Laserphysik
- Skriptum zur Vorlesung -

Prof. Dr. Hans-Jörg Kull

Fraunhofer Institut für Lasertechnik
und
Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik
Institut für Theoretische Physik A
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Aachen

23. Februar 1998

Vorbemerkungen

Voraussetzungen und Zielsetzungen:

Die Vorlesung *Laserphysik* wendet sich an Physikstudenten nach dem Vordiplom sowie an Diplomanden und Doktoranden. Sie kann in Verbindung mit einer weiteren Vorlesung (V4), z.B. Plasmaphysik, als Wahlpflichtfach physikalischer Richtung für die Diplomprüfung gewählt werden.

Die Vorlesung soll in die physikalischen Grundlagen des Lasers einführen. Ein wesentliches Ziel der Vorlesung besteht in der Herleitung und Diskussion der Grundgleichungen der semiklassischen Lasertheorie auf der Grundlage der quantenmechanischen Dichtematrixgleichungen für Zweiniveausysteme. Ergänzend werden klassische, quantenmechanische und statistische Eigenschaften des Lichtes behandelt.

Skriptum zur Vorlesung:

Das Skriptum zur Vorlesung darf ausschließlich für den eigenen privaten Gebrauch kopiert werden. Kopiervorlagen liegen im Kopierraum der Bibliothek der Physikalischen Institute und in der Handbuchbibliothek des Fraunhofer Instituts Lasertechnik aus. Ein Postskript-File des Skriptums ist im Internet unter

http://www2.ilt.fhg.de/www/llp/skripten/skripten.html

zugänglich. Der Ausdruck darf grundsätzlich nur auf eigene Kosten erfolgen.

Übungen zur Vorlesung:

Begleitend zur Vorlesung findet wöchentlich eine 2-stündige Übung statt, die der Vertiefung des Vorlesungsstoffes und der freiwilligen Selbstkontrolle dienen soll. Die Übungsaufgaben werden in einem Anhang zum Vorlesungsskriptum fortlaufend gesammelt. Dieser Anhang liegt zusammen mit dem Skriptum als Kopiervorlage bzw. als Postskript-File aus.

Auf Wunsch kann die Teilnahme an der Vorlesung und an den Übungen durch einen Teilnahmeschein bestätigt werden.

Literaturhinweise:

Das Skriptum kann kein Lehrbuch ersetzen. Begleitend zur Vorlesung werden folgende Lehrbücher empfohlen:

1. P.W. Milonni, J.H. Eberly: Lasers (John Wiley & Sons, New York, 1988)
2. H. Haken: Licht und Materie (BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989)
3. R. Loudon: The Quantum Theory of Light (Clarendon Press, Oxford, 1983)
4. L. Mandel, E. Wolf: Optical coherence and quantum optics (Cambridge University Press, 1995)

5. J.W. Goodman: Statistical Optics (John Wiley & Sons, New York, 1985)

6. J.Eichler, H.-J. Eichler: Laser (Springer-Verlag, Berlin, 1991)

7. F.K. Kneubühl, M.W. Sigrist: Laser (Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1991)

Maßsysteme:

In der Elektrodynamik sind 2 Maßsysteme weit verbreitet, das SI-System und das Gaußsche Maßsystem. Das SI-System hat den Vorteil, daß man die numerischen Werte der physikalischen Größen unmittelbar in praktischen Einheiten (MKSA) angeben kann. Es empfiehlt sich daher besonders im Experiment und in der Computersimulation.

In der Theoretischen Physik ist es zweckmäßig Variablensubstitutionen so vorzunehmen, daß die Gleichungen möglichst einfach und einprägsam ausschauen. Hierin liegt die Stärke des Gaußschen Maßsystems. In diesen Einheiten besitzt z.B. das elektrische und das magnetische Feld dieselbe Dimension, so daß die Vereinheitlichung der Felder im elektromagnetischen Feldtensor sichtbar wird.

Diesem Skriptum liegt die folgende Konvention zugrunde. Zur numerischen Berechnung physikalischer Größen (z.B. elektrische Feldstärke) wird das internationale SI-System (Systéme International d'Unitès) mit den Einheiten m, kg, sec, A verwendet. Einige häufig vorkommende physikalische Konstanten sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Formale Beziehungen (z.B. Maxwell-Gleichungen) werden jedoch im Gaußschen System mit den Einheiten cm, g, sec dargestellt. Die Umrechung ins SI-System erfolgt, indem man für die Ladungen und die Felder, bzw. die Potentiale, die Substitutionen

$$e \longrightarrow 1/\sqrt{4\pi\epsilon_0}\; e$$

$$\mathbf{E} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; \mathbf{E}$$

$$\Phi \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; \Phi$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; c\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0}\; c\mathbf{A}$$

vornimmt.

Übung 0.1 *Schreiben Sie i) die Maxwellschen Gleichungen, ii) das Coulombsche Gesetz vom Gaußschen System ins SI-System um. Berechnen sie den Wert des atomaren elektrischen Feldes im Wasserstoff auf der ersten Bohrschen Bahn.*

Tabelle 1: Physikalische Konstanten

Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.997(9) \times 10^8$ m/sec
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) = 8.854(1) \times 10^{-12}$ Asec/(Vm)
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \times 10^{-7} = 1.256(6) \times 10^{-6}$ Vsec/(Am)
Elektrische Elementarladung	$e = 1.602(1) \times 10^{-19}$ As
Elektronenruhemasse	$m_e = 9.109(5) \times 10^{-31}$ kg
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380(6) \times 10^{-23}$ J/K
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5.670(5) \times 10^{-8}$ W/(K^{4}m^2)
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6.626(1) \times 10^{-34}$ Jsec $= 2\pi \cdot 1.054(5) \times 10^{-34}$ Jsec
Bohrscher Radius	$a_0 = 0.529(1) \times 10^{-10}$ m

Tabelle 2: Zehnerpotenzen

10^{-3}	Milli (m)	10^3	Kilo (k)
10^{-6}	Mikro (μ)	10^6	Mega (M)
10^{-9}	Nano (n)	10^9	Giga (G)
10^{-12}	Piko (p)	10^{12}	Tera (T)
10^{-15}	Femto (f)	10^{15}	Peta (P)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Funktionsweise des Lasers 1

1.1.1 Physikalisches Grundprinzip 1

1.1.2 Aufbau des Lasers 2

1.1.3 Notwendige Bedingungen für Lasertätigkeit 3

1.2 Eigenschaften des Laserlichtes 4

1.2.1 Spektralbereich von Laserlicht 4

1.2.2 Strahlungsenergie und Strahlungsleistung 6

1.3 Geschichtlicher Überblick 6

2 Elektromagnetische Wellen **7**

2.1 Maxwell-Gleichungen 7

2.1.1 Elektromagnetische Felder 7

2.1.2 Makroskopische Polarisation 8

2.2 Homogenes isotropes Medium 11

2.2.1 Dielektrizitätskonstante 11

2.2.2 Ebene Wellen 11

2.3 Energie elektromagnetischer Felder 13

2.3.1 Poynting-Theorem 13

2.3.2 Wellenenergie in homogenen isotropen Medien 14

2.4 Wellen in geschichteten Medien 17

2.4.1 Eindimensional inhomogene Medien 18

2.4.2 Absorptions- und Reflexionsvermögen 20

2.4.3 Vielschichtensysteme 22

2.4.4 Reflexionsvermögen einer ebenen Grenzfläche 24

2.4.5 Reflexionsvermögen einer homogenen ebenen Schicht 26
2.5 Laserresonatoren 29
2.5.1 Normalmoden 30
2.5.2 Strahlpropagation durch optische Elemente 33
2.5.3 Resonatorstabilität 35
2.5.4 Geometrische Optik 39
2.5.5 Paraxiale Wellengleichung 43
2.6 Wechselwirkung mit klassischen Dipolen 46
2.6.1 Dipolwechselwirkung 46
2.6.2 Lorentzmodell 47
2.6.3 Dispersion 48
2.6.4 Absorption im Lorentzmodell 50
2.6.5 Lichtstreuung 52
2.7 Linienbreite 55
2.7.1 Natürliche Linienverbreiterung 56
2.7.2 Stoßverbreiterung 57
2.7.3 Dopplerverbreiterung 60

3 Semiklassische Beschreibung 62
3.1 Semiklassische Näherung 62
3.2 Atom im elektromagnetischen Feld 63
3.2.1 Elektromagnetische Potentiale 63
3.2.2 Kopplung ans elektromagnetische Feld 64
3.2.3 Schrödingergleichung 65
3.2.4 Dipolwechselwirkung 65
3.2.5 Zeitentwicklung quantenmechanischer Zustände 67
3.3 Nichtresonante Anregungen 68
3.3.1 Störungsrechnung 69
3.3.2 Dipolmoment 69
3.3.3 Oszillatorstärken 70
3.4 Resonante Anregungen 72
3.4.1 2-Niveau-Systeme 72
3.4.2 Übergangsraten 73

3.4.3 Rabi-Oszillationen 74
3.5 Strahlung im thermischen Gleichgewicht 78
3.5.1 Bose-Einstein-Statistik 78
3.5.2 Plancksches Strahlungsgesetz 80
3.5.3 Einsteinsche Ratengleichungen 82
3.5.4 Einsteinsche Koeffizienten 85
3.6 Dichtematrix 87
3.6.1 Reiner Fall 87
3.6.2 Gemischter Fall 89
3.6.3 Zerfallsprozesse 91
3.6.4 Anregungsprozesse 94
3.6.5 Optisches Blochmodell 95
3.7 Semiklassische Lasertheorie 97
3.7.1 Resonatormoden 99
3.7.2 Feldgleichungen 100
3.7.3 Materiegleichungen 102
3.7.4 Adiabatische Näherung 103
3.7.5 Einmodenlaser 107
3.8 Kohärente Pulsausbreitung 109
3.8.1 Grundgleichungen der kohärenten Pulsausbreitung 110
3.8.2 Pulsflächentheorem 112
3.8.3 Photonenechos 115

4 Quantentheorie der Strahlung 116
4.1 Quantisierung des Strahlungsfeldes 117
4.1.1 Fortschreitende Welle 117
4.1.2 Stehende Welle 120
4.1.3 Normalmodenentwicklung des freien Feldes: 121
4.2 Zustände des Strahlungsfeldes 123
4.2.1 Zeitentwicklung 123
4.2.2 Stationärer Zustand 123
4.2.3 Kohärenter Zustand 124
4.3 Atome im quantisierten Strahlungsfeld 130

4.3.1 Quantensystem 130
4.3.2 Wechselwirkung mit einer Mode 131
4.3.3 Wechselwirkung mit dem Kontinuum 134

5 Statistische Beschreibung 136
5.1 Grundbegriffe der Statistik 136
5.1.1 Zufallsvariablen 136
5.1.2 Zufallsprozesse 138
5.1.3 Autokorrelationsfunktion 140
5.2 Optische Kohärenz erster Ordnung 140
5.2.1 Zeitliche Kohärenz 141
5.2.2 Wiener-Khintchine-Theorem 144
5.2.3 Räumliche Kohärenz 148
5.2.4 Van Cittert-Zernike-Theorem 151
5.3 Kohärenzfunktionen höherer Ordnung 154
5.3.1 Intensitätskorrelationen 155
5.4 Photonenstatistik 156

Kapitel 1

Einleitung

Die Einleitung soll einen kurzen Überblick über die Funktionsweise des Lasers, die Eigenschaften des Laserlichtes und die historische Entwicklung der Laserphysik geben. Eine ausführliche Darstellung der physikalischen Grundlagen folgt in den nachfolgenden Kapiteln.

1.1 Funktionsweise des Lasers

1.1.1 Physikalisches Grundprinzip

Das wichtigste Merkmal des Lasers ist die Lichtverstärkung durch *induzierte* oder *stimulierte Emission* (englisch: stimulated emission). *Laser* ist eine Abkürzung für **L***ight* **A***mplification by* **S***timulated* **E***mission of* **R***adiation*. Im Mikrowellenbereich ist "Light" durch "Microwave" zu ersetzen und man spricht dann vom *Maser*.

Alle konventionellen Lichtquellen beruhen demgegenüber auf der *spontanen Emission* von Licht.

Bei der induzierten Emission ist die emittierte Lichtwelle in Phase, Richtung, und Polarisation mit der einfallenden Lichtwelle identisch. Das Ergebnis der induzierten Emission ist daher eine Verstärkung der einfallenden Lichtwelle.

Bei der spontanen Emission sind Phase, Richtung und Polarisation der emittierten Lichtwelle zufällig. Das Ergebnis der spontanen Emission ist daher eine Lichtstreuung mit einer Abschwächung der Intensität des einfallenden Lichtes.

Der Prozeß der induzierten Emission wurde 1917 von Einstein postuliert. Einstein war damit in der Lage das Plancksche Strahlungsgesetz mit Hilfe von Ratengleichungen für die Besetzungen angeregter Atome in einem Strahlungsfeld herleiten zu können. Befinden sich N Atome in einem angeregten Zustand in einem Strahlungsfeld mit der spektralen Energiedichte $\rho(\nu)$, so ist die Übergangsrate in ein zweites

tieferliegendes Niveau nach Einstein gegeben durch

$$(dN/dt)_{Emission} = -(B\rho(\nu)N + AN). \tag{1.1}$$

Dabei ist ν die Frequenz des Lichtes, das beim Übergang ausgestrahlt wird. Die *Einsteinschen Koeffizienten* A (spontane Emission) und B (induzierte Emission) des Übergangs sind durch die Beziehung

$$A = 8\pi \frac{h\nu^3}{c^3}\, B \tag{1.2}$$

miteinander verknüpft. Die Übergangsrate der induzierten Emission ist proportional zur spektralen Energiedichte des einfallenden Lichtes.

1.1.2 Aufbau des Lasers

Die wesentlichen Bestandteile des Lasers sind:

- Energiequelle
  - Blitzlampe, Laser, Leuchtdiode
  - Gasentladung
  - elektrischer Strom
  - chemische Reaktion
- Aktives Medium
  - Festkörper
  - Flüssigkeit
  - Gas
  - Plasma
  - Freie Elektronen
- Resonator
  - Planspiegel, Hohlspiegel
  - stabil, instabil
  - Metall (Cu), Vielschichtendielektrikum (Glas)

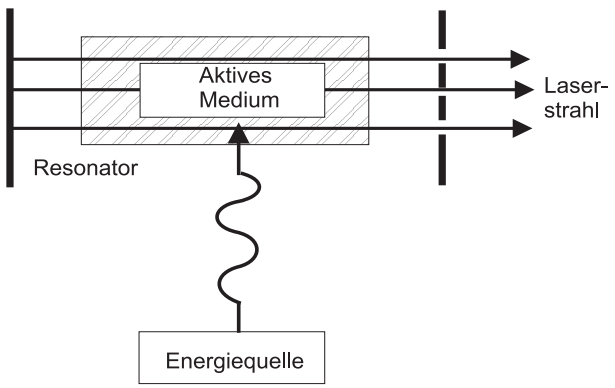

Abbildung 1.1: *Prinzipieller Aufbau eines Lasers, bestehend aus einer Energiequelle, einem aktiven Medium und einem optischen Resonator.*

1.1.3 Notwendige Bedingungen für Lasertätigkeit

Besetzungsinversion: Sei $N_{1,2}$ die Anzahl der Atome/Moleküle im Energiezustand $E_{1,2}$. Die Energieniveaus werden zunächst als nicht entartet angenommen.

Thermische Besetzung:

$$N_2 = N_1 \exp -(E_2 - E_1)/k_B T < N_1,$$

Besetzungsinversion:

$$N_2 > N_1 \tag{1.3}$$

Lasertätigkeit bei der Frequenz $\nu = (E_2 - E_1)/h$ kann nur erfolgen, wenn die Übergangsrate durch induzierte Emission aus dem Zustand 2 größer ist, als die Übergangsrate durch Absorption aus dem Zustand 1. Aus dieser Bedingung ergibt sich die Notwendigkeit einer *Besetzungsinversion*. Diese muß durch geeignete Pumpmechanismen erzielt werden.

Die thermische Anregung ist bei Lasern in der Regel vernachlässigbar.

Beispiel 1.1

Optisches Photon:	$\hbar\omega = E_2 - E_1 \approx 2.5eV$
Zimmertemperatur:	$T = 300^0 K,\ k_B T \approx 2.59 \times 10^{-2} \approx \frac{1}{40} eV$
Energieverhältnis:	$\hbar\omega / k_B T \approx 100.$

Verstärkung: Damit Verstärkung durch induzierte Emission eintritt, muß $\rho B > A$ sein. Nach den Gleichungen (1.1) und (1.2) ist dafür die folgende Intensität mindestens erforderlich:

$$\rho B = A \ \rightarrow \ I_{min} = c\rho\Delta\nu \approx \frac{8\pi h\nu^3 \Delta\nu}{c^2} \tag{1.4}$$

Beispiel 1.2

Orangerotes Licht:	$\lambda = 0.6\mu m,\ \nu = 5 \times 10^{14} Hz$
Bandbreite einer Spektrallampe :	$10^{10} Hz$
Mindestintensität:	$I_{min} = 23 W/cm^2$
Quecksilberdampflampe (z.Vgl.):	$1 W/cm^2$

Infolge von Absorption und induzierter Emission ändert sich die Intensität des Lichtes entlang der Ausbreitungsrichtung. Im einfachsten Fall wird die Intensität nach dem Durchgang durch ein aktives Medium der Länge L durch ein verallgemeinertes *Beersches Gesetz* beschrieben:

$$I = I_0 \exp(gL) \tag{1.5}$$

Verstärkungskoeffizient (gain): $g = (N_2 - N_1)\sigma$

Wirkungsquerschnitt:σ

Die exponentielle Verstärkung bei einer als konstant angenommenen Besetzungsinversion bezeichnet man als *Kleinsignalverstärkung.*

Oszillation: Die Lichtverstärkung durch induzierte Emission in einem stabförmigen Material führt zunächst zu einem intensiven Lichtpuls der als *Superstrahlung* bezeichnet wird. Um stationäre Laserstrahlung zu erzeugen, wird das Material zwischen parallele teildurchlässige Spiegel gebracht. Eine stationäre Oszillation kann sich nur aufbauen, wenn innerhalb eines Umlaufs im Resonator, die Verstärkung die Verluste an den Spiegeln und im aktiven Medium kompensiert. Daraus ergibt sich die Forderung

$$\exp[(g - a)2L] R_1 R_2 = 1 \tag{1.6}$$

mit den Reflexionskoeffizienten $R_{1,2}$ der Spiegel und einer Verlustkonstanten a für Absorption und Streuung im Medium. Auflösung nach der Besetzungsinversion ergibt die *Schwellwertbedingung* (Schawlow und Townes, 1958):

$$N_2 - N_1 = \frac{a}{\sigma} - \frac{1}{2L\sigma} \ln R_1 R_2. \tag{1.7}$$

1.2 Eigenschaften des Laserlichtes

1.2.1 Spektralbereich von Laserlicht

Elektromagnetische Strahlung wird in die folgenden Spektralbereiche eingeteilt, wobei die Grenzen nicht scharf und nicht einheitlich definiert sind.

Definition 1.1 (Spektralbereiche)

Bereich	*Wellenlänge*	*Typischer Laser*
Röntgenstrahlung	*< 0.1 nm*	
Ultraweiche Röntgenstrahlung (XUV)	*0.1 nm - 30 nm*	Se^{24+}, *21nm*
Vakuumultraviolett (VUV)	*30 nm - 185 nm*	F_2, *158 nm*
Nahes Ultraviolett (NUV)	*185 nm - 400 nm*	*KrF, 248 nm*
Sichtbares Licht	*400 nm - 800 nm*	*HeNe , 630 nm*
Infrarot (IR)	*800 nm - 50 µm*	CO_2 , *10,6 µm*
Fernes Infrarot (FIR)	*50 µm - 1mm*	CH_3F, *496 µm*
Mikrowellen	*1 mm - 1 cm*	
Radiowellen	*1 cm - 100 km*	

Unterhalb von $\approx$ 0.1 nm wird Materie für Strahlung durchlässig, so daß hier die typischen Anwendungsgebiete für Röntgenstrahlung liegen. Bei 0.1 nm ist die Photonenenergie etwa 10 keV, was einer typischen Beschleunigungsspannung in Röntgenröhren entspricht. Unterhalb von $\approx$ 185 nm wird Luft für UV-Strahlung undurchlässig. Dieser Bereich wird daher als Vakuumultraviolett bezeichnet.

Wellenlängenbereich von Laserstrahlung: $\lambda \approx 1mm - 20nm$

Frequenzbereich von Laserstrahlung: $\nu = c/\lambda \approx 3 \times 10^{11} - 1.5 \times 10^{16}\ Hz$

Kleinste Bandbreiten: $\Delta\nu \approx 1 - 100\ Hz$

Höchste spektrale Reinheit: $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-15}$

Photonenenergien: $h\nu \approx 10^{-3} - 60\ eV \qquad 1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$

Beispiel 1.3 (Laserparameter I)

Medium	λ	$\nu\,[Hz]$	$h\nu\,[eV]$
CH_3F	$496\mu m$	6.0×10^{11}	0.0025
CO_2	$10.6\mu m$	2.8×10^{13}	0.12
Nd	$1.06\mu m$	2.8×10^{14}	1.2
-	$800nm$	3.7×10^{14}	1.5
$HeNe$	$630nm$	4.8×10^{14}	2.0
-	$400nm$	7.5×10^{14}	3.1
KrF	$248nm$	1.2×10^{15}	5.0
F_2	$158nm$	1.9×10^{15}	7.8
Se^{24+}	$21nm$	1.4×10^{16}	59

1.2.2 Strahlungsenergie und Strahlungsleistung

Definition 1.2 (Radiometrische Größen)

Bezeichnung	*Englische Bezeichnung*	*Symbol*	*Einheit*
Strahlungsenergie	*Radiant energy*	W	J
Strahlungsleistung	*Radiant flux (Power)*	$P = \frac{\partial W}{\partial t}$	W
Strahlstärke	*Radiant intensity*	$\frac{\partial P}{\partial \Omega}$	W/sr
Bestrahlungsstärke	*Irradiance*	$I = \frac{\partial P}{\partial A}$	W/m^2
Strahldichte	*Radiance*	$L = \frac{\partial^2 P}{\partial \Omega \partial A}$	$W/\left(m^2 sr\right)$

In der Tabelle bezeichnet $\partial\Omega$ ein Raumwinkelelement in Strahlrichtung und ∂A ein Flächenelement mit Normalenrichtung parallel zur Strahlrichtung. Der etwas unspezifischere Ausdruck Intensität (englisch: intensity) wird meist für die Bestrahlungsstärke verwendet. Im Englischen wird statt Radiance auch häufig der ältere Begriff Brightness gebraucht.

Neben den radiometrischen Größen gibt es in der Lichttechnik entsprechende photometrische Größen, die mit der spektralen Empfindlichkeitskurve des Auges bewertet sind. Diese werden jedoch für Laserlicht selten verwendet.

Beispiel 1.4 (Laserparameter II)

Max. Ausgangsleistung gepulster Laser	$\approx 100\ TW$
Max. Ausgangsleistung kontinuierlicher Laser	$\approx 1\ MW$
Max. Pulsenergien (Inertial Confinement Fusion)	$\approx 100\ kJ$
Minimale Pulsdauer	$\approx 10\ fs$
Max. Intensität	$\approx 10^{20}\ W/cm^2$
Spektrale Strahldichte (Sonne)	$1.5 \times 10^{-12}\ W/(cm^2\ sr\ Hz)$
Spektrale Strahldichte (He-Ne Laser)	$25\ W/(cm^2\ sr\ Hz)$

1.3 Geschichtlicher Überblick

1900 Strahlungsgleichgewicht (Planck)
1905 Photoelektrischer Effekt (Einstein)
1917 Spontane und induzierte Emission von Licht (Einstein)
1954 Erster Maser / NH_3 (Townes et al.)
1960 Erster Laser / Rubin (Maiman)
1964 Maser- und Laserprinzip (Townes, Basov, Prokhorov)
1971 Holografie (Gabor)
1981 Nichtlineare Optik und Laserspektroskopie (Bloembergen, Schalow)
1997 Kühlung und Speicherung von Atomen mit Laserlicht (Chu, Cohen-Tannoudschji, Phillips)

Kapitel 2

Elektromagnetische Wellen

2.1 Maxwell-Gleichungen

2.1.1 Elektromagnetische Felder

Die Elektrodynamik beschreibt die Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen durch das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$. Die von einer Ladungsdichte $\tau(\boldsymbol{x},t)$ und Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ erzeugten Felder werden durch die Maxwell-Gleichungen bestimmt:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{B}, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\tau, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{2.4}$$

Elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$: Die elektrische Feldstärke wird definiert durch die Kraftwirkung $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ auf eine ruhende Probeladung q.

Magnetische Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$: Die magnetische Induktion wird definiert durch die Kraftwirkung $\boldsymbol{F} = \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. auf eine mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegte Probeladung q.

Ladungsdichte $\tau(\boldsymbol{x},t)$: Die Ladung im Volumenelement d^3x am Ort $\boldsymbol{x}$ ist τd^3x.

Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$: Der durch ein Flächenelement $\boldsymbol{df}$ in Richtung der Flächennormalen hindurchtretende Strom ist $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{df}$.

Zwangsbedingungen: Zur mathematischen Interpretation kann man die Maxwell-Gleichungen unterteilen in die Entwicklungsgleichungen (2.1), (2.2) und die Zwangsbedingungen (2.3), (2.4).

Schreibt man die Zwangsbedingungen in der Form $Z(\boldsymbol{x},t) = 0$, dann gilt auch $\partial_t Z(\boldsymbol{x},t) = 0$. Dies folgt aus den Entwicklungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung für die Ladungserhaltung:

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_t\boldsymbol{B} = -c\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = 0\ , \\ \partial_t(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} - 4\pi\tau) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_t\boldsymbol{E} - 4\pi\partial_t\tau \\ &= c\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) - 4\pi(\partial_t\tau + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Daher genügt es, die Zwangsbedingungen zu einem Anfangszeitpunkt zu erfüllen. Zwangsbedingungen, die für alle Zeiten erfüllt sind, wenn sie zum Anfangszeitpunkt erfüllt waren, heißen *in Involution* mit den Entwicklungsgleichungen.

Wellengleichung: Durch Elimination von $\boldsymbol{B}$ kann man die Maxwell-Gleichungen auch als ein Gleichungssystem 2. Ordnung für $\boldsymbol{E}$ schreiben. Unter Verwendung von (2.2) folgt

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{B}) \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) \;=\; \triangle\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})$$

Damit erhält man aus (2.1) und (2.3)

$$\triangle\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\ \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c^2}\partial_t\ \boldsymbol{j}, \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; 4\pi\tau. \tag{2.7}$$

Gleichung (2.6) wird als Wellengleichung bezeichnet. In dieser Form gilt sie noch allgemein, d.h. z.B. für beliebige zeitabhängige Felder und für beliebig große Feldstärken. Die Abhängigkeit der Stromdichte von der elektrischen Feldstärke muß aber noch angegeben werden.

2.1.2 Makroskopische Polarisation

Wendet man die Maxwell-Gleichungen auf ein makroskopisches Medium an, dann müssen im Prinzip alle Ladungen des Mediums als Quellen berücksichtigt werden. Da sich die Elektronen im Lichtfeld bewegen könnnen, entstehen Polarisationsladungen, die selbst vom elektrischen Feld abhängen. Diese Polarisationsladungen werden durch eine Polarisation $\boldsymbol{P}$ oder dielektrische Verschiebung $\boldsymbol{D}$ beschrieben,

die in der folgenden Weise mit der mittleren im Medium erzeugten Stromdichte zusammenhängt:

$$\partial_t \boldsymbol{P} = \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}. \tag{2.8}$$

Die Beziehung zwischen der Polarisation $\boldsymbol{P}$und dem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ vereinfacht sich wesentlich durch die folgenden Annahmen:

Lineare Beziehung: Die Feldstärke einer Lichtwelle ist gewöhnlich sehr viel kleiner als die atomare Feldstärke. Daher wird in der Regel ein linearer Zusammenhang zwischen der Polarisation und dem elektrischen Feld angenommen. Ausnahmen hiervon sind Gegenstand der nichtlinearen Optik.

Lokale Beziehung: Der Raumbereich in dem eine Abweichung von der Neutralität vorliegt, ist von der Größenordnung eines Atomdurchmessers und damit sehr viel kleiner als eine Lichtwellenlänge. Die Beziehung zwischen der Polarisation und der elektrischen Feldstärke ist daher in der Regel lokal gültig, d.h. die Polarisation am Ort $\boldsymbol{x}$ wird nur durch die lokale elektrische Feldstärke am Ort $\boldsymbol{x}$ bestimmt.

Zeitunabhängiges Medium: Auf der Zeitskala der Lichtperiode können die optischen Eigenschaften des Mediums in der Regel als zeitunabhängig angenommen werden. Lineare Gleichungen mit zeitunabhängigen Koeffizienten besitzen Lösungen mit der Zeitabhängigkeit $\propto \exp(-i\omega t)$. Die komplexe Darstellung der Lösung ist hier vorteilhaft, da alle Zeitableitungen durch den Faktor $-i\omega$ ersetzt werden können.

Unter diesen Annahmen gelten für jede Frequenz lineare Beziehungen der allgemeinen Form:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\omega) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega) \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\omega) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x},\omega) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega), \qquad \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{-i\omega}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},\omega) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega), \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{I} + 4\pi\boldsymbol{\chi} \tag{2.11}$$

Hierbei bezeichnet man $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\omega)$ als *Leitfähigkeitstensor*, $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x},\omega)$ als *Tensor der elektrischen Suszeptibilität*, $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},\omega)$ als *Dielektrizitätstensor*. $\boldsymbol{I}$ bezeichnet den Einheitstensor. Die Matrixelemente σ_{ij}, χ_{ij}, ϵ_{ij} sind im allgemeinen komplexwertig. Für Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z wird die Notation

$$z = z_r + iz_i, \quad z_r = \Re(z), \quad z_i = \Im(z) \tag{2.12}$$

verwendet.

Monochromatische Wellen: Der Lösungsansatz

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \ , \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \ , \tag{2.13}$$

bestimmt monochromatische Wellen, die sich mit der Frequenz ω im Medium ausbreiten. Die Entwicklungsgleichungen und die Wellengleichung reduzieren sich für monochromatische Welllen auf Differentialgleichungen bezüglich der Ortskoordinaten,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} &= -ik_0 \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},\omega)\cdot\boldsymbol{E} \ , \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= ik_0 \boldsymbol{B} \ , \quad k_0 = \omega/c. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\triangle \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) + k_0^2 \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},\omega)\cdot\boldsymbol{E} = 0. \tag{2.15}$$

Die Zwangsbedingungen (2.5) sind für die Lösungen dieser Gleichungen automatisch erfüllt. Wegen $\partial_t Z = -i\omega Z = 0$ gilt $Z = 0$ für $\omega \neq 0$.

Reelle Lösungen: Die physikalischen Felder können als Realteil der komplexen Lösungen gewählt werden:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x},t) = \Re\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\right) \ , \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x},t) = \Re\left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\right). \tag{2.16}$$

Da die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen und die Bestimmungsgleichungen für die Stromdichte ein reelles lineares Gleichungssystem darstellen, bilden Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung zwei linear unabhängige reelle Lösungen. Da die komplexe Amplitude $\boldsymbol{E}_0$ nur bis auf einen beliebigen komplexen Faktor bestimmt ist, kann man sich ohne Einschränkung auf den Realteil der komplexen Lösung beschränken.

Zeitmittelwerte quadratischer Ausdrücke: Größen, die nichtlinear von den Feldstärken abhängen, sind grundsätzlich durch die reellen Lösungen definiert. Sei z.B. $\mathcal{A} = \Re\left(A_0 e^{-i\omega t}\right)$ und $\mathcal{B} = \Re\left(B_0 e^{-i\omega t}\right)$, dann gilt für das Produkt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} &= \frac{1}{4}\left(A_0 e^{-i\omega t} + A_0^* e^{i\omega t}\right)\left(B_0 e^{-i\omega t} + B_0^* e^{i\omega t}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(A_0 B_0 e^{-2i\omega t} + A_0^* B_0^* e^{2i\omega t} + A_0 B_0^* + A_0^* B_0\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Der Zeitmittelwert eines Produktes von zwei reellen Größen kann jedoch in einfacher Weise wieder durch das Produkt der komplexen Amplituden ausgedrückt werden

$$< \mathcal{A}\mathcal{B} > = \frac{1}{4}\left(A_0 B_0^* + A_0^* B_0\right) = \frac{1}{2}\Re\left(A_0 B_0^*\right) \ , \tag{2.18}$$

$$< \mathcal{A}^2 > = \frac{1}{2}|A_0|^2 \ . \tag{2.19}$$

2.2 Homogenes isotropes Medium

2.2.1 Dielektrizitätskonstante

In einem homogenen Medium ist die Polarisation unabhängig vom Ort, in einem isotropen Medium auch unabhängig von der Richtung des elektrischen Feldes. Dann kann der Dielektrizitätstensor durch eine skalare Funktion $\epsilon(\omega)$ der Frequenz ausgedrückt werden,

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},\omega) = \epsilon(\omega)\boldsymbol{I}. \tag{2.20}$$

$\epsilon(\omega)$ wird als Dielektrizitätsfunktion oder, bei fester Frequenz, als Dielektrizitätskonstante bezeichnet.

2.2.2 Ebene Wellen

Für ein homogenes Medium besitzt die Wellengleichung Lösungen in der Form ebener Wellen,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)\ , \quad \boldsymbol{k} = k_0\boldsymbol{n}\ , \quad \boldsymbol{n} = n(\omega)\boldsymbol{t}. \tag{2.21}$$

Hierbei bezeichnen $k_0 = \omega/c$ die Vakuumwellenzahl, $n(\omega)$ den Brechungsindex des Mediums und $\boldsymbol{t}$ den Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung. Im folgenden wird $\boldsymbol{t} = (0,0,1)$ in Richtung der z-Achse gewählt wird. Mit diesem Lösungsansatz erhält man aus der Wellengleichung (2.15) das algebraische Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \epsilon - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \tag{2.22}$$

Es besitzt die Lösungen,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_0 &= (E_{0x}, E_{0y}, 0), \quad n = \sqrt{\epsilon} \\ \boldsymbol{E}_0 &= (0,0,E_{0z}), \quad \epsilon = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Für das zugehörige Magnetfeld ergibt (2.14)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}. \tag{2.24}$$

Die zweite Lösung in (2.23) beschreibt longitudinale elektrostatische Wellen, die nur existieren können, wenn die Dielektrizitätskonstante verschwindet. Wegen der longitudinalen Polarisation ($\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{t}$) ist das elektrische Feld rotationsfrei und das Magnetfeld (2.24) verschwindet. Wie in der Elektrostatik, kann das elektrische Feld daher

aus einem skalaren Potential abgeleitet werden. Elektrostatische Wellen können sich in einem freien Elektronengas ausbilden und werden in der Vorlesung Plasmaphysik näher untersucht.

Die erste Lösung in (2.23) beschreibt transversale elektromagnetische Wellen. Diese besitzen die folgenden Eigenschaften.

Polarisation: Zu jeder Ausbreitungsrichtung gibt es 2 unabhängige Polarisationsrichtungen, die der Transversalitätsbedingung

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.25}$$

genügen. Das Magnetfeld (2.24) steht senkrecht auf $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{t}$.

Brechungsindex: Die Wellenzahl muß im Medium die Bedingung

$$k = k_0 n(\omega)\ , \quad k_0 = \frac{\omega}{c}\ , \quad \epsilon(\omega) = n^2(\omega) \tag{2.26}$$

Für den Realteil n_r und den Imaginärteil n_i des komplexwertigen Brechungsindexes $n(\omega)$ gelten die impliziten Gleichungen,

$$\epsilon_r = n_r^2 - n_i^2, \qquad \epsilon_i = 2 n_r n_i \tag{2.27}$$

Gedämpfte Ausbreitung: Ist ω reell, dann besitzt die Welle die Form,

$$E(z) = E(0) e^{ik_0(n_r z - ct)} e^{-k_0 n_i z}. \tag{2.28}$$

Für $n_i > 0$ ist die Welle in Ausbreitungsrichtung gedämpft.

Phasengeschwindigkeit: Ein Punkt konstanter Phase bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit,

$$v_{ph} = \frac{c}{n_r} \tag{2.29}$$

Gruppengeschwindigkeit: Für eine ungedämpfte Welle ($n_i = 0$) definiert man die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \tag{2.30}$$

Unter Verwendung der Beziehung (2.26) erhält man einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Gruppengeschwindgkeit, Phasengeschwindigkeit und Lichtgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} c^2 k^2 &= \omega^2 \epsilon(\omega) \\ 2c^2 k dk &= 2\omega d\omega \epsilon + \omega^2 \epsilon'(\omega) d\omega \\ \frac{c^2}{v_{ph} v_{gr}} &= \epsilon + \frac{1}{2}\omega\epsilon'(\omega) = \frac{1}{2}\left[\epsilon + (\omega\epsilon)'\right]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.3 Energie elektromagnetischer Felder

2.3.1 Poynting-Theorem

Im elektromagnetischen Feld wirkt auf ein System von Ladungen q_i mit Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i$ an den Orten $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ die Kraft

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} q_i \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i, t) + \frac{q_i}{c} \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i, t)). \tag{2.32}$$

Durch die Beschleunigung der Ladungen wird vom Feld die mechanische Arbeit

$$P_m = \sum_{i=1}^{N} q_i \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i, t) \cdot \boldsymbol{v}_i \tag{2.33}$$

geleistet. Das Magnetfeld verrichtet keine Arbeit, da die Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Ersetzt man die Summation über die Ladungen durch eine Integration über ein Volumen mit der Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ so folgt

$$P_m = \int dV \; \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.34}$$

Der an den Ladungen geleisteten mechanischen Arbeit entspricht eine Änderung der Feldenergie, die pro Volumeneinheit, durch das Poynting-Theorem

$$\partial_t W_{em} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = -\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \; , \tag{2.35}$$

$$W_{em} = \frac{1}{8\pi} (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) \; , \quad \boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \; , \tag{2.36}$$

bestimmt wird. W_{em} bezeichnet die Energiedichte, $\boldsymbol{S}$ die Energiestromdichte (Poynting-Vektor) des elektromagnetischen Feldes.

Die zeitliche Änderung der Feldenergie im Volumen V mit der Oberfläche ∂V ist

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \; W_{em} = - \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{S} - \int_V dV \; \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.37}$$

Der erste Term der rechten Seite stellt den elektromagnetischen Energiefluß durch die Oberfläche dar, der zweite Term die mechanische Arbeitsleistung P_m. Da die Stromdichte nach Voraussetzung lokal mit dem elektrischen Feld verknüpft ist, verschwindet der Oberflächenbeitrag des Volumenintegrals. Bei nichtlokaler Polarisation kann der Integrand dagegen auch die Divergenz eines vom Medium erzeugten Energiestromes enthalten.

Zur Ableitung des Poynting-Theorems aus den Maxwell-Gleichungen multipliziert man Gleichung (2.1) skalar mit $(c/4\pi)\boldsymbol{E}$ und (2.2) mit $(c/4\pi)\boldsymbol{B}$:

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\partial_t\boldsymbol{E}-\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E},$$

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\cdot\partial_t\boldsymbol{B}+\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})=0.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt (2.35).

2.3.2 Wellenenergie in homogenen isotropen Medien

Der Energieerhaltungssatz soll nun auf eine elektromagnetische Welle angewandt werden, die sich in einem homogenen isotropen Medium mit der Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ ausbreitet. Die Energiedichte, die Energiestromdichte und die absorbierte Leistung der Welle werden als Mittelwerte über eine Lichtperiode definiert und nach Formel (2.18) berechnet.

Energiestromdichte: Mit (2.24) und (2.25) folgt für die zeitgemittelte Energiestromdichte der Welle

$$\begin{aligned}<\boldsymbol{S}> &= \frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{2}\Re(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})=\frac{c}{8\pi}\Re\left[\boldsymbol{E}^*\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\right]\\ &= \frac{c}{8\pi}\Re\left\{\left[(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\,\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{E}\right]\right\}=cn_r\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{8\pi}\boldsymbol{t}\ .\end{aligned}\tag{2.38}$$

Der Betrag der zeitgemittelten Energiestromdichte der Welle wird als die *Intensität* der Welle bezeichnet und üblicherweise in W/cm^2 angegeben:

$$I=<S>=cn_r\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{8\pi}\ .\tag{2.39}$$

Zur Angabe der Intensität eines Laserstrahls in Gasen kann $n_r\approx 1$ gesetzt werden ($n_{Luft}=1,00029$ bei 20^0 C und $\lambda=546,07$ nm). Ein Energiestrom in ein Medium tritt nur auf, wenn der Brechungsindex einen nichtverschwindenden Realteil besitzt. Der Fall $n_r=0$ entspricht einer negativen Dielektrizitätskonstante, $\epsilon_r<0,\epsilon_i=0$. Ein Medium mit einer negativen Dielektrizitätskonstante wird als überdicht bezeichnet. Es reflektiert die Welle vollständig.

Absorbierte Leistungsdichte: Für $n_r>0$ dringt ein Energiestrom in das Medium ein. In einer infinitesimalen Schicht der Dicke dz ändert sich die Intensität der Welle gemäß (2.28) wie

$$dI=-2\frac{\omega}{c}n_iIdz=-\frac{\omega\epsilon_i}{cn_r}Idz\ .\tag{2.40}$$

Hierbei wurde n_i mit Hilfe von (2.27) durch ϵ_i ersetzt. Dividiert man durch dz, so erhält man die pro Volumeneinheit im Zeitmittel vom Medium absorbierte bzw. abgegebene Leistung,

$$\frac{dI}{dz} = - < P_a > \quad , \quad < P_a >= \omega \epsilon_i \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*}{8\pi}. \tag{2.41}$$

Das Vorzeichen des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten bestimmt, ob Absorption ($\epsilon_i > 0$) oder Verstärkung ($\epsilon_i < 0$) der einfallenden Lichtwelle auftritt.

Der *Absorptionskoeffizient* a wird durch

$$< P_a >= aI, \quad I(z) = I(0)e^{-az}, \quad a = \frac{\omega \epsilon_i}{c n_r} \tag{2.42}$$

definiert. Er besitzt die Dimension Länge^{-1}. Analog definiert man den *Verstärkungskoeffizienten* als $g = -a$.

Wellenenergie: Für ein transparentes Medium kann die Energiedichte $< W >$ der Welle durch die Beziehung

$$I = v_{gr} < W > \tag{2.43}$$

definiert werden. Während die Ausdrücke (2.38), (2.41) allgemein für eine monochromatische Welle in einem beliebig absorbierenden Medium gültig sind, ist (2.43) jedoch nur für ein transparentes Medium anwendbar. Mit (2.38) und (2.31) kann man die Wellenenergie direkt durch das elektrische Feld und die reelle Dielektrizitätskonstante ausdrücken,

$$< W > \; = \; \frac{c n_r}{v_{gr}} \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*}{8\pi} = \frac{c^2}{v_{ph} v_{gr}} \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*}{8\pi} = \left[\epsilon + \partial_\omega \left(\omega \epsilon\right)\right] \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*}{16\pi} \; . \tag{2.44}$$

Aufgrund der Definition der Gruppengeschwindigkeit hängt $< W >$ nicht nur von ϵ sondern auch von der Ableitung $d\epsilon/d\omega$ ab. Dadurch unterscheidet sich die Wellenenergie in einem dispersiven Medium grundsätzlich von der Feldenergie $< W_{em} >$.

Beispiel 2.1 (Wellenenergie bei linearer und zirkularer Polarisation)
Eine linear bzw. zirkular polarisierte Welle besitzt im Vakuum die Wellenenergie:

	Lineare Polarisation	*Zirkulare Polarisation*
$\boldsymbol{\mathcal{E}}$	$\mathcal{E}_0 \boldsymbol{e}_x \cos\left(kz - \omega t\right)$	$\mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\left(kz - \omega t\right) \boldsymbol{e}_x - \sin\left(kz - \omega t\right) \boldsymbol{e}_y)$
$\boldsymbol{E}$	$\mathcal{E}_0 \boldsymbol{e}_x \exp\left(ikz - i\omega t\right)$	$\mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y) \exp\left(ikz - i\omega t\right)$
$< W >$	$\frac{1}{8\pi} \mathcal{E}_0^2$	$\frac{1}{8\pi} \mathcal{E}_0^2$

Erhaltungssatz für die Wellenenergie: Für die Ausbreitung einer monochromatischen ebenen Welle in der z-Richtung lautet das zeitgemittelte Poynting-Theorem

$$< \partial_t W_{em} > + \partial_z I = - < \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} > . \tag{2.45}$$

Im folgenden wird ohne Einschränkung angenommen, daß die Frequenz der Welle einen beliebig kleinen Imaginärteil besitzt, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, welcher im Ergebnis wieder Null gesetzt wird. Das Betragsquadrat der Amplitude der Welle besitzt dann eine nichtverschwindende Zeitableitung

$$\partial_t \left(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \right) = 2\omega_i \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \ . \tag{2.46}$$

Die Feldenergie W_{em} kann nun als Produkt einer periodischen Funktion W_0 und einer langsam veränderlichen Exponentialfunktion $\exp 2\omega_i t$ geschrieben werden. Die Mittelung in (2.45) ergibt dann

$$\begin{aligned} < \partial_t W_{em} > &= < (\partial_t W_0) e^{2\omega_i t} + W_0 (\partial_t e^{2\omega_i t}) > \\ &= < \partial_t W_0 > \exp 2\omega_i t + < 2\omega_i W_{em} > \\ &= 2\omega_i < W_{em} > = \partial_t < W_{em} > \ , \end{aligned} \tag{2.47}$$

d.h. die Mittelung darf mit der Zeitableitung vertauscht werden. Für die mittlere Feldenergie erhält man

$$\begin{aligned} < W_{em} > &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* + \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^* \right) \\ &= \frac{1}{16\pi} \left(1 + |\epsilon| \right) \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \ , \end{aligned} \tag{2.48}$$

wobei die Gleichungen (2.18), (2.24) und (2.35) verwendet wurden.

Die rechte Seite der Gleichung (2.45) ergibt

$$< \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} > = \frac{1}{2} \Re (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}^*) = \frac{1}{2} \Re (\sigma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*) = \frac{1}{2} \sigma_r \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* . \tag{2.49}$$

Die Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ eines homogenen isotropen Mediums ist ebenso wie die Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\omega)$ ein Skalar. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist gemäß (2.9),

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi\sigma}{-i\omega} \ , \quad \sigma = \frac{i\omega}{4\pi} (1 - \epsilon). \tag{2.50}$$

Entwickelt man $\sigma(\omega) = \sigma_r(\omega) + i\sigma_i(\omega)$ um ω_r bis zur ersten Ordnung in ω_i, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sigma(\omega) &= \sigma(\omega_r) + i\omega_i \partial_{\omega_r}\sigma(\omega_r) \\
\sigma_r(\omega) &= \sigma_r(\omega_r) - \omega_i \partial_{\omega_r}\sigma_i(\omega_r) \\
&= \frac{\omega_r \epsilon_i(\omega_r)}{4\pi} - \omega_i \partial_{\omega_r} \frac{\omega_r(1-\epsilon_r(\omega_r))}{4\pi} \\
&= \frac{\omega_r \epsilon_i}{4\pi} - \frac{\omega_i}{4\pi} + \partial_{\omega_r}\frac{\omega_r \epsilon_r}{4\pi} \ . \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

Aus (2.49), (2.46) und (2.51) folgt

$$< \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} > = < P_a > + \partial_t < W_m > \ , \quad < W_m > = \frac{-1 + \partial_{\omega_r}(\omega_r \epsilon_r)}{16\pi} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* \ . \qquad (2.52)$$

Der erste Summand ist gerade die absorbierte Leistungsdichte (2.41). Der zweite Summand stellt den Beitrag des Mediums zur Wellenenergie dar.

Der Energieerhaltungssatz für eine monochromatische Welle ($\omega = \omega_r$, $\omega_i \to 0$) lautet damit

$$\partial_t < W > + \partial_z I = - < P_a > \ , \qquad (2.53)$$

wobei die Wellenenergie $< W >$, die Intensität I und die absorbierte Leistungsdichte $< P_a >$ durch die folgenden Ausdrücke definiert sind

$$\begin{aligned}
< W > &= < W_{em} > + < W_m > = \left[|\epsilon| + \partial_\omega (\omega \epsilon_r) \right] \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{16\pi} \\
< P_a > &= \omega \epsilon_i \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{8\pi} \ , \qquad I = c n_r \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}{8\pi}.
\end{aligned}$$

Die hier definierte Wellenenergie ist für ein beliebig absorbierendes Medium gültig. Voraussetzung ist nur, daß die Welle fast monochromatisch ist. Für ein transparentes Medium mit einer reellen Dielektrizitätskonstanten erhält man wiederum (2.44), d.h. die Wellenenergie breitet sich dann mit der Gruppengeschwindigkeit aus.

2.4 Wellen in geschichteten Medien

An der Grenzfläche zwischen unterschiedlichen Materialien ändert sich die Dielektrizitätskonstante als Funktion des Ortes. Die Wellenausbreitung in inhomogenen Medien wird allgemein durch die Wellengleichung (2.15) mit einer ortsabhängigen Dielektrizitätskonstante beschrieben.

2.4.1 Eindimensional inhomogene Medien

Ein Medium, dessen Dielektrizitätskonstante sich nur in einer Raumrichtung ändert, wird als eindimensional inhomogen bezeichnet. Abbildung 2.1 zeigt schematisch den Verlauf der Dielektrizitätskonstanten einer inhomogenen ebenen Schicht $0 < z < d$, die zwischen zwei transparenten homogenen Randgebieten eingebettet ist. Die Dielektrizitätskonstante besitzt hier die Form

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & ; \quad z < 0 \ , \\ \epsilon(z) & ; \quad 0 < z < d \ , \\ \epsilon_2 & ; \quad z > d \ , \end{cases} \tag{2.54}$$

wobei $\epsilon_{1,2}$ positive reelle Konstanten und $\epsilon(z)$ eine komplexwertige Funktion bezeichnen. Im linken Halbraum $z < 0$ wird eine einfallende (e) und eine reflektierte (r), im rechten Halbraum $z > d$ nur eine transmittierte (t) Lichtwelle angenommen.

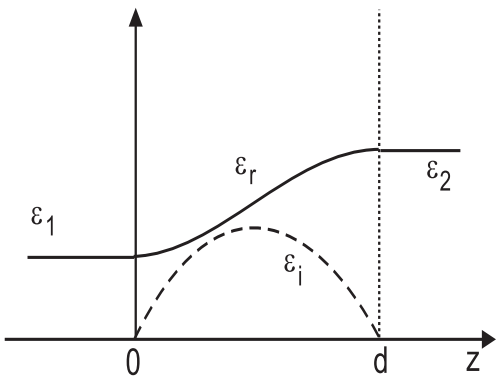

Abbildung 2.1: *Dielektrizitätskonstante einer inhomogenen ebenen Schicht der Dicke d zwischen zwei homogenen transparenten Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_2.*

Einfallsebene: Beim Einfall der Lichtwelle von $z = -\infty$ auf die Oberfläche $z = 0$ unterscheidet man *senkrechten Einfall* und *schrägen Einfall*. Bei senkrechtem Einfall breitet sich die Lichtwelle entlang der z-Achse aus, bei schrägem Einfall in einer Ebene, die durch die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Lichtwelle und die Oberflächennormale aufgespannt wird. Diese Ebene wird als die *Einfallsebene*, der Winkel zwischen der Ausbreitungs- und der Normalenrichtung als der *Einfallswinkel* bezeichnet. Wählt man ein Koordinatensystem, dessen x-Achse senkrecht zur Einfallsebene gerichtet ist, so besitzt die Lösung für das Schichtsystem die allgemeine Form

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(z) e^{i(k_y y - \omega t)} \ , \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0(z) e^{i(k_y y - \omega t)} \ , \tag{2.55}$$

wobei die Transversalkomponente des Wellenvektors, $k_y = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin \Theta_1$, durch den Einfallswinkel Θ_1 definiert wird. Die z-Abhängigkeit der Lösung kann im Prinzip für eine vorgegebene Dielektrizitätskonstante (2.54) durch die Wellengleichung bestimmt werden.

