einem $x = x_m$, d.h. $V'(x_m) = 0$, und $V''(x) > 0$ für alle x. Ein Beispiel dafür ist $V(x) \sim x^2$, der *harmonische Oszillator*, der uns im nächsten Kapitel noch eingehend beschäftigen wird. Wie in der Abbildung 3 skizziert, ist die Bewegung einer Masse in einer Mulde stets von *Umkehrpunkten* begrenzt: $x_a \leq x \leq x_b$.
Die Bewegung in der Mulde $V(x)$ laufe nach rechts (zunehmendes x) und nähere sich x_b. Bei $x \to x_b$ geht die Geschwindigkeit gegen Null: $\dot{x} \to 0$. Andererseits ist dort aber die Steigung der Mulde, also die Ableitung von $V(x)$, positiv, d.h. die Beschleunigung wird negativ:

Abbildung 2: Erlaubte Bereiche der Bewegung

Abbildung 3: Bewegung in einer Potentialmulde

$$m\ddot{x}_b = F(x_b) = -\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_b < 0,$$

Das bedeutet, daß die Bewegung bei $x = x_b$ umkehrt, analog bei $x = x_a$. Insgesamt verläuft die Bewegung also *periodisch* zwischen x_a und x_b bzw. *oszilliert*. Aus (26) können wir dann auch die *Schwingungsdauer* τ berechnen, nämlich

$$\tau = 2\int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}. \tag{27}$$

(Faktor 2, weil eine volle Schwingung von x_a nach x_b und zurück gezählt wird). Die Schwingungsdauer hängt also im allgemeinen von der Energie E ab: $\tau = \tau(E)$, denn E steht nicht nur explizit im Integral in (27), sondern auch die Umkehrpunkte x_a und x_b hängen von E ab.

2.4 Kraft als Funktion der Geschwindigkeit, Reibung

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}). \tag{28}$$

Auch diese Differential-Gleichung läßt sich durch Trennung der Variabeln auf eine Integration reduzieren. Mit der Abkürzung $v \equiv \dot{x}$ folgt nämlich

$$m\frac{dv}{dt} = F(v), \qquad dt = \frac{mdv}{F(v)}, \qquad t - t_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{F(v')}. \tag{29}$$

Aus der Berechnung des Integrals gewinnen wir $t(v)$, durch Umkehrung $v(t) = \dot{x}(t)$ und durch nochmalige Integration nach t auch die "Bahn" $x(t)$.

Beispiel: "lineare" Reibung.
Unter *Reibung* versteht man eine im allgemeinen geschwindigkeitsabhängige Kraft $F(r) = R(v)$, die eine sich bewegende Masse abbremst. Die Bilanz der kinetischen Energie lautet hier

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = vR(v).$$

Wenn die Masse aufgrund der Einwirkung der Reibungskraft $R(v)$ abgebremst werden soll, dann muß das Geschwindigkeitsquadrat bzw. die kinetische Energie $T = mv^2/2$ abnehmen, also $vR(v) < 0$. Unter Vorwegnahme der Vorstellung, daß die Energie immer erhalten ist, wenn man nur die Systemgrenzen genügend groß wählt, also alle Energie-Reservoirs mitzählt, stellt sich die Frage, wo die stetig abnehmende kinetische Energie bleibt. Die Antwort kann empirisch gegeben werden: in Wärme-Energie. Dann besagt der 2. Hauptsatz der Thermodynamik, daß dieser Vorgang niemals umgekehrt ablaufen kann, also niemals die kinetische Energie auf Kosten der Wärme-Energie zunehmen kann. Die Bedingung $vR(v) < 0$ ist also eine Folge des 2. Hauptsatzes.

Das einfachste Modell der Reibung ist die "lineare" Reibung: $R(v) = -R\,v$, wo R jetzt eine Konstante ist (Reibungskoeffizient). Dieses Modell ist realistisch für viele Reibungsvorgänge bei hinreichend niedrigen Geschwindigkeiten. Jetzt ist $vR(v) = -R\,v^2$, d.h., der Reibungskoeffizient ist stets positiv: $R > 0$. Die Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = -Rv$$

hat die Lösung

$$v(t) = v_0\, e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = R/m, \qquad v_0 = v(0).$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ klingt exponentiell ab; die Konstante λ heißt *Abkling-* oder *Relaxationskonstante.*

Beispiel: konstante Kraft F und lineare Reibung.
Die Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = F - Rv$$

wird nach dem Schema von (29) gelöst:

$$t = m\int_0^v \frac{dv'}{F - Rv'}$$

unter der Annahme, daß $v(0) = 0$. Die Integration ergibt

$$t = -\frac{m}{R} \ln \frac{F - Rv}{F}$$

und durch Umkehrung

$$v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-\lambda t}\right), \qquad v_\infty = F/R, \qquad \lambda = R/m.$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ nimmt zu und strebt gegen eine Höchstgeschwindigkeit $v_\infty = F/R$.

Beispiel: konstante Leistung.
Wenn die Leistung einer Kraft, $L = vF$ konstant ist, dann folgt $F(v) \sim 1/v$, d.h., die Kraft ist geschwindigkeitsabhängig. Statt die Bewegungsgleichung zu integrieren, greifen wir auf die Bilanz (20) der kinetischen Energie zurück,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = L = \text{konstant},$$

woraus

$$\frac{m}{2}v^2 = L\,t + T_0$$

folgt. Die Integrationskonstante T_0 werde durch die Geschwindigkeit v_0 bei $t = 0$ bestimmt: $T_0 = m\,v_0^2/2$. Einsetzen und Auflösen nach $v(t)$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\,L\,t}{m} + v_0^2}.$$

Diese Lösung gilt für beide Fälle: $L > 0$, Leistungszufuhr, und $L < 0$, Leistungsentnahme. Im letzteren Fall ist die Integrationszeit auf $t \le m\,v_0^2/2|L|$ zu beschränken.

2.5 Numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Wie wir in den vorhergehenden Abschnitten mehrfach gesehen haben, sind die mechanischen Bewegungsgleichungen im allgemeinen *Differentialgleichungen* 2. Ordnung. Für den 1-dimensionalen Fall haben sie die Struktur

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t), \tag{30}$$

worin x der Ort, t die Zeit ist und $f(\ldots) = F(\ldots)/m$. Sie sind zu lösen mit vorzugebenden Anfangsbedingungen $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ und $x(t_0) = x_0$. In besonderen Fällen lassen sich die Bewegungsgleichungen auf Differentialgleichungen 1. Ordnung reduzieren, z.B. dann, wenn die Kraft nur vom Ort abhängt, $F = F(x)$, und dementsprechend ein Potential $V(x)$ besitzt, vgl. Abschnitt 2.3. Dann gilt nämlich ein Energie-Erhaltungssatz,

$$\frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + V(x) = E,$$

der nach $\dot{x}$ auflösbar ist:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V(x))}. \tag{31}$$

Dieses ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Struktur

$$\dot{x} = f(x). \tag{32}$$

Auf Differentialgleichung 1. Ordnung waren wir auch im vorhergehenden Abschnitt gestoßen, in dem es darum ging, nur die Geschwindigkeit $\dot{x} = v$ als Funktion der Zeit t zu bestimmen. Dort hatten die Differentialgleichungen die Struktur

$$\dot{v} = f(v). \tag{33}$$

Differentialgleichungen lassen sich nur in besonders einfachen Fällen "analytisch" lösen, d.h., ihre Lösungen, deren Existenz im mathematischen Sinne hier vorausgesetzt werden soll, lassen sich nur in besonders einfachen Fällen durch sogenannte "elementare Funktionen" ausdrücken. Wenn das nicht möglich ist, muß man numerische Lösungen heranziehen. Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt zwei einfache Algorithmen für die numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen vorstellen. Für weitergehende Studien sei auf die sehr umfangreiche Literatur zu dieser Problemstellung verwiesen.

Wir beginnen mit der Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung. Später werden wir sehen, wie die Integrationsalgorithmen auf Differentialgleichungen 2. oder höherer Ordnung verallgemeinert werden können. Vorgegeben sei also die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{34}$$

aus der $x = x(t)$ als Funktion von t mit einer Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ zu berechnen sei. Unter den Integrationsalgorithmen für gewöhnliche Differentialgleichungen bilden zum einen die *Runge-Kutta*-Verfahren und zum anderen die *Prädiktor-Korrektor*-Verfahren zwei Haupttypen, von denen wir je eine Version vorstellen wollen. In beiden Fällen wird das zu berechnende $x(t)$ für diskrete Zeitschritte in der Form

$$x_i = x(t_i). \qquad t_i = t_0 + i\,h, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

gelöst, wobei h die Schrittweite auf der $t-$Achse ist. Die Schrittweite kann während der Integration geändert werden, z.B. durch eine automatische Schrittweitenkontrolle, die vom numerischen Fehler des Verfahrens gesteuert wird. Das sogenannte *klassische* Runge-Kutta-Verfahren lautet:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h, \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2\,k_{2,i} + 2\,k_{3,i} + k_{4,i}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

worin

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= f(x_i, t_i)\,h, \\ k_{2,i} &= f(x_i + \frac{k_{1,i}}{2}, t_i + \frac{h}{2})\,h, \\ k_{3,i} &= f(x_i + \frac{k_{2,i}}{2}, t_i + \frac{h}{2})\,h, \\ k_{4,i} &= f(x_i + k_{3,i}, t_i + h)\,h. \end{aligned} \tag{36}$$

Für eine automatische Schrittweitenkontrolle hat sich das folgende Kriterium bewährt:

$$0.025 \leq \left| \frac{k_{2,i} - k_{3,i}}{k_{1,i} - k_{2,i}} \right| \leq 0.1, \tag{37}$$

und zwar so, daß die Schrittweite nach dem Schritt $i \to i+1$ verdoppelt wird, wenn das Kriterium unterschritten wird (linke Ungleichung), bzw. halbiert wird, wenn das Kriterium überschritten wird (rechte Ungleichung). Alternativ zu dieser Schrittweitenkontrolle kann man auch den approximativen Fehler im Schritt $i \to i+1$ verwenden, der mit

$$e_{i+1} \approx 3\, f(x_{i+1}, t_{i+1})\, h + k_{1,i} - 2\, k_{3,i} - 2\, k_{4,i} \tag{38}$$

abgeschätzt wird. In Abhängigkeit von einer vorzugebenden, lokalen Genauigkeit ε wird der Integrationsschritt $i \to i+1$ akzeptiert, wenn $|e_{i+1}| \leq \varepsilon$, oder mit halber Schrittweite wiederholt, wenn $|e_{i+1}| > \varepsilon$. Die halbierte Schrittweite wird dann für die nächsten Schritte beibehalten. Wenn $|e_{i+1}| \leq \varepsilon/10$, wird die Schrittweite für die nächsten Schritte verdoppelt. Natürlich kann der Wert von $f(x_{i+1}, t_{i+1})$, der zur Ermittlung des lokalen Fehlers e_{i+1} in (38) zu berechnen ist, für $k_{1,i+1}$ im nächsten Schritt weiterverwendet werden, wenn der Schritt $i \to i+1$ akzeptiert wurde.

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren läßt sich sehr elegant programmieren. Wenn man die Lösung direkt auf dem Schirm darstellen will und eine automatische Schrittweitenkontrolle benutzt, wird die numerische Genauigkeit sehr schnell die Pixelauflösung auf dem Schirm unterlaufen, so daß man eine sehr unschöne Darstellung in Form eines Polygonzuges erhält. Die Werte an den Ecken des Polygonzuges sind dann sehr genau, aber zwischen ihnen interpoliert das Programm linear. In solchen Fällen muß man eine obere Grenze für die Schrittweite h im Programm vorsehen, so daß z.B. h stets kleiner ist als die Pixelbreite.

Die einfachste Version eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens lautet

$$\text{Prädiktor:} \qquad x_{i+1}^{(0)} = x_i + h\, f(x_i, t_i), \tag{39}$$

Korrektoren:

$$x_{i+1}^{(\nu+1)} = x_i + \frac{h}{2} \left(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}^{(\nu)}, t_{i+1}) \right), \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{40}$$

Der Korrektorschritt ist eine Iteration, so daß

$$x_{i+1} = \lim_{\nu \to \infty} x_{i+1}^{(\nu)},$$

doch wird in den allermeisten Fällen ein einziger Iterationsschritt ($\nu = 0$) ausreichen. Für eine automatische Schrittweitenkontrolle im Sinne von (37) wird hier empfohlen

$$0.05 \leq h\, L \leq 0.2, \tag{41}$$

worin L eine Lipshitz-Konstante ist, die definiert ist als

$$L = \max_{(x,t) \in G} \left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|. \tag{42}$$

Hier ist G ein Gebiet der $(x,t)-$Ebene, in dem die Lösung $x(t)$ verläuft.

Wenn es bei der Integration auf eine sehr präzise Fehlerkontrolle ankommt, kann man auch so vorgehen, daß man die Integration mit irgendeinem Verfahren parallel mit zwei Schrittweiten h und $h/2$ durchführt und die Ergebnisse eines $h-$Schritts mit denen von zwei $h/2-$Schritten vergleicht. Liegt die Abweichung oberhalb einer vorzugebenden lokalen Genauigkeit ε, wird auf die Schrittweiten $h/2$ bzw. $h/4$ umgeschaltet. Liegt die Abweichung unterhalb von $\varepsilon/10$, wird auf $2\,h$ bzw. h umgeschaltet.

Wenn wir nun eine Differentialgleichung 2. Ordnung zu lösen haben, z.B. ein allgemeine mechanische Bewegungsgleichung vom Typ

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t), \tag{43}$$

dann transformieren wir diese Gleichung in ein äquivalentes System von zwei Differentialgleichung je 1. Ordnung, indem wir die Variabeln

$$x_1 := x, \qquad x_2 := \dot{x}$$

einführen. Die Differentialgleichung (43) ist dann äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, x_1, t). \end{aligned} \tag{44}$$

Wir verallgemeinern die Situation und stellen uns vor, daß wir irgendein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für Funktionen $x_\alpha(t)$ zu lösen haben, $\alpha = 1, 2, \ldots A$. Im obigen Fall wäre $A = 2$. Wir fassen diese Funktionen formal als zu einem Vektor $\boldsymbol{x}(t)$ zusammen, so daß das System von Differentialgleichungen nunmehr analog zu (34)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{45}$$

lautet. Hier ist $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ eine vektorwertige Funktion des Vektors $\boldsymbol{x}$ und der skalaren Variabeln t. Die oben geschilderten Verfahren sind jetzt einzeln auf jede Komponente x_α des Vektors $\boldsymbol{x}$ anzuwenden bzw. vektoriell zu interpretieren, z.B. für das klassische Runge-Kutta-Verfahren:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h, \\ \boldsymbol{x}_{i+1} &= \boldsymbol{x}_i + \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{k}_{1,i} + 2\,\boldsymbol{k}_{2,i} + 2\,\boldsymbol{k}_{3,i} + \boldsymbol{k}_{4,i}\right), \end{aligned} \tag{46}$$

mit

$$\boldsymbol{k}_{1,i} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i, t_i)\, h, \tag{47}$$

usw. wie in (36).

3 Der Harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator ist das "Paradepferd" der Physik. Mit ihm werden fast alle neuen Formulierungen, Begriffe oder Verfahren demonstriert. Da man seine Eigenschaften vollständig, analytisch und ohne jede Näherungsannahme beherrscht, dient er als Testfall par excellence. Der harmonische Oszillator wird uns nicht nur in der Mechanik, sondern ebenso oft in der Elektrodynamik, in der Quantentheorie und in der Statistischen Physik (Thermodynamik) begegnen. Dieses ist das Motiv, dem harmonischen Oszillator ein ausführliches Kapitel zu widmen.

3.1 Ruhelagen von Kräften und kleine Auslenkungen

Ausgangspunkt ist wieder eine (zunächst) eindimensionale Bewegungsgleichung mit einer ortsabhängigen Kraft $F(x)$,

$$m\ddot{x} = F(x), \tag{48}$$

wie wir sie allgemein schon im Abschnitt 2.3 betrachtet hatten. Wenn die Kraft an einer Stelle x_0 verschwindet, $F(x_0) = 0$, dann hat die Masse m dort offenbar eine *Ruhelage*. Diese Ruhelage kann *stabil* oder *instabil* sein. Das sehen wir am besten, wenn wir die Kraft $F(x)$ bei $x = x_0$ in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)\,(x - x_0) + \ldots, \qquad F(x_0) = 0.$$

Wenn die Ableitung von $F(x)$ bei $x = x_0$ *positiv* ist, also $F'(x_0) > 0$, dann würde der lineare Term der Entwicklung für eine kleine Auslenkung $x - x_0 > 0$ eine Kraft in Richtung zunehmender x liefern, also die Auslenkung verstärken, und ganz analog für $x - x_0 < 0$: die Ruhelage ist *instabil*. Umgekehrt verhält es sich, wenn $F'(x_0) < 0$: eine Auslenkung $x - x_0 > 0$ würde im linearen Term durch eine ihr entgegengesetzte Kraft in Richtung abnehmender x zurückgetrieben werden, analog für $x - x_0 < 0$, diese Ruhelage ist *stabil*. Diese Verhältnisse sind an je einer instabilen und stabilen Ruhelage in Abbildung 4 veranschaulicht. Die Bewegungsrichtung bei kleinen Auslenkungen wurde dort durch Pfeile gekennzeichnet. Außerdem wurde dort auch noch das Potential $V(x)$ hinzugefügt:

$$V(x) = -\int_{x_1}^{x} dx'\, F(x'), \qquad F(x) = -\frac{d}{dx}V(x),$$

vgl. Abschnitt 2.3. Das Potential hat offensichtlich bei instabilen Ruhelagen ein Maximum, bei stabilen Ruhelagen ein Minimum.
Das Paradebeispiel für eine *stabile* Ruhelage ist die Masse m an einer mechanischen Feder, deren anderes Ende fest ist. Die Feder hat eine Position x_0 (entspannte Länge), bei der sie keine Kraft auf m ausübt. Jede Elongation führt zu einer Kraft, die die Masse m in die entspannte Lage bei x_0 zurücktreibt. Außerdem gibt es bei Federn einen recht großen $x-$Bereich um x_0, in dem der lineare Term der Taylor-Entwicklung eine hinreichend genaue Beschreibung der Kraft $F(x)$ liefert. Die Bewegungsgleichung lautet also dann

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0), \qquad k = -F'(x_0) > 0\,. \tag{49}$$

k heißt die *Federkonstante*. Die Feder mit der rücktreibenden Kraft proportional zur Elongation ist ein spezielles Beispiel für das Hookesche Gesetz, von dem bereits im Abschnitt 1.2 die Rede

Abbildung 4: Instabile und stabile Ruhelage

war.

Das andere Standard-Beispiel für eine stabile Ruhelage ist das *Fadenpendel*: eine Masse m hängt an einem sehr dünnen, näherungsweise masselosen Faden der Länge l, und kann sich in einer Ebene auf einem Kreis mit dem Radius l bewegen. Auf die Masse wirkt die Gewichtskraft $G = mg$ und die Fadenspannung S. In der Abbildung 5 bilden diese beiden Kräfte ein *Kräfteparallelogramm* (gemäß dem vierten Newtonschen Prinzip), aus dem eine rücktreibende Kraft F resultiert, für die

$$F = -G \sin\varphi = -mg \sin\varphi$$

ablesbar ist. Die Kraftkomponente in Fadenrichtung soll als *Zwangskraft* vom Faden aufgenommen werden. Über Zwangskräfte werden wir später noch eingehender nachzudenken haben. Die Bewegung der Masse ist in diesem Fall zwar eindimensional, aber nicht geradlinig, sondern verläuft auf einer erzwungenen Kreisbahn. Wir bezeichnen die Bogenlänge auf dem Kreis mit s, so daß für den Winkel $\varphi = s/l$ gilt. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{s} = -mg \sin(s/l) \qquad \text{oder} \qquad \ddot{\varphi} = -(g/l) \sin\varphi.$$

Für kleine Winkel φ kann $\sin\varphi$ linear approximiert werden: $\sin\varphi \approx \varphi$, so daß die Bewegungsgleichung dann

$$\ddot{\varphi} = -(g/l)\,\varphi$$

lautet.

Wir fassen jetzt die Bewegungsgleichungen in der Nähe von stabilen Ruhelagen in der Form

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \text{oder} \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0^2 = k/m \tag{50}$$

zusammen. Die Ruhelage x_0 läßt sich nämlich durch eine Verschiebung der $x-$Skala immer bei $x_0 = 0$ wählen. Als Potential, das ja immer nur bis auf eine additive Konstante definiert ist, wählen wir

Abbildung 5: Fadenpendel

$$V(x) = (k/2)x^2, \qquad F(x) = -V'(x) = -kx.$$

Wie im Abschnitt 2.3 begründet, gilt ein Erhaltungssatz für die Energie

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E.$$

Die Bewegungsgleichung (50) heißt *freier* harmonischer Oszillator. Kommt zusätzlich noch eine Reibungskraft hinzu, die proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$ ist, dann schreibt man die Bewegungsgleichung in der Form

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{51}$$

wo $2\rho = R/m$ in der Bezeichnungsweise des Abschnitts 2.4. (51) heißt *gedämpfter* harmonischer Oszillator. Kommt weiterhin noch eine äußere, zeitabhängige Kraft $F(t)$ hinzu, eine sogenannte additve (oder lineare) Erregung, dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{52}$$

wo $f(t) = F(t)/m$. (52) wird auch als *erzwungener* gedämpfter Oszillator bezeichnet. Es gibt aber auch *parametrische* Erregungen wie z.B.

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2(t)x = 0.$$

Ein Beispiel dafür ist eine Schaukel, auf der sich jemand durch eigene Bewegung (ohne Anstoßen von außen) in Schwingungen versetzt.

3.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{53}$$

ist eine lineare, homogene Differential-Gleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für lineare Differential-Gleichung 2. Ordnung kann man stets zwei *linear unabhängige* Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ angeben. Linear unabhängig bedeutet, daß die Gleichung

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0 \tag{54}$$

für alle t nur mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ erfüllbar ist. Um die lineare Unabhängigkeit von Lösungen eingehender zu untersuchen, bilden wir die Zeitableitung von (54) und erhalten

$$c_1 \dot{x}_1(t) + c_2 \dot{x}_2(t) = 0 \tag{55}$$

Die beiden Gleichungen (54) und (55) bilden ein System linearer Gleichungen, aus dem die Koeffizienten c_1, c_2 zu berechnen sind. Die Lösung dieses Systems ist eindeutig, nämlich $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, wenn die zeitabhängige Determinante $D(t)$ des Systems nicht verschwindet. Also ist die lineare Unabhängigkeit von $x_1(t), x_2(t)$ äquivalent zu $D(t) \neq 0$. Die Determinante $D(t)$ lautet

$$D(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t). \tag{56}$$

Man nennt $D(t)$ auch die *Wronski-Determinante*. Wir berechnen die Zeitableitung der Determinante $D(t)$ und erhalten

$$\frac{d\,D(t)}{dt} = x_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)x_2(t). \tag{57}$$

Da $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Differential-Gleichung (53) sein sollten, können wir

$$\ddot{x}_i(t) = -2\rho\dot{x}_i(t) - \omega_0^2 x_i(t) \qquad i = 1, 2$$

in (57) einsetzen und erhalten dann

$$\frac{d\,D(t)}{dt} = -2\rho\, D(t). \tag{58}$$

Dieses ist eine einfache Differential-Gleichung für die Determinante $D(t)$ mit der Lösung

$$D(t) = D(0)\, e^{-2\rho t}. \tag{59}$$

Wir erkennen an dieser Lösung, daß $D(t) \neq 0$ für beliebige Zeiten t, wenn $D(t_0) \neq 0$ für eine bestimmte Zeit t_0, z.B. $t_0 = 0$. Ist jedoch $D(t) = 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} & x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) = 0, \\ \Rightarrow \quad & \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} = \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\ln x_2(t) = \frac{d}{dt}\ln x_1(t), \\
&\Rightarrow \quad \ln x_2(t) = \ln x_1(t) + const, \\
&\Rightarrow \quad x_2(t) \sim x_1(t),
\end{aligned}
$$

also linear abhängige $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Die Differential-Gleichung (53) besitzt zu jeder Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$, die sich als Linearkombination von je zwei linear unabhängigen Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ schreiben läßt:

$$
x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t). \tag{60}
$$

Die Koeffizienten c_1, c_2 sind aus der Erfüllung der Anfangsbedingungen

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) & = & x_0 \\
c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) & = & v_0
\end{array}
\right\} \tag{61}
$$

zu bestimmen. (61) ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten c_1, c_2. Seine Determinante ist die Wronski-Determinante $D(t_0)$, und nach Voraussetzung sollte $D(t_0) \neq 0$ sein. Also gibt es eine eindeutige Lösung für die Koeffizienten c_1, c_2 und damit für $x(t)$, das die geforderten Anfangsbedingungen erfüllt. Übrigens geht aus dieser Überlegung auch hervor, daß drei und mehr Lösungen der Differential-Gleichung (53) immer linear abhängig sein müssen.

Die Standard-Prozedur für die Auffindung von zwei linear unabhängigen Lösungen einer linearen, homogenen Differential-Gleichung mit konstanten Koeffizienten ist der Ansatz

$$
x(t) = e^{\lambda t},
$$

der in (53) eingesetzt wird und auf eine quadratische Gleichung für λ führt:

$$
\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}. \tag{62}
$$

Wir finden also die beiden Lösungen

$$
x_{1,2}(t) = \exp\left\{\left(-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}\right) t\right\}. \tag{63}
$$

Diese beiden Lösungen sind linear unabhängig, denn die Berechnung der Wronski-Determinante ergibt

$$
D(t) = -2\sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}\, e^{-2\rho t}.
$$

3.2.1 Schwache Dämpfung

Für schwache Dämpfung, definiert durch $0 \leq \rho < \omega_0$, lauten die Lösungen $\lambda_{1,2}$ und $x_{1,2}(t)$ aus (62) und (63):

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_{1,2} & = & -\rho \pm i\Omega, \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} > 0, \\
x_{1,2}(t) & = & \exp\left(-\rho t \pm i\Omega t\right).
\end{array}
$$

Abbildung 6: Die Lösung $x_1(t) = e^{-\rho t} \cos \Omega t$

Da die Differential-Gleichung (53) linear und homogen ist, können durch Linearkombinationen wieder Lösungen gebildet werden, z.B. die reellen Lösungen

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t) + x_2(t)\right) = e^{-\rho t} \cos \Omega t,$$
$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{2i}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = e^{-\rho t} \sin \Omega t.$$

Diese Lösungen sind gedämpfte, harmonische Schwingungen. Auch sie sind linear unabhängig, wie man leicht durch Berechnung der Wronski-Determinante bestätigt:

$$\tilde{D}(t) := \tilde{x}_1(t)\dot{\tilde{x}}_2(t) - \dot{\tilde{x}}_1(t)\tilde{x}_2(t) = \Omega e^{-2\rho t}.$$

Die Lösung $\tilde{x}_1(t)$ ist in Abbildung 6 dargestellt.
Die Berechnung der Lösung $x(t)$, die vorgegebene Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ erfüllt, kann nach dem Schema von (60), (61) entweder mit den komplexen $x_i(t)$ oder mit den reellen $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2$, erfolgen. Das Ergebnis ist natürlich dasselbe, nämlich

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\rho t} \cos \Omega t + \frac{v_0 + \rho x_0}{\Omega} e^{-\rho t} \sin \Omega t \\ &= \left[x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \rho x_0}{\Omega}\right)^2\right]^{1/2} e^{-\rho t} \cos\left(\Omega t - \alpha\right) \end{aligned} \tag{64}$$

mit

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\left[x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \rho x_0}{\Omega}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

3.2.2 Starke Dämpfung

Für starke Dämpfung, definiert durch $\omega_0 < \rho$, sind die beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ aus (62) reell und negativ: $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$. Das bedeutet, daß die beiden linear unabhängigen Lösungen

$x_{1,2}(t)$ der Differential-Gleichung exponentiell abklingen. Die Koeffizienten c_1, c_2 in (60) für das Anfangsproblem $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ ergeben sich zu

$$c_1 = \frac{v_0 + (\rho + r)x_0}{2r}, \qquad c_2 = -\frac{v_0 + (\rho - r)x_0}{2r}, \qquad r := \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}.$$

Unter der Bedingung, daß $v_0 < -\rho x_0$, hat dieses $x(t)$ noch einen Nulldurchgang für $t > 0$.

Wenn $\rho = \omega_0$, hat die quadratische Gleichung (62) nur eine, aber zweifach *entartete* Lösung $\lambda = -\rho$. Mit

$$x_1(t) = e^{-\rho t}$$

erhält man dann zunächst nur eine Lösung. Natürlich muß auch im entarteten Fall eine zweite, mit $x_1(t)$ linear unabhängige Lösung existieren. Man überzeugt sich durch eine einfache Rechnung, daß im entarteten Fall auch

$$x_2(t) = t\, e^{-\rho t}$$

eine Lösung ist. Die Berechnung der Wronski-Determinante ergibt jetzt $D(t) = \exp(-2\rho t)$, so daß $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auch wieder linear unabhängig sind. Die Lösung des Anfangswertproblems führt im entarteten Fall auf

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \rho x_0)t]\, e^{-\rho t}.$$

3.3 Erregung durch eine periodische harmonische Kraft

Ziel dieses Abschnitts ist Konstruktion der Lösungen des schwach gedämpften harmonischen Oszillators, der von einer periodischen harmonischen Kraft $F(t) = F_0 \cos \omega t$ erregt wird:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \tag{65}$$

mit $f_0 = F_0/m$. (65) ist eine lineare, inhomoge Differential-Gleichung 2. Ordnung. Wie bereits früher erwähnt, kann man deren Lösungen gewinnen, indem man zu einer speziellen oder *partikulären* Lösung die Gesamtheit der Lösungen der zugehörigen homogenen Differential-Gleichung addiert. Das ergibt sich daraus, daß die Differenz von zwei Lösungen der inhomogenen Differential-Gleichung immer eine Lösung der zugehörigen homogenen Differential-Gleichung ist. Die Gesamtheit der Lösungen der zugehörigen homogenen Differential-Gleichung hatten wir im vorhergehenden Abschnitt konstruiert.

Bei der Auffindung einer partikulären Lösung von (65) werden wir von der Linearität der Gleichung in der folgenden Weise Gebrauch machen: gegeben seien die beiden linearen inhomogenen Differential-Gleichungen

$$Lx(t) = f_i(t), \qquad i = 1, 2,$$

wo L ein linearer Differential-Operator ist, z.B. der aus (65). Es seien außerdem je eine partikuläre Lösung $X_i(t)$ zur Inhomogenität $f_i(t)$ für $i = 1, 2$ bekannt. Dann besitzt die Differential-Gleichung

$$Lx(t) = C_1 f_1 + C_2 f_2(t)$$

die partikuläre Lösung

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t).$$

(Zur Unterscheidung von den Lösungen $x(t)$ der homogenen Differential-Gleichung aus dem vorhergehenden Abschnitt sollen die Lösungen der inhomogenen Differential-Gleichung durch $X(t)$ bezeichnet werden).

Von dieser Eigenschaft machen wir Gebrauch, indem wir die Erregung in (65) als

$$f_0 \cos \omega t = \frac{f_0}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)$$

schreiben und zunächst eine partikuläre Lösung von

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t} \tag{66}$$

suchen. Dazu machen wir den Ansatz

$$X_1(t) = A(\omega) e^{i\omega t}$$

und finden

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2 \right) A(\omega) e^{i\omega t} = e^{i\omega t}, \\ \Rightarrow \quad & A(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}. \end{aligned} \tag{67}$$

$A(\omega)$ heißt *Antwort-* oder *Response-Funktion*. Durch Übergang $\omega \to -\omega$ sehen wir, daß

$$X_1(t) = A(-\omega) e^{-i\omega t}$$

eine Lösung von

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{-i\omega t}$$

ist, wobei $A(-\omega) = A^*(\omega)$, vgl. (67). Folglich ist, wie oben begründet,

$$X(t) = \frac{f_0}{2} \left(A(\omega) e^{i\omega t} + A^*(\omega) e^{-i\omega t} \right) \tag{68}$$

eine partikuläre Lösung von (65). Für eine anschauliche Interpretation der Lösung $X(t)$ in (68) beschreiben wir die Antwort-Funktion $A(\omega)$ durch Betrag und Phase:

$$A(\omega) = |A(\omega)| \, \exp\left(-i\alpha(\omega)\right), \tag{69}$$

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}}, \tag{70}$$

$$\alpha(\omega) = -\frac{Im\, A(\omega)}{Re\, A(\omega)} = \frac{2\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{71}$$

Abbildung 7: Amplitudenfaktor $|A(\omega)|$ und Phase $\alpha(\omega)$ als Funktion der Frequenz ω

Wenn wir $A(\omega)$ in dieser Form in (68) einsetzen, können wir $X(t)$ umformen in

$$X(t) = |A(\omega)|\, f_0 \cos\left(\omega t - \alpha(\omega)\right). \tag{72}$$

Die Lösung $X(t)$ oszilliert mit derselben Frequenz ω wie die Erregung $f(t) = f_0 \cos \omega t$, jedoch verschoben ("hinterherlaufend") um eine Phase $\alpha(\omega)$. Außerdem hat $X(t)$ gegenüber $f(t)$ einen Amplitudenfaktor $|A(\omega)|$. Phase und Amplitudenfaktor sind als Funktion der Frequenz ω in Abbildung 7 gezeigt.
Der Amplitudenfaktor $|A(\omega)|$ besitzt ein Maximum in der Nähe der *Eigenfrequenz* ω_0 des Oszillators. Aus (70) kann man die genaue Lage des Maximums von $|A(\omega)|$ bei

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\rho^2}, \qquad \text{"Resonanz"}$$

bestimmen. In der Resonanz besitzt $|A(\omega)|$ den Wert

$$|A(\omega_R)| = \frac{1}{2\rho\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}}.$$

Für verschwindende Dämpfung bzw. Reibung $\rho \to 0$ wird die Amplitude von $X(t)$ singulär: $X(t) \to \infty$: "Resonanz-Katastrophe".

Die Phase ist für kleine Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ sehr klein, d.h., hier folgt der Oszillator der Erregung instantan. Für große Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ wird die Phase $\alpha(\omega) \approx \pi$, d.h., der Oszillator schwingt gegenphasig zur Erregung. In der Resonanz $\omega \approx \omega_0$ ist $\alpha(\omega) \approx \pi/2$.

3.4 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Unser Ziel soll sein, die Lösung für den harmonischen Oszillator nicht nur für harmonische periodische, sondern für beliebige periodische und später sogar für nicht-periodische Erregungen zu berechnen. Wir werden dabei ein Instrumentarium kennenlernen, das in der Theoretischen Physik bei mehreren Gelegenheiten wieder auftauchen wird. Insofern spielt der harmonische Oszillator hier in der Mechanik eine weit über die Mechanik hinausgehende paradigmatische Rolle. In

diesem Abschnitt wollen wir das Instrumentarium der Fourier-Reihen und der Fourier-Integrale kennenlernen. Dieses ist eine mathematische Theorie, die wir hier nur in ihren Grundzügen und in ihren wesentlichen Ergebnissen darstellen können. Für eine eingehendere Darstellung wird auf die entsprechenden mathematischen Vorlesungen bzw. auf die Literatur verwiesen[3].

Es sei $f(t)$ eine (möglicherweise komplexwertige) Funktion einer reellen Variabeln t, z.B. der Zeit. $f(t)$ sei *periodisch* mit der *Periodenlänge* τ:

$$f(t+\tau) = f(t). \tag{73}$$

In der physikalischen Nomenklatur heißt τ *Schwingungsdauer*, $\nu = 1/\tau$ Frequenz, $\omega = 2\pi/\tau$ *Kreisfrequenz*, hier durchweg "Frequenz" genannt. In der Theorie der Fourier-Reihen wird bewiesen, daß eine periodische Funktion $f(t)$ sich unter sehr allgemeinen Bedingungen (z.B. Dirichlet-Bedingung, im wesentlichen Stetigkeit und Monotonie in Teilintervallen) in eine *Fourier-Reihe*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp\left(2i\pi nt/\tau\right) \tag{74}$$

entwickeln läßt. Man sieht sofort, daß die rechte Seite von (74) in der Tat periodisch mit der Periodenlänge τ ist. Häufig ist nun die periodische Funktion $f(t)$ vorgegeben, und aus ihr sollen die *Fourier-Koeffizienten* f_n berechnet werden. Dazu benötigen wir die *Umkehrformel* zu (74). Wir multiplizieren (74) mit $\exp\left(-2i\pi mt/\tau\right)$ und integrieren über t von $-\tau/2$ bis $+\tau/2$:

$$\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t) \exp\left(-2i\pi mt/\tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, \exp\left(2i\pi(n-m)t/\tau\right) \tag{75}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist elementar zu berechnen: es verschwindet für $n \neq m$, und für $n = m$ ist sein Wert τ, also

$$\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, \exp\left(2i\pi(n-m)t/\tau\right) = \tau\, \delta_{nm}.$$

Damit bleibt in der Summe auf der rechten Seite in (75) nur mehr der Term $n = m$ übrig, d.h., also

$$f_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t) \exp\left(-2i\pi nt/\tau\right), \tag{76}$$

worin wir wieder den Index n statt m benutzt haben. Wir sehen, daß (74) und (76) Umkehrformeln zueinander sind.

Wir haben bisher die komplexe Schreibweise benutzt, weil diese bequemer und übersichtlicher ist. Für reelle Funktionen $f(t)$, also wenn

$$f^*(t) = f(t),$$

benutzt man oft auch die reelle Schreibweise, obwohl das nicht erforderlich ist und meist einen Mehraufwand für das Rechnen und Schreiben mit sich bringt. Der Vollständigkeit halber führen wir die reelle Schreibweise aus. Zunächst folgt aus (76)

[3] z.B. W.I. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil II, Kap. VI (Fourier-Reihen), Teil IV, Kap. I (Fourier-Integrale)

$$f_n^* = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t)\exp\left(2i\pi nt/\tau\right) = f_{-n}. \tag{77}$$

Dann bringen wir (74) in eine reelle Schreibweise, indem wir die folgenden Schritt ausführen

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\left(f(t)+f^*(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(f_n\exp\left(2i\pi nt/\tau\right)+f_n^*\exp\left(-2i\pi nt/\tau\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(f_n\exp\left(2i\pi nt/\tau\right)+f_{-n}\exp\left(-2i\pi nt/\tau\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_n+f_{-n}}{2}\cos\left(2\pi nt/\tau\right)+i\frac{f_n-f_{-n}}{2}\sin\left(2\pi nt/\tau\right)\right). \end{aligned}$$

Die $n-$Summe wird in die Beiträge $n=0$, $1\le n\le+\infty$ und $-\infty\le n\le-1$ zerlegt. Im Beitrag $-\infty\le n\le-1$ wird $n'=-n$ als neue Summationsvariable eingeführt und anschließend wieder mit n statt n' bezeichnet. Das Ergebnis dieser Umformungen lautet

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\left(2\pi nt/\tau\right)+s_n\sin\left(2\pi nt/\tau\right)\right) \tag{78}$$

mit

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t), \\ c_n &= f_n+f_{-n} = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t)\cos\left(2\pi nt/\tau\right), \\ s_n &= i(f_n-f_{-n}) = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t)\sin\left(2\pi nt/\tau\right). \end{aligned}$$

Zur Einführung des Fourier-Integrals gehen wir wieder auf die komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe in (74) und ihrer Umkehrung in (76) zurück. Wir führen die folgende Schreibweise ein:

$$\Delta\omega := 2\pi/\tau, \qquad \omega_n := 2\pi n/\tau, \qquad \tilde{f}(\omega_n) := \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}f_n.$$

Dann lassen sich Fourier-Reihe (74) und ihre Umkehrung (76) wie folgt schreiben:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega_n=-\infty}^{+\infty}\Delta\omega\,\tilde{f}(\omega_n)e^{i\omega_n t}, \tag{79}$$

$$\tilde{f}(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt\, f(t)e^{-i\omega_n t}. \tag{80}$$

Bis hierher haben wir nur eine geänderte Schreibweise eingeführt und damit die Dinge anscheinend komplizierter gemacht. Der entscheidende Schritt kommt jetzt: wir führen den Grenzübergang $\tau\to\infty$ aus. Das bedeutet, daß die Periodenlänge bzw. -dauer der Funktion $f(t)$ unendlich

lang wird, oder mit anderen Worten: $f(t)$ ist überhaupt nicht mehr periodisch bzw. *aperiodisch*. Gleichzeitig wird $\Delta\omega \to 0$ und die ω_n-Summe in (79) geht in ein Integral über:

$$\sum_{\omega_n=-\infty}^{+\infty} \Delta\omega \ldots \to \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ldots,$$

worin wir als Integrationsvariable ω statt ω_n benutzt haben. Außerdem gehen die Integrationsgrenzen in (80) gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$. Wir erhalten auf diese Weise die *Fourier-Transformation*, bestehend aus Darstellung und Umkehrung:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}, \tag{81}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t) e^{-i\omega t}. \tag{82}$$

Die Integrale konvergieren, unter Umständen im Sinne einer bedingten Konvergenz, unter relativ schwachen Voraussetzungen für die Funktionen $f(t)$ und $\tilde{f}(\omega)$, z.B. Erfüllung der Dirichlet-Bedingung und Beschränktheit. Allerdings wird die Fourier-Transformation auch unter Verwendung eines verallgemeinerten Funktionsbegriffs verwendet (Deltafunktion, Distributionen).

Die Fourier-Transformation in (81) und (82) ist symmetrisch in Bezug auf Darstellung und Umkehrung; man spricht auch von der Transformation zwischen Original- und Fourier-Raum, ähnlich wie bei der Laplace-Transformation. Gelegentlich werden auch andere, unsymmetrische Schreibweisen verwendet, z.B. mit

$$F(\omega) := \tilde{f}(\omega)/\sqrt{2\pi}$$

lautet die Transformation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, F(\omega) e^{i\omega t}, \qquad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t) e^{-i\omega t},$$

oder mit einem anderen Vorzeichen für ω, also $\tilde{F}(\omega) = F(-\omega)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \tilde{F}(\omega) e^{-i\omega t}, \qquad \tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t) e^{i\omega t}.$$

3.5 Erregung durch periodische und aperiodische Kräfte

Wenn der harmonische Oszillator durch eine beliebige, periodische Kraft $F(t)$ erregt wird,

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \qquad f(t+\tau) = f(t), \tag{83}$$

wo $f(t) = F(t)/m$, stellen wir $f(t)$ durch eine Fourier-Reihe wie in (74) dar:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t}, \qquad \omega := 2\pi/\tau. \tag{84}$$

Aus dem Abschnitt 3.3 kennen wir die Lösung für die Erregung durch eine einzelne Fourier-Komponente, nämlich

$$f(t) = e^{in\omega t}: \qquad X(t) = A(n\omega)e^{in\omega t}.$$

Die Frequenz ω im Abschnitt 3.3 ist hier durch $n\omega$ zu ersetzen. Wie ebenfalls schon im Abschnitt 3.3 begründet, kennen wir dann auch die Lösung für die Linearkombination der Fourier-Komponenten in (84), nämlich

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A(n\omega) f_n e^{in\omega t}. \tag{85}$$

Wenn $f(t)$ reell ist, also

$$f^*(t) = f(t), \qquad f_n^* = f_{-n},$$

vgl. (77) aus dem vorhergehenden Abschnitt, dann muß natürlich auch $X(t)$ reell sein:

$$\begin{aligned} X^*(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A^*(n\omega) f_n^* e^{-in\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A(-n\omega) f_{-n} e^{-in\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A(n\omega) f_n e^{in\omega t} \\ &= X(t). \end{aligned}$$

Dabei haben wir $A^*(n\omega) = A(-n\omega)$ verwendet, vgl. (67), und im letzten Schritt $-n$ statt n als Summationsvariable substituiert.

Wenn die Erregung $f(t)$ in (83) aperiodisch ist (bzw. $\tau \to \infty$), stellen wir $f(t)$ durch ein Fourier-Integral dar, vgl. den vorhergehenden Abschnitt 3.4:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, F(\omega) e^{i\omega t}. \tag{86}$$

Nach demselben Schema wie soeben im Fall der Fourier-Reihe lautet die Lösung $X(t)$ jetzt

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, A(\omega) F(\omega) e^{i\omega t}, \tag{87}$$

d.h., wir haben die Lösung $X(t)$ selbst in der Form eines Fourier-Integrals konstruiert. Wir setzen $A(\omega)$ aus (67) und $F(\omega)$ aus der Umkehrformel zu (86, also

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(t') e^{-i\omega t'},$$

in (87) ein und erhalten

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(t') e^{-i\omega t'} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} \right\} f(t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, G(t-t') f(t'). \end{aligned} \tag{88}$$

In der vorstehenden Umformung haben wir, unter der Annahme der absoluten Konvergenz der Integrale, die Reihenfolge der Integrationen über t' und ω vertauscht und die *Greensche Funktion*

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}. \tag{89}$$

eingeführt. Die physikalische Interpretation der letzten Zeile in (88) lautet, daß die Greensche Funktion $G(t-t')$ offenbar die *Nachwirkung* der Erregung $f(t')$ zur Zeit t', auf die Oszillator-Variable $X(t)$ zur Zeit t beschreibt. Dann müssen wir aber aus Gründen der *Kausalität* fordern, daß

$$G(t-t') = 0 \qquad \text{für } t < t', \tag{90}$$

weil die Antwort $X(t)$ des Oszillators der Erregung zeitlich nicht vorauseilen kann. Die Berechnung der Greenschen Funktion, die wir im folgenden Anhang auf zwei verschiedenen Wegen durchführen, ergibt

$$G(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} e^{-\rho(t-t')} \sin\left(\Omega(t-t')\right) & t \geq t', \\ 0 & t < t', \end{cases} \tag{91}$$

erfüllt also die Kausalitätsforderung. Im übrigen zeigt das Ergebnis in (91), daß die Nachwirkung von zeitlich früheren Erregungen $f(t')$ exponentiell abklingt, und zwar um so stärker, je größer die Dämpfung bzw. Reibung ist. Für verschwindende Dämpfung, $\rho \to 0$, klingt die Nachwirkung überhaupt nicht ab. Man sagt, daß das System dann eine $\infty-$lange *Erinnerung* ("memory") habe. Die Dämpfung oder Reibung verkürzt also die Erinnerung des Systems.

Unter Verwendung der Kausalität schreiben wir (88) in der Form

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t-t') f(t'). \tag{92}$$

3.6 Anhang: Berechnung der Greenschen Funktion

Zu berechnen ist

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}. \tag{93}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir das Zeitargument der Greenschen Funktion t statt $t-t'$ genannt. Die Kausalität muß sich jetzt in der From $G(t) = 0$ für $t < 0$ ausdrücken. Im Integranden führen wir eine Partialbruch-Zerlegung durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} &= -\frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} \\ &= -\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{1}{\omega-\omega_1} - \frac{1}{\omega-\omega_2}\right) \end{aligned} \tag{94}$$

mit

$$\omega_1 = \Omega + i\rho, \qquad \omega_2 = -\Omega + i\rho, \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}. \tag{95}$$

Dann ist zu berechnen

$$G(t) = -\frac{1}{4\pi\Omega}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_1} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_2}\right\}. \tag{96}$$

3.6.1 Die brute force-Methode

Die Integrale in (96) werden durch Substitutionen so weit reduziert, bis man sie in einer Formelsammlung (Integral-Tabelle) nachschlagen kann. So wird z.B. durch Substitution $\xi = \omega - \Omega$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\Omega-i\rho} \\
&= e^{i\Omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{e^{i\xi t}}{\xi - i\rho} \\
&= e^{i\Omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\xi+i\rho}{\xi^2+\rho^2}\left(\cos(\xi t) + i\sin(\xi t)\right) \\
&= ie^{i\Omega t}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\xi\sin(\xi t)}{\xi^2+\rho^2} + +\rho\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\cos(\xi t)}{\xi^2+\rho^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{97}$$

Im letzten Schritt wurde im Integranden ausmultipliziert und es wurde ausgenutzt, daß die $\xi-$Integrale über die ungeraden Integranden (bei $\xi \to -\xi$) verschwinden. Die beiden in (97) auftretenden Integrale lassen sich in der Integral-Tabelle ablesen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\xi\sin(\xi t)}{\xi^2+\rho^2} &= \pi e^{-\rho|t|}\,\mathrm{sgn}(t), \\
\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\cos(\xi t)}{\xi^2+\rho^2} &= \frac{\pi}{\rho}e^{-\rho|t|},
\end{aligned}$$

worin

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & \text{für } t>0 \\ 0 & \text{für } t=0 \\ -1 & \text{für } t<0 \end{cases}$$

Damit wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_1} = \begin{cases} 2\pi i\, e^{-\rho t+i\Omega t} & \text{für } t>0 \\ i\pi & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{für } t<0. \end{cases} \tag{98}$$

Analog (durch $\Omega \to -\Omega$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_2} = \begin{cases} 2\pi i\, e^{-\rho t-i\Omega t} & \text{für } t>0 \\ i\pi & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{für } t<0. \end{cases} \tag{99}$$

Einsetzen in (96) liefert

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega}e^{-\rho t}\sin(\Omega t) & t\geq 0, \\ 0 & t<0 \end{cases}, \tag{100}$$

vgl. (91) im vorhergehenden Abschnitt.

3.6.2 Auswertung mit dem Residuen-Satz

Es sei $f(z)$ eine (im allgemeinen komplexe) Funktion in der komplexen $z-$Ebene und C eine geschlossene Kurve in der $z-$Ebene. Die Funktion $f(z)$ soll im Inneren der Kurve C mit Ausnahme endlich vieler Punkte z_j, $j = 1, 2, \ldots, J$ regulär sein. Der *Residuen-Satz* besagt dann daß

$$\oint_C dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} Res\, f(z_j). \tag{101}$$

Auf der linken Seite steht das komplexe Integral der Funktion $f(z)$, das über die geschlossene Kurve C im mathematisch positiven Sinn, also dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt, zu erstrecken ist. Auf der rechten Seite steht die Summe über alle *Residuen* der Funktion $f(z)$ an den Punkten z_j im Inneren der Kurve C. Zur Definition des Residuums denken wir uns die Funktion $f(z)$ jeweils in der Umgebung der Punkte z_j in eine Laurent-Reihe entwickelt:

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu^{(j)} (z - z_j)^\nu.$$

Das Residuum von $f(z)$ bei z_j ist der Entwicklungskoeffizient der Ordnung $\nu = -1$, also

$$Res\, f(z_j) = a_{-1}^{(j)}.$$

Zum Beweis des Residuensatz wird auf die mathematische Literatur verwiesen[4].

Wir wollen jetzt das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_1}, \qquad \omega_1 = \Omega + i\rho$$

aus (96) mittels des Residuensatzes berechnen. Im ersten Schritt ergänzen wir den Integrationsweg durch den $\infty-$weit entfernten Halbkreis in der oberen oder unteren komplexen $\omega-$Ebene. Die Ergänzung ist so zu wählen, daß das Integral über den Halbkreis keinen Beitrag liefert. Dazu diskutieren wir

$$i\omega t = i\,(Re\,\omega)t - (Im\,\omega)t.$$

$t > 0$:
Das hinzugefügte Integral auf dem $\infty-$fernen Halbkreis liefert keinen Beitrag, wenn $Im\,\omega \to +\infty$, d.h., wenn der Integrationsweg über den $\infty-$fernen Halbkreis in der *oberen* $\omega-$Ebene geschlossen wird. Es entsteht dann ein geschlossener Weg $C^>$, der das Gebiet $Im\,\omega > 0$ im mathematisch positiven Sinn umläuft, vgl. Abbildung 8. Der Integrand hat in diesem Gebiet einen Pol bei $\omega = \omega_1 = \Omega + i\rho$, sein Residuum ist direkt ablesbar als

$$Res\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_1} = e^{i\omega_1 t} = e^{i\Omega t - \rho t}.$$

Nach dem Residuensatz ist also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_1} = 2\pi i\, e^{i\Omega t - \rho t} \qquad \text{für } t > 0. \tag{102}$$

Abbildung 8: Integration mit dem Residuensatz

$\boldsymbol{t < 0}$:
Das hinzugefügte Integral liefert jetzt keinen Beitrag, wenn $Im\,\omega \to -\infty$, d.h., wenn der Integrationsweg über den $\infty-$fernen Halbkreis in der *unteren* $\omega-$Ebene geschlossen wird. Damit entsteht ein geschlossener Weg $C^<$, in dessen Innerem der Integrand regulär ist, also keine Residuen besitzt, so daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_1} = 0 \qquad \text{für } t < 0. \tag{103}$$

Analog folgt für das andere Integral in (96) (z.B. durch $\Omega \to -\Omega$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_1} = \begin{cases} 2\pi i\, e^{-i\Omega t - \rho t} & t > 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{104}$$

Die Zusammenfassung von (102), (103) und (104) und Einsetzen in (96) liefert für die Greensche Funktion wieder das Ergebnis (100) bzw. (91).

Bei der Berechnung der Greenschen Funktion mittels des Residuen-Satzes wird erkennbar, daß die Erfüllung der Kausalitätsbedingung $G(t) = 0$ für $t < 0$ mit der Lage der Pole der Antwort-Funktion $A(\omega)$ bzw. letztlich mit der Bedingung $\rho > 0$ für die Dämpfungskonstante zusammenhängt. Diese letztere Bedingung folgt nicht aus der Mechanik, sondern z.B. aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Somit ist die Kausalität im strikten Rahmen der Mechanik gar nicht verankert, sondern tritt als eine *zusätzliche* Forderung auf. Diese Feststellung wird auch noch durch eine weitere Überlegung gestützt. Hätten wir nämlich von vornherein *ohne* Reibung gerechnet, was mechanisch nicht nur erlaubt, sondern eigentlich konsequenter

[4] z.B. W.I. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil III,2, Kap. I

ist, dann wäre in unseren obigen Rechnungen $\rho = 0$ zu setzen gewesen und wir hätten ohne eine zusätzliche Annahme nicht entscheiden können, wie die Integrationswege in den komplexen Integralen zu wählen sind. Die Pole der Integranden hätten dann nämlich auf der reellen Achse gelegen. Erst die *zusätzliche* Kausalitätsforderung würde dann entscheiden, in welcher Weise mit den Polen auf dem Integrationsweg verfahren werden soll.

4 Konservative Kraftfelder, Arbeit, Energie

In diesem Kapitel gehen wir auf die Problemstellung des Abschnitts 1.3 zurück: eine Masse m soll unter der Einwirkung einer nur vom Ort abhängigen Kraft stehen. Allerdings wollen wir jetzt den allgemeinen Fall betrachten, daß sich die Masse im dreidimensionalen Raum (Ortsvektor $\boldsymbol{r}$) bewegen kann. Natürlich tritt dann auch die Kraft als dreidimensionaler Vektor $\boldsymbol{F}$ auf, der von $\boldsymbol{r}$ abhängen kann. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{105}$$

Eine vektorwertige Funktion, hier die Kraft $\boldsymbol{F}$, die von einer vektorwertigen Variabeln, hier vom Ort $\boldsymbol{r}$, abhängt, nennt man ein *Feld*. Im Fall von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ spricht man von einem *Kraftfeld*.

Wir werden in diesem Kapitel die Diskussion von Kraftfeldern anhand von zwei Beispielen, der Gravitation und des (dreidimensionalen) harmonischen Oszillators beginnen, beginnen und dann zu allgemeinen Eigenschaften von Kraftfeldern übergehen, insbesondere die Frage untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Kraftfeld ein Potential bzw. eine potentielle Energie besitzt. Im Abschnitt 1.3 hatten wir gesehen, daß eindimensionale Kraftfelder stets ein Potential besitzen.

4.1 Gravitation und der 3-dimensionale harmonische Oszillator

.
Die *Gravitation* ist eine anziehende Wechselwirkung, die zwischen allen Massen auftritt. Sie ist verantwortlich für die Bewegung der Himmelskörper und wurde anhand des Studiums der Planetenbewegung entdeckt und historisch zuerst beschrieben. Die Gravitation steht am Beginn der Entwicklung der Mechanik, verbunden mit den Namen von Kepler, Galilei und Newton.

Es seien $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ die Ortsvektoren von zwei Körpern $i = 1, 2$, sowie $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ ihr Abstand. Die aufgrund der Gravitation auf den Körper 1 vom Körper 2 ausgeübte Kraft lautet dann (im Sinne einer empirischen Feststellung):

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r}. \tag{106}$$

Die Gravitation erfüllt das dritte Newtonsche Prinzip "actio=reactio", d.h., die Kraft, die auf den Körper 2 vom Körper 1 ausgeübt wird, lautet

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} = -\gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r}. \tag{107}$$

Die Gravitationskräfte haben die Richtung $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ der Verbindungslinie zwischen den Körpern. Die μ_1, μ_2 drücken eine individuelle Eigenschaft der beiden beteiligten Körper aus, die sogenannten *schweren* Massen, die zu den uns bereits bekannten *trägen* Massen hinzukommt. Die

Gravitationskonstante γ ist stets positiv: $\gamma > 0$. Das bedeutet, daß die Gravitation stets anziehend ist. Der Zahlenwert von γ hängt von der verwendeten Skala für schwere Massen ab.

Skala für schwere Massen:
Es werden die Gravitationskräfte $\boldsymbol{F}_{12}, \boldsymbol{F}_{13}$ gemessen, die auf die Körper 1 und 2 von einem dritten Körper 3 ausgeübt werden, z.B. Körper 3 = Erde, so daß $\boldsymbol{F}_{12}, \boldsymbol{F}_{13}$ die Gewichtskräfte der beiden Körper 1 und 2 an der Erdoberfläche sind. Aus dem Ausdruck (106) für die Gravitationskraft folgt dann, daß

$$\frac{|\boldsymbol{F}_{23}|}{|\boldsymbol{F}_{13}|} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3|^2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3|^2}.$$

Wenn die Körper 1 und 2 gleiche Abstände vom Körper 3 haben, also $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3|$, so folgt

$$\frac{|\boldsymbol{F}_{23}|}{|\boldsymbol{F}_{13}|} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{108}$$

Wir definieren mit (108) eine Skala für schwere Massen, indem wir eine schwere Normmasse μ wählen und alle anderen schweren Massen in Einheiten der Normmasse μ angeben.

Vergleich träge und schwere Masse:
Wir wählen als schwere Normmasse die träge Normmasse $m = 1\,kg$ und finden als empirisches Ergebnis, daß die beiden Skalen für träge und schwere Masse übereinstimmen. Wir benutzen deshalb im folgenden dasselbe Symbol $\mu = m$ für beide Massen. Dieses Ergebnis ist im Rahmen der Newtonschen Mechanik nicht weiter begründbar, also strikt empirisch. Seine Begründung im Rahmen einer erweiterten physikalischen Theorie erfolgt in der *Gravitationsfeldtheorie* (allgemeine Relativitätstheorie).

Da wir jetzt eine Skala auch für die schwere Masse haben, läßt sich die Gravitationskonstante γ durch eine Messung bestimmen:

$$\gamma = 6,67\,10^{-11}\,\left[\frac{m^3}{kg\,s^2}\right]. \tag{109}$$

Gewichtskraft:
Die Gravitationskraft $\boldsymbol{G}$, die auf einen Körper der Masse m von der Erde (Erdmasse=M) an der Erdoberfläche (Erdradius=R) ausgeübt wird, also die *Gewichtskraft*, schreibt man üblicherweise in der Form

$$\boldsymbol{G} = -\gamma \frac{mM}{R^2}\,\boldsymbol{n} = m\boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g} = -\gamma \frac{M}{R^2}\,\boldsymbol{n}. \tag{110}$$

Hier ist $\boldsymbol{n}$ der *Normalenvektor* auf der Erdoberfläche: $\boldsymbol{n}$ steht senkrecht auf der Erdoberfläche, nach außen ("oben") weisend, und hat die Länge $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Wie man aus (110) erkennt, hängt der Betrag der *Erdbeschleunigung* $g = |\boldsymbol{g}|$ vom Abstand R vom Erdmittelpunkt und damit von der geographischen Breite ab. Als näherungsweiser Mittelwert gilt

$$g = |\boldsymbol{g}| \approx 9,81\,[m/s^2].$$

Der 3-dimensionale harmonische Oszillator:
Die Verallgemeinerung des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators $F(x) = -kx$ mit $k > 0$ ist eine Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, die linear von $\boldsymbol{r}$ abhängt, also

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \text{mit} \qquad F_\alpha(\boldsymbol{r}) = -\sum_{\beta=1}^{3} k_{\alpha\beta}\, x_\beta. \tag{111}$$

Hier haben wir die Kraft $\boldsymbol{F}$ durch ihre Komponenten F_α beschrieben. Wenn die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ linear vom Ort $\boldsymbol{r}$ abhängen soll, dann müssen offenbar auch ihre Komponenten linear von $\boldsymbol{r}$ bzw. den Komponenten x_β des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ abhängen. Die Koeffizienten $k_{\alpha\beta}$ bilden eine Matrix. Damit die Kraft in (111) rücktreibend ist, d.h., damit die Ruhelage bei $\boldsymbol{r} = 0$ stabil ist, muß die Matrix $k_{\alpha\beta}$ *positiv definit* sein, vgl. den folgenden Abschnitt. Ein einfacherer Fall ist der *isotrope* harmonische Oszillator mit der Kraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k\,\boldsymbol{r}, \qquad k > 0. \tag{112}$$

Die Kraft ist hier immer auf den Punkt $\boldsymbol{r} = 0$ gerichtet, sie ist rücktreibend, und ihr Betrag ist unabhängig von der Richtung der Auslenkung $\boldsymbol{r}$.

