Felder und Wellen

WS 1999/00

Prof. Dr.-Ing. Klaus A. Wolf

FH Regensburg
Prüfeningerstr. 58
93025 Regensburg
09 41 - 9 43 - 11 01

email: klaus.wolf@e-technik.fh-regensburg.de

http://homepages.fh-regensburg.de/~ wok39111/wolf.html
http://homepages.fh-regensburg.de/~ wok39111/fw.html
Kurslaufwerk :wf\fw

01.Oktober 1999

15.Auflage

Dieses Skript entstand aus meinen Vorlesungen an der FH Regensburg. Es hat das Ziel, den Studenten das mühevolle Mitschreiben und Abzeichnen in der Vorlesung zu erleichtern. Es ist unvollständig und durch eigene Eintragungen zu ergänzen. Das Skript kann das Lesen von Büchern und/oder den Besuch der Vorlesungen nicht ersetzen.
Das vorliegende Skript wurde zum zwölften Mal mit emTEX gesetzt und redaktionell überarbeitet. Es ist immer noch vorstellbar, daß noch nicht alle Fehler eliminiert wurden, bzw. sich neue Fehler wieder eingeschlichen haben. Für entsprechende Hinweise bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatisches Feld **3**

2 Magnetostatisches Feld **12**

3 Gleichstrom (Stationäres Strömungsfeld) **13**

4 Wechselstrom (zeitlich veränderliche Felder) **15**

Übungsblatt 1 **24**

5 Elektromagnetische Wellen **29**

5.1 Allgemeine Wellengleichung 29

5.2 Ebene Welle im idealen Dielektrikum 31

5.3 Ebene Welle im verlustbehafteten Dielektrikum 39

5.4 Ebene Welle im Leiter 39

5.5 Bedingungen an Grenzflächen für $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ 41

5.5.1 Dielektrikum 1 zu Dielektrikum 2 41

5.5.2 Dielektrikum zu Metall 42

5.6 Ebene Wellen an Grenzflächen 43

5.6.1 Senkrechtes Auftreffen aus Dielektrikum auf leitende Ebene 43

5.6.2 Senkrechtes Auftreffen auf dielektrische Grenzschicht 45

5.6.3 Schräger Einfall auf dielektrische Grenzschicht 48

Übungsblatt 2 **56**

6 Wellenleiter **61**

6.1 Koaxialkabel 61

6.2 Hohlleiter 65

6.2.1 Rechteckhohlleiter 72

6.2.2 Rundhohlleiter 81

6.2.3 Normung nach DIN 47 302 85

6.3 Streifenleiter 89

6.4 Lichtwellenleiter (LWL) 92

Übungsblatt 3 **97**

7 Wellentypwandler — Antennen **99**

7.1 Hertzscher Dipol – Elementardipol 100

7.2 Antennenkenngrößen 102

7.2.1 Richtcharakteristik 102

7.2.2 Strahlungswiderstand 104

7.2.3 Richtfaktor D (= Directivity) 105

7.2.4 Effektive (wirksame) Länge 105

7.2.5 Effektive (wirksame) Fläche 106

7.2.6 Antennengewinn G (= Gain) 107

7.3 Dipolantennen 109

7.4 Dipolgruppen 112

7.5 Yagiantenne, logarithmisch periodische Antenne 116

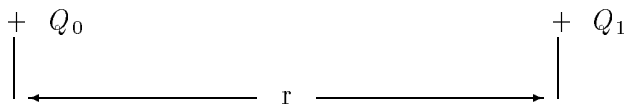
Übungsblatt 4 **119**

Literaturverzeichnis **120**

Kapitel 1

Elektrostatisches Feld

Werden zwei elektrische Ladungen Q_0 und Q_1 in eine räumliche Nähe (Abstand r voneinander) gebracht, so ist die Tendenz zu beobachten, daß die beiden Ladungen sich aufeinander zu bewegen wollen, bzw. voneinander wegstreben wollen. Bewegung bedeutet Krafteinfluß.



Durch Versuche wurde ermittelt, daß die Kraft F zwischen diesen beiden Ladungen proportional der Größe der beiden Ladungen, sowie umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen ist.

$$F \sim \frac{Q_0 \ * \ Q_1}{r^2}$$

Dieser Zusammenhang erinnert an das Gravitationsgesetz von Newton

$$F = \gamma * \frac{m_1 \ * \ m_2}{r^2}$$

Um für die elektrische Kraft eine Größengleichung schreiben zu können, braucht man eine Proportionalitätskonstante.

Die Proportionalitätskonstante ergibt sich zu $\frac{1}{4 * \pi * \varepsilon}$.

Die Konstante ε wird als Dielektrizitätskonstante (Permittivität) bezeichnet.
Die elektrische Kraftgleichung lautet dann

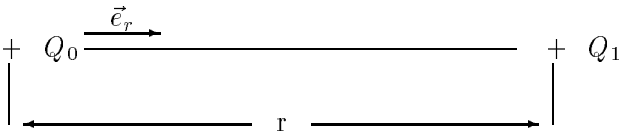
$$F = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon} * \frac{Q_0 \ * \ Q_1}{r^2}$$

Die Dielektrizitätskonstante ε setzt sich zusammen aus $\varepsilon = \varepsilon_0 * \varepsilon_r$

ε_r : Dielektrizitätszahl, dimensionslos
ε_0 : Dielektrizitätskonstante des materiefreien Raumes

Größe und Einheit von ε_0 $\qquad \varepsilon_0 = 8.854187818 * 10^{-12} \ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \ \approx \ \frac{10^{-9}}{36 * \pi} \ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

Mit obiger Formel ist die Kraft betragsmäßig berechenbar. Zusätzlich zur Größe ist die Wirkungsrichtung der Kraft wichtig. Kraft hat Vektorcharakter.
Zeichnet man einen Vektor auf der Verbindungslinie der beiden Ladungen ein, normiert diesen auf die Größe 1, so erhält man den Einheitsvektor $\vec{e_r}$ für die Kraftrichtung.



$$\vec{F} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon} * \frac{Q_0 * Q_1}{r^2} * \vec{e_r}$$

Entfernt man die Ladung Q_1 aus der unmittelbaren Umgebung von Q_0, so besteht weiterhin die Möglichkeit der Ladung Q_0 auf eine andere Ladung Kraft auszuüben, das heißt um die Ladung herum herrscht ein Kraftfeld. Dieses Kraftfeld läßt sich beschreiben zu

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \qquad \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$$

Das Vektorfeld $\vec{E}$ wird als elektrische Feldstärke bezeichnet und läßt sich für eine Punktladung Q berechnen mit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon} * \frac{Q}{r^2} * \vec{e_r}} \qquad \text{Punktladung}$$

Anschaulich kann man die Wirkungen dieses Vektorfeldes durch Feldlinien (früher auch Kraftlinien) darstellen. Wie konstruiert man diese Feldlinien ?

Am Beispiel einer Punktladung soll dies im folgenden gezeigt werden.
Man nimmt einen beliebigen Ortspunkt $P(x, y, z)$ und berechnet dort die Feldstärke und Richtung der Feldstärke verursacht durch die Punktladung. Dann kann man diesen Feldstärkevektor am Punkt P einzeichnen. Bewegt man sich ein kleines Wegelement ds in Richtung des Feldstärkevektors, erreicht man einen neuen Punkt $P'(x', y', z')$. In diesem Punkt kann man wieder einen Feldstärkevektor berechnen, diesen anzeichnen, ein Wegelement ds in der Richtung des Feldstärkevektors weitergehen, usw.

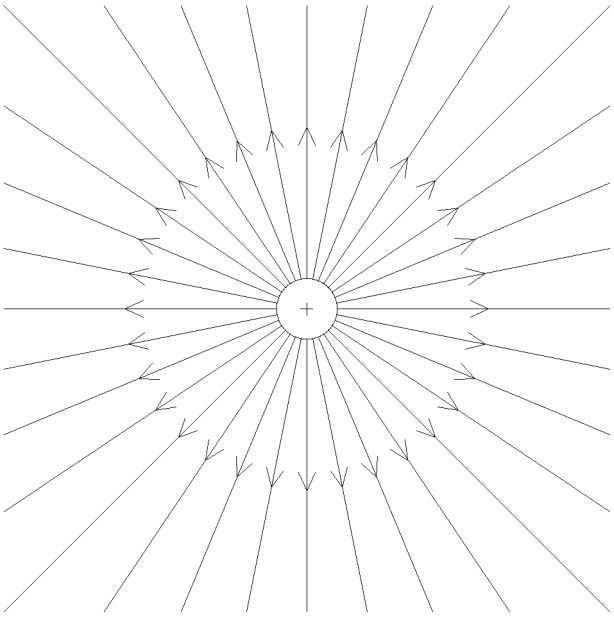


Abbildung 1.1: Feldlinien einer Punktladung

Auf diese Weise konstruiert man punktweise bzw. abschnittsweise die Wirkung der Kraft des elektrischen Feldes. Es ergibt sich in diesem einfachen Fall das bekannte Feldlinienbild der Punktladung.

Merke:
Feldlinien sind **keine** physikalische Realität, sondern gedachte Linien.
Sie vermitteln als Hilfsvorstellung ein anschauliches Bild der Richtung des Feldes in jedem Punkt eines felderfüllten Raumes.
Feldlinien sind richtungsorientiert (*haben also Pfeile*).

Am nächsten Beispiel soll das Feldlinienbild zweier Punktladungen unterschiedlicher Polarität, aber gleicher Ladung konstruiert werden.
Man beginnt wieder mit einem Punkt $P(x, y, z)$ und berechnet den Kraftvektor aufgrund der Ladung 1 und aufgrund der Ladung 2. Dann superponiert (überlagert) man die beiden Einflüsse, das heißt man addiert die Feldstärkevektoren (Vektorielle Addition !!). Durch punktweises Verbinden ergibt sich das Feldlinienbild der beiden Ladungen.

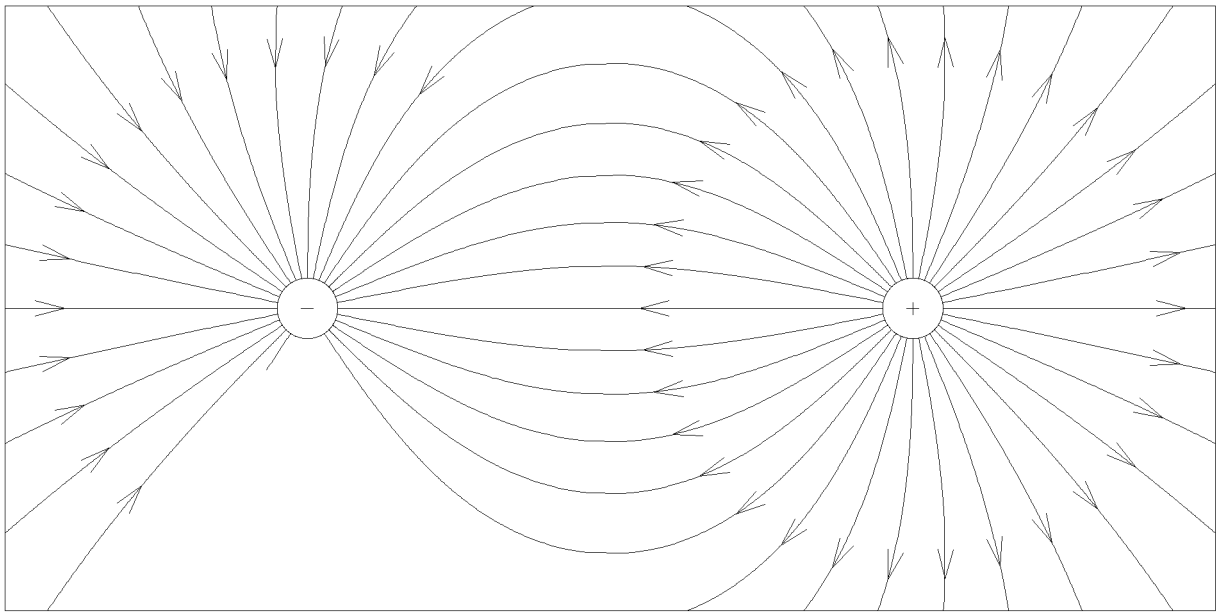


Abbildung 1.2: Feldlinienbild zweier Punktladungen

Zwei wichtige Tatsachen kann man aus dem Bild entnehmen.

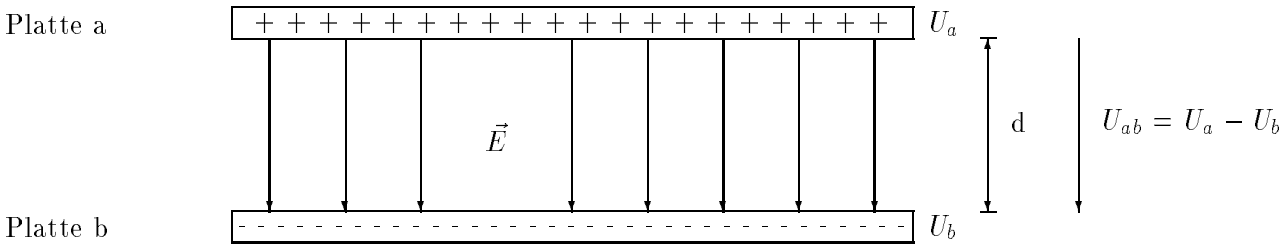
1.) Feldlinien verlaufen von positiver Ladung zu negativer Ladung.
2.) Feldlinien stehen senkrecht auf der Oberfläche der Ladungen.

Einheit der Feldstärke:

$$E \sim \frac{Q}{\varepsilon * \ r^2} \qquad \text{Einheiten: } \frac{\mathrm{V} * \mathrm{m} * \mathrm{A} * \mathrm{s}}{\mathrm{A} * \mathrm{s} * \mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Die Einheit $\frac{V}{m}$ deutet auf einen Zusammenhang mit der elektrischen Spannung hin.

Anhand eines Plattenkondensators soll der Zusammenhang Spannung – Feldstärke näher untersucht werden.



aus der Physik bzw. GE ist bekannt (*oder sollte bekannt sein*) :

$$E = \frac{U_{ab}}{d}$$

Um eine Ladung von Platte a nach b zu bringen, wird Arbeit verrichtet bzw. frei, je nach Polarität. Die Arbeit berechnet sich im Innern des Plattenkondensators (homogener Bereich) zu $W_{ab} = F * d = E \ * \ q \ * \ d$.
Im Randfeld ergibt sich die Arbeit aus Kraft mal Wegstück, aufsummiert über den gesamten Weg.

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \ d\vec{s} = q * \int_a^b \vec{E} \ d\vec{s}$$

Die potentielle Energie eines Elektrons berechnet sich zu $W = q*U$ mit der Spannung U als Potentialdifferenz.

$$W_{ab} = q * \int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} \qquad \text{und daraus} \qquad \int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} = U_{ab}$$

Zwischen zwei Punkten a und b in einem elektrischen Feld herrscht eine Potentialdifferenz, also eine elektrische Spannung. Für das Potential hat sich bei der Beschreibung der Felder die Bezeichnung φ eingebürgert. Die Spannung ergibt sich als Differenz der Potentiale $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$. Berechnet man das Potential einer Punktladung aus der elektrischen Feldstärke, so ergibt sich

$$\varphi_{ab} = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} = \int_a^b \frac{Q}{4*\pi*\varepsilon*r^2} * \vec{e_r} * d\vec{s} = \frac{Q}{4*\pi*\varepsilon} * \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4*\pi*\varepsilon} * \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right)$$

$$= \frac{Q}{4*\pi*\varepsilon} * \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \varphi_a - \varphi_b$$

Aus Zweckmäßigkeitsgründen legt man das Bezugspotential $\varphi_b = 0$ nach ∞ , damit wird dann $r_b = \infty$ und daraus folgt $\frac{1}{r_b} \to 0$. Das Potential der Punktladung berechnet sich deshalb zu

$$\varphi_{a\infty} = \frac{Q}{4*\pi*\varepsilon*r_a} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi = \frac{Q}{4*\pi*\varepsilon*r}$$

Damit ergibt sich, neben der vektoriellen Beschreibung, eine zweite Beschreibungsmöglichkeit für das elektrische Feld.

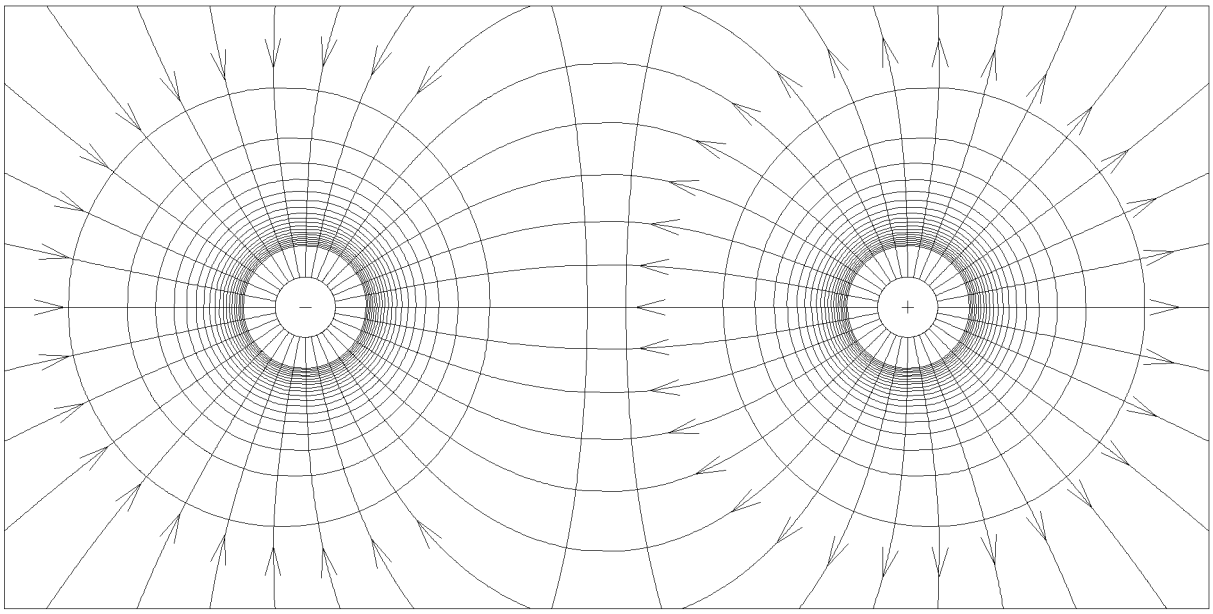


Abbildung 1.3: Feldlinien und Äquipotentiallinien (Höhenlinien) zweier Punktladungen

Das elektrische Feld kann einmal durch die Kraftwirkung, die Feldlinien, und zum anderen mit Linien gleichen Potentials, den **Äquipotentiallinien**, eindeutig beschrieben werden.
Auf jeder dieser Linie herrscht die gleiche Arbeitsfähigkeit, entsprechend der Definition der potentiellen Energie. Das bedeutet, daß ein *Umeinanderrutschen* auf einer solchen Linie keinen Energieverbrauch oder Energiegewinn ermöglicht.
In Abb. 1.3 auf S.6 sind die zwei Beschreibungsmöglichkeiten noch einmal dargestellt.
(Äquidistante Höhenlinien nach innen zur Ladung immer dichter, deshalb ganz innen nicht mehr darstellbar !)

Häufig ist es aber auch so, daß die Potentialverteilung bekannt ist und nach der Feldstärke gesucht wird.

$$\text{d.h.} \qquad \int \vec{E}\, d\vec{s} = \varphi \qquad \text{muß nach E aufgelöst werden}$$

$$\int \vec{E}\, d\vec{s} = \varphi \qquad \mid * \frac{d}{d\vec{s}} \text{ ergibt}$$

$$\frac{d}{d\vec{s}} * \int \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{d\varphi}{d\vec{s}}$$

$$\vec{E} = \frac{d\varphi}{d\vec{s}}$$

Das Potential muß *nach einem Vektor abgeleitet* werden.

Aus der Vektoranalysis gibt es dafür die Rechenvorschrift Gradient.

$$\text{Gradient} \qquad \boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

Die **Rechenvorschrift Gradient** besagt:

Ordnet man jedem Ort im Raum einen skalaren Wert zu, dann kann man an beliebigen Orten die Richtung angeben, in der dieser Wert am stärksten zunimmt.

Weil aber die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ immer vom höheren zum niedrigeren Potential zeigt, muß vor dem Gradient ein Minuszeichen stehen, um die Richtung umzukehren.

Dies läßt sich am Potentialgebirge anschaulich darstellen:
Gradient, der kürzeste Weg nach oben, aber der anstrengenste.
Feldlinie, entsprechend Fallinie, der schnellste Weg nach unten.
Potentialfeld φ ist ein Skalarfeld.
Elektrisches Feld $\vec{E}$ ist ein Vektorfeld.
Gradient macht aus Skalarfeld ein Vektorfeld.
Äquipotentiallinien stehen auf Feldlinien senkrecht und umgekehrt.

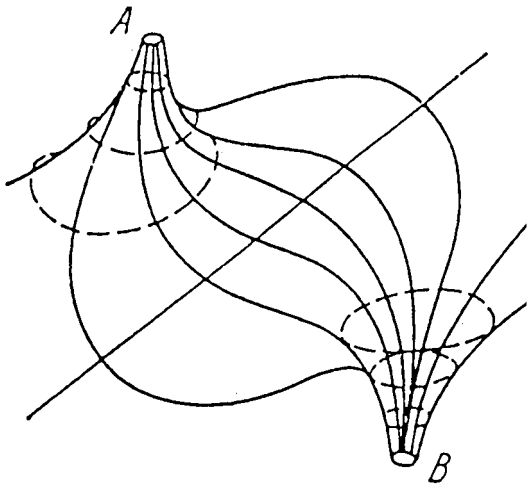


Abbildung 1.4: "Potentialgebirge"

Eine andere Art der Veranschaulichung ist die Darstellung als Potentialgebirge. Die Äquipotentiallinien sind dann Höhenlinien und die Feldlinien entsprechen den Fallinien. Salopp ausgedrückt herrscht nahe bei der Ladung ein größeres Potential als weiter weg.

Eine besondere Bedeutung gewinnt der Potentialbegriff für die Untersuchung des resultierenden Feldes von Ladungsverteilungen.
Das resultierende Potential in einem Raumpunkt ist gleich der Summe der Einzelpotentiale

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n$$

Dies ist in den meisten Fällen leichter zu berechnen, als die vektorielle Addition der Feldstärken.

Am Beispiel der Punktladungen von Seite 5 soll eine weitere Eigenschaft des elektrostatischen Feldes untersucht werden.

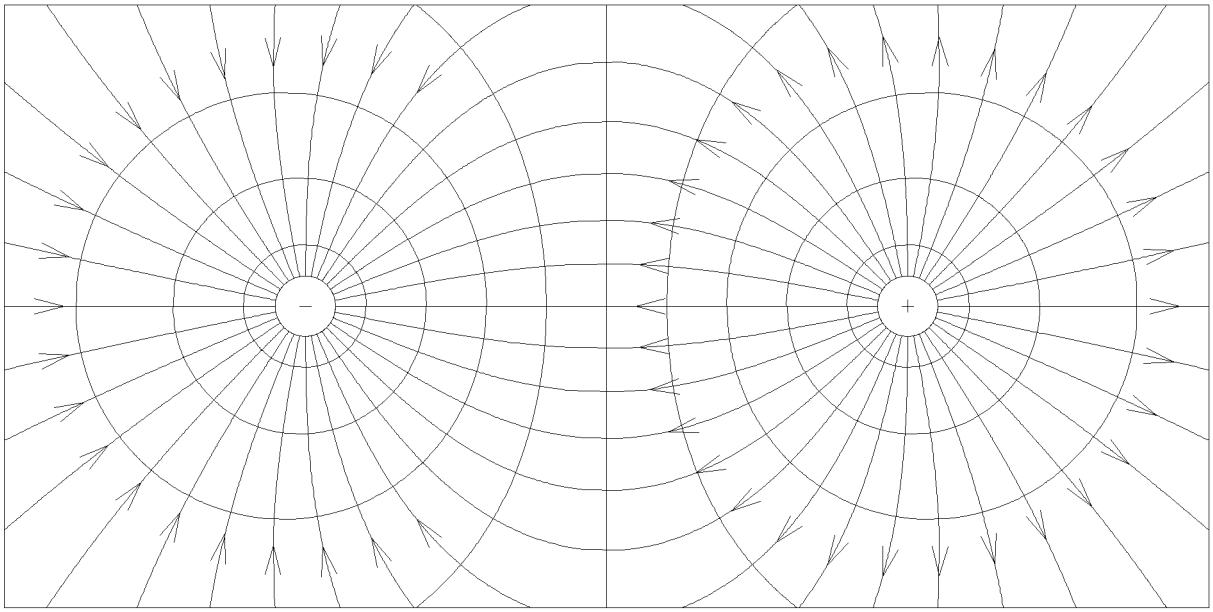


Abbildung 1.5: Feldlinien und Äquipotentiallinien zweier Punktladungen

Spaziert man in diesem Feld von einem Punkt a nach Punkt b, von dort weiter nach c, und schließlich über d zum Ausgangspunkt a zurück, so stellt sich am Schluß die Frage, welche Arbeit auf diesem Weg verrichtet wurde ?

$$\frac{W_{abcda}}{q} = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} + \int_b^c \vec{E}\, d\vec{s} + \int_c^d \vec{E}\, d\vec{s} + \int_d^a \vec{E}\, d\vec{s} = \oint \vec{E} d\vec{s}$$

$$= U_{ab} + 0 + U_{cd} + 0 = U_{ab} - U_{ab} = 0$$

Für diesen geschlossenen Umlauf in einem Vektorfeld gibt es auch eine Rechenvorschrift, den **Rotor**

Rotor $$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{e_n} * \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint \vec{E} d\vec{s}}$$

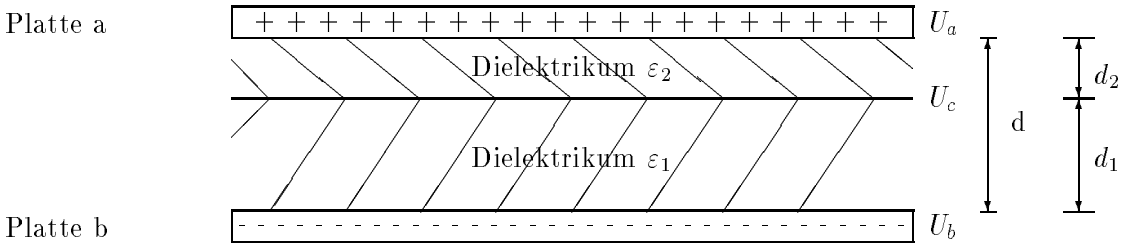
Wenn wie in diesem Fall ein geschlossener Umlauf als Ergebnis Null ($\operatorname{rot} E = 0$) ergibt, dann nennt man ein solches Feld ein **wirbelfreies** Feld, oder auch ein **konservatives** Feld.

Die **Rechenvorschrift Rotor**:

Aussage über die Änderung eines Vektorfeldes **quer** zu seiner Strömungsrichtung.
Diese Eigenschaft nennt man **Wirbel**.
Wenn rot **ungleich Null** spricht man von **Wirbelfeld**.
Rotor auf ein Vektorfeld angewandt, ergibt wieder ein Vektorfeld.

Mit einem geschlossenen Umlauf wird eine Fläche eingeschlossen. Wenn für jeden Raumpunkt ein Wert berechenbar sein soll, dann wird über den Grenzübergang $A \to 0$ die Fläche zum Punkt entarten. Der Vektor $\vec{e_n}$ steht auf dieser Fläche senkrecht und gibt die Richtung des entstehenden Vektorfeldes an.
Salopp ausgedrückt bedeutet die Rechenvorschrift Rotor:
Aussage darüber, ob man auf einem Umlauf etwas "gewinnen" oder "verlieren" kann.

Bei der Behandlung der Durchschlagfestigkeit von Kondensatoren ergab sich folgender Sachverhalt.



Für die Spannung U_{ab} ergab sich

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} = E_2 * d_2 + E_1 * d_1 = E_1 * \left(d_1 + \frac{E_2}{E_1} * d_2\right) = E_1 * \left(d_1 + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} * d_2\right)$$

wegen $E \sim \frac{1}{\varepsilon}$ und $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist wegen ε_r eine materialabhängige Feldgröße.
Deshalb ist häufig der Begriff der elektrischen Verschiebungsdichte* günstiger.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon * \vec{E}}$$

Die elektrische Verschiebungsdichte $\vec{D}$ ist eine materialunabhängige Feldgröße.

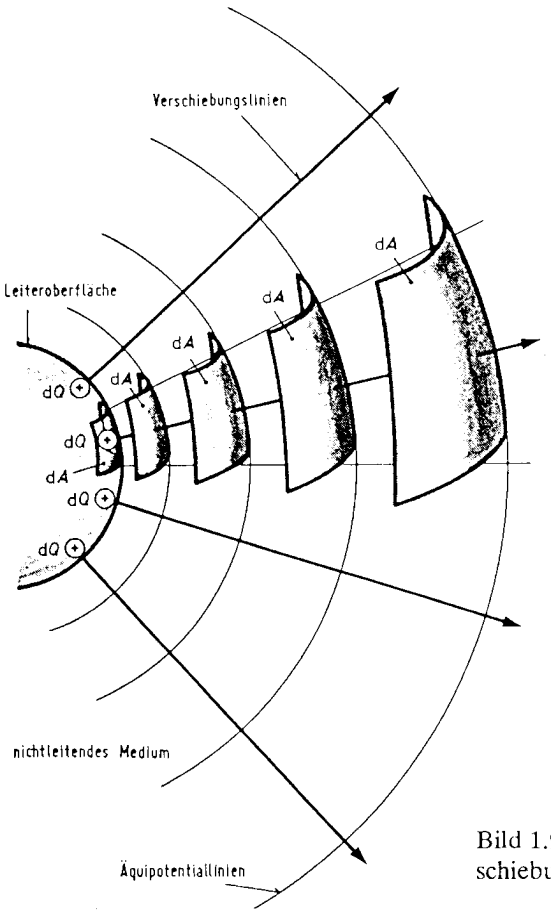


Bild 1.9 Zur Definition der Verschiebungsdichte

Abbildung 1.6: Quelle:[1]

Einheit von D: $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} * \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{As} * \mathrm{V}}{\mathrm{Vm} * \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$ letztendlich $\frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$

*auch: Flussdichte oder elektrische Erregung

Für die Punktladung gilt : $$\boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4 * \pi * r^2} * \vec{e_r}}$$

unabhängig vom Material, abhängig nur noch von der erregenden Ursache, der Ladung.

Aus der Einheit Ladung pro Fläche drängt sich die Idee auf, aus der Verschiebungsdichte über eine geschlossene Fläche (also ein Volumen), die darin enthaltene Ladung zu berechnen. Dazu spannt man eine geschlossene Hüllfläche auf (z.B. eine Kugeloberfläche). Innerhalb dieser Kugel soll sich die Ladung Q befinden. Teilt man jetzt die Kugeloberfläche in kleine Flächenelemente $dA = ds\varphi * ds\theta$ auf und bildet die Summe aus Verschiebungsdichte mal Flächenelement, so erhält man als Ergebnis die Ladung Q, die sich in diesem Volumen aufhält.

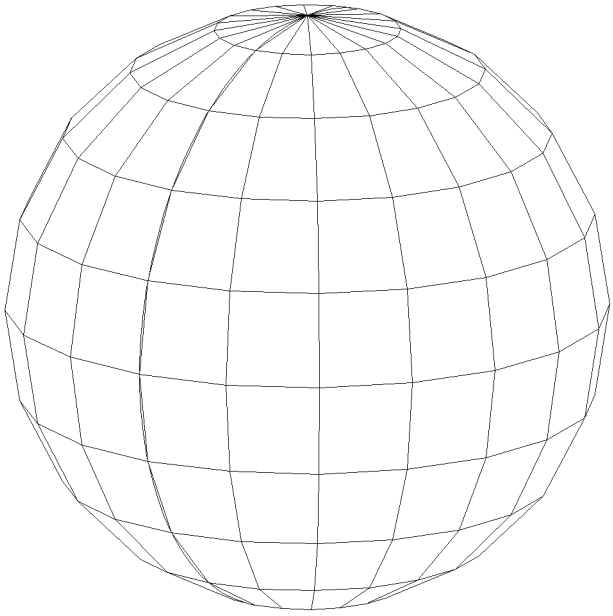


Abbildung 1.7: geschlossene Hüllfläche

Behauptung: $$\sum \vec{D} * d\vec{A} = Q$$

Beweis: $$\oint \vec{D} d\vec{A} = \oint \frac{Q}{4 * \pi * r^2} * ds\varphi * ds\theta$$

Hüllkurve ist Kugeloberfläche damit $$\oint ds\varphi * ds\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r * \sin\theta * d\varphi * r * d\theta = 4 * \pi * r^2$$

eingesetzt ergibt $$\oint \vec{D} d\vec{A} = \frac{Q}{4 * \pi * r^2} * 4 * \pi * r^2 = Q$$ q.e.d.

Bei gegebener Feldverteilung für $\vec{D}$ sollte es also möglich sein, aus dieser Feldverteilung auf die Ladungsverteilung rückzuschließen. Um dies für jeden Raumpunkt berechnen zu können, gibt es die Rechenvorschrift Divergenz

Divergenz $$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint \vec{D} d\vec{A}}$$

Rechenvorschrift Divergenz:

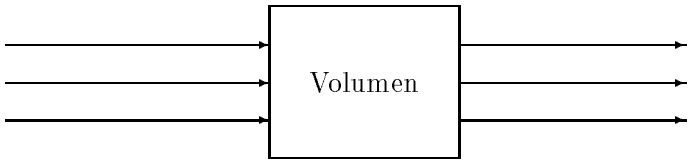
Die Divergenz ist ein Maß für die Ergiebigkeit eines Vektorfeldes. Sie gibt an, wieviel Fluß je Volumen in jedem Punkt des betrachteten Feldbereichs entsteht oder verschwindet.
Verschwindet in einem Vektorfeld innerhalb eines Bereiches die Divergenz, so liegen weder Quellen noch Senken vor. Das Vektorfeld ist in diesem Bereich quellenfrei, anderenfalls ist es ein Quellenfeld.
Bei Quellenfreiheit besitzen die Feldlinien weder Anfang noch Ende; entweder sie verlaufen in sich geschlossen oder sie treten durch das betrachtete Volumen hindurch.
In einem Quellenfeld entspringen dagegen an Quellen neue Feldlinien (Vektorlinien), die an den Senken wieder münden.
Divergenz ist ein Skalar und gibt die Quellenstärke pro Volumeneinheit an.
Salopp: *Aussage über den Quellencharakter eines Vektorfeldes.*

Für das elektrostatische Feld gilt:

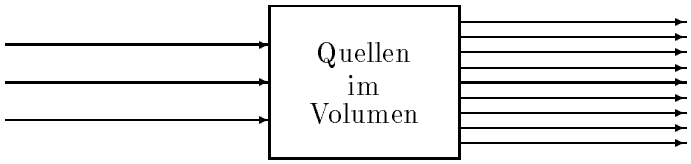
$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \frac{Q}{dV} = \rho} \qquad \text{mit } \rho \text{ als Raumladungsdichte}$$

Beispiele:

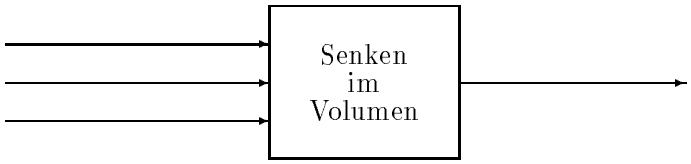
Über die "Anzahl Feldlinien" *rein* in ein Volumen und *raus* aus einem Volumen kann man anschaulich die unterschiedlichen Divergenzmöglichkeiten darstellen.



div = 0



div > 0



div < 0

Das **elektrostatische Feld** wird beschrieben mit

$\boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$ wirbelfrei, daraus ergibt sich die Beschreibungsmöglichkeit mit einem Potentialfeld

$\boxed{\vec{E} = -\text{ grad } \varphi}$

$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$ Quellen des Feldes sind elektrische Ladungen

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon * \vec{E}}$ Materialgleichung

Kapitel 2

Magnetostatisches Feld

Aus der Physikvorlesung sollte man über die Feldlinien eines Magneten wissen, daß die magnetischen Feldlinien in sich geschlossen sind, weil man Nord– und Südpol nicht trennen kann. Es gibt keine magnetischen Monopole. Ursachen eines solchen Magnetfeldes sind Permanentmagnete.

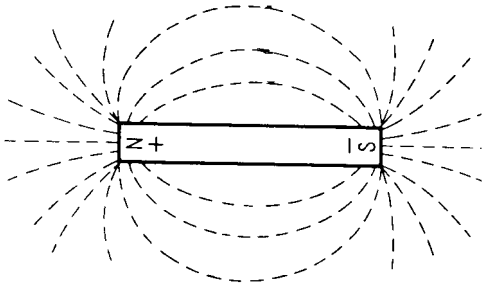


Abbildung 2.1: Feldlinien eines Permanentmagneten

Analog zum elektrischen Feld wurde für das magnetische Feld definiert:

magnetische Feldstärke $\vec{H}$ Einheit: $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

magnetische Flußdichte $\vec{B}$ Einheit: $\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$

Die Materialeigenschaften sind in der magnetischen Feldkonstanten μ (Permeabilität) $\mu = \mu_0 * \mu_r$ enthalten.

$$\mu_0 = 1.256 * 10^{-6} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = 4 * \pi * 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

B und H sind über μ verknüpft (analog zum elektrischen Feld).

$$\vec{B} = \mu * \vec{H}$$

Weil die Feldlinien in sich geschlossen sind, kann an keiner Stelle etwas entstehen oder verschwinden*. Es gilt:

$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$ immer

$\mathrm{rot}\, \vec{H} = 0$ wirbelloses Feld

Das **magnetostatische Feld** wird beschrieben mit

$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{H} = 0}$ wirbelfrei

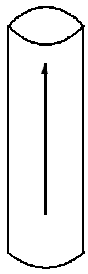
$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{B} = 0}$ quellenfreies Feld, geschlossene Feldlinien

$\boxed{\vec{B} = \mu * \vec{H}}$

*Makroskopische Betrachtung

Kapitel 3

Gleichstrom (Stationäres Strömungsfeld)



Jeder Strompfad ist von einem Magnetfeld umgeben. Nach dem Durchflutungsgesetz erhält man auf einem geschlossenen Umlauf durch das Magnetfeld und Aufaddieren der magnetischen Feldstärkekomponenten den Gesamtstrom durch die eingeschlossene Fläche.

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I \qquad \text{dieses Gesetz bezieht sich auf Gleichstrom}$$

Gleichstrom bedeutet $I = \text{konst} = \frac{dQ}{dt}$

In der Elektrostatik gilt: $Q = \int\int \vec{D} d\vec{A}$ aus $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

Bei Gleichstrom ergibt Integration $Q = D * A$ wegen gleichförmiger Bewegung über dem Leiterquerschnitt A

Somit kann man für den Gleichstrom ansetzen

$$I = \text{konst} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dD}{dt} * A \qquad \text{umgeformt zu} \qquad \frac{I}{A} = \frac{dD}{dt}$$

D ist aber eine Funktion des Ortes **<u>und</u>** der Zeit also $D = f(s,t)$

damit wird

$$dD = \frac{\partial D}{\partial t} * dt + \frac{\partial D}{\partial s} * ds$$

erweitert mit $\frac{1}{dt}$ ergibt

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial s} * \frac{ds}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial s} * v$$

somit

$$\frac{I}{A} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial s} * v \qquad \text{diese Gleichung wird im Kapitel 4 auf Seite 22 gebraucht !!!!}$$

Im stationären Strömungsfeld ist $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$, (keine Zeitabhängigkeit).

Damit kann man dann $\frac{\partial D}{\partial s} = \frac{dD}{ds}$ setzen und erhält für den Strom pro Fläche

$$\frac{I}{A} = \rho * v \qquad \text{also Ladungsträgerdichte mal Geschwindigkeit}$$

Für den Ausdruck Strom pro Fläche führt man den Begriff der elektrischen Stromdichte J ein. Geschwindigkeit hat eine Richtung, so daß man gleich eine vektorielle Größengleichung schreiben kann.

$$\vec{J} = \rho * \vec{v} \qquad \text{Einheit : } \frac{\mathrm{As} * \mathrm{m}}{\mathrm{m}^3 * \mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

Die integrale Aussage Strom ist damit für jeden Raumpunkt als Stromdichte $\vec{J}$ definiert.
Der Gesamtstrom I ergibt sich aus der Integration der Stromdichte über die durchflossene Fläche

$$I = \int\int \vec{J} d\vec{A}$$

Das Durchflutungsgesetz schreibt sich damit

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I = \int\int \vec{J} d\vec{A}$$

Die Rechenvorschrift Rotor auf das Vektorfeld $\vec{H}$ angewandt, ergibt

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\epsilon_n} * \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint \vec{H} d\vec{s} = \vec{\epsilon_n} * \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int\int \vec{J} d\vec{A} = \vec{J}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}}$$

Dies ist allgemein die Beziehung zwischen elektrischer Stromdichte und magnetischer Feldstärke.

Als nächstes interessiert der Zusammenhang der Feldgröße $\vec{J}$ mit der Feldgröße $\vec{E}$.
Das ohmsche Gesetz in allgemeiner Form

$$I = \frac{U}{R} \qquad \text{ist eine integrale Aussage.}$$

Ersetzt man die integralen Größen I und U mit

$$I = \int\int \vec{J} d\vec{A} \qquad \text{und} \qquad U = \int \vec{E}\, d\vec{s}$$

und $R = \frac{1}{\kappa} * \frac{\ell}{A}$ mit κ : spezifische elektrische Leitfähigkeit $\frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{Vm}^2} = \frac{1}{\Omega \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

ergibt sich

$$\begin{aligned} U &= R * I \\ \int \vec{E}\, d\vec{s} &= \frac{1}{\kappa} * \frac{\ell}{A} \int\int \vec{J} d\vec{A} \\ \kappa * \frac{1}{\ell} * \int \vec{E}\, d\vec{s} &= \frac{1}{A} * \int\int \vec{J} d\vec{A} \end{aligned}$$

$$\boxed{\kappa * \vec{E} = \vec{J}} \qquad \underline{\text{differentielles ohmsches Gesetz}}$$

Elektrische Stromdichte ergibt sich aus elektrischer Leitfähigkeit mal elektrischer Feldstärke.

Das **Gleichstromfeld** (Stationäres Strömungsfeld) wird beschrieben mit

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0} \qquad \boxed{\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} = \kappa * \vec{E}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho} \qquad \boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon * \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu * \vec{H}}$$

Kapitel 4

Wechselstrom (zeitlich veränderliche Felder)

Beim Wechselstrom ist die Stromstärke I eine Funktion der Zeit, also ist $\frac{dQ}{dt}$ nicht mehr konstant. Damit muß sich auch das mit dem Strom verknüpfte Magnetfeld zeitlich ändern.

Nach dem Induktionsgesetz gilt, daß durch magnetische Induktion eine Spannung entsteht, die der verursachenden Wirkung entgegengesetzt ist.

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}d\vec{A} \qquad \text{mit magnetischer Fluß} \qquad \Phi = \int\int \vec{B}d\vec{A}$$

Spannung als Potentialdifferenz hängt mit der elektrischen Feldstärke zusammen.

$$u_{ind} = \oint \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

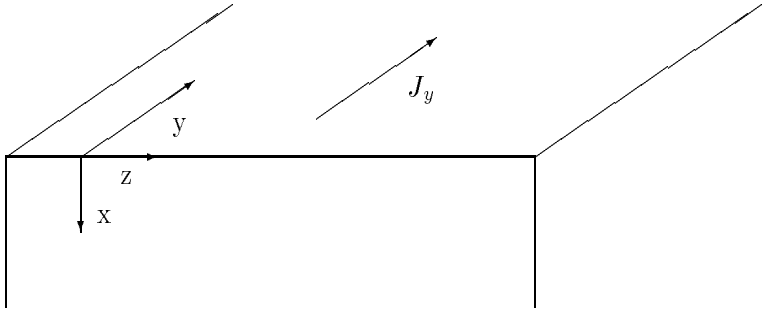
das bedeutet, ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld.

Wie wirken sich diese Beziehungen auf die Felder in einem Leiter aus ?

Es gelten folgende 3 Gleichungen:

differentielles ohmsches Gesetz	$\vec{J}$	$=$	$\kappa * \vec{E}$
Durchflutungsgesetz	$\text{rot}\,\vec{H}$	$=$	$\vec{J}$
Induktionsgesetz	$\oint \vec{E}d\vec{s}$	$=$	$-\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}d\vec{A}$

Die Behandlung eines realen runden Leiters führt zu Besselfunktionen, deshalb soll der Einfluß an einem quaderförmigen Leiter, der nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt ist, untersucht werden.



Die x–Achse soll dabei ins Leiterinnere zeigen und die y–Achse in Richtung des Stromflusses. Im allgemeinen Fall ist Wechselstrom eine cosinusförmige Größe, deshalb werden für die verwendeten Feldgrößen komplexe Ansätze gemacht.

$$|\vec{J}| = \underline{J} * e^{j\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \underline{J} = J * e^{j\varphi}$$

Für die folgende Ableitung wird der Faktor $e^{j\omega t}$ weggelassen, um die Schreibweise zu vereinfachen.

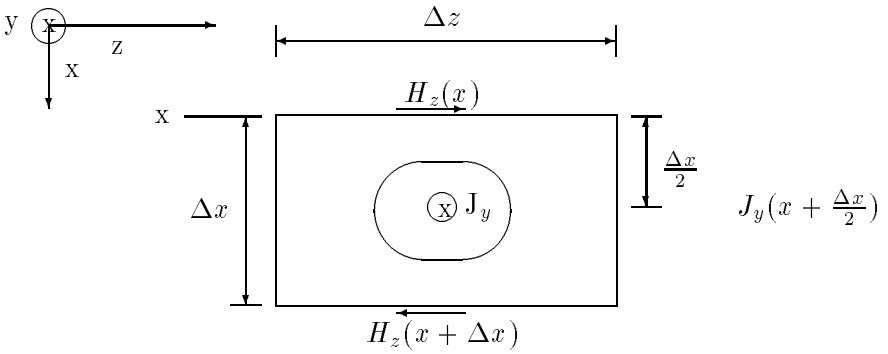
Die vollständige Schreibweise der Vektorgröße in kartesischen Koordinaten ergibt:

$$\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{J}}(x,y,z,t) = \underline{J}_x(x,y,z,t) * \vec{e_x} + \underline{J}_y(x,y,z,t) * \vec{e_y} + \underline{J}_z(x,y,z,t) * \vec{e_z}$$

Der Strom soll ausschließlich in y–Richtung fließen, damit wird $J_x = 0$ und $J_z = 0$.
Untersucht werden soll die Feldverteilung in Abhängigkeit von der Leitertiefe x.
Aufgrund dieser Einschränkungen ergeben sich folgende einfache Feldkomponenten.

$$\underline{\vec{J}} = \underline{J}_y(x,t) * \vec{e_y} \qquad \underline{\vec{H}} = \underline{H}_z(x,t) * \vec{e_z} \qquad \underline{\vec{E}} = \underline{E}_y(x,t)\vec{e_y}$$

In jeder Tiefe x muß für ein Flächenelement $\Delta x * \Delta z$ gelten $\oint \vec{H} d\vec{s} = I$.



$$\begin{aligned} H_z(x) * \Delta z - H_z(x+\Delta x) * \Delta z &= J_y\left(x + \tfrac{\Delta x}{2}\right) * \Delta x * \Delta z \qquad | * \frac{1}{\Delta x * \Delta z} \\ \frac{H_z(x) - H_z(x+\Delta x)}{\Delta x} &= J_y\left(x + \tfrac{\Delta x}{2}\right) \\ -\frac{H_z(x+\Delta x) - H_z(x)}{\Delta x} &= J_y\left(x + \tfrac{\Delta x}{2}\right) \end{aligned}$$

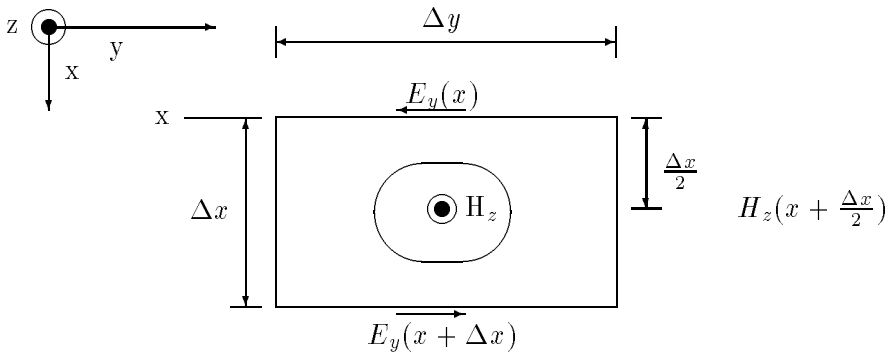
Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ wird aus der Differenzengleichung eine DGL.

$$J_y(x) = -\frac{dH_z(x)}{dx} = \kappa * E_y(x)$$

Durchflutungsgesetz und Ohmsches Gesetz sind somit ausgewertet.

Um das Induktionsgesetz auswerten zu können, betrachtet man ein Flächenelement $\Delta x * \Delta y$ in der Leitertiefe x.

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \int \vec{B} d\vec{A}$$



Substituiert $\vec{B} = \mu * \vec{H}$ und $\frac{d\vec{B}}{dt} = j\omega * \mu * \vec{H}$ ergibt

$$-E_y(x) * \Delta y + E_y(x + \Delta x) * \Delta y = -j\omega * \mu * H_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) * \Delta x * \Delta y \qquad | * \frac{1}{\Delta x * \Delta y}$$

$$\frac{E_y(x + \Delta x) - E_y(x)}{\Delta x} = -j\omega * \mu * H_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ wird aus der Differenzengleichung wieder eine DGL.

Es ergeben sich zwei DGL 1.Ordnung mit zwei Unbekannten $H_z(x)$ und $E_y(x)$.

aus Induktionsgesetz $$\frac{dE_y(x)}{dx} = -j\omega * \mu * H_z(x)$$

aus Durchflutungsgesetz $$-\frac{dH_z(x)}{dx} = \kappa * E_y(x)$$

Ineinander Einsetzen ergibt jeweils eine DGL 2.Ordnung für $E_y(x)$ bzw $H_z(x)$.

$$\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} = -j\omega\mu * \frac{dH_z(x)}{dx} = j\omega\mu * \kappa * E_y(x)$$

aufgelöst nach E $$\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} = j\omega\mu\kappa * E_y(x)$$

aufgelöst nach H $$\frac{d^2H_z(x)}{dx^2} = j\omega\mu\kappa * H_z(x)$$

Formal erkennt man daran schon, daß E und H in gleicher Weise von x abhängen müssen.