Polarisationsrichtungen: Bezüglich der Einfallsebene unterscheidet man zwei unabhängige Polarisationsrichtungen:

s-Polarisation ($B_x = 0$)**:** Das elektrische Feld steht **s**enkrecht zur Einfallsebene. Die Feldstärken besitzen die Komponenten $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$, $\boldsymbol{B} = (0, B_y, B_z)$. Diese genügen den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} -ik_0\epsilon E_x &= ik_y B_z - \partial_z B_y \ , \\ ik_0 B_y &= \partial_z E_x \ , \quad B_z = -\eta E_x \ , \quad \eta = k_y/k_0 \ . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Die Wellengleichung für die Komponente E_x lautet:

$$\partial_z^2 E_x + k_0^2(\epsilon - \eta^2)E_x = 0 \ . \tag{2.57}$$

p-Polarisation ($E_x = 0$)**:** Das elektrische Feld liegt **p**arallel zur Einfallsebene. Die Feldstärken besitzen die Komponenten $\boldsymbol{E} = (0, E_y, E_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x, 0, 0)$. Diese genügen den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} -ik_0\epsilon E_y &= \partial_z B_x \ , \quad \epsilon E_z = \eta B_x \ , \\ ik_0 B_x &= ik_y E_z - \partial_z E_y \ . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Die Wellengleichung für die Komponente B_x lautet:

$$\begin{aligned} \epsilon\partial_z\left(\frac{\partial_z B_x}{\epsilon}\right) + k_0^2(\epsilon - \eta^2)B_x = \\ \partial_z^2 B_x - \frac{\partial_z \epsilon}{\epsilon}\partial_z B_x + k_0^2(\epsilon - \eta^2)B_x = 0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Im Gegensatz zur Wellengleichung für s-Polarisation tritt hierbei ein Term erster Ordnung auf, der an der Stelle $\epsilon = 0$ singlär werden kann. Diese Singularität entspricht der resonanten Anregung longitudinaler elektrostatischer Wellen an dieser Stelle. Dabei können aufgrund der Beziehung

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon\boldsymbol{E}) = \epsilon\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\epsilon = 0 \tag{2.60}$$

große Raumladungsdichten auftreten:

$$4\pi\tau = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\epsilon}{\epsilon} \ . \tag{2.61}$$

Voraussetzung dafür ist, daß das elektrische Feld an der Stelle $\epsilon = 0$ eine nichtverschwindende Komponente entlang der Inhomogenitätsrichtung besitzt. Diese Bedingung kann nur beim schrägen Einfall einer p-polarisierten Welle erfüllt werden.

Reflexion und Brechung: Beim schrägen Einfall einer Lichtwelle auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien wird die Welle teilweise reflektiert und teilweise gebrochen (Abb. 2.2). Die Wellenvektoren der einfallenden (e), reflektierten (r) und transmittierten Wellen (t) seien,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_e &= k_0\sqrt{\epsilon_1}(0, \sin\Theta_e, \cos\Theta_e) \ , \\ \boldsymbol{k}_r &= k_0\sqrt{\epsilon_1}(0, \sin\Theta_r, -\cos\Theta_r) \ , \\ \boldsymbol{k}_t &= k_0\sqrt{\epsilon_2}(0, \sin\Theta_t, \cos\Theta_t) \ , \end{aligned} \tag{2.62}$$

wobei $k_0 = \frac{\omega}{c}$ die Vakuumwellenzahl bezeichnet. Da k_y entsprechend dem Ansatz (2.55) für alle Wellen gleich sein muß, gelten an der Grenzfläche das Reflexions- und das Brechungsgesetz

$$\Theta_r = \Theta_e, \quad \sqrt{\epsilon_1}\sin\Theta_e = \sqrt{\epsilon_2}\sin\Theta_t \ . \tag{2.63}$$

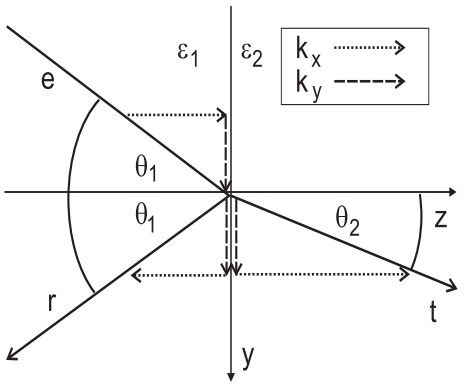

Abbildung 2.2: *Reflexion und Brechung einer elektromagnetischen Welle an einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien mit den Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{1,2}$. Die Tangentialkomponente des Wellenvektors, k_y, ist an der Grenzfläche stetig.*

2.4.2 Absorptions- und Reflexionsvermögen

Der Absorptionskoeffizient (2.42) bezieht sich nur auf die lokal absorbierte Leistung. Allgemeiner interessiert man sich für die globale Energiebilanz bei der Einstrahlung einer Lichtwelle auf eine inhomogene Schicht mit einer endlichen Dicke d.

Für Lösungen der Form (2.55) mit reellem ω und k_y ist die Wellenenergie zeitlich konstant und die zeitgemittelte Energiestromdichte nur noch eine Funktion von z. Das zeitgemittelte Poynting-Theorem lautet daher

$$\partial_z < S >_z = - < P_a > \ . \tag{2.64}$$

Die Integration über die Schicht von $z = 0$ bis $z = d$ ergibt

$$< S >_z (0) = < S >_z (d) + \int_{z=0}^{d} \mathrm{d}z < P_a > \tag{2.65}$$

Asymptotische Energiestromdichten: Die Normalkomponenten der Energiestromdichten im linken und rechten Halbraum können durch die Intensitäten I_e der einfallenden, I_r der reflektierten und I_t der transmittierten Wellen ausgedrückt werden:

$$< S >_z (0) = \cos(\Theta_e) I_e - \cos(\Theta_r) I_r \tag{2.66}$$

$$< S >_z (d) = \cos(\Theta_t) I_t \ . \tag{2.67}$$

Für den rechten Halbraum folgt diese Beziehung unmittelbar aus (2.38), (2.39), da sich hier nur die transmittierte ebene Welle ausbreitet. Für den linken Halbraum kann die angegebene Beziehung auf folgende Weise hergeleitet werden: Aufgrund der Linearität der Gleichungen gilt für die Feldstärken das Superpositionsprinzip,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \sum_{i \in \{e,r\}} \boldsymbol{E}_i \ , \quad \boldsymbol{B} = \sum_{i \in \{e,r\}} \boldsymbol{B}_i \ , \\ \boldsymbol{E}_i &= \boldsymbol{E}_{0i} e^{ik_{z_i} z} e^{i(k_y y - \omega t)} \ , \quad \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{B}_{0i} e^{ik_{z_i} z} e^{i(k_y y - \omega t)} \ . \end{aligned} \tag{2.68}$$

Die zeitgemittelte Energiestromdichte (2.38) ist bilinear in $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ und besitzt daher die allgemeine Form,

$$< \boldsymbol{S} > = \sum_{i,j \in \{e,r\}} \boldsymbol{S}_{ij} \ , \tag{2.69}$$

$$\boldsymbol{S}_{ij} = \frac{c}{8\pi} \Re\{\boldsymbol{E}_j^* \times \boldsymbol{B}_i)\} = \frac{c}{8\pi} \Re\{\boldsymbol{E}_{0_j}^* \times \boldsymbol{B}_{0_i}) e^{i(k_{z_i} - k_{z_j}) z}\} \tag{2.70}$$

Die Energiestromdichte (2.69) enthält i.a. räumlich veränderliche Interferenzterme, die von den Summanden $i \neq j$ herrühren. Das Poynting-Theorem (2.64) zeigt jedoch, daß die Normalenkomponente $< S_z >$ in einem Medium mit $< P_a >= 0$ räumlich konstant ist. Für die z-Komponente von (2.69) gilt daher

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} S_{ij_z} &= 0 \ , \\ < S >_z (z) &= < S >_z (0) = \sum_{i \in \{e,r\}} S_{ii_z} \ . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Die Normalkomponente der Energiestromdichte ist daher additiv bezüglich der einfallenden und reflektierten Wellen, wie in (2.66) angegeben. Diese Eigenschaft beruht auf der Voraussetzung, daß das Medium im linken Halbraum absorptionsfrei ist.

Energieerhaltungssatz für eindimensional inhomogene Medien: Dividiert man in (2.65) durch $\cos(\Theta) I_e$, so folgt der Energieerhaltungssatz

$$R + T + A = 1 \tag{2.72}$$

mit den Definitionen

$$R = \frac{\cos(\Theta_r) I_r}{\cos(\Theta_e) I_e} = \frac{|E_r|^2}{|E_e|^2} \tag{2.73}$$

$$T = \frac{\cos(\Theta_t) I_t}{\cos(\Theta_e) I_e} = \frac{\cos\Theta_t n_r(d) |E_t|^2}{\cos\Theta_e n_r(0) |E_e|^2} \tag{2.74}$$

$$A = \frac{\int_{z=0}^{d} \mathrm{d}z < P_a >}{\cos\Theta_e I_e} = \frac{\int_{z=0}^{d} \mathrm{d}z < P_a >}{\cos\Theta_e \frac{c n_r(0)}{8\pi} |E_e|^2} \ . \tag{2.75}$$

Man bezeichnet R als Reflexionsvermögen, A als Absorptionsvermögen und T als Transmissionsvermögen der Schicht. Statt dem Begriff *Vermögen* ist auch der Begriff *Grad* gebräuchlich. Gelegentlich werden diese Bezeichnungen auch für die Amplitudenverhältnisse oder für die Intensitätsverhältnisse ohne Berücksichtigung der weiteren Abhängigkeiten vom Einfallswinkel und vom Brechungsindex verwendet.

2.4.3 Vielschichtensysteme

Als Beispiel betrachten wir das in Abb. 2.3 gezeigte System aus planparallelen homogenen Schichten. Die Grenzflächen der Schichten seien Ebenen senkrecht zur z-Achse durch die Punkte $z = z_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots, N$. Im Intervall zwischen zwei Grenzflächen, $z_{n-1} < z < z_n$, besitzt die Dielektrizitätskonstante den konstanten Wert ϵ_n . Die Lösung der Wellengleichung kann hier aus den Lösungen für die einzelnen homogenen Schichten und aus Stetigkeitsforderungen an den Schichtgrenzen bestimmt werden.

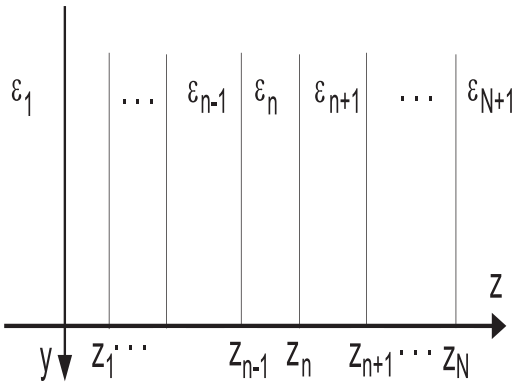

Abbildung 2.3: *Ebenes Vielschichtensystem. Die Anzahl der Grenzflächen N, die Schichtdicken $d_n = z_n - z_{n-1}$ und die Dielektrizitätskonstanten ϵ_n sind frei wählbar.*

Stetigkeitsbedingungen: An den Sprungstellen $z = z_n$ sind die Tangentialkomponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes stetig,

$$[E_x] = [E_y] = [B_x] = [B_y] = 0 \ , \quad [f(z)] := f(z_n+) - f(z_n-) \ . \tag{2.76}$$

Dies folgt in bekannter Weise aus den Maxwell-Gleichungen (2.1) und (2.2), indem man über die Querschnittsfläche der Grenzschicht integriert und die Grenzschichtdicke danach gegen Null streben läßt. Dieser Grenzübergang gilt für Grenzschichtdicken, die klein sind gegenüber der Lichtwellenlänge. Diese Näherung ist an Festkörperoberflächen in der Regel gut erfüllt.

Aus den Stetigkeitsbedingungen kann man folgende einfache Folgerungen ziehen:

- Die Normalkomponente des Poyntingvektors, $S_z = \frac{c}{4\pi}(E_x B_y - E_y B_x)$ ist ebenfalls stetig, da sie nur von den Tangentialkomponenten der Felder abhängt. Dies bedeutet, daß innerhalb der als unendlich dünn angenommenen Grenzschicht kein Licht absorbiert wird.
- Die Frequenz und die Transversalkomponente des Wellenvektors sind für alle Schichten gleich, da die Stetigkeitsbedingungen (2.76) für alle Zeiten und für alle Punkte der Oberfläche erfüllt sein müssen.
- Die Polarisationsrichtungen (s-pol.: $B_x = 0$, p-pol.: $E_x = 0$) bleiben bei der Ausbreitung der Welle durch das Schichtsystem erhalten, da B_x und E_x an den Schichtgrenzen jeweils stetig sind.

Lösung in der n-ten Schicht: Die Variable y bezeichne die Feldkomponente senkrecht zur Einfallsebene, also $y = E_x$ für s-polarisiertes und $y = B_x$ für p-polarisiertes Licht. Bei vorgegebener Frequenz ω und Transveralkomponente $k_y = k_0\eta$ des Wellenvektors $\boldsymbol{k}_n = k_0(0, \eta, \pm\zeta_n)$ besitzt die Wellengleichung in der n-ten Schicht die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y_n &= a_n e^{ik_0\zeta_n(z-z_n)} + b_n e^{-ik_0\zeta_n(z-z_n)} \ , \\ \zeta_n &= \sqrt{\epsilon_n - \eta^2} \ , \end{aligned} \tag{2.77}$$

mit beliebigen Konstanten a_n und b_n.

Propagation der Lösung über eine Schichtgrenze: Bei s-Polarisation ist neben E_x auch $B_y = E_x'(z)/(ik_0)$ stetig, d.h. die Variable y und ihre Ableitung y' sind stetig. Setzt man $\Phi_{n+1} = k_0\zeta_{n+1}(z_{n+1} - z_n)$, so lauten die Stetigkeitsbedingungen für die Grenzfläche $z = z_n$,

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= a_{n+1}e^{-i\Phi_{n+1}} + b_{n+1}e^{i\Phi_{n+1}} \ , \\ \zeta_n(a_n - b_n) &= \zeta_{n+1}(a_{n+1}e^{-i\Phi_{n+1}} - b_{n+1}e^{i\Phi_{n+1}}) \ , \end{aligned} \tag{2.78}$$

Die Integrationskonstanten im n-ten Intervall ergeben sich damit zu

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{\zeta_n + \zeta_{n+1}}{2\zeta_n} \begin{pmatrix} 1 & s_{n,n+1} \\ s_{n,n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1}e^{-i\Phi_{n+1}} \\ b_{n+1}e^{i\Phi_{n+1}} \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

$$s_{n,n+1} = \frac{\zeta_n - \zeta_{n+1}}{\zeta_n + \zeta_{n+1}}.$$

Mit den Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_e \\ y_r \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a_{N+1}e^{-i\Phi_{N+1}} \\ b_{N+1}e^{i\Phi_{N+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

können diese Gleichungen iterativ von der rechten zur linken Randschicht gelöst werden. Das Reflexionsvermögen $R = \left|b_1/a_1\right|^2$ hängt nur von den Größen $s_{n,n+1}$ und Φ_{n+1} ab.

Bei p-Polarisation sind die Tangentialkomponenten $B_x(z)$ und $E_y = B_x'(z)/(-ik_0\epsilon)$ stetig. Der Stetigkeit dieser Tangentialkomponenten entspricht die Stetigkeit der Variablen $y(z)$ und $y'(z)/\epsilon(z)$. Die entsprechenden Gleichungen für die Koeffizienten a_n, b_n erhält man formal aus (2.78)-(2.79), indem man dort die Substitutionen

$$\zeta_n \to \zeta_n/\epsilon_n, \qquad s_{n,n+1} \to p_{n,n+1} = \frac{\epsilon_{n+1}\zeta_n - \epsilon_n\zeta_{n+1}}{\epsilon_{n+1}\zeta_n + \epsilon_n\zeta_{n+1}} \tag{2.81}$$

vornimmt und die Exponenten Φ_{n+1} beibehält.

2.4.4 Reflexionsvermögen einer ebenen Grenzfläche

Für eine Grenzfläche ($N = 1$) zwischen zwei homogenen Medien ergeben die Gleichungen (2.79), (2.80)

$$\begin{pmatrix} y_e \\ y_r \end{pmatrix} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2\zeta_1} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ s_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.82}$$

Fresnel-Formeln: Das Reflexionsvermögen der Grenzfläche für s- bzw. p-polarisiertes Licht wird durch die *Fresnel-Formeln*:

$$\begin{aligned} R_s &= \left|s_{12}\right|^2 = \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}\right|^2, \\ R_p &= \left|p_{12}\right|^2 = \left|\frac{\epsilon_2\zeta_1 - \epsilon_1\zeta_2}{\epsilon_2\zeta_1 + \epsilon_1\zeta_2}\right|^2 \end{aligned} \tag{2.83}$$

bestimmt. Bei vorgegebenen Dielektrizitätskonstanten ist das Reflexionsvermögen eine Funktion des Einfallswinkels. Die folgenden Spezialfälle dieser Formeln sind von besonderem Interesse:

Senkrechter Einfall: Bei *senkrechtem Einfall* ($\eta = 0$, $\zeta = \sqrt{\epsilon}$) kann man aus Symmetriegründen nicht zwischen s- und p-Polarisation unterscheiden. Daher gilt für das Reflexionsvermögen bei senkrechtem Einfall

$$R_p = \left|\frac{\sqrt{\epsilon_2}\sqrt{\epsilon_2\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2}\sqrt{\epsilon_2\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}\right|^2 = R_s. \tag{2.84}$$

Totalreflexion: Beim Eintritt in ein optisch dünneres Medium ($\epsilon_2 < \epsilon_1$) wird der Lichtstrahl von der Normalenrichtung weggebrochen. In transparenten Medien ($\epsilon_{1,2}$ reell) kann dies zur vollständigen Reflexion des einfallenden Strahls führen. *Totalreflexion*, $R_s = R_p = 1$, tritt auf, wenn $\zeta_2 = \sqrt{\epsilon_2 - \eta^2}$ für $\eta > \sqrt{\epsilon_2}$ rein imaginär wird. Für den Einfallswinkel gilt dann

$$\sin\Theta_1 > \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \tag{2.85}$$

Brewster-Winkel: Der entgegengesetzte Grenzfall vollständiger Transmission tritt in transparenten Medien auf, falls eine p-polarisierte Welle unter dem sogenannten Brewster-Winkel einfällt. Aus der Bedingung $R_p = 0$ findet man den Brewster-Winkel Θ_B durch folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_2^2\zeta_1^2 = \epsilon_1^2\zeta_2^2, \quad \epsilon_2^2(\epsilon_1 - \eta^2) = \epsilon_1^2(\epsilon_2 - \eta^2), \quad \eta^2 = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2},\\
&\sin^2\Theta_B = \frac{\eta^2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2},\\
&\cos^2\Theta_B = 1 - \frac{\eta^2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2},\\
&\tan\Theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Beim Einfall unter dem Brewster-Winkel bilden die Richtungen des reflektierten und transmittierten Strahls einen rechten Winkel

$$\sin^2\Theta_2 = \frac{\eta^2}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \cos^2\Theta_1 \quad \rightarrow \quad \Theta_2 = \frac{\pi}{2} - \Theta_1. \tag{2.87}$$

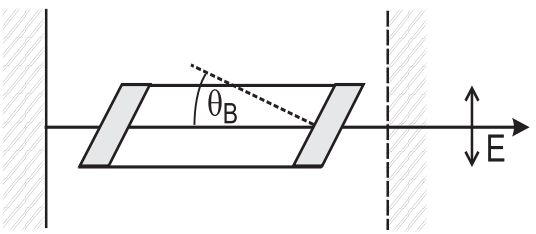

Abbildung 2.4: *Schematische Darstellung eines Laserresonators mit Brewsterfenstern. Die Oberflächennormalen der Fenster sind unter dem Brewsterwinkel Θ_B gegen die Strahlachse geneigt. Der austretende Lichtstrahl ist p-polarisiert. Der elektrische Feldvektor $\boldsymbol{E}$ liegt in der Zeichenebene.*

Beispiel 2.2 (Brewster-Winkel: Glas/Luft) *Der Brechungsindex von Luft ist $n_1 = 1{,}0003$, der von optischen Gläsern liegt bei etwa $n_2 = 1{,}5$. Dies ergibt einen Brewsterwinkel für eine Glas/Luft-Grenzfläche zwischen 56^0 und 57^0.*

Optische Fenster in einem Laserresonator werden oft, wie in Abb. 2.4 dargestellt, unter dem Brewster-Winkel gegen die Strahlachse geneigt. Bei jedem Umlauf wird ein Bruchteil des s-polarisierten Lichtes aus dem Resonator reflektiert, während das p-polarisierte Licht keine Reflexionsverluste erleidet. Der austretende Laserstrahl ist dann linear polarisiert.

2.4.5 Reflexionsvermögen einer homogenen ebenen Schicht

Betrachtet man ein System aus drei Schichten mit $N = 2$ Grenzflächen im Abstand $d = z_2 - z_1$, so folgt aus (2.79),(2.80)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_e \\ y_r \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ s_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{23} \\ s_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_2} + s_{12}s_{23}e^{i\Phi_2} \\ s_{12}e^{-i\Phi_2} + s_{23}e^{i\Phi_2} \end{pmatrix} y_t, \quad C = \frac{(\zeta_1+\zeta_2)(\zeta_2+\zeta_3)}{4\zeta_1\zeta_2}\end{aligned}$$

Das Reflexionsvermögen der Schicht ergibt sich daraus zu

$$R_s = \left|\frac{s_{12}e^{-i\Phi_2} + s_{23}e^{i\Phi_2}}{e^{-i\Phi_2} + s_{12}s_{23}e^{i\Phi_2}}\right|^2 , \quad \text{bzw.} \quad R_p = \left|\frac{p_{12}e^{-i\Phi_2} + p_{23}e^{i\Phi_2}}{e^{-i\Phi_2} + p_{12}p_{23}e^{i\Phi_2}}\right|^2 , \tag{2.88}$$

wobei die Anhängigkeit von der Schichtdicke durch die Phase $\Phi_2 = k_z d = k_0 n_2 \cos\Theta_2 d$ bestimmt wird. Im folgenden betrachten wir diejenigen Fälle, bei denen das Schichtsystem reflexionsfrei wird. Dabei beschränken wir uns auf s-Polarisation und auf Schichten mit reellen Dielektrizitätskonstanten.

Aus der Bedingung $R_s = 0$ folgt dann,

$$s_{12}e^{-i\Phi_2} + s_{23}e^{i\Phi_2} = (s_{12}+s_{23})\cos\Phi_2 + i(s_{23}-s_{12})\sin\Phi_2 = 0 . \tag{2.89}$$

Aus dem Real- und Imaginärteil dieser Gleichung findet man, neben der trivialen Lösung $s_{12} = s_{23} = 0$, die beiden möglichen reflexionsfreien Fälle

$$\cos\Phi_2 = 0 , \quad s_{12} - s_{23} = 0 , \tag{2.90}$$

$$\sin\Phi_2 = 0 , \quad s_{12} + s_{23} = 0 . \tag{2.91}$$

Lambda-Viertel-Schichten: Gemäß der ersten Bedingung (2.90) muß Φ_2 ein ungeradzahliges Vielfaches von $\pi/2$ sein. Daher gilt für die Schichtdicke die Beziehung

$$n_2 d\cos\Theta_2 = \frac{1}{k_0}\frac{\pi}{2}(2m-1) = \frac{\lambda}{4}(2m-1) , \tag{2.92}$$

wobei $m = 1, 2, 3, \cdots$ ganzzahlig ist. Für die kleinste Schichtdicke, $m = 1$, ist der optische Weg $n_2 d \cos\Theta_2$ gerade gleich einer Viertelwellenlänge. Diese Schichten werden als Lambda-Viertel-Schichten bezeichnet. Der optische Gangunterschied zwischen zwei Lichtstrahlen, die an der Vorder- bzw. Rückseite der Schicht reflektiert werden, ist gemäß Abb. 2.5 gerade gleich $2n_2 d \cos\Theta_2$. Dies ist ein Vielfaches einer halben Wellenlänge, so daß die beiden Teilstrahlen destruktiv interferieren können. Damit vollständige Auslöschung eintritt, müssen die Amplituden der beiden reflektierten Wellen gleich groß sein. Daher muß zusätzlich die zweite Bedingung $s_{12} - s_{23} = 0$ aus (2.90) erfüllt sein. Diese ergibt

$$(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_2 + \zeta_3) - (\zeta_2 - \zeta_3)(\zeta_1 + \zeta_2) = 2(\zeta_1\zeta_3 - \zeta_2^2) = 0 \ . \tag{2.93}$$

Der Brechungsindex der Lambda-Viertel-Schicht muß so gewählt werden, daß $\zeta_2 = \sqrt{\zeta_1\zeta_3}$ gilt. Für senkrechten Einfall vereinfacht sich diese Bedingung zu $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$. Lambda-Viertel-Schichten werden in der Praxis vielfach als Antireflexschichten eingesetzt.

Beispiel 2.3 (Antireflexschicht) *Zur Entspiegelung einer Glas-Luft-Grenzfläche ($n_1 \approx 1$, $n_3 \approx 1,5$) benötigt man bei senkrechtem Einfall eine Antireflexschicht mit einem Brechungsindex von $n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \approx 1,2$. In der Praxis erreicht man mit Schichten aus Magnesiumfluorid (MgF_2, $n_2 = 1,38$) eine Reduktion des Reflexionsvermögens auf etwa 1% .*

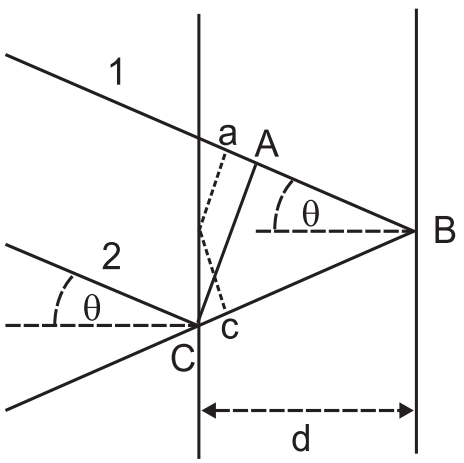

Abbildung 2.5: *Reflexion bei einer Lambda-Viertel-Schicht. Der Gangunterschied zwischen den Strahlen 1 und 2 entspricht der Strecke von A nach B nach C. Diese Strecke ist gleich der Strecke von a nach B nach c mit der Länge $2d\cos\Theta$. Die Strahlbrechung an der vorderen Grenzfläche wurde hierbei vernachlässigt.*

Interferenzfilter: Im zweiten reflexionsfreien Fall (2.91) ist Φ_2 ein ganzzahliges Vielfaches von π. Für die Schichtdicke gilt dann

$$n_2 d \cos\Theta_2 = \frac{1}{k_0} m\pi = \frac{\lambda}{2} m \ . \tag{2.94}$$

Die zusätzliche Bedingung $s_{12} + s_{23} = 0$ in (2.91) ergibt

$$(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_2 + \zeta_3) + (\zeta_2 - \zeta_3)(\zeta_1 + \zeta_2) = 2\zeta_2(\zeta_1 - \zeta_3) = 0 \ . \tag{2.95}$$

Der Fall $\zeta_2 = 0$ muß ausgeschlossen werden, da hierbei auch der Nenner von R_s verschwindet. Aus der verbleibenden Bedingung $\zeta_1 = \zeta_3$ folgt, daß beide Randschichten denselben Brechungsindex, $n_1 = n_3$, besitzen müssen.

Auch dieses Ergebnis kann durch die destruktive Interferenz der in Abb. 2.5 gezeigten Teilstrahlen verstanden werden. Der durch die Ausbreitung der Strahlen verursachte Gangunterschied ist ein Vielfaches einer Wellenlänge und trägt somit nicht zur Auslöschung bei. Bei der Reflexion an einer der beiden Grenzflächen (beim Übergang zum optisch dichteren Medium) tritt aber ein zusätzlicher Phasensprung von π auf, da s_{12} und s_{23} nun unterschiedliche Vorzeichen besitzen.

Schichten dieser Art werden als Interferenzfilter eingesetzt, die nur in einem schmalen Spektralbereich für die einfallende Strahlung durchlässig sind. Für das Transmissionsvermögen erhält man aus (2.88) den Ausdruck

$$T = \Big|\frac{y_t}{y_e}\Big|^2 = \Big|\frac{4\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1+\zeta_2)(\zeta_2+\zeta_1)}\Big|^2 \Big|\frac{1}{e^{-i\Phi_2} - Re^{i\Phi_2}}\Big|^2 \ , \tag{2.96}$$

wobei $R = s_{12}^2$ hier das Reflexionsvermögen der einzelnen Grenzflächen bezeichnet. Unter Verwendung der Beziehungen

$$4\zeta_1\zeta_2 \ = \ (\zeta_1+\zeta_2)^2 - (\zeta_1-\zeta_2)^2 = (\zeta_1+\zeta_2)^2(1-R)$$

$$\Big|e^{-i\Phi_2} - Re^{i\Phi_2}\Big|^2 = 1 + R^2 - R(e^{2i\Phi_2} + e^{-2i\Phi_2})$$
$$= 1 + R^2 - R[(e^{i\Phi_2} - e^{-i\Phi_2})^2 + 2] = (1-R)^2 + 4R\sin^2\Phi_2 \tag{2.97}$$

erhält man daraus

$$T = \frac{1}{\Big|1 + F\sin^2\Phi_2\Big|^2} \ , \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2}. \tag{2.98}$$

Mit wachsendem R ist die Schicht nur in einer kleinen Umgebung der Resonanzstellen $\Phi_2 = m\pi$ durchlässig. Die Transmissionsfunktion ist in Abb. 2.6 für $R = 0.05$, 0.3 und 0.9 dargestellt.

Planparalleler Resonator: Das Transmissionsverhalten des Interferenzfilters legt die Vermutung nahe, daß sich innerhalb einer Schicht mit vollständig reflektierenden Oberflächen nur noch monochromatische Wellen mit diskreten Frequenzen ausbreiten können. Dies ist ein einfaches Beispiel eines optischen Resonators. Um die Eigenfrequenzen der Schicht zu bestimmen, betrachtet man diejenigen Lösungen,

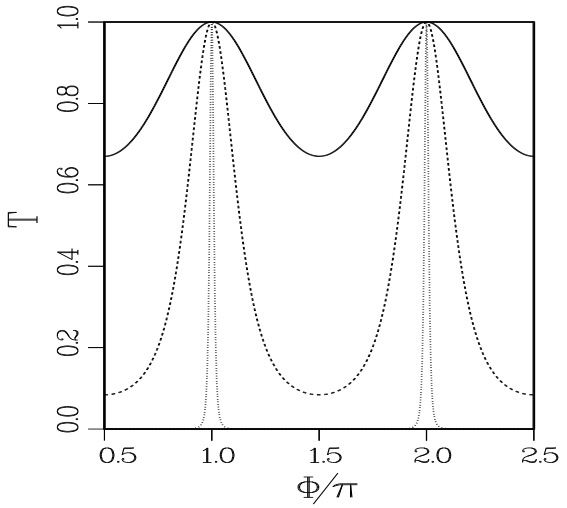

Abbildung 2.6: *Transmissionsvermögen eines Interferenzfilters nach (2.98). Die Kurven entsprechen von oben nach unten den Werten R=0.05, 0.3, 0.9.*

die innerhalb der Schicht ohne einlaufende Welle existieren können. Verlangt man in (2.88) $y_e = 0$, so ergibt sich für die möglichen Frequenzen die Bedingung,

$$e^{-i\Phi_2} + s_{12}s_{23}e^{i\Phi_2} = 0 \ . \tag{2.99}$$

Falls die Oberflächen nur unvollständig reflektieren, sind die Frequenzen wegen der auftretenden Transmissionsverluste komplex. Bei vollständig reflektierenden Spiegeln gibt es reelle Lösungen, die durch

$$(1 + s_{12}s_{23})\cos\Phi_2 + i(1 - s_{12}s_{23})\sin\Phi_2 = 0 \tag{2.100}$$

bestimmt werden. Wegen $s_{12}s_{23} = -1$ erhält man für die Eigenfrequenzen die Bedingung $\Phi_2 = m\pi$, die auch die Transmissionsmaxima des Interferenzfilters beschreibt. Im folgenden werden Eigenschaften von Strahlungsfeldern in optischen Resonatoren näher betrachtet.

2.5 Laserresonatoren

Ein Laserresonator besteht im Prinzip aus zwei Spiegeln, zwischen denen der Lichtstrahl hin- und herreflektiert wird. Nach hinreichend vielen Umläufen stellt sich im Resonator ein stationärer Zustand ein, der als Resonatormode bezeichnet wird. Die Ankopplung der Atome eines aktiven Mediums an eine Resonatormode bietet den Vorteil, daß stationäre Moden mit diskreten Frequenzen selektiert und verstärkt werden. Im folgenden werden nur die Eigenschaften eines leeren Resonators betrachtet, da die Dichte der aktiven Atome meist klein ist.

2.5.1 Normalmoden

In einem endlichen Volumen sind nur solche Schwingungszustände des Feldes möglich, die die jeweiligen Randbedingungen an den Wänden erfüllen. Eine monochromatische Lösung ($\propto \exp(-i\omega t)$) der Wellengleichung, die auch den Randbedingungen genügt, bezeichnet man als *Normalmode* des Strahlungsfeldes, die zugehörige Frequenz als *Eigenfrequenz*. Die Normalmoden sind abzählbar und man ist häufig an der Anzahl der Eigenfrequenzen in einem vorgegebenen Frequenzintervall interessiert. Für die Wellengleichung kann man zeigen, daß diese Anzahl asymptotisch für große Frequenzen nur vom Volumen des Grundgebietes abhängt. Dies wird durch die folgenden Beispiele illustriert.

Resonator mit metallischen planparallelen Spiegeln: Für einen optischen Resonator der Länge L mit metallischen planparallelen Spiegeln bei $z = 0$ und $z = L$ lauten die Randbedingungen an den Spiegeloberflächen,

$$E(z = 0) = 0, \qquad E(z = L) = 0 \ .$$

Die Lösungen der Wellengleichung (2.57) zu diesen Randbedingungen sind die stehenden Wellen

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n0} \sin(k_n z) \exp(-i\omega_n t), \\ k_n &= \frac{\pi}{L} n, \qquad \omega_n = c k_n, \qquad n = 1, 2, \cdots . \end{aligned} \tag{2.101}$$

Hiebei wurde Wellenausbreitung im Vakuum bei senkrechtem Einfall angenommen. Die niedrigste Eigenfrequenz ist $\omega_1 = c\pi/L$. Ein konstantes elektrisches Feld wird durch die Randbedingungen ausgeschlossen. Der Frequenzabstand benachbarter Moden beträgt,

$$\Delta\omega = c\frac{\pi}{L}, \qquad \Delta\nu = \Delta\omega/(2\pi) = \frac{c}{2L}.$$

Die Anzahl der Moden einer Polarisationsrichtung in einem Frequenzintervall $d\nu \gg \Delta\nu$ ist

$$dn = d\nu/\Delta\nu = \frac{2L}{c} d\nu$$

Bei vorgegebenem $d\omega$ wird $\Delta\omega \ll d\omega$ im Grenzfall $L \to \infty$ erfüllt. Die gesamte Anzahl der Moden mit Frequenzen unterhalb einer maximalen Frequenz ν_{max} wird durch das Verhältnis der Intervallänge zur Wellenlänge $\lambda_{min} = c/\nu_{max}$ bestimmt:

$$N = \frac{2L}{c}\nu_{max} = 2\frac{L}{\lambda_{min}}. \tag{2.102}$$

Planparalleler Resonator mit periodischen Randbedingungen: Zum Vergleich betrachten wir nun einen Resonator mit den periodischen Randbedingungen

$$E(z=L) = E(z=0), \qquad \partial_z E(z=L) = \partial_z E(z=0)\ .$$

Die zugehörigen Lösungen sind die fortschreitenden Wellen

$$E_n = E_{n0} \exp\left(ik_n z - i\omega_n t\right)$$

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n, \qquad \omega_n = c \mid k_n \mid, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{2.103}$$

Die niedrigste Eigenfrequenz $\omega_0 = 0$ entspricht einem konstanten Feld. Jede Eigenfrequenz $\omega_n > 0$ ist 2-fach entartet bezüglich der Ausbreitung in z oder -z Richtung. Für den Frequenzabstand zwischen benachbarten Moden gilt:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = c\frac{2\pi}{L}, \qquad \Delta\nu = \Delta\omega/(2\pi) = c/L$$

Die Anzahl der Moden einer Polarisationsrichtung in einem Frequenzintervall $d\nu \gg \Delta\nu$ ist daher:

$$dn \ = \ 2d\nu/\Delta\nu \ = \ \frac{2L}{c} d\nu$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Entartung. Obwohl die Eigenfrequenzen und die Normalmoden für die beiden Randbedingungen unterschiedlich sind, stimmt die Anzahl der Moden, asymptotisch für $L \to \infty$, in beiden Fällen überein.

Rechteckiger Hohlraum mit periodischen Randbedingungen: Für einen rechteckigen Hohlraum mit den Kantenlängen L_x, L_y, L_z und mit dem Volumen $V = L_x L_y L_z$ seien periodische Randbedingungen vorgeschrieben. Der Fall des optischen Hohlraumresonators mit metallischen Wänden unterscheidet sich wiederum nur in der Form der Normalmoden, nicht aber in der Anzahl der Schwingungszustände bei großen Frequenzen. Die Wellengleichung in mehreren unabhängigen Variablen läßt sich durch einen Separationsansatz $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_0 f(x)g(y)h(z)$ auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Auf diese Weise findet man die Normalmoden

$$\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{E}_{n0} \exp\left(ik_{nx}x\right) \exp\left(ik_{ny}y\right) \exp\left(ik_{nz}z\right) = \boldsymbol{E}_{n0} \exp\left(i\boldsymbol{k}_n \cdot \boldsymbol{x}\right),$$

$$\boldsymbol{k}_n \cdot \boldsymbol{E}_{n0} = 0, \qquad \omega_n = ck_n$$

$$\boldsymbol{k}_n = 2\pi \left(\frac{n_x}{L_x}, \frac{n_y}{L_y}, \frac{n_z}{L_z}\right), \qquad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.104}$$

Die Anzahl der Moden dn in einem Frequenzintervall $d\nu$ erhält man, indem man das Volumen der zugehörigen Kugelschale im k-Raum durch das spezifische Volumen $(2\pi)^3/V$ pro Mode dividiert (Abb. 2.7). Berücksichtigt man, daß es für jedes $\boldsymbol{k}$ zwei unabhängige Polarisationsrichtungen gibt, so folgt,

$$dn = 2V\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = 8\pi V\frac{\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} = 8\pi V\frac{\nu^2 d\nu}{c^3} \tag{2.105}$$

Die Abzählung der Moden eines Volumens nach der Formel (2.105) wird in vielen Bereichen der Physik, z.B. bei der Planckschen Hohlraumstrahlung, bei der Quantisierung des Strahlungsfeldes und in der Statistischen Physik, angewandt.

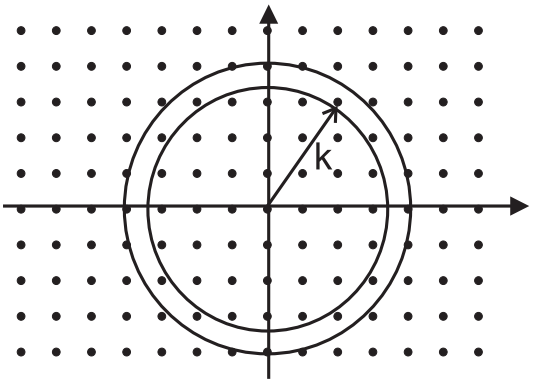

Abbildung 2.7: *Normalmoden eines Würfels mit periodischen Randbedingungen im k-Raum. Die Moden mit Frequenzen zwischen ν und $\nu+d\nu$ liegen in einer Kugelschale mit dem innerem Radius k und äußerem Radius $k+dk$.*

Der Frequenzabstand benachbarter Moden ($dn = 1$) ist

$$\Delta\nu = \frac{1}{8\pi V}\frac{c^3}{\nu^2}.$$

Die gesamte Anzahl der Moden mit Frequenzen unterhalb einer Frequenz ν_{max} ergibt sich zu:

$$N = \frac{8\pi}{3}V\frac{\nu_{max}^3}{c^3} = \frac{8\pi}{3}\frac{V}{\lambda_{max}^3} \tag{2.106}$$

Durch Vergleich von (2.106) mit (2.102) erkennt man, daß die Modenzahl eines Resonators sehr stark mit der Dimensionszahl anwächst. Bei optischen Frequenzen und den typischen makroskopischen Verstärkungslängen eines Lasers ist $(L/\lambda)^3$ extrem groß und die Selektion einer einzelnen Mode wäre entsprechend schwierig. Daher werden als Laserresonatoren offene Resonatoren bevorzugt, deren Modenanzahl wesentlich geringer ist. Durch eine Verkürzung des Resonators läßt sich eine weitere Reduktion der Modenzahl erreichen.

Beispiel 2.4 (Hohlraumresonator und offener Resonator) *Ein HeNe-Laser ($\lambda = 633nm$, $\nu = 4.7 \cdot 10^{14}Hz$) besitzt einen Verstärkungskoeffizienten $g(\nu)$ mit einer Bandbreite von $\Delta\nu_g \approx 1500MHz$. Wieviele Resonatormoden liegen innerhalb dieses Frequenzintervalls ?*

1. *Hohlraumresonator mit Volumen* $V = 1cm^3$*:*

$$\Delta\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V} \approx 4Hz, \qquad dn = \Delta\nu_g/\Delta\nu \approx 4 \cdot 10^8$$

2. *Optischer Resonator mit Länge* $L = 50cm$*:*

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \approx 300MHz, \qquad dn = \Delta\nu_g/\Delta\nu \approx 5$$

2.5.2 Strahlpropagation durch optische Elemente

Die Lichtausbreitung in Resonatoren kann im einfachsten Fall durch optische Abbildungsgesetze für Lichtstrahlen beschrieben werden. Dabei werden Beugungseffekte vernachlässigt. Im folgenden werden die Abbildungsgesetze für einige einfache optische Elemente zusammengestellt und zur Herleitung eines Kriteriums für die Stabilität von Resonatoren mit sphärisch gekrümmten Spiegeln angewandt.

Paraxiale Strahlen: Axialsymmetrische Strahlen in optischen Resonatoren lassen sich durch zwei Funktionen $r = r(z)$ und $\Theta = \Theta(z)$ beschreiben, die in jedem Punkt z der Achse den Abstand r des Strahls von der Achse und den Neigungswinkel Θ gegenüber der Achse angeben. Kennt man r und Θ in einem Punkt z_1, so lassen sich die Werte in einem anderen Punkt z_2 durch einfache Propagationsgesetze angeben. Wegen der geringen Divergenz des Laserstrahls kann hierbei die sogenannte paraxiale Näherung

$$k_z = k\cos\Theta \approx k \ , \quad k_r = k\sin\Theta \approx k\Theta \ , \quad \frac{dr}{dz} = \frac{k_r}{k_z} \approx \Theta << 1 \tag{2.107}$$

angewandt werden.

Freie Propagation: Als erstes Beispiel betrachten wir die freie Propagation eines Lichtstrahls über die Strecke $L = z_2 - z_1$ (Abb. 2.8). Da der Wellenvektor hierbei konstant bleibt gilt,

$$\Theta_2 = \Theta_1 \ , \quad r_2 = r_1 + \Theta_1 L \ , \quad r_{1,2} = r(z_{1,2}) \ , \quad \Theta_{1,2} = \Theta(z_{1,2}) \ . \tag{2.108}$$

Diese Abbildung kann durch eine 2×2 - Matrix

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_L \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.109}$$

zusammengefaßt werden.

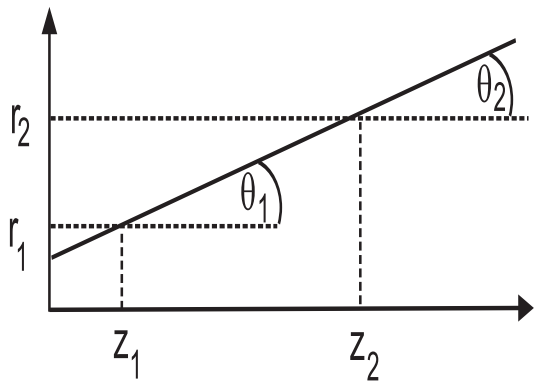

Abbildung 2.8: *Propagation eines Lichtstrahls von z_1 nach z_2*

Dünne Linse: Bei der Abbildung des Lichtstrahls durch eine dünne Linse (Abb. 2.9) gelten die Beziehungen

$$r_2 = r_1 \ , \quad \Theta_1 = \frac{r_1}{d_1} \ , \quad \Theta_2 = -\frac{r_2}{d_2} = \Theta_1 - \frac{r_1}{f} \ , \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \ , \tag{2.110}$$

wobei f als die Brennweite der Linse bezeichnet wird. Entsprechend Gl.(2.107), wird Θ negativ gezählt, wenn r mit wachsendem z abnimmt. Diese Abbildung wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_f \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.111}$$

zusammengefaßt.

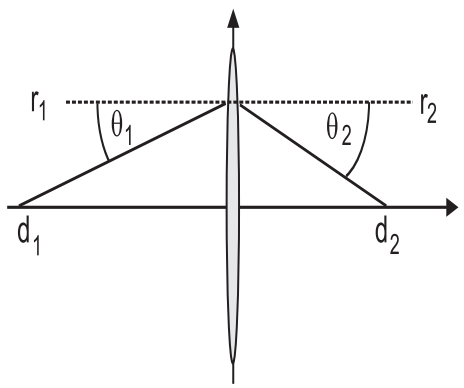

Abbildung 2.9: *Propagation eines Lichtstrahls durch eine dünne Linse*

Sphärischer Spiegel: Bei der in Abb. (2.10) gezeigten Reflexion an einem sphärischen Hohlspiegel bleibt der Abstand des Strahls von der Achse erhalten: $r_2 = r_1$. Der Winkel Θ_2 ist negativ und sein Betrag ergibt sich aus Θ_1 durch die geometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \Theta_1 + \delta + (\pi - \beta) = \pi \ , \quad &\rightarrow \quad \Theta_1 + \delta = \beta \\ \Theta_1 + 2\delta + (\pi - |\Theta_2|) = \pi \ , \quad &\rightarrow \quad \Theta_1 + 2\delta = |\Theta_2| \\ |\Theta_2| = \Theta_1 + 2(\beta - \Theta_1) = 2\beta - \Theta_1 &= 2\frac{r_1}{R} - \Theta_1 \ . \end{aligned} \tag{2.112}$$

Die Abbildungsmatrix lautet damit

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_R \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.113}$$

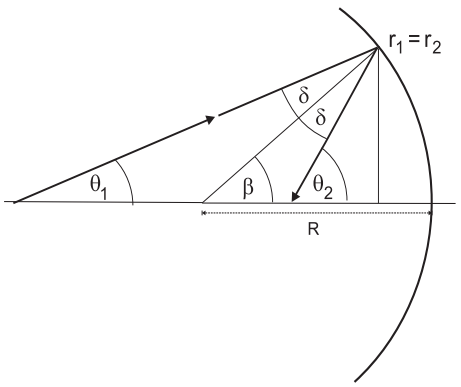

Abbildung 2.10: *Reflexion eines Lichtstrahls an einem Hohlspiegel mit Krümmungsradius R.*

Bei der Propagation eines Lichtstrahls durch ein allgemeines Linsensystem mit den optischen Elementen 1,2,3,$\cdots$,n wird entsprechend der *Strahlvektor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} r \\ \Theta \end{pmatrix} \tag{2.114}$$

durch eine *Strahlmatrix*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_n \cdots \boldsymbol{M}_3 \cdot \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 \tag{2.115}$$

abgebildet. Diese Abbildung ist flächentreu ($\Delta r \Delta\Theta = const$), d.h. die Determinate der Strahlmatrix ist 1.

2.5.3 Resonatorstabilität

Bei den bisher betrachteten planparallelen Resonatoren wurde das transversale Strahlprofil der Moden vernachlässigt. Im folgenden werden Resonatoren mit sphärisch gekrümmten Spiegeln betrachtet, bei denen das Strahlprofil mit einfachen Methoden bestimmt werden kann. Die Parameter des Resonators sind die Resonatorlänge L sowie die Krümmungsradien R_1 und R_2 der Endspiegel (Abb. 2.11). Die Krümmungsradien können auch negative Werte annehmen. $R > 0$ entspricht einem konkav, $R < 0$ einem konvex gekrümmten Spiegel.

Bei gekrümmten Spiegeln stellt sich zunächst die Frage nach der Stabilität des Resonators. Ein Resonator wird als *stabil* bezeichnet, falls der Abstand eines paraxialen Lichtstrahls von der optischen Achse bei einer beliebigen Anzahl von Umläufen im Resonator beschränkt bleibt. Wächst der Abstand dagegen unbeschränkt an, dann

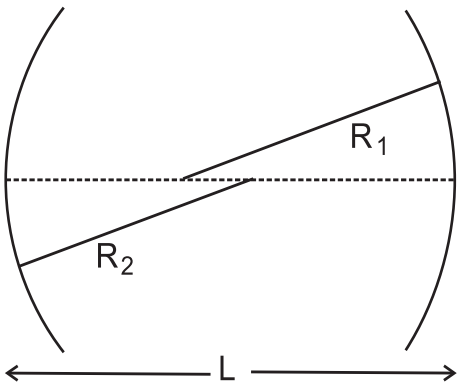

Abbildung 2.11: *Resonator mit sphärisch konkav gekrümmten Spiegeln*

heißt der Resonator *instabil*. Planparallele Resonatoren werden instabil, wenn die Spiegelflächen nur leicht gegeneinander geneigt sind. Die meisten Laser besitzen daher mindestens einen sphärischen Spiegel. Bei Hochleistungslasern bieten instabile Resonatoren dagegen oft Vorteile. Das aktive Medium kann über ein größeres Modenvolumen ausgenutzt werden und Beschädigungen der Optik durch zu große Strahlfokusierung werden vermieden. Der Strahlquerschnitt wird hierbei durch die Spiegelfläche bestimmt. Die Strahlauskopplung erfolgt nicht durch Transmission sondern über den Rand des Spiegels.

Wegen der Linearität der Abbildung hängt das Stabilitätskriterium nicht vom Anfangswert des Strahlvektors sondern nur von den Eigenschaften der Strahlmatrix ab. Aus den drei Längen L, R_1 und R_2 lassen sich zwei dimensionslose Parameter bilden, deren Werte die Stabilität des Resonators bestimmen. Wählt man als dimensionslose Größen die sogenannten *Spiegelparameter* $g_1 = 1 - L/R_1$, $g_2 = 1 - L/R_2$, so lautet die Stabilitätsbedingung

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \; . \tag{2.116}$$

Sie wird im folgenden hergeleitet und diskutiert.

Die Abbildungsmatrix für einen Resonatorumlauf ergibt sich aus (2.109) und (2.113) zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}_{R_2} \cdot \boldsymbol{M}_L \cdot \boldsymbol{M}_{R_1} \cdot \boldsymbol{M}_L \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.117}$$

wobei A, B, C, D die Matrixelemente bezeichnen. Die Strahlmatrix für eine beliebige Anzahl N von Umläufen ergibt sich daraus zu $\boldsymbol{M}^N$.

Eigenwertproblem: Die Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{M}$ bilden eine Basis zur Darstellung eines beliebigen Strahlvektors. Daher ist es ausreichend, die Abbildung dieser Eigenvektoren durch die Matrix $\boldsymbol{M}^N$ zu untersuchen. Für die Eigenvektoren

gilt

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} \ , \quad \boldsymbol{M}^N\cdot\boldsymbol{a} = \lambda^N\boldsymbol{a} \ . \tag{2.118}$$

Der Resonator ist daher genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte die Bedingung $|\lambda| < 1$ erfüllt ist. Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{M}$ erhält man aus der Bedingung

$$det \begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - SpT\lambda + det\,|T| = 0 \ , \tag{2.119}$$

wobei $SpT = A + B$ die Spur der Matrix bezeichnet und $det|T| = 1$ gilt. Für die Lösungen dieser Gleichungen erhält man

$$\lambda_{1,2} = \frac{SpT}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{SpT}{2}\right)^2 - 1} \ , \quad \lambda_1\lambda_2 = 1 \ . \tag{2.120}$$

Für $|SpT| < 2$ sind die beiden Lösungen konjugiert komplex zueinander und haben den Betrag $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = 1$. Für $|SpT| > 2$ sind beide Lösungen reell und positiv, wobei eine Lösung größer, die andere kleiner als 1 ist. In diesem Fall ist der Resonator instabil.

Stabilitätskriterium: Die Spur der Matrix $\boldsymbol{T}$ kann in der folgenden Weise durch die Spiegelparameter ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} SpT &= A + D = 1 - \frac{2L}{R_2} + 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1R_2} \\ &= 2 + 4\left(-\frac{L}{R_1} - \frac{L}{R_2} + \frac{L^2}{R_1R_2}\right) \\ &= 2 + 4(g_1g_2 - 1) = 4g_1g_2 - 2 \ . \end{aligned} \tag{2.121}$$

Die Bedingung $|SpT| \leq 2$ ergibt das in (2.116) angegebene Stabilitätskriterium:

$$-2 \leq 4g_1g_2 - 2 \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq 4g_1g_2 \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq g_1g_2 \leq 1 \ . \tag{2.122}$$

Die Bedingungen $g_1g_2 < 0$ oder $g_1g_2 > 1$ sind jeweils hinreichend für die Instabilität des Resonators.

Erste Bedingung: Der Fall $g_1g_2 < 0$ tritt ein, wenn genau ein Spiegelparameter negativ ist. Die Bedingung $g < 0$ bedeutet, daß der zugehörige Krümmungsmittelpunkt des Spiegels innerhalb des Resonators liegt: $0 < R < L$. Der zweite Spiegel mit $g > 0$ kann dabei entweder konkav ($R > L$) oder konvex ($R < 0$) gekrümmt sein (Abb. 2.12). Dies ergibt die einfache Regel:

Der Resonator ist instabil, falls ein Krümmungsmittelpunkt innerhalb- und ein Krümmungsmittelpunkt außerhalb des Resonators liegt.