Wenn der harmonische Oszillator durch eine mechanische Feder realisiert werden soll, dann muß deren *Ruhelänge* l berücksichtigt werden. Die eindimensionale Version der harmonischen Federkraft lautet

$$F(x) = -k(x - l), \qquad k > 0.$$

Die 3-dimensionale Version der harmonischen Federkraft lautet

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k(r - l)\boldsymbol{r}/r = -k\,(r - l)\,\boldsymbol{n}$$

mit

$$r := |\boldsymbol{r}|, \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r.$$

Die Feder ist also an einem Ende frei drehbar (und damit isotrop) befestigt gedacht; $\boldsymbol{n}$ ist der *Richtungsvektor* der Auslenkung.

4.2 Potentiale für die Gravitation und den harmonischen Oszillator

Wir gehen zurück zur Bewegungsgleichung (105) einer Masse m in einem Kraftfeld,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}),$$

und fragen, unter welcher Bedingung es für diese Bewegungsgleichung einen Erhaltungssatz für die kinetische und potentielle Energie gibt. Im Abschnitt 2.3 hatten wir gesehen, daß es für 1-dimensionale Bewegung mit einer ortsabhängigen Kraft $F(x)$ *immer* einen Erhaltungssatz für die Energie gibt. Wir gehen wie dort vor und multiplizieren die vektorielle Bewegungsgleichung mit der vektoriellen Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$, indem wir das Skalarprodukt bilden:

$$m\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{113}$$

Zunächst zeigen wir, daß analog dem 1-dimensionalen Fall

$$m\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) \tag{114}$$

gilt. Zum Beweis stellen wir das Geschwindigkeitsquadrat $\dot{\boldsymbol{r}}^2$ als Summe über die Quadrate der Komponenten der Geschwindigkeit dar:

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{\boldsymbol{r}}\,\dot{\boldsymbol{r}} = \sum_\alpha \dot{x}_\alpha^2.$$

Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir daraus durch Differentiation nach der Zeit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}^2 &= \sum_\alpha \frac{d\dot{x}_\alpha^2}{d\dot{x}_\alpha}\frac{d\dot{x}_\alpha}{dt} \\ &= \sum_\alpha 2\dot{x}_\alpha\ddot{x}_\alpha = 2\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung in (114) bewiesen. Die Größe

$$T := \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{115}$$

heißt analog dem 1-dimensionalen Fall wieder die *kinetische Energie* der Masse m. Für die kinetische Energie gilt die Bilanz

$$\frac{dT}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{116}$$

Die rechte Seite in (116) ist die *Leistung* der Kraft $\boldsymbol{F}$, vgl. Abschnitt 2.2, hier verallgemeinert für den dreidimensionalen Fall. Differentiell lautet die Bilanz (116)

$$dT = \dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{F}\boldsymbol{dr}.$$

$\boldsymbol{F}\boldsymbol{dr}$ ist die *Arbeit* der Kraft $\boldsymbol{F}$ längs des Bahndifferentials $\boldsymbol{dr}$.

Die Frage ist jetzt, ob es auch eine *potentielle Energie* $V(\boldsymbol{r})$ gibt. Diese müßte die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{r}) = -\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{117}$$

haben. Wir führen die Zeitableitung auf der linken Seite wieder mittels der Kettenregel durch. Dabei beachten wir, daß $V(\boldsymbol{r})$ als Funktion der Komponenten x_α von $\boldsymbol{r}$ betrachtet werden kann:

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{r}) = \sum_\alpha \frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\alpha = \frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{118}$$

Im letzten Schritt von (118) haben wir die Schreibweise des *Gradienten* von $V(\boldsymbol{r})$ eingeführt. Der Gradient ist definiert durch

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} := \sum_\alpha \frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha. \tag{119}$$

Eine andere Schreibweise für den Gradienten ist

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} =: \boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r})$$

unter Verwendung des *Nabla-Operators* $\boldsymbol{\nabla}$. Man kann sich die Gradientenbildung vorstellen als die Wirkung eines vektoriellen Operators $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ oder $\boldsymbol{\nabla}$ auf eine skalare Funktion $V(\boldsymbol{r})$. Das Ergebnis ist ein Vektorfeld, dessen Komponenten die Ableitungen $\partial V(\boldsymbol{r})/\partial x_\alpha$ sind.

Wenn wir nun (118) mit (117) vergleichen, sehen wir, daß genau dann ein Potential $V(\boldsymbol{r})$ für die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ existiert, wenn diese sich als Gradient

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{120}$$

darstellen läßt, in Komponenten:

$$F_\alpha(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha}.$$

Wenn die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ die Bedingung (120) erfüllt, läßt sich die Bilanz (116) für die kinetische Energie T zu einem Erhaltungssatz für die Energie $T + V(\boldsymbol{r})$ erweitern:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(\boldsymbol{r})\right) = 0, \tag{121}$$

$$\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(\boldsymbol{r}) = E = \text{konstant}. \tag{122}$$

Das Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ heißt dann *konservativ*.

Der einfachste Fall eines konservativen Kraftfeldes ist der isotrope harmonische Oszillator

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k\boldsymbol{r}, \qquad \text{bzw.} \qquad F_\alpha(\boldsymbol{r}) = -kx_\alpha.$$

Wir bestätigen sofort, daß

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{2}\sum_\alpha x_\alpha^2 = \frac{k}{2}\boldsymbol{r}^2$$

ein mögliches Potential ist. Weitere mögliche Potentiale entstehen daraus durch additive Konstanten. Für die isotrope Feder mit der Ruhelänge l, also

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k(r-l)\boldsymbol{r}/r, \tag{123}$$

ist

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{2}(r-l)^2, \qquad r = |\boldsymbol{r}|,$$

ein Potential. Nach der Kettenregel ist nämlich

$$-\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha} = -k(r-l)\frac{\partial r}{\partial x_\alpha}. \tag{124}$$

Ebenfalls gemäß der Kettenregel ist

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_\alpha} = 2r\frac{\partial r}{\partial x_\alpha},$$

andererseits

$$r^2 = \sum_\alpha x_\alpha^2, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial r^2}{\partial x_\alpha} = 2x_\alpha,$$

und damit

$$\frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r}. \tag{125}$$

Einsetzen in (124) ergibt

$$-\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha} = -k(r-l)\frac{x_\alpha}{r}$$

und damit die Behauptung, denn die rechte Seite ist gerade die Komponenten-Darstellung der Kraft in (123).

Auch die Gravitationskraft besitzt ein Potential. Wir betrachten die Situation, daß die Masse m unter der Einwirkung der Gravitationskraft der Masse M am Ort $\boldsymbol{r} = 0$ steht. Dann lautet die Kraft auf m:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\gamma\frac{mM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

komponentenweise

$$F_\alpha(\boldsymbol{r}) = -\gamma mM\frac{x_\alpha}{r^3}.$$

Ein mögliches Potential dazu lautet

$$V(\boldsymbol{r}) = -\gamma\frac{mM}{r}, \tag{126}$$

denn gemäß der Kettenregel und unter Verwendung von (125) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = -\frac{x_\alpha}{r^3},$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Bisher haben wir in diesem Abschnitt die Bewegung einer Masse m in einem Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ diskutiert. Diese Situation entspricht eigentlich nicht der Interpretation von Kraft als der Auswirkung einer Wechselwirkung zwischen mindestens zwei Körpern auf jeden der beteiligten Körper. Wir sollten korrekterweise also von einer Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ sprechen, die vom Abstandsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ zwischen zwei wechselwirkenden Körpern abhängt. Die Bewegungsgleichungen für die beiden Körper lauten dann

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \qquad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \tag{127}$$

Das dritte Newtonsche Prinzip, "actio=reactio", wird durch die Forderung

$$\boldsymbol{F}(-\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{128}$$

erfüllt. Wir multiplizieren die beiden Bewegungsgleichungen in (127) jeweils skalar mit der Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ bzw. $\dot{\boldsymbol{r}}_2$, addieren die beiden Aussagen und erhalten nach dem Muster von oben eine Bilanz für die Summe der kinetischen Energien:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_2^2\right) &= \dot{\boldsymbol{r}}_1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + \dot{\boldsymbol{r}}_2 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \\ &= (\dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{r}}_2)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \end{aligned} \tag{129}$$

wo wir vom 3. Newtonschen Prinzip in der Form von (128) Gebrauch gemacht haben. Wenn nun die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ ein Potential besitzt,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}},$$

dann gilt

$$(\dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{r}}_2)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2),$$

denn

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) &= -\sum_\alpha \left(\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha}\right)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2} (\dot{x}_{1\alpha} - \dot{x}_{2\alpha}) \\ &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\,(\dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{r}}_2)\,. \end{aligned}$$

Darin sind $\dot{x}_{1\alpha}$ und $\dot{x}_{2\alpha}$ die $\alpha-$Komponenten von $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ und $\dot{\boldsymbol{r}}_2$. Wir erhalten also den Erhaltungssatz für die Energie in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 + V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right) &= 0, \\ \frac{m_1}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 + V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) &= E = \text{konstant}. \end{aligned} \tag{130}$$

4.3 Kriterien für konservative Kraftfelder

Für 1-dimensionale Kraftfelder $F(x)$, die auch nur von einer Koordinate x abhängen, gibt es stets ein Potential $V(x)$:

$$V(x) = -\int_{x_1}^{x} dx'\, F(x'), \qquad F(x) = -\frac{d}{dx}V(x), \tag{131}$$

vgl. Abschnitt 2.3. Die Existenz eines Potentials garantiert einen Erhaltungssatz für die Energie. Es erhebt sich die Frage, ob wir im allgemeinen, 3-dimensionalen Fall analog vorgehen können. Das 1-dimensionale Potential $V(x)$ wird in (131) durch ein $x-$Integral über die Kraft $F(x)$ definiert. Im 3-dimensionalen Fall müssen wir dann zur Definition von $V(\boldsymbol{r})$ ein *Linien-Integral* verwenden:

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \tag{132}$$

Physikalisch anschaulich ist das Linien-Integral eine Integration der differentiellen Arbeiten $\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}'$. Unabhängig von dieser Deutung muß das Linien-Integral in (132) aber auch mathematisch definiert werden. Dazu wählen wir einen *Integrationsweg* C vom Punkt $\boldsymbol{r}_1$ bis zum Punkt $\boldsymbol{r}$. Dieser Weg sei durch eine Parameter-Darstellung

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\varphi}(s'), \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\varphi}(s_1) & = & \boldsymbol{r}_1, \\ \boldsymbol{\varphi}(s) & = & \boldsymbol{r}, \end{array} \right. \qquad s_1 \le s' \le s. \tag{133}$$

gegeben: wenn der Parameter s' von $s' = s_1$ bis zum Wert $s' = s$ läuft, dann beschreibt die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\varphi}(s')$ die Ortspunkte des Weges C. Die Funktion $\boldsymbol{\varphi}(s')$ soll wenigstens einmal stetig nach s' differenzierbar sein. Das Integral auf der rechten Seite von (132) soll jetzt wie folgt definiert sein:

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \\ &= -\int_{s_1}^{s} ds'\, \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s')). \end{aligned} \tag{134}$$

In der zweiten Zeile von (134) steht ein gewöhnliches, Riemann'sches Integral über die skalare Variable s' mit dem Integranden

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s')).$$

Der Integrand ist ein Skalarprodukt aus zwei Vektoren, stellt also eine skalare Funktion der Variabeln s' dar. Die Schreibweise in der ersten Zeile von (134) benutzt die Beziehung

$$ds'\, \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} = d\boldsymbol{\varphi}(s') = d\boldsymbol{r}'$$

im Sinne des Differential-Kalküls. Die Definition in der zweiten Zeile von (134) zeigt sehr deutlich, daß das Linien-Integral im allgemeinen von dem Weg C abhängt, d.h., wenn $\boldsymbol{\Phi}(S)$ einen anderen Weg C' von demselben Anfangspunkt $\boldsymbol{r}_1$ zu demselben Endpunkt $\boldsymbol{r}$ mit einem anderen Parameter S darstellt, dann ist im allgemeinen

$$\int_{s_1}^{s} ds'\, \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s')) \neq \int_{S_1}^{S} dS'\, \frac{d\boldsymbol{\Phi}(S')}{dS'} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(S'))$$

oder kürzer

$$\int_C d\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \neq \int_{C'} d\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}'). \tag{135}$$

Wir können die beiden Wege C und C' mit gleichen Anfangs- und Endpunkten zu einem *geschlossenen* Weg zusammenfügen, z.B. C in Vorwärts-, C' in Rückwärtsrichtung, symbolisch $C - C'$. Dann können wir (135) auch in der Form

$$\oint d\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \neq 0 \tag{136}$$

ausdrücken. Auf der linken Seite steht ein Integral über einen geschlossenen Weg, auch *Umlauf-Integral* genannt.

Die Frage, ob sich für alle Felder $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ ein Potential definieren läßt, muß also im allgemeinen negativ beantwortet werden. Das würde bedeuten, daß es für die Bewegung von Massen in Kraftfeldern im allgemeinen keinen Erhaltungssatz für die Energie gibt, es sei denn, alle in der Physik auftretenden Kraftfelder hätten die Eigenschaft, daß im Gegensatz zu (136) die Umlauf-Integrale über *alle* geschlossenen Kurven in ihnen verschwinden würden:

$$\oint d\boldsymbol{r}' \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') = 0. \tag{137}$$

Nach unseren obigen Überlegungen wären dann auch die Linien-Integrale über alle Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten einander gleich bzw. vom Weg unabhängig. Die Definition des Potentials $V(\boldsymbol{r})$ in (132) bzw. (134) wäre eindeutig. Kraftfelder mit dieser Eigenschaft erfüllen die Bedingung (120) für konservative Kraftfelder aus dem vorhergehenden Abschnitt,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{138}$$

Zum Beweis dieser Behauptung stellen wir das Potential $V(\boldsymbol{r})$ wie in der zweiten Zeile von (134) längs eines beliebigen Weges mit der Parameter-Darstellung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(s)$ wie in (133) dar:

$$V(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{\varphi}(s)) = -\int_{s_1}^{s} ds' \, \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s'))$$

Wir differenzieren diese Gleichung auf beiden Seiten nach dem Parameter s des Endpunkts. Auf der linken Seite erhalten wir nach dem Muster von (118)

$$\frac{dV(\boldsymbol{\varphi}(s))}{ds} = \left(\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} \right)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(s)} \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s)}{ds},$$

auf der rechten Seite nach der Regel über das Differenzieren eines Integrals nach seiner oberen Grenze den Wert des Integranden an der oberen Grenze, also

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}(s)}{ds} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s))$$

Damit diese beiden Ausdücke für alle Wege und alle Endpunkte übereinstimmen, muß die Bedingung (138) für konservative Kraftfelder erfüllt sein. Daß auch umgekehrt aus der Erfüllung der Bedingung (138) die Unabhängigkeit des Linien-Integrals vom Weg folgt, läßt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s} ds' \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s')) &= -\int_{s_1}^{s} ds' \frac{d\boldsymbol{\varphi}(s')}{ds'} \left(\frac{\partial V(\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{r}'} \right)_{\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\varphi}(s')} \\
&= -\int_{s_1}^{s} ds' \, \frac{dV(\boldsymbol{\varphi}(s'))}{ds'} \\
&= -\left(V(\boldsymbol{\varphi}(s)) - V(\boldsymbol{\varphi}(s_1)) \right) \\
&= -\left(V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r}_1) \right).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Zeile ist unabhängig vom Weg von $\boldsymbol{r}_1$ nach $\boldsymbol{r}$, also auch die linke Seite.

Wir haben damit zwei äquivalente Kriterien für konservative Kraftfelder formuliert:

- Das Kraftfeld läßt sich als (negativer) Gradient eines Potentials darstellen:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

- Das Linien-Integral über das Kraftfeld ist unabhängig vom Weg oder: die Umlauf-Integrale über alle geschlossenen Wege verschwinden:

$$\oint d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Im folgenden Abschnitt werden wir noch ein drittes, äquivalentes Kriterium formulieren.

4.4 Die Rotation von Feldern

Nach dem Gradienten im Abschnitt 4.2 führen wir in diesem Abschnitt eine weitere Operation aus der Vektor-Analysis ein, die ebenfalls durch den vektoriellen Differential-Operator $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ dargestellt wird, allerdings jetzt als ein Vektorprodukt oder Kreuzprodukt, das nur auf Vektorfelder angewendet werden kann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &:= \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{139}$$

Die in (139) definierte Operation des Vektor-Operators $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ auf das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ heißt *Rotation* des Feldes $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Die Rotation erzeugt aus einem Vektorfeld ein anderes Vektorfeld, das in (139) durch seine kartesischen Koordinaten definiert ist. Man erkennt, daß die Rotation formal wie ein Kreuz- oder Vektorprodukt des "Vektors" (bzw. Vektoroperators) $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ auf den Vektor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ gebildet wird. Darum kann man die Rotation auch wie das gewöhnliche Vektorprodukt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ durch eine Determinante darstellen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{140}$$

Mit derselben Analogie ist der Gradient

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot V(\boldsymbol{r})$$

zu lesen wie das Produkt eines Vektors (Vektoroperators) mit einem Skalar, also wie $\boldsymbol{a} \cdot \lambda$, wobei es natürlich stets auf die korrekte Reihenfolge ankommt.

Mit der Rotation können wir nun ein drittes Kriterium dafür angeben, daß ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ konservativ ist, nämlich genau dann, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{für konservative Kraftfelder} \tag{141}$$

Daß (141) erfüllt ist, wenn das Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ sich als Gradient eines Potentials darstellen läßt,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}),$$

ist sehr einfach einzusehen. Wir berechnen unter dieser Annahme die 1-Komponente der Rotation gemäß der Definition in (139):

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

unter der Annahme, daß die partiellen Ableitungen vertauschbar sind, z.B., wenn $V(\boldsymbol{r})$ wenigstens zweimal nach den x_α differenzierbar ist. Die entsprechende Rechnung kann man auch für die anderen Komponenten durchführen, so daß der Nachweis in der einen Richtung damit geführt ist. Für den umgekehrten Nachweis, daß $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ konservativ im Sinne eines der Kriterien des vorhergehenden Abschnitts ist, wenn seine Rotation verschwindet, benutzen wir den *Stokes'schen Integralsatz*. Er besagt, daß

$$\oint_{\partial A} d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_A d\boldsymbol{f}\, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{142}$$

Auf der linken Seite von (142) steht ein Linien-Integral über eine geschlossene Kurve ∂A, wie es uns schon aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannt ist. Die Schreibweise ∂A für die geschlossene Kurve soll andeuten, daß ∂A die Berandung eines Flächenstücks A ist, das wir uns zunächst als einfach zusammenhängend vorstellen. (Anderenfalls bestände der Rand aus mehreren Teilen.) Auf der rechten Seite steht ein *Flächen-Integral* über ein Flächenstück A. Der Stokes'sche Satz besagt, daß das Flächstück A beliebig sein kann, wenn es nur den auf der linken Seite auftretenden Rand ∂A hat.

Es sei nun A ein solches Flächenstück mit dem Rand ∂A. Dann wird das Flächen-Integral über ein Vektorfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$,

$$I_A := \int_A d\boldsymbol{f}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}),$$

hier $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, wie folgt gebildet:

1. Aufteilung des Flächenstücks A durch ein System von Netzlinien in Teilstücke Δf_j, $j = 1, 2, \ldots$,
2. Wahl eines beliebigen Punktes P_j auf jedem der Teilstücke Δf_j, $\boldsymbol{r}_j$:=Ortsvektor von P_j.
3. In jedem der P_j wird der Vektor $\Delta \boldsymbol{f}_j$ nach folgender Vorschrift gebildet:
   (a) $\Delta \boldsymbol{f}_j$ steht *senkrecht* auf dem Teilstück Δf_j in Normalenrichtung von A, die gemeinsam für alle Teilstücke nach einer der beiden Seiten von A hin definiert wird,

(b) der Betrag $|\Delta \boldsymbol{f}_j|$ soll gleich dem *Flächeninhalt* des Teilstücks Δf_j sein,

4. es werden die Skalarprodukte $\Delta \boldsymbol{f}_j \, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_j)$ gebildet und über alle Teilstücke $j = 1, 2 \ldots$ summiert,

5. das Flächenintegral I_A ist definiert als der Grenzwert dieser Summe für $\Delta f_j \to 0$, d.h. für den Grenzfall infinitesimaler Teilstücke im Sinne des Riemann'schen Integralbegriffs:

$$I_A = \int_A d\boldsymbol{f} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) := \lim_{\Delta f_j \to 0} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta \boldsymbol{f}_j \, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_j) \tag{143}$$

Wir werden im folgenden Abschnitt eine Beweis-Skizze für den Stokes'schen Satz geben. Mit dem Stokes'schen Satz ist aber die Äquivalenz des Kriteriums $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ für ein konservatives Kraftfeld mit dem Kriterium, daß alle Linien-Integrale des Feldes $\boldsymbol{F}$ über geschlossene Kurven verschwinden müssen, unmittelbar klar. Damit haben wir drei äquivalente Kriterien dafür, daß ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ konservativ ist:

- Das Kraftfeld läßt sich als (negativer) Gradient eines Potentials darstellen:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}},$$

- die Umlauf-Integrale von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ über alle geschlossenen Wege verschwinden:

$$\oint d\boldsymbol{r} \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0,$$

- die Rotation des Kraftfeldes verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Diese Kriterien lassen sich in naheliegender Weise auf Situationen übertragen, in denen ein Kraftfeld in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet konservativ ist.

4.5 Anhang: Beweis-Skizze für den Stokes'schen Integralsatz

Der Integralsatz von Stokes lautet

$$\oint_{\partial A} d\boldsymbol{r} \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_A d\boldsymbol{f} \, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \tag{144}$$

worin A ein Flächenstück mit dem Rand ∂A ist. Wir führen den Beweis für ein Rechteck der Kantenlängen a, b in der 1-2-Ebene, vgl. Abbildung 9, indem wir das Flächen-Integral auf der rechten Seite von (144) für diesen Fall berechnen und zeigen, daß sein Wert gleich dem Linien-Integral auf der linken Seite ist.
Für das genannte Rechteck wählen wir die Normalenrichtung in Richtung der 3-Achse und das infinitesimale Flächenelement als

$$d\boldsymbol{f} = dx_1 \, dx_2 \, \boldsymbol{e}_3.$$

Abbildung 9: Integrationsfläche und -weg

Die Berechnung des Flächen-Integrals ergibt dann:

$$
\begin{aligned}
&\int_A d\boldsymbol{f} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \\
&\quad = \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \left(\frac{\partial F_2(x_1, x_2, 0)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1(x_1, x_2, 0)}{\partial x_2} \right) \\
&\quad = \int_0^b dx_2 \int_0^a dx_1 \frac{\partial F_2(x_1, x_2, 0)}{\partial x_1} - \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \frac{\partial F_1(x_1, x_2, 0)}{\partial x_2} \\
&\quad = \int_0^b dx_2 \left(F_2(a, x_2, 0) - F_2(0, x_2, 0) \right) - \int_0^a dx_1 \left(F_1(x_1, b, 0) - F_1(x_1, 0, 0) \right) \\
&\quad = \int_0^a dx_1 \, F_1(x_1, 0, 0) + \int_0^b dx_2 \, F_2(a, x_2, 0) + \\
&\quad + \int_a^0 dx_1 \, F_1(x_1, b, 0) + \int_b^0 dx_2 \, F_2(0, x_2, 0) \\
&\quad = \oint_{\partial A} d\boldsymbol{r} \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).
\end{aligned}
$$

Der obige Beweis des Stokes'schen Satzes für ein Rechteck hängt nicht von der Lage des Rechtecks in der 1-2-Ebene ab; mittels einer Koordinaten-Transformation kann das Rechteck in beliebige Positionen transformiert werden.

Die Übertragung auf beliebige Flächenstücke A geht wie folgt:

1. Jedes Flächenstück A läßt durch ein Netz ebener Rechtecke Δf_j approximieren. Die Näherungsfehler beider Flächen-Integration sind von der Ordnung $O(\Delta f_j^2)$ und verschwinden für $\Delta f_j \to 0$.

2. Der obige Beweis für Rechtecke wird auf die Δf_j einzeln angewendet. Die Flächen-Integrale über die Δf_j werden addiert. Dadurch erhalten wir die Summe der Linien-Integrale über die Ränder aller Rechtecke Δf_j.

3. Die Linien-Integrale über die *inneren* Ränder der Δf_j treten zweimal auf, und zwar jeweils in entgegengesetzter Richtung, so daß deren Beiträge herausfallen.

4. Es verbleibt also das Linien-Integral über die *äußeren* Ränder der Δf_j, die für $\Delta f_j \to 0$ gegen den Rand ∂A von A konvergieren.

5 Systeme von Massenpunkten

Bisher haben wir Körper als *Massenpunkte* beschrieben. Ein Massenpunkt ist eine Idealisierung: ein Punkt im Sinne der Geometrie, beschrieben durch einen Ortsvektor $\boldsymbol{r}$, wird mit der physikalischen Eigenschaft einer Masse ausgestattet. *Kinematisch*, d.h., seine Bewegung betreffend, wird ein Massenpunkt ausschließlich durch die Zeitabhängigkeit seines Ortsvektors beschrieben, also z.B. durch Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ und Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$. Ein Massenpunkt besitzt entsprechend der Anzahl von drei kartesischen Komponenten des Orts bzw. der Geschwindigkeit und der Beschleunigung $f = 3$ *Freiheitsgrade*. Die Idealisierung besteht darin, daß ein realer Körper eine endliche Ausdehnung besitzt, dementsprechend auch eine innere Struktur und ebenso innere Freiheitsgrade. Zu diesen zählen Drehungen des ausgedehnten Körpers oder auch innere Schwingungen, z.B. bei deformierbaren Körpern.

Die nächste Idealisierungsstufe nach dem Massenpunkt ist der *starre Körper*. Darunter versteht man einen ausgedehnten Körper, dessen Teile relativ zueinander unbeweglich sind. Der starre Körper besitzt $f = 6$ Freiheitsgrade, die sich z.B. wie folgt abzählen lassen: ein beliebiger Punkt P_1 des starren Körpers besitzt 3 Freiheitsgrade, ein zweiter Punkt P_2 des starren Körpers besitzt relativ zu P_1 noch 2 Freiheitsgrade, da er sich auf einer Kugelschale um P_1 als Mittelpunkt bewegen kann, und schließlich kann sich der starre Körper dann noch um die Achse durch P_1 und P_2 drehen. Wir werden uns später ausführlich mit der Bewegung starrer Körper befassen.

Wenn die Bedingung der Starrheit (Undeformierbarkeit) aufgegeben wird, dann wird aus dem Körper ein *System von Massenpunkten*, die miteinander wechselwirken. Als Massenpunkte werden hinreichend kleine Teile des Körpers definiert, letztlich die Moleküle oder Atome, aus denen er besteht, allerdings ist dann auch schon die Grenze der klassischen Mechanik zur Quantentheorie erreicht. Wenn ein System von Massenpunkten aus einer Anzahl N Massenpunkten besteht, beträgt die Anzahl seiner Freiheitsgrade $f = 3N$.

Ob ein Körper als Massenpunkt idealisierbar ist, hängt von der Präzision ab, mit der er beschrieben werden soll, bzw. auch davon, ob seine inneren Freiheitsgrade an eine Bewegung als ganzes ankoppeln. Bei der Bewegung von Himmelskörpern z.B. interessiert in niedrigster Näherung ihre Rotation nicht, zumal dann nicht, wenn sie eine rotationssymmetrische Form haben. Bei einer genaueren Beschreibung muß diese Kopplung dann aber berücksichtigt werden, und schließlich auch die an ihre inneren Bewegungen wie z.B. Strömungen oder Schwingungen.

In diesem Kapitel wollen wir sehr allgemein die Bewegung von Systemen von Massenpunkten untersuchen, die untereinander wechselwirken und zusätzlich unter der Wirkung äußerer Kräfte stehen.

5.1 Bewegungsgleichungen, Impulsbilanz und Schwerpunkt

Die Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte mit den Massen m_i, $i = 1, 2 \ldots$ lauten

$$m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{X}_i, \qquad i = 1, 2 \ldots . \tag{145}$$

Hier ist $\boldsymbol{X}_i$ die Resultierende (vektorielle Summe) aller Kräfte, die auf den Massenpunkt i einwirken. Diese resultierenden Kräfte lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten aufteilen. Wir schreiben

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \tag{146}$$

und definieren $\boldsymbol{F}_i$ als die auf den Massenpunkt i wirkenden *äußeren* Kräfte, die ihre Ursache bzw. ihren Wechselwirkungspartner außerhalb der Systemgrenzen haben und $\boldsymbol{F}_{ij}$ als die *inneren* Wechselwirkungskräfte, d.h. $\boldsymbol{F}_{ij}$ soll diejenige Kraft sein, die auf den Massenpunkt i vom Massenpunkt j ausgeübt wird. Diese Aufteilung hängt offenbar von der Wahl der Systemgrenzen ab. Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}. \tag{147}$$

Wir bilden die $i-$Summe über die Bewegungsgleichungen (147):

$$\sum_i m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij}. \tag{148}$$

Die Doppelsumme im zweiten Term auf der rechten Seite läßt sich wie folgt umformen:

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} = \sum_{j,i} \boldsymbol{F}_{ji} = -\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij}. \tag{149}$$

Im ersten Schritt haben wir die Namen der Summationsvariabeln ausgetauscht, also $i \leftrightarrow j$, im zweiten Schritt Gebrauch gemacht vom dritten Newton'schen Prinzip, also

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}. \tag{150}$$

Aus (149) folgt, daß

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} = 0.$$

Damit können wir (148) in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_i, \qquad \boldsymbol{P} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i. \tag{151}$$

Wir erhalten eine Bilanz-Gleichung für den Gesamtimpuls: die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses $\boldsymbol{P}$ des Systems von Massenpunkten ist gegeben durch die Resultierende sämtlicher äußeren Kräfte. Wenn diese Resultierende verschwindet, ist der Gesamtimpuls erhalten.

Beispiel: In einem System von Massenpunkten m_i trage jede Masse außerdem eine elektrische Ladung q_i. Das System befinde sich in einem homogenen, äußeren elektrischen Feld mit der Feldstärke $\boldsymbol{E}$. Auf den Massenpunkt m_i wirkt dann die äußere Kraft

$$\boldsymbol{F}_i = q_i\,\boldsymbol{E}.$$

Die inneren Wechselwirkungen sind in diesem Fall die *Coulomb-Kräfte*

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}, \qquad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|.$$

Sie haben eine Struktur, die der Gravitationswechselwirkung sehr ähnlich ist. Da elektrische Ladungen aber im Gegensatz zur schweren Masse beide Vorzeichen haben, treten Anziehung und Abstoßung auf. Die Coulomb-Wechselwirkungen erfüllen das dritte Newton'sche Prinzip, so daß sie aus der Impuls-Bilanz herausfallen. Somit lautet die Impulsbilanz

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i q_i\,\boldsymbol{E} = Q\,\boldsymbol{E},$$

worin

$$Q := \sum_i q_i$$

die Gesamtladung ist. Der Impuls ist in diesem Beispiel erhalten, wenn die Gesamtladung verschwindet, das System also elektrisch neutral ist.

Schwerpunkt
Der Ortsvektor des *Schwerpunkts* eines Systems von Massenpunkten ist definiert durch

$$\boldsymbol{R} := \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i, \qquad M := \sum_i m_i. \tag{152}$$

M ist die Gesamtmasse des Systems. Aus (151) entnehmen wir, daß sich der Impuls durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit ausdrücken läßt,

$$\boldsymbol{P} = M\,\dot{\boldsymbol{R}},$$

und daß die Impulsbilanz in der Form

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\,\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{153}$$

geschrieben werden kann. (153) besagt, daß sich der Schwerpunkt unter dem Einfluß der resultierenden äußeren Kräfte wie ein Massenpunkt mit der Gesamtmasse M bewegt. Wenn die resultierenden äußeren Kräfte verschwinden, d.h., wenn Impulserhaltung gilt, bewegt sich der Schwerpunkt kräftefrei, also geradlinig und gleichförmig.

Galilei-Transformation
Bei einer Galilei-Transformation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_0 t, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0 \tag{154}$$

transformiert sich der Gesamtimpuls wie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' + \sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_0 \\ &= \boldsymbol{P}' + M\,\boldsymbol{v}_0, \end{aligned} \tag{155}$$

worin

$$\boldsymbol{P}' = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$$

der Gesamtimpuls im transformierten System ist. Zwar hängt der Wert des Gesamtimpulses vom verwendeten Inertialsystem ab, aber nicht die Erhaltung des Gesamtimpulses: wenn $\boldsymbol{P}$ =konstant in einem Inertialsystem, dann gilt das gemäß (155) für alle Inertialsysteme.

5.2 Bilanz des Drehimpulses

Die Bewegungsgleichungen (147) des Systems von Massenpunkten,

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij},$$

werden jeweils von links vektoriell mit $\boldsymbol{r}_i$ multipliziert und dann über i summiert:

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}. \tag{156}$$

Im zweiten Term auf der rechten Seite von (156) werden die folgenden Umformungen ausgeführt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij}. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir die Summe in zwei gleiche Teile aufgespalten und im zweiten Teil die Summationsindizes vertauscht, $i \leftrightarrow j$, im zweiten Schritt haben wir vom dritten Newtonschen Prinzip Gebrauch gemacht, $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. *Zusätzlich* zum dritten Newtonschen Prinzip setzen wir jetzt noch voraus, daß die Wechselwirkungskräfte $\boldsymbol{F}_{ij}$ die Richtung der Verbindungslinie $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ haben, also

$$(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0. \tag{157}$$

Wechselwirkungskräfte mit dieser Eigenschaft heißen *Zentralkräfte*. Gravitation und Coulombwechselwirkung sind Zentralkräfte, desgleichen natürlich die harmonische Wechselwirkung, die wir uns durch Federn zwischen den Massenpunkten dargestellt denken können. Für Zentralkräfte verschwindet also der Beitrag der inneren Wechselwirkungen auf der rechten Seite von (156).

Die linke Seite von (156) läßt sich als zeitliche Ableitung des *Drehimpulses* schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i &= \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}, \\ \boldsymbol{L} &:= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i, \end{aligned} \tag{158}$$

denn

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i m_i \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i \right)$$

und der erste Term in der Summe verschwindet. Damit erhält (156) die Form einer Bilanz für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{159}$$

Innere Wechselwirkungen, die Zentralkräfte sind, treten in der Drehimpulsbilanz nicht auf. Den Ausdruck auf der rechten Seite von (159) nennt man die Resultierende der äußeren *Drehmomente*, $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$ entsprechend das einzelne Drehmoment der Kraft $\boldsymbol{F}_i$.

Beispiel:
Für das System von elektrisch geladenen Massenpunkten im homogenen, äußeren elektrischen Feld, vgl. den vorhergehenden Abschnitt, tragen die Coulomb-Wechselwirkungen nicht zur Drehimpuls-Bilanz bei. Aus (159) folgt für dieses Beispiel dann

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p}_{ed} \times \boldsymbol{E},$$

worin

$$\boldsymbol{p}_{ed} := \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i$$

das *elektrische Dipolmoment* ist. Der Drehimpuls ist erhalten, wenn das elektrische Dipolmoment verschwindet.

Abhängigkeit vom Bezugssystem
In die Definition (158) des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$ gehen die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ der Massenpunkte direkt ein, nicht nur ihre Geschwindigkeiten wie beim Impuls. Der Drehimpuls ist also sogar von der Position des Bezugssystems abhängig. Wir untersuchen jetzt die Frage, ob sich die Drehimpuls-Erhaltung von einem Inertialsystem in andere Inertialsysteme überträgt. Unter Verwendung der Galilei-Transformation (154) aus dem vorhergehenden Abschnitt,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_0 t, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0 \tag{160}$$

drücken wir den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ durch den Drehimpuls $\boldsymbol{L}'$ im transformierten System aus:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \\
&= \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{v}_0 t \right) \times \left(\boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v}_0 \right) \\
&= \boldsymbol{L}' + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 t \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' \\
&= \boldsymbol{L}' + M \left(\boldsymbol{R}' - \dot{\boldsymbol{R}}' t \right) \times \boldsymbol{v}_0,
\end{aligned}$$

worin $\boldsymbol{R}'$ und $\dot{\boldsymbol{R}}'$ Ortsvektor und Geschwindigkeit des Schwerpunkts im transformierten System sind:

$$\boldsymbol{R}' = \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i', \qquad \dot{\boldsymbol{R}}' = \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i'.$$

Für die Drehimpuls-Bilanzen erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} - M\ddot{\boldsymbol{R}}' t \times \boldsymbol{v}_0 \\ &= \frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} + \boldsymbol{v}_0 t \times \sum_i \boldsymbol{F}_i \end{aligned} \tag{161}$$

unter Verwendung der Bewegungsgleichung (153) für den Schwerpunkt im transformierten System. Aus (161) lesen wir ab, daß sich $\boldsymbol{L}$ =konstant und $\boldsymbol{L}'$ =konstant genau dann gegenseitig bedingen, wenn sich der Schwerpunkt $\boldsymbol{R}'$ kräftefrei bewegt, oder äquivalent, wenn die Resultierende der äußeren Kräfte verschwindet, oder äquivalent, wenn Impulserhaltung gilt.

Schwerpunktsystem
Als *Schwerpunktsystem* bezeichnet man ein Bezugssystem, dessen Ursprung sich im Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten befindet und das sich translatorisch mit dem Schwerpunkt mitbewegt. Das Schwerpunktsystem ist im allgemeinen also kein Inertialsystem, es sei denn, daß sich der Schwerpunkt kräftefrei (geradlinig und gleichförmig) bewegt, bzw., daß Impulserhaltung gilt. Die Transformation zwischen einem Inertialsystem S und dem Schwerpunktsystem S' lautet

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}(t), \qquad \dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{R}}(t), \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}' = \ddot{\boldsymbol{r}} - \ddot{\boldsymbol{R}}(t), \tag{162}$$

wo $\boldsymbol{R}(t)$ die Bewegung des Schwerpunkts im Inertialsystem S beschreibt. Im Schwerpunktsystem S' gilt außerdem definitionsgemäß

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = 0, \qquad \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i' = 0, \qquad \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i' = 0. \tag{163}$$

Wir transformieren die Bilanz-Gleichung (159) für den Drehimpuls,

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

mittels der Transformation (162) in das Schwerpunktsystem:

$$\sum_i m_i \left(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R}\right) \times \left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i' + \ddot{\boldsymbol{R}}\right) = \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R}\right) \times \boldsymbol{F}_i.$$

Unter Beachtung von (163) folgt daraus nach Ausmultiplikation der Klammerausdrücke

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i' + M\boldsymbol{R} \times \ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i.$$

Da im Inertialsystem S

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

gilt, vgl. (153) im vorhergehenden Abschniitt, folgt weiter

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i, \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{L}' := \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \dot{\boldsymbol{r}}_i'. \tag{164}$$

Das bedeutet, daß die Drehimpuls-Bilanz im Schwerpunktsystem immer dieselbe Form wie im Inertialsystem besitzt, und zwar auch dann, wenn das Schwerpunktsystem kein Inertialsystem ist. Das bedeutet aber *nicht*, daß der Drehimpuls in S' erhalten wäre, wenn er im Inertialsystem erhalten ist.

5.3 Energie-Bilanz

Die Bewegungsgleichungen des Systems von Massenpunkten (147),

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij},$$

werden jeweils skalar mit $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ multipliziert und über i summiert:

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i + \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \dot{\boldsymbol{r}}_i. \tag{165}$$

Auf der linken Seite verwenden wir die Umformung

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2\right),$$

$\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i$, die uns bereits aus dem Abschnitt 4.2, Gl. (10), bekannt ist. Wir erhalten dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2\right) = \sum_i \boldsymbol{F}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i + \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \dot{\boldsymbol{r}}_i. \tag{166}$$

Auf der rechten Seite stehen die Summen der Leistungen der äußeren und inneren Kräfte. Im zweiten Term führen wir eine Umformung nach dem Schema des vorhergehenden Abschnitts durch:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ji} \dot{\boldsymbol{r}}_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{r}}_j\right) \end{aligned} \tag{167}$$

Die bereits im vorhergehenden Abschnitt gemachte Annahme, daß die inneren Kräfte $\boldsymbol{F}_{ij}$ Zentralkräfte sind, also

$$(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0,$$

wollen wir auch hier übernehmen. Wir schreiben diese Annahme in der äquivalenten Form

$$\boldsymbol{F}_{ij} = f_{ij} \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}, \tag{168}$$

wo f_{ij} ein Skalar ist, der noch von $\boldsymbol{r}_i$ und $\boldsymbol{r}_j$ abhängen kann. Allerdings soll $\boldsymbol{F}_{ij}$ in (168) das dritte Newtonsche Prinzip erfüllen, also $f_{ij} = f_{ji}$. Dann können wir die Umformung in (167) wie folgt weiterführen

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij}\dot{\boldsymbol{r}}_i &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|. \end{aligned} \tag{169}$$

Darin haben wir

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\dot{\boldsymbol{r}}$$

für $r = r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ verwendet, vgl. auch Abschnitt 4.2, Gleichung (21).

An dieser Stelle gehen wir in unseren Annahmen über die inneren Wechselwirkungen noch einen Schritt weiter: sie sollen nicht nur das dritte Newtonsche Prinzip erfüllen und Zentralkräfte sein, sondern der Betrag der Wechselwirkungskräfte, $|\boldsymbol{F}_{ij}|$, soll nur vom Abstand $r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ zwischen den wechselwirkenden Massenpunkten abhängen. Unter dieser Annahme können wir (168) in der Form

$$\boldsymbol{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij})\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}, \qquad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|, \tag{170}$$

schreiben. Das dritte Newtonsche Prinzip ist erfüllt, wenn die skalare Funktion $f_{ij}(r)$ symmetrisch in (i, j) ist, also

$$f_{ij}(r) = f_{ji}(r).$$

Mit dieser skalaren Funktion definieren wir jetzt ein Wechselwirkungspotential:

$$\varphi_{ij}(r) := -\int_{r_0}^{r} dr'\, f_{ij}(r'), \tag{171}$$

worin r_0 ein beliebiger Wert ist, so daß $\varphi_{ij}(r)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Mit Hilfe der Kettenregel folgt durch zeitliches Differenzieren aus (171)

$$\frac{d}{dt}\varphi_{ij}(r_{ij}) = -f_{ij}(r_{ij})\,\frac{d}{dt}r_{ij},$$

eingesetzt in (169) ergibt

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij}\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_{ij}(r_{ij})\right). \tag{172}$$

Diese Umformung setzen wir in (166) ein und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_{ij}(r_{ij})\right) = \sum_i \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{v}_i. \tag{173}$$

Diese Beziehung ist eine Bilanzgleichung für die Summe $T + W$ aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie W der inneren Wechselwirkungen,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T+W) &= \sum_i \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{v}_i, \qquad (174) \\ T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2, &\qquad W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \varphi_{ij}(r_{ij}). \end{aligned}$$

Im Unterschied zur Impuls- und Drehimpuls-Bilanz fallen die Beiträge der inneren Wechselwirkung zur Energie nicht heraus, lassen sich aber unter den gemachten Annahmen durch eine potentielle Energie W erfassen. Wenn auch die äußeren Kräfte ein Potential besitzen,

$$\boldsymbol{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_i, \ldots),$$

dann ist

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{v}_i = -\frac{d}{dt} V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_i, \ldots),$$

eingesetzt in (173) also

$$\frac{d}{dt}(T + W + V) = 0, \qquad T + V + W = \text{konstant}, \qquad (175)$$

d.h., es gilt dann sogar ein Erhaltungssatz für die Summe aus kinetischer Energie T, innerer Wechselwirkungsenergie W und der potentiellen Energie V der äußeren Kräfte.

Beispiel:

Für den harmonischen Oszillator und für die Gravitation als Wechselwirkungskräfte entnehmen wir die Ausdrücke $\varphi_{ij}(r_{ij})$ für die entsprechenden Wechselwirkungsenergien aus dem Abschnitt 4.2. Für den harmonischen Oszillator ist

$$\varphi_{ij}(r_{ij}) = \frac{1}{2} k_{ij}\, r_{ij}^2,$$

worin die Kraftkonstante k_{ij} die Symmetrie-Beziehung

$$k_{ij} = k_{ji}$$

erfüllen soll, damit das dritte Newtonsche Prinzip erfüllt ist. Für die Gravitationswechselwirkung ist

$$\varphi_{ij}(r_{ij}) = -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

5.4 Virialsatz

Wir schließen an den Beispielen am Ende des vorhergehenden Abschnitts an, in denen wir die Wechselwirkungspotentiale für den harmonischen Oszillator und für die Gravitation angegeben hatten. Diese lauten

$$\text{harm. Oszillator:} \qquad \varphi_{ij}(r) = \frac{1}{2} k_{ij} r^2, \tag{176}$$

$$\text{Gravitation:} \qquad \varphi_{ij}(r) = -\gamma \frac{m_i m_j}{r}, \tag{177}$$

worin wir die Abstandsvariable mit r statt r_{ij} bezeichnet haben. Diese beiden Potentiale sind *homogen*, d.h., es gilt

$$\varphi_{ij}(\lambda r) = \lambda^k \varphi_{ij}(r) \tag{178}$$

für beliebige λ und $k = 2$ für den harmonischen Oszillator, $k = -1$ für die Gravitation. Allgemein bezeichnet man Funktionen mit der Eigenschaft (178) als homogen *vom Grade k*. Wir drücken die Homogenitätseigenschaft (178) in einer anderen Form aus, indem wir (178) nach λ differenzieren,

$$r\, \varphi'_{ij}(\lambda r) = k\, \lambda^{k-1}\, \varphi_{ij}(r),$$

und anschließend $\lambda = 1$ setzen:

$$r\, \varphi'_{ij}(r) = k\, \varphi_{ij}(r). \tag{179}$$

Hierin bedeutet $\varphi'_{ij}(r)$ die Ableitung nach r. (179) ist der *Eulersche Satz* für homogene Funktionen, hier in der Version für Funktionen einer Variabeln.

Wir wenden den Eulerschen Satz auf homogene Wechselwirkungspotentiale vom Grade k an, um den in der statistischen Physik wichtigen *Virialsatz* zu beweisen. Zunächst formen wir den Ausdruck für die kinetische Energie T eines Systems von Massenpunkten wie folgt um:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{p}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{r}_i \right) - \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{r}_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \end{aligned} \tag{180}$$

Wir verfolgen den Wert der kinetischen Energie T in (180) über eine Zeitspanne von $t = 0$ bis $t = \tau$ während einer beliebigen Bewegung des Systems. Aus der Lösung der Bewegungsgleichungen werden dann $T, \boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, \boldsymbol{p}_i, \dot{\boldsymbol{p}}_i$ Funktionen der Zeit: $T = T(t), \ldots$. Wir bilden *zeitliche Mittelwerte* gemäß der Definition

$$\bar{T} := \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\, T(t).$$

Mit dieser Definition erhalten wir aus (180)

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{p}_i(\tau) \boldsymbol{r}_i(\tau) - \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{p}_i(0) \boldsymbol{r}_i(0) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \overline{\sum_i \boldsymbol{r}_i \dot{\boldsymbol{p}}_i} \end{aligned} \tag{181}$$

Wir nehmen an, daß die Bewegungen der Massenpunkte *beschränkt* sind, d.h., daß die Orte $\boldsymbol{r}_i$ und Impulse $\boldsymbol{p}_i$ bei $\tau \to \infty$ endlich bleiben. Dann verschwindet der Grenzwert im ersten Term auf der rechten Seite von (181), und wir erhalten

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \boldsymbol{r}_i \dot{\boldsymbol{p}}_i} \tag{182}$$

Wir nehmen weiter an, daß sich die Massenpunkte des Systems ausschließlich unter der Einwirkung *innerer* Wechselwirkungen bewegen. Diese inneren Wechselwirkungen sollen Zentralkräfte sein und Potentiale $\varphi_{ij}(r)$ besitzen. Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten dann

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}_i &= \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}, \\ \boldsymbol{F}ij = f_{ij}(r_{ij})\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}, &\qquad f_{ij}(r_{ij}) = -\varphi'_{ij}(r_{ij}), \end{aligned} \tag{183}$$

vgl. vorhergehenden Abschnitt. Damit wird

$$\begin{aligned} \sum_i \boldsymbol{r}_i \dot{\boldsymbol{p}}_i &= \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{F}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\boldsymbol{F}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} r_{ij} f_{ij}(r_{ij}) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j} r_{ij}\varphi'_{ij}(r_{ij}). \end{aligned} \tag{184}$$

An dieser Stelle machen wir von der Annahme Gebrauch, daß das Wechselwirkungspotential $\varphi_{ij}(r)$ homogen vom Grade k sein soll. Unter Verwendung von (179) in der letzten Zeile von (184) erhalten wir

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{k}{2}\sum_{i,j} \varphi_{ij}(r_{ij}) = -k\,W, \tag{185}$$

wobei W wiederum die gesamte potentielle Energie der Wechselwirkungen ist. Wir setzen (185) in den Ausdruck (182) für den Mittelwert $\bar{T}$ ein und erhalten

$$2\bar{T} = k\,\bar{W}. \tag{186}$$

Diese Beziehung ist der *Virialsatz*.

5.5 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

In einem System von N Massenpunkten können einige der zunächst $f = 3N$ Freiheitsgrade durch *Zwangsbedingungen* eingeschränkt sein.

Beispiele:

1. Bewegung in einer Ebene.
   Alle Massenpunkte m_i, $i = 1, 2, \ldots N$, sind in ihren Bewegungen an eine Ebene gebunden, die sich selbst wiederum bewegen kann. Geometrische Beschreibung der Punkte auf der Ebene mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}$:

   $$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)) = 0.$$

   Hier ist $\boldsymbol{r}_0(t)$ der Ortsvektor eines bestimmten Punkts der Ebene und $\boldsymbol{a}$ der Normalenvektor der Ebene, d.h., die Ebene steht senkrecht auf $\boldsymbol{a}$. Die Ebene bewegt sich translatorisch mit $\boldsymbol{r}_0(t)$, behält also ihre Orientierung senkrecht zu $\boldsymbol{a}$. Die Zwangsbedingungen für die Massenpunkte auf dieser Ebene lauten dann

   $$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0(t)) = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots, N.$$

   Dieses sind $m = N$ unabhängige, skalare Zwangsbedingungen. Die verbleibende Anzahl von Freiheitsgraden ist

   $$f = 3N - m = 3N - N = 2N.$$

2. Der starre Körper.
   Die Massenpunkte m_i, $i = 1, 2, \ldots N$, in einem starren Körper haben paarweise konstante Abstände:

   $$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| - l_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, 2 \ldots, N.$$

   Diese Zwangsbedingungen sind nicht unabhängig: hat nämlich ein Punkt zu drei verschiedenen Punkten des starren Körpers konstante Abstände, dann hat er zu jedem Punkt des starren Körpers einen konstanten Abstand. Es ist in diesem Fall einfacher, die Anzahl der Freiheitsgrade f positiv abzuzählen. Für $N = 1$, also den Massenpunkt, ist $f = 3$. Für $N = 2$, eine "Hantel", ist $f = 5$, weil einer der beiden Punkte 3 Freiheitsgrade besitzt und der andere Punkt sich dann noch auf einer Kugelschale um den ersten Punkt als Mittelpunkt bewegen kann, also zu den 3 Freiheitsgraden noch zwei weitere hinzukommen. Für $N \geq 3$ ist $f = 6$, denn ein dritter Punkt kann sich noch auf einem Kreis um eine Achse durch die beiden ersten Punkte bewegen, entsprechend einem weiteren Freiheitsgrad. Für mehr als 3 Punkte entstehen offensichtlich keine weiteren Freiheitsgrade in einem starren Körper.

Wir verallgemeinern diese beiden Beispiele und schreiben *holonome Zwangsbedingungen* in der Form

$$A_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots m. \tag{187}$$

Diese Zwangsbedingungen sollen *unabhängig* sein, d.h., keine der m Bedingungen in (187) soll aus den übrigen folgen, was für das zweite unserer obigen Beispiele nicht zutraf. Unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit ist offensichtlich $f = 3N - m$. Im zweiten Beispiel ist also die Anzahl m von unabhängigen Zwangsbedingungen für $N \geq 3$ offenbar gerade $m = 3N - 6$.

Die Bahnen der Massenpunkte, $\boldsymbol{r}_i(t)$, $i = 1, 2 \ldots, N$, des Systems sollen die Zwangsbedingungen (187) *identisch* erfüllen, d.h., es soll gelten

$$A_\mu(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t), t) = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots m \tag{188}$$

für alle Zeiten t. Die totale Zeitableitung von (188) ergibt dann

$$\frac{dA_\mu(\ldots)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}_{\mu i} \boldsymbol{v}_i + A_{\mu 0} = 0, \tag{189}$$

worin

$$\boldsymbol{A}_{\mu i} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} A_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$$

im Sinne eines Gradienten nach $\boldsymbol{r}_i$ und

$$A_{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$$

im Sinne einer *partiellen* Zeitableitung, bei der nur eine explizite Zeitabhängigkeit in $A_\mu(\ldots, t)$ differenziert wird, nicht längs der Bahn der Massenpunkte. Man kann (189) auch differentiell in der Form

$$dA_\mu = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}_{\mu i} d\boldsymbol{r}_i + A_{\mu 0} dt = 0, \tag{190}$$

schreiben. Zur Bestimmung der Bahnen $\boldsymbol{r}_i(t)$, $i = 1, 2 \ldots, N$, der Massenpunkte sind die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{X}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots N, \tag{191}$$

vgl. (145) im Abschnitt 5.1, nach Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{r}_i(t_0), \quad \dot{\boldsymbol{r}}_i(t_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

unter den Nebenbedingungen (188) bzw. (189) zu lösen. Natürlich müssen auch die Anfangsbedingungen die Zwangsbedingungen bereits erfüllen.

Es gibt auch Zwangsbedingungen, die *nur* in der zeitlich differenzierten Form

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\mu i} \boldsymbol{v}_i + a_{\mu 0} = 0, \tag{192}$$

bzw. in der differentiellen Form

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\mu i} d\boldsymbol{r}_i + a_{\mu 0} dt = 0 \tag{193}$$

angebbar sind. Die präzise Formulierung lautet: es gibt keine Funktion $f_\mu = f_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$, so daß mit (193) auch

$$\sum_{i=1}^{N} f_\mu \boldsymbol{a}_{\mu i} \boldsymbol{v}_i + f_\mu a_{\mu 0} = 0$$

gilt und eine Funktion $A_\mu = A_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$ existiert, so daß

$$f_\mu \boldsymbol{a}_{\mu i} = \frac{\partial A_\mu}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \qquad f_\mu a_{\mu 0} = \frac{\partial A_\mu}{\partial t}.$$

Eine solche Zwangsbedingung, die nur differenziert (nach der Zeit) bzw. nur differentiell formuliert werden bzw. nicht integriert werden kann, heißt *nicht-holonom*. Durch nicht-holonome Zwangsbedingungen sind nur die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i$ bzw. die Bahndifferentiale $d\boldsymbol{r}_i$ eingeschränkt, nicht jedoch die Orte der Bahn. Unter geeigneten Anfangsbedingungen darf die Bahn jeden $3N-$dimensionalen Ort $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots \boldsymbol{r}_N$ erreichen können. Beispiele für nicht-holonome Zwangsbedingungen sind Rad- und Kufenfahrzeuge, die zwar jeden Punkt erreichen können, momentan aber der in diesem Augenblick eingestellten Fahrtrichtung folgen müssen. Natürlich können in einem System von Massenpunkten auch gleichzeitig holonome und nicht-holonome Zwangsbedingungen auftreten.

Die Lösung von Bewegungsgleichungen (191) unter holonomen bzw. nicht-holonomen Zwangsbedingungen erweist sich als außerordentlich schwierig, wenn die Zwangsbedingungen *geometrisch*, d.h., in der Form (189) bzw. (192), vorgegeben sind. Wir wechseln deshalb zu einer physikalischen Formulierung von Zwangsbedingungen, indem wir annehmen, daß die Zwangsbedingungen äquivalent durch *Zwangskräfte* beschreibbar sind. Das soll bedeuten, daß die Einhaltung der holonomen oder nicht-holonomen Zwangsbedingungen durch Zwangskräfte $\boldsymbol{Z}_i$ bewirkt werden können, die additiv zu den eingepräften Kräften $\boldsymbol{X}_i$ in den Bewegungsgleichungen (191) hinzutreten:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{Z}_i. \tag{194}$$

Wir werden im folgenden Abschnitt eine grundsätzliche Annahme über die Zwangskräfte machen und so zu einer allgemeinen Formulierung der Mechanik der Systeme von Massenpunkten kommen.

5.6 Das d'Alembertsche Prinzip

Wir werden in diesem Abschnitt eine sehr allgemeine Aussage über Zwangskräfte formulieren, das sogenannte d'Alembertsche Prinzip. Dieses Prinzip ist im allgemeinen nicht besonders gut geeignet, um spezielle Probleme der Mechanik zu lösen, obwohl auch das möglich ist, wie wir an einem Beispiel sehen werden. Die eigentliche Bedeutung des d'Alembertschen Prinzips liegt darin, daß es einerseits physikalisch anschaulich begründet werden kann, andererseits aber als Ausgangspunkt für andere, sehr allgemeine und nicht unmittelbar anschauliche Formulierungen der Mechanik dienen kann.

Wir benötigen zunächst zwei neue Begriffe, die im weiteren Verlauf der Mechanik noch häufig auftreten werden, die sogenannten *realen* und *virtuellen Variationen*. Wir beginnen mit den realen Variationen. Wir nehmen an, daß wir aus den Bewegungsgleichungen für ein System von Massenpunkten, möglicherweise unter Zwangsbedingungen bzw. unter der Einwirkung von Zwangskräften, die Bahnen $\boldsymbol{r}_i(t)$ für $i = 1, 2, \ldots, N$ nach Vorgabe von Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}_i(t_0), \boldsymbol{v}_i(t_0)$ berechnet haben. Dann bezeichnen wir die Bahndifferentiale

$$d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{v}_i \, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{195}$$

als *reale* Variationen. Die realen Variationen sind also differentielle Ausschnitte aus Bahnen des Systems, die tatsächlich nach Vorgabe entsprechender Anfangsbedingungen durchlaufen werden können. Da Bahnen den Zwangsbedingungen des Systems unterliegen, erfüllen die realen Variationen die entsprechenden differentiellen Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\mu i}\, d\boldsymbol{r}_i + a_{\mu 0}\, dt = 0, \qquad M = 1, 2, \ldots, m. \tag{196}$$

Diese Formulierung soll hier holonome wie nicht-holonome Zwangsbedingungen erfassen, d.h., die $\boldsymbol{a}_{\mu i}, a_{\mu 0}$ sollen, möglicherweise nach Multiplikation mit einer Funktion $f_\mu(\ldots)$, als Gradienten einer holonomen Zwangsbedingung $A_\mu(\ldots)$ darstellbar sein können, vgl. vorhergehenden Abschnitt.

Die *virtuellen* Variationen definieren wir in einem Gedankenexperiment. Wir denken uns die Bewegung des Systems von Massenpunkten angehalten und bezeichnen die Gesamtheit von differentiellen Änderungen $\delta\boldsymbol{r}_i$ der Positionen der Massenpunkte, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind, als virtuelle Variationen, oft auch virtuelle "Verrückungen" genannt. Die virtuellen Variationen sind also im allgemeinen *keine* Ausschnitte aus realen Bahnen, was man auch durch

$$\delta t = 0 \tag{197}$$

charakterisiert. Damit ist auch bereits klar, daß die Erfüllung der Zwangsbedingungen durch die virtuellen Variationen im Gegensatz zu (196) durch

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\mu i}\, \delta\boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, M. \tag{198}$$

zu formulieren ist. Wir verdeutlichen den Unterschied zwischen realer und virtueller Verrückung an einem Beispiel: ein Massenpunkt m bewege sich (reibungsfrei) auf einer geradlinigen Schiene, die auf einer Achse befestigt ist und sich um diese Achse in einer horizontalen Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht, vgl. Abbildung 10.
Die reale Variation von (1) nach (2) $d\boldsymbol{r}$ setzt sich vektoriell zusammen aus einer azimutalen Drehung der Schiene um den Winkel ωdt und einer radialen Änderung ds des Abstandes von m von der Achse. Die virtuelle Variation $\delta\boldsymbol{r}$ von (1) nach (2) hat keine azimutale Komponente, weil die Zeit festgehalten wird: $\delta t = 0$.