Die Mathematik stellt für solche DGL 2.Ordnung folgenden allgemeinen Lösungsansatz zur Verfügung :

$$\underline{E}(x) = \underline{E}_1 * e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{E}_2 * e^{+\underline{\gamma} x}$$

Durch zweimaliges Differenzieren wird dieser Lösungsansatz in eine adäquate Form gebracht.

$$\frac{dE_y(x)}{dx} = -\underline{\gamma} * \underline{E}_1 * e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{\gamma} * \underline{E}_s * e^{+\underline{\gamma} x}$$

$$\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 * \underline{E}_1 * e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{\gamma}^2 * \underline{E}_2 * e^{+\underline{\gamma} x} = \underline{\gamma}^2 * \underline{E}_y(x)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu\kappa$.

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu\kappa} = \sqrt{\omega\mu\kappa} * e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega\mu\kappa} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j * \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * (1 + j)$$

In der Leitungstheorie wird γ als Fortpflanzungskonstante bezeichnet und in einen Realteil und einen Imaginärteil aufgespalten

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * (1+j)$$

Die mathematische Lösung für die orts- und zeitabhängigen Feldstärken lautet damit

$$\underline{E}_y(x,t) = (\underline{E}_1 * e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{E}_2 * e^{+\underline{\gamma}x}) e^{j\omega t}$$

Physikalische Experimente zeigen, daß die Feldstärken in x–Richtung abnehmen müssen, somit muß $\underline{E}_2 = 0$ sein.

Für **die physikalisch reale** Feldstärkeverteilung gilt :

$$E_y(x,t) = \Re\left\{ \underline{E}_1 * e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * x} * e^{-j\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * x} * e^{j\omega t} \right\}$$

$-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * x$	beschreibt die Amplitudenabnahme in x–Richtung, in diesem Fall in Leitertiefe
$-j\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * x$	beschreibt die Phasendrehung in x–Richtung
$j\omega t$	beschreibt die zeitliche Abhängigkeit

Bei exponentiell abklingenden Werten ist eine charakteristische Größe der Wert bei $\frac{1}{e}$ (Abklingkonstante).

$$e^{-1} = e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * \delta}$$

Die Größe δ hat die Bedeutung der x–Tiefe (Leitertiefe), in der die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ abgefallen ist.

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}}$$

Einheit δ :
$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{s}} * \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} * \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{s} * \mathrm{A} * \mathrm{V} * \mathrm{m}^2}{\mathrm{V} * \mathrm{s} * \mathrm{A}}} = \mathrm{m}$$

Die Größe δ nennt man **äquivalente Leitschichtdicke** oder (physikalisch weniger zutreffend) **Eindringtiefe**.

Mit dieser Definition der äquivalenten Leitschichtdicke ergibt sich die Feldverteilung im Leiter zu

$$E_y(x,t) = \Re\left\{ \underline{E}_1 * e^{-\frac{x}{\delta}} * e^{-j\frac{x}{\delta}} * e^{j\omega t} \right\}$$

$$E_y(x,t) = |E_1| cos\varphi * e^{-\frac{x}{\delta}} * \cos(\omega t - \tfrac{x}{\delta})$$

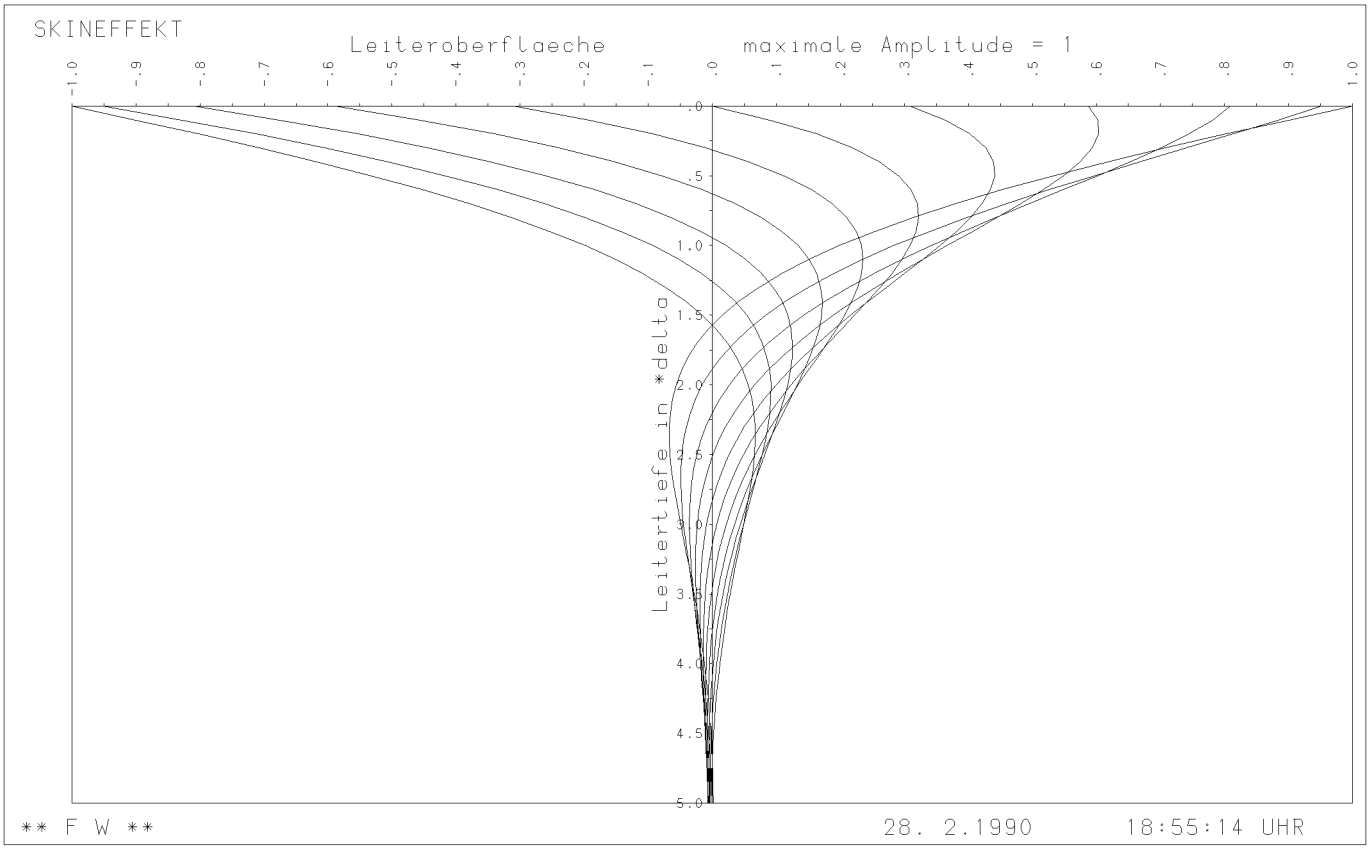


Abbildung 4.1: Amplitudenverteilung für unterschiedliche Zeitpunkte $t = n * \frac{T}{20}$ mit $n = 0 \ldots 10$

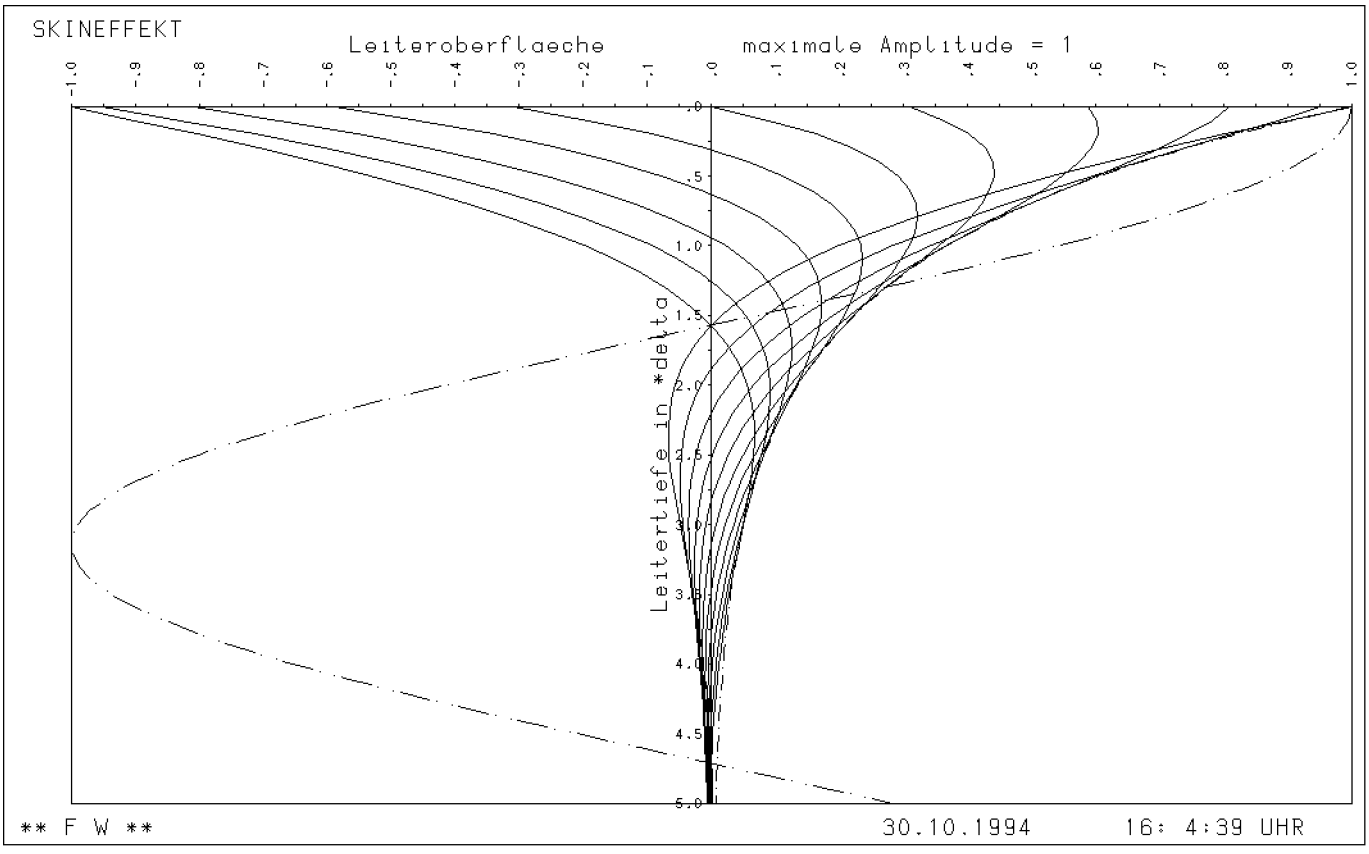


Abbildung 4.2: wie Abb.4.1, zusätzlich Dämpfungsanteil und Phasenanteil

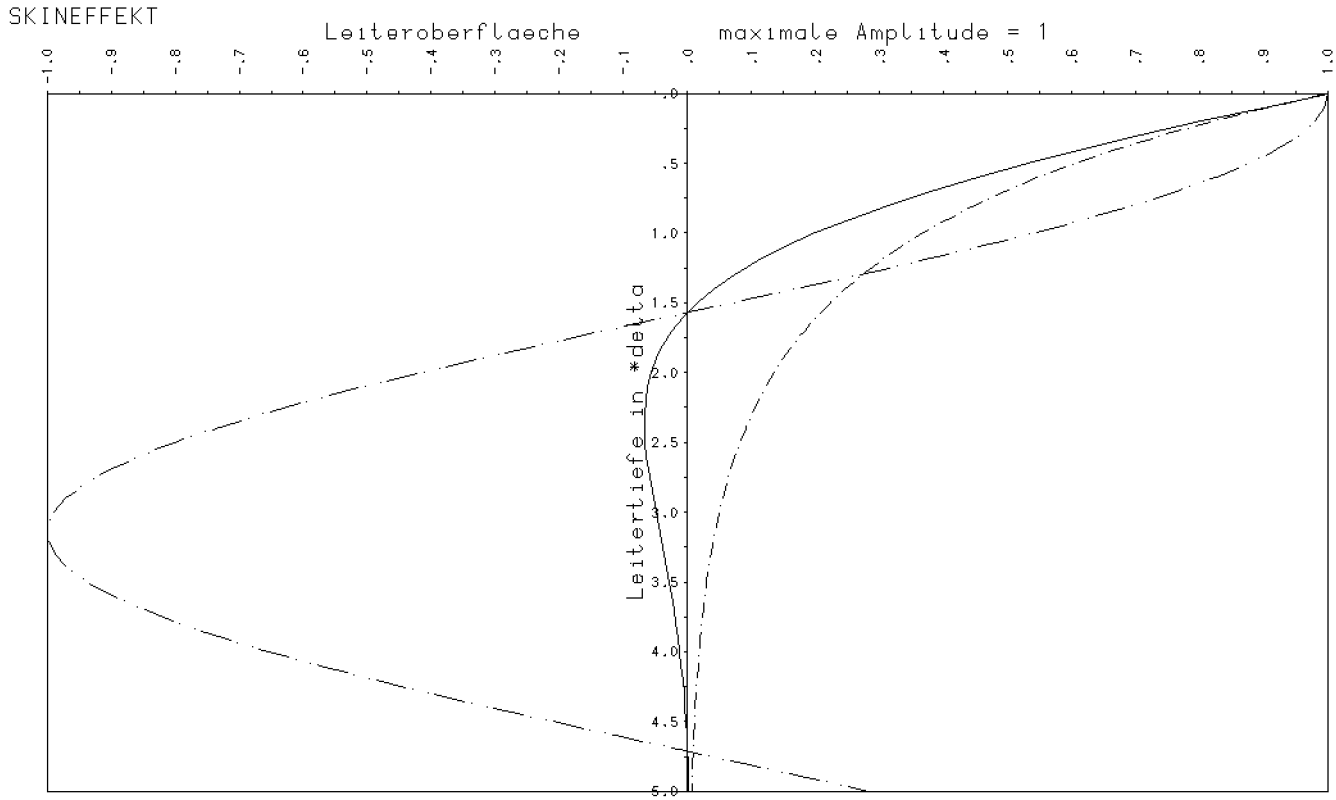


Abbildung 4.3: Amplitudenverteilung für $t = 0$, Dämpfungsanteil, Phasenanteil, Gesamt

Welche Auswirkungen ergeben sich aus den Feldverteilungen auf den Gesamtwiderstand eines Leitungsstücks?

Bei einem quaderförmigen Leitungsstück der Breite b, der Dicke d und der Länge ℓ ergibt sich der Gleichstromwiderstand zu

$$R_= = \frac{\ell}{\kappa * b * d}$$

Für den Wechselstromwiderstand muß der Gesamtstrom erst errechnet werden über die lokale Stromdichte $\vec{J}$ bis in eine *unendliche* Tiefe des b–breiten Quaderstücks.

$$\underline{I} = \int\int \underline{\vec{J}} d\vec{A} = b * \int_0^\infty \underline{J}_y(x) dx \quad = \quad b * \int_0^\infty \kappa * \underline{E}_y(x) dx$$

$$\underline{I} = b * \kappa \int_0^\infty \underline{E}_1 * e^{-\frac{x}{\delta}} * (1+j) dx \quad = \quad b * \kappa \left[-\frac{\delta}{1+j} \underline{E}_1 * e^{-\frac{x}{\delta}} * (1+j) \right]_0^\infty$$

$$\underline{I} \quad = \quad b * \kappa * \frac{\delta}{1+j} \underline{E}_1$$

Für die Spannung an der Leiteroberfläche gilt $U = E_1 \ * \ \ell$.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{E}_1 * \ell}{b * \kappa * \delta * \underline{E}_1} * (1+j) = \frac{\ell}{b * \kappa * \delta} * (1+j) = R_\sim + j X_i$$

Der Wechselstromwiderstand besteht aus einem Realteil und einem Imaginärteil, die beide betragsmäßig gleich groß sind. $X_i = \omega L_i$ wird auch als innere Induktivität bezeichnet.

Ein Vergleich von Realteil des Widerstandes bei Wechselstrom mit dem Widerstand bei Gleichstrom

$$R_{=} = \frac{\ell}{\kappa * b * d} \qquad R_{\sim} = \frac{\ell}{b * \kappa * \delta}$$

ergäbe eine formale Gleichsetzung $d = \delta$.

Der Widerstand eines Leitungsstückes unendlicher Dicke ist bei Wechselstrom genauso groß wie der Widerstand eines leitenden Bereichs der Dicke δ bei Gleichstrom. Deshalb auch der Begriff äquivalente Leitschichtdicke. Diesen Effekt der Stromverdrängung auf die Hülle des Leiters nennt man Skineffekt (Hauteffekt).

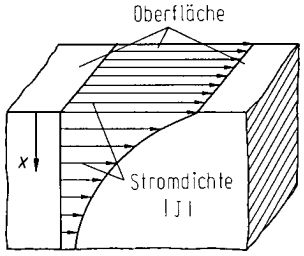


Bild 1. Skineffekt bei einem ebenen Leiter

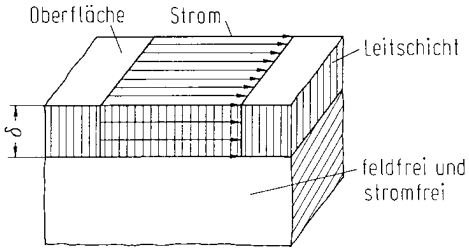


Bild 2. Zweischichtenleiter

Abbildung 4.4: Quelle: [3]

Aus der Bestimmungsgleichung für die äquivalente Leitschichtdicke ergeben sich die zu beachtenden Abhängigkeiten.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}$$

Die äquivalente Leitschichtdicke ist

$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{f}}$ frequenzabhängig

$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ abhängig von den **magnetischen** Eigenschaften des Materials

$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ abhängig von den **elektrischen** Eigenschaften des Materials

Die äquivalente Leitschichtdicke ist frequenz– **und** materialabhängig.

Bei stark ausgeprägtem Skineffekt ist wegen der kleinen Leitschichtdicke besonders auf die Materialeigenschaften der Oberflächenschicht zu achten. Vorsicht ist aber bei Oberflächenvergütungen angebracht, damit durch eine wohlmeinende Oberflächenvergütung, wegen unzureichender Technologie keine Verschlechterung eintritt.
Bei ausgeprägtem Skineffekt führt man formal den Begriff des Oberflächenwiderstands ein, den ein quadratisches Flächenelement hat, das an gegenüberliegenden Seiten kontaktiert ist.

$$R_F = \frac{1}{\kappa * \delta} = R_{\square}$$

damit ergibt sich der Gesamtwiderstand einfach zu

$$R_{\sim} = \frac{\ell}{b} * R_F$$

Oberflächenwiderstand mal Oberflächenabmessungen.

Näherungsformeln für **runde Leiter** beziehen sich auf den Gleichstromwiderstand R_o und dem Verhältnis aus Leitschichtdicke zu Durchmesser des Drahtes.

$$R_o = \frac{4 * \ell}{\kappa * d^2 * \pi}$$ d : Drahtdurchmesser ℓ : Drahtlänge

Im Bereich

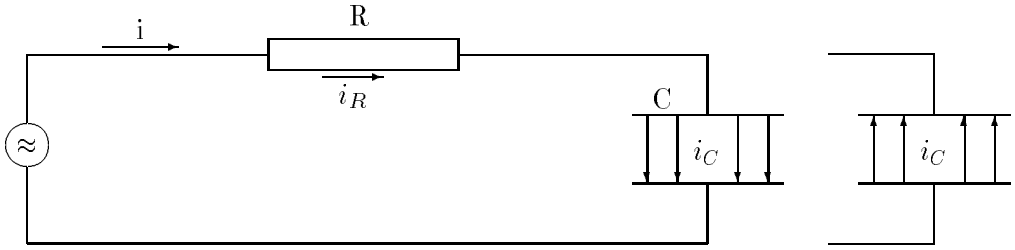
$$d < 2*\delta \quad R_\sim \approx R_o$$

$$2*\delta < d < 4*\delta \quad R_\sim \approx R_o * \left[1 + \left[\frac{d}{5.3*\delta}\right]^4\right]$$

$$4*\delta < d < 10*\delta \quad R_\sim \approx R_o * \left[\frac{d}{4*\delta} + 0.25\right]$$

$$10*\delta < d \quad R_\sim \approx R_o * \frac{d}{4*\delta}$$

Bis jetzt wurde nur der Strom durch einen Leiter, also bewegte Ladungsträger beachtet. Am Beispiel eines Wechselstromkreises mit R und C soll der Begriff des Verschiebungsstroms veranschaulicht werden.



Der Strom durch den Widerstand R wird beschrieben zu $i_R = \frac{u}{R}$ und der Strom durch den Kondensator mit $i_C = u * \omega * C$. Im geschlossenen Wechselstromkreis muß gelten $i_R = i_C = i$ .Weil durch den Kondensator keine Ladungsträger hindurchfließen, muß dieses i_c eine andere Ursache als bewegte Ladungsträger haben. Beim Kondensator findet eine andauernde Umpolung des elektrischen Feldes statt.

In Kapitel 3 ergab sich für den Gesamtstrom

$$\frac{I}{A} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial s} * v$$

Der Ausdruck $\frac{\partial D}{\partial t}$ ist die fehlende Komponente, nämlich die Verschiebungsstromdichte. Anschaulich kann man den Verschiebungsstrom als Fortsetzung des Leitungsstroms durch ein Dielektrikum deuten.
Damit ergibt sich der Gesamtstrom I bei Wechselstrom zu

$$\boxed{I = \int\int \vec{J} d\vec{A} + \int\int \vec{V} d\vec{A}}$$

mit der Verschiebungsstromstromdichte $\vec{V} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

und der Leitungsstromdichte (Konvektionsstromdichte) $\vec{J} = \rho * \vec{v}$

Das **Wechselstromfeld** wird beschrieben mit den

Maxwellschen Feldgleichungen:

$$(1) \qquad \boxed{\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \vec{V} = \kappa * \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \kappa * \vec{E} + \varepsilon * \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}$$

Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld.

$$(2) \qquad \boxed{\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}}$$

Ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld erzeugt ein elektrisches Feld.

Aus Maxwell 1 und 2 folgt:

Elektrisches und magnetisches Feld sind miteinander verkettet. Eine Änderung eines der beiden Felder für sich allein ist, ohne gleichzeitige Änderung des anderen Feldes, nicht möglich.

außerdem gelten die Gleichungen über den Quellencharakter

$\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho}$ (Ladungen sind Quellen)

$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$ (geschlossene Feldlinien, keine Quellen)

$\boxed{\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$ (Kontinuitätsgleichung)

sowie die Gleichungen für die Materialeigenschaften

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon * \vec{E}}$

$\boxed{\vec{B} = \mu * \vec{H}}$

$\boxed{\vec{J} = \kappa * \vec{E}}$

1. Teilen Sie die folgenden Felder in Skalar- und Vektorfelder ein.
   a) Temperaturverteilung
   b) Windgeschwindigkeiten
   c) Feldstärkeverteilung
   d) Ladungsverteilung
   e) Energieverteilung
   f) Kraftverteilung

2. Welche Koordinatensysteme gibt es ? Wie rechnet man von einem ins andere um?

3. Welche Quellen der magnetischen und elektrischen Feldstärke gibt es ?

4. Was ist Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Spatprodukt ?

5. Was bedeuten die vektoranalytischen Begriffe ∇ und Δ ?

6. Was bedeutet $\vec{E}\,(x,y,z,t) = (4x^2 + 5xy) * \vec{e}_x + (6xz + 7yt) * \vec{e}_y$?

7. Welche Möglichkeiten der Darstellung einer komplexen Größe gibt es ?

8. Gegeben sind die folgenden zwei Feldverteilungen:

$$\text{Feld A} : T\,(x,y,z) = \left(x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Feld B} : E\,(x,y,z) = \frac{(x-2)}{\sqrt{(x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13)}^3} * \vec{e}_x + \frac{(y+3)}{\sqrt{(x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13)}^3} * \vec{e}_y$$

   a) Um welche Feldarten handelt es sich ?
   b) Stellen Sie die Felder durch Schnitte in den drei Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ dar. Fertigen Sie eine räumliche Skizze an.
   c) Vereinfachen Sie die Gleichungen durch schrittweise Anpassung des Koordinatensystems. (Verschieben und Darstellen in Zylinderkoordinaten).
   d) Berechnen Sie rot $\vec{E}$ in kartesischen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten.

9. Berechnen Sie rot und div für folgendes Feld:

$$\vec{A}\,(x,y,z) = x^2 * y^2 * \vec{e}_x + y^2 * z^2 * \vec{e}_y + x^2 * y^2 * \vec{e}_z$$

10. Gleichstrom fließt durch ein Koaxialkabel. Bestimmen sie die magnetische Feldstärke in Abhängigkeit vom Abstand r von der Mittelleiterachse.

11. Was sind eigentlich Feldlinien ?

12. Gegeben sind zwei verschiedene Felder durch die Gleichungen:

$$\vec{E}\,(x,y,z) = E\ * \vec{e}_x + 2\ *\ E\ * \vec{e}_y \qquad \text{und} \qquad \vec{H}\,(x,y,z) = H\ * \vec{e}_x - H\ * \vec{e}_y$$

   a) Zeichnen Sie die Feldlinien in der xy-Ebene .
   b) Welchen Winkel schließen die Feldlinien des $E-$ und des $H-$ Feldes miteinander ein ?
   c) Berechnen Sie die Feldstärken für jeden Raumpunkt.
   d) Welche Phasenlage haben die Felder zueinander, wenn es sich um Zeiger handelt ?
   e) Welches Skalarprodukt ergibt sich aus E und H ?
   f) Welches Vektorprodukt ergibt sich aus E und H ?

13. In einem kartesischen Koordinatensystem befinden sich an den Orten $P_1(2,0,4)$ und $P_2(-1,0,1)$ zwei Punktladungen. Über die Polarität der Ladungen ist nichts bekannt. Die Ladung Q_1 ist doppelt so groß wie die Ladung Q_2. Ein Elektron betritt dieses kartesische Koordinatensystem im Punkt $E(1.5,\,2,\,1\,)$. Welchen Weg wird das Elektron einschlagen und wo wird es ankommen ? (Fallunterscheidung)

14. Existieren in einem elektrostatischen Feld in sich geschlossene elektrische Feldlinien ?

15. Warum sind magnetische Feldlinien immer in sich geschlossen ?

16. Welche Aussage steckt im Durchflutungsgesetz ?

17. Wie lautet das differentielle ohmsche Gesetz ?

18. Welche Aussage steckt im Induktionsgesetz ?

19. Was ist Skineffekt ?

20. In welcher Tiefe (in Einheiten der äquivalenten Leitschichtdicke δ) ist die elektrische Feldstärke um 10 dB bzw 20 dB abgefallen ? Welche Phasenbeziehung herrscht dort in Bezug auf die Oberfläche ?

21. Wie gross ist die magnetische Feldstärke in einer Tiefe von 5δ? Wie gross ist die elektrische Feldstärke in einer Tiefe von 10δ? Wie gross ist jeweils bei 5δ und 10δ die elektromagnetische Leistung? Geben Sie die Werte auch in dB an.

22. Berechnen Sie den Widerstand eines runden Platinleiters ($x = 10 \cdot 10^6 \frac{\upsilon}{\mathrm{m}}$) mit einem Durchmesser von 2 mm bei 1 kHz und 1 GHz .

23. Wie groß ist die äquivalente Leitschichtdicke für Kupfer bei f = 1 kHz, 1 MHz, 1 GHz, 10 GHz ? Wie groß ist jeweils der Oberflächenwiderstand bei diesen Frequenzen? (Cu: 58 $\frac{\mathrm{m}}{\Omega * \mathrm{mm}^2}$)

24. Berechnen Sie alle Feldgrößen einer Punktladung $Q = 1E6 * q$ im Abstand von
1 nm, 1 μm, 1 mm, 1 cm, 1 m, 1 km.

25. Zeichnen Sie folgende Funktionen
über t von 0 bis 2T für z = 0, z = $\lambda/8$, z = $\lambda/4$, und
über z von 0 bis 2λ für t = 0, t = T/8 , t = T/4.
($\omega = 1E6$ 1/s, β = 2 rad/m)
    a) $\cos(\omega t - \beta z)$
    b) $\cos(\omega t + \beta z)$
    c) $\cos(\beta z - \omega t)$
    d) $\cos(\beta z + \omega t)$

Hilfsblatt Kartesische Koordinaten

Variablen: $x,\ y,\ z$

Einheitsvektoren: $\vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}$ Rechtssystem: $\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \vec{e_z}$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Volumenelemente: $dv = dx\ dy\ dz$

Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$

Gradient: $\text{grad}\ \varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e_z}$

Divergenz: $\text{div}\ \vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

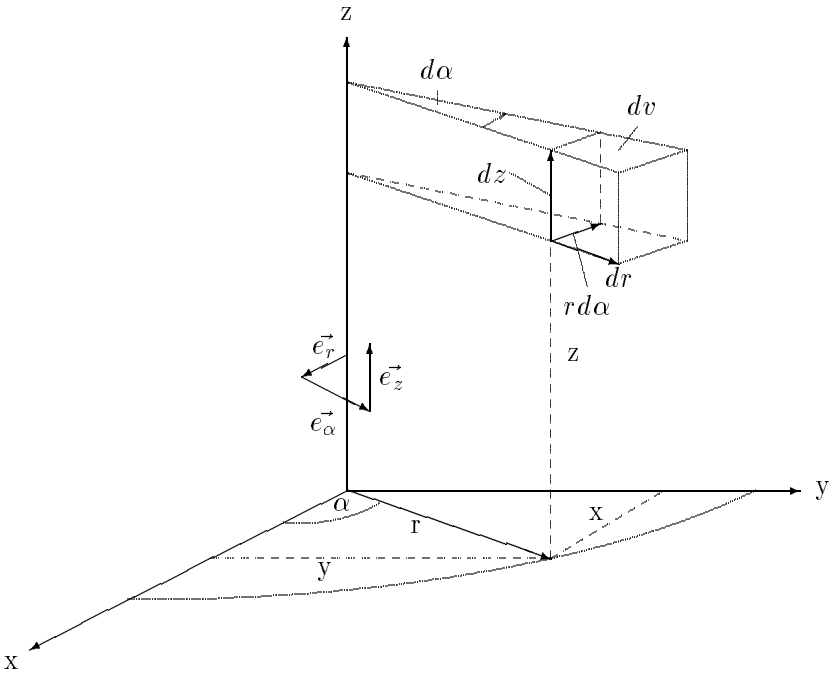
Rotation: $\text{rot}\ \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\vec{e_x} + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]\vec{e_y} + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]\vec{e_z}$

Laplace Operator: $\Delta = \frac{\partial^2 ...}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ...}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 ...}{\partial z^2}$

$$\Delta\vec{E} \quad = \quad \text{grad div}\,\vec{E} - \text{rot rot}\,\vec{E} \quad = \quad \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z} =$$

$$\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right]\vec{e_x} + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right]\vec{e_y} + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right]\vec{e_z}$$

Hilfsblatt Zylinderkoordinaten



Variablen: $r,\ \alpha,\ z$

Einheitsvektoren: $\vec{e_r},\ \vec{e_\alpha},\ \vec{e_z}$ Rechtssystem: $\vec{e_r} \times \vec{e_\alpha} = \vec{e_z}$

Zusammenhang mit rechtwinkligen Koordinaten:

x	$=$	$r\cos\alpha$	r	$=$	$\sqrt{x^2+y^2}$	dr	$=$	$dx\cos\alpha + dy\sin\alpha$
y	$=$	$r\sin\alpha$	α	$=$	$\arctan\frac{y}{x}$	$rd\alpha$	$=$	$dy\cos\alpha - dx\sin\alpha$
z	$=$	z	z	$=$	z	dz	$=$	dz

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2}$

Volumenelemente: $dv = r\ dr\ d\alpha\ dz$

Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\vec{e_\alpha} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$

Gradient: $grad\ \varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\vec{e_\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e_z}$

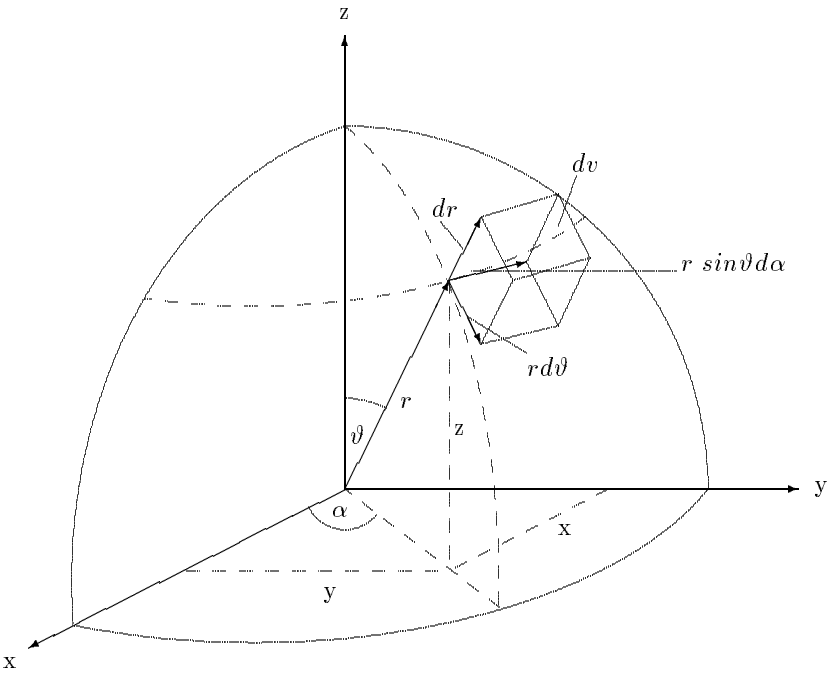
Divergenz: $div\ \vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\vec{D}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{D}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$

Rotation: $rot\ \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z}\right]\vec{e_r} + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right]\vec{e_\alpha} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (rE_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \alpha}\right]\vec{e_z}$

Laplace Operator: $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\frac{\partial ..}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 ...}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 ...}{\partial z^2}$

$$\Delta\vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{E_r}{r^2}\right]\vec{e_r} + \left[\Delta E_\alpha + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial \alpha} - \frac{E_\alpha}{r^2}\right]\vec{e_\alpha} + \left[\Delta E_z\right]\vec{e_z}$$

Hilfsblatt Kugelkoordinaten



Variablen: $r,\ \vartheta,\ \alpha$

Einheitsvektoren: $\vec{e_r},\ \vec{e_\vartheta},\ \vec{e_\alpha}$ Rechtssystem: $\vec{e_r} \times \vec{e_\vartheta} = \vec{e_\alpha}$

Zusammenhang mit rechtwinkligen Koordinaten:

$$x = r\sin\vartheta\cos\alpha \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad dr = dx\sin\vartheta\cos\alpha + dy\sin\vartheta\sin\alpha + dz\cos\vartheta$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\alpha \qquad \alpha = \arctan\frac{y}{x} \qquad r\sin\vartheta d\alpha = dy\cos\alpha - dx\sin\alpha$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad rd\vartheta = dx\cos\vartheta\cos\alpha + dy\cos\vartheta\sin\alpha - dz\sin\vartheta$$

Linienelement: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta d\alpha^2 + r^2 d\vartheta^2}$

Volumenelement: $dv = r^2\sin\vartheta dr\ d\vartheta\ d\alpha$

Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{e_\alpha}$

Gradient: $\text{grad}\ \varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e_\alpha}$

Divergenz: $\text{div}\ \vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot D_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial D_\alpha}{\partial\alpha}$

Rotation: $\text{rot}\ \vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} =$

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot E_\alpha)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial\alpha}\right]\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial r\ E_\alpha}{\partial r}\right]\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\ E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right]\vec{e_\alpha}$$

Laplace Operator: $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\frac{\partial..}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\frac{\partial..}{\partial\vartheta})}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2..}{\partial\alpha^2}$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} &= \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}E_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}\right]\vec{e_r}\\ &+ \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2\ sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}\right]\vec{e_\vartheta}\\ &+ \left[\Delta E_\alpha - \frac{E_\alpha}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha} + \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\alpha}\right]\vec{e_\alpha}\end{aligned}$$

Kapitel 5

Elektromagnetische Wellen

5.1 Allgemeine Wellengleichung

Nach den Maxwellschen Gleichungen hat der Abbau eines magnetischen Feldes den gleichzeitigen Aufbau eines elektrischen Feldes zur Folge und umgekehrt. Diesen sich mit endlicher Geschwindigkeit im Raum ausbreitenden Auf- und Abbau des elektrischen und magnetischen Feldes bezeichnet man als **elektromagnetische Welle.** Jede Ausbreitung eines elektrischen oder magnetischen Feldes stellt somit eine elektromagnetische Welle dar und bedeutet als raumzeitlicher Vorgang sich **schwingend ausbreitende elektromagnetische Energie ohne gleichzeitigen Transport von Materie**.

Wellengleichung

Sollen die beiden Feldvektoren $\vec{E}$ und $\vec{H}$ aus den Maxwellgleichungen berechnet werden, so muß man versuchen, aus beiden Feldgleichungen für jeden Feldvektor eine eigene DGL zu erhalten.
Um den Einstieg zu erleichtern geht man von folgenden Annahmen aus:

ε, μ, κ	sollen konstante*Materialwerte sein
$\rho \neq 0$	Raumladungsdichte vorhanden

Damit schreiben sich die beiden Maxwellgleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \kappa * \vec{E} + \varepsilon * \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Erweiterung der 1.Maxwellgleichung mit rot ergibt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{H} = \kappa * \operatorname{rot} \vec{E} + \varepsilon * \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

eingesetzt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{H} = \kappa * \left(-\mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) + \varepsilon * \left(-\mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{H} = -\kappa * \mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon * \mu * \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

*im allgemeinen Fall Tensoren

In der Vektoranalysis gilt $\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{H} = \text{grad}\,\text{div}\,\vec{H} - \Delta\vec{H}$

Für den Quellencharakter des magnetischen Feldes gilt $\text{div}\,\vec{B} = 0$
unter der Voraussetzung μ = konstant ergibt sich $\text{div}\,\vec{B} = \text{div}\,(\mu * \vec{H}) = \mu * \text{div}\,\vec{H} = 0$

in obige Gleichung eingesetzt ergibt das

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{H} = -\Delta\vec{H} = -\kappa * \mu * \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon * \mu * \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

etwas umgeschrieben führt das zu den

Allgemeinen Wellengleichungen im Zeitbereich oder den d'Alembertschen Gleichungen.

$$\Delta\vec{H} - \kappa * \mu * \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon * \mu * \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\vec{E} - \kappa * \mu * \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon * \mu * \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Abhängig von κ (also den Materialeigenschaften) lassen sich die Gleichungen vereinfachen.

Fall 1: $\kappa = 0$ Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon * \mu * \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon * \mu * \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Fall 2: κ **sehr groß** elektrisch "sehr guter" Leiter

$$\Delta\vec{H} = \kappa * \mu * \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\Delta\vec{E} = \kappa * \mu * \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \text{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Wellengleichung im Frequenzbereich

Beschreibt man die zeitliche Abhängigkeit als harmonische Schwingung, so ergibt sich $|\,\vec{H}\,| = \underline{H}\, e^{j\omega t}$ und die d'Alembertschen Gleichungen werden zu den Helmholtz Gleichungen.

$$\Delta\underline{H} - \kappa * \mu * j\omega\underline{H} - \varepsilon * \mu * (j\omega)^2 * \underline{H} = 0$$

$$\Delta\underline{E} - \kappa * \mu * j\omega\underline{E} - \varepsilon * \mu * (j\omega)^2 * \underline{E} = \text{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon}$$

bzw

$$\Delta\underline{H} - (\kappa * \mu * j\omega - \varepsilon * \mu * \omega^2) * \underline{H} = 0$$

$$\Delta\underline{E} - (\kappa * \mu * j\omega - \varepsilon * \mu * \omega^2) * \underline{E} = \text{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon}$$

5.2 Ebene Welle im idealen Dielektrikum

Unter einer ebenen Welle versteht man allgemein die Ausbreitung eines elektromagnetischen Vorgangs in einer bestimmten Richtung, wobei die Flächen konstanter Phase der die Welle beschreibenden Feldvektoren Ebenen sind.
Voraussetzungen und Annahmen:

1. Die Feldstärkevektoren $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stehen senkrecht aufeinander und sind gleichphasig.
2. Die durch beide Vektoren gebildete Fläche (Ebene) steht senkrecht zur Ausbreitungrichtung.
3. aus 1. und 2. folgt: Die Flächen gleicher Phasen von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stehen deshalb ebenfalls senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.
4. Es gibt keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung.

Einfachstes Beispiel:

$$Annahme: \qquad \vec{E} = E_x(z) * \vec{e}_x \qquad \text{keine Komponenten von } \vec{E} \text{ in y– und z–Richtung}$$

senkrecht zur x–Richtung stehen sowohl y– als auch z–Richtung, wir wählen y–Richtung für H

$$\vec{H} = H_y(z) * \vec{e}_y \qquad \text{keine Komponenten von } \vec{H} \text{ in x– und z–Richtung}$$

damit ist dann auch die Ausbreitungsrichtung festgelegt, nämlich die z–Richtung

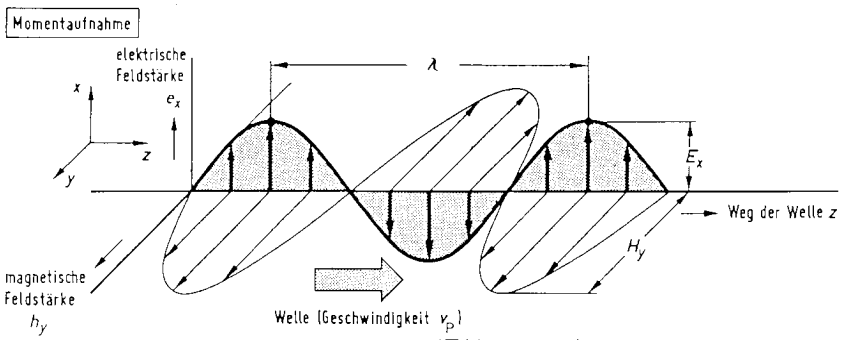


Abbildung 5.1: Ebene Welle Quelle: [1] S.28

Eine derartige Welle nennt man TEM-Welle (**T**ransversal **E**lektro-**M**agnetische), weil E und H nur transversale[†] Komponenten zur Ausbreitungsrichtung besitzen.

Zeigen die Feldstärkekomponenten keine Abhängigkeit in x– und y–Richtung, spricht man von einer **homogenen ebenen Welle**.

Wie beschreibt man diese elektromagnetische Welle? Die entsprechenden Größen sollen in der Folge hergeleitet werden. Ausgangspunkt aller Betrachtungen sind natürlich die Maxwellgleichungen. Weil jeder Feldvektor nur durch eine Komponente repräsentiert ist, geht man von den Helmholtzgleichungen aus.

$$\Delta\underline{H} - (\kappa * \mu * j\omega - \varepsilon * \mu * \omega^2) * \underline{H} = 0$$

$$\Delta\underline{E} - (\kappa * \mu * j\omega - \varepsilon * \mu * \omega^2) * \underline{E} = \text{grad}\,\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Voraussetzung $\rho = 0$ und ε, μ, κ konstante Materialwerte

$$\Delta\underline{H} - j\omega\mu * (\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{H} = 0$$

$$\Delta\underline{E} - j\omega\mu * (\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{E} = 0$$

[†]transversal: querlaufend, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehend, schräg
longitudinal: in der Längsrichtung verlaufend, längsgerichtet, längs

Nach Voraussetzung **nur** Abhängigkeit in z–Richtung, damit $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\text{vereinfacht sich} \qquad \Delta\underline{H} = \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2}$$

$$\text{und} \qquad \Delta\underline{E} = \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2}$$

Die vereinfachten Helmholtzgleichungen schreiben sich nun folgendermaßen

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2} - j\omega\mu * (\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{H} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} - j\omega\mu * (\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{E} = 0$$

Lösungsansatz wie beim Skin-Effekt auf Seite 17

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 * \underline{E} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \underline{E} = \underline{E}_1 * e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{E}_2 * e^{+\underline{\gamma} x}$$

damit nach Komponentenvergleich

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu * (\kappa + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

γ : Fortpflanzungskonstante der Welle
α : Dämpfungskonstante der Welle
β : Phasenkonstante der Welle

Damit ist für die Welle an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt Amplitude und Phase der Feldvektoren bestimmbar.

Allgemein aufgelöst ergibt sich

$$\alpha = \omega * \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} * \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega * \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} * \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

Für ideales Dielektrikum mit $\boxed{\kappa = 0}$ vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\alpha = 0 \qquad \text{keine Dämpfung der Welle, also keine Verluste}$$

$$\beta = \omega * \sqrt{\mu\varepsilon} = \omega * \sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Phasenkonstante abhängig von Frequenz und elektrischen/magnetischen Materialeigenschaften.

Wellenlänge

Für den materiefreien Raum gilt: Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, damit läßt sich β ausdrücken zu

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} * \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \beta_0 * \beta_r$$

Über die Phasenkonstante als Winkeldrehung pro Wegstück läßt sich die Wellenlänge bestimmen

$$\lambda = \frac{2 * \pi}{\beta} = \frac{2 * \pi}{\frac{\omega}{c_0} * \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c_0}{f} * \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

Die Größe Wellenlänge ist eine material**ab**hängige Größe.

Für den materiefreien Raum gilt $\lambda = \frac{c_0}{f}$, was als Freiraumwellenlänge bezeichnet wird und oft den Index $_0$ erhält.

$$\lambda = \lambda_0 * \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \qquad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

Im allgemeinen sind die Werte für ε_r und μ_r größer 1, deshalb ist die Wellenlänge in Materialien immer kleiner als im freien Raum.

Wie schnell breitet sich die Welle im Raum aus ?

Phasengeschwindigkeit

Geschwindigkeit einer Phasenfront ist $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = v_{ph}$

$$v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda * f = \frac{2 * \pi}{\beta} * f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

Für den **materiefreien Raum** ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$) ergibt sich

$$v_{ph} = c_0$$

$$\text{Phasengeschwindigkeit} = \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

Gruppengeschwindigkeit

Die für die Informationsübertragung bzw Energieübertragung wichtige Geschwindigkeit ist die Gruppengeschwindigkeit. Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als Geschwindigkeit, mit der sich eine Wellengruppe (Frequenzgruppe) vorwärtsbewegt.

$$v_g = \frac{\text{Wegstück Wellengruppe}}{\text{Laufzeit Wellengruppe}}$$

Ist die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz, so ergibt sich für die Laufzeit einer Wellengruppe aus unterschiedlichen Frequenzen ein frequenzunabhängiger konstanter Quotient zu $\frac{\text{Wegstück}}{v_{ph}}$ und somit durch Einsetzen in obige Gleichung $v_g = v_{ph}$

Im idealen Dielektrikum gilt für die ebene Welle $v_g = v_{ph}$

Im materiefreien Raum gilt für die ebene Welle $v_g = v_{ph} = c_0$

Allgemein gilt für die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{v_{ph}}{1 - \frac{f}{v_{ph}} * \frac{dv_{ph}}{df}}$

Die Gruppengeschwindigkeit ist ungleich der Phasengeschwindigkeit, falls diese frequenzabhängig ist. Man spricht dann von Dispersion.

Feldstärkekomponenten einer ebenen Welle

Für die einfachste ebene Welle wurde auf Seite 31 der Ansatz gemacht mit

$$\vec{E} = E_x(z) * \vec{e}_x \qquad \text{und} \qquad \vec{H} = H_y(z) * \vec{e}_y$$

Ob dieser Ansatz physikalisch richtig war und welche anderen Darstellungen möglich sind, soll in der Folge untersucht werden.

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus den Maxwellschen Gleichungen in Vektorform

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \kappa * \vec{E} + \varepsilon * \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu * \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Im kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e_x} * \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{e_y} * \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{e_z} * \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$\kappa * \vec{E} + \varepsilon * \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{e}_x * (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_x + \vec{e}_y * (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_y + \vec{e}_z * (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_z$$

Durch Komponentenvergleich ergeben sich allgemein folgende Beziehungen aus Maxwell 1 :

$$\vec{e}_x : \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_x$$

$$\vec{e}_y : \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) = (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_y$$

$$\vec{e}_z : \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_z$$

aus Maxwell 2 :

$$\vec{e}_x : \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -j\omega\mu * H_x$$

$$\vec{e}_y : \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -j\omega\mu * H_y$$

$$\vec{e}_z : \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -j\omega\mu * H_z$$

Homogene ebene Welle in z-Richtung bedeutet $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, damit ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_y \\ 0 &= (\kappa + j\omega\varepsilon) * E_z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu * H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -j\omega\mu * H_y \\ 0 &= -j\omega\mu * H_z \end{aligned}$$

Eine ebene Welle kann sich zusammensetzen aus den Komponenten E_x und H_y (so wie angenommen), aber auch aus E_y und H_x, oder aus einer Kombination von beiden.

Polarisation einer Welle

Die Polarisation (Ausrichtung) einer Welle bezieht sich immer auf den E–Vektor.

Lineare Polarisation liegt dann vor, wenn der Endpunkt des E–Vektors bei fortschreitender Welle eine Gerade (Linie) beschreibt.

Elliptische Polarisation liegt dann vor, wenn der Endpunkt des E–Vektors bei fortschreitender Welle eine Ellipse beschreibt.

Bei linearer Polarisation unterscheidet man noch zwischen **horizontaler und vertikaler** Polarisation, je nachdem ob der E–Vektor parallel zum Horizont schwingt oder senkrecht dazu.

Lineare Polarisation ergibt sich für folgende Feldstärkekomponenten ‡
– nur E_x und H_y, oder
– nur E_y und H_x, oder
– beide, aber Phasenverschiebung Null zwischen E_x und E_y.

Welle aus E_x, H_y und E_y, H_x ergibt elliptische Polarisation, wenn Phasenverschiebung ungleich Null zwischen E_x und E_y.

Zirkulare Polarisation, als Sonderfall der elliptischen Polarisation, wenn gilt $|E_x| = |E_y|$ und Phasenverschiebung 90° zwischen E_x und E_y.

Bei elliptischer Polarisation unterscheidet man zwischen rechts- und linksdrehend, je nachdem in welcher Richtung der resultierende E-Vektor umläuft (dabei in Ausbreitungsrichtung schauen).