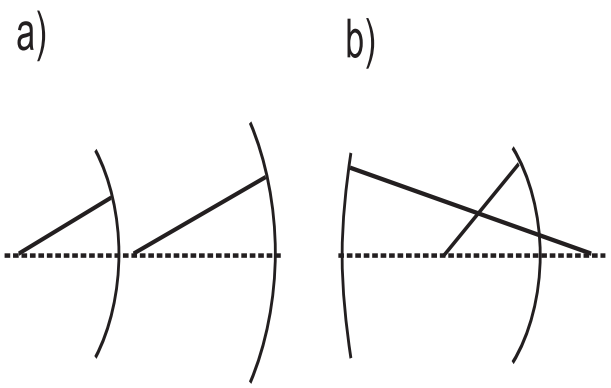

Abbildung 2.12: *Instabile Resonatoren mit einem Krümmungsmittelpunkt innerhalb und einem außerhalb des Resonators. a)* $R_1R_2 < 0$*, b)* $R_1R_2 > 0$*.*

Zweite Bedingung: Der Fall $g_1g_2 > 1$ für instabile Resonatoren ergibt

$$\begin{aligned} g_1g_2 &= 1 - \frac{L}{R_1} - \frac{L}{R_2} + \frac{L^2}{R_1R_2} > 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{L}{R_1R_2}\left[L - (R_1 + R_2)\right] > 0 \ , \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} L > R_1 + R_2 & ; \text{ für } \quad R_1R_2 > 0 \\ R_2 > L + |R_1| & ; \text{ für } \quad R_1 < 0,\ R_2 > 0 \\ R_1 > L + |R_2| & ; \text{ für } \quad R_1 > 0,\ R_2 < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.123}$$

Die hierbei auftretenden Fälle (Abb. 2.13) lassen sich durch folgende Regel zusammenfassen:

Ein Resonator, mit gleichartig gekrümmten Spiegeln $R_1R_2 > 0$ *ist instabil, falls die Reihenfolge der Krümmungsmittelpunkte auf der z-Achse der Reihenfolge der Spiegel entspricht. Ein Resonator mit ungleichartig gekrümmten Spiegeln* $R_1R_2 < 0$ *ist instabil, falls die Reihenfolge der Krümmungsmittelpunkte auf der z-Achse gegenüber der Reihenfolge der Spiegel vertauscht ist.*

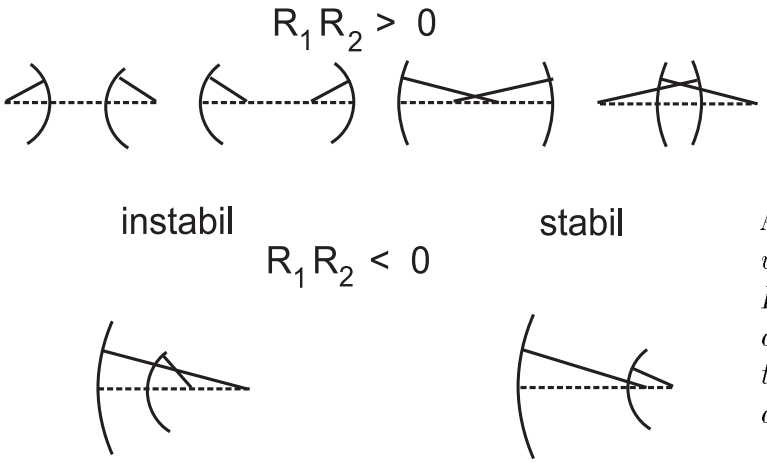

Abbildung 2.13: *Beispiele von stabilen und instabilen Resonatoren, bei denen beide Krümmungsmittelpunkte innerhalb oder außerhalb des Resonators liegen.*

2.5.4 Geometrische Optik

Im Rahmen der geometrischen Optik kann die Propagation eines Strahlungsfeldes durch die Propagation einer als Eikonal bezeichneten Funktion entlang der Lichtstrahlen erfolgen. Diese Methode wird am Beispiel des paraxialen Strahls mit gaußförmigem Querschnitt dargestellt.

Strahlgleichungen: Die Strahlgleichungen der geometrischen Optik sind auf Medien anwendbar, in denen der Brechungsindex eine langsam veränderliche Funktion des Ortes darstellt. In jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ des Mediums wird die Gültigkeit der Beziehung

$$D(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) = k - k_0 n(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.124}$$

für die lokale Wellenzahl angenommen. Ein Lichtstrahl kann durch eine Parameterdarstellung $\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{k}(s)$ mit einem Kurvenparameter s dargestellt werden. Im Punkt $s = 0$ seien die Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{k}(0) = \boldsymbol{k}_0, \tag{2.125}$$

mit $D(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{x}_0) = 0$ vorgegeben. Durch Differentiation von (2.124) entlang des Strahls erhält man

$$\frac{dD}{ds} = \sum_i (\partial_{k_i} D)\frac{dk_i}{ds} + (\partial_{x_i} D)\frac{dx_i}{ds} = 0. \tag{2.126}$$

Diese Beziehung wird durch die Strahlgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{\alpha ds} &= \partial_{k_i} D(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) = \frac{k_i}{k} \\ \frac{dk_i}{\alpha ds} &= -\partial_{x_i} D(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) = k_0 \partial_{x_i} n \end{aligned} \tag{2.127}$$

erfüllt. Der beliebige Faktor α kann durch die Wahl eines geeigneten Kurvenparameters festgelegt werden. Für das Linienelement gilt

$$\sqrt{\sum_i dx_i^2} = \sqrt{\sum_i k_i^2}\frac{|\alpha| ds}{k} = |\alpha| ds \tag{2.128}$$

Wählt man $\alpha = 1$, so gibt der Kurvenparameter die zurückgelegte Wegstrecke an. Diese Konvention wird im folgenden verwendet.

Anstelle des Gleichungssystems 1. Ordnung, (2.127), kann man zu einem System 2. Ordnung übergehen, welches die Bahnkurve des Lichtstrahls analog zur Newtonschen Mechanik beschreibt. Definiert man $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{k}/k$, so gilt

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\nabla}. \tag{2.129}$$

Damit erhält man aus (2.127)

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{1}{k}\left(\frac{d\boldsymbol{k}}{ds} - \boldsymbol{t}\frac{dk}{ds}\right) \\ &= \frac{1}{k}\left(\boldsymbol{\nabla}k - \boldsymbol{tt}\cdot\boldsymbol{\nabla}k\right) = \frac{(\boldsymbol{\nabla}k)_\perp}{k},\end{aligned} \tag{2.130}$$

wobei $(\boldsymbol{\nabla}k)_\perp$ die Komponente des Wellenzahlgradienten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\boldsymbol{t}$ bezeichnet. Der Lichtstrahl wird in Richtung des Brechungsindexgradienten gebrochen.

Eikonalansatz: Für das elektrische Feld (2.13) einer monochromatischen linear polarisierten Welle machen wir den Ansatz

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})e^{i\Phi(\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}\Phi, \tag{2.131}$$

der als Eikonalansatz bezeichnet wird. Damit ein Eikonal $\Phi(\boldsymbol{x})$ existiert, muß das Vektorfeld $\boldsymbol{k}$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet rotationsfrei sein. Die Amplitude $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ kann im Prinzip noch so bestimmt werden, daß $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ eine exakte Lösung oder eine Näherungslösung (paraxiale Näherung, WKB-Näherung) der Wellengleichung darstellt. Im Gültigkeitsbereich der geometrischen Optik ist diese Funktion allerdings nur langsam veränderlich im Vergleich zur Wellenlänge und muß daher nur über große Weglängen berücksichtigt werden. Zur Bestimmung des Eikonals müssen die Strahlgleichungen durch die Gleichung

$$\frac{d\Phi}{ds} = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{k} = k, \quad \Phi(0) = \Phi_0 \tag{2.132}$$

ergänzt werden. Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} &= \boldsymbol{k}/k, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \frac{d\boldsymbol{k}}{ds} &= k_0\boldsymbol{\nabla}n, \quad \boldsymbol{k}(0) = \boldsymbol{k}_0 \\ \frac{d\Phi}{ds} &= k, \quad \Phi(0) = \Phi_0\end{aligned} \tag{2.133}$$

bestimmen für jeden Anfangspunkt $\boldsymbol{x}_0$ mit einem Anfangswert $\Phi_0(\boldsymbol{x}_0)$ das Eikonal $\Phi(\boldsymbol{x}_0, s)$ im Punkt $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, s)$ des Strahls. Eliminiert man $\boldsymbol{x}_0$ und s durch den entsprechenden Wert von $\boldsymbol{x}$, so erhält man die gesuchte Funktion $\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}), s(\boldsymbol{x}))$.

Gauß-Strahl: In der Ebene $z = 0$ sei das elektrische Feld des Strahls durch ein axialsymmetrisches Gaußprofil

$$E(r, 0) = Ae^{-r^2/w_0^2} \tag{2.134}$$

vorgegeben. Der Strahlradius w_0 sei groß gegenüber der Lichtwellenlänge, d.h. $kw_0 >> 1$. Gesucht ist das Strahlprofil $E(r,z)$ in einem beliebigen Punkt z der Strahlachse. Für einen Strahl durch den Anfangspunkt $z = 0$, $r = r_0$ besitzt das Eikonal den Anfangswert $\Phi = \Phi_0(r_0) = i\ r_0^2/w_0^2$. Die Strahlgleichungen mit den zugehörigen Anfangsbedingungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{ds} &= \frac{k_r}{k} \quad ; \qquad r(0) = r_0, \\
\frac{dz}{ds} &= \frac{k_z}{k} \quad ; \qquad z(0) = 0, \\
\frac{d\Phi}{ds} &= k \quad ; \qquad \Phi(0) = \Phi_0(r_0) = k\ \frac{r_0^2}{2q_0}, \\
\frac{dk_r}{ds} &= 0 \quad ; \qquad k_r(0) = \partial_{r_0}\Phi_0(r_0) = k\ \frac{r_0}{q_0}, \\
\frac{dk_z}{ds} &= 0 \quad ; \qquad k_z(0) = \sqrt{k^2 - k_r(0)^2} = k\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{q_0^2}},
\end{aligned} \tag{2.135}$$

wobei $q_0 = -ikw_0^2/2$ gesetzt wurde. Die Ortsabhängigkeit des Wellenvektors ergibt sich hier aus den Anfangsbedingungen. Der Brechungsindex wird als konstant vorausgesetzt. Die Lösung dieser Gleichungen

$$\begin{aligned}
k_r &= k\ \frac{r_0}{q_0}, \quad k_z = k\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{q_0^2}}, \quad r = r_0 + \frac{r_0}{q_0}\ s = \frac{r_0}{q_0}\ (q_0 + s), \\
z &= \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{q_0^2}}\ s, \quad \Phi = \frac{k}{2}\ \frac{r_0^2}{q_0} + ks.
\end{aligned} \tag{2.136}$$

ist komplexwertig. Die Strahlen $\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{k}(s)$ besitzen daher keine einfache geometrische Interpretation, sie können aber genauso wie reelle Strahlen zur Berechnung des Eikonals angewandt werden. In paraxialer Näherung kann s durch die Beziehung

$$s \approx z(1 + \frac{r_0^2}{2q_0^2}) \tag{2.137}$$

ersetzt werden und man erhält durch die Elimination von s und r_0

$$\Phi = \frac{k}{2}\ \frac{r_0^2}{q_0} + kz(1 + \frac{r_0^2}{2q_0^2}) = kz + k\ \frac{r_0^2}{2q_0^2}\ q = k\left(z + \frac{r^2}{2q}\right), \tag{2.138}$$

mit $q = q_0 + z$. Die Propagation eines Gauß-Strahls wurde damit auf eine einfache Propagation des Parameters $q_0 \to q = q_0 + z$ zurückgeführt. Der erste Summand in

(2.138) beschreibt die Phasenänderung des Feldes entlang der z-Achse ($r = 0$). Der zweite Summand enthält die komplexwertige Krümmungszahl

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_0 + z} = \frac{z}{z_R^2 + z^2} + i\frac{z_R}{z_R^2 + z^2} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2}, \tag{2.139}$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned} R &= z(1 + z_R^2/z^2), \quad w = w_0\sqrt{1 + z^2/z_R^2}, \\ z_R &= |q_0| = kw_0^2/2 = \pi w_0^2/\lambda. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Der Realteil von (2.139) bestimmt die Phasenänderung, der Imaginärteil die Amplitudenänderung des Strahls als Funktion des Abstands r von der Strahlachse. Für das elektrische Feld ergibt sich der Ausdruck

$$E(z, r) = Ae^{ik(z + \frac{r^2}{2R})}e^{-\frac{r^2}{w^2}}. \tag{2.141}$$

Die Größe $w(z)$ wird als Strahlradius bezeichnet (Abb. 2.14). Der Strahlradius wächst für große Abstände gemäß $w(z) = \Theta z$ an, wobei der Divergenzwinkel durch $\Theta = w_0/z_R = \lambda/\pi w_0$ gegeben ist. Diese Strahldivergenz ist beugungsbegrenzt, d.h. sie ist von der gleichen Größenordnung wie beim Einfall einer ebenen Welle auf einen Spalt der Breite $2w_0$.

Die Asymptoten $w(z \to 0) = w_0$ und $w(z \to \infty) = w_0 z/z_R$ schneiden sich im Punkt $z = z_R$. Die charakteristische Länge z_R des Gauß-Strahls heißt Rayleigh-Länge. Die Länge $2z_R$ wird als Fokuslänge bezeichnet.

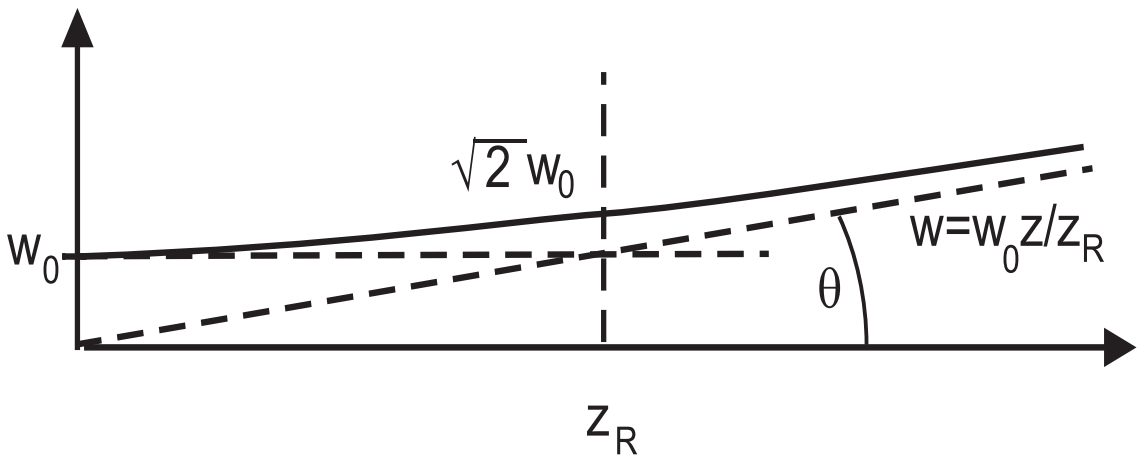

Abbildung 2.14: *Strahlradius $w(z)$ und Rayleigh-Länge z_R eines Gauß-Strahls.*

2.5.5 Paraxiale Wellengleichung

Die paraxiale Näherung kann auch in der Wellenoptik angewandt werden. Die resultierende Wellengleichung für paraxiale Strahlen heißt paraxiale Wellengleichung. Sie bildet die Grundgleichung zur Berechnung von Resonatormoden. Mit ihrer Hilfe kann die Amplitude A im Eikonalansatz (2.131) bestimmt werden.

Das elektrische Feld der Mode wird durch einen Wellenansatz

$$E(\boldsymbol{x},t) = E_0(\boldsymbol{x})e^{i(kz-\omega t)} \tag{2.142}$$

mit einer langsam veränderlichen Amplitude $E_0(\boldsymbol{x})$ dargestellt. Die Wellenzahl sei $k = k_0 n$, so daß der Ansatz bei konstanter Amplitude die Wellengleichung erfüllt. Bildet man die zweite Ableitung nach z, so erhält man die Terme

$$\partial_z^2 E = \left(-k^2 E_0 + 2ik\partial_z E_0 + \partial_z^2 E_0\right) e^{i(kz-\omega t)}. \tag{2.143}$$

Die Lösung (2.138) für den Gauß-Strahl zeigt, daß die Ableitungen folgende charakteristischen Größenordnungen besitzen:

$$\partial_r \sim \frac{1}{w_0}, \quad \partial_z \sim \frac{1}{z_R}. \tag{2.144}$$

Für paraxiale Strahlen ist die Wellenlänge klein gegenüber dem Strahlradius und $w_0/z_R = 2/kw_0 = \lambda/\pi w_0$ ist ein kleiner Parameter. Vergleicht man die z-Ableitungen in (2.143) mit der Ableitung $\partial_r^2 E_0$ so findet man mit dieser Skalierung

$$\frac{k\partial_z}{\partial_r^2} \sim \frac{kw_0^2}{z_R} \sim O(1), \quad \frac{\partial_z^2}{\partial_r^2} \sim \frac{w_0^2}{z_R^2} \sim O(\frac{1}{k^2 w_0^2}). \tag{2.145}$$

Die zweite Ableitung $\partial_z^2 E_0$ kann daher vernachlässigt werden. Die Wellengleichung reduziert sich damit auf

$$2ik\partial_z E_0 + \Delta_\perp E_0 = 0, \tag{2.146}$$

wobei $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$ den Laplace-Operator in der Ebene senkrecht zur Strahlachse bezeichnet. Die paraxiale Wellengleichung (2.146) besitzt die Form einer zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung. Der Zeitentwicklung der Wellenfunktion entspricht hierbei die Propagation der Feldamplitude entlang der z-Achse.

Amplitude des Gauß-Strahls: Nimmt man an, daß die Amplitude in (2.141) nur von z abhängt, $A = A(z)$, so gilt für diese Lösung

$$\begin{aligned} \partial_x E_0 &= i\frac{kx}{q}E_0, \quad \partial_x^2 E_0 = \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2x^2}{q^2}\right)E_0 \quad \Delta_\perp E_0 = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2r^2}{q^2}E_0\right) \\ \partial_z E_0 &= \left(\partial_z A - A\frac{r^2 ik}{2q^2}\right) e^{ik\frac{r^2}{2q}}. \end{aligned} \tag{2.147}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die paraxiale Wellengleichung (2.146) ein, so erhält man für die Amplitude $A(z)$ die Bestimmungsgleichung

$$2ik\partial_z A + \frac{2ik}{q}A = 0. \tag{2.148}$$

Deren Lösung besitzt die Form

$$A(z) = \frac{q_0 A_0}{q} = \frac{A_0}{1 + iz/z_R} = \frac{e^{-i\varphi}A_0}{\sqrt{1 + z^2/z_R^2}} = \frac{w_0}{w(z)}e^{-i\varphi(z)}A_0, \tag{2.149}$$

mit einer Integrationskonstante A_0 und mit $\tan\varphi = z/z_R$.

Intensitätsverteilung des Gauß-Strahls: Verwendet man das in (2.56) für s-polarisiertes Licht eingeführte Koordinatensystem, so erhält man für die z-Komponente der zeitgemittelten Energiestromdichte (2.38) den exakten Ausdruck

$$< S_z(r,z) >= \frac{c}{8\pi}\Re\left(E_x^* B_y\right) = \frac{c}{8\pi}\Re\left(E_x^* \frac{1}{ik_0}\partial_z E_x\right). \tag{2.150}$$

Da die zeitgemittelte Energiestromdichte einer monochromatischen Welle im Vakuum divergenzfrei ist, ist der Energiestrom durch eine zur Strahlachse senkrechte Fläche,

$$P = \int_{r=0}^{+\infty} < S_z(r,z) > 2\pi r \ \mathrm{d}r, \tag{2.151}$$

bei der Propagation entlang der z-Achse exakt erhalten. Im Rahmen der paraxialen Näherung definiert man die Intensität des Strahls durch

$$I(r,z) \approx< S_z(r,z) >\approx \frac{c}{8\pi}\Re\left(E_x^* \frac{ik}{ik_0}E_x\right) = \frac{cn_r}{8\pi}|E_x|^2. \tag{2.152}$$

Man kann leicht zeigen, daß die über die Querschnittsfläche integrierte Intensität (2.152) eine exakte Erhaltungsgröße der paraxialen Wellengleichung ist. Im Fall der Gauß-Mode gilt

$$I(r,z) = I_0\left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \ e^{-2\frac{r^2}{w^2}}, \quad I_0 = \frac{cn_r}{8\pi}|A_0|^2. \tag{2.153}$$

Der erhaltene Energiestrom durch die Querschnittsfläche ist

$$P \ = \ \int_{r=0}^{+\infty} I(r,z)2\pi r \ \mathrm{d}r = I_0\left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \ \pi \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{r^2}{w^2}} \ \mathrm{d}r^2 = \frac{\pi}{2}w_0^2 I_0. \tag{2.154}$$

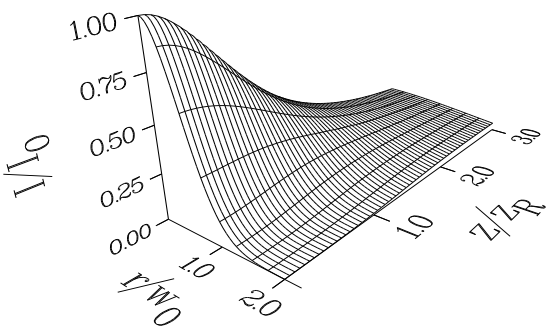

Abbildung 2.15: *Intensitätsverteilung $I(r,z)$ eines Gauß-Strahls.*

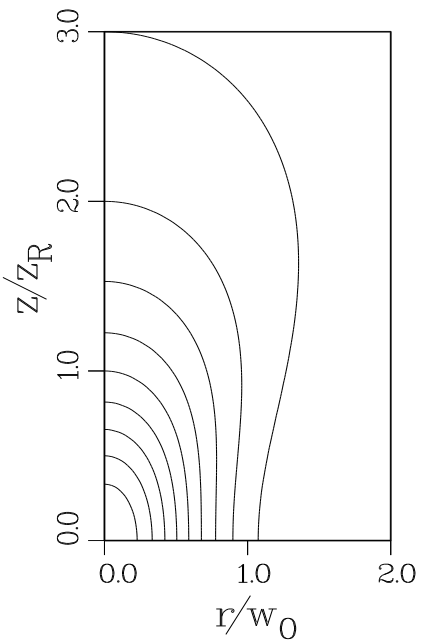

Abbildung 2.16: *Höhenlinien der Intensitätsverteilung eines Gauß-Strahls. Die Höhenlinien entsprechen den Werten $I/I_0 = 0.1,\ 0.2, \cdots, 0.9$. Die Linie für $I/I_0 = 0.5$ schneidet die z-Achse im Punkt $z = z_R$.*

Die Intensitätsverteilung (2.153) ist in den Abbildungen 2.15 und 2.16 dargestellt. Im Punkt $z = z_R$ der Strahlachse ist die Intensität aufgrund der Strahldivergenz auf $I_0/2$ abgefallen.

Hermite-Moden: Entwickelt man das Strahlprofil in der Ebene $z = 0$ in beiden Koordinatenrichtungen nach Hermiteschen Polynomen $H_n(\xi)$, so erhält man als Lösung der paraxialen Wellengleichung die Moden,

$$E_{mn} = H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) e^{-i(m+n)\varphi} E_{00} \tag{2.155}$$

wobei die Grundmode E_{00} die Lösung (2.141), (2.149) für den Gauß-Strahl darstellt. Diese Hermite-Moden besitzen m Knoten in x-Richtung und n Knoten in y-Richtung.

2.6 Wechselwirkung mit klassischen Dipolen

Die klassische Beschreibung der Licht-Materiewechselwirkung basiert auf den Maxwellschen Gleichungen und dem Lorentzmodell für die Polarisierbarkeit von Atomen. Das klassische Maxwell-Lorentzmodell erlaubt die anschauliche Einführung vieler Grundbegriffe der Optik, wie z.B. Dispersion, Absorption, Linienbreite usw., die auch in einer quantenmechanischen Beschreibung Gültigkeit haben.

Aus heutiger Sicht stellt das klassische Lorentzmodell keine mikroskopisch richtige Theorie für die Polarisierbarkeit eines Atoms dar. Es ist jedoch eine korrekte Theorie für das Verhalten von klassischen Dipolen in elektromagnetischen Feldern. In vielen Aspekten gibt es Analogien zum Verhalten des quantenmechanischen Erwartungswertes atomarer Dipole.

2.6.1 Dipolwechselwirkung

Fällt eine Lichtwelle auf ein Atom, so werden die Elektronen gegenüber dem Atomkern verschoben und es entsteht ein induziertes Dipolmoment. Die Dipole werden zu erzwungenen Schwingungen angeregt, welche elektromagnetische Dipolstrahlung aussenden. Die resultierende Lichtwelle im Medium ergibt sich als Überlagerung der einfallenden Welle mit allen Streuwellen.

Wegen der geringen Masse des Elektrons im Vergleich zur Kernmasse, wird der Atomkern am Ort $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als ruhend betrachtet. Ist das Feld der Lichtwelle klein gegenüber den atomaren Feldern so können kleine Auslenkungen und kleine Geschwindigkeiten des Elektrons angenommen werden:

$$x \ll \lambda, \qquad \dot{x} \ll c. \tag{2.156}$$

Unter diesen Voraussetzungen kann in der Lorentzkraft (2.32) die magnetische Kraftwirkung vernachlässigt und das elektrische Feld als räumlich konstant angenommen werden. Die verbleibende Kraft läßt sich aus der Energie $V_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ des Dipols $\mathbf{p} = \mathbf{qx}$ im homogenen elektrischen Feld ableiten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \approx \mathbf{qE}(\mathbf{x} = \mathbf{0}) = \mathbf{qE_0} \exp\left(-\mathbf{i}\omega\mathbf{t}\right) = -\nabla \mathbf{V_p}. \tag{2.157}$$

Die Näherung (2.156) wird daher als Dipolnäherung bezeichnet.

2.6.2 Lorentzmodell

Schwingungsgleichung

Nimmt man an, daß das Elektron durch eine harmonische Rückstellkraft elastisch gebunden und einer zusätzlichen Reibungskraft unterworfen ist, so ergibt sich mit (2.157) die Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators (Lorentz, um 1900):

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + 2\beta\dot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2\boldsymbol{x} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}. \tag{2.158}$$

Als Lösung für die erzwungene Schwingung des Elektrons ergibt sich daraus

$$\boldsymbol{x} = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}\boldsymbol{E} \tag{2.159}$$

Polarisierbarkeit von Atomen

Das Oszillatormodell läßt sich auf Atome mit mehreren Elektronen übertragen, indem man annimmmt, daß die einzelnen Elektronen unabhängige Schwingungen mit unterschiedlichen Oszillatorfrequenzen und Dämpfungskonstanten ausführen können. In dieses Modell gehen die folgenden Parameter ein:

ω_j	:	j-te Eigenfrequenz des Atoms,
β_j	:	j-te Dämpfungskonstante,
f_j	:	Anzahl der Elektronen, die mit der Frequenz ω_j schwingen (Oszillatorstärke),
Z	:	$= \sum_j f_j$ - Anzahl der Elektronen des Atoms.

Diese können quantenmechanisch genauer definiert und berechnet werden. Das Lorentzmodell ergibt dann den exakten quantenmechanischen Ausdruck für die Polarisierbarkeit.

Die Polarisierbarkeit α wird definiert durch

$$\boldsymbol{d} = q\sum_j f_j \boldsymbol{x}_j = \alpha \boldsymbol{E} \tag{2.160}$$

Unter Verwendung von (2.159) für die Auslenkung des j-ten Oszillators erhält man für die Polarisierbarkeit im Lorentzmodell den Ausdruck

$$\alpha = \sum_j \alpha_j, \qquad \alpha_j = \frac{q^2}{m}\,\frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\beta_j\omega} \tag{2.161}$$

Sie ist additiv bezüglich den Schwingungsfreiheitsgraden.

Makroskopische Polarisation

Die makroskopische Polarisation eines Mediums mit N Atomen pro Volumeneinheit ergibt sich mit den Definitionen (2.8) und (2.160) zu

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{-i\omega}\boldsymbol{j} = \frac{1}{-i\omega} qN \sum_j f_j \dot{\boldsymbol{x}}_j = N\boldsymbol{d} = N\alpha\boldsymbol{E}. \tag{2.162}$$

Daraus ergibt sich die Dielektrizitätskonstante (2.11) zu

$$\epsilon = 1 + 4\pi N \sum_j \alpha_j. \tag{2.163}$$

2.6.3 Dispersion

Unter *Dispersion* versteht man die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten ϵ bzw. des Brechungsindexes $n = \sqrt{\epsilon}$.

Niedrige Frequenzen: $\omega \ll \omega_j$

In Grenzfall niedriger Frequenzen kann man (2.161) um $\omega = \omega_j$ entwickeln und β_j vernachlässigen. Bis zur ersten Ordnung in ω^2/ω_j^2 erhält man

$$\alpha_j = \alpha_{j0}\left(1 + \omega^2/\omega_j^2\right), \qquad \alpha_{j0} = \frac{q^2 f_j}{m\omega_j^2},$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi N \sum_j \alpha_{j0} + \left(4\pi N \sum_j \frac{\alpha_{j0}}{\omega_j^2}\right)\omega^2. \tag{2.164}$$

Der Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ ist größer als 1 und nimmt quadratisch mit der Frequenz zu. Unter Vernachlässigung der kleinen Dämpfungskonstante β_j ist der Brechungsindex außerdem reell, so daß sich eine Lichtwelle ungedämpft im Medium ausbreiten

kann. Bei vielen durchsichtigen Materialen ist der Brechungsindex für sichtbares Licht tatsächlich gößer 1 und zeigt eine Zunahme mit wachsender Frequenz, die man als normale Dispersion bezeichnet.

Hohe Frequenzen: $\omega \gg \omega_j$

Ist ω sehr viel größer als die Eigenfrequenzen des Mediums, so können die Elektronen freie Schwingungen im elektromagnetischen Feld ausführen, d.h. die rücktreibende Kraft und die Reibungskraft in der Bewegungsgleichung (2.158) sind vernachlässigbar klein gegenüber der anregenden Kraft. In diesem Fall folgt aus (2.161)

$$\begin{aligned} \alpha_j &= -\frac{q^2}{m}\frac{f_j}{\omega^2}, \\ \epsilon &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi q^2 N Z}{m}} \qquad \text{(Plasmafrequenz)}. \end{aligned} \tag{2.165}$$

Ist ω größer als die *Plasmafrequenz* ω_p, so können sich die Wellen ungedämpft ausbreiten. Der Brechungsindex ist jedoch kleiner als 1. Für $\omega = \omega_p$ sind kollektive elektrostatische Ladungsschwingungen der Elektronen möglich, die als Plasmaschwingungen bezeichnet werden. Für $\omega < \omega_p$ wird $\epsilon < 0$ und der Brechungsindex imaginär. In Frequenzbereichen mit $\epsilon < 0$ ist keine Wellenausbreitung möglich und das Medium reflektiert eine einfallende Welle vollständig. Dies ist z.B. der Grund für die Reflexion von langwelligen Radiowellen (AM) an der Ionosphäre.

Resonanzen: $\mid \omega - \omega_j \mid \sim \beta_j$

Beim Durchlaufen einer Resonanzstelle ω_j wird die zugehörige Polarisierbarkeit α_j sehr groß. In diesem Frequenzbereich kann die kleine Dämpfungskonstante β_j nicht vernachlässigt werden, statt dessen ist die Resonanznäherung

$$\omega \approx \omega_j, \qquad \omega_j^2 - \omega^2 = (\omega_j + \omega)(\omega_j - \omega) \approx 2\omega_j(\omega_j - \omega) \tag{2.166}$$

anwendbar. Setzt man $x = (\omega_j - \omega)/\beta_j$ so ergibt sich aus (2.161):

$$\alpha_j = \frac{q^2 f_j}{2m\omega_j}\,\frac{1}{\omega_j - \omega - i\beta_j} = \alpha_{j0}\,\frac{\omega_j}{2\beta_j}\,\frac{1}{x - i} \tag{2.167}$$

$$\Re(\alpha_j) = \frac{q^2 f_j}{2m\omega_j}\,\frac{\omega_j - \omega}{(\omega_j - \omega)^2 + \beta_j^2} = \alpha_{j0}\,\frac{\omega_j}{2\beta_j}\,R(x), \qquad R(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$\Im(\alpha_j) = \frac{q^2 f_j}{2m\omega_j}\,\frac{\beta_j}{(\omega_j - \omega)^2 + \beta_j^2} = \alpha_{j0}\,\frac{\omega_j}{2\beta_j}\,I(x), \qquad I(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Die statische Polarisierbarkeit α_{j0} wird im Resonanzbereich um den Faktor $\omega_j/2\beta_j$ überhöht. Die Funktion R(x) hat Extrema $\pm\frac{1}{2}$ bei $x = \pm 1$ und eine Nullstelle bei $x = 0$. Die Funktion I(x) hat den Maximalwert 1 bei $x = 0$ und geht asymptotisch für große $\mid x \mid$ gegen 0.

Nahe der Resonanz wird der Verlauf der Dielektrizitätskonstanten durch den resonanten Anteil bestimmt. Im Intervall $\mid x \mid < 1$ nimmt der Realteil der resonanten Polarisierbarkeit mit wachsender Frequenz ab. Die resultierende Abnahme des Brechungsindexes an einer Resonanzstelle bezeichnet man als *anomale Dispersion.*

Übung 2.1 (Verlauf von $\epsilon(\omega)$) *Skizzieren Sie den Verlauf der Dielektrizitätskonstanten (Real-, Imaginärteil) als Funktion der Frequenz, für ein Medium mit 2 Resonanzstellen. Wo können Frequenzbänder auftreten, in denen keine Wellenausbreitung möglich ist?*

2.6.4 Absorption im Lorentzmodell

Im Lorentzmodell wird Energieabsorption durch eine phänomenologische Reibungskraft beschrieben. Damit ergibt sich eine komplexe Dielektrizitätskonstante, deren Imaginärteil die Absorption der Welle im Medium beschreibt. Da Absorption nur in der Nähe einer Resonanz auftritt, kann man sich hier auf die Resonanznäherung (2.167) beschränken. Durch Substitution von (2.163) und (2.167)in (2.42) folgt der Absorptionskoeffizient:

$$a = \frac{\omega}{cn_r} 4\pi N \ \Im(\alpha_j) = N \ \frac{2\pi q^2 f_j}{mcn_r} \ \frac{\beta_j}{(\omega_j - \omega)^2 + \beta_j^2}. \tag{2.168}$$

Er ist proportional zur Dichte N der Atome. Die absorbierte Leistung kann daher auch in der Form

$$P = aI = N\sigma_a(\nu)I \tag{2.169}$$

angegeben werden, wobei σ_a den für das einzelne Atom charakteristischen *Wirkungsquerschnitt für Absorption* definiert. Der Vergleich von (2.168) mit (2.169) ergibt:

$$\sigma_a(\nu) = \sigma_0 \ L(\nu) \tag{2.170}$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi q^2 f_j}{mcn_r} = 2.65 \times 10^{-2} \ \frac{f_j}{n_r} \ [cm^2 sec^{-1}],$$

$$L(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta\nu_j}{(\nu_j - \nu)^2 + \delta\nu_j^2}, \tag{2.171}$$

$$\omega_j = 2\pi\nu_j, \qquad \omega = 2\pi\nu, \qquad \beta_j = 2\pi\delta\nu_j.$$

Die Frequenzabhängigkeit von σ wird durch die *Linienformfunktion* $L(\nu)$ beschrieben. Die spezielle Funktion aus (2.170) wird oft als Lorentzprofil bezeichnet. Sie besitzt die Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(\nu)\, d\nu = 1, \qquad L(\nu_j) = \frac{1}{\pi\delta\nu_j},$$

$$L(\nu_j \pm \delta\nu_j) = \frac{1}{2}L(\nu_j), \qquad \Delta\nu_j \;=\; 2\delta\nu_j \;=\; \beta_j/\pi. \tag{2.172}$$

Unter der *Linienbreite* $\Delta\nu_j$ versteht man den Frequenzabstand zwischen denjenigen Frequenzen, in denen L auf den halben Maximalwert abgefallen ist (englisch: full width at half maximum (FWHM)).

Wegen der Normierung der Linienformfunktion bezeichnet σ_0 den über alle Frequenzen integrierten Wirkungsquerschnitt. Er unterscheidet sich für die einzelnen Resonanzen eines Atoms nur durch die Oszillatorstärken. Durch Vergleich mit experimentellen Daten lassen sich die Oszillatorstärken einzelner Resonanzen ermitteln. Dabei fällt auf, daß die Oszillatorstärken sehr unterschiedlich sein können, wofür die klassische Theorie keine hinreichende Erklärung geben kann.

Beispiel 2.5 (σ_0 für atomaren Wasserstoff)

λ (Å)	σ_0 *gemessen* ($cm^2 sec^{-1}$)	f_j *nach (2.170)*
1216	1.10×10^{-2}	*0.416*
1026	2.10×10^{-3}	*0.079*
973	7.69×10^{-4}	*0.029*
950	3.71×10^{-4}	*0.014*
938	2.07×10^{-4}	*0.0078*
931	1.27×10^{-4}	*0.0048*

Für breitbandige Strahlung kann die absorbierte Leistung durch den integrierten Absorptionsquerschnitt und die Intensität bei der Resonanzfrequenz ausgedrückt werden. Ersetzt man I in (2.169) durch $I(\nu)d\nu$ mit einer an der Resonanzstelle nur schwach veränderlichen spektralen Intenstiät $I(\nu)$, so folgt:

$$P = N\sigma_0 \int L(\nu)I(\nu)d\nu = N\sigma_0\; I(\nu_j) \tag{2.173}$$

2.6.5 Lichtstreuung

Neben der Dispersion und der Absorption von Licht kann in einem Medium Lichtstreuung auftreten. Dabei unterscheidet man die *kohärente Streuung*, bei der einfallende Welle und Streuwelle gleiche Frequenzen besitzen, und die *inkohärente Streuung*, bei der die Frequenz der Streuwelle verschieden ist von der Frequenz der einfallenden Welle. Außerdem ist für die Streutheorie die Größe der streuenden Teilchen im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes wesentlich.

Im folgenden wird die als Rayleigh-Streuung bekannte kohärente Streuung an einzelnen unabhängigen Dipolen betrachtet. Zunächst wird die Abstrahlung eines einzelnen oszillierenden Dipols bestimmt, dann die Abstrahlung eines von einer Lichtwelle induzierten Dipolmomentes. Daraus wird der Rayleighsche Ausdruck für den Extinktionskoeffizienten eines Gases aus unabhängigen Streuzentren ermittelt.

Dipolstrahlung

Die Abstrahlung eines schwingenden Dipols läßt sich aus dem allgemeinen Ausdruck für das retardierte Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \;=\; \frac{1}{c}\int dV\;\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t-R/c)}{R} \tag{2.174}$$

bestimmen. Hierbei ist R der Abstand zwischen dem Ort $\boldsymbol{x}(t)$ der Ladung und dem Beobachtungspunkt $\boldsymbol{r}$. Die Stromdichte des schwingenden Dipols sei

$$\boldsymbol{j} = q\;\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))\;\dot{\boldsymbol{x}}(t) \;=\; \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t))\;\dot{\boldsymbol{d}}, \qquad \boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}_0\exp(-i\omega t).$$

In großen Entfernungen vom Dipol kann man näherungsweise R durch r ersetzen. Mit $R=r$, $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{k}=(\omega/c)\boldsymbol{t}$ folgt aus (2.174)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \;=\; \frac{1}{cr}\;\dot{\boldsymbol{d}}(t-r/c) \;=\; \frac{-i\omega\boldsymbol{d}_0}{cr}\exp(-i\omega t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}). \tag{2.175}$$

Mit dem Vektorpotential (2.175) lassen sich die Feldstärken der Streuwelle berechnen:

$$\boldsymbol{B} \;=\; \nabla\times\boldsymbol{A} \;=\; i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A} \;=\; \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{t} \;=\; \frac{1}{c^2r}\ddot{\boldsymbol{d}}\,|_{t-r/c}\times\boldsymbol{t}, \tag{2.176}$$

$$\boldsymbol{E} \;=\; \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{t} \;=\; \frac{1}{c^2r}(\ddot{\boldsymbol{d}}\,|_{t-r/c}\times\boldsymbol{t})\times\boldsymbol{t}. \tag{2.177}$$

Bemerkung 2.1 *Das elektrische Feld wurde über die Maxwell-Gleichung (2.1) bestimmt. Eine direkte Ableitung aus dem Vektorpotential würde die spezielle Eichung* $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ *erfordern, bei der das skalare Potential verschwindet.*

Bemerkung 2.2 *Die abgestrahlte Welle besitzt dieselbe Frequenz wie der schwingende Dipol. Dies ist eine Folge der Vernachlässigung der zeitabhängigen Auslenkung $\boldsymbol{x}(t)$ bei der Näherung $R \approx r$. In dieser Näherung läßt sich nur die kohärente Streuung behandeln.*

Bemerkung 2.3 *Der Gültigkeitsbereich von (2.175) kann genauer angegeben werden, indem man R um r bis zur ersten Ordnung in x/r entwickelt:*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{x},$$

$$R^2 = r^2 - 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{r} + x^2 \approx r^2(1 - 2\,\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}}{r}),$$

$$R \approx r - \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}. \tag{2.178}$$

Die Korrekturen erster Ordnung können in der Phase von (2.174) nur dann vernachlässigt werden, wenn

$$\left| \omega\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}}{c} \right| = \mid \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \mid \;<< \; 1.$$

Dazu muß die Auslenkung des Elektrons nicht nur klein sein gegenüber dem Abstand r sondern auch gegenüber der Wellenlänge λ des Lichtes.

Die in ein Raumwinkelelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung ergibt sich zu

$$dP = Ir^2 d\Omega = < \frac{c}{4\pi}\mathcal{B}^2 > r^2 d\Omega = \frac{< \ddot{d}^2 >}{c^3}\,\frac{\sin^2\Theta d\Omega}{4\pi}. \tag{2.179}$$

Die Richtungsverteilung der Strahlung wird durch den Faktor $\sin^2\Theta$ bestimmt, wobei Θ den Winkel zwischen der Dipolachse und der Ausbreitungsrichtung der Welle bezeichnet. Die Intensität der Strahlung ist proportional zum Quadrat der Beschleunigung der Ladung.

Bemerkung 2.4 *Dipolstrahlung ist axialsymmetrisch bezüglich der Dipolachse. In Achsenrichtung erfolgt keine Ausstrahlung, senkrecht zur Achsenrichtung ist die Ausstrahlung maximal.*

Bemerkung 2.5 *Betrachtet man das von einem Dipol erzeugte Streulicht senkrecht zur Richtung des einfallenden Strahles, so ist dieses linear polarisiert. Die Polarisationsrichtung steht senkrecht zu der Ebene, die durch den einfallenden und den gestreuten Strahl gebildet wird.*

Die gesamte ausgestrahlte Leistung ergibt sich durch Integration über den Raumwinkel. Wegen der Richtungsabhänigkeit der Strahlung wird im Mittel nur in den Bruchteil $\frac{2}{3}$ des vollen Raumwinkels 4π emittiert:

$$P = \frac{<\ddot{d}^2>}{c^3}\,\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} d\Theta \sin^3\Theta = \frac{2}{3}\frac{<\ddot{d}^2>}{c^3} \tag{2.180}$$

mit

$$\int_0^{2\pi} d\Phi = 2\pi, \qquad \int_0^{\pi} d\Theta \sin^3\Theta = \int_{-1}^{+1} d\cos\Theta\ (1-\cos^2\Theta) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Streuung

Bei der Streuung einer elektromagnetischen Welle an einem Dipol ist das von der Welle induzierte Dipolmoment $d = \alpha E$ in die Formel für die Dipolstrahlung einzusetzen. Unter Verwendung von

$$<\ddot{d}^2> = \frac{\omega^4}{2}|\alpha|^2 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*$$

ergibt sich für die gesamte an einem Dipol gestreute Leistung

$$P = \sigma_s I \tag{2.181}$$

der Streuquerschnitt

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\alpha|^2. \tag{2.182}$$

Die Polarisierbarkeit ist im allgemeinen frequenzabhängig. Bei niedrigen Frequenzen kann man näherungsweise die statische Polarisierbarkeit aus Gleichung (2.164) verwenden und erhält eine starke Zunahme der Streuung mit wachsenden Frequenzen: $\sigma_s \sim \omega^4$.

Bei hohen Frequenzen kann die Polarisierbarkeit für freie Elektronen

$$\alpha = -\frac{q^2 Z}{m\omega^2}$$

gemäß Gleichung (2.165) eingesetzt werden. Dieser Grenzfall wird als Thomson-Streuung bezeichnet und besitzt den Streuquerschnitt

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3} Z^2 r_0^2, \qquad r_0 = \frac{q^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13} cm. \tag{2.183}$$

Die Länge r_0 bezeichnet den *klassischen Elektronenradius*, bei dem die elektrostatische Energie q^2/r_0 des Elektrons gleich seiner Ruhemasse mc^2 ist.

Der Wirkungsquerschnitt (2.182) kennzeichnet die Streuung an einem einzelnen Streuzentrum. In einem Gas mit N Streuzentren pro Volumeneinheit müssen die einzelnen Streuwellen aufsummiert werden. Nimmt man eine zufällige Verteilung der Streuzentren an, so ist die gesamte gestreute Intensität gleich der Summe der Intensitäten der einzelnen Streuprozesse. Die gesamte gestreute Leistung ist damit

$$P_s = a_s I, \tag{2.184}$$

wobei

$$a_s = N\sigma_s = \frac{\omega^4}{c^4}\frac{|n^2-1|^2}{6\pi N}, \qquad N|\alpha|^2 = \frac{|N\alpha|^2}{N} = \frac{1}{N}\,\frac{|\epsilon-1|^2}{(4\pi)^2}, \tag{2.185}$$

den *Extinktionskoeffizienten für Streuung* bezeichnet. Die angegebene Abhängigkeit des Extinktionskoeffizienten vom Brechungsindex des streuenden Mediums ergibt sich durch Elimination der Polarisierbarkeit aus (2.182) mit Hilfe der Beziehungen (2.162) und (2.26).

Absorption und Streuung werden unter dem Oberbegriff Extinktion zusammengefaßt. Der Absorptionskoeffizient wird daher auch als Extinktionskoeffizient für Absorption bezeichnet. Wie der Absorptionskoeffizient (2.42 bestimmt auch der Extinktionskoeffizient (2.185) die Abnahme der Intensität der einfallenden Welle.

2.7 Linienbreite

Bei der Breite einer Spektrallinie unterscheidet man die *homogene* und die *inhomogene* Linienverbreiterung. Im homogenen Fall besitzen *alle* Atome des Mediums dieselbe Linienform. Die Breite der homogenen Linie ergibt sich aus der endlichen Lebensdauer des angeregten Niveaus. Beispiele sind die *natürliche Linienverbreiterung* durch spontane Emission oder die *Druckverbreiterung* durch Stöße. Im inhomogenen Fall besitzen die Atome des Mediums unterschiedliche Resonanzlinien. Die Breite der inhomogenen Linie ergibt sich aus der Streuung der Resonanzfrequenzen der beteiligten Atome. Beispiele hierfür sind die Dopplerverbreiterung in Gasen oder die Starkverbreiterung in Festkörpern, hervorgerufen durch örtlich inhomogene Kristallfelder.

2.7.1 Natürliche Linienverbreiterung

Die Lebensdauer eines angeregten Niveaus ist durch spontane Emission begrenzt. Befinden sich N Atome im angeregten Zustand 2, so ist die Übergangsrate in einen tieferliegenden Zustand 1 aufgrund spontaner Emission

$$\frac{d}{dt}\,N = \quad -A_{21}N, \tag{2.186}$$

Die atomare Konstante A_{21} wird als Einsteinscher A-Koeffizient bezeichnet. Die Anzahl der Atome im angeregten Zustand nimmt demnach exponentiell ab,

$$N(t) \;=\; N(0)\exp\left(-t/\tau_{21}\right), \qquad \tau_{21} = 1/A_{21}, \tag{2.187}$$

wobei der Kehrwert des A-Koeffizienten die Lebensdauer τ_{21} des Übergangs bestimmt. Typische Lebensdauern angeregter atomarer Niveaus liegen im Bereich $1 - 100$ ns.

Die spontane Emission einzelner Photonen ist ein rein quantenmechanisches Phänomen und kann für einen bestimmten atomaren Übergang nur quantenmechanisch berechnet werden.

Klassisch entspricht der spontanen Emission die Strahlungsdämpfung beschleunigter Ladungen. Nach dem Korrespondenzprinzip ist das klassische Konzept auf hochangeregte Niveaus anwendbar, die durch viele einzelne spontane Emissionsprozesse in ein tieferliegendes Niveau übergehen.

Die Strahlungsdämpfung kann im Lorentzmodell durch eine geeignete Wahl der Dämpfungskonstanten β berücksichtigt werden. Dazu kann angenommen werden, daß im eingeschwungenen Zustand (2.159) die im Zeitmittel dissipierte Leistung P_a gleich groß ist, wie die im Zeitmittel abgestrahlte Leistung P_s. Mit Hilfe der Ausdrücke (2.169) für P_a und (2.184) für P_s ergibt sich die Bilanzgleichung

$$\frac{\omega}{c}4\pi\Im(\alpha) \;=\; \frac{8\pi}{3}\,\frac{\omega^4}{c^4}\mid\alpha\mid^2 . \tag{2.188}$$

$$\alpha = \frac{q^2}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\beta\omega},$$

$$|\alpha|^2 \;=\; \left(\frac{q^2}{m}\right)^2\,\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$$

$$\Im(\alpha) \;=\; \frac{q^2}{m}\,\frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$$

Daraus ergibt sich für die Dämpfungskonstante β, der Wert

$$2\beta = \frac{2}{3}\frac{\omega^2 q^2}{mc^3}. \tag{2.189}$$

Die Lösung der homogenen Schwingungsgleichung (2.158) beschreibt freie gedämpfte Schwingungen deren Energie exponentiell mit der Dämpfungskonstanten 2β abklingt. Die klassische Lebensdauer einer freien Schwingung ist demnach $\tau = 1/(2\beta)$. Die natürliche Linienbreite (FWHM) ergibt sich nach Definition (2.172) zu $\Delta\nu_s = 2\beta/(2\pi)$.

Beispiel 2.6 (Strahlungsdämpfung)

Frequenz	:	$\nu = 5 \times 10^{14}\ Hz$
Dämpfung	:	$2\beta = 6 \times 10^{7}\ Hz$
Lebensdauer	:	$\tau = 16\ ns$
Linienbreite	:	$\Delta\nu_s = 9.8\ MHz$

2.7.2 Stoßverbreiterung

In Gasen wird die Lebensdauer eines angeregten Zustandes häufig durch Stöße zwischen den Gasteilchen begrenzt, was zu einer Stoßverbreiterung der Spektrallinien führt. Da die Stoßfrequenz mit der Dichte der Gasteilchen und damit mit dem Gasdruck zunimmt, spricht man auch von *Druckverbreiterung*. Die Stoßverbreiterung wird vorwiegend durch elastische Stöße bestimmt, da diese bei größeren Stoßparametern auftreten und damit häufiger zu erwarten sind.

Quantenmechanisch betrachtet erzeugt ein elastischer Stoß eine Änderung in der Phase des angeregten Zustandes, während seine Amplitude und damit die Besetzung des Niveaus unverändert bleibt. Über die Dauer der Wechselwirkung wird das Energieniveau adiabatisch verschoben und damit die Phase relativ zu einem ungestörten Atom verändert. Der Einfluß zufälliger Phasenänderungen auf die mittlere Polarisation kann mit der Dichtematrix statistisch (vgl. Kapitel über semiklassische Theorie) beschrieben werden.

Im klassischen Bild bewirken elastische Stöße zufällige Richtungsänderungen der Dipolmomente. Nimmt man an, daß zu jedem Zeitpunkt t' sehr viele Atome stoßen, so kann die mittlere Auslenkung und die mittlere Geschwindigkeit dieser Dipole unmittelbar nach dem Stoß gleich Null gesetzt werden. Mit diesen Anfangsbedingungen kann eine Bewegungsgleichung für das mittlere Dipolmoment aller Atome hergeleitet werden, die eine effektive Reibungskraft enthält.

Bewegungsgleichung des stoßfreien Dipols: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen gilt für das Dipolmoment $\boldsymbol{d}$ im elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ die stoßfreie Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\boldsymbol{d}}{dt^2} + \omega_0^2 \boldsymbol{d} = \frac{q^2}{m}\boldsymbol{E}. \tag{2.190}$$

Sie kann als ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, &\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q^2\boldsymbol{E}}{m} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \frac{d\boldsymbol{d}}{dt} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.191}$$

dargestellt werden. Sei $< \boldsymbol{y}(t,t') >$ der Mittelwert des Vektors $\boldsymbol{y}$ bezüglich derjenigen Teilchen, deren letzter Stoß zur Zeit t' stattfand und die sich danach bis zur Zeit $t > t'$ stoßfrei bewegt haben. Aufgrund der zufälligen Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen beim Stoß wird für diesen Mittelwert die Anfangsbedingung

$$< \boldsymbol{y}(t',t') >= 0, \tag{2.192}$$

angenommen. Dieser Mittelwert genügt ebenfalls der stoßfreien Bewegungsgleichung (2.191), da die linearen Operationen mit der Mittelwertbildung vertauscht werden können, wie z.B.

$$\frac{d}{dt} < \boldsymbol{y}(t,t') > \;=\; \frac{d}{dt}\frac{1}{N_{t'}}\sum_i \boldsymbol{y}_i = \frac{1}{N_{t'}}\sum_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{y}_i. \tag{2.193}$$

Die Summation erstreckt sich über die zur Zeit t' stoßenden Teilchen, deren Anzahl mit $N_{t'}$ bezeichnet wird.