Zur Formulierung des d'Alembertschen Prinzips gehen wir zurück auf die Bewegungsgleichung (194) im vorhergehenden Abschnitt, die wir in der Form

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{Z}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

schreiben und in der die $\boldsymbol{X}_i$ die eingeprägten Kräfte und die $\boldsymbol{Z}_i$ die Zwangskräfte sind. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt m_i skalar mit seiner virtuellen Variation $\delta\boldsymbol{r}_i$ und summieren über $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i)\, \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i \delta\boldsymbol{r}_i. \tag{199}$$

Abbildung 10: Reale (links) und virtuelle (rechts) Variation

Im Abschnitt 4.2 hatten wir den Ausdruck $\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}$ als Arbeit der Kraft $\boldsymbol{F}$ längs des Bahndifferentials $d\boldsymbol{r}$ kennengelernt. In der Sprechweise dieses Abschnitts müssen wir präzisieren, daß $\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}$ eine *reale* Arbeit ist, wenn $d\boldsymbol{r}$ ein reales Bahndifferential ist. In Analogie ist dann $\boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i$ die *virtuelle* Arbeit der Kraft $\boldsymbol{F}_i$ längs der virtuellen Variation $\delta\boldsymbol{r}_i$ und $\boldsymbol{Z}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i$ die virtuelle Arbeit der Zwangskraft $\boldsymbol{Z}_i$ längs der virtuellen Variation $\delta\boldsymbol{r}_i$. Auf der rechten Seite von (199) steht also die Summe der virtuellen Arbeiten der Zwangskräfte. Es wird nun postuliert, daß diese Summe verschwinden soll:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i \delta\boldsymbol{r}_i = 0. \tag{200}$$

Daraus folgt dann das *d'Alembertsche Prinzip*

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{X}_i\right)\delta\boldsymbol{r}_i = 0. \tag{201}$$

Bevor wir das d'Alembertsche Prinzip durch Anwendungen erläutern, wollen wir noch auf das obige Postulat in (200) eingehen, nach dem die Summe der virtuellen Arbeiten der Zwangskräfte verschwinden soll. Man kann dieses Postulat auch als eine Definition von Zwangskräften auffassen, doch wollen wir wenigstens an Beispielen einsehen, daß eine solche Definition auch der physikalischen Anschauung entspricht. In dem Beispiel in der Abbildung 10 muß die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$, die die Masse an die Schiene bindet, offenbar stets senkrecht auf der Schienenrichtung stehen. Andererseits liegt die virtuelle Variation $\delta\boldsymbol{r}$ immer in Schienenrichtung, so daß $\boldsymbol{Z}\,\delta\boldsymbol{r} = 0$. Wir entnehmen der Abbildung 10 aber auch, daß die reale Arbeit $\boldsymbol{Z}\,d\boldsymbol{r}$ der Zwangskraft im allgemeinen *nicht* verschwindet. Wir können dieses Beispiel verallgemeinern. Die Bewegung einer Masse unterliege einer Zwangsbedingung $A(\boldsymbol{r}, t) = 0$. Diese Zwangsbedingung beschreibe eine 2-dimensionale Hyperfläche im 3-dimensionalen Raum. Für virtuelle Variationen $\delta\boldsymbol{r}$ innerhalb dieser Hyperfläche folgt dann

$$\delta A = \frac{\partial A(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}}\,\delta \boldsymbol{r} = 0,$$

d.h., der Gradient $\partial A/\partial \boldsymbol{r}$ steht überall senkrecht auf der Hyperfläche. Die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$, die die Einhaltung der Zwangsbedingung bewirken soll, muß aber ebenfalls stets senkrecht auf der Hyperfläche stehen, so daß

$$\boldsymbol{Z} = \lambda \frac{\partial A(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{Z}\,\delta \boldsymbol{r} = 0,$$

worin λ ein skalarer, möglicherweise $\boldsymbol{r}-$abhängiger Faktor ist. Für eine reale Variation $d\boldsymbol{r}$ innerhalb der Hyperfläche gilt dagegen

$$dA = \frac{\partial A(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r} + \frac{\partial A(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}dt = 0$$

und damit für die reale Arbeit der Zwangskraft

$$\boldsymbol{Z}\,d\boldsymbol{r} = \lambda \frac{\partial A(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r} = -\lambda \frac{\partial A(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}dt,$$

d.h., bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen leisten die Zwangskräfte im allgemeinen reale Arbeit.

Wir wollen jetzt noch den Fall diskutieren, daß in einem System von Massenpunkten m_i Zwangskräfte $\boldsymbol{Z}_{ij}$ auftreten, die paarweise konstante Abstände

$$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| - l_{ij} = 0$$

zwischen den Massenpunkten bewirken. Für die virtuellen Variationen gilt dann

$$\delta r_{ij} = \frac{\partial r_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_{ij}}\delta \boldsymbol{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}}\boldsymbol{r}_{ij}\,\delta \boldsymbol{r}_{ij} = 0. \tag{202}$$

Wir machen nun die physikalisch naheliegende Annahme, daß die Zwangskräfte $\boldsymbol{Z}_{ij}$ *Zentralkräfte* sind, also

$$\boldsymbol{Z}_{ij} = \lambda_{ij}\,\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}. \tag{203}$$

Aus dem dritten Newtonschen Prinzip folgt, daß $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$. Die resultierende Zwangskraft auf den Massenpunkt m_i lautet

$$\boldsymbol{Z_i} = \sum_j \boldsymbol{Z}_{ij} = \sum_j \lambda_{ij}\,\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}$$

und deren virtuelle Arbeit

$$\boldsymbol{Z}_i\,\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j \lambda_{ij}\,\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}\,\delta \boldsymbol{r}_i. \tag{204}$$

Dieser Ausdruck verschwindet im allgemeinen *nicht*. Bilden wir jedoch die $i-$Summe über die virtuellen Arbeiten in (204), so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_i \boldsymbol{Z}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i &= \sum_{i,j}\lambda_{ij}\,\frac{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}\,\delta\boldsymbol{r}_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_{ij}\,\frac{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j}{r_{ij}}\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_{ij}\,\delta r_{ij}=0, \end{aligned} \tag{205}$$

vgl. (202). In (205) haben wir die $i,j-$Summe unter Ausnutzung der Symmetrie $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$ nach dem früher bereits mehrfach verwendeten Schema symmetrisiert. Dieses Beispiel zeigt uns, daß im allgemeinen tatsächlich nur die Summe der virtuellen Arbeiten der Zwangskräfte verschwindet, nicht notwendig dagegen die virtuelle Arbeit einer einzelnen Zwangskraft.

Wir erläutern jetzt die Anwendung des d'Alembertschen Prinzips an zwei Beispielen:

Masse auf rotierender Schiene, vgl. Abbildung 10:
Wir nehmen an, daß die Schiene in einer horizontalen Ebene rotiert, so daß keine eingeprägte Kraft auftritt. Das d'Alembertsche Prinzip reduziert sich auf

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\,\delta\boldsymbol{r}=0. \tag{206}$$

Außerdem nehmen wir an, daß die Schiene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Dann läßt sich der Ortsvektor der Masse in der Form

$$\boldsymbol{r}=s\,\boldsymbol{a}(t) \tag{207}$$

schreiben, wo s der Abstand von der Achse ist und

$$\boldsymbol{a}(t)=\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1+\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2. \tag{208}$$

$\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ sind zwei kartesische Einheitsvektoren in der horizontalen Ebene. Aus (208) ist ersichtlich, daß

$$\dot{\boldsymbol{a}}(t)=\omega\,\boldsymbol{b}(t) \tag{209}$$

mit

$$\boldsymbol{b}(t)=-\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_1+\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_2, \tag{210}$$

woraus

$$\dot{\boldsymbol{b}}(t)=-\omega\,\boldsymbol{a}(t) \tag{211}$$

folgt. Aus (208) und (210) lesen wir ab, daß

$$\boldsymbol{a}(t)\,\boldsymbol{b}(t)=0. \tag{212}$$

Wir differenzieren (207) nach t und erhalten unter Verwendung der Produktregel und von (209)

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{s}\,\boldsymbol{a}(t)+s\,\dot{\boldsymbol{a}}(t)=\dot{s}\,\boldsymbol{a}(t)+\omega\,s\,\boldsymbol{b}(t),$$

Abbildung 11: Atwoodsche Fallmaschine

und analog

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\ddot{s} - \omega^2\, s\right) \boldsymbol{a}(t) + 2\,\omega\,\dot{s}\,\boldsymbol{b}(t). \tag{213}$$

Für die virtuelle Variation $\delta\boldsymbol{r}$ erhalten wir aus (207) wegen $\delta t = 0$

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta s\,\boldsymbol{a}(t). \tag{214}$$

Einsetzen in (206) ergibt zusammen mit (212)

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\,\delta\boldsymbol{r} = \left(\ddot{s} - \omega^2\, s\right)\delta s = 0,$$

und da die virtuelle Variation δs im übrigen beliebig ist, auch

$$\ddot{s} - \omega^2\, s = 0. \tag{215}$$

Dieses ist eine Bewegungsgleichung für den Abstand s der Masse von der Achse. Sie hat die allgemeine Lösung

$$s(t) = c_1\, e^{\omega t} + c_2\, e^{-\omega t},$$

d.h., die Masse bewegt sich im allgemeinen zeitlich exponentiell von der Achse weg.

Atwoodsche Fallmaschine, vgl. Abbildung 11:

Die beiden Massen m_1 und m_2 sollen sich nur in der vertikalen $z-$Richtung (nach oben positiv gezählt) bewegen können. Auf sie wirken als eingeprägte Kräfte die jeweiligen Schwerkräfte mit den $z-$Komponenten

$$X_1 = -m_1\, g, \qquad X_2 = -m_2\, g,$$

so daß das d'Alembertsche Prinzip hier

$$m_1(\ddot{z}_1 + g)\delta z_1 + m_2(\ddot{z}_2 + g)\delta z_2 = 0 \tag{216}$$

lautet. Die Zwangsbedingung lautet in diesem Fall, daß das Seil stets straff sein und eine konstante Länge haben soll, also

$$z_1 + z_2 = 0.$$

Diese Bedingung ist zeitunabhängig. Aus ihr folgt also sowohl für die reale Bewegung als auch für die virtuelle Variation

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0, \qquad \delta z_1 + \delta z_2 = 0.$$

Daraus eliminieren wir z.B. $\ddot{z}_2$ und δz_2. Einsetzen in (216) führt auf

$$[(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 + (m_1 - m_2)g]\,\delta z_1 = 0,$$

bzw., weil die virtuelle Variation δz_1 beliebig ist, $[\ldots] = 0$ und daraus

$$\ddot{z}_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{217}$$

6 Lagrange'sche Gleichungen

Wir werden in diesem Kapitel eine Formulierung der klassischen Mechanik kennenlernen, die sich einerseits hervorragend eignet, um mechanische Probleme elegant zu lösen, und andererseits eine Ausgangsbasis für weitere grundsätzliche Untersuchungen mechanischer Systeme und ebenso für noch andere Formulierungen bietet: die *Lagrange'schen Gleichungen* (2. Art). Bei der Herleitung der Lagrange'schen Gleichungen werden wir auf das d'Alembert'sche Prinzip zurückgreifen, das wir im vorhergehenden Kapitel kennengelernt haben.

6.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Wir werden in diesem Kapitel ausschließlich *holonome* Zwangsbedingungen

$$A_\mu(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N,\, t) = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m \tag{218}$$

betrachten. Darin ist N wieder die Anzahl von Massenpunkten im System. Um die Bewegungsgleichungen

$$m_i\, \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{X}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{219}$$

mit den eingeprägten Kräften $\boldsymbol{X}_i$ unter den Nebenbedingungen (218) zu lösen, könnte man versuchen, aus den m Gleichungen (218) m der insgesamt $3\,N$ Komponenten der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ zu eliminieren und sie durch die restlichen $f = 3\,N - m$ Komponenten darzustellen. Eine solche Darstellung hätte die Form

$$x_\mu = f_\mu(x_{m+1},\, x_{m+2} \ldots x_{3\,N}), \qquad \mu = 1, 2 \ldots, m,$$

worin wir die $3\,N$ Komponenten der Ortsvektoren als x_1 bis $x_{3\,N}$ durchgezählt haben. Die $f = 3\,N - m$ Komponenten $x_{m+1}, \ldots x_{3\,N}$ würden dann als die unabhängigen Variabeln behandelt werden, und das $3\,N$-dimensionale System (219) der Bewegungsgleichungen wäre auf ein f-dimensionales System reduziert. Dieser Gedanke der Elimination läßt sich verallgemeinern. Statt der f unabhängigen kartesischen Komponenten $x_{m+1},\, \ldots x_{3\,N}$ suchen wir uns irgendwelche *verallgemeinerten Koordinaten* $q_1,\, q_2, \ldots q_f$, so daß

1. die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ durch die $q_1,\, q_2, \ldots q_f$ eindeutig dargestellt werden,

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1,\, q_2, \ldots q_f, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{220}$$

   und

2. diese Darstellung bzw. Transformation die Zwangsbedingungen (218) identisch erfüllt, also

$$A_\mu(\boldsymbol{f}_1(q_1, \ldots q_f, t), \ldots \boldsymbol{f}_N(q_1, \ldots q_f, t)) \equiv 0 \tag{221}$$

   für alle $q_1,\, q_2, \ldots q_f, t$.

Die verallgemeinerten Koordinaten $q_1,\, q_2, \ldots q_f$ sind nicht notwendig mehr kartesische Koordinaten, sondern können z.B. auch Winkel, Bogenlängen, ... sein.

Abbildung 12: Masse auf einem Kreis.

Beispiele:

1. Bewegung einer Masse auf einer translatorisch bewegten Ebene, vgl. Abschnitt 5.5. Diese Zwangsbedingung hatten wir dort als

$$\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)) = 0$$

   formuliert, worin $\boldsymbol{r}_0(t)$ ein beliebig bewegter Punkt der Ebene ist, deren Richtung durch einen konstanten Normalenvektor $\boldsymbol{a}$ festgelegt war. Die Masse m soll sich auf dieser Ebene bewegen können und hat dort $f = 2$ Freiheitsgrade. Wir wählen q_1, q_2 hier als kartesische Koordinaten eines in der Ebene liegenden und mit der Ebene mitbewegten, 2-dimensionalen Koordinatensystems $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ mit dem Ursprung in dem Punkt $\boldsymbol{r}_0(t)$, so daß die Transformation (220) hier

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(t) + q_1\, \boldsymbol{e}'_1 + q_2\, \boldsymbol{e}'_2$$

   lautet. Die Zwangsbedingung ist identisch erfüllt, weil $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ in der Ebene liegen sollten, also $\boldsymbol{e}'_1 \boldsymbol{a} = 0$ und $\boldsymbol{e}'_2 \boldsymbol{a} = 0$.

2. Bewegung einer Masse m auf einem ruhenden Kreis in der x_1, x_2-Ebene mit dem Radius R. Hier ist $f = 1$, und wir wählen die verallgemeinerte Koordinate q als den Winkel φ, den der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ der Masse mit der $\boldsymbol{e}_1$-Achse einschließt, vgl. Abbildung 12. Es ist dann

$$\boldsymbol{r} = R\ (\cos q\, \boldsymbol{e}_1 + \sin q\, \boldsymbol{e}_2)\,.$$

3. Freie Bewegung eines starren Körpers, $f = 6$. Wir wählen q_1, q_2, q_3 als die kartesischen Koordinaten des Schwerpunkts S, q_4, q_5 als die Richtungswinkel einer körperfesten Achse, die durch S und einen weiteren Punkt A des Körpers geht, und q_6 als den Drehwinkel um die Achse $\vec{SA}$.

Da wir auf das d'Alembert'sche Prinzip zurückgreifen wollen, müssen wir zunächst die virtuellen Verrückungen $\delta \boldsymbol{r}_i$ auf die entsprechenden virtuellen Verrückungen δq_j der verallgemeinerten Koordinaten umrechnen. Aus (220) folgt dafür

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j, \tag{222}$$

weil $\delta t = 0$. Für die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i$ folgt dagegen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{f}_i(q_1,\, q_2, \ldots q_f, t) \\ &= \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{223}$$

Während die $\boldsymbol{r}_i$ in (220) als Funktionen von $q_1, \ldots, q_f, t$ dargestellt werden, sind die durch (223) dargestellten Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i$ offensichtlich Funktionen von $q_1, \ldots, q_f, t$ und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f$:

$$\boldsymbol{v}_i =: \boldsymbol{g}_i(q_1, \ldots, q_f,\, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t). \tag{224}$$

Aus (223) und (224) lesen wir ab, daß

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\, \boldsymbol{g}_i(q_1, \ldots, q_f,\, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) = \frac{\partial}{\partial q_j}\, \boldsymbol{f}_i(q_1,\, q_2, \ldots q_f, t) \tag{225}$$

im Sinne von partiellen Ableitungen: die q_j und $\dot{q}_j$ werden hier als formale Variabeln aufgefaßt. Auf diese Beziehung werden wir mehrfach zurückgreifen. Wir benutzen dann die Kurzschreibweise

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}, \tag{226}$$

deren präzise Bedeutung aber immer durch (225) gegeben sein soll. Wir werden später noch eine weitere formale Beziehung dieser Art verwenden, nämlich

$$\frac{d}{dt}\, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}. \tag{227}$$

Zum Nachweis dieser Beziehung gehen wir wieder auf (220) zurück,

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1,\, q_2, \ldots q_f, t),$$

und bilden zunächst die partielle Ableitung nach q_j:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\, \boldsymbol{f}_i(\ldots).$$

Durch Ableitung d/dt folgt daraus

$$\frac{d}{dt}\, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial q_j\, \partial q_k}\, \boldsymbol{f}_i(\ldots)\, \dot{q}_k + \frac{\partial^2}{\partial q_j\, \partial t}\, \boldsymbol{f}_i(\ldots). \tag{228}$$

Andererseits folgt aus (223), 2. Zeile, wenn wir dort die Summationsvariable j in k umbenennen und dann partiell nach q_j ableiten, für $\partial \boldsymbol{v}_i/\partial q_j$ derselbe Ausdruck wie auf der rechten Seite von (228), womit die Behauptung in (227) bewiesen ist.

Wir müssen schließlich noch die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte durch die virtuellen Verrückungen der verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken. Unter Verwendung von (222) ergibt sich

$$\sum_i \boldsymbol{X}_i \, \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j \left(\sum_i \boldsymbol{X}_i \, \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial q_j} \right) \, \delta q_j = \sum_j Q_j \, \delta q_j, \tag{229}$$

worin die Q_j definiert sind als

$$Q_j := \sum_i \boldsymbol{X}_i \, \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial q_j} \tag{230}$$

und *verallgemeinerte Kräfte* genannt werden. Wenn die eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{X}_i$ konservativ sind, d.h., wenn ein Potential V existiert, so daß

$$\boldsymbol{X}_i = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \, V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N), \tag{231}$$

dann läßt sich das Potential V mit der Transformation (220) als Funktion der $q_1, \ldots, q_f, t$ darstellen:

$$\begin{aligned} V &= V\left(\boldsymbol{f}_1(q_1, q_2, \ldots q_f, t), \ldots \boldsymbol{f}_N(q_1, q_2, \ldots q_f, t)\right) \\ &=: \tilde{V}(q_1, \ldots, q_f, t), \end{aligned} \tag{232}$$

und es gilt

$$-\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \, \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial q_j} = \sum_i \boldsymbol{X}_i \, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = Q_j, \tag{233}$$

vgl. (230). Formal tritt $\tilde{V}$ als ein Potential für die verallgemeinerten Kräfte auf und kann explizit zeitabhängig werden.

6.2 Lagrange'sche Gleichungen

Ausgangspunkt für die Herleitung der Lagrange'schen Gleichungen (2. Art) ist das d'Alembert'sche Prinzip, vgl. Abschnitt 5.6, das wir sogleich unter Benutzung von (229) umformen:

$$\sum_i m_i \, \ddot{\boldsymbol{r}}_i \, \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{X}_i \, \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j Q_j \, \delta q_j. \tag{234}$$

Auf der linken Seite setzen wir ein

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \, \delta q_j,$$

vgl. (222), und erhalten

$$\sum_i m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_j \left(\sum_i m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\,\delta q_j. \tag{235}$$

In dem Ausdruck in (...) auf der rechten Seite von (235) führen wir die folgende Umformung durch:

$$\sum_i m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\,\sum_i m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right). \tag{236}$$

Im ersten Term auf der rechten Seite von (236) verwenden wir

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

vgl. (226), so daß

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\,\sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_i^2\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},\end{aligned} \tag{237}$$

worin T die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{1}{2}\,\sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_i^2.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (236) wird mit der Beziehung (227) umgeformt:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) &= \sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j}\,\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2\right) = \frac{\partial T}{\partial q_j}.\end{aligned} \tag{238}$$

(237) und (238) in (236) eingesetzt führt auf

$$\sum_i m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \tag{239}$$

worin

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} := \frac{d}{dt}\,\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

bedeuten soll. Das Ergebnis (239) der obigen Umformungen wird nun in (235) eingesetzt, so daß sich das d'Alembert'sche Prinzip von (234) in

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \, \delta q_j \tag{240}$$

transformiert. Zum Unterschied zu den virtuellen Variationen $\delta \boldsymbol{r}_i$ der kartesischen Koordinaten sind die virtuellen Variationen δq_j der verallgemeinerten Koordinaten nach Konstruktion frei und unabhängig. Das bedeutet, daß die Terme in (240) für jedes einzelne δq_j übereinstimmen müssen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{241}$$

für $j = 1, 2, \ldots, f$. Dieses sind die *Lagrange'schen Gleichungen* (2.Art) in ihrer allgemeinsten Form. Sie führen auf ein System von f Differentialgleichungen 2. Ordnung für die verallgemeinerten Koordinaten q_j, aus denen die Bahnen $q_j(t)$ nach Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$q_j(t_0) = q_{j,0}, \qquad \dot{q}_j(t_0) = \dot{q}_{j,0}$$

zu berechnen sind. Durch die Wahl der q_j sind die Zwangsbedingungen identisch erfüllt.

Wenn die eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{X}_i$ ein Potential besitzen, bzw., wenn gemäß (233)

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \tag{242}$$

lassen sich die Lagrange'schen Gleichungen (241) auch in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \tag{243}$$

schreiben. (Hier haben wir das Symbol $\tilde{V}$, das im vorhergehenden Abschnitt zur Unterscheidung von V als Funktion der q_j zum V als Funktion der $\boldsymbol{r}_i$ eingeführt wurde, zur Vereinfachung der Schreibweise wieder durch V ersetzt.) Diese Formulierung legt die Definition der *Lagrange-Funktion* L nahe:

$$L := T - V. \tag{244}$$

Da das Potential V nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, ist auch

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Die Lagrange'schen Gleichungen (244) für konservative Kräfte lassen sich also auch in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{245}$$

schreiben. Durch die Transformationen (220),

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1, \ldots, q_f, t),$$

und (223),

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial t},$$

im vorhergehenden Abschnitt wird die Lagrange-Funktion $L = T - V$ zu einer Funktion der q_j, $\dot{q}_j$ und t:

$$L = L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t). \tag{246}$$

Wie früher bereits erwähnt, sind die Ableitungen von L nach q_j und $\dot{q}_j$ als formale, partielle Ableitungen auszuführen, und die q_j und $\dot{q}_j$ gelten dabei als unabhängige Variabeln. Dagegen ist die Zeitableitung d/dt eine *totale* Zeitableitung: sie erfaßt sämtliche Zeitabhängigkeiten in den q_j bzw. $\dot{q}_j$.

6.3 Anwendungen der Lagrange'schen Gleichungen

Bei der Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur Lösung eines mechanischen Problems gehen wir nach dem folgenden Schema vor:

1. Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_f$, die die vorgegebenen Zwangsbedingungen identisch erfüllen. Aufstellung der Transformationsbeziehung

   $$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \tag{247}$$

   für $i = 1, 2, \ldots, N$.

2. Ausführung von

   $$\boldsymbol{v}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{248}$$

   für $i = 1, 2, \ldots, N$, worin

   $$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\ldots)}{\partial q_j}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\ldots)}{\partial t}.$$

   Daraus Berechnung der kinetischen Energie

   $$T = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, \boldsymbol{v}_i^2 = T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t). \tag{249}$$

3. Für die *konservativen* Kräfte wird aus dem Potential V als Funktion der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ durch Einsetzen der Transformationsbeziehung (247) ein V als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten gebildet:

   $$V = V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \qquad \Rightarrow \qquad V = V(q_1, \ldots, q_f, t). \tag{250}$$

Abbildung 13: Masse auf einer gedrehten Schiene.

4. Für die *nicht-konservativen* Kräfte werden die verallgemeinerten Kräfte Q_j formuliert:

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{X}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \tag{251}$$

5. Aufstellung der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{252}$$

für $j = 1, 2, \ldots, f$.

Beispiel: Freie Teilchen mit konservativen Kräften.
Da keine Zwangsbedingungen vorliegen, können die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ selbst als "verallgemeinerte Koordinaten" gewählt werden.

$$\begin{aligned}
L &= T - V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 - V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N), \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &\cong \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \\
\frac{\partial L}{\partial q_j} &\cong \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \boldsymbol{X}_i, \\
&\Rightarrow \quad m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{X}_i.
\end{aligned}$$

Beispiel: eine Masse m bewegt sich unter dem Einfluß einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft auf einer Schiene, die in einer Ebene senkrecht zur Erdoberfläche willkürlich gedreht wird, vgl. Abbildung 13.

1. $f = 1$ Freiheitsgrad, Wahl des Abstands der Masse m vom Drehpunkt als verallgemeinerte Koordinate q. Dann ist

$$\boldsymbol{r} = q\,\cos\alpha(t)\,\boldsymbol{e}_1 + q\,\sin\alpha(t)\,\boldsymbol{e}_3, \tag{253}$$

worin $\alpha(t)$ der willkürlich einstellbare Winkel als Funktion der Zeit t ist ("Zeitprogramm").

2.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= (\dot{q}\,\cos\alpha - q\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha)\;\boldsymbol{e}_1 + (\dot{q}\,\sin\alpha - q\,\dot{\alpha}\,\cos\alpha)\;\boldsymbol{e}_3, \qquad (254) \\ \boldsymbol{v}^2 &= (\dot{q}\,\cos\alpha - q\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha)^2 + (\dot{q}\,\sin\alpha - q\,\dot{\alpha}\,\cos\alpha)^2 \\ &= \dot{q}^2 + q^2\,\dot{\alpha}^2, \qquad (255) \end{aligned}$$

worin wir die Zeitvariable t in $\alpha = \alpha(t)$ zur Vereinfachung der Schreibweise fortgelassen haben. Das Ergebnis in (253) hätten wir natürlich auch direkt gewinnen können: es ist nämlich

$$\boldsymbol{v} = \dot{q}\,\boldsymbol{e}_q + q\,\dot{\alpha}\,\boldsymbol{e}_\alpha,$$

wo $\boldsymbol{e}_q$ und $\boldsymbol{e}_\alpha$ zwei radiale bzw. azimutale Einheitsvektoren sind, die senkrecht aufeinander stehen: $\boldsymbol{e}_q\,\boldsymbol{e}_\alpha = 0$. Aus (255) gewinnen wir

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\,\dot{\alpha}^2\right). \tag{256}$$

3. Die Erdanziehung ist eine konservative Kraft mit dem Potential

$$V = m\,g\,x_3 = m\,g\,\sin\alpha \tag{257}$$

4. Die Reibungskraft $\boldsymbol{X}_R = -R\,\boldsymbol{v}$ muß gemäß (251) umgerechnet werden. Zunächst folgt aus (253)

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q} = \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha\,\boldsymbol{e}_3. \tag{258}$$

Unter Benutzung dieser Beziehung und von $\boldsymbol{v}$ aus (254) folgt durch eine kurze, elementare Rechnung

$$Q = -R\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q} = -R\,\dot{q}. \tag{259}$$

5.

$$
\begin{aligned}
L &= T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\,\dot{\alpha}^2\right) - m\,g\,q\,\sin\alpha, && (260)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= m\,\dot{q}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\,\ddot{q}, && (261)\\
\frac{\partial L}{\partial q} &= m\,q\,\dot{\alpha}^2 - m\,g\,\sin\alpha, && (262)\\
\Rightarrow & \quad m\,\ddot{q} - m\,q\,\dot{\alpha}^2 + m\,g\,\sin\alpha = -R\,\dot{q},\\
\text{bzw.} & \quad m\,\ddot{q} + R\,\dot{q} - m\,q\,\dot{\alpha}^2 = -m\,g\,\sin\alpha && (263)
\end{aligned}
$$

Wir lösen diese Bewegungsgleichung für den Fall, daß der Winkel α mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha} = \omega$ gedreht wird, so daß $\alpha = \omega\,t$. Wir schreiben die Bewegungsgleichung (263) dann in der Form

$$\ddot{q} + 2\,\rho\,\dot{q} - \omega^2\,q = -g\,\sin\omega\,t, \tag{264}$$

mit $\rho = R/2\,m$. Dieses ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung und formen dazu nochmals um:

$$\ddot{q} + 2\,\rho\,\dot{q} - \omega^2\,q = Im\left\{-g\,e^{i\,\omega\,t}\right\}. \tag{265}$$

Diese Differentialgleichung ist der Imaginärteil der komplexen Gleichung

$$\ddot{z} + 2\,\rho\,\dot{z} - \omega^2\,z = -g\,e^{i\,\omega\,t}, \tag{266}$$

die wir mit dem Ansatz

$$z = A(\omega)\,e^{i\,\omega\,t}$$

lösen. Einsetzen in (266) ergibt

$$A(\omega) = \frac{g}{2\,\omega\,(\omega - i\,\rho)}.$$

Damit lautet die Lösung für z

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{g}{2\,\omega\,(\omega - i\,\rho)}\,e^{i\,\omega\,t} = \frac{g\,(\omega + i\,\rho)}{2\,\omega\,(\omega^2 + \rho^2)}\,e^{i\,\omega\,t}\\
&= \frac{g}{2\,\omega\,\sqrt{\omega^2 + \rho^2}}\,e^{i(\omega\,t + \varphi)} && (267)
\end{aligned}
$$

mit

$$\cos\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \rho^2}}.$$

Daraus erhalten wir die partikuläre Lösung q als

$$q = Im\,\{z\} = \frac{g}{2\,\omega\,\sqrt{\omega^2 + \rho^2}}\,\sin\left(\omega\,t + \varphi\right). \tag{268}$$

Die allgemeine Lösung q_0 der homogenen Version von (264),

$$\ddot{q}_0 + 2\,\rho\,\dot{q}_0 - \omega^2\,q_0 = 0,$$

gewinnen wir durch den Standard-Ansatz $q_0 = e^{\lambda\,t}$, der auf eine quadratische Gleichung für λ führt:

$$\lambda^2 + 2\,\rho\,\lambda - \omega^2 = 0,$$

deren Lösungen

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 &=& \sqrt{\omega^2+\rho^2} &-& \rho &>& 0 \\ \lambda_2 &=& -\sqrt{\omega^2+\rho^2} &-& \rho &<& 0 \end{array}\right\}. \tag{269}$$

sind. Also lautet die allgemeine Lösung für q schließlich

$$q(t) = \frac{g}{2\,\omega\,\sqrt{\omega^2+\rho^2}}\,\sin\left(\omega\,t+\varphi\right) + c_1\,e^{\lambda_1\,t} + c_2\,e^{\lambda_2\,t}. \tag{270}$$

Die c_1, c_2 sind aus den vorzugebenden Anfangsbedingungen zu bestimmen. Wenn dabei $c_1 \neq 0$, bewegt sich die Masse m exponentiell in der Zeit t nach außen, weil $\lambda_1 > 0$. Dieser Bewegung ist eine Oszillation mit der Frequenz ω überlagert. Wenn, bedingt durch die Anfangsbedingungen, $c_1 = 0$, dann oszilliert die Masse m gedämpft mit $t \to \infty$ in den Drehpunkt $q = 0$ hinein, doch ist diese Lage instabil: jede Fluktuation würde ein $c_1 \neq 0$ erzeugen.

Beispiel: zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich reibungsfrei und geradlinig auf einer Schiene und sind durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten k und der Ruhelänge l verbunden.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2, \\ V &= \frac{1}{2}\,k\,\left(x_2 - x_1 - l\right)^2, \\ L &= T - V = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\,k\,\left(x_2 - x_1 - l\right)^2. \end{aligned} \tag{271}$$

Es sind x_1, x_2 die Orte und $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ die Geschwindigkeiten von m_1 und m_2. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir die Schwerpunktslage und den Abstand der beiden Massen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{M}\,\left(m_1\,x_1 + m_2\,x_2\right) =: x_s, \\ q_2 &= x_2 - x_1 =: x, \end{aligned} \tag{272}$$

wo $M = m_1 + m_2$. Durch Umkehrung berechnen wir daraus

$$x_1 = x_s - \frac{m_2}{M}\,x, \qquad x_2 = x_s + \frac{m_1}{M}\,x,$$

entsprechend für die Geschwindigkeiten $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Einsetzen in die kinetische Energie T führt nach einer kurzen Rechnung auf

$$T = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2. \tag{273}$$

Hier ist m die *reduzierte Masse*

$$m := \frac{m_1\, m_2}{M}.$$

Die Lagrange-Funktion lautet also

$$L = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, k\, (x-l)^2. \tag{274}$$

Die Lagrange'sche Gleichung für die Koordinate x_s:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} = M\, \dot{x}_s, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_s} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} = M\, \dot{x}_s = \text{konstant}. \tag{275}$$

Wenn $\partial L/\partial q = 0$, bezeichnet man die Koordinate q als *zyklisch*. Es folgt dann offenbar immer ein Erhaltungssatz, hier die Erhaltung des Schwerpunkt- bzw. Gesamtimpulses.

Die Lagrange'sche Gleichung für die Koordinate x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\, \dot{x}, \qquad & \frac{\partial L}{\partial x} = -k\, (x-l), \\ \Rightarrow \qquad & m\, \ddot{x} = -k\, (x-l). \end{aligned} \tag{276}$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines Oszillators mit der Frequenz $\sqrt{k/m}$, der um die Ruhelage l der Feder schwingt und der der Schwerpunktsbewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $\dot{x}_s$ überlagert ist.

7 Invarianzen, Erhaltungssätze, Satz von Noether

In diesem Kapitel geht es nochmals um Erhaltungssätze für den Impuls, den Drehimpuls und für die Energie. Allerdings werden wir jetzt diese Erhaltungssätze mit bestimmten *Invarianzen* des physikalischen Systems verbinden. Die Entsprechung zwischen einer (kontinuierlichen) Invarianz eines Systems und einem Erhaltungssatz ist ein Grundmotiv in der Physik, das sogar als Ansatz für die Formulierung der Postulate der Quantentheorie dienen kann. Wir werden diese Entsprechung hier im Rahmen der Lagrange-Formulierung der Mechanik verstehen lernen.

7.1 Räumliche Translationsinvarianz und Impulserhaltung

Ein mechanisches System wird einer räumlichen Translation in der Richtung $\boldsymbol{n}$ um die Strecke x unterworfen. Wir nehmen an, daß $\boldsymbol{n}$ ein Richtungsvektor ist, so daß $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Diese Translation führt zu einer Verschiebung sämtlicher Ortsvektoren

$$\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{n}\, x.$$

Dabei bleiben alle systeminternen Abstände ungeändert. *Translationsinvarianz* bedeutet, daß das System insgesamt unter der Translation ungeändert bleibt, insbesondere bleibt seine Bewegungsgleichung ungeändert. Wenn das System keine externen Kräfte erfährt, bedeutet Translationsinvarianz, daß der physikalische Raum *homogen* ist, d.h., daß alle Orte im Raum die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzen.

Wenn ein System in der Richtung $\boldsymbol{n}$ translationsinvariant ist, kann die Verschiebungsgröße x als eine verallgemeinerte Koordinate $q_1 = x$ gewählt werden, weil die Verschiebung in $x-$Richtung voraussetzungsgemäß keiner Zwangsbedingung unterliegen soll. Für die Transformation von den verallgemeinerten Koordinaten auf die Ortsvektoren gilt dann

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1,\, q_2, \ldots,\, q_f, t) = \boldsymbol{n}\, x + \tilde{\boldsymbol{f}}_i(q_2, \ldots,\, q_f, t). \tag{277}$$

$\tilde{\boldsymbol{f}}_i$ beschreibt nur noch die Relativpositionen im System. Aus (277) folgt

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n}. \tag{278}$$

Damit gilt auch

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n}, \tag{279}$$

vgl. Abschnitt 6.1. Wenn alle im System auftretenden Kräfte **konservativ** sind, können wir die Bewegung des Systems durch Lagrange'sche Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{280}$$

für $j = 1, 2, \ldots, f$ ausdrücken. Translationsinvarianz bedeutet für die Lagrange-Funktion, daß (mit $q_1 = x$)

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \tag{281}$$

d.h., daß $q_1 = x$ zyklisch ist. Wir sehen sofort, daß dem ein *Erhaltungssatz*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad p_1 := \frac{\partial L}{\partial q_1} = \text{konstant} \tag{282}$$

für den *konjugierten* Impuls p_1 entspricht. Wir müssen jetzt noch klären, welche physikalische Bedeutung der konjugierte Impuls hat. Da das Potential V unabhängig von den Geschwindigkeiten ist, gilt auch $\partial L/\partial \dot{q}_1 = \partial T/\partial \dot{q}_1$ und somit

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i m_i\, \boldsymbol{v}_i\, \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_1} \\ &= \boldsymbol{n} \sum_i m_i\, \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{P}. \end{aligned} \tag{283}$$

Hier haben wir von (279) Gebrauch gemacht. Es ist

$$\boldsymbol{P} = \sum_i m_i\, \boldsymbol{v}_i$$

der Gesamtimpuls des Systems. Der gesuchte konjugierte Impuls p_1 ist die $\boldsymbol{n}-$Komponente des Gesamtimpulses $\boldsymbol{P}$. Translationsinvarianz in $\boldsymbol{n}-$Richtung impliziert also die Impulserhaltung in dieser Richtung.

Wenn in dem System auch *nicht-konservative* Kräfte auftreten können, dann schreiben wir die Lagrange'schen Gleichung für $q_1 = x$ in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \tag{284}$$

worin die verallgemeinerte Kraft Q_1 gegeben ist durch

$$Q_1 = \sum_i \boldsymbol{X}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n} \sum_i \boldsymbol{X}_i, \tag{285}$$

vgl. (278). Wir teilen die eingepräften Kräfte $\boldsymbol{X}_i$ wieder in äußere Kräfte und innere Wechselwirkungen auf,

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij},$$

und gewinnen daraus durch Summation über i unter Voraussetzung des 3. Newton'schen Prinzips $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ für die Wechselwirkungen

$$\sum_i \boldsymbol{X}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i,$$

vgl. auch Abschnitt 5.1, bzw.

$$Q_1 = \boldsymbol{n} \sum_i \boldsymbol{F}_i. \tag{286}$$

Die Translationsinvarianz in $\boldsymbol{n}-$Richtung wird jetzt offenbar durch

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{und} \qquad Q_1 = 0 \tag{287}$$

ausgedrückt. $Q_1 = 0$ bedeutet, daß die Resultierende der äußeren Kräfte keine Komponente in der $\boldsymbol{n}-$Richtung haben darf. Alle weiteren Schritte und Folgerungen sind gleichlautend wie im Fall von konservativen Kräften oben. Die Bedingung $Q_1 = 0$ enthält natürlich auch den konservativen Fall. Translationsinvarianz in $\boldsymbol{n}-$Richtung bedeutet nämlich für das Potential V der eingeprägten Kräfte

$$V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_i, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = V(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{n}\, q_1, \ldots, \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{n}\, q_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N + \boldsymbol{n}\, q_1).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}\, \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n} \sum_i \boldsymbol{X}_i,$$

so daß hier $Q_1 = 0$ mit $\partial V/\partial q_1 = 0$ äquivalent ist.

Abbildung 14: Änderung der Ortsvektoren bei einer Drehung um eine Achse $\mathbf{n}$ um den Winkel $\delta\varphi$.

7.2 Räumliche Drehinvarianz und Drehimpulserhaltung

Ein mechanisches System wird einer räumlichen Drehung um die Achse $\boldsymbol{n}$ um einen differentiellen Winkel $\delta\varphi$ unterworfen. Wir nehmen an, daß $\boldsymbol{n}$ ein Richtungsvektor ist, so daß $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Diese Drehung führt zu einer Änderung sämtlicher Ortsvektoren

$$\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i \, \delta\varphi,$$

bzw.

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i \, \delta\varphi, \tag{288}$$

vgl. Abbildung 14. Dabei bleiben alle systeminternen Abstände ungeändert. *Drehinvarianz* bedeutet, daß das System insgesamt unter der Drehung ungeändert bleibt, insbesondere bleibt seine Bewegungsgleichung ungeändert. Wenn das System keine externen Kräfte erfährt, bedeutet Drehinvarianz, daß der physikalische Raum *isotrop* ist, d.h., daß alle Richtungen im Raum die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzen.

Wenn ein System um die Achse $\boldsymbol{n}$ drehinvariant ist, kann der Drehwinkel φ um diese Achse als eine verallgemeinerte Koordinate $q_1 = \varphi$ gewählt werden, weil die Drehung um die Achse $\boldsymbol{n}$ voraussetzungsgemäß keiner Zwangsbedingung unterliegen soll. Für die Transformation von den verallgemeinerten Koordinaten auf die Ortsvektoren entnehmen wir dann aus (288) (mit $q_1 = \varphi$)

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i. \tag{289}$$

Die "integrale" Darstellung der Transformation in der Form

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1 = \varphi, \, q_2, \ldots, \, q_f, t)$$

analog zu (277) benötigen wir gar nicht explizit. Mit (289) gilt auch

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i. \tag{290}$$

vgl. Abschnitt 6.1. Wenn alle im System auftretenden Kräfte **konservativ** sind, können wir die Bewegung des Systems durch Lagrange'sche Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{291}$$

für $j = 1, 2, \ldots, f$ ausdrücken. Translationsinvarianz bedeutet für die Lagrange-Funktion, daß (mit $q_1 = \varphi$)

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \tag{292}$$

d.h., daß $q_1 = \varphi$ zyklisch ist. Dem entspricht wiederum ein *Erhaltungssatz*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad p_1 := \frac{\partial L}{\partial q_1} = \text{konstant} \tag{293}$$

für den *konjugierten* Impuls p_1. Wir müssen auch jetzt wieder klären, welche physikalische Bedeutung der konjugierte Impuls hat. Da das Potential V unabhängig von den Geschwindigkeiten ist, gilt auch $\partial L/\partial \dot{q}_1 = \partial T/\partial \dot{q}_1$ und somit

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_1} \\ &= \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{n} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{L}. \end{aligned} \tag{294}$$

Hier haben wir von (290) Gebrauch gemacht. Es ist

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

der Gesamtdrehimpuls des Systems. Der gesuchte konjugierte Impuls p_1 ist die $\boldsymbol{n}-$Komponente des Gesamtdrehimpulses $\boldsymbol{L}$. Drehinvarianz um eine Achse in $\boldsymbol{n}-$Richtung impliziert also die Drehimpulserhaltung in dieser Richtung.

Wenn in dem System auch *nicht-konservative* Kräfte auftreten können, dann schreiben wir die Lagrange'schen Gleichung für $q_1 = \varphi$ in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \tag{295}$$

worin die verallgemeinerte Kraft Q_1 gegeben ist durch

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_i \boldsymbol{X}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i \boldsymbol{X}_i (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i) \\ &= \boldsymbol{n} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{X}_i. \end{aligned} \tag{296}$$

vgl. (289). Wir teilen die eingepräften Kräfte $\boldsymbol{X}_i$ wieder in äußere Kräfte und innere Wechselwirkungen auf,

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij},$$

und gewinnen daraus durch Summation über i unter der Voraussetzung, daß die Wechselwirkungskräfte $\boldsymbol{F}_{ij}$ das 3. Newton'schen Prinzip erfüllen, $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$, und Zentralkräfte sind, $(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0$,

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{X}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

vgl. auch Abschnitt 5.2, bzw.

$$Q_1 = \boldsymbol{n} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{297}$$

Die Drehinvarianz umd die Achse in $\boldsymbol{n}-$Richtung wird jetzt offenbar durch

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{und} \qquad Q_1 = 0 \tag{298}$$

ausgedrückt. $Q_1 = 0$ bedeutet, daß die Resultierende der äußeren Drehmomente keine Komponente in der $\boldsymbol{n}-$Richtung haben darf. Alle weiteren Schritte und Folgerungen sind gleichlautend wie im Fall von konservativen Kräften oben.

7.3 Noether'sches Theorem

Die Formulierung der Invarianzen gegenüber Translation einerseits und Rotation andererseits im Rahmen der Lagrange-Theorie in den beiden vorhergehenden Abschnitten und die Folgerungen daraus haben eine sehr analoge Struktur. Dahinter steht ein allgemeiner Satz, der als Noether'scher Satz bekannt ist. Wir nehmen an, daß für die verallgemeinerten Koordinaten

$$\boldsymbol{q} := (q_1, q_2, \ldots, q_f)$$

eine einparametrige Gruppe von Transformationen

$$\tilde{q}_j = F_j(\boldsymbol{q}; s), \qquad j = 1, 2, \ldots, f, \tag{299}$$

existiert, unter der die Lagrange-Funktion L invariant ist. Für den Fall der Translation in $\boldsymbol{n}-$Richtung werden wir die Verschiebung x als den Parameter s definieren, für die Drehung um die Achse $\boldsymbol{n}$ entsprechend den Drehwinkel φ. Wir vereinbaren noch, daß $s = 0$ immer die Identität bedeuten soll, also

$$F_j(\boldsymbol{q}; s = 0) = q_j.$$

Der Noether'sche Satz besagt nun, daß unter den obigen Voraussetzungen für *autonome* Systeme eine Erhaltungsgröße

$$K(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) := \sum_j \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{ds} F_j(\boldsymbol{q}; s) \right)_{s=0} \tag{300}$$

existiert. Ein mechanisches System heißt *autonom*, wenn weder die Transformation zwischen den $\boldsymbol{q}$ und den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ noch die (als existent vorausgesetzte) Lagrange-Funktion explizit von der Zeit abhängen:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial t} = 0.$$

Wir werden uns im nächsten Abschnitt noch ausführlich mit autonomen Systemen beschäftigen.

Zum Beweis des Noether'schen Satz gehen wir von irgendeiner Lösung der Lagrange'schen Gleichungen aus, die wir mit $\boldsymbol{q}(t)$ bezeichnen. Daraus entsteht durch Anwendung der Transformation $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{q}(t; s) := \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}(t); s). \tag{301}$$

(Die Komponenten $F_j(\ldots)$ sollen den $f-$dimensionalen Vektor $\boldsymbol{F}(\ldots)$ bilden.) Die transformierte Lösung $\boldsymbol{q}(t; s)$ ist nach Voraussetzung ebenfalls eine Lösung der Lagrange'schen Gleichungen, weil die Lagrange-Funktion unter der Transformation invariant sein sollte, also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j}\right)_s - \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial q_j}\right)_s = 0. \tag{302}$$

Hier soll

$$\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j}\right)_s$$

bedeuten, daß wir die Lagrange-Funktion $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ zunächst partiell nach $\dot{q}_j$ ableiten und dann

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t; s) \qquad \text{und} \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}(t; s)$$

einsetzen, entsprechend $(\partial L/\partial q_j)_s$. Wegen der vorausgesetzten Invarianz von L gegen die Transformation von $\boldsymbol{q}(t)$ nach $\boldsymbol{q}(t; s)$ gilt natürlich auch

$$\frac{d}{ds} L(\boldsymbol{q}(t; s), \dot{\boldsymbol{q}}(t; s)) = 0. \tag{303}$$

Wir führen die Ableitung nach dem Parameter s aus und erhalten nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} L(\boldsymbol{q}(t; s), \dot{\boldsymbol{q}}(t; s)) = \\ &\quad = \sum_j \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial q_j}\right)_s \frac{dq_j(t; s)}{ds} + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j}\right)_s \frac{d\dot{q}_j(t; s)}{ds}\right] = 0. \end{aligned} \tag{304}$$

Da nach der Lagrange'schen Gleichung (302)

$$\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial q_j}\right)_s = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j}\right)_s,$$

folgt aus (304) weiter

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j} \right)_s \frac{dq_j(t;s)}{ds} + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j} \right)_s \frac{d\dot{q}_j(t;s)}{ds} \right] = 0. \tag{305}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von (305) ist offenbar gerade die zeitliche Ableitung d/dt von

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{q}(t;s), \dot{\boldsymbol{q}}(t;s)) &= \sum_j \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j} \right)_s \frac{dq(t;s)}{ds} \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_j} \right)_s \frac{dF_j(\boldsymbol{q}(t);s)}{ds}, \end{aligned} \tag{306}$$

vgl. (300), woraus für $s \to 0$ die Behauptung folgt.

7.4 Translationsinvarianz und Erhaltung der Energie

Im Abschnitt 7.1 hatten wir aus der räumlichen Translationsinvarianz die Erhaltung des Impulses, im Abschnitt 7.2 aus der Drehinvarianz die Erhaltung des Drehimpulses geschlossen. In diesem Abschnitt geht es um die Erhaltung der Energie in Systemen, die zeitlich *translationsinvariant* bzw. *autonom* sind. Der formale Ablauf wird sich dabei von dem in den Abschnitten 7.1 und 7.2 für Impuls und Drehimpuls deutlich unterscheiden, weil die Zeit in der nichtrelativistischen Mechanik eine formal andere Rolle spielt als später in der Relativitätstheorie, wo sie zusammen mit den drei Ortskomponenten einen sogenannten *4-Vektor* bilden wird. Entsprechend bilden dort dann auch Impuls und Ernergie einen 4-Vektor. Die formal unterschiedliche Rolle der Zeit gegenüber dem Raum wurde ja auch bereits bei der Galilei-Transformation deutlich: dort transformieren sich die Orte linear zwischen verschiedenen Inertialsystemen, während die Zeit als universell für alle Inertialsystemen angenommen wurde.

Wir wollen im folgenden auch voraussetzen, daß alle eingeprägten Kräfte konservativ sind, sich also durch ein Potential beschreiben lassen. Dann können wir die Lagrange'schen Gleichungen immer in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, f \tag{307}$$

mit einer Lagrange-Funktion $L = T - V$ schreiben. Durch diese Annahme werden nichtkonservative Kräfte wie z.B. Reibung ausgeschlossen. Treten solche Kräfte auf, dann können wir im allgemeinen auch nicht mit Energie-Erhaltung rechnen. Dennoch ist durch die Beschränkung auf konservative eingeprägte Kräfte die Energierhaltung $T + V = E$ keineswegs schon garantiert, weil möglicherweise *Zwangskräfte* reale Arbeit am System leisten, vgl. Abschnitt 5.6.

Zeitliche Translationsinvarianz eines Systems soll dadurch definiert sein, daß die Transformation zwischen den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ und den verallgemeinerten Koordinaten q_f *nicht explizit* von der Zeit abhängt:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f) \tag{308}$$

bzw.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\ldots)}{\partial t} = 0. \tag{309}$$

Die explizite Zeitabhängigkeit bzw. die partielle Ableitung nach der Zeit t in (309) ist zu unterscheiden von einer *impliziten* Zeitabhängigkeit bzw. einer *totalen* Zeitableitung d/dt. Dadurch, daß die verallgemeinerten Koordinaten q_j durch Lösen der Lagrange'schen Gleichungen (307) im allgemeinen zu Funktionen der Zeit t werden, werden auch die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ in (308) zu impliziten ("mittelbaren") Funktionen der Zeit. Die totale Zeitableitung d/dt soll nun definitionsgemäß auch die impliziten Zeitabhängigkeiten erfassen, also die Zeitableitungen längs der Bahnen $q_j(t)$ bilden. Die totale Zeitableitung d/dt würde additiv auch eine evtl. bestehende explizite Zeitableitung enthalten. Eine solche totale Zeitableitung längs einer Bahn ist bei der Berechnung der Geschwindigkeit auszuführen. Aus (308) folgt dann

$$\boldsymbol{v}_i := \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\,\dot{q}_j, \tag{310}$$

worin $\boldsymbol{q}$ wieder die $q_1,\, q_2, \ldots, q_f$ formal zu einem $f-$dimensionalen Vektor zusammenfaßt. Daraus berechnen wir die gesamte kinetische Energie

$$T = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, \boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k \tag{311}$$

mit

$$T_{jk} := \sum_i m_i\, \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\, \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}. \tag{312}$$

Da die partiellen Ableitungen $\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})/\partial q_j$ nur Funktionen der $\boldsymbol{q}$ (und nicht der Zeit) sind, gilt das auch für die T_{jk}:

$$T_{jk} = T_{jk}(\boldsymbol{q}).$$

(312) bedeutet, daß die kinetische Energie T eine *homogene, quadratische* Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ ist, für die

$$T(\lambda\,\dot{q}_1,\, \lambda\,\dot{q}_2, \ldots, \lambda\,\dot{q}_f) = \lambda^2\, T(\dot{q}_1,\, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f) \tag{313}$$

gilt. Natürlich hängt T auch noch von den $q_1,\, q_2, \ldots, q_f$ ab, doch wurde diese Abhängigkeit zwecks Vereinfachung der Schreibweise in (313) nicht aufgeführt. Die Homogenitätseigenschaft (313) würde nicht zutreffen, wenn die Transformation (308) die Zeit explizit enthielte. Statt (310) erhielten wir dann nämlich

$$\boldsymbol{v}_i := \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})}{\partial t}.$$

Bei der Berechnung der kinetischen Energie T in (311) würde der Term $\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})/\partial t$ auf der rechten Seite zu linearen und konstanten Termen in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ führen.

Wie bereits im Abschnitt 5.4 drücken wir die Homogenitätseigenschaft durch den Euler'schen Satz aus. Aus (313) folgt durch Differentiation nach λ und anschließender Setzung $\lambda = 1$:

$$\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j = 2\,T. \tag{314}$$

Unter der Voraussetzung, daß das Potential V der eingeprägten Kräfte nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0$, kann (314) auch in der Form

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j = 2\,T. \tag{315}$$

geschrieben werden. Wir bilden jetzt die totale Zeitableitung der Lagrange-Funktion. Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{316}$$

Die partielle Zeitableitung von L verschwindet: $\partial L/\partial t = 0$. Das folgt daraus, daß die Größen

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q}), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}, \qquad T_{jk}$$

sämtlich nicht von der Zeit abhängen sollten, also $\partial T/\partial t = 0$, und weiter daraus, daß das transformierte Potential

$$V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = V(\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{q}), \ldots, \boldsymbol{f}_N(\boldsymbol{q}))$$

ebenfalls nicht von t abhängt, also auch $\partial V/\partial t = 0$. Im zweiten Term unter der $j-$Summe in (316) ersetzen wir $\partial L/\partial q_j$ gemäß der Lagrange-Gleichung (307) und erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\ddot{q}_j + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j = 2\,\frac{dT}{dt} \end{aligned} \tag{317}$$

unter Verwendung von (315). Durch Zusammenfassung der linken mit der rechten Seite folgt daraus weiter

$$\frac{d}{dt}\,(2\,T - L) = \frac{d}{dt}(T + V) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad T + V = E = \text{konstant}, \tag{318}$$

also die erwartete Erhaltung der Energie.

7.5 Quantentheoretische Unschärfe

Die Charakterisierung einer Bewegung durch eine physikalische Größe, z.B. Impuls $\boldsymbol{P}$, Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ oder Energie E, ist nur dann möglich, wenn diese Größe ein Integral der Bewegung ist, also zeitlich konstant bzw. "erhalten" ist. Die Messung der jeweils zugehörigen Translationsvariabeln, im Beispiel Ort, Winkel und Zeit, bedeutet aber grundsätzlich immer eine Fixierung ihres Wertes, also notwendigerweise eine Aufhebung der Invarianz gegen diese Variable. Die Ortsmessung eines Teilchens z.B. erfordert, daß das Teilchen für einen hinreichend kurzen Augenblick durch eine Meßwechselwirkung in seiner Bewegung beeinflußt wird. Die entscheidende

Frage ist, ob dieser unvermeidbare Eingriff in die Bewegung hinreichend schwach im Vergleich zur Meßgröße ausgeführt werden kann. Das ist bei makroskopischen Körpern sicher möglich, nicht jedoch mehr im Bereich der Elementarteilchen, z.B. Elektron, Nukleon, Photon, ... Ein Elementarteilchen kann ja immer nur wieder mit einem anderen Elementarteilchen wechselwirken; eine schwächere, also auch eine hinreichend schwache Wechselwirkung gibt es dort nicht. Der Meßeingriff ist notwendigerweise immer von derselben Größenordnung wie die zu messende Größe.

Das Fazit dieser Überlegungen ist, daß sich die genaue Kenntnis einer Translationsvariabeln und die ihres konjugierten Impulses gegenseitig ausschließen, z.B. die genaue (im Quantenjargon "scharfe") Kenntnis von Ort und Impuls eines Teilchens. Insbesondere impliziert die scharfe Kenntnis des Ortes die völlige Unkenntnis des Impulses und umgekehrt. Das quantitative Ausmaß der gegenseitigen Begrenzung der Kenntnis vom Ort x und vom Impuls p ist empirisch festzustellen. Das Ergebnis des Experiments führt auf die *Unschärferelation*

$$\Delta p\,\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{319}$$

worin

$$\hbar = h/2\,\pi, \qquad h = 6.62\,10^{-34} J\,s \tag{320}$$

und h das *Planck'sche Wirkungsquantum* ist. Die physikalische Einheit des Produktes aus Ort und Impuls ist "Wirkung", nämlich Energie $\times$ Zeit. Das trifft übrigens auf alle Paare von verallgemeinerter Koordinate und ihres konjugierten Impulses zu:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \qquad p\,q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,q \cong L\,t = \text{Energie} \times \text{Zeit} = \text{Wirkung}.$$

Die analog zu (320) zu erwartende Unschärfe für den Drehimpuls hat allerdings nicht die Form $\Delta L\,\Delta\varphi \geq \hbar/2$ (φ =Winkel), sondern als Folge der Nicht-Kommutativität der Drehgruppe die Form

$$\Delta L_1\,\Delta L_2 \geq \frac{\hbar}{2}\,L_3$$

und entsprechend zyklisch weitergezählt für die anderen Raumrichtungen. Der Drehimpuls L selbst hat bereits die Einheit einer Wirkung. Dagegen erfüllen Energie und Zeit eine Unschärferelation

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{321}$$

Diese Unschärferelation erlaubt es, für eine Zeitspanne Δt die Energieerhaltung um die Größenordnung ΔE zu verletzen: "virtuelle Prozesse".

Die theoretisch-physikalisch präzise Formulierung der Unschärfe erfolgt in der Quantentheorie dadurch, daß alle physikalischen Größen durch *Operatoren* statt durch Variabeln beschrieben werden. Die konjugierten Paare erfüllen *Kommutator-Regeln*, also z.B.

$$\begin{aligned} [x, p] &= i\,\hbar, \\ [t, E] &= i\,\hbar, \\ \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} &= i\,\hbar\,\boldsymbol{L}, \end{aligned} \tag{322}$$

wo i die imaginäre Einheit ist.

Zusammenfassung: *Daß* sich die Kenntnis der konjugierten Größen gegenseitig ausschließt, können wir also schon aus der klassischen (d.h., nicht-quantentheoretischen) Mechanik folgern, nicht jedoch, in welchem quantitativen Maße, und auch nicht, in welcher theoretisch-physikalischen Form sich das ausdrückt. Allerdings werden wir im weiteren Verlauf der klassischen Mechanik auf weitere Hinweise auf die Quantentheorie stoßen und dabei sogar auch Formulierungen finden, die den späteren quantentheoretischen Formulierungen in ihrer mathematischen Struktur entsprechen werden.

8 Das Zwei-Körper-Problem

Als *Zwei-Körper-Problem* bezeichnet man die Untersuchung der Bewegung von zwei Massen m_1 und m_2, die untereinander über eine Zentralkraft wechselwirken. Die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen sind vom Typ

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= f(\ldots) \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r_{12}}, \\ m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= f(\ldots) \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r_{12}}, \end{aligned} \tag{323}$$

worin

$$r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|.$$

Beispiele:

1. Zwei gravitierende Himmelskörper, z.B. Erde-Mond oder Sonne-Erde. Die Wechselwirkung ist hier durch ein Potential, nämlich das Gravitationspotential, beschreibbar. Im allgemeinen läßt man dabei äußere Kräfte von anderen Himmelskörpern unberücksichtigt.

2. Die starre Hantel (zwei Massen, die durch eine starre, idealisiert massenlose Stange verbunden sind) im kräftefreien Raum oder unter dem Einfluß ihrer Schwerkraft.

3. Zwei Massen, deren Abstand als Funktion der Zeit vorgegeben ist: $r_{12} = r_{12}(t)$, z.B. zwei Astronauten, die sich an einer Stange festhalten und ihren Abstand willkürlich ändern können. In diesem Fall ist die Wechselwirkung zwischen den beiden Massen eine Zwangskraft.

8.1 Lagrange-Formulierung, Impuls und Drehimpuls.

Wenn die Wechselwirkung zwischen den beiden Massen durch ein Potential beschreibbar ist, z.B. durch das Gravitationspotential, dann muß dieses die Form

$$V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$$

haben, damit die Wechselwirkungskraft eine Zentralkraft ist, vgl. Abschnitte 5.2 und 5.3. Es existiert dann eine Lagrange-Funktion für das Zwei-Körper-Problem:

$$L = \frac{1}{2}\, m_1\, \boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \boldsymbol{v}_2^2 - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|). \tag{324}$$

Für den Fall, daß die Wechselwirkungskraft eine Zwangskraft ist, setzen wir formal $V = 0$ und erfüllen durch die Wahl geeigneter verallgemeinerter Koordinaten die Zwangsbedingungen r_{12} =konstant oder $r_{12} = r_{12}(t)$.

Wir transformieren die Lagrange-Funktion in (324) auf Schwerpunkts- und Relativ-Koordinaten, die durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \frac{1}{M}\,(m_1\,\boldsymbol{r}_1 + m_2\,\boldsymbol{r}_2)\,, & \dot{\boldsymbol{R}} &= \frac{1}{M}\,(m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2)\,, \\ \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, & \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \end{aligned} \tag{325}$$

definiert sind, worin M die Gesamtmasse ist: $M = m_1 + m_2$. Die Umkehrung von (325) lautet (nach einigen elementaren Umformungen)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{R} + \frac{m_2}{M}\,\boldsymbol{r}, & \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{R} + \frac{m_2}{M}\,\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{R} - \frac{m_1}{M}\,\boldsymbol{r}, & \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{R} - \frac{m_1}{M}\,\boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{326}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die Lagrange-Funktion L in (324) ergibt (wiederum nach elementaren Umformungen)

$$L = \frac{1}{2}\, M\, \dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}^2 - V(r), \tag{327}$$

worin $r = |\boldsymbol{r}|$ und

$$m := \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\, m_2}{M} \tag{328}$$

die *reduzierte Masse* ist. Wir wählen zunächst die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{R}$ des Schwerpunkts als verallgemeinerte Koordinaten. Dadurch gewinnen wir einen Erhaltungssatz,

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = M\,\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{P} = \text{konstant} \tag{329}$$

nämlich die Erhaltung des Imulses, und zwar als Folge der Translationsinvarianz des Problems. Wenn die beiden Massen nicht nur miteinander wechselwirken, sondern außerdem noch unter dem Einfluß eines äußeren Feldes stehen, dann würde im allgemeinen keine Impulserhaltung gelten. Für die weitere Beschreibung transformieren wir in das Schwerpunktssystem, das wegen (329) ein Inertialsystem ist. Im Schwerpunktsystem ist $\boldsymbol{R} = 0$. Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L = \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}^2 - V(r). \tag{330}$$

Dieses ist formal eine Lagrange-Funktion für die Bewegung einer Masse m in einem rotationsinvarianten Potential $V(r)$. Wir haben also das Zwei-Körper-Problem auf ein *effektives* Ein-Körper-Problem *reduziert*.