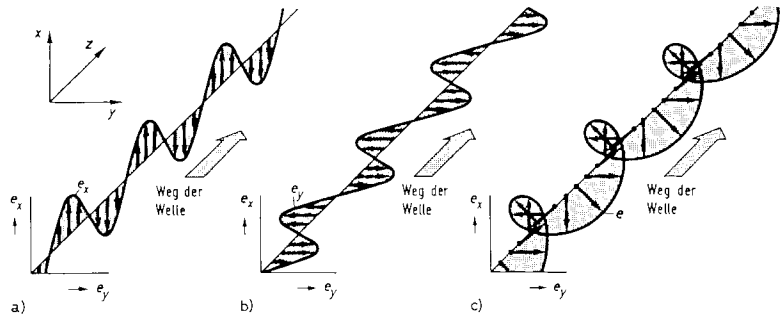


Bild 1.19 Polarisation; a) vertikal polarisierte Welle, b) horizontal polarisierte Welle, c) zirkular polarisierte Welle (linksdrehend)

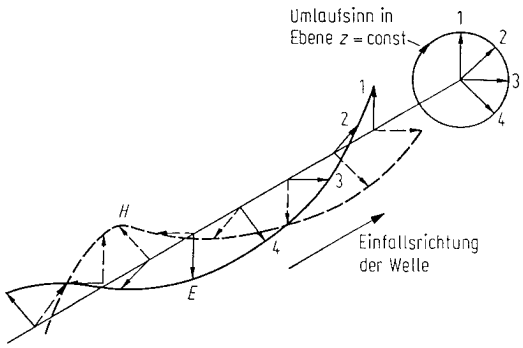


Bild 2. Rechtsdrehende zirkular polarisierte Welle

Abbildung 5.2: Polarisationsarten Quelle: [1] S.34 und [3]

‡bezogen auf das Beispiel

Feldwellenwiderstand

Der Feldwellenwiderstand verknüpft die Feldstärkekomponenten einer Welle, und ist definiert als

$$\boxed{\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_{\text{transversal}}}{\underline{H}_{\text{transversal}}}}$$

Allgemein berechnet für das einfachste Beispiel einer Welle:

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} \qquad \text{mit } \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu * \underline{H}_y \qquad \text{und } -\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = (\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{E}_x \text{ ergibt}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{-j\omega\mu * \underline{H}_y}{-(\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{E}_x} = \frac{j\omega\mu * \underline{H}_y}{(\kappa + j\omega\varepsilon) * \underline{H}_y * \underline{Z}_F} \qquad \text{damit}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{(\kappa + j\omega\varepsilon)}}}$$

Der Feldwellenwiderstand ist im allgemeinen ein komplexer Widerstand, das bedeutet, daß Phasenverschiebung zwischen E und H möglich ist.

Im idealen Dielektrikum $\kappa = 0$ ergibt sich :

$$Z_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Der Feldwellenwiderstand im idealen Dielektrikum ist rein reell. E und H sind in Phase.

Im materiefreien Raum gilt $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ und somit

Feldwellenwiderstand des freien Raums $\qquad Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega \approx 377\ \Omega$

Allgemein gilt damit für Dielektrika: $\qquad Z_F = Z_{F0} * \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$

Elektromagnetische Feldenergie

Im zeitlich veränderlichen Feld ist der felderfüllte Raum in jedem Augenblick Träger elektrischer und magnetischer Energie. Diese Energie kann man als Energiedichte beschreiben.

$$w = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{W}{V}$$

Im Plattenkondensatorfeld gilt:

$$W_e = \frac{1}{2} * C * U^2$$

mit $C = \varepsilon * \frac{A}{d}$ also Material und Geometrie und $U = E * d$

$$W_e = \frac{1}{2} * \varepsilon * \frac{A}{d} * (E * d)^2 = \frac{1}{2} * \varepsilon * E^2 * A * d = \frac{1}{2} * \varepsilon * E^2 * \text{Volumen}$$

Damit ergibt sich die **elektrische Energiedichte** zu

$$w_e = \frac{1}{2} * \varepsilon * E^2$$

Die **magnetische Energiedichte** ergibt sich aufgrund analoger Überlegung zu

$$w_m = \frac{1}{2} * \mu * H^2$$

Allgemein gilt für die **elektromagnetische Energiedichte**

$$w = w_e + w_m = \int_0^D \vec{E} * d\vec{D} + \int_0^B \vec{H} * d\vec{B}$$

Betrachtet man die zeitliche Änderung der räumlichen Energiedichte

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} * \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} * \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

und ersetzt die zeitlichen Ableitungen mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot}\,\vec{H} = \kappa * \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} * (\text{rot}\,\vec{H} - \kappa * \vec{E}) + \vec{H} * (-\text{rot}\,\vec{E})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} * \text{rot}\,\vec{H} - \vec{H} * \text{rot}\,\vec{E} - \kappa * \vec{E}^2$$

In der Vektoranalysis gilt $\vec{E} * \text{rot}\,\vec{H} - \vec{H} * \text{rot}\,\vec{E} = -\text{div}\,(\vec{E} \times \vec{H})$

damit wird $\frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div}\,(\vec{E} \times \vec{H}) - \kappa * \vec{E}^2$

Die entstandene vektorielle Größe $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ nennt man Poynting-Vektor.

Die Dimension dieses Vektors ergibt $\frac{\text{V}}{\text{m}} * \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ eine Leistungsdichte

Gebräuchliche Bezeichnungen sind auch Vektor der Energieströmung oder Strahlungsvektor.
Der Poynting–Vektor zeigt die Richtung der Energieströmung an, beschreibt also an jeder Stelle des felderfüllten Raumes die Strömung der elektromagnetischen Energie.

Sein Betrag ergibt die Leistung durch eine Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Feldes. Wenn der Poynting–Vektor Leistung pro Fläche angibt, so müßte sich doch aus der Integration der Leistungsdichte über eine geschlossene Hüllfläche eine Aussage treffen lassen über den Leistungsinhalt dieses eingeschlossenen Volumens.

Ausgehend von der abgeleiteten Beziehung für die Änderung der Energiedichte ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\vec{E} \times \vec{H}) - \kappa * E^2$$

$$\boxed{-\oint \vec{S} * d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\int (w_e + w_m)\, dV + \int \kappa * E^2\, dV}$$

Diese Beziehung nennt man den **Poyntingschen Satz**.

Die durch die Oberfläche eines Raumteils eindringende Energieströmung eines elektromagnetischen Feldes (Poynting Vektor) ist gleich der zeitlichen Änderung der eindringenden elektromagnetischen Energie (Blindleistung w_e und w_m) vermehrt um die zur Wärmeentwicklung benötigte Wirkleistung aufgrund der Leitungsverluste ($\kappa * E^2$).

Schreibt man den Poyntingschen Satz etwas um, so ergibt sich der Erhaltungssatz für die Energie des elektromagnetischen Feldes.

$$\boxed{\int \kappa * E^2\, dV + \oint \vec{S} * d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int (w_e + w_m)\, dV}$$

Die Abnahme der Feldenergie innerhalb eines felderfüllten Raums ist die Folge der Energieumwandlung in Wärme innerhalb eines Leiters. Diese Wärme wird nach außen abgestrahlt und muß als Feldenergie von außen wieder nachgeliefert werden. Jeder elektrische Leiter bildet für die elektromagnetische Energieströmung eine Senke.

5.3 Ebene Welle im verlustbehafteten Dielektrikum

κ ungleich Null, aber $\kappa << \omega * \varepsilon$
allgemein gilt

$$\alpha = \omega * \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} * \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2}} - 1\right)} \qquad \text{und} \qquad \beta = \omega * \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} * \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2}} + 1\right)}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich mit der Näherung $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$ für $x << 1$ zu

$$\alpha = \omega * \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} * \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2 * 2}} = \frac{1}{2} * \kappa * \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta = \omega * \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} * \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2}} + 1\right)} = \omega * \sqrt{\mu\varepsilon} * \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2 * 4}}$$

$$\beta = \omega * \sqrt{\mu\varepsilon} * (1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 * \varepsilon^2 * 8})$$

5.4 Ebene Welle im Leiter

κ sehr gut, also $\kappa >> \omega * \varepsilon$
In Kapitel 4 (Skineffekt) ergab sich

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu\kappa} = \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} * (1 + j) = \alpha + j\beta$$

$$\text{damit wird} \qquad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}$$

$$Z_F \text{ ergibt sich zu} \qquad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{(\kappa + j\omega\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} * (1 + j)$$

Im Leiter ist der Feldwellenwiderstand komplex. E und H sind um 45° phasenverschoben zueinander.

Die Wellenlänge im Leiter ergibt sich zu

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}} = 2\pi \cdot \delta$$

Faustformel: Wellenlänge ist gleich 2π mal Leitschichtdicke.

Für die Feldstärkebeträge gilt :

$$H = H_0 * \Re\left\{e^{-(1+j)\alpha\ z} * e^{j\omega t}\right\}$$

$$E = H_0 * \Re\left\{\underline{Z}_F * e^{-(1+j)\alpha\ z} * e^{j\omega t}\right\}$$

Es ergibt sich für die örtliche und zeitliche Abhängigkeit

$$H = H_0 * e^{-\alpha\ z} * \cos(\omega t - \beta z)$$

$$\text{mit } E_0 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} * H_0 \qquad E = E_0 * e^{-\alpha\ z} * \cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{4})$$

Wie stark die Welle ins Leiterinnere gedämpft wird, zeigt die Berechnung für eine Wellenlänge Leitschichtdicke.

$e^{-\alpha\lambda} = e^{-2\pi} \approx 0.002$ also nur noch 2 Promille der Feldstärke an der Leiteroberfläche.

Daraus ergibt sich eine gute Abschätzung für eine wirksame Abschirmung :

$$\text{Schirmdicke } d \; > \; \lambda \; (> 7\delta \;)$$

Forderungen an eine gute Abschirmung für elektromagnetische Wellen:

- möglichst hohes κ
- möglichst hohes μ
- entsprechend der zu schirmenden Frequenz angepaßte Dicke der Schirmung
  (bei hohen Frequenzen dünnere Abschirmung ausreichend)

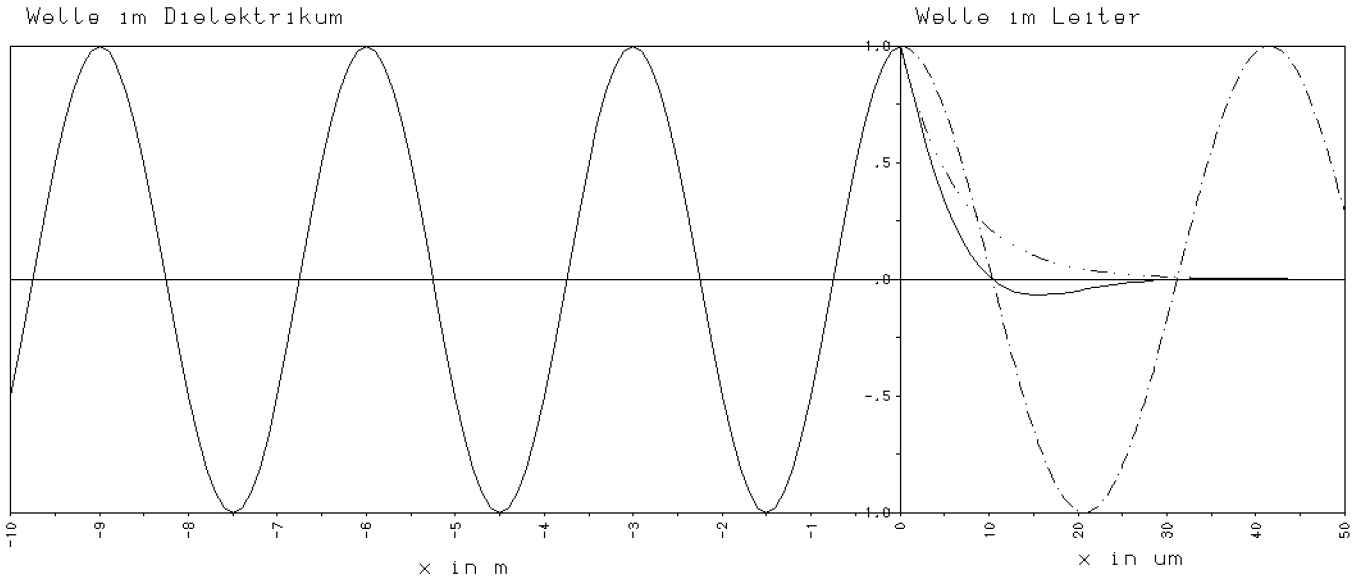


Abbildung 5.3: Freiraumwelle und Welle im Leiter, vergleiche auch Abb.4.1

Wellenlängenvergleich Kupfer zu freier Raum

f	λc_u	λ_0
10 Hz	13 cm	30 000 km
50 Hz	5.9 cm	6 000 km
10 MHz	130 μm	30 m
1 GHz	13 μm	30 cm

5.5 Bedingungen an Grenzflächen für E, D, H, B

5.5.1 Dielektrikum 1 zu Dielektrikum 2

Für die Herleitung werden die einzelnen Komponenten aufgeteilt in Normal- und Tangentialkomponenten zur Grenzfläche.

Normalkomponenten :	E_n	D_n	B_n	H_n
Tangentialkomponenten :	E_t	D_t	B_t	H_t

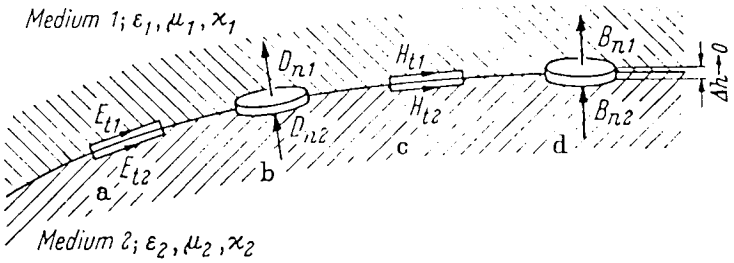


Abb. 5.1/1. Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Medien

Abbildung 5.4: Bedingungen an Grenzflächen Quelle:[2] S.235

Normalkomponente D_n ?

Es gilt $\oint \vec{D} * d\vec{A} = Q$. Anschaulich geht man folgendermaßen vor. Man legt um die Grenzfläche eine kleine Dose, deren Dicke man später gegen Null gehen läßt. Außerdem fordert man $\rho = 0$ an der Grenzfläche, damit div $\vec{D} = 0$ gilt. Damit ergibt sich das Hüllflächenintegral zu

$$\oint \vec{D} * d\vec{A} = 0 = D_{n1} * dA - D_{n2} * dA \qquad => \qquad D_{n1} = D_{n2}$$

Tangentialkomponente E_t ?

Es gilt $\vec{E} * d\vec{s} = 0$. Betrachtet man einen geschlossenen Weg, der die Grenzfläche einschließt, so ergibt sich

$$\vec{E} * d\vec{s} = 0 = E_{t1} * \ell - E_{t2} * \ell \qquad => \qquad E_{t1} = E_{t2}$$

Über die Materialgleichung $D = \varepsilon * E$ ergibt sich für die jeweils andere Komponente des elektrischen Feldes

$$E_{t1} = \frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} = E_{t2} \qquad \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$D_{n1} = \varepsilon_1 * E_{n1} = \varepsilon_2 * E_{n2} = D_{n2} \qquad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Analoge Überlegungen für die magnetischen Größen führen zu folgenden Bedingungen

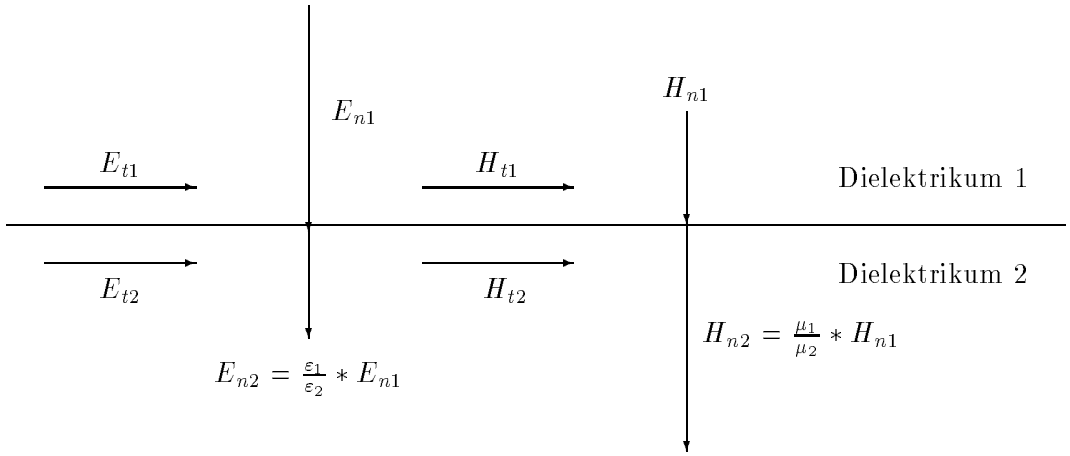
wegen div $B = 0$ $\qquad B_{n1} = B_{n2}$

wegen rot $H = 0$ bei stromloser Grenzfläche $\qquad H_{t1} = H_{t2}$

über die Materialgleichung $B = \mu * H$ ergeben sich $\qquad \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

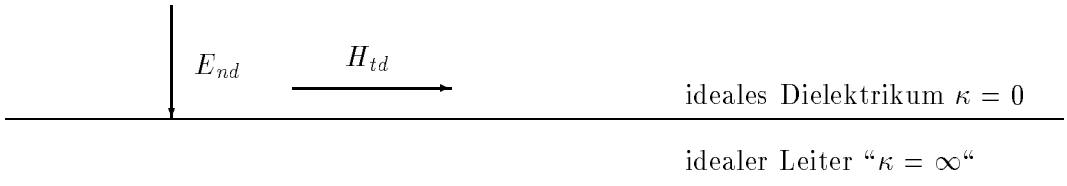
An einer dielektrischen Grenzfläche gilt:
Die tangentialen Komponenten der Feldstärken E und H sind gleich groß.
Die Normalkomponenten der Feldstärken E und H verhalten sich umgekehrt proportional zu den Materialeigenschaften ε und μ.



5.5.2 Dielektrikum zu Metall

Für die folgenden Überlegungen soll ein "$\kappa = \infty$" angenommen werden.
Wenn "$\kappa = \infty$", dann ergibt sich daraus, daß im Metall keine E–Feldstärken vorhanden sein können, weil bei einem Potentialunterschied sofort Ladungsträger in Bewegung gesetzt werden würden, die diesen Potentialunterschied *unendlich* schnell ausgleichen würden.
Damit gilt für den *unendlich guten Leiter* $E_n \cdot \ell = E_t \cdot \ell = 0$, woraus sich anschaulich für die Komponenten im angrenzenden Dielektrikum ergeben muß $E_{td} = 0$ und E_{nd} = Feldstärke im Dielektrikum, die anschaulich auf Ladungen endet.
Wenn im Metall keine elektrischen Feldstärken vorhanden sind, gibt es auch keine magnetischen Feldstärken, also $H_n \cdot \ell = H_t \cdot \ell = 0$. Magnetische Feldlinien können nicht auf Leiteroberflächen senkrecht stehen, so daß gelten muß $H_{nd} = 0$. Deshalb kann nur eine tangentiale Komponente im Dielektrikum vor der Grenzfläche vorhanden sein.

Für die Randbedingungen zu einer leitfähigen Oberfläche gilt:
Es existiert **nur** eine elektrische Normalkomponente und
eine magnetische Tangentialkomponente im Dielektrikum vor der Grenzfläche.
Alle anderen Komponenten sind Null.



5.6 Ebene Wellen an Grenzflächen

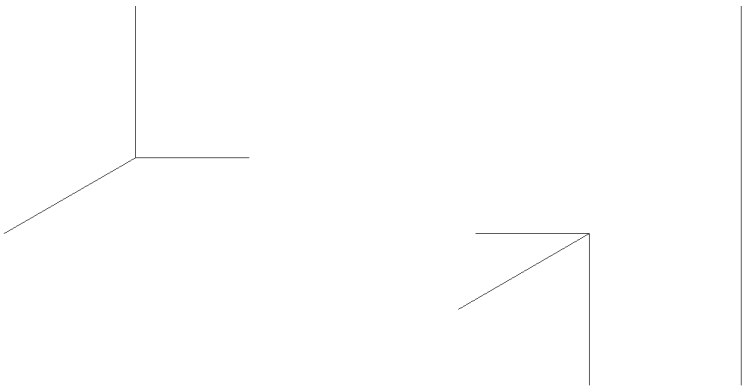
5.6.1 Senkrechtes Auftreffen aus Dielektrikum auf leitende Ebene

Grenzfläche : Dielektrikum zu Leiter

Im idealen Leiter können keine Feldstärken existieren, damit wird die Welle an der Grenzfläche vollständig reflektiert. Aus der Lösung Wellengleichung ergab sich

$$E = E_1 * \cos(\omega t - \beta z) + E_2 * \cos(\omega t + \beta z)$$

also eine Addition zweier Komponenten, wobei sich eine in $+z$–Richtung bewegt und die andere in $-z$–Richtung. Dies ergibt den Ansatz hinlaufende Welle (Index $_h$) in $+z$–Richtung und rücklaufende Welle (Index $_r$) in $-z$–Richtung. Als Beispiel wieder die einfachste Welle aus E_x und H_y.



Aus der Wellengleichung ergeben sich allgemein folgende Beziehungen:

$$E_x = E_{xh} * \cos(\omega t - \beta z) + E_{xr} * \cos(\omega t + \beta z)$$

$$H_y = H_{yh} * \cos(\omega t - \beta z) + H_{yr} * \cos(\omega t + \beta z)$$

Die Randbedingungen liefern folgende Beziehungen

$\vec{E}_t = 0$	damit	$\vec{E}_{xh} + \vec{E}_{xr} = 0$	damit Beträge	$E_{xr} = -E_{xh}$
$\vec{H}_t = \vec{H}_t$	damit	$\vec{H}_{yh} = \vec{H}_{yr}$		

Somit vereinfachen sich die Wellengleichungen zu

$$E_x = E_{xh} * \cos(\omega t - \beta z) - E_{xh} * \cos(\omega t + \beta z)$$

$$H_y = H_{yh} * \cos(\omega t - \beta z) + H_{yh} * \cos(\omega t + \beta z)$$

ausgeklammert ergibt sich

$$E_x = E_{xh} * [\cos(\omega t - \beta z) - \cos(\omega t + \beta z)]$$

$$H_y = H_{yh} * [\cos(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t + \beta z)]$$

mit den trigonometrischen Formeln

$\cos(\omega t - \beta z) - \cos(\omega t + \beta z) = 2 * \sin \omega t * \sin \beta z$

$\cos(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t + \beta z) = 2 * \cos \omega t * \cos \beta z$ ergibt sich

$$E_x = E_{xh} * 2 * \sin \omega t * \sin \beta z$$

$$H_y = H_{yh} * 2 * \cos \omega t * \cos \beta z$$

Setzt man z = 0 an der Grenzfläche, dann kann man die Gesamtamplitude in Abhängigkeit von z auftragen. Diese Amplitude schwingt zeitlich durch, es entstehen sogenannte Knoten und Bäuche. Die H-Feldstärke ist am größten an der Grenzfläche selbst und im Abstand $\lambda/2 * n$, die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche ist Null und erreicht ihre maximalen Werte im Abstand von $\lambda/4 * (2n - 1)$. E und H sind sowohl örtlich als auch zeitlich um 90^0 phasenverschoben zueinander. Es baut sich eine **stehende Welle** vor der leitenden Wand auf. Die Knoten sind örtliche Punkte, an denen für jeden Zeitpunkt t die jeweilige Feldstärke Null ist.

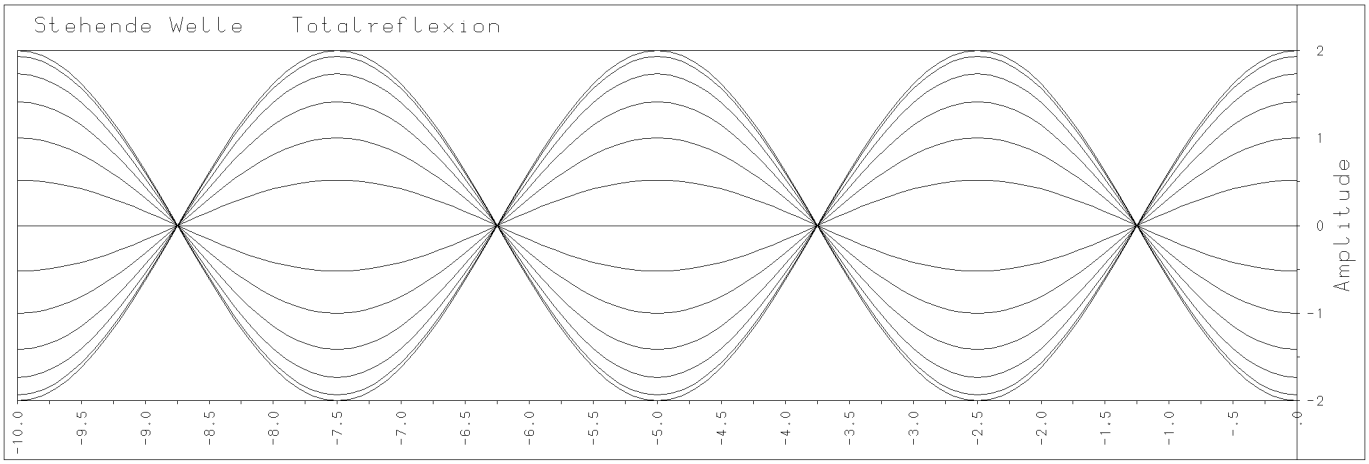
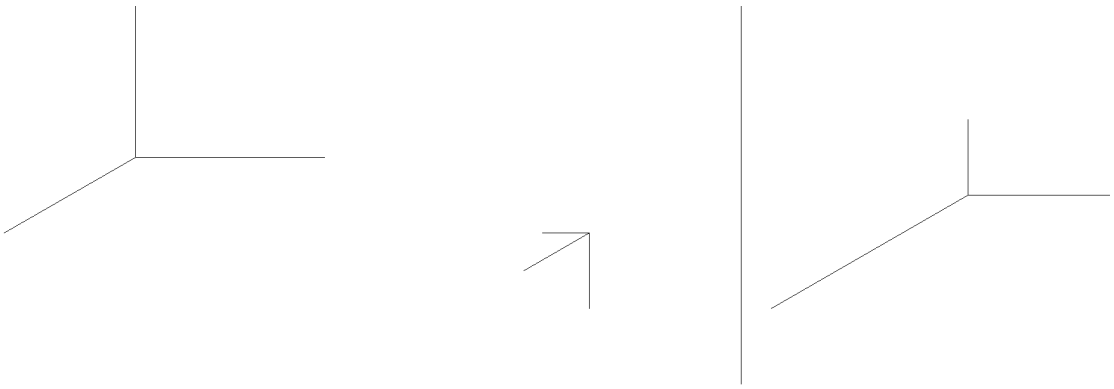


Abbildung 5.5: Stehende Welle r = 1, resultierende H-Feldstärke für unterschiedliche Zeitpunkte t

5.6.2 Senkrechtes Auftreffen auf dielektrische Grenzschicht

Grenzfläche : Dielektrikum 1 zu Dielektrikum 2

Eine ebene Welle aus E_h und H_h trifft senkrecht auf eine dielektrische Grenzschicht. Ein Teil der Welle wird reflektiert als Welle E_r und H_r und ein Teil der Welle läuft weiter im anderen Dielektrikum als E_d und H_d.



Die Randbedingungen ergeben, daß die Tangentialkomponenten auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich groß sein müssen.

$$\vec{E}_h + \vec{E}_r = \vec{E}_d$$

$$\vec{H}_h + \vec{H}_r = \vec{H}_d$$

Wegen der Richtung des Poynting Vektors weg von der Grenzfläche für die rücklaufende Welle wird E_r in umgekehrter Richtung zu E_h aufgetragen, somit ergibt sich für die Beträge

$$E_h - E_r = E_d$$

$$H_h + H_r = H_d$$

Die Größen für E_r und E_d, bzw H_r und H_d sind aus der hinlaufenden Welle zu berechnen. 2 Gleichungen, aber 4 Unbekannte. Es sind weitere Beziehungen nötig. Weitere Information liefert der Feldwellenwiderstand.

$$Z_{F1} = \frac{E_h}{H_h} = \frac{E_r}{H_r} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

$$Z_{F2} = \frac{E_d}{H_d} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \qquad \text{(unter Voraussetzung } \mu_r = 1\text{)}$$

Damit 4 Gleichungen und 4 Unbekannte, eingesetzt in

$$H_h + H_r = H_d$$

ergibt

$$\frac{E_h}{Z_{F0}} * \sqrt{\varepsilon_{r1}} + \frac{E_r}{Z_{F0}} * \sqrt{\varepsilon_{r1}} = \frac{E_d}{Z_{F0}} * \sqrt{\varepsilon_{r2}} \qquad \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} \right.$$

$$E_h + E_r = E_d * \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

dazu andere Gleichung

$$E_h - E_r = E_d$$

beide Gleichungen addiert

$$2 * E_h = E_d \ * (1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}})$$

aufgelöst nach E_d

$$E_d = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}} * E_h = t_e * E_h$$

für E_r ergibt sich

$$E_r = E_h - E_d = E_h * (1 - \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}})$$

damit

$$E_r = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}+1} * E_h = r_e * E_h$$

Für die magnetischen Feldstärken ergibt sich

$$\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} * H_h - \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} * H_r = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} * H_d \qquad | \sqrt{\varepsilon_{r1}}$$

$$H_h - H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} * H_d$$

$$H_h + H_r = H_d$$

beide Gleichungen addiert

$$2 * H_h = H_d * (1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}})$$

aufgelöst nach H_d

$$H_d = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}} * H_h = t_m * H_h$$

für H_r

$$H_r = H_d - H_h = H_h * (\frac{2}{(1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}})} - 1)$$

damit

$$H_r = \frac{1-\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}} * H_h = r_m * H_h$$

Ein Vergleich der Transmissionsfaktoren für E und H ergibt,

$$t_e = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}} \text{ und } \quad t_m = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}}$$

daß sich im Nenner das Verhalten der Feldstärkekomponenten an der dielektrischen Grenzfläche wiederspiegelt.

Ein Vergleich der Reflexionsfaktoren ergibt

$$r_e = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}+1} \qquad \text{und} \quad r_m = \frac{1-\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}}$$

$$r_e = r_m = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

1. Beispiel: Welle soll aus Luft $\varepsilon_{r1} = 1$ auf ein Dielektrikum ε_{r2} treffen.

damit ergibt sich für

$$r_e = r_m = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} + 1} > 0$$

Zusammen mit dem zugrundegelegten Ansatz entstehen folgende Verhältnisse:
E_r entgegengesetzt zu E_h orientiert, und H_r gleich zu H_h orientiert, also eine Wellenkonfiguration wie angenommen.

2. Beispiel: Welle soll aus Dielektrikum ε_{r1} auf Luft $\varepsilon_{r2} = 1$ treffen.

damit ergibt sich für $r_e = r_m = \frac{1-\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{r1}}} < 0$

Jetzt sind beide Feldstärkekomponenten entgegengesetzt zum Ansatz orientiert.

Ausgehend von der Idee, daß Reflexion und Transmission sich zu 1 addieren müßte, setzt man an

$$r_e + t_e = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}+1} + \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}} = 1$$

Für die die elektrischen Komponenten scheint dies zu stimmen. Aber für die magnetischen ergibt sich

$$r_m + t_m = \frac{1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}} + \frac{2}{(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}})} = \frac{3 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}} \neq 1!!!$$

Ansatz mit Zählpfeilrichtungen berücksichtigen entsprechend $r_e + t_e = 1$ und $t_m - r_m = 1$

5.6.3 Schräger Einfall auf dielektrische Grenzschicht

Schräg bedeutet, daß nun auch Normalkomponenten der Feldstärken vorhanden sein müssen. Allgemein kann man davon ausgehen, daß die Welle im Dielektrikum 1 eine Wellenlänge λ_1 und im Dielektrikum 2 eine Wellenlänge λ_2 hat. Damit an der Grenzfläche keine Unstetigkeiten entstehen, muß wohl Wellental der einen Welle auf Wellental der anderen Welle an der Grenzfläche stoßen. Entsprechendes gilt für die Wellenberge. Bezeichnet man den Einfallswinkel mit α und den gebrochenen Winkel mit β so kann man die scheinbare Wellenlänge an der Grenzfläche berechnen mit $\lambda_{z1} = \frac{\lambda_1}{\sin\alpha}$ und $\lambda_{z2} = \frac{\lambda_2}{\sin\beta}$. Damit an der Grenzfläche keine Diskontinuitäten (Sprungstellen, Unstetigkeiten) auftreten muß gelten $\lambda_{z1} = \lambda_{z2}$.

$$\text{es gilt} \qquad \lambda_{z1} = \lambda_{z2}$$

$$\frac{\lambda_1}{\sin\alpha} = \frac{\lambda_2}{\sin\beta}$$

mit $\lambda_1 = \lambda_0 * \frac{1}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$ und $\lambda_2 = \lambda_0 * \frac{1}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich der Grenzwinkel β_g des gebrochenen Winkels im Dielektrikum 2 berechnen. Wenn die Welle aus immer größeren Winkeln α einfällt, ist der theoretische Maximalwert 90°.

$$\frac{\sin 90°}{\sin\beta_g} = \frac{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$

Aufgelöst nach β_g ergibt sich der Grenzwinkel zu

$$\beta_g = \arcsin\frac{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

oder unter der Voraussetzung $\mu_r = 1$ in beiden Dielektrika

$$\beta_g = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}$$

Der Grenzwinkel gibt an, bis zu welchem Winkel eine Welle aus einem Dielektrikum mit höherem ε_r und μ_r in ein anderes Dielektrikum eindringen kann.

Für die Betrachtung der unterschiedlichen Bedingungen bei schrägem Einfall ist es günstig 2 Fälle zu unterscheiden, einmal der Fall, in dem es nur E–Komponenten parallel zur Grenzfläche gibt und den anderen Fall, daß es nur H–Komponenten parallel zur Grenzfläche gibt.

Um die beiden Fälle unterscheiden zu können führt man einen erweiterten Polarisationsbegriff ein.

Man definiert eine **Polarisationsebene** aus E und S und eine **Einfallsebene** aus Flächennormaler der Grenzfläche und Poynting-Vektor.

Steht die Polarisationsebene senkrecht auf der Einfallsebene bezeichnet man dies als **senkrechte** Polarisation.

Sind beide Ebenen parallel zueinander, wird dies als **parallele** Polarisation bezeichnet.

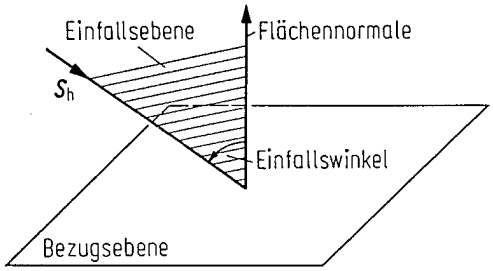


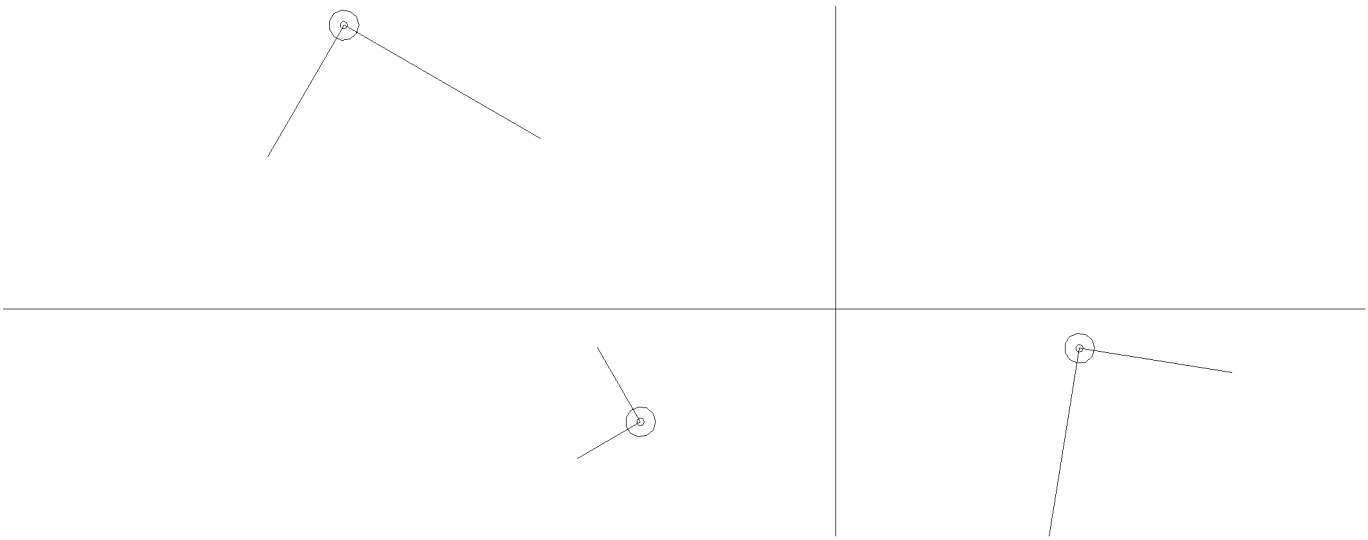
Bild 1. Definition der Einfallsebene

Die unterschiedlichen Auswirkungen sollen im folgenden untersucht werden.

a) Senkrechte Polarisation

Annahme: $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2}$

Senkrechte Polarisation bedeutet nur Tangentialkomponenten von E.



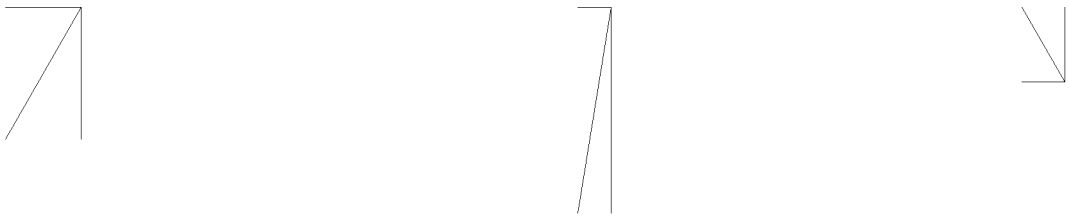
Die magnetischen Komponenten sind in tangentiale und normale aufzuspalten.

E soll immer gleiche Richtung beibehalten, also muß sich die Richtung von H_r umdrehen.

Vektoriell ergibt sich

$$\vec{H}_h = \vec{H}_{ht} + \vec{H}_{hn} \qquad \vec{H}_d = \vec{H}_{dt} + \vec{H}_{dn} \qquad \vec{H}_r = \vec{H}_{rt} + \vec{H}_{rn}$$

$$H_{ht} = H_h * \cos\alpha \qquad H_{dt} = H_d * \cos\beta \qquad H_{rt} = H_r * \cos\alpha$$



Die Tangentialkomponenten müssen auf beiden Seiten der Grenzflächen gleich groß sein.

$$\vec{E}_h + \vec{E}_r = \vec{E}_d \qquad \text{und} \qquad \vec{H}_{ht} + \vec{H}_{rt} = \vec{H}_{dt}$$

Feldwellenwiderstände $Z_{F1} = \frac{E_h}{H_h} = \frac{E_r}{H_r}$ $Z_{F2} = \frac{E_d}{H_d}$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung des Ansatzes aus $\vec{H}_{ht} + \vec{H}_{rt} = \vec{H}_{dt}$

$$\frac{E_h}{Z_{F1}} * \cos\alpha - \frac{E_r}{Z_{F1}} * \cos\alpha = \frac{E_d}{Z_{F2}} * \cos\beta \quad | * \frac{Z_{F1}}{\cos\alpha}$$

$$E_h - E_r = E_d * \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} * \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

beide Gleichungen addiert $$2 * E_h = E_d * \left(1 + \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} * \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$$

ergibt $$t_{es} = \frac{E_d}{E_h} = \frac{2 * Z_{F2} * \cos\alpha}{Z_{F2} * \cos\alpha + Z_{F1} * \cos\beta}$$

aus $E_r = E_d - E_h$ ergibt sich

$$E_r = E_h * \left(\frac{2 * Z_{F2} * \cos\alpha}{Z_{F2} * \cos\alpha + Z_{F1} * \cos\beta} - 1\right) = E_h * \frac{2 * Z_{F2} * \cos\alpha - Z_{F2} * \cos\alpha - Z_{F1} * \cos\beta}{Z_{F2} * \cos\alpha + Z_{F1} * \cos\beta}$$

$$r_{es} = \frac{E_r}{E_h} = \frac{Z_{F2} * \cos\alpha - Z_{F1} * \cos\beta}{Z_{F2} * \cos\alpha + Z_{F1} * \cos\beta}$$

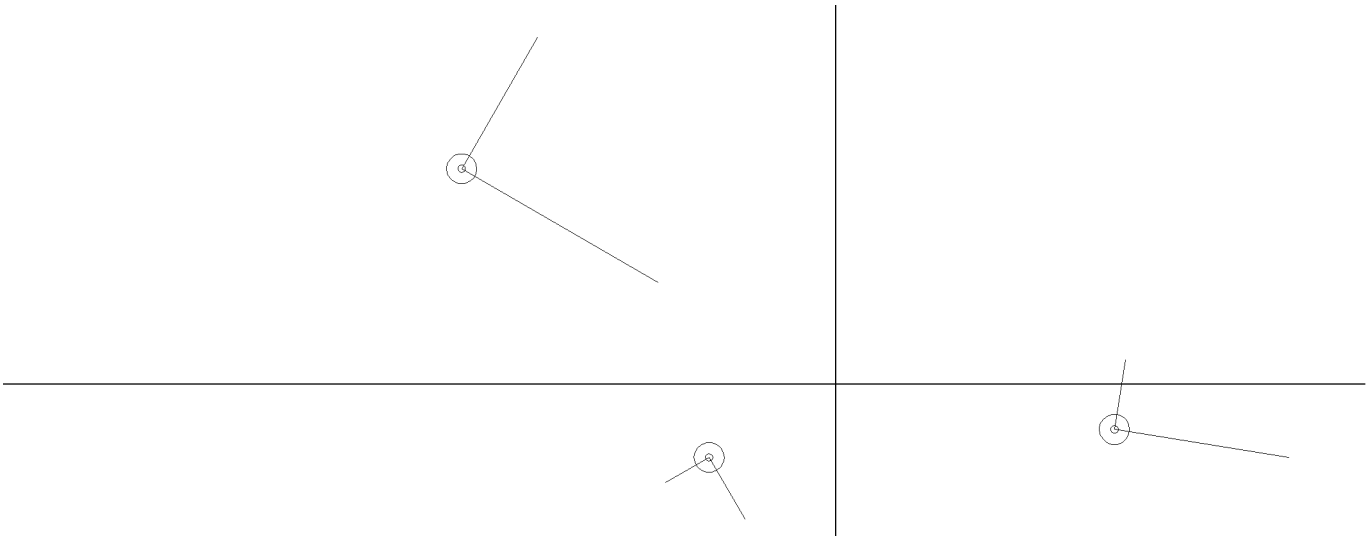
Für die magnetischen Komponenten ergibt sich:

$$t_{ms} = \frac{2 * Z_{F1} * \cos\alpha}{Z_{F2} * \cos\alpha + Z_{F1} * \cos\beta}$$

$$r_{ms} = \frac{Z_{F2} * \cos\alpha - Z_{F1} * \cos\beta}{Z_{F2} * \cos\alpha + Z_{F1} * \cos\beta} = r_{es}$$

b) Parallele Polarisation

Folgender Ansatz führt bei paralleler Polarisation zu den Ergebnissen.



$$r_{ep} = \frac{Z_{F1} * \cos\alpha - Z_{F2} * \cos\beta}{Z_{F1} * \cos\alpha + Z_{F2} * \cos\beta} = r_{mp}$$

$$t_{ep} = \frac{2 * Z_{F2} * \cos\alpha}{Z_{F1} * \cos\alpha + Z_{F2} * \cos\beta}$$

$$t_{mp} = \frac{2 * Z_{F1} * \cos\alpha}{Z_{F1} * \cos\alpha + Z_{F2} * \cos\beta}$$

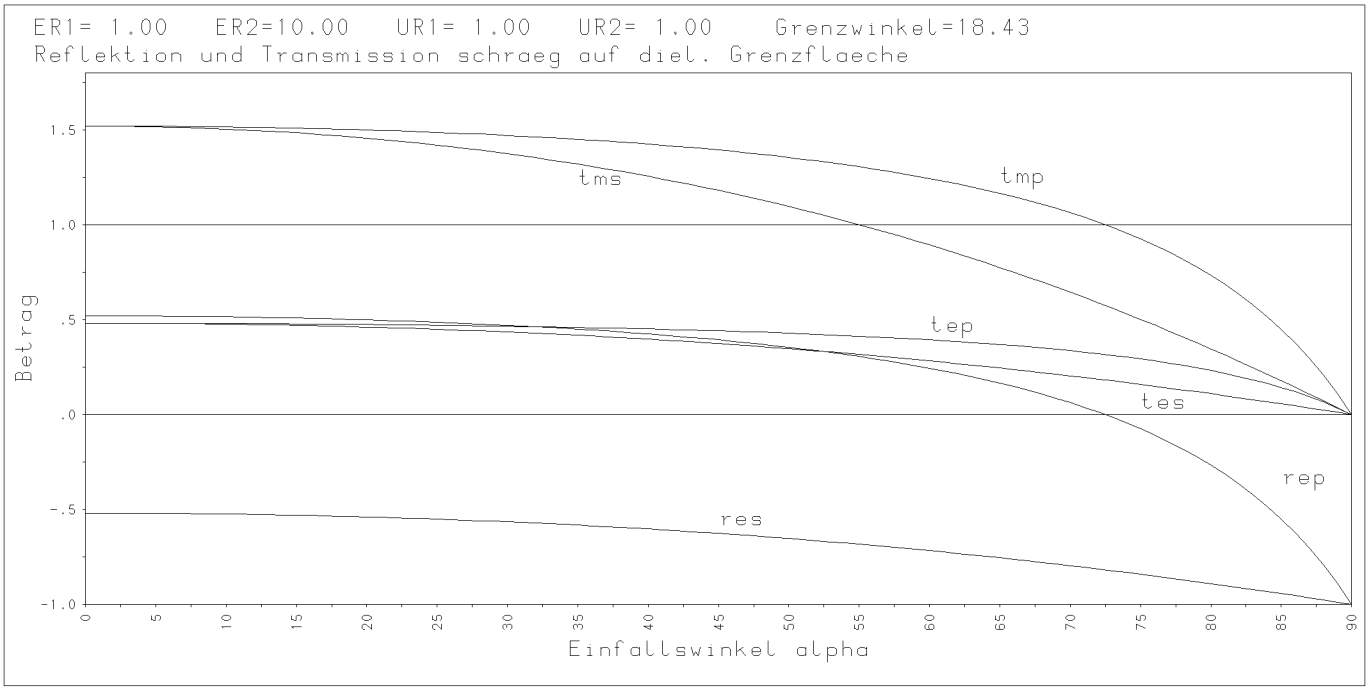


Abbildung 5.6: Reflektions- und Transmissionsfaktoren in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α.

Zusammenfassend gilt bei beliebigen Einfall auf eine Grenzfläche, entsprechend den zu Grunde gelegten vektoriellen Ansätzen.

$r_{es} = r_{ms}$
$r_{ep} = r_{mp}$

$t_{es} - r_{es} = 1$
$t_{mp} - r_{mp} = 1$

$t_{ms} = (1 - r_s) * \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$
$t_{ep} = (1 - r_p) * \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

$E_h \uparrow \quad r * E_h = E_r \uparrow \qquad E_d = t * E_h \uparrow$

$E_h \uparrow \quad r * E_h = E_r \downarrow \qquad E_d = t * E_h \uparrow$

Beispiele :

a) Einfallswinkel $\alpha = 0$, dielektrische Grenzfläche

nach 5.6.3 folgt unter Voraussetzung $\mu_r = 1$ mit $Z_F = Z_{F0} * (1 / \sqrt{\varepsilon_r})$

$$r_{es} = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{r2}}} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{r1}}}}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{r2}}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{r1}}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \quad -r_e \text{ aus 5.6.2} \qquad \text{Ansatz 5.6.3 : } \uparrow E_h \ \uparrow E_r$$

$$r_e = r_m = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}} \qquad \text{Ansatz 5.6.2 : } \uparrow E_h \ \downarrow E_r$$

b) Einfallswinkel $\alpha = 0$, Grenzfläche zum idealen Leiter $\kappa = \infty$

$Z_{F2} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{(\kappa + j\omega\varepsilon)}} = 0$ damit Ansatz: senkrecht $E_h \uparrow\uparrow E_r$, parallel $E_h \uparrow\downarrow E_r$

$r_{es} = -1$ und $r_{ep} = +1$ $\qquad t_{es} = 0$ und $t_{ms} = 2$

c) Einfallswinkel $\alpha = 0$, Grenzfläche zum realen Leiter $\kappa < \infty$

Für diesen Fall ergibt sich $0 < |r| < 1$ und ein stehendes Wellenfeld, bei dem allerdings die Knoten nicht mehr den Wert Null annehmen. Um die Welligkeit zu charakterisieren hat man das **Stehwellenverhältnis** definiert.

$$\boxed{s = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{H_{max}}{H_{min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}}$$

Gebräuchlich sind auch die Abkürzungen **SWR** **S**tanding **W**ave **R**atio oder, wenn Spannungen gemessen werden, VSWR **V**oltage SWR. (! $1 < s < \infty$!)