Mittleres Dipolmoment: Das mittlere Dipolmoment aller Atome erhält man, indem man $< \boldsymbol{y}(t,t') >$ über alle Stoßzeiten $t' < t$ mittelt:

$$< \boldsymbol{y}(t) >= \int_{-\infty}^{t} < \boldsymbol{y}(t,t') > \mathrm{d}f(t,t'). \tag{2.194}$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{d}f(t,t')$ den Bruchteil der Atome, deren letzter Stoß im Zeitinterval zwischen t' und $t' - \mathrm{d}t'$ stattfand. Dieser Bruchteil ist das Produkt von dem Bruchteil $f(t,t')$ der Atome, deren letzter Stoß vor der Zeit t' stattfand mit der Wahrscheinlichkeit für einen Stoß im Zeitintervall dt':

$$\mathrm{d}f(t,t') = f(t,t')\frac{dt'}{\tau_c}. \tag{2.195}$$

Die Stoßwahrscheinlichkeit wird hierbei als gleichverteilt über ein Zeitintervall τ_c angenommen, welches als die mittlere freie Flugzeit bezeichnet wird. Mit der Anfangsbedingung $f(t,t) = 1$ folgt aus (2.195) eine exponentielle Abnahme der stoßfreien Atome

$$f(t,t') = \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_c}\right). \tag{2.196}$$

Bewegungsgleichung des mittleren Dipolmomentes:

Differenziert man (2.194) nach der Zeit, so folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{d<\boldsymbol{y}(t)>}{dt} = \frac{1}{\tau_c} f(t,t) <\boldsymbol{y}(t,t)> \\
&+ \int_{t'=-\infty}^{t} <\boldsymbol{y}(t,t')> \frac{-1}{\tau_c}\, \mathrm{d}f(t,t') + \int_{t'=-\infty}^{t} \mathrm{d}f(t,t')\, \frac{d<\boldsymbol{y}(t,t')>}{dt}\, \mathrm{d}f(t,t') \\
&= -\frac{1}{\tau_c} <\boldsymbol{y}(t)> + \int_{t'=-\infty}^{t} \mathrm{d}f(t,t')\ (\boldsymbol{a}\cdot <\boldsymbol{y}(t,t')> + \boldsymbol{b})\ \mathrm{d}f(t,t') \\
&= -\frac{1}{\tau_c} <\boldsymbol{y}(t)> + \boldsymbol{a}\cdot <\boldsymbol{y}(t)> + \boldsymbol{b}.
\end{aligned} \tag{2.197}$$

Hierbei wurden die Anfangsbedingung (2.192) und die Bewegungsgleichung (2.191) des stoßfreien Dipols verwendet. Die beiden Gleichungen des Gleichungssystems (2.197) lauten einzeln

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} <\boldsymbol{d}> &= -\frac{1}{\tau_c} <\boldsymbol{d}> + <\frac{d\boldsymbol{d}}{dt}>, \\
\frac{d}{dt} <\frac{d\boldsymbol{d}}{dt}> &= -\frac{1}{\tau_c} <\frac{d\boldsymbol{d}}{dt}> - \omega_0^2 <\boldsymbol{d}> + <\frac{q}{m}<\boldsymbol{E}>>.
\end{aligned} \tag{2.198}$$

Eliminiert man daraus die Variable

$$<\frac{d\boldsymbol{d}}{dt}> = \frac{d}{dt} <\boldsymbol{d}> + \frac{1}{\tau_c} <\boldsymbol{d}>, \tag{2.199}$$

so erhält man für das mittlere Dipolmoment die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} <\boldsymbol{d}> + 2\beta \frac{d}{dt} <\boldsymbol{d}> + (\omega_0^2 + \beta^2) <\boldsymbol{d}> = \frac{q}{m} <\boldsymbol{E}>, \tag{2.200}$$

mit $\beta = 1/\tau_c$. Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit (2.161) zeigt, daß die Wirkung elastischer Stöße im Mittel durch eine Reibungskraft ausgedrückt werden kann. Die Frequenzverschiebung durch die Reibungskonstante ist i.a. vernachlässigbar klein.

Die Stoßverbreiterung wird daher durch das Lorentzprofil (2.171) mit der FWHM-Linienbreite $\Delta\nu_c = 2\beta/(2\pi) = 1/(\pi\tau_c)$ beschrieben.

Freie Flugzeit: Die freie Flugzeit kann durch den Wirkungsquerschnitt σ_c, die Relativgeschwingigkeit v und die Dichte N der stoßenden Teilchen ausgedrückt werden. Wenn man fordert, daß das stoßfreie Volumen genau ein Teilchen enthält, $N\sigma_c v\tau_c = 1$, so folgt die Beziehung

$$\tau_c^{-1} = N\sigma_c v. \tag{2.201}$$

Beispiel 2.7 (CO_2 Gas mit $T = 300^0$ K und $p = 760$ Torr)

$$\begin{array}{lll} n & : & n = p/(k_B T) \approx 2.44 \times 10^{19} cm^{-3} \\ \sigma_c & : & \sigma_c \approx \pi d^2 \approx 5,03 \times 10^{-15} cm^2, \quad \textit{Moleküldurchmesser: } d \approx 4\mathring{A} \\ v & : & v \approx v_T = \sqrt{3k_B T/\mu} \approx 5.8 \times 10^4 cm/s \\ & & \textit{Reduzierte Masse: } \mu = (12 + 2 \times 16) m_p/2 \approx 3,68 \times 10^{-26} kg \\ \Delta\nu_c & : & \Delta\nu_c = 1/(\pi\tau_c) \approx 2.3 GHz \end{array}$$

2.7.3 Dopplerverbreiterung

Die thermische Bewegung der Atome eines Gases bewirkt eine inhomogene Linienverbreiterung durch den Dopplereffekt. Die Verbreiterung der Linie wird durch die Geschwindigkeitsverteilung der Atome des Gases bestimmt.

Dopplerverschiebung: Eine Welle, die sich im Laborsystem mit der Frequenz $\omega = ck$ ausbreitet, besitzt in einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Bezugssystem die Frequenz

$$\omega' \;=\; \omega - kv \;=\; \omega\,(1 - \frac{v}{c})\;. \tag{2.202}$$

Umgekehrt besitzt ein Atom mit Geschwindigkeit v und Eigenfrequenz ω_0 im Laborsystem die Resonanzfrequenz

$$\omega \;=\; \omega_0\,(1 + \frac{v}{c})\;, \qquad \nu \;=\; \nu_0\,(1 + \frac{v}{c})\;. \tag{2.203}$$

Geschwindigkeitsverteilung: Im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur T ist die Anzahl der Teilchen der Masse M mit Geschwindigkeiten im Intervall zwischen v und $v + dv$ durch die Maxwellsche Verteilung

$$d\,f \;=\; \sqrt{\frac{M}{2\pi k_B T}}\exp\left(-\frac{Mv^2}{2k_B T}\right)\,dv \tag{2.204}$$

gegeben.

Linienformfunktion: Aus der Verteilung der Geschwindigkeiten $f(v)$ ergibt sich die Verteilung der Resonanzfrequenzen $S(\nu)$, indem man die Geschwindigkeiten durch die entsprechenden Frequenzen (2.203) ausdrückt und in (2.204) substituiert:

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{\nu_0}(\nu - \nu_0) \\ dv &= \frac{c}{\nu_0} d\nu, \quad f(v)dv = S(\nu)d\nu \\ S(\nu) &= \frac{c}{\nu_0}\sqrt{\frac{M}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{Mc^2}{2k_BT}\frac{(\nu-\nu_0)^2}{\nu_0^2}\right). \end{aligned} \tag{2.205}$$

Die Linienformfunktion $S(\nu)$ ist auf 1 normiert. Die FWHM-Linienbreite $\Delta\nu_D$ ergibt sich aus der Bedingung

$$S(\nu_0 + \Delta\nu_D/2) = S(\nu_0)/2, \qquad \exp\left(-\frac{Mc^2}{2k_BT}\frac{\Delta\nu_D^2}{(2\nu_0)^2}\right) = \frac{1}{2}, \tag{2.206}$$

zu

$$\Delta\nu_D = 2\frac{\nu_0}{c}\sqrt{2k_BT\ln 2/M}. \tag{2.207}$$

Beispiel 2.8 (CO_2 Gas mit T = 300^0 K)

$$\begin{array}{lll} \lambda & : & c/\nu_0 = \lambda = 10.6\mu m \\ M & : & M = (12 + 2\times 16)m_p \approx 7.4 \times 10^{-26} kg \\ \Delta\nu_D & : & \Delta\nu_D \approx 53 MHz \end{array}$$

Die obigen Beispiele zeigen, daß in CO_2 bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck die Druckverbreiterung wesentlich größer ist als die Dopplerverbreiterung. Das Dopplerregime kann aber dann erreicht werden, wenn geringere Gasdichten mit größeren freien Weglängen $\lambda_f = v\tau_c$ und Laser mit kleineren Lichtwellenlängen $\lambda = c/\nu_0$ betrachtet werden. Aus der Skalierung der Druckverbreiterung $\Delta\nu_c \sim \tau_c^{-1}$ und der Dopplerverbreiterung $\Delta\nu_D \sim v/\lambda$ folgt die Abschätzung

$$\frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu_c} \sim \frac{\lambda_f}{\lambda}. \tag{2.208}$$

Im Dopplerregime ist also die freie Weglänge groß gegenüber der Lichtwellenlänge.

Kapitel 3

Semiklassische Beschreibung

3.1 Semiklassische Näherung

In der semiklassischen Theorie werden die Atome quantenmechanisch (durch *Zustandsvektor, Dichtematrix*) elektromagnetische Felder dagegen klassisch (durch *Feldstärken*) beschrieben. Die Wechselwirkung der Atome mit einem zeitabhängigen elektrischen Feld induziert Übergänge zwischen den stationären Zuständen des Atoms. Die semiklassische Theorie ist daher die geeignete Grundlage zur Beschreibung der induzierten Emission und Absorption von Licht.

Anmerkungen

- Die Absorption und Emission von Licht durch Atome erfordert eine quantenmechanische Beschreibung der Atome. Nach dem Bohrschen Postulat $h\nu = E_2 - E_1$ ist die Ausstrahlung von Licht der Frequenz ν mit einem Übergang eines Elektrons von einem diskreten Energieniveau E_2 in ein diskretes Energieniveau E_1 verbunden.

- Eine Quantisierung des Strahlungsfeldes wird dagegen nur dann notwendig, wenn Prozesse mit einzelnen Photonen oder Fluktuationen der Photonenzahl betrachtet werden sollen. Bei semiklassischen Vorgängen sind die Photonenzahlen und deren Änderungen als hinreichend groß angenommen.

- Die spektrale Energiedichte $\rho(\nu)$ eines Strahlungsfeldes mit einer Besetzung von einem Photon pro Mode ist nach (2.105)

  $$8\pi\frac{\nu^2}{c^3}\, h\nu.$$

  Die spektrale Strahldichte einer "semiklassischen" Strahlungsquelle muß daher die Bedingung

  $$L(\nu) \;=\; \frac{1}{4\pi}c\rho(\nu) \;\gg\; L_{min} \;=\; 2h\,\frac{\nu^3}{c^2} \tag{3.1}$$

erfüllen. Bei der Frequenz $\nu = 5\times10^{14}Hz$ ist $L_{min} = 1.8\times10^{-10}W/(cm^2 str Hz)$. Zum Vergleich ist die spektrale Strahldichte der Sonne bei derselben Frequenz nur $L_{Sonne} = 1.5 \times 10^{-12}W/(cm^2 str Hz)$.

- Falls Zweifel an der Gültigkeit der semiklassischen Theorie bestehen, muß diese im Einzelfall durch die Quantentheorie bestätigt oder widerlegt werden. Einige Beispiele für nicht semiklassisches Verhalten sind:

  1. Spontane Emission, natürliche Linienbreite
  2. Selbsterregung von Laseroszillationen
  3. Unschärfebeziehungen zwischen Amplitude und Phase

3.2 Atom im elektromagnetischen Feld

Die Wechselwirkung eines Atoms mit einer klassischen Lichtwelle läßt sich quantenmechanisch am einfachsten durch die elektromagnetischen Potentiale beschreiben. Wegen der Eichfreiheit der Potentiale sind unterschiedliche Darstellungen der Wechselwirkung möglich. Insbesondere kann die Dipolwechselwirkung ausschließlich durch das Vektorpotential oder ausschließlich durch das skalare Potential erfolgen.

Die folgende Zusammenfassung der quantenmechanischen Grundgleichungen bezieht sich auf wasserstoffähnliche Atome, deren elektronische Anregungen durch ein einzelnes Elektron beschrieben werden. Eine Verallgemeinerung auf Mehrelektronensysteme ist im Prinzip möglich, indem man das Dipolmoment des einzelnen Elektrons durch das gesamte Dipolmoment ersetzt.

3.2.1 Elektromagnetische Potentiale

Das elektromagnetische Feld kann durch ein skalares Potential Φ und ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ beschrieben werden, wobei die elektrischen und magnetischen Felder durch

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \tag{3.2}$$

definiert werden.

Die Potentiale $\boldsymbol{A}$, Φ des elektromagnetischen Feldes sind nicht eindeutig. Äquivalente Potentiale erhält man durch die Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \nabla f(\boldsymbol{x}, t), \\ \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c}\partial_t f(\boldsymbol{x}, t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit einer beliebigen erzeugenden Funktion $f(\boldsymbol{x}, t)$.

Unter einer Eichtransformation sind die elektrischen und magnetischen Felder definitionsgemäß invariant:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}' &= \nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}. \\ \boldsymbol{E}' &= -\nabla(\Phi - \frac{1}{c}\partial_t f) - \frac{1}{c}\partial_t(\boldsymbol{A} + \nabla f) = \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2.2 Kopplung ans elektromagnetische Feld

Aus dem Viererpotential $A^\mu = (\Phi, \boldsymbol{A})$ und der Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, \boldsymbol{v})$ kann man eine bis auf eine Proportionalitätskonstante eindeutige skalare Größe

$$\mathcal{L}_I = (q/c) A_\mu u^\mu = -q\gamma(\Phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{3.5}$$

bilden, welche die Wechselwirkung einer Ladung q mit dem elektromagnetischen Feld in der Lagrange-Funktion beschreibt. Die klassische, nichtrelativistische *Lagrangefunktion* der Ladung ist damit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - q(\Phi - \frac{1}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}). \tag{3.6}$$

Mit dem *kanonischen Impuls*

$$\boldsymbol{p} = \partial_{\boldsymbol{v}} \mathcal{L} = m\boldsymbol{v} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \tag{3.7}$$

erhält man daraus die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\Phi. \tag{3.8}$$

Der mechanische Impuls $m\boldsymbol{v}$ wird durch die Feldstärken bestimmt und ist daher invariant gegenüber Eichtransformationen. Dagegen ist der kanonische Impuls von der Wahl der Eichung abhängig

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}') = \boldsymbol{p} + \frac{q}{c}\nabla f. \tag{3.9}$$

Übung 3.1 (Lagrangegleichungen) *Zeigen Sie, daß die Lagrangefunktion (3.6) die Bewegung der Ladung unter der Lorentzkraft (2.32) beschreibt.*

3.2.3 Schrödingergleichung

Ersetzt man in der klassischen Hamiltonfunktion (3.8) den kanonischen Impuls durch den quantenmechanischen Impulsoperator

$$\boldsymbol{p} \;=\; -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \tag{3.10}$$

so gelangt man zu der Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi \;=\; \left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+q\Phi\right]\psi. \tag{3.11}$$

Forminvarianz der Schrödingergleichung: Der Hamiltonoperator in (3.11) ist von der Wahl der Eichung abhängig. Führt man jedoch zusammen mit der Eichtransformation (3.3) eine unitäre Transformation der Wellenfunktion,

$$\psi' \;=\; \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}f\right)\psi \tag{3.12}$$

aus, so bleibt die Schrödingergleichung forminvariant. Diese Behauptung folgt aus den Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned}
(i\hbar\partial_t - q\Phi')\psi' &= \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}f\right)\,(i\hbar\partial_t - q\Phi' - \frac{q}{c}\partial_t f)\psi \\
&= \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}f\right)\,(i\hbar\partial_t - q\Phi)\psi \\
(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}')\psi' &= \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}f\right)\,(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}'+\frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}f)\psi \\
&= \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}f\right)\,(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A})\psi.
\end{aligned}$$

3.2.4 Dipolwechselwirkung

In der Dipolnäherung (2.156) wird die Lichtwelle in der Umgebung des Atoms durch ein zeitabhängiges homogenes elektrisches Feld beschrieben:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = \Re\left(\boldsymbol{E}\right), \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\ \exp\left(-i\omega t\right). \tag{3.13}$$

Es ist möglich spezielle Eichungen der Potentiale zu wählen, in denen die Dipolwechselwirkung entweder durch ein Vektorpotential oder durch ein skalares Potential repräsentiert wird.

Eichung $\Phi = 0$: Wählt man die Eichung $\Phi = 0$, so lautet die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi \;=\; \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{\mathcal{A}}\right)^2\psi. \tag{3.14}$$

Für das elektrische Feld (3.13) ist das Vektorpotential durch

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \;=\; \Re(\boldsymbol{A}), \qquad \boldsymbol{A} \;=\; -i\frac{c}{\omega}\boldsymbol{E}. \tag{3.15}$$

definiert.

Anfangsbedingung: Wird das Feld zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet, so ändert sich das Vektorpotential i.a. unstetig von $\boldsymbol{\mathcal{A}}(0-) = 0$ nach $\boldsymbol{\mathcal{A}}(0+) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0$. Der Einschaltvorgang soll so kurz sein, daß es in dieser Zeit zu keiner beobachtbaren Veränderung des Atoms kommt. Man kann den Einschaltvorgang dann als reine Eichtransformation auffassen, die durch eine Funktion $f = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 \cdot \boldsymbol{x}$ erzeugt wird und bei der sich die Wellenfunktion gemäß (3.12) transformiert:

$$\psi(0+) \;=\; \exp\left(i\frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 \cdot \boldsymbol{x}\right)\psi(0-) \tag{3.16}$$

Die Anfangsbedingung für die Schrödingergleichung (3.14) ist die Wellenfunktion $\psi(0+)$. Diese unterscheidet sich im allgemeinen von der Wellenfunktion des ungestörten Atoms $\psi(0-)$ durch eine unitäre Transformation.

Eichung $\boldsymbol{\mathcal{A}} = 0$: In Abwesenheit eines Magnetfeldes kann man die Eichung $\boldsymbol{\mathcal{A}} = 0$ wählen und erhält die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi \;=\; \left[\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + q\Phi\right]\psi. \tag{3.17}$$

Die Wechselwirkungsenergie ergibt sich nach (3.2) zu

$$q\Phi = -q\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{3.18}$$

mit dem Dipolmoment $\boldsymbol{d} = q\boldsymbol{x}$.

Anfangsbedingung: Das Einschalten des Potentials kann analog zu (3.16) durch eine Eichtransformation mit der erzeugenden Funktion $f = -\Phi_0(t-t')/c$ beschrieben werden. Wird das Feld zur Zeit t' eingeschaltet, so bleibt die Wellenfunktion nach (3.12) ungeändert:

$$\psi(0+) \;=\; \psi(0-) \tag{3.19}$$

Als Anfangsbedingung für (3.17) kann daher die Wellenfunktion des ungestörten Atoms verwendet werden.

Bemerkung 3.1 (Dipolnäherung) *In der Dipolnäherung ist (3.14) äquivalent zu (3.17). Der in der linearen Störungsrechnung häufig verwendete Wechselwirkungsoperator $-\frac{q}{mc}\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot\boldsymbol{p}$ vernachlässigt dagegen den quadratischen Term $\propto \mathcal{A}^2$.*

Bemerkung 3.2 (Vertauschbarkeit von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{\mathcal{A}}$) *In Dipolnäherung ist $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ nur zeitabhängig. Daher gilt $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}=0$. Allgemeiner gilt dies auch für transversale Wellen: $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}=\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}=0$*

Übung 3.2 (Eichtransformation) *Geben Sie die Eichtransformation der Potentiale und die zugehörige unitäre Transformation der Wellenfunktion an, welche die Schrödingergleichung aus der Eichung (3.14) in die Eichung (3.17) überführt.*

3.2.5 Zeitentwicklung quantenmechanischer Zustände

Zustandsvektor: Die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschreibt den quantenmechanischen Zustand in der Ortsdarstellung. Nach den allgemeinen Prinzipien der Quantentheorie kann ein Zustand darstellungsunabhängig durch einen Zustandsvektor $\mid\psi>$ beschrieben werden. Im Schrödingerbild ist der Zustandsvektor zeitabhängig und genügt der Schrödingergleichung in der Form

$$i\hbar\partial_t \mid\psi> \;=\; H\mid\psi>. \tag{3.20}$$

Der Hamiltonoperator kann in zwei Anteile

$$\begin{aligned} H &= H_0+H_1, \\ H_0 &= \frac{p^2}{2m}+V_A(x), \\ H_1 &= -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

aufgeteilt werden. H_0 ist der zeitunabhängige Hamiltonoperator des ungestörten Atoms, H_1 beschreibt die Wechselwirkung mit dem zeitabhängigen elektromagnetischen Feld in der Dipolnäherung.

Stationäre Zustände: Die Eigenzustände zu H_0 bilden ein geeignetes Basissystem in dem der Zustand $\mid\psi>$ dargestellt werden kann. Sie werden im folgenden als bekannt und normiert vorausgesetzt:

$$H_0\mid n> \;=\; \hbar\omega_n\mid n> \qquad <m\mid n> \;=\; \delta_{mn}. \tag{3.22}$$

Ein stationärer Zustand des ungestörten Atoms besitzt damit die Form

$$\mid\psi_n> \;=\; \exp(-i\omega_n t)\mid n> \tag{3.23}$$

Ein allgemeiner Zustand kann nach der Basis (3.22) entwickelt werden,

$$\begin{aligned} \mid\psi> &= \sum_n \mid n><n\mid\psi> \\ &= \sum_n c_n\mid n>, \qquad c_n=<n\mid\psi> \\ &= \sum_n C_n\mid\psi_n>, \qquad C_n=\exp(i\omega_n t)c_n. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die Zeitabhängigkeit des Zustandsvektors wird jetzt durch die der Entwicklungskoeffizienten $c_n = c_n(t)$ bzw. C_n ausgedrückt. Die Entwicklungskoffizienten können in der folgenden Weise interpretiert werden: Für das ungestörte Atom ist C_n zeitunabhängig und $\mid C_n \mid^2 = \mid c_n \mid^2$ gibt eine zeitunabhängige Besetzungswahrscheinlichkeit des n-ten Energieniveaus im Zustand $\mid \psi >$ an. Unter dem Einfluß des äußeren Feldes werden die Koeffizienten C_n i.a. zeitabhängig, d.h. es werden Übergänge zwischen stationären Energieniveaus möglich.

Wechselwirkungsbild: Eine etwas einfachere Form der Schrödingergleichung erhält man im Wechselwirkungsbild. Das Wechselwirkungsbild wird durch die unitäre Transformation

$$\begin{aligned} \mid \psi_I > &= \exp(iH_0 t/\hbar) \mid \psi > \\ &= \sum_n c_n \exp(i\omega_n t) \mid n > \quad = \quad \sum_n C_n \mid n > \end{aligned}$$

definiert. Man beachte, daß die Entwicklungskoeffizienten im Schrödingerbild mit c_n, im Wechselwirkungsbild mit C_n bezeichnet werden. Im Wechselwirkungsbild wird die Zeitabhängigkeit des Zustandes nur durch die Wechselwirkung bestimmt. Die Schrödingergleichung für $\mid \psi_I >$ lautet

$$i\hbar \partial_t \mid \psi_I > \quad = \quad H_{1I} \mid \psi_I >, \tag{3.25}$$

mit dem Wechselwirkungsoperator

$$H_{1I} \quad = \quad \exp(iH_0 t/\hbar) H_1 \exp(-iH_0 t/\hbar).$$

3.3 Nichtresonante Anregungen

Häufig kann die Wechselwirkung eines atomaren Elektrons mit der Lichtwelle als kleine Störung betrachtet werden, deren Wirkung näherungsweise durch zeitabhängige Störungsrechnung berechnet werden kann. Ein wichtiges Ergebnis der linearen Störungsrechnung ist die im folgenden dargestellte quantenmechanische Begründung des klassischen Lorentzmodells für die Polarisierbarkeit von Atomen (Kramers und Heisenberg , 1925).

Die Gültigkeit der Störungsrechnung kann jedoch im Bereich von Resonanzen stark eingeschränkt sein, d.h. sie gilt dort nur für kurze Zeiten nach dem Einschalten des Feldes. Die Behandlung resonanter Übergänge mit Sättigung bzw. Dämpfung erfolgt erst in den nachfolgenden Kapiteln.

3.3.1 Störungsrechnung

Entwickelt man den Zustandsvektor nach Potenzen der Störung,

$$| \psi > \;=\; | \psi_0 > + | \psi_1 > + \cdots \tag{3.26}$$

so erhält man in linearer Ordnung (Index 1) aus (3.20)

$$i\hbar\partial_t \mid \psi_1 > \;=\; H_0 \mid \psi_1 > + H_1 \mid \psi_0 > . \tag{3.27}$$

Für $\mid \psi_0 >$ wird nun der stationäre Zustand (3.23) angenommen, für $\mid \psi_1 >$ die Entwicklung (3.24) eingesetzt. Multipliziert man (3.27) von links mit $< m \mid$ so folgt

$$\dot{C}_m \;=\; \frac{1}{i\hbar} < m \mid H_1 \mid n > \exp\left[-i(\omega_n - \omega_m)t\right] . \tag{3.28}$$

Diese Gleichung beschreibt die Zeitentwicklung der Entwicklungskoeffizienten im Wechselwirkungsbild (3.25). Ersetzt man H_1 durch den Dipolwechselwirkungsoperator (3.21) mit dem elektrischen Feld aus (3.13) so folgt

$$\dot{C}_m \;=\; \frac{-1}{2i\hbar}\boldsymbol{d}_{mn} \cdot \Big(\boldsymbol{E}_0 \exp\left[-i(\omega_{nm} + \omega)t\right] + \boldsymbol{E}_0^* \exp\left[-i(\omega_{nm} - \omega)t\right]\Big), \tag{3.29}$$

$$\omega_{nm} \;=\; \omega_n - \omega_m, \qquad \boldsymbol{d}_{mn} \;=\; < m \mid \boldsymbol{d} \mid n > . \tag{3.30}$$

Der eingeschwungene Zustand wird durch diejenige Lösung von (3.29) beschrieben, welche proportional ist zum anregenden Feld,

$$C_m \;=\; -\frac{1}{2\hbar}\boldsymbol{d}_{mn} \cdot \Big(\frac{\boldsymbol{E}}{\omega_{nm} + \omega} + \frac{\boldsymbol{E}^*}{\omega_{nm} - \omega}\Big) \exp\left(-i\omega_{nm}t\right) . \tag{3.31}$$

3.3.2 Dipolmoment

Statisches Dipolmoment: Im stationären Zustand (3.23) ist der Erwartungswert des Dipolmomentes

$$< \psi_n \mid \boldsymbol{d} \mid \psi_n > = q < n \mid \boldsymbol{x} \mid n > \tag{3.32}$$

zeitunabhängig und wird daher als statisches Dipolmoment bezeichnet. Wegen der ungeraden Parität des Dipoloperators verschwindet das statische Dipolmoment für Zustände mit definierter (gerader oder ungerader) Parität. Im folgenden wird immer angenommen daß Inversionssymmetrie vorliegt und damit kein statisches Dipolmoment existiert.

Zeitabhängiges Dipolmoment: In einer Superposition von Zuständen kann ein zeitabhängiges Dipolmoment auftreten

$$\begin{aligned} \mid \psi > &= C_1 \exp(-i\omega_1 t) \mid 1 > + C_2 \exp(-i\omega_2 t) \mid 2 > \\ < \psi \mid \boldsymbol{d} \mid \psi > &= C_1^* C_2 < 1 \mid \boldsymbol{d} \mid 2 > \exp(-i\omega_{21} t) \; + c.c., \end{aligned} \tag{3.33}$$

welches mit der Übergangsfrequenz ω_{21} oszilliert. Durch die Lichtwelle wird das Atom kohärent angeregt und damit ein schwingendes Dipolmoment induziert.

Auswahlregeln: Die Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge zwischen stationären Zuständen $\psi_n(r, \Theta, \Phi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\Theta, \Phi)$ sind

$$\Delta l = \pm 1, \qquad \Delta m = -1, 0, +1. \tag{3.34}$$

Induziertes Diplomoment: Das induzierte Dipolmoment in Richtung des elektrischen Feldes $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}$ ergibt sich mit (3.24), (3.26) zu

$$\begin{aligned} < d > &= < \psi | \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e} \mid \psi > \\ &= < \psi_0 \mid \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e} \mid \psi_1 > + c.c. \\ &= \sum_m < n \mid \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e} \mid m > \exp(i\omega_{nm} t) C_m + c.c. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Zur Berechnung der durch die Lichtwelle erzwungenen Schwingung kann man (3.31) verwenden und erhält damit

$$\begin{aligned} < d > &= \sum_m -\frac{1}{2\hbar} \mid \boldsymbol{d}_{nm} \cdot \boldsymbol{e} \mid^2 \left(\frac{E}{\omega_{nm} + \omega} + \frac{E^*}{\omega_{nm} - \omega} \right) + c.c. \\ &= \sum_m -\frac{1}{2\hbar} \mid \boldsymbol{d}_{nm} \cdot \boldsymbol{e} \mid^2 \frac{\omega_{nm}(E + E^*) - \omega(E - E^*)}{\omega_{nm}^2 - \omega^2} + c.c. \\ &= \left(\sum_m -\frac{1}{\hbar} \mid \boldsymbol{d}_{nm} \cdot \boldsymbol{e} \mid^2 \frac{2\omega_{nm}}{\omega_{nm}^2 - \omega^2} \right) \mathcal{E} \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.3.3 Oszillatorstärken

Die Polarisierbarkeit (2.160) kann in Analogie zum Lorentzmodell in der Form

$$\alpha = \frac{q^2}{m} \sum_j \frac{f_{nj}}{\omega_{nj}^2 - \omega^2} \tag{3.37}$$

geschrieben werden. Durch Vergleich mit (3.36) erhält man für die Oszillatorstärke des Übergangs $n \to j$ den Ausdruck

$$f_{nj} = \frac{2m}{\hbar} \mid \boldsymbol{x}_{nj} \cdot \boldsymbol{e} \mid^2 \omega_{jn}. \tag{3.38}$$

Die Oszillatorstärken könnnen sowohl positive (Absorption: $j > n$) alsauch negative (Emission: $j < n$) Werte annehmen. Insbesondere gilt wegen $\omega_{jn} = -\omega_{nj}$ auch $f_{nj} = -f_{jn}$.

Richtungsmittelung: In einem isotropen Medium bzw in einem isotropen Strahlungsfeld sind alle Richtungen zwischen dem Dipolmoment und der Feldrichtung gleich wahrscheinlich. Die Mittelung der Komponente des Dipolmomentes in Feldrichtung über alle Raumwinkel ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int d\Omega \mid \boldsymbol{x}_{nj}\cdot\boldsymbol{e} \mid^2 &= \frac{1}{2}\int_0^\pi d\Theta \sin(\Theta)\cos^2(\Theta) \mid x_{nj} \mid^2 \\ &= \frac{1}{2} \mid x_{nj} \mid^2 \frac{1}{3}\cos^3(\Theta) \mid_\pi^0 \\ &= \frac{1}{3} \mid x_{nj} \mid^2 . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Im isotropen Fall kann die Beziehung (3.39) zur Berechnung der Oszillatorstärken (3.38) verwendet werden.

Summenregel: Im Grenzfall hoher Frequenzen ($\omega \gg |\omega_{nj}|$) sollte die Polarisierbarkeit in den klassischen Ausdruck $-q^2/m\omega^2$ für freie Elektronen übergehen. Dies erfordert, daß

$$\sum_j f_{nj} = 1. \tag{3.40}$$

Diese Beziehung ist tatsächlich exakt erfüllt. Sie wird als *Thomas-Reiche-Kuhnsche Summenregel* oder als f-Summenregel bezeichnet. Bei der Anwendung der Summenregel muß man beachten, daß *alle* möglichen Übergänge in der Summe berücksichtigt werden müssen. Dies schließt Übergänge ins Kontinuum mit ein.

Beispiel 3.1 (Oszillatorstärken für H-Atom) *Betrachtet man ein Wasserstoffatom im 1s-Zustand, so besitzt der* $1s \to 2p$ *Übergang die Oszillatorstärke 0.416. Die Summe der Oszillatorstärken für die Übergänge von 1s in gebundene p-Zustände ist nur 0.565. Kontinuumsübergänge tragen also* $1.0 - 0.565 = 0.435$ *zur Summe (3.40) bei.*

Beweis der Summenregel: Zum Beweis der Summenregel benötigt man die Beziehungen

$$\begin{aligned} [z, p_z] &= i\hbar \ , \\ [z, H_0] &= \frac{1}{2m}\left[z, p_z^2\right] = \frac{1}{m}p_z\,[z, p_z] = \frac{i\hbar}{m}p_z \ , \\ \omega_{jn} z_{jn} &= \frac{1}{\hbar} < j \mid [H_0, z] \mid n > = -\frac{i}{m} < j \mid p_z \mid n > \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung sei das Feld in z-Richtung orientiert. Damit läßt sich die Reihe (3.40) auf folgende Weise aufsummieren:

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{2m}{\hbar}\omega_{jn}z_{jn}z_{nj} &= \sum_j \frac{2m}{\hbar}\frac{1}{2}\left(z_{nj}(\omega_{jn}z_{jn}) - (\omega_{nj}z_{nj})z_{jn}\right) \\ &= \sum_j \frac{2m}{\hbar}\frac{1}{2}\frac{-i}{m}\Big(< n \mid z \mid j >< j \mid p_z \mid n > - \\ &\qquad\qquad < n \mid p_z \mid j >< j \mid z \mid n > \Big) \\ &= \frac{-i}{\hbar} < n \mid [z, p_z] \mid n > \;\; = \;\; 1. \end{aligned} \tag{3.41}$$

3.4 Resonante Anregungen

3.4.1 2-Niveau-Systeme

Im Wechselwirkungsbild (3.25) erhält man für die Entwicklungskoeffizienten C_n das Gleichungssystem

$$\dot{C}_n \;\; = \;\; \frac{1}{i\hbar}\sum_m < n \mid H_1 \mid m > \exp\left[i(\omega_n - \omega_m)t\right]C_m \; . \tag{3.42}$$

Rotating wave approximation: Bei der Störungsrechnung (3.28) wurden die Übergänge aus einem Niveau mit einer konstanten Anfangsbesetzung in alle anderen Niveaus betrachtet. Im Resonanzfall finden die Übergänge hauptsächlich zwischen 2-Niveaus statt, deren Übergangsfrequenz mit der Lichtfrequenz übereinstimmt. Dabei ist zu erwarten, daß die Besetzungen der beiden Niveaus stark von den Anfangsbesetzung abweichen können. Eine sehr gute Beschreibung dieser Verhältnisse gibt die *"rotating wave approximation"*, bei der schnellveränderliche Terme gegenüber langsamveränderlichen Termen in den Entwicklungsgleichungen (3.42) vernachlässigt werden. Die Koeffizienten des Gleichungssystems (3.42) besitzen die Zeitabhängigkeit

$$\propto \quad \exp\left[i(\omega_{nm} \mp \omega)t\right]$$

Da die Lösung $C_m(t)$ als langsam veränderlich angenommen wird, ergeben sich für nichtresonante Terme verschwindent kleine Beiträge ($\omega_{nm} \approx 10^{15}$):

$$\int dt \exp\left[i(\omega_{nm} \mp \omega)t\right]C_m \;\; \approx \;\; \frac{1}{i(\omega_{nm} \mp \omega)} \exp\left[i(\omega_{nm} \mp \omega)t\right]C_m. \tag{3.43}$$

Beschränkt man sich auf die resonanten Terme mit $\omega_{21} \approx \omega$ so ergibt sich analog zur Herleitung (3.29) ein einfaches Gleichungssystem für die Koeffizienten C_1 und C_2

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= \frac{i}{2}\zeta^* \exp(-i\Delta t) C_2 \ , \\
\dot{C}_2 &= \frac{i}{2}\zeta \exp(i\Delta t) C_1 \ , \\
\Delta &= \omega_{21} - \omega \ , \qquad \zeta = \boldsymbol{d}_{21} \cdot \boldsymbol{E}_0/\hbar = \varrho \exp(i\phi).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Diese Gleichungen lassen sich exakt lösen. Zuerst werden sie aber nochmals im Grenzfall kleiner Störungen betrachtet, um die Unterschiede zur exakten Behandlung deutlich zu machen.

Beispiel 3.2 (Rotating wave approximation)

$$\begin{aligned}
\dot{C} &= -\gamma[1 + \cos(\omega t)]C \\
C(t) &= C(0) \ \exp\left[-\gamma t + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right] \\
C(t) &\approx C(0) \ \exp(-\gamma t) \ , \qquad \omega \gg \gamma
\end{aligned}$$

Übung 3.3 (Unitarität) *Zeigen Sie, daß die Gleichungen (3.44) die Wahrscheinlichkeit erhalten, das Elektron im Niveau 1 oder im Niveau 2 anzutreffen:* $|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 = const.$

3.4.2 Übergangsraten

Wendet man die Störungsrechnung auf das vereinfachte Gleichungssystem (3.44) mit den Anfangsbedingungen $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$ an, so folgt

$$\begin{aligned}
\dot{C}_2 &= \frac{i}{2}\zeta \exp(i\Delta t) \ , \\
C_2 &= \frac{\zeta}{2\Delta}[\exp(i\Delta t) - 1] = \frac{i\zeta}{\Delta}\exp(i\Delta t/2)\sin(\Delta t/2) \ , \\
|\ C_2\ |^2 &= \frac{\varrho^2}{4}\frac{\sin^2(\Delta t/2)}{(\Delta/2)^2} \ , \qquad |\ C_1\ |^2 = 1 - |\ C_2\ |^2 \ .
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Zeitabhängigkeit: Die Besetzungswahrscheinlichkeit $|\ C_2\ |^2$ ändert sich periodisch mit der Frequenz Δ. Die Amplitude ist proportional zu $1/\Delta^2$. Für lange Zeiten ist die Störungsrechnung also nur anwendbar, wenn die Verstimmung genügend groß und damit die Besetzung des oberen Niveaus hinreichend klein ist. Im Resonanzfall, $\Delta \to 0$, wächst die Besetzung mit der Zeitkonstante ϱ^{-1} unbegrenzt an:

$$|\ C_2\ |^2 = \frac{\varrho^2}{4}t^2. \tag{3.46}$$

Die Sättigung des resonanten Überganges wird durch die (lineare) Störungstheorie nicht beschrieben. Der Gültigkeitsbereich der Störungsrechnung ergibt sich daraus zu

- Nichtresonant: $\varrho \ll |\Delta|$
- Resonant: $\varrho t/2 \ll 1$

Frequenzabhängigkeit: Betrachtet man $\mid C_2 \mid^2$ als Funktion der Verstimmung Δ, so ergibt sich ein Maximum $\propto t^2$ für $\Delta = 0$ und eine stark gedämpfte Schwingung für $|\Delta| > 0$ mit einer Periode $\propto t^{-1}$.

Übergangsrate für breitbandige Strahlung: Die Ergebnisse für eine monochromatische ebene Welle lassen sich einfach für den Fall eines isotropen breitbandigen Strahlungsfeldes verallgemeinern, indem man die folgenden Substitutionen vornimmt:

$$\begin{aligned}
\frac{|E|^2}{8\pi} &\longrightarrow \rho(\nu)d\nu \\
\varrho^2 &= |\boldsymbol{d}_{21}\cdot\boldsymbol{e}|^2|E|^2/\hbar^2 \longrightarrow \frac{|d_{21}|^2}{3\hbar^2}8\pi\rho(\nu)d\nu \\
\mid C_2 \mid^2 &\longrightarrow \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}\int d\nu\rho(\nu)\frac{\sin^2(\Delta t/2)}{(\Delta/2)^2}; \quad \Delta = \omega_{21}-\omega \\
&= \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}\rho(\nu_{21})t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad x=\frac{-\Delta t}{2}, \quad dx=\pi t d\nu \\
&= \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}\rho(\nu_{21})t
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Als *Übergangsrate* für den Übergang $1 \to 2$ ergibt sich damit

$$\frac{d \mid C_2 \mid^2}{dt} = \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}\rho(\nu_{21}) \tag{3.48}$$

Bemerkung 3.3 *Für monochromatische Strahlung ist die Übergangsrate zeitabhängig und verschwindet für* $t \to 0$.

3.4.3 Rabi-Oszillationen

Die 2-Niveau-Gleichungen (3.44) sollen nun exakt gelöst werden.

Allgemeine Lösung: Mit der Variablensubstitution

$$C_{1,2} = \exp(\mp i\Delta t/2)D_{1,2}, \qquad \dot{C}_{1,2} = \exp(\mp i\Delta t/2)\left(\dot{D}_{1,2} \mp \frac{i\Delta}{2}D_{1,2}\right),$$

erhält man aus (3.44) ein Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{D}_1 = \frac{i}{2}\left(\Delta D_1 + \zeta^* D_2\right), \qquad \dot{D}_2 = \frac{i}{2}\left(-\Delta D_2 + \zeta D_1\right).$$

Der Exponentialansatz $D_{1,2} \propto \exp\left(i\lambda t/2\right)$ führt auf ein algebraisches Gleichungssystem

$$(\lambda - \Delta)D_1 - \zeta^* D_2 = 0, \qquad -\zeta D_1 + (\lambda + \Delta)D_2 = 0,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm\Omega, \qquad \Omega = \sqrt{\Delta^2 + \varrho^2}, \\ D_1 &= \frac{1}{\zeta}\left[(\Delta+\Omega)\gamma_1 \exp\left(i\Omega t/2\right) + (\Delta-\Omega)\gamma_2 \exp\left(-i\Omega t/2\right)\right], \\ D_2 &= \gamma_1 \exp\left(i\Omega t/2\right) + \gamma_2 \exp\left(-i\Omega t/2\right), \end{aligned} \tag{3.49}$$

Die konstanten Koeffizienten $\gamma_{1,2}$ können durch Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Anfangszustand $|1>$ **:** Befindet sich das Atom zur Zeit $t = 0$ im unteren Niveau,

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \frac{1}{\zeta}\left[(\Delta+\Omega)\gamma_1 + (\Delta-\Omega)\gamma_2\right] = 1 \\ C_2(0) &= \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \end{aligned} \tag{3.50}$$

so lautet die Lösung

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{\zeta}{2\Omega}, \tag{3.51}$$

$$C_1 = \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]\exp\left(-i\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{3.52}$$

$$C_2 = i\frac{\zeta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\exp\left(i\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{3.53}$$

$$|C_2|^2 = 1 - |C_1|^2 = \frac{\varrho^2}{4}\frac{\sin^2\left(\Omega t/2\right)}{(\Omega/2)^2}. \tag{3.54}$$

Anfangszustand $|2>$ **:** Ist umgekehrt, das Atom zur Zeit $t = 0$ im oberen Niveau,

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \frac{1}{\zeta}\left[(\Delta+\Omega)\gamma_1 + (\Delta-\Omega)\gamma_2\right] = 0 \\ C_2(0) &= \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \end{aligned} \tag{3.55}$$

so lautet die Lösung

$$\gamma_1 = \frac{\Omega-\Delta}{2\Omega}, \qquad \gamma_2 = \frac{\Omega+\Delta}{2\Omega}, \tag{3.56}$$

$$C_1 = i\frac{\zeta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{3.57}$$

$$C_2 = \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]\exp\left(i\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{3.58}$$

$$|C_1|^2 = 1-|C_1|^2 = \frac{\varrho^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega t/2). \tag{3.59}$$

Übergangswahrscheinlichkeit: Die Besetzungswahrscheinlichkeit des zu Anfang unbesetzten Niveaus gibt die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem besetzten in das unbesetzte Niveau an. Sie kann maximal den Wert

$$|C_2|^2_{max} = \frac{\varrho^2}{\Omega^2} = \frac{\varrho^2}{\Delta^2+\varrho^2} \leq 1. \tag{3.60}$$

annehmen. Der Wert 1 wird nur im Resonanzfall, $\Delta = 0$, erreicht. Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung

$$\sin^2(\Omega t/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\Omega t)) \tag{3.61}$$

folgt, daß die Übergangswahrscheinlichkeit mit der Frequenz Ω oszilliert. Für kleine Intensitäten der Lichtwelle ($|\Delta| \gg \varrho$) kann man Ω durch Δ ersetzen. Dies ist der Gültigkeitsbereich der Näherungslösung (3.45) der linearen Störungsrechnung. Im Resonanzfall ($|\Delta| \ll \varrho$) kann Ω durch ϱ ersetzt werden. Man spricht dann von Rabi-Oszillationen der Besetzung mit der *Rabi-Frequenz*

$$\varrho = |\boldsymbol{d}_{21}\cdot\boldsymbol{e}|\,\mathcal{E}_0/\hbar \tag{3.62}$$

Dipolmoment: Während die Besetzungswahrscheinlichkeiten nur vom Betrag der Entwicklungskoeffizienten abhängen, ist der Erwartungswert des Dipolmomentes zusätzlich von der Phasendifferenz der Koeffizienten abhängig. Im Zustand

$$|\psi> = C_1\exp(-i\omega_1 t)\,|1> + C_2\exp(-i\omega_2 t)\,|2> \tag{3.63}$$

ist der Erwartungswert des Dipolmoments

$$<d> = <\psi|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}|\psi> = \boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}\,\exp(-i\omega_{21}t)\,C_1^*C_2 + c.c.\,. \tag{3.64}$$

Setzt man die Lösung (3.51) ein, so folgt

$$<d> = \frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{\hbar\Omega}\left[\frac{\Delta}{\Omega}\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]E + c.c. \tag{3.65}$$

Mit (3.61) und

$$\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\Omega t\right), \tag{3.66}$$

ergibt sich daraus

$$< d > = \frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{2\hbar\Omega}\left[\frac{\Delta}{\Omega}(1-\cos\left(\Omega t\right))+i\sin\left(\Omega t\right)\right]E + c.c.\ .$$

Zum Vergleich mit der Störungsrechnung ist es zweckmäßig, das Dipolmoment in einen "erzwungenen" und einen "freien" Anteil aufzuteilen:

$$\begin{aligned} < d > &= < d >_e + < d >_f, \qquad (3.67)\\ < d >_e &= \frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{\hbar\Delta}\,\frac{\Delta^2}{\Omega^2}\mathcal{E}_0\cos\left(\omega t\right),\\ < d >_f &= -\frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{\hbar\Delta}\,\left[\frac{\Delta^2}{\Omega^2}\cos\left(\Omega t\right)\cos\left(\omega t\right)+\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\Omega t\right)\sin\left(\omega t\right)\right]\mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Im Grenzfall kleiner Felder ($\Omega \to |\Delta|$) stimmt der erzwungene Anteil mit dem Ergebnis (3.36) der Störungsrechnung überein, wenn man sich dort auf den resonanten Übergang von $n = 1$ nach $m = 2$ beschränkt und die Näherung $\omega_{21}^2 - \omega^2 \approx -2\omega_{12}\Delta$ verwendet. Der freie Anteil besitzt für kleine Felder die Form

$$\begin{aligned} < d >_f &= \frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{2\hbar\Delta}\left[-\frac{\Delta^2}{\Omega^2}\cos\left(\Omega t\right)+i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\Omega t\right)\right]\mathcal{E}_0\exp\left(-i\omega t\right)+c.c.\\ &\to -\frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{2\hbar\Delta}\left[\cos\left(\Delta t\right)-i\sin\left(\Delta t\right)\right]\mathcal{E}_0\exp\left(-i\omega t\right)+c.c.\\ &= -\frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{2\hbar\Delta}\mathcal{E}_0\exp\left(-i\omega_{21}t\right)+c.c.. \end{aligned}$$

Dies ist eine freie Schwingung des Atoms mit der atomaren Übergangsfrequenz Der freie Anteil wurde bei der Berechnung von (3.36) nicht berücksichtigt, da dort nur die Lösung für die erzwungene Schwingung des Dipolmomentes mit der Lichtfrequenz betrachtet wurde. Für Zeiten die groß sind gegenüber der Lebensdauer des angeregten Niveaus kann man sich auf den erzwungenen Anteil beschränken.

Im Resonanzfall ($\Delta = 0, \Omega = |\varrho|$) erhält man aus (3.67) die Lösung

$$< d > = -\frac{|\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{e}|^2}{\hbar\varrho}\mathcal{E}_0\sin\left(\varrho t\right)\sin\omega t. \tag{3.68}$$

Die Schwingung mit der Lichtfrequenz ist hier mit der Rabi-Frequenz moduliert. Das Dipolmoment verschwindet zu den Zeitpunkten, in denen sich das Elektron in genau einem stationären Niveau befindet ($t = n\pi/\varrho$). Der Maximalwert wird zu den Zeitpunkten erreicht, in denen eine Gleichbesetzung der Niveaus vorliegt ($t = (n\pi + \pi/2)/\varrho$).

3.5 Strahlung im thermischen Gleichgewicht

Elektromagnetische Strahlung im thermischen Gleichgewicht wird als *Wärmestrahlung* oder thermische Strahlung bezeichnet. Historisch gesehen war das Problem des Strahlungsgleichgewichts der Ausgangspunkt für die Plancksche Quantenhypothese und für die Einsteinsche Theorie der Emission und Absorption. In diesem Abschnitt wird zuerst die Wärmestrahlung und ihre Wechselwirkung mit Materie und danach die quantenmechanische Definition der Einsteinschen Koeffizienten dargestellt.

3.5.1 Bose-Einstein-Statistik

Wärmestrahlung kann als ideales Bosegas nach den Gesetzen der statistischen Physik behandelt werden. Die Statistik von Boseteilchen wurde von Bose (1924) für Lichtquanten eingeführt und von Einstein (1924) verallgemeinert.

Kanonische Verteilung: Betrachtet man die Photonen einer bestimmten Frequenz, Ausbreitungsrichtung und Polarisation, so sind die möglichen Quantenzustände durch Angabe der Photonenzahl n festgelegt. Ein n-Photonenzustand besitzt die Energie $\epsilon_n = nh\nu$ und ist in einer kanonischen Gesamtheit mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_n \;=\; \frac{1}{Z}\exp\left(-\beta\epsilon_n\right) \;=\; \frac{q^n}{Z}, \qquad \beta \;=\; 1/(k_B T), \qquad q = \exp\left(-\beta h\nu\right), \tag{3.69}$$

besetzt. Die Zustandssumme Z kann mit Hilfe der geometrischen Reihe einfach aufsummiert werden,

$$Z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} q^n \;=\; \frac{1}{1-q}. \tag{3.70}$$

Mittlere Photonenzahl: Die mittlere Photonenzahl ist

$$\overline{n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \;=\; \frac{q\partial_q Z}{Z} \;=\; \frac{qZ^2}{Z} \;=\; qZ \;=\; \frac{1}{\exp\left(\beta h\nu\right)-1}. \tag{3.71}$$

Als Funktion der Frequenz treten bei kleinen Frequenzen hohe bei großen Frequenzen nur sehr kleine mittlere Photonenzahlen auf.

Beispiel 3.3 (Mittlere Photonenzahl) *Im Maximum der Planckschen Verteilung für die spektrale Energiedichte der Wärmestrahlung ist* $h\nu/k_B T \approx 2.82$. *Die mittlere Photonenzahl bei dieser Frequenz ist klein:* $\overline{n} \approx 0.06$

Photonenzahlschwankungen: Zur Berechnung des mittleren Schwankungsquadrates der Photonenzahl ist es am einfachsten, zunächst den Mittelwert von $n(n-1)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\overline{n(n-1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P_n \\ &= \frac{q^2\partial_q^2 Z}{Z} = \frac{q^2\partial_q Z^2}{Z} = 2q^2\partial_q Z = 2(qZ)^2 = 2\overline{n}^2 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Damit folgt für das mittlere Schwankungsquadrat

$$(\Delta n)^2 = \overline{(n-\overline{n})^2} = \overline{n^2} - \overline{n}^2 = \overline{n(n-1)} + \overline{n} - \overline{n}^2 = \overline{n}^2 + \overline{n}. \tag{3.73}$$

Die relative Schwankung um den Mittelwert ist also immer größer 1:

$$\frac{\Delta n}{\overline{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\overline{n}}}. \tag{3.74}$$

Besetzungswahrscheinlichkeit als Funktion von $\overline{n}$: Der Parameter q der kanonischen Verteilung kann mit (3.71) durch die mittlere Photonenzahl ausgedrückt werden,

$$q = \frac{\overline{n}}{1+\overline{n}} \tag{3.75}$$

Damit kann (3.69) als Funktion der mittleren Besetzungszahl angegeben werden,

$$P_n = (1-q)q^n = \frac{1}{1+\overline{n}}\left(\frac{\overline{n}}{1+\overline{n}}\right)^n . \tag{3.76}$$

Die Verteilung besitzt ein Maximum bei $n = 0$, d.h. bei einer Energiemessung ist es am wahrscheinlichsten, kein Photon anzutreffen. Ein ausgeprägtes Maximum existiert allerdings nur bei kleinen $\overline{n}$. Für große mittlere Photonenzahlen ergibt sich wegen

$$\left(\frac{\overline{n}}{1+\overline{n}}\right)^n \approx 1 - \frac{n}{\overline{n}}, \qquad n \ll \overline{n}, \tag{3.77}$$

nahezu eine Gleichverteilung für die Besetzungszahlen, die klein sind gegenüber $\overline{n}$.