Das Zweikörper-Problem besitzt aber nicht nur Translations-, sondern auch Drehinvarianz, nämlich als Folge der Tatsache, daß die Wechselwirkung zwischen den Massen durch eine Zentralkraft bewirkt wird, bzw. daß das Wechselwirkungspotential nur vom Betrag r des Abstands abhängt. Also gilt nicht nur Impuls-, sondern auch Drehimpuls-Erhaltung: $\boldsymbol{L}$ =konstant. Wir rechnen den Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = m_1\,\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 \tag{331}$$

durch Einsetzen der Transformationsformeln (326) mit $\boldsymbol{R} = 0$ in das Schwerpunktsystem um und erhalten nach einer elementaren Rechnung

$$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}, \tag{332}$$

worin m wieder die reduzierte Masse gemäß (328) ist. Aus (332) folgt

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{r} = 0 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{333}$$

Ort und Geschwindigkeit des reduzierten Ein-Körper-Problems stehen immer senkrecht auf dem konstanten Vektor $\boldsymbol{L}$: die reduzierte Bewegung verläuft in einer *konstanten Ebene*, die senkrecht zum Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ orientiert ist. Zur weiteren Beschreibung führen wir in dieser Bewegungsebene Polarkoordinaten ein, so daß

$$x = r\,\cos\varphi, \qquad y = r\,\sin\varphi \tag{334}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\,\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r}\,\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi, \end{aligned} \tag{335}$$

sowie

$$\boldsymbol{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2. \tag{336}$$

Einsetzen in die Lagrange-Funktion (330) führt auf

$$L = \frac{m}{2}\,\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - V(r). \tag{337}$$

Damit ist das ursprüngliche 3-dimensionale Zwei-Körper-Problem auf ein effektives, *ebenes* (2-dimensionales) 1-Körper-Problem reduziert. Jetzt wählen wir den Radius r und den Winkel φ als weitere verallgemeinerte Koordinaten. (Wenn der Abstand r durch eine Zwangsbedingung festgelegt ist, wählen wir nur den Winkel φ als weitere verallgemeinerte Koordinate). In jedem Fall ist die Winkelkoordinate φ zyklisch:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2\,\dot{\varphi} =: l = \text{konstant}. \tag{338}$$

Durch Einsetzen der Transformationsformeln (334) und (335) überzeugen wir uns davon, daß die $z-$Komponente L_z des Drehimpulses, also die Komponente senkrecht zur Bewegungsebene, den Wert

$$L_z = m\,\left(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}\right) = m\,r^2\,\dot{\varphi} = l \tag{339}$$

Abbildung 15: Flächengeschwindigkeit: Fläche, die vom Radiusvektor $\mathbf{r}$ während Δt überstrichen wird.

hat. Der Erhaltungssatz (338) ist also noch Teil der Drehimpuls-Erhaltung. Die Festlegung der Bewegungsebene entspricht der Wahl von nur zwei Drehimpulskomponenten, nämlich $L_x = 0$ und $L_y = 0$.

Die Erhaltungsgröße l in (338) besitzt auch noch eine geometrische Interpretation: der Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, bzw. die *Flächengeschwindigkeit* ist konstant. In der Geschichte der Mechanik der Planetenbewegungen hat dieser Satz als *2. Kepler'sches Gesetz* eine Rolle gespielt. Die Abbildung 15 zeigt einen Ausschnitt aus der Bewegung während eines Zeitintervalls Δt, in dem sich der Winkel φ um $\Delta\varphi$ ändert. Die vom Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ während Δt überstrichene Fläche ΔF ist

$$\Delta F = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}|\,\sin\Delta\varphi,$$

so daß

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}|\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Im Limes $\Delta t \to 0$ wird $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\boldsymbol{r} \to 0$ und

$$\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t} \to \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \to \dot{\varphi}$$

und damit

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\varphi} = \frac{l}{2\,m} = \text{konstant}. \tag{340}$$

Wenn der Abstand r durch eine Zwangsbedingung $r = r(t)$ festgelegt ist, läßt sich das Problem mit der Erhaltung der L_z-Komponente in (338) vollständig lösen. Es folgt dann nämlich

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{m}\,\frac{1}{r^2(t)}, \tag{341}$$

d.h., die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ist durch Vorgabe von $r(t)$ eindeutig bestimmt. Daraus läßt sich durch Zeitintegration auch der Winkel φ als Funktion der Zeit berechnen:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{l}{m} \int_0^t dt' \, \frac{1}{r^2(t')}. \tag{342}$$

Die Integrationskonstante $l = L_z$ ist aus einer Anfangsbedingung zu bestimmen. Wenn $r = r_0$ =konstant durch die Zwangsbedingung vorgegeben ist, dann folgt aus (341) eine konstante Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{m\, r_0^2} =: \omega = \text{konstant}.$$

8.2 Erhaltung der Energie und die Bahngleichung

Wir setzen jetzt voraus, daß die Wechselwirkung zwischen den beiden Massen durch ein Potential $V(r)$ beschrieben ist. (Der Fall einer Zwangsbedingung für den Abstand r war ja bereits am Ende des vorhergehenden Abschnitts erledigt worden.) Es sind jetzt also wieder r und φ die beiden verallgemeinerten Koordinaten. Da unser Zwei-Körper-Problem jetzt offensichtlich auch zeitlich translationsinvariant ist, gilt Energie-Erhaltung, also

$$\begin{aligned} T + V &= \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}^2 + V(r) \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\varphi}^2 \right) + V(r) = E = \text{konstant}. \end{aligned} \tag{343}$$

Wenn wir hier $\dot{\varphi}$ durch den Erhaltungssatz (338) eliminieren, also $\dot{\varphi} = l/m\, r^2$, erhalten wir

$$\frac{m}{2}\, \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\, m\, r^2} + V(r) = E. \tag{344}$$

Dieses ist offensichtlich eine (implizite) Differentialgleichung, aus der sich der Radius r als Funktion der Zeit t bestimmen läßt. Wenn daraus $r = r(t)$ bestimmt ist, dann läßt sich auch $\varphi(t)$ wieder durch

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{m\, r^2(t)}$$

gewinnen. Bevor wir uns mit diesen Differentialgleichungen eingehender befassen, überzeugen wir uns, daß der Energiesatz (343) auch aus der bisher noch nicht verwendeten Lagrange-Gleichung für die Radialvariable r folgt. Aus

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\varphi}^2 \right) - V(r),$$

vgl. (337), berechnen wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\, \dot{r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = m\, r\, \dot{\varphi}^2 - V'(r).$$

Die Lagrange-Gleichung für r lautet also

$$m\, \ddot{r} - m\, r\, \dot{\varphi}^2 - V'(r) = 0. \tag{345}$$

In der Schreibweise

$$m\,\ddot{r} = F(r) + m\,r\,\dot{\varphi}^2$$

mit $F(r) = -V'(r)$ erkennen wir, daß außer der Wechselwirkungskraft $F(r)$ noch die *Fliehkraft* $m\,r\,\dot{\varphi}^2$ in radialer Richtung auf m wirkt, vgl. auch das folgende Kapitel. Wir setzen $\dot{\varphi} = l/m\,r^2$ in (345) ein und erhalten

$$m\,\ddot{r} - \frac{l^2}{m\,r^3} + V'(r) = 0. \tag{346}$$

Daraus können wir nach dem bewährten Verfahren, nämlich durch Multiplikation mit $\dot{r}$, den Ernergie-Erhaltungssatz gewinnen:

$$m\,\dot{r}\,\ddot{r} - \frac{l^2\,\dot{r}}{m\,r^3} + \dot{r}\,V'(r) = 0. \tag{347}$$

Es ist

$$\begin{aligned} m\,\dot{r}\,\ddot{r} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\,\dot{r}^2\right), \\ -\frac{l^2\,\dot{r}}{m\,r^3} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2\,m\,r^2}\right), \\ \dot{r}\,V'(r) &= \frac{d}{dt}\,V(r). \end{aligned}$$

Einsetzen in (347) liefert wieder den Erhaltungssatz für die Energie, gleichlautend mit (344). Unsere Herleitung zeigt, daß der Term $l^2/2\,m\,r^2$ offenbar von der oben erwähnten Fliehkraft herrührt. Man bezeichnet diesen Anteil in der Gesamtenergie E deshalb auch als *Fliehkraftpotential*. Eine andere Schreibweise für die Erhaltung der Energie lautet

$$\frac{m}{2}\,\dot{r}^2 + \tilde{V}(r) = E, \tag{348}$$

worin

$$\tilde{V}(r) := \frac{l^2}{2\,m\,r^2} + V(r) \tag{349}$$

als *effektives Radialpotential* bezeichnet wird. Wie bereits früher im eindimensionalen Fall, vgl. Abschnitt 2.2, kann sich die Radiusvariable r nur im Bereich $\tilde{V}(r) \le E$ bewegen. Daraus kann man oft bereits weitgehende qualitative Schlüsse über den Ablauf der Bewegung ziehen.

Wir zeigen jetzt, wie man aus den Erhaltungssätzen für Energie und Drehimpuls durch Integration den zeitlichen Ablauf der Radial- und Winkelbewegung, also $r(t)$ und $\varphi(t)$, sowie die Bahnkurve $r(\varphi)$ bestimmen kann. Aus dem Erhaltungssatz für die Energie (344) berechnen wir unter Verwendung des effektiven Potentials aus (349)

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\,\left(E - \tilde{V}(r)\right)}, \tag{350}$$

und weiter durch Trennung der Variabeln

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \tilde{V}(r)\right)}}. \tag{351}$$

Darin ist natürlich eine der Integrationskonstanten t_0 oder r_0 entbehrlich. Die Integration in (351) liefert die Zeit als Funktion des Radius, $t = r(t)$. Durch Umkehrung gewinnen wir daraus den Radius als Funktion der Zeit, $r = r(t)$. Wie bereits am Ende des vorhergehenden Abschnitts erläutert, dient uns dann der Erhaltungssatz für den Drehimpuls dazu, aus $r(t)$ auch den zeitlichen Verlauf des Winkels zu berechnen, nämlich aus

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{l}{m} \int_0^t dt' \, \frac{1}{r^2(t')},$$

vgl. (342). Man kann auch direkt die Bahngleichung $r(\varphi)$ aus den beiden Erhaltungssätzen für Energie und Drehimpuls bestimmen:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{m\,r^2}{l} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \tilde{V}(r)\right)} = r^2 \sqrt{\frac{2\,m}{l^2}\left(E - \tilde{V}(r)\right)}. \tag{352}$$

Daraus folgt wieder durch Trennung der Variabeln

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2\,m}{l^2}\left(E - \tilde{V}(r')\right)}}. \tag{353}$$

Diese Integration liefert $\varphi = \varphi(r)$, und durch Umkehrung die Bahngleichung $r = r(\varphi)$.

8.3 Planetenbewegung und Kepler'sche Gesetze

Das Wechselwirkungspontential $V(r)$ für die Gravitation zwischen zwei Massen m_1 und m_2 lautet

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1\,m_2}{r} =: -\frac{k}{r}, \qquad k := \gamma\,m_1\,m_2 > 0. \tag{354}$$

Das effektive Radialpotential lautet dann

$$\tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\,m\,r^2}. \tag{355}$$

vgl. (349), worin m wieder die reduzierte Masse ist. Das asymptotische Verhalten von $\tilde{V}(r)$ ist

$$\tilde{V}(r) \to \begin{cases} l^2/2\,m\,r^2 & \to & +\infty & \text{für} & r \to 0 \\ -k/r & \to & -0 & \text{für} & r \to \infty \end{cases} \tag{356}$$

Für $l > 0$ muß $\tilde{V}(r)$ also ein Minimum bei einem $r = r_e > 0$ besitzen:

$$\left(\frac{d\tilde{V}}{dr}\right)_{r=r_e} = \frac{k}{r_e^2} - \frac{l^2}{m\,r_e^3} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad r_e = \frac{l^2}{m\,k}.$$

Das Potential $\tilde{V}$ besitzt bei $r = r_e$ den Wert

$$\tilde{V}_e = \tilde{V}(r_e) = -\frac{m\,k^2}{2\,l^2}.$$

Abbildung 16: Gravitations-, Fliehkraftpotential und effektives Potential.

Für Energien E im Bereich

$$-\frac{m\,k^2}{2\,l^2} < E < 0 \tag{357}$$

gibt es offensichtlich zwei Umkehrpunkte r_{min} und r_{max} der Radialbewegung, die als Lösungen von $\tilde{V}(r) = E$ zu berechnen sind. Das Ergebnis (Lösung einer quadratischen Gleichung) lautet

$$r_{min,max} = \frac{1}{2\,|E|}\,\left(k \mp \sqrt{k^2 - \frac{2\,l^2\,|E|}{m}}\right). \tag{358}$$

Die Bahn ist also *geschlossen*, und r bewegt sich im Bereich $r_{min} \le r \le r_{max}$. Für $E > 0$ besitzt $\tilde{V}(r) = E$ nur eine Lösung, nämlich

$$r_{min} = \frac{1}{2\,E}\,\left(\sqrt{k^2 + \frac{2\,l^2\,E}{m}} - k\right). \tag{359}$$

Die Bahn ist jetzt *offen*, und $r \ge r_{min}$.

Wir berechnen die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ und greifen dazu auf das Schema (352) und (353) der Bahnintegration im vorhergehenden Abschnitt zurück. Einsetzen von $\tilde{V}(r)$ aus (355) führt auf

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\,\sqrt{\frac{2\,m\,E}{l^2} + \frac{2\,m\,k}{l^2\,r'} - \frac{1}{r'^2}}}. \tag{360}$$

Umformung ("quadratische Ergänzung"):

$$\begin{aligned}
\frac{2\,m\,E}{l^2} + \frac{2\,m\,k}{l^2\,r'} - \frac{1}{r'^2} &= -\left(\frac{1}{r'} - \frac{m\,k}{l^2}\right)^2 + \frac{m^2\,k^2}{l^4} + \frac{2\,m\,E}{l^2} \\
&= D\,\left[1 - \frac{1}{D}\,\left(\frac{1}{r'} - \frac{m\,k}{l^2}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

worin

$$D = \frac{2\,m}{l^2}\,\left(\frac{m\,k^2}{2\,l^2} + E\right) > 0,$$

vgl. (357). Wir setzen die obige Umformung in das Integral in (360) ein und substituieren dann

$$\cos\vartheta' = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\left(\frac{1}{r'} - \frac{m\,k}{l^2}\right). \tag{361}$$

Die rechte Seite von (361) muß also zwischen -1 und $+1$ liegen. Durch eine kurze Umformung überzeugt man sich, daß diese Forderung äquivalent ist mit $r_{min} \le r \le r_{max}$ für E im Bereich von (357) bzw. mit $r \ge r_{min}$ für $E > 0$. Für die Differentiale lautet die Substitution (361)

$$-\sin\vartheta'\,d\vartheta' = -\frac{dr'}{\sqrt{D}\,r'^2}. \tag{362}$$

Das Integral in (360) ergibt dann

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_0 &= \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{D}\,r'^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r'} - \frac{m\,k}{l^2}\right)^2}} \\
&= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta'\,\frac{\sin\vartheta'}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta'}} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0 \\
&= \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\,k}{l^2}\right)\right] - \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{m\,k}{l^2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{363}$$

Wir verfügen über die Integrationskonstante φ_0, d.h., über den Nullpunkt der Winkelzählung, so daß

$$\varphi_0 = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{m\,k}{l^2}\right)\right].$$

Dann lautet unser Ergebnis in (363)

$$\varphi = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\,k}{l^2}\right)\right],$$

und durch Umkehrung

$$\frac{1}{r} = \frac{m\,k}{l^2} + \sqrt{D}\,\cos\varphi = \frac{m\,k}{l^2}\,(1 + \varepsilon\,\cos\varphi) \tag{364}$$

mit

$$\varepsilon := \frac{l^2\,\sqrt{D}}{m\,k} = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,l^2}{m\,k^2}}. \tag{365}$$

Der Radikand ist für alle Energien $E > -m\,k^2/2\,l^2$ positiv, vgl. auch (357).

(364) ist die allgemeine Form eines *Kegelschnitts* in Polarkoordinaten, bei dem der Ursprung ($r = 0$) in einem der beiden Brennpunkte liegt, vgl. Abbildung 16. Wir finden für

Abbildung 17: Kegelschnitte: Hyperbel ($\varepsilon = 2$), Parabel ($\varepsilon = 1$) und Ellipse ($\varepsilon = 0.5$).

$$\begin{array}{lcll} \varepsilon > 1 & \cong & E > 0 & \text{Hyperbel: offen} \\ \varepsilon = 1 & \cong & E = 0 & \text{Parabel: offen} \\ \varepsilon < 1 & \cong & -m\,k^2/2\,l^2 < E < 0 & \text{Ellipse: geschlossen} \end{array}$$

Damit ist auch das erste Kepler'sche Gesetz nachgewiesen, nach dem die (geschlossenen) Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren (einem) Brennpunkt die Sonne steht. Wir rechnen auf kartesische Koordinaten x, y um, z.B. für den Fall einer Ellipse, also für $\varepsilon < 1$:

$$\cos\varphi = x/r, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Daraus finden wir nach einer elementaren Rechnung

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{366}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{l^2}{m\,k\,(1-\varepsilon^2)} = \frac{k}{2\,|E|}, \\ b &= \frac{l^2}{m\,k\,\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\,m\,|E|}} \\ e &= \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned} \tag{367}$$

e ist die sogenannte "Exzentrizität". Die Form (366) zeigt einmal mehr, daß das Kraftzentrum (z.B. die Sonne) in einem der Brennpunkte bei $x = \pm e$, $y = 0$ liegt.

Das dritte Kepler'sche Gesetz macht eine Aussage über Umlaufzeiten und die großen Halbachsen a der Planetenbahnen. Die Fläche der Ellipse ist $F = \pi\,a\,b$, die Flächengeschwindigkeit $dF/dt = l/2\,m$, vgl. (340). Daraus folgt für die Umlaufzeit T

$$\frac{l\,T}{2\,m} = \pi\,a\,b, \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\,\pi\,a\,b\,m}{l}. \tag{368}$$

Aus (367) entnehmen wir

$$\frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{m\,k}, \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{l}{\sqrt{m\,k}}\,\sqrt{a}.$$

Einsetzen in (368) ergibt

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}\,a^{3/2}. \tag{369}$$

Dieses ist das dritte Kepler'sche Gesetz in seiner allgemeinen Form: die Umlaufzeit ist proportional zur Potenz 3/2 der großen Halbachsen a, allerdings ist die Proportionalitätskonstante hier noch von der Planetenmasse abhängig. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} m = \frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}, \qquad & k = \gamma\,m_1\,m_2, \\ \Rightarrow \qquad \frac{m}{k} \quad = \quad & \frac{1}{\gamma\,(m_1+m_2)}. \end{aligned}$$

Es sei nun m_1 = Planetenmasse, m_2 = Sonnenmasse. Dann ist also $m_2 \gg m_1$. Wir vernachlässigen m_1 gegen m_2 und haben dann

$$\frac{m}{k} \approx \frac{1}{\gamma\,m_2}.$$

Einsetzen in (369) ergibt

$$T \approx \frac{2\,\pi}{\sqrt{\gamma\,m_2}}\,a^{3/2}, \qquad \text{bzw.} \qquad T^2 \sim a^3. \tag{370}$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen. Die Proportionalitätskonstante ist jetzt unabhängig von der Planenetenmasse m_1, d.h., (370) gilt für alle Planeten mit derselben Proportionalitätskonstante.

9 Beschleunigte Bezugssysteme

Die Newton'sche Mechanik haben wir im Kapitel 1 nur für Inertialsysteme formuliert, also für solche Bezugssysteme, in denen sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Es ist häufig aber bequemer, den Bewegungsablauf von Nicht-Inertialsystemen aus zu beschreiben, z.B. vom Standpunkt der rotierenden Erde. Es ist zu erwarten, daß die Bewegungsgesetze in solchen beschleunigten Bezugssystemen eine andere Form haben. Andererseits haben wir bei Anwendungen der Lagrange-Gleichungen bereits verallgemeinerte Koordinaten gewählt, die nicht relativ zu Inertialsystemen definiert waren, z.B. den Abstand einer Masse auf einer rotierenden Schiene vom Drehpunkt der Schiene. Wir wollen in diesem Kapitel die Lagrange-Formulierung für die Beschreibung von Bewegungen relativ zu Nicht-Inertialsystemen allgemein dazu verwenden, um die veränderten Bewegungsgesetze in solchen beschleunigten Bezugssystemen zu ermitteln.

9.1 Translatorisch beschleunigte Bezugssysteme

Wir beginnen mit Bezugssystemen, die nur *translatorisch* gegen ein Intertialsystem beschleunigt sind. In diesem Fall werden wir den Lagrange-Formalismus noch nicht benötigen. Es seien

$$S = \{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3,\, t\}$$

das Inertialsystem und

$$S' = \{\boldsymbol{e}'_1,\, \boldsymbol{e}'_2,\, \boldsymbol{e}'_3,\, t\}$$

ein relativ zu S translatorisch beschleunigtes Bezugssystem. "Translatorisch" bedeutet, daß die $\boldsymbol{e}'_1,\, \boldsymbol{e}'_2,\, \boldsymbol{e}'_3$ relativ zu den $\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3$ eine feste, d.h., zeitunabhängige Orientierung besitzen sollen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann auch vereinbaren, daß die $\boldsymbol{e}'_\alpha$ jeweils zu den $\boldsymbol{e}_\alpha$ für $\alpha = 1, 2, 3$ parallel sein sollen. Es seien weiter P der Ort eines Massenpunkts m und O und O' die Ursprünge von S bzw. S'. Es sind dann

$$\boldsymbol{r} = \vec{OP}, \qquad \boldsymbol{r}' = \vec{O'P}$$

die Ortsvektoren des Massenpunkts beschrieben in S bzw. in S'. Es ist nun

$$\boldsymbol{r} = \vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}', \tag{371}$$

worin $\boldsymbol{s}$ der im allgemeinen zeitabhängige Abstand zwischen den Ursprüngen O und O' von S bzw. S' ist: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t)$. Für den Massenpunkt m in P gilt im Inertialsystem S das Newton'sche Bewegungsgesetz

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{X}, \tag{372}$$

worin $\boldsymbol{X}$ eine beliebig vorgegebene Kraft ist, die auf den Massenpunkt m einwirkt. Aus (371) folgt dann

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}' + \ddot{\boldsymbol{s}}.$$

Einsetzen in (372) führt auf das Bewegungsgesetz im beschleunigten Bezugssystem S':

$$m\,\ddot{r}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}_t, \qquad \boldsymbol{F}_t := -m\,\ddot{\boldsymbol{s}}. \tag{373}$$

Im beschleunigten Bezugssystem tritt also zur gegebenen Kraft $\boldsymbol{X}$ zusätzlich eine sogenannte *Trägheitskraft* $\boldsymbol{F}_t$. Physikalische Beispiele für solche Situationen: Fahrstühle, bremsende oder beschleunigende Fahrzeuge.

9.2 Beschreibung von Rotationen

In diesem und auch im folgenden Abschnitt schließen wir Translationen des Systems S' relativ zum Inertialsystem S aus. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $O = O'$ wählen. Wenn wir den Ortsvektor eines Massenpunktes m wieder $\boldsymbol{r}$ in S und $\boldsymbol{r}'$ in S nennen, ist jetzt wegen $O = O'$ offensichtlich

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'. \tag{374}$$

Wir werden sogleich sehen, daß dennoch $\dot{\boldsymbol{r}} \neq \dot{\boldsymbol{r}}'$ und $\ddot{\boldsymbol{r}} \neq \ddot{\boldsymbol{r}}'$. Wir stellen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ durch die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ und $\boldsymbol{e}'_\alpha$ in S bzw. S' dar finden dann wegen (374)

$$\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} x'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha. \tag{375}$$

Hier sind die x_α die Komponenten von $\boldsymbol{r}$ in S, analog die x'_α. Da sich nun aber die Basisvektoren $\boldsymbol{e}'_\alpha$ von S' relativ zu den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ von S drehen können, werden die Komponenten x_α und x'_α trotz (375) *verschiedene* Zeitabhängigkeiten haben, und zwar auch dann, wenn der Massenpunkt z.B. relativ zu S ruht. In diesem Abschnitt wollen wir diese unterschiedliche Zeitabhängigkeit der Komponenten zunächst formal beschreiben, bevor wir im folgenden Abschnitt die physikalischen Konsequenzen daraus diskutieren.

Im weiteren Verlauf unserer Überlegungen werden immer wieder Summen über Richtungsindizes α wie in (375) auftreten, oft auch Doppelsummen. Wir wollen die damit verbundene Schreibarbeit vereinfachen, indem wir eine *Summationskonvention* einführen:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha \equiv x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{376}$$

Immer dann, wenn ein Richtungsindex α in einem Produktausdruck doppelt auftritt, soll die Summation über α von $\alpha = 1$ bis $\alpha = 3$ vereinbart sein. Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ schreibt sich mit der Summationskonvention

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = a_\alpha \, b_\alpha.$$

Die Summationskonvention wird auch auf die *Spur* von Matrizen A ausgedehnt:

$$\mathrm{Sp}(A) := \sum_{\alpha=1}^{3} A_{\alpha\alpha} \equiv A_{\alpha\alpha}.$$

Die Elemente $A_{\alpha\beta}$ einer Matrix A (präziser: eines Tensors A) verhalten sich nämlich unter Koordinatentransformationen wie (äußere) Produkte von Vektorkomponenten. Wir werden die Summationskonvention später in der Relativitätstheorie nochmals verallgemeinern.

Wir schreiben (375) mit der Summationskonvention in der Form

$$x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha = x'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha \tag{377}$$

und multiplizieren skalar mit einem Basisvektor $\boldsymbol{e}_\beta$ bzw. $\boldsymbol{e}'_\beta$:

$$x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta = x'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta, \qquad \text{bzw.} \qquad x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\beta = x'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\beta. \tag{378}$$

Die Basisvektoren in S und S' sollen jeweils orthonormal (kartesisch) sein, also

$$\boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Die beiden Relationen in (378) lauten dann also

$$x_\alpha \, \delta_{\alpha\beta} = x'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta, \qquad \text{bzw.} \qquad x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\beta = x'_\alpha \, \delta_{\alpha\beta}.$$

Unter Berücksichtigung der Summationskonvention ist nun

$$x_\alpha \, \delta_{\alpha\beta} \cong \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \, \delta_{\alpha\beta} = x_\beta ,$$

analog $x'_\beta \, \delta_{\alpha\beta} = x'_\beta$. Wir definieren

$$U_{\alpha\beta} := \boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta \tag{379}$$

und haben dann aus (378)

$$x_\beta = U_{\alpha\beta} \, x'_\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad x'_\beta = U_{\beta\alpha} \, x_\alpha . \tag{380}$$

Dieses sind Transformationsformeln für die Umrechnung zwischen den Komponenten x_α und x'_α von Vektoren in den Bezugssystemen S und S'. Da die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ und $\boldsymbol{e}'_\alpha$ normiert sind, also $|\boldsymbol{e}_\alpha| = 1$ und $|\boldsymbol{e}'_\alpha| = 1$, haben die $U_{\alpha\beta}$ die geometrische Bedeutung von *Richtungskosinus*:

$$U_{\alpha\beta} = \cos \left(\angle \, \boldsymbol{e}'_\alpha , \, \boldsymbol{e}_\beta \right).$$

Wir können die Transformationsformeln (380) auch in Matrizenform schreiben:

$$x = \tilde{U} \, x' , \qquad \text{bzw.} \qquad x' = U \, x . \tag{381}$$

Hier ist $\tilde{U}$ die zu U *transponierte* Matrix, also

$$(\tilde{U})_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha} .$$

Aus (381) ist dann ersichtlich, daß $\tilde{U}$ zu U *invers* ist, also

$$\tilde{U} = U^{-1} \qquad \text{oder auch} \qquad U \, \tilde{U} = \tilde{U} \, U = 1, \tag{382}$$

oder in Komponenten (mit Summationskonvention!)

$$U_{\alpha\gamma} \, U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\alpha} \, U_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta} . \tag{383}$$

In (383) wird über γ summiert. Mit den $U_{\alpha\beta}$ können wir aber auch die Basisvektoren selbst transformieren. Es ist nämlich

$$\boldsymbol{e}_\alpha = (\boldsymbol{e}_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\beta) \, \boldsymbol{e}'_\beta = U_{\beta\alpha} \, \boldsymbol{e}'_\beta , \qquad \boldsymbol{e}'_\alpha = (\boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta) \, \boldsymbol{e}_\beta = U_{\alpha\beta} \, \boldsymbol{e}_\beta . \tag{384}$$

Wir kommen jetzt zur Zeitabhängigkeit. Vom Standpunkt des Inertialsystems S ruhen die eigenen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$, während sich die des Systems S', $\boldsymbol{e}'_\beta$, drehen, d.h., auch die Richtungskosinus $U_{\alpha\beta}$ werden zu Funktionen der Zeit. Schon daraus ist ersichtlich, daß die Zeitableitung keine absolute, sondern eine relative Operation ist, und zwar selbst dann, wenn die Zeit in S und S' als absolut angenommen wird, formal $t = t'$. Im folgenden seien d/dt bzw. auch $\dot{x}_\alpha$, $\dot{\boldsymbol{e}}'_\alpha$ usw. die Zeitableitung relativ zum Inertialsystem S. Wir wenden d/dt in diesem Sinne auf (377) an und erhalten mit der Produktregel der Differentiation

$$\dot{x}_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha = \dot{x}'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha + x'_\alpha \, \dot{\boldsymbol{e}}'_\alpha .$$

In diese Beziehung setzen wir ein

$$\begin{aligned} \text{aus (384)} \qquad \dot{\boldsymbol{e}}'_\alpha &= \dot{U}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{e}_\beta, \\ \text{aus (380)} \qquad x'_\alpha &= U_{\alpha\gamma}\,x_\gamma. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha &= \dot{x}'_\alpha\,\boldsymbol{e}'_\alpha + \underbrace{\dot{U}_{\alpha\beta}\,U_{\alpha\gamma}\,x_\gamma\,\boldsymbol{e}_\beta}_{\alpha\leftrightarrow\beta} \\ &= \dot{x}'_\alpha\,\boldsymbol{e}'_\alpha + \dot{U}_{\beta\alpha}\,U_{\beta\gamma}\,x_\gamma\,\boldsymbol{e}_\alpha \\ &= \dot{x}'_\alpha\,\boldsymbol{e}'_\alpha + \Omega_{\alpha\gamma}\,x_\gamma\,\boldsymbol{e}_\alpha, \end{aligned} \tag{385}$$

worin

$$\Omega_{\alpha\gamma} := \dot{U}_{\beta\alpha}\,U_{\beta\gamma} \tag{386}$$

(mit Summationskonvention, hier über β!). Aus der Orthogonalitätsrelation (383) folgt durch Zeitableitung d/dt

$$\dot{U}_{\gamma\alpha}\,U_{\gamma\beta} + U_{\gamma\alpha}\,\dot{U}_{\gamma\beta} = 0$$

bzw.

$$\dot{U}_{\gamma\alpha}\,U_{\gamma\beta} = -\dot{U}_{\gamma\beta}\,U_{\gamma\alpha}.$$

Diese Relation bedeutet offensichtlich, daß $\Omega_{\alpha\beta}$ antisymmetrisch ist, vgl. die Definition (386):

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}. \tag{387}$$

Eine antisymmetrische $3\times3-$Matrix besitzt 3 unabhängige Elemente. Wir schreiben die Matrix Ω in der Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{388}$$

Wir führen nun die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ ein, die ein Beobachter in S bzw. S' jeweils relativ zu seinen als ruhend interpretierten Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ bzw. $\boldsymbol{e}'_\alpha$ mißt, also

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}_\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \boldsymbol{v}' = \dot{x}'_\alpha\,\boldsymbol{e}'_\alpha. \tag{389}$$

Weiterhin sei

$$u_\alpha := \Omega_{\alpha\gamma}\,x_\gamma \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{u} := u_\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha = \Omega_{\alpha\gamma}\,x_\gamma\,\boldsymbol{e}_\alpha. \tag{390}$$

Dann können wir (385) in der Form

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \tag{391}$$

schreiben. Für die Komponente u_1 folgt aus der Definition in (390) zusammen mit der Definition von Ω in (388)

$$u_1 = \Omega_{12}\, x_2 + \Omega_{13}\, x_3 = \omega_2\, x_3 - \omega_3\, x_2,$$

und analog für u_2 und u_3 durch zyklische Permutation $1, 2, 3, 1, \ldots$

$$u_2 = \omega_3\, x_1 - \omega_1\, x_3, \qquad u_3 = \omega_1\, x_2 - \omega_2\, x_1,$$

also insgesamt

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{392}$$

worin der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ die vektorielle Winkelgeschwindigkeit ist, definiert durch

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\alpha\, \boldsymbol{e}_\alpha.$$

Die Beziehung (391) zwischen den in S bzw. S' gemessenen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{v}'$ lautet dann

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{393}$$

Auch dann, wenn ein Massenpunkt relativ zu S' ruht, also $\boldsymbol{v}' = 0$, besitzt er vom System S aus beobachtet eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, die sogenannte *Führungsgeschwindigkeit*. Die Führungsgeschwindigkeit entsteht durch die Rotation des Vektors $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$ um die Achse $\boldsymbol{\omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, vgl. Abbildung 18. Dort ist

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\, dt, \\
\boldsymbol{u} &= \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \\
|d\boldsymbol{s}| &= |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\, dt| = |\boldsymbol{\omega}|\, \underbrace{|\boldsymbol{r}|\, \sin\left(\angle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}\right)}_{=r'}\, |dt| = \\
&= |\boldsymbol{\omega}|\, r'\, |dt|, \\
\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| &= \frac{|d\boldsymbol{s}|}{|r'\, dt|} = |\boldsymbol{\omega}|.
\end{aligned}$$

Die Abbildung 18 ist als Momentaufnahme für einen Zeitpunkt t zu interpretieren; im allgemeinen kann die vektorielle Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ selbst noch eine Funktion der Zeit sein: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$.

Die Transformationsformel (393) für die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ kann man auch als eine zeitliche Ableitungsregel für Vektoren deuten:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \ldots. \tag{394}$$

Hier bedeutet $(d/dt)'$ die von einem Beobachter in S' gemessene zeitliche Änderung.

Abbildung 18: Führungsgeschwindigkeit bei Rotation.

9.3 Lagrange-Gleichungen im beschleunigten Bezugssystem und Rotationsträgheitskräfte

Wie bisher sei S ein Inertialsystem und S' ein beliebig gegen S rotierendes Bezugssystem. In S' werden die Komponenten x'_α des Ortsvektors $\boldsymbol{r}'$ eines Massenpunktes m beobachtet. Wir wählen diese Komponenten x'_α als verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \ldots$ im Sinne der Lagrange-Gleichungen. Die "Zwangsbedingung" besteht jetzt darin, daß die x'_α relativ zu einem mit der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ gegenüber S rotierenden Bezugssystem gemessen werden. Mit der Transformationsformel

$$x_\beta = U_{\alpha\beta}(t)\, x'_\alpha,$$

vgl. (380), wird

$$\boldsymbol{r} = x_\beta\, \boldsymbol{e}_\beta = U_{\alpha\beta}(t)\, x'_\alpha\, \boldsymbol{e}_\beta. \tag{395}$$

Diese Relation entspricht in unserem Fall der allgemeinen Transformationsbeziehung

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(q_1, \ldots, t).$$

Wir drücken jetzt die kinetische Energie des Massenpunktes durch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{x}'_\alpha$ bzw. durch $\boldsymbol{v}'$ aus:

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}^2 &= \frac{m}{2}\,(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2 \\ &= \frac{m}{2}\left(\boldsymbol{v}'^2 + 2\,\boldsymbol{v}'\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2\right). \end{aligned} \tag{396}$$

Hier haben wir der Deutlichkeit halber $\boldsymbol{r}'$ statt $\boldsymbol{r}$ geschrieben. Wir fassen die $\partial T/\partial \dot{x}'_\alpha$ zum Gradienten $\partial T/\partial \dot{\boldsymbol{r}}'$ zusammen. Aus (396) entnehmen wir unmittelbar

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{v}}'} = m\,\boldsymbol{v}' + m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'. \tag{397}$$

Ebenso fassen wir die $\partial T/\partial x'_\alpha$ zum Gradienten $\partial T/\partial \boldsymbol{r}'$ zusammen. Aus (396) entnehmen wir zunächst

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}'} = m\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}'}\,\boldsymbol{v}'\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + \frac{m}{2}\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}'}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2. \tag{398}$$

Umformungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') &= (\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{r}' = -(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}')\,\boldsymbol{r}' \\
\Rightarrow\qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}'}\,\boldsymbol{v}'\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') &= -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}', \\
(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2 &= \boldsymbol{\omega}^2\,\boldsymbol{r}'^2 - (\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}')^2, \\
\Rightarrow\qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}'}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2 &= \boldsymbol{\omega}^2\,\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{r}'^2}{\partial \boldsymbol{r}'}}_{2\,\boldsymbol{r}'} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}'}\,(\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}')^2}_{2\,(\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{\omega}} \\
&= -2\,\left[(\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^2\,\boldsymbol{r}'\right] \\
&= -2\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}').
\end{aligned}$$

Einsetzen in (398) ergibt

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}'} = -m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'). \tag{399}$$

Im nächsten Schritt ist die totale Zeitableitung von $\partial T/\partial \dot{\boldsymbol{r}}'$ zu bilden. Da die Lagrange-Gleichungen im Bezugssystem S' formuliert werden, ist auch die Zeitableitung relativ zu S' zu bilden, in der Formulierung von (394) also als $(d/dt)'$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)'\,\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{v}}'} &= \left(\frac{d}{dt}\right)'\,(m\,\boldsymbol{v}' + m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \\
&= m\,\boldsymbol{a}' + m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' + m\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'.
\end{aligned} \tag{400}$$

Hier ist $\boldsymbol{a}'$ die relativ zu S' zu messende Beschleunigung analog zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ in S'. Die Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ der vektoriellen Geschwindigkeit ist unabhängig vom Bezugssystem. Aus (394) folgt nämlich

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d}{dt}\right)'\,\boldsymbol{\omega}.$$

Damit ist die linke Seite der Lagrange'schen Gleichungen vollständig. Durch Einsetzen von (397) und (399) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt}\right)'\,\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{v}}'} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}'} = \\
&\quad = m\,\boldsymbol{a}' + 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' + m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + m\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'.
\end{aligned} \tag{401}$$

Auf der rechten Seite der Lagrange-Gleichungen stehen die verallgemeinerten Kräfte

$$\boldsymbol{Q} = Q_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad Q_\alpha = \boldsymbol{Q} \, \boldsymbol{e}'_\alpha, \tag{402}$$

die wir jetzt zu bestimmen haben. Wir nehmen an, daß die Masse m im Inertialsystem S unter der Einwirkung einer Kraft $\boldsymbol{X}$ steht. Dann ist Q_α zu bestimmen aus

$$Q_\alpha = \boldsymbol{X} \, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'_\alpha}.$$

Aus (395) und (384) (im vorhergehenden Abschnitt) lesen wir ab, daß

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'_\alpha} = U_{\alpha\beta} \, \boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}'_\alpha,$$

so daß

$$Q_\alpha = \boldsymbol{X} \, \boldsymbol{e}'_\alpha,$$

also $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{X}$. Damit lautet die Lagrange-Gleichung in S'

$$\left(\frac{d}{dt}\right)' \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{v}}'} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}'} = \boldsymbol{X}. \tag{403}$$

Wir setzen (401) ein und schreiben das Ergebnis in der Form

$$m \, \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}_r, \tag{404}$$

worin die *Rotationsträgheitskräfte* $\boldsymbol{F}_r$ gegeben sind durch

$$\boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_Z + \boldsymbol{F}_\omega, \tag{405}$$

- *Coriolis-Kraft*

$$\boldsymbol{F}_C = -2 \, m \, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}', \tag{406}$$

- *Zentrifugalkraft*:

$$\boldsymbol{F}_Z = -m \, \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'), \tag{407}$$

- *Winkelbeschleunigungskraft*:

$$\boldsymbol{F}_\omega = -m \, \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'. \tag{408}$$

Die Zentrifugalkraft wird oft auch in einer anderen Form angegeben, nämlich

$$\boldsymbol{F}_Z = -m \, \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = m \, \omega^2 \, \underbrace{[\boldsymbol{r}' - (\boldsymbol{n} \, \boldsymbol{r}') \, \boldsymbol{n}]}_{\boldsymbol{R}} = m \, \omega^2 \, \boldsymbol{R}, \tag{409}$$

worin $\boldsymbol{n}$ der Einheitsvektor in Achsenrichtung ist,

$$\boldsymbol{n} := \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \qquad \omega = |\boldsymbol{\omega}|,$$

und $\boldsymbol{R}$ ein Vektor ist, der senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ bzw. $\boldsymbol{n}$ steht und zur Masse m zeigt, vgl. Abbildung 19.

Abbildung 19: Definition des Vektors $\mathbf{R}$ in der Zentrifugalkraft.

10 Dynamik starrer Körper

Die Bewegung starrer Körper unter der Einwirkung von äußeren Kräften und möglicherweise unter Einschränkungen durch Zwangsbedingungen ist ein ebenso bedeutsames wie umfangreiches und komplexes Kapitel der Mechanik. Beispiele für die Dynamik starrer Körper: Rotation von starren Körpern um feste Achsen, freie Bewegungen, symmetrische oder nicht-symmetrische, kräftefreie oder schwere Kreisel, Abrollen von Kugeln auf Unterlagen mit oder ohne Reibung, Bewegung von Billard-Kugeln. Wir können hier nur einige grundlegende Züge dieser Theorie vorstellen und werden uns dabei auf die Rotation um feste Achsen und auf einfache Bewegungen von Kreiseln beschränken.

10.1 Trägheitsmoment

Wir beginnen mit der Untersuchung der Rotation eines starren Körpers um eine Achse, die relativ zu einem Inertialsystem eine zeitlich konstante Richtung $\boldsymbol{n}$ haben soll, $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Wir rufen in Erinnerung, daß ein starrer Körper definiert ist als ein System von Massenpunkten $m_i, \quad i = 1, 2, \ldots$, deren Abstände untereinander paarweise konstant sind. Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, $\omega = d\varphi/dt$, soll zeitabhängig sein können. Wenn $\boldsymbol{r}_i$ der Ortsvektor des Massenpunktes m_i ist, dann besitzt dieser bei der Rotation des starren Körpers eine Geschwindikeit, die gleich seiner Führungsgeschwindigkeit ist, also

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\, \boldsymbol{n}, \tag{410}$$

vgl. Kapitel 9. Wir berechnen daraus zunächst die kinetische Energie des rotierenden starren Körpers:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\boldsymbol{\omega}^2\, \boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}_i)^2\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)^2\right] \omega^2 \\
&= \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2. \qquad (411)
\end{aligned}
$$

Hier ist Θ das *Trägheitsmoment* des Körpers, bezogen auf die Achse $\boldsymbol{n}$, definiert durch

$$
\Theta := \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)^2\right] = \sum_i m_i\, s_i^2, \qquad (412)
$$

worin

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_i &= \boldsymbol{r}_i - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{n}, \\
s_i^2 &= \boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)^2. \qquad (413)
\end{aligned}
$$

Der Vektor $\boldsymbol{s}_i$ zeigt von der Achse auf den Massenpunkt m_i und steht senkrecht auf der Achse, s_i ist der senkrechte Abstand des Massenpunktes m_i von der Achse. Die Definition von Θ in (412) zeigt auch explizit, daß das Trägheitsmoment im allgemeinen von der Lage des starren Körpers relativ zur Achse $\boldsymbol{n}$ abhängt. Es hängt jedoch nicht von den Bewegungsgrößen, also nicht von φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ ab. Das Ergebnis der Rechnung in (411), $T = \Theta\,\omega^2/2$, ist offenbar analog zu $T = m\,\boldsymbol{v}^2/2$ für die translatorische Bewegung eines einzelnen Massenpunktes der Masse m.

Wir berechnen außerdem den *Drehimpuls* des um die Achse $\boldsymbol{n}$ rotierenden starren Körpers:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} = \sum_i m_i\,\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i &= \sum_i m_i\,\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \\
&= \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}_i^2\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{r}_i\right] \\
&= \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}_i^2\,\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{r}_i\right] \omega. \qquad (414)
\end{aligned}
$$

Umformung unter Verwendung von

$$
\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{s}_i + (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{n},
$$

vgl. (413):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_i^2\,\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{r}_i^2\,\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,(\boldsymbol{s}_i + (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{n}) \\
&= \left[\boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)^2\right] \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{s}_i \\
&= s_i^2\,\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{s}_i.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (414) ergibt unter Verwendung der Definition von Θ in (412)

$$
\boldsymbol{L} = \Theta\,\boldsymbol{n}\,\omega - \sum_i m_i (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{s}_i\,\omega. \qquad (415)
$$

Wir multiplizieren (415) skalar mit $\boldsymbol{n}$ und erhalten daraus unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{s}_i = 0$

$$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{L} = \Theta\,\omega. \tag{416}$$

Die Drehimpuls-Komponente in Achsenrichtung $\boldsymbol{n}$ ist $\Theta\,\omega$. Diese Beziehung ist offenbar analog zu $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ für die translatorische Bewegung eines einzelnen Massenpunktes.

Wir leiten jetzt eine Bewegungsgleichung für den starren Körper auf der Achse $\boldsymbol{n}$ her. Wir nehmen an, daß auf jeden der Massenpunkte m_i eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}_i$ wirkt, z.B. die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_i = m_i\,\boldsymbol{g}$. Die Bewegungsgleichung für die translatorische Bewegung eines einzelnen Massenpunktes lautet $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$. In Verfolgung der Analogie zur Translationsbewegung bilden wir deshalb die Bilanz des Drehimpulses. Aus dem Abschnitt 5.2 folgt für diese Bilanz

$$\frac{d\,\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{Z}_i)\,. \tag{417}$$

Hier haben wir die eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ um die *Zwangskräfte* $\boldsymbol{Z}_i$ erweitert. Es treten in unserem Problem zwei Typen von Zwangskräften auf:

1. **Innere** Zwangskräfte, die die paarweise konstanten Abstände zwischen den Massenpunkten m_i bzw. die Starrheit des Körpers erzwingen. Wir nehmen an, daß diese inneren Zwangskräfte *Zentralkräfte* sind. Dann treten sie gemäß unseren Überlegungen im Abschnitt 5.2 nicht in der Drehimpuls-Bilanz (417) auf.

2. **Äußere** Zwangskräfte oder *Lagerkräfte*, die den starren Körper auf der Achse halten. Diese Zwangskräfte treten nur für Massenpunkte m_i auf, die auf der Achse liegen, d.h., für die $\boldsymbol{s}_i = 0$.

Wir multiplizieren die Bilanz (417) skalar mit dem Vektor $\boldsymbol{n}$ der Achsenrichtung und finden

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}\,\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{n}\,\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{Z}_i. \tag{418}$$

Es ist

$$\boldsymbol{n}\,\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{Z}_i = \sum_i (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i)\,\boldsymbol{Z}_i = 0,$$

weil $\boldsymbol{Z}_i \neq 0$ nur für $\boldsymbol{s}_i = 0$, dort sind jedoch $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{r}_i$ parallel, so daß $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i = 0$. Unter Berücksichtigung von (416) lautet unsere Bewegungsgleichung damit

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{L} = \Theta\,\dot{\omega} = \Theta\,\ddot{\varphi} = \tau, \tag{419}$$

worin τ die Achsenkomponente des resultierenden Drehmoments der äußeren Kräfte ist:

$$\tau := \boldsymbol{n}\,\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{420}$$

Für den bereits oben erwähnten Fall, daß die äußere Kraft die Gewichtskraft ist, $\boldsymbol{F}_i = m_i\,\boldsymbol{g}$, erhalten wir

$$\tau = \boldsymbol{n}\,\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{n}\,\left(\sum_i m_i\,\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{g}\right) = \boldsymbol{n}\,\left(M\,\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{g}\right), \tag{421}$$

worin $\boldsymbol{R}$ der Ortsvektor des Schwerpunkts ist.

Abbildung 20: Physikalisches Pendel. Die Zeichenebene steht senkrecht auf der Achse und enthält den Schwerpunkt.

Wir haben in den bisherigen Überlegungen zur Rotation starrer Körper um eine feste Achse mehrfach Analogien zur translatorischen Bewegung eines Massenpunktes erkannt. Wir stellen diese Analogien nochmals zusammen:

phys. Begriff	Translation	Rotation
Ortsvariable	$\boldsymbol{r}$	φ
Geschwindigkeit	$\boldsymbol{v}$	$\omega = \dot{\varphi}$
Trägheit	m	Θ
kin. Energie	$m\,\boldsymbol{v}^2/2$	$\Theta\,\omega^2/2$
Impuls	$m\,\boldsymbol{v}$	$L_{\boldsymbol{n}} = \Theta\,\omega$
Bew'gleichung	$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$	$\Theta\,\ddot{\varphi} = \tau$
Kraft/Moment	$\boldsymbol{F}$	τ

10.2 Beispiele, Steiner'scher Satz

"Physikalisches Pendel": ein starrer Körper rotiert unter dem Einfluß der Gewichtskraft um die raumfeste Achse in Richtung $\boldsymbol{n}$, vgl. Abbildung 20.
Wir benutzen den Ausdruck (421) aus dem vorhergehenden Abschnitt für τ:

$$\tau = M\,\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{g}) \tag{422}$$

Mit der Vereinbarung, daß die Achse $\boldsymbol{n}$ in der Abbildung 20 nach oben zeigt und mit der Zählung des Winkels φ eine Rechtsschraube bildet, ist

$$\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{R} = g\,R\,\sin\varphi\,\boldsymbol{n},$$

eingesetzt in (422):

$$\tau = -M\,g\,R\,\sin\varphi. \tag{423}$$

Somit lautet die Bewegungsgleichung

$$\Theta\,\ddot{\varphi} = -M\,g\,R\,\sin\varphi. \tag{424}$$

Für kleine Ausschläge φ ist $\sin\varphi \approx \varphi$, also

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M\,g\,R}{\Theta}\,\varphi. \tag{425}$$

Das ist ein harmonischer Oszillator mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{M\,g\,R}{\Theta}}. \tag{426}$$

Wenn der Schwerpunkt des Körpers auf der Achse liegt, $R = 0$, verschwindet die Frequenz: $\omega = 0$. Wenn die Ausdehnung des Körpers klein ist im Vergleich zur Entfernung R des Schwerpunkts von der Achse, kann der Körper als Massenpunkt idealisiert werden. Dann wird

$$\Theta = \sum_i m_i\,s_i^2 \approx M\,R^2$$

und

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Das ist ein Fadenpendel mit der Fadenlänge $l = R$.

Kontinuierliche Massenverteilung: starre Körper werden im allgemeinen nicht durch die Massen m_i von Massenpunkten beschrieben, sondern durch eine Massendichte ρ, so daß $dm = \rho\,dV$ die in einem Volumenelement dV enthaltene Masse ist. Entsprechend ist die Definition des Trägheitsmoments abzuändern in

$$\Theta = \sum_i m_i\,s_i^2 \to \int dm\,s^2 = \int dV\,\rho\,s^2. \tag{427}$$

Als Beispiel betrachten wir ein physikalisches Pendel, das aus einer dünnen Latte besteht, die an einem Ende aufgehängt ist. Es sei l die Länge der Latte und M ihre gesamte Masse. In diesem Fall ist M/l die Masse pro Länge bzw.

$$dm = \frac{M}{l}\,ds.$$

Das Trägheitsmoment berechnet sich dann gemäß

$$\Theta = \frac{M}{l}\int_0^l ds\,s^2 = \frac{1}{3}\,M\,l^2.$$

Der Schwerpunktsabstand R von der Achse ist $R = l/2$. Für kleine Ausschläge erhalten wir aus (426) die Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{g}{l}}.$$

Steiner'scher Satz. Häufig hat man das Trägheitsmoment $\Theta(\boldsymbol{n}, A)$ eines Körpers relativ zu einer Achse $\boldsymbol{n}$ zu berechnen, die nicht nicht durch den Schwerpunkt S, sondern durch einen

Abbildung 21: Zum Steiner'schen Satz.

Punkt $A \neq S$ des Körpers geht. Andererseits ist aber die Berechnung von Trägheitsmomenten $\Theta(\boldsymbol{n}, S)$ relativ zu Achsen $\boldsymbol{n}$, die durch den Schwerpunkt gehen, einfacher, z.B. aus Symmetriegründen. Der Steiner'sche Satz gestattet es, die Berechnung von $\Theta(\boldsymbol{n}, A)$ auf die Berechnung von $\Theta(\boldsymbol{n}, S)$ zurückzuführen. Es sei a der Abstand zwischen den beiden parallelen Achsen $\boldsymbol{n}$ durch S und durch A, vgl. Abbildung 21. Dort soll die Zeichenebene senkrecht auf $\boldsymbol{n}$ stehen und den Massenpunkt m_i enthalten. Für die anderen Massenpunkte ist die Zeichnung entsprechend zu denken.
Es ist

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{s}_i' &=& \boldsymbol{a} + \boldsymbol{s}_i, \\ \Rightarrow \qquad & s_i'^2 &=& a^2 + s_i^2 + 2\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{s}_i). \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit m_i und anschließender Summation über i folgt daraus

$$\sum_i m_i s_i'^2 = M\,a^2 + \sum_i m_i\,s_i^2 + 2\,\boldsymbol{a}\,\sum_i m_i\,\boldsymbol{s}_i. \tag{428}$$

Es ist aber

$$\sum_i m_i\,\boldsymbol{s}_i = 0,$$

weil diese Summe die Projektion des Ortsvektors des Schwerpunkts auf eine Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{n}$ darstellt, der Schwerpunkt aber auf der Achse liegt, auf die die Abstandsvektoren $\boldsymbol{s}_i$ bezogen sind. Damit folgt aus (428) der Steiner'sche Satz

$$\Theta(\boldsymbol{n}, A) = \Theta(\boldsymbol{n}, S) + M\,a^2. \tag{429}$$

Als Anwendungsbeispiel des Steiner'schen Satzes betrachten wir eine Kugel (Radius= R, Masse= M), die unter dem Einfluß ihrer Gewichtskraft eine schiefe Ebene (Neigungswinkel= α) herabrollt. Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel sei $\boldsymbol{v}_0 = 0$. In der Abbildung 22 schneide die Zeichenebene die schiefe Ebene senkrecht und gehe durch den Schwerpunkt (Mittelpunkt) der Kugel. Die Achsenrichtung $\boldsymbol{n}$ steht senkrecht auf der Zeichenebene und zeige nach oben. Die Winkelzählung von φ bilde mit $\boldsymbol{n}$ eine Rechtsschraube.
Die momentane Drehachse $\boldsymbol{n}$ beim Abrollen der Kugel geht durch den Auflagepunkt A, *nicht* durch den Schwerpunkt S. Also ist auch das Trägheitsmoment auf der linken Seite der Bewegungsgleichung

Abbildung 22: Kugel auf einer schiefen Ebene.

$$\Theta(\boldsymbol{n}, A)\,\ddot{\varphi} = \tau$$

auf diese Achse zu beziehen. Das Drehmoment τ lautet,

$$\tau = \boldsymbol{n}(M\ \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{g}),$$

vgl. (421). Es ist

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{g} = -g\,R\,\sin\alpha\,\boldsymbol{n},$$

vgl. auch oben, also

$$\tau = -M\,g\,R\,\sin\alpha.$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\Theta(\boldsymbol{n}, A)\,\ddot{\varphi} = -M\,g\,R\,\sin\alpha \tag{430}$$

und beschreibt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung des Winkels φ. Zur Berechnung von $\Theta(\boldsymbol{n}, A)$ benutzen wir den Steiner'schen Satz und berechnen zunächst das Trägheitsmoment $\Theta(\boldsymbol{n}, S)$ um eine Achse durch den Schwerpunkt der Kugel. Aus Symmetriegründen kann dieses nicht von der Achsenrichtung abhängen. Es sei nun $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ein körperfestes, kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung O im Schwerpunkt S der Kugel liege. Die Trägheitsmomente längs der Basisvektoren lauten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1: \qquad \Theta(\boldsymbol{e}_1, S) &= \int dm\,(x_2^2 + x_3^2),\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2: \qquad \Theta(\boldsymbol{e}_2, S) &= \int dm\,(x_3^2 + x_1^2),\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3: \qquad \Theta(\boldsymbol{e}_3, S) &= \int dm\,(x_1^2 + x_2^2).
\end{aligned}$$

Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\Theta(\boldsymbol{e}_1,S)+\Theta(\boldsymbol{e}_2,S)+\Theta(\boldsymbol{e}_3,S) &= 2\int dm\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\ &= 2\int dm\,r^2,\end{aligned}$$

worin $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel ist. Da aus Symmetriegründen

$$\Theta(\boldsymbol{e}_1,S)=\Theta(\boldsymbol{e}_2,S)=\Theta(\boldsymbol{e}_3,S)=:\Theta(S),$$

folgt weiter

$$\Theta(S)=\frac{2}{3}\int dm\,r^2. \tag{431}$$

Da der Integrand dieses Integrals nur vom Abstand r abhängt, wählen wir als Volumenelemente dV in $dm=\rho\,dV$ konzentrische Kugelschalen mit dem Radius r und der Dicke dr, so daß

$$dV=4\pi\,r^2\,dr,\qquad dm=\rho\,4\pi\,r^2\,dr.$$

Mit $\rho=M/V$ und $V=4\pi\,R^3/3$ folgt

$$\Theta(S)=\frac{2}{3}\,\frac{M}{4\pi\,R^3/3}\,4\pi\int_0^R dr\,r^4=\frac{2}{5}\,M\,R^2. \tag{432}$$

Beim Abrollen der Kugel beträgt der Abstand der momentanen Achse vom Schwerpunkt (Mittelpunkt) gerade $a=R$, so daß mit dem Steiner'schen Satz

$$\Theta(A)=\frac{2}{5}\,M\,R^2+M\,R^2=\frac{7}{5}\,M\,R^2. \tag{433}$$

Natürlich hängt aus Symmetriegründen auch das Trägheitsmoment um die momentane Abrollachse nicht von der Achsenrichtung ab.

10.3 Trägheitstensor

Der Steiner'sche Satz verknüpft die Trägheitsmomente zwischen parallelen Achsen. In diesem Abschnitt werden wir lernen, wie sich die Trägheitsmomente verhalten, wenn deren Achse nicht parallel verschoben wird, sondern um einen festen Punkt des starren Körpers, z.B. um den Schwerpunkt *gedreht* wird.