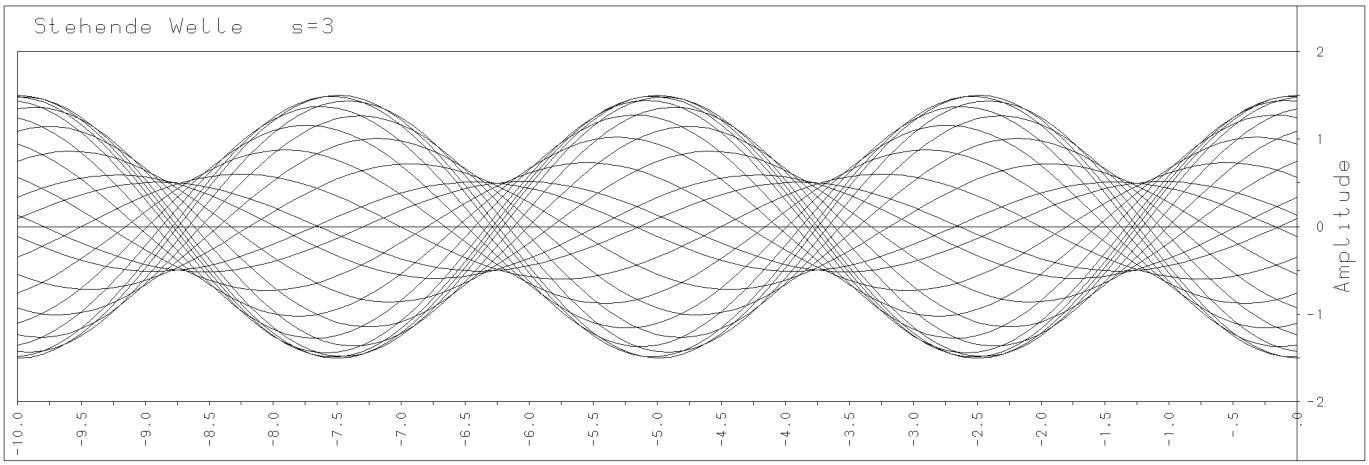


Abbildung 5.7: Amplitudenverteilung der magnetischen Feldstärke für ein Stehwellenverhältnis von s = 3 für verschiedene Zeitpunkte t.

Gebräuchliche Formeln in der Elektrotechnik:

r und t nur noch von ε_{r1}, ε_{r2} und α abhängig.

Unter der Voraussetzung $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ ergibt sich durch Einsetzen für

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha} \qquad \text{wegen} \qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} * \sin\alpha$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

a) Senkrechte (horizontale) Polarisation (E_{hin} parallel zur Grenzfläche)

$$r_{es} = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\alpha}} = r_{ms}$$

$$t_{es} = \frac{2 * \cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\alpha}}$$

$$t_{ms} = \frac{2 * \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} * \cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\alpha}}$$

b) Parallele (vertikale) Polarisation (H_{hin} parallel zur Grenzfläche)

$$r_{ep} = \frac{\varepsilon_{r2} * \cos\alpha - \sqrt{\varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - {\varepsilon_{r1}}^2 * \sin^2\alpha}}{\varepsilon_{r2} * \cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - {\varepsilon_{r1}}^2 * \sin^2\alpha}} = r_{mp}$$

$$t_{ep} = \frac{2 * \sqrt{\varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2}} * \cos\alpha}{\varepsilon_{r2} * \cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - {\varepsilon_{r1}}^2 * \sin^2\alpha}}$$

$$t_{mp} = \frac{2 * \varepsilon_{r2} * \cos\alpha}{\varepsilon_{r2} * \cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - {\varepsilon_{r1}}^2 * \sin^2\alpha}}$$

Brewsterwinkel

Betrachtet man die Größe des Reflektionsfaktors abhängig vom Einfallswinkel α, so ergibt sich, daß der Reflexionsfaktor für einen bestimmten Winkel α den Wert Null annimmt, was gleichbedeutend mit der Aussage ist, daß die Welle reflexionsfrei von einem Dielektrikum zum anderen übertritt. Dieser Winkel wird Brewsterwinkel genannt.

Für die Herleitung soll im folgenden gelten $\mu_r = 1$ in beiden Dielektrika.

Bei senkrechter Polarisation ergibt sich aus $r = 0$

$$\text{damit} \qquad \cos^2\alpha = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\alpha$$

$$\text{umgeformt} \qquad 1 - \sin^2\alpha = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\alpha$$

Diese Bedingung ist nur erfüllbar für $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1}$, also dann, wenn keine Grenzfläche vorliegt.
Kein Brewsterwinkel bei senkrechter Polarisation für unterschiedliche ε_r.

Bei paralleler Polarisation ergibt sich aus der Forderung $r = 0$

$$\varepsilon_{r2}{}^2 * \cos^2\alpha = \varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}{}^2 * \sin^2\alpha$$

$$\varepsilon_{r2}{}^2 - \varepsilon_{r2}{}^2 * \sin^2\alpha = \varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}{}^2 * \sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} * \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r2}{}^2}{\varepsilon_{r1}{}^2 - \varepsilon_{r2}{}^2}}$$

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}} = \arctan{}^{\dagger}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

Für unterschiedliche ε_r gibt es einen Brewsterwinkel **nur** bei paralleler Polarisation,
Für unterschiedliche μ_r gibt es einen Brewsterwinkel **nur** bei senkrechter Polarisation

---

$^{\dagger}\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

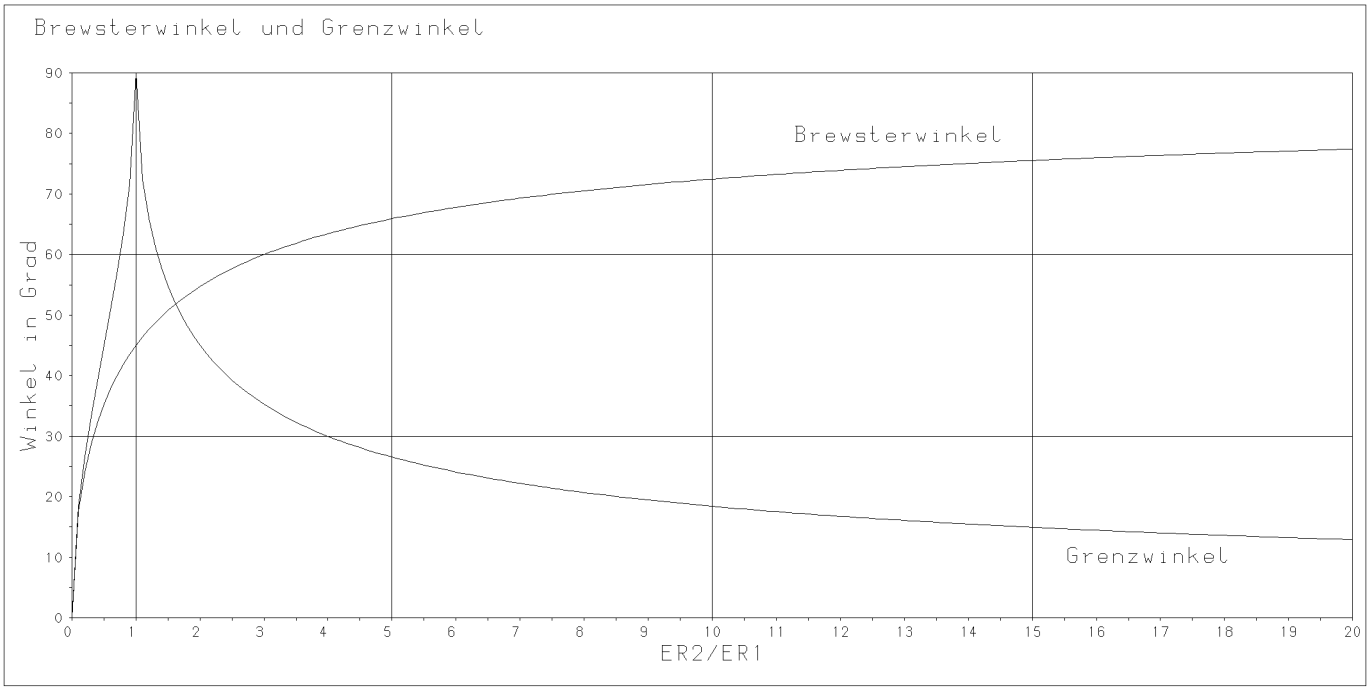
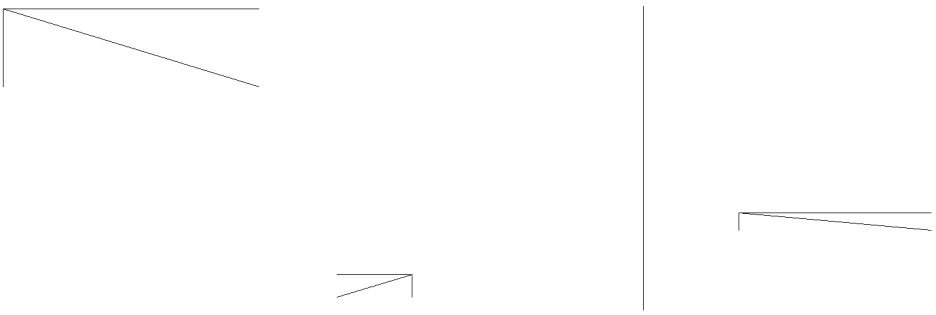


Abbildung 5.8: Brewsterwinkel und Grenzwinkel in Abhängigkeit von $\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$

Leistungsbilanz der Welle an Grenzflächen

Es gilt $P = \int \vec{S} * \, d\vec{A}$ und $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Für die Betrachtung des Leistungsflusses von einem Medium zum anderen an der Grenzfläche sind nur die Komponenten senkrecht zur Grenzfläche maßgebend.



$$\vec{S}_{hn} + \vec{S}_{rn} = \vec{S}_{dn}$$

$$E_h * H_h * \cos\alpha - E_r * H_r * \cos\alpha = E_d * H_d * \cos\beta$$

$$E_h * H_h * \cos\alpha - r_e * E_h * r_m * H_h * \cos\alpha = t_e * E_h * t_m * H_h * \cos\beta$$

$$(1 - r_e * r_m) S_{hn} = t_e * t_m * \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} S_{hn}$$

$$(1 - r^2) S_{hn} = t_e * t_m * \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} S_{hn}$$

1. Was ist eine elektromagnetische Welle ?

2. Mit welchen Größen beschreibt man eine elektromagnetische Welle ?

3. Wie ist eine ebene Welle definiert ?

4. Über welche Größe sind E und H bei der elektromagnetischen Welle verknüpft ?

5. Was ist elliptische Polarisation ?

6. Berechnen Sie die Blechdicke für ein Schirmblech aus Kupfer, damit die elektrische Feldstärke um 40dB bei $f = 1$ GHz gedämpft wird. $\kappa_{Cu} = 58 * 10^6 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

7. Gegeben ist ein Feld durch folgende Gleichung:

$$\vec{E}\,(x,y,z) = A\ * \left[\frac{\cos(y)}{x^2} + \frac{\cos(y)}{jbx}\right] * \vec{e}_x + jB\ * \frac{\sin(y)}{x} * \left[1 + \frac{1}{jbx} - \frac{1}{x^2}\right] * \vec{e}_y$$

   a) Teilen Sie die Gleichung in Komponentengleichungen auf.
   b) Ergänzen Sie die Gleichung zu $\vec{E}\,(x,y,z,t)$ mit harmonischer Zeitabhängigkeit und zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der einzelnen Teil-Komponenten.
   c) Welche Komponenten sind gleichphasig ?
   d) Skizzieren Sie die x–Abhängigkeit der vorhandenen Komponenten.
   e) Ergänzen Sie die Gleichung nach b) durch den Faktor $e^{-j\beta z}$ und erklären Sie die Unterschiede zwischen der ursprünglichen Gleichung, der nach b) und der nach e).

8. Von einer ebenen Welle sind folgende Angaben bekannt ($\mu_r = 1$).

$$E = 14\ * \left[e^{\ j6 * 10^6\ *\ t\frac{1}{s} - (0.0004 + j0.03) *\ x\frac{1}{m}}\right]\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

   a) Welche Frequenz hat die Welle ?
   b) In welche Richtung läuft die Welle ?
   c) Welche Feldstärkekomponenten hat die Welle ?
   d) Welche Wellenlänge hat die Welle ?
   e) Welche Phasengeschwindigkeit hat die Welle ?
   f) Wie groß ist ε_r ?
   g) Wie groß ist die Dämpfungskonstante der Welle, wie groß ist κ ?
   h) Wie groß sind die Effektivwerte der Feldstärke bei $x = 0$ und $x = 10$ km ?
   i) Stellen Sie den Abfall der Feldstärken in Abhängigkeit von x, y, z dar.

9. Meerwasser hat ein $\kappa = 3 * 10^{-2} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{cm}}$ und ein $\varepsilon_r = 80$.
   a) Finden Sie eine günstige Darstellung, aus der man erkennen kann, in welchen Frequenzbereichen Meerwasser ein *guter Leiter* oder ein *gutes Dielektrikum* ist.
   b) Für welches Frequenzband ist eine äquivalente Leitschichtdicke von 50 m gewährleistet ?
   c) Berechnen Sie den Feldwellenwiderstand des Meerwassers für jeweils eine Frequenz im dielektrischen Bereich, im Übergangsbereich, im Leiterbereich.

10. Ein Kugelstrahler strahlt elektromagnetische Wellen ab.
    Berechnen Sie die Leistungsdichte in $\frac{dBm}{m^2}$ in einem Abstand von 10 km und 20 km bei einer abgestrahlten Leistung von 10 Watt. ($\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1, \alpha = 0$). Wie groß sind jeweils die Feldstärken ?

11. Sie sind Funkoffizier der Nautilus. Kapitän Nemo möchte gerne die Lottozahlen vom Mittwoch über den Deutschlandfunk bei $f = 100$ kHz hören. In welche Tiefe müssen Sie mit dem U–Boot auftauchen, damit Sie den Sender empfangen können ? (Empfänger-Empfindlichkeit 1 $\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, Feldstärke an der Meeresoberfläche im Wasser 10 $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, Seewasser $\varepsilon_r = 80$, $\kappa = 3 * 10^{-2} \frac{\mathrm{mhO}}{\mathrm{cm}}$).

12. Eine ebene Welle trifft aus dem Medium Luft unter einem Einfallswinkel von 70° auf ein Dielektrikum ($\varepsilon_r = 20$) auf. Das Dielektrikum hat eine Dicke von 5 cm. Daran schließt sich ein weiteres Dielektrikum mit $\varepsilon_r = 10$ an. Berechnen Sie die Feldkomponenten im Dielektrikum 1 und im Dielektrikum 2 (f = 1 GHz, $\hat{E} = 10\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$). Unter welchem Winkel tritt die Welle ins Dielektrikum 2 ($\mu_r = 1$) ? Wie groß sind die Leistungen der einzelnen Wellenanteile in dBm/m^2 ?

13. Was bedeuten Grenzwinkel und Brewsterwinkel ?

14. Eine 1m–lange Kupferschiene mit einem Querschnitt von 2 x 5 cm wird normalerweise zum Stromtransport von 50 Hz–Wechselstrom benutzt. Berechnen Sie den Widerstand. Ist es sinnvoll, die gleiche Schiene bei 1 GHz einzusetzen ?

15. Zeichnen Sie die Momentanbilder einer stehenden Welle bei Totalreflexion in einem Dielektrikum vor einer leitenden Ebene für die Zeitpunkte $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3T}{4}$. (f = 1 Ghz, $\varepsilon_r = 3$, $E_h = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$)

16. Zeichnen Sie die Momentanbilder einer stehenden Welle in einem Dielektrikum vor einer leitenden Ebene für die Zeitpunkte $t = 0,\ t = \frac{T}{4},\ t = \frac{T}{2},\ t = \frac{3T}{4}$. ($f = 1\ Ghz,\ \varepsilon_r = 3,\ E_h = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}},\ s = 3$)

17. Berechnen Sie die äquivalenten Leitschichtdicken und Wellenlängen bei 1 kHz, 1 MHz, 1 GHz für folgende Materialien
Cu (58), Fe (10, $\mu_r = 1000$), Au (50), Ag (66.6), Pt (10.2). (Werte in Klammern mit Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\Omega * \mathrm{mm}^2}$).
Berechnen Sie außerdem den Widerstand eines 1 m–langen runden Drahts (d = 1 cm) bei den vorgegebenen Frequenzen und Materialien.

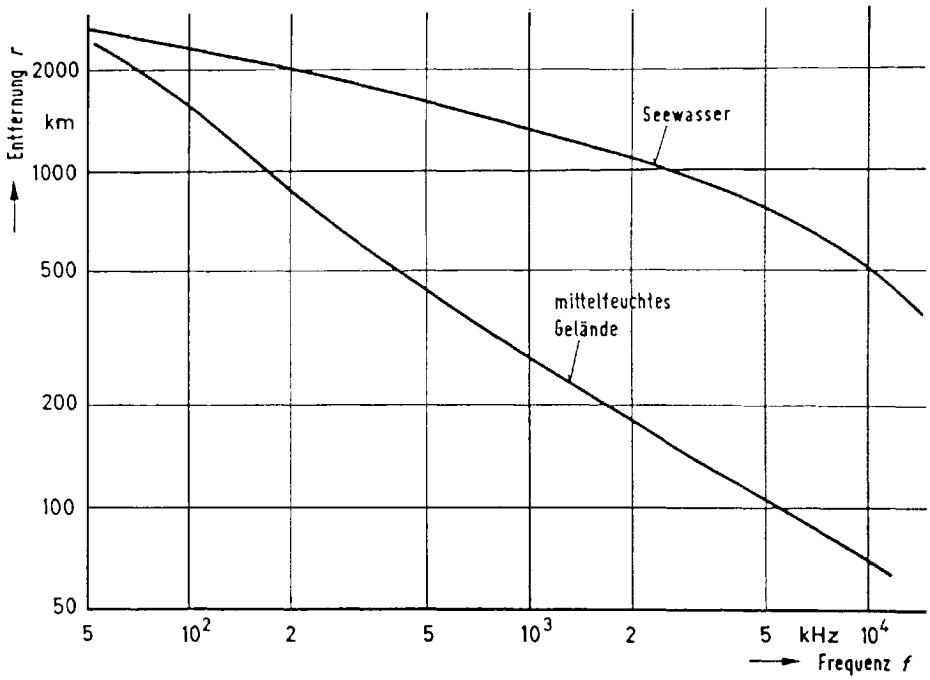
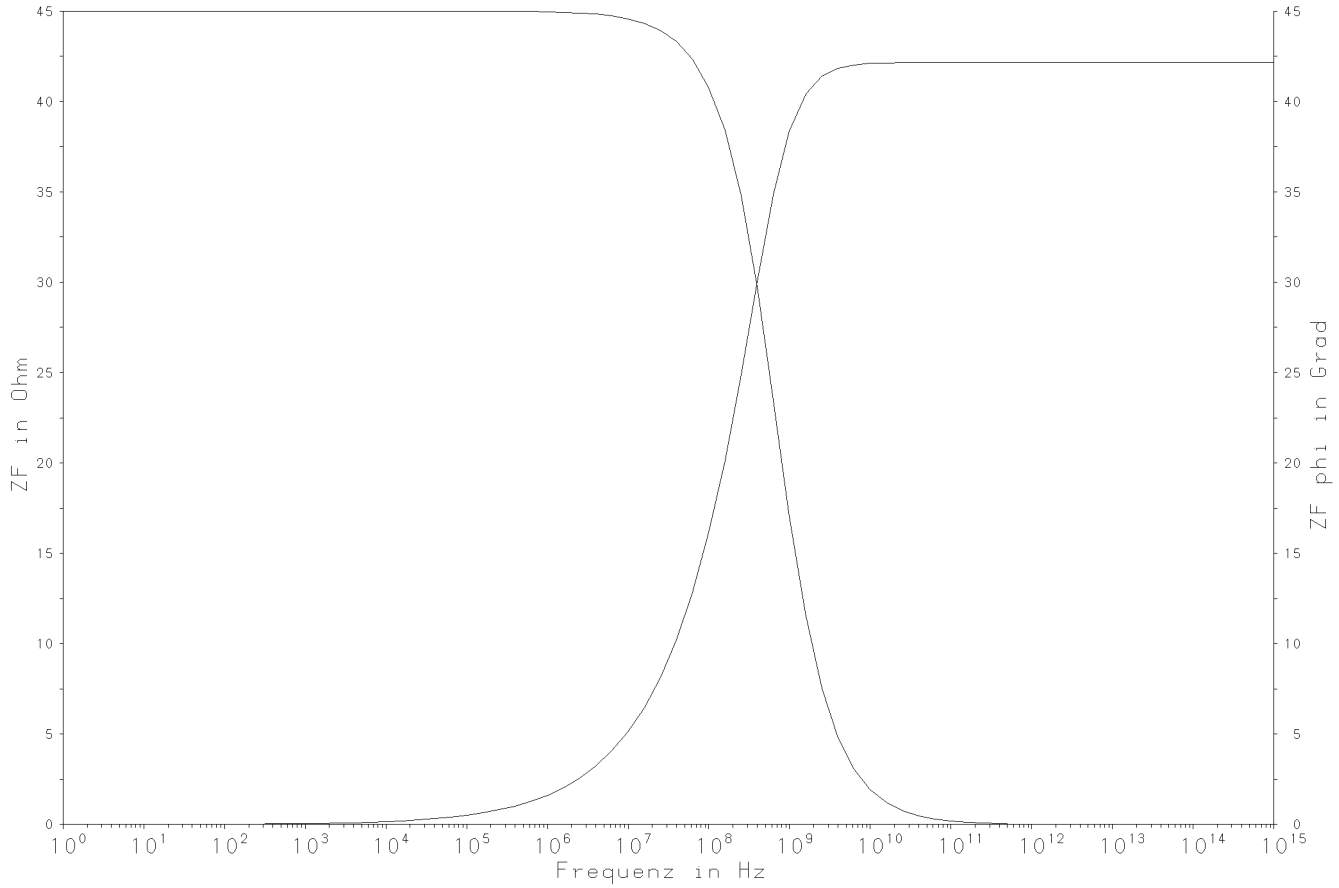
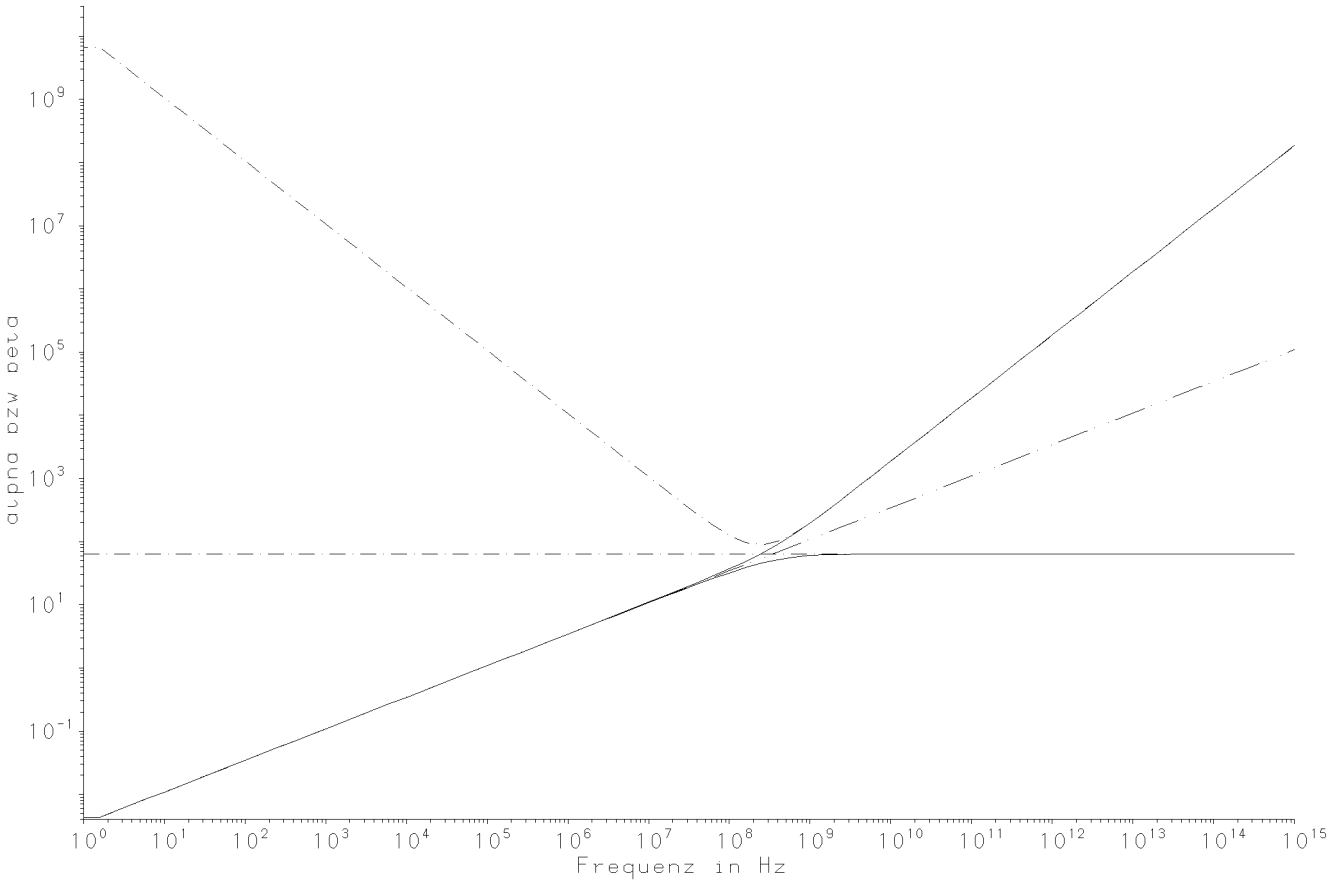


Bild 2.3 Reichweite der Bodenwelle (Sender mit 1 kW Leistung und vertikaler $\lambda/4$-Antenne auf leitendem Boden; in der Entfernung r vom Sender ist die Empfangsfeldstärke auf $E = 1\ \mu\mathrm{V/m}$ abgefallen)

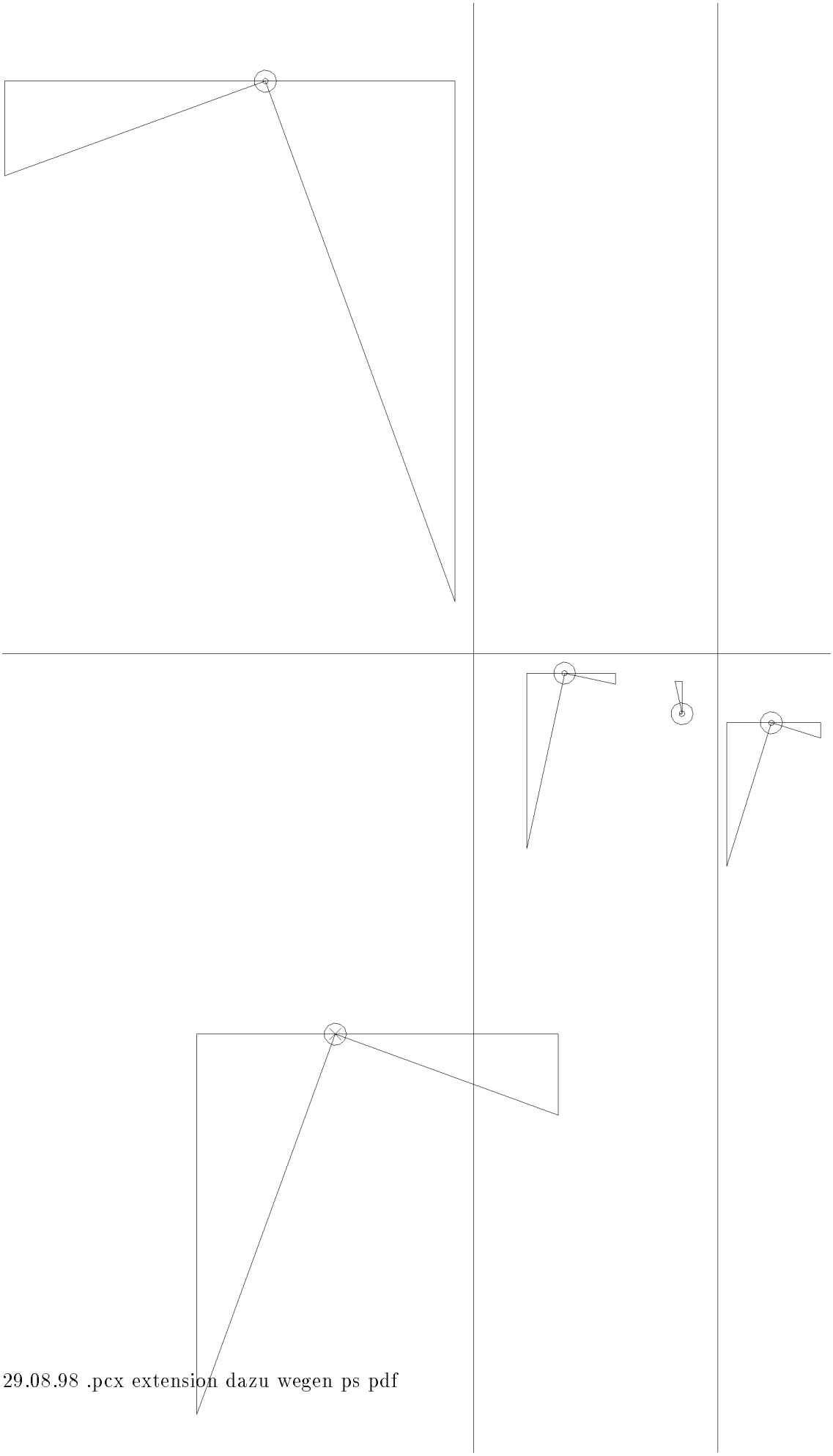
Abbildung 5.9: Quelle: [1] S.46

Z_F von Seewasser mit $\kappa = 3 * 10^{-2}$ S/cm und $\varepsilon_r = 80$



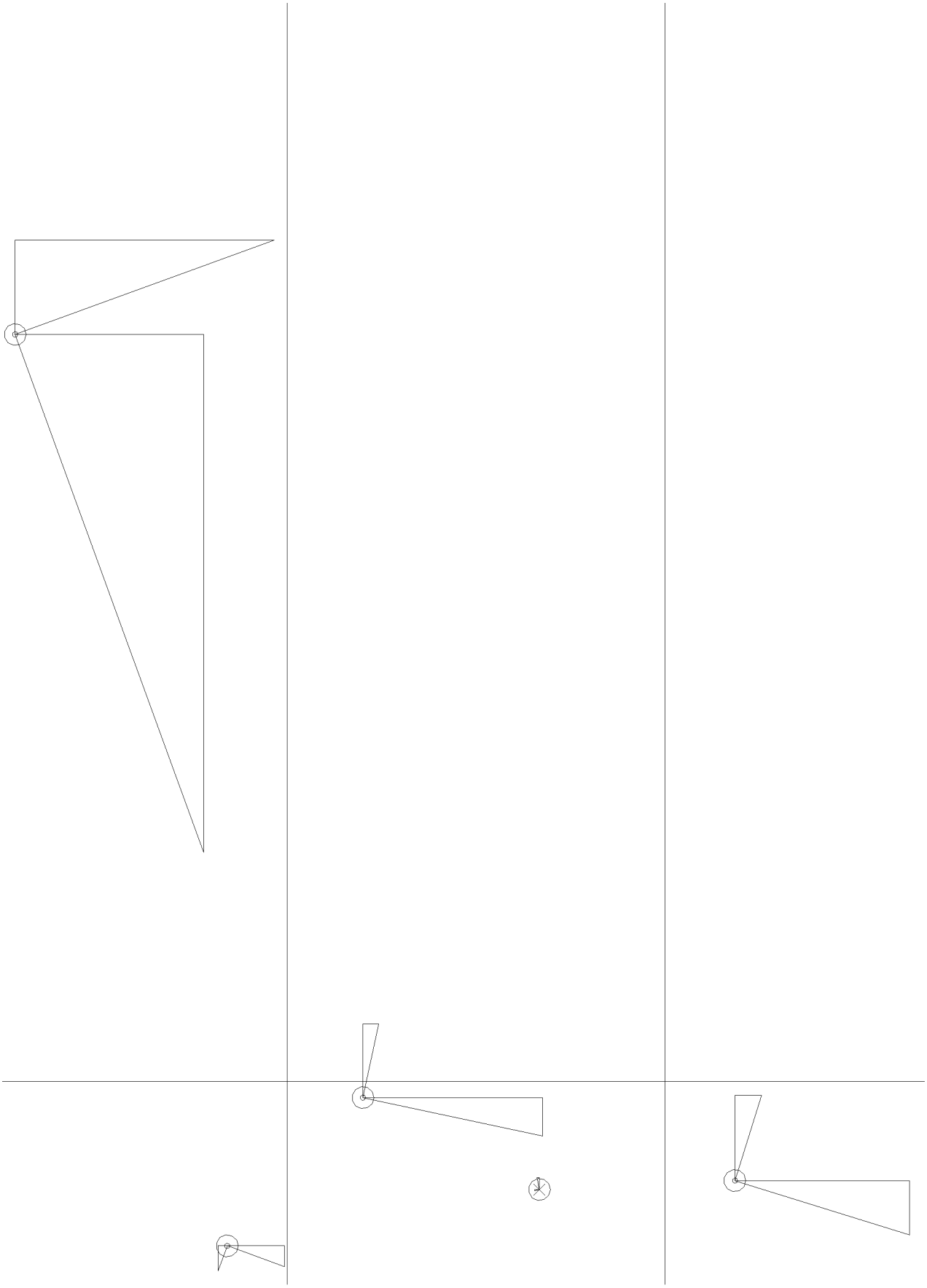


senkrechte Polarisation



29.08.98 .pcx extension dazu wegen ps pdf

parallele Polarisation



Kapitel 6

Wellenleiter

6.1 Koaxialkabel

Eine elektromagnetische Welle soll in einem Koaxialkabel geführt werden. Bis jetzt ist die TEM-Welle bekannt und die Grenzbedingungen zu einer unendlich gut leitenden Ebene $E_t = 0$ und $H_n = 0$. Soll eine TEM-Welle in einem Koaxialkabel ausbreitungsfähig sein, muß eine Wellenkonfiguration gefunden werden, die entsprechend $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Energie in Richtung durch das Kabel transportieren kann und die Randbedingungen erfüllt.

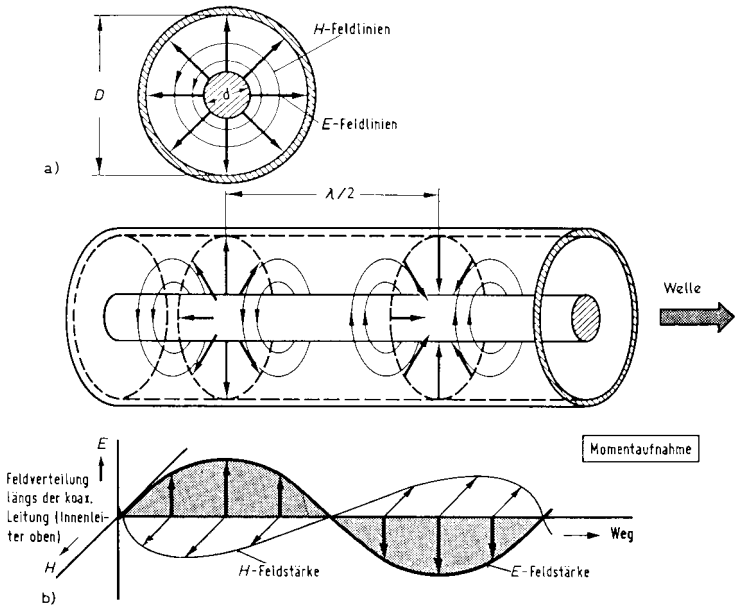


Abbildung 6.1: Felder im Koaxkabel Quelle:[1] S.77

Beschreibung der Feldkomponenten in Zylinderkoordinaten.

$$\vec{E}_r = \frac{U}{r * \ln \frac{D}{d}} * \vec{e}_r \qquad \vec{H}\varphi = \frac{I}{2\pi * r} * \vec{e}\varphi$$

Bei realer Beschreibung, also für $\kappa <$ "∞" ist noch die Feldkomponente

$$\vec{E}_z \approx E_r * \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\kappa}} * \vec{e}_z \qquad \text{zu berücksichtigen.}$$

Zusammenhang Feldwellenwiderstand $Z_F = \frac{E}{H}$ und Leitungswellenwiderstand $Z_L = \frac{U}{I}$.

Einsetzen der Feldkomponenten ergibt:

$$Z_F = \frac{E}{H} = \frac{U}{r * \ln\frac{D}{d}} * \frac{2\pi * r}{I} = \frac{U}{I} * \frac{2\pi}{\ln\frac{D}{d}} = Z_L * \frac{2\pi}{\ln\frac{D}{d}}$$

aufgelöst nach Z_L

$$Z_L = Z_{F0}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} * \frac{\ln\frac{D}{d}}{2\pi} \overset{\mu_r=1}{=} \frac{120\pi\ \Omega}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\frac{D}{d} = 60\ \Omega * \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\frac{D}{d}$$

Dämpfung der Welle im Koaxialkabel setzt sich im wesentlichen aus 2 Komponenten zusammen.

a) α aufgrund Leiterverluste κ

$$\alpha_L = \frac{R'}{2Z_L} = \sqrt{\frac{f * \mu * \varepsilon_r}{\pi * \kappa}} * \frac{1}{120\Omega} * \frac{1}{D} * \frac{1+\frac{D}{d}}{\ln\frac{D}{d}} \qquad \left[\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}\right]$$

b) α aufgrund dielektrischer Verluste, also abhängig vom Verlustfaktor $\tan\delta$ des Dielektrikums.

$$\alpha_D = \frac{\pi * f}{c}\sqrt{2 * \varepsilon_r} * \sqrt{\sqrt{1+\tan^2\delta} - 1}$$

für $\tan\delta < 0.1$ vereinfacht sich die Formel zu

$$\alpha_D \approx \frac{\pi * f}{c}\sqrt{\varepsilon_r} * \tan\delta$$

Die folgende Grafik stellt beide Einflüsse für verschiedene Geometrien und Leitermaterialien gegenüber

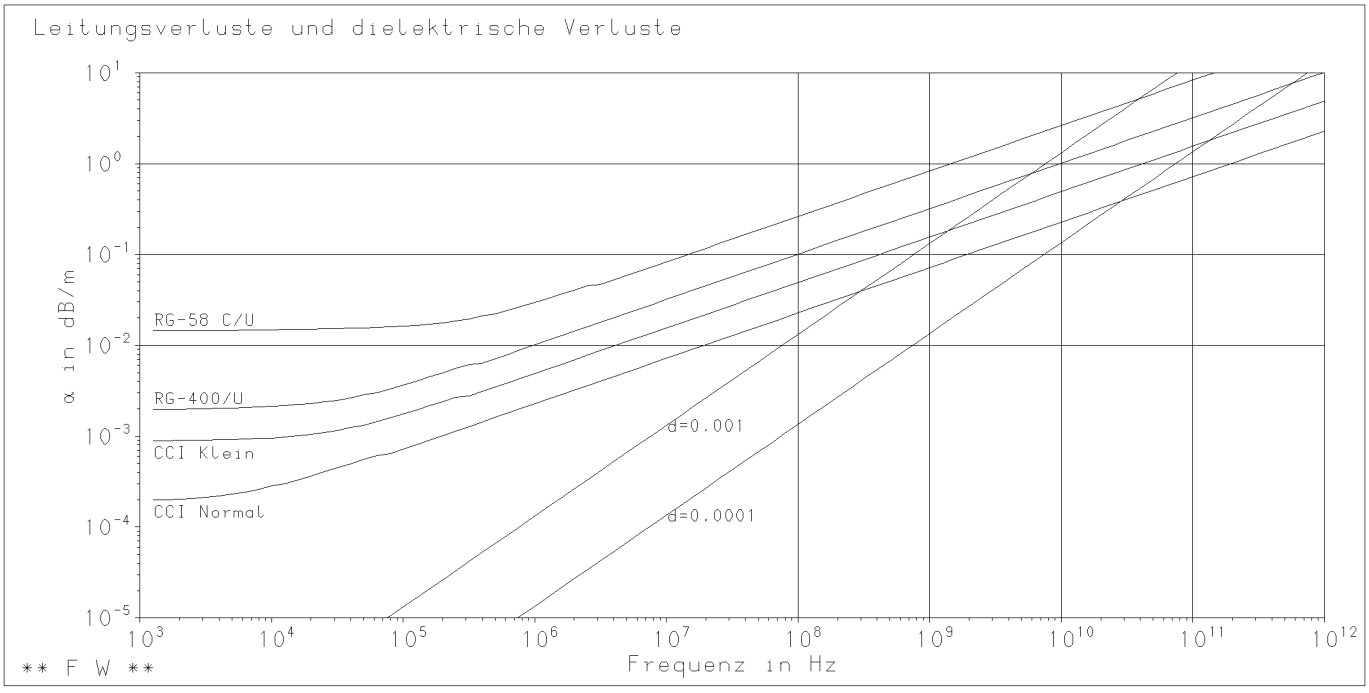


Abbildung 6.2: Dämpfung im Koaxialkabel durch κ und δ (Näherung!)

Man erkennt, daß bei niedrigen Frequenzen der Einfluß der Leitungsverluste die dielektrischen Verluste überwiegt, und erst im GHz-Bereich die dielektrischen Verluste zum Gesamtverlust nennenswert beitragen.

Bei vorgegebenem Außendurchmesser ergibt sich für ein Verhältnis D/d von 3.59 ein Minimum für den Ausdruck $\frac{(1+D/d)}{\ln(D/d)}$, somit auch ein Dämpfungsminimum für die ohmschen Verluste.

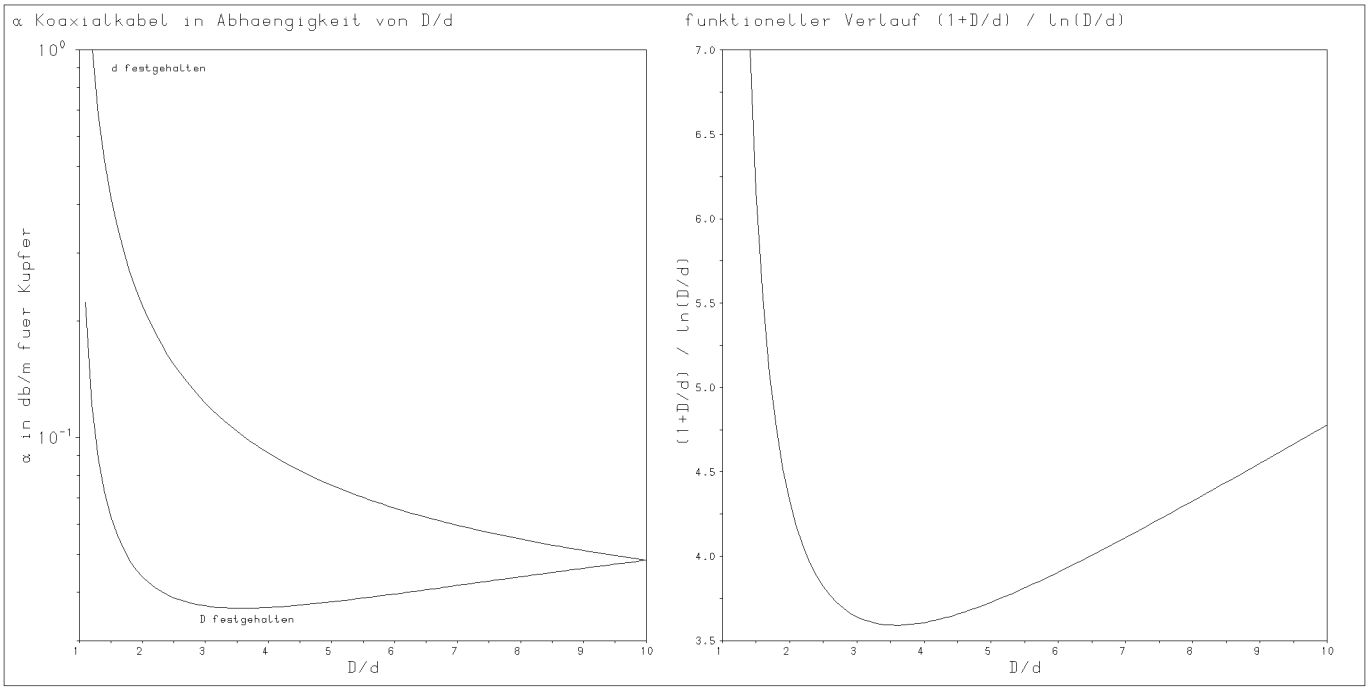


Abbildung 6.3: Einfluß Geometrie auf Dämpfung bei Koaxialkabeln

Eingesetzt in die Formel für Z_L ergibt sich

$$Z_L = 60\ \Omega\ * \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} * \ln\frac{D}{d} = 60\ \Omega\ * \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} * 1.28 = 77\ \Omega \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

minimale Dämpfung bei $Z_L = 77\ \Omega \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

Für PE als Dielektrikum $\varepsilon_r = 2.2$ ergibt sich ein $Z_L = 52\ \Omega$

Weiter ergibt sich bei vorgegebenem Außendurchmesser und maximaler elektrischer Feldstärke

größte Spannungsfestigkeit bei $Z_L = 60\ \Omega \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

maximal übertragbare Leistung bei $Z_L = 30\ \Omega \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

Allgemein gilt, daß sich bei maßstäblicher Vergrößerung des Querschnitts die Übertragungseigenschaften verbessern, bis zu der Grenze, bei der auch Hohlleiterwellen ausbreitungsfähig werden. Dies ist ab

$$f_k \approx \frac{2 * c}{\pi\sqrt{\varepsilon_r}(D+d)}$$ der Fall.

Standardwerte für Leitungswellenwiderstände sind 50 Ω und 75 Ω.
Gebräuchliche Werte sind 44 Ω (Seekabel), 60 Ω, 95 Ω und Werte zwischen 100 bis 200 Ω für kapazitätsarme Anwendungen.

Tabelle 2. Daten gebräuchlicher Koaxialleitungen

Bezeichnung, Aufbau (Innenleiter/ Isolierung/Außenleiter/Armierung)	Z_L Ω	d/D mm/mm	Außen-Dmr. mm	v/c_0 %	C' pF/m	Dämpfung (Nennwerte)	Üblicher Stecker
RG-58 C/U (verzinnte Cu-Litze/PE/ Geflecht aus verzinnten Cu-Drähten)	50 ± 2	0,9/2,95	5	66	101	100 MHz: 0,17 dB/m 1 GHz : 1,3 dB/m	BNC
RG-400/U (versilberte Cu-Litze/ PTFE/doppeltes Geflecht versilberter Cu-Drähte	50 ± 2	1,0/2,95	5	69	96	1 GHz: 0,4 dB/m 10 GHz: 2,2 dB/m	SMA
RG-142 B/U (wie RG-400, nur Innenleiter Cu-plattierter, versilberter St-Draht	50 ± 2	0,95/2,95	5	69	96	1 GHz: 0,4 dB/m 10 GHz: 1,8 dB/m	SMA
RG-402/U (Cu-plattierter St-Draht, versilbert/PTFE/nahtloses Cu-Rohr)	50 ± 1	0,91/3,02	3,58 (0.141″)	69	96	100 MHz: 0,1 dB/m 1 GHz : 0,4 dB/m 10 GHz : 1,5 dB/m	SMA
RG-214/U (versilberte Cu-Litze/PE/ doppeltes Geflecht versilberter Cu-Drähte)	50 ± 2	2,25/7,25	10,8	66	101	100 MHz: 0,07 dB/m 1 GHz : 0,26 dB/m 10 GHz : 1,5 dB/m	N
RG-393/U (wie RG-400)	50 ± 2	2,38/7,25	9,9	69	96	1 GHz: 0,2 dB/m 10 GHz: 1 dB/m	N
RG-401/U (wie RG-402, nur Innenleiter versilberter Cu-Draht)	50 ± 1	1,64/5,46	6,35 (0.250″)	69	96	1 GHz: 0,3 dB/m 10 GHz: 1 dB/m	PC-7, N
CCI-Kleinkoaxialpaar (Cu/Scheiben- oder Ballonisolierung/Cu-Rohr/ 2 Lagen Eisenband)	75	1,2/4,4	–	95	46	1 MHz: 5,3 dB/km 60 MHz: 40,6 dB/km 100 MHz: 52,5 dB/km	Fernmeldekabel
CCI-Normalkoaxialpaar (Cu/PE-Scheiben/0,25 mm Cu-Band/ 2 Lagen Eisenband)	75	2,6/9,5	–	95	46	1 MHz: 2,4 dB/km 60 MHz: 18,5 dB/km 100 MHz: 24 dB/km	Fernmeldekabel

Tabelle 1. Betriebsdaten eines Kabels mit $D = 7{,}25$ mm, $Z_L = 50\,\Omega$ und unterschiedlichem Dielektrikum bei Raumtemperatur (typische Werte)

Dielektrikum	$U_{max,eff}$ kV	α bei 100 MHz dB/m	P_{max} bei 100 MHz W	α bei 1 GHz dB/m	P_{max} bei 1 GHz W
PE	5	0,06	950	0,23	270
PE-X	5	0,06	1800	0,23	500
Schaum-PE	2,2	0,05	500	0,17	150
Schaum-PE-X	1,4	0,05	1000	0,17	300
PTFE	5	0,06	6200	0,22	1700
poröses PTFE	2	0,05	7700	0,17	1850

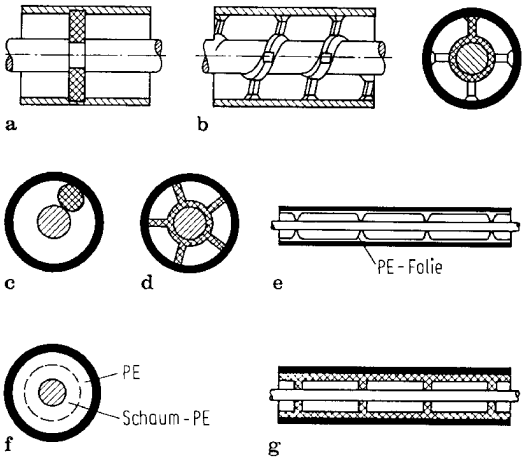


Bild 3. Bauformen koaxialer Leitungen. **a** Scheibenisolierung; **b** offene Stützwendel; **c** Styroflexwendel; **d** längshomogene Stützen; **e** Ballonisolierung; **f** Foam-skin-dielectric; **g** Bambuskabel

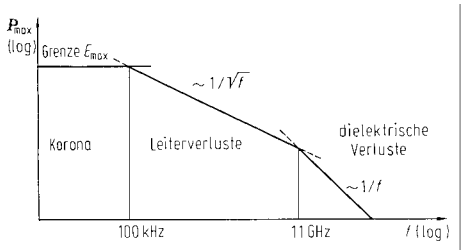


Bild 4. Verlauf der max. übertragbaren cw-Leistung über der Frequenz am Beispiel des PE-Kabels RG 214/U

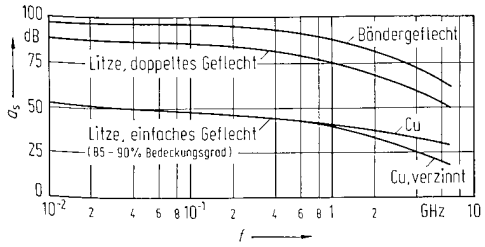


Bild 5. Typischer Verlauf der Schirmdämpfung, gemessen an einem 30 cm langen Kabel

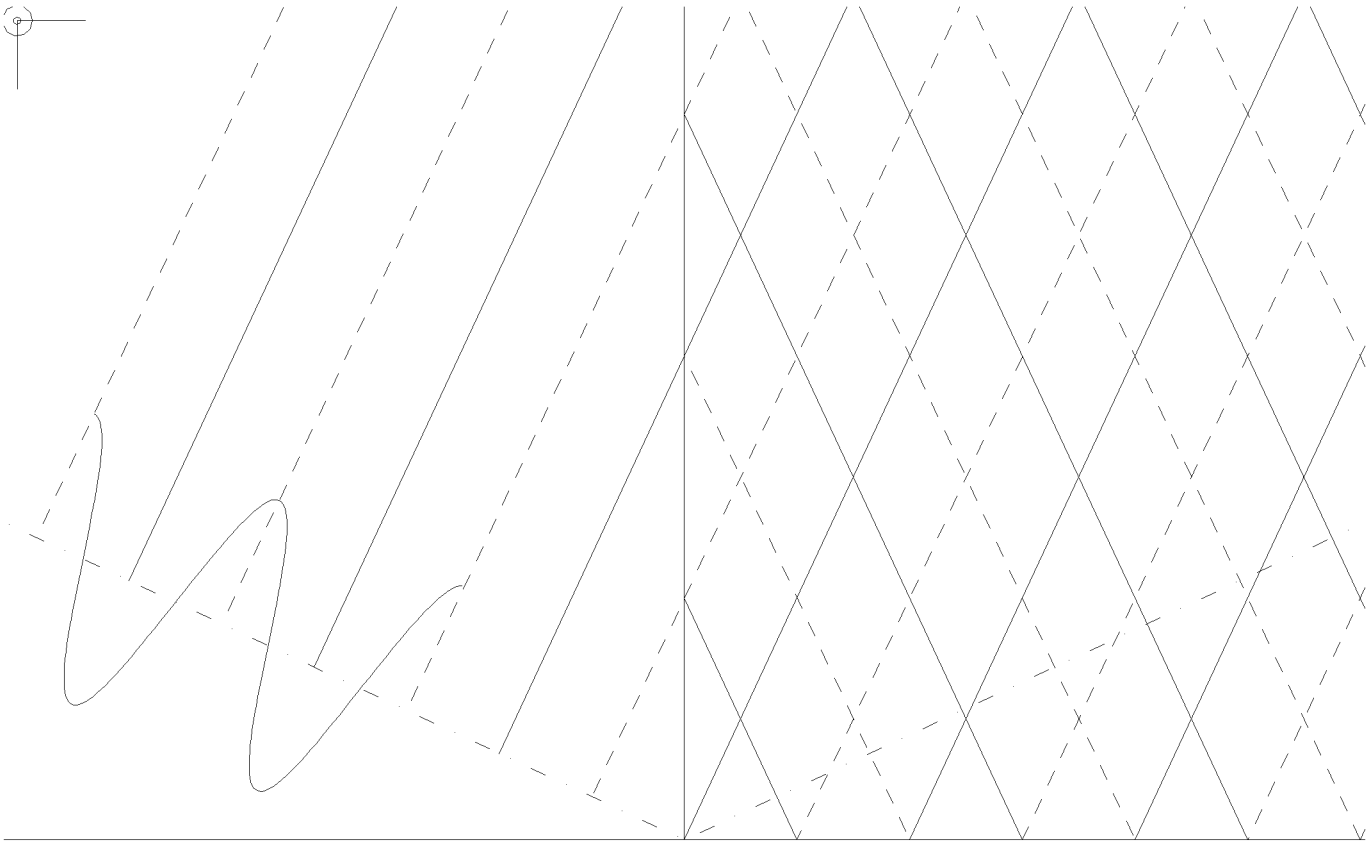
Abbildung 6.4: Einige typische Werte und Betriebsdaten für Koaxialkabel Quelle:[3] K-5ff

6.2 Hohlleiter

Im Hohlleiter muß ebenfalls gelten, Leistungstransport längs des Hohlleiters, also $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, und an den metallischen Wandungen $E_t = 0$ und $H_n = 0$.