3.5.2 Plancksches Strahlungsgesetz

Das Plancksche Strahlungsgesetz beschreibt die spektrale Energiedichte $\rho(\nu)$ eines Strahlungsfeldes im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T. Die spektrale Energiedichte des Strahlungsfeldes ist

$$\rho(\nu) = \mathcal{N}(\nu)\overline{\epsilon}(\nu) \tag{3.78}$$

wobei

$$\mathcal{N}(\nu) = 8\pi\frac{\nu^2}{c^3} \tag{3.79}$$

die Anzahl der Moden pro Volumeneinheit und Frequenzintervall nach (2.105) und

$$\overline{\epsilon}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu P_n = h\nu\overline{n} \tag{3.80}$$

die mittlere Energie pro Mode darstellt. Das *Plancksche Strahlungsgesetz* lautet damit

$$\rho(\nu) = 8\pi\frac{h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{\exp(\beta h\nu)-1}. \tag{3.81}$$

bf Grenzfall kleiner Frequenzen: Für $h\nu \ll k_BT$ gilt das *Strahlungsgesetz von Rayleigh-Jeans*

$$\rho(\nu) = 8\pi\frac{\nu^2}{c^3}k_BT = \mathcal{N}(\nu)k_BT. \tag{3.82}$$

Es ist unabhängig von der Planckschen Konstante. Jede Mode besitzt, entsprechend dem Gleichverteilungssatz der klassischen Statistik, die mittlere Energie k_BT eines harmonischen Oszillators. Die über die Frequenz integrierte gesamte elektromagnetische Energiedichte ist jedoch divergent ("Ultraviolettkatastrophe" der klassischen Physik).

Grenzfall hoher Frequenzen: Für $h\nu \gg k_BT$ gilt die *Wiensche Strahlungsformel*

$$\rho(\nu) = 8\pi\frac{h\nu^3}{c^3}\exp(-\beta h\nu). \tag{3.83}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz: Die Plancksche Energieverteilung besitzt ein Maximum bei der Frequenz

$$h\nu_{max} = 2.82k_BT \tag{3.84}$$

Das Maximum verschiebt sich proportional zur Temperatur des Strahlers.

Spektrale Strahldichte: Eine Strahlungsquelle wird häufig durch ihre spektrale Strahldichte charakterisiert. Wegen der Isotropie der Wärmestrahlung gilt für die Strahldichte

$$L(\nu) \;=\; \frac{c\rho(\nu)}{4\pi} \;=\; 2\frac{h\nu^3}{c^2}\;\frac{1}{\exp(\beta h\nu)-1}. \tag{3.85}$$

Beispiel 3.4 (Strahldichte der Sonne)

$$\begin{array}{lcl} h\nu & : & 2.5\ eV \\ k_BT & : & 6000^0\ K \;\approx\; 20\times 300^0 K \;=\; 20\times\frac{1}{40}\ eV \;=\; 0.5eV \\ h\nu/k_BT & : & 5 \\ L & : & 1.5\times 10^{-12}\ \frac{W}{cm^2 str Hz} \end{array}$$

Spektrale Strahlungsleistung: Die spektrale Energiestromdichte, die von einem Flächenelement unter dem Winkel Θ zur Normalen ausgeht ist

$$L(\nu)\cos\Theta d\Omega \;=\; 2\pi L(\nu)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta. \tag{3.86}$$

Die in den Halbraum oberhalb des Flächenelementes abgestrahlte Intentität ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I(\nu) \;&=\; 2\pi L(\nu)\int_0^{\pi/2} d\Theta\sin\Theta\cos\Theta \;=\; 2\pi\frac{1}{2}\cos^2\Theta\Big|_{\pi/2}^{0} L(\nu) \\ &=\; \pi L(\nu). \end{aligned} \tag{3.87}$$

Gesamte Strahlungsleistung: Die gesamte von einem Flächenelement eines thermischen Strahlers ausgestrahlte Intensität ist

$$I_{ges} \;=\; \int_0^\infty d\nu I(\nu) \;=\; \pi\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\;\frac{2h}{c^2}\int_0^\infty dx\frac{x^3}{\exp x-1} \;=\; \sigma T^4 \tag{3.88}$$

wobei

$$\int_0^\infty dx\frac{x^3}{\exp x-1} \;=\; \frac{\pi^4}{15} \tag{3.89}$$

der Wert des bestimmten Integrals ist und

$$\sigma \;=\; \frac{2}{15}\frac{\pi^5 k_B^4}{h^3c^2} \;=\; 5.67\times 10^{-8}\frac{J}{m^2 sec K^4} \;=\; 5.67\times 10^{-12}\frac{W}{cm^2K^4} \tag{3.90}$$

die Stefan-Boltzmann Konstante bezeichnet.

3.5.3 Einsteinsche Ratengleichungen

Die Wechselwirkung des thermischen Strahlungsfeldes mit einzelnen Atomen kann man nach Einstein auf 3 elementare Prozesse zurückführen:

- *Spontane Emission*
- *Induzierte Emission*
- *Absorption*

Bei der spontanen Emission geht ein Atom spontan aus einem angeregten Zustand mit der Energie E_2 in einen tieferliegenden Zustand mit der Energie E_1 über, wobei ein Photon mit der Energie $h\nu_{21} = E_2 - E_1$ emittiert wird. Die Phase, Ausbreitungsrichtung und Polarisation des Photons sind dabei zufällig. Bei der induzierten Emission wird die Emission eines Photons durch eine einfallende Lichtwelle derselben Frequenz, Phase, Ausbreitungsrichtung und Polarisation ausgelöst. Dies ist der inverse Prozeß zur Absorption, bei der ein Photon der einfallenden Lichtwelle absorbiert wird (Abb.3.1) .

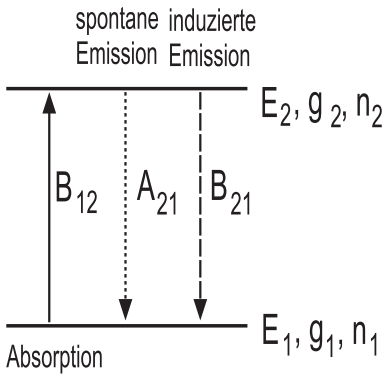

Abbildung 3.1: *Strahlungsübergänge zwischen zwei Energieniveaus E_1 und E_2 eines Atoms. Der Entartungsgrad der Niveaus sei g_1 bzw. g_2, die Teilchendichte der Atome in diesen Zuständen n_1 bzw. n_2.*

Einsteinsche Koeffizienten: Ein Gas mit N_1 Atomen im Zustand mit der Energie E_1 und N_2 Atomen im Zustand mit der Energie E_2 befinde sich über eine Zeit dt in Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld der Energiedichte $\rho(\nu)$. Die Änderung der Besetzung durch Übergänge vom Zustand 1 in den Zustand 2 unter Absorption eines Photons, bzw. durch Übergänge vom Zustand 2 in den Zustand 1 unter Emission eines Photons kann phänomenologisch durch den Ansatz

$$dN_2 = -dN_1 = B_{12}\ \rho(\nu_{21})\ N_1\ dt, \qquad (1 \to 2) \tag{3.91}$$

$$dN_1 = -dN_2 = (A_{21}\ N_2 + B_{21}\ \rho(\nu_{21})\ N_2)dt, \qquad (2 \to 1) \tag{3.92}$$

beschrieben werden, wobei A_{21}, B_{21}, B_{12} als *Einsteinsche Koeffizienten* bezeichnet werden. Der A-Koeffizient beschreibt die spontane Emission, die B-Koeffizienten die induzierte Emission und die Absorption. Die Reihenfolge der Indizees legt die Richtung des Überganges fest. Faßt man Emissions- und Absorptionsprozesse zusammen, so erhält man die *Ratengleichungen*

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = A_{21}N_2 + (B_{21}N_2 - B_{12}N_1)\rho(\nu_{21}). \tag{3.93}$$

Thermisches Gleichgewicht: Im thermischen Gleichgewicht müssen die Besetzungszahlen der Atome der Boltzmann-Statistik

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp\left[-\beta(E_2 - E_1)\right] = \frac{g_2}{g_1}\exp\left(-\beta h\nu\right) \tag{3.94}$$

genügen, wobei $g_{1,2}$ den Entartungsgrad der Energieniveaus $N_{1,2}$ bezeichnet. Aus (3.94), (3.93) folgt

$$A_{21} + \rho\left(B_{21} - \frac{g_1}{g_2}\exp\left(\beta h\nu\right)B_{12}\right) = 0, \tag{3.95}$$

und daraus der Ausdruck

$$\rho = \frac{g_2 A_{21}}{g_1\exp\left(\beta h\nu\right)B_{12} - g_2 B_{21}}, \tag{3.96}$$

für die Energiedichte der Wärmestrahlung. Damit (3.96) mit der Planckschen Strahlungsformel übereinstimmt, müssen die Einsteinschen Koeffizienten bestimmten Bedingungen genügen. Im Grenzfall $T \to \infty$ erhält man aus (3.96) und (3.82)

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}(1 + \beta h\nu) - g_2 B_{21}} = 8\pi\frac{\nu^2}{c^3}k_B T. \tag{3.97}$$

Diese Beziehung kann für verschiedene Temperaturen nur dann erfüllt sein, wenn

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \qquad A_{21} = 8\pi\frac{h\nu^3}{c^3}B_{21}, \tag{3.98}$$

gilt. Von den 3 Einsteinschen Koeffizienten ist nur einer unabhängig, die beiden anderen werden durch die Relationen (3.98) bestimmt. Nach der ersten Beziehung sind die Übergangsraten für Absorption und induzierte Emission jeweils multipliziert mit der Vielfachheit der Ausgangszustände gleich. Die zweite Beziehung bestimmt das Verhältnis der spontanen zur induzierten Emissionsrate. Unter Verwendung der Planckschen Strahlungsformel läßt sich dieses Verhältnis in der anschaulichen Weise

$$A_{21}\overline{n} = B_{21}\rho \tag{3.99}$$

angeben. Die Übergangsrate für induzierte Emission ist gleich der Übergangsrate für spontane Emission multipliziert mit der mittleren Besetzungszahl der Mode. Dieser Zusammenhang zwischen induzierter und spontaner Emission ist allgemein gültig, obwohl er hier nur für das thermische Gleichgewicht abgeleitet wurde.

Nichtgleichgewicht: Die Ratengleichungen können auch auf Nichtgleichgewichtszustände angewandt werden, solange die Bandbreite der Strahlung groß ist gegenüber der Linienbreite des atomaren Übergangs. Als Beispiel wird im folgenden die Änderung der Besetzungszahlen eines Mediums in einem vorgegebenen konstanten Strahlungsfeld betrachtet. Hierbei ist angenommen, daß die Dichte der Atome so gering ist, daß es zu keiner merklichen Änderung der Strahlungsintensität kommt. Wegen der Erhaltung der Teilchenzahl $N = N_1 + N_2$ kann man (3.93) durch Elimination von N_1 in der Form

$$\frac{dN_2}{dt} = -(A + 2\rho B)N_2 + B\rho N \tag{3.100}$$

schreiben, wobei keine Entartung berücksichtigt wurde und die Indizees der Einsteinschen Koeffizienten weggelassen wurden. Setzt man

$$N_2 = y + \frac{B\rho N}{A + 2\rho B} \tag{3.101}$$

in (3.100) ein, so ergibt sich eine homogene Differentialgleichung

$$\frac{y}{dt} = -(A + 2\rho B)y \tag{3.102}$$

mit der Lösung

$$y(t) = y(0)\exp\left[-(A + 2\rho B)t\right]. \tag{3.103}$$

Durch Rücksubstitution findet man für N_2 das Ergebnis

$$N_2(t) = \left(N_2(0) - \frac{B\rho N}{A + 2\rho B}\right)\exp\left[-(A + 2\rho B)t\right] + \frac{B\rho N}{A + 2\rho B} \tag{3.104}$$

Unabhängig vom Anfangswert nähert sich die Besetzung asymptotisch einem stationären Gleichgewichtswert an. Der Gleichgewichtswert ist maximal $N/2$, d.h. es läßt sich durch optisches Pumpen des Überganges grundsätzlich keine Inversion erzielen. Man beachte auch den qualitativen Unterschied zwischen der Lösung der Ratengleichungen (Übergang ins Gleichgewicht) und der Lösung der Schrödingergleichung (Rabi-Oszillationen).

Spezialfälle:

Spontane Emission: $\rho = 0, \qquad N_2 = N_2(0)\exp(-At)$

Geringe Intensität: $2B\rho \ll A, \qquad N_2 \to \frac{B\rho}{A}N \ll N$

Hohe Intensität: $2B\rho \gg A, \qquad N_2 \to \frac{N}{2}$

3.5.4 Einsteinsche Koeffizienten

Explizite Ausdrücke für die Einsteinschen Koeffizienten erhält man, indem man einen B-Koeffizienten nach der semiklassischen Theorie berechnet und und den A-Koeffizienten mit Hilfe der Einsteinschen Beziehungen bestimmt. Eine direkte Berechnung des A-Koeffizienten ist im Rahmen der semiklassischen Theorie dagegen nicht möglich.

Nichtentartete Energieniveaus: Definiert man $N_{1,2} = |C_{1,2}|^2 N$, so erhält man mit(3.91), (3.48) und (3.98) die folgenden Ausdrücke für die Einsteinschen Koeffizienten eines Übergangs zwischen Zuständen mit nichtentarteten Energieniveaus

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{21} = \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{12}|^2}{\hbar^2} \\ A_{21} &= 8\pi\frac{h\nu^3}{c^3}B_{21} = \frac{2}{\pi}\frac{\hbar\omega^3}{c^3}B_{21} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{c^3}\frac{|d_{12}|^2}{\hbar}. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Entartete Energieniveaus: Bei entarteten Energieniveaus können die Übergangsraten zunächst für jedes Paar entarteter Zustände mit Quantenzahlen m_1 und m_2 angegeben werden:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{m_2} &= B_{m_1 m_2}\ \rho(\nu_{21})\ N_{m_1}, \qquad (m_1 \to m_2) \\ \dot{N}_{m_1} &= A_{m_2 m_1}\ N_{m_2} + B_{m_2 m_1}\ \rho(\nu_{21})\ N_{m_2}, \qquad (m_2 \to m_1) \end{aligned} \tag{3.106}$$

Die gesamte Übergangsrate aus einem beliebigen Anfangszustand in einen festen Endzustand ergibt sich durch Summation über alle entarteten Anfangszustände:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{m_2} &= \sum_{m_1} B_{m_1 m_2}\ \rho(\nu_{21})\ N_{m_1}, \\ \dot{N}_{m_1} &= \sum_{m_2} \left(A_{m_2 m_1} + B_{m_2 m_1}\ \rho(\nu_{21})\right)\ N_{m_2} \end{aligned} \tag{3.107}$$

Die gesamte Übergangsrate aus einem beliebigen Anfangszustand in einen beliebigen Endzustand folgt durch Summation von (3.107) über alle entarteten Endzustände:

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= \sum_{m_2} \dot{N}_{m_2} = \sum_{m_1,m_2} B_{m_1 m_2}\ \rho(\nu_{21})\ N_{m_1}, \\ \dot{N}_1 &= \sum_{m_1} \dot{N}_{m_1} = \sum_{m_1,m_2} \left(A_{m_2 m_1} + B_{m_2 m_1}\ \rho(\nu_{21})\right)\ N_{m_2} \end{aligned} \tag{3.108}$$

Bei sphärischer Symmetrie bezeichnet $m_{1,2}$ die Richtungsquantenzahl der Kugelflächenfunktionen. Man kann zeigen, daß das Dipolmatrixelement dann die folgende Symmetrie besitzt:

$$S_{12} = S_{21} = \sum_{m_1,m_2} |d_{m_1,m_2}|^2 = g_2 \sum_{m_1} |d_{m_1,m_2}|^2 = g_1 \sum_{m_2} |d_{m_1,m_2}|^2 \tag{3.109}$$

Nach der Summation über die Richtungsquantenzahl m_1 ist das Betragsquadrat des Dipolmatixelementes unabhängig von m_2 und umgekehrt. S_{12} wird als die *Linienstärke* des Überganges bezeichnet. Verwendet man (3.109) in (3.108) so ergeben sich dieselben Ratengleichungen wie für nichtentartete Zustände. Die Einsteinschen Koeffizienten sind jedoch in der folgenden Weise definiert:

$$\begin{aligned} B_{12} &= \sum_{m_2} B_{m_1 m_2} = \frac{2\pi}{3}\frac{S_{12}}{g_1\hbar^2} \\ B_{21} &= \sum_{m_1} B_{m_2 m_1} = \frac{2\pi}{3}\frac{S_{21}}{g_2\hbar^2} \\ g_2 B_{21} &= g_1 B_{12} \\ A_{21} &= \frac{1}{g_2}\sum_{m_1,m_2} A_{m_2 m_1} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{c^3}\frac{S_{21}}{g_2\hbar}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Oszillatorstärken: Die Oszillatorstärken (3.38) können für entartete Niveaus entsprechend definiert und durch die Linienstärken ausgedrückt werden:

$$f_{ij} = \frac{2}{3}\frac{m}{\hbar q^2}\omega_{ji}\sum_{m_j}|d_{m_i,m_j}|^2 = \frac{2}{3}\frac{m}{\hbar q^2}\frac{\omega_{ji}}{g_i}S_{ij}, \tag{3.111}$$

$$g_i f_{ij} = -g_j f_{ji}. \tag{3.112}$$

3.6 Dichtematrix

Zur Bestimmung der makroskopischen Polarisation eines Lasermediums müssen neben der kohärenten Dynamik der Atome im Laserfeld auch die Anregungs- und Zerfallsprozesse der Atome berücksichtigt werden. Die Wechselwirkungen eines Atoms mit seiner Umgebung lassen sich am zweckmäßigsten durch eine Dichtematrix beschreiben, da der Quantenzustand des Atoms nach der Wechselwirkung nicht mehr mit Sicherheit bekannt ist.

Im folgenden wird die Dichtematrix zunächst für ein System eingeführt, das sich in einem definierten Quantenzustand befindet. In diesem "reinen Fall" beinhaltet die Dichtematrixbeschreibung nur eine zweckmäßige Umformulierung der Gleichungen für den Zustandsvektor. Danach wird der allgemeinere Fall eines statistischen Gemisches von Zuständen betrachtet. Dieser Fall unterscheidet sich vom reinen Fall durch allgemeinere Anfangsbedingungen für die Dichtematrix, nicht jedoch in deren Entwicklungsgleichung. Schließlich werden die in jedem Lasermedium vorhandenen Anregungs- und Zerfallsprozesse diskutiert und in den Entwicklungsgleichungen berücksichtigt. Mit diesen theoretischen Grundlagen werden im folgenden Kapitel die Materiegleichungen eines Lasermediums formuliert und behandelt.

Abschließend wird in diesem Kapitel das optische Blochmodell behandelt, das die Dynamik eines 2-Niveau-Systems besonders anschaulich durch Drehungen des Blochvektors beschreibt.

3.6.1 Reiner Fall

In der Quantenmechanik ist der Zustand eines Systems vollständig durch die Angabe des Zustandsvektors festgelegt. Kennt man den Zustandsvektor eines Systems mit Sicherheit, so spricht man von einem *reinen Fall*.

Dichteoperator: Im reinen Fall definiert man als Dichteoperator

$$\rho \;=\; |\,\psi\,><\psi\,|\,. \tag{3.113}$$

Die Matrixdarstellung des Dichteoperators bezüglich einer Orthonormalbasis $\{|\,i\,>\}$

$$\rho_{ij} \;=\; <i\,|\,\rho\,|\,j> \;=\; <i\,|\,\psi><\psi\,|\,j> \;=\; c_i c_j^* \tag{3.114}$$

wird als *Dichtematrix* bezeichnet.

Der Dichteoperator besitzt nur im reinen Fall die einfache Form (3.113). Dagegen sind die folgenden Eigenschaften allgemein gültig:

- ρ ist hermitesch: $\rho_{ij} \;=\; \rho_{ji}^*$,
- ρ ist positiv: $<\Phi\,|\,\rho\,|\,\Phi> \;\geq\; 0$,

- $Sp(\rho) \;=\; \sum_i < i \mid \rho \mid i > \;=\; 1\,.$

Die Bedeutung dieser Definitionen liegt darin, daß Erwartungswerte von Observablen und deren Zeitentwicklung ohne direkte Bezugnahme auf den Zustandsvektor allein mit dem Dichteoperator berechnet werden können.

Erwartungswerte: Für den Erwartungswert einer Observablen A gilt

$$\begin{aligned} < A > \;&=\; < \psi \mid A \mid \psi > \;=\; \sum_i < \psi \mid A \mid i >< i \mid \psi > \\ &=\; \sum_i < i \mid \psi >< \psi \mid A \mid i > \;=\; Sp(\rho A), \end{aligned} \tag{3.115}$$

wobei $Sp(\rho A) = Sp(A\rho)$ die Spur über das Operatorprodukt ρA bezeichnet. Die Spur ist unabhängig vom verwendeten Basissystem und von der Reihenfolge der Operatoren ρ und A. In Matrixschreibweise gilt

$$< A > \;=\; Sp(\rho A) \;=\; \sum_{i,j} < i \mid \rho \mid j >< j \mid A \mid i > \;=\; \sum_{i,j} \rho_{ij} A_{ji}. \tag{3.116}$$

Man beachte, daß zur Berechnung der Erwartungswerte die Entwicklungskoeffizienten c_i des Zustandsvektors nicht direkt, sondern in Form der Produkte $\rho_{ij} = c_i c_j^*$ benötigt werden. Die Dichtematrix beinhaltet somit genau die zur Charakterisierung des physikalischen Zustandes notwendige Information.

Zeitentwicklung: Mit Hilfe der Schrödingergleichung (3.20) kann die Zeitentwicklungsgleichung für den Dichteoperator (3.113) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \dot\rho \;&=\; \left(\frac{d}{dt} \mid \psi >\right) < \psi \mid \;+\; \mid \psi > \left(\frac{d}{dt} < \psi \mid\right) \\ &=\; \frac{1}{i\hbar} H \mid \psi >< \psi \mid \;+\; \frac{1}{-i\hbar} \mid \psi >< \psi \mid H \\ \dot\rho \;&=\; \frac{1}{i\hbar}[H, \rho]. \end{aligned} \tag{3.117}$$

Die Anwendung der allgemeinen Entwicklungsgleichung (3.117) auf ein 2-Niveau-System im Laserfeld mit dem Hamiltonoperator

$$H \;=\; H_A + H_I, \qquad H_{A_{ij}} \;=\; \hbar\omega_i \delta_{ij}, \qquad H_{I_{ij}} \;=\; -\,\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{d}_{ij}. \tag{3.118}$$

ergibt die Beiträge

$$\frac{1}{i\hbar}\,[H_A, \rho]_{ij} \;=\; \frac{1}{i\hbar} \sum_k \left\{ H_{A_{ik}} \rho_{kj} - \rho_{ik} H_{A_{kj}} \right\}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\{\hbar\omega_i\rho_{ij} - \rho_{ij}\hbar\omega_j\} = -i\omega_{ij}\rho_{ij} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar}[H_I,\rho]_{ij} &= \frac{1}{i\hbar}\sum_k \left\{H_{I_{ik}}\rho_{kj} - \rho_{ik}H_{I_{kj}}\right\} \\ &= \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\sum_k\{\boldsymbol{d}_{ik}\rho_{kj} - \rho_{ik}\boldsymbol{d}_{kj}\}\,.\end{aligned} \tag{3.120}$$

Da die Dichtematrix hermitesch und ihre Spur auf 1 normiert ist, können die Dichtematrixgleichungen des 2-Niveau-Systems auf folgende Weise zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}\dot{\rho_{11}} &= -\dot{\rho_{22}} = -\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{d}_{21}\rho_{12} + cc.\,, \\ \dot{\rho_{21}} &= \dot{\rho_{12}}^* = -i\omega_{21}\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{d}_{21}(\rho_{22}-\rho_{11}).\end{aligned} \tag{3.121}$$

Diese gelten im Schrödingerbild. Im Prinzip kann die Dichtematrix auch im Wechselwirkungsbild definiert werden. Da jedoch das Wechselwirkungsbild bei der Berücksichtigung von Anregungs- und Zerfallsprozessen keine spezifischen Vorteile mehr besitzt, wird hier konsequent das Schrödingerbild verwendet.

Im Resonanzfall kann das elektrische Feld (3.13) im Sinne der "rotating wave approximation" wiederum durch seinen positiven Frequenzanteil $\boldsymbol{E}_0\exp(-i\omega t)/2$ ersetzt werden. Wegen $\rho_{21} = c_2c_1^* \propto \exp(-i\omega_{21}t)$ besitzen dann alle Terme in (3.121) dieselbe schnelle Zeitabhängigkeit. Mit den Definitionen aus (3.13), (3.44) lauten die 2-Niveau-Gleichungen in der Resonanznäherung

$$\begin{aligned}\dot{\rho_{11}} &= -\dot{\rho_{22}} = \frac{i}{2}\zeta^*\exp(i\omega t)\rho_{21} + cc. \\ \dot{\rho_{21}} &= \dot{\rho_{12}}^* = -i\omega_{21}\rho_{21} - \frac{i}{2}\zeta\exp(-i\omega t)(\rho_{22}-\rho_{11}).\end{aligned} \tag{3.122}$$

3.6.2 Gemischter Fall

In der Regel ist der Quantenzustand eines realen Systems nicht mit Sicherheit bekannt. Man spricht dann von einem gemischten Fall, bei welchem nur die Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann, daß sich ein System in einem bestimmten Quantenzustand befindet. Durch Mittelung über ein statistisches Ensemble lassen sich die Ergebnisse des reinen Falls auf den gemischten Fall übertragen.

Mittelwerte: Betrachtet man ein statistisches Ensemble von N Systemen, von denen sich N_n Systeme in einem Quantenzustand $\mid \psi_n >$ befinden, so folgt für den

Mittelwert einer Observablen A

$$\begin{aligned} < A > &= \sum_n \frac{N_n}{N} < \psi_n \mid A \mid \psi_n > \\ &= \sum_n \frac{N_n}{N} Sp(\rho_n A) \;=\; Sp(\rho A). \\ \rho &= \sum_n P_n \rho_n, \qquad P_n \;=\; \frac{N_n}{N}, \qquad \rho_n \;=\; \mid \psi_n >< \psi_n \mid . \end{aligned} \tag{3.123}$$

Mit dem hier definierten statistischen Operator ρ berechnen sich die Mittelwerte genauso wie im reinen Fall.

Die Diagonalelemente der Dichtematrix geben die Besetzungswahrscheinlichkeiten für der einzelnen Zustände an, die Nichtdiagonalelemente werden oft als Kohärenzen bezeichnet. Im gemischten Fall können die Elemente der Dichtematrix nicht mehr in der Produktform (3.114) dargestellt werden. Das folgende Beispiel eines Ensembles von 2-Niveau Systemen mit zufälligen Phasen zeigt, daß im gemischten Fall die Kohärenzen zwischen dem oberen und unteren Niveau "zerstört" werden können.

Beispiel 3.5 (Ensemble mit zufälligen Phasen)

$$\mid \psi_n > \;=\; c_1 \mid 1 > + \, c_2 \exp(i\phi_n) \mid 2 >, \qquad \phi_n \textit{ zufällig}$$

$$P_n \;=\; \tfrac{1}{N}$$

$$\rho_{11} \;=\; \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{N} \mid c_1 \mid^2 \;=\; \mid c_1 \mid^2$$

$$\rho_{22} \;=\; \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{N} \mid c_2 \mid^2 \;=\; \mid c_2 \mid^2$$

$$\rho_{12} \;=\; \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{N} c_1 c_2^* \exp(-i\phi_n) \;=\; c_1 c_2^* \, \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp(-i\phi) \;=\; 0$$

Zeitentwicklung: Da die Zeitentwicklungsgleichung (3.117) linear ist und die Anzahl der Systeme des Ensembles nicht von der Zeit abhängt, bleibt sie auch im gemischten Fall gültig:

$$\dot{\rho} \;=\; \sum_n P_n \dot{\rho_n} \;=\; \sum_n P_n \frac{1}{i\hbar}[H, \rho_n] \;=\; \frac{1}{i\hbar}[H, \rho]. \tag{3.124}$$

Die Gleichung (3.124) wurde durch von Neumann und Landau eingeführt und stellt die Grundgleichung der Nichtgleichgewichtsstatistik von Quantensystemen dar.

3.6.3 Zerfallsprozesse

Die Dichtematrixgleichungen (3.122) beinhalten noch keine Zerfallsprozesse der angeregten Niveaus, die z.B. durch Stöße der Atome untereinander oder durch spontane Emission verursacht werden. Da eine mikroskopische Theorie der Dämpfung schwierig ist, werden die Zerfallsprozesse meist phänomenologisch durch entsprechende Zerfallsraten in den Dichtematrixgleichungen berücksichtigt. Dabei muß man jedoch beachten, daß die Dämpfung der einzelnen Dichtematrixelemente nicht unabhängig voneinander ist. Dies wird durch die folgenden Überlegungen verdeutlicht.

Elastische Stöße: Elastische Stöße bewirken einen Zerfall der Kohärenz, d.h. ein anfänglich reiner Fall wird durch elastische Stöße in ein statistisches Gemisch aus Atomen in den Zuständen 1 und 2 überführt. Solange keine anderen Prozesse, wie Absorption, Emission oder inelastische Stoßprozesse wirksam sind, bleibt die Besetzung der Niveaus dabei erhalten. Dieser Mechanismus wird auch als *Phasenrelaxation* bezeichnet.

Betrachtet man zunächst ein einzelnes Atom, so kann ein elastischer Stoß durch ein zeitabhängiges Störpotential veranschaulicht werden. Während des Stoßes werden die Energieniveaus des Atoms adiabatisch verschoben und kehren nach dem Stoß wieder in ihre Ausgangslage zurück. Dabei werden die Phasen der stationären Zustände relativ zu denen eines ungestörten Atoms verschoben, während die Amplituden gleich bleiben.

Für eine große Anzahl von Atomen die zur gleichen Zeit t' stoßen, läßt sich die Wirkung der Stöße durch statistische Annahmen bezüglich der Verteilung der Phasen unmittelbar nach dem Stoß beschreiben. Nimmt man z.B. an, daß nach dem Stoß ein Ensemble mit zufälligen Phasen vorliegt, so müssen die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix verschwinden (vgl. Beispiel (3.5)).

Die Stoßmittelung der Dichtematrix kann nun mit derselben statistischen Methode beschrieben werden, die bereits beim klassischen Lorentzmodell zur Stoßmittelung des Dipolmomentes angewandt wurde. Die Analogie wird besonders deutlich, wenn man beachtet, daß das mittlere Dipolmoment

$$< \boldsymbol{d} > \;=\; Sp(\boldsymbol{d}\rho) \;=\; \boldsymbol{d}_{12}\rho_{21} + c.c., \tag{3.125}$$

im quantenmechanischen Fall durch das Matrixelement ρ_{21} bestimmt wird.

Die Dichtematrix eines durchschnittlichen Atoms sei definiert durch

$$\rho(t) \;=\; \int_{t'=-\infty}^{t} df(t,t')\;\rho(t,t'). \tag{3.126}$$

Hierin beschreibt $\rho(t,t')$ die Dichtematrix derjenigen Atome, deren letzter Stoß zur

Zeit t' im Zeitintervall dt' stattfand. Sie genügt zur Zeit $t = t'$ der Anfangsbedingung

$$\rho(t',t') = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t',t') & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t',t') \end{pmatrix}. \tag{3.127}$$

und für $t > t'$ den Entwicklungsgleichungen (3.124) eines stoßfreien Ensembles. Nach Gleichung (2.196) kann der Bruchteil der Atome, die dem Teilensemble $\rho(t,t')$ angehören durch

$$d\,f(t,t') = \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_c}\right)\frac{dt'}{\tau_c}, \tag{3.128}$$

ausgedrückt werden, wobei τ_c die mittlere freie Flugzeit der Atome bezeichnet.

Durch Differentiation von (3.126) nach der Zeit folgt

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= \frac{1}{\tau_c}\,\rho(t,t) - \frac{1}{\tau_c}\,\rho(t) + \int\limits_{t'=-\infty}^{t} df(t,t')\,\frac{d}{dt}\rho(t,t') \\ &= \frac{1}{\tau_c}(\rho(t,t) - \rho(t)) + \frac{1}{i\hbar}[H,\rho(t)]. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Die drei Summanden ergeben sich jeweils durch Ableitung nach der oberen Integrationsgrenze, nach der Gewichtsfunktion (3.128) und nach der Dichtematrix $\rho(t,t')$. Im letzten Summand kann man die Zeitableitung durch (3.124) ersetzen und findet dann, daß er genau die kohärente Dynamik der gemittelten Dichtematrix beschreibt. Aus Konsistenzgründen muß man fordern, daß die Besetzungen des Teilensembles $\rho(t,t)$ mit den mittleren Besetzungen zur Zeit t übereinstimmen, d.h.

$$\rho_{ii}(t,t) = \rho_{ii}(t). \tag{3.130}$$

Als Ergebnis erhält man für die gemittelte Dichtematrix eine Zeitentwicklungsgleichung

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\tau_c}\begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{i\hbar}[H,\rho(t)], \tag{3.131}$$

in der nur die Nichtdiagonalelemente mit der Zerfallsrate $\frac{1}{\tau_c}$ gedämpft sind.

Inelastische Stöße: Bei inelastischen Prozessen zerfallen die Wahrscheinlichkeitsamplituden c_1, c_2 des 2-Niveau-Atoms aufgrund von Übergängen in Zustände des umgebenden Gesamtsystems. Als einfachen Ansatz kann man für die Amplituden die Zerfallsraten

$$\dot{c}_{1,2}\Big|_{inelast.St.} = -\frac{\Gamma_{1,2}}{2}c_{1,2} \tag{3.132}$$

annehmen. Die Zerfallsraten der Dichtematrixelemente aufgrund inelastischer Stöße ergeben sich dann aus (3.123) als

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11}\Big|_{inelast.St.} &= -\Gamma_1\rho_{11}, \\
\dot{\rho}_{22}\Big|_{inelast.St.} &= -\Gamma_2\rho_{22}, \\
\dot{\rho}_{21,12}\Big|_{inelast.St.} &= -\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\rho_{21,12}.
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Stoßgemittelte Dichtematrixgleichungen: Mit den Definitionen

$$\beta = \frac{1}{\tau_c} + \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}, \qquad \zeta = \boldsymbol{d}_{21}\cdot\boldsymbol{E}_0/\hbar, \qquad \omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 \tag{3.134}$$

können die stoßgemittelten Dichtematrixgleichungen eines resonant angeregten 2-Niveau-Systems zusammenfassend in der Form

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= -\Gamma_1\rho_{11} + \left(\frac{i}{2}\zeta^* \exp(i\omega t)\rho_{21} + cc.\right) \\
\dot{\rho}_{22} &= -\Gamma_2\rho_{22} - \left(\frac{i}{2}\zeta^* \exp(i\omega t)\rho_{21} + cc.\right) \\
\dot{\rho}_{21} &= \dot{\rho_{12}}^* = -(i\omega_{21}+\beta)\rho_{21} - \frac{i}{2}\zeta\exp(-i\omega t)(\rho_{22}-\rho_{11}),
\end{aligned} \tag{3.135}$$

angegeben werden. Durch die Variablensubstitution

$$\begin{aligned}
\zeta &= \varrho\exp(i\Phi), \qquad \hat{\rho}_{21} = \hat{\rho}_{12}^* = \rho_{21}\exp(i[\omega t-\Phi]), \\
\Delta &= \omega_{21}-\omega,
\end{aligned} \tag{3.136}$$

erhält man alternativ dazu ein Gleichungssystem, in dem die Rabifrequenz reell ist und das keine schnellveränderlichen Terme enthält:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= -\Gamma_1\rho_{11} + \left(\frac{i}{2}\varrho\hat{\rho}_{21} + cc.\right) \\
\dot{\rho}_{22} &= -\Gamma_2\rho_{22} - \left(\frac{i}{2}\varrho\hat{\rho}_{21} + cc.\right) \\
\dot{\hat{\rho}}_{21} &= \dot{\hat{\rho}}_{12}^* = -(i\Delta+\beta)\hat{\rho}_{21} - \frac{i}{2}\varrho(\rho_{22}-\rho_{11}).
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Die folgenden Beispiele verdeutlichen den Einfluß der Zerfallsraten auf die Entwicklung der Dichtematrix.

Beispiel 3.6 (Inelastische Stöße)

Annahmen	:	$\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \beta$
Lösung des ungedämpften Systems	:	$\rho\vert_{\Gamma=0}$
Lösung des gedämpften Systems	:	$\rho = \exp(-\Gamma t)\ \rho\vert_{\Gamma=0}$
Asymptotisches Verhalten	:	*Zerfall der Besetzung,* $\rho \to 0$

Beispiel 3.7 (Elastische Stöße)

Annahmen	:	$\beta \neq 0,\ \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0,\ \Delta = 0$
Variablen	:	$w = \rho_{22} - \rho_{11}, \quad v = i\hat{\rho}_{21} + cc.$
Gleichungssystem	:	$\dot{w} = -\varrho v, \quad \dot{v} = -\beta v + \varrho w$
Lösung ($\beta \gg \varrho$)	:	$v = \frac{\varrho}{\beta} w, \quad w = w(0)\exp(-\frac{\rho^2}{\beta}t), \quad \rho_{11} + \rho_{22} = 1$
Lösung ($\beta \ll \varrho$)	:	$w = w(0)\exp(-\beta t/2)\cos(\varrho t), \quad v = w(0)\exp(-\beta t/2)\sin(\varrho t)$
Asymptotisches Verhalten	:	*Gemisch mit Gleichbesetzung,* $\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2$

3.6.4 Anregungsprozesse

Ein einzelnes Atom, welches am Ort z zur Zeit t' ins Niveau i angeregt wurde, werde durch eine Dichtematrix $\rho(i, z, t', t)$ beschrieben. Da sich das Atom zur Zeit t' mit Sicherheit im Zustand i befindet, genügt sie der Anfangsbedingung

$$\rho(i, z, t', t')_{ij} \quad = \quad \delta_{ij}. \tag{3.138}$$

Um alle Atome eines Lasermediums zu beschreiben, die zu einer früheren Zeit in irgendein Niveau angeregt wurden, definiert man die *Populationsmatrix*

$$\rho(z, t) \quad = \quad \sum_i \int_{t'=-\infty}^{t} dt'\ \lambda_i(z, t')\rho(i, z, t', t), \tag{3.139}$$

wobei die Anregungsrate $\lambda_i(z, t')$ angibt, wieviele Atome pro Zeit- und Volumeneinheit am Ort z zur Zeit t' ins Niveau i angeregt wurden. Die Diagonalelemente der Populationsmatrix geben die Anzahl der Atome pro Volumeneinheit an, die sich zur Zeit t, am Ort z im Zustand i befinden. Für ein Medium mit N Atomen pro Volumeneinheit gilt die Normierungsbedingung

$$Sp(\rho(z, t)) \quad = \quad N. \tag{3.140}$$

Die Nichtdiagonalelemente der Populationsmatrix bestimmen die makroskopische Polarisation (2.162) des Mediums

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} \quad = \quad \Re(\boldsymbol{P}) \quad = \quad Sp(\boldsymbol{d}\rho) \quad = \quad \boldsymbol{d}_{12}\rho_{21} + c.c., \qquad \boldsymbol{P} \quad = \quad 2\boldsymbol{d}_{12}\rho_{21} \tag{3.141}$$

Im folgenden wird, ohne explizite Unterscheidung, unter der Dichtematrix immer die so definierte Populationsmatrix verstanden.

Die Entwicklungsgleichung der Populationsmatrix ergibt sich durch die Zeitableitung von (3.139) zu

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(z, t) \quad &= \quad \sum_i \lambda_i(z, t))\rho(i, z, t, t) + \sum_i \int_{t'=-\infty}^{t} dt'\ \lambda_i(z, t')\dot{\rho}(i, z, t', t) \\ &= \quad \begin{pmatrix} \lambda_1(z, t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(z, t) \end{pmatrix} + \frac{1}{i\hbar}[H, \rho(z, t)]\ . \end{aligned} \tag{3.142}$$

Im ersten Term wurde die Anfangsbedingung (3.138) für die Dichtematrix $\rho(i,z,t,t)$, im zweiten Term die Bewegungsgleichung (3.124) für die kohärente Dynamik verwendet. Die Anregungsprozesse werden hier durch *besetzungsunabhängige* Anregungsraten für die Diagonalelemente der Populationsmatrix beschrieben.

3.6.5 Optisches Blochmodell

In Analogie zur Elektronenspinresonanz kann das Verhalten des optischen 2-Niveau-Systems durch die Präzessionsbewegung eines 3-komponentigen Vektors beschrieben werden. Die Darstellung der Dichtematrix durch ein Vektormodell wird als optisches Blochmodell bezeichnet.

Blochgleichungen: Die Blochgleichungen wurden um 1940 von Bloch zur Beschreibung der Elektronenspinresonanz eingeführt. Ein Elektronenspin $\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ besitzt in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ die Energie

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \frac{|e|}{mc}\boldsymbol{s}. \tag{3.143}$$

Spinresonanz beobachtet man, wenn senkrecht zu einem konstanten Magnetfeld ein magnetisches Wechselfeld angelegt wird:

$$\boldsymbol{B} = (B_1\cos(\omega t), B_1\sin(\omega t), B_0). \tag{3.144}$$

Der Erwartungswert des Spinvektors wird durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}<\boldsymbol{s}> = -\boldsymbol{B}\times <\boldsymbol{s}> - \begin{pmatrix} <s_x>/T_2 \\ <s_y>/T_2 \\ (<s_z> - s_0)/T_1 \end{pmatrix} \tag{3.145}$$

beschrieben. Das konstante Magnetfeld führt zu einer Präzessionsbewegung des Spinvektors mit einem festen Wert der Komponente $<s_z>$. Durch das Wechselfeld wird eine Umklappbewegung induziert, die $<s_z>$ kontinuierlich zwischen einem maximalen und minimalen Wert ändert. Der letzte Term in der Bewegungsgleichung (3.145) beschreibt Relaxationsprozesse, die sich aus der Wechselwirkung der Spins mit ihrer Umgebung ergeben. Hierfür unterscheidet das Blochmodell 2 Zerfallkonstanten. Die *longitudinale Relaxationszeit* T_1 beschreibt den Zerfall der Komponente $<s_z>$ zu einem Gleichgewichtswert s_0. Der Wert von s_0 bestimmt die mittlere Energie der Spins im Gleichgewicht. Die *transversale Relaxationszeit* T_2 beschreibt den Zerfall der Komponenten $<s_{x,y}>$. Durch den Verlust der Phasenkohärenz zwischen den Präzessionsbewegungen der Spins zerfallen diese Komponenten auf den Mittelwert 0.

Optische Blochgleichungen: Die optischen Blochgleichungen wurden 1957 von Feynman, Vernon und Hellwarth eingeführt. Dem Spinerwartungswert entspricht im optischen Fall ein Vektor $\boldsymbol{R}$ mit den drei Komponenten

$$\begin{aligned} R_1 &= \hat{\rho}_{21} + c.c. = 2\Re(\hat{\rho}_{21}), \\ R_2 &= i\hat{\rho}_{21} + c.c. = -2\Im(\hat{\rho}_{21}), \\ R_3 &= \rho_{22} - \rho_{11}. \end{aligned} \tag{3.146}$$

Dies sind drei unabhängige reelle Variablen, die die Elemente der Dichtematrix eines 2-Niveau-Systems vollständig beschreiben.

Bemerkung 3.4 (Blochvektor) *Zur Beschreibung eines 2-Niveau-Systems werden 3 reelle Variablen R_1, R_2, R_3, benötigt. Mit (2.18), (3.141) und (3.134) können diese Variablen den folgenden physikalisch beobachtbaren Größen zugeordnet werden:*

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2}\Re(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}^*) = \Re(\rho_{21}\boldsymbol{d}_{12}\cdot\boldsymbol{E}^*) = \Re(\rho_{21}\hbar\zeta^* \exp(i\omega t)) = \frac{\hbar\varrho}{2}R_1 \\ P_a &= \frac{1}{2}\Re(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}^*) = \frac{1}{2}\Re(-i\omega\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}^*) = -\frac{\hbar\omega}{2}\varrho R_2 \\ \Delta N &= \rho_{22} - \rho_{11} = R_3 \end{aligned} \tag{3.147}$$

Die Polarisationsenergie ($W_p \propto R_1$) ist der Anteil der elektrostatischen Dipolwechselwirkungsenergie zur Feldenergie. Die aufgenommene bzw. abgegebene Leistung ($P_a \propto R_2$) bestimmt Absorption und Verstärkung. Sie ist positiv, wenn das Medium Energie aufnimmt und negativ, wenn vom Medium Energie abgegeben wird. Die Besetzungsinversion ($\Delta N \propto R_3$) hat keine klassische sondern nur eine quantenmechanische Bedeutung.

Im Unterschied zum Elektronenspin besitzt das Atom in Wirklichkeit viele Energieniveaus, die zu drei Zerfallskonstanten führen: β, Γ_1 und Γ_2. Meist sind jedoch Γ_1 und Γ_2 sehr viel kleiner als β. Dann bedeuted es keinen großen Fehler, wenn man annimmt

$$\beta = \frac{1}{T_2}, \qquad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{1}{T_1}. \tag{3.148}$$

Die Zeitableitung der Vektorkomponenten läßt sich mit den Dichtematrixgleichungen (3.137) unter der Annahme (3.148) einfach berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -\frac{1}{T_2}R_1 - \Delta R_2, \\ \dot{R}_2 &= -\frac{1}{T_2}R_2 + \Delta R_1 + \varrho R_3, \\ \dot{R}_3 &= -\frac{1}{T_1}R_3 - \varrho R_2. \end{aligned} \tag{3.149}$$

Definiert man als Drehachse den Vektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= (\varrho, 0, -\Delta) = \Omega\, \hat{\boldsymbol{\Omega}} \\ \Omega &= \sqrt{\Delta^2 + \varrho^2}, \qquad \hat{\boldsymbol{\Omega}} = (\frac{\varrho}{\Omega}, 0, -\frac{\Delta}{\Omega}) \end{aligned} \tag{3.150}$$

so erhält man aus (3.149) die optischen Blochgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{R}} = -\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R} - \begin{pmatrix} R_1/T_2 \\ R_2/T_2 \\ R_3/T_1 \end{pmatrix}. \tag{3.151}$$

Die kohärente Dynamik eines 2-Niveau-Systems kann sehr anschaulich durch die Drehung des Blochvektors um die Achse $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ mit der Winkelgeschwindigkeit Ω dargestellt werden. Dies wird durch die folgenden Beispiele illustriert.

Beispiel 3.8 (Resonante Anregung) *Im Resonanzfall $\Delta = 0$, erfolgt die Drehung um die 1-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ϱ. Besitzt der Blochvektor anfänglich keine Komponente in 1-Richtung, so erfolgt die Drehung in der 2,3-Ebene (Rabioszillationen). Dabei wird periodisch die maximale Inversion $R_3 = 1$ erreicht. Ein Puls der Dauer $t = \pi/\varrho$ wird als π-Puls bezeichnet. Durch einen π-Puls werden die Besetzungen der beiden Niveaus vertauscht.*

Beispiel 3.9 (Kleine Verstimmung) *Bei kleiner Verstimmung ($\Delta \ll \varrho$) erfolgt die Drehung um eine Achse, die leicht gegen die 1-Achse geneigt ist. Zeigt der Blochvektor anfänglich in die negative 3-Richtung ($\rho_{11} = 1$, $\rho_{22} = 0$), so besitzt er nach einem halben Umlauf eine Komponente in 1-Richtung. In diesem Fall wird keine vollständige Inversion erzielt.*

Beispiel 3.10 (Starke Verstimmung) *Bei nichtresonanter Anregung ($\Delta \gg \varrho$) erfolgt die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit Δ um eine Achse, die leicht gegen die 3-Achse geneigt ist. In diesem Fall sind die Änderungen der Besetzungen klein. Dieses Verhalten entspricht dem Ergebnis der linearen Störungsrechnung.*

3.7 Semiklassische Lasertheorie

Die semiklassische Theorie des Lasers wurde zu Beginn der 60er Jahre durch parallele Arbeiten von W.E. Lamb und H. Haken entwickelt. Zusammenfaßende Darstellungen der semiklassischen Lasertheorie findet man in

- Sargent, Scully und Lamb: *Laser Physics* (Addison Wesley, 7. Aufl. 1994)

- Haken: *Licht und Materie, Band II: Laser* (BI, 2. Aufl. 1994)

Mit der semiklassische Lasertheorie können viele grundlegende Phänomene des Lasers behandelt werden, wie z.B.

- Einmoden-, Vielmodenbetrieb
- Stationäres-, zeitabhängiges Verhalten, Instabilitäten
- Verstärkung, Sättigung, Lochbrennen
- Amplitude, Frequenz
- Homogene-, inhomogene Medien

Die semiklassische Theorie des Lasers basiert auf einer selbstkonsistenten Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in einem aktiven Medium. Dazu werden die klassischen Feldgleichungen für das elektromagnetisches Feld gemeinsam mit den quantenmechanischen Materiegleichungen für die makroskopische Polarisation gelöst.

Unterschiedliche Ausprägungen der semiklassischen Theorie ergeben sich durch zusätzliche Annahmen, wie z.B.

- *Skalare Theorie:* Linear polarisierte Moden
- *Einmodentheorie:* Verstärkung einer Resonatormode
- *Vielmodentheorie:* Berücksichtigung von nichtlinearen Modenkopplungen
- *Enveloppentheorie:* Kohärente Laserpulse
- *Adiabatische Theorie:* Berechnung der Polarisation durch adiabatische Elimination
- *Störungstheorie:* Berechnung der Polarisation durch Potenzreihenentwicklung
- *2-Niveau-Systeme:* 2-Niveau-Atome mit homogen/inhomogen verbreiterter Linie

Im folgenden wird nur die skalare Theorie dargestellt. Die Grundgleichungen werden für den Vielmodenfall angegeben. Die anschließende Diskussion beschränkt sich auf den Einmodenfall. Unter Verwendung der adiabatischen Näherung werden die Ratengleichungen des Einmodenlasers abgeleitet und für quasistatische Besetzungen gelöst. Das folgende Kapitel stellt die Enveloppentheorie zur Beschreibung kohärenter Laserpulse dar.

3.7.1 Resonatormoden

Wichtige Eigenschaften des Laserlichtes werden bereits durch den optischen Resonator festgelegt. Dazu gehört die Form der Schwingungsmoden und deren Dämpfung durch Beugungs- und Transmissionsverluste an den Spiegeln.

Normalmodenentwicklung: Im eindimensionalen Fall sind die Schwingungsmoden stehende elektromagnetische Wellen mit diskreten Wellenlängen:

$$u_n(z) \;=\; \sin k_n z, \qquad k_n \;=\; \frac{n\pi}{L}, \qquad n \;=\; 1,2,3... \tag{3.152}$$

Die Eigenfrequenzen des leeren Resonators sind $\Omega_n = ck_n$. Im Unterschied zum leeren Resonator besitzt ein homogen gefüllter Resonator einen Brechungsindex $n(\omega) \neq 1$. Bei derselben Modenzahl $k_n = \omega_n n(\omega_n)/c$ besitzt das emittierte Laserlicht daher eine verschobene Frequenz $\omega_n \neq \Omega_n$, deren Berechnung ein Ziel der semiklassischen Lasertheorie ist.

Mit dem Funktionensystem (3.152) ergeben sich für das elektrische Feld und die Polarisation die allgemeinen Darstellungen

$$\mathcal{E}(z,t) \;=\; \Re\{E(z,t)\}, \qquad E(z,t) \;=\; \sum_n E_n(t)u_n(z), \tag{3.153}$$

$$\mathcal{P}(z,t) \;=\; \Re\{P(z,t)\}, \qquad P(z,t) \;=\; \sum_n P_n(t)u_n(z). \tag{3.154}$$

Die Funktionen u_n sind orthogonal zueinander und so normiert, daß $|E_n|$ die Amplitude des elektrischen Feldes der Mode n angibt. Im Einmodenfall kann man sich auf einen Summanden beschränken.