Es sei $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ein *körperfestes*, kartesisches Koordinatensystem, als dessen Ursprung wir den Schwerpunkt wählen können. Körperfest bedeutet, daß sich das Koordinatensystem mit dem Körper mitdreht, also kein Inertialsystem ist. Es seien c_α die Komponenten der Achsenrichtung $\boldsymbol{n}$ im körperfesten System, also

$$\boldsymbol{n}=c_\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha, \tag{434}$$

worin wiederum die Summationskonvention vereinbart sei, vgl. Abschnitt 9.2. Durch skalare Multiplikation mit $\boldsymbol{e}_\beta$ erhalten wir daraus

$$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{e}_\beta = c_\alpha\,\boldsymbol{e}_\beta\,\boldsymbol{e}_\alpha = c_\alpha\,\delta_{\alpha\beta} = c_\beta. \tag{435}$$

Es ist also

$$c_\beta = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{e}_\beta = |\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{e}_\beta|\,\cos\left(\angle\boldsymbol{n},\boldsymbol{e}_\beta\right) = \cos\left(\angle\boldsymbol{n},\boldsymbol{e}_\beta\right),$$

d.h., die c_β sind die Richtungskosinus der Achse $\boldsymbol{n}$ in dem körperfesten Koordinatensystem. Diese sind jedoch auch während der Drehung des Körpers um die Achse $\boldsymbol{n}$ zeitlich konstant, d.h., die c_β sind zeitunabhängig. Die Annahme, daß der Achsenvektor normiert ist, $\boldsymbol{n}^2 = 1$, bedeutet für die Richtungskosinus

$$\boldsymbol{n}^2 = c_\alpha\,c_\beta\,\boldsymbol{e}_\alpha\,\boldsymbol{e}_\beta = c_\alpha\,c_\beta\,\delta_{\alpha\beta} = c_\alpha^2 = 1.$$

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist die Darstellung des Trägheitsmomentes $\Theta(\boldsymbol{n})$ relativ zur Achse $\boldsymbol{n}$ in (412) im Abschnitt 10.1:

$$\Theta(\boldsymbol{n}) = \sum_i m_i\,\left[\boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)^2\right]. \tag{436}$$

In diesen Ausdruck setzen wir die folgenden Komponenten-Darstellungen ein:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i &= x_{i\mu}\,\boldsymbol{e}_\mu, & \boldsymbol{r}_i^2 &= x_{i\mu}\,x_{i\mu} =: x_{i\mu}^2, \\ \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i &= c_\alpha\,x_{i\alpha}, & (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}_i)^2 &= c_\alpha\,c_\beta\,x_{i\alpha}\,x_{i\beta}. \end{aligned} \tag{437}$$

In $x_{i\mu}$ zählt der erste Indes i die Massenpunkte m_i durch, während der zweite Indes μ die Koordinatenrichtungen durchzählt. Die Summationskonvention soll nur für die Koordinatenrichtungen vereinbart sein, nicht für den Massenpunkt-Index i, also z.B.

$$x_{i\mu}^2 = x_{i\mu}\,x_{i\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{3} x_{i\mu}^2.$$

Einsetzen (437) in (436) führt auf

$$\Theta(\boldsymbol{n}) = \sum_i m_i\,\left[x_{i\mu}^2 - x_{i\alpha}\,x_{i\beta}\,c_\alpha\,c_\beta\right]. \tag{438}$$

Neben $x_{i\mu}^2$ fügen wir als Faktor

$$c_\alpha\,c_\beta\,\delta_{\alpha\beta} = c_\alpha\,c_\alpha = 1$$

ein. Dann ergibt sich aus (438)

$$\begin{aligned} \Theta(\boldsymbol{n}) &= \sum_i m_i\,\left[x_{i\mu}^2\,c_\alpha\,c_\beta\,\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}\,x_{i\beta}\,c_\alpha\,c_\beta\right] \\ &= \sum_i m_i\,\left[x_{i\mu}^2\,\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}\,x_{i\beta}\right]\,c_\alpha\,c_\beta \\ &= I_{\alpha\beta}\,c_\alpha\,c_\beta, \end{aligned} \tag{439}$$

in der letzten Zeile Summationskonvention für α und β. Der Ausdruck

$$I_{\alpha\beta} := \sum_i m_i \left[x_{i\mu}^2 \, \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} \, x_{i\beta} \right] \tag{440}$$

heißt der *Trägheitstensor*. Die Diagonal- und Nicht-Diagonal-Komponenten des Trägheitstensors haben unterschiedliche Struktur, z.B.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_i m_i \left[x_{i\mu}^2 - x_{i1}^2 \right] = \sum_i m_i \left[x_{i2}^2 + x_{i3}^2 \right], \\ I_{12} &= -\sum_i m_i \, x_{i1} \, x_{i2}, \end{aligned}$$

usw. Die Gleichung (439) besagt, daß sich das Trägheitsmoment $\Theta(\boldsymbol{n})$ um eine Achse $\boldsymbol{n}$ als quadratische Form in den Richtungskosinus c_α der Achse relativ zum körperfesten Koordinatensystem schreiben läßt. Die Koeffizientenmatrix der quadratischen Form ist der Trägheitstensor. Dieser Tensor ist als eine $3 \times 3-$Matrix darstellbar und hat deshalb 9 Komponenten. Da jedoch aus der Definition (440)

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha} \tag{441}$$

folgt, sind unter den 9 Komponenten nur 6 unabhängig. Die Kenntnis dieser 6 Komponenten erlaubt es dann, die Trägheitsmomente $\Theta(\boldsymbol{n})$ zu beliebigen Achsenrichtungen anzugeben.

Obwohl ein Tensor (mit zwei Indizes) durch eine Matrix darstellbar ist, sind die Begriffe Tensor und Matrix nicht äquivalent. Der Tensor ist nämlich eine Erweiterung des Begriffs des Vektors. Auch ein Vektor ist nicht einfach ein 3-Tupel von Zahlen, sondern hat eine geometrische Bedeutung. Diese erkennen wir am besten am Verhalten des Vektors gegenüber Koordinaten-Transformationen, wie wir sie bereits im Abschnitt 9.2 diskutiert hatten. Dort hatten wir den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ z.B. eines Massenpunktes in zwei verschiedenen Koordinaten-Systemen $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ dargestellt:

$$\boldsymbol{r} = x_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha = x'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha.$$

Für die Komponenten x_α und x'_α gelten die Transformationsformeln

$$x_\beta = U_{\alpha\beta} \, x'_\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad x'_\beta = U_{\beta\alpha} \, x_\alpha$$

mit

$$U_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}'_\alpha \, \boldsymbol{e}_\beta. \tag{442}$$

$U_{\alpha\beta}$ ist eine orthogonale Transformationsmatrix:

$$U_{\alpha\gamma} \, U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\alpha} \, U_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{oder} \qquad \tilde{U} \, U = U \, \tilde{U} = 1. \tag{443}$$

Die obigen Transformationsformeln gelten für jeden Vektor $\boldsymbol{a}$, also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = a_\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha \quad &= \quad a'_\alpha \, \boldsymbol{e}'_\alpha, \\ a_\beta = U_{\alpha\beta} \, a'_\alpha \qquad &\text{bzw.} \qquad a'_\beta = U_{\beta\alpha} \, a_\alpha. \end{aligned} \tag{444}$$

Wir unterwerfen jetzt den Trägheitstensor $I_{\alpha\beta}$ der Transformation $U_{\alpha\beta}$ und wenden dabei die Transformationsformeln (444) für Vektorkomponenten, hier für die Komponenten des Ortsvektors, konsequent an. Wir transformieren die Terme in $I_{\alpha\beta}$ in (440) einzeln:

$$\begin{aligned} x_{i\mu}^2 &= x_{i\mu}\, x_{i\mu} = U_{\lambda\mu}\, U_{\kappa\mu}\, x'_{i\lambda}\, x'_{i\kappa} = \delta_{\lambda\kappa}\, x'_{i\lambda}\, x'_{i\kappa} = x'_{i\lambda}\, x'_{i\lambda} = x'^2_{i\lambda}, \\ \delta_{\alpha\beta} &= U_{\lambda\alpha}\, U_{\lambda\beta} = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, \delta_{\lambda\kappa}, \end{aligned}$$

zusammengefaßt also

$$x_{i\mu}^2\, \delta_{\alpha\beta} = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, x'^2_{i\lambda}\, \delta_{\lambda\kappa}. \tag{445}$$

Weiterhin ist

$$x_{i\alpha}\, x_{i\beta} = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, x'_{i\lambda}\, x'_{i\kappa}. \tag{446}$$

Aus (445) und (446) folgt die Transformationsformel für das Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i \left[x_{i\mu}^2\, \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}\, x_{i\beta} \right] \\ &= U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta} \sum_i m_i \left[x'^2_{i\lambda}\, \delta_{\lambda\kappa} - x'_{i\lambda}\, x'_{i\kappa} \right] \\ &= U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, I'_{\lambda\kappa}. \end{aligned} \tag{447}$$

Dieselbe Struktur einer Transformationsformel würden wir auch für ein sogenanntes *äußeres Produkt* von zwei Vektoren erhalten. Unter einem äußeren Produkt von zwei Vektoren mit den Komponenten a_α und b_β versteht man Ausdrücke $a_\alpha\, b_\beta$. Die Transformationsformel für solche äußeren Produkte folgt aus (444), nämlich

$$a_\alpha\, b_\beta = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, a'_\lambda\, b'_\kappa. \tag{448}$$

Allgemein bezeichnet man nun eine Größe $A_{\alpha\beta}$ als *Tensor* (2.Stufe), wenn sie sich unter einer orthogonalen Transformation $U_{\lambda\alpha}$ wie ein äußeres Produkt in (448) bzw. wie $I_{\alpha\beta}$ in (447) verhält, also wie

$$A_{\alpha\beta} = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, A'_{\lambda\kappa}. \tag{449}$$

Offenbar ist ein Tensor 2. Stufe eine Verallgemeinerung des Begriffs des Vektors, den man als "Tensor 1. Stufe" bezeichnen kann. Natürlich lassen sich nach diesem Schema auch Tensoren höherer als 2. Stufe definieren. Ein Skalar schließlich ist ein "Tensor 0. Stufe", der unter der Transormation $U_{\lambda\alpha}$ ungeändert bleibt.

1. **Skalar** (Tensor 0. Stufe):

$$a = a'. \tag{450}$$

2. **Vektor** (Tensor 1. Stufe):

$$a_\alpha = U_{\lambda\alpha}\, a'_\lambda. \tag{451}$$

3. **Tensor** (2. Stufe):

$$A_{\alpha\beta} = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, A'_{\lambda\kappa}, \tag{452}$$

bzw. in Matrizenschreibweise $A = \tilde{U}\, A'\, U$.

4. **Tensor** (3. Stufe):

$$A_{\alpha\beta\gamma} = U_{\lambda\alpha}\, U_{\kappa\beta}\, U_{\mu\gamma}\, A'_{\lambda\kappa\mu}, \tag{453}$$

usw. Wir werden auf diese Charakterisierung von Skalaren, Vektoren und Tensoren in der Relativitätstheorie zurückkommen. Dort wird es um die *4-Vektoren* und *4-Tensoren* gehen und ihr Verhalten unter Lorentz-Transformationen.

Wir kehren jetzt zum Trägheitstensor $I_{\alpha\beta}$ in (440) zurück. In (441) hatten wir schon bemerkt, daß der Trägheitstensor symmetrisch ist. Aus der linearen Algebra kennen wir den Satz, daß es zu jeder symmetrischen, reellen Matrix eine orthogonale Transformation U gibt, unter der die Matrix *Hauptachsengestalt* (Diagonalgestalt) annimmt. Angewendet auf den Trägheitstensor bedeutet dieser Satz, daß es eine orthogonale Transformation U in ein körperfestes Koordinatensystem $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ gibt, in dem der Trägheitstensor nur Diagonalelemente besitzt:

$$I' = U\, I\, \tilde{U} = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix}, \tag{454}$$

worin wir abkürzend $I'_1 \equiv I'_{11}$ geschrieben haben. (Die Ausdrucksweise $I'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\, I'_{\alpha\alpha}$ verbietet sich mit der Summationskonvention, wie wir sie bisher eingeführt haben). Die $I'_1, \ldots$ heißen die *Hauptträgheitsmomente*, und die Achsen $\boldsymbol{e}'_\alpha$ des körperfesten Koordinatensystems, in dem der Trägheitstensor eines starren Körpers Hauptachsengestalt hat, nennt man seine *Hauptträgheitsachsen*. Die Hauptträgheitsmomente haben die Struktur

$$I'_1 = \sum_i m_i \left(x'^2_2 + x'^2_3\right) > 0$$

usw. Wir lassen im folgenden die Striche in $I'_{\alpha\beta}$ usw. fort, indem wir annehmen, daß wir von vornherein die Hauptachsen zur Beschreibung der Achsenlage $\boldsymbol{n}$ gewählt haben. Das Trägheitsmoment $\Theta(\boldsymbol{n})$ um eine Achse $\boldsymbol{n}$, deren Richtungskosinus c_α relativ zu den Hauptträgheitsachsen angegeben sind, ist dann

$$\Theta(\boldsymbol{n}) = I_1\, c_1^2 + I_2\, c_2^2 + I_3\, c_3^2, \tag{455}$$

vgl. (439).

Das Trägheitsverhalten eines starren Körpers gegen Rotationen um eine Achse läßt sich durch den Begriff des *Trägheitsellipsoides* veranschaulichen. Wir ordnen jeder Achsenrichtung $\boldsymbol{n}$ (durch den Schwerpunkt des starren Körpers) einen Punkt $P(\boldsymbol{n})$ zu, der durch

$$\vec{OP}(\boldsymbol{n}) := \frac{1}{\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})}}\, \boldsymbol{n} \tag{456}$$

definiert sei. Wir bezeichnen die Komponenten des Ortsvektors von $P(\boldsymbol{n})$ mit s_α, also

$$\vec{OP}(\boldsymbol{n}) = s_\alpha\, \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad s_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})}}\, c_\alpha.$$

Daraus folgt

$$I_1\, s_1^2 + I_2\, s_2^2 + I_3\, s_3^2 == \frac{1}{\Theta(\boldsymbol{n})}\, \left(I_1\, c_1^2 + I_2\, c_2^2 + I_3\, c_3^2\right) = 1, \tag{457}$$

vgl. (455). Da $I_1 > 0, \ldots$, liegen die Punkte $P(\boldsymbol{n})$ offenbar auf einem Ellipsoid, dem sogenannten Trägheitsellipsoid. In Bezug auf sein mechanisches Rotationsverhalten hat also jeder Körper das "Aussehen" eines Ellipsoides. Die drei Hauptträgheitsmomente können auch gleich groß sein, so daß das Trägheitsellipsoid zu einer Trägheitskugel wird. Das ist sicher der Fall, wenn der starre Körper selbst eine Kugel (mit homogener Massenverteilung!) ist oder ein Würfel. Allerdings kann das Trägheitsellipsoid auch dann eine Kugel sein, wenn der starre Körper eine sehr unregelmäßige Form besitzt.

10.4 Zwangskräfte und Zwangsmomente auf die Achse

Ein starrer Körper, der auf einer raumfesten Achse $\boldsymbol{n}$ sitzt, wird in Rotation versetzt. Es sollen dann keine eingeprägten Kräfte mehr auf ihn wirken: $\boldsymbol{X}_i = 0$. In den Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt $\boldsymbol{R}$ und für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ treten nur noch die Zwangskräfte $\boldsymbol{Z}_i$ auf:

$$M\, \ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i m_i\, \ddot{\boldsymbol{r}}_i \;\; = \;\; \sum_i \boldsymbol{Z}_i, \tag{458}$$

$$\frac{d}{dt}\, \boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}\, \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \;\; = \;\; \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{Z}_i, \tag{459}$$

vgl. Abschnitte 5.1 und 5.2. Dort hatten wir auch bereits gezeigt, daß in diesen Bewegungsgleichungen keine Wechselwirkungskräfte mehr auftreten, also auch nicht mehr diejenigen Zwangskräfte, die die paarweise konstanten Abstände zwischen den Massenpunkten m_i des starren Körpers bewirken. Das ergab sich als Folge der Annahme, daß die Wechselwirkungskräfte das 3. Newton'sche Prinzip erfüllen und Zentralkräfte sein sollten. Also sind die in den obigen Bewegungsgleichungen (458) und (459) auftretenden Zwangskräfte $\boldsymbol{Z}_i$ ausschließlich Lagerkräfte, die nur auf die Massenpunkte m_i auf der Achse einwirken. Für den Drehimpuls $\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{L}$ in Achsenrichtung gilt sogar

$$\frac{d}{dt}\, \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{L} = \Theta(\boldsymbol{n})\, \dot{\omega} = 0, \tag{460}$$

vgl. (419) im Abschnitt 10.1. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen die auf den rechten Seiten von (458) und (459) auftretenden Resultierenden der Zwangskräfte und ihrer Momente verschwinden, also

$$\boldsymbol{Z} := \sum_i \boldsymbol{Z}_i = 0, \qquad \boldsymbol{\zeta} := \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{Z}_i = 0. \tag{461}$$

gilt. Wenn das der Fall ist, wirken keine Lagerkräfte und Lagermomente auf den Körper, also auch nicht auf die Achse.

Wir beschreiben die Achse $\boldsymbol{n}$ zunächst in einem raumfesten (inertialen) System $S: O,\ \boldsymbol{e}_\alpha,\ \alpha = 1,2,3$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$. Alle Massenpunkte m_i des starren Körpers bewegen sich mit der Führungsgeschwindigkeit

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i. \tag{462}$$

Daraus folgt mit $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ für die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_i &= \dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \\ &= -\left(\omega^2\, \boldsymbol{r}_i - (\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}_i)\, \boldsymbol{\omega}\right) = -\omega^2\ (\boldsymbol{r}_i - (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{r}_i)\, \boldsymbol{n})\,. \end{aligned} \tag{463}$$

Daraus berechnen wir zunächst die Resultierende der Zwangskräfte. Durch Multiplikation mit m_i und Summation über i folgt nämlich aus (463) unter Beachtung von (458)

$$\boldsymbol{Z} = \sum_i \boldsymbol{Z}_i = \sum_i m_i\, \ddot{\boldsymbol{r}}_i = -M\, \omega^2\ (\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{R})\, \boldsymbol{n})\,. \tag{464}$$

Die Resultierende $\boldsymbol{Z}$ ist offenbar die zur Fliehkraft des Schwerpunkts erforderliche Gegenkraft, die von den Achslagern aufzunehmen ist, wenn die Achse $\boldsymbol{n}$ raumfest bleiben soll. Wir fordern nun, daß $\boldsymbol{Z} = 0$:

$$\boldsymbol{Z} = 0: \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{R})\, \boldsymbol{n}, \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{n}, \tag{465}$$

d.h., $\boldsymbol{R}$ muß parallel zu $\boldsymbol{n}$, der Schwerpunkt muß auf der Achse liegen. Für das resultierende Moment der Zwangskräfte finden wir aus (463) und (459)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta} &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{Z}_i = \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{L} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \\ &= \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \\ &= -\omega^2 \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{r}_i - (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{r}_i)\, \boldsymbol{n}) = \\ &= \omega^2\, m_i\, (\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{r}_i)\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{466}$$

Mit $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$, s.o., wird $(\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{r}_i) = x_{i3}$, so daß die Komponenten von $\boldsymbol{\zeta}$

$$\zeta_1 = \omega^2 \sum_i m_i\, x_{i2}\, x_{i3}, \tag{467}$$

$$\zeta_2 = -\omega^2 \sum_i m_i\, x_{i1}\, x_{i3}, \tag{468}$$

$$\zeta_3 = 0. \tag{469}$$

lauten. Die Gleichung $\zeta_3 = 0$ entspricht offenbar der Bewegungsgleichung (460). Damit auch $\zeta_1 = 0$ und $\zeta_2 = 0$, müssen die Summen auf den rechten Seiten von (467) und (468) verschwinden. Die darin auftretenden Komponenten $x_{i\alpha}$ der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ der Massenpunkte m_i sind allerdings in einem raumfesten Koordinatensystem angegeben, d.h., sie sind zeitabhängig. Wir transformieren sie in ein körperfestes System $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3$. Diese Transformation in der $x_1 - x_2$–Ebene lautet

$$
\begin{aligned}
x_{i1} &= x'_{i1}\,\cos\omega\,t - x'_{i2}\,\sin\omega\,t,\\
x_{i2} &= x'_{i1}\,\sin\omega\,t + x'_{i2}\,\cos\omega\,t,\\
x_{i3} &= x'_{i3}.
\end{aligned}
\tag{470}
$$

Einsetzen der Transformation in (467) und (468) führt auf

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= \zeta'_1\,\cos\omega\,t + \zeta'_2\,\sin\omega\,t,\\
\zeta_2 &= -\zeta'_1\,\sin\omega\,t + \zeta'_2\,\cos\omega\,t
\end{aligned}
\tag{471}
$$

worin

$$
\zeta'_1 = \omega^2\,\sum_i m_i\,x'_{i2}\,x'_{i3}, \qquad \zeta'_2 = -\omega^2\,\sum_i m_i\,x'_{i1}\,x'_{i3}. \tag{472}
$$

Die Bedingungen $\zeta_1 = 0$ und $\zeta_2 = 0$ sind äquivalent zu den Bedingungen $\zeta'_1 = 0$ und $\zeta'_2 = 0$, weil die Transformationsmatrix in (471) nicht entartet ist: ihre Determinante D besitzt den Wert $D = 1$. Die Bedingungen $\zeta'_1 = 0$ und $\zeta'_2 = 0$ bedeuten, daß

$$
\sum_i m_i\,x'_{i2}\,x'_{i3} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_i m_i\,x'_{i1}\,x'_{i3} = 0, \tag{473}
$$

bzw., daß im körperfesten System die Nicht-Diagonalelemente I'_{13} und I'_{23} des Trägheitstensors verschwinden:

$$
I' = \begin{pmatrix} I'_{11} & I'_{12} & 0\\ I'_{21} & I'_{22} & 0\\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}. \tag{474}
$$

Mit anderen Worten: die Achse $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}'_3$ muß eine Hauptträgheitsachse des starren Körpers sein.

Eine unmittelbare Anwendung findet diese Überlegung beim Auswuchten von Reifen:

- Beim **statischen** Auswuchten wird der Schwerpunkt auf die Achse verschoben, so daß die resultierenden Achskräfte verschwinden: $\boldsymbol{Z} = 0$.
- Beim **dynamischen** Auswuchten ($\sim \omega^2$!) wird eine Hauptträgheitsachse des Reifens, übrigens die mit dem maximalen Hauptträgheitsmoment, in die Achsenrichtung gedreht, so daß die resultierenden Lagermomente verschwinden: $\zeta'_1 = 0$ und $\zeta'_2 = 0$.

10.5 Energie und Drehimpuls freier starrer Körper

Die Problemstellung in diesem und im folgenden Abschnitt ist die Dynamik eines freien starren Körpers, der nicht mehr an eine raumfeste Achse gebunden ist, auf den also keine Zwangskräfte oder Zwangsmomente wirken. Natürlich gibt es auch bei der Bewegung eines freien starren Körpers eine *momentane* Achsenrichtung $\boldsymbol{n}$, die jetzt allerdings ihre Orientierung relativ zu einem Inertialsystem zeitlich ändern kann. Da sich auch die Winkelgeschwindigkeit ω ändern können soll, verwenden wir zur Beschreibung der Bewegung des freien starren Körpers den Vektor $\boldsymbol{\omega}$.

Für die Beschreibung der Bewegung des freien starren Körpers sind drei Bezugssysteme denkbar:

- ein Inertialsystem K_0,
- ein Schwerpunktsystem K_s, dessen Ursprung im Schwerpunkt des starren Körpers liegt und das sich translatorisch relativ zu K_0 bewegt,
- ein körperfestes Schwerpunktsystem K, dessen Ursprung wie bei K_s im Schwerpunkt des starren Körpers liegt, das sich aber mit dem Körper mitdreht, also relativ zu K_s rotiert und relativ zu K_0 translatorisch *und* rotatorisch bewegt ist.

Bereits am Ende des Abschnitts 9.2 haben wir gezeigt, daß die Beschreibung der Zeitabhängigkeit von $\boldsymbol{\omega}$ von der Rotation von K relativ zu K_s bzw. K_0 nicht betroffen ist:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \ldots \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)'. \tag{475}$$

Es seien $\boldsymbol{r}_i$ die Ortsvektoren und $\boldsymbol{v}_i$ ihre Geschwindigkeiten im Inertialsystem, entsprechend $\boldsymbol{r}'_i$ und $\boldsymbol{v}'_i$ in einem Schwerpunktsystem. Dann gilt in jedem Fall

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i, & \sum_i m_i\,\boldsymbol{r}'_i &= 0, \\ \boldsymbol{v}_i &= \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{v}'_i, & \sum_i m_i\,\boldsymbol{v}'_i &= 0. \end{aligned} \tag{476}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,\boldsymbol{v}_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\,M\,\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \dot{\boldsymbol{R}} \sum_i m_i\,\boldsymbol{v}'_i + \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,\boldsymbol{v}_i'^2 \\ &= \frac{1}{2}\,M\,\dot{\boldsymbol{R}}^2 + T', \end{aligned} \tag{477}$$

worin

$$T' := \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,\boldsymbol{v}_i'^2. \tag{478}$$

T' hängt nicht mehr vom Schwerpunkt $\boldsymbol{R}$ und seiner Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{R}}$ ab. Ganz analog finden wir für den Drehimpuls des starren Körpers

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i\,\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = M\,\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{L}', \tag{479}$$

$$\boldsymbol{L}' = \sum_i m_i\,\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}'_i. \tag{480}$$

Im Schwerpunktsystem haben alle Massenpunkte m_i die Führungsgeschwindigkeit der Rotation mit $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i. \tag{481}$$

Wir setzen (481) in den Ausdruck für T' ein und drücken dann die Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{r}'_i$ durch ihre Komponenten ω'_α bzw. $x'_{i\alpha}$ im *körperfesten* System K aus. Die Rechnung folgt formal den Rechnungen in den Abschnitten 10.1 und 10.3:

$$T' = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,\boldsymbol{v}_i'^2 = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}_i'^2 - (\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}_i')^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\omega_\alpha'^2\, x_{i\mu}'^2 - \omega_\alpha'\,\omega_\beta'\, x_{i\alpha}'\, x_{i\beta}'\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[x_{i\mu}'^2\,\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}'\, x_{i\beta}'\right]\,\omega_\alpha'\,\omega_\beta' \\
&= \frac{1}{2}\, I_{\alpha\beta}'\,\omega_\alpha'\,\omega_\beta', \qquad (482) \\
I_{\alpha\beta}' &= \sum_i m_i \left[x_{i\mu}'^2\,\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}'\, x_{i\beta}'\right]. \qquad (483)
\end{aligned}
$$

$I_{\alpha\beta}'$ ist also der Trägheitstensor im körperfesten Bezugssystem K, und die kinetische Energie T' ist eine quadratische Form in den Komponenten ω_α' mit den $I_{\alpha\beta}'$ als Koeffizientenmatrix. Eine völlig analoge Rechnung ist für den Drehimpuls auszuführen:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}' &= \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i' = \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i' \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i') \\
&= \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}_i'^2\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}_i')\,\boldsymbol{r}_i'\right], \\
L_\alpha' &= \sum_i m_i \left[x_{i\mu}'^2\,\omega_\alpha' - \omega_\beta'\, x_{i\beta}'\, x_{i\alpha}'\right] \\
&= \sum_i m_i \left[x_{i\mu}'^2\,\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}'\, x_{i\beta}'\right]\,\omega_\beta' \\
&= I_{\alpha\beta}'\,\omega_\beta'. \qquad (484)
\end{aligned}
$$

Aus dieser Darstellung für die Komponente L_α' im körperfesten System K entnehmen wir, daß

$$
\boldsymbol{L}'\,\boldsymbol{\omega} = L_\alpha'\,\omega_\alpha' = I_{\alpha\beta}'\,\omega_\alpha'\,\omega_\beta' = 2\,T',
$$

vgl. (482), also

$$
T' = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{L}'\,\boldsymbol{\omega}. \qquad (485)
$$

Wenn das körperfeste System K Hauptachsenrichtung hat, also

$$
I' = \begin{pmatrix} I_1' & 0 & 0 \\ 0 & I_2' & 0 \\ 0 & 0 & I_3' \end{pmatrix}, \qquad (486)
$$

dann folgt aus (482) und (484)

$$
\begin{aligned}
T' &= \frac{1}{2}\left(I_1'\,\omega_1'^2 + I_2'\,\omega_2'^2 + I_3'\,\omega_3'^2\right), \qquad (487) \\
L_1' &= I_1'\,\omega_1', \qquad L_2' = I_2'\,\omega_2', \qquad L_3' = I_3'\,\omega_3'. \qquad (488)
\end{aligned}
$$

(488) besagt natürlich nicht etwa, daß $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ parallel seien.

Wir nehmen jetzt an, daß der starre Körper sich unter dem Einfluß einer Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ bewegt, die am Schwerpunkt angreift und auch nur von der Schwerpunktposition $\boldsymbol{R}$ abhängt. Zur Formulierung von Bewegungsgleichungen benutzen wir den Lagrange-Formalismus. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir den Ortsvektor $\boldsymbol{R}$ des Schwerpunkts bzw. seine drei Komponenten und außerdem drei weitere verallgemeinerte Koordinaten, die die Orientierung des starren Körpers im Schwerpunktsystem beschreiben. Wenn die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ ein Potential $V(\boldsymbol{R})$ besitzt,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = -\frac{\partial V(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}},$$

lautet die Lagrange-Funktion unter Zuhilfenahme von (477)

$$L = \frac{1}{2}\, M\, \dot{\boldsymbol{R}}^2 - V(\boldsymbol{R}) + T'. \tag{489}$$

Diese Lagrange-Funktion zeigt, daß die Schwerpunkt-Bewegung und die Orientierungsbewegung im Schwerpunktsystem völlig entkoppelt sind, weil die beiden ersten Terme in (489) nicht von den Orientierungskoordinaten bzw. ihren Geschwindigkeiten und T' nicht vom Ortsvektor des Schwerpunkts bzw. seiner Geschwindigkeit abhängen. Die Lagrange-Gleichung für die Schwerpunktbewegung liefert

$$M\, \ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}), \tag{490}$$

also eine Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Gesamtmasse M unter dem Einfluß der Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$. Wenn die auf den Schwerpunkt einwirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ kein Potential besitzt, tritt sie als verallgemeinerte Kraft in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}$$

auf und führt wiederum zur Bewegungsgleichung (490). Es verbleibt damit die Formulierung der Bewegungsgleichung für die Orientierungsbewegung im Schwerpunktsystem, der wir uns im folgenden Abschnitt zuwenden werden.

10.6 Die Euler'schen Gleichungen

Wir schließen direkt an die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts an. Da die Schwerpunktbewegung von der Orientierungsbewegung abkoppelt, beschreiben wir die letztere im Schwerpunktsystem. Die Lagrange-Funktion dafür lautet $L' = T'$. Da wir in diesem Abschnitt ausschließlich das Schwerpunktsystem verwenden, lassen wir im folgenden die Striche zwecks Unterscheidung von den Größen im Inertialsystem fort, also $L = T$. Von den beiden möglichen Versionen eines Schwerpunktsystems, die wir im vorhergehenden Abschnitt erwähnt haben, wählen wir das körperfeste Schwerpunktsystem K. Damit lautet die Lagrange-Funktion in Komponenten relativ zu K:

$$L = T = \frac{1}{2}\, I_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha\, \omega_\beta, \tag{491}$$

vgl. (482). Wir wählen jetzt die Komponenten ω_μ des Vektors $\boldsymbol{\omega}$ im körperfesten System K als verallgemeinerte Geschwindigkeiten. Das ist konsequent, weil der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ in jedem Augenblick

die Bewegung des starren Körpers vollständig beschreibt. Die zu den ω_μ gehörigen Lagekoordinaten treten in der Lagrange-Funktion L in (491) offenbar nicht auf. Das bedeutet, daß die $\partial L/\partial\omega_\mu$ Erhaltungsgrößen bzw. Integrale der Bewegung sind. Wir berechnen die $\partial L/\partial\omega_\mu$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \omega_\mu} &= \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \omega_\mu} (\omega_\alpha \omega_\beta) \\
&= \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \omega_\mu} \omega_\beta + \omega_\alpha \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \omega_\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha\mu} \omega_\beta + \delta_{\beta\mu} \omega_\alpha \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(I_{\mu\beta} \omega_\beta + I_{\alpha\mu} \omega_\alpha \right) \\
&= I_{\mu\beta} \omega_\beta, \qquad (492)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Summationsindex im zweiten Term von α in β umbenannt und von der Symmetrie des Trägheitstensors, $I_{\beta\mu} = I_{\mu\beta}$, Gebrauch gemacht haben. Wir vergleichen mit (484) und finden erwartungsgemäß, daß die Erhaltungsgrößen die Komponenten des Drehimpulses sind:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_\mu} = L_\mu \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{L}. \qquad (493)$$

Wegen der häufigen Verwendung des Symbols "L" hier noch einmal zur Erinnerung:

L :	Lagrange-Funktion,
$\boldsymbol{L}$:	Drehimpulsvektor,
L_μ :	Drehimpulskomponente μ im System K.

Wir können die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen also äquivalent auch in der Form

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{L} = 0 \qquad (494)$$

schreiben. Allerdings ist die Zeitableitung d/dt jetzt relativ zum *Inertialsystem* zu interpretieren, nicht etwa relativ zum körperfesten System K. Das folgt z.B. aus der Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem d'Alembert'schen Prinzip im Abschnitt 6.2, denn auch das d'Alembert'sche Prinzip war nur in Inertialsystemen formuliert worden. In rotierenden Bezugssystemen, zu denen das körperfeste System K gehört, treten zusätzliche Trägheitskräfte in den Lagrange-Gleichungen auf, die wir ja im Kapitel 9 explizit bestimmt haben. Da aber in (494) die zeitliche Ableitung eines Vektors auftritt, können wir die Transformationsformel anwenden, die wir im Abschnitt 9.2 für die Umrechnung von Zeitableitung von Vektoren zwischen inertialen und rotierenden Bezugssystemen kennengelernt haben, nämlich

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \right)' + \boldsymbol{\omega} \times \ldots . \qquad (495)$$

Somit folgt aus (494)

$$\left(\frac{d}{dt}\right)' \boldsymbol{L} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = 0. \tag{496}$$

Komponentenweise lautet diese Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)' L_1 + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 &= 0, \\
\left(\frac{d}{dt}\right)' L_2 + \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 &= 0, \\
\left(\frac{d}{dt}\right)' L_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{497}$$

Wir nehmen an, daß das körperfeste Koordinatensystem Hauptachsenlage besitzt, so daß

$$L_1 = I_1 \omega_1, \qquad L_2 = I_2 \omega_2, \qquad L_3 = I_3 \omega_3, \tag{498}$$

vgl. (488). Außerdem beachten wir, daß

$$\left(\frac{d}{dt}\right)' I_{\alpha\beta} = 0,$$

weil die Komponenten $I_{\alpha\beta}$ relativ zum körperfesten Bezugssystem K definiert waren, desgleichen die Ableitung $(d/dt)'$. Wir erhalten damit aus (497) die *Euler'schen Gleichungen*

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\, \omega_2 \omega_3 &= 0, \\
I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\, \omega_3 \omega_1 &= 0, \\
I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\, \omega_1 \omega_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{499}$$

worin

$$\dot{\omega}_1 := \left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)'$$

usw.

Die Euler'schen Gleichungen (499) stellen drei gekoppelte, nicht-lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung dar, deren Lösung sehr aufwendig ist. Wir wollen uns deshalb bei der analytischen Lösung auf den *symmetrischen Kreisel* beschränken, der durch $I_1 = I_2 =: I$ definiert ist. Aus den Euler'schen Gleichungen in (499) folgt dann

$$\dot{\omega}_3 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \omega_3 =: \omega_0 = \text{konstant}.$$

Einsetzen in die Gleichung für $\dot{\omega}_1$ liefert

$$I \dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\, \omega_0 \omega_2 = 0$$

und durch nochmaliges Differenzieren nach der Zeit

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{I - I_3}{I}\,\omega_0\,\dot{\omega}_2.$$

Hier setzen wir $\dot{\omega}_2$ aus (499) ein und erhalten

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2\,\omega_1, \qquad \Omega := \frac{I - I_3}{I}\,\omega_0. \tag{500}$$

Die Frequenz Ω ist offensichtlich aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Die Differentialgleichung (500) besitzt die Lösung

$$\omega_1(t) = \omega^*\,\cos\,(\Omega\,t + \varphi_0), \tag{501}$$

wo auch ω^* und φ_0 aus Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Wir setzen die Lösung (501) in die erste der Euler'schen Gleichungen (499) (für $\dot{\omega}_1$) ein und erhalten

$$\omega_2 = \frac{I}{I - I_3}\,\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_0} = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = -\omega^*\,\sin(\Omega\,t + \varphi_0). \tag{502}$$

Aus den Lösungen (501) und (502) entnehmen wir

$$\begin{aligned} \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) &= \omega^{*\,2} = \text{konstant}, \\ \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2 &= \omega^{*\,2} + \omega_0^2 = \text{konstant}. \end{aligned}$$

Wir definieren die Vektoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^*(t) : &= \omega_1(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \omega_2(t)\,\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{\omega}(t) : &= \boldsymbol{\omega}^*(t) + \omega_0\,\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

worin die $\boldsymbol{e}_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3$ die Basisvektoren des körperfesten Bezugssystems K sein sollen. In der Abbildung 23 ist nun der Bewegungsablauf mit den Vektoren $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ und $\boldsymbol{\omega}(t)$ dargestellt. Man beachte, daß der starre Körper dann noch mit der Winkelgeschwindigkeit $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ um die momentane Rotationsachse $\boldsymbol{n}(t) \sim \boldsymbol{\omega}(t)$ rotiert.

Im Fall **beliebiger Hauptträgheitsmomente** I_1, I_2, I_3 können wir eine geometrische Beschreibung der Bewegung geben, wobei wir als Beschreibungssystem nunmehr das translatorisch bewegte, also nicht mitrotierende Bezugssystem K_s wählen, s.o. Soweit wir aber Komponenten von Vektoren oder Tensoren verwenden, sollen diese wieder auf das körperfeste, also mitrotierende Bezugssystem K bezogen sein. Ausgangspunkt unserer geometrischen Darstellung sind die Erhaltungssätze für den Drehimpuls,

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{L} = 0,$$

vgl. (494), und für die Energie,

$$\frac{1}{2}\,M\,\dot{\boldsymbol{R}} + V(\boldsymbol{R}) + T' = \text{konstant}. \tag{503}$$

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die am Schwerpunkt angreifende Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ ein Potential $V(\boldsymbol{R})$ besitzt. Die Erhaltung der Energie folgt dann unmittelbar aus der zeitlichen Translationsinvarianz des Problems. Da die Schwerpunktsbewegung von der Orientierungsbewegung abkoppelt, gilt auch

Abbildung 23: Bewegungsablauf beim symmetrischen Kreisel.

$$T' = \text{konstant}. \tag{504}$$

Das Trägheitsellipsoid, vgl. Abschnitt 10.3, beschrieben im körperfesten Bezugssystem K, ist gegeben durch $I(\boldsymbol{s}) = 1$, worin

$$I(\boldsymbol{s}) = I_1\, s_1^2 + I_2\, s_2^2 + I_3\, s_3^2. \tag{505}$$

Wir bilden den Gradienten der Funktion $I(\boldsymbol{s})$ in einem Punkt $\boldsymbol{s}$ und erhalten für dessen 1-Komponente

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\, I(\boldsymbol{s}) = 2\, I_1\, s_1,$$

usw. für die anderen Komponenten. Der Gradient $\partial I(\boldsymbol{s})/\partial \boldsymbol{s}$ steht senkrecht auf den Flächen $I(\boldsymbol{s})$ =konstant, also auch senkrecht auf dem Trägheitsellipsoid $I(\boldsymbol{s}) = 1$. Wir betrachten nun den Punkt B auf dem Trägheitsellipsoid, dessen Ortsvektor $\boldsymbol{s}$ parallel zu $\boldsymbol{n}$ bzw. zu $\boldsymbol{\omega}$ ist. Der Ortsvektor $\boldsymbol{s}$ von B ist gegeben durch

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{n}}{\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})}},$$

weil

$$I(\boldsymbol{n}) = I_1\, c_1^2 + I_2\, c_2^2 + I_3\, c_3^2 = \Theta(\boldsymbol{n}),$$

vgl. Abschnitt 10.3. Im Punkt B lautet die 1-Komponente des Gradienten also

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\, I(\boldsymbol{s}) = \frac{2\, I_1\, c_1}{\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})}} = \frac{2\, I_1\, \omega_1}{\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})\, \omega^2}} = \frac{2\, L_1}{\sqrt{2\, T'}},$$

worin wir

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \omega_\alpha/|\boldsymbol{\omega}|, \\ L_1 &= I_1\, \omega_1, \qquad \text{vgl. (488)}, \\ T' &= \Theta(\boldsymbol{n})\, \omega^2/2, \qquad \text{vgl. Abschnitt 10.1} \end{aligned}$$

Abbildung 24: Abrollen des Trägheitsellipsoides von der invarianten Berührungsebene.

verwendet haben. Der vollständige Gradient auf $I(\boldsymbol{s}) = 1$ im Punkt B lautet also

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}} I(\boldsymbol{s}) = \sqrt{\frac{2}{T'}}\, \boldsymbol{L}. \tag{506}$$

Da $\boldsymbol{L}$ und T' zeitlich konstant sind, s.o., ist auch dieser Gradient zeitlich konstant. Es sei nun weiter E die Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{L}$, die das Trägheitsellipsoid im Punkt B berührt, vgl. auch Abbildung 24. Wir berechnen den Abstand a des Schwerpunkts (im Mittelpunkt des Trägheitsellipsoides) von der Ebene E:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{s}}{L} = \frac{\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{n}}{L\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})}} = \frac{\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\omega}}{L\sqrt{\Theta(\boldsymbol{n})\,\omega^2}} = \\ &= \frac{2\,T'}{L\sqrt{2\,T'}} = \frac{\sqrt{2\,T'}}{L} = \text{konstant}, \end{aligned} \tag{507}$$

worin wir außerdem $T' = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\omega}/2$ verwendet haben, vgl. (485). Damit gewinnen wir das folgende Bild, vgl. Abbildung 24: das Trägheitsellipsoid berührt die Ebene E, die senkrecht auf $\boldsymbol{L}$ =konstant steht, in einem Punkt B, der auf der momentanen Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ liegt. Das bedeutet, daß das Trägheitsellipsoid auf der Ebene E abrollt und nicht etwa schleift. Der Abstand a des Schwerpunkts von der Ebene E bzw. seine Höhe über der Ebene E ist konstant. Die Lage der Ebene E ist also invariant, man nennt sie deshalb auch *invariante Berührungsebene*.

11 Das Hamilton'sche Variationsprinzip

Bereits im Abschnitt 5.6 hatten wir ein *Variationsprinzip* für mechanische Systeme von Massenpunkten kennengelernt, nämlich das d'Alembert'sche Prinzip. Aus diesem Prinzip haben wir im Kapitel 6 die *Lagrange'schen Bewegungsgleichungen* hergeleitet. In diesem Kapitel werden wir nochmals auf das d'Alembert'sche Prinzip zurückgreifen und daraus eine andere Variationsformulierung mechanischer Systeme gewinnen, nämlich das *Hamilton'sche Variationsprinzip*. Die Bedeutung der Variationsprinzipien in der Physik besteht darin, daß sie sehr allgemeine Ansätze

für die Formulierung physikalischer Theorien darstellen und ebenso übrigens Ausgangspunkte für Approximationsmethoden. Ein besondere Aspekt des Hamilton'schen Prinzips ist, daß seine Form ohne weiteres auch auf nicht-mechanische Systeme übertragbar ist, z.B. auf Feldtheorien und sogar auf Quantenfeldtheorien.

11.1 Variation von Bahnen

Bei der Formulierung des d'Alembert'schen Prinzips

$$\sum_i \left(m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{X}_i\right)\,\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{508}$$

im Abschnitt 5.6 hatten wir differentielle *Variationen der Positionen* $\delta\boldsymbol{r}_i$ der Massenpunkte eines mechanischen Systems eingeführt. Da diese Variationen nicht notwendig differentielle Ausschnitte $d\boldsymbol{r}_i$ aus realen Bahnen waren, haben wir sie *virtuelle* Variationen genannt, also "denkbare" Variationen. Wie die realen Variationen $d\boldsymbol{r}_i$ längs realer Bahnen sollten aber die virtuellen Variationen $\delta\boldsymbol{r}_i$ auch die Zwangsbedingungen des Systems erfüllen, anderenfalls wären sie "nicht denkbar". Daß die virtuellen Variationen $\delta\boldsymbol{r}_i$ keine differentiellen Ausschnitte aus realen Bahnen sein mußten, drückte sich durch $\delta t = 0$ aus: die Zeit, präziser: der zeitliche Verlauf von Bahnen, wird nicht virtuell variiert.

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst den Begriff der virtuellen Variation erweitern, nämlich auf die Variation einer Bahn. Es seien $\boldsymbol{r}_i(t)$ reale Bahnen der Massenpunkte m_i eines Systems, $i = 1, 2, \ldots, N$. "Real" soll wieder bedeuten, daß diese Bahnen Lösungen der Bewegungsgleichungen unter gewissen Anfangsbedingungen sind. Wir fassen die Gesamtheit der Bahnen $\boldsymbol{r}_i(t)$ für alle $i = 1, 2, \ldots, N$ begrifflich zu *der* Bahn des Systems zusammen. Die Systembahn verläuft in dem $3\,N-$dimensionalen Produktraum der 3-dimensionalen Räume der einzelnen Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$. Wenn das System holonomen Zwangsbedingungen unterliegt und f die Anzahl seiner Freiheitsgrade ist, verläuft die Systembahn in einem $f-$dimensionalen Hyperraum des oben beschriebenen $3\,N-$dimensionalen Produktraums. Dieser Hyperraum ist im allgemeinen gekrümmt und kann auch zeitabhängig sein.

Es sei nun $\boldsymbol{r}_i(t),\ 1 \le i \le N$, eine reale Bahn im obigen Sinn. Wir betrachten im folgenden einen endlichen Ausschnitt dieser realen Bahn zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2. Es seien

$$\boldsymbol{r}_{i1} := \boldsymbol{r}_i(t_1), \qquad \boldsymbol{r}_{i2} := \boldsymbol{r}_i(t_2).$$

Jedem der realen Bahnpunkte $\boldsymbol{r}_i(t)$ im Zeitintervall $t_1 < t < t_2$ wird nun ein *variierter Bahnpunkt* $\boldsymbol{r}'_i(t)$ zugeordnet:

$$\boldsymbol{r}_i(t) \mapsto \boldsymbol{r}'_i(t). \tag{509}$$

(Der Strich in $\boldsymbol{r}'_i(t)$ bedeutet *nicht* etwa die Zeitableitung!). Die Zuordnung in (509) soll die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die variierten Bahnen $\boldsymbol{r}'_i(t)$ sollen wie die realen Bahnen $\boldsymbol{r}_i(t)$ stetig differenzierbare Funktionen der Zeit t sein.

2. Die Bahnvariationen

$$\delta \boldsymbol{r}_i(t) := \boldsymbol{r}'_i(t) - \boldsymbol{r}_i(t) \tag{510}$$

sollen *Differentiale* sein, d.h., auf die $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ sollen die Regeln für das Rechnen mit Differentialen 1. Ordnung anwendbar sein. Wegen 1. sind die Differentiale $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ offenbar auch stetig differenzierbare Funktionen der Zeit.

3. Da die Zuordnung in (509) jeweils zu gleichen Zeiten erfolgt, der Zeitablauf zwischen realer und variierter Bahn also nicht variiert wird, ist wieder

$$\delta t = 0. \tag{511}$$

4. Wie beim d'Alembert'schen Prinzip soll die variierte Bahn $\boldsymbol{r}'_i(t)$ ebenso wie die reale Bahn $\boldsymbol{r}_i(t)$ die Zwangsbedingungen des Systems erfüllen, also

   (a) Bei holonomen Zwangsbedingungen soll

$$\begin{aligned} & A_\mu(\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t), t) &&= 0 \\ \text{und} \quad & A_\mu(\boldsymbol{r}'_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}'_N(t), t) &&= 0 \end{aligned} \tag{512}$$

   für alle Zwangsbedingungen μ und für alle Bahnvariationen erfüllt sein. Daraus folgt

$$\sum_i \frac{\partial A_\mu}{\partial \boldsymbol{r}_i} \, \delta \boldsymbol{r}_i(t) = 0 \tag{513}$$

   für die Bahnvariationen.

   (b) Für nicht-holonome Zwangsbedingungen soll entsprechend

$$\sum_i \boldsymbol{a}_{\mu i} \, \delta \boldsymbol{r}_i(t) = 0 \tag{514}$$

   erfüllt sein, zur Schreibweise vgl. Abschnitt 5.5.

5. Zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 soll keine Variation ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_i(t_1) &= \boldsymbol{r}_i(t_1), \qquad \text{bzw.} \qquad \delta \boldsymbol{r}_i(t_1) = 0, \\ \boldsymbol{r}'_i(t_2) &= \boldsymbol{r}_i(t_2), \qquad \text{bzw.} \qquad \delta \boldsymbol{r}_i(t_2) = 0. \end{aligned} \tag{515}$$

Wir müssen bei der Konstruktion der variierten Bahnen zwei Typen von Differentialen unterscheiden:

- **Zeitliche** Bahndifferentiale $d\boldsymbol{r}_i$ oder $d\boldsymbol{r}'_i$ längs der realen oder variierten Bahn,
- **Variationsdifferentiale** $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ zu festen Zeiten t zwischen den realen und variierten Bahnen.

Diese beiden Differentiale sind unabhängig voneinander. Sie liegen in verschiedenen Differentialräumen bzw. betreffen verschiedene Bahneigenschaften.

Wir betrachten jetzt die Geschwindigkeiten längs der realen und der variierten Bahnen. Die Geschwindigkeiten längs der variierten Bahnen ist definiert als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i'(t) := \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}_i'(t) &= \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}_i(t) + \frac{d}{dt}\,\delta\boldsymbol{r}_i(t) \\ &= \boldsymbol{v}_i(t) + \frac{d}{dt}\,\delta\boldsymbol{r}_i(t), \end{aligned} \tag{516}$$

worin also $\boldsymbol{v}_i$ die Geschwindigkeit längs der realen Bahn ist. Wir definieren nun die *variierte Geschwindigkeit* in naheliegender Weise als

$$\delta\boldsymbol{v}_i(t) := \boldsymbol{v}_i'(t) - \boldsymbol{v}_i(t) = \frac{d}{dt}\,\delta\boldsymbol{r}_i(t). \tag{517}$$

Formal ist

$$\delta\boldsymbol{v}_i(t) = \delta\,\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}_i(t), \tag{518}$$

so daß aus (517) und (518) folgt

$$\frac{d}{dt}\,\delta\boldsymbol{r}_i(t) = \delta\,\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{r}_i(t) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{d}{dt}\,\delta = \delta\,\frac{d}{dt}. \tag{519}$$

Die Beziehung rechts in (519) ist als Operator-Beziehung zu lesen: die Operationen Zeitableitung und Bahnvariation kommutieren untereinander. Das drückt einmal mehr aus, daß Zeitableitung und Bahnvariationen unabhängig sind, bzw., daß $\delta t = 0$.

Mit der Variation von Bahnen werden auch Funktionen der Bahn wie z.B. kinetische Energie, potentielle Energie, Impuls, Drehimpuls usw. variiert. Es sei

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N, t) \tag{520}$$

eine differenzierbare Funktion der Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen im System, die auch noch explizit von der Zeit abhängen darf. Längs einer realen Bahn $\boldsymbol{r}_i(t)$ durchläuft diese Funktion die Werte

$$\Phi(t) := \Phi(\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t), \boldsymbol{v}_1(t), \ldots, \boldsymbol{v}_N(t), t)$$

und entsprechend längs einer variierten Bahn die Werte

$$\Phi'(t) := \Phi(\boldsymbol{r}_1'(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N'(t), \boldsymbol{v}_1'(t), \ldots, \boldsymbol{v}_N'(t), t).$$

Die Variation der Werte der Funktion $\Phi(t)$ lautet

$$\begin{aligned}\delta\Phi(t): &= \Phi'(t) - \Phi(t)\\ &= \Phi(\boldsymbol{r}_1(t) + \delta\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{v}_1(t) + \delta\boldsymbol{v}_1(t), \ldots, t) -\\ &\quad -\Phi(\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{v}_1(t), \ldots, t)\\ &= \sum_i \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{r}_i}\,\delta\boldsymbol{r}_i(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{v}_i}\,\delta\boldsymbol{v}_i(t) \right). \end{aligned} \tag{521}$$

11.2 Die Herleitung des Hamilton'schen Variationsprinzips

Die im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Bahnvariationen $\delta\boldsymbol{r}_i(t)$ erfüllen offenbar alle Bedingungen, die wir im Abschnitt 5.6 an die virtuellen Variationen im d'Alembert'schen Prinzip gestellt haben. Also gilt das d'Alembert'sche Prinzip auch für die Bahnvariationen $\delta\boldsymbol{r}_i(t)$:

$$\sum_i \left(m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{X}_i\right)\,\delta\boldsymbol{r}_i(t) = \sum_i \left(m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{X}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i(t)\right) = 0. \tag{522}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir im folgenden das Zeitargument $\ldots(t)$ fort. Umformung

$$\begin{aligned} m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i &= m_i\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i\right) - m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\frac{d}{dt}\,\delta\boldsymbol{r}_i,\\ m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\frac{d}{dt}\,\delta\boldsymbol{r}_i &= m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\delta\boldsymbol{v}_i = \delta\left(\frac{1}{2}\,m_i\,\boldsymbol{v}_i^2\right). \end{aligned}$$

Mit diesen Umformungen läßt sich das d'Alembert'sche Prinzip in (522) umformulieren in

$$\delta\left(\sum_i \frac{m_i}{2}\,\boldsymbol{v}_i^2\right) + \sum_i \boldsymbol{X}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{d}{dt}\,\sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i \tag{523}$$

oder auch

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}\,\sum_i m_i\,\boldsymbol{v}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i, \tag{524}$$

worin T die gesamte kinetische Energie ist,

$$T = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,\boldsymbol{v}_i^2,$$

und

$$\delta A := \sum_i \boldsymbol{X}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i. \tag{525}$$

Die Variation δT ist offenbar die Variation einer Funktion im Sinne der Funktionen Φ am Ende des vorhergehenden Abschnitts, nämlich der kinetischen Energie. Man sagt auch, daß δT ein *vollständiges* Variationsdifferential sei. Das gilt nicht notwendig von der sogenannten *Variationsarbeit* δA in (525), d.h., es gibt nicht notwendig eine Funktion Φ der Orte und der Geschwindigkeiten des Systems, deren Variation δA ist. Falls jedoch die eingepräften Kräfte $\boldsymbol{X}_i$ ein Potential

$$V = V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$$

besitzen, so daß

$$\boldsymbol{X}_i = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \tag{526}$$

dann wird

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{X}_i \, \delta \boldsymbol{r}_i = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \, \delta \boldsymbol{r}_i = -\delta V. \tag{527}$$

Für die weiteren Überlegungen setzen wir aber zunächst (526) nicht voraus. Wir integrieren (524) über die Zeit t von $t = t_1$ bis $t = t_2$:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \; (\delta T + \delta A) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \sum_i m_i \, \boldsymbol{v}_i \, \delta \boldsymbol{r}_i \\ &= \left[\sum_i m_i \, \boldsymbol{v}_i \, \delta \boldsymbol{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \end{aligned}$$

weil die Bahnvariationen $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ bei $t = t_1$ und bei $t = t_2$ voraussetzungsgemäß verschwinden. Damit erhalten wir das Hamilton'sche Variationsprinzip in seiner allgemeinen Version:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \; (\delta T + \delta A) = 0. \tag{528}$$

Bemerkungen zum Hamilton'schen Prinzip:

1. Das Hamilton'sche Prinzip ist ein *Integral-Variationsprinzip*: es vergleicht die tatsächlich (real) ablaufende Bahn mit infinitesimal variierten ("benachbarten") Bahnen und zeichnet sie durch die Extremalaussage (528) aus.

2. Das Hamilton'sche Prinzip gilt unter denselben allgemeinen Voraussetzungen wie das d'Alembert'sche Prinzip, also z.B. auch für nicht-konservative Kräfte und nicht-holonome Zwangsbedingungen.

3. Das Hamilton'sche Prinzip ist ein *teleologisches* Prinzip: es charakterisiert die tatsächlich realisierte Bahn durch eine Extremalaussage oder ein "Ziel", die ein endliches Stück der Bahn betreffen. Im Gegensatz dazu sind Bewegungsgleichungen vom Typ von Differentialgleichungen wie z.B. die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen *kausale* oder *deterministische* Bahnbeschreibungen. In ihnen entwickelt sich die Bahn zeitlich eindeutig aus vorzugebenden Anfangsbedingungen.

4. Im Gegensatz zum d'Alembert'schen Prinzip und auch im Gegensatz zu den Lagrange'schen Gleichungen verwendet das Hamilton'sche Prinzip keine spezielle Koordinatendarstellung. Diese Unabhängigkeit von jeglicher Darstellung erlaubt es, das Prinzip an den Anfang einer physikalischen Theorie zu stellen und die in ihm vorkommenden Größen aus reinen Invarianzschlüssen zu gewinnen.

Für **konservative** Kräfte $\boldsymbol{X}_i$ wird $\delta A = -\delta V$, vgl. (527), wo V eine Funktion der Orte $\boldsymbol{r}_i$ ist, so daß dann

$$\delta T + \delta A = \delta(T - V) = \delta L, \tag{529}$$

worin $L = T - V$ die Lagrange-Funktion ist. Jetzt können wir das Hamilton'sche Variationsprinzip in der Form

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L = \delta W = 0, \qquad W := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \tag{530}$$

schreiben. Bei dieser Umformulierung haben wir benutzt, daß

$$\int dt\, \delta \ldots = \delta \int dt\, \ldots,$$

also die Unabhängigkeit von zeitlicher Integration und Variation bzw. $\delta t = 0$. Die Größe W heißt *Wirkungsfunktion* und das Hamilton'sche Prinzip entsprechend auch das Prinzip extremaler (kleinster) Wirkung. Die Wirkungsfunktion W läßt sich bei der Formulierung einer physikalischen Theorie dadurch bestimmen, daß man von ihr die Invarianz gegen alle Symmetrie-Operationen fordert, denen die zu formulierende Theorie genügen soll. Bei diesen Invarianzen sind allerdings Terme vom Typ

$$W \to W + \frac{d}{dt}\, \Phi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_1, \ldots, t)$$

irrelevant, weil sie bei der Berechnung von δW in (530) herausfallen. Für die klassische Mechanik ist die wesentliche Symmetrie-Operation die Galilei-Transformation, gegen die die Wirkungsfunktion W bis auf die oben erwähnten Terme invariant sein muß. Wir werden bei der Formulierung der relativistischen Mechanik auf das Hamilton'sche Prinzip zurückkommen und dort die Invarianz gegen Lorentz-Transformationen fordern.

11.3 Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir die mathematischen Techniken dafür entwickeln, aus einem Integral-Variationsprinzip wie dem Hamilton'schen Prinzip Konsequenzen für den zeitlichen Bahnverlauf zu ziehen. Wir orientieren uns dabei an Extremalproblemen, wie sie uns aus der gewöhnlichen Differentialrechnung bekannt sind. Wenn es darum geht, ein Extremum einer Funktion $f(x)$ zu finden, berechnen wir die Ableitung $f'(x)$ und untersuchen, ob diese eine Nullstelle x_e besitzt, also $f'(x_e) = 0$. Bei $x = x_e$ liegt dann ein (lokales) Extremum von $f(x)$. (Durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung $f''(x_e)$ können wir entscheiden, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.) Dieses Extremalproblem ist auch als *Variationsaufgabe* formulierbar. Wir bilden die differentielle Variation

$$\delta f(x) = f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\, \delta x \tag{531}$$

und fragen, ob es einen Wert $x = x_e$ gibt, an dem die Variation $\delta f(x) = 0$ ist, "obwohl" die Variation $\delta x \neq 0$ gewählt wird. Diese Konstruktion ist eine andere Beschreibung des Begriffs des Extremums einer Funktion, führt aber offensichtlich zu demselben Kriterium, nämlich $f'(x_e) = 0$.

Auf dieselbe Weise können wir vorgehen, wenn wir ein (lokales) Extremum einer Funktion

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mehrerer Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suchen. Ein solches Extremum ist wieder dadurch beschreibbar, daß die Variation der Funktion,

$$\begin{aligned} \delta f &= f(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i, \end{aligned} \tag{532}$$

verschwinden soll, $\delta f = 0$, wenn die Variationen δx_i der Variabeln beliebig (aber natürlich differentiell) wählbar sind. Als Bedingung für ein lokales Extremum bei x_{ie}, $1 \leq i \leq n$, folgt daraus, daß

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_i = x_{ie}} = 0 \qquad \text{für alle} \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{533}$$

Die nächste Verallgemeinerungsstufe in unseren Überlegungen ist das Extremum eines *Funktionals*. Formal definiert man ein Funktional als eine Zuordnung der Werte einer Funktion $x(t)$ in einem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ zu einer reellen Wert f, geschrieben $f = f[x(t)]$:

$$x(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \; \mapsto f = f[x(t)]. \tag{534}$$

Man kann diese Definition als eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Funktion mehrerer Variabler lesen:

$$x_i, \quad 1 \leq i \leq n \; \mapsto f = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{535}$$

Die Anzahl der Variabeln eines Funktionals ist nicht abzählbar unendlich. Die kontinuierlichen Werte von t ersetzen die diskreten Indizes i. Wir stellen die analogen Begriffsbildungen für eine Funktion endlich vieler Variabeln und für ein Funktional nebeneinander:

$$\begin{aligned} x_i,\ 1 \leq i \leq n &\cong x(t),\ t_1 \leq t \leq t_2 \\ \delta x_i,\ 1 \leq i \leq n &\cong \delta x(t),\ t_1 \leq t \leq t_2 \\ f(x_1, \ldots, x_n) &\cong f[x(t)] \\ \delta f = f(x_1 + \delta x_1, \ldots) - f(x_1, \ldots) &\cong \delta f = f[x(t) + \delta x(t)] - f[x(t)] \\ \delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i &\cong \delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\delta f}{\delta x(t)} \delta x(t). \end{aligned} \tag{536}$$

Durch die letzte Zeile in (536) ist zugleich auch bereits die *Funktional-Ableitung* $\delta f / \delta x(t)$ definiert. Diese Definition soll durch ein Beispiel erläutert werden. Es sei $K(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist durch

$$f[x(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt \, K(x(t)) \tag{537}$$

ein Funktional definiert. Als "Variable" darf hier jede (z.B. stetige) Funktion $x(t)$ auftreten. Wir berechnen die Variation δf dieses Funktionals:

$$\begin{aligned}\delta f &= f[x(t)+\delta x(t)] - f[x(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ (K(x(t)+\delta x(t)) - K(x(t))) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, K'(x(t))\, \delta x(t), \end{aligned} \tag{538}$$

worin $K'(x)$ die Ableitung von $K(x)$ ist:

$$K'(x) := \frac{dK(x)}{dx}.$$

Wir vergleichen (538) mit der letzten Zeile in (536) und finden für die Funktionalableitung

$$\frac{\delta f}{\delta x(t)} = K'(x(t)). \tag{539}$$

Wir suchen jetzt die Bedingung dafür, daß ein Funktional (lokal) extremal ist. Wir bemühen nochmals die Analogie der Funktion mehrerer Variabeln. Ein Extremum war dort durch einen ganzen Satz $x_{ie},\ 1 \le i \le n$ von Werten der Variabeln gekennzeichnet, vgl. (533). Das Extremum eines Funktionals wird also gemäß unserer Analogie durch eine bestimmte Funktion $x_e(t)$ gekennzeichnet werden. Aus der letzten Zeile von (536) entnehmen wir, daß $\delta f = 0$ für beliebige (differentielle) Variationen $\delta x(t)$ erfüllt ist, wenn die Funktionalableitung verschwindet:

$$\frac{\delta f}{\delta x(t)} = 0 \qquad \text{für alle} \qquad t_1 \le t \le t_2. \tag{540}$$

Für unser Beispiel-Funktional in (537) ist die Funktionalableitung durch (539) gegeben. Also lautet die Bedingung für ein Extremum unseres Beispiel-Funktionals

$$K'(x(t)) = 0. \tag{541}$$

Dieses ist eine Funktionalgleichung, aus der die Funktion $x(t) = x_e(t)$ zu berechnen ist, für die das Beispiel-Funktional extremal wird. Wenn z.B. $K(x)$ (als Funktion von x!) ein Extremum bei $x = x_e$ besitzt, dann ist offenbar $x_e(t) = x_e$ =konstant eine Lösung für das Extremum des Beispiel-Funktionals.