Versucht man mit dem Ansatz einer TEM - Wellenausbreitung beide Forderungen miteinander zu vereinbaren, stellt man fest, daß dies nicht möglich ist. Es muß also eine andere Art Welle im Hohlleiter existieren.

Was passiert mit den Feldstärkekomponenten, wenn eine Welle schräg auf eine leitende Ebene trifft ?



** FW ** Hohlleiter senkrechte Polarisation

Abbildung 6.5: Ableitung Feldverteilung vor leitender Ebene bei senkrechter Polarisation

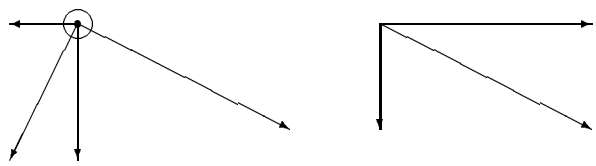
a) senkrechte Polarisation

hinlaufende Welle:

$$\underline{E}_{xh} = E_0 * e^{-j\beta_y * y} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$

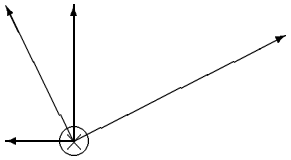
$$\underline{H}_{yh} = E_0/Z_F * \sin\alpha * e^{-j\beta_y * y} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$

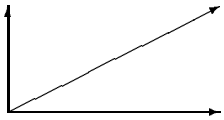
$$\underline{H}_{zh} = -E_0/Z_F * \cos\alpha * e^{-j\beta_y * y} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$



reflektierte Welle:

$$\underline{E}_{xr} = -E_0 * e^{+j\beta_y * y} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$
$$\underline{H}_{yr} = -E_0/Z_F * \sin\alpha * e^{+j\beta_y * y} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$
$$\underline{H}_{zr} = -E_0/Z_F * \cos\alpha * e^{+j\beta_y * y} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$





Summenfeld:

$$\underline{E}_{xg} = E_{xh} + E_{xr} = E_0 * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t} * \left(e^{-j\beta_y * y} - e^{+j\beta_y * y}\right)$$

$$\underline{E}_{xg} = -j2E_0 * \sin(\beta_y * y) * e^{j\omega t} * e^{-j\beta_z * z}$$
$$\underline{H}_{yg} = -j2E_0/Z_F * \sin\alpha * \sin(\beta_y * y) * e^{j\omega t} * e^{-j\beta_z * z}$$
$$\underline{H}_{zg} = -2E_0/Z_F * \cos\alpha * \cos(\beta_y * y) * e^{j\omega t} * e^{-j\beta_z * z}$$

in Zeigerdarstellung

$$\underline{E}_{xg} = 2E_0 * \sin(\beta_y * y) * e^{j(\omega t - \beta_z * z - \pi/2)}$$
$$\underline{H}_{yg} = 2E_0/Z_F * \sin\alpha * \sin(\beta_y * y) * e^{j(\omega t - \beta_z * z - \pi/2)}$$
$$\underline{H}_{zg} = -2E_0/Z_F * \cos\alpha * \cos(\beta_y * y) * e^{j(\omega t - \beta_z * z)}$$

Zeigeramplituden sind Funktionen des Ortes y, Ausbreitungsrichtung ist z.

$$E_{xg} = 2E_0 * \sin(\beta_y * y) * \cos(\omega t - \beta_z * z - \pi/2)$$
$$H_{yg} = 2E_0/Z_F * \sin\alpha * \sin(\beta_y * y) * \cos(\omega t - \beta_z * z - \pi/2)$$
$$H_{zg} = -2E_0/Z_F * \cos\alpha * \cos(\beta_y * y) * \cos(\omega t - \beta_z * z)$$

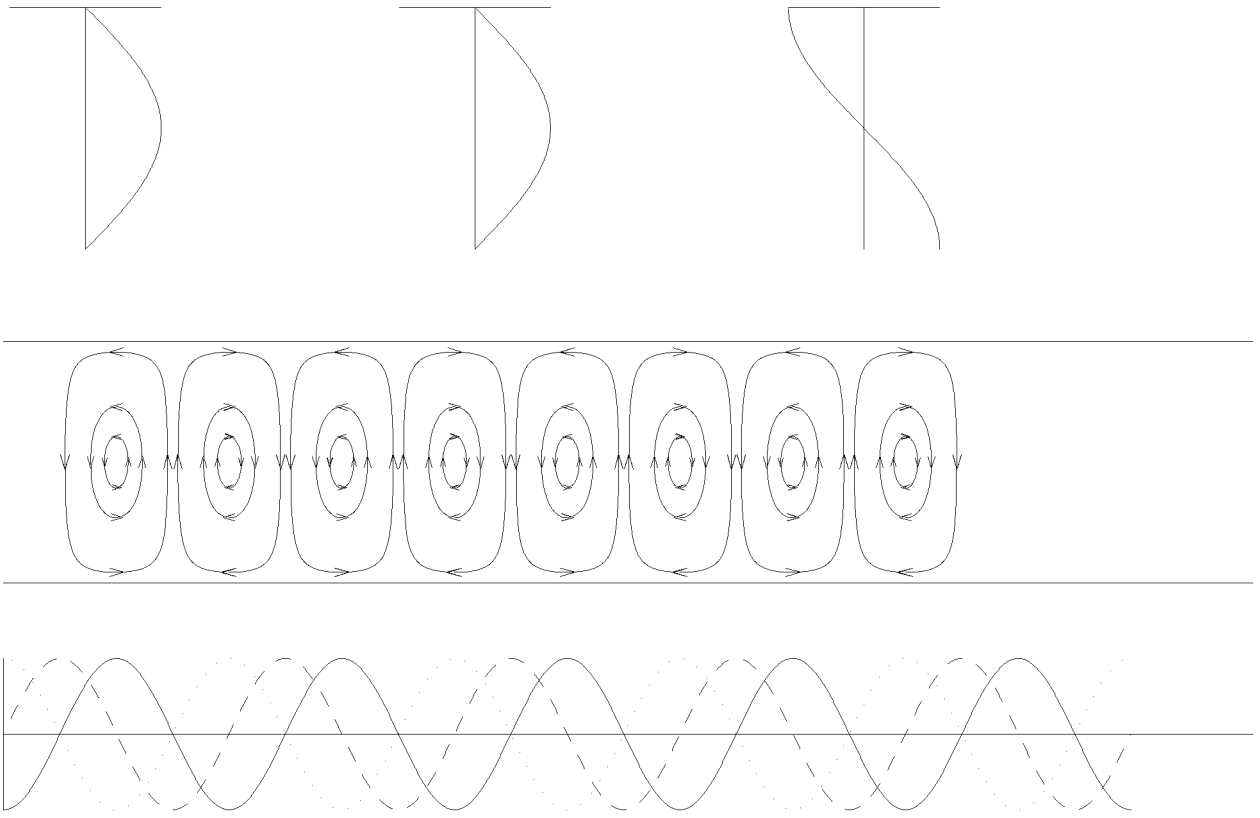


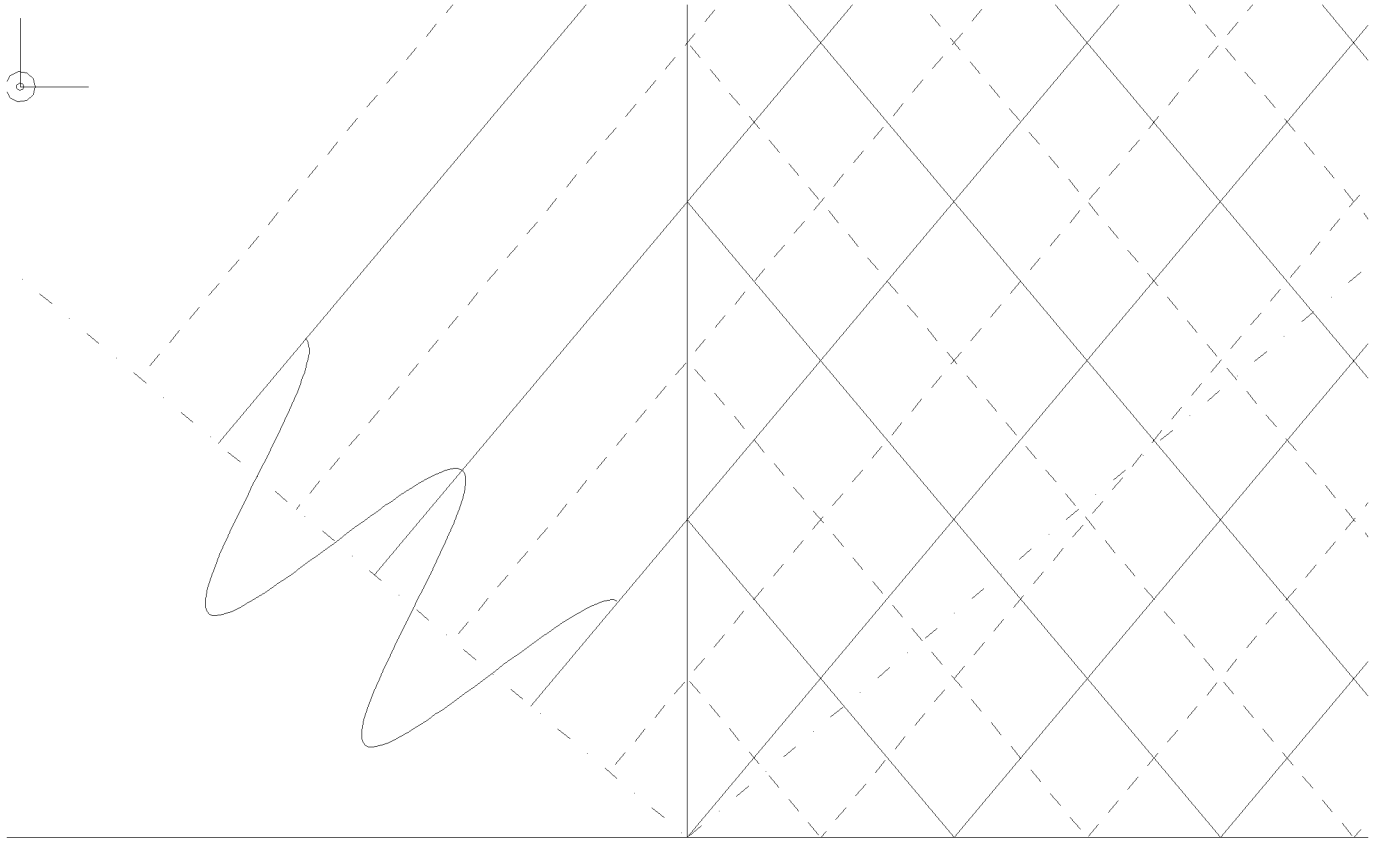
Abbildung 6.6: Amplitudenverlauf der einzelnen Komponenten und resultierendes Feld H-Welle

Senkrechte Polarisation führt zu einer

TE – Welle (Transversal Elektrisch, weil **nur** transversale Komponenten der elektrischen Feldstärke) oder auch

H – Welle, weil H—Komponente in Ausbreitungsrichtung.

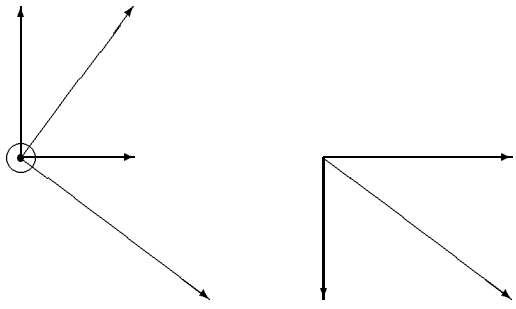
Welche resultierende Welle entsteht bei paralleler Polarisation ??



** FW ** Hohlleiter parallele Polarisation

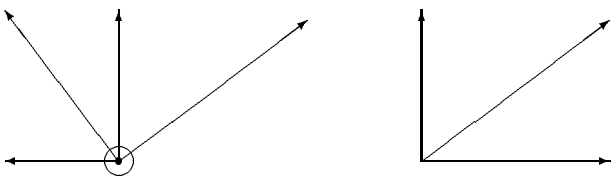
Abbildung 6.7: Ableitung Feldverteilung vor leitender Ebene bei paralleler Polarisation

b) parallele Polarisation



einfallende Welle:

$$\underline{E}_{xh} = E_0 * \sin\alpha * e^{+j\beta_x * x} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$
$$\underline{H}_{yh} = E_0/Z_F * e^{+j\beta_x * x} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$
$$\underline{E}_{zh} = E_0 * \cos\alpha * e^{+j\beta_x * x} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$



reflektierte Welle:

$$\underline{E}_{xr} = E_0 * \sin\alpha * e^{-j\beta_x * x} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$
$$\underline{H}_{yr} = E_0/Z_F * e^{-j\beta_x * x} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$
$$\underline{E}_{zr} = -E_0 * \cos\alpha * e^{-j\beta_x * x} * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t}$$

Summenfeld:

$$\underline{E}_{xg} = \underline{E}_{xh} + \underline{E}_{xr} = E_0 * \sin\alpha * e^{-j\beta_z * z} * e^{j\omega t} * \left(e^{+j\beta_x * x} + e^{-j\beta_x * x}\right)$$

$$\underline{E}_{xg} = 2E_0 * \sin\alpha * \cos(\beta_x * x) * e^{j\omega t} * e^{-j\beta_z * z}$$
$$\underline{H}_{yg} = 2E_0/Z_F * \cos(\beta_x * x) * e^{j\omega t} * e^{-j\beta_z * z}$$
$$\underline{E}_{zg} = j\ 2E_0 * cos\alpha * \sin(\beta_x * x) * e^{j\omega t} * e^{-j\beta_z * z}$$

in Zeigerdarstellung

$$\underline{E}_{xg} = 2E_0 \ * \sin\alpha \ * \ \cos(\beta_x * x) * \ e^{j(\omega t - \beta_z * z)}$$
$$\underline{H}_{yg} = 2E_0/Z_F \ * \ \cos(\beta_x * x) * \ e^{j(\omega t - \beta_z * z)}$$
$$\underline{E}_{zg} = 2E_0 \ * \cos\alpha \ * \ \sin(\beta_x * x) * \ e^{j(\omega t - \beta_z * z + \pi/2)}$$

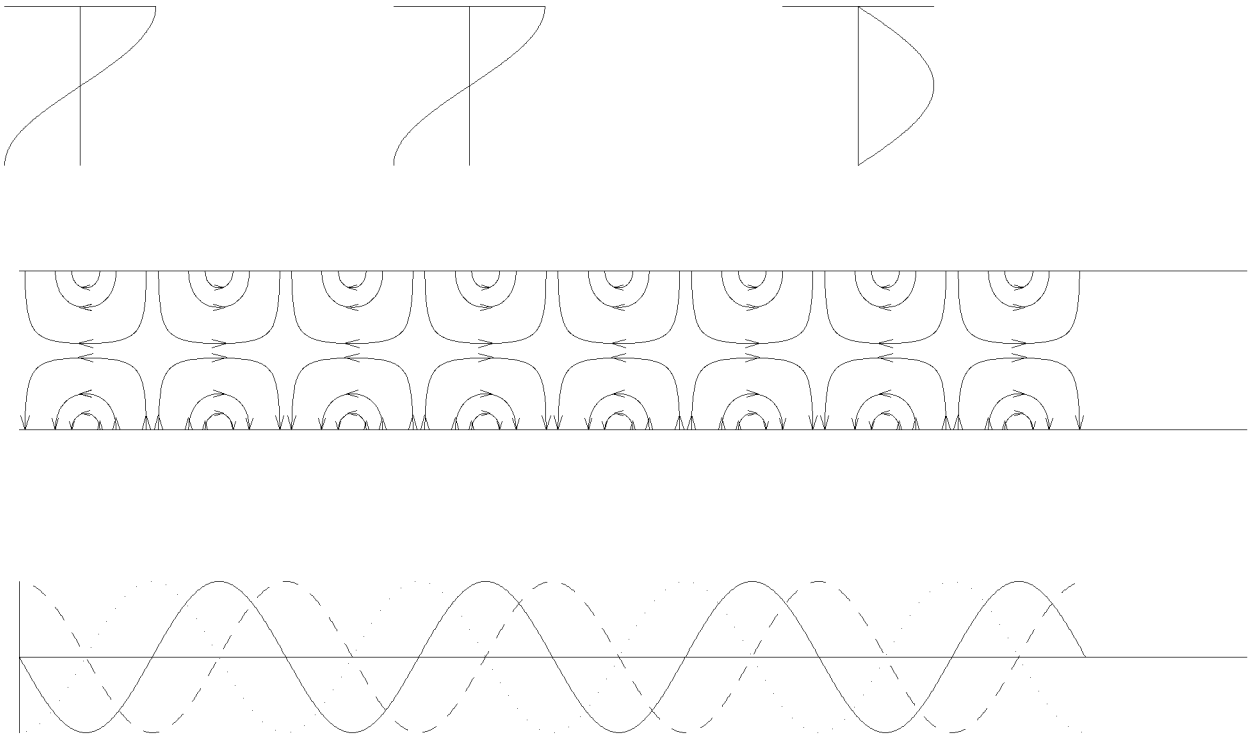


Abbildung 6.8: Amplitudenverlauf der einzelnen Komponenten und resultierendes Feld E-Welle

Parallele Polarisation führt zu einer

TM – Welle (Transversal Magnetisch, weil **nur** transversale Komponenten der magnetischen Feldstärke)

oder auch

E – Welle, weil E–Komponente in Ausbreitungsrichtung.

Bei beiden Polarisationen ergibt sich eine resultierende Welle, die sich längs der leitenden Ebene ausbreitet. Es fällt auf, daß in gewissen Abständen von der leitenden Ebene Feldstärkeverhältnisse auftreten, die denen an der leitenden Ebene entsprechen. Dementsprechend könnte man an diesen Stellen leitende Ebenen einfügen, ohne die Feldverteilung zu stören. Um diese Welle zwischen diesen 2 leitenden Ebenen zu beschreiben, benötigt man die entsprechenden Komponenten der Welle, wie z.B. Wellenlänge, Ausbreitungskonstante usw.

Hohlleiterwellenlänge λ_h

Aus der Herleitung der H- und E-Wellen und dem kleinstmöglichen Abstand a der beiden Ebenen ergibt sich

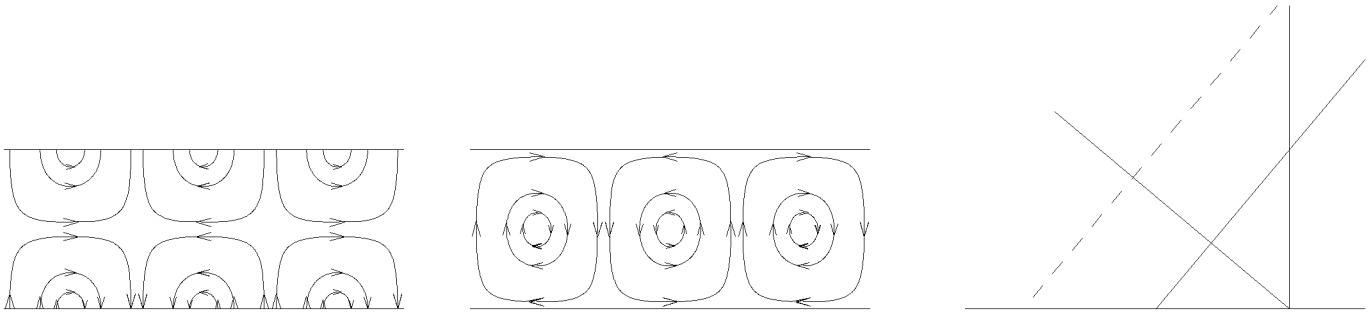


Abbildung 6.9: Ableitung Hohlleiterwellenlänge aus Feldverteilung vor leitender Ebene

$$\sin\ \alpha = \frac{\lambda}{2} * \frac{2}{\lambda_H} = \frac{\lambda}{\lambda_H} \qquad \cos\ \alpha = \frac{\lambda}{2} * \frac{2}{\lambda_x} = \frac{\lambda}{2*a}$$

Gesucht λ_H als Funktion der einfallenden Wellenlänge λ und dem Abstand a der beiden leitenden Ebenen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda_H}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2*a}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Hohlleiterwellenlänge

$$\lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2*a}\right)^2}}$$

Fortpflanzungskonstante

Ausbreitung in Richtung der Hohlleiterwandungen (in den Beispielen in z-Richtung) mit γ_H

Allgemein gilt für die Fortpflanzungskonstante

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Mit der Annahme, daß der Raum zwischen den Platten mit Luft gefüllt ist ($\kappa = 0$), ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_H &= 0 \\ \beta_H &= \frac{2\pi}{\lambda_H} = \frac{2\pi}{\lambda} * \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2*a}\right)^2} \end{aligned}$$

Diskutiert man diesen Ausdruck, dann fällt auf, daß die Wurzel für Werte $\left(\frac{\lambda}{2*a}\right)^2 > 1$, also $\lambda > 2*a$ rein imaginär wird, damit ergäbe sich für diesen Fall rein formal

$\gamma = j\beta = j(j\beta_H) = -\beta_H$, was gleichbedeutend mit einer Dämpfung α ist.

Deshalb bezeichnet man diese Wellenlänge, ab der die Ausbreitungskonstante in eine Dämpfungskonstante übergeht als kritische Wellenlänge, Grenzwellenlänge oder auch cut-off Wellenlänge. Üblich sind folgende Indizierungen $\lambda_k, \lambda_g, \lambda_c$.

Nach DIN 1344 genormt sind die Bezeichnungen λ_c und die zugehörige Frequenz $f_c = \frac{c}{\lambda_c}$

Damit ergibt sich die Hohlleiterwellenlänge λ_H als Funktion von λ und λ_c. Übliche Darstellungsformen bei Hohlleitern sind funktionelle Abhängigkeit über Wellenlänge oder über Frequenz, meistens normiert.

$$\lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

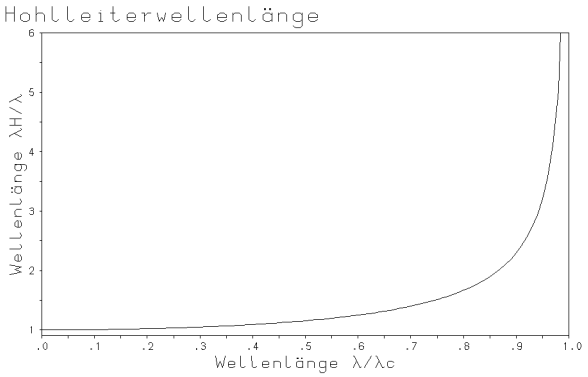


Abbildung 6.10: Hohlleiterwellenlänge über Wellenlänge normiert

$$\lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

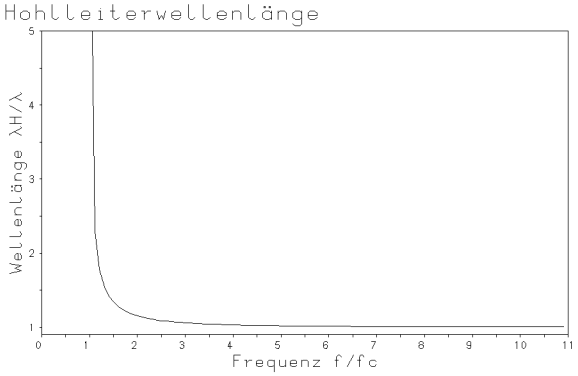


Abbildung 6.11: Hohlleiterwellenlänge über Frequenz normiert

Aus dem Verlauf der Fortpflanzungskonstanten ergibt sich, daß der Hohlleiter Hochpaßcharakter besitzt.

Durchlaßbereich $\lambda < \lambda_c$

$f > f_c$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} * \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$

Sperrbereich $\lambda > \lambda_c$

$f < f_c$

$\alpha = j\beta = \frac{2\pi}{\lambda} * \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$

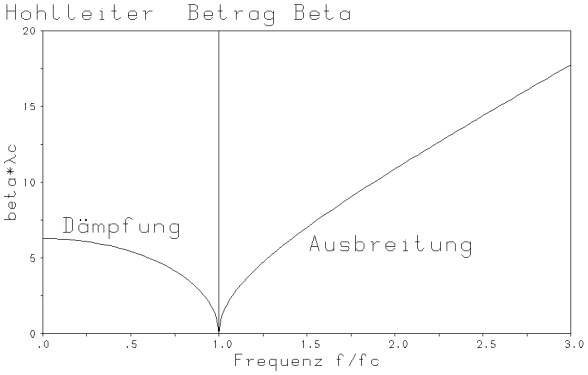


Abbildung 6.12: $|\beta|$ über Frequenz normiert

Für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gilt

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{f * \lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$v_g = f * \lambda * \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

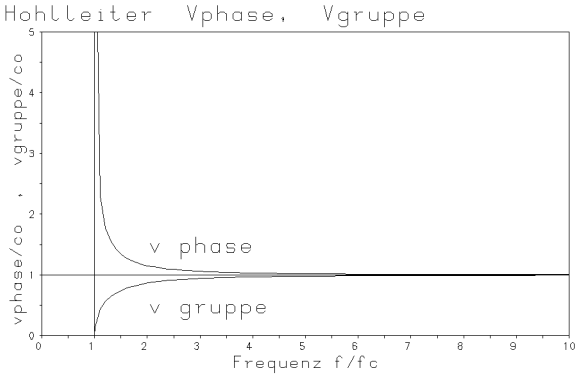


Abbildung 6.13: v_p, v_g über Frequenz normiert

Für den Feldwellenwiderstand gilt unterschiedlich für E- und H-Wellen:

H – Wellen

$$Z_{F,H} = \frac{E_{tan}}{H_{tan}} = \frac{E}{H * sin\alpha}$$

$$Z_{F,H} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

E – Wellen

$$Z_{F,E} = \frac{E_{tan}}{H_{tan}} = \frac{E * sin\alpha}{H}$$

$$Z_{F,E} = Z_F * \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

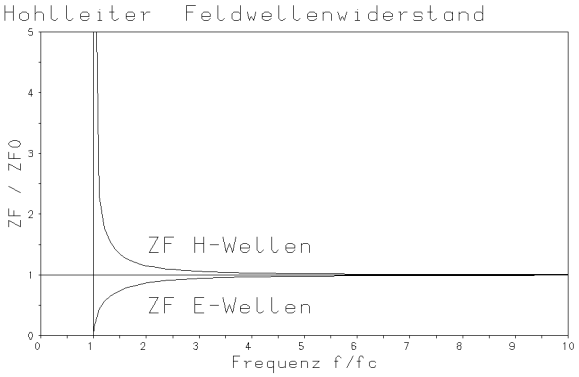
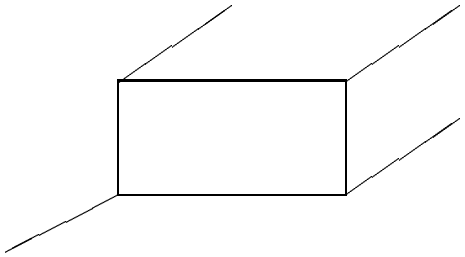


Abbildung 6.14: $Z_{F,H}$, $Z_{F,E}$ über Frequenz normiert

Abhängig von der Geometrie der Hohlleiter unterscheidet man Rechteckhohlleiter und Rundhohlleiter. Für jede Geometrie sind die Maxwellgleichungen zusammen mit den Randbedingungen zu lösen.

6.2.1 Rechteckhohlleiter

Löst man die Maxwellgleichungen mit den Randbedingungen für den Rechteckquerschnitt ergeben sich folgende Gleichungen für die Feldkomponenten



Gleichungen der Feldkomponenten
Rechteckhohleiter: Breitseite: a, Schmalseite: b

H_{mn} – Wellen:

$$E_x = j\omega\mu H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{n*\pi}{b} * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$E_y = -j\omega\mu H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m*\pi}{a} * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = j\beta H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m*\pi}{a} * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$H_y = j\beta H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{n*\pi}{b} * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$H_z = H_0 * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

E_{mn} – Wellen:

$$E_x = j\beta E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m*\pi}{a} * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$E_y = j\beta E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{n*\pi}{b} * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$E_z = E_0 * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$H_x = -j\omega\varepsilon E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{n*\pi}{b} * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$H_y = j\omega\varepsilon E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m*\pi}{a} * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right) * e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$H_z = 0$$

mit $$\lambda_c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2*a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2*b}\right)^2}} \qquad \beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m*\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n*\pi}{b}\right)^2}$$

In Hohlleitern können eine Vielzahl von Wellentypen, sogenannte Moden existieren. Diese unterschiedlichen Schwingungsformen werden in zwei Gruppen aufgeteilt.

1. **H** – Wellen : **magnetische** Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung bzw
   TE – Wellen : **nur** transversale Komponenten der elektrischen Feldstärke.
2. **E** – Wellen : **elektrische** Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung bzw
   TM – Wellen : **nur** transversale Komponenten der magnetischen Feldstärke.

E– und H-Wellen können in Hohlleitern beliebigen Querschnitts auch gleichzeitig nebeneinander auftreten. Um die vielfältigen Wellentypen voneinander zu unterscheiden, verwendet man zusätzlich zwei Indexziffern $\mathbf{mn}$, um den jeweiligen genauen Typ anzugeben.

Diese Indexziffern beschreiben in Kurzform nach vereinbarten Regeln die elektrischen bzw magnetischen Feldbilder in der **Querschnittsebene des Hohlleiters**.
Nach diesen Vereinbarungen beziehen sich die Indices auf die Anzahl der Maxima bzw auf die Anzahl der Nullstellen im Hohlleiterquerschnitt.

Bei $\boldsymbol{H}_{\mathbf{mn}}$–Wellen bezieht man sich auf die **elektrische Feldverteilung** über der Querschnittsebene.
Bei $\boldsymbol{E}_{\mathbf{mn}}$–Wellen bezieht man sich auf die **magnetische Feldverteilung** über der Querschnittsebene.

Für den Rechteckhohlleiter gilt:
Der erste Index (m) gibt die Anzahl der Maxima der betrachteten Feldkomponente über der Breitseite a, der zweite Index (n) die Anzahl der Maxima über der Schmalseite b an.

$\boldsymbol{H}_{10}$–Welle

charakterisiert durch elektrische Feldverteilung über Querschnittsebene.
Die E–Komponenten lassen sich beschreiben zu

$$E_x = A_x * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

$$E_y = -A_y * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

mit $m = 1$ und $n = 0$ ergibt sich

$$E_x = 0$$

$$E_y = -A_y * \sin\left(\frac{\pi*x}{a}\right)$$

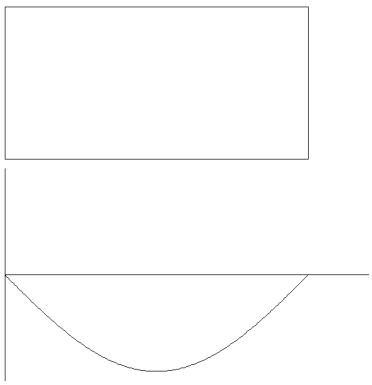


Abbildung 6.15: E–Verteilung längs Breitseite

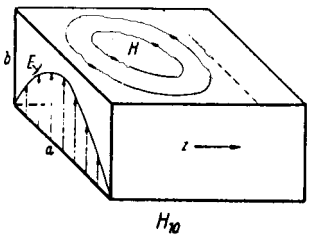


Abbildung 6.16: Feldverteilung bei H10

H_{01}–Welle

E–Feldverteilung über Querschnittsebene.

$$E_x = A_x * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

$$E_y = -A_y * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

mit $m = 0$ und $n = 1$ ergibt sich

$$E_x = A_x * \sin\left(\frac{\pi*y}{b}\right)$$

$$E_y = 0$$

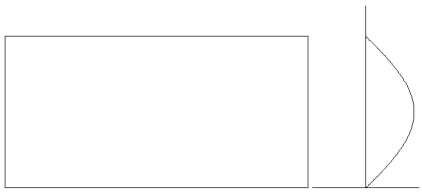


Abbildung 6.17: E–Verteilung längs Schmalseite

H_{20}–Welle

$$E_x = 0$$

$$E_y = -A_y * \sin\left(\frac{2*\pi*x}{a}\right)$$

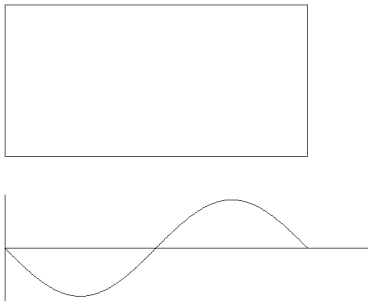


Abbildung 6.18: E–Verteilung längs Breitseite

H_{02}–Welle

$$E_x = A_x * \sin\left(\frac{2*\pi*y}{b}\right)$$

$$E_y = 0$$

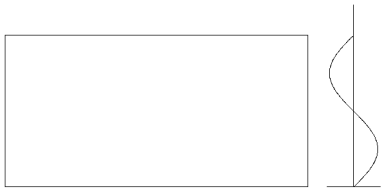


Abbildung 6.19: E–Verteilung längs Schmalseite

H_{11}–Welle

$$E_x = A_x * \cos\left(\frac{\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi*y}{b}\right)$$

$$E_y = -A_y * \sin\left(\frac{\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{\pi*y}{b}\right)$$

Höhere Wellentypen lassen sich auf die H_{11}–Welle zurückführen.

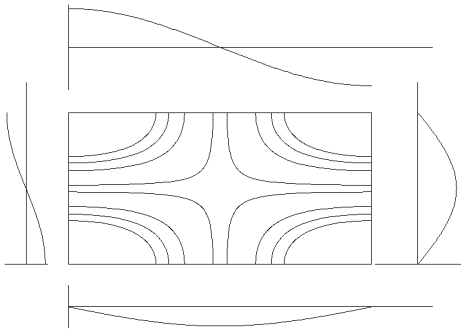


Abbildung 6.20: E–Verteilung längs Breit– und Schmalseite

E –Wellen

Kennzeichnend für diesen Wellentyp ist eine elektrische Komponente in Ausbreitungsrichtung, also ein

$$E_z = E_0 * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

Setzt man die Wellentypen E_{m0} und E_{0n} an, so ergäbe sich ein $E_z = 0$ und somit keine Welle.

!! Im Rechteckhohlleiter existieren keine E_{m0} – –*und* E_{0n}–Wellen !!

Der Grundwellentyp der E–Wellen ist die E_{11}–Welle charakterisiert durch die magnetische Feldverteilung über der Querschnittsebene.

$$H_x = -A_x * \sin\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

$$H_y = A_y * \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$$

mit $m = 1$ und $n = 1$

$$H_x = -A_x * \sin\left(\frac{\pi*x}{a}\right) * \cos\left(\frac{\pi*y}{b}\right)$$

$$H_y = A_y * \cos\left(\frac{\pi*x}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi*y}{b}\right)$$

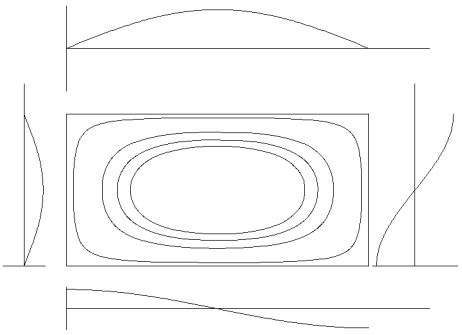


Abbildung 6.21: H–Feldverteilung längs Breit– und Schmalseite

Die höheren Wellentypen lassen sich wie bei H–Wellen aus der E_{11}–Welle zusammensetzen.

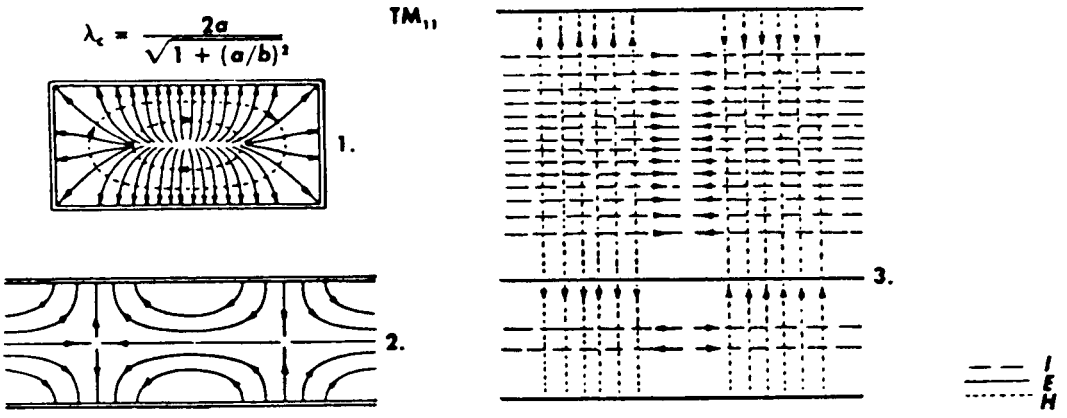


Abbildung 6.22: Darstellungsarten der Feldverteilungen Quelle: [14] S.12

Betriebsfrequenzbereich eines Hohlleiters

Jeder Wellentyp ist ab seiner kritischen Frequenz ausbreitungsfähig. Diese kritische Frequenz berechnet sich zu $f_c = \frac{c}{\lambda_c}$ mit

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Berechnet man für unterschiedliche Rechteckformen die entsprechenden β, so ergeben sich sogenannte Modenfahrpläne, aus denen man ersehen kann, bei welcher Frequenz welche Wellentypen existent sein können.

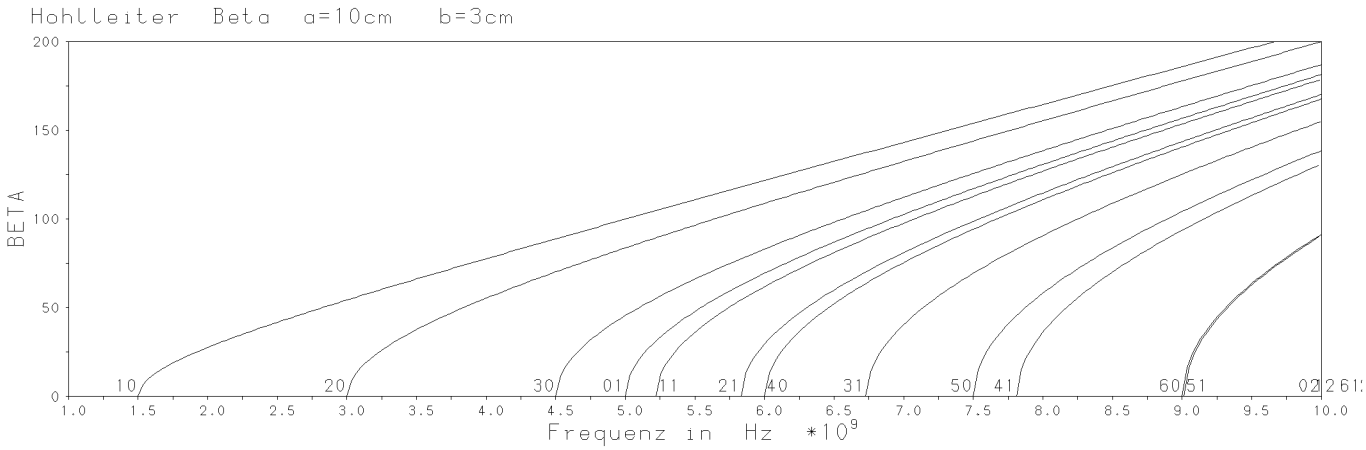


Abbildung 6.23: β für Rechteckhohleiter a=10cm, b=3cm

H_{10} :	$\lambda_c = 20$ cm	$f_c = 1.5$ GHz
H_{20} :	$\lambda_c = 10$ cm	$f_c = 3.0$ GHz
H_{30} :	$\lambda_c = 20/3$ cm	$f_c = 4.5$ GHz
H_{01} :	$\lambda_c = 6$ cm	$f_c = 5.0$ GHz
H_{11}/E_{11} :	$\lambda_c = 5.7$ cm	$f_c = 5.2$ GHz
H_{21}/E_{21} :	$\lambda_c = 5.1$ cm	$f_c = 5.8$ GHz
H_{40} :	$\lambda_c = 5$ cm	$f_c = 6.0$ GHz

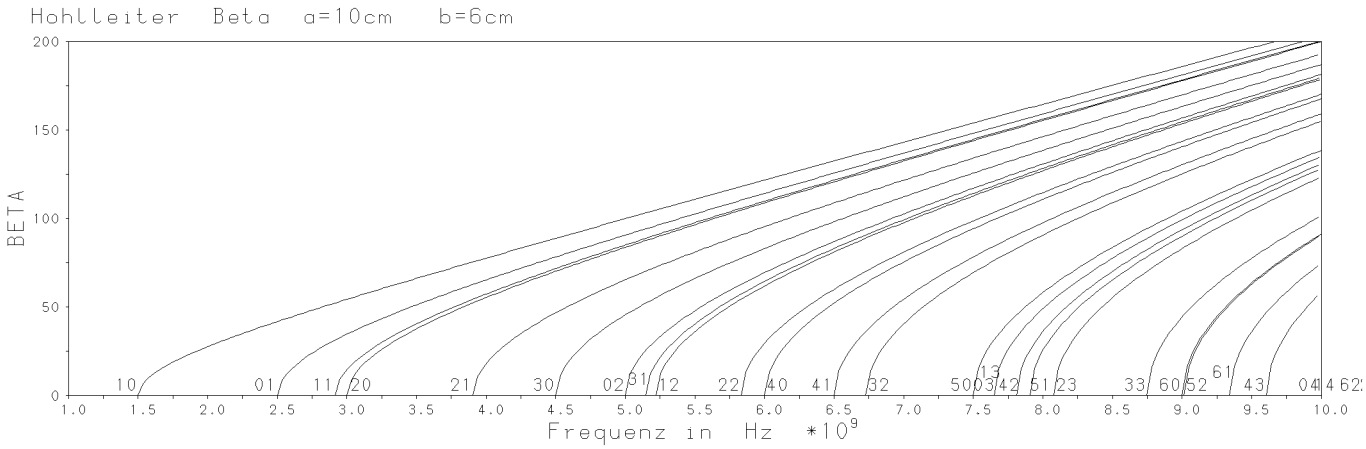


Abbildung 6.24: β für Rechteckhohleiter a=10cm, b=6cm

H_{10} :	$\lambda_c = 20$ cm	$f_c = 1.5$ GHz
H_{01} :	$\lambda_c = 12$ cm	$f_c = 2.5$ GHz
H_{11}/E_{11} :	$\lambda_c = 10.2$ cm	$f_c = 2.9$ GHz
H_{20} :	$\lambda_c = 10$ cm	$f_c = 3.0$ GHz
H_{21}/E_{21} :	$\lambda_c = 7.7$ cm	$f_c = 3.9$ GHz
H_{30} :	$\lambda_c = 20/3$ cm	$f_c = 4.5$ GHz
H_{02} :	$\lambda_c = 6$ cm	$f_c = 5.0$ GHz
H_{31}/E_{31} :	$\lambda_c = 5.8$ cm	$f_c = 5.1$ GHz
H_{12}/E_{12} :	$\lambda_c = 5.7$ cm	$f_c = 5.2$ GHz
H_{22}/E_{22} :	$\lambda_c = 5.1$ cm	$f_c = 5.8$ GHz
H_{40} :	$\lambda_c = 5$ cm	$f_c = 6.0$ GHz

Können bei einer Frequenz verschiedene Moden auftreten, deren Gruppengeschwindigkeiten unterschiedlich groß sind, führt dies zu nichtlinearen Verzerrungen, die nicht mehr korrigierbar sind. Deshalb sucht man den Frequenzbereich, in dem nur ein Mode ausbreitungsfähig ist. Diesen Bereich nennt man den Eindeutigkeitsbereich eines Hohlleiters. An den Beispielen sieht man, daß dieser Eindeutigkeitsbereich abhängig vom Verhältnis der beiden Seiten a und b ist.

Eindeutigkeitsbereich des Rechteckhohlleiters :

Für $a/b > 2$: $\boxed{f_{cH10} < f < f_{cH20}\ (= 2\ *\ f_{cH10})}$

Für $a/b < 2$: $\boxed{f_{cH10} < f < f_{cH01} (< f_{cH20}!)}$

Der größtmöglich nutzbare Frequenzbereich ergibt sich für ein Verhältnis $a/b > 2$. Der Mode, der im Eindeutigkeitsbereich ausbreitungsfähig ist wird Grundtyp (oder Haupttyp nach DIN 47 301) der entsprechenden Hohlleiterform genannt. Der H10 - Mode ist der Grundtyp des Rechteckhohlleiters. In der Praxis ist der Eindeutigkeitsbereich wegen der starken Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit und Dämpfung bei Annäherung an die Grenzfrequenz der H10–Welle, sowie Störungen in der Geometrie nicht vollständig nutzbar.

Betriebsfrequenzbereich des standardisierten Rechteckhohlleiters ($a/b > 2$)

$$\boxed{1.25 * f_c < f < 1.9 * f_c} \qquad \text{mit} \quad f_c = f_{cH10}$$

Wellendämpfung

Leider sind die Wände des Hohlleiters nicht aus ideal leitfähigem Material. Tangentiale magnetische Feldkomponenten vor den Wänden bewirken Ströme senkrecht zu den H–Feldlinien. Dies führt zu folgender Wandstromverteilung.

Ströme führen aufgrund der Wärmeentwicklung zu Verlusten, die der Hohlleiterwelle entzogen werden. Allgemein kann dieser Leistungsverlust berechnet werden zu

$$\alpha = \frac{R_F}{2} * \frac{\oint H_t^2 * dl}{\int\int (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{A}} \qquad \frac{\text{Verlustleistung}}{\text{Bezugsleistung}}$$

R_F ist abhängig vom Skineffekt, also je höher die Frequenz umso größer wird R_F.