Resonatorverluste: In Analogie zur Dämpfung der Atome durch Wechselwirkungen mit ihrer Umgebung gibt es auch eine Dämpfung der Resonatormoden durch Resonatorverluste. Als allgemeines Maß für die Verluste des Resonators definiert man den *Gütefaktor*

$$Q_n \;=\; \Omega_n \frac{W_n}{\dot{W}_n}. \tag{3.155}$$

Ein Resonator besitzt eine hohe Güte, wenn die Energieverluste pro Lichtperiode klein sind gegenüber der im Resonator gespeicherten Energie.

Die Resonatorverluste können pauschal durch eine endliche Leitfähigkeit des Lasermediums berücksichtigt werden. Die Energiedichte W_n kann durch die Wellenenergie (2.44) und die dissipierte Leistung $\dot{W}_n$ mit $j_n = \sigma_{an} E_n$ durch die Jouleschen Verluste

$$\dot{W}_n \;=\; \frac{1}{2}\Re\{j_n E_n^*\} \;=\; \frac{1}{2}\sigma_{an}|E_n|^2 \tag{3.156}$$

dargestellt werden. Einer vorgegebenen Resonatorgüte Q_n entspricht daher eine Dämpfung der Moden mit einer phänomenologischen Leitfähigkeit

$$\sigma_{an} = \frac{\Omega_n}{4\pi Q_n}. \tag{3.157}$$

3.7.2 Feldgleichungen

Modengleichungen: In einer skalaren Theorie genügt das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}e$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\partial_z^2 E(z,t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 E(z,t) = \frac{4\pi}{c^2}\partial_t j(z,t). \tag{3.158}$$

wobei die Stromdichte $j = \mathbf{j}\cdot\mathbf{e}$ durch den Ansatz

$$j(z,t) = \sum_n j_n(t)u_n(z), \qquad j_n(t) = \sigma_{an}E_n(t) + \partial_t P_n(t) \tag{3.159}$$

dargestellt wird. Hierbei bezeichnet σ_{an} die Leitfähigkeit (3.157) und P_n die n-te Komponente der Polarisation in der Entwicklung (3.153). Setzt man (3.159) und (3.153) in (3.158) ein, so erhält man wegen der Orthogonalität der Normalmoden

$$\partial_t^2 E_n + 4\pi\sigma_{an}\partial_t E_n + \Omega_n^2 E_n = -4\pi\partial_t^2 P_n, \tag{3.160}$$

Im Gegensatz zur ursprünglichen Wellengleichung ist dies ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Feldstärken der Normalmoden.

SVA-Näherung: Die Zeitabhängigkeit der Normalmoden kann in guter Näherung durch eine langsam veränderliche (komplexe) Amplitude und eine schnell veränderliche Phase beschrieben werden. Diese Näherung wird gewöhnlich mit dem englischen Fachausdruck "slowly varying amplitude (SVA) approximation" bezeichnet. Mit der SVA-Näherung können die Differentialgleichungen 2. Ordnung zu Differentialgleichungen 1. Ordnung vereinfacht werden.

Der SVA-Ansatz kann in der Form

$$E_n(t) = A_n(t)e^{-i(\omega_n t+\varphi_n(t))}, \qquad P_n(t) = \chi_n(t)E_n(t). \tag{3.161}$$

geschrieben werden. Hierbei wird angenommen, daß sich die Funktionen $A_n(t)$, $\phi_n(t)$ und $\chi_n(t)$ über eine Lichtperiode nur wenig ändern. Die Amplitude $A_n(t)$ ist außerdem reell gewählt, so daß A_n^2 proportional ist zur Intensität des Lichtes. Die Suszeptibilität χ_n ist im allgemeinen komplex.

Bei der Berechnung der Zeitableitungen ergeben sich unter diesen Annahmen die folgenden Näherungsausdrücke

$$\begin{aligned}
\partial_t E_n &= \partial_t A_n e^{-i(\omega_n t+\varphi_n)} - i(\omega_n + \partial_t\varphi_n)E_n \\
\partial_t^2 E_n &\approx -2i\omega_n \partial_t A_n e^{-i(\omega_n t+\varphi_n)} - (\omega_n + \partial_t\varphi_n)^2 E_n \\
\partial_t^2 P_n &\approx -\omega_n^2 P_n \\
\sigma_{an}\partial_t E_n &\approx -i\omega_n \sigma_{an} E_n
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Vernachläßigt sind hierbei 2. Ableitungen (wie $\partial_t^2 A_n$) und quadratische Ausdrücke 1. Ableitungen (wie $\partial_t A_n \partial_t \varphi_n$) von langsam veränderlichen Größen. Bei der Polarisation und Dissipation sind alle Ableitungen langsam veränderlicher Größen vernachlässigt, da σ_n und χ_n selbst schon als klein angenommen werden.

Setzt man (3.162) in (3.160) ein, so erhält man eine Gleichung 1.Ordnung für die langsam veränderlichen Größen:

$$-(\omega_n + \partial_t\varphi_n)^2 A_n - 2i\omega_n \partial_t A_n + 4\pi\sigma_{an}(-i\omega_n)A_n + \Omega_n^2 A_n = 4\pi\omega_n^2 \chi_n A_n.$$

Aus dem Real- und Imaginärteil dieser Gleichung folgen die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\left[-(\omega_n + \partial_t\varphi_n)^2 + \Omega_n^2\right] A_n &= 4\pi\omega_n^2 \Re\{\chi_n\} A_n \\
-2\omega_n \partial_t A_n - 4\pi\sigma_{an}\omega_n A_n &= 4\pi\omega_n^2 \Im\{\chi_n\} A_n
\end{aligned}$$

Feldgleichungen in SVA-Näherung: Mit der Näherung

$$(\omega_n + \partial_t\varphi_n)^2 - \Omega_n^2 \approx 2\omega_n(\omega_n + \partial_t\varphi_n - \Omega_n) \tag{3.163}$$

und der Definition (3.157) ergeben sich die folgenden Entwicklungsgleichungen für die Amplituden und Phasen der Lasermoden

$$\partial_t\varphi_n = \Omega_n - \omega_n - 2\pi\omega_n \Re\{\chi_n\}, \tag{3.164}$$

$$\partial_t A_n = -\frac{\Omega_n}{2Q_n} A_n - 2\pi\omega_n \Im\{\chi_n\} A_n, \tag{3.165}$$

$$\chi_n = \frac{\int_0^L P u_n}{\int_0^L E u_n} = \frac{\int_0^L 2(\mathbf{d_{12}}\cdot\mathbf{e})\rho_{21}\mathbf{u_n}}{E_n \int_0^L u_n^2}. \tag{3.166}$$

Die hierin vorkommende Suszeptibilität χ_n ist eine Funktion der Amplituden und Phasen aller anderen Moden und muß gemäß den Definitionen (3.161), (3.141) selbstkonsistent berechnet werden. Dazu werden im nächsten Abschnitt die Materiegleichungen angegeben, welche die Polarisation des Mediums in dem von den Lasermoden erzeugten elektrischen Feld bestimmen. Diese Feld- und Materiegleichungen zusammen bilden die Grundgleichungen der semiklassischen Lasertheorie.

Zur physikalischen Interpretation der Feldgleichungen kann man einen Brechungsindex $n_n(\omega_n, A_n, \varphi_n)$ und einen Verstärkungskoeffizienten $g_n(\omega_n, A_n, \varphi_n)$ in formaler Analogie zur linearen Theorie definieren

$$\begin{aligned} n_n(\omega_n, A_n, \varphi_n) &= \sqrt{1 + 4\pi\Re\{\chi_n\}} \approx 1 + 2\pi\Re\{\chi_n\}, \\ g_n(\omega_n, A_n, \varphi_n) &= -\frac{\omega_n \Im\{\epsilon_n\}}{n_n c} \approx -\frac{4\pi\omega_n \Im\{\chi_n\}}{c}. \end{aligned} \tag{3.167}$$

Damit können die Feldgleichungen auch in der Form

$$\frac{\partial_t \varphi_n}{c} = k_n - \frac{\omega_n}{c} n(\omega_n, A_n, \varphi_n) \tag{3.168}$$

$$\partial_t W_n = -\frac{\Omega_n}{Q_n} W_n + c g_n(\omega_n, A_n, \varphi_n) W_n \tag{3.169}$$

angegeben werden. Die erste Gleichung ist eine Dispersionsrelation für die Frequenz der Lasermode. Die zweite Gleichung ist eine Bilanz für die Energie $W_n \propto A_n^2$, wobei der erste Term die Resonatorverluste, der zweite die Verstärkung durch das aktive Medium repräsentiert.

3.7.3 Materiegleichungen

Vielmodenfall: Faßt man die Ergebnisse aus Kapitel (3.6) zusammen, so lauten die vollständigen Entwicklungsgleichungen der Populationsmatrix eines 2-Niveau-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \lambda_1 - \Gamma_1 \rho_{11} + \left(\frac{i}{2} \sum_n \zeta_n^* \exp(i\omega_n t) u_n \rho_{21} + cc. \right) \\ \dot{\rho}_{22} &= \lambda_2 - \Gamma_2 \rho_{22} - \left(\frac{i}{2} \sum_n \zeta_n^* \exp(i\omega_n t) u_n \rho_{21} + cc. \right) \\ \dot{\rho}_{21} &= \dot{\rho_{12}}^* = -(i\omega_{21} + \beta)\rho_{21} - \frac{i}{2} \sum_n \zeta_n \exp(-i\omega_n t) u_n (\rho_{22} - \rho_{11}), \\ \zeta_n &= \frac{\mathbf{d_{21}} \cdot \mathbf{e}}{\hbar} A_n e^{-i\phi_n} \end{aligned} \tag{3.170}$$

Sie beinhalten Anregungs-, Zerfalls- und Laserprozesse. Für das elektrische Feld wurden die positiven Frequenzanteile aus der Modenentwicklung (3.153) eingesetzt. Diese Gleichungen bestimmen die Polarisation im Vielmodenfall. Störungstheoretische Behandlungen dieses Problems findet man z.B. in der oben angegeben Literatur.

Einmodenfall: Sehr viel einfachere Verhältnisse liegen im Einmodenfall vor. Hierbei wird angenommen, daß die Resonatorgüte bzw. die Verstärkung für alle anderen

Moden so klein ist, daß diese vernachlässigt werden können. Mit der Schreibweise aus (3.137) und unter Verzicht auf den Modenindex lauten die Materiegleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= \lambda_1 - \Gamma_1\rho_{11} + \left(\frac{i}{2}\varrho u\hat{\rho}_{21} + cc.\right) \\
\dot{\rho}_{22} &= \lambda_2 - \Gamma_2\rho_{22} - \left(\frac{i}{2}\varrho u\hat{\rho}_{21} + cc.\right) \\
\dot{\hat{\rho}}_{21} &= (\dot{\hat{\rho}}_{12})^* = -(\beta + i\Delta)\hat{\rho}_{21} - \frac{i}{2}\varrho u(\rho_{22} - \rho_{11}), \qquad (3.171) \\
\rho_{21} &= \hat{\rho}_{21}\, e^{-i(\omega t - \Phi)}, \qquad \zeta = \varrho e^{i\Phi}. \qquad (3.172)
\end{aligned}$$

Im Unterschied zum Vielmodenfall enthalten diese Gleichungen keine schnellen Zeitabhängigkeiten mehr. Man kann sie durch, wie man sagt, adiabatische Näherung weiter vereinfachen. Dies führt zu Ratengleichungen für den Einmodenlaser.

3.7.4 Adiabatische Näherung

Die adiabatische Näherung geht von der allgemeinen Tatsache aus, daß rasch relaxierende Größen sehr schnell einen Gleichgewichtszustand erreichen, der durch die momentanen Werte der langsam veränderlichen Größen bestimmt wird. Man spricht dann von einem quasistatischen Gleichgewicht. Ein einfaches Beispiel dieser Art ist die erzwungene Schwingung einer gedämpften Feder. Nach einer kurzen Einschwingphase klingen die Eigenschwingungen der Feder ab und die Auslenkung ist proportional zur erregenden Kraft. Ändert sich die Kraft nur langsam, so folgt die Auslenkung dem Kräftegleichgewicht zwischen anregender und rücktreibender Kraft.

Phasenrelaxation: Nimmt man an, daß sich die Besetzungen nur langsam im Vergleich zur Phasenrelaxationszeit β^{-1} ändern, so erhält man für $\hat{\rho}_{21}$ die Lösung

$$\hat{\rho}_{21} = const\ \exp\left(-[\beta + i\Delta]t\right) - \frac{i}{2}\varrho u\frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\beta + i\Delta}. \qquad (3.173)$$

Die gedämpfte Lösung der homogenen Gleichung kann für Zeiten $t \gg \beta^{-1}$ vernachlässigt werden und es verbleibt die quasistatische Gleichgewichtslösung

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{21} &= -\frac{i}{2}\varrho u\frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{\beta + i\Delta}, = -\frac{\varrho u}{4}\left(\frac{\Delta}{\beta} + i\right) LD \qquad (3.174) \\
L &= \frac{2\beta}{\beta^2 + \Delta^2}, \quad \Delta = 2\pi(\nu_{21} - \nu), \quad D = (\rho_{22} - \rho_{11}).
\end{aligned}$$

wobei $L(\nu)$ die Lorentz-Linienformfunktion (2.171) und D die Besetzungsinversion bezeichnen.

Ratengleichungen: Eliminiert man $\hat{\rho}_{21}$ aus (3.171) unter Verwendung der quasistatischen Gleichgewichtslösung so erhält man die Ratengleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \lambda_1 - \Gamma_1\rho_{11} + RD, && (3.175)\\ \dot{\rho}_{22} &= \lambda_2 - \Gamma_2\rho_{22} - RD, && (3.176)\\ R &= \frac{\varrho^2 u^2}{4} L, \end{aligned}$$

für die Änderungen der Besetzungen unter dem Einfluß von Pumpquelle, Stößen und Laserstrahl, wobei R die Übergangsrate für die induzierte Emission bzw. Absorption darstellt.

Übergangsrate: Die Übergangsrate R ist intensitäts- , orts- und frequenzabhängig. Diese Abhängigkeiten werden durch die Faktoren $\varrho(A_n^2)$, $u(z)$ und $L(\nu - \nu_{21})$ zum Ausdruck gebracht. Mit wachsender Intensität kommt es zu einem Abbau der Inversion und damit der Verstärkung (Sättigung). Diese Sättigung kann ortsabhängig (räumliches Lochbrennen durch eine stehende Welle) und frequenzabhängig (spektrales Lochbrennen bei inhomogener Linienverbreiterung) sein.

Die Übergangsrate R kann durch den Einsteinschen B-Koeffizienten (3.105) ausgedrückt werden. Bezeichnet $W(\nu)$ die Energiedichte der einfallenden Welle mit der Frequenz ν so folgt ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4}\frac{|\mathbf{d_{21}}\cdot\mathbf{e}|^2\mathbf{A^2u^2}}{\hbar^2} L(\nu)\\ &\rightarrow \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} W(\nu)L(\nu) = B_{21}W(\nu)L(\nu). && (3.177) \end{aligned}$$

Wie bei der Umformung (3.47) wurde hier eine Richtungsmittelung über die statistisch verteilten Lagen der Dipolmomente durchgeführt. Die Übergangsrate (3.177) gilt für schmalbandige Strahlung (Bandbreite $\ll$ Linienbreite), die Übergangsrate aus (3.91) für breitbandige Strahlung (Bandbreite $\gg$ Linienbreite). Eine einheitliche Definition der Übergangsrate für eine beliebige Bandbreite der spektralen Energiedichte $\rho(\nu)$ und eine beliebige Linienformfunktion $S(\nu)$ des atomaren Überganges erhält man mit

$$\begin{aligned} R &= B_{21}\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S(\nu)\rho(\nu)\\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} B_{21}\rho(\nu_{21}) & Breitbandstrahlung \\ B_{21}W(\nu)S(\nu) & Schmalbandstrahlung \end{array} \right\}. && (3.178) \end{aligned}$$

In den angegebenen beiden Grenzfällen wird jeweils die breitere Verteilung bei der Frequenz des Maximums der schmäleren Verteilung ausgewertet.

Die Übergangsrate wird auch häufig durch den Wirkungsquerschnitt σ bezogen auf den Fluß der einfallenden Photonen $\Phi u^2 = I/(\hbar\omega) = cW/(\hbar\omega)$ ausgedrückt. Durch Vergleich mit (3.177) findet man

$$R = \sigma\Phi u^2, \qquad \sigma = \frac{\hbar\omega}{c} B_{21} S(\nu) = \frac{2\pi}{3}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\frac{\omega}{c} S(\nu). \tag{3.179}$$

Besetzungsrelaxation: Die Ratengleichungen können selbst wieder durch die adiabatische Näherung gelöst werden, wenn sich die Übergangsrate R im Vergleich zu den Besetzungsrelaxationszeiten nur langsam ändert. Unter Vernachlässigung der Zeitableitungen folgen aus den Ratengleichungen (3.175) die Gleichgewichtsbedingungen

$$\Gamma_1\rho_{11} = \lambda_1 + RD, \qquad \Gamma_2\rho_{22} = \lambda_2 - RD. \tag{3.180}$$

Zu Beginn der Lasertätigkeit kann die induzierte Emissionsrate vernachlässigt werden. Aus dem Gleichgewicht zwischen den Anregungs- und Zerfallsraten folgen dann die Anfangsbesetzungen

$$\rho_{ii_0} = \frac{\lambda_i}{\Gamma_i}, \qquad D_0 = \frac{\lambda_2}{\Gamma_2} - \frac{\lambda_1}{\Gamma_1}. \tag{3.181}$$

D_0 nennt man die *ungesättigte Besetzungsinversion.*

Im allgemeinen Fall ergibt sich aus (3.180) eine geringere Inversion

$$\begin{aligned} D &= \frac{D_0}{1 + R/R_s} = \frac{D_0}{1 + u^2\Phi/\Phi_s} \\ R_s &= \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \qquad \Phi_s = \frac{R_s}{\sigma}. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Diese Sättigung tritt ein, wenn die Übergangsrate R die Größenordnung der Sättigungsrate R_s erreicht bzw. der Photonenfluß Φ den Sättigungsfluß Φ_s.

Polarisation: Die adiabatische Näherung kann nun zur Berechnung der Polarisation (3.141) verwendet werden. Mit (3.175) und $E(z,t) = Aue^{-i(\omega t+\phi)}$ gilt

$$\begin{aligned} P &= 2(\mathbf{d_{12}}\cdot\mathbf{e})\,\rho_{21} = \mathbf{2}(\mathbf{d_{12}}\cdot\mathbf{e})\,\hat{\rho}_{21}\,\mathbf{e^{-i(\omega t-\Phi)}} \\ &= -\frac{\mathbf{d_{12}}\cdot\mathbf{e}}{2}\left(\frac{\Delta}{\beta} + i\right) LD\varrho u e^{-i(\omega t-\Phi)} \\ &= -\frac{|\mathbf{d_{12}}\cdot\mathbf{e}|^2}{2\hbar}\left(\frac{\Delta}{\beta} + i\right) LDE(z,t) \end{aligned} \tag{3.183}$$

Unter Verwendung von (3.182) und (3.179) folgt für die richtungsgemittelte Polarisation bei quasistatischer Besetzung

$$\begin{aligned} P &= \frac{-c}{4\pi\omega}\left(\frac{\Delta}{\beta}+i\right)\sigma D E(z,t) \\ &= \frac{-c}{4\pi\omega}\left(\frac{\Delta}{\beta}+i\right)\frac{\sigma D_0 E(z,t)}{1+u^2\Phi/\Phi_s}. \end{aligned} \tag{3.184}$$

Zur Diskussion dieses Ergebnisses sei zunächst einfachheitshalber angenommen, daß die Modenentwicklung nicht nach stehenden Wellen sondern nach fortschreitenden ebenen Wellen durchgeführt wird. Der Fall stehender Wellen folgt im nächsten Abschnitt. Dann kann man $u^2 = |e^{ikz}| = 1$ setzen. Der Vorfaktor vor $E(z,t)$ in (3.184) beschreibt dann die Suszeptibilität dieser Mode. Insbesondere erhält man für den Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Re\{\chi\} &= -\frac{|\mathbf{d_{21}}\cdot\mathbf{e}|^2}{\hbar}\,\frac{\Delta}{\beta^2+\Delta^2}\,\frac{D_0}{1+u^2\Phi/\Phi_s}, \\ \Im\{\chi\} &= -\frac{|\mathbf{d_{21}}\cdot\mathbf{e}|^2}{\hbar}\,\frac{\beta}{\beta^2+\Delta^2}\,\frac{D_0}{1+u^2\Phi/\Phi_s}. \end{aligned} \tag{3.185}$$

Der Imaginärteil bestimmt nach (3.167) den Verstärkungskoeffizienten

$$g = \sigma D = \frac{g_0}{1+u^2\Phi/\Phi_s}, \qquad g_0 = \sigma D_0 \tag{3.186}$$

Bemerkung 3.5 (Dichtematrixtheorie der Suszeptibilität)

1. *Die Dichtematrixtheorie beinhaltet im linearen Bereich eine quantenmechanische Begründung des Lorentzmodells unter Berücksichtigung von Resonanzen und deren Dämpfung.*

2. *Im Unterschied zur kohärenten Dynamik besitzt die Suszeptibilität einen Imaginärteil, der proportional ist zur Dämpfungskonstante. Die adiabatische Näherungslösung (3.183) unterscheidet sich aber auch für $\beta \to 0$ von der exakten Lösung (3.67) für ein stoßfreies Atom. Übereinstimmung liegt nur im linearen Grenzfall vor, da hier die Besetzung in beiden Näherungen (adiabatisch/linear) als konstant angenommen wird. Das nichtlineare Sättigungsverhalten ist nicht vergleichbar.*

3. *Verstärkung ($g > 0$) erfordert Besetzungsinversion ($D > 0$).*

4. *Die Sättigung eines Überganges begrenzt die Lebensdauer der Besetzung im angeregten Niveau. Die entsprechende Linienverbreiterung wird als* Leistungsverbreiterung *bezeichnet. Aus (3.185) erhält man die effektive Dämpfungskonstante*

$$\beta_{power} = \beta\sqrt{1+\frac{\varrho}{2\beta R_s}}. \tag{3.187}$$

3.7.5 Einmodenlaser

Die Feldgleichungen des Einmodenlasers werden nun im Rahmen der adiabatischen Näherung angegeben und diskutiert. Dazu ist zunächst die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{\int_0^L \mathrm{d}z\ P(z,t)u(z)}{\int_0^L \mathrm{d}z\ E(z,t)u(z)} \tag{3.188}$$

mit dem Ausdruck (3.184) für die Polarisation zu berechnen. Bei einer Resonatormode, $u(z) = \sin kz$, ist dabei die Ortsabhängigkeit des Nenners zu berücksichtigen. Solange die Lichtintensität klein ist gegenüber der Sättigungsintensität kann man den Nenner entwickeln und erhält bis zur dritten Ordnung in der Feldstärke

$$P = -\frac{c}{4\pi\omega}\left(\frac{\Delta}{\beta}+i\right)\sigma D_0\left(1-u^2\Phi/\Phi_s\right)E(z,t). \tag{3.189}$$

Zur Auswertung der Integrale kann man außerdem annehmen, daß sich die ungesättigte Inversion über eine Lichtwellenlänge nur schwach ändert. Dann können die Funktionen

$$\begin{aligned} u_n^2 &= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2k_n z\right)\right) \\ u_n^4 &= \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos\left(2k_n z\right)+\frac{1}{8}\cos\left(4k_n z\right) \end{aligned}$$

bei der Integration durch ihre Mittelwerte ersetzt werden,

$$\begin{aligned} \int_0^L dz\ u_n^2 &= \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}\int_0^L dz\ D_0 u_n^2 &= \frac{2}{L}\int_0^L dz\ D_0\frac{1}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L dz\ D_0 = \overline{D_0}, \\ \frac{2}{L}\int_0^L dz\ D_0 u_n^4 &= \frac{2}{L}\int_0^L dz\ D_0\frac{3}{8} = \frac{1}{L}\int_0^L dz\ D_0\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\overline{D_0}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Ausdrücke findet man

$$\chi = -\frac{c}{4\pi\omega}\left(\frac{\Delta}{\beta}+i\right)g, \qquad g = g_0\left(1-\frac{3}{4}\Phi/\Phi_s\right), \qquad g_0 = \sigma\overline{D_0}. \tag{3.190}$$

Die Kleinsignalvertärkung g_0 wird durch den Mittelwert $\overline{D_0}$ bestimmt. Die Sättigung ist um den Faktor 3/4 kleiner als bei der fortschreitenden Welle, da nur in den Maxima der stehenden Welle die volle Intensität erreicht wird. Diesen Effekt bezeichnet man als räumliches Lochbrennen. Setzt man (3.190) in die Feldgleichungen (3.164) ein, so erhält man die Gleichungen 3. Ordnung für den Einmodenlaser

$$\partial_t\varphi = \Omega - \omega + \frac{gc}{2\beta}\Delta, \tag{3.191}$$

$$\partial_t A = \frac{1}{2}\left(gc - \Omega/Q\right)A. \tag{3.192}$$

Schwellwertbedingung: Die Schwelle für eine stationäre Laseroszillation wird erreicht, wenn die maximal mögliche Verstärkung gerade die Verluste ausgleicht. Maximale Verstärkung erhält man im Kleinsignalbereich bei exakter Resonanz, d.h. für

$$\frac{3}{4}\Phi/\Phi_s \ll 1, \qquad \Delta = 0. \tag{3.193}$$

Unter diesen Bedingungen besitzen die Gleichungen (3.191) die stationäre Lösung

$$\omega = \Omega, \qquad \sigma|_{\Delta=0}\overline{D_S}\; c = \Omega/Q. \tag{3.194}$$

Nach der ersten Gleichung muß der Resonator eine Eigenfrequenz bei der Resonanzfrequenz des Mediums besitzen. Setzt man dies in der zweiten Gleichung ein, so ergibt sich die Schwellwertinversion

$$\overline{D_S} = \frac{\omega}{c\sigma|_{\Delta=0}Q} = \frac{3\hbar\beta}{4\pi|d_{21}|^2 Q}. \tag{3.195}$$

Dies ist die minimale Inversion, die für den stationären Betrieb des Lasers notwendig ist. Unterhalb des Schwellwertes gibt es nur die stationäre Lösung $A = 0$, d.h. die Laserintensität verschwindet. Oberhalb des Schwellwertes gibt es stationäre Lösungen mit nichtverschwindender Intensität, deren Eigenschaften im folgenden untersucht werden.

Stationäre Laseroszillationen Im stationären Fall ist $\partial_t A = \partial_t\phi = 0$ und die Lasergleichungen (3.191) vereinfachen sich zu

$$\omega = \Omega + \frac{gc}{2\beta}\Delta, \qquad gc = \Omega/Q. \tag{3.196}$$

Mit (3.190) kann aus der 2. Gleichung der stationäre Photonenfluß ϕ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} g_0 c \left(1 - \frac{3}{4}\Phi/\Phi_s\right) &= \frac{\Omega}{Q} \\ g_0 c \frac{Q}{\Omega} &= 1 + \frac{3}{4}\frac{\Phi}{\Phi_s} \\ \Phi &= \frac{4}{3}\Phi_s \left(\frac{g_0 c Q}{\Omega} - 1\right) \end{aligned} \tag{3.197}$$

Bei der 2. Umformung wurde der für die Sättigung verantwortliche Klammerausdruck mit positivem Vorzeichen in den Nenner zurück und von dort auf die rechte Seite gebracht. Diese Darstellung ist in der betrachteten Ordnung äquivalent, entspricht aber besser dem Sättigungsverhalten der vollen Lösung. Ersetzt man noch die Verlustrate durch die Schwellwertvertärkung (3.194) und die Kleinsignalverstärkung durch den Wirkungsquerschnitt (3.190) so folgt

$$\Phi = \frac{4}{3}\Phi_s \left(\frac{\sigma\overline{D_0}}{\sigma|_{\Delta=0}\overline{D_S}} - 1\right) = \frac{4}{3}\Phi_s \left(\frac{L\beta\omega\overline{D_0}}{2\omega_{21}\overline{D_S}} - 1\right) \tag{3.198}$$

Der Photonenfluß steigt also oberhalb der Schwelle linear mit der Besetzungsinversion an. Etwa 20% oberhalb der Schwelle wird der Photonenfluß so groß, daß die Gültigkeitsgrenze für die Theorie 3. Ordnung erreicht wird. Das anschließende Sättigungsverhalten muß mit der vollen Suszeptibilität berechnet werden.

Die Auflösung der 1. Gleichung in (3.196) nach der Frequenz ergibt,

$$\begin{aligned} \omega - \Omega &= \frac{gc}{2\beta}(\omega_{21} - \omega) = \frac{\Omega}{2\beta Q}(\omega_{21} - \omega) \\ \omega &= \frac{\beta\Omega + \frac{\Omega}{2Q}\omega_{21}}{\beta + \frac{\Omega}{2Q}} \end{aligned} \tag{3.199}$$

Im 2. Schritt wurde die Gleichgewichtsbedingung für g verwendet. Die Frequenz des Laserlichtes ist ein Mittelwert zwischen den Frequenzen Ω des Resonators und ω_{21} des Atoms. Die Gewichtsfaktoren sind die jeweiligen Lebensdauern. Normalerweise ist die atomare Lebensdauer klein gegenüber der Lebensdauer der Mode, so daß die die Lichtfrequenz nahe bei der Resonatorfrequenz liegt mit einer kleinen Verschiebung hin zur atomaren Frequenz. Man sagt, daß das Medium eine Anziehung der Lichtfrequenz hervorruft (engl.: frequency pulling).

3.8 Kohärente Pulsausbreitung

Im letzten Abschnitt wurde angenommen, daß die Wechselwirkungszeiten des Lichtes mit dem Medium größer als die atomaren Lebensdauern sind. In diesem Fall

ist die adiabatische Näherung anwendbar, auf der wiederum die Wirkungsweise der üblichen Laser beruht.

Im folgenden wird der entgegengesetzte Grenzfall kurzer intensiver Laserpulse betrachtet, bei dem die Wechselwirkungszeiten kleiner als die atomaren Lebensdauern sind. Da hier die atomaren Zerfallsprozesse vernachlässigt werden können, wird die Wechselwirkung allein durch die nichtlineare kohärente Dynamik bestimmt. Die nichtlineare kohärente Wechselwirkung eines 2-Niveau Atoms mit einem vorgegebenen Feld wurde bereits im Abschnitt (3.4.3) dargestellt. Jetzt sollen die Grundgleichungen für die selbstkonsistente kohärente Ausbreitung von Laserpulsen abgeleitet und in einfachen Fällen diskutiert werden. Dabei wird ein inhomogen verbreitertes Medium aus 2-Niveau-Atomen angenommen. Die Voraussetzung einer inhomogenen Verbreiterung ist notwendig, da mit der Beschränkung auf die kohärente Dynamik gleichzeitig die homogene Linienverbreiterung vernachlässigt wird. Eine endliche Linienbreite ist aber erforderlich, um das Abklingverhalten der zeitabhängigen Suszeptibilität des Mediums festzulegen.

Die kohärente Dynamik steht im Mittelpunkt des Interesses bei vielen Anwendungen der zeitaufgelösten Spektroskopie mit kurzen Laserpulsen. Kohärenzphänomene spielen bei der Ausbreitung einzelner Pulse und bei Korrelationsmeßungen mit zeitverzögerten Pulsen (Pump-Probe-Experimente) eine wichtige Rolle. Stellvertretend werden hier die *selbstinduzierte Transparenz*, das *Pulsflächentheorem* und die *Photonenechos* besprochen.

Abschließend sei bemerkt, daß beim Begriff Kohärenz zwischen der atomaren Kohärenz und der Kohärenz des Lichtes unterschieden werden muß. Die semiklassische Lasertheorie zeigt bereits, daß zur Erzeugung von kohärentem Licht die atomare Kohärenz nicht notwendig ist. Allgemeiner kann man zeigen, daß quantenmechanisch kohärentes Licht mit einer deterministischen klassischen Stromdichte erzeugt wird. Die Fragestellung nach der Kohärenz des Lichtes wird erst später erörtert. Diesem Abschnitt liegt die strengere Voraussetzung der atomaren Kohärenz zugrunde.

3.8.1 Grundgleichungen der kohärenten Pulsausbreitung

Modellannahmen: Im Rahmen einer skalaren Theorie wird ein Laserpuls

$$E(z,t) \;=\; E_0(z,t)\exp\left(ikz - i\omega t\right), \qquad k=\omega/c \tag{3.200}$$

mit einer festen Ausbreitungs- (z) und Polarisationsrichtung ($\mathbf{e}$) betrachtet. Im Gegensatz zur Normalmodenentwicklung der Lasertheorie beschreibt der Ansatz (3.200) eine *räumlich und zeitlich* modulierte ebene Welle. Die Ausbreitung erfolgt in einem Medium aus 2-Niveau-Atomen, deren Übergangsfrequenzen gemäß einer Linienformfunktion $S(\nu')$ verteilt sind. Die im Medium hervorgerufene mittlere Stromdichte bzw Polarisation besitzt daher die Darstellung

$$j(z,t) \;=\; \partial_t P(z,t),$$

$$\begin{aligned} P(z,t) &= P_0(z,t)\exp(ikz - i\omega t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\ S(\nu')\ 2\mathbf{e}\cdot\mathbf{d_{12}}\ \rho_{\mathbf{21}}(\nu',\mathbf{z},\mathbf{t}). \end{aligned} \tag{3.201}$$

Die Entwicklung der Populationsmatrix ρ wird durch die Gleichungen (3.122) für die kohärente Dynamik eines 2-Niveau-Systems bestimmt wird.

SVE-Näherung: Die allgemeine Wellengleichung (3.158) für das skalare elektrische Feld läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn man annimmt, daß sich die Einhüllenden $E_0(z,t)$ des elektrischen Feldes und $P_0(z,t)$ der Polarisation nur langsam im Vergleich zum Phasenfaktor $\exp(ikz - i\omega t)$ ändern. In Analogie zur SVA-Näherung wird diese Annahme als SVE-Näherung bezeichnet, wobei sich die Abkürzung auf den englischen Fachausdruck "slowly varying envelope approximation" bezieht. Mit den entsprechenden Näherungsausdrücken

$$\begin{aligned} \partial_z^2 E - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 E &\approx 2ik\left(\partial_z E_0 + \frac{1}{c}\partial_t E_0\right)\exp(ikz - i\omega t) \\ \partial_z^2 P &\approx -\omega^2 P \end{aligned} \tag{3.202}$$

folgt für die Einhüllenden

$$\begin{aligned} \partial_z E_0 + \frac{1}{c}\partial_t E_0 &= 2\pi ikP_0, \qquad \hat{\rho}_{21} = \rho_{21}\exp(-ikz + i\omega t), \\ P_0(z,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\ S(\nu')\ 2\mathbf{e}\cdot\mathbf{d_{12}}\hat{\rho}_{\mathbf{21}}(\nu',\mathbf{z},\mathbf{t}). \end{aligned} \tag{3.203}$$

Kohärente Dynamik: Die kohärente Dynamik der Atome im Feld des Laserpulses (3.200) wird durch die 2-Niveau-Gleichungen (3.122) beschrieben, wobei dort die Phase $-\omega t$ durch $kz - \omega t$ zu ersetzen ist. Für die Variable $\hat{\rho}_{21}$ und die Besetzungsinversion $D = \rho_{22} - \rho_{11}$ gelten dann die Gleichungen

$$\dot{\hat{\rho}}_{21} = -i\Delta\hat{\rho}_{21} - \frac{i}{2}D\zeta, \qquad \partial_t D = 2\dot{\rho}_{22} = -i\zeta^*\hat{\rho}_{21} + c.c.\ . \tag{3.204}$$

Dieses Gleichungssystem muß noch durch Anfangsbedingungen, die zu einer Zeit t_0 vor dem Eintreffen des Pulses vorliegen, ergänzt werden. Nimmt man an, daß die Polarisation zum Anfangszeitpunkt verschwindet und die Inversion für alle Atome des Mediums gleich ist, so gilt:

$$\hat{\rho}_{21}(\nu',t_0) = 0, \qquad D(\nu',t_0) = D_0. \tag{3.205}$$

Durch formale Integration der ersten Gleichung kann die Variable $\hat{\rho}_{21}$ aus dem Gleichungssystem (3.204) eliminiert werden. Man erhält dann die äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{21} &= \frac{-i}{2}\int_{-\infty}^{t} dt'\ D(t')\zeta(t')\ e^{-i\Delta(t-t')} \\ \dot{D} &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} dt'\ D(t')e^{-i\Delta(t-t')}\zeta(t')\zeta^*(t) + c.c.\ . \end{aligned} \tag{3.206}$$

Wegen $\zeta(t) = 0$ für $t < t_0$ ist die Anfangsbedingung für $\hat{\rho}_{21}$ bereits erfüllt. Diese Darstellung der Entwicklungsgleichungen ist besonders zweckmäßig, da man eine zeitabhängige Suszeptibilität des Mediums definieren und deren Zeitentwicklung angeben kann.

Suszeptibilität: Mit dem Ausdruck aus (3.206) für die Variable $\hat{\rho}_{21}$ erhält man

$$P_0 \;=\; \int_{-\infty}^{t} dt'\; \chi(z, t-t', t')\; E_0(t') \tag{3.207}$$

mit der Suszeptibilität

$$\chi(z,T,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\; \alpha(\nu',T)\; D(\nu',t), \qquad \alpha \;=\; -\frac{i}{\hbar}\,|\mathbf{d_{21}}\cdot\mathbf{e}|^2\;\mathbf{S}(\nu')\;\mathbf{e^{-i\Delta T}}.$$

Die Polarisation zur Zeit t hängt hier von den elektrischen Feldstärken zu allen früheren Zeitpunkten $t' < t$ ab. In einem zeitunabhängigen Medium hängt die Suszeptibilität nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ ab. Die explizite Abhängigkeit von t' ist eine Folge der zeitabhängigen Besetzungsinversion.

Die Entwicklungsgleichung für die Besetzungsinversion aus (3.206) läßt sich nun auch als Entwicklungsgleichung für die Suszeptibilität ausdrücken. Leitet man $\chi(z,T,t)$ nach t ab, so ergibt sich unter Beachtung der Identitäten

$$\alpha(\nu', T \pm t \mp t') \;=\; \alpha(\nu',T)e^{\mp i\Delta(t-t')} \tag{3.208}$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\partial_t\chi(z,T,t) \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\; \alpha(\nu',T)\;\partial_t D(\nu',t) \\
&=\; -\frac{|\mathbf{d_{21}}\cdot\mathbf{e}|^2}{2\hbar^2}\int_{-\infty}^{t} dt'\;\{\chi(z,T+t-t',t')\;E_0(t)E_0^*(t') + \\
&\qquad\qquad \chi(z,T-t+t',t')\;E_0^*(t)E_0(t')\}, \\
\chi(z,T,t_0) \;&=\; D_0\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\;\alpha(\nu',T).
\end{aligned} \tag{3.209}$$

Die Feldgleichung der SVE-Näherung (3.203) in Verbindung mit der Entwicklungsgleichung (3.209) für die Suszeptibilität bilden die Grundgleichungen zur Beschreibung der kohärenten Pulsausbreitung in einem inhomogen verbreiterten Medium.

3.8.2 Pulsflächentheorem

Für reelle Lösungen $\zeta(z,t) = \zeta^*(z,t) = \varrho(z,t)$ der Pulsgleichungen gilt die *Pulsflächengleichung von MacCall und Hahn* (1967):

$$\frac{d}{dz}\Theta \;=\; \frac{1}{2}g_0\;\sin(\Theta), \qquad \Theta(z) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\;\varrho(z,t). \tag{3.210}$$

Hierbei ist g_0 die Kleinsignalverstärkung (3.190) und $\Theta(z)$ wird als *Pulsfläche* bezeichnet. Die Herleitung dieser Gleichung wird am Ende dieses Abschnittes angegeben.

Für kleine Feldamplituden folgt aus (3.210) mit $sin\Theta \approx \Theta$ ein exponentielles Wachstum ($g_0 > 0$) bzw. Abklingen ($g_0 < 0$) der Pulsfläche, in Einklang mit dem bekannten Beerschen-Gesetz. Im nichtlinearen Bereich wächst bzw. fällt die Pulsfläche bis asymptotisch eine der stationären Lösungen $\Theta = n\pi$ erreicht wird. Betrachtet man zum Beispiel Ausbreitung in positiver z-Richtung in einem absorbierenden Medium ($g_0 < 0$) so entwickelt sich die Pulsfläche hin zum nächsten geradzahligen Vielfachen von π. Bei einem Anfangswert im Intervall $0 < \Theta_0 < \pi$ nimmt Θ mit wachsendem z ab, bis asymptotisch der Wert $\Theta = 0$ erreicht wird. Bei Pulsen mit einer überall positiven Einhüllenden folgt daraus die vollständige Absorption. Liegt der Anfangswert jedoch im Intervall $\pi < \Theta_0 < 2\pi$ so nimmt Θ bis zum Wert 2π zu. Pulse mit der Pulsfläche 2π können das Medium mit konstanter Pulsfläche durchdringen. Dieses Phänomen wird als *selbstinduzierte Transparenz* bezeichnet. Die Auszeichnung der 2π - *Pulse* ergibt sich aus Tatsache, daß die resonanten Atome im Verlauf des Pulses genau eine Rabioszillation ausführen können. Dabei wird die zunächst absorbierte Energie wieder vollständig emittiert und die ursprüngliche Besetzung des Atoms wiederhergestellt.

Bei kohärenten Pulsen ist die Pulsfläche ein für die Spektroskopie wichtiger Parameter, der zusätzlich zur Lichtfrequenz und Lichtintensität beachtet werden muß. Zwischen der Pulsfläche und der Pulsenergie

$$W(z) \;=\; \frac{c}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ |E_0(z,t)|^2 \tag{3.211}$$

besteht ein wesentlicher Unterschied, da erstere durch die Einhüllende, letztere nur durch deren Betrag bestimmt wird. Bei konstanter Pulsfläche kann z.B. die Pulsenergie verstärkt werden, wenn gleichzeitig ein Vorzeichenwechsel in der Einhüllenden vorliegt.

Zusätzlich zur Erhaltung der Pulsfläche können spezielle Pulse (Hyperbelsekans-Profil) ihre Form beibehalten. Sie breiten sich in einem absorbierenden Medium ungehindert mit einer reduzierten Geschwindigkeit aus und hinterlassen alle Atome im Ausgangszustand unabhängig von der Verstimmung zwischen der Licht- und der Übergangsfrequenz.

Beweis des Pulsflächentheorems: Multipliziert man (3.203) mit $\mathbf{d_{21}} \cdot \mathbf{e}/\hbar$ und integriert bezüglich t von $-\infty$ bis $+\infty$ so folgt

$$\partial_z\Theta \;=\; 2\pi ik\int_{-\infty}^{+\infty} dt\int_{-\infty}^{t} dt'\ \chi(z,t-t',t')\ \varrho(z,t') \tag{3.212}$$

Dabei verschwindet das Integral von $\partial_t E_0(z,t)$ auf der linken Seite der Gleichung, da bei endlicher Pulsdauer $E_0(z,\pm\infty) = 0$ gilt. Durch Vertauschen der Integrationen

und die Substitution $T = t - t',\ dT = dt$ erhält man

$$\begin{aligned}
\partial_z \Theta &= 2\pi i k \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\ \varrho(z,t') \int_{t'}^{+\infty} dt\ \chi(z, t-t', t') \\
&= 2\pi i k \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\ \varrho(z,t') \int_{0}^{+\infty} dT\ \chi(z, T, t') \\
&= 2\pi i k \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\ \varrho(z,t') \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dT\ \chi(z, T, t')
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß $-\infty < t' < t,\ -\infty < t < +\infty$ und $t' < t < +\infty,\ -\infty < t' < +\infty$ dasselbe Integrationsgebiet bezeichnen. Beim letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß die Suszeptibilität (3.208) nach Voraussetzung rein imaginär sein muß und daher die Beziehung $\chi(z,T,t) = -\chi(z,T,t)^* = \chi(z,-T,t)$ erfüllt. Damit solche Lösungen tatsächlich existieren muß man voraussetzen, daß die Lichtfrequenz genau auf das Maximum der Linienformfunktion abgestimmt ist und diese symmetrisch ist: $S(\nu - \Delta/2\pi) = S(\nu + \Delta/2\pi)$. Die Besetzungsinversion erfüllt dieselbe Symmetrie, da sie für relle Felder nach (3.206) nicht vom Vorzeichen der Verstimmung abhängt. Unter dieser Voraussetzung kann die Behauptung leicht bewiesen werden, indem man in der Definitionsgleichung (3.208) das Vorzeichen der Verstimmung durch einen Wechsel der Integrationsvariablen ändert.

Setzt man (3.208) ein, so folgt unter Verwendung der Fourierschen Integralformel

$$f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\ f(\nu') e^{-2\pi i\ (\nu' - \nu)\ t} \tag{3.213}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dT\ \chi(z,T,t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} dT \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu'\ D(\nu',t')\ \alpha(\nu',T) \\
&= \frac{-i}{\hbar} |\mathbf{d_{21}} \cdot \mathbf{e}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{dT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}\nu'\ \mathbf{S}(\nu') \mathbf{D}(\nu', \mathbf{t}') \mathbf{e}^{-\mathbf{2\pi i}(\nu' - \nu)\mathbf{T}} \\
&= \frac{-i}{\hbar} |\mathbf{d_{21}} \cdot \mathbf{e}|^2 \mathbf{S}(\nu) \mathbf{D}(\nu, \mathbf{t}').
\end{aligned} \tag{3.214}$$

Zur Pulsflächenänderung tragen also nur diejenigen Atome bei, die sich in Resonanz mit der Frequenz des Lichtes befinden. Für diese Atome rotiert der Blochvektor in der 2,3-Ebene um die 1-Achse. Mit den Anfangsbedingungen (3.205) lautet die Lösung für die Besetzungsinversion

$$D(\nu,t) = D_0 \cos\vartheta(t), \qquad \vartheta(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\ \varrho(t'). \tag{3.215}$$

Die Substitution von (3.214) und (3.215) in (3.213) ergibt das gesuchte Ergebnis (3.210):

$$\begin{aligned} \partial_z \Theta &= 2\pi k \frac{|\mathbf{d_{21}} \cdot \mathbf{e}|^2}{\hbar} S(\nu) D_0 \, \frac{1}{2} \int_0^{+\Theta} d\vartheta \cos\vartheta \\ &= g_0 \frac{1}{2} \sin\Theta. \end{aligned} \tag{3.216}$$

Damit g_0 genau mit der Definition (3.190) der Kleinsignalverstärkung übereinstimmt muß die schon mehrfach angewandte Richtungsmittelung (3.39) des Dipolmomentes durchgeführt werden.

3.8.3 Photonenechos

Beim Photonenecho wird ein Medium im Grundzustand zuerst zur Zeit $t = 0$ durch einen $\pi/2$-Puls und danach zu einer Zeit $t = \tau$ nochmals durch einen π-Puls angeregt. Dann wird zur Zeit $t = 2\tau$ ein Puls vom Medium emittiert, den man als Echo bezeichnet.

Die Erklärung des Photonenechos kann sehr anschaulich im Bild des Blochvektors gegeben werden. Vor dem ersten Puls zeigt der Vektor in die negative 3-Richtung. Durch den ersten Puls erfolgt eine 90^0 Drehung um die 1-Achse, so daß am Ende des Pulses eine Ausrichtung in der 2-Richtung vorliegt. Während der Zeit τ rotiert der Vektor in der 1,2-Ebene um die 3-Achse, wobei die Winkelgeschwindigkeit nach (3.149) durch die Verstimmung der Atome bestimmt wird. Wegen der unterschiedlichen Resonanzfrequenzen in einem inhomogenen Medium tritt dabei ein rascher Zerfall der Polarisation ein. Der zweite Puls bewirkt eine 180^0- Drehung des Blochvektors um die 1-Achse. Dabei wird die Komponente R_2 durch $-R_2$ ersetzt. Nach den Blochgleichungen (3.149) ist dies gleichbedeutend mit einer Zeitumkehr. Daher wird nach der Zeit 2τ wieder der ursprüngliche Zustand erreicht, bei dem alle Vektoren entlang der 2-Achse ausgerichtet sind. Dabei wird für kurze Zeit eine genügend große Polarisation erzeugt, die als Echo nachgewiesen werden kann.

Kapitel 4

Quantentheorie der Strahlung

In der bisher betrachteten semiklassischen Theorie wurde das Licht durch eine elektromagnetische Welle beschrieben, die eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen darstellt. In vielen Fällen ist jedoch das Photonenbild des Lichtes notwendig oder hilfreich. Es stellt sich damit die Frage, wie man einer ebenen Welle $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$ Photonen mit dem Impuls $\hbar\boldsymbol{k}$ und der Energie $\hbar\omega$ zuordnen kann. Dieses Problem wurde durch die Quantenelektrodynamik (QED) gelöst. Das Photon wird darin als eine Besetzung von Energieeigenzuständen der Moden des Strahlungsfeldes gedeutet.

Die Quantenelektrodynamik beschreibt alle derzeit bekannten Wechselwirkungen zwischen elektrischen Ladungen und Photonen.

Da in der Optik meistens nur Intensitäten des Lichtes nachgewiesen werden, treten nichtklassische Eigenschaften des Lichtes selten in Erscheinung. Intensitätsmessungen beruhen auf dem Photoeffekt, d.h. der Auslösung eines Elektrons durch ein einfallendes Photon. Obwohl der Photoeffekt durch Einstein mit Hilfe der Photonenhypothese erklärt werden konnte, ist eine Quantisierung des Feldes zur Erklärung der Austrittsenergie des Elektrons streng genommen nicht notwendig. In der semiklassischen Theorie kann die Übergangsrate durch die Fermische Goldene Regel ausgedrückt werden. Diese zeigt, daß die Lichtfrequenz mit der Frequenz des Überganges des Elektrons übereinstimmen muß.

Einige Beispiele für nichtklassische Eigenschaften des Lichtes sind z.B.

- Spontane Emission
- Lamb-Verschiebung
- Intensitätsfluktuationen von Laserlicht an der Laserschwelle
- Photonen-Anti-Bunching

4.1 Quantisierung des Strahlungsfeldes

Zur Quantisierung des freien Strahlungsfeldes denkt man sich das Feld in einem großen Volumen eingeschlossen und entwickelt nach den Normalmoden des Hohlraumes. Dadurch erhält man ein diskretes System mit abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden. Als Normalmoden wählt man meist fortschreitende ebene Wellen, in der Lasertheorie sind aber auch stehende Wellen gebräuchlich. Die Amplituden der Normalmoden können formal als harmonische Oszillatoren aufgefaßt werden. Der Übergang zur Quantentheorie erfolgt, indem man die kanonische Quantisierung dieser harmonischen Oszillatoren durchführt. Dabei werden die Feldamplituden durch Operatoren ersetzt.

Das Prinzip der Quantisierung wird im folgenden zuerst am Beispiel einer fortschreitenden und einer stehenden Welle eingeführt. Danach wird die Normalmodenentwicklung für ein allgemeines Strahlungsfeld betrachtet.

4.1.1 Fortschreitende Welle

Ebene Welle: Die Normalmoden eines kastenförmigen Volumens V mit periodischen Randbedingungen sind ebene Wellen der Form,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\,\boldsymbol{e}\,\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{e} &= 1, \qquad \int dV\,\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 1, \qquad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k} = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Moden sind bezüglich dem Volumen V auf 1 normiert. Wegen der Transversalität der elektromagnetischen Wellen liegt der Polarisationsvektor $\boldsymbol{e}$ in einer Ebene senkrecht zum Ausbreitungsvektor.