Wir erweitern jetzt unsere bisherige Begriffsbildung von Funktionalen in der Weise, daß ein Funktional nicht nur von Funktionen $x(t)$, sondern auch von deren (zeitlicher) Ableitung $\dot{x}(t)$ abhängen können soll:

$$f = f[x(t), \dot{x}(t)], \qquad t_1 \le t \le t_2. \tag{542}$$

Für die Variation eines solchen Funktionals erhalten wir jetzt

$$\delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{\delta f}{\delta x(t)}\, \delta x(t) + \frac{\delta f}{\delta \dot{x}(t)}\, \delta \dot{x}(t) \right). \tag{543}$$

Hierin ist $\delta \dot{x}(t)$ die $t-$Ableitung der Variation $\delta x(t)$:

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\, \delta x(t).$$

Das bedeutet, daß $\delta x(t)$ und $\delta\dot{x}(t)$ nicht mehr unabhängige Variationen sind, denn der Verlauf von $\delta\dot{x}(t)$ ist mit $\delta x(t)$ festgelegt. Wenn wir also jetzt das Extremum des Funktionals $f = [x(t), \dot{x}(t)]$ bestimmen wollen, also $\delta f = 0$ auswerten, dann folgt aus (543) *nicht* etwa, daß die Funktionalableitungen $\delta f/\delta x(t)$ und $\delta f/\delta\dot{x}(t)$ verschwinden. Wir führen im Integranden in dem Ausdruck für δf in (543) eine partielle Integration durch:

$$\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\,\delta\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\,\left(\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\,\delta x(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\right)\,\delta x(t).$$

Einsetzen in (543) ergibt

$$\begin{aligned}\delta f &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left(\frac{\delta f}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\right)\,\delta x(t) + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\,\left(\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\delta x(t)\right).\end{aligned} \tag{544}$$

Nun ist aber

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\,\left(\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\delta x(t)\right) = \left[\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\,\delta x(t)\right]_{t_1}^{t_2} = 0,$$

wenn wir annehmen, daß die Variationen $\delta x(t)$ an den Intervallgrenzen $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden. Damit haben wir

$$\delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left(\frac{\delta f}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)}\right)\,\delta x(t). \tag{545}$$

Die Variationen $\delta x(t)$ sind jetzt aber frei wählbar, so daß aus $\delta f = 0$

$$\frac{\delta f}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\delta f}{\delta\dot{x}(t)} = 0 \tag{546}$$

folgt. Dieses ist eine Funktional-Differential-Gleichung, aus der die Funktion $x(t) = x_e(t)$, für die $f = f[x(t), \dot{x}(t)]$ extremal wird, zu berechnen ist.

Als Beispiel diskutieren wir ein Funktional

$$f[x(t), \dot{x}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\,K\left(x(t), \dot{x}(t)\right), \tag{547}$$

worin $K(x, y)$ eine stetig differenzierbare Funktion von x, y ist. Für die Variation δf erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta f &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta K\left(x(t), \dot{x}(t)\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left(K_x\left(x(t), \dot{x}(t)\right)\,\delta x(t) + K_y\left(x(t), \dot{x}(t)\right)\,\delta\dot{x}(t)\right),\end{aligned} \tag{548}$$

worin K_x und K_y die partiellen Ableitungen der Funktion $K(x, y)$ sind:

$$K_x(x,y) := \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}, \qquad K_y(x,y) := \frac{\partial K(x,y)}{\partial y}.$$

Wir vergleichen (548) mit (543) und finden

$$\frac{\delta f}{\delta x(t)} = K_x\left(x(t), \dot{x}(t)\right), \qquad \frac{\delta f}{\delta \dot{x}(t)} = K_y\left(x(t), \dot{x}(t)\right). \tag{549}$$

Damit können wir sofort die Extremalbedingung (546) für unser Beispiel formulieren, nämlich

$$K_x\left(x(t), \dot{x}(t)\right) - \frac{d}{dt} K_y\left(x(t), \dot{x}(t)\right) = 0, \tag{550}$$

in verkürzter Schreibweise auch

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{551}$$

(550) bzw. (551) heißt *Euler-Lagrange'sche* Differentialgleichung zu dem Extremalproblem

$$f[x(t), \dot{x}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, K\left(x(t), \dot{x}(t)\right) = \text{Extremum}. \tag{552}$$

Aus der Struktur von (551) ist zu erkennen, daß die Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung zu (552) im allgemeinen eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $x(t)$ ist.

11.4 Die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen des Hamilton'schen Prinzips

Das Beispiel für das Extremum eines Funktionals am Ende des vorhergehenden Abschnitts war bereits so gewählt, daß wir es direkt auf das Hamilton'sche Prinzip für konservative Kräfte anwenden können. Dieses lautet für einen Freiheitsgrad $f = 1$, beschrieben durch eine verallgemeinerte Koordinate q und ihre Geschwindigkeit $\dot{q}$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(q(t),\, \dot{q}(t), t\right) = \text{Extremum}. \tag{553}$$

Daß hier im allgemeinen - im Umterschied zu unserer Schreibweise in (552) - in der Lagrange-Funktion L noch eine explizite Zeitabhängigkeit auftreten kann, ändert nichts an den Überlegungen im vorhergehenden Abschnitt, weil die Zeit nicht variiert wird: $\delta t = 0$. Die Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung (551) ist äquivalent zur Lagrange'schen Gleichung für unser Problem mit $f = 1$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{554}$$

Es ist auch unmittelbar einleuchtend, wie wir die Euler-Lagrange'schen Gleichungen für den Fall mehrerer Freiheitsgrade $f \geq 1$ zu verallgemeinern haben. Hier ist

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(q_1(t), \ldots, q_f(t),\, \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_f(t), t\right). \tag{555}$$

Für die Variation δW folgt daraus

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j(t) \right]. \tag{556}$$

Es ist wieder $\delta W = 0$ auszuwerten. Alle Umformungen, die wir dazu im vorhergehenden Abschnitt durchgeführt haben, insbesondere die partielle Integration im zweiten Term im Integranden in (556), denken wir uns jetzt unabhängig für jeden Freiheitsgrad $j = 1, 2, \ldots, f$ durchgeführt. Das ist möglich, weil die verallgemeinerten Koordinaten unabhängig gewählt wurden. Folglich finden wir als Ergebnis die Lagrange'schen Gleichungen für jede der verallgemeinerten Koordinaten q_j:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \text{für alle} \qquad j \neq 1,\, 2, \ldots, f. \tag{557}$$

12 Kanonische Theorie, Hamilton'sche Gleichungen

Die kanonische Theorie der Mechanik ist ein sehr allgemeiner, formaler Rahmen zur Formulierung von mechanischen Bewegungsgleichungen, von Erhaltungssätzen, von Transformationen zwischen Bezugssystemen usw. Die kanonische Theorie geht jedoch weit über den Rahmen der Mechanik hinaus: auch Feldtheorien wie z.B. die klassische Feldtheorie (Maxwell'sche Gleichungen) sind in der kanonischen Theorie beschreibbar. Von der kanonischen Theorie gibt es einen sehr einfachen und direkten Übergang in die Quantentheorie: die klassische *Poisson-Klammer*, die wir später in diesem Kapitel kennenlernen werden, wird durch den quantentheoretischen Kommutator ersetzt. Außerdem bietet die kanonische Theorie einen sehr allgemeinen Ansatz für das Konzept eines invarianten Maßes zur Formulierung von Wahrscheinlichkeiten in der statistischen Physik.

Wir werden bei der Formulierung der kanonischen Theorie von der Lagrange'schen Theorie ausgehen. Der entscheidende Schritt dabei ist, den Satz der verallgemeinerten Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten,

$$q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f,$$

durch den Satz

$$q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f$$

zu ersetzen, worin die p_j die zu den q_j konjugierten oder auch *kanonisch konjugierten* Impulse sind,

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \tag{558}$$

die wir bereits im Kapitel 7 eingeführt haben. Die Ersetzung der unabhängigen Variabeln x in einer Funktion $y = f(x)$ durch die Ableitung $u = f'(x)$ als neue unabhängige Variable ist in der Mathematik als *Legendre-Transformation* bekannt. Wir befassen uns deshalb im folgenden Abschnitt zunächst mit der Legendre-Transformation, die uns übrigens auch in der Thermodynamik wiederbegegnen wird.

12.1 Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$, in Analogie zur Lagrange-Funktion $L = L(q, \dot{q}, t)$, wobei $x \cong \dot{q}$. Die Variabeln q und die Zeit t werden von der Transformation nicht berrührt und deshalb in diesem Abschnitt nicht explizit mitgeschrieben. Das Ziel ist, die bisherige unabhängige Variable x durch die Ableitung $u = f'(x)$ als neue Variable zu ersetzen. Der Funktionswert y soll also nicht mehr als der Wert von $y = f(x)$ an einer Stelle x, sondern als der Wert y beschrieben werden, für den die Ableitung $f'(x)$ den Wert $u = f'(x)$ besitzt. Wir nehmen an, daß $u = f'(x)$ umkehrbar ist. Das ist der Fall, wenn

$$f''(x) \neq 0. \tag{559}$$

Die Umkehrbeziehung zu $u = f'(x)$ sei $x = \varphi(u)$:

$$u = f'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(u). \tag{560}$$

Einsetzen in die Funktion $y = f(x)$ liefert dann

$$y = f(\varphi(u)) =: F(u). \tag{561}$$

Bei dieser Ausführung der Transformation geht jedoch ein Teil der zuvor in $y = f(x)$ enthaltenen Information verloren, weil die Rekonstruktion von $y = f(x)$ aus

$$y = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

der Lösung einer Differentialgleichung entspricht, bei der y nur bis auf eine additive Konstante bestimmt werden kann. Wenn diese Art der Transformation im Fall der Lagrange-Funktion durchgeführt würde, könnte die additive "Konstante" noch eine Funktion von q und t sein. Eine andere Audrucksweise des Problems lautet: die gesamte Funktionenschar $y = f(x) + a$ mit $a =$konstant würde auf denselben Zusammenhang $y = F(u)$ abgebildet werden. Um den vollen Zusammenhang $y = f(x)$ nach einer Transformation $u = f'(x)$ rekonstruieren zu können, wird deshalb auch die abhängige Größe y transformiert, nämlich

$$y \mapsto z := x\, f'(x) - f(x) = \varphi(u)\, u - f(\varphi(u)) =: g(u). \tag{562}$$

Die neue abhängige Größe z hat eine einfache geometrische Bedeutung: es ist der negative $y-$Achsenabschnitt der Tangente, die im Punkt x an die Kurve $y = f(x)$ angelegt wird, vgl. Abbildung 25. Die Gesamtheit der Werte $(u, -z)$ beschreibt also eine Tangentenschar, die die Originalkurve $y = f(x)$ einhüllt, vgl. Abbildung 26.
Wir wollen die Beziehung $z = g(u)$ in (562) nochmals einer Legendre-Transformation unterziehen. Um die neue unabhängige Variable $v = g'(u)$ zu identifizieren, berechnen wir $g'(u)$ aus (562):

$$g'(u) = \varphi'(u)\, u + \varphi(u) - f'\left(\varphi(u)\right)\, \varphi'(u). \tag{563}$$

Nun ist

$$f'\left(\varphi(u)\right) = u,$$

weil $f'(x)$ und $\varphi(u)$ Umkehrfunktionen zueinander sind, vgl. (560). Somit folgt aus (563)

Abbildung 25: Transformierte Variable z als negativer $y-$Achsenabschnitt der Tangente.

Abbildung 26: Tangenten als Einhüllende.

$$g'(u) = \varphi(u) = x, \tag{564}$$

d.h., durch eine nochmalige Legendre Transformation kommen wir auf die ursprüngliche unabhängige Variable x zurück. Auch die (559) entsprechende Bedingung für die Ausführbarkeit der zweiten Legendre-Transformation ist erfüllt, denn

$$g''(u) = \varphi'(u) = \frac{1}{f''(x)} \neq 0,$$

vgl. (559). Wir berechnen die neue abhängige Variable nach der zweiten Legendre-Transformation und erhalten unter Verwendung von (564):

$$w := u\, g'(u) - g(u) = u\, x - (x\, u - f) = f, \tag{565}$$

d.h., nach zweimaliger Ausführung einer Legendre-Transformation erhalten wir auch die ursprüngliche abhängige Variable f zurück.

12.2 Die Hamilton'schen Gleichungen

Wir wenden die Legendre-Transformation aus dem vorhergehenden Abschnitt auf die Lagrange-Funktion L als Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\dot{q}$ an. Die Variabeln q und t bleiben von der Legendre-Transformation unberührt. Wir haben also die folgenden Entsprechungen zur Bezeichnung im vorhergehenden Abschnitt:

$$y \cong L, \qquad x \cong \dot{q}, \qquad u \cong \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} =: p. \tag{566}$$

Wie bereits einleitend zu diesem Kapitel erwähnt, heißt p der zu q konjugierte oder auch kanonisch konjugierte Impuls. Damit nun

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = p$$

nach $\dot{q}$ auflösbar ist, muß

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \tag{567}$$

erfüllt sein, vgl. (559). Die transformierte Funktion nach (562) lautet dann

$$z \cong \dot{q}\, p - L =: H \tag{568}$$

und heißt die *Hamilton-Funktion*. Sie ist jetzt als Funktion der q, p, t zu interpretieren: $H = H(q, p, t)$. Natürlich transformieren sich auch die Lagrange'schen Gleichungen unter der Legendre-Transformation. Um deren transformierte Form zu finden, bilden wir die vollständigen Differentiale von L und H:

$$L = L(q, \dot{q}, t): \qquad dL = \frac{\partial L}{\partial q}\, dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt, \tag{569}$$

$$H = H(q, p, t): \qquad dH = \frac{\partial H}{\partial q}\, dq + \frac{\partial H}{\partial p}\, dp + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt. \tag{570}$$

Andererseits folgt aus (568)

$$dH = \dot{q}\,dp + p\,d\dot{q} - dL. \tag{571}$$

Wir setzen dL aus (569) in (571) ein:

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}\,dp + p\,d\dot{q} - dL \\ &= \dot{q}\,dp + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\,dq - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt \\ &= \dot{q}\,dp - \frac{\partial L}{\partial q}\,dq - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt, \end{aligned} \tag{572}$$

weil definitionsgemäß nach (566)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Wir vergleichen den Ausdruck für dH in (572) mit (570) und finden daraus

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{573}$$

Mit der Definition (566) für den verallgemeinerten Impuls p und mit Verwendung der ersten der Beziehungen in (573) transformiert sich die Lagrange-Gleichung in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{574}$$

Diese Gleichung zusammen mit der zweiten Beziehung in (573) sind die *Hamilton'schen Gleichungen*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{575}$$

Die Hamilton-Funktion H ist wie die Lagrange-Funktion L durch das physikalische System vorgegeben. Die Hamilton'schen Gleichungen in (575) sind zwei Differentialgleichungen je 1. Ordnung, aus denen $q = q(t)$ und $p = p(t)$ als Funktionen der Zeit zu lösen sind. Diese beiden Differentialgleichungen 1. Ordnung ersetzen die Lagrange-Gleichung, die eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $q = q(t)$ darstellt.

Wir haben den Übergang von der Lagrange- in die Hamilton-Theorie hier zunächst in der Schreibweise für einen Freiheitsgrad $f = 1$ dargestellt. Alle Überlegungen lassen sich sinngemäß sofort auf den Fall mehrerer Variabeln übertragen. Wir gehen wieder von der Lagrange-Funktion aus:

$$L = L\left(q_1, \ldots, \dot{q}_1, \ldots, t\right).$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind definiert als

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, f. \tag{576}$$

Die Bedingung für die Auflösbarkeit nach den $\dot{q}_j$ ist jetzt

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_j\,\partial\dot{q}_k}\right) \neq 0, \tag{577}$$

vgl. (567). Analog zu (568) lautet die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j\, p_j - L\left(q_1, \ldots, \dot{q}_1, \ldots, t\right). \tag{578}$$

Wir bilden die vollständigen Differentiale wie in (569) und (570):

$$dL = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, d\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt, \tag{579}$$

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\, dp_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt. \tag{580}$$

Andererseits folgt aus (578)

$$dH = \sum_j \left(\dot{q}_j\, dp_j + p_j\, d\dot{q}_j\right) - dL. \tag{581}$$

Eine Umformung analog zu (572) ergibt daraus

$$dH = \sum_j \left(\dot{q}_j\, dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \tag{582}$$

Wir vergleichen mit dem Ausdruck für dH in (580) und finden analog zu (573):

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{583}$$

Aus den Lagrange'schen Gleichungen wird

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Die Hamilton'schen Gleichungen lauten also

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \tag{584}$$

12.3 Erhaltungssätze und Poisson-Klammern

In diesem Abschnitt werden wir eine sehr kompakte und elegante Formulierung dafür finden, daß eine mechanische Variable erhalten ist. Erhaltungssätze hatten wir bisher im Formalismus der Lagrange-Theorie als Konsequenzen von Invarianzen kennengelernt: Impulserhaltung als Folge der räumlichen Translationsinvarianz, Drehimpulserhaltung als Folge der räumlichen Isotropie und Energierhaltung als Folge der zeitlichen Translationsinvarianz. Alle drei Variabeln, Impuls, Drehimpuls und Energie, können wir allgemein als *Phasenraumfunktionen* auffassen, d.h., als Funktionen, die von den kanonischen Variabeln und von der Zeit abhängen:

$$\Phi = \Phi(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t). \tag{585}$$

Wir bilden nun die *totale* Zeitableitung einer beliebigen Phasenraumfunktion Φ und erhalten dafür unter Beachtung der Hamilton'schen Gleichungen (584)

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ &= \{\Phi, H\} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \tag{586}$$

In der letzten Zeile haben wir die Schreibweise der *Poisson-Klammer* eingeführt, die allgemein für zwei Phasenraumfunktionen

$$f = f(q_1, \ldots, p_1, \ldots, t), \qquad g = g(q_1, \ldots, p_1, \ldots, t)$$

definiert ist als

$$\{f, g\} := \sum_j \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right\}. \tag{587}$$

Die allgemeine Beziehung (586) für Phasenraumfunktionen gilt natürlich auch z.B. für $\Phi = q_k$ und $\Phi = p_k$, also

$$\frac{d}{dt} q_k = \dot{q}_k = \{q_k, H\}, \qquad \frac{d}{dt} p_k = \dot{p}_k = \{p_k, H\}. \tag{588}$$

Es ist nämlich

$$\{q_k, H\} = \sum_j \left\{ \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\}$$

und

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \delta_{kj}, \qquad \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0,$$

so daß

$$\{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{589}$$

und analog

$$\{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \tag{590}$$

so daß die Gleichungen (588) wieder auf die Hamilton'schen Gleichungen (584) führen.

Wenn die totale Zeitableitung einer Phasenraumfunktion verschwindet, also gemäß (586)

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\Phi, H\} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{591}$$

dann heißt Φ ein *Integral der Bewegung* bzw. in unserer früheren Nomenklatur auch eine Erhaltungsgröße. Wenn Φ nicht explizit von der Zeit abhängt, also $\partial\Phi/\partial t = 0$, dann reduziert sich die Feststellung, ob Φ ein Integral der Bewegung ist, auf

$$\{\Phi, H\} = 0. \tag{592}$$

Wir wenden (591) auf die Hamilton-Funktion H selbst an. Es ist

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

weil aus der Definition (587) für die Poisson-Klammer für beliebige Phasenraumfunktionen f sofort

$$\{f, f\} = 0 \tag{593}$$

folgt. Wenn also die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist sie ein Integral der Bewegung: H =konstant. Wenn das System auch *zeitlich translationsinvariant* ist, dann folgte aus der Lagrange-Theorie (vgl. Abschnitt 7.4), daß

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 2\,T. \tag{594}$$

Damit ist auch $\partial H/\partial t = 0$, vgl. (583), und es folgt weiter aus der Definition der Hamilton-Funktion (578)

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = 2\,T - (T - V) = T + V. \tag{595}$$

Für zeitlich translationsinvariante Systeme ist die Hamilton-Funktion H ein Integral der Bewegung und hat die Bedeutung der Gesamtenergie.

Die Poisson-Klammern werden uns im Laufe dieses Kapitels noch weiter beschäftigen; in der Quantentheorie sind sie durch den Kommutator der Operatoren der Größen zu ersetzen, die in den klassischen Poisson-Klammern stehen. Wir führen hier jetzt noch einige grundlegende Eigenschaften der Poisson-Klammern auf.

1. $$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{596}$$

   wie unmittelbar aus der Definition (587) folgt. Insbesondere ist

   $$\{f, f\} = 0,$$

   vgl. (593).

2. Wenn c nicht von den Phasenraumvariabeln q_j, p_j abhängt, ist

   $$\{f, c\} = 0. \tag{597}$$

3. Die Poisson-Klammer ist in beiden Argumenten *bilinear*:

$$\begin{aligned} \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\}\,, \\ \{f, g_1 + g_2\} &= \{f, g_1\} + \{f, g_2\}\,. \end{aligned} \tag{598}$$

4.

$$\{f_1 \cdot f_2, g\} = f_1\ \{f_2, g\} + f_2\ \{f_1, g\}\,. \tag{599}$$

Diese Eigenschaft läßt sich unmittelbar aus der Definition der Poisson-Klammer in (587) beweisen.

5.

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{600}$$

Auch diese Eigenschaft folgt direkt aus der Definition der Poisson-Klammer in (587).

6.

$$\{q_k, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \{p_k, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{601}$$

Diese Beziehung hatten wir bereits oben für H statt f benutzt, vgl. (589) und (590). Insbesondere ist

$$\{q_k, q_j\} = 0, \qquad \{p_k, p_j\} = 0, \qquad \{q_k, p_j\} = \delta_{kj}. \tag{602}$$

7. Es gilt die *Jacobi'sche Identität*:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{603}$$

Die Terme in der Gleichung (603) entstehen auseinander (von links nach rechts) durch zyklische Permutationen

$$f \to g \to h \to f \to \ldots$$

.

Wir formulieren den Beweis für den Fall nur eines Freiheitsgrades. Dann tritt nur ein Paar (q, p) auf. Die Verallgemeinerung auf mehrere (q_k, p_k) ist unmittelbar einleuchtend. Als Abkürzung benutzen wir die Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial q}\,(\ldots) =: (\ldots)_1, \qquad \frac{\partial}{\partial p}\,(\ldots) =: (\ldots)_2.$$

Es ist

$$\{g, \{h, f\}\} = g_1\ (h_1\, f_2 - h_2\, f_1)_2 - g_2\ (h_1\, f_2 - h_2\, f_1)_1\,. \tag{604}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist eine *homogene* lineare Form in den zweiten Ableitungen von f und h. Wir werten die rechte Seite aus und schreiben aber zunächst nur die Terme mit zweiten Ableitungen von f explizit aus:

$$\{g,\{h,f\}\} = g_1\,h_1\,f_{22} - (g_1\,h_2 + g_2\,h_1)\;f_{12} + g_2\,h_2\,f_{11} + \ldots \tag{605}$$

Die Terme in $\ldots$ enthalten zweite Ableitungen von h. Ebenso ist

$$\begin{aligned}\{h,\{f,g\}\} &= \\ &= h_1\;(f_1\,g_2 - f_2\,g_1)_2 - h_2\;(f_1\,g_2 - f_2\,g_1)_1 \\ &= -g_1\,h_1\,f_{22} + (g_1\,h_2 + g_2\,h_1)\;f_{12} + g_2\,h_2\,f_{11} + \ldots .\end{aligned} \tag{606}$$

Die Terme in $\ldots$ enthalten zweite Ableitungen von g. Wir addieren (605) und (606) und erkennen, daß sich die Terme mit den zweiten Ableitungen von f aufheben. Der Ausdruck

$$\{f,\{g,h\}\}$$

enthält keine Terme mit zweiten Ableitungen von f. Also fallen aus dem Ausdruck auf der linken Seite von (603) sämtliche Terme mit zweiten Ableitungen von f heraus. Da dieser Ausdruck aber invariant gegen zyklische Vertauschung von $f, g, h, f, \ldots$ ist, fallen aus ihm alle zweiten Ableitungen heraus. Oben haben wir festgestellt, daß dieser Ausdruck eine homogene, lineare Form in den zweiten Ableitungen ist. Daraus folgt, daß der Ausdruck auf der linken Seite von (603) überhaupt verschwindet, womit der Nachweis der Jacobi'schen Identität erbracht ist.

Wir zeigen schließlich noch: wenn Φ und Ψ beides Integrale der Bewegung sind, also

$$\{\Phi,H\} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \qquad \{\Psi,H\} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0, \tag{607}$$

vgl. (591), dann ist es auch die Poisson-Klammer $\{\Phi,\Psi\}$. Zunächst ist nach (586)

$$\frac{d}{dt}\,\{\Phi,\Psi\} = \{\{\Phi,\Psi\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\,\{\Phi,\Psi\}\,. \tag{608}$$

Für den ersten Ausdruck auf der rechten Seite von (608) benutzen wir die Jacobi'sche Identität (603):

$$\{\{\Phi,\Psi\},H\} = -\{\{\Psi,H\},\Phi\} - \{\{H,\Phi\},\Psi\}\,.$$

Für den zweiten Ausdruck verwenden wir (600). Einsetzen in (608) führt auf

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\{\Phi,\Psi\} &= -\{\{\Psi,H\},\Phi\} - \{\{H,\Phi\},\Psi\} + \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t},\Psi\right\} + \left\{\Phi,\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\} \\ &= \left\{\{\Phi,H\} + \frac{\partial\Phi}{\partial t},\Psi\right\} + \left\{\Phi,\{\Psi,H\} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\} = 0,\end{aligned} \tag{609}$$

vgl. (607), womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Als Beispiele für das Rechnen mit Poisson-Klammern diskutieren wir den Drehimpuls eines Teilchens (der Masse m)

$$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}. \tag{610}$$

Die einzelnen Komponenten des Drehimpulses lauten

$$\begin{aligned} L_1 &= x_2\,p_3 - x_3\,p_2, \\ L_2 &= x_3\,p_1 - x_1\,p_3, \\ L_3 &= x_1\,p_2 - x_2\,p_1. \end{aligned} \tag{611}$$

Zunächst berechnen wir die Poisson-Klammer $\{L_1, L_2\}$:

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \frac{\partial L_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L_2}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial L_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_2}{\partial x_\alpha} \right\} \\ &= \frac{\partial L_1}{\partial x_3}\frac{\partial L_2}{\partial p_3} - \frac{\partial L_1}{\partial p_3}\frac{\partial L_2}{\partial x_3} \\ &= x_1\,p_2 - x_2\,p_1 = L_3. \end{aligned} \tag{612}$$

Die übrigen Poisson-Klammern zwischen den L_α folgen daraus durch zyklische Permutationen. Die Beziehung (612) wird in der Quantentheorie eine wichtige Rolle spielen. Dort sind die Poisson-Klammern durch *Kommutatoren* zwischen den *Operatoren* der Drehimpulse zu ersetzen. Die Beziehung (612) besagt dann, daß zwei Komponenten des Drehimpulses nicht gleichzeitig scharf bestimmbar sind, präziser, daß sie kein gemeinsames System von Eigenzuständen besitzen. Dagegen kommutiert das Quadrat des Drehimpulses $\boldsymbol{L}^2$ mit jeder Komponente, hier in der klassischen Mechanik: die Poisson-Klammer zwischen $\boldsymbol{L}^2$ und jeder Komponente L_α verschwindet. Wir benutzen beim Nachweis die folgenden Beziehungen, die durch elementare Rechnungen leicht zu bestätigen sind:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^2 &= (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{r}^2\,\boldsymbol{p}^2 - (\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p})^2, \\ \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial x_\alpha} &= 2\,x_\alpha\,\boldsymbol{p}^2 - 2\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p})\,p_\alpha, \\ \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial p_\alpha} &= 2\,p_\alpha\,\boldsymbol{r}^2 - 2\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p})\,x_\alpha. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \left\{\boldsymbol{L}^2, L_1\right\} &= \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L_1}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_1}{\partial x_\alpha} \right\} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial x_2}\frac{\partial L_1}{\partial p_2} - \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial p_2}\frac{\partial L_1}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial x_3}\frac{\partial L_1}{\partial p_3} - \frac{\partial \boldsymbol{L}^2}{\partial p_3}\frac{\partial L_1}{\partial x_3} = 0, \end{aligned} \tag{613}$$

und ebenso für die anderen Komponenten, also insgesamt

$$\left\{\boldsymbol{L}^2, L_\alpha\right\} = 0. \tag{614}$$

Das Teilchen bewege sich in einem Potential $V = V(\boldsymbol{r})$. Dann lautet seine Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{r}). \tag{615}$$

Aus (615) folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = V'_\alpha, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{m}\,p_\alpha,$$

worin

$$V'_\alpha := \frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha}.$$

Damit berechnen wir die Poisson-Klammer zwischen H und L_1:

$$\begin{aligned}
\{H, L_1\} &= \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial L_1}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial L_1}{\partial x_\alpha} \right\} \\
&= \frac{\partial H}{\partial x_2}\,\frac{\partial L_1}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x_2} \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial x_3}\,\frac{\partial L_1}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\,\frac{\partial L_1}{\partial x_3} \\
&= V'_3\,x_2 - V'_2\,x_3,
\end{aligned} \tag{616}$$

und analog für die anderen Komponenten von L_α. Wenn das Potential *rotationssymmetrisch* ist, also

$$V(\boldsymbol{r}) = V(r),$$

dann ist

$$V'_\alpha = \frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha} = V'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = V'(r)\,\frac{x_\alpha}{r} \tag{617}$$

mit

$$V'(r) := \frac{\partial V(r)}{\partial r}.$$

(617) in (616) eingesetzt ergibt

$$\{H, L_\alpha\} = 0. \tag{618}$$

Bei der Bewegung eines Teilchens in einem rotationssymmetrischen Potential ist sein Drehimpuls (als Vektor) erhalten. Übrigens gilt dann auch

$$\left\{H, \boldsymbol{L}^2\right\} = 0. \tag{619}$$

Um das nachzuweisen, benutzen wir als Hilfsformel

$$\begin{aligned}\left\{f, g^2\right\} &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g^2}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g^2}{\partial q} \\ &= 2\,g\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\right) \\ &= 2\,g\,\{f, g\}\,, \end{aligned} \tag{620}$$

also

$$\begin{aligned}\left\{H, \boldsymbol{L}^2\right\} &= \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{H, L_\alpha^2\right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{3} 2\,L_\alpha\,\{H, L_\alpha\} = 0. \end{aligned} \tag{621}$$

12.4 Die Wirkungsfunktion in der kanonischen Theorie

Im Abschnitt 11.4 haben wir gezeigt, daß sich die Lagrange'schen Gleichungen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen aus dem *Hamilton'schen Prinzip* herleiten lassen, also aus

$$\delta\, W = 0, \qquad W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t), \tag{622}$$

worin W die *Wirkungsfunktion* ist. Wir haben in (622) die Schreibweise für nur einen Freiheitsgrad verwendet, d.h., für nur ein Paar kanonischer Variabeln (q, p). Wir werden aber im folgenden diese Schreibweise als Abkürzung auch für den Fall mehrerer Freiheitsgrade mit einer beliebigen Anzahl von Paaren $(q_k,\, p_k)$ verwenden. Die Übertragung von einem auf mehrere Paare kanonischer Variabeln ist unmittelbar einleuchtend. So bedeutet z.B.

$$\dot{q}\,p \cong \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k\, p_k$$

usw.

Natürlich lassen sich auch die Hamilton'schen Gleichungen aus einem Variationsprinzip gewinnen. Wegen des im Abschnitt 12.2 dargestellten Zusammenhangs zwischen der Lagrange-Funktion L und der Hamilton-Funktion H lautet dieses offensichtlich

$$\delta W = 0, \qquad W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\dot{q}\,p - H\right). \tag{623}$$

Wir führen die Variation durch und erhalten

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\delta\left(\dot{q}\,p\right) - \delta H\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\dot{q}\,\delta p + p\,\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\,\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\,\delta p\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[p\,\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\,\delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\,\delta p\right] \end{aligned} \tag{624}$$

In der letzten Zeile von (624) führen wir eine partielle Integration durch, und zwar im ersten Term des Integrals:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dt\, p\, \delta\dot{q} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, p\, \frac{d}{dt}\, \delta q \\ &= [p\, \delta q]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{p}\, \delta q.\end{aligned}$$

Einsetzen in (624) ergibt

$$\delta W = [p\, \delta q]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[-\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\, \delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\, \delta p \right]. \tag{625}$$

Mit

$$\delta q(t_1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \delta q(t_2) = 0$$

als Randbedingungen für die Variation folgen aus $\delta W = 0$ die Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{626}$$

wenn wir die Variationen δq und δp als *unabhängig* annehmen. Wir vergleichen nochmals die beiden Beschreibungen mechanischer (und später auch nicht-mechanischer) Systeme:

	Lagrange	Hamilton
unabh. Variabeln	q	q, p
unabh. Variationen	δq	δq, δp
Gleichungen: für $(1 \le k \le f)$	f Diff'gl. 2. Ord. $q_k = q_k(t)$	$2\,f$ Diff'gl. 1. Ord. $q_k = q_k(t),\ p_k = p_k(t)$

Die Gleichung (625) läßt noch eine weitere Interpretation zu. Wir diskutieren die Wirkungsfunktion W längs der *tatsächlichen* Bahn als Funktion der oberen Grenze. Dazu denken wir uns die Definition von W in (622) umformuliert in

$$W = \int_{t_1}^{t} dt'\, L(q(t'), \dot{q}(t'), t'). \tag{627}$$

Mit der tatsächlichen Bahn $q(t')$ ist natürlich auch deren Geschwindigkeit $\dot{q}(t')$ festgelegt, so daß in dieser Interpretation die Wirkungsfunktion W zu einer Funktion von q allein, außerdem natürlich von dem Zeitpunkt t der oberen Grenze wird: $W = W(q, t)$. (Die untere Grenze sei zunächst fest.) Längs der tatsächlichen Bahn verschwindet das Integral in (625), so daß wir

$$\delta W = p\, \delta q, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial W}{\partial q} = p \tag{628}$$

erhalten. Die Abhängigkeit von der Zeit t der oberen Grenze kann in (625) nicht auftreten, weil dort $\delta t = 0$ gesetzt worden war. Aus (622) und (623) folgt aber durch Differentiation nach der Zeit t der oberen Grenze

$$\frac{dW}{dt} = L = \dot{q}\, p - H \tag{629}$$

und andererseits

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW(q,t)}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{630}$$

Der Vergleich von (629) mit (630) führt nochmals auf (628) und zusätzlich auf

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H. \tag{631}$$

Die beiden Aussagen (628) und (631) lassen sich zusammenfassen zu

$$dW = p\,dq - H\,dt. \tag{632}$$

Wenn die Wirkungsfunktion als Funktion der unteren *und* oberen Grenze interpretiert wird, also

$$W = W(q_2,\, t_2,\, q_1,\, t_1),$$

dann ist (632) zu erweitern zu

$$dW = p_2\,dq_2 - p_1\,dq_1 - H_2\,dt_2 + H_1\,t_1. \tag{633}$$

12.5 Kanonische Transformationen

Die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ in der Lagrange-Theorie ist lediglich dadurch eingeschränkt, daß diese die Zwangsbedingungen des Systems erfüllen sollen. Jede umkehrbare und differenzierbare ("diffeomorphe") Transformation

$$q_j = q_j(Q_1, \ldots, Q_f, t) \qquad \text{bzw.} \qquad Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_f, t) \tag{634}$$

für $j = 1, \ldots, f$ führt auf neue mögliche verallgemeinerte Koordinaten $Q_1, \ldots, Q_f$. Die Lagrange-Funktion ist entsprechend zu transformieren:

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(Q, \dot{Q}, t),$$

worin q und Q wieder Kurzschreibweisen für den Satz $q_1, \ldots, q_f$ bzw. $Q_1, \ldots, Q_f$ sind. Nach Festlegung der verallgemeinerten Koordinaten q sind die *kanonisch konjugierten Impulse* allerdings ebenfalls festgelegt, denn es ist

$$p_j = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{bzw.} \qquad P_j = \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}_j}. \tag{635}$$

Die Konstruktion möglicher *kanonischer Transformationen*

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(Q_1, \ldots, Q_f,\, P_1, \ldots, P_f,\, t) \\ p_j &= p_j(Q_1, \ldots, Q_f,\, P_1, \ldots, P_f,\, t) \end{aligned} \tag{636}$$

muß den Zusammenhang (635) einschließen, so daß nicht jede umkehrbare, differenzierbare Transformation vom Typ (636) eine erlaubte kanonische Transformation ist. Wir wollen den

Begriff einer kanonischen Transformation durch die Forderung präzisieren, daß sie die Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{637}$$

forminvariant in

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \qquad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \tag{638}$$

überführt. Dabei soll allerdings eine transformierte Hamilton-Funktion H' anstelle der ursprünglichen Hamilton-Funktion H auftreten können. Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gezeigt, daß die Hamilton'schen Gleichungen (637) aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \; (\dot{q}\, p - H) = 0 \tag{639}$$

hervorgehen. Wir fordern nun, daß auch die transformierten Hamilton'schen Gleichungen (638) aus einem Variationsprinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \; \left(\dot{Q}\, P - H'\right) = 0 \tag{640}$$

hervorgehen und daß die beiden Variationsprinzipien (639) und (640) äquivalent sind. Die Schreibweisen in (639) und (640) sollen wieder den Fall mehrerer Variabeln einschließen, also

$$\dot{q}\, p \cong \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j\, p_j \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{Q}\, P \cong \sum_{j=1}^{f} \dot{Q}_j\, P_j.$$

Mit dieser Äquivalenzforderung erfüllen wir die Bedingung, daß eine kanonische Transformation die Hamilton'schen Gleichungen forminvariant ineinander überführt. (639) und (640) sind genau dann äquivalent, wenn die Integranden sich nur um eine totale Zeitableitung einer Funktion Φ unterscheiden, die von den alten und neuen kanonischen Variabeln q, p und Q, P abhängen kann, also

$$\dot{q}\, p - H = \dot{Q}\, P - H' + \frac{d\Phi}{dt}, \tag{641}$$

denn es ist

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\Phi}{dt} = \delta \left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = 0.$$

Hier sind Φ_2 und Φ_1 die Werte der Funktion Φ an den Integrationsgrenzen $t = t_2$ und $t = t_1$, und es wurde von der Randbedingung des Variationsprinzips Gebrauch gemacht, daß die Variationen an den Grenzen $t = t_2$ und $t = t_1$ verschwinden sollen. Wir formen (641) um in

$$p\, dq - H\, dt = P\, dQ - H'\, dt + d\Phi$$

bzw.

$$d\Phi = p\, dq - P\, dQ + (H' - H)\, dt, \tag{642}$$

woraus

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{643}$$

folgt. Die Funktion Φ heißt die *Erzeugende* der kanonischen Transformation (636). Sie ist gemäß (643) als Funktion von q und Q zu interpretieren,

$$\Phi = \Phi(q, Q, t),$$

und im übrigen beliebig vorgebbar. Durch eine Legendre-Transformation

$$\Psi := \Phi - Q\,\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = \Phi + Q\,P \tag{644}$$

können wir auch zu einer Funktion Ψ übergehen, für die aus (644) und (642)

$$d\Psi = d\Phi + P\,dQ + Q\,dP = p\,dq + Q\,dP + (H' - H)\,dt \tag{645}$$

bzw.

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial \Psi}{\partial P}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{646}$$

folgt. Hier ist offenbar nun Ψ als Funktion von q, P und t beliebig vorgebbar: $\Psi = \Psi(q,\, P, t)$. Durch weitere, entsprechende Legendre-Transformationen lassen sich auch Vorgaben von Funktionen von p, Q, t und p, P, t erreichen. (Im Vergleich zur Nomenklatur des Abschnitts 12.1 ist die Legendre-Transformation in (644) mit dem umgekehrten Vorzeichen definiert.) Alle hier aufgeführten Beziehungen für kanonische Transformationen gelten sinngemäß auch für den Fall mehrerer Freiheitsgrade, z.B. (642)

$$d\Phi = \sum_{j=1}^{f} (p_j\,dq_j - P_j\,dQ_j) + (H' - H)\,dt \tag{647}$$

und (643)

$$p_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j}, \qquad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{648}$$

worin Φ als Funktion der q_j und Q_j und t beliebig vorgebbar ist usw.

Als Beispiele für kanonische Transformationen erwähnen wir zuerst die **identische Transformation**, die durch die Erzeugende

$$\Psi(q, P) := q\,P \tag{649}$$

gegeben ist, denn gemäß (646) ist dann

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial q} = P, \qquad Q = \frac{\partial \Psi}{\partial P} = q$$

und wegen $\partial\Psi/\partial t = 0$ auch $H' = H$. Die Transformation mit der Erzeugenden

$$\Phi(q, Q) := q\,Q \tag{650}$$

vertauscht die Bedeutung der Namen "Koordinate" und "Impuls", denn gemäß (643) ist

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} = Q, \qquad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = -q,$$

außerdem wieder $H' = H$, weil $\partial\Phi/\partial t = 0$. Damit finden wir als Entsprechungen in den Hamilton'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}. \end{aligned}$$

Wir können mit unserem Formalismus für kanonische Transformationen auch **differentielle** kanonische Transformationen erzeugen, in denen Q, P sich von den q, p nur durch Differentiale (1. Ordnung) unterscheiden:

$$Q = q + dq, \qquad P = p + dp. \tag{651}$$

Diese Transformation läßt sich erzeugen durch einen Ansatz

$$\Psi = q\,P + d\Psi. \tag{652}$$

Die Erzeugende Ψ weicht also nur differentiell, nämlich um $d\Psi$ von der Transformation ab, die gemäß (649) die identische Transformation erzeugt. Die Transformationsformeln (646) lauten jetzt

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \Psi}{\partial q} = P + \frac{\partial}{\partial q}\, d\Psi, \\ Q &= \frac{\partial \Psi}{\partial P} = q + \frac{\partial}{\partial P}\, d\Psi, \end{aligned} \tag{653}$$

bzw.

$$\begin{aligned} dp = P - p &= -\frac{\partial}{\partial q}\, d\Psi, \\ dq = Q - q &= \frac{\partial}{\partial P}\, d\Psi. \end{aligned} \tag{654}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial P}\, d\Psi = \frac{\partial}{\partial p}\, d\Psi + \text{Differentiale 2. Ordnung},$$

weil p und P sich selbst um Differentiale 1. Ordnung unterscheiden. Im Sinne von Differentialen 1. Ordnung läßt sich (654) also ersetzen durch

$$dp = -\frac{\partial}{\partial q}\, d\Psi, \qquad dq = \frac{\partial}{\partial p}\, d\Psi. \tag{655}$$

Bisher war über $d\Psi$ noch nicht entschieden worden, d.h., $d\Psi$ ist noch frei wählbar. Wir wählen

$$d\Psi := H\,dt, \tag{656}$$

so daß (655) übergeht in

$$dp = -\frac{\partial H}{\partial q}\,dt, \qquad dq = \frac{\partial H}{\partial p}\,dt,$$

bzw. in

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{657}$$

Dieses sind die Hamilton'schen Gleichungen. Damit haben wir gezeigt, daß die Bewegung des Systems im Phasenraum der q, p als eine Folge von differentiellen kanonischen Transformationen interpretiert werden kann. Natürlich ist dann auch eine endliche Bewegung im Phasenraum,

$$q,\, p,\, t \to Q,\, P,\, t + \tau, \tag{658}$$

eine (endliche) kanonische Transformation. Die Wirkungsfunktion W für die Bahn zwischen den Zeiten t und $t + \tau$ lautet gemäß (623) im vorhergehenden Abschnitt

$$W(Q, t+\tau, q, t) = \int_t^{t+\tau} dt'\ (\dot{q}\,p - H)\,. \tag{659}$$

Bei differentieller Änderung um dt längs der tatsächlichen Bahn folgt daraus gemäß (633)

$$dW = P\,dQ - p\,dq - (H' - H)\,dt, \tag{660}$$

worin $H = H(q, p, t)$ und $H' = H(Q, P, t + \tau)$. Wir vergleichen mit (642) und sehen, daß $-W$ die Erzeugende der kanonischen Transformation der Systembewegung im Phasenraum ist.

12.6 Invarianten kanonischer Transformationen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir kanonische Transformationen

$$(q, p) \mapsto (Q, P) = (Q(q, p, t), P(q, p, t)) \tag{661}$$

durch die Forderung bestimmt, daß sie die Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, f, \tag{662}$$

forminvariant in sich überführen, also in

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \qquad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}, \tag{663}$$

worin H' die transformierte Hamilton-Funktion ist. Wie bei allen Transformationen oder Abbildungen in der Mathematik und Physik ist die Frage nach den Invarianten der jeweiligen Transformation interessant. Die Bedeutung von Invarianten haben wir auch in dieser Vorlesung bereits kennengelernt, z.B. im Zusammenhang mit dem Hamilton'schen Prinzip im Kapitel 11. Eine Invariante ist offenbar die Form der Hamilton'schen Gleichungen. Wir zeigen jetzt, daß

die *Poisson-Klammern* ebenfalls invariant gegen kanonische Transformationen sind. Wir beginnen mit der Beziehung, die die totale Zeitableitung einer Phasenraumfunktion $f = f(q,p,t)$ ausdrückt:

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}_{(q,p)} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{664}$$

Hier bedeutet

$$\{f,g\}_{(q,p)} := \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} \right). \tag{665}$$

Wir verwenden in diesem Abschnitt die Indizierung der Poisson-Klammer mit den Variabeln (q,p), weil wir später auch Poisson-Klammern mit kanonisch transformierten Variabeln (Q,P) diskutieren werden.

Wir setzen in (664) die Phasenraumfunktion $f = Q_j$, worin (Q,P) durch eine beliebige kanonische Transformation aus den Variabeln (q,p) hervorgegangen sein sollen. Da Q_j nicht *explizit* von der Zeit abhängt, $\partial Q_j/\partial t = 0$, ist

$$\frac{dQ_j}{dt} = \{Q_j,H\}_{(q,p)} = \sum_k \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \tag{666}$$

Wir stellen die partiellen Ableitungen von H nach den Variabeln (q,p) durch die entsprechenden Ableitungen nach den kanonisch transformierten Variabeln (Q,P) dar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \sum_l \left(\frac{\partial H}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \sum_l \left(\frac{\partial H}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right). \end{aligned} \tag{667}$$

Einsetzen von (667) in (666) und Umordnen der Terme führt auf

$$\begin{aligned} \frac{dQ_j}{dt} &= \sum_{k,l} \frac{\partial H}{\partial Q_l}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right) \\ &\quad + \sum_{k,l} \frac{\partial H}{\partial P_l}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_l \left(\frac{\partial H}{\partial Q_l}\{Q_j,Q_l\}_{(q,p)} + \frac{\partial H}{\partial P_l}\{Q_j,P_l\}_{(q,p)} \right). \end{aligned} \tag{668}$$

Andererseits ist natürlich

$$\frac{dQ_j}{dt} = \{Q_j,H\}_{(Q,P)} = \frac{\partial H}{\partial P_j}. \tag{669}$$

Wir vergleichen (668) und (669): die rechten Seiten müssen im gesamten Phasenraum übereinstimmen. Daraus folgt

$$\{Q_j, Q_l\}_{(q,p)} = 0, \qquad \{Q_j, P_l\}_{(q,p)} = \delta_{jl}. \tag{670}$$

Die obigen Umformungen von (666) bis (669) können wir in gleicher Weise auch für dP_j/dt statt dQ_j/dt durchführen. Wir erhalten dann zusätzlich zu (670) auch noch $\{P_j, P_l\}_{(q,p)} = 0$, insgesamt also

$$\{Q_j, Q_l\}_{(q,p)} = 0, \qquad \{P_j, P_l\}_{(q,p)} = 0, \qquad \{Q_j, P_l\}_{(q,p)} = \delta_{jl}. \tag{671}$$

Da natürlich auch

$$\{Q_j, Q_l\}_{(Q,P)} = 0, \qquad \{P_j, P_l\}_{(Q,P)} = 0, \qquad \{Q_j, P_l\}_{(Q,P)} = \delta_{jl}, \tag{672}$$

haben wir gezeigt, daß die Poisson-Klammern zwischen kanonischen Variabeln invariant gegen kanonische Transformationen sind. Dieses Ergebnis läßt sich nun auf Poisson-Klammern $\{f, g\}$ zwischen beliebigen Phasenraumfunktionen f, g verallgemeinern. Es ist

$$\{f, g\}_{(q,p)} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right). \tag{673}$$

Die partiellen Ableitungen nach den q, p werden wie in (667) durch partielle Ableitungen nach den Q, P ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial Q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial P_k} \right), \\ \frac{\partial}{\partial p_j} &= \sum_l \left(\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial Q_l} + \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial P_l} \right). \end{aligned} \tag{674}$$

Einsetzen in (673) und Umordnen führt auf

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{(q,p)} = \sum_{k,l} \Bigg(& \{Q_k, Q_l\}_{(q,p)} \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \\ & + \{Q_k, P_l\}_{(q,p)} \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \\ & + \{P_k, Q_l\}_{(q,p)} \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_l} \\ & + \{P_k, P_l\}_{(q,p)} \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial P_l} \Bigg) \end{aligned} \tag{675}$$

Jetzt setzen wir das Ergebnis aus (671) in (675) ein und erhalten daraus unmittelbar

$$\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)}, \tag{676}$$

womit gezeigt ist, daß die Poisson-Klammern beliebiger Phasenraumfunktionen f und g gegen kanonische Transformationen invariant sind.

Eine weitere Invariante gegen kanonische Transformationen ist das *Phasenraum-Differential*

$$dq\,dp := \prod_j dq_j\,dp_j, \tag{677}$$

d.h., es gilt für kanonische Transformationen $(q,p) \mapsto (Q,P)$

$$dq\,dp = dQ\,dP, \tag{678}$$

worin $dQ\,dP$ analog zu (677) definiert ist. Mit (678) gilt auch, daß Integrale

$$\iint_\Gamma dq\,dp \tag{679}$$

über beliebige Teilgebiete Γ des Phasenraums invariant gegen kanonische Transformationen sind. Wir beweisen die Invarianz (678) unter Verwendung des Begriffs der *Funktionaldeterminante*. Für eine beliebige (differenzierbare) Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$ gilt

$$dQ\,dP = D\,dq\,dp, \tag{680}$$

worin D die Funktionaldeterminante der Transformation ist:

$$D = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} := \frac{\partial(Q_1,\ldots,Q_f,\,P_1,\ldots,P_f)}{\partial(q_1,\ldots,q_f,\,p_1,\ldots,p_f)}. \tag{681}$$

Es ist also zu zeigen, daß für kanonische Transformationen $D = 1$ gilt. Die Funktionaldeterminante D aus (681) läßt sich wie folgt erweitern:

$$D = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)}\,\frac{\partial(q,P)}{\partial(q,p)}, \tag{682}$$

vgl. Anhang zu diesem Abschnitt. Es sind

$$(q,P) \cong (q_1,\ldots,q_f,\,P_1,\ldots,P_f)$$

usw. Kurzschreibweisen wie in (681). Weiterhin gilt auch

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)} = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)}, \tag{683}$$

vgl. Anhang, und ebenso

$$\frac{\partial(q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(P)}{\partial(p)} = \left[\frac{\partial(p)}{\partial(P)}\right]^{-1}, \tag{684}$$

vgl. wiederum Anhang. Einsetzen in D in (681) ergibt

$$D = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)}\,\left[\frac{\partial(p)}{\partial(P)}\right]^{-1}. \tag{685}$$

Wir stellen die kanonische Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$ durch die Erzeugende $\Psi(q,P)$ dar, vgl. (646) im vorhergehenden Abschnitt:

$$Q_j = \frac{\partial\Psi}{\partial P_j}, \qquad p_j = \frac{\partial\Psi}{\partial q_j}. \tag{686}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_k \, \partial P_j}, \qquad \frac{\partial p_j}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_j \, \partial P_k}. \tag{687}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Matrizen in den Determinanten $\partial(Q)/\partial(q)$ und $\partial(p)/\partial(P)$ durch Transposition ineinander überführt werden können. Da aber der Wert einer Determinante durch Transposition ihrer Matrix nicht geändert wird, sind die beiden Determinanten gleich. Dann folgt aus (685), daß $D = 1$, womit der Beweis erbracht ist. Man kann übrigens auch zeigen, daß Integrale über beliebige Teilräume von Hyperräumen des Phasenraums invariant gegen kanonische Transformationen sind.

Anhang

Wir erläutern hier die Aussagen über *Funktionaldeterminanten*, die wir oben benutzt haben. Wir verwenden dabei die Schreibweise (q, p) mit nur zwei kanonischen Variabeln. Der Verallgemeinerung auf mehrere Variabeln ist unmittelbar klar. Die Funktionaldeterminante für eine Transformation

$$Q = Q(q, p), \qquad P = P(q, p)$$

ist definiert als

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} := \begin{vmatrix} \partial Q/\partial q & \partial Q/\partial p \\ \partial P/\partial q & \partial P/\partial p \end{vmatrix}.$$

Wenn $P = p$, folgt daraus

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, P)} := \begin{vmatrix} \partial Q/\partial q & \partial Q/\partial p \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cong \frac{\partial(Q)}{\partial(q)}.$$

Damit ist (683) begründet. Bei mehreren Variabeln entsteht in der Matrix

$$\partial(Q, P)/\partial(q, P)$$

unten rechts entsprechend eine Einheitsmatrix. Es seien zwei Transformationen ineinandergeschachtelt:

$$\begin{aligned} Q &= Q(q', p'), & P &= P(q', p') \\ q' &= q'(q, p), & p' &= p'(q, p). \end{aligned}$$

Wir führen die beiden folgenden Jacobi-Matrizen ein:

$$A := \begin{pmatrix} \partial Q/\partial q' & \partial Q/\partial p' \\ \partial P/\partial q' & \partial P/\partial p' \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} \partial q'/\partial q & \partial q'/\partial p \\ \partial p'/\partial q & \partial p'/\partial p \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das Produkt der Funktionaldeterminanten der beiden Transformationen:

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q', p')} \frac{\partial(q', p')}{\partial(q, p)} = \det(A) \det(B) = \det(A\,B).$$

Das Matrizenprodukt $A\,B$ ergibt die Jacobi-Matrix der Gesamttransformation

$$Q = Q(q,p), \qquad P = P(q,p),$$

denn es ist z.B.

$$(A\,B)_{11} = \frac{\partial Q}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial p'}\frac{\partial p'}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q}$$

usw. Also ist

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q',p')}\frac{\partial(q',p')}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}.$$

Damit ist die Erweiterung in (682) begründet. Für die Hintereinanderausführung einer Transformation und ihrer Umkehrung gilt dann

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(Q,P)} = 1,$$

also

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \left[\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}\right]^{-1},$$

womit auch (684) begründet ist.

12.7 Der Liouville'sche Satz

Der im vorhergehenden Abschnitt soeben bewiesene Satz, daß Phasenraumintegrale

$$\iint_\Gamma dq\,dp$$

über beliebige Teilgebiete Γ des Phasenraums invariant gegen kanonische Transformationen sind, bildet die Grundlage des **Liouville'schen Satzes**. Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, daß die Systembewegung selbst als eine kanonische Transformation aufgefaßt werden kann. Also bleiben Phasenraumintegrale vom obigen Typ, die man auch als Phasenraumvolumina von Teilgebieten Γ des Phasenraums interpretieren kann, auch bei der Systembewegung im Phasenraum konstant. Die Systembewegung im Phasenraum kann man sich wie eine *Strömung* im Phasenraum vorstellen. Jedem Phasenraumpunkt (q,p) ist eine *Geschwindigkeit* $(\dot q, \dot p)$ zugeordnet:

$$(q,p) \mapsto (\dot q, \dot p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right), \tag{688}$$

bzw. für mehrere Freiheitsgrade in der ausführlichen Schreibweise

$$(q_j, p_j) \mapsto (\dot q_j, \dot p_j) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j}\right). \tag{689}$$

Die Geschwindigkeit $(\dot q, \dot p)$ bildet also ein Vektorfeld im $2f-$dimensionalen Phasenraum. Diese Vorstellung ist völlig analog einem realen Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ bei der Strömung einer

Flüssigkeit (oder eines Gases) im 3-dimensionalen Raum der $\boldsymbol{r}$: jeder Massenpunkt der Flüssigkeit am Ort $\boldsymbol{r}$ besitzt eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$. Der Satz von der Erhaltung von Phasenraumvolumina während der Phasenraumströmung läßt sich nun auch so interpretieren, daß die Phasenraumströmung *inkompressibel* ist. Wir verdeutlichen das am 3-dimensionalen Fall einer gewöhnlichen Strömung. Es sei Γ ein Teilvolumen der strömenden Flüssigkeit. Dann ist die Volumenänderung von Γ pro Zeit gegeben durch

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\partial\Gamma} d\boldsymbol{f}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}). \tag{690}$$

Das Integral in (690) ist ein Flächenintegral, wie wir es schon im Abschnitt 4.4 im Zusammenhang mit dem Stoke'schen Integralsatz kennengelernt hatten. Hier wird über die *Randfläche* $\partial\Gamma$ des Teilvolumens Γ integriert. Der Integrand ist das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, das Integrationselement $d\boldsymbol{f}$ ist wie im Abschnitt 4.4 ein vektorielles, differentielles Element von $\partial\Gamma$, das senkrecht auf $\partial\Gamma$ steht und dessen Betrag der Flächeninhalt des Elements ist. Daß das Integral auf der rechten Seite von (690) tatsächlich die zeitliche Änderung von Γ während der Strömung beschreibt, erkennt man an folgender Überlegung. Wenn das Element $d\boldsymbol{f}$ um den Vektor $d\boldsymbol{r}$ verschoben wird, dann ist $d\boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{r}$ das Verschiebungsvolumen. Also ist $d\boldsymbol{f}\, \boldsymbol{v}$ die Volumenänderung pro Zeit, die durch die Verschiebung von $d\boldsymbol{f}$ entsteht. Das Integral in (690) ist dann die gesamte Volumenänderung pro Zeit.

Im Abschnitt 4.4 hatten wir den Stoke'schen Integralsatz kennengelernt. Es gibt einen weiteren, für die Theoretische Physik wichtigen Integralsatz, den *Gauß'schen Integralsatz*, der ganz besonders in der Elektrodynamik eine hervorragende Rolle spielt. Auf das Integral in (690) angewendet besagt dieser Satz, daß

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\partial\Gamma} d\boldsymbol{f}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Gamma} d^3\boldsymbol{r}\, \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{691}$$

Das Integral rechts ist ein *Volumenintegral*, das über das Teilvolumen Γ erstreckt wird. Der Integrand ist ein Skalar, nämlich die *Divergenz* des Geschwindigkeitsfeldes $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, die durch ihre räumlichen Komponenten ($\alpha = 1, 2, 3$) wie folgt definiert ist:

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})) := \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} := \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha(\boldsymbol{r})}{\partial x_\alpha}, \tag{692}$$

worin x_α die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ sind. Die Strömung der Flüssigkeit ist inkompressibel, $d\Gamma/dt = 0$, wenn die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ verschwindet. Wir übertragen diese Überlegungen auf die Phasenraumströmung. Die Divergenz der Phasenraumströmung (689) bilden wir analog zu (692):

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\dot{q}, \dot{p}) &= \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \\
&\cong \sum_j \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\, \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j\, \partial q_j} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{693}$$

Die Phasenraumströmung ist also inkompressibel. Diese Feststellung ist eine andere Ausdrucksweise dafür, daß beliebige Phasenraumvolumina Γ während der Phasenraumströmung

ungeändert bleiben. Die Phasenraumvolumina Γ werden mit der Phasenraumströmung mitbewegt und können dabei auch ihre Form ändern, nicht jedoch ihr Phasenraumvolumen.