Für die H_{10}–Welle im Rechteckhohlleiter ergibt sich:

$$\alpha_{Cu} = \frac{0.212}{\frac{a}{\text{cm}} * \sqrt{\frac{\lambda_0}{\text{cm}}}} * \frac{\frac{a}{2*b} + \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \qquad \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}}\right]$$

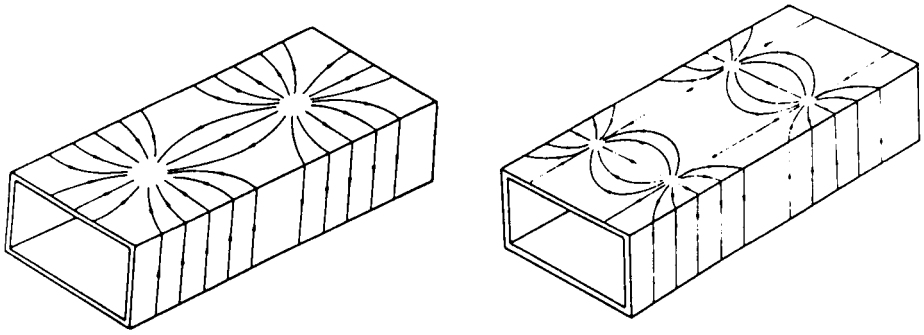


Abbildung 6.25: Wandstromverteilung für H_{10} und H_{20} Quelle:[14] S.9

Für beliebiges anderes Material x gilt : $\alpha_x = \alpha_{Cu} * \sqrt{\frac{\kappa_{Cu}}{\kappa_x}}$

Bei sehr hohen Frequenzen bewegt sich die Leitschichtdicke im μm – Bereich, deshalb erhöhen Oberflächenrauhigkeiten die Dämpfung.
Rauhtiefe = Leitschichtdicke ===⇒ 60 % höhere Dämpfung
Rauhtiefe = 0.5 * Leitschichtdicke ===⇒ 20 % höhere Dämpfung

Dämpfung aufgrund dielektrischer Füllung

mit $\lambda_{c_\varepsilon} = \lambda_c * \sqrt{\varepsilon_r}$ gilt

$$\alpha_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_r} * \frac{\pi}{\lambda_0} * \tan\delta_\varepsilon * \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c\varepsilon}}\right)^2}} \qquad \left[\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}\right]$$

im allgemeinen gilt : $\alpha_\varepsilon > \alpha_{Cu}$

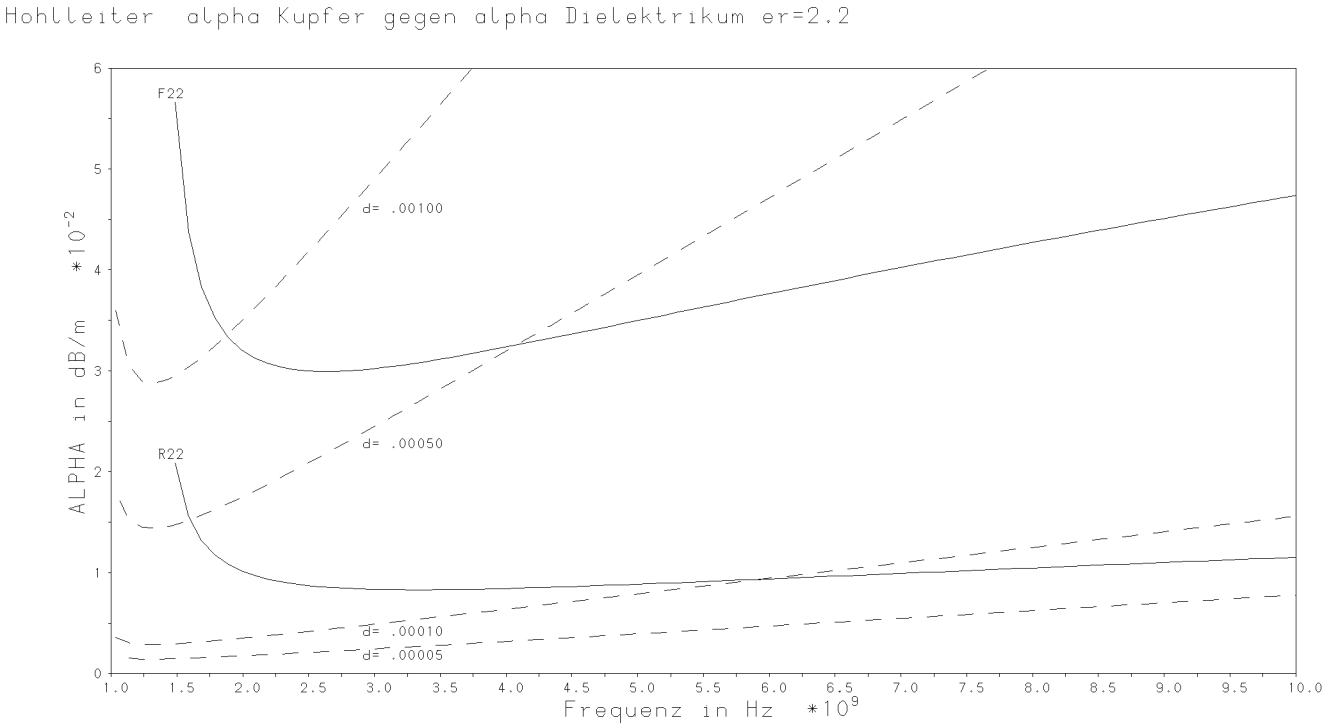


Abbildung 6.26: Wellendämpfung für die genormten Hohlleiter R22 und F22 mit unterschiedlicher Füllung

Übertragbare Leistung:

a) Impulsspitzenleistung

Impulsspitzenleistung wird nur begrenzt durch die Durchbruchfeldstärke.
Normbedingungen :

30 $\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ bei $T = 20°\ C$ und $p = 10\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 1000$ HPa $= 1000$ mbar

z.B. für H_{10} bei $f = 1.5 * f_c$ und reflexionsfreier Abschluß

$$\frac{\hat{P}_{\max}}{A} = 445\frac{\text{kW}}{\text{cm}^2}$$

Übertragbare Leistung **sinkt** bei Fehlanpassung.
Übertragbare Leistung **steigt** bei Verwendung von Vakuum oder Schutzgas (SF_6).

b) Dauerstrichleistung (CW–Leistung)*

Die zulässige Dauerstrichleistung ist begrenzt durch die unzulässige Erwärmung der inneren Hohlleiteroberflächen, und ist wesentlich kleiner als die Spitzenleistung.

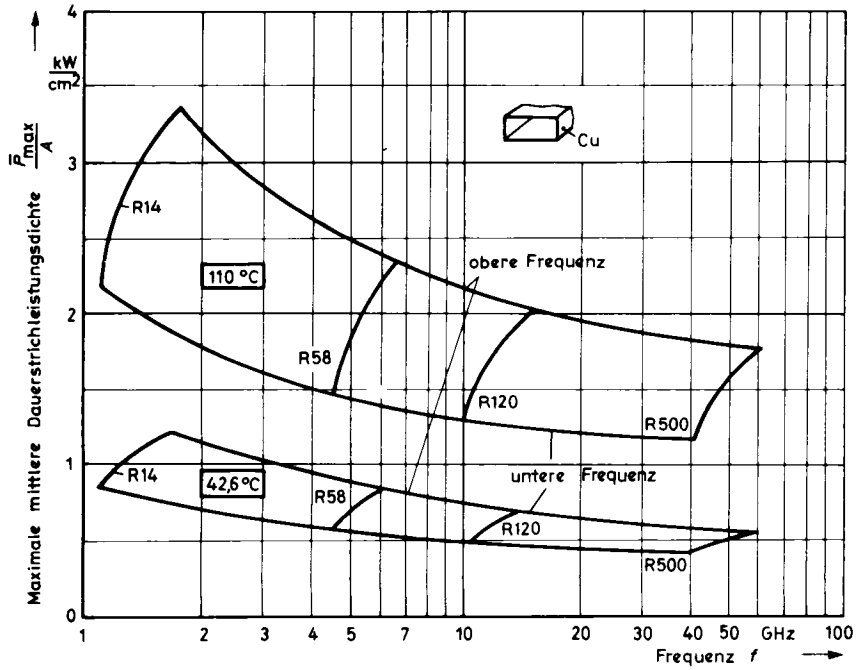


Abbildung 6.27: Theoretische Werte der maximalen Dauerstrichleistungsdichte Quelle:[15] S.94

*CW = **C**ontinous **W**ave

Abbildung 6.28: Zusammenstellung der Formeln für den Rechteckhohlleiter

6.2.2 Rundhohlleiter

Aufgrund der Geometrie bieten sich zur Beschreibung der Feldkomponenten Zylinderkoordinaten an. Hierfür müssen die Maxwellgleichungen zusammen mit den Randbedingungen

$$E_\varphi = E_z = H_r = 0$$

an den metallischen Wandungen gelöst werden. Aufgrund der Lösung der DGLn in Zylinderkoordinaten erscheinen in den Formeln für die Feldkomponenten Besselfunktionen und deren Ableitungen.

Gleichungen der Feldkomponenten

H_{mn} – Wellen:

$$\begin{aligned}
E_r &= j\omega\mu H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m}{r} * J_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \sin(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
E_\varphi &= j\omega\mu H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * J'_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
E_z &= 0 \\
H_r &= -j\beta H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * J'_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_\varphi &= j\beta H_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m}{r} * J_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \sin(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_z &= H_0 * J_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)}
\end{aligned}$$

E_{mn} – Wellen:

$$\begin{aligned}
E_r &= j\beta E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * J'_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
E_\varphi &= -j\beta E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m}{r} * J_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \sin(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
E_z &= E_0 * J_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_r &= j\omega\varepsilon E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * \frac{m}{r} * J_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \sin(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_\varphi &= j\omega\varepsilon E_0 * \left(\frac{\lambda_c}{2\pi}\right)^2 * J'_m\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(m*\varphi) * e^{j(\omega t-\beta z)} \\
H_z &= 0
\end{aligned}$$

mit $\beta = \dfrac{2*\pi}{\lambda_h}$

Die kritischen Wellenlängen für E– und H–Wellen berechnen sich zu.

$$H_{mn} - \text{Wellen} \qquad \lambda_c = \frac{\pi * D}{x'_{mn}}$$

$$E_{mn} - \text{Wellen} \qquad \lambda_c = \frac{\pi * D}{x_{mn}}$$

dabei bedeuten D : Durchmesser des Hohlleiters
x'_{mn} : n.Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion m.Ordnung
x_{mn} : n.Nullstelle der Besselfunktion m.Ordnung

Eine Tabelle der Nullstellen ist nötig um die entsprechenden cut – off – Wellenlängen zu bestimmen.

E_{mn} – Wellen	H_{mn} – Wellen
$x_{01} = 2.40$	$x'_{11} = 1.84$
$x_{11} = 3.83$	$x'_{21} = 3.05$
$x_{21} = 5.13$	$x'_{01} = 3.83$
$x_{02} = 5.52$	$x'_{31} = 4.20$
$x_{31} = 6.38$	$x'_{12} = 5.33$
$x_{12} = 7.02$	$x'_{22} = 6.71$
$x_{22} = 8.42$	$x'_{02} = 7.02$
$x_{03} = 8.65$	$x'_{13} = 8.54$

Daraus läßt sich entsprechend dem Verhältnis $\frac{\lambda_c}{D} = \frac{\pi}{x_{mn}}$ bzw $\frac{\pi}{x'_{mn}}$ ein Modenfahrplan errechnen.

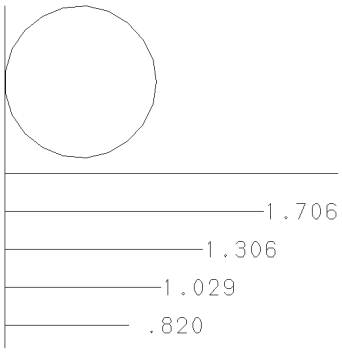


Abbildung 6.29: Modenfahrplan für Rundhohlleiter

Aus dem Modenfahrplan erkennt man, daß die H_{11} – Welle der Grundwellentyp des Rundhohlleiters ist.

Eindeutigkeitsbereich : $1.306 * \text{D} < \lambda < 1.706 * \text{D}$
Betriebsfrequenzbereich : $1.36 * \text{D} < \lambda < 1.6 * \text{D}$

Feldverteilungen und Bezeichnung der Moden

Der erste Index (m) gibt die Anzahl der Maxima der betrachteten Feldkomponente längs des halben Rohrumfangs und der zweite Index (n) die Anzahl der Nullstellen der betrachteten Feldkomponente über dem Radius an. Treten gleichzeitig an der Wand und an der Achse des Hohlleiters Nullstellen auf, zählen beide zusammen als eine Nullstelle.

H_{01} –Welle

Charakteristisch E–Feldverteilung über Querschnitt.
$m = 0$ d.h. kein Maximum längs des halben Rohrumfangs, damit $E_r = 0$
$n = 1$ d.h. 1 Nullstelle über Radius, oder je eine Nullstelle an der Wand und in Achsmitte.
Aus den Gleichungen ergibt sich:

$$E_r = A_r * \frac{0}{r} * J_0\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \sin(0*\varphi) = 0$$

$$E_\varphi = A_\varphi * J_0'\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right)$$

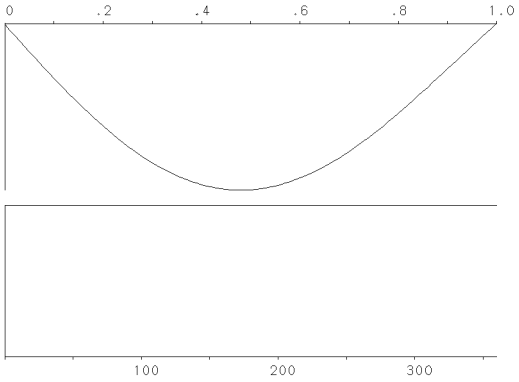


Abbildung 6.30: E–Verteilung über r und φ H_{01}-Welle

Wegen der Randbedingungen gibt es keine E_{m0}– und H_{m0}–Wellen im Rundhohlleiter!!

H_{11} –Welle

$E_r = A_r * \frac{1}{r} * J_1\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \sin(\varphi)$
$E_\varphi = A_\varphi * J_1'\left(\frac{2*\pi*r}{\lambda_c}\right) * \cos(\varphi)$

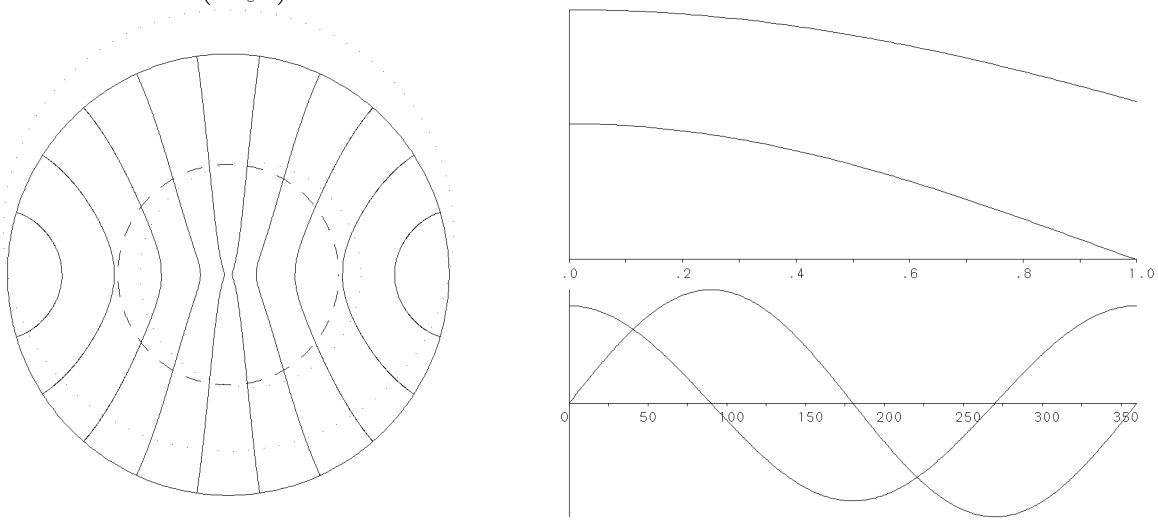


Abbildung 6.31: E–Verteilung über r und φ bei H_{11}–Welle

E_{11} –Welle

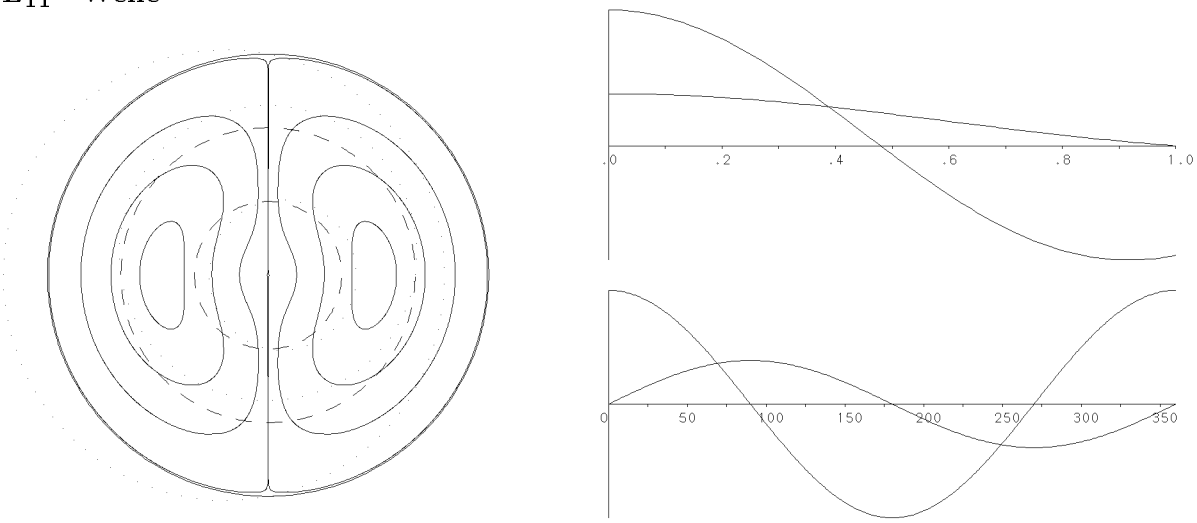


Abbildung 6.32: H–Verteilung über r und φ $bei E_{11}$–Welle

Dämpfung im Rundhohlleiter

$$H_{11}\text{–Welle} \qquad \alpha_{Cu} = \frac{0.212}{\frac{D}{\mathrm{cm}} * \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathrm{cm}}}} * \frac{\frac{\lambda_0}{1.706 * D} + 0.4185}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{1.706 * D}\right)^2}} \qquad \left[\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$H_{01}\text{–Welle} \qquad \alpha_{Cu} = \frac{0.212}{\frac{D}{\mathrm{cm}} * \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathrm{cm}}}} * \frac{\frac{\lambda_0}{0.82 * D}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{0.82 * D}\right)^2}} \qquad \left[\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}\right]$$

Die H_{01}–Welle im Rundhohleiter ist der Wellenmode mit der geringstmöglichen Dämpfung. Deshalb hat man früher versucht Weitverkehrsverbindungen mit Rundhohlleiter im H_{01}–Mode aufzubauen. Probleme dabei bestanden vor allem in der Modenmischung, weil bei Ausbreitung H_{01} vier weitere Wellentypen ausbreitungsfähig sind, sowie in Biegeradien im 100m–Bereich. Der Lichtwellenleiter macht inzwischen den Hohlleiter für Weitverkehr bedeutungslos.

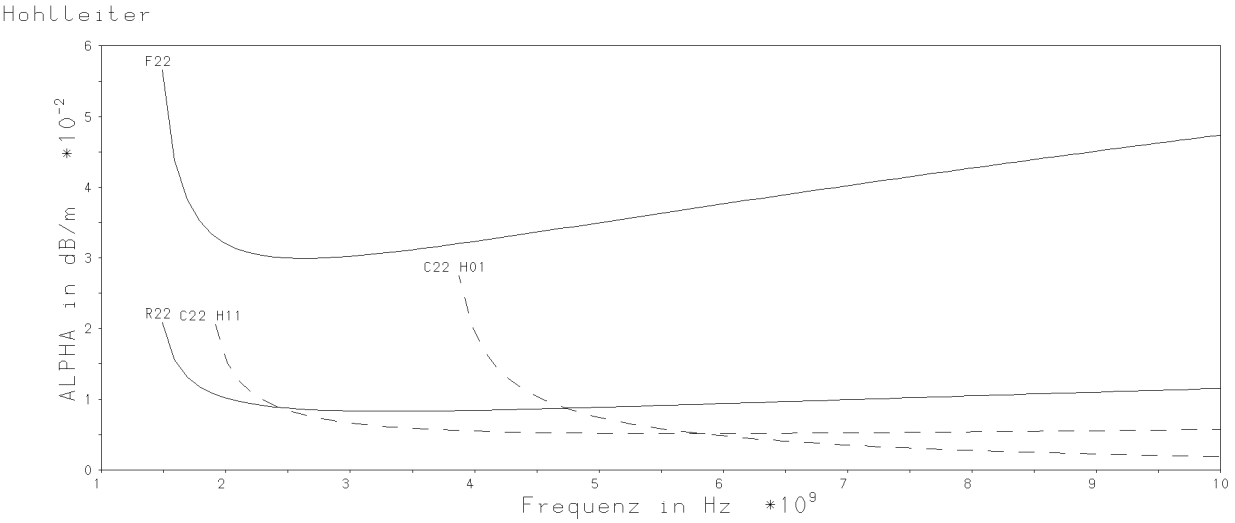


Abbildung 6.33: Wellendämpfung für verschiedene genormte Hohleiter

6.2.3 Normung nach DIN 47 302

Die wichtigsten DIN – Vorschriften für den Hohlleiter sind:

DIN 47301	Begriffe der Hochfrequenz – Leitungstechnik
	Blatt 1 : Wellenleiter
	Baltt 2 : Leistungsanpassung
	Blatt 3 : Mittlerer Wellenwiderstand, Mittlerer Welligkeitsfaktor
DIN 47302	Hochfrequenz (HF) – Hohlleiter
	Teil 1 : Rechteck – Rohr, Maße, Frequenzbereich, Dämpfung
	Teil 2 : Rund – Rohr, Maße, Frequenzbereich, Dämpfung
	Teil 3 : Quadratisches Rohr, Maße, Frequenzbereich, Dämpfung
	Teil 10 : Hohlleiter – Rohr, Anforderungen

Die entsprechenden Formen werden mit einem Buchstaben gefolgt von einer Zahl klassifiziert.
Form R : Rechteck Seitenverhältnis $\frac{b}{a} \approx 1/2$
Form F : Rechteck Seitenverhältnis $\frac{b}{a} \approx 1/8$ bis $1/4$
Form C : Rundhohlleiter
Form Q : Quadratischer Hohlleiter
Die Zahl dahinter gibt **ungefähr** die Frequenz bei 1.5 f_c des jeweiligen Grundwellentyps in Vielfachen von 100 MHz an.

z.B. R100 Rechteckform $b/a \approx 1/2$ $1.5 * f_c \approx 10\ GHz$

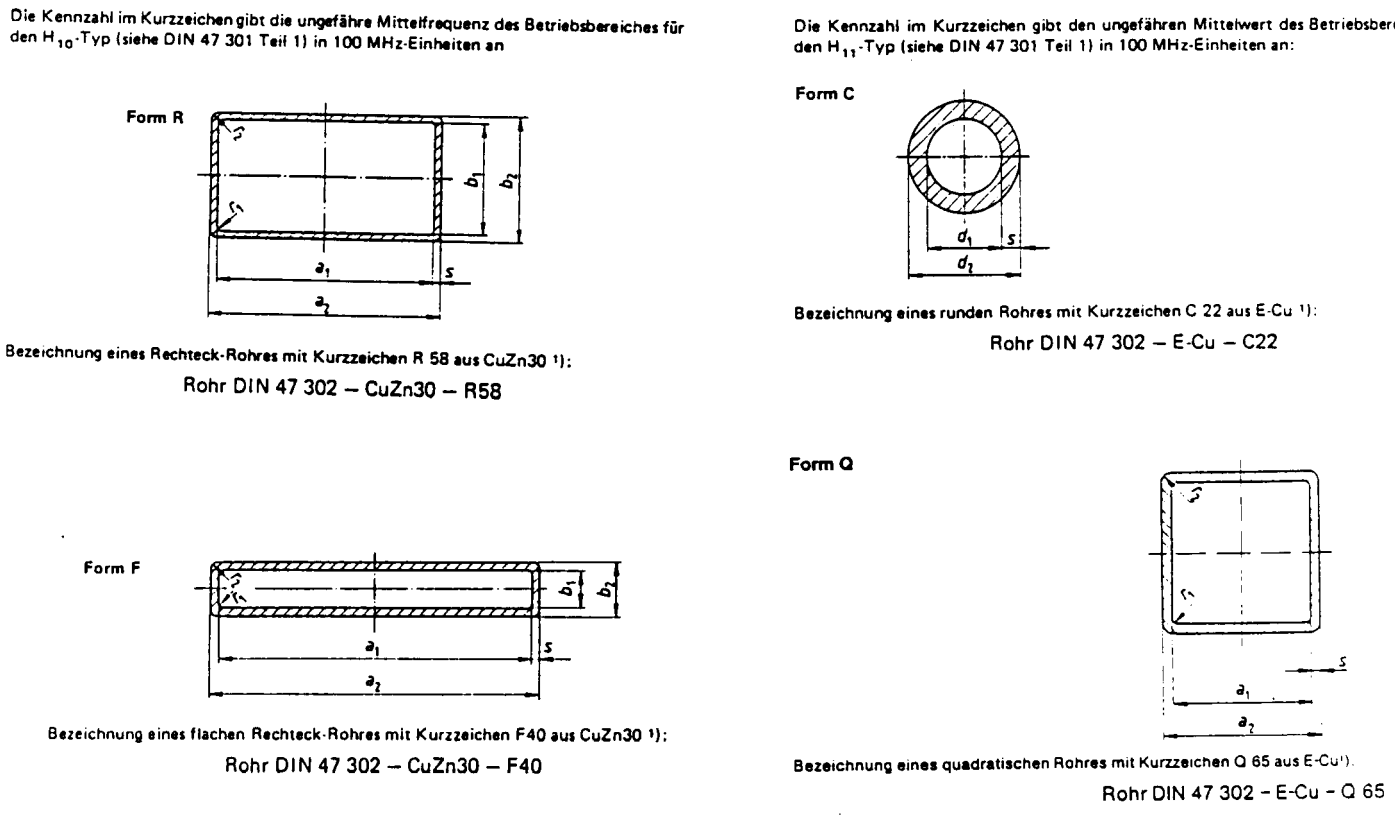


Abbildung 6.34: Normung der Hohlleiter nach DIN 47 302

Maße für Rechteckhohlleiter nach DIN 47 302 Teil 1

Hohlleiter Form R

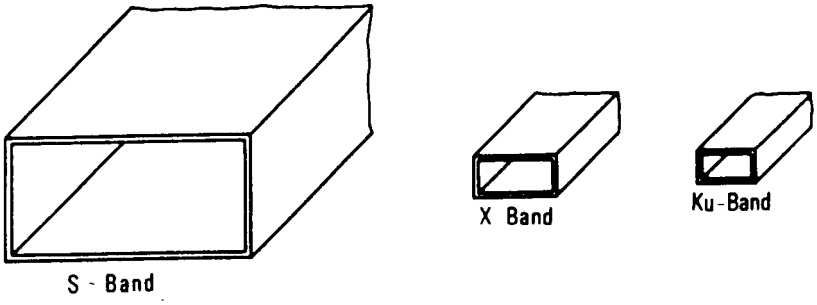
Maße in mm	a	b	a/b
R3	584.200	292.100	2.000
R4	533.400	266.700	2.000
R5	457.200	228.600	2.000
R6	381.000	190.500	2.000
R8	292.100	146.050	2.000
R9	247.650	123.820	2.000
R12	195.580	97.790	2.000
R14	165.100	82.550	2.000
R18	129.540	64.770	2.000
R22	109.220	54.610	2.000
R26	86.360	43.180	2.000
R32	72.140	34.040	2.119
R40	58.170	29.080	2.000
R48	47.549	22.149	2.147
R58	40.386	20.193	2.000
R70	34.849	15.799	2.206
R84	28.499	12.624	2.258
R100	22.860	10.160	2.250
R120	19.050	9.525	2.000
R140	15.799	7.899	2.000
R180	12.954	6.477	2.000
R220	10.668	4.318	2.471
R260	8.636	4.318	2.000
R320	7.112	3.556	2.000
R400	5.690	2.845	2.000
R500	4.775	2.388	2.000
R620	3.759	1.880	1.999
R740	3.099	1.549	2.000
R900	2.540	1.270	2.000
R1200	2.032	1.016	2.000
R1400	1.651	0.826	2.000
R1800	1.295	0.648	2.000
R2200	1.092	0.546	2.000
R2600	0.864	0.432	2.000

Hohlleiter Form F

Maße in mm	a	b	a/b
F22	109.220	13.100	8.337
F26	86.360	10.400	8.304
F32	72.140	8.600	8.388
F40	58.170	7.000	8.310
F48	47.550	5.700	8.342
F58	40.390	5.000	8.078
F70	34.850	5.000	6.970
F84	28.499	5.000	5.700
F100	22.860	5.000	4.572

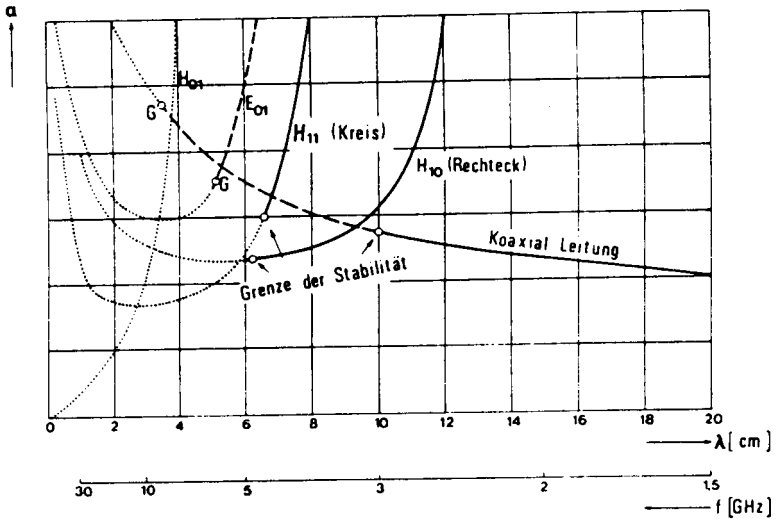
Zusammenfassend die wesentlichen Vor- und Nachteile von Hohlleitern:

- Vorteile :
  - dämpfungsarme Übertragung von Mikrowellen
  - Übertragung hoher Leistungen
  - hohe Güten (z.B. Filter) auch für hohe Leistungen
- Nachteile :
  - Schaltungen besitzen komplizierte Strukturen mit sehr engen Toleranzen, dies bedeutet teure Herstellung und somit für Massenproduktion bedingt geeignet.



Kenndaten fur Rechteckhohlleiter

	L-Band	S-Band	X-Band	P-Band
Abmessung (in mm)	165,1 x 82,55	72,14 x 34,04	22,88 x 10,13	15,79 x 7,89
Frequenzbereich	1,14 – 1,73	2,6 – 3,95	8,2 – 12,5	11,9 – 18 GHz
f_{krit}	0,908 GHz	2,08 GHz	6,56 GHz	9,49 GHz
HL–Typ (n. IEC)	R 14	R 32	R 100	R 140
(n. Brit. Standard)	WG 6	WG 10	WG 16	WG 18
Dämpfung in dB/100 m	0,5	1,9	11	17,6
CW-Leistung bei E_y = 15 kV/m	15 MW	2,7 MW	0,25 MW	0,14 MW



29.08.98 .pcx extension dazu wegen ps pdf

Abbildung 6.35: einige Daten von Hohlleitern aus Quelle:[14] S.11

Tabelle 2. Buchstabenbezeichnung der Frequenzbereiche, Frequenzangaben in GHz

Bandbezeichnung		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Radarfrequenzbereiche	von			4		60						18
	bis			8		90						27
Rechteckhohlleiter	von			4	110	60	90	140				18
	bis			6	170	90	140	220				26,5
US-Firmen	von							3,95			5,85	18
	bis							5,85			8,2	26,5
Elektronische Kampfführung (USA)	von	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	6	8	10	20
	bis	0,25	0,5	1	2	3	4	6	8	10	20	40
frühere Einteilung	von			3,9								10,9
	bis			6,2								36

Bandbezeichnung		Ka	Ku	L	M	P	Q	R	S	V	W	X
Radarfrequenzbereiche	von	27	12	1					2		80	8
	bis	40	18	2					4		110	12
Rechteckhohlleiter	von	26,5	12,4				33		2,6	50	75	8,2
	bis	40	18				50		4	75	110	12,4
US-Firmen	von					12,4		26,5	2,6			8,2
	bis					18		40	3,95			12,4
Elektronische Kampfführung (USA)	von			40	60							
	bis			60	100							
frühere Einteilung	von	26	12,4	0,39		0,225	36		1,55	46	56	5,2
	bis	40	18	1,55		0,39	46		5,20	56	100	10,9

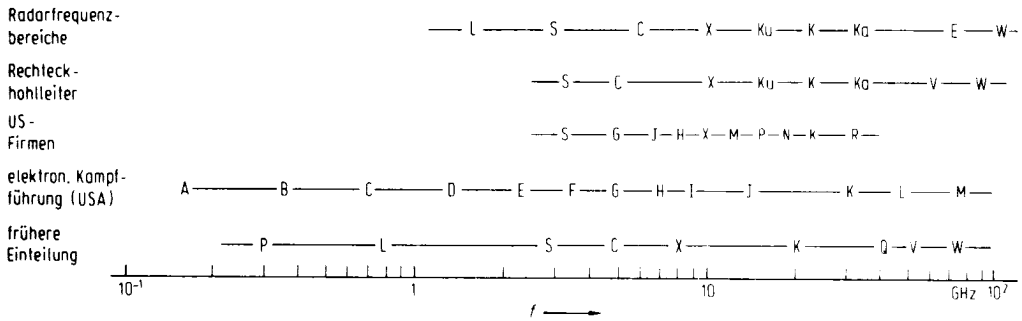
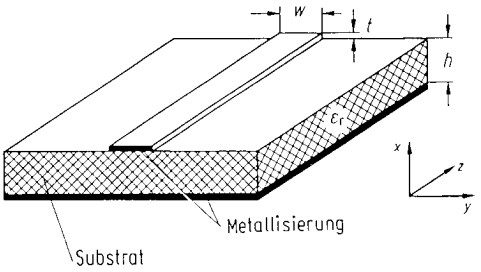


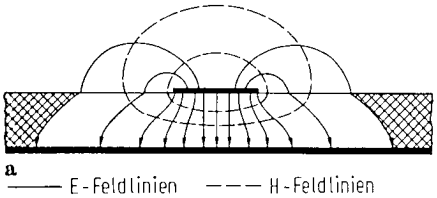
Bild 1. Bezeichnung der Frequenzbereiche mit Buchstaben, Frequenzangaben in Tab. 2

Abbildung 6.36: Bezeichnung und Frequenzbereiche im Radarbereich Quelle:[3] A5,A6

6.3 Streifenleiter

Streifenleiter sind leitende Streifen auf dielektrischem Substrat über einer metallischen Grundplatte. Sie werden deshalb auch als planare Wellenleiter bezeichnet.





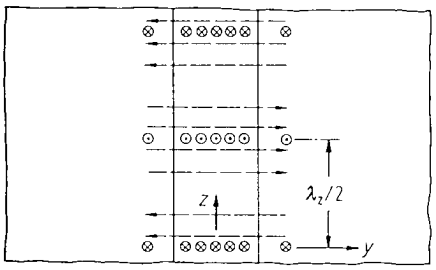


Bild 4. Näherungsweiser Feldlinienverlauf der Mikrostreifenleitung

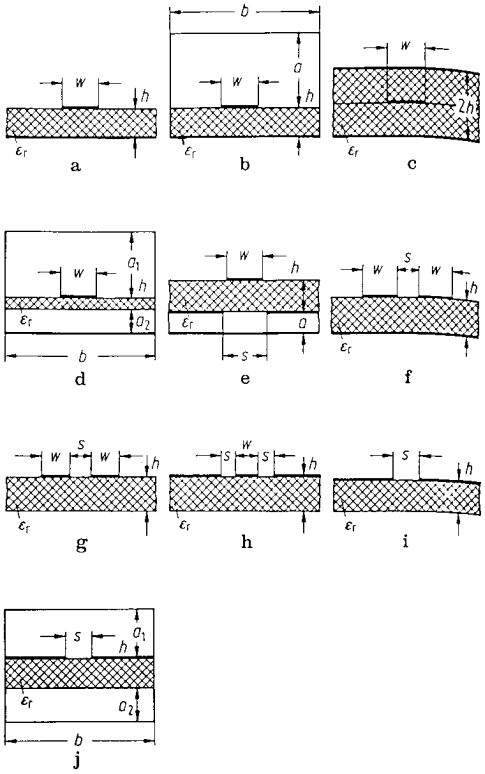


Bild 2. Planare Mikrowellenleitungen. **a** Mikrostreifenleitung; **b** geschirmte Mikrostreifenleitung; **c** „Triplate"-Leitung; **d** „Suspended-Substrate"-Leitung; **e** Mikrostreifenleitung mit Masseschlitz; **f** gekoppelte Mikrostreifenleitungen; **g** koplanare Streifenleitung; **h** Koplanarleitung; **i** Schlitzleitung; **j** geschirmte Schlitzleitung bzw. Fin-Leitung

Abbildung 6.37: Mikrostrip Quelle:[3] K-7,8

- Probleme
  - Abstrahlung wegen offener Struktur
  - Einkopplung von Störsignalen
- Vorteil
  - Einfache Herstellung
- Verwendung
  - MIC (integrierte Mikrowellenschaltungen)
  - Vorzüge dabei
    - günstige Verwendung moderner Halbleiterbauelemente
    - Gewichtsreduzierung, Platzersparnis
    - einfache Herstellung komplizierter Strukturen
    - gute Reproduzierbarkeit

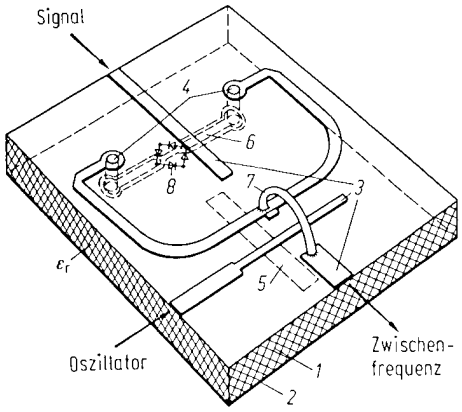


Bild 3. Integrierte Mikrowellenschaltung – Doppel-Gegentaktmischer, nach [8] mit: *1* dielektrisches Substrat, *2* Masse-Metallisierung, *3* Mikrostreifenleitung, *4* Durchkontaktierung, *5* Schlitzleitung, *6* Koplanarleitung, *7* Drahtbügel, *8* Diodenquartett

Abbildung 6.38: MIC Quelle:[3]

- Herstellung
  - bei keramischen Trägermaterial ($\varepsilon_r \approx 10$) mit Dickschicht– oder Dünnfilmtechnik
  - bei Kunststoffsubstrat ($\varepsilon_r \approx 3$) mittels Photoätztechnik

Für die Berechnung der Streifenleiter gibt es noch keine geschlossene feldtheoretische Lösung. Zur Dimensionierung benutzt man empirisch gefundene numerische Lösungsverfahren. Als Eingabeparameter brauchen diese Formeln meistens die Geometrieparameter w,h,t, sowie ε_r

Beispiel für solch einen Formelsatz (vereinfachte Ausführung):

Leitungswellenwiderstand eines Streifenleiters $Z_L = \dfrac{Z_{L1}}{\sqrt{\varepsilon_{reff}}}$ mit

$$\varepsilon_{reff} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 * \frac{h}{w}}}$$

Z_{L1} abhängig von w/h :

$$\text{w/h} < 1: \qquad Z_{L1} = 60\ \Omega\ * \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right)$$

$$\text{w/h} > 1: \qquad Z_{L1} = \frac{120\ *\ \pi\ \Omega}{\frac{w}{h} + 2.42 - 0.44\ * \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

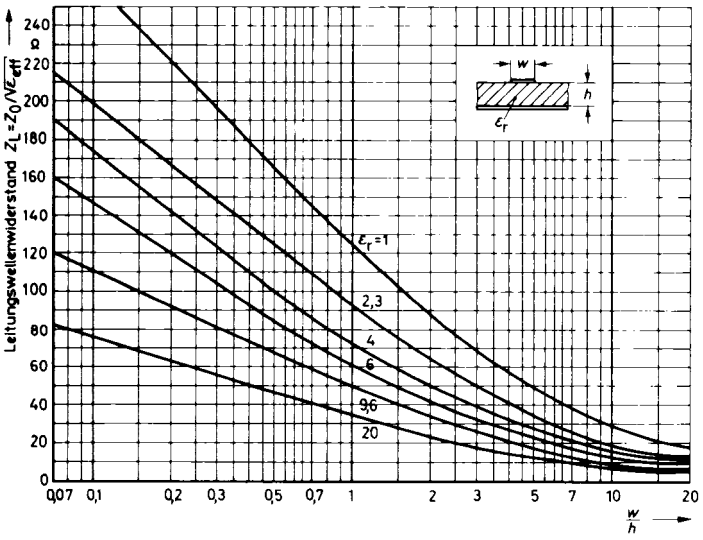


Abbildung 6.39: Leitungswellenwiderstand Quelle:[15] S.153

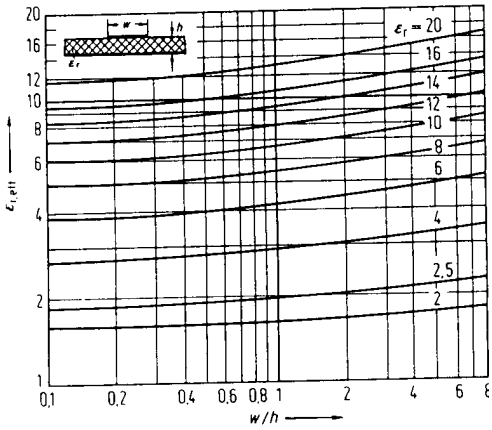


Bild 5. Effektive Permittivitätszahl $\varepsilon_{r,eff}$ der Mikrostreifenleitung in Abhängigkeit von w/h mit ε_r als Parameter Berechnungsverfahren nach [22, 24]

Abbildung 6.40: e_{reff} Quelle:[3] K9

- Nachteile
  - wesentlich höhere Verluste als Hohlleiter, geringere Güten bei Leitungsbauelementen
  - hohe Leistungen nicht übertragbar

- Dämpfungsbeiträge
  - dielektrische Verluste, also tan δ
  - Abstrahlungsverluste wegen offener Struktur
  - ohmsche Verluste wegen Skineffekt

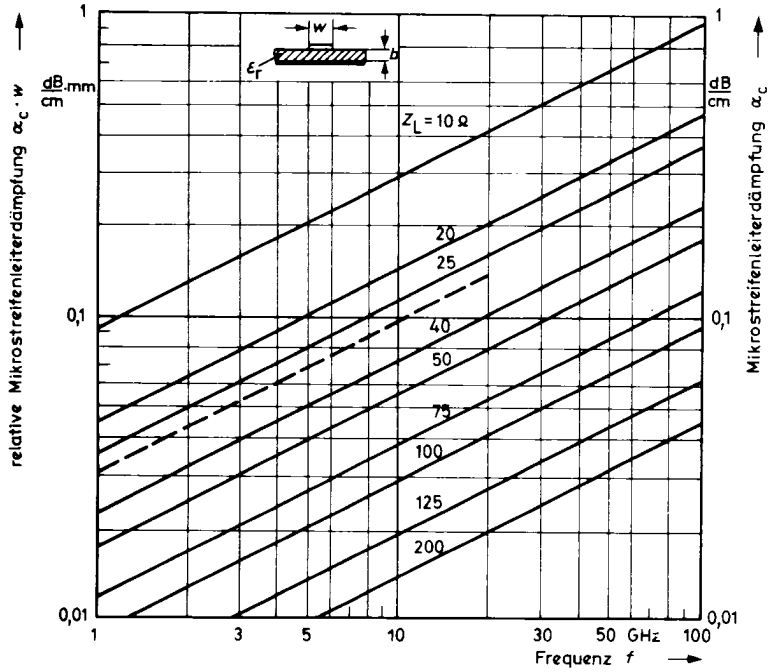


Abbildung 6.41: Dämpfung Streifenleiter Quelle:[15] S.159

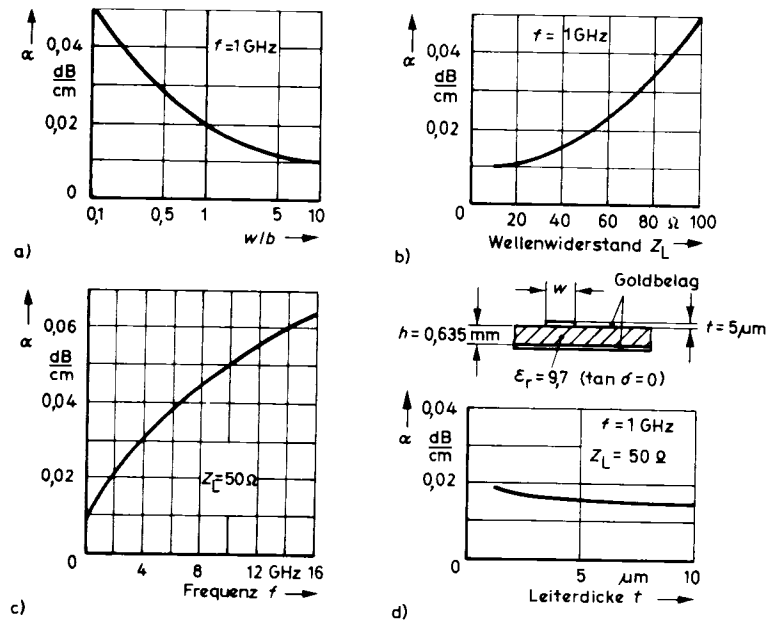


Abbildung 6.42: Dämpfungsabhängigkeiten Quelle:[15] S.160

6.4 Lichtwellenleiter (LWL)

Art : Dielektrischer Wellenleiter

Grundprinzip : Wellenausbreitung durch Totalreflexion/Brechung an Grenzflächen zu optisch dünneren Medien

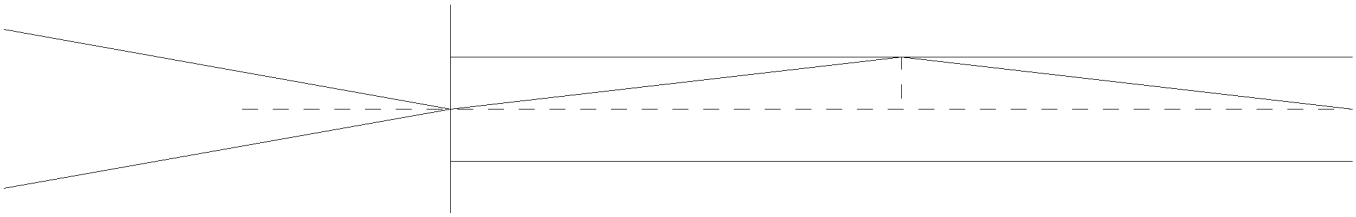


Abbildung 6.43: Ableitung strahlenoptische Beschreibung des LWL

$$\text{Totalreflexion :} \qquad \frac{\sin\alpha_g}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Wellenausbreitung für $\alpha > \alpha_g$, damit Einkoppelbedingung für Stirnfläche festgelegt

$$\frac{\sin\gamma_g}{\sin(90° - \alpha_g)} = \frac{n_1}{n_3}$$

$$\sin\gamma_g = \frac{n_1}{n_3}\cos\alpha_g = \frac{n_1}{n_3}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{1}{n_3}\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}$$

$\sin\gamma_g$ = A_N : numerische Apertur $\qquad$ γ_g : Akzeptanzwinkel

Zahlenbeispiel für realisierte Systeme :

$n_1 = 1.527 \qquad n_2 = 1.517$

$\alpha_g =$ $\qquad A_N =$ $\qquad \gamma_g =$

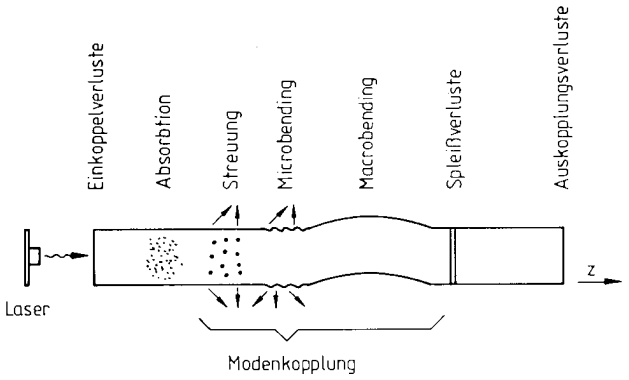


Bild 8. Der Weg der Lichtstrahlung durch die Faser und die Arten der Dämpfung

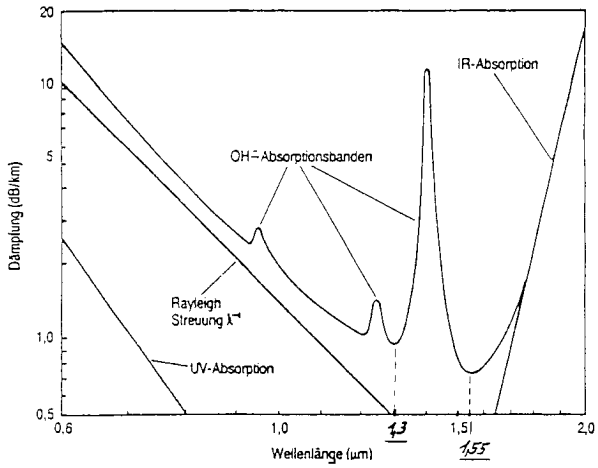


Abbildung 6.44: Dämpfung beim LWL Quelle:[4] S.106 Quelle:[5] S.12

Trägt man die Dämpfung einer Lichtleitfaser über der Wellenlänge auf, so ergeben sich optische Bereiche in denen die Dämpfung minimal wird. Diese Bereiche nennt man auch optische Fenster. Sie liegen bei ca. 850 nm, 1.300 μm , 1.550 μm.

Die theoretischen Dämpfungswerte liegen bei 0.28 $\frac{\text{dB}}{\text{km}}$ für 1300 nm und 0.14 $\frac{\text{dB}}{\text{km}}$ für 1550 nm.