Klassische Felder: Die klassischen elektromagnetischen Felder für eine fortschreitende ebene Welle mit dem Wellenvektor $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$ und der Frequenz $\omega = ck$ lauten in der komplexen Darstellung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) &= A(t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \qquad A(t) = A_0 e^{-i\omega t} \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A} = E(t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \qquad E(t) = E_0 e^{-i\omega t} = ikA(t) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = E(t)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wie bisher werden die physikalischen Felder durch den Realteil der komplexen Felder definiert,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \Re\{\boldsymbol{A}\}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \Re\{\boldsymbol{E}\}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \Re\{\boldsymbol{B}\}. \tag{4.3}$$

In der komplexen Ebene beschreiben die Amplituden der Felder eine Kreisbewegung, ihre Real- und Imaginarteile jeweils einfache harmonische Schwingungen. Setzt man $A = A_r + iA_i$, $E = E_r + iE_i$, $E_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\phi}$, so gilt

$$\begin{aligned} E_r &= -kA_i = \mathcal{E}_0 cos(\omega t - \phi), \\ E_i &= kA_r = -\mathcal{E}_0 sin(\omega t - \phi). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Schwingung der Amplitude genügt also den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}E_r = \omega E_i, \qquad \frac{d}{dt}E_i = -\omega E_r. \tag{4.5}$$

Klassische Feldenergie: Die Hamiltonfunktion für dieses Gleichungssystems muß so gewählt werden, daß sie mit der im Volumen V enthaltenen Feldenergie übereinstimmt. Diese berechnet sich zu

$$H = \frac{1}{8\pi}\int dV \left(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2\right) = \frac{1}{4\pi}\int dV\,\mathcal{E}^2 = \frac{|E|^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\left(E_r^2 + E_i^2\right) \tag{4.6}$$

Bei der Volumenintegration ist zu beachten, daß sich die räumlich periodischen Anteile der Energiedichte wegmitteln

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int dV\mathcal{E}^2 &= \frac{1}{16\pi}\int dV(E\boldsymbol{u} + E^*\boldsymbol{u}^*)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi}\int dV\left\{(E\boldsymbol{u})^2 + (E\boldsymbol{u})^{*2} + 2|E|^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*\right\} \\ &= \frac{1}{8\pi}|E|^2. \end{aligned}$$

Kanonische Variablen: Definiert man die kanonisch-konjugierten Variablen

$$q = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}E_i, \qquad p = \dot{q} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}E_r \tag{4.7}$$

so lassen sich die Gleichungen (4.5), (4.6) als Hamiltonsches System für einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz ω ausdrücken

$$\dot{q} = \partial_p H, \qquad \dot{p} = -\partial_q H = -\omega^2 q, \qquad H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right). \tag{4.8}$$

Umgekehrt ergeben sich aus den kanonischen Variablen die Feldamplituden zu

$$\begin{aligned} E_r &= -\sqrt{4\pi}\ p, \qquad E_i = \sqrt{4\pi}\ \omega q, \\ E &= E_r + iE_i = \sqrt{4\pi}\ i\left(\omega q + ip\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Kanonische Quantisierung: Die Quantisierung des Feldes erfolgt, indem die dynamischen Variablen p, q durch Operatoren ersetzt werden, welche der Vertauschungsrelation

$$[\hat{q}, \hat{p}] \;=\; i\hbar \tag{4.10}$$

genügen. Die quantenmechanischen Operatoren werden durch das Symbol $\hat{}$ von den korrespondierenden klassischen Variablen unterschieden. Der Hamiltonoperator des Feldes ist

$$\hat{H} \;=\; \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \tag{4.11}$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren: Anstelle der hermiteschen Operatoren $\hat{p}, \hat{q}$ verwendet man häufig nicht-hermitesche Operatoren $\hat{a}, \hat{a}^+$, die durch die lineare Transformation

$$\begin{aligned} \hat{a} \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \qquad \hat{a}^+ \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}), \\ \hat{q} \;&=\; \sqrt{\hbar/2\omega}(\hat{a} + \hat{a}^+), \qquad \hat{p} \;=\; i\sqrt{\hbar\omega/2}(\hat{a}^+ - \hat{a}), \end{aligned} \tag{4.12}$$

definiert werden. Sie genügen der Vertauschungsrelation

$$[\hat{a},\ \hat{a}^+] \;=\; 1 \tag{4.13}$$

und der Hamilton-Operator lautet damit

$$\hat{H} \;=\; \hbar\omega\frac{1}{2}(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) \;=\; \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}). \tag{4.14}$$

Im Hamilton-Operator ist die Reihenfolge der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ wesentlich. Die angegebene symmetrisierte Form erhält man durch Einsetzen von (4.12) in (4.11). Die zweite Form ist die sogenannte Normalordnung, bei der der Operator $\hat{a}^+$ links vom Operator $\hat{a}$ steht. Sie ergibt sich durch Anwendung der Vertauschungsrelation (4.13). Dabei tritt der Energiebeitrag $\hbar\omega/2$ der Nullpunktsschwingungen auf.

Feldoperatoren: Ersetzt man in (4.2) die Amplituden der Mode durch die entsprechenden Operatoren, so ergeben sich die folgenden Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{E} \;&=\; \sqrt{4\pi}\; i\,(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \;=\; \sqrt{8\pi\hbar\omega}\; i\hat{a}, \\ \hat{A} \;&=\; (-i/k)\hat{E} \;=\; k^{-1}\sqrt{8\pi\hbar\omega}\; \hat{a} \\ \hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{x}, t) \;&=\; \Re\{\hat{A}\boldsymbol{u}\} = k^{-1}\sqrt{2\pi\hbar\omega}\left(\hat{a}\boldsymbol{u} + \hat{a}^+\boldsymbol{u}^*\right) \\ \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{x}, t) \;&=\; \Re\{\hat{E}\boldsymbol{u}\} = \sqrt{2\pi\hbar\omega}\; i\left(\hat{a}\boldsymbol{u} - \hat{a}^+\boldsymbol{u}^*\right) \\ \hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{x}, t) \;&=\; \Re\{\hat{E}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}\} = \sqrt{2\pi\hbar\omega}\; i\left(\hat{a}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u} - \hat{a}^+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}^*\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Man beachte, daß der komplexen Amplitude der Mode gerade der Operator $\hat{a}$ entspricht.

4.1.2 Stehende Welle

Die Normalmoden eines Laserresonators mit planparallelen reflektierenden Spiegeln können im einfachsten Fall durch stehende Wellen

$$\boldsymbol{u}(z) \;=\; \boldsymbol{e}\sqrt{\frac{2}{V}}\,\sin(kz), \qquad \boldsymbol{v}(z) \;=\; \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}\sqrt{\frac{2}{V}}\,\cos(kz) \tag{4.16}$$

dargestellt werden, wobei der Polarisationsvektor $\boldsymbol{e}$ reell ist und in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\boldsymbol{e}_z$ liegt. Ausgehend vom komplexen Vektorpotential der stehenden Welle lassen sich die elektrischen und magnetischen Felder wie folgt ableiten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(z,t) &= A(t)\boldsymbol{u}(z), \qquad A(t) = A_0 e^{-i\omega t},\\
\boldsymbol{E}(z,t) &= -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A} = E(t)\boldsymbol{u}(z), \qquad E(t) = E_0 e^{-i\omega t} = ikA(t),\\
\boldsymbol{B}(z,t) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = B(t)\boldsymbol{v}(z), \qquad B(t) = kA(t) = -iE(t).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Da

$$E_r = -B_i, \qquad E_i = B_r \tag{4.18}$$

und

$$H \;=\; \frac{1}{8\pi}\int dV\left(\mathcal{E}^2+\mathcal{B}^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E_r^2+B_r^2\right). \tag{4.19}$$

gilt, können in diesem Fall die reellen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes als kanonisch konjugierte Größen gewählt werden. Mit

$$E_r = \sqrt{4\pi}\;\omega q, \qquad B_r = \sqrt{4\pi}p \tag{4.20}$$

erhält man wiederum die Hamilton-Gleichungen (4.8) des harmonischen Oszillators. Substituiert man auch hier die kanonischen Variablen q und p durch Operatoren, so ergeben sich für die Feldoperatoren der Mode die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(z,t) &= \hat{E}_r\boldsymbol{u} = \sqrt{4\pi}\;\omega\hat{q}\boldsymbol{u} = \sqrt{2\pi\hbar\omega}\;\left(\hat{a}+\hat{a}^+\right)\boldsymbol{u}\\
\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(z,t) &= \hat{B}_r\boldsymbol{v} = \sqrt{4\pi}\;\hat{p}\boldsymbol{v} = \sqrt{2\pi\hbar\omega}\;i\left(\hat{a}^+-\hat{a}\right)\boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.1.3 Normalmodenentwicklung des freien Feldes:

Transversales Vektorpotential: Die in Abschnitt (3.2.1) eingeführten Potentiale des elektromagnetischen Feldes können für transversale Felder immer so gewählt werden, daß

$$\Phi \;=\; 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}} = 0. \tag{4.22}$$

Die erste Bedingung kann durch eine allgemeine, die zweite Bedingung (Coulomb- oder Strahlungseichung) danach wegen

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\,\partial_t\,\boldsymbol{\mathcal{A}}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\,\partial_t\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}} = 0 \tag{4.23}$$

durch eine zeitunabhängige Eichtransformation (3.3) erfüllt werden. Das so definierte transversale und reellwertige Vektorpotential genügt der Wellengleichung

$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{A}} - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}} \;=\; 0. \tag{4.24}$$

Normalmoden: Zu deren Lösung denkt man sich das Strahlungsfeld in einem großen aber endlichen Volumen enthalten. Die Lösungen des Eigenwertproblems,

$$\Delta\boldsymbol{u}_s + k^2\boldsymbol{u}_s = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_s = 0, \tag{4.25}$$

die an der Oberfläche des Volumens die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen, bilden ein abzählbares Basissystem $s = 1, 2, 3, \cdots$ für die Lösung der Wellengleichung. Sie können als Orthonormalsystem

$$\int dV\,\boldsymbol{u}_r^*\cdot\boldsymbol{u}_s \;=\; \delta_{rs} \tag{4.26}$$

gewählt werden. Betrachtet man speziell einen Würfel mit der Kantenlänge L an dessen Oberfläche periodische Randbedingungen vorgeschrieben sind, so erhält man auf diese Weise die ebenen Wellen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}_\alpha}(\boldsymbol{x}) \;&=\; \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{V}}\,\exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\right), \qquad V = L^3 \\
k_i \;&=\; \frac{2\pi}{L}n_i, \qquad n_i = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \\
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_\alpha} \;&=\; 0, \qquad \boldsymbol{e}^*_{\boldsymbol{k}_\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}1}\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}2} = \boldsymbol{k}/k = \boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Zu jedem $\boldsymbol{k}$ gibt es 2 linear unabhängige Polarisationsrichtungen, die mit dem Index $\alpha = (1, 2)$ unterschieden werden. Einem Wert von s entspricht hier ein Ausbreitungsvektor $\boldsymbol{k}$ und eine Polarisationsrichtung α.

Entwicklung nach Normalmoden: Die Normalmodenentwicklung des Vektorpotential lautet damit

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x},t) \;=\; \sum_s C_s(t)\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x}), \tag{4.28}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $C_s(t)$ zeitabhängige komplexwertige Funktionen darstellen. Diese müssen so gewählt werden, daß das Vektorpotential reell ist. Zu jeder komplexen Lösung $\boldsymbol{u}_s$ besitzt das Eigenwertproblem (4.25) eine konjugiert komplexe Lösung $\boldsymbol{u}_s^*$ zum gleichen Eigenwert k_s^2. Der Modenindex der zur Mode s konjugiert komplexen Mode sei $s*$. Wegen $\boldsymbol{\mathcal{A}}^* = \boldsymbol{\mathcal{A}}$ gilt für den Entwicklungskoeffizienten der Mode $s*$

$$C_{s*} \;=\; (C_s)^*. \tag{4.29}$$

Diese Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich von (4.28) mit

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^* \;=\; \sum_s C_s^*\boldsymbol{u}_s^* = \sum_s C_s^*\boldsymbol{u}_{s*} = \sum_s (C_{s*})^*\boldsymbol{u}_s.$$

Setzt man (4.28) in (4.24) ein und beachtet die Orthogonalität der Normalmoden (4.26) so ergibt sich für die Entwicklungskoeffizienten die Schwingungsgleichung

$$\partial_t^2 C_s + \omega_s^2\, C_s \;=\; 0, \qquad \omega_s = ck_s. \tag{4.30}$$

Aus der allgemeinen Lösung

$$C_s(t) \;=\; A_s e^{-i\omega_s t} + B_s e^{i\omega_s t} \tag{4.31}$$

folgt mit der Beziehung (4.29) die Darstellung

$$C_s(t) \;=\; A_s e^{-i\omega_s t} + A_{s*}^* e^{i\omega_s t}. \tag{4.32}$$

Die Amplituden A_s unterliegen keiner Nebenbedingung und die Normalmodenentwicklung lautet damit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_s (A_s e^{-i\omega_s t} + A_{s*}^* e^{i\omega_s t})\boldsymbol{u}_s \\ &= \sum_s A_s e^{-i\omega_s t}\boldsymbol{u}_s + A_s^* e^{i\omega_s t}\boldsymbol{u}_{s*} \\ &= \sum_s A_s e^{-i\omega_s t}\boldsymbol{u}_s + A_s^* e^{i\omega_s t}\boldsymbol{u}_s^*. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Entwicklung der Feldoperatoren nach ebenen Wellen: Die Quantisierung einer einzelnen fortschreitenden Welle wird durch die bereits bekannten Operatoren

(4.15) beschrieben. Die Entwicklung der allgemeinen Feldoperatoren nach ebenen Wellen erhält man daher, indem man in (4.33) die Amplituden A_s durch die entsprechenden Operatoren $\hat{a}_s$ substituiert,

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_s k_s^{-1}\sqrt{2\pi\hbar\omega_s}\left(\hat{a}_s\boldsymbol{u}_s + \hat{a}_s^+\boldsymbol{u}_s^*\right)\\
\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_s \sqrt{2\pi\hbar\omega_s}\; i\left(\hat{a}_s\boldsymbol{u}_s - \hat{a}_s^+\boldsymbol{u}_s^*\right)\\
\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_s \sqrt{2\pi\hbar\omega_s}\; i\left(\hat{a}_s\boldsymbol{n}_s\times\boldsymbol{u}_s - \hat{a}_s^+\boldsymbol{n}_s\times\boldsymbol{u}_s^*\right). \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

4.2 Zustände des Strahlungsfeldes

4.2.1 Zeitentwicklung

Erwartungswerte: im Zustand $|\psi>$

$$<\mathcal{E}> \;=\; <\psi|\mathcal{E}|\psi> \qquad (4.35)$$

Schrödingerbild: $|\psi>=|\psi(t)>$

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)> \;=\; H|\psi(t)>, \qquad H \;=\; \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}) \qquad (4.36)$$

Heisenbergbild: $\hat{a}=\hat{a}(t),\ \hat{a}^+=\hat{a}^+(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}} &= \frac{i}{\hbar}[H,\hat{a}] \;=\; i\omega[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}] = -i\omega\hat{a},\\
\dot{\hat{a}^+} &= \frac{i}{\hbar}[H,\hat{a}^+] \;=\; i\omega[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}^+] = i\omega\hat{a}^+ \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

4.2.2 Stationärer Zustand

Besetzungszahlzustände: $|n>$

$$\begin{aligned}
\hat{a}|n> &= \sqrt{n}\;|n-1>, \qquad \hat{a}^+|n> \;=\; \sqrt{n+1}\;|n+1>,\\
\hat{a}^+\hat{a}|n> &= n\;|n>\\
H|n> &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\;|n>, \qquad |\psi_n> \;=\; e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})\;t}\;|n> \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Besetzungszahldarstellung: $<n|\psi>$
Wahrscheinlichkeit im Zustand $|\psi>$ Photonenzahl n zu messen: $|<n|\psi>|^2$

Feldstärkedarstellung: $< q|\psi >$
Wahrscheinlichkeit im Zustand $|\psi >$ Feldstärke q zu messen: $| < q|\psi > |^2 \mathrm{dq}$

Darstellungswechsel: $< q|n >= \Phi_n(q)$

$$\begin{aligned} \Phi_0(q) &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar}\right) \\ \Phi_n(q) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, H_n\left(\sqrt{\omega/\hbar}\right) \Phi_0(q) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= g(\hat{a}+\hat{a}^+), \qquad g = \sqrt{4\pi\hbar\omega/V}\, \sin kz \\ < \mathcal{E} > &= g < n|\hat{a}+\hat{a}^+|n > \; = 0 \\ < \mathcal{E}^2 > &= g^2 < n|\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}|n > \; = (2n+1)\, g^2 \\ \Delta\mathcal{E} &= \sqrt{< \mathcal{E}^2 > - < \mathcal{E} >^2} = \sqrt{2n+1}\, g \end{aligned} \tag{4.40}$$

Bemerkung 4.1 (Klassische Interpretation) *Im stationären Fall sind die Erwartungswerte definitionsgemäß zeitunabhängig. Für $n \to \infty$ gehen sie in die klassischen Zeitmittelwerte über.*

4.2.3 Kohärenter Zustand

Energieerwartungswert: Der Erwartungswert der Energie kann als Summe aus der Energie der Erwartungswerte der Feldstärken ($\overline{H}$) und der Energie der Feldschwankungen (H_S) geschrieben werden:

$$< H > = \frac{1}{8\pi}\int_V dV(< \mathcal{E}_x^2 > + < \mathcal{B}_y^2 >) = \overline{H} + H_S \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{8\pi}\int_V dV(< \mathcal{E}_x >^2 + < \mathcal{B}_y >^2) \\ H_S &= \frac{1}{8\pi}\int_V dV(\Delta\mathcal{E}^2 + \Delta\mathcal{B}^2) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Besetzungszahlzustand: $|n >$ Maximale Feldschwankungen ($\overline{H} = 0$)

$$\overline{H} = 0, \qquad H_S = < H > = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \tag{4.43}$$

Kohärenter Zustand: $|\alpha>$ Minimale Feldschwankungen ($H_S minimal$) Minimale Unschärfe:

$$\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}, \qquad H_S = \frac{1}{2}\left(\Delta p^2 + \frac{\omega^2\hbar^2}{4}\frac{1}{\Delta p^2}\right) \tag{4.44}$$

Minimum von H_s:

$$2\frac{\partial H_S}{\partial \Delta p} = 1 - \frac{\omega^2\hbar^2}{4}\frac{1}{\Delta p^4} = 0$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}, \qquad \Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \qquad < H > = \hbar\omega(\overline{n} + \frac{1}{2}), \tag{4.45}$$

$$H_S = \frac{\hbar\omega}{2}, \qquad \overline{H} = \hbar\omega\overline{n}, \qquad \overline{n} = < \alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha > \tag{4.46}$$

Eigenwertgleichung: α komplex

$$\hat{a}|\alpha > = \alpha|\alpha > \tag{4.47}$$

Beweis: Hilfsvariablen: $\hat{P}$, $\hat{Q}$ mit $\Delta\hat{P}^2 = \Delta\hat{Q}^2 = 1$

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\hat{q} = \hat{a} + \hat{a}^+,$$
$$\hat{P} = \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\hat{p} = -i(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

Schwankungsquadrate

$$\begin{aligned}\Delta\hat{Q}^2 &= < \hat{Q}^2 > - < \hat{Q} >^2 \\ &= < \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+ + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 > -(< \hat{a} > + < \hat{a}^+ >)^2 \\ &= 1 + 2(< \hat{a}^+\hat{a} > - < \hat{a}^+ >< \hat{a} >) \\ &\quad +[< \hat{a}^2 > - < \hat{a} >^2 + < \hat{a}^{+2} > - < \hat{a}^+ >^2]\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}\Delta\hat{P}^2 &= < \hat{P}^2 > - < \hat{P} >^2 \\ &= - < \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+ - 2\hat{a}^+\hat{a} - 1 > +(< \hat{a} > - < \hat{a}^+ >)^2 \\ &= 1 + 2(< \hat{a}^+\hat{a} > - < \hat{a}^+ >< \hat{a} >) \\ &\quad -[< \hat{a}^2 > - < \hat{a} >^2 + < \hat{a}^{+2} > - < \hat{a}^+ >^2]\end{aligned} \tag{4.49}$$

Bedingungen für $\Delta\hat{P}^2 = \Delta\hat{Q}^2 = 1$

$$< \hat{a}^+\hat{a} > - < \hat{a}^+ >< \hat{a} > \;=\; 0, \qquad < \hat{a}^2 > - < \hat{a} >^2 + < \hat{a}^{+2} > - < \hat{a}^+ >^2 \;=\; 0$$

Erste Bedingung mit Substitution $\hat{a}|\alpha >= |\Phi >$ ergibt

$$< \phi|\phi >=< \phi|\alpha >< \alpha|\phi > \tag{4.50}$$

Gilt genau dann, wenn $|\Phi >$ und $|\alpha >$ linear abhängig sind

$$|\Phi > \;=\; \hat{a}|\alpha > \;=\; \alpha|\alpha >, \qquad w.z.b.w. \tag{4.51}$$

Die zweite Bedingung ist damit auch erfüllt

$$< \hat{a}^2 > \;=\; < \hat{a} >^2 \;=\; \alpha^2, \qquad < \hat{a}^{+2} > \;=\; < \hat{a}^+ >^2 \;=\; \alpha^{*2} \tag{4.52}$$

Besetzungszahldarstellung des kohärenten Zustandes:

$$|\alpha > \;=\; e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, |n > \tag{4.53}$$

Beweis:
Allgemeine Darstellung mit Koeffizienten c_n

$$\begin{aligned} |\alpha > \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, |n > \\ \hat{a}|\alpha > \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}\, |n-1 > \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\sqrt{n+1}\, |n > \;=\; \alpha\, |\alpha > \end{aligned} \tag{4.54}$$

Koeffizientenvergleich

$$\sqrt{n}\, c_n \;=\; \alpha c_{n-1} \qquad \rightarrow \qquad c_n \;=\; \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, c_0 \tag{4.55}$$

Normierung

$$\begin{aligned} < \alpha|\alpha > \;&=\; |c_0|^2 \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*n}\alpha^m}{\sqrt{n!m!}} < n|m > \;=\; |c_0|^2 \sum_m \frac{|\alpha^m|^2}{m!} \;=\; |c_0|^2\; e^{|\alpha|^2} \\ &\rightarrow \;\; |c_0| \;=\; e^{-|\alpha|^2/2} \end{aligned} \tag{4.56}$$

Zeitabhängigkeit:
Schrödingerbild: $c_n \propto e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega\; t}$

$$\rightarrow \quad \alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t} \tag{4.57}$$

Heisenbergbild: $\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned} \hat{a}(t)|\alpha> &= e^{-i\omega\ t}\hat{a}(0)|\alpha> = e^{-i\omega\ t}\alpha_0\ |\alpha> = \alpha|\alpha> \\ &\rightarrow \alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{4.58}$$

Mittlere Feldstärken: $\alpha = |\alpha|e^{-i\omega t+\delta}$

$$< \alpha|\mathcal{E}|\alpha > = \sqrt{4\pi\hbar\omega/V}\ (\alpha + \alpha^*)\ \sin(kz) = \mathcal{E}_0\ \cos(\omega t + \delta)\ \sin(kz)$$

$$< \alpha|\mathcal{B}|\alpha > = -i\sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{V}}\ (\alpha - \alpha^*)\ \cos(kz) = -\mathcal{E}_0\ \sin(\omega t + \delta)\ \cos(kz)$$

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{16\pi\hbar\omega}{V}}\ |\alpha| \tag{4.59}$$

Mittlere Feldstärkeschwankungen:

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta q\ \sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}}\sin(kz) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{V}}\sin(kz) \tag{4.60}$$

$$\Delta\mathcal{B} = \Delta p\ \sqrt{\frac{8\pi}{V}}\cos(kz) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{V}}\cos(kz) \tag{4.61}$$

Mittlere Energie

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{8\pi}\mathcal{E}_0^2\int_V dV\cos(\omega t+\delta)^2\ \sin(kz)^2 + \sin(\omega t+\delta)^2\ \cos(kz)^2 \\ &= \frac{1}{8\pi}\mathcal{E}_0^2\frac{V}{2} = \hbar\omega|\alpha|^2 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$H_S = \frac{1}{8\pi}\int_V dV\frac{4\pi\hbar\omega}{V} = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{4.63}$$

Mittlere Photonenzahl:

$$< \alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha > = |\alpha|^2 = \overline{n} \tag{4.64}$$

Mittlere Photonenzahlschwankung:

$$< \alpha|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}|\alpha > \;=\; < \alpha|\hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a}+1)\hat{a}|\alpha > \;=\; \overline{n}^2 + \overline{n}$$

$$\Delta n^2 \;=\; \overline{n}^2 + \overline{n} - \overline{n}^2 \;=\; \overline{n}, \qquad \Delta n \;=\; \sqrt{\overline{n}}, \qquad \frac{\Delta n}{\overline{n}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\overline{n}}} \tag{4.65}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: Poisson-Verteilung

$$P_n \;=\; |< n|\alpha >|^2 \;=\; e^{-|\alpha|^2}\,\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \;=\; e^{-\overline{n}}\,\frac{\overline{n}^n}{n!} \tag{4.66}$$

Bemerkung 4.2 (Klassische Interpretation) *Im kohärenten Zustand gehen die Erwartungswerte für $\overline{n} \gg 1$ in die momentanen Werte der klassischen Mode über. Die relativen Schwankungen werden beliebig klein.*

Verschiebungsoperator:

Definition:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}} \tag{4.67}$$

Verschiebung:

$$\hat{D}(\alpha)|0 >= |\alpha > \tag{4.68}$$

Campbell-Baker-Hausdorff-Theorem: Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ Operatoren, deren Kommutator mit beiden Operatoren vertauscht, $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$, $[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$. Dann gilt

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}. \tag{4.69}$$

Beweis der Verschiebungseigenschaft:

$$\begin{aligned}
\hat{D}(\alpha)|0 > \;&=\; e^{\alpha\hat{a}^+}e^{-\alpha^*\hat{a}}e^{-|\alpha|^2/2}|0 > \\
&=\; e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^*\hat{a})^n}{n!}|0 >= e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^+}|0 > \\
&=\; e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^+)^n}{n!}|0 > \\
&=\; e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n >= |\alpha > .
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Produkt von Verschiebungsoperatoren:

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha+\beta)e^{i\Im(\alpha\beta^*)}. \tag{4.71}$$

Beweis der Produkteigenschaft:

$$[(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}), (\beta\hat{a}^+ - \beta^*\hat{a}] = \alpha\beta^*[\hat{a},\hat{a}^+] - \alpha^*\beta[\hat{a},\hat{a}^+] = 2i\Im(\alpha\beta^*) \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) &= e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}e^{\beta\hat{a}^+ - \beta^*\hat{a}} \\ &= e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^+ - (\alpha^*+\beta^*)\hat{a}}e^{i\Im(\alpha\beta^*)} \\ &= \hat{D}(\alpha+\beta)\; e^{i\Im(\alpha\beta^*)}.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Erzeugung kohärenter Zustände durch klassische Stromdichten: Zur Zeit $t=0$ befinde sich das Strahlungsfeld im Vakuumzustand $|0>$. Die Entwicklung des Zustandes in Anwesenheit einer klassischen Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ wird im Wechselwirkungsbild durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t|\psi> \;=\; H_I|\psi> \tag{4.74}$$

beschrieben. Der Feldoperator besitzt im Wechselwirkungsbild die Form

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_s \boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{x},t)\hat{a}_s + \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{x},t)\hat{a}_s^+ \\ &\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{x},t) = k^{-1}\sqrt{2\pi\hbar\omega_s/V}\;\boldsymbol{e}_\alpha e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_s t)}\end{aligned} \tag{4.75}$$

wobei der Index s alle möglichen Wellenvektoren $\boldsymbol{k}$ und Polarisationsvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ durchnummeriert. Der Wechselwirkungsoperator H_I kann daher ebenfalls als Summe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geschrieben werden,

$$H_I \;=\; -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}V\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\hbar}{i}\sum_s j_s\hat{a}_s^+ - j_s^*\hat{a}_s \tag{4.76}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten j_s durch die Fourierkoeffizienten der Stromdichteverteilung definiert werden,

$$j_s = \frac{i}{\hbar c}\int \mathrm{d}V\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{x},t). \tag{4.77}$$

Innerhalb eines infinitesimalen Zeitintervals Δt kann $H_I(t)$ als konstant angenommen werden und der Zeitentwicklungsoperator kann durch ein Produkt von Verschiebungsoperatoren

$$\begin{aligned} U(t+\Delta t,t) &= \exp(-\frac{i}{\hbar}H_I(t)\Delta t) = \exp(\Delta t\sum_s(j_s\hat{a}_s^+ - j_s^*\hat{a}_s) \\ &= \prod_s e^{(j_s\hat{a}_s^+ - j_s^*\hat{a}_s)\Delta t} = \prod_s \hat{D}(j_s\Delta t) \end{aligned} \tag{4.78}$$

dargestellt werden.

Der Dichteoperator des Strahlungsfeldes entwickelt sich im Zeitintervall $0 < t < \Delta t$ in den kohärenten Zustand

$$\varrho(\Delta t) = U(\Delta t,0)|0><0|U^+(\Delta t,0) = \prod_s |\Delta t j_s><\Delta t j_s| \tag{4.79}$$

Durch sukzessive Anwendung des Entwicklungsoperators (4.78) erhält man zur Zeit t den kohärenten Zustand

$$\varrho(t) = \prod_s |\alpha_s><\alpha_s|, \quad \alpha_s = \int_{t'=0}^{t} \mathrm{d}t' j_s(t'). \tag{4.80}$$

4.3 Atome im quantisierten Strahlungsfeld

4.3.1 Quantensystem

Atom:

$$H_a|a> = \hbar\omega_a|a> \tag{4.81}$$

Strahlungsfeld: s: Modenzahl

$$H_f = \sum_s \hbar\omega_s\left(\hat{a}_s^+\hat{a}_s + \frac{1}{2}\right), \qquad \omega_s = ck_s, \qquad k_s = s\pi/L \tag{4.82}$$

$$H_f|n_s> = \hbar\omega_s\left(n_s + \frac{1}{2}\right)|n_s>$$

Gesamtsystem: $H = H_a + H_f + H_{af}$
Zustandsraum

$$\begin{aligned} |a\{n_s\}> &= |a>|\{n_s\}>, \\ |\{n_s\}> &= |n_1 n_2 n_3 \ldots> = |n_1>|n_2>|n_3>\ldots \\ |\psi> &= \sum_a \sum_{n_1} \ldots \sum_{n_s} \ldots \; c_{a,n_1,\ldots,n_s,\ldots} \; |a\{n_s\}> \end{aligned}$$

Wechselwirkung

$$H_{af} = -d_x \mathcal{E}, \qquad d_x = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_x, \qquad \mathcal{E} = \sum_s g_s(\hat{a}_s + \hat{a}_s^+) \tag{4.83}$$

$$g_s = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_s}{V}}\sin(k_s z)$$

Wechselwirkungsbild: $H_0 = H_a + H_f$

$$i\hbar\partial_t|\psi> = H_I|\psi>, \qquad H_I = e^{iH_0 t/\hbar}\, H_{af}\, e^{-iH_0 t/\hbar} \tag{4.84}$$

4.3.2 Wechselwirkung mit einer Mode

Elektrisches Feld: im Wechselwirkungsbild

$$\mathcal{E} = g\,(\hat{a}\; e^{-i\omega t} + \hat{a}^+\; e^{i\omega t}) \tag{4.85}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_I &= \frac{i}{\hbar}[H_0, \hat{a}_I] = \frac{i}{\hbar}[H_f, \hat{a}_I] = -i\omega\hat{a}_I \\ \dot{\hat{a}}_I^+ &= \frac{i}{\hbar}[H_0, \hat{a}_I^+] = \frac{i}{\hbar}[H_f, \hat{a}_I^+] = i\omega\hat{a}_I^+ \end{aligned}$$

Dipolmoment: im Wechselwirkungsbild

$$d_x = \delta\,(\sigma\; e^{-i\omega_{ab}t} + \sigma^+\; e^{i\omega_{ab}t}), \qquad \omega_{ab} = \omega_a - \omega_b \tag{4.86}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_a = \hbar \begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma_I} &= \frac{i}{\hbar}[H_0, \sigma_I] = \frac{i}{\hbar}[H_a, \sigma_I] \\
&= i\left[\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}\right] \\
&= i\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_a & 0 \end{pmatrix}\right] = -i\omega_{ab}\,\sigma_I \\
\dot{\sigma_I^+} &= \frac{i}{\hbar}[H_0, \sigma_I^+] = \frac{i}{\hbar}[H_a, \sigma_I^+] \\
&= i\left[\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}\right] \\
&= i\left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \omega_b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = i\omega_{ab}\,\sigma_I^+
\end{aligned}$$

Übung 4.1 (Transformation ins Wechselwirkungsbild) *Führen Sie den Beweis, indem Sie direkt die unitäre Transformation (4.84) auf die Operatoren $\hat{a}$ und σ anwenden.*

Hamiltonoperator: im Wechselwirkungsbild

$$H_I = -\delta g(\sigma_I + \sigma_I^+)(\hat{a}_I + \hat{a}_I^+) \tag{4.87}$$

Rotating wave approximation: $\Delta = \omega_{ab} - \omega$

$$\begin{aligned}
H_I &= -\delta g\left(\sigma\ e^{-i\omega_{ab}t} + \sigma^+\ e^{i\omega_{ab}t}\right)\left(\hat{a}\ e^{-i\omega t} + \hat{a}^+\ e^{i\omega t}\right) \\
&= -\delta g\left[\sigma\hat{a}\ e^{-i(\omega_{ab}+\omega)t} + \sigma^+\hat{a}^+\ e^{i(\omega_{ab}+\omega)t} + \sigma\hat{a}^+\ e^{-i\Delta t} + \sigma^+\hat{a}\ e^{i\Delta t}\right] \\
&\approx -\delta g\left(\sigma\hat{a}^+\ e^{-i\Delta t} + \sigma^+\hat{a}\ e^{i\Delta t}\right)
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Bemerkung 4.3 (Energieerhaltung) *Die in der rotating wave approximation berücksichtigten resonanten Terme beschreiben energieerhaltende Übergänge. Der erste Operator beschreibt die Erzeugung eines Photons beim Übergang des Atoms ins untere Niveau (Emission), der zweite die Vernichtung eines Photons beim Übergang ins obere Niveau (Absorption).*

Schrödingergleichung: (4.84)

$$|\psi> = C_{b,0}\ |b\ 0> + \sum_{n=0}^{\infty} C_{a,n}\ |a\ n> + C_{b,n+1}\ |b\ n+1>$$

$$i\hbar \left(\dot{C}_{b,0} \mid b\ 0 > + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{a,n} \mid a\ n > + \dot{C}_{b,n+1} \mid b\ n+1 > \right)$$

$$= \quad -\delta g \sum_{n=0}^{\infty} C_{a,n} \sqrt{n+1}\ e^{-i\Delta t} \mid b\ n+1 > + C_{b,n+1} \sqrt{n+1}\ e^{i\Delta t} \mid a\ n >$$

Koeffizientenvergleich: $r = \delta g/\hbar$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{b,0} &= 0 \\ \dot{C}_{a,n} &= ir\ \sqrt{n+1}\ e^{i\Delta t}\ C_{b,n+1} \\ \dot{C}_{b,n+1} &= ir\ \sqrt{n+1}\ e^{-i\Delta t}\ C_{a,n} \end{aligned}$$

Der Grundzustand $|b\ 0>$ ändert seine Besetzung nicht. Das restliche Gleichungssystem ist formal äquivalent zu den semiklassischen 2-Niveau-Gleichungen (3.44) wenn man dort $\zeta = 2\sqrt{n+1}\ r$ setzt.

Absorptionswahrscheinlichkeit: Anfangszustand: $C_{b,n} = 1,\ C_{a,n-1} = 0$

$$w_{abs} = |C_{a,n-1}|^2 = n\ r^2\ \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{(\Delta/2)^2} \tag{4.89}$$

Emissionswahrscheinlichkeit: Anfangszustand: $C_{a,n} = 1,\ C_{b,n+1} = 0$

$$w_{em} = |C_{b,n+1}|^2 = (n+1)\ r^2\ \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{(\Delta/2)^2} \tag{4.90}$$

Spontane Emissionswahrscheinlichkeit: $n = 0$

$$w_{sp} = r^2\ \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{(\Delta/2)^2} \tag{4.91}$$

Induzierte Emissionswahrscheinlichkeit:

$$w_{ind} = w_{abs} = n\ w_{sp} \tag{4.92}$$

Bemerkung 4.4 (Spontane Emission) *Wegen* $| < n+1|\hat{a}^+|n > |^2 = n+1$ *tritt auch für* $n = 0$ *Emission auf. Diese entspricht der spontanen Emission eines Photons einer bestimmten Mode. Die tatsächlich beobachtete spontane Emissionsrate ergibt sich erst durch die Summation über eine ganzes Kontinuum von möglichen Endzuständen.*

4.3.3 Wechselwirkung mit dem Kontinuum

Spontane Emission:

Anfangszustand : $|i>=|a>|0>$
Endzustand : $|f>=|b>|1>$

Photon im Endzustand besitzt eine Frequenz im Intervall $d\omega$ und eine beliebige Ausbreitungs- und Polarisationsrichtung.

Wechselwirkung mit ebener Welle: $(\omega,\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{e})$

$$\begin{aligned} H_I &= -i\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}(\sigma_I+\sigma_I^+)(\hat{a}_I-\hat{a}_I^+) \\ &\approx i\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\left(\sigma\hat{a}^+\ e^{-i\Delta t}-\sigma^+\hat{a}\ e^{i\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{4.93}$$

Störungsrechnung: $C_i=1$

$$i\hbar\dot{C}_f = M_{fi}\ e^{-i\Delta t}, \qquad M_{fi} = i\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}$$

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{M_{fi}}{\hbar\Delta}\ (\ e^{-i\Delta t}-1) = -2i\frac{M_{fi}}{\hbar\Delta}\ e^{-i\Delta t/2}\sin(\Delta t/2) \\ |C_f|^2 &= 4\frac{|M_{fi}|^2}{\hbar^2\Delta^2}\ \sin^2(\Delta t/2) \to \frac{2\pi}{\hbar^2}\ |M_{fi}|^2\ \delta(\Delta)\ t \end{aligned} \tag{4.94}$$

$$mit\quad \delta(\Delta) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi}\ \frac{\sin^2((t/2)\Delta)}{(t/2)\Delta^2}$$

Übergangsrate: "Goldene Regel von Fermi"

$$dR = \frac{2\pi}{\hbar^2}\ |M_{fi}|^2\ \delta(\Delta)\ \mathcal{N}(\omega)\ d\omega\ d\Omega \tag{4.95}$$

$$\mathcal{N}(\omega)\ d\omega = \frac{Vk^2dk}{(2\pi)^3} = \frac{V\omega^2d\omega}{(2\pi c)^3} \tag{4.96}$$

$d\Omega$: Raumwinkelelement des emittierten Photons
$\mathcal{N}(\omega)\ d\omega$: Modenzahl in $d\omega$ pro Raumwinkel pro Polarisationsrichtung $(\boldsymbol{e}_\alpha)$

Gesamte spontane Emissionsrate: A-Koeffizient

$$\begin{aligned} A &= \sum_\alpha \int d\Omega \int d\omega \; \frac{dR}{d\Omega d\omega} \\ &= \sum_\alpha \int d\Omega \; \frac{2\pi}{\hbar^2} \; |M_{fi}|^2 \; \frac{V\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} \\ &= \sum_\alpha \int d\Omega \; \frac{2\pi}{\hbar^2} \; |\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha|^2 \frac{2\pi\hbar\omega_{ab}}{V} \; \frac{V\omega_{ab}^2}{(2\pi c)^3} \\ &= \frac{\omega_{ab}^3}{2\pi\hbar c^3} \; \sum_\alpha \int d\Omega \; |\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha|^2 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Kugelkoordinaten: (r, θ, ϕ)

$$\boldsymbol{k} \;=\; (k,0,0), \qquad \boldsymbol{e}_1 \;=\; (1,\pi/2,0), \qquad \boldsymbol{e}_2 \;=\; (1,\pi/2,\pi/2)$$

Summe über die Polarisationsrichtungen:

$$\sum_\alpha |\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha|^2 \;=\; d^2 \sin^2(\theta)\,(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)) \;=\; d^2\sin^2(\theta)$$

Integration über $d\Omega$:

$$\int d\Omega d^2 \sin^2(\theta) \;=\; 2\pi d^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3(\theta) \;=\; 2\pi\frac{4}{3}d^2$$

Einsteinscher A-Koeffizient:

$$A \;=\; \frac{4}{3}\frac{\omega_{ab}^3 d^2}{\hbar c^3} \tag{4.98}$$

Dipolstrahlung:

$$I_{sp} \;=\; \hbar\omega_{ab} A \;=\; \frac{4}{3}\frac{\omega_{ab}^4 d^2}{c^3} \tag{4.99}$$

Bemerkung 4.5 (A-Koeffizient)
Der quantenmechanisch berechnete A-Koeffizient (4.98) stimmt mit dem indirekt, nach den Einsteinschen Beziehungen, bestimmten Wert aus (3.105) exakt überein.

Kapitel 5

Statistische Beschreibung

5.1 Grundbegriffe der Statistik

5.1.1 Zufallsvariablen

Definition und Beschreibung: Eine *Zufallsvariable* ist eine Variable, die bestimmte reelle Werte mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten annehmen kann. Der Wertebereich kann diskret, $x \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\}$, oder kontinuierlich, $x \in (a, b)$, sein. Im folgenden wird $a = -\infty, b = +\infty$ angenommen. Im diskreten Fall tritt der Wert ξ_i mit einer Wahrschenlichkeit p_i auf. Im kontinuierlichen Fall gibt $p(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit an, daß die Zufallsvariable einen Wert in dem infinitesimalen Intervall zwischen x und $x + dx$ annimmt. Man bezeichnet $p(x)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte. Es gilt

$$p(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1. \tag{5.1}$$

Diskrete Zufallsvariablen kann man mit Hilfe der Deltafunktion auch als kontinuierliche Zufallsvariablen mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \tag{5.2}$$

darstellen.

Mittelwerte: Der statistische *Mittelwert (Erwartungswert)* einer Funktion $f(x)$ wird durch

$$< f(x) > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \tag{5.3}$$

definiert. Das *n-te Moment* ν_n und das *n-te zentrale Moment* μ_n wird jeweils durch die Mittelwerte

$$\nu_n = < x^n >, \qquad \mu_n =< \Delta x^n >, \qquad \Delta x = x - < x > \tag{5.4}$$

definiert. Das erste Moment $\nu_1 =< x >$ ist in der Regel die wichtigste Kenngröße. Das zweite zentrale Moment μ_2 wird als Varianz oder Streuung bezeichnet. Es definiert die Standardabweichung (mittlere quadratische Abweichung) $\sigma = \sqrt{\mu_2}$ vom Mittelwert. Weitere manchmal verwendeten Kenngrößen sind die Schiefe $\alpha_3 = \mu_3/\sigma^3$ und die Kurtosis $\alpha_4 = \mu_4/\sigma^4$.

Mehrere Zufallsvariablen: Für N Zufallsvariablen, die die Werte $x_1, x_2, \cdots, x_N$ annehmen können, definiert man eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Wert im Volumenelement $dx_1 dx_2 \cdots dx_N$ im Punkt $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ angenommen wird, ist $p(x_1, x_2, \cdots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N$.

Eine komplexe Zufallsvariable $z = x + iy$ kann als Funktion von 2 reellen Zufallsvariablen x, y definiert werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß sie einen Wert z im Flächenelement $d^2z \equiv dxdy$ annimmt wird als $p(z)d^2z$ bezeichnet.

Kovarianzmatrix: Für zwei Zufallsvariablen x_i, x_j werden die zentrierten Momente 2-ter Ordnung

$$\mu_{ij} = < \Delta x_i \Delta x_j > \tag{5.5}$$

als Kovarianzmatrix bezeichnet. Die Diagonalelemente sind die Varianzen der Variablen x_i, x_j. Die beiden Nichtdiagonalelemente sind gleich und werden als Kovarianz bezeichnet. Wegen der Schwarzschen Ungleichung gilt

$$|\mu_{ij}|^2 \leq \mu_{ii}\mu_{jj} = \sigma_i^2 \sigma_j^2. \tag{5.6}$$

Als ein Maß für die Korrelation der beiden Größen definiert man daher den *Korrelationskoeffizienten*

$$\varrho_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \qquad i \neq j. \tag{5.7}$$

Die Werte des Korrelationskoeffizienten liegen im Intervall von -1 bis $+1$. Für $|\rho_{ij}| = 1$ liegen die Werte (x_i, x_j) auf einer Geraden und werden dann als vollständig korrelliert (+1) oder antikorrelliert (-1) bezeichnet. Im entgegengesetzten Grenzfall $\rho_{ij} = 0$ bezeichnet man die Variablen als unkorreliert. Statistisch unabhängige Größen $(p(x, y) = p(x)p(y))$ sind unkorreliert. Umgekehrt sind jedoch unkorrelierte Größen nicht notwendig auch statistisch unabhängig.

Übung 5.1 *Sei* $x = cos\phi$, $y = \sin\phi$, *wobei* ϕ *im Intervall von* 0 *bis* 2π *gleichverteilt ist. Berechnen Sie* $p(x, y)$ *und* μ_{xy}. *Sind x,y korrelliert? Sind x,y statistisch unabhängig?*

5.1.2 Zufallsprozesse

Geht man von einer diskreten Menge von Zufallsvariablen $x_1, x_2, \cdots$ über zu einer nicht abzählbaren Menge von Zufallsvariablen $x(t)$, so spricht man von einem Zufallsprozeß. Der kontinuierliche Parameter t stellt häufig die Zeit dar.

Hierarchie der Wahrscheinlichkeitsdichten: Ein Zufallsprozeß kann durch eine unendliche Hierarchie von Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben werden. Betrachtet man den Zufallsprozeß zunächst zu einem festen Zeitpunkt t_1, so besitzt die Zufallsvariable $x(t_1) = x_1$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x(t_1)) \equiv p_1(x_1, t_1)$. Mit dieser Wahrscheinlichkeitsdichte lassen sich alle Mittelwerte zum Zeitpunkt t_1 berechnen, z.B.

$$< x(t_1) > \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p_1(x_1, t_1) dx_1. \tag{5.8}$$

Betrachtet man nun eine Folge diskreter Zeitpunkte $t_1, t_2, t_3 \cdots, t_n, \cdots$, so gibt es für die zugehörigen Zufallsvariablen eine unendliche Hierarchie von Wahrscheinlichkeitsdichten

$$\begin{aligned}
&p_1(x_1, t_1), \\
&p_2(x_1, t_1; x_2, t_2), \\
&p_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3), \\
&\cdots \\
&p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \cdots; x_n, t_n; \cdots), \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichten sind symmetrisch bezüglich einer Vertauschung der Zufallsvariablen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte p_n enthält die Information über alle Wahrscheinlichkeitsdichten p_i für $i < n$, da die Konsistenzbedingungen

$$p_{n-1}(x_1, t_1; \cdots; x_{n-1}, t_{n-1}) \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x_1, t_1; \cdots; x_n, t_n) dx_n \tag{5.10}$$

erfüllt sein müssen. Ist p_n bekannt, so können damit alle Korrelationsfunktionen der Ordnung $\underline{\leq} n$ berechnet werden,

$$\begin{aligned}
&< x(t_1) x(t_2) \cdots x(t_n) > \;\; = \\
&\int x_1 x_2 \cdots x_n p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \cdots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Eine vollständige statistische Beschreibung des Zufallsprozesses wird im Prinzip durch ein Wahrscheinlichkeitsfunktional $p(\{x(t)\})$ erreicht, bei dem $\{x(t)\}$ die unendliche Menge der Zufallsvariablen zu allen Zeitpunkten t darstellt. In physikalischen Anwendungen werden aber meistens nur Korrelationen niedriger Ordnung betrachtet.

Stationärer Prozeß: Ein Zufallsprozeß heißt *stationär*, falls alle Wahrscheinlichkeitsdichten p_n invariant sind gegenüber einer beliebigen Zeittranslation $t \to t + T$:

$$p_n(x_1, t_1; \cdots; x_n, t_n) \;=\; p_n(x_1, t_1 + T; \cdots; x_n, t_n + T).$$

Daraus folgt insbesondere, daß der Mittelwert von $x(t)$ zeitunabhängig ist,

$$\begin{aligned} p_1(x_1, t_1) &= p_1(x_1, 0) \equiv p_1(x_1), \\ < x(t) > &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x p_1(x). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Die Korrelationsfunktion $\Gamma(t_1, t_2) =< x(t_1)x(t_2) >$ hängt nur von der Differenz der Zeitpunkte $\tau = t_2 - t_1$ ab,

$$\begin{aligned} p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) &= p_2(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1) \equiv p_2(x_1, x_2, \tau) \\ \Gamma(t_1, t_2) \equiv \Gamma(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 x_1 x_2 p_2(x_1, x_2, \tau). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Prozesse, die nur die Bedingungen (5.12), (5.13) erfüllen, heißen stationär im weiteren Sinn. Diese schwächere Form der Stationarität ist oft ausreichend, wenn nur Mittelwerte und Korrelationsfunktionen 2. Ordnung betrachtet werden.

Statistische Gesamtheit: Die Wahrscheinlichkeitsdichten kann man sich anschaulich durch eine statistische Gesamtheit (Ensemble) repräsentiert denken. Man versteht darunter eine große Anzahl von Realisierungen $x^j(t)$, $j = 1, 2, \cdots, N$ des Zufallsprozesses, so daß die Realisierungen mit den Werten $x(t_1), \cdots x(t_n)$ im Volumenelement $dx_1 \cdots dx_n$ gerade mit der Häufigkeit $N p_n(x_1, t_1; \cdots; x_n, t_n)$ auftreten. Der Mittelwert von $x(t)$ kann dann alternativ als Mittelung über die Realisierungen der Gesamtheit

$$< x(t) > \;=\; \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x^j(t). \tag{5.14}$$

geschrieben werden.

Ergodischer Prozeß: Bei stationären Prozessen sind die statistischen Eigenschaften jeder Realisierung in der Regel repräsentativ für die statistische Gesamtheit. Alle Zeitmittelwerte

$$\bar{x^j} \;=\; \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\; x^j(t), \qquad j = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.15}$$

sind dann gleich und stimmen mit dem Ensemblemittelwert (5.14) überein. Stationäre Prozesse mit dieser Eigenschaft nennt man ergodisch.

5.1.3 Autokorrelationsfunktion

Für einen komplexen Zufallsprozess $z(t) = x(t) + iy(t)$ definiert man die Autokorrelationsfunktion

$$\Gamma(t_1, t_2) \;=\; < z^*(t_1) z(t_2) > = \int d^2 z_1 \int d^2 z_2 \; z_1^* z_2 p_2(z_1, t_1; z_2, t_2). \tag{5.16}$$

Sie beschreibt Korrelationen des Prozesses in 2 unterschiedlichen Zeitpunkten. Im folgenden werden einige elementare Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion zusammengestellt.

1. $z(t)$ stationär $\longrightarrow \Gamma(t_1, t_2) \equiv \Gamma(t_2 - t_1)$:

$$\Gamma(t_1, t_2) \;=\; < z^*(t_1) z(t_2) > \;=\; < z^*(0) z(t_2 - t_1) > \;=\; \Gamma(t_2 - t_1)$$

2. $\Gamma(t, t)$ ist positiv:

$$\Gamma(t, t) = \;< z^*(t) z(t) > \;=\; < |z(t)|^2 > \;\geq 0$$

3. $\Gamma(t_2, t_1) = \Gamma(t_1, t_2)^*$:

$$\Gamma(t_2, t_1) \;=\; < z^*(t_2) z(t_1) > \;=\; < z^*(t_1) z(t_2) >^* \;=\; \Gamma(t_1, t_2)^*$$

4. $|\Gamma(\tau)| \leq \Gamma(0)$: Diese Eigenschaft folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$|\Gamma(\tau)|^2 \;=\; | < z^*(0) z(\tau) > |^2 \leq \; < |z(0)|^2 >< |z(\tau)|^2 >= \Gamma(0)^2$$

5.2 Optische Kohärenz erster Ordnung

Optische Perioden sind von der Größenordnung $10^{-15} s$, während die typischen Auflösungszeiten eines Photodetektors von der Größenordnung $10^{-9} s$ sind. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Fluktuationen der Felder als einen Zufallsprozeß zu behandeln, der in der Regel als stationär und ergodisch angenommen wird. Die Mittelwertbildung $< \cdots >$ kann daher entweder als Scharmittel oder als Zeitmittel ausgeführt werden. Der Mittelwert $< E >$ des Feldes verschwindet. Von besonderem Interesse sind die Korrelationen des Feldes in zwei Raumzeitpunkten $1 \equiv (\boldsymbol{x}_1, t_1)$ und $2 \equiv (\boldsymbol{x}_2, t_2)$. Diese werden durch die *Kohärenzfunktion erster Ordnung* $\Gamma(1,2)$ bzw. durch den *Kohärenzgrad erster Ordnung* $\gamma(1,2)$ wie folgt definiert:

$$\Gamma(1,2) =< E^*(1) E(2) >, \quad \gamma(1,2) = \frac{\Gamma(1,2)}{\sqrt{\Gamma(1,1)\Gamma(2,2)}}. \tag{5.17}$$

Der Betrag des komplexen Kohärenzgrades besitzt, wie der Korrelationskoeffizient (5.7), die Eigenschaft $0 \leq |\gamma(1,2)| \leq 1$. Für $|\gamma(1,2)| = 0$ sind die Zufallsvariablen $E(1)$, $E(2)$ unkorreliert, für $|\gamma(1,2)| = 1$ sind sie vollständig korreliert. Korrelationenen bestehen i.a. nur dann, wenn eine feste Phasenbeziehung zwischen den komplexen Amplituden $E(1)$ und $E(2)$ vorliegt, da andernfalls die Mittelung über die Phasen Null ergibt.