Eine weitere Veranschaulichung und zugleich eine physikalisch wichtige Konsequenz erhält der Liouville'sche Satz, wenn wir uns vorstellen, daß jeder Punkt (q, p) im Phasenraum einen möglichen dynamischen Zustand des betreffenden mechanischen Systems darstellt, das wir in der kanonischen Theorie beschreiben. Die zeitliche Entwicklung, die der Punkt (q, p) dann im Verlauf der Phasenraumströmung erfährt, beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systemzustands, die von dem Punkt (q, p) im Sinne eines Anfangszustands ausgeht. Wir wollen annehmen, daß das System sich physikalisch eindeutig verhält, so daß von jedem Anfangszustand (q, p) nur eine mögliche Systembahn, auch *Trajektorie* genannt, ausgeht. Das bedeutet, daß sich verschiedene Trajektorien zur gleichen Zeit nicht schneiden können, denn von einem solchen Schnittpunkt würden dann ja verschiedene Trajektorien ausgehen, im Widerspruch zur obigen Annahme der Eindeutigkeit. Wir betrachten nun eine Anzahl N von Phasenraumpunkten

$$(q, p)_1, (q, p)_2, \ldots, (q, p)_N,$$

die innerhalb eines mitströmenden Phasenraumvolumens Γ liegen sollen. Innerhalb eines endlichen Zeitintervalls τ verschiebe sich Γ mit der Phasenraumströmung in Γ_τ. Bei dieser Strömung können die N mitströmenden Phasenraumpunkte das Volumen Γ nicht verlassen, d.h., nach Ablauf von τ liegen die Phasenraumpunkte auch in Γ_τ. Wäre das nämlich nicht der Fall, dann müßte wenigstens einer der Punkte die Randfläche $\partial\Gamma_t$ von Γ_t zu irgendeinem Zeitpunkt $0 \leq t \leq \tau$ schneiden. Da aber auch die Phasenraumpunkte auf der Randfläche $\partial\Gamma_t$ mögliche Trajektorien bilden, müßten sich zwei Trajektorien schneiden, was wir aus physikalischen Gründen ausgeschlossen haben. Also ist mit der Anzahl N von Phasenraumpunkten in einem mitströmenden Volumen Γ und dem Volumen Γ selbst auch die *Phasenraumdichte*

$$\rho := N/\Gamma$$

während der Strömung konstant. Gemeint ist hier die Dichte eines mitströmenden Teils der Phasenraumströmung, nicht etwa die Dichte, die ein ruhender Beobachter registrieren würde.

Der Liouville'sche Satz und seine hier dargestellten Konsequenzen haben eine sehr fundamentale Bedeutung in der Statistischen Physik. Der Satz von der Erhaltung des Phasenraumvolumens bei der Phasenraumströmung gibt Anlaß, das Phasenraumvolumen als ein *invariantes Maß* für die Grundlegung des physikalischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu verwenden: *a priori* haben gleiche Phasenraumvolumina gleiche Wahrscheinlichkeiten in einem thermodynamischen System, das als ein *Ensemble* von Phasenraumpunkten im Phasenraum dargestellt wird.

12.8 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine kanonische Transformation

$$(q, p) \mapsto (Q, P)$$

durchzuführen, nach der die neuen kanonischen Variabeln (P, Q) sämtlich *zyklisch* sind. Wir schreiben die Erzeugende der gesuchten Transformation in der Version

$$\Psi = \Psi(q, P, t), \tag{694}$$

so daß

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial \Psi}{\partial P}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{695}$$

vgl. (646) im Abschnitt 12.5. Wir können unser oben genanntes Ziel offenbar dadurch erreichen, daß wir von der Transformation $H' = 0$ fordern. Dann ist nämlich

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = 0, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0. \tag{696}$$

Die Forderung $H' = 0$ führt gemäß (695) auf

$$H(q, p, t) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \tag{697}$$

Für das Argument p in $H(q, p, t)$ setzen wir $p = \partial\Psi/\partial q$ aus (695) ein und erhalten

$$H\left(q, \frac{\partial \Psi}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \tag{698}$$

Dieses ist eine *partielle* Differentialgleichung 1. Ordnung für die erzeugende Funktion $\Psi(q, P, t)$ der gesuchten kanonischen Transformation. Sie heißt *Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung*. Für mehrere Variable (f Freiheitsgrade) lautet sie explizit

$$H\left(q_1, \ldots, q_f, \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \tag{699}$$

Die neuen kanonischen Impulse P treten in der Lösung Ψ als frei wählbare Parameter auf: die Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung in den $f + 1$ Variabeln $q_1, \ldots, q_f, t$ enthält immer gerade $f + 1$ solche freien Parameter. Da die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung nur Ableitungen von Ψ (und nicht Ψ selbst) enthält, ist einer dieser Parameter eine additive Konstante zu Ψ, die f anderen bilden den Satz $P \cong P_1, \ldots, P_f$.

Für die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H, \tag{700}$$

die erste Beziehung in (700) gemäß (695), die zweite als Konsequenz der Forderung $H' = 0$. Diese beiden Beziehungen sind gleichlautend mit den entsprechenden Beziehungen für die Wirkungsfunktion W als Funktion der oberen Grenze, vgl. (628) und (631) im Abschnitt 12.4. Also stimmt die gesuchte erzeugende Funktion Ψ bis auf eine additive Konstante mit der Wirkungsfunktion W als Funktion der oberen Grenze längs der tatsächlichen Bahn überein:

$$\Psi = W = \int_{t_0}^{t} dt'\, L(q(t'), \dot{q}(t'), t') + \text{konst}, \tag{701}$$

worin t_0 ein beliebiger Anfangszeitpunkt ist. Für $q(t)$ ist eine Lösung der Lagrange'schen Gleichung einzusetzen, entsprechend für $\dot{q}(t)$ deren Geschwindigkeit. Die Parameter P können dabei z.B. als Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{q}(t_0)$ auftreten.

Für *autonome* Systeme, d.h., wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit t abhängt, $H = H(q, p)$, kann man in der Hamilton-Jacobi-Gleichung den Ansatz

$$W(q,P,t) = w(q,P) - E(P)\,t \tag{702}$$

machen, so daß die Hamilton-Jacobi-Gleichung (698) übergeht in

$$H\left(q, \frac{\partial w}{\partial q}\right) = E(P). \tag{703}$$

Wir erläutern die Hamilton-Jacobi-Gleichung an einem einfachen Beispiel, nämlich einem freien Teilchen mit

$$H = \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{p}^2. \tag{704}$$

Die Variabeln q entsprechen den Komponenten des Ortsvektors: $q \cong \boldsymbol{r}$, die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt $f = 3$. Dieses System ist autonom. Die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (703) lautet

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2 = E. \tag{705}$$

Daraus folgt, daß $\partial w/\partial \boldsymbol{r}$ konstant ist:

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{r}} =: \boldsymbol{P} = \text{konstant}. \tag{706}$$

Wir haben damit einen 3-dimensionalen, frei wählbaren Parameter in unserer Lösung entsprechend $f = 3$. Durch Integration gewinnen wir daraus

$$w = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{r} + c, \tag{707}$$

c =konstant ist der $f + 1 = 4$. Parameter. Aus (705) folgt

$$E = \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2.$$

Die gesamte Lösung W lautet gemäß (702)

$$W = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{r} - \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,t + c. \tag{708}$$

Die ersten beiden Transformationsbeziehungen in (695) liefern

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \qquad \cong \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P} = \text{konstant} \tag{709}$$

und

$$Q = \frac{\partial W}{\partial P} \qquad \cong \qquad \boldsymbol{Q} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{P}}{m}\,t. \tag{710}$$

Wir lösen (710) nach $\boldsymbol{r}$ auf und erhalten daraus die Bahn des freien Teilchens, nämlich

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Q} + \frac{\boldsymbol{P}}{m}\,t = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\,t \tag{711}$$

mit

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{Q}, \qquad \boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{P}}{m}.$$

Wir stellen für das freie Teilchen auch den bereits oben in (701) formulierten Zusammenhang mit der Wirkungsfunktion dar. Die Lagrange-Funktion des freien Teilchens lautet

$$L = \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}_0^2 = \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2,$$

und somit die Wirkungsfunktion

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,(t - t_0) \\ &= \frac{1}{m}\,\boldsymbol{P}^2\,t - \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,t + W_0 - \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,t_0 \\ &= \boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{Q}) - \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,t + W_0 - \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,t_0 \\ &= \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{r} - \frac{1}{2\,m}\,\boldsymbol{P}^2\,t + \text{konst}, \end{aligned} \tag{712}$$

wobei die konstanten Terme nicht mehr von $\boldsymbol{r}$ und t abhängen. Diese Rechnung führt also auf dasselbe Ergebnis wie in (708). Wir merken außerdem an, daß gemäß (709)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{m}\,\boldsymbol{P} = \frac{1}{m}\,\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{713}$$

Das bedeutet, daß die Bahnen des freien Teilchens senkrecht auf den Flächen W =konstant stehen.

Wir beschreiben jetzt das allgemeine Verfahren zur Lösung eines mechanischen Problems mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Zunächst muß also auf geeignete Weise eine Lösung $W(q, P, t)$ gefunden werden. Aus der Gleichung

$$Q = \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial P}, \tag{714}$$

vgl. (695), ist dann durch *Umkehrung* bzw. Auflösung nach q die Bahngleichung zu bestimmen, die wir in der Form

$$q = q(t; P)$$

schreiben können. (Q ist konstant!) Diese Auflösung nach q ist nur dann möglich, wenn

$$\frac{\partial^2 W(q, P, t)}{\partial q\,\partial P} \neq 0, \tag{715}$$

bzw. bei mehreren Variabeln ($f > 1$)

$$\det\left(\frac{\partial^2 W(q, P, t)}{\partial q_j\,\partial P_k}\right) \neq 0. \tag{716}$$

Eine Lösung W der Hamilton-Jacobi-Gleichung, die die Bedingung (715) bzw. (716) erfüllt, heißt eine *vollständige Lösung*. Es existiert stets eine vollständige Lösung, z.B. die in (701)

formulierte Lösung, allerdings ist die Eigenschaft der Vollständigkeit dort im Sinne von (715) bzw. (716) im allgemeinen nur *lokal* erfüllt, d.h., für Zeiten t, die hinreichend nahe bei t_0 liegen. Für beliebig große Zeitdifferenzen $t-t_0$ könnten sich Bahnen $q(t)$ und $q'(t)$, die bei $t=t_0$ in der Umgebung von q_0 mit *verschiedenen* Werten P bzw. P' starten, schneiden, $q(t)=q'(t)=:q$, so daß

$$W(q,P,t)=W(q,P',t).$$

Daraus würde dann $\partial W/\partial P=0$ für einen kontinuierlichen $q-$Bereich folgen, d.h. auch

$$\partial^2 W/\partial q\,\partial P=0,$$

also eine Verletzung der Bedingung der Vollständigkeit.

Wir erläutern dieses Vorgehen am Beispiel des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators

$$H=\frac{p^2}{2\,m}+\frac{m\,\omega^2}{2}\,q^2.$$

Dieses Problem ist autonom. Die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (703) lautet hier

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^2+\frac{m\,\omega^2}{2}\,q^2=E.$$

Dieses ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, die wir durch Trennung der Variabeln lösen:

$$w=\int dq\,\sqrt{2\,m\,\left(E-\frac{m\,\omega^2}{2}\,q^2\right)}$$

im Sinne eine unbestimmten Integrals. Dann lautet die gesamte Lösung gemäß (702)

$$W=\int dq\,\sqrt{P^2-m^2\,\omega^2\,q^2}-\frac{P^2}{2\,m}\,t,$$

worin wir außerdem $E=P^2/2\,m$ gesetzt haben. Wir verzichten darauf, das Integral auszurechnen, sondern berechnen sogleich die Ableitung $\partial W/\partial P$ gemäß (714):

$$\begin{aligned}
Q=\frac{\partial W}{\partial P} &= \int dq\,\frac{\partial}{\partial P}\,\sqrt{P^2-m^2\,\omega^2\,q^2}-\frac{P}{m}\,t\\
&= P\int\frac{dq}{\sqrt{P^2-m^2\,\omega^2\,q^2}}-\frac{P}{m}\,t\\
&= \int\frac{dq}{\sqrt{1-\left(m\,\omega\,q/P\right)^2}}-\frac{P}{m}\,t\\
&= \frac{P}{m\,\omega}\,\arcsin\left(\frac{m\,\omega\,q}{P}\right)-\frac{P}{m}\,t.
\end{aligned}$$

Die Auflösung nach q ist hier unproblematisch. Das Ergebnis lautet

$$q=q(t)=\frac{P}{m\,\omega}\,\sin\left(\omega\,t+\frac{m\,\omega\,Q}{P}\right),$$

also die bekannte Lösung für den harmonischen Oszillator. Man erkennt an dieser Lösung die Bedeutung der konstanten kanonischen Variabeln Q und P: der Wert von P bestimmt die Amplitude, z.B. über die Anfangsenergie, und der Wert von Q dann noch die Anfangsphase. Der harmonische Oszillator ist zugleich ein Beispiel für eine *globale* Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung: die Auflösung von (714) ist hier für alle Zeiten t durch einen geschlossenen, analytischen Ausdruck möglich. Der harmonische Oszillator gehört zu den *integrablen* Systemen, von denen noch im folgenden Abschnitt die Rede sein wird.

Wir wollen auch noch auf den engen Zusammenhang hinweisen, der zwischen der Hamilton-Jacobi-Gleichung und der **Quantentheorie** besteht, und diesen Zusammenhang am Beispiel eines Teilchens der Masse m erläutern, das sich in einem Potential $V(x)$ bewegen möge. Die Hamilton-Funktion dafür lautet

$$H = \frac{1}{2\,m}\,p^2 + V(x). \tag{717}$$

In der Quantentheorie werden die klassischen Phasenraumfunktionen durch *Operatoren* ersetzt, z.B. der Impuls

$$p \to -i\,\hbar\,\frac{d}{dx}.$$

Dadurch wird die Hamilton-Funktion H zu einem *Hamilton-Operator*

$$H \to -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \tag{718}$$

Unter Verwendung dieses Operators ist die *Wellenfunktion* $u(x)$ für das Teilchen aus der *Schrödinger-Gleichung* zu lösen:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\,u(x) = E\,u(x). \tag{719}$$

Dieses ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $u(x)$. Die Lösung $u(x)$ beschreibt eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Teilchen: $|u(x)|^2 dx$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen im Intervall $(x, x+dx)$ aufhält. Für die Schrödinger-Gleichung gibt es eine *quasi-klassische* Näherung, die sogenannte WKB-Näherung (Wentzel, Kramers, Brillouin), die für $u(x)$ den Ansatz

$$u(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\phi(x)\right). \tag{720}$$

Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung liefert

$$\frac{1}{2\,m}\,\left(\phi'(x)\right)^2 - \frac{i\,\hbar}{2\,m}\,\phi''(x) + V(x) = E. \tag{721}$$

Bis hierher wurde noch keine Näherung ausgeführt. Die quasi-klassische Näherung entsteht erst jetzt durch eine Entwicklung nach dem Planck'schen Wirkungsquantum $\hbar$ in der Form

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \frac{\hbar}{i}\,\phi_1(x) + \ldots. \tag{722}$$

In niedrigster Ordnung in $\hbar$ folgt daraus

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial\phi_0(x)}{\partial x}\right)^2 + V(x) = E, \tag{723}$$

also die Hamilton-Jacobi-Gleichung für unser Problem. Das bedeutet, daß die klassische Wirkungsfunktion w in niedrigster Ordnung in $\hbar$ die Phase $\phi(x) = w(x)$ der quantentheoretischen Wellenfunktion bildet. Unter Einschluß der Zeitabhängigkeit gilt sogar

$$u(x,t) \approx \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,W(x,t)\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,w(x) - \frac{i\,E}{\hbar}\,t\right).$$

12.9 Integrable Systeme

In diesem Abschnitt geht es um *autonome, integrable* mechanische Systeme. *Autonom* bedeutet wie früher, daß die Hamiltonfunktion H nicht explizit von der Zeit abhängen soll: $\partial H/\partial t = 0$. *Integrabel* soll bedeuten, daß man die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems "analytisch" lösen kann. Der Begriff "analytisch lösbare" Bewegungsgleichung ist unscharf. Gewöhnlich versteht man darunter, daß die Lösung $q = q(t)$ durch "elementare" Funktionen wie rationale oder algebraische Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen usw. ausgedrückt werden kann. Wir wollen den Begriff "analytisch lösbar" zu *integrabel* erweitern, indem wir darunter alle Lösungen $q = q(t)$ einschließen, in denen höchstens noch Integrale über Funktionen auftreten. Man kennzeichnet solche Lösungen auch durch den Ausdruck "bis auf *Quadraturen* lösbar." Wir haben im Verlaufe dieser Vorlesung einige Beispiele für autonome, integrable Systeme kennengelernt, z.B.

1. Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension (x) in einem Potential $V(x)$ bewegt, s. Kapitel 2. Hier folgt die Integrabilität aus dem Energie-Erhaltungssatz

   $$\frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + V(x) = E \tag{724}$$

   durch Trennung der Variabeln:

   $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V(x))}, \\ t - t_0 &= \sqrt{\frac{2}{m}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}. \end{aligned} \tag{725}$$

   In der zweiten Zeile von (725) ist die Lösung $x = x(t)$ bis auf eine Quadratur (Integration einer Funktion) angegeben.

2. Teilchen der Masse m, das sich in 3 Dimensionen ($\boldsymbol{r}$) in einem zentralsymmetrischen Potential $V(r)$ bewegt, s. Kapitel 8. Hier ließ sich das Problem unter Benutzung der Drehimpuls-Erhaltung und der Energie-Erhaltung auf ein effektives Radialproblem

   $$\frac{m}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{726}$$

   zurückspielen. Das weitere Vorgehen folgt dann demselben Schema wie unter Punkt 1.

3. Verallgemeinerung von Punkt 2.: das Zwei-Körper-Problem, in dem die Wechselwirkung von einer Zentralkraft verursacht wird. Dieses Problem konnte unter Benutzung der Impuls-Erhaltung auf ein reduziertes 1-Teilchen-Problem eines Teilchens in einem zentralsymmetrischen Potential zurückgespielt werden.

4. Kräftefreier, starrer Körper, s. Abschnitt 10.6: für den symmetrischen Fall haben wir dort die Lösung explizit angegeben, für den nicht-symmetrischen Fall haben wir die Lösung durch eine geometrische Konstruktion beschrieben. Diese Konstruktion entspricht aber einer Lösung bis auf Quadraturen.

5. Zwei linear gekoppelte Oszillatoren. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = m\,\ddot{x}_1 &= -m\,\omega^2\,x_1 + m\,\beta^2\,(x_2 - x_1), \\ \dot{p}_2 = m\,\ddot{x}_2 &= -m\,\omega^2\,x_2 + m\,\beta^2\,(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{727}$$

Hier bedeutet $m\,\beta^2$ die Kopplungskonstante, die wir also als positiv voraussetzen wollen. Diese Gleichungen werden zu Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

$(q_1 = x_1, q_2 = x_2)$ wenn wir die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2\,m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{m\,\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{m\,\beta^2}{2}\,(x_1 - x_2)^2 \tag{728}$$

wählen. Die Gleichungen (727) lassen sich mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{\lambda\,t}$$

lösen. Die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\omega_1\,t + \varphi_1\right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\omega_2\,t + \varphi_2\right). \tag{729}$$

Die Frequenzen ω_1 und ω_2 lauten

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\,\beta^2}. \tag{730}$$

Diese Lösung läßt sich sehr leicht auch auf den Fall verschiedener Massen und Frequenzen in den beiden Oszillatoren verallgemeinern, ja sogar auf beliebig viele harmonische Oszillatoren, die paarweise linear miteinander gekoppelt sind.

6. Sphärisches Pendel: Fadenpendel, das nicht nur in einer Ebene, sondern frei pendeln kann. Die Masse bewegt sich auf einer Kugelschale mit dem Radius R =Fadenlänge. Es sei θ der Ausschlagwinkel des Fadens (unabhängig von der Richtung des Ausschlags) und φ der Drehwinkel des Fadens bzw. der Masse um die Senkrechte (zur Erdoberfläche). Dann lauten kinetische und potentielle Energie

$$T = \frac{1}{2}\, m\, R^2\, \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right), \qquad V = -m\, g\, R\, \cos\theta,$$

also die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\, m\, R^2\, \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right) + m\, g\, R\, \cos\theta. \tag{731}$$

Da die Koordinate φ zyklisch ist, $\partial L/\partial\varphi = 0$, folgt die Erhaltung des Drehimpulses in Richtung der Senkrechten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\, R^2\, \sin^2\theta\, \dot{\varphi} = \text{konstant} =: l, \\ \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} &= \frac{l}{m\, R^2\, \sin^2\theta}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt Energie-Erhaltung:

$$\frac{1}{2}\, m\, R^2\, \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right) - m\, g\, R\, \cos\theta = \text{konstant} =: E. \tag{732}$$

Einsetzen der Drehimpuls-Erhaltung in die Energie in (732) führt wieder auf ein effektives 1-Teilchen-Problem wie unter Punkt 2, allerdings mit der Winkelvariablen θ anstelle der Radialvariablen r:

$$\frac{1}{2}\, m\, R^2\, \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{2\, m\, R^2\, \sin^2\theta} - m\, g\, R\, \cos\theta = E. \tag{733}$$

Diese Beispiele zeigen, daß die Integrabilität eines Problems offenbar eng verknüpft ist mit der Existenz von Erhaltungssätzen bzw. von Integralen der Bewegung. Für autonome Systeme ist die Phasenraumfunktion $\Phi(q,p)$ erhalten bzw. ein Integral der Bewegung, wenn die Poisson-Klammer verschwindet:

$$\{\Phi, H\} = 0. \tag{734}$$

Autonome Systeme besitzen also mindestens immer ein Integral der Bewegung, nämlich die Hamiltonfunktion H. Für die Integrabilität eines Systems ist nun die Anzahl der Integrale der Bewegung im Verhältnis zur Anzahl der Freiheitsgrade f entscheidend. Wir bezeichnen die Integrale der Bewegung eines Systems mit

$$\Phi_1,\, \Phi_2, \ldots, \Phi_n,$$

wobei wir (für autonome Systeme) $\Phi_1 = H$ vereinbaren wollen. Für die Integrabilität ist nun wichtig, daß die Integrale der Bewegung eine wichtige Voraussetzung erfüllen, nämlich, daß

sie zueinander *in Involution* stehen. Darunter versteht man, daß die Poisson-Klammern der Φ_i paarweise verschwinden:

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0 \qquad \text{für} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{735}$$

Wenn also z.B. in einem 1-Teilchen-Problem der vektorielle Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ ein Integral der Bewegung ist, dann sind zwar alle drei Komponenten $L_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3$ erhalten, aber gemäß (612) im Abschnitt 12.3,

$$\{L_1, L_2\} = L_3, \ldots \text{zyklisch permutiert},$$

stehen die Komponenten L_α miteinander *nicht* in Involution. Es gilt aber nach (614) im Abschnitt 12.3

$$\left\{\boldsymbol{L}^2, L_\alpha\right\} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

so daß im Fall $\boldsymbol{L}$ =konstant $\boldsymbol{L}^2$ und z.B. L_3 als zwei miteinander in Involution stehende Integrale der Bewegung gezählt werden können. Wir stellen nun in der folgenden Tabelle die für unsere obigen Beispiele miteinander in Involution stehenden Integrale der Bewegung zusammen:

Nr.	Problem:	Anzahl f	Φ_i in Inv.	Anzahl
1.	m in $V(x)$	1	H	1
2.	m in $V(r)$	3	H, $\boldsymbol{L}^2$, L_3	3
3.	m_1, m_2 mit $V(\lvert\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\rvert)$	6	H, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}^2$, L_3	6
4.	kräftefr. st. K.	6	H, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}^2$, L_3	6
5.	gek. harm. Osz.	2	H, G	2
6.	sphär. Pendel	2	H, L_3	2

Im Fall der gekoppelten harmonischen Oszillatoren, Nr. 5, sind die beiden Phasenraumfunktionen

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{4\,m}\,(p_1 + p_2)^2 + \frac{1}{4}\,m\,\omega^2\,(x_1 + x_2)^2\,, \\ G_2 &= \frac{1}{4\,m}\,(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{4}\,m\,\left(\omega^2 + 2\,\beta^2\right)\,(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Integrale der Bewegung, wie man sich leicht überzeugt. G_1, G_2 und H stehen auch miteinander in Involution, wie man ebenfalls durch eine kurze Rechnung bestätigt. Allerdings ist $G_1 + G_2 = H$, so daß G_1, G_2 und H nicht unabhängig voneinander sind. Mit der Wahl von $\Phi_1 = H$ und $\Phi_2 = G := G_1$ hat man dann aber zwei unabhängige und miteinander in Involution stehende Integrale der Bewegung.

In unserer Tabelle stellen wir nun fest, daß in sämtlichen Beispielen integrabler Systeme die Anzahl der Freiheitsgrade f mit der Anzahl von Integralen der Bewegung, die miteinander in Involution stehen (und auch unabhängig voneinander sind), übereinstimmt. Diese Feststellung gilt nun tatsächlich ganz allgemein für beliebige autonome Systeme. Dieser Satz stammt (auch!) von Joseph Liouville (1808-1882). Den Beweis können wir hier nicht geben; er ist ausführlich dargestellt z.B. bei V.I. Arnold[5]. Wir wollen aber die Aussage dieses Satzes noch ein wenig

[5] V.I. Arnold, Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, 1988, S. 274 ff

erläutern. Jedes (skalare) Integral der Bewegung Φ_i definiert im $2f-$dimensionalen Phasenraum (q,p) einen $(2f-1)-$dimensionalen Unterraum Γ_i:

$$\Gamma_i = \{(q,p)|\Phi_i(q,p) = C_i\}\,,$$

worin der Wert C_i, der durch Anfangsbedingungen bestimmt ist, die Lage (auch Größe, Gestalt) von Γ_i im Phasenraum bestimmt. Wir bezeichnen mit Σ den Schnittraum der Γ_i:

$$\Sigma := \bigwedge_i \Gamma_i.$$

Die Unterräume Γ_i und auch der Schnittraum Σ sind *glatt*: es gibt darin keine Unstetigkeiten oder "Knicke". Es ist nun unmittelbar einleuchtend, daß der Vereinigungsraum Σ unter der Phasenraumströmung (vgl. Abschnitt 12.7) *invariant* bleibt, denn jeder Phasenraumpunkt stellt einen physikalisch realisierbaren Bewegungsablauf des Systems dar, bei dem ja voraussetzungsgemäß die Integrale der Bewegung konstant bleiben. Wenn ein Phasenraumpunkt in der Phasenraumströmung Σ verließe oder von außerhalb in Σ hineintreten würde, dann müßte ein Erhaltungssatz verletzt werden. Unabhängigkeit der Integrale der Bewegung Φ_i bedeutet, daß nicht bereits eines oder mehrere der Γ_i Unterräume der übrigen sind. Man kann das auch durch die Bedingung ausdrücken, daß die (vollständigen) Differentiale $d\Phi_i$ in Σ *linear unabhängig* sein sollen.

Eine wichtige Aussage des Satzes über integrable Systeme ist, daß sie sich durch eine kanonische Transformation auf einen $f-$dimensionalen *Torus* abbilden lassen, wenn der Vereinigungsraum Σ kompakt und zusammenhängend ist. Ein $f-$dimensionaler Torus ist das direkte Produkt von f Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_f$. Im Fall $f = 2$ ist ein Torus noch leicht zu veranschaulichen: man denke sich ein Rohr der Länge L mit einem kreisförmigen Querschnitt und einem Radius $< L/2\,\pi$ kreisförmig zusammengebogen, so daß sich seine Enden berühren und miteinander verbunden werden. Die erwähnte Transformation beschreibt nun das integrable System dadurch, daß die Kreise K_i des Torus mit konstanten Frequenzen ω_i durchlaufen werden. Wenn θ_i die Winkelvariablen in den Kreisen K_i sind, gilt also

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, f, \tag{736}$$

und somit

$$\theta_i = \omega_i\, t + \theta_{i0}\,,$$

worin die θ_i allerdings modulo $2\,\pi$ zu zählen sind. Der Satz besagt weiter, daß die Hamiltonschen Gleichungen bis auf Quadraturen lösbar sind und daß die Bewegung auf dem Torus im allgemeinen *quasiperiodisch* ist. Unter dem Begriff quasiperiodisch versteht man, daß die Frequenzen ω_i *rational unabhängig* sind, d.h., eine Relation

$$\sum_{i=1}^{f} r_i\,\omega_i = 0$$

mit rationalen Koeffizienten ist nur durch

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_f = 0$$

erfüllbar. Die quasiperiodische Bewegung auf dem Torus bedeutet, daß jede Trajektorie, die mit einer bestimmten Anfangsbedingung gestartet wurde, den Torus dicht überdeckt und ergodisch ist: nach hinreichend langer Zeit kehrt jede Trajektorie in jede beliebig kleine Umgebung eines früheren Punktes, z.B. des Anfangspunktes, zurück. Man nennt eine solche Bewegung auch einen *nicht-resonanten Torus*. Die genannten Eigenschaften treffen nicht mehr zu, wenn auch nur zwei der Frequenzen ω_i in einem rationalen Verhältnis stehen. Wir betrachten dazu die gekoppelten harmonischen Oszillatoren, vgl. obiges Beispiel Nr. 5. Die Frequenzen der beiden Lösungen ("Moden") lauteten gemäß (730)

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\,\beta^2}.$$

Diese beiden Frequenzen sind rational abhängig, wenn es zwei ganze Zahlen n_1, n_2 gibt, so daß

$$n_1\,\omega_1 = n_2\,\omega_2.$$

Daraus folgt mit $\omega = 2\,\pi/T$ für die Periodendauern T_1 und T_2:

$$n_1\,T_2 = n_2\,T_1 =: T.$$

Nach Ablauf der Zeit T hat sich die Trajektorie geschlossen, d.h., T ist die Periodendauer der Trajektorie und

$$\Omega := \frac{2\,\pi}{T} = \frac{\omega_2}{n_1} = \frac{\omega_1}{n_2}$$

die Frequenz. Die rationale Abhängigkeit von Frequenzen führt also im allgemeinen zu periodischen Bewegungen längs geschlossener Trajekorien.

Bei der Beschreibung periodischer Bewegung, z.B. auf einem einzelnen der Kreise K_i auch eines nicht-resonanten Torus, bedient man sich häufig der sogenannten Wirkungs- und Winkelvariablen, die wir hier am Beispiel der periodischen Bewegung eines Massenpunktes m in einem geeigneten Potential $V(x)$ ("muldenförmig") erläutern wollen. Aus dem Energiesatz

$$\frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + V(x) = E$$

folgt durch Trennung der Variabeln für die im allgemeinen von der Energie E abhängige Periodendauer

$$T(E) = 2\,\sqrt{\frac{m}{2}}\,\int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{737}$$

worin x_a und x_b die ebenfalls von der Energie abhängigen Umkehrpunkte sind. Die Integration in (737) kann man auch als Integration über einen Umlauf längs der Trajektorie $x(t)$ beschreiben:

$$T(E) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\oint \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{738}$$

worin für $dx > 0$ das positive und für $dx < 0$ das negative Vorzeichen der Wurzel im Nenner zu wählen ist. Wir definieren jetzt die Größe

$$I(E) := \frac{1}{2\,\pi}\ \oint dx\, p(x), \tag{739}$$

worin $p = p(x)$ aus dem Energiesatz in der Form

$$\frac{p^2}{2\,m} + V(x) = E$$

zu bestimmen ist,

$$p(x) = \sqrt{2\,m\ (E - V(x))}.$$

Damit ist auch

$$I(E) := \frac{\sqrt{2\,m}}{2\,\pi}\ \oint dx\, \sqrt{E - V(x)}. \tag{740}$$

Aus (739) erkennen wir, daß $2\,\pi\,I(E)$ offenbar die Fläche des Phasenraums (q, p) $(q \equiv x)$ ist, die von der Trajektorie zur Energie E umschlossen wird. Wenn wir $I(E)$ nach der Energie E differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dI(E)}{E} &= \frac{\sqrt{2\,m}}{2\,\pi}\ \oint dx\, \frac{d}{dE}\, \sqrt{E - V(x)} \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\, \sqrt{\frac{m}{2}}\ \oint \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \\ &= \frac{T(E)}{2\,\pi} = \frac{1}{\omega(E)}, \end{aligned} \tag{741}$$

vgl. (738). $\omega(E)$ ist die Frequenz zur Energie E.

$I(E)$ heißt *Wirkungsvariable*. Wir wollen nun eine kanonische Transformation ausführen,

$$(q, p) \equiv (x, p) \mapsto (\theta, I),$$

nach der I der neue Impuls ist und die aus $I(E)$ durch Umkehrung entstehende Funktion $E(I)$ die neue Hamilton-Funktion ist, also $H' = E(I)$. Die dazu gehörende erzeugende hat die Struktur

$$\Psi = \Psi(q, P) \cong \Psi(x, I),$$

vgl. Abschnitt 12.5, und es ist

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \theta = \frac{\partial \Psi}{\partial I}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{742}$$

vgl. (646). Da Ψ in unserem Fall (eines autonomen Systems) nicht von der Zeit abhängt, ist $\partial\Psi/\partial t = 0$, also $H = H' = E$, so daß die Erzeugende aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(x, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = E \tag{743}$$

zu bestimmen ist. Die neuen Hamiltonschen Gleichungen lauten

$$\dot{\theta} = \frac{\partial E(I)}{\partial I}, \qquad \dot{I} = -\frac{\partial E(I)}{\partial \theta} = 0, \tag{744}$$

denn $E(I)$ hängt nicht von θ ab. Somit ist $I = I_0$ =konstant und

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\partial E(I)}{\partial I}\right)_{I=I_0} = \left(\frac{\partial I(E)}{\partial E}\right)^{-1} = \omega(E) = \text{konstant}, \tag{745}$$

vgl. (741). Die *Winkelvariable* θ bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Wir erläutern diese Zusammenhänge wieder am harmonischen Oszillator:

$$\begin{aligned} I(E) &= \frac{1}{2\,\pi} \oint dx \sqrt{2\,m\,\left(E - \frac{m\,\omega^2}{2}\,x^2\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2\,m\,E}}{2\,\pi} \oint dx \sqrt{1 - \frac{m\,\omega^2}{2\,E}\,x^2}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\sqrt{\frac{m\,\omega^2}{2\,E}}\,x = \sin\varphi$$

wird daraus

$$I(E) = \frac{E}{\pi\,\omega} \int_0^{2\,\pi} d\varphi\,\cos^2\varphi = \frac{E}{\omega}. \tag{746}$$

Folglich ist $E(I) = \omega\,I$ und

$$\dot{\theta} = \frac{\partial E}{\partial I} = \omega.$$

Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (743) haben wir bereits im Abschnitt 12.8 diskutiert.

Man kann die Wirkungs- und Winkelvariablen auch in Systemen mit einer Anzahl $f > 1$ von Freiheitsgraden durchführen, nämlich

$$I_k(c_1, \ldots, c_f) = \frac{1}{2\,\pi} \oint_{\Gamma_k} \sum_i dq_i\,p_i.$$

Hier ist Γ_k das Bild des Kreises K_k des Torus im Original-Phasenraum der (q_i, p_i), wobei alle θ_i =konstant für $i \neq k$.

Integrable Systeme bilden die Ausnahme unter den denkbaren dynamischen Systemen der Mechanik. Während, wie wir unter Nr. 3 unserer Beispiele gesehen haben, das Zwei-Körper-Problem integrabel ist, gilt das bereits nicht mehr für das Drei-Körper-Problem, in dem $f = 9$, aber die Anzahl der Integrale der Bewegung dieselbe ist wie im Zwei-Körper-Problem, nämlich 6. Gerade in der Himmelsmechanik ist man aber an der Lösung von Mehr-Körper-Problemen sehr interessiert, z.B. zur Beantwortung der Frage der Stabilität von Planetensystemen. Hier versucht man sich durch *Störungsrechnung* zu helfen, d.h., man macht z.B. für das Dreikörper-Problem den Ansatz

$$H = H_0 + \lambda H_1,$$

worin H_0 ein integrables Zwei-Körper-Problem beschreibt und H_1 dessen Störung durch einen dritten Körper und λ ein Störparameter ist. Die Anwendung von Störungstheorie ist dann auf die Nachbarschaft von Trajektorien des Zwei-Körper-Problems beschränkt. Im Zusammenhang mit der Störungstheorie erhält nun das *KAM-Theorem* (Kolmogorov, Arnold, Moser) eine sehr wichtige Bedeutung. Es besagt: wenn

- H_0 ein integrables System mit
- rational unabhängigen Frequenzen ω_i beschreibt,
- die genügend irrational sind, und
- λ hinreichend klein ist,

dann besitzt das Problem $H = H_0 + \lambda H_1$ überwiegend quasiperiodische Trajektorien auf nichtresonanten Tori, die sich wenig von denen von H_0 unterscheiden. "Genügend irrational" heißt eine reelle Zahl ω, wenn es für alle natürlichen Zahlen m und n Konstanten α und γ gibt, so daß

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| \geq \frac{\gamma}{n^\alpha}.$$

Die Bedeutung dieser Definition läßt sich folgendermaßen ausdrücken: je genauer man ω durch einen Bruch m/n mit immer größeren Nennern n auch approximiert, so verhält sich doch die Differenz zwischen ω und m/n wie $1/n^\alpha$. Für rational unabhängige Frequenzen ω_i läßt sich "genügend irrational" durch

$$\left|\sum_i r_i\,\omega_i\right| \geq \gamma\,|\boldsymbol{r}|^\alpha$$

für alle rationalen Zahlen r_i ausdrücken, worin

$$|\boldsymbol{r}| := \left(\sum_i r_i^2\right)^{1/2}.$$

13 Relativistische Punktmechanik

In diesem Kapitel gehen wir noch einmal an den Anfang der Formulierung der Mechanik zurück. Bei der Formulierung der Newton'schen Mechanik war das Konzept des *Inertialsystems* grundlegend: ein Bezugssystem, bestehend aus einem (z.B. kartesischen) Koordinatensystem und einer Uhr, haben wir als Inertialsystem bezeichnet, wenn sich darin kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Ebenso hätten wir ein Inertialsystem dadurch charakterisieren können, daß in ihm das zweite Newton'sche Prinzip, $m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$, gelten soll, worin $\boldsymbol{F}$ eine bekannte, dem Körper mit der Masse m eingeprägte Kraft sein soll. Allgemein charakterisiert man Inertialsysteme durch die Forderung, daß die Naturgesetze in ihnen dieselbe Form haben sollen. Ein solches Naturgesetz ist die Aussage, daß es eine maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit für physikalische Wechselwirkungen gibt, die *Lichtgeschwindigkeit*. Wir werden lernen, daß diese Aussage, als allgemein gültiges Naturgesetz interpretiert, unsere bisherigen Vorstellungen von Inertialsystemen und von den Transformationen zwischen ihnen, den *Galilei-Transformationen*, durchbricht.

13.1 Lichtgeschwindigkeit, Experiment von Michelson

Die Charakterisierung von Inertialsystemen durch die Forderung, daß sich in ihnen kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen sollen, führte auf die *Galilei-Transformation* zwischen je zwei Inertialsystemen $S = \{\boldsymbol{r}, t\}$ und $S' = \{\boldsymbol{r}', t'\}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_0\, t' + \boldsymbol{s}_0, \qquad t = t'. \tag{747}$$

Umgekehrt lassen sich durch die Galilei-Transformation aus jedem Inertialsystem $S = \{\boldsymbol{r}, t\}$ nach Vorgabe einer Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ beliebige andere Inertialsysteme konstruieren. Ein Charakteristikum der Galilei-Transformation ist die Existenz einer *universellen Zeit* t. Die Zeit wird durch die Transformation nicht beeinflußt. Damit ist die Aussage gemacht, daß die Zeitmessung unabhängig vom Ort und von der Geschwindigkeit in jedem Inertialsystem nach einer einmaligen, anfänglichen Synchronisation zu denselben Ergebnissen führt. Diese Aussage ist nur dann physikalisch real, wenn sie sich experimentell überprüfen läßt, und das ist offenbar nur möglich, wenn man annimmt, daß es eine $\infty-$schnelle Signalgeschwindigkeit gibt, die die Feststellung gleicher Zeitabläufe zwischen Systemen mit verschiedenen Geschwindigkeiten ermöglicht. Die Feststellung gleicher Zeitabläufe verlangt stets mindestens zwei Zeitvergleiche, von denen nur einer dann gemacht werden kann, wenn sich die Uhren zur gleichen Zeit am gleichen Ort befinden.

Die Annahme einer $\infty-$schnellen Signalgeschwindigkeit entspricht der Transformation der Geschwindigkeiten durch die Galilei-Transformation in (747): Durch Zeitableitungen nach t bzw. t' folgt nämlich

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} + \boldsymbol{v}_0, \tag{748}$$

und daraus mit $t = t'$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0. \tag{749}$$

Geschwindigkeiten addieren sich wie Vektoren, und dadurch lassen sich offenbar Geschwindigkeiten mit beliebig großen Beträgen $|\boldsymbol{v}|$ bilden.

Auch die Verwendung von abstandsabhängigen Potentialen $V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ zwischen zwei Körpern an den Orten $\boldsymbol{r}_1$ bzw. $\boldsymbol{r}_2$ entspricht der Annahme einer $\infty-$schnellen Geschwindigkeit, und zwar hier der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer physikalischen Wechselwirkung. Wenn solche Potentiale existieren, dann folgt für die daraus resultierenden Kräfte $\boldsymbol{F}_{12}$ auf den Körper 1 bzw. $\boldsymbol{F}_{21}$ auf den Körper 2 das dritte Newton'sche Prinzip

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0 \tag{750}$$

und daraus weiter die Erhaltung des Impulses der beiden Körper:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{konstant}, \tag{751}$$

s. Kapitel 1.

Der Annahme einer $\infty-$schnellen Signal- oder Ausbreitungsgeschwindigkeit widerspricht der empirische Befund, daß es eine maximale Geschwindigkeit

$$c = 2.99792\ 10^8 [m/s] \tag{752}$$

gibt, mit der sich physikalische Wechselwirkungen und damit auch informationstragende Signale ausbreiten können. Eine Konsequenz dieses Befundes ist z.B., daß die oben genannte Erhaltung des Impulses zweier wechselwirkender Körper nicht mehr gilt. Nun haben wir im Kapitel 7 gelernt, daß Impulserhaltung eine Folge der Homogenität des physikalischen Raumes ist. Sicher ist die Konstruktion eines nicht mehr homogenen Raumes eine sehr unbefriedigende Lösung der genannten Schwierigkeit, obwohl das in der Geschichte der Physik in Gestalt der sogenannten *Äthertheorie* (s.u.) versucht wurde. Der einzig mögliche Ausweg aus der Situation, daß der physikalische Raum homogen ist und gleichzeitig eine maximale physikalische Geschwindigkeit existiert, besteht in der Annahme, daß der leere Raum zwischen wechselwirkenden Körpern die Wechselwirkung mit einer endlichen Geschwindigkeit überträgt und dabei auch Impuls aufnehmen kann. Diese Eigenschaft des leeren Raumes nennt man ein *Feld*. Die Felder der elektrodynamischen Wechselwirkung sind der Gegenstand der Klassischen Feldtheorie bzw. der Elektrodynamik.

Wir wollen jetzt den empirischen Nachweis einer maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit physikalischer Wechselwirkungen, nämlich des Lichtes, darstellen und dazu zunächst die Vorstellung der nicht-relativistischen Mechanik (auf der Grundlage der Galilei-Transformation) über die Lichtausbreitung schildern. Nach dieser Vorstellung kann also Licht nicht durch den materielosen Raum übertragen werden, sondern benötigt zu seiner Ausbreitung ein Medium, das man *Äther* genannt hat. In diesem Äther soll Licht die bereits oben genannte Geschwindigkeit c besitzen. Wenn sich eine experimentelle Anordnung relativ zum ruhenden Äther bewegt, z.B. mit der sich bewegenden Erde, dann müßte die Geschwindigkeit des Lichtes relativ zum Experiment gemäß der Galilei-Transformation durch entsprechende Vektor-Addition bestimmt werden. Nehmen wir an, daß das Licht aus einer Quelle A auf einen Spiegel im Punkt B trifft und von dort nach A reflektiert wird und daß sich diese experimentelle Anordnung mit der Geschwindigkeit v relativ zum ruhenden Äther in Richtung AB bewegt, vgl. Abbildung 27. Der Abstand von A und B sei d. Dann hätte das Licht gemäß der Vektor-Addition der Geschwindigkeiten von A nach B die Geschwindigkeit $c - v$ und von B nach A die Geschwindigkeit $c + v$. Daraus folgt für die Zeit t_p ($p \cong$ parallel) für den Gesamtweg von A nach B und zurück

$$t_p = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2\,d\,c}{c^2 - v^2} = \frac{2\,d}{c\,(1-\beta^2)}, \tag{753}$$

worin

$$\beta := \frac{v}{c}. \tag{754}$$

Nehmen wir nun an, daß derselbe Vorgang in einem Experiment abläuft, das sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu AB relativ zum ruhenden Äther bewegt. Vom Standpunkt des ruhenden Äthers aus legt das Licht dann den in Abbildung 27 rechts skizzierten Weg ABC zurück, der eine Länge $2\,d'$ hat. Wenn jetzt t_s ($s \cong$ senkrecht) die Zeit ist, die das Licht für diesen Weg benötigt, gilt

$$c\,t_s = 2\,d' = 2\,\sqrt{d^2 + (v\,t_s/2)^2},$$

weil das Experiment während t_s gerade die Strecke $AC = v\,t_s$ zurücklegt. Die Auflösung nach t_s ergibt nach einer kurzen, elementaren Rechnung

Abbildung 27: Lichtwege in einem Experiment, daß sich mit der Geschwindigkeit v parallel (links) und senkrecht (rechts) relativ zum "Äther" bewegt.

$$t_s = \frac{2\,d}{c\,\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{755}$$

Entscheidend ist nun, ob tatsächlich ein Zeitunterschied $\Delta t = t_p - t_s \neq 0$ gemessen werden kann. Das Experiment dazu wurde zum ersten Mal von Michelson (1881 in Potsdam, 1887 zusammen mit Morley in Cleveland) durchgeführt. Es ist in der Abbildung 28 skizziert. Paralleles Licht fällt von der Quelle Q ausgehend auf einen halbdurchlässigen Spiegel S, der um 45^0 gegen die Richtung des Lichtes gedreht ist. Das Licht wird dadurch in zwei Teilbündel aufgespalten, von denen das eine bei O durch den Spiegel S hindurchtritt und bei S_1 auf einem voll reflektierenden Spiegel nach O reflektiert wird, während das andere Teilbündel bei O um 90^0 reflektiert und auf einen anderen, ebenfalls voll reflektierenden Spiegel gelenkt wird und dort im Punkt S_2 nach O reflektiert wird. Bei O vereinigen sich die beiden Teilbündel wieder und werden im Fernrohr F beobachtet. Sie erzeugen dort ein Interferenzmuster, das dem Laufzeitunterschied zwischen den Strecken $0S_10$ und $0S_20$ entspricht. Nehmen wir an, daß sich die experimentelle Anordnung mit der Geschwindigkeit v (Erdbahngeschwindigkeit) zunächst parallel zu $0S_1$ relativ zum Äther bewegt. Dann beträgt der Laufzeitunterschied der beiden Teilbündeln gemäß (753) und (755)

$$t_{ps} = \frac{2\,d_1}{c\,(1-\beta^2)} - \frac{2\,d_2}{c\,\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{756}$$

Wir nehmen an, daß $v \ll c$ bzw. $\beta \ll 1$, so daß wir nach β entwickeln können:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta^2} &= 1+\beta^2+O(\beta^4), \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= 1+\frac{\beta^2}{2}+O(\beta^4), \end{aligned}$$

so daß bis auf Terme von der Ordnung β^4

$$t_{ps} = \frac{2\,d_1}{c}\,\left(1+\beta^2\right) - \frac{2\,d_2}{c}\,\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right). \tag{757}$$

Abbildung 28: Experiment von Michelson.

Jetzt wird die experimentelle Anordnung um 90^0 gedreht. Dann beträgt der Laufzeitunterschied zwischen den Teilbündeln

$$t_{sp} = \frac{2\,d_1}{c}\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) - \frac{2\,d_2}{c}\left(1 + \beta^2\right). \tag{758}$$

Nach der Äthertheorie müßte sich nach der Drehung in F eine Änderung des Interferenzmusters zeigen, die dem Unterschied

$$\Delta t = t_{ps} - t_{sp} = \frac{(d_1 + d_2)\,\beta^2}{c} = \frac{(d_1 + d_2)\,v^2}{c^3} \tag{759}$$

entspricht. Es wurde jedoch keine Änderung des Musters beobachtet, obwohl die Größenordnung in (759) innerhalb der experimentellen Auflösung liegt, zumal bei Wiederholung des Experiments mit der heutigen Präzision.

Das Fazit des Michelson-Experiments lautet, daß sich das Licht unabhängig von der Geschwindigkeit v einer experimentellen Anordnung stets mit derselben Geschwindigkeit c ausbreitet. Damit ist die Vektoraddition von Geschwindigkeiten, wie sie von der Galilei-Transformation impliziert wird, nicht mehr möglich. (Später werden wir sehen, daß die Vektoraddition von Geschwindigkeiten für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ näherungsweise richtig bleibt.) Folglich müssen die Begriffe Inertialsystem und Transformation zwischen Inertialsystemen neu gefaßt werden. Der entscheidende Punkt dabei wird sein, daß die Existenz einer universellen Zeit aufgegeben werden muß.

13.2 Zeitmessung und Abstand von Ereignissen

Bei der Neufassung der Begriffe Inertialsystem und Transformationen zwischen Inertialsystemen wollen wir mit den folgenden Forderungen beginnen:

1. Die Bahnen wechselwirkungsfreier Körper sollen in einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig sein. Gleichförmig bedeutet "gleiche Strecken in gleichen Zeiten". Als Zeitmessung soll die *Eigenzeit* des Inertialsystems verwendet werden. Der Zeitablauf soll nicht mehr als universell vorausgesetzt werden.

2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes soll in allen Inertialsystemen den Wert c besitzen.

Im Punkt 1 knüpfen wir an den Begriff des Inertialsystems in der Newton'schen Mechanik an. Lediglich die Annahme der Existenz einer universellen Zeit wird fallengelassen, weil gerade diese Annahme zur Vektoraddition von Geschwindigkeiten und damit zu den Problemen mit der Lichtausbreitung führte. Allerdings muß jetzt geklärt werden, wie die Zeitmessung innerhalb eines Inertialsystems auszuführen ist, d.h., wie die Eigenzeit in einem Inertialsystem operativ zu definieren ist. Dazu ist offenbar erforderlich, Uhren an verschiedenen Orten zu synchronisieren. Diese Uhren ruhen relativ zu ihrem Inertialsystem und damit auch relativ zueinander. Wir können diese Synchronisation durch Signale ausführen, die von zwei zu synchronisierenden Uhren zu einem Punkt gesendet werden, der denselben Abstand zu den beiden Uhren besitzt, z.B. in der Mitte zwischen den beiden Uhren, oder umgekehrt. Damit ist *Gleichzeitigkeit* in je einem Inertialsystem definiert und damit ist auch die Messung von Geschwindigkeiten innerhalb eines Inertialsystems ausführbar.

Der obige Punkt 2 ist das neue Element in der Theorie, auch *Einstein'sches Relativitätsprinzip* genannt. Es hat universellen Charakter, weil die Lichtgeschwindigkeit c die größte Ausbreitungsgeschwindigkeit physikalischer Wechselwirkung ist, die wir kennen. Wir werden dieses Prinzip benutzen, um den Zusammenhang bzw. die Transformationen zwischen Inertialsystemen zu formulieren.

Die Relativierung der Zeit legt es nahe, den Begriff **Ereignis** einzuführen. Ein Ereignis wird in einem Inertialsystem durch seinen Ort $\boldsymbol{r}$ und seine Zeit t beschrieben: $(\boldsymbol{r}, t)$. Beispiele für Ereignisse sind die Aussendung oder der Empfang eines Lichtsignals aber auch die Registrierung des Ortes $\boldsymbol{r}(t)$ einer beliebigen Bewegung eines Massenpunktes zur Zeit t. Ereignisse werden in verschiedenen Inertialsystemen im allgemeinen verschieden beschrieben. Es seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse, die in den Inertialsystemen S und S' wie folgt beschrieben werden:

	S	S'
E_1	$(\boldsymbol{r}_1, t_1)$	$(\boldsymbol{r}'_1, t'_1)$
E_2	$(\boldsymbol{r}_2, t_2)$	$(\boldsymbol{r}'_2, t'_2)$

Wir definieren die **Abstände** zwischen den Ereignissen E_1 und E_2 in S und S':

$$\begin{aligned} S: \qquad (\Delta s)^2 &:= c^2\,(\Delta t)^2 - (\Delta \boldsymbol{r})^2, \\ S': \qquad (\Delta s')^2 &:= c^2\,(\Delta t')^2 - (\Delta \boldsymbol{r}')^2, \end{aligned} \tag{760}$$

worin

$$\Delta t := t_2 - t_1, \qquad \Delta \boldsymbol{r} := \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,$$

analog in S'. Wenn die Ereignisse E_1 und E_2 Aussendung und Empfang eines Signals mit der maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit c sind, dann verschwindet der Abstand zwischen

ihnen gemäß dem Relativitätsprinzip in beiden Inertialsystemen: $(\Delta s)^2 = 0$ und $(\Delta s')^2 = 0$. Die Transformation zwischen zwei beliebigen Inertialsystemen S und S' muß also die Eigenschaft besitzen, daß sich

$$(\Delta s)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\Delta s')^2 = 0 \tag{761}$$

gegenseitig bedingen. Wenn das Signal zwischen E_1 und E_2 mit einer Geschwindigkeit $v < c$ läuft, also

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = v\,|\Delta t| < c\,|\Delta t|,$$

dann ist der Abstand zwischen den Ereignissen positiv:

$$(\Delta s)^2 = (c\,t)^2 - (\Delta \boldsymbol{r})^2 = \left(c^2 - v^2\right)\,(\Delta t)^2 > 0. \tag{762}$$

Für differentiell benachbarte Ereignisse schreiben wir deren Abstand in differentieller Form:

$$(ds)^2 = (c\,dt)^2 - (d\boldsymbol{r})^2 \tag{763}$$

und analog in S'.

Aus den obigen Überlegungen ziehen wir den Schluß, daß eine Transformation zwischen zwei Inertialsystemen S und S' die Abstände zwischen zwei differentiell benachbarten Ereignissen in folgender Form transformieren muß:

$$(ds)^2 = a(\ldots)\,(ds')^2, \tag{764}$$

denn zum einen bedingen sich $(ds)^2 = 0$ und $(ds')^2 = 0$ gegenseitig und zum anderen müssen Differentiale ds bzw. $(ds)^2$ wieder in solche gleicher Ordnung transformiert werden, damit z.B. Geschwindigkeiten wieder in Geschwindigkeiten transformiert werden. Wegen der Homogenität von Raum und Zeit kann dabei $a(\ldots)$ nicht von Orten und Zeiten absolut abhängen, ebenso nicht von den Orts- und Zeitdifferenzen der Ereignisse, weil das nur eine inkonsequente Schreibweise von (764) bedeuten würde. Die einzig mögliche physikalische Größe, von der $a(\ldots)$ abhängen kann, ist die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zwischen den beiden Inertialsystemen. Wegen der Isotropie des physikalischen Raumes kann $a(\ldots)$ dann aber auch nur vom Betrag $|\boldsymbol{v}|$ abhängen:

$$a(\ldots) = a(|\boldsymbol{v}|). \tag{765}$$

Es seien nun S, S_1, S_2 drei Inertialsysteme und $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ die Relativgeschwindigkeiten von S_1 bzw. S_2 gegen S. Dann gilt mit (764) und (765) auch

$$(ds)^2 = a(|\boldsymbol{v}_1|)\,(ds_1)^2 = a(|\boldsymbol{v}_2|)\,(ds_2)^2, \tag{766}$$

worin $(ds_1)^2$ und $(ds_2)^2$ die Abstände zwischen den differentiell benachbarten Ereignissen in S_1 bzw. S_2 sind. Aus (766) folgt

$$(ds_1)^2 = \frac{a(|\boldsymbol{v}_2|)}{a(|\boldsymbol{v}_1|)}\,(ds_2)^2. \tag{767}$$

Andererseits ist

$$(ds_1)^2 = a(|\boldsymbol{v}_{12}|)\,(ds_2)^2, \tag{768}$$

wo $\boldsymbol{v}_{12}$ die Relativgeschwindigkeit von S_2 gegen S_1 ist. Aus (767) und (768) folgt

$$a(|\boldsymbol{v}_{12}|) = \frac{a(|\boldsymbol{v}_2|)}{a(|\boldsymbol{v}_1|)}. \tag{769}$$

Hier hängt die linke Seite vom Winkel zwischen $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ ab, die rechte Seite jedoch nicht. Daraus folgt, daß $a(\ldots)$ =konstant. Dann lautet (769)

$$a = \frac{a}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.$$

Also läßt eine Transformation zwischen Inertialsystemen die Abstände zwischen Ereignissen ungeändert:

$$(ds)^2 = (ds')^2. \tag{770}$$

Das gilt dann natürlich auch für endliche Abstände, also

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \tag{771}$$

Im Zusammenhang mit der Beziehung (762) hatten wir gesehen, daß zwei Ereignisse, die durch eine Signalgeschwindigkeit $v < c$ verbunden sind, immer einen positiven Abstand haben. Hat das Signal zwischen den Ereignissen die Maximalgeschwindigkeit c, dann verschwindet der Abstand. Wir schließen daraus, das der Abstand zwischen zwei Ereignissen, zwischen denen eine *kausale* Beziehung besteht, nicht negativ ist. Unter einer kausalen Beziehung verstehen wir, daß ein physikalisches Signal oder eine physikalische Wechselwirkung ausgetauscht werden kann. Wir präzisieren diesen Begriff, indem wir fragen, unter welchen Bedingungen zu zwei Ereignissen E_1 und E_2, die in einem Inertialsystem S durch $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ und $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ beschrieben werden, ein Inertialsystem S' existiert, in dem diese Ereignisse am *gleichen Ort* stattfinden. Wenn ein solches Inertialsystem existiert, wollen wir die beiden Ereignisse kausal verknüpfbar nennen. Gleiche Orte in S' bedeutet, daß

$$\Delta\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1' = 0,$$

so daß nach (771)

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \qquad &\Rightarrow \qquad (c\,\Delta t)^2 - (\Delta\boldsymbol{r})^2 = (c\,\Delta t')^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right)^2 \leq c^2. \end{aligned} \tag{772}$$

Wir erhalten wieder die Antwort, daß zwei Ereignisse genau dann kausal verknüpfbar sind, wenn ein Signal bzw. eine physikalische Wechselwirkung mit einer Geschwindigkeit $v \leq c$ zwischen ihnen austauschbar ist. Man nennt die Abstände $(\Delta s)^2 \geq 0$ zwischen kausal verknüpfbaren Ereignissen auch *zeitartig*.

In der gleichen Weise können wir fragen, unter welchen Bedingungen es ein Inertialsystem S' gibt, in dem die beiden Ereignisse zur *gleichen Zeit* stattfinden, also $\Delta t' = 0$. Statt (772) haben wir jetzt

Abbildung 29: Lichtkegel mit einer Raumdimension x; Z =Zukunft, V =Vergangenheit, A =nicht kausale Bereiche.

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \qquad &\Rightarrow \qquad (c\,\Delta t)^2 - (\Delta \boldsymbol{r})^2 = -(\Delta \boldsymbol{r}')^2 < 0, \\ &\Rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right)^2 > c^2. \end{aligned} \tag{773}$$

Die beiden Ereignisse sind dann nicht durch ein Signal oder durch eine Wechselwirkung, also nicht kausal verknüpfbar. Man nennt die Abstände $(\Delta s)^2 < 0$ zwischen kausal nicht verknüpfbaren Ereignissen auch *raumartig*.

Es sei nun $E = (\boldsymbol{r}, t)$ ein beliebiges Ereignis, beschrieben in einem beliebigen Inertialsystem S. Wir wollen dieses Ereignis relativ zum "gegenwärtigen" Ereignis $O = (0, 0)$ im Ursprung von S diskutieren. Die Gesamtheit der Ereignisse E, die mit $O = (0, 0)$ kausal verknüpfbar sind bzw. von $O = (0, 0)$ einen zeitartigen Abstand haben, liegen in

$$s^2 = (c\,t)^2 - (\boldsymbol{r})^2 \geq 0, \tag{774}$$

und zwar sowohl in der zeitlichen Zukunft wie in der Vergangenheit:

$$\begin{array}{lll} \text{Zukunft} & Z & s^2 = (c\,t)^2 - (\boldsymbol{r})^2 \geq 0 \quad t > 0 \\ \text{Vergangenheit} & V & s^2 = (c\,t)^2 - (\boldsymbol{r})^2 \geq 0 \quad t < 0 \end{array} \tag{775}$$

Nicht kausal verknüpfbar mit $(0, 0)$ sind die Ereignisse mit einem raumartigen Abstand

$$s^2 = (c\,t)^2 - (\boldsymbol{r})^2 < 0. \tag{776}$$

Die beiden Bereiche werden getrennt durch den *Lichtkegel*

$$s^2 = (c\,t)^2 - (\boldsymbol{r})^2 = 0, \tag{777}$$

der in der Abbildung 29 für eine Raumdimension x statt $\boldsymbol{r}$ veranschaulicht ist. Die relative Klassifizierung eines Ereignisses als kausal verknüpfbar oder nicht kausal verknüpfbar bleibt in allen Inertialsystemen ungeändert, weil $(\Delta s)^2$ eine Invariante ist.