Dämpfungsfaktoren beim LWL

1. Streuung
   a) Materialfehler (Blasen, Inhomogenitäten, *u.a.*) sog.Mie – Streuung
   b) amorphe Struktur (SiO_2) $\Rightarrow$ Rayleigh – Streuung, theoretische Grenze der Dämpfung $\sim \lambda^{-4}$
2. Absorption
   a) Eigenabsorption (intrinsische) UV – und IR – Absorption
   b) Absorption durch Verunreinigungen
3. Biegeverluste
   a) Microbending
      kleine Faserbiegungen aufgrund Welligkeiten und Oberflächenstörungen des äußeren Mantels
   b) Macrobending
      Faserbiegung führt zur Modenkonversion

Dispersion

Dispersion ist Streuung der Signallaufzeit im LWL, das bedeutet, daß ein Impuls immer breiter wird, also auseinanderfließt (dispergiert).

Diese Impulsverbreiterung eines Rechteckimpulses kann man messen und in Bezug zur überbrückten Länge setzen.

$$D = \frac{(t_{\text{rise}} + t_{\text{fall}})_{\text{Ausgang}} - (t_{\text{rise}} + t_{\text{fall}})_{\text{Eingang}}}{2 * \ell} \qquad \left[\frac{\text{ps}}{\text{km}}\right]$$

Um ein Maß für die Impulsfolgefrequenz zu erhalten, mit der man die Impulse übertragen kann, ohne daß sie ineinander verfließen definiert man das Bandbreitelängenprodukt:

$$B * \ell = \frac{0.35}{D} \qquad [\ \text{GHz} * \text{km}\ ]$$

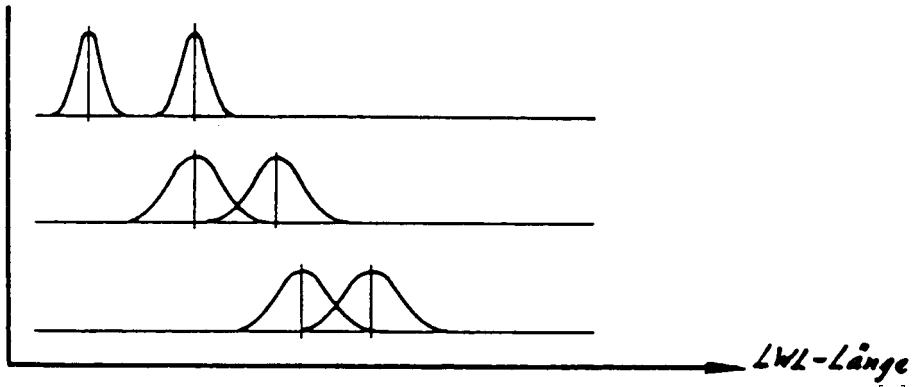


Abbildung 6.45: Dispersion Quelle:[5] S.4

Für gaußförmige Impulse ergibt sich eine effektive Impulsverbreiterung pro überbrückte Länge.

$$D = \frac{\sqrt{(\text{Pulsbreite Ausgang})^2 - (\text{Pulsbreite Eingang})^2}}{\ell} \qquad \left[\frac{\text{ps}}{\text{km}}\right]$$

Damit errechnet sich ein Bandbreitelängenprodukt zu:

$$B * \ell = \frac{0.44}{D}$$

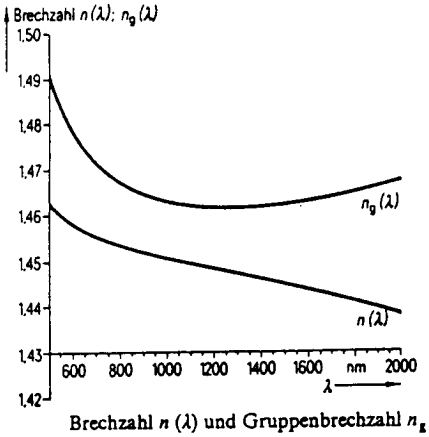
Dispersionsfaktoren beim LWL

a) Materialdispersion

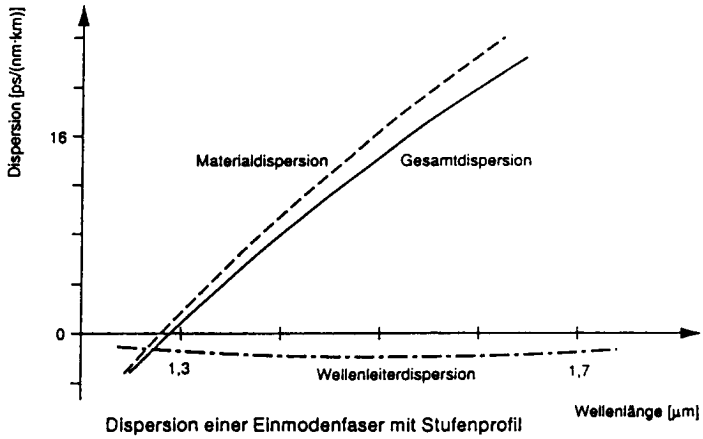
Brechzahl n ist Funktion der Wellenlänge, damit ergeben sich unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten bei verschiedenen Wellenlängen. Die Gruppenbrechzahl $n_g = n - \lambda * \frac{dn}{d\lambda}$ hat bei 1.3 μm ein Minimum.

Nach DIN VDE 0888 läßt sich die Materialdispersion berechnen zu

$$M(\lambda) = \frac{\lambda}{c} * \left(\frac{d^2 n}{d\lambda^2}\right) \qquad \left[\frac{\text{ps}}{\text{nm} * \text{km}}\right]$$



Brechzahl n (λ) und Gruppenbrechzahl n_g (λ) (100% SiO_2)



Dispersion einer Einmodenfaser mit Stufenprofil

Abbildung 6.46: Dispersionsfaktoren Quelle:[6] S.23 Quelle:[7] S.10

b) Wellenleiterdispersion

Abhängigkeit der Laufzeit eines Modes von den Abmessungen des LWL und der Wellenlänge (wie beim Hohlleiter)

$$T_{wd} \approx -\frac{\lambda}{4 * \pi^2 * n_2 * c * a^2}$$

a : Radius LWL $\qquad$ n_2 : Kernbrechzahl

c) Modendispersion

Durch Modenwandlung unterschiedliche Laufzeiten, nicht berechenbar.

Beim LWL gibt es im Gegensatz zu anderen Wellenleitern **zwei begrenzende** Faktoren für die Übertragungsbandbreite.

- Dämpfung
- Dispersion ($B * \ell \approx 100$ MHz $*$ km .... 20 GHz $*$ km)

LWL-Faserarten und Betriebsarten

- Stufenprofilfaser für Multimodebetrieb

  Vorteil: großer Kerndurchmesser, damit leichtes Einkoppeln

  Nachteil: viele Moden möglich, deshalb Modendispersion Haupteinfluß

- Gradientenprofilfaser für Multimodebetrieb

  Vorteil: relativ großer Kerndurchmesser, leichtes Einkoppeln

  Nachteil: immer noch Modendispersion, aber durch Gradientenprofil ausgeglichenere Modenlaufzeiten, deshalb besseres $B * \ell$ als Stufenprofil

- Stufenprofilfaser für Monomodebetrieb

  Vorteil: keine Modendispersion

  Nachteil: kleiner Kerndurchmesser ist problematisch beim Einkoppeln, Spleißen.

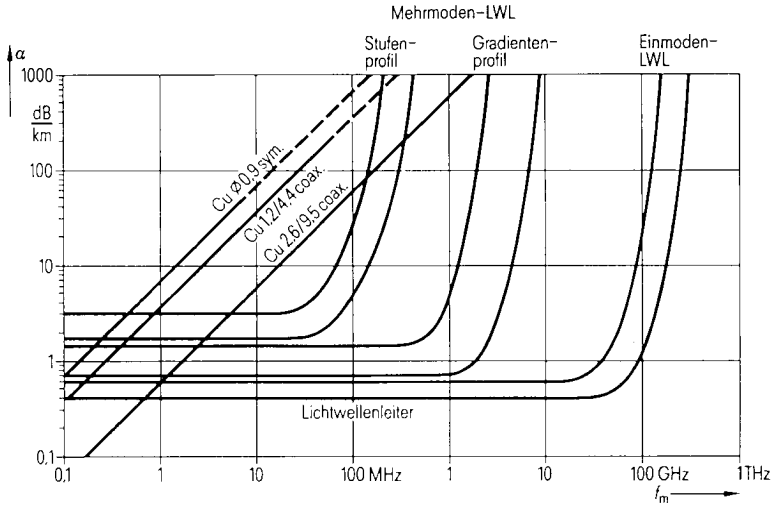


Bild 9.12
Dämpfungskoeffizient als Funktion der Modulationsfrequenz für symmetrische und koaxiale Kupferkabel sowie verschiedene LWL-Kabel

Abbildung 6.47: Dämpfungsvergleich LWL mit elektrischen Leitern Quelle:[6] S.133

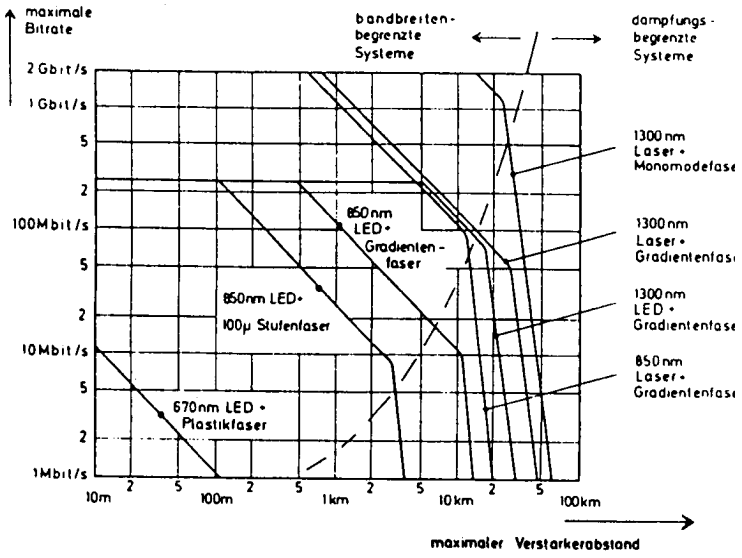


Abbildung 6.48: Dämpfung und Dispersion Quelle:[8]

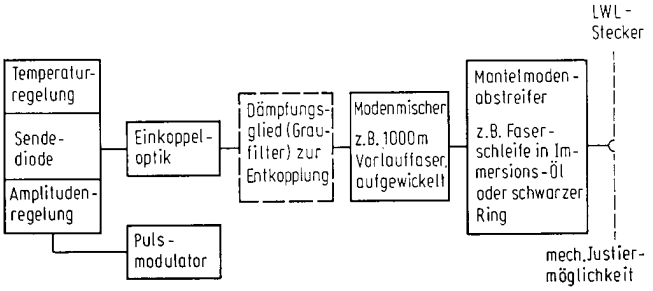


Bild 6. Signalquelle für Messungen an Gradientenfasern

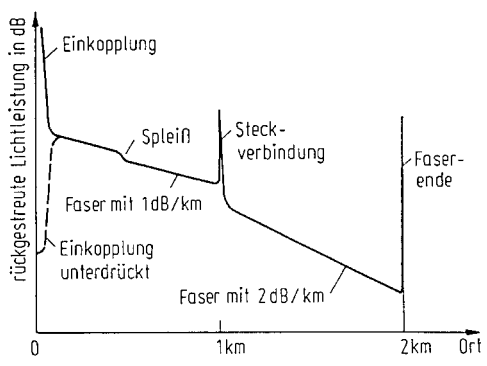


Bild 7. Rückstreudiagramm mit typischen Werten

Abbildung 6.49: Messungen mit LWL Quelle:[3]

Profile und Moden

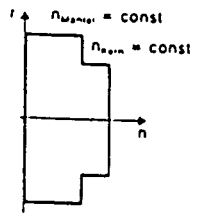
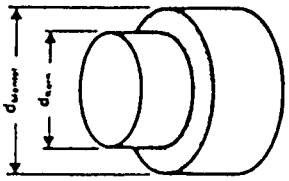
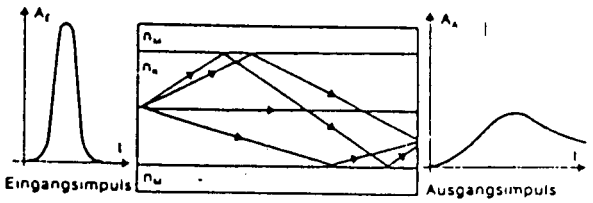
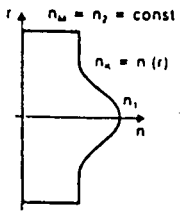
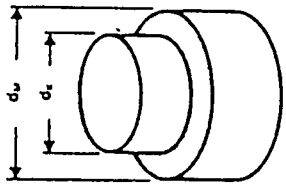
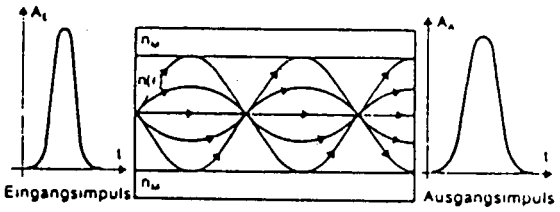
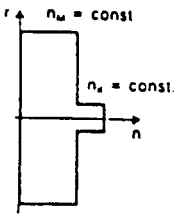
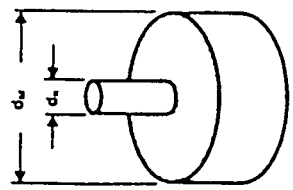
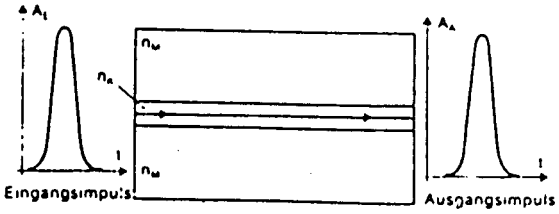
Profil des Brechungsindex	Geometrischer Aufbau	Wellenausbreitung (Moden)
		
Stufenindex-Profil Typische Werte: $n_M = 1{,}517$ $n_K = 1{,}527$	Kerndurchmesser: d_K { 100 µm; 200 µm; 400 µm } Manteldurchmesser: d_M { 200 µm; 300 µm; 500 µm }	**Multimode-Lichtwellenleiter** Charakteristika: Große Laufzeitunterschiede der Lichtstrahlen ⇝ Starke Impulsverbreiterung Bandbreite – Reichweite – Produkt $B \cdot l < 100$ MHz · km
		
Gradientenindex-Profil $n(r) = n_1 \left[1 - \frac{n_1 - n_2}{n_1} \left(\frac{2r}{d_M}\right)^2\right]$ Typische Werte: $n_2 = 1{,}54$ $n_1 = 1{,}562$	Kerndurchmesser: typ. $d_K = 50$ µm Manteldurchmesser: typ. $d_M = 125$ µm	**Multimode-Lichtwellenleiter** Charakteristika: Geringe Laufzeitunterschiede der Lichtstrahlen ⇝ Geringe Impulsverbreiterung $B \cdot l \approx 1$ GHz · km
		
Stufenindex-Profil Typische Werte: $n_M = 1{,}457$ $n_K = 1{,}471$	Kerndurchmesser: typ. $d_K = 5$ µm Manteldurchmesser: typ. $d_M = 100$ µm	**Monomode-Lichtwellenleiter** Charakteristika: Keine Laufzeitunterschiede, da nur eine Ausbreitungsrichtung ⇝ Formtreue Impulsübertragung $B \cdot l > 10$ GHz · km

Abbildung 6.50: Zusammenstellung zu Profilen und Moden Quelle:[8]

1. Worin unterscheiden sich E_{mn}– und H_{mn}–Wellen im Hohlleiter ?

2. In einem Rechteckhohlleiter der Größe 3 cm x 1 cm soll eine H_{41}–Welle angeregt werden.
   Ab welcher Frequenz ist dies möglich und welche anderen Moden können dann auch vorkommen?

3. Was versteht man unter Eindeutigkeitsbereich für einen Hohlleiter und wie groß ist dieser?

4. Berechnen Sie die max. Impulsspitzenleistung für die Hohlleiter R3 und R2600. Geben Sie die Normbedingungen an.

5. Welche Dämpfung ergibt sich für R3, R2600, R22 und F22 bei der Mittenfrequenz der Hohlleiter?
   Welchen Einfluß hätte eine Beschichtung mit Gold und wieviel Gold bräuchte man?

6. Kann in einem Hohlleiter ein Wellentyp unterhalb seiner Grenzfrequenz angeregt werden und kann in einem Hohlleiter unterhalb seiner tiefsten Grenzfrequenz Energie übertragen werden?

7. Betrachtet wird ein Rechteckhohlleiter mit verschiedenen Seitenverhältnissen, aber konstanter Seite $a = 5$ cm. Wie groß sind die Grenzfrequenzen der H_{10}, H_{20}, H_{01}, wenn man verschiedene Seitenverhältnisse von a/b = 1, 2, 4, 6, 8 betrachtet?
   Ist der Eindeutigkeitsbereich des Rechteckhohlleiters eine Funktion des Seitenverhältnisses?

8. Dimensionieren Sie die Lüftungsschächte für eine EMV-Kabine so, daß bei einer Frequenz von 100 MHz eine Schirmdämpfung von 60 dB erreicht wird.

9. Ein Hohlleiter R100 wird ab einer bestimmten Stelle mit Dielektrikum gefüllt ($\varepsilon_r = 2.25$) und bei 10 GHz betrieben.
   Berechnen Sie die Hohlleiterwellenlänge für die Betriebsfrequenz des Hohlleiters im luftgefüllten und im mit Dielektrikum gefüllten Teil des Hohlleiters, außerdem die Grenzfrequenzen der ersten 3 ausbreitungsfähigen Moden für jeden Bereich.
   Wie groß sind die Feldwellenwiderstände im jeweiligen Bereich für Betriebsfrequenz des Hohlleiters?
   Wie groß ist der Reflexionsfaktor an der Trennschicht Luft zu Dielektrikum?
   Bestimmen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für beide Bereiche.

10. In einen Rechteckholleiter soll ein Schlitz eingefräst werden, durch den eine Sonde ins Hohlleiterinnere eingebracht werden soll.
    Wo ist das günstigerweise vorzunehmen und warum?

11. Wie werden in Hohlleitern spezielle Moden angeregt?

12. Was bedeutet ein ε_{reff} bei der Mikrostreifenleitung ?

13. Was bedeutet das Bandbreitelängenprodukt beim LWL ?

14. Das Koaxkabel RG-58 C/U ist bei $f = 100$ MHz mit einer Dämpfung von 0.17 dB/m spezifiziert.
    Wie groß ist die Dämpfung bei $f = 250$ MHz und $f = 1$ GHz

15. Wie groß ist der Reflexionsfaktor für ein VSWR von 1, 2, 3, 10 ?
    Wie groß ist jeweils die Reflexionsdämpfung a_r (return loss) ?

16. Zeichnen Sie die charakteristischen Feldlinienbilder für die H_{12}, E_{32}, E_{20}–Welle im Rechteckhohlleiter.

17. Berechnen Sie Mittenfrequenz, Eindeutigkeitsbereich und Betriebsfrequenzbereich für R3, R26, R100, R2600, F22, F100 ?

18. Nennen Sie die Haupteinflußfaktoren der Dämpfung beim Koaxialkabel ?

19. In welchem Bereich sind beim Streifenleiter Z_L realisierbar ?

20. Welche Arten von LWL unterscheidet man ? (Vor- und Nachteile ?)

21. Was ist beim LWL grundlegend anders, als bei den anderen Wellenleitern ?

22. Die Gesamtdispersion einer Glasfaser ist angegeben mit 1.3 $\frac{\text{ns}}{\text{km}}$ und die Dämpfung mit 0.2 $\frac{\text{dB}}{\text{km}}$. Geben Sie die nutzbare Bandbreite und die überbrückbare Entfernung bei einer zulässigen Gesamtdämpfung von 40 dB an.

23. Von welchen Parametern sind die Größen Z_L und ε_{reff} beim Streifenleiter abhängig ?

24. Ein Hohleiter mit den Abmessungen 16.8 cm x 8.9 cm wird bei seiner Mittenfrequenz $f = 1.5 * f_c$ betrieben. Skizzieren Sie **quantitativ** den Verlauf aller Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung für Breitseitehalbe und Breitseitezehntel. Skalieren Sie die Amplitudenachse jeweils auf das Maximum der jeweiligen Feldstärke. In Ausbreitungsrichtung genügt eine Skalierung von 2 Wellenlängen. Bestimmen Sie den Eindeutigkeits– und Betriebsfrequenzbereich.

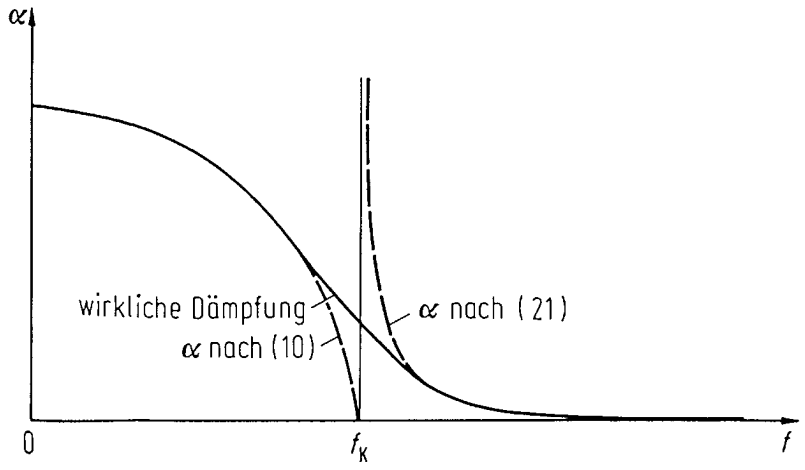


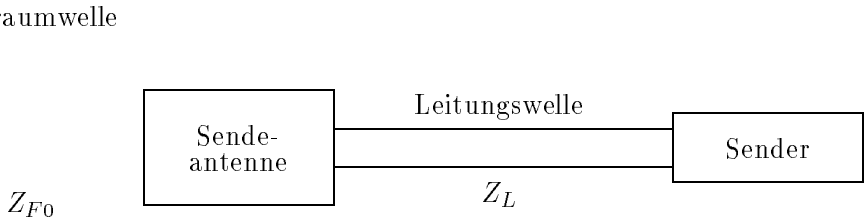
Bild 7. Hohlleiterdämpfung

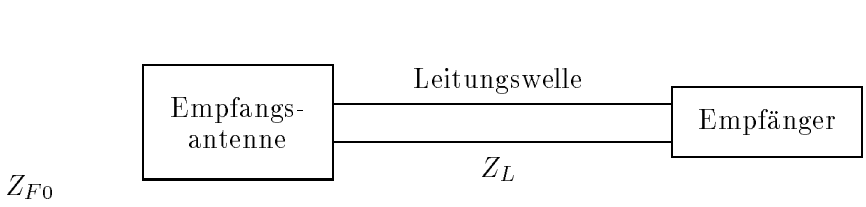
Abbildung 6.51: Quelle: [3]

Kapitel 7

Wellentypwandler — Antennen

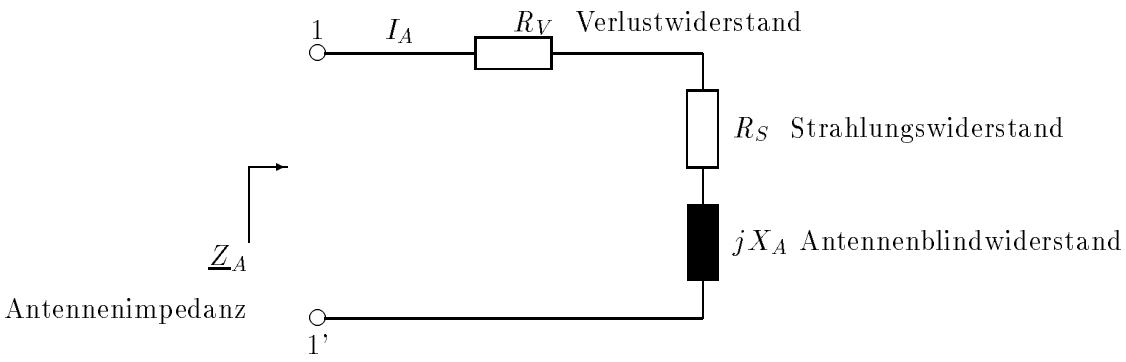
Aufgabe: Wandeln von Freiraumwelle in Leitungswelle und umgekehrt.





Passive Antennen sind **reziprok**, das bedeutet gleiches Verhalten im Sende– und Empfangsfall.

Beschreibung der Antennen mit einem **allgemeinen Antennenersatzschaltbild**



abgestrahlte Leistung: $P_s = \frac{1}{2} * I_a^2 * R_s$

Verlustleistung: $P_v = \frac{1}{2} * I_a^2 * R_v$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{P_s}{P_s + P_v} = \frac{R_s}{R_s + R_v}$

7.1 Hertzscher Dipol – Elementardipol

Gedankenexperiment

a) 2 ungleichnamige Punktladungen im Abstand ℓ erzeugen ein statisches elektrisches Feld, das in Kugelkoordinaten beschrieben werden kann zu

$$E_r = \frac{q * \ell * \cos\vartheta}{2 * \pi * \varepsilon_0 * r^3}$$

$$E_\vartheta = \frac{q * \ell * \sin\vartheta}{4 * \pi * \varepsilon_0 * r^3}$$

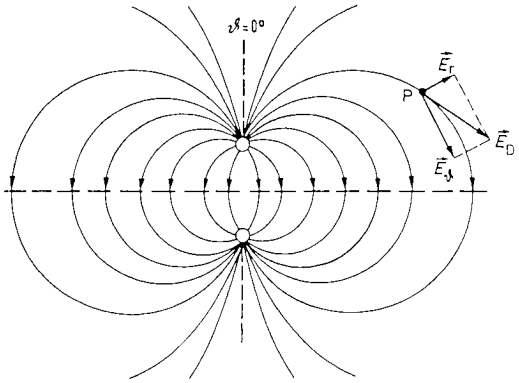


Abbildung 7.1: el.Feldlinien bei el.Dipol Quelle:[9] S.17

b) Lädt man die Ladungen um, so muß längs des Weges ℓ ein Strom I fließen. Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt um sich ein Magnetfeld.

$$H_\varphi = \frac{I * \ell * \sin\vartheta}{4 * \pi * r^2}$$

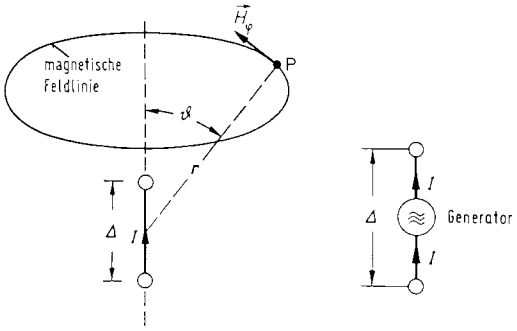


Abbildung 7.2: mag.Feldlinien bei el.Dipol Quelle:[9] S.18

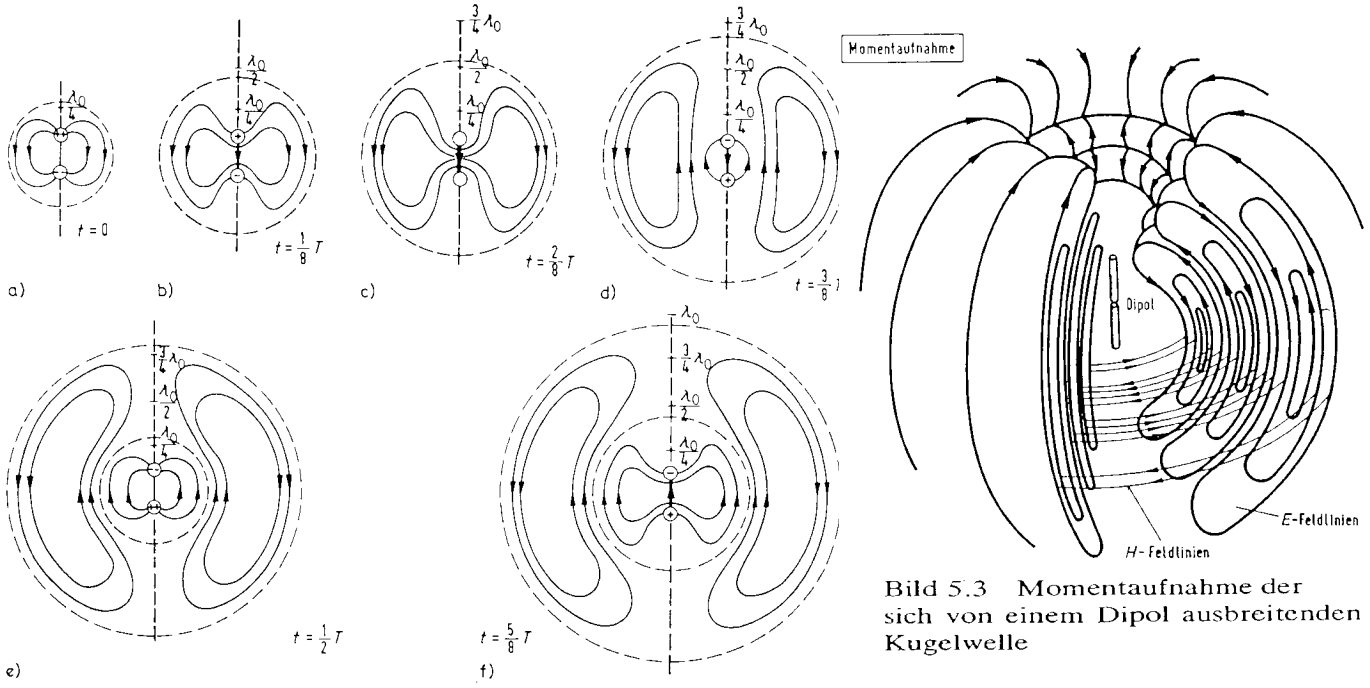


Bild 5.3 Momentaufnahme der sich von einem Dipol ausbreitenden Kugelwelle

Abbildung 7.3: Wellenabloesung Quellen: [9] [1]

Geschieht diese Umladung immer schneller, sind anschaulich ausgedrückt die Feldlinen zu *träge* und es kommt zum *Abschnüren* von Feldlinien und zur Ablösung der Felder, und somit zur Ausbreitung des Feldzustandes als elektromagnetische Welle.

Unter den Voraussetzungen **I = konstant längs ℓ** und **ℓ <<< λ** ergeben sich folgende Feldgleichungen des Hertzschen Dipols (Elementardipol)

$$E_r = \frac{I * \ell * \lambda}{4 * \pi^2 * \varepsilon_0 * c_0} * \frac{1}{r^3} * \cos\vartheta \left[\sin(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) + \tfrac{2\pi r}{\lambda} \cos(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) \right]$$

$$E_\vartheta = \frac{I * \ell * \lambda}{8 * \pi^2 * \varepsilon_0 * c_0} * \frac{1}{r^3} * \sin\vartheta \left[\sin(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) + \tfrac{2\pi r}{\lambda} \cos(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) - (\tfrac{2\pi r}{\lambda})^2 \sin(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) \right]$$

$$H_\varphi = \frac{I * \ell}{4 * \pi} * \frac{1}{r^2} * \sin\vartheta \left[\cos(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) - \tfrac{2\pi r}{\lambda} \sin(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}) \right]$$

Für die Diskussion dieser Gleichungen Fallunterscheidung.

1.) Nahfeld $r << \lambda$

Mit dieser Voraussetzung ergeben sich folgende vereinfachte Gleichungen.

$$E_r = \frac{I * \ell * \lambda}{4 * \pi^2 * \varepsilon_0 * c_0} * \frac{1}{r^3} * \cos\vartheta * \sin\left(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$$E_\vartheta = \frac{I * \ell * \lambda}{8 * \pi^2 * \varepsilon_0 * c_0} * \frac{1}{r^3} * \sin\vartheta * \sin\left(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$$H_\varphi = \frac{I * \ell}{4 * \pi} * \frac{1}{r^2} * \sin\vartheta * \cos\left(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

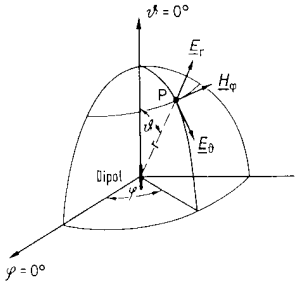


Abbildung 7.4: Feldvektoren Nahfeld Quelle:[9] S.20

Im Nahfeld sind die Hauptkomponenten von E und H um 90° phasenverschoben zueinander, damit ergibt sich im Nahfeld der Antenne überwiegend ein Blindleistungsfeld.

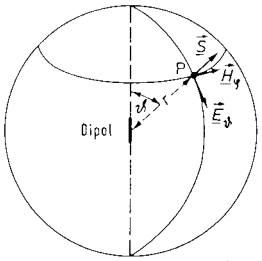
2.) Fernfeld $r >> \lambda$

Unter dieser Voraussetzung kann man in den ursprünglichen Gleichungen alle Glieder mit $1/r^3$ und $1/r^2$ vernachlässigen und es ergeben sich folgende Feldkomponenten.

$$E_r = 0$$

$$E_\vartheta = -\frac{I * \ell}{2 * \varepsilon_0 * c_0 * \lambda} * \frac{1}{r} * \sin\vartheta * \sin\left(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$$H_\varphi = -\frac{I * \ell}{2 * \lambda} * \frac{1}{r} * \sin\vartheta * \sin\left(\omega t - \tfrac{2\pi r}{\lambda}\right)$$



$\vec{S}$ = Strahlungsvektor senkrecht zu $\vec{E}_\vartheta$ und $\vec{H}_\varphi$. Er gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle an.

Bild 1.6 Feldvektoren einer Dipolwelle im Fernfeld

Abbildung 7.5: Feldvektoren Fernfeld Quelle:[9] S.29

E und H sind in Phase, damit ergibt sich für S eine resultierende Richtung S_r, also Abstrahlung der Energie radial nach außen (Kugelwellen).

7.2 Antennenkenngrößen

7.2.1 Richtcharakteristik

Die Richtcharakteristik ist die Richtungsabhängigkeit der von der Antenne erzeugten Feldstärke nach Amplitude, Phase und Polarisation in einem konstanten Abstand r. In der Praxis beschränkt man sich meistens auf das Fernfeld und die Amplitude $E(\varphi,\vartheta)$ oder $H(\varphi,\vartheta)$ (Empfangsfall $U(\varphi,\vartheta)$) bei einer bestimmten Polarisation. Üblicherweise wird auf die maximale Feldstärke normiert.

$$C(\varphi,\vartheta) = \frac{E(\varphi,\vartheta)}{E_{max}} = \frac{H(\varphi,\vartheta)}{H_{max}} = \frac{U(\varphi,\vartheta)}{U_{max}}$$

Die Richtcharakteristik ist, weil abhängig von φ und ϑ ein räumliches Gebilde. Deshalb trägt man die Amplitudenverhältnisse in **Richtdiagrammen** auf, die Schnitte durch die Richtcharakteristik darstellen. Bezeichnet werden diese Diagramme nach der Schnittebene Horizontal– bzw Vertikaldiagramme, oder besser nach den Feldkomponenten in diesen Schnittebenen als E–Ebenen bzw H–Ebenendiagramme.

Beispiel: Hertzscher Dipol senkrecht zur Erdoberfläche ausgerichtet

Im Fernfeld gilt für die Amplitude $\qquad H_\varphi = -\frac{I * \ell}{2 * \lambda} * \frac{1}{r} * \sin\vartheta$

maximale Amplitude $H_{\varphi max}$ für $\sin\vartheta = 1$ also $\vartheta = 90°$

In der Horizontalebene längs φ ergibt sich keine Abhängigkeit.

H–Ebenendiagramm

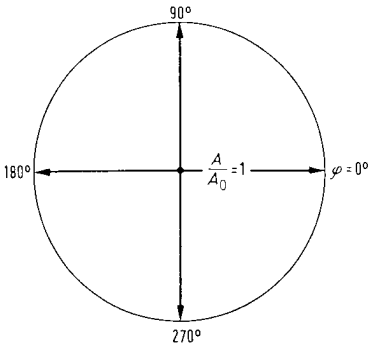


Abbildung 7.6: Horizontales Richtdiagramm Quelle:[9] S.44

In der Vertikalebene gilt $\qquad H_\varphi \sim \sin\vartheta$

Es ergibt sich folgendes E–Ebenendiagramm bzw Vertikaldiagramm des vertikalen Dipols.

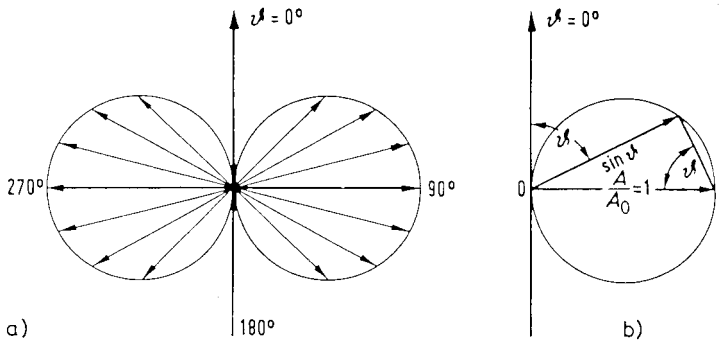


Abbildung 7.7: Vertikales Richtdiagramm Quelle:[9] S.44

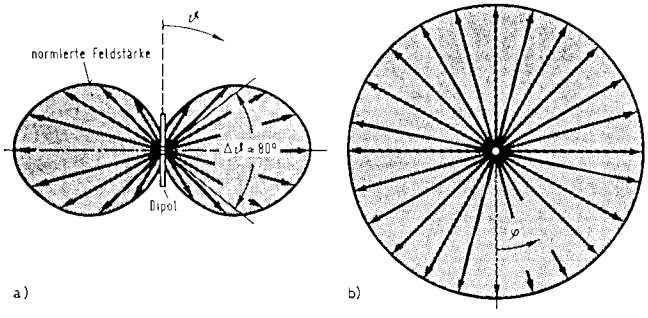


Bild 5.4 Vertikaldiagramm (a) und Horizontaldiagramm (b) eines sehr schlanken $\lambda/2$-Dipols

Abbildung 7.8: Richtdiagramme Quelle:[1]

Folgende Begriffe sind im Zusammenhang mit Richtdiagrammen von Bedeutung.

Hauptstrahlrichtung	Richtung für E_{max} bzw H_{max}.
Öffnungswinkel, Halbwertsbreite, 3dB-Breite	Winkelbereich, in dem die Feldstärke um nicht mehr als 3dB gegenüber der Maximalfeldstärke abgesunken ist.
Nebenkeulendämpfung, Nebenzipfeldämpfung	Verhältnis von Nebenkeulenmaximum zu Hauptkeulenmaximum in dB.
Nullstellen	Winkel, bei denen die Feldstärke Null ist.
Vor–Rück–Verhältnis Rückdämpfung	Nebenkeulendämpfung im Halbraum entgegengesetzt zur Hauptstrahlrichtung.

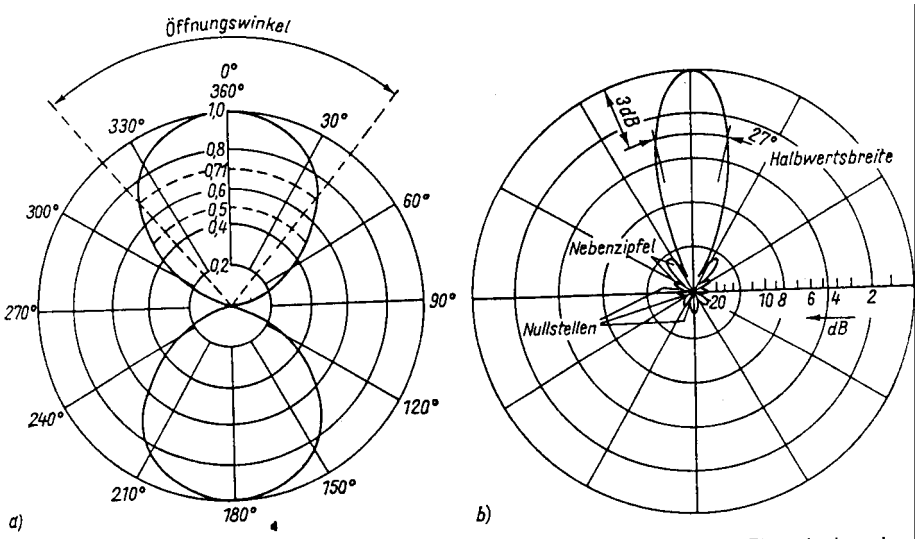


Bild 3.8 Horizontaldiagramme; a– normiertes Horizontaldiagramm eines Halbwellendipols (E-Ebene, horizontale Öffnungswinkel 80°), b – Horizontaldiagramm einer Lang-*Yagi*-Antenne (E-Ebene, horizontaler Öffnungswinkel 27°)

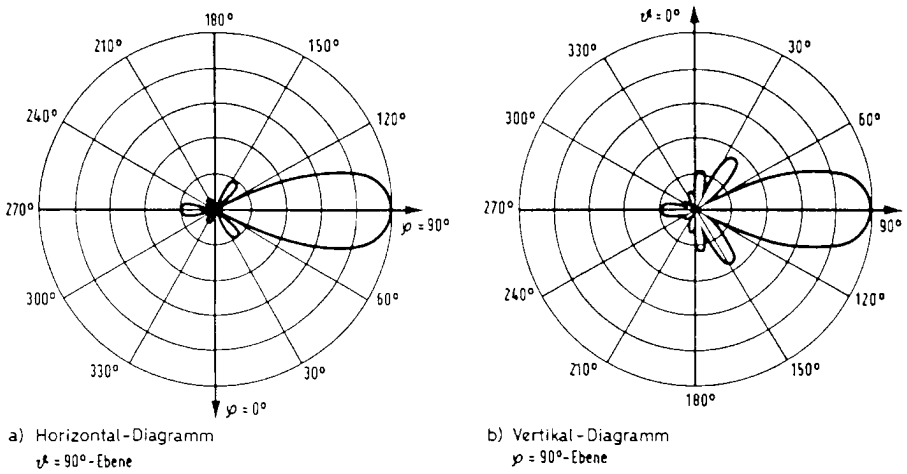


Abbildung 7.9: Darstellungsarten von Richtdiagrammen

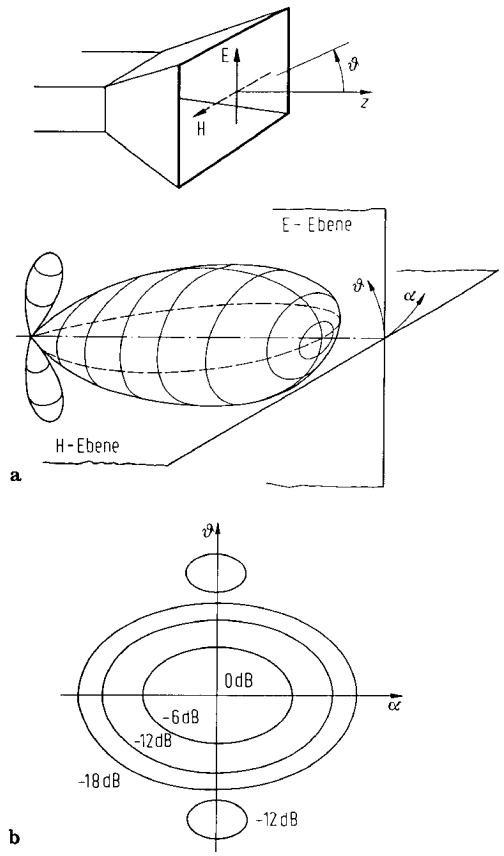


Bild 2. Richtdiagramm. **a** räumliche Darstellung und Definition der E- und H-Ebene; **b** Höhenliniendarstellung

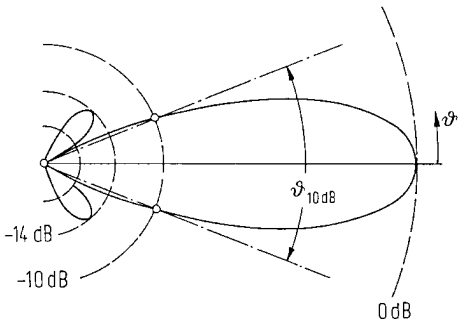


Bild 3. Keulenbreite und Nebenkeulendämpfung

Abbildung 7.10: Darstellung von Richtdiagrammen Quelle:[3]

7.2.2 Strahlungswiderstand

Rechengröße R_s : Ersatzwiderstand, der die abgestrahlte Wirkleistung verbrauchen würde.

$$R_s = \frac{2 * P_s}{I^2}$$

für den Elementardipol ergibt sich :

$$P_s = \int S * \text{Kugeloberfläche} \quad \text{mit } S = \frac{1}{2}(E \times H) = \frac{1}{2} * H^2 * Z_{F0}$$

$$P_s = \frac{1}{2} * 120\pi\Omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{I * \ell}{2 * \lambda} * \frac{1}{r} * \sin\vartheta\right)^2 ds_\varphi \, ds_\vartheta \text{ mit } ds_\varphi = r\sin\vartheta d\varphi \text{ und } ds_\vartheta = r d\vartheta$$

$$P_s = \frac{1}{2} * \frac{120\pi * I^2 * \ell^2}{4 * \lambda^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{1}{2} * 80\pi^2\Omega * I^2 * \left[\frac{\ell}{\lambda}\right]^2$$

damit

$$R_s = 80\pi^2\Omega * \left[\frac{\ell}{\lambda}\right]^2$$

Für ein $\ell/\lambda = 1/100$ ergibt sich ein $R_s = 0.08\ \Omega$
Dies bedeutet, daß der Elementardipol ein sehr schlechter Strahler ist, weil der Verlustwiderstand R_v auch schon bei geringen Verlusten in die gleiche Größenordnung kommt.

R_v ist abhängig von
- Oberflächenwiderstand des Antennenleiters (Skineffekt)
- Dielektrische Verluste in den Isolatoren
- Verluste durch Erdströme ($\kappa < \infty$)

7.2.3 Richtfaktor D (= Directivity)

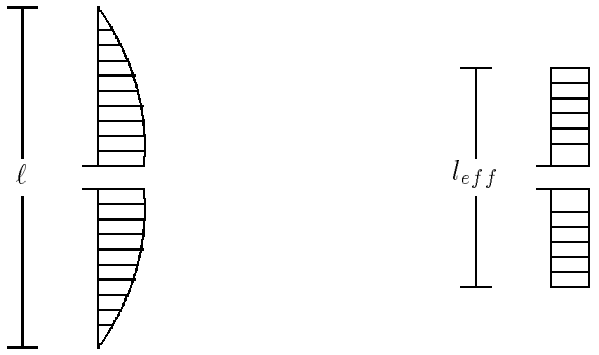
$$D = \frac{\text{maximale Strahlungsdichte}}{\text{mittlere Strahlungsdichte}} = \frac{S_{max}}{S_{mittel}}$$

$$\begin{aligned} \text{HD} : S_{max} &= \frac{1}{2} * H^2 * Z_{F0} = \frac{1}{2} * 120\pi\Omega \left[\frac{I * \ell}{2 * \lambda}\right]^2 * \frac{1}{r^2} = \frac{15\pi}{r^2} * \left[\frac{I * \ell}{\lambda}\right]^2 \\ S_{mittel} &= \frac{P_s}{\text{Kugeloberfläche}} = \frac{40\pi^2}{4\pi r^2} * \left[\frac{I * \ell}{\lambda}\right]^2 = \frac{10\pi}{r^2} * \left[\frac{I * \ell}{\lambda}\right]^2 \\ D &= \frac{15}{10} = 1.5 \end{aligned}$$

(anschaulich : maximaler Strahlungsgewinn bezogen auf den Kugelstrahler)

7.2.4 Effektive (wirksame) Länge

Bei der Herleitung der Gleichungen für den HD wurde konstante Stromverteilung über der Länge ℓ vorausgesetzt. Bei realen Antennen ist die Stromverteilung auf dem Antennenstab eine Funktion des Ortes. Um die abgeleiteten Formeln, aber näherungsweise weiterhin anwenden zu können, rechnet man die reale Stromverteilung längs der realen Länge ℓ um, in eine konstante Stromverteilung* längs einer effektiven Länge ℓ_{eff}.
z.B. kurzer Dipol



Im Empfangsfall ist ℓ_{eff} der Proportionalitätsfaktor zwischen Antennenklemmenspannung und Empfangsfeldstärke.

$$U_0 = \ell_{eff} * E$$

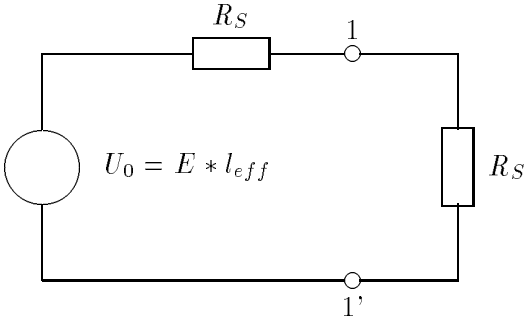
*man spricht auch von Strombelag

7.2.5 Effektive (wirksame) Fläche

Proportionalitätsfaktor zwischen Strahlungsdichte und aufgenommenener Leistung bzw maximal entnehmbarer Empfangsleistung (auch Absorptionsfläche)

$$A_{eff} = \frac{P_e}{S} = \frac{P}{S}$$

Empfangs-Ersatzschaltbild



$$P_e = \frac{1}{2} * \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2} * \left[\frac{U_0}{2}\right]^2 * \frac{1}{R_s} = \frac{1}{2} * \frac{E^2 * \ell_{eff}^2}{4} * \frac{1}{R_s}$$

$$P_e = S * A_{eff} = \frac{1}{2} * \frac{E^2}{Z_{F0}} * A_{eff}$$

$$A_{eff} = \frac{Z_{F0}}{4 * R_s} * \ell_{eff}^2$$

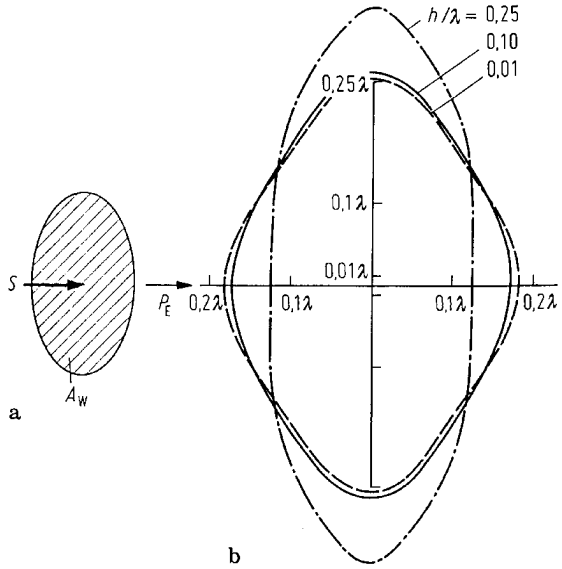


Bild 5. Wirksame Fläche. **a** Prinzip; **b** tatsächliche Gestalt für elektrisch kurze Dipole

Abbildung 7.11: Wirksame Fläche Quelle:[3]

7.2.6 Antennengewinn G (= Gain)

Es gibt verschiedene Definitionen und Bezugsgrößen, im allgemeinen Angabe in dB.

