Elektrodynamik

Gerhard Soff

Institut für Theoretische Physik

Technische Universität Dresden

Vorlesung im Sommersemester 1995

Vorbemerkungen

Die Vorlesung der Theoretischen Physik "Elektrodynamik" wird dienstags und donnerstags jeweils in der 2. Doppelstunde (9.20 Uhr) im Hörsaal C213 stattfinden. Dazu gibt es Übungsstunden, sogenannte Theoretika, die in drei Übungsgruppen am Dienstag 1. DS bzw. Mittwoch 1. DS abgehalten werden. Bei Bedarf können noch weitere Übungsgruppen eingerichtet werden. Am Ende des Semesters wird nach erfolgreichem Absolvieren der Übungen ein Schein ausgeteilt. Nach der neuen Prüfungsordnung für das Studienfach Physik kann der Themenbereich Elekrodynamik in der Vordiplomprüfung abgefragt werden. Für diejenigen Studenten, die sich nach der alten Prüfungsordnung einstufen lassen, wird die Elektrodynamik im Rahmen der Diplomprüfung abgefragt.

Nach der Studienordnung wird die Vorlesung "Elektrodynamik" der Theoretischen Physik für das vierte Semester empfohlen. Da jedoch der benötigte mathematische Apparat konsistent abgeleitet wird, sollte es auch für ambitionierte Studenten der unteren Semester möglich sein, dieser Vorlesung zu folgen. An begleitender Literatur werden die folgenden Monographien empfohlen:

1. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics,*
   (Wiley, New York, 1962)

2. W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik,*
   (Harri Deutsch, Thun, 1982)

3. P. Lorrain, D. Corson, *Electromagnetic fields and waves,*
   (Freeman, San Francisco, 1962)

4. W. Nolting, *Elektrodynamik,*
   (Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1993)

5. G. Ludwig, *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos,*
   (Bertelsmann, Düsseldorf, 1974)

6. W. Panofsky, M. Phillips, *Classisal Electricity and Magnetism,*
   (Addison-Wesley, Reading, 1962)

7. R. Becker, F. Sauter, *Theorie der Elektrizität 1,*
   (Teubner, Stuttgart, 1973)

8. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie,*