13.3 Eigenzeit

Wir wollen in diesem Abschnitt aufzeigen, auf welche Weise der Zeitbegriff durch das Einstein'sche Relativitätsprinzip bzw. durch die Invarianz von Abständen von Ereignissen gegen Transformationen zwischen Inertialsystemen relativiert wird. Es sei $K = \{\boldsymbol{r}, t\}$ ein Inertialsystem, von dem aus wir eine Uhr beobachten, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v längs der $\boldsymbol{e}_x-$Achse von K bewegt. Mit der Uhr ist dann ein Inertialsystem $K' = \{\boldsymbol{r}', t'\}$ verknüpfbar, in dessen Ursprung die Uhr ruhe. Es sei E_0 das Ereignis, daß sich die Ursprünge von K und K' am gleichen Ort befinden. Dort wird eine Synchronisation der Zeiten t in K und t' in K' durchgeführt. Das Ereignis E_0 hat dann in beiden Inertialsystemen K und K' die gleiche Beschreibung $(0, 0)$. Es sei nun weiter E das Ereignis, daß die Uhr im Ursprung von K' den Ort $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x$ in K erreicht hat. Dieses Ereignis wird in K beschrieben als

$$K: \qquad E = (x\,\boldsymbol{e}_x, t),$$

in K' jedoch als

$$K': \qquad E = (0, t'),$$

weil die Uhr dort ruht. Sie zeige also beim Ereignis E die Zeit t' an. Da der Abstand der Ereignisse E_0 und E in beiden Inertialsystemen K und K' derselbe ist, gilt

$$(c\,t)^2 - x^2 = (c\,t')^2. \tag{778}$$

Da $x = v\,t$ (in K), folgt daraus weiter

$$(c^2 - v^2)\,t^2 = (c\,t')^2$$

und somit

$$t' = \sqrt{1 - \beta^2}\,t, \tag{779}$$

worin wieder $\beta = v/c$. Die bewegte Uhr in K' geht also relativ zur Uhr in K nach. Natürlich ist dieses Ergebnis unabhängig von der Richtung der Relativbewegung von K und K'. Allerdings ist es auch unabhängig vom Standpunkt in K oder K', d.h., vom Standpunkt von K' geht die Uhr in K nach. Zwischen diesen beiden Aussagen besteht jedoch kein Widerspruch, denn die eine Uhr, die sich relativ zu einem Beobachter bewegt, muß mit *zwei* Uhren im Inertialsystem des Beobachters verglichen werden, d.h., der Vorgang des Uhrenvergleichs ist nicht symmetrisch in bezug auf die beiden Inertialsysteme.

Man nennt die Zeit, die eine mit einem Gegenstand mitbewegte Uhr anzeigt, die *Eigenzeit*. Damit ist insbesondere der Begriff der Eigenzeit für Inertialsysteme definiert. Er läßt sich aber auch auf beliebig bewegte Uhren anwenden. Wir können nämlich in jedem differentiellen Zeitabschnitt dt einer beliebigen Bewegung ein begleitendes oder "tangentiales" Inertialsystem K' konstruieren, das während dt mit der Uhr verbunden ist und für dessen Eigenzeit dt' relativ zu einem Inertialsystem K

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt \tag{780}$$

gilt. Hier ist v die momentane Geschwindigkeit des begleitenden Systems K' relativ zu K. Wir können dann auch (780) über ein endliches Zeitintervall integrieren und erhalten

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \tag{781}$$

Wir beobachten von einem Inertialsystem K aus eine Uhr, die sich auf einer geschlossenen Bahn bewegt. Nach Rückkehr an ihren Ausgangspunkt zeigt die bewegte Uhr eine kleinere Zeitdifferenz an als die Uhren im Inertialsystem. Dieser Vergleich ist aber *nicht* umkehrbar, d.h., ein mit der Uhr mitbewegter Beobachter kann nicht erwarten, daß auch umgekehrt die Uhren im zurückbleibenden Inertialsystem langsamer gehen, weil er sich längs einer geschlossenen Bahn nicht dauernd in einem Inertialsystem befunden hat.

13.4 Lorentz-Transformation

In diesem Abschnitt wollen wir Transformationen zwischen Inertialsystemen explizit formulieren. Es seien K und K' zwei Inertialsysteme, und K' bewege sich relativ zu K mit der konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bzw. umgekehrt K relativ zu K' mit $-\boldsymbol{v}$. Wir wählen in K und in K' je ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ bzw. $\boldsymbol{e}_x'$, $\boldsymbol{e}_y'$, $\boldsymbol{e}_z'$, und zwar so, daß die $\boldsymbol{e}_\alpha$ und $\boldsymbol{e}_\alpha'$ jeweils parallel zueinander sind und die Achsen $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_x'$ parallel zur Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ sind. Das Ereignis, daß die beiden Ursprünge von K und K' am gleichen Ort sind, werde in beiden Systemen als $(0,0)$ beschrieben, d.h., die Uhren in K und K' werden bei diesem Ereignis bei $t = 0$ bzw. $t' = 0$ gestartet. Es sei nun E ein beliebiges Ereignis, das in K als $(\boldsymbol{r}, t)$ und in K' als $(\boldsymbol{r'}, t')$ beschrieben wird. Wegen der oben beschriebenen Konstruktion der Koordinatensysteme stimmen die $y-$ und $z-$Koordinaten eines Ereignisses in beiden Systemen immer überein: $y = y',\ z = z'$. Dann ist

$$(c\,t')^2 - x'^2 = (c\,t)^2 - x^2 \tag{782}$$

offenbar die Bedingung für die aufzusuchende Transformation. Wir suchen die Transformation in der Form

$$x = f(x', t'), \qquad t = g(t', x'). \tag{783}$$

Damit können wir (782) in

$$(c\,t')^2 - x'^2 = c^2\,g^2(x', t') - f^2(x', t') \tag{784}$$

umformen. Diese Beziehung ist eine Identität für alle x', t'. Das ist nur dann möglich, wenn f und g *lineare* Funktionen sind. Also können wir die Transformation (783) umschreiben in

$$\begin{array}{rcl} x &=& A\,x' \;+\; B\,ct', \\ ct &=& C\,x' \;+\; D\,ct'. \end{array} \tag{785}$$

Wir setzen diese Form der Transformation in die Bedingung (782) ein und erhalten

$$\begin{aligned} &(c\,t')^2 - x'^2 = \\ &\quad = \left(D^2 - B^2\right)\,(c\,t')^2 - \left(A^2 - C^2\right)\,x'^2 + 2\,(C\,D - A\,B)\,c\,t'\,x'. \end{aligned} \tag{786}$$

Auch diese Relation soll eine Identität für alle x', t' sein. Daraus folgt für die Koeffizienten der Transformation

$$D^2 - B^2 = 1, \qquad A^2 - C^2 = 1, \qquad C\,D - A\,B = 0. \tag{787}$$

Dieses sind drei Bedingungen für vier Koeffizienten. Daraus schließen wir, daß die gesuchte Transformation eine einparametrige Schar ist. Wir erfüllen (787) durch die folgende Parametrisierung:

$$A = D = \cosh\phi, \qquad B = C = \sinh\phi, \tag{788}$$

worin ϕ ein beliebig wählbarer Parameter ist. Damit lautet die Transformation (785)

$$\begin{array}{rcl} x & = & x'\,\cosh\phi \;+\; c\,t'\,\sinh\phi, \\ c\,t & = & x'\,\sinh\phi \;+\; c\,t'\,\cosh\phi. \end{array} \tag{789}$$

Wir bestimmen die physikalische Bedeutung des Parameters ϕ, indem wir den Ursprung des Systems K' bei $x' = 0$ vom System K aus beobachten. Für $x' = 0$ folgt aus der Transformation (789)

$$x = c\,t'\,\sinh\phi, \qquad c\,t = c\,t'\,\cosh\phi,$$

und daraus weiter

$$\frac{x}{c\,t} = \tanh\phi.$$

x/t ist offenbar die Relativgeschwindigkeit von K' gegen K in der gemeinsamen $x-$Richtung. Da wir die $x-$Achsen parallel zur Richtung der Relativgeschwindigkeit gewählt hatten, gilt also

$$\tanh\phi = \frac{|\boldsymbol{v}|}{c} = \frac{v}{c} =: \beta, \tag{790}$$

s.o. Daraus erhalten wir weiter

$$\begin{array}{rcl} \cosh\phi & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =: \gamma, \\ \sinh\phi & = & \dfrac{\tanh\phi}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \dfrac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \beta\,\gamma. \end{array}$$

Damit lautet die vollständige Transformation

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \\ t & = & \dfrac{t' + v\,x'/c^2}{\sqrt{1-v^2c^2}} \end{array} \tag{791}$$

oder in verkürzter Form unter Verwendung der Abkürzungen β und γ

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + \beta\,c\,t')\,, \qquad y = y', \qquad z = z', \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\right). \end{aligned} \tag{792}$$

Transformationen zwischen Inertialsystemen, die das Einstein'sche Relativitätsprinzip erfüllen und somit die relativistische Entsprechung der Galilei-Transformation darstellen, nennt man allgemein *Lorentz-Transformationen*. (792) ist also eine spezielle Version einer Lorentz-Transformationen. Im folgenden Abschnitt werden wir die eigentliche mathematische Struktur von Lorentz-Transformationen erkennen.

Im Abschnitt 13.3 hatten wir gezeigt, daß bewegte Uhren relativ zu einem Beobachter in einem Inertialsystem langsamer ablaufen. Eine analoges Verhalten zeigen bewegte Gegenstände (Maßstäbe) bezüglich ihrer *Länge* relativ zu einem ruhenden Beobachter. Wir betrachten einen Maßstab der Länge l, der in einem Inertialsystem K ruhe. Die $x-$Achse von K zeige in Richtung des Maßstabs, dessen Endpunkte bei x_1 und x_2 liegen sollen, so daß $l = x_2 - x_1$. Der Maßstab werde nun von einem Beobachter gemessen, der sich mit einem Inertialsystem K' relativ zu K längs der $x-$Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt. Die Achsen in K' und K sollen wie oben jeweils parallel zueinander gewählt sein. Die Längenmessung eines Gegenstands muß stets so erfolgen, daß die beiden Endpositionen *gleichzeitig* gemessen werden. Auch der Beobachter in K' beobachte also die Enden des in K ruhenden Maßstabs gleichzeitig. Wir erinnern daran, daß gemäß der Konstruktion von Gleichzeitigkeit im Abschnitt 13.2 dieses innerhalb eines Inertialsystems immer möglich ist. Der Beobachter in K' registriere also die Endpunkte des in K ruhenden Maßstabs zu einer beliebigen Zeit t' bei den Positionen x'_1 und x'_2, also eine Länge $l' = x'_2 - x'_1$. Dann folgt aus der Lorentz-Transformation (792)

$$x_2 - x_1 = \gamma\,(x'_2 - x'_1)\,.$$

Das bedeutet, daß der bewegte Beobachter eine verkürzte Länge

$$l' = x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\,/\gamma = l\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{793}$$

mißt. Natürlich kann man diese sogenannte *Lorentz-Kontraktion* auch so beschreiben, daß bewegte Gegenstände in Bewegungsrichtung verkürzt erscheinen.

Wir bestimmen jetzt noch das Verhalten von Geschwindigkeiten von Massenpunkten unter Lorentz-Transformationen. Wir erwarten, daß die Vektoraddition von Geschwindigkeiten, die aus der Galilei-Transformation folgte, abgeändert wird. Wir formulieren die Lorentz-Transformation (792) in differentieller Form:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma\,(dx' + \beta\,c\,dt')\,, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \\ dt &= \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}\,dx'\right). \end{aligned} \tag{794}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta\, c\, dt'}{dt' + \beta\, dx'/c} = \frac{dx'/dt' + \beta\, c}{1 + \beta\, dx'/c\, dt'} \\ &= \frac{v'_x + \beta\, c}{1 + \beta\, v'_x/c} = \frac{v'_x + v}{1 + v\, v'_x/c^2}. \end{aligned} \tag{795}$$

Hier sind also v_x und v'_x die $x-$Komponenten der Geschwindigkeit eines Punktes, wie sie von K bzw. K' aus beobachtet werden, während $\beta\, c = v$ die Relativgeschwindigkeit von K' gegen K ist. (Die $x-$Achsen der beiden Inertialsysteme sollten vereinbarungsgemäß in die Richtung der Relativgeschwindigkeit zeigen.) Ganz analog ergeben sich für die anderen beiden Geschwindigkeitskomponenten die Transformationen

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{v'_y}{\gamma\, (1 + \beta\, v'_x/c)} = \frac{v'_y}{\gamma\, (1 + v\, v'_x/c^2)}, \\ v_z &= \frac{v'_z}{\gamma\, (1 + \beta\, v'_x/c)} = \frac{v'_z}{\gamma\, (1 + v\, v'_x/c^2)}. \end{aligned} \tag{796}$$

Es werden also wegen der Zeitdilatation auch die Komponenten der Geschwindigkeit senkrecht zur Relativgeschwindigkeit geändert, und zwar abhängig von der Komponente der Geschwindigkeit in Richtung der Relativgeschwindigkeit. Ein bewegter Körper erscheint verdreht.

Wir zeigen jetzt noch, daß bei der Transformation von Geschwindigkeiten gemäß (796) niemals Geschwindigkeitswerte größer als die Maximalgeschwindigkeit c entstehen können. Wir setzen voraus, daß

$$v < c \qquad \text{und} \qquad v'_x < c.$$

Dann folgt daraus

$$v'_x - \frac{v'_x\, v}{c} = v'_x \left(1 - \frac{v}{c}\right) < c \left(1 - \frac{v}{c}\right) = c - v,$$

und hieraus weiter

$$v'_x + v < c + \frac{v'_x\, v}{c} = c \left(1 + \frac{v'_x\, v}{c^2}\right),$$

also

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + v'_x\, v/c^2} < c, \tag{797}$$

worin wir beachten, daß der Nenner nicht negativ werden kann.

Wir beachten schließlich noch, daß alle Beziehungen dieses Abschnitts für Relativgeschwindigkeiten $v \ll c$ und Punktgeschwindigkeiten $v_x \ll c$ usw. in die entsprechenden nichtrelativistischen Beziehungen der Galilei-Transformation übergehen.

13.5 4-Vektoren und -Tensoren

Wir haben in dieser Vorlesungen an mehreren Stellen auf orthogonale Transformationen im 3-dimensionalen Raum zurückgegriffen. Wir haben sie in der Schreibweise

$$x_\beta = U_{\alpha\beta}\, x'_\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad x'_\beta = U_{\beta\alpha}\, x'_\alpha \tag{798}$$

verwendet, und zwar unter Vereinbarung der *Summationskonvention* für doppelt auftretende Indizes in Produkttermen. Die Orthogonalität der Transformation drückt sich aus in

$$U_{\alpha\gamma}\, U_{\beta\gamma} = U_{\gamma\alpha}\, U_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{799}$$

Aus ihr folgt, daß der gewöhnliche räumliche *Abstand* invariant gegen die Transformation ist:

$$x_\gamma\, x_\gamma = U_{\alpha\gamma}\, U_{\beta\gamma}\, x'_\alpha\, x'_\beta = \delta_{\alpha\beta}\, x'_\alpha\, x'_\beta = x'_\alpha\, x'_\alpha. \tag{800}$$

Der Grundgedanke in diesem Abschnitt ist, auch den im Abschnitt 13.2 definierten relativistischen "Abstand"

$$\Delta s^2 = (c\,\Delta t)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (\Delta x_\alpha)^2 \tag{801}$$

in Analogie zu (800) als Invariante von Lorentz-Transformationen zu interpretieren. Dazu definieren wir *4-Vektoren*, indem wir die Zeit in der Form $c\,t$ als 0-Komponente zu den räumlichen Komponenten x_α eines Ortsvektors hinzunehmen:

$$(x^i) = (c\,t,\ \boldsymbol{r})\,. \tag{802}$$

Es ist also $x^0 = c\,t$, und die Komponenten x^i für $i = 1, 2, 3$ sind die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$. Ein 4-Vektor beschreibt durch die Angabe von Zeit x^0 und Ort x^1, x^2, x^3 ein Ereignis. In der Version (802) heißt der 4-Vektor *kontravariant*. Wir wollen nun dieselbe Information über ein Ereignis in einer zweiten, nämlich *kovarianten* Schreibweise formulieren, die sich von der kontravarianten durch die Stellung des Index unterscheidet, nämlich x_i statt x^i, und wie folgt definiert ist:

$$(x_i) = (c\,t, -\boldsymbol{r})\,. \tag{803}$$

Kontravarianter und kovarianter 4-Vektor unterscheiden sich also durch ein Vorzeichen in ihren räumlichen Komponenten:

$$x_i = \begin{cases} x^i & \text{für} \quad i = 0, \\ -x^i & \text{für} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{804}$$

Beim "Heben" und "Senken" von Indizes in 4-Vektoren (Wechsel zwischen kontra- und kovariant) werden also die Vorzeichen in den räumlichen Komponenten geändert, während die zeitlichen Komponenten ungeändert bleiben. Wir schließen uns mit der Konvention über kontra- und kovariant an die in der internationalen Literatur an. Dabei kommt es zu der verwirrenden Folge, daß die räumlichen Komponenten des kovarianten Vektors x_i gerade die negativen Werte der Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ sind, die wir früher mit x_α, $\alpha = 1, 2, 3$ bezeichnet hatten. Die umgekehrte Version wäre naheliegender gewesen, aber wir wollen uns diesem Text an die übliche Konvention halten.

Unter Verwendung kontravarianter und kovarianter 4-Vektoren können wir nun den relativistischen Abstand wie folgt formulieren:

$$\Delta s^2 = (c\,\Delta t)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (\Delta x_\alpha)^2 = \sum_{i=0}^{3} \Delta x_i\,\Delta x^i. \tag{805}$$

Jetzt vereinbaren wir eine neue Summationskonvention: es soll über einen lateinischen Index i von $i = 0$ bis $i = 3$ summiert werden, wenn er in einem Produktterm doppelt, und zwar in der Kombination kovariant und kontravariant auftritt. Statt (805) schreiben wir also künftig

$$\Delta s^2 = \Delta x_i\,\Delta x^i. \tag{806}$$

Dagegen wird über Ausdrücke

$$\Delta x_i\,\Delta x_i \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta x^i\,\Delta x^i$$

nicht summiert.

Die Lorentz-Transformation (792) aus dem vorhergehenden Abschnitt erhält unter Verwendung des kontravarianten 4-Vektors x^i nun die Form

$$\begin{array}{rcrcr} x^0 &=& \gamma\,x'^0 &+& \beta\,\gamma\,x'^1 \\ x^1 &=& \beta\,\gamma\,x'^0 &+& \gamma\,x'^1 \\ x^2 &=& x'^2 & & \\ x^3 &=& x'^3 & & \end{array} \tag{807}$$

Diese lineare Transformation können wir unter Verwendung der neuen Summationskonvention in der Form

$$x^i = U^i{}_k\,x'^k \tag{808}$$

schreiben, wenn wir die Matrix $U^i{}_k$ wie folgt definieren:

$$(U^i{}_k) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\,\gamma & 0 & 0 \\ \beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{809}$$

Nach wie vor bezeichnet hier i die Zeilen und k die Spalten der Matrix. Wir wollen nun die Transformation (808) für kontravariante 4-Vektoren in eine Transformation für kovariante 4-Vektoren umwandeln. Dazu vereinbaren wir, daß die Regel (804) über das Heben und Senken von Indizes auch auf die Matrix $U^i{}_k$ angewendet wird, also

$$U^{ik} = \begin{cases} U^i{}_k & \text{für} \quad k = 0, \\ -U^i{}_k & \text{für} \quad k = 1, 2, 3. \end{cases},$$

und ebenso für den vorderen Index i. Damit folgt aus (808) zunächst

$$x^i = U^{ik}\,x'_k,$$

denn wir haben den Index k bei U gehoben und gleichzeitig bei x' gesenkt, so daß sich die Vorzeichen bei $k = 1, 2, 3$ immer kompensieren. Daraus folgt weiter

$$x_i = U_i{}^k\, x'_k, \tag{810}$$

weil wir jetzt auf beiden Seiten denselben Index i immer gesenkt haben. Mit diesen Regeln lautet die Matrix $U_i{}^k$ jetzt

$$(U_i{}^k) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{811}$$

Wenn wir (811) und die kovarianten Komponenten von x_i und x'_i in (810) einsetzen, kommen wir wieder auf die Lorentz-Transformation (792) zurück.

Wir bestimmen jetzt die *allgemein* an Transformationsmatrizen $U^i{}_k$ zu stellenden Bedingungen, damit sie den 4-Abstand $x^i\, x_i$ invariant lassen, also Lorentz-Transformationen beschreiben:

$$x^i\, x_i = U^i{}_j\, x'^j\, U_i{}^k\, x'_k = U^i{}_j\, U_i{}^k\, x'^j\, x'_k.$$

Damit dieser Ausdruck den gemäß der Invarianz zu fordernden Wert $x'^j\, x'_j$ erhält, muß offenbar

$$U^i{}_j\, U_i{}^k = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = k, \\ 0 & \text{für} \quad j \neq k \end{cases}$$

sein. Auf der rechten Seite steht also das Kronecker-Symbol. Wenn wir die kontra- und kovariante Schreibweise konsequent durchhalten wollen, müssen wir dieses in der Form

$$(\delta^k_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{812}$$

schreiben. Damit lautet die Bedingung, daß $U^i{}_k$ eine Lorentz-Transformation ist

$$U^i{}_j\, U_i{}^k = \delta^k_j. \tag{813}$$

Wenn wir jetzt die Transformation (808),

$$x^i = U^i{}_k\, x'^k,$$

auf beiden Seiten mit $U_i{}^j$ multiplizieren (einschließlich Summationskonvention!), dann erhalten wir unter Verwendung von (813)

$$x^i\, U_i{}^j = U^i{}_k\, U_i{}^j\, x'^k = \delta^j_k\, x'^k = x'^j.$$

Damit haben wir die *Umkehrtransformation* gefunden, die wir in der Form

$$x'^i = U_k{}^i\, x^k \tag{814}$$

schreiben. Die entsprechende kovariante Version dazu lautet

$$x'_i = U^k{}_i\, x_k. \tag{815}$$

Schließlich gilt analog zu (813)

$$U^k{}_i\, U_j{}^i = \delta^k_j. \tag{816}$$

Alle Matrizen U, die die Beziehungen (813) und (816) erfüllen, stellen offenbar Lorentz-Transformationen dar, weil sie den 4-Abstand $x^i\, x_i$ invariant lassen. Sie bilden eine *Gruppe*, die man die *homogene Lorentz-Gruppe* nennt. Die Abstandstreue im Sinne des 4-Abstands folgt, wie wir gesehen haben, aus den Relationen (813) bzw. (816), aus denen weiter auch

$$\Big(\det(U^i{}_k)\Big)^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \det(U^i{}_k) = \pm 1 \tag{817}$$

folgt. Im Fall $\det(U^i{}_k) = +1$ spricht man von *eigentlichen* Lorentz-Transformationen. Weiterhin gilt für Lorentz-Transformationen

$$\Big(U^0{}_0\Big)^2 \geq 1. \tag{818}$$

Auch diese Eigenschaft ist eine Konsequenz z.B. aus (816). Für $k = j = 0$ lautet (816)

$$U^0{}_i\, U_0{}^i = 1.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} U^0{}_i\, U_0{}^i &= U^0{}_0\, U_0{}^0 + \sum_{\alpha=1}^{3} U^0{}_\alpha\, U_0{}^\alpha \\ &= \Big(U^0{}_0\Big)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} \Big(U^{0\,\alpha}\Big)^2 \end{aligned}$$

(durch Heben des räumlichen Index α), also

$$\Big(U^0{}_0\Big)^2 = 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} \Big(U^{0\,\alpha}\Big)^2,$$

woraus die Behauptung (818) folgt. Eine Transformation mit $U^0{}_0 \geq 1$ heißt *orthochron*. Unter den homogenen Lorentz-Transformationen sind insbesondere die rein räumlichen Drehungen, die die Form

$$(U^i{}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & V & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

haben, worin V eine orthogonale Matrix ist. Man kann schließlich den Lorentz-Transformationen noch ebenfalls abstandstreue *Translationen* im 4-Raum hinzufügen, wodurch die sogenannte *Poincaré-Gruppe* entsteht.

Auch den Begriff das 4-Vektors wollen wir jetzt auf alle a^i bzw. a_i erweitern, die die Transformationsformeln (808) bzw. (814) erfüllen, also

$$a^i = U^i{}_k\, a'^k, \qquad a'^i = U_k{}^i\, a^k. \tag{819}$$

Wir definieren also einen 4-Vektor durch sein Verhalten unter einer Lorentz-Transformation. Ebenso hatten wir im Abschnitt 10.3 einen gewöhnlichen (3-dimensionalen, räumlichen) Vektor durch sein Verhalten unter einer orthogonalen Transformation definiert. Wir folgen diesem Vorgehen weiter und definieren einen *Lorentz-Skalar* (bzw. einen 4-Skalar) als eine Größe, die sich unter einer Lorentz-Transformation *nicht* ändert. Offensichtlich ist der Abstand zwischen zwei Ereignissen, $(\Delta s)^2$ ein solcher Lorentz-Skalar. Wenn wir einen 4-Vektor a^i mit einem Lorentz-Skalar φ multiplizieren, dann ist das Ergebnis $\varphi\, a^i$ wieder ein 4-Vektor. Ebenso gilt, daß das Skalarprodukt zwischen zwei beliebigen 4-Vektoren, $a^i\, b_i$, ein Lorentz-Skalar ist. Das läßt sich auf dieselbe Weise zeigen wie die Invarianz von $x^i\, x_i$.

Wir untersuchen jetzt, welche Stellung die *Geschwindigkeit* im System der 4-Vektoren und 4-Skalare hat. Nach dem, was wir soeben festgestellt haben, ist

$$u^i := \frac{dx^i}{ds} \qquad \text{bzw.} \qquad u_i := \frac{dx_i}{ds} \tag{820}$$

wieder ein 4-Vektor. Wir bestimmen die zeitlichen und räumlichen Komponenten von u^i. Mit

$$ds = \sqrt{(c\,dt)^2 - (d\boldsymbol{r})^2} = \sqrt{1-\beta^2}\, c\, dt = \frac{c}{\gamma}\, dt \tag{821}$$

wird

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{c\,dt}{ds} = \gamma \tag{822}$$

und

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{c}\,\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\gamma}{c}\, v^\alpha. \tag{823}$$

für $\alpha = 1, 2, 3$. Die räumlichen Komponenten v^α der gewöhnlichen 3-Geschwindigkeit bilden also - bis auf den Faktor γ/c - die räumlichen Komponenten des 4-Vektors u^i. Die zeitliche Komponente von u^i ist eine Konstante. Für das Skalarprodukt $u^i\, u_i$ gilt

$$u^i\, u_i = \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}\, \boldsymbol{v}^2 = \gamma^2\, \left(1 - \beta^2\right) = 1. \tag{824}$$

Wenn wir diese Gleichung nach s differenzieren, erhalten wir unter Verwendung der Produktregel

$$\frac{du^i}{ds}\, u_i + u^i\, \frac{du_i}{ds} = 2\, u^i\, \frac{du_i}{ds} = 0. \tag{825}$$

Der 4-Vektor $a^i = du^i/ds$ heißt die *4-Beschleunigung*. Die Gleichung (825) besagt also, daß 4-Geschwindigkeit und 4-Beschleunigung im 4-Raum senkrecht aufeinander stehen.

Auch für die Definition von *4-Tensoren* benutzen wir das Verhalten unter Lorentz-Transformationen. Wir nennen A^{ik} einen 4-Tensor (2. Stufe), wenn er sich wie das Produkt $a^i\, b^k$ zweier Komponenten von 4-Vektoren transformiert, also wie

$$A^{ik} = U^i{}_j\, U^k{}_l\, A'^{jl}. \tag{826}$$

Daraus gewinnt man alle weiteren Versionen durch konsequente Anwendung der Regeln für das Heben und Senken von Indizes, die also auch auf Tensoren angewendet werden. Ein Tensor A^{ik} heißt *symmetrisch*, wenn

$$A^{ik} = A^{ki}. \tag{827}$$

Aus (827) folgt dann auch

$$A_i{}^k = A^k{}_i.$$

Das gibt Anlaß zur Schreibweise

$$A_i{}^k = A^k{}_i =: A_i^k \tag{828}$$

und ebenso (für symmetrische Tensoren)

$$A_k{}^i = A^i{}_k =: A_k^i. \tag{829}$$

Das Kronecker-Symbol δ_i^k, definiert in (812), ist offenbar ein symmetrischer Tensor, für den

$$\delta_i^k = \delta_k^i$$

gilt. Allerdings haben wir den Nachweis der Tensoreigenschaft durch das Transformationsverhalten noch nachzuholen. Zu zeigen ist gemäß (826)

$$\delta^{ik} = U^i{}_j\, U^k{}_l\, \delta'^{jl},$$

oder äquivalent

$$\delta^i{}_k = U^i{}_j\, U_k{}^l\, \delta'^j{}_l.$$

Jetzt setzen wir voraus, daß $\delta'^j{}_l$ die Kronecker-Eigenschaft besitzt. Dann ist

$$\delta^i{}_k = U^i{}_j\, U_k{}^l\, \delta'^j{}_l = U^i{}_j\, U_k{}^j = \delta_k^i,$$

vgl. (816), womit der Beweis erbracht ist. Der Kronecker-Tensor hat also in allen Inertialsystemen dieselbe Gestalt.

13.6 Relativistische Dynamik eines Massenpunktes

Wir wollen die relativistische Dynamik eines wechselwirkungsfreien Massenpunktes m aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip $\delta W = 0$ entwickeln. Als Vorbild soll uns die nichtrelativistische Dynamik dienen, also

$$\delta W = 0, \qquad W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L, \qquad L = \frac{m}{2}\, \boldsymbol{v}^2. \tag{830}$$

Wir untersuchen das Verhalten des Wirkungsintegrals W gegen eine *Galilei-Transformation*, bei der die Geschwindigkeit und die Lagrange-Funktion gemäß

$$\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0, \qquad L \mapsto \frac{m}{2}\, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0)^2$$

transformiert werden. Für das Wirkungsintegral folgt daraus

$$\begin{aligned} W &\mapsto \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{m}{2}\, (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0)^2 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}^2 + m\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_0 + \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}_0^2\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(\frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}^2 + \frac{d}{dt}\left(m\,\boldsymbol{v}_0\,\boldsymbol{r} + \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}_0^2\,t\right)\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}^2 + m\,\boldsymbol{v}_0\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) + \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}_0^2\,(t_2-t_1) \\ &= W + m\,\boldsymbol{v}_0\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) + \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}_0^2\,(t_2-t_1). \end{aligned} \tag{831}$$

Das Wirkungsintegral W ändert sich unter der Galilei-Transformation um Terme, die nur von den Zeiten und Orten der Angangs- und Endpunkte des betrachteten Bahnabschnitts abhängen. Bei Ausführung der Variation δ liefern diese Terme keine Beiträge, weil die Zeit nicht variiert wird, $\delta t = 0$, und weil auch die Anfangs- und Endorte $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ nicht variiert werden. Das Wirkungsintegral ist bis auf solche Terme *Galilei-invariant*.

In Analogie zum nicht-relativistischen Fall suchen wir jetzt für die Formulierung der relativistischen Dynamik eines freien Massenpunktes einen *Lorentz-invarianten* Ausdruck für das Wirkungsintegral. Dieser Ausdruck muß offenbar die Form

$$W = \int_1^2 \ldots$$

haben, worin 1 und 2 Anfangs- und Endereignis des betrachteten Bahnabschnitts charakterisieren sollen. Das Integrationsdifferential und der Integrand können nur solche Größen enthalten, die den Bewegungszustand des Massenpunktes beschreiben. Dafür kommen in Frage der 4-Vektor x^i, der das Ereignis "Massenpunkt am Ort $\boldsymbol{r}$ zur Zeit t" bezeichnet, sowie sein Differential dx^i, das mit seiner Geschwindigkeit verknüpft ist, vgl. Abschnitt 13.5. Aus diesen können nur die Lorentz-Skalare

$$s^2 = x^i\,x_i, \qquad ds^2 = dx^i\,dx_i \qquad x^i\,dx_i$$

gebildet werden. Terme vom Typ $x^i\,dx_i$ scheiden aus, weil sie die Homogenität von Raum und Zeit und die Isotropie im Raum verletzen würden. Dann bleibt als einzige Möglichkeit

$$W = \alpha \int_1^2 ds, \tag{832}$$

worin α eine Konstante ist, deren physikalische Bedeutung noch zu bestimmen bleibt. Dieses Wirkungsintegral hängt natürlich noch vom Weg von 1 nach 2 ab, den man auch die *Weltlinie* des Massenpunktes nennt. Mit

$$ds = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,c\,dt \tag{833}$$

erhalten wir

$$W = \alpha\, c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{834}$$

woraus für die relativistische Lagrange-Funktion

$$L = \alpha\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{835}$$

folgt. Jetzt bestimmen wir die Bedeutung des Faktors α durch Vergleich mit dem nicht-relativistischen Grenzfall $v \ll c$, den wir aus (835) durch Entwicklung nach $\beta = v/c$ gewinnen:

$$L = \alpha\, c \left(1 - \frac{v^2}{2\, c^2} + O(\beta^4)\right) = \alpha\, c - \frac{\alpha}{2\, c}\, v^2 + \ldots. \tag{836}$$

Der Term $\alpha\, c$ ist konstant und fällt bei der Formulierung der Lagrange'schen Gleichungen heraus. Der zweite Term $\sim v^2$ muß aber mit dem nicht-relativistischen Ausdruck $L = m\, v^2/2$ übereinstimmen, woraus

$$\alpha = -m\, c$$

folgt. Also lautet die relativistische Lagrange-Funktion

$$L = -m\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{837}$$

Wir führen nun die Variation auf die übliche Weise durch und erhalten

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\, \delta \boldsymbol{v} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\, \frac{d}{dt}\, \delta \boldsymbol{r} \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\, \delta \boldsymbol{r}, \end{aligned} \tag{838}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die übliche partielle Integration ausgeführt haben. $\delta W = 0$ bedeutet also, daß der konjugierte, relativistische Impuls

$$\boldsymbol{p} := \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = -m\, c^2\, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{m\, \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{839}$$

erhalten ist. Wenn auf den Massenpunkt Kräfte aufgrund von Wechselwirkungen mit Feldern einwirken, dann ist $d\boldsymbol{p}/dt$ die linke Seite der Newton'schen Bewegungsgleichung. Bei der Ausführung der Ableitung d/dt ist jetzt darauf zu achten, daß der relativistische Impuls $\boldsymbol{p}$ in zweifacher Weise von der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ abhängt. Mit den üblichen Regeln des Differenzierens wird

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}\, \frac{m\, \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m\, \dot{\boldsymbol{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{\boldsymbol{v}\, \dot{\boldsymbol{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\, m\, \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{840}$$

Wenn die Bewegung so verläuft, daß

$$\boldsymbol{v}^2 = \text{konstant}, \qquad \text{also} \qquad \boldsymbol{v}\,\dot{\boldsymbol{v}} = 0,$$

dann ist

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{m\,\dot{\boldsymbol{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{841}$$

Man nennt deshalb

$$\frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

die *transversale Masse*. Wenn dagegen die Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit erfolgt, also

$$\dot{\boldsymbol{v}} \sim \boldsymbol{v}, \qquad \text{bzw.} \qquad (\boldsymbol{v}\,\dot{\boldsymbol{v}})\,\boldsymbol{v} = v^2\,\dot{\boldsymbol{v}},$$

dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} &= \left[\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right] m\,\dot{\boldsymbol{v}} \\ &= \frac{m\,\dot{\boldsymbol{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{842}$$

Man nennt deshalb

$$\frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

die *longitudinale Masse*.

Wir wollen jetzt auch die Hamilton'sche Form der relativistischen Dynamik eines freien Massenpunkts formulieren. Die Hamilton-Funktion ist definiert als

$$H = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{p} - L. \tag{843}$$

Wir setzen $\boldsymbol{p}$ aus (839) und L aus (835) ein:

$$H = \frac{m\,v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m\,c^2\,\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{844}$$

Jetzt müssen wir aus diesem Ausdruck die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eliminieren und durch den kanonischen Impuls $\boldsymbol{p}$ ausdrücken. Zunächst multiplizieren wir (844) mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und erhalten

$$H\,\boldsymbol{v} = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,c^2 = c^2\,\boldsymbol{p}, \tag{845}$$

worin wir wieder die Definition des Impulses in (839) benutzt haben. Durch eine elementare Rechnung können wir (839) auch nach $\boldsymbol{v}$ auflösen und erhalten

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{\sqrt{m^2\,c^2 + p^2}}\,\boldsymbol{p}. \tag{846}$$

Einsetzen in den linken Ausdruck $H\,\boldsymbol{v}$ in (845) liefert

$$H = c\,\sqrt{m^2\,c^2 + p^2}. \tag{847}$$

Für einen freien Massenpunkt ist die Hamilton-Funktion zugleich die Gesamtenergie E. Zum Vergleich mit dem nicht-relativistischen Fall entwickeln wir wieder nach $\beta = v/c$. Nach (846) ist das äquivalent mit einer Entwicklung nach $p/m\,c$:

$$\begin{aligned} H &= m\,c^2\,\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m\,c}\right)^2} \\ &= m\,c^2\,\left(1 + \frac{1}{2}\,\left(\frac{p}{m\,c}\right)^2 + O\left((p/m\,c)^4\right)\right) \\ &= m\,c^2 + \frac{p^2}{2\,m} + \ldots. \end{aligned} \tag{848}$$

Außer dem nicht-relativistischen Ausdruck $p^2/2\,m$ erhalten wir einen additiven Term $m\,c^2$, der im nicht-relativistischen Fall bei der Bildung der Hamilton'schen Gleichungen herausfällt, also dort keine Rolle spielt. Im relativistischen Fall können wir nicht so argumentieren. Dort lautet die Energie für einen ruhenden Massenpunkt

$$\boldsymbol{p} = 0: \qquad H = m\,c^2 = E. \tag{849}$$

Sie heißt *Ruhenergie* und ist, wie sich aus unserer Herleitung zeigt, letztlich eine zwingende Konsequenz aus der relativistischen Formulierung der Dynamik.

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{c}{\sqrt{m^2\,c^2 + p^2}}\,\boldsymbol{p}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = 0, \qquad \boldsymbol{p} = \text{konstant}, \end{aligned} \tag{850}$$

vgl. (846) und (839).

13.7 4-Schreibweise der relativistischen Dynamik eines Massenpunktes

In diesem Abschnitt wollen wir die relativistische Dynamik eines Massenpunktes, die wir soeben im Abschnitt 13.6 entwickelt haben, in die Schreibweise mit 4-Vektoren umformen, wie wir sie im Abschnitt 13.5 kennengelernt haben. Ausgangspunkt ist wieder das Wirkungsintegral

$$W = -m\,c\,\int_1^2 ds, \tag{851}$$

vgl. Abschnitt 13.6. Wir werden im folgenden die Integrationsgrenzen des Bahnabschnitts im Hamilton'schen Prinzip stets mit 1 bzw. 2 abkürzen, unabhängig von der jeweils verwendeten Integrationsvariabeln. Mit

$$(ds)^2 = dx^i\, dx_i$$

wird

$$W = -m\,c \int_1^2 \left(dx^i\, dx_i\right)^{1/2}. \tag{852}$$

Bei der Berechnung der (differentiellen) Variation δW können wir den Operator δ formal wie eine Differentiation verwenden. Insbesondere ist die Variation δ unabhängig vom Bahnverlauf, vgl. Kapitel 11. Es ist also

$$\delta W = -m\,c \int_1^2 \delta \left(dx^i\, dx_i\right)^{1/2} \tag{853}$$

und weiter

$$\delta \left(dx^i\, dx_i\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(dx^i\, dx_i\right)^{-1/2} \delta \left(dx^i\, dx_i\right).$$

Unter Verwendung der Produktregel für δ finden wir

$$\delta \left(dx^i\, dx_i\right) = d\delta x^i\, d_i + dx^i\, d\delta x_i = 2\, dx^i\, d\delta x_i$$

durch gleichzeitiges Heben und Senken von i im ersten Summanden. Zusammengefaßt ist also

$$\begin{aligned} \delta \left(dx^i\, dx_i\right)^{1/2} &= \left(dx^i\, dx_i\right)^{-1/2} dx^i\, d\delta x_i \\ &= \frac{dx^i}{ds}\, d\delta x_i, \end{aligned}$$

so daß

$$\delta W = -m\,c \int_1^2 \frac{dx^i}{ds}\, d\delta x_i = -m\,c \int_1^2 u^i\, d\delta x_i. \tag{854}$$

Hier ist u^i die 4-Geschwindigkeit, vgl. Abschnitt 13.5. Mit der üblichen partiellen Integration erhalten wir daraus weiter

$$\begin{aligned} \delta W &= -m\,c \left[u^i\, \delta x_i\right]_1^2 + m\,c \int_1^2 du^i\, \delta x_i \\ &= -m\,c \left[u^i\, \delta x_i\right]_1^2 + m\,c \int_1^2 ds\, \frac{du^i}{ds}\, \delta x_i. \end{aligned} \tag{855}$$

Das Hamilton'sche Variationsprinzip $\delta W = 0$ führen wir mit der Nebenbedingung $\delta x_i = 0$ im Anfangs- und Endpunkt 1 bzw. 2 durch, denn es ist

$$\delta x_0 = c\,\delta t = 0$$

während des gesamten Bahnablaufs, und für die räumlichen Komponenten gilt $\delta \boldsymbol{r} = 0$ im Anfangs- und Endpunkt. Also folgt aus $\delta W = 0$ gemäß (855)

$$\frac{du^i}{ds} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad u^i = \text{konstant.} \tag{856}$$

Weil

$$(u^i) = \gamma\,(1, \boldsymbol{v}/c)\,,$$

vgl. Abschnitt 13.5, folgt auch wieder $\boldsymbol{v}$ = konstant für die Bahn des freien Massenpunktes. Wenn wir das Wirkungsintegral als Funktion der oberen Grenze längs der tatsächlichen Bahn interpretieren, finden wir aus (855)

$$\delta W = -m\,c\,u^i\,\delta x_i. \tag{857}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht ein Lorentz-Skalar, und δx_i ist ein uns bereits bekannter 4-Vektor. Daraus folgt, daß auch $m\,c\,u^i$ ein 4-Vektor ist. In Analogie zum nicht-relativistischen Fall heißt dieser 4-Vektor der *4-Impuls*:

$$p^i := m\,c\,u^i. \tag{858}$$

Die Gleichung (857) läßt sich damit auch in der Form

$$-\frac{\partial W}{\partial x_i} = p^i \tag{859}$$

schreiben. Wir bestimmen die zeitlichen und räumlichen Komponenten des 4-Impulses:

$$p^0 = m\,c\,\gamma = \frac{m\,c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{H}{c} = \frac{E}{c}, \tag{860}$$

vgl. Abschnitt 13.6. Die 0-Komponente des 4-Impulses ist also - bis auf den Factor $1/c$ - die Energie des freien Massenpunktes. Für die räumlichen Komponenten des 4-Impulses erhalten wir

$$p^\alpha = m\,c\,u^\alpha = m\,\gamma\,v^\alpha = \frac{m\,v^\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{861}$$

in Übereinstimmung mit (839) aus dem Abschnitt 13.6. Der 4-Impuls faßt also Energie und den räumlichen Impuls zu einem 4-Vektor

$$(p^i) = (E/c, \boldsymbol{p}) \tag{862}$$

zusammen. Damit können wir auch die Gleichung (859) in ihren zeitlichen und räumlichen Anteil auftrennen. Wir beachten dabei, daß

$$(x_i) = (c\,t, -\boldsymbol{r})\,,$$

und finden dann

$$-\frac{1}{c}\,\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{H}{c}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \boldsymbol{p}. \tag{863}$$

Dieses sind die relativistischen Versionen der entsprechenden nicht-relativistischen Gleichungen aus dem Abschnitt 12.4.

Als 4-Impuls transformiert sich p^i unter einer Lorentz-Transformation gleichlautend wie der 4-Vektor x^i. Als Beispiel wählen wir die bereits im Abschnitt 13.5 verwendete Lorentz-Transformation

$$(U^i{}_k) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\,\gamma & 0 & 0 \\ \beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{864}$$

die eine Relativbewegung mit der Geschwindigkeit v längs der $1-$Achse zwischen zwei Koordinatensystemen mit paarweise parallelen Achsen beschreibt. Gemäß

$$p^i = U^i{}_k\, p'^k$$

lautet die entsprechende Lorentz-Transformation für die Komponenten von p^i

$$\begin{array}{rcrcl} p^0 &=& \gamma\, p'^0 &+& \beta\,\gamma\, p'^1 \\ p^1 &=& \beta\,\gamma\, p'^1 &+& \gamma\, p'^1 \\ p^2 &=& p'^2 & & \\ p^3 &=& p'^3 & & \end{array} \tag{865}$$

bzw. unter Verwendung der expliziten Komponenten in (862)

$$\begin{aligned} E &= \gamma\left(E' + v\, p'^1\right) \\ p^1 &= \gamma\left(p'^1 + v\, E'/c^2\right) \\ p^2 &= p'^2 \\ p^3 &= p'^3. \end{aligned} \tag{866}$$

In der Gleichung (859),

$$-\frac{\partial W}{\partial x_i} = p^i,$$

steht links die Ableitung einer skalaren Funktion $-W$ nach einem kovarianten 4-Vektor x_i. Das Ergebnis ist ein kontravarianter 4-Vektor p^i. Durch gleichzeitiges Heben und Senken des Index i wird diese Beziehung äquivalent mit

$$-\frac{\partial W}{\partial x^i} = p_i.$$

Ableitungen nach kovarianten 4-Vektoren führen auf kontravariante 4-Vektoren und umgekehrt. Dieser Zusammenhang wird deutlicher durch die folgende Schreibweise:

$$\partial^i W := \frac{\partial W}{\partial x_i}, \qquad \partial_i W := \frac{\partial W}{\partial x^i}, \tag{867}$$

bzw. allgemein

$$\partial^i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{868}$$

Die Ableitung ∂^i führt also immer auf einen kontravarianten 4-Vektor, die Ableitung ∂_i immer auf einen kovarianten 4-Vektor.

Für den 4-Impuls $p^i = m\,c\,u^i$ gilt

$$p^i\,p_i = m^2\,c^2\,u^i\,u_i = m^2\,c^2, \tag{869}$$

vgl. Abschnitt 13.5. Wenn wir dort

$$p^i = -\partial^i\,W, \qquad p_i = -\partial_i\,W$$

einsetzen, erhalten wir

$$\partial^i\,W\,\partial_i\,W - m^2\,c^2 = 0. \tag{870}$$

Das ist offensichtlich die relativistische Version der *Hamilton-Jacobi-Gleichung*. Diese können wir lösen durch den Ansatz

$$W = a^i(P)\,x_i = a_i(P)\,x^i, \tag{871}$$

worin $a^i(P)$ ein 4-Vektor ist, der von den neuen (kanonisch transformierten) Impulsen P abhängt und die Bedingung

$$a^i(P)\,a_i(P) = m^2\,c^2$$

erfüllen muß.

13.8 Wechselwirkung eines Teilchens mit einem Feld

Die konsequente Anwendung des Realitivitätsprinzips hatte uns im Abschnitt 13.6 auf die vollständige Formulierung der relativistischen Dynamik eines freien, d.h. wechselwirkungsfreien Massenpunktes geführt. Der entscheidende Schritt dabei war, einen Lorentz-invarianten Ausdruck für das Wirkungsintegral zu finden. Wir wollen diese Art des Vorgehens nun auf den Fall erweitern, daß der Massenpunkt nicht mehr frei ist, sondern mit einem Feld wechselwirkt. Das Feld ist dabei als eine neue dynamische Variable aufzufassen, für die selbst wieder "Bewegungsgleichungen", d.h., Feldgleichungen zu formulieren sind. Diesen zweiten Schritt wollen wir hier nicht mehr ausführen. Es soll uns hier nur um die Einwirkung eines als gegeben zu betrachtenden Feldes auf den Massenpunkt gehen. Wieder wollen wir für dieses Problem einen Lorentz-invarianten Ausdruck für das Wirkungsintegral formulieren und die daraus sich ergebenden Konsequenzen diskutieren.

Ein *Feld* ist nach dem, was wir bereits im Abschnitt 13.1 dazu überlegt hatten, ein Zustand des materiefreien Raumes. (Dieses Bild ist nur klassisch, d.h., nicht-quantentheoretisch haltbar. In einer konsequent quantentheoretischen Beschreibung ist auch Materie als Feld darzustellen). Die Feldvariable muß also eine Funktion des 4-Vektors x^i sein, der Ereignisse im Raum charakterisiert. Wir machen den Ansatz, daß der Feldzustand selbst durch einen 4-Vektor a^i beschrieben wird, der dann also eine Funktion von x^i wird:

$$a^i = a^i(x^j).$$

In der gewöhnlichen Schreibweise mit zeitlichen und räumlichen Komponenten bedeutet das

$$(a^i) = (\phi(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t)) \,, \tag{872}$$

worin $\phi(\ldots)$ und $\boldsymbol{a}(\ldots)$ die zeitlichen und räumlichen Komponenten des 4-Vektors a^i sind. Für die Formulierung des gesuchten Wirkungsintegrals des mit dem Feld wechselwirkenden Massenpunktes stellen wir außer der Forderung nach Lorentz-Invarianz noch die beiden folgenden Forderungen:

1. Für verschwindendes Feld $a^i = 0$ soll das Wirkungsintegral das des freien Massenpunktes werden, also

$$W = -m\,c \int_1^2 ds + W(\text{Teilchen-Feld}). \tag{873}$$

2. Für die Wechselwirkung Massenpunkt-Feld soll das *Superpositionsprinzip* erfüllt sein, d.h., der Wechselwirkungsterm in (873) soll *linear* im Feld bzw. in dem 4-Vektor a^i sein. Diese Forderung läßt sich in Lorentz-invarianter Weise nur durch

$$W(\text{Teilchen-Feld}) \sim \int_1^2 dx_i\, a^i \tag{874}$$

erfüllen.

Das gesuchte Wirkungsintegral läßt sich dann insgesamt in der Form

$$W = \int_1^2 \left(-m\,c\,ds - a^i\,dx_i\right) \tag{875}$$

schreiben. Wenn wir das Skalarprodukt $a^i\,dx_i$ in seine zeitlichen und räumlichen Komponenten auflösen, erhalten wir mit der Schreibweise von (872)

$$a^i\,dx_i = c\,\phi\,dt - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dr} = (c\,\phi - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v})\,dt, \tag{876}$$

eingesetzt in W in (875):

$$W = \int_1^2 dt\,\left(-m\,c\,\frac{ds}{dt} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v} - c\,\phi\right). \tag{877}$$

Also lautet die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= -m\,c\,\frac{ds}{dt} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v} - c\,\phi \\ &= -m\,c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v} - c\,\phi. \end{aligned} \tag{878}$$

Nur das Wirkungsintegral ist Lorentz-invariant; die Lagrange-Funktion L hat in verschiedenen Inertialsystemen im allgemeinen verschiedene Darstellungen.

Wir wollen jetzt wieder zur Hamilton'schen Form der Beschreibung übergehen. Zu diesem Zweck berechnen wir zunächst den *kanonisch konjugierten Impuls* $\boldsymbol{P}$ durch Ableitung der Lagrange-Funktion nach der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \left(-m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v} - c\,\phi \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \left(-m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) + \boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{879}$$

Den kanonisch konjugierten Impuls des Massenpunktes allein hatten wir bereits im Abschnitt 13.6 berechnet, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \left(-m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =: \boldsymbol{p}. \tag{880}$$

Wir unterscheiden hier also den sogenannten *kinetischen Impuls* $\boldsymbol{p}$ vom *kanonischen* Impuls $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}$. Wir berechnen jetzt die Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{P} - L \\ &= \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}) + m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v} + c\,\phi \\ &= \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{v} + m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + c\,\phi. \end{aligned} \tag{881}$$

Die ersten beiden Terme bilden gerade die Hamilton-Funktion des wechselwirkungsfreien Massenpunktes, die wir bereits im Abschnitt 13.6, Gleichung (844) berechnet hatten:

$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{v} + m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

so daß aus (881)

$$H = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + c\,\phi \tag{882}$$

folgt. Hieraus berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} (H - c\,\phi)^2 &= \frac{m^2\,c^4}{1 - v^2/c^2} \\ &= m^2\,c^4\,\frac{1 - v^2/c^2 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \\ &= m^2\,c^4 + c^2\,p^2 \\ &= m^2\,c^4 + c^2\,(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{a})^2\,, \end{aligned}$$

und daraus schließlich

$$H = c\,\sqrt{m^2\,c^2 + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{a})^2} + c\,\phi. \tag{883}$$

Unser nächster Schritt ist die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt. Es zeigt sich, daß das im Lagrange-Formalismus etwas einfacher ist. Wir gehen also zurück zur Lagrange-Funktion in (878) und formulieren damit die Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0. \tag{884}$$

Unter Verwendung des kanonischen Impulses in (879) erhalten wir zunächst

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{a}. \tag{885}$$

Hier ist die Zeitableitung d/dt, wie immer in Bewegungsgleichungen, als *totale* Zeitableitung längs der Bahn des Massenpunktes zu interpretieren. Da $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t)$ eine Funktion des Ortes $\boldsymbol{r}$ und der Zeit t ist, muß bei d/dt auch die Zeitabhängigkeit des Ortes $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ eingeschlossen werden. Für die (räumliche) $\alpha-$Komponente von $\boldsymbol{a}$ wird also in der gewöhnlichen Schreibweise (vor Einführung der kontra- und kovarianten Schreibweise)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a_\alpha &= \frac{\partial a_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{dx_\beta}{dt} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) a_\alpha \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right) a_\alpha.
\end{aligned} \tag{886}$$

Hier ist

$$\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} =: \sum_{\beta=1}^{3} v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta},$$

der sogenannte *Vektorgradient*, ein *skalarer* Operator, der auf skalare und vektorielle Felder angewendet werden kann. Bei der Anwendung auf vektorielle Felder ist unbedingt darauf zu achten, daß *zuerst* das Skalarprodukt von $\boldsymbol{v}$ und $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ zu bilden ist, bevor der Operator auf das Feld einwirkt. In diesem Sinne ist dann auch die vektorielle Schreibweise von (886) zu interpretieren, nämlich

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{a}. \tag{887}$$

(885) lautet damit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{a}. \tag{888}$$

Aus der Gleichung (878) für die Lagrange-Funktion folgt auch

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v}) - c\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{889}$$

Darin verwenden wir einen Hilfssatz, den wir im Anhang zu diesem Abschnitt beweisen, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{v}\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}\right). \tag{890}$$

Hier ist vorausgesetzt, daß $\boldsymbol{v}$ nicht explizit vom Ort $\boldsymbol{r}$ abhängt, was trivialerweise erfüllt ist. Wir setzen den Hilfssatz in (889) ein und erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \left(\boldsymbol{v}\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}\right) - c\,\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{891}$$

Wir fassen diese Umrechnungen zusammen, indem wir die Ausdrücke aus (888) und (891) in die Lagrange'sche Gleichung (884) einsetzen:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}\right) + c\,\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}} = 0. \tag{892}$$

Wir definieren jetzt die beiden Felder

$$\boldsymbol{e} : \;=\; -c\,\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} \tag{893}$$

$$\boldsymbol{b} : \;=\; \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}. \tag{894}$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{b}. \tag{895}$$

Die beiden Felder $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{b}$ müssen außerdem zwei *Feldgleichungen* erfüllen. Zunächst ist mit (894)

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{b} = \frac{\partial}{\partial t}\,\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{b}\right),$$

weil die Ableitungen nach dem Ort und nach der Zeit vertauscht werden können. Wir drücken $\partial \boldsymbol{a}/\partial t$ durch (893) aus:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{b} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \left(-c\,\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{e}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{e}, \tag{896}$$

weil

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = 0,$$

die Rotation eines Gradienten verschwindet, wie wir bereits im Kapitel 4 nachgewiesen hatten. Ferner bilden wir die *Divergenz* des Feldes $\boldsymbol{b}$, definiert als

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{r}} =: \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}. \tag{897}$$

Unter Verwendung von (894) ist nun

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}\right) = 0, \tag{898}$$

die Divergenz einer Rotation verschwindet, wie wir im Anhang zu diesem Abschnitt zeigen werden. Wir fassen die beiden Feldgleichungen für $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{b}$ noch einmal zusammen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{b} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{e} = 0, \tag{899}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{b} = 0. \tag{900}$$

Diese beiden Feldgleichungen für $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{b}$ haben die Struktur der homogenen *Maxwell'schen Gleichungen* der Elektrodynamik. Auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (895) für den mit dem Feld wechselwirkenden Massenpunkt steht die *Lorentz-Kraft*, wenn wir dort mit den Definitionen

$$\boldsymbol{e} := q\,\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{b} := q\,\boldsymbol{B} \tag{901}$$

das *elektrische Feld* $\boldsymbol{E}$ und die *magnetische Flußdichte* $\boldsymbol{B}$ einführen. Der Faktor q beschreibt diejenige Eigenschaft des Massenpunktes, vermöge derer er mit den Feldern in Wechselwirkung tritt, die sogenannte *elektrische Ladung* des Massenpunktes. Bewegungsgleichung und homogene Maxwell'sche Gleichungen lauten dann

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{902}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{B} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{E} = 0, \tag{903}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{B} = 0. \tag{904}$$

Dieses sind die beiden homogenen *Maxwell-Gleichungen* der Elektrodynamik.

Auch im 4-Vektor

$$(a^i) = (\phi(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t))\,,$$

vgl. (872), führen wir die elektrische Ladung q des wechselwirkenden Massenpunktes ein und definieren das *Vektorpotential*

$$\boldsymbol{A} := \frac{1}{q}\,\boldsymbol{a} \tag{905}$$

sowie das *elektrische Potential*

$$\Phi := \frac{c}{q}\,\phi, \tag{906}$$

so daß für die Darstellung der Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus (893) und (894) mit den Definitionen (901) jetzt

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{A} \tag{907}$$

folgt. Aus dem 4-Vektor a^i wird dann

$$a^i = (\phi, \boldsymbol{a}) = q\,\left(\frac{1}{c}\,\Phi, \boldsymbol{A}\right) =: q\,A^i. \tag{908}$$

Der 4-Vektor

$$A^i := \left(\frac{1}{c}\,\Phi, \boldsymbol{A}\right) \tag{909}$$

heißt das *4-Potential*. Es ist also so, daß die Potentiale einen 4-Vektor bilden, nicht etwa die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$. In der Elektrodynamik wird gezeigt werden, daß die Felder einen *4-Tensor* bilden. Das Wirkungsintegral (875) und die Lagrange-Funktion (878) schreiben sich dann

$$W = \int_1^2 \left(-m\,c\,ds - q\,A^i\,dx_i\right), \tag{910}$$

$$L = -m\,c^2\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\,\left(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} - \Phi\right). \tag{911}$$

Durch unser Vorgehen haben wir gezeigt, daß die Maxwell'sche Theorie der Elektrodynamik offenbar die einzige Möglichkeit für eine lineare, Lorentz-invariante (klassische) Feldtheorie ist. Allerdings fehlen noch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\left(\frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{B}\right) &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\,\left(\epsilon_0\,\boldsymbol{E}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\left(\epsilon_0\,\boldsymbol{E}\right) &= \rho. \end{aligned} \tag{912}$$

Hier sind $\boldsymbol{j}$ und ρ die felderzeugenden elektrischen Strom- bzw. Ladungsdichten. Um auch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen aus einer Lorentz-invarianten Formulierung zu gewinnen, muß zum Wirkungsintegral ein weiterer Term hinzugefügt werden, der die Wirkung der Felder selbst beschreibt. Dieser Term ist quadratisch in $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ und wird mit dem bereits erwähnten 4-Tensor der Felder gebildet. Die Variation dieses Terms aufgrund von Variation der Felder führt dann auf die linearen Feldgleichungen (912).

Anhang

Wir zeigen, daß

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\left(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v}\right) = \left(\boldsymbol{v}\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{a}\right). \tag{913}$$

vgl. (890). Hier kann $\boldsymbol{v}$ ein beliebiger Vektor sein, der jedoch nicht vom Ort $\boldsymbol{r}$ abhängen soll. Bei dem folgenden Nachweis verwenden wir die Summationskonvention der gewöhnlichen 3-dimensionalen (räumlichen) Schreibweise, also z.B.

$$v_\alpha\,\partial_\alpha := \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

usw. Wir bilden die 1-Komponente der rechten Seite der Behauptung in (913) und formen diesen Ausdruck schrittweise wie folgt um:

$$
\begin{aligned}
v_\alpha\,\partial_\alpha\,a_1 + v_2\,\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a}\right)_3 - v_3\,\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a}\right)_2 &= \\
&= v_\alpha\,\partial_\alpha\,a_1 + v_2\,(\partial_1\,a_2 - \partial_2\,a_1) - v_3\,(\partial_3\,a_1 - \partial_1\,a_3) \\
&= (v_\alpha\,\partial_\alpha - v_2\,\partial_2 - v_3\,\partial_2)\,a_1 + \partial_1\,(v_2\,a_2 + v_3\,a_3) \\
&= v_1\,\partial_1\,a_1 + \partial_1\,(v_2\,a_2 + v_3\,a_3) \\
&= \partial_1\,(v_\alpha\,a_\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Der letzte Ausdruck dieser Umformung stellt gerade die 1-Komponente der linken Seite von (913) dar. Ganz analog läßt sich der Nachweis für die 2- und 3-Komponenten führen, womit (913) bewiesen ist.

Den anderen noch zu beweisenden Hilfssatz, nämlich

$$
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a}\right) = 0, \tag{914}
$$

vgl. (898), zeigt man sehr einfach durch Ausschreiben der linken Seite in Komponenten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a}\right) = \\
&\quad = \partial_1\,(\partial_2\,a_3 - \partial_3\,a_2) + \partial_2\,(\partial_3\,a_1 - \partial_1\,a_3) + \partial_3\,(\partial_1\,a_2 - \partial_2\,a_1)\,.
\end{aligned}
$$

Auf der rechten Seite stehen zweite Ableitungen vom Typ

$$
\partial_\alpha\partial_\beta\,a_\gamma.
$$

Unter Benutzung der Tatsache, daß die Reihenfolgen der Ableitungen vertauschbar sind, sehen wir, daß die Terme sich paarweise eliminieren. Damit ist auch der zweite Hilfssatz bewiesen.

Die in diesem Anhang gegebenen Beweise durch Ausschreiben in Komponenten wirken sehr unelegant. Tatsächlich lassen sich diese Beweise ganz erheblich verkürzen, wenn man den sogenannten *Levi-Civita-Tensor* (eigentlich ein Pseudo-Tensor) benutzt, der in der Elektrodynamik eingeführt wird.