1. $G = \frac{\text{Strahlungsdichte in Hauptstrahlrichtung}}{\text{Strahlungsdichte Kugelstrahler}} = D$ (wenn verlustlos)

2. $G = \frac{S_{max}\ \text{Versuchsantenne}}{S_{max}\ \text{Bezugsantenne}}$

   Bezugsantennen :
   - Kugelstrahler (rein hypothetisch, aber *geschönte* Zahlenwerte)
   - Elementardipol (zu Kugelstrahler $D = 1.5$, also $g = 1.76$ dBi)
   - Halbwellendipol (zu Kugelstrahler $D = 1.64$, also $g = 2.15$ dBi)

3. $G = \eta * D$

EIRP äquivalente isotrope Strahlungsleistung (Bezug isotroper Kugelstrahler)
(**E**quivalent **I**sotropic **R**adiated **P**ower)
$EIRP = P_0 \cdot G_i$

ERP effektive Strahlungsleistung (Bezug verlustloser Halbwellendipol)
(**E**ffective **R**adiated **P**ower)
$ERP = P_0 \cdot G_d$
mit P_0 = Eingangsleistung der Antenne

im allgemeinen gilt

$$g = 10 * \log\ G \qquad [\text{ dB }]$$

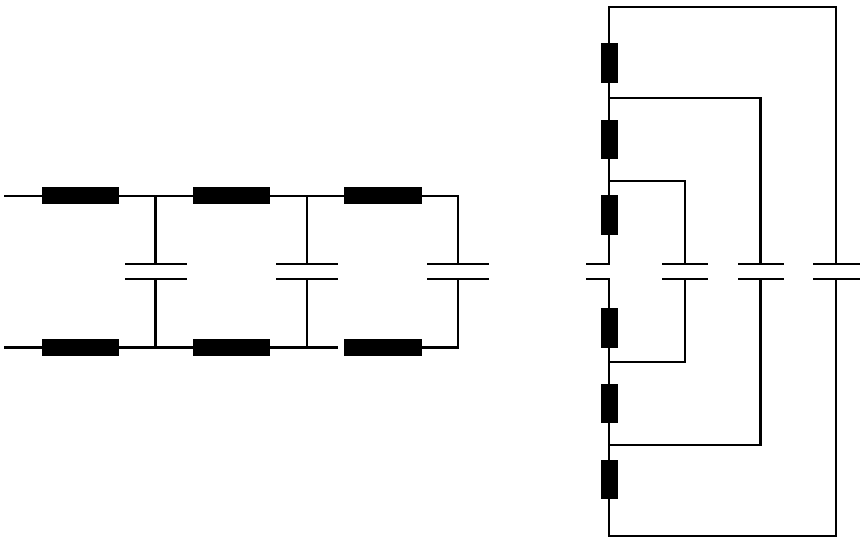
gebräuchlich sind:
dBi, also Bezugsantenne isotroper Strahler, oder
dBd, also Bezugsantenne Halbwellendipol

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennen-fläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0{,}08\lambda^2$	–	–		
Hertzscher Dipol, Dipol mit End-kapazität		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	l	$80\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0{,}06\lambda^2$	h	$160\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0{,}06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$		
$\lambda/4$ - Antenne auf leitender Ebene		3,28; (5,1 dB)	$0{,}065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0{,}16\lambda$	40Ω		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$		
$\lambda/2$ - Dipol		1,64; (2,1 dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0{,}32\lambda$	73Ω		
λ - Dipol		2,41; (3,8 dB)	$0{,}19\lambda^2$	$\gg\lambda$	200Ω		
$\lambda/2$ - Schleifendipol		1,64; (2,1 dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0{,}64\lambda$	290Ω		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28; (5,1 dB)	$0{,}26\lambda^2$	–	$\approx 500\Omega$		
kleiner Rahmen, n-Windungen, beliebige Form		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0{,}12 l\lambda$	–	–		
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0{,}25\lambda$	–	–		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$		$\approx \frac{6{,}5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	ab	–	–		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 + 10 l/\lambda$	–	–	–		

Abbildung 7.12: Antennenkenngrößen nach Quelle:[3]

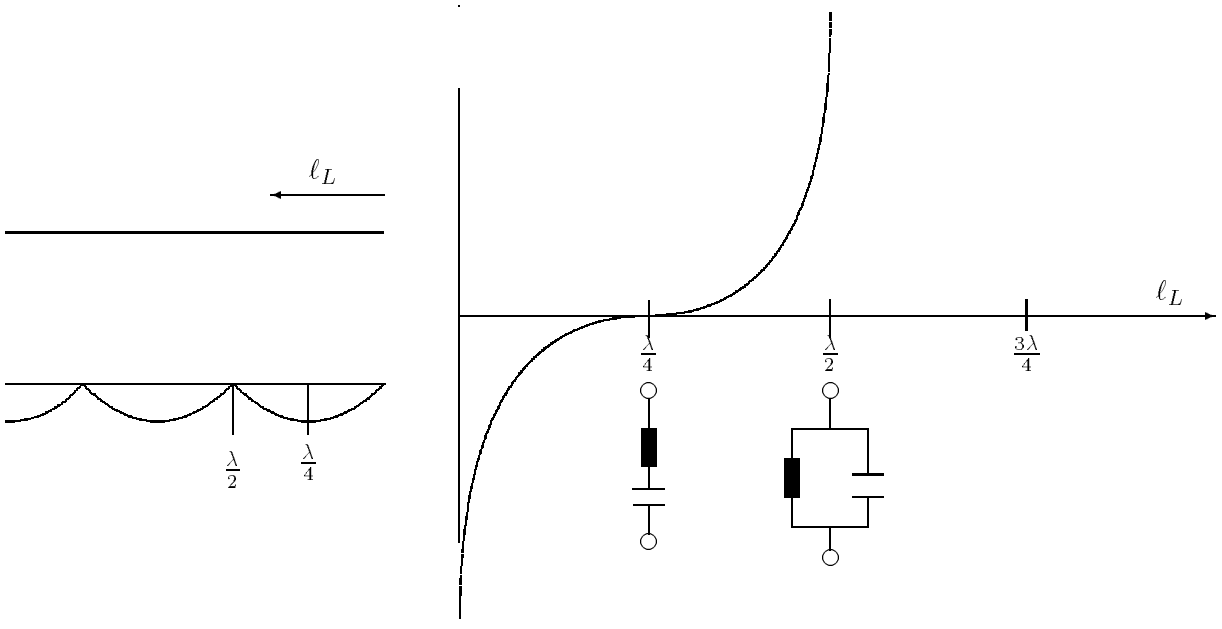
7.3 Dipolantennen

Beim theoretisch behandelten HD war die Strahlerlänge $\ell \ll \lambda$. Bei realen Antennen sind die Abmessungen ℓ in der Größenordnung der Wellenlänge. Näherungsweise kann man sich solche Antennen als *auseinandergebogene* Leitungen vorstellen.

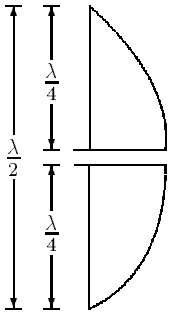


Bei einer leerlaufenden Leitung entstehen stehende Wellen längs der Leitung. Betrachtet man den Eingangswiderstand einer solchen verlustlosen Leitung, so ergibt sich gemäß Leitungstheorie

$$X = -j\,Z_L \;* \operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi\ell_L}{\lambda}\right)$$



Um maximale Leistung übertragen zu können ist ein reeller Eingangswiderstand wünschenswert. Dies ist bei Vielfachen von $\lambda/4$–Leitungslängen der Fall, den Resonanzstellen der Leitung. Man spricht deshalb auch von Resonanzantennen.



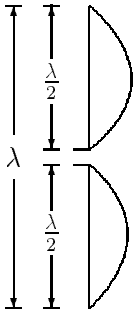
Halbwellendipol $R_S = 73\ \Omega$ (theoretisch)

$$Z_A = \overbrace{30 * [0.577 + \ln(2\pi) - \mathrm{Ci}^a\ (2\pi)]}^{R_A} + j\overbrace{\mathrm{Si}^b\ (2\pi)}^{X_A}$$

Vor.: $d << \lambda$ und sinusförmiger Strombelag

[a] Integralcosinus $\mathrm{Ci}\ (x) = -\int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = e + \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!}$

[b] Integralsinus $\mathrm{Si}\ (x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}$



Ganzwellendipol $R_S = 200\ \Omega$ (theoretisch)

Bei praktischen Antennen ist der Eingangswiderstand eine Funktion des Schlankheitsgrads $s = \frac{\ell}{d}$
(ℓ : Länge des Dipols, d : Durchmesser der Dipolstäbe).
Allgemein gilt, je dicker der Strahler, um so kürzer die Stäbe, um die Halbwellenresonanz zu erreichen.

Berechnete Antenneneingangsimpedanz $Z_A = R_A + jX_A$ für zylindrische mittengespeiste Dipolantennen als Funktion des Schlankheitsgrades s. Z_M ist der "mittlere Wellenwiderstand" der Antenne.

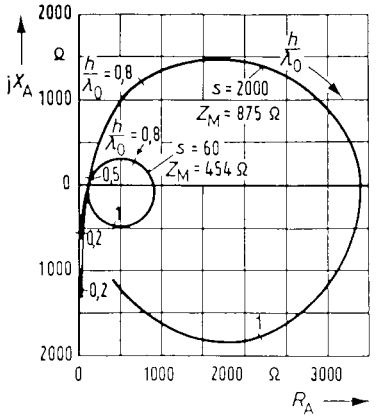


Abbildung 7.13: Antennenimpedanz in Abhängigkeit Schlankheitsgrad Quelle:[10] S.39

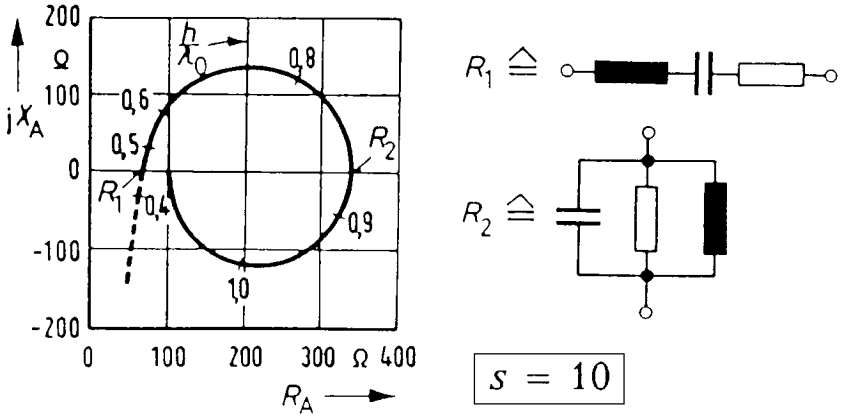


Abbildung 7.14: Antennenimpedanz für dicke Antenne Quelle:[10]

Richtcharakteristiken vertikaler Dipole (E-Ebenen Diagramme):

Halbwellendipol : $C(\varphi,\vartheta) = \left|\frac{\cos(\pi/2 * \cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\right|$ Öffnungswinkel 78°

Ganzwellendipol : $C(\varphi,\vartheta) = \left|\frac{\cos(\pi * \cos\vartheta)+1}{2 * \sin\vartheta}\right|$ Öffnungswinkel 47°

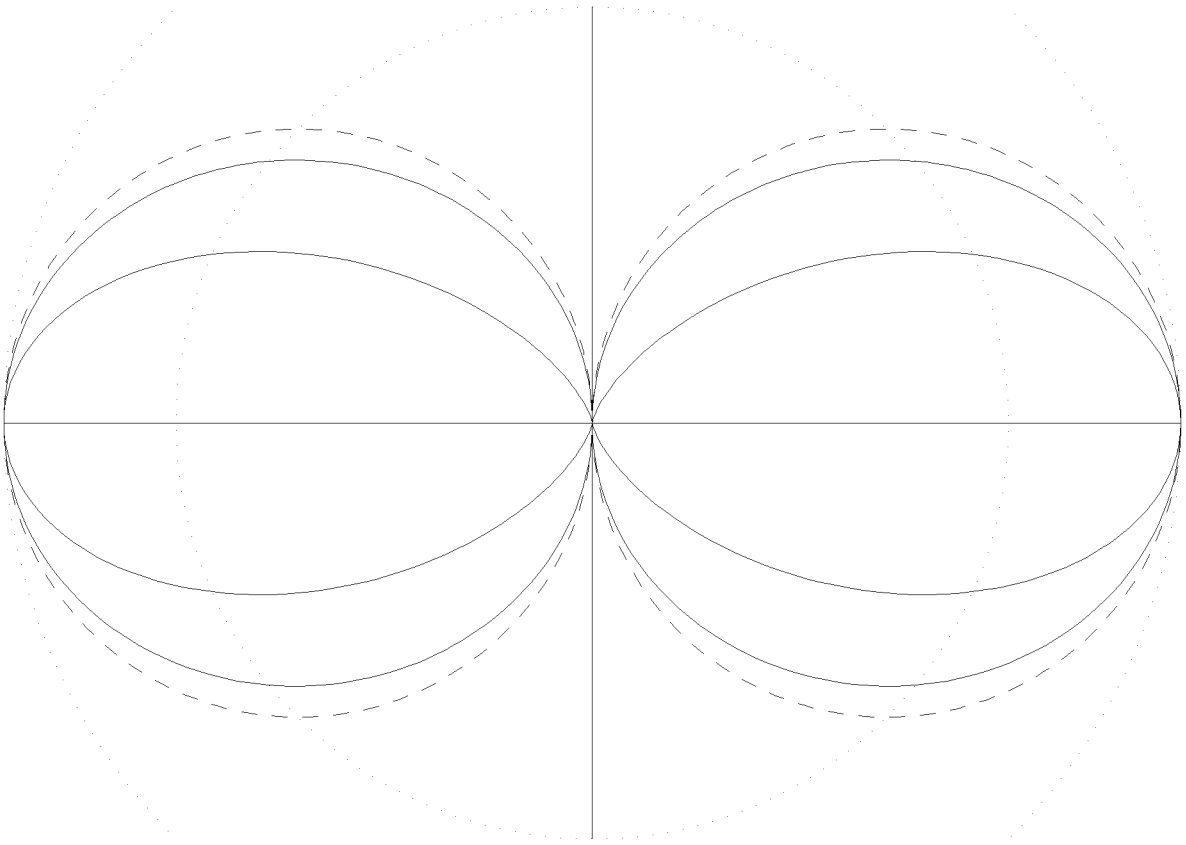
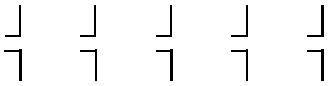


Abbildung 7.15: Richtcharakteristik HD, Halbwellendipol,Ganzwellendipol

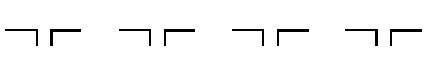
7.4 Dipolgruppen

Zur Erzielung einer bestimmten Richtcharakteristik schaltet man oft Antennen zu Antennsystemen zusammen, meistens benutzt man hierfür Dipole.
Je nach räumlicher Anordnung der Dipolelemente unterscheidet man

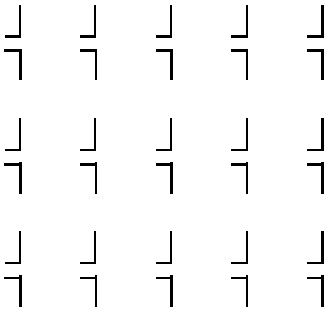
Dipolreihe, Dipolzeile



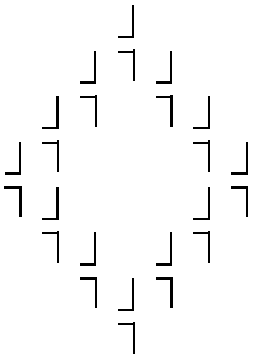
Dipolspalte



Dipolfläche



Kreisgruppe (Funknavigation)



Die Bestimmung der Richtcharakteristik eines solchen Antennensystems erleichert das

Multiplikative Gesetz

Gesamtcharakteristik = Einzelstrahlercharakteristik · Gruppencharakteristik

Bestimmung der Gruppencharakteristik am Beispiel zweier vertikaler Dipole als Dipolzeile,

Annahme : Ströme in beiden Dipolen gleich groß und gleichphasig

Im Fernfeld gilt für HD :

$$E = E_\vartheta = -\frac{I * \ell}{2 * \varepsilon_0 * c_0 * \lambda} * \frac{1}{r} * \sin\vartheta * \sin\left(\omega t - \frac{2 * \pi * r}{\lambda}\right)$$

oder vereinfacht

$$E = K_0 * \frac{1}{r} * C(\varphi,\vartheta) * e^{j\omega t} * e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}$$

Die Gesamtfeldstärke für einen fernen Aufpunkt P ergibt sich als Addition der einzelnen Feldstärken der einzelnen Dipole.

$$E_g = E_1 + E_2$$

Für einen fernen Aufpunkt P ergibt sich ein Wegunterschied $\Delta r = a * \cos\varphi * \sin\vartheta$.
Die Amplitudenunterschiede aufgrund des Wegunterschieds Δr sind für große r vernachlässigbar.

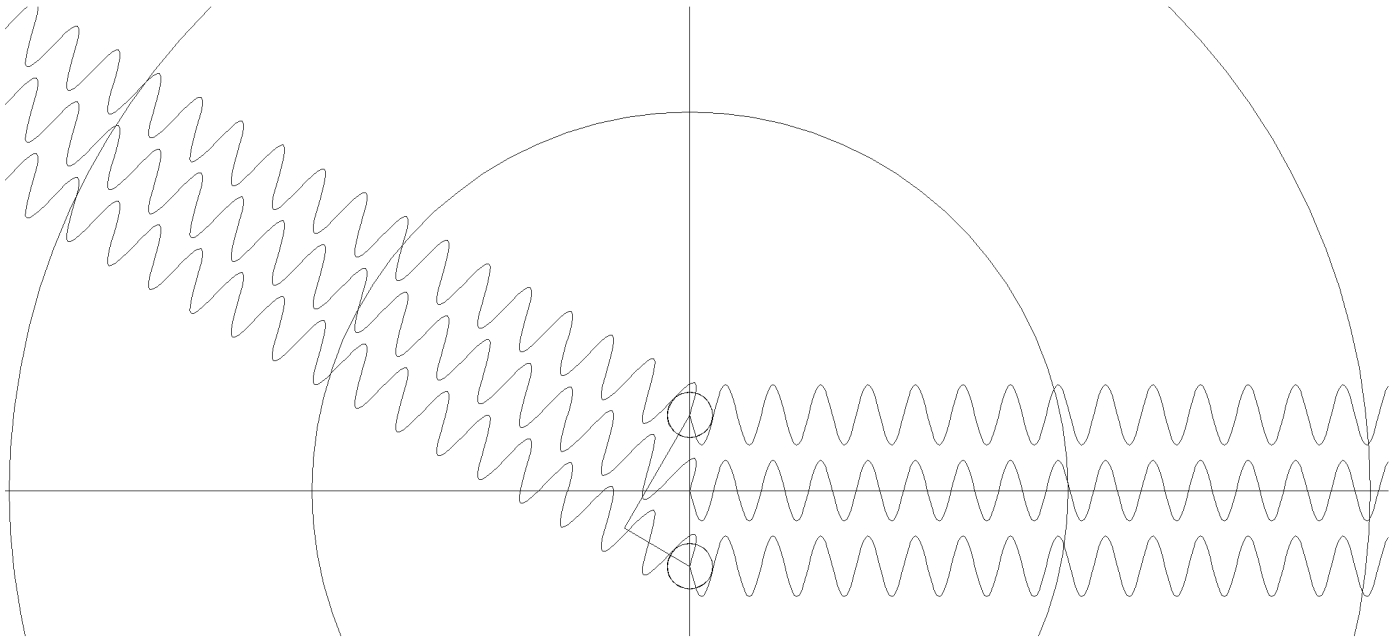


Abbildung 7.16: Phasenlage der einzelnen Bezugspunkte bei 2 Dipolen

Für die Phasenunterschiede gilt aber $\Delta\varphi = \beta * \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} * \Delta r$. Bezieht man r auf den Mittelpunkt der Dipolanordnung, gilt für die jeweiligen Radien $r_1 = r + \frac{\Delta r}{2}$ und $r_2 = r - \frac{\Delta r}{2}$, mit $\Delta r = a * \cos\varphi * \sin\vartheta$

damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E_g = E_1 + E_2 &= K_0 * \frac{1}{r + \frac{\Delta r}{2}} * C(\varphi,\vartheta) * e^{j\omega t} * e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r+\frac{\Delta r}{2})} \\ &+ K_0 * \frac{1}{r - \frac{\Delta r}{2}} * C(\varphi,\vartheta) * e^{j\omega t} * e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r-\frac{\Delta r}{2})} \end{aligned}$$

Normiert auf die Maximalamplitude für einen konstanten Abstand r ergibt sich

$$\begin{aligned} C_g(\varphi,\vartheta) &= C(\varphi,\vartheta)\left[e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r+\Delta r/2)} + e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r-\Delta r/2)}\right] \\ C_g(\varphi,\vartheta) &= C(\varphi,\vartheta)\left[e^{-j\frac{\pi}{\lambda}\Delta r} + e^{+j\frac{\pi}{\lambda}\Delta r}\right] \\ C_g(\varphi,\vartheta) &= C(\varphi,\vartheta)\underbrace{\left[2 * \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} * a * \cos\varphi * \sin\vartheta\right)\right]}_{\text{Gruppencharakteristik}} \end{aligned}$$

Die Gesamtcharakteristik ist abhängig vom Abstand a der beiden Dipole.

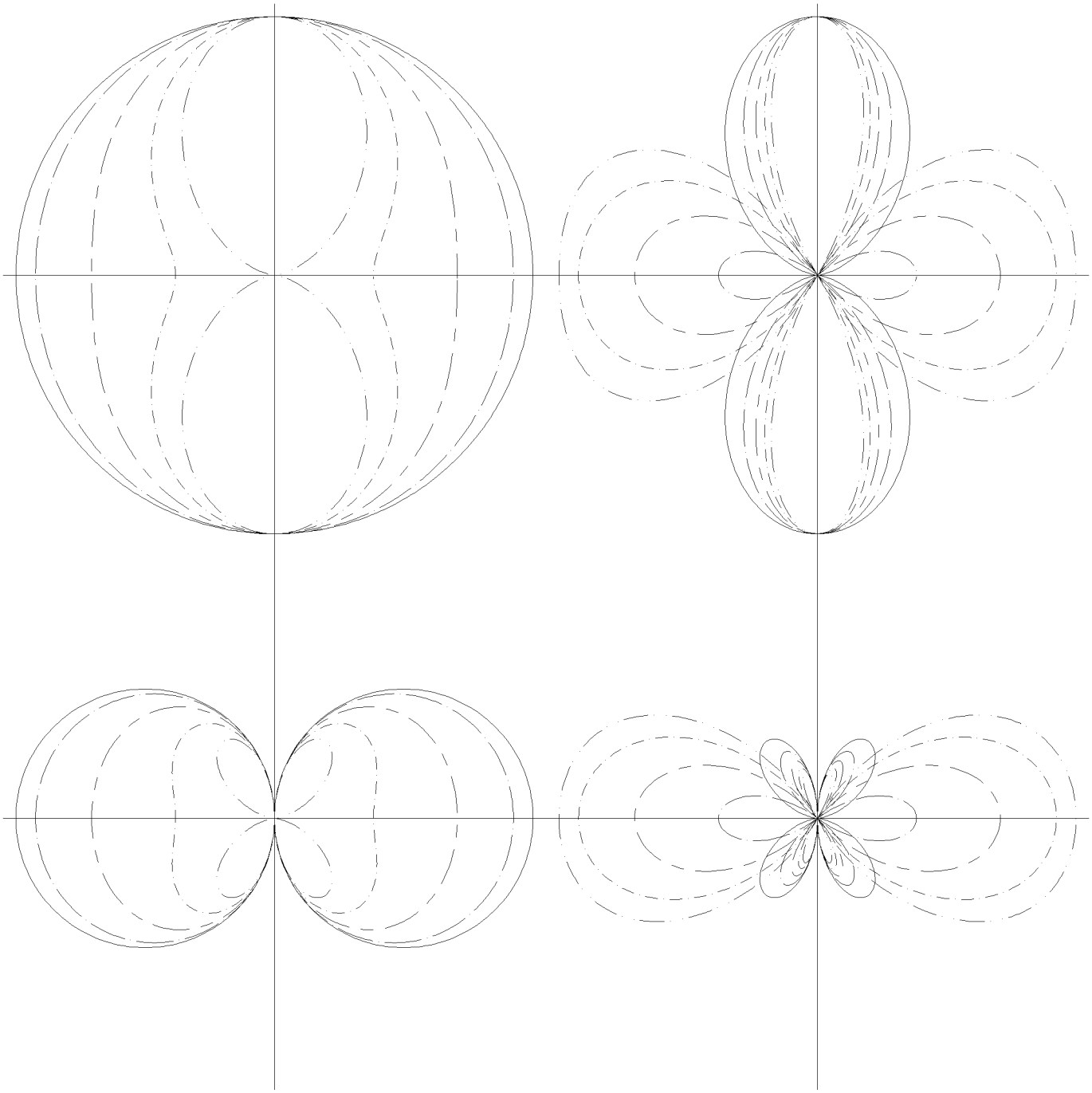


Abbildung 7.17: Horizontal- und Vertikaldiagramme für unterschiedliche Abstände a (Vielfache von $\frac{\lambda}{8}$) zweier vertikaler Dipole

Speist man die Dipole um $\Delta\alpha$ phasenverschoben , so ergibt sich für $\Delta\varphi = \beta * \Delta r + \Delta\alpha$.
Als Gesamtcharakteristik ergibt sich dann

$$C_g(\varphi,\vartheta) = C(\varphi,\vartheta) * \left[2 * \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} * a * \cos\varphi * \sin\vartheta + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)\right]$$

Dipolflächen-Antennensyteme mit steuerbaren Phasenunterschieden der einzelnen Antennen nennt man **phased–array**–Antennen. Man erreicht dadurch eine elektronische, also verzugsfreie Schwenkung der Richtcharakteristik. Meistens werden diese Dipolflächen zusätzlich mit unterschiedlichen Amplituden belegt.

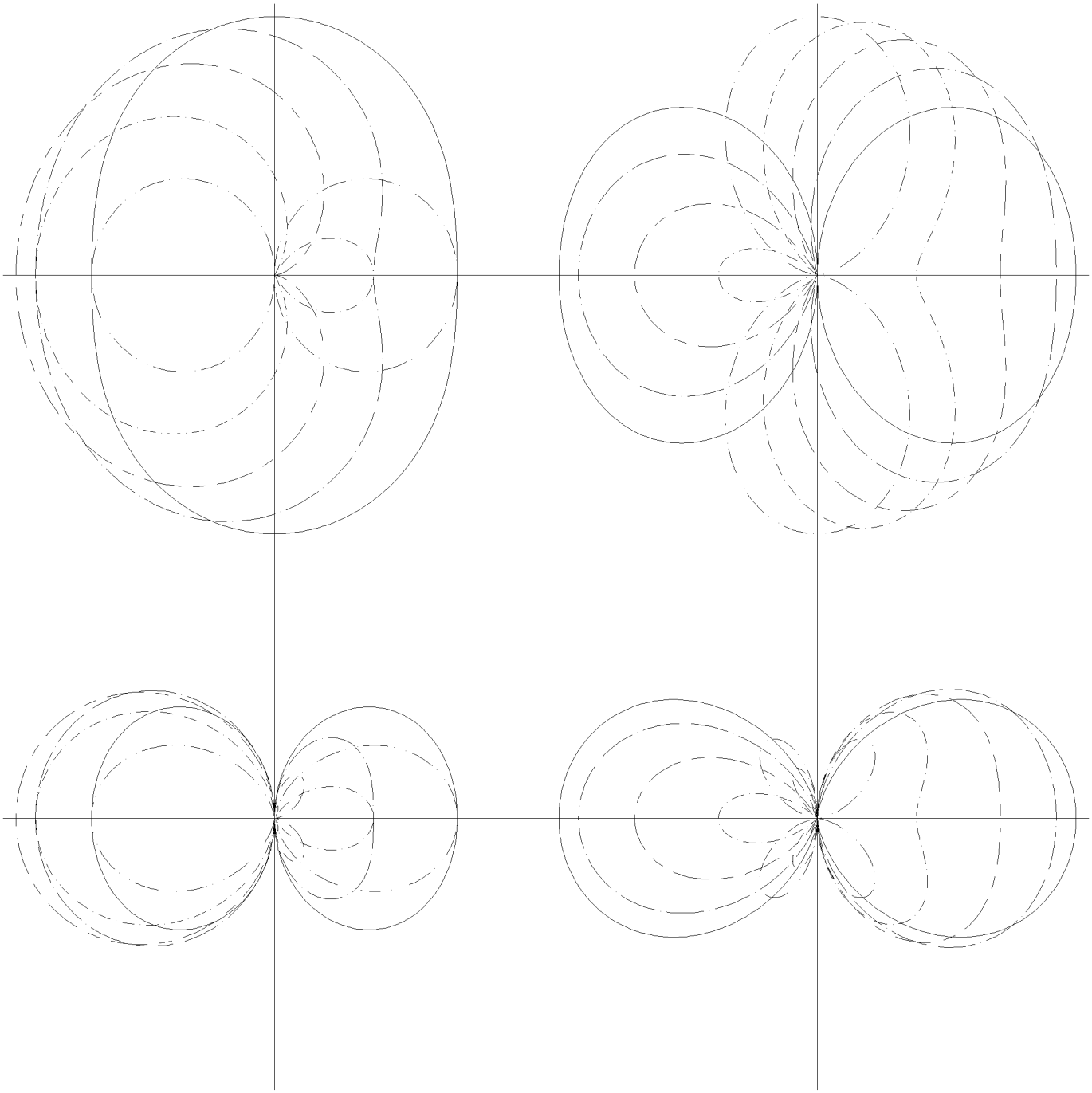
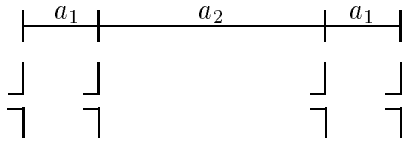


Abbildung 7.18: Horizontal- und Vertikaldiagramme für unterschiedliche Phasenverschiebungen (Vielfache von 45°) und Abstände a ($a = \frac{\lambda}{4}$ und $a = \frac{\lambda}{2}$) zweier vertikaler Dipole

Beispiel: 4 Dipole



Es ergäbe sich folgende Gesamtcharakteristik, bei gleicher Phasen und Amplitudenbelegung.

$$C_g(\varphi,\vartheta) = C(\varphi,\vartheta)\left[2 * \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} * a_1 * \cos\varphi * \sin\vartheta\right)\right] * \left[2 * \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} * (a_1 + a_2) * \cos\varphi * \sin\vartheta\right)\right]$$

7.5 Yagiantenne, logarithmisch periodische Antenne

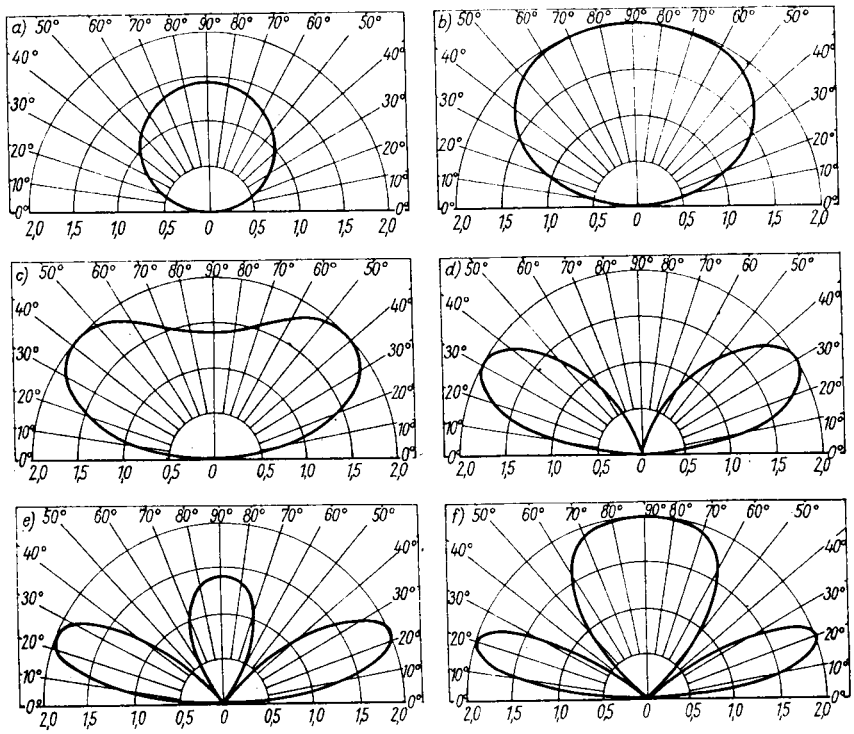
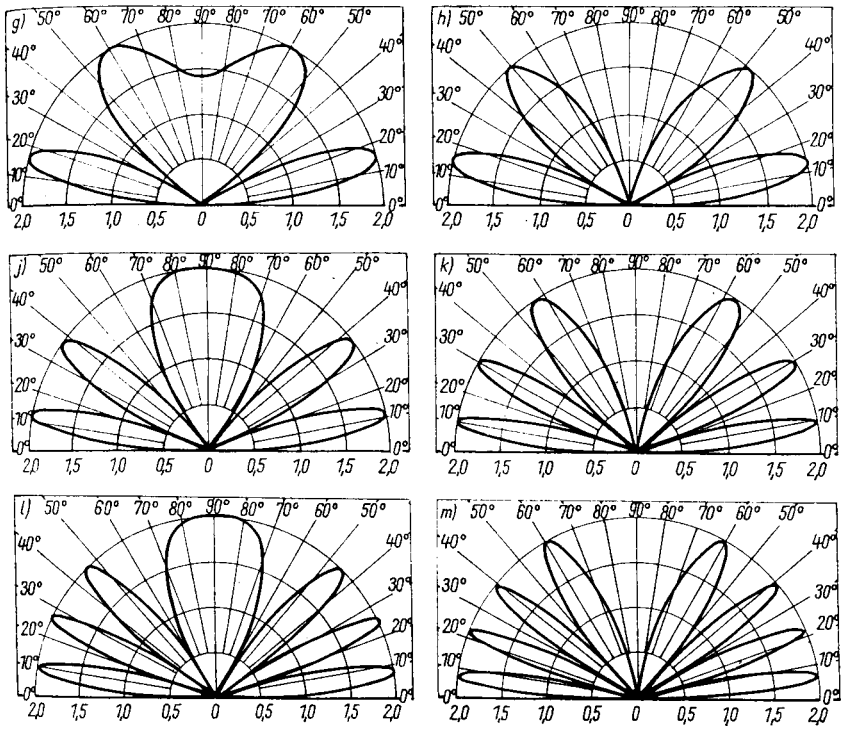


Bild 3.12 Der Erhebungswinkel horizontaler Halbwellendipole in Abhängigkeit von der Aufbauhöhe über der idealen Erde; in einer Ebene quer zur Dipolachse
a – Höhe $\frac{1}{8}\lambda$ über idealer Erde, b – Höhe $\frac{1}{4}\lambda$ über idealer Erde, c – Höhe $\frac{3}{8}\lambda$ über idealer Erde,
d – Höhe $\frac{1}{2}\lambda$ über idealer Erde, e – Höhe $\frac{5}{8}\lambda$ über idealer Erde, f – Höhe $\frac{3}{4}\lambda$ über idealer Erde,

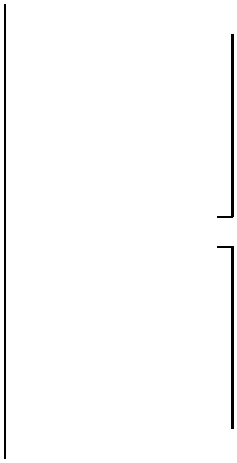


g – Höhe $\frac{7}{8}\lambda$ über idealer Erde, h – Höhe 1λ über idealer Erde, j – Höhe $1\frac{1}{4}\lambda$ über idealer Erde,
k – Höhe $1\frac{1}{2}\lambda$ über idealer Erde, l – Höhe $1\frac{3}{4}\lambda$ über idealer Erde, m – Höhe 2λ über idealer Erde

Abbildung 7.19: Richtdigramme horizontaler Halbwellendipol über idealer Erde Quelle:[12] S.60

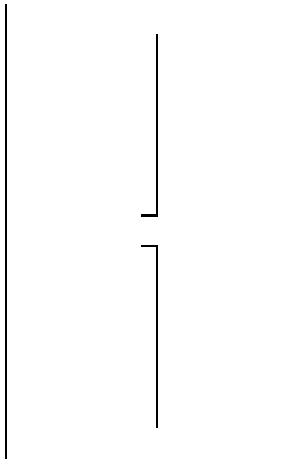
Versuche ergaben, daß sich die Richtcharakteristik einer Antenne durch den Abstand zur Erdoberfläche (leitende Ebene) veränderte. Berechenbar sind diese Richtcharakteristiken, wenn man im gleichen Abstand hinter der leitenden Ebene eine gleichartige Antenne mit 180° Phasenverschiebung annimmt.

Durch Versuche ergab sich, daß auch durch Stäbe in der Nähe eines strahlenden Elements (Dipol) die Richtcharakteristik beeinflussbar ist.



Der Stab nimmt Leistung des Dipols auf und strahlt diese wieder in den Raum ab. Aufgrund der zeitlichen und räumlichen Verschiebung zur ursprünglich vom gespeisten Dipol ausgehenden Leistung ergibt sich eine Phasenverschiebung, und demzufolge eine Änderung der Richtcharakteristik. Diesen Vorgang nennt man Strahlungskopplung.

Experimentell hat man folgende günstige Größen - und Anordnungsverhältnisse gefunden.



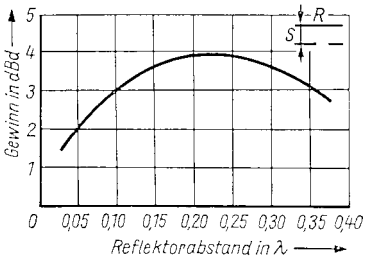


Bild 16.1
Der praktisch erreichbare Gewinn mit Anordnungen, bestehend aus Strahler und parasitärem Reflektor

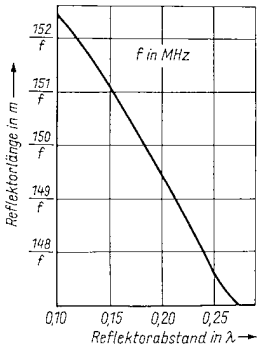


Bild 16.3
Die Reflektorlänge in Abhängigkeit vom Reflektorabstand

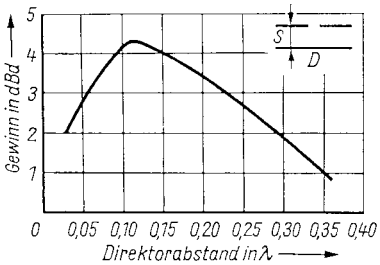
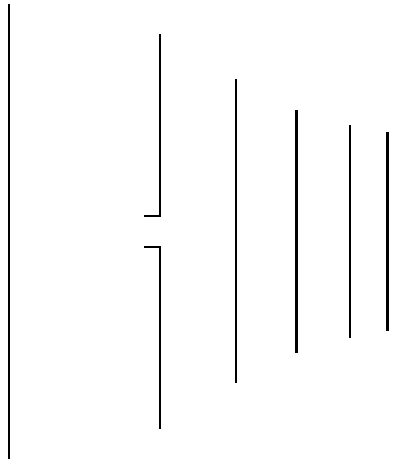


Bild 16.2
Der praktisch erreichbare Gewinn mit Anordnungen, bestehend aus Strahler und parasitärem Direktor

Abbildung 7.20: Geometrieabhängigkeiten Quelle:[12] S.246ff

Die Stäbe, die größer als das strahlende Element sind, bezeichnet man als *Reflektoren*, die Stäbe die kleiner als das strahlende Element sind, als *Direktoren*.

Die Kombination aus beiden führt zu den **Yagi**–(Uda)–**Antennen**. Beschrieben wurden diese Antennen erstmals 1926 von dem Japaner S.UDA, später (1928) wurde diese Antennenform von H.Yagi auch in Englisch beschrieben.



Durch die Strahlungskopplung verringert sich der Eingangswiderstand des strahlenden Dipols, der meistens ein Halbwellendipol ist. Deshalb wird ein Faltdipol benutzt, der theoretisch den 4-fachen R_S des Halbwellendipols besitzt, aber durch die Umgebungseinflüsse einen Eingangswiderstand von $50 \ldots 60\Omega$ aufweist.

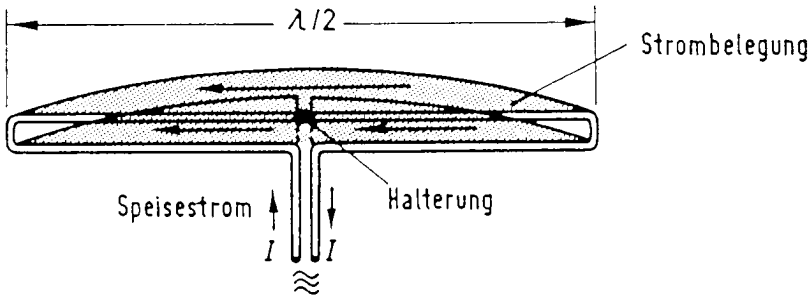


Abbildung 7.21: Faltdipol Quelle:[1]

Die Yagi–Antenne ist aufgrund des Aufbaus eine relativ schmalbandige Antenne.

Speist man alle Elemente einer yagi–ähnlichen Anordnung, dann ist jeweils der resonante Strahler die Hauptstrahlungsquelle. Diese breitbandige Antenne nennt man aufgrund der Größenverhältnisse der einzelnen Strahlerabstände, deren Logarithmus eine arithmetische Folge bildet, **Logarithmisch periodische Antenne**.

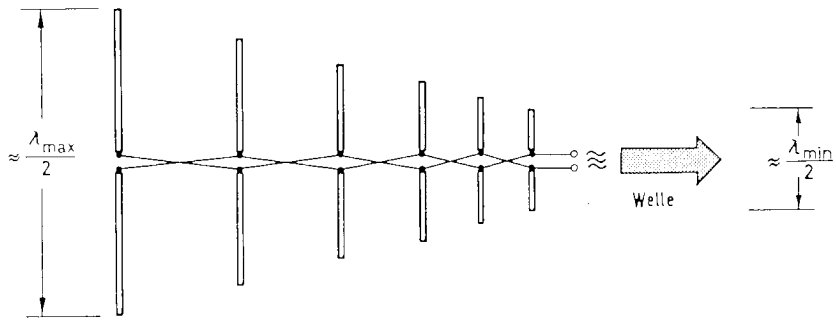


Abbildung 7.22: logarithmisch periodische Antenne Quelle:[1] S.149

1. Was bedeuten die Begriffe Richtcharakteristik, Richtfaktor und Richtdiagramm ?

2. Berechnen Sie den Strahlungswiderstand und die Wirkfläche eines Elementardipols $\ell = \lambda/20$ und eines Halbwellendipols unter der Annahme
   a) jeweils gleichmäßiger Strombelegung und
   b) für ein $\ell_{eff} = \ell/2$ beim Elementardipol und $\ell_{eff} = \lambda/\pi$ beim Halbwellendipol.

3. Welchen Einfluß hat die Höhe über Grund auf Antenneneigenschaften ?

4. Welche Einflüsse hat die Dicke der Stäbe beim Halbwellendipol ?

5. Wie groß ist die relative Amplitudenänderung beim vertikalen Hertzschen Dipol für eine Elevations-Winkeländerung von 5° bei $\vartheta = 90°$, $\vartheta = 45°$, $\vartheta = 6°$?

6. Zeichnen Sie Horizontal- und Vertikaldiagramm eines horizontalen Elementardipols. Welches Diagramm entspricht dem H–Ebenendiagramm, welches dem E–Ebenendiagramm ?

7. Wie groß ist der Öffnungswinkel beim Hertzschen Dipol ?

8. Wann ist der Eingangswiderstand einer Dipolantenne kapazitiv ?

9. Ein horizontaler Hertzscher Dipol erzeugt in einem Abstand von 1 km und 30° zur Hauptstrahlrichtung eine elektrische Feldstärkeamplitude von 10 μV/m .
   Wie groß ist an diesem Ort die magnetische Feldstärkekomponente und die Strahlungsdichte ?
   Welche Werte ergeben sich für diese 3 Größen in Hauptstrahlrichtung ?
   Welche Unterschiede ergäben sich bei Verwendung eines Halbwellendipol in Hauptstrahlrichtung bei gleicher Feldstärke 30° zur Hauptstrahlrichtung ?
   Berechnen Sie die entsprechenden Größen ?

10. Welche Phasendrehung *macht* eine 1 mm lange Leitung bei f =100 MHz, 1 GHz, 10 GHz?

11. Aus einem Prospekt entnehmen Sie für zwei Antennen folgende Größen.
    a) Antenne A : Gain 14.0 dB, Directivity 25
    b) Antenne B : Gewinn 12.3 dB (bezogen auf Halbwellendipol)
    Welche Antenne ist besser ?

12. Auf einem Antennendrehstand wurde folgende Feldverteilung für eine Sendeantenne gemessen

$$24\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \sin(90 - \varphi) \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin(\vartheta)$$

    Skizzieren Sie das horizontale und vertikale Richtdiagramm.
    Wie groß wäre jeweils die Feldstärke in einem Winkel von 41° zur Hauptstrahlrichtung?
    Bestimmen Sie jeweils Halbwertsbreite und Rückdämpfung der Antenne.

Literaturverzeichnis

[1] Heinrich Armbrüster / Gerhard Grünberger. *Elektromagnetische Wellen im Hochfrequenzbereich.* München/Heidelberg: Hüthig, 1978

[2] Zinke-Brunswick. *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik.* Hg. Otto Zinke und Anton Vleck. Berlin: Springer, 1986

[3] Meinke-Gundlach. *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik.* Hg. K.Lange und K.-H.Löcherer. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer, 1986

[4] Helmut Winkelmann. "Singlemode-Lichtwellenleiter". Elektronik 3/5.2.1988

[5] Praktikumsanleitung PUT FH Regensburg Versuch U 17 Lichtwellenleiter

[6] Günther Mahlke. *Lichtwellenleiterkabel.* Berlin München: Siemens, 1986

[7] Hermann-Josef Broeckmann. "Design von Lichtwellenleitern". PKI Technische Mitteilungen Sonderheft 1/1989

[8] Johannes Wilhelm. Nachrichtensysteme. Vorlesungsskript Universität der Bundeswehr München

[9] Eduard Stirner. *Antennen. Band 1: Grundlagen.* Heidelberg: Hüthig, 1977

[10] Eduard Stirner. *Antennen. Band 2: Praxis.* Heidelberg: Hüthig, 1986

[11] Eduard Stirner. *Antennen. Band 3: Messtechnik.* Heidelberg: Hüthig, 1985

[12] Karl Rothammel. *Antennenbuch.* Berlin: VEB, 1984

[13] Karl Rothammel. *Antennenbuch.* Stuttgart: Franckh, 1988

[14] Peter Pauli u.a. *Hochfrequenz- und Mikrowellenmeßtechnik B.* Esslingen: Technische Akademie: 1984

[15] Walter Janssen. *Streifenleiter und Hohlleiter.* Heidelberg: Hüthig, 1992

[16] Dieter Opielka. *Optische Nachrichtentechnik.* Braunschweig: Vieweg, 1995.

[17] Marlene Marinescu. *Elektrische und magnetische Felder.* Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer, 1996.

[18] Meinke-Gundlach. *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik.* Hg. K.Lange und K.-H.Löcherer. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer, 1992
Kapitel B Elektromagnetische Felder und Wellen B1-B17
Kapitel K Hochfrequenz Wellenleiter K1-K49
Kapitel N Antennen N1-N64

[19] Günther Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie.* Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona: Springer, 1990

[20] Alexander von Weiss. *Die elektromagnetischen Felder.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1983

[21] Rainer Geissler / Werner Kammerloher / Hans Werner Schneider. *Berechnungs- und Entwurfsverfahren der Hochfrequenztechnik 2.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1994.

[22] Gottlieb Strassacker *Rotation, Divergenz und das Drumherum.* Stuttgart: Teubner, 1986

[23] Ulrich Weyh. *Die Grundlagen der Lehre vom elektrischen und magnetischen Feld.* München, Wien: Oldenbourg, 1984

[24] Adolf J. Schwab. *Begriffswelt der Feldtheorie.* Berlin: Springer, 1990

[25] Gottfried Fritzsche. *Systeme Felder Wellen.* Berlin: VEB, 1975

[26] Erich Pehl. *Mikrowellentechnik. Band 1: Wellenleitungen und Leitungsbausteine.* Heidelberg: Hüthig, 1988

[27] Erich Pehl. *Mikrowellentechnik. Band 2: Mikrowellenantennen, Mikrowellenroehren, Mikrowellenhalbleiter und Halbleiterschaltung.* Heidelberg: Hüthig, 1989

[28] Gerhard Wunsch. *Feldtheorie Band 1: Mathematische Grundlagen.* Heidelberg: Hüthig, 1971

[29] Gerhard Wunsch. *Feldtheorie Band 2: Elektromagnetische Felder.* Heidelberg: Hüthig, 1976

[30] H.-G.Unger. *Hochfrequenztechnik in Funk und Radar.* Stuttgart: Teubner, 1984

[31] Wolfgang Harth / Helmut Grothe. *Sende- und Empfangsdioden für die optische Nachrichtentechnik.* Stuttgart; Leipzig: Teubner, 1998

[32] Keqian Zhang and Deje Li. *Electromagnetic theory for microwaves and optoelectronics.* Berlin Heidelberg New York: Springer, 1998

[33] Eberhard Herter. *Optische Nachrichtentechnik.* München, Wien: Hanser, 1994

[34] Paul Lorrain. *Elektromagnetsiche Felder und Wellen.* Berlin, New York: de Gruyter, 1995