5.2.1 Zeitliche Kohärenz

Korrelationen des Feldes in zwei Zeitpunkten bezeichnet man als *zeitliche Kohärenz.*

Michelson-Interferometer: Die zeitliche Kohärenz einer Lichtquelle kann mit einem Michelson-Interferometer (Abb. 5.1) bestimmt werden. Der einfallende Lichtstrahl wird durch einen Strahlteiler in zwei Teilstrahlen aufgeteilt. Diese legen in den beiden Armen des Interferometers unterschiedliche Wegstrecken zurück und werden beim Austritt aus dem Interferometer wieder vereinigt. Bei zeitlich kohärentem Licht beobachtet man bei Variation der Laufzeitdifferenz am Ausgang des Interferometers periodische Helligkeitswechsel (i.a. Interferenzringe, die sich erweitern oder zusammenziehen). Ein Maß für die zeitliche Kohärenz einer Lichtquelle ist die *Kohärenzzeit* τ_{coh}. Darunter versteht man die maximale Laufzeitdifferenz zwischen den Teilstrahlen, bei der die Interferenz noch sichtbar ist. Der zugehörige Gangunterschied $l_{coh} = c\tau_{coh}$ nennt man die *longitudinale Kohärenzlänge.*

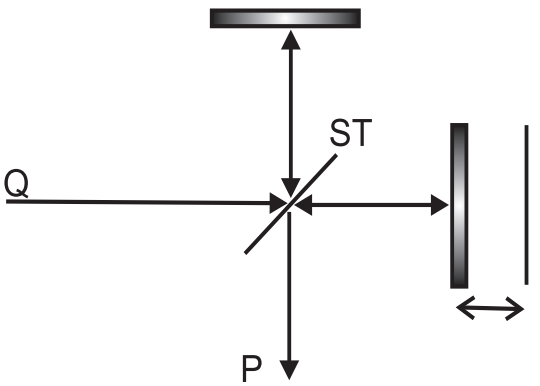

Abbildung 5.1: *Grundsätzlicher Aufbau eines Michelson-Interferometers. Q: Eingang, ST: Strahlteiler, P: Ausgang.*

Kohärenzgrad: Das elektrische Feld am Eingang (Q) des Interferometers sei quasimonochromatisch, $E(Q,t) = E_0(Q,t)e^{-i\bar{\omega}t}$, mit einer mittleren Frequenz $\bar{\omega}$. Am Ausgang (P) des Interferometers erhält man zur Zeit t eine Überlagerung

$$E(P,t) = fE(Q,t_1) + fE(Q,t_2) \tag{5.18}$$

der Eingangsfelder zu den früheren Zeiten $t_{1,2} = t - l_{1,2}/c$, wobei $l_{1,2}$ die von den beiden Teilstrahlen jeweils zurückgelegten Wegstrecken bezeichnen. Hierbei wird an-

genommen, daß die Amplituden beider Strahlen durch Reflexionsverluste um denselben Faktor f reduziert werden. Die am Ausgang gemessene Intensität ist dann,

$$\begin{aligned} < I(P) > &= \frac{c}{8\pi} < |E(P,t)|^2 > \\ &= \frac{cf^2}{8\pi}\Big(\Gamma(t_1,t_1) + \Gamma(t_2,t_2) + 2\sqrt{\Gamma(t_1,t_1)\Gamma(t_2,t_2)}\Re\gamma(t_1,t_2)\Big) \end{aligned} \quad (5.19)$$

wobei die Autokorrelationsfunktion $\Gamma(t_1,t_2)$ und der komplexe Kohärenzgrad $\gamma(t_1,t_2)$ durch die Ausdrücke

$$\Gamma(t_1,t_2) =< E^*(Q,t_1)E(Q,t_2) >, \quad \gamma(t_1,t_2) = \frac{\Gamma(t_1,t_2)}{\sqrt{\Gamma(t_1,t_1)\Gamma(t_2,t_2)}} \quad (5.20)$$

definiert werden. Hängt $\Gamma(t_1,t_2)$ nur von $\tau = t_2 - t_1$ ab, so gilt

$$< I(P) > = 2f^2 < I(Q) > \Big(1 + \Re\gamma(\tau)\Big). \quad (5.21)$$

Setzt man $\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|e^{i\alpha(\tau) - i\bar{\omega}\tau}$, so folgt

$$< I(P) >= 2f^2 < I(Q) > \Big(1 + |\gamma(\tau)|\cos(\alpha(\tau) - \bar{\omega}\tau)\Big). \quad (5.22)$$

Für kleine τ, von der Größenordnung der Lichtperiode, ändert sich der Kohärenzgrad nur durch die Phasenänderung $\bar{\omega}\tau$. Für größere τ, von der Größenordnung der Kohärenzzeit, erhält man zusätzlich eine langsame Änderung der Amplitude $|\gamma(\tau)|$ und der Phase $\alpha(\tau)$. Die maximale bzw. die minimale Intensität des Interferenzbildes ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I_{max} &= 2f^2 < I(Q) > \Big(1 + |\gamma(\tau)|\Big), \\ I_{min} &= 2f^2 < I(Q) > \Big(1 - |\gamma(\tau)|\Big). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Sichtbarkeit des Interferenzbildes wird definiert durch

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |\gamma(\tau)|. \quad (5.24)$$

Der Betrag des komplexen Kohärenzgrades erster Ordnung ist somit ein Maß für die Interferenzfähigkeit des Lichtes. Für $|\gamma| = 0$ addieren sich die Intensitäten der Teilstrahlen und es tritt keine Interferenz auf. Das Licht wird als inkohärent bezeichnet. Für $|\gamma| = 1$ addieren sich die Amplituden der Teilstrahlen. Das Licht wird als vollständig kohärent bezeichnet. Für $0 < |\gamma(\tau)| < 1$ spricht man von partiell kohärentem Licht.

Frequenzspektrum: Nimmt man an, daß die Lichtquelle in unregelmäßigen Abständen einzelne quasimonochromatische Wellenpakete emittiert, so ist die Kohärenzzeit von der Größenordnung der Dauer eines Wellenpaketes. Man kann die Kohärenzzeit daher durch die spektrale Breite $\Delta\omega$ der Wellenpakete abschätzen

$$\tau_{coh} \approx \frac{1}{\Delta\omega}. \tag{5.25}$$

Zum selben Ergebnis gelangt man auch, wenn man annimmt, daß die einzelnen spektralen Komponenten des Lichtes statistisch unabhängig voneinander sind. Dann addieren sich die Intensitäten der einzelnen spektralen Komponenten im Beobachtungspunkt. Da die Periodizität der Interferenz von der Frequenz des Lichtes abhängt, ergibt sich mit zunehmender Bandbreite des Lichtes eine Ausschmierung der Interferenz. Für die mittlere Frequenz $\bar{\omega}$ des Lichtes ist die Bedingung für ein Intensitätsmaximum

$$\bar{\omega}\Delta t = 2\pi n, \tag{5.26}$$

wobei Δt die gegenseitige Verzögerung der Teilstrahlen und n eine ganze Zahl bezeichnet. Eine Verschmierung der Interferenz tritt ein, wenn das Interferenzbild der um eine halbe Linienbreite nach oben verschobenen Frequenz $\bar{\omega}+\Delta\omega/2$ dann bereits ein Minimum besitzt,

$$(\bar{\omega} + \Delta\omega/2)\Delta t = 2\pi(n + \frac{1}{2}). \tag{5.27}$$

Subtrahiert man (5.26) von (5.27) und setzt $\Delta t = \tau_{coh}$, so ergibt sich wiederum der Zusammenhang

$$\Delta\omega\tau_{coh} \approx 1 \tag{5.28}$$

zwischen der Kohärenzzeit und der Bandbreite des Lichtes.

Beispiel 5.1 (Longitudinale Kohärenzlängen)

		$\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$	τ_{coh}	l_{coh}
Weißes Licht	:	10^{14} *Hz*	1.6 *fs*	0.5 μm
Spektrallinie	:	10^{8} *Hz*	1.6 *ns*	50 *cm*
Laserlicht	:	10^{4} *Hz*	16μs	5 *km*

5.2.2 Wiener-Khintchine-Theorem

Der Zusammenhang zwischen der Kohärenzzeit und der Breite des Frequenzspektrums wird durch das Wiener-Khintchine-Theorem mathematisch formuliert. Nach Wiener und Khintchine ist das Frequenzspektrum eines stationären Zufallsprozesses die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion. Zum Verständnis dieses Theorems ist es hilfreich, zunächst das Spektrum einer bekannten Funktion zu betrachten. Dabei muß man zwischen nichtperiodischen Funktionen, die nur über eine endliche Dauer von Null verschieden sind, und periodischen Funktionen von unendlicher Dauer unterscheiden. Als Beispiel werde eine Lichtwelle mit einer komplexen Amplitude $E(t)$ betrachtet, die auf eine Fläche auftrifft und dabei vollständig absorbiert wird. Bei pulsförmiger Einstrahlung ist die Gesamtenergie des Pulses pro Einheitsfläche

$$W_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; \frac{c}{8\pi} \; |E(t)|^2 \tag{5.29}$$

endlich. Das zugehörige Frequenzspektrum wird als Energiespektrum bezeichnet. Bei kontinuierlicher periodischer Einstrahlung mit einer Periode T wächst die absorbierte Gesamtenergie unbegrenzt an. Die im Zeitmittel pro Einheitsfläche absorbierte Leistung

$$P_g = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t \; \frac{c}{8\pi} \; |E(t)|^2 \tag{5.30}$$

bleibt jedoch endlich. Das zugehörige Frequenzspektrum wird als Leistungsspektrum bezeichnet.

Nichtperiodische Funktion endlicher Dauer: Die Funktion $z(t)$ sei komplexwertig und das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t|z(t)|$ sei absolut konvergent. Dann existiert zur Funktion $z(t)$ die Fouriertransformierte $\tilde{z}(\nu)$ und es gilt

$$\tilde{z}(\nu) \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; z(t) e^{2\pi i \nu t}, \qquad z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\nu \; \tilde{z}(\nu) e^{-2\pi i \nu t}. \tag{5.31}$$

Die Gesamtenergie W_g und das Energiespektrum $W(\nu)$ seien durch

$$W_g \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; |z(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu \; W(\nu) \tag{5.32}$$

definiert. Definiert man, in Analogie zur statistischen Autokorrelationsfunktion, die Zeitautokorrelationsfunktion

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; z^*(t) z(t+\tau). \tag{5.33}$$

so gilt hierfür,

$$\Gamma(\tau) \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu \; \tilde{z}(\nu) \; e^{-2\pi i \nu (t+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu \; \tilde{z}(\nu) \tilde{z}^*(\nu) \; e^{-2\pi i \nu \tau}.$$

Wegen $W_g = \Gamma(0)$ und $W(\nu) = |\tilde{z}(\nu)|^2$ kann diese Beziehung in der Form

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\nu \; W(\nu) \; e^{-2\pi i \nu \tau}, \qquad W(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; \Gamma(\tau) \; e^{2\pi i \nu \tau}. \tag{5.34}$$

ausgedrückt werden. Das Energiespektrum ist die Fouriertransformierte der Zeitautokorrelationsfunktion.

Periodische Funktion unendlicher Dauer: Die Funktion $z(t)$ sei komplexwertig und periodisch mit der Periode T. Die Fourierreihe von $z(t)$ mit den Fourierkoeffizienten c_n ist

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \; e^{-2\pi i \nu_n t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; z(t) e^{2\pi i \nu_n t}, \quad \nu_n = n/T. \tag{5.35}$$

Die Zeitautokorrelationsfunktion

$$\Gamma(\tau) \;\; = \;\; \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; z^*(t) z(t+\tau), \tag{5.36}$$

besitzt die Eigenschaft

$$\Gamma(\tau) \;\; = \;\; \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; z^*(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \; e^{-2\pi i \nu_n (t+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* \; e^{-2\pi i \nu_n \tau}. \tag{5.37}$$

Die mittlere Leistung P_T und das Leistungsspektrum $P(\nu)$ seien durch

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; |z(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu \; P(\nu) \tag{5.38}$$

definiert. Wegen $P_T = \Gamma(0)$ erhält man für das Leistungsspektrum

$$P(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_\nu \delta(\nu - \nu_n), \qquad P_\nu = |c_\nu|^2 \tag{5.39}$$

wobei c_ν die Fourierkoeffizienten c_n, ausgewertet bei der Frequenz $\nu_n = \nu$ bezeichnet. Das diskrete Leistungsspektrum $P_n = |c_n|^2$ stellt die Fourierkoeffizienten der Zeitautokorrelationsfunktion dar,

$$\Gamma(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{-2\pi i \nu_n \tau}, \qquad P_n = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}\tau \; \Gamma(\tau) e^{2\pi i \nu_n \tau}. \tag{5.40}$$

Leistungsspektrum eines stationären Prozesses: Zur Fouriertransformation eines Zufallsprozesses betrachtet man die Fouriertransformation der einzelnen Realisierungen. Eine Schwierigkeit besteht dann jedoch darin, daß ein stationärer Zufallsprozeß $z(t)$ keine gewöhnliche Fouriertransformierte besitzt, da die Realisierungen $z_j(t)$ für $t \to \pm\infty$ nicht verschwinden. Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, indem man den Prozeß zunächst nur für ein endliches Zeitintervall T betrachtet und im Ergebnis den Grenzübergang $T \to \infty$ vornimmt. Bei diesem Grenzübergang wird die Summation des Leistungsspektrums über diskrete Frequenzen durch eine Integration ersetzt,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\nu \; P(\nu). \tag{5.41}$$

Beachtet man, daß die Anzahl der Frequenzen im Intervall $d\nu$ gleich $d\nu/(1/T)$ ist, so folgt für das Leistungsspektrum die Darstellung

$$P(\nu) = \lim_{T\to\infty} T P_\nu = \lim_{T\to\infty} T < |c_\nu|^2 > . \tag{5.42}$$

Hierbei wurde auch eine Ensemblemittelung über die einzelnen Realisierungen durchgeführt. Das Wiener-Khintchine-Theorem besagt, daß das Leistungsspektrum (5.42) eines stationären Zufallsprozesses die Fouriertransformierte der statistischen Autokorrelationfunktion darstellt.

Zum Beweis dieses Theorems schreiben wir $P(\nu)$ mit den Fourierkoeffizienten aus (5.35) in der Form

$$\begin{aligned} P(\nu) &= \lim_{T\to\infty} T \frac{1}{T^2} \int_0^T \mathrm{d}t_1 \int_0^T \mathrm{d}t_2 \; < z^*(t_1) z(t_2) > e^{2\pi i \nu (t_2 - t_1)} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t_1 \int_0^T \mathrm{d}t_2 \; \Gamma(t_1, t_2) e^{2\pi i \nu (t_2 - t_1)}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Die Integration über das Quadrat $0 < t_1 < T$, $0 < t_2 < T$ kann durch eine Integration über die beiden Dreiecke $0 < \tau < T$, $0 < t < T - \tau$ für $\tau = t_2 - t_1$, $t = t_1$ und $\tau = t_1 - t_2$, $t = t_2$ ersetzt werden:

$$P(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}\tau \left(\int_0^{T-\tau} \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t) e^{2\pi i \nu \tau} + \int_0^{T-\tau} \mathrm{d}t\ \Gamma(\tau + t, t) e^{-2\pi i \nu \tau} \right).$$

Durch die Variablensubstitutionen $t \to \tau + t$ und $\tau \to -\tau$ im zweiten Integral folgt

$$\begin{aligned} P(\nu) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}\tau \left(\int_0^{T-\tau} \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t) e^{2\pi i \nu \tau} + \int_\tau^T \mathrm{d}t\ \Gamma(t, t - \tau) e^{-2\pi i \nu \tau} \right) \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \mathrm{d}\tau \int_0^{T-\tau} \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t) e^{2\pi i \nu \tau} + \int_{-T}^0 \mathrm{d}\tau \int_{-\tau}^T \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t) e^{2\pi i \nu \tau} \right). \end{aligned}$$

Unter der Annahme, daß die Teilintegrale

$$\int_0^T \mathrm{d}\tau \int_{T-\tau}^T \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t) e^{2\pi i \nu \tau}, \quad \int_{-T}^0 \mathrm{d}\tau \int_{-\tau}^0 \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t) e^{2\pi i \nu \tau}, \tag{5.44}$$

wegen des raschen Abfalls der Autokorrelationsfunktion konvergieren, verbleibt für das Leistungsspektrum im Grenzübergang $T \to \infty$ der Ausdruck

$$P(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\ \overline{\Gamma(\tau)} e^{2\pi i \nu \tau}, \qquad \overline{\Gamma(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t\ \Gamma(t, \tau + t). \tag{5.45}$$

Dies ist die Fouriertransformierte der zeitgemittelten Autokorrelationsfunktion $\overline{\Gamma(\tau)}$. Für stationäre Prozesse gilt $\overline{\Gamma(\tau)} = \Gamma(\tau)$.

Eine wichtige Anwendung des Wiener-Khinchine-Theorems ist die zeitaufgelöste Spektroskopie. Eine Messung der Autokorrelationsfunktion ist ausreichend zur Bestimmung des Spektrums. Diese Methode ist besonders vorteilhaft bei sehr kleinen Linienbreiten, da dann die Abklingzeit der Autokorrelationsfunktion gerade sehr groß ist.

Beispiel 5.2 (Exponentieller Zerfall der Autokorrelationsfunktion)
Ein Zufallsprozeß, dessen Autokorrelationsfunktion exponentiell abklingt, $\Gamma(\tau) = e^{-2\pi i \nu_0 \tau - 2\pi \delta\nu |\tau|}$*, besitzt als Spektrum ein Lorentz-Profil:*

$$\begin{aligned} P(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\ \Gamma(\tau)\ e^{2\pi i \nu \tau} = \int_0^{\infty} d\tau\ e^{2\pi i (\nu - \nu_0)\tau - 2\pi \delta\nu \tau} + c.c. \\ &= \frac{-1}{2\pi i (\nu - \nu_0)\tau - 2\pi \delta\nu \tau} + c.c. = \frac{1}{\pi} \frac{\delta\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + \delta\nu^2} \end{aligned}$$

Beispiel 5.3 (Konstante Autokorrelationsfunktion) *Die Funktion* $z(t) = 1$ *besitzt die konstante Autokorrelationsfunktion* $\overline{\Gamma(\tau)} = \Gamma(\tau) = 1$. *Da die Integrale (5.44), (5.45) hierbei nicht konvergieren, ist das Wiener-Khintchine-Theorem nicht unmittelbar anwendbar. Das Spektrum kann aber nach der Definition (5.42) direkt berechnet werden:*

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\; e^{2\pi i\nu t} = \frac{1}{2\pi i\nu T}\left(e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T}\right) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \\ P(\nu) &= \lim_{T\to\infty} T|c_\nu|^2 = \lim_{T\to\infty} T\frac{\sin^2(\pi\nu T)}{(\pi\nu T)^2} = \delta(\nu). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Entsprechend findet man für eine monochromatische Welle $z(t) = e^{-2\pi i\nu_0}$ *das Spektrum* $P(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$. *Man beachte, daß die Koeffizienten* $|c_\nu|^2$ *beschränkt sind, so daß* $P(\nu)$ *im Maximum einer Linie wie* T *divergiert. Die Breite der Linie muß daher wie* $1/T$ *abnehmen, damit das Integral über das Leistungsspektrum konvergiert.*

5.2.3 Räumliche Kohärenz

Korrelationen des Feldes in zwei Raumpunkten werden als *räumliche Kohärenz* bezeichnet. Die räumliche Kohärenz kann mit einem Doppelspaltexperiment nachgewiesen werden.

Doppelspaltversuch von Young: Ein Schirm mit zwei punktförmigen Blenden S_1 und S_2 wird mit einer Lichtquelle bestrahlt (Abb. 5.2). Die Intensitätsverteilung des durch die Blenden hindurchtretenden Lichtes wird auf einem dahinterliegenden Schirm beobachtet. Tritt auf dem Schirm ein Interferenzbild auf, so ist das Feld in den Punkten S_1, S_2 zu den retardierten Zeiten $t_1 = t - l_1/c$, $t_2 = t - l_2/c$ kohärent, wobei $l_{1,2}$ die Wegstrecken der beiden im Beobachtungspunkt P interferierenden Teilstrahlen bezeichnet. Verwendet man zeitlich kohärentes Licht, d.h. $|t_2 - t_1| \ll \tau_{coh}$, so tritt ein Interferenzbild genau dann auf, wenn das Licht in den Punkten S_1, S_2 räumlich kohärent ist. Der maximale Abstand der Spaltpunkte für den noch Interferenz auftritt, wird als die transversale Kohärenzlänge d_{coh} bezeichnet.

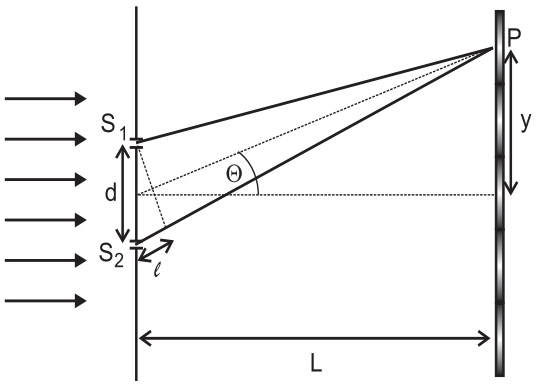

Abbildung 5.2: *Doppelspaltversuch: Bei Bestrahlung der Spalte mit kohärentem Licht entsteht auf dem Schirm (rechts) ein Interferenzbild.*

Interferenzmaxima: Der Abstand d der Spaltpunkte sei sehr viel kleiner als der Abstand L zwischen der Spalt- und der Beobachtungsebene. Der Gangunterschied l zwischen den im Punkt P interferierenden Teilstrahlen ist dann, $l = d\sin\Theta \approx dy/L$, wobei y den Abstand des Punktes P von der optischen Achse bezeichnet. Für monochromatisches Licht ergibt sich in P ein Interferenzmaximum, falls der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge λ beträgt: $l = n\lambda$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Der Abstand y_n des n-ten Interferenzmaximums von der optischen Achse ist daher

$$y_n = n\frac{\lambda L}{d}. \tag{5.47}$$

Der Abstand $\Delta y = \lambda L/d$ aufeinanderfolgender Maxima ist typischerweise sehr klein, z.B. $\Delta y = 1.2$ mm für $\lambda = 0.6$ μm, $L = 20$ cm und $d = 0.1$ mm. Verwendet man Licht mit einer spektralen Breite $\delta\lambda$, so tritt Interferenz nur auf, wenn der Gangunterschied der einzelnen spektralen Komponenten kleiner ist als die mittlere Wellenlänge $\bar{\lambda}$. Licht, welches die Bedingung

$$\delta\lambda \ll \bar{\lambda} \tag{5.48}$$

erfüllt, wird als *quasimonochromatisch* bezeichnet.

Kohärenzgrad: Das Feld $E(P,t)$ im Beobachtungspunkt P zur Zeit t besitzt die Form,

$$E(P,t) = K_1 E(S_1,t_1) + K_2 E(S_2,t_2), \tag{5.49}$$

wobei $K_{1,2}E(S_{1,2},t_{1,2})$ die Felder der durch die Spalte $S_{1,2}$ hindurchtretenden Strahlen bezeichnet. Die Faktoren $K_{1,2}$ sind Konstanten, die durch die Eigenschaften der Blenden und durch den Abstand des Beobachtungspunktes von den Spaltpunkten bestimmt werden. Man kann zeigen, daß diese Konstanten rein imaginär sind, d.h. es gilt

$$K_1 K_2^* = K_1^* K_2 = |K_1||K_2|. \tag{5.50}$$

Analog zu (5.22) erhält man für die Intensität im Punkt P den Ausdruck

$$\begin{aligned} < I(P) > \;&=\; < I_1 > + < I_2 > + 2\sqrt{< I_1 >< I_2 >}|\gamma(1,2)|\cos(\alpha - \omega\tau), \\ &< I_i >= \frac{c}{8\pi}|K_i|^2\Gamma(i,i), \quad \gamma(1,2) = \frac{\Gamma(1,2)}{\sqrt{\Gamma(1,1)\Gamma(2,2)}}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Die Sichtbarkeit des Interferenzbildes wird wiederum durch den Betrag des komplexen Kohärenzgrades bestimmt:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{< I_1 >< I_2 >}}{< I_1 > + < I_2 >}|\gamma(1,2)|. \tag{5.52}$$

Sind die Laufzeitunterschiede τ klein gegenüber der Kohärenzzeit, so besitzt der Kohärenzgrad die Form

$$\gamma(1,2) = j(1,2)e^{-i\bar{\omega}\tau}, \tag{5.53}$$

wobei der räumliche Kohärenzgrad $j(1,2) \equiv j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ nur noch eine Funktion der Orte $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ der Spaltpunkte darstellt. Für Strahlen, die sich nahe der optischen Achse ausbreiten ist die Bedingung der zeitlichen Kohärenz meist erfüllt.

Ausgedehnte inkohärente Strahlungsquellen: Eine zeitlich kohärente punktförmige Lichtquelle erzeugt immer räumlich kohärentes Licht, da die Felder in allen Punkten eine feste Phasenbeziehung zueinander besitzen. Eine ausgedehnte Lichtquelle emittiert dagegen i.a. nur in einen kleinen Winkelbereich räumlich kohärentes Licht. Die Abhängigkeit der transversalen Kohärenzlänge von der Ausdehnung der Quelle kann man sich durch das in Abb. 5.3 dargestellte Doppelspaltexperiment veranschaulichen.

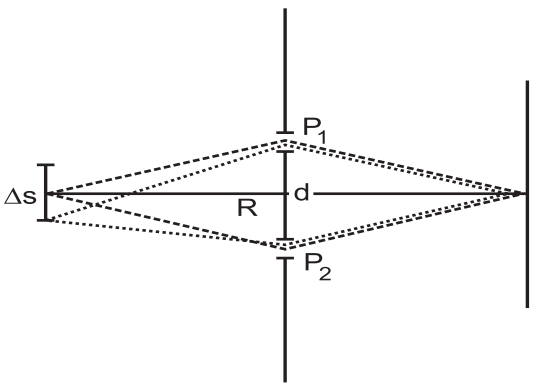

Abbildung 5.3: *Räumliche Kohärenzlänge d im Abstand R von einer inkohärenten Strahlungsquelle mit dem Durchmesser Δs.*

Die Lichtstrahlen, die von jedem Punkt der Quelle ausgehen, erzeugen in den Spaltpunkten P_1 und P_2 jeweils räumlich kohärentes Licht. Lichtstrahlen, die von verschiedenen Punkten der Quelle ausgehen, besitzen jedoch i.a. keine feste Phasenbeziehung und führen daher zu einer Auslöschung der Interferenz. Von einer räumlich inkohärenten Quelle mit dem Durchmesser Δs betrachten wir diejenigen Strahlen, die vom Mittelpunkt (M) und von einem Randpunkt (B) der Quelle ausgehen und in den Spaltpunkten P_1 und P_2 enden. Die beiden von M ausgehenden Strahlen besitzen in P_1 und P_2 keinen Gangunterschied und erzeugen daher hinter den Spalten ein Interferenzmaximum auf der optischen Achse. Die von B ausgehenden Strahlen besitzen jedoch den Gangunterschied

$$l = d\sin(\Phi/2) \approx d\frac{\Delta s}{2R}, \tag{5.54}$$

wobei Φ der Öffnungswinkel ist, unter dem die Quelle im Abstand R am Ort der Spaltpunkte erscheint. Falls $l = \lambda/2$ ist, erzeugen diese Strahlen auf der optischen

Achse bereits ein Interferenzminimum. Da sich die Intensitäten der inkohärenten Quellen M und B addieren, bekommt man dann eine Auswaschung der Interferenz. Die transversale Kohärenzlänge d_{coh} ist daher von der Größenordnung

$$\frac{\Delta s d_{coh}}{R} = \bar{\lambda}. \tag{5.55}$$

Da d_{coh} vom Abstand R zwischen der Lichtquelle und der bestrahlten Fläche abhängt, verwendet man anstelle von d_{coh} oft den Öffnungswinkel $\Delta\Theta = d_{coh}/R$, unter dem die beiden Punkte von der Quelle aus erscheinen. Mit (5.55) gilt

$$\Delta s \Delta\Theta = \bar{\lambda}. \tag{5.56}$$

Der Winkel $\Delta\Theta = \bar{\lambda}/\Delta s$ ist formal gleich dem Beugungswinkel eines Lichtstrahls an einer Blende mit dem Durchmesser Δs.

Kohärenzfläche: Eine abgeleitete Größe ist die Kohärenzfläche $A_{coh} = d_{coh}^2$. Sie kann in einfacher Weise durch das Raumwinkelelement $\Delta\Omega_s = \Delta s^2/R^2$, unter dem die Quelle im Abstand R erscheint, ausgedrückt werden,

$$A_{coh} = \left(\frac{R\bar{\lambda}}{\Delta s}\right)^2 = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\Omega_s}. \tag{5.57}$$

Durch die interferometrische Messung der Kohärenzfläche für eine bestimmte Wellenlänge läßt sich der Winkeldurchmesser einer Strahlungsquelle bestimmen. Mit dieser Methode können z.B. Winkeldurchmesser von Sternen bestimmt werden.

Beispiel 5.4 (Kohärenzfläche) *Im folgenden Vergleich wird* $\bar{\lambda} = 5 \times 10^{-5}$ *cm angenommen und die Umrechnung* $1' = \pi/(60 \times 180)$ *rad verwendet.*

Lampe : $\Delta s = 0.1$ *cm*, $R = 200$ *cm*, $A_{coh} = 1$ mm^2
Sonne : $\Delta s/R = 0^0 16' = 0.00456$ *rad*, $\Delta\Omega_s = 2 \times 10^{-5}$, $A_{coh} \approx 10^{-3}$ mm^2
Sterne : $\Delta s/R < 5 \times 10^{-7}$ *rad*, $\Delta\Omega_s < 25 \times 10^{-14}$, $A_{coh} > 1$ m^2

5.2.4 Van Cittert-Zernike-Theorem

Der räumliche Kohärenzgrad $j(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ einer ausgedehnten inkohärenten Strahlungsquelle kann unter recht allgemeinen Voraussetzungen aus der Intensitätsverteilung der Strahlungsquelle berechnet werden. Dies wurde zuerst von Van Cittert und von Zernike gezeigt.

Monochromatisches Licht: Wir betrachten zuerst die Ausbreitung von exakt monochromatischem Licht, $E(\boldsymbol{r},t) = \tilde{E}(\boldsymbol{r},\nu)\, e^{-2\pi i\nu t}$, das von einer Quelle mit der

Oberfläche Σ abgestrahlt wird. Nach dem Huygens-Fresnel-Prinzip kann das Feld am Beobachtungsort $\boldsymbol{r}$ in der Form

$$\tilde{E}(\boldsymbol{r},\nu) \;=\; \int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}^2 r'\; \Lambda(\lambda,\Theta)\; \frac{\tilde{E}(\boldsymbol{r}',\nu)\; e^{ikR}}{R}, \qquad \Lambda(\lambda,\Theta) = \frac{\chi(\Theta)}{\lambda i}\;, \tag{5.58}$$

angegeben werden. Hierbei bezeichnet $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ den Abstand zwischen dem Beobachtungspunkt $\boldsymbol{r}$ und Quellpunkt $\boldsymbol{r}'$ und Θ den Winkel zwischen der Oberflächennormalen im Quellpunkt $\boldsymbol{r}'$ und der Verbindungslinie zwischen den Punkten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$. Die Winkelfunktion $\chi(\Theta)$ kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei $\chi(0) = 1$. Jeder Punkt der Oberfläche ist somit Ausgangspunkt einer Kugelwelle mit der Quellstärke $\Lambda(\lambda,\Theta)\tilde{E}(\boldsymbol{r}')$ (Abb. 5.4).

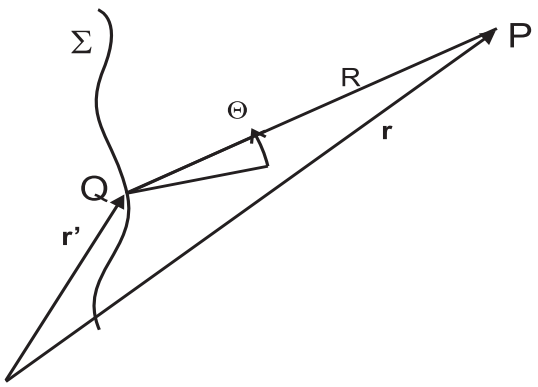

Abbildung 5.4: *Huygens-Fresnel-Prinzip: Jeder Punkt Q der Oberfläche Σ ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle, die sich im Beobachtungspunkt P überlagern.*

Quasimonochromatisches Licht: Eine entsprechende Propagation von quasimonochromatischem Licht erhält man, indem man (5.58) auf jede Fourierkomponente anwendet und näherungsweise $\Lambda(\lambda,\Theta) \approx \bar{\Lambda} \equiv \Lambda(\bar{\lambda},\Theta)$ setzt. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{r},t) \;&=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\nu\; \tilde{E}(\boldsymbol{r},\nu)\; e^{-2\pi i\nu t} \\
&=\; \int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}^2 r'\; \frac{1}{R} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\nu\; \Lambda(\lambda,\Theta)\; \tilde{E}(\boldsymbol{r}',\nu)\; e^{ikR-2\pi i\nu t} \\
&\approx\; \int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}^2 r'\; \frac{\bar{\Lambda}}{R} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\nu\; \tilde{E}(\boldsymbol{r}',\nu)\; e^{2\pi i\nu(R/c-t)} \\
&=\; \int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}^2 r'\; \frac{\bar{\Lambda}}{R} E(\boldsymbol{r}', t - R/c).
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Räumliche Kohärenzfunktion: Für die räumliche Kohärenzfunktion $J(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \equiv \Gamma(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,0) = < E^*(\boldsymbol{r}_1,t)E(\boldsymbol{r}_2,t) >$ erhält man mit diesem Propagationsgesetz

$$J(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \;=\; \int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}^2 r_1' \int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}^2 r_2'\; \frac{\Lambda^*(\bar{\lambda},\Theta_1)\Lambda(\bar{\lambda},\Theta_2)}{R_1 R_2}\; \Gamma(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2', -(R_2 - R_1)/c)$$

$$\approx \int_\Sigma \mathrm{d}^2 r_1' \int_\Sigma \mathrm{d}^2 r_2' \, \frac{\Lambda^*(\bar\lambda,\Theta_1)\Lambda(\bar\lambda,\Theta_2)}{R_1 R_2} \, J(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2') e^{i\bar k(R_2-R_1)}.$$

Bei der letzten Umformung wurde wiederum angenommen, daß die Laufzeitdifferenzen klein sind gegenüber der Kohärenzzeit.

Für eine inkohärente ebene Quelle kann man zusätzlich annehmen, daß

$$J(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2') = I(\boldsymbol{r}_1')\delta(\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'), \qquad \Theta \ll 1, \qquad \chi(\Theta) \approx 1 \tag{5.60}$$

ist. Nach der Integration über eine Koordinate erhält man dann

$$J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \;=\; \bar\lambda^{-2} \int_\Sigma \mathrm{d}^2 r' \; I(\boldsymbol{r}') \, \frac{e^{i\bar k(R_2-R_1)}}{R_2 R_1}. \tag{5.61}$$

Hierbei bezeichnen $R_{1,2}$ die Abstände der Beobachtungspunkte $\boldsymbol{r}_{1,2}$ von dem Quellpunkt $\boldsymbol{r}'$ (Abb. 5.5).

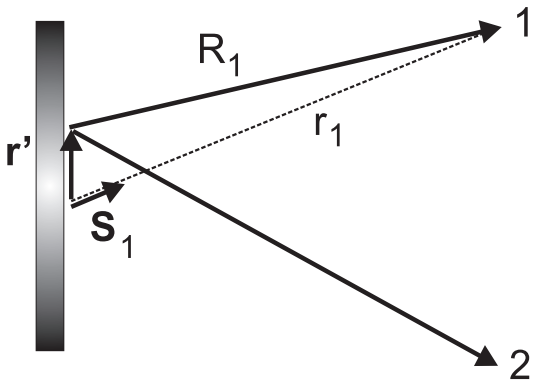

Abbildung 5.5: *Abstrahlung einer inkohärenten ebenen Quelle.* $\boldsymbol{r}'$*: Quellpunkt,* $\boldsymbol{r}_{1,2} = r_{1,2}\boldsymbol{s}_{1,2}$*: Beobachtungspunkte,* $R_{1,2}$*: Abstände der Beobachtungspunkte* $1,2$ *vom Quellpunkt.*

In großen Abständen von der Quelle gilt näherungsweise $R_{1,2} = r_{1,2} - \boldsymbol{s}_{1,2}\cdot\boldsymbol{r}'$. Damit erhält man für die räumliche Kohärenzfunktion $J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ und für den räumlichen Kohärenzgrad $j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)/\sqrt{J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1)J(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2)}$ das Van Cittert-Zernike Theorem

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \;&=\; \frac{e^{i\bar k(r_2-r_1)}}{r_2 r_2 \bar\lambda^2} \int_\Sigma \mathrm{d}^2 r' \; I(\boldsymbol{r}') \, e^{-i\bar k(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)\cdot\boldsymbol{r}'} \\ j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \;&=\; e^{i\bar k(r_2-r_1)} \frac{\int_\Sigma \mathrm{d}^2 r' \; I(\boldsymbol{r}') \, e^{-i\bar k(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)\cdot\boldsymbol{r}'}}{\int_\Sigma \mathrm{d}^2 r' \; I(\boldsymbol{r}')}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Es beschreibt den räumlichen Kohärenzgrad eines Feldes, das durch eine planare, räumlich inkohärente, quasimonochromatische Quelle erzeugt wird. Wählt man ein

Koordinatensystem so, daß die Oberfläche in der x,y-Ebene liegt, so kann der Vektor $\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1$ in der Form

$$\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} - \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} \approx \Big(\frac{d_x}{z}, \frac{d_y}{z}, 0\Big), \tag{5.63}$$

ausgedrückt werden, wobei $d_x = x_2 - x_1$ und $d_y = y_2 - y_1$ jeweils den Abstand der Beobachtungspunkte in x- und y-Richtung bezeichnen. Der Kohärenzgrad ist bis auf einen Faktor gleich der räumlichen Fouriertransformierten der Intensitätsverteilung $I(x, y)$ der Quelle mit den Komponenten $k_x = \bar{k}\frac{d_x}{z}$, $k_y = \bar{k}\frac{d_y}{z}$ des Wellenvektors.

5.3 Kohärenzfunktionen höherer Ordnung

Der Kohärenzgrad erster Ordnung charakterisiert die Interferenzfähigkeit des Lichtes. Zerlegt man natürliches Licht in seine spektralen Komponenten, so besitzt jede hinreichend schmalbandige Komponente Kohärenz erster Ordnung. In neuerer Zeit wurden daher zusätzlich auch Korrelationsfunktionen höherer Ordnung zur Charakterisierung der Kohärenzeigenschaften des Lichtes untersucht. Diese bestimmen z.B. Intensitätskorrelationen oder Photonenkoinzidenzen in zwei oder mehr Raumzeitpunkten.

Kohärenzfunktion n-ter Ordnung: Die *Kohärenzfunktion n-ter Ordnung* $\Gamma(1, 2, 3, \cdots, 2n)$ und der *Kohärenzgrad n-ter Ordnung* $\gamma(1, 2, 3, \cdots, 2n)$ werden durch

$$\begin{aligned} \Gamma(1, \cdots, 2n) &= < E^*(1) \cdots E^*(n) E(n+1) \cdots E(2n) >, \\ \gamma(1, \cdots, 2n) &= \frac{\Gamma(1, \cdots, 2n)}{\sqrt{\Gamma(1,1) \cdots \Gamma(2n, 2n)}} \end{aligned} \tag{5.64}$$

definiert. Sie beschreiben Korrelationen des Feldes in $2n$ Raumzeitpunkten, $1 \equiv (\boldsymbol{x}_1, t_1)$, $\cdots$, $2n \equiv (\boldsymbol{x}_{2n}, t_{2n})$. In n der $2n$ Punkte wird die konjugiert komplexe Feldamplitude verwendet, d.h. es werden nur Phasendifferenzen zwischen Paaren von Punkten berücksichtigt. Diese Definition ist zweckmäßig, da die Mittelung über eine absolute Phase Null ergeben würde. Die Mittelwerte beliebiger Meßgrößen können nur von diesen Kohärenzfunktionen abhängen. Zum Beispiel besitzt die mittlere von einem Medium im Feld absorbierte Leistung die allgemeine Form

$$< P(1) > = < j(1)\mathcal{E}(1) >, \tag{5.65}$$

wobei $j(1) = \sigma\Big(\mathcal{E}(1), \cdots, \mathcal{E}(m)\Big)$ i.a. eine beliebige Funktion der Feldstärken in beliebig vielen anderen Punkten des Mediums sein kann. Setzt man $\mathcal{E} = \Re\{E\}$ ein, so läßt sich $< P >$ durch eine Summe von Kohärenzfunktionen der Form (5.64) ausdrücken.

Kohärenzbedingungen: Der Kohärenzgrad n-ter Ordnung erfüllt für $n > 1$ i.a. keine Bedingung der Form (5.7). Der Wert von $|\gamma(1,\cdots,2n)|$ kann daher nicht mehr zur Definition eines Kohärenzgrades verwendet werden. Man kann vollständige Kohärenz N-ter Ordnung aber dadurch definieren, daß alle Kohärenzfunktionen der Ordnung $n \leq N$ in der Form

$$\Gamma(1,2,3,\cdots,2n) = f^*(1)\cdots f^*(n) f(n+1)\cdots f(2n), \tag{5.66}$$

faktorisieren, wobei f eine deterministische Funktion darstellt, die unabhängig von der Ordnung n ist. Dann gilt auch $|\gamma(1,2,3,\cdots,2n)| = 1$ für $n \leq N$. Ein Strahlungsfeld ist in diesem Sinne vollständig kohärent, falls die Kohärenzfunktionen beliebiger Ordnung in allen Raumzeitpunkten faktorisieren.

Zur Interpretation dieser Bedingung sei bemerkt, daß Messungen, deren Ergebnisse nur von den Kohärenzfunktionen $n \leq N$ abhängen, nicht zwischen einem kohärenten Zustand N-ter Ordnung und einem deterministischen Feld mit der Amplitude f unterscheiden können.

5.3.1 Intensitätskorrelationen

Durch Messung von Intensitätskorrelationen können Kohärenzeigenschaften 2. Ordnung nachgewiesen werden. Hierbei treten charakteristische Unterschied zwischen thermischem Licht und Laserlicht auf, die durch den Effekt des "Photon-bunching" beschrieben werden.

Brown-Twiss-Experiment: In Experimenten von Brown und Twiss (1956,1957) wurden erstmals Korrelationen zwischen den Signalen zweier Photodetektoren gemessen, die mit partiell kohärentem Licht bestrahlt wurden. Entsprechend den Experimenten zur Kohärenz 1. Ordnung können sowohl räumliche alsauch zeitliche Korrelationen gemessen werden. Wir betrachten hier nur die zeitliche Kohärenz. Ein Lichtstrahl wird durch einen Strahlteiler in 2 Strahlen aufgeteilt. Die Intensitäten der Teilstrahlen werden nach unterschiedlichen Laufzeiten t_1 bzw. t_2 mit Photodetektoren gemessen. Aus den Signalen der Photodetektoren wird in einem Korrelator die Autokorrelationsfunktion $< I(1)I(2) >$ ermittelt. Abbildung 5.6 zeigt schematisch den Aufbau des Experiments.

Das Brown-Twiss-Experiment bestimmt den Kohärenzgrad 2. Ordnung

$$\gamma(1,2,2,1) = \frac{< I(1)I(2) >}{< I(1) >< I(2) >} \tag{5.67}$$

Dieser hängt in einfacher Weise vom Korrelationskoeffizienten (5.7) der Zufallsvariablen $I(1)$ und $I(2)$,

$$\rho_{12} \;=\; \frac{< \Big(I(1) - < I(1) > \Big)\Big(I(2) - < I(2) > \Big) >}{< I(1) >< I(2) >}$$

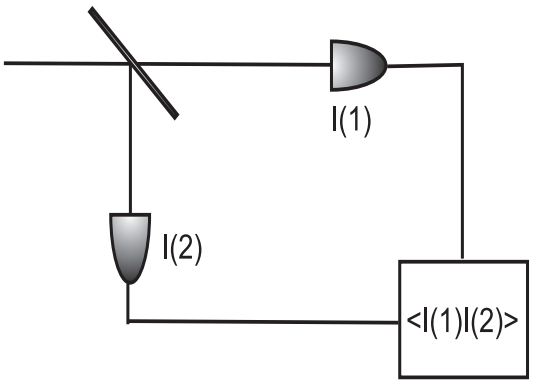

Abbildung 5.6: *Brown-Twiss-Experiment zur Messung von Intensitätskorrelationen*

$$= \frac{< I(1)I(2) > - < I(1) >< I(2) >}{< I(1) >< I(2) >} = \gamma(1,2,2,1) - 1, \tag{5.68}$$

ab. Für große Zeitdifferenzen $\tau = |t_2 - t_1|$ sind $I(1)$ und $I(2)$ unkorrelliert, d.h. $\rho_{12} \to 0$. Für kleine Zeitdifferenzen geht ρ_{12} über in ρ_{11} und ist definitionsgemäß immer positiv oder null. Daher besitzt der Kohärenzgrad $\gamma(1,2,2,1)$ das asymptotische Verhalten

$$\gamma(1,2,2,1) \;\to\; \begin{cases} 1+\rho_{11} & ; \;\; \tau \to 0 \\ 1 & ; \;\; \tau \to \infty. \end{cases} \tag{5.69}$$

Der qualitative Verlauf des Kohärenzgrades ist in Abb. 5.7 dargestellt. Natürliches Licht besteht aus einer unregelmäßigen Folge von quasimonochromatischen Wellenpaketen der Dauer τ_{coh}. Die Zunahme von $\gamma(1,2,2,1)$ für $\tau \ll \tau_{coh}$ wird als Photon-bunching bezeichnet. Es ist umso ausgeprägter, je stärker die Intensitätsfluktuationen des Lichtes sind. Ein idealer Laser emittiert das Licht dagegen mit konstanter Intensität, welches kein Photon-bunching aufweist.

Bei quantenmechanischer Behandlung des Strahlungsfeldes kann $\gamma(1,1,1,1)$ auch Werte < 1 annehmen. Dieser rein quantenmechanische Effekt wird als Photonantibunching bezeichnet.

5.4 Photonenstatistik

Beim Nachweis von Licht mit einem Photodetektor treten neben den Schwankungen der Lichtintensität auch Schwankungen des Meßsignals auf, die von der quantenmechanischen Emissionswahrscheinlichkeit beim photoelektrischen Effekt herrühren. Diese können im Rahmen der semiklassischen Theorie des Photoeffekts behandelt werden (L. Mandel).

Die Photonenzahlstatistik wird hierbei durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_n(T)$ beschrieben, die die Wahrscheinlichkeit angibt, mit einem Photodetektor über eine Meßdauer T eine Anzahl von n Photonen zu messen.

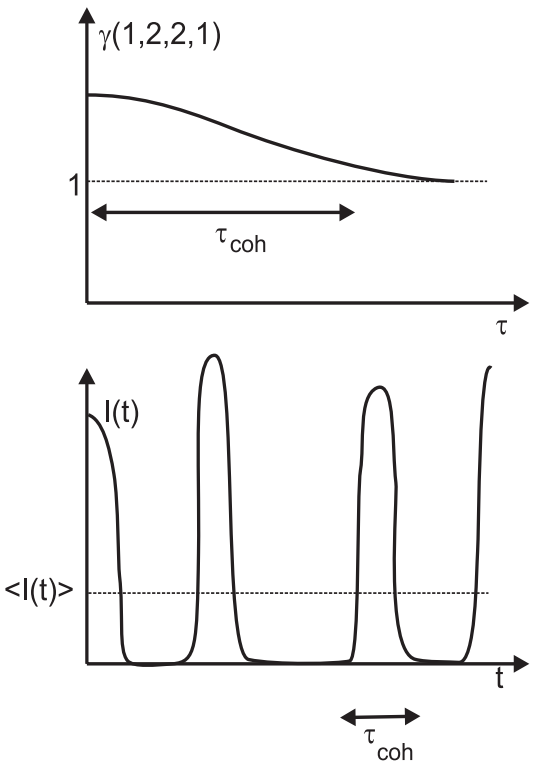

Abbildung 5.7: *Verlauf des Kohärenzgrades der Intensitätskorrelationsfunktion für ein klassisches Strahlungsfeld mit der Kohärenzzeit* τ_{coh}.

Deterministisches Feld: Wir nehmen zunächst an, daß die Photonenzählungen alle im selben Zeitintervall $[t, t+T]$ mit einem bekannten Intensitätsverlauf $I(t)$ vorgenommen werden. Die Photonenzahlstatistik $p_n(t,T)$ für dieses Intervall, wird durch die quantenmechanische Emissionswahrscheinlichkeit der Photoelektronen bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit für den Nachweis eines Photoelektrons in einem infinitesimal kleinen Zeitintervall dt sei

$$P(t)dt = \eta I(t)dt, \tag{5.70}$$

wobei η als Detektoreffizienz bezeichnet wird. Diese Übergangswahrscheinlichkeit kann im Prinzip durch zeitabhängige Störungsrechnung erster Ordnung berechnet werden. Sie ist daher proportional zum Betragsquadrat des elektrischen Feldes und zum Zeitintervall. Die mittlere Anzahl der im Intervall $[t, t+T]$ gemessenen Photonen ist dann

$$w = \int_t^{t+T} \mathrm{d}t'\ P(t'). \tag{5.71}$$

Die Wahrscheinlichkeit in einem Zeitintervall $[t, t'+dt']$ n-Photonen zu messen, kann unter der Annahme, daß im Zeitintervall dt' höchstens ein Photon gemessen wird $(P(t')dt' \ll 1)$, in der Form

$$p_n(t, t'+dt') = p_{n-1}(t,t')P(t+t')dt' + p_n(t,t')(1 - P(t+t')dt') \tag{5.72}$$

angegeben werden. Entwickelt man $p_n(t, t' + dt')$ bis zur ersten Ordnung in dt' so folgt,

$$\frac{d}{dt'}p_n(t,t') + P(t+t')p_n(t,t') = p_{n-1}(t,t')P(t+t') \tag{5.73}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$p_n(t,t') = c_n(t,t')e^{-w(t,t')}, \qquad w(t,t') = \int_t^{t+t'} \mathrm{d}t''\ P(t'') \tag{5.74}$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt'}c_n(t,t') = P(t+t')c_{n-1}(t,t') \tag{5.75}$$

Die Lösung zu den Anfangsbedingungen $c_0(t,t) = 1$, $c_n(t,t) = 0$, $n > 0$ lautet $c_n(t,t') = w(t,t')^n/n!$. Damit erhält man für die quantenmechanische Emissionswahrscheinlichkeit von n Photonen in einer Zeit T eine Poisson-Verteilung

$$p_n(t,T) = p(n,w) = \frac{1}{n!}w^n e^{-w}, \quad w = \eta T \bar{I}, \quad \bar{I} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \mathrm{d}t'\ I(t'). \tag{5.76}$$

Feldschwankungen: Im Experiment wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_n(T)$ dadurch bestimmt, daß viele Photonenzählungen zu unterschiedlichen Startzeiten t wiederholt werden. Die Intensität $I(t)$ schwankt dabei i.a. von einem Zeitintervall zum nächsten. Die gemessene Verteilung ist daher ein Mittelwert der Funktion (5.76) bezüglich der Zufallsvariblen $w = \eta T \bar{I}$ mit einer Verteilung $P(w)$:

$$p_n(T) = < p(n,w) > = \int_0^\infty \mathrm{d}w\ P(w)\ p(n,w). \tag{5.77}$$

Diese Grundgleichung der Photonenzahlstatistik wurde 1959 von L. Mandel angegeben.

Mittlere Photonenzahl:

$$\begin{aligned} < n > &= \sum_{n=0}^\infty n p_n(T) = \int_0^\infty \mathrm{d}w\ P(w) \sum_{n=0}^\infty n p(n,w) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}w\ P(w) w = < w > . \end{aligned} \tag{5.78}$$

Varianz:

$$\begin{aligned} < n(n-1) > &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p_n(T) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}w\ P(w) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p(n,w) \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}w\ P(w)w^2 =< w^2 > . \\ \Delta w^2 &= < w^2 > - < w >^2 =< w^2 > - < n >^2 \\ \Delta n^2 &= < n^2 > - < n >^2 =< w^2 > + < n > - < n >^2 \\ &= < n > + \Delta w^2. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Die minimalen Photonenzahlschwankungen werden durch die Poissonstatistik bei der Photoemission bestimmt. Zusätzlich werden die Photonenzahlschwankungen durch Intensitätsschwankungen des Lichtes vergrößert. Im Brown-Twiss Experiment werden die Intensitätsschwankungen Δw^2 direkt gemessen.

Lange Meßdauer: Für $T \gg \tau_{coh}$ mittelt die Messung über die Intensitätsschwankungen. Die Variable $\bar{I}$ in (5.76) ist dann nahezu mit Sicherheit gleich der mittleren Intensität $< I(t) >$. Die Photonenzahlstatistik wird dann durch die Poissonverteilung $p(n, < n >)$ mit dem Mittelwert $< n >= \eta T < I(t) >$ bestimmt.

Kurze Meßdauer: Für $T \ll \tau_{coh}$ ist bei jeder Photonenzahlmessung die momentane Intensität $\bar{I} \approx I(t)$ maßgeblich. Dann gilt

$$p_n(T) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}I\ P(I)\ p(n, \eta T I). \tag{5.80}$$

Polarisiertes thermisches Licht besitzt eine Intensitätsverteilung

$$P(I) = \frac{1}{< I >} e^{-I/<I>}. \tag{5.81}$$

Eine Mittelung der Poisson-Verteilung über (5.81) ergibt eine Bose-Einstein-Verteilung mit dem Mittelwert $< n >= \eta T < I >$:

$$\begin{aligned} p_n(T) &= \frac{(\eta T)^n}{< I > (\eta T + 1/ < I >)^{1+n}}\ \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ x^n e^{-x} \\ &= \frac{< n >^n}{(1+ < n >)^{1+n}}. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Um zwischen thermischem Licht und Laserlicht konstanter Intensität unterscheiden zu können, muß die Meßdauer hinreichend kurz gewählt werden, damit die Unterschiede in der Photonenstatistik erkennbar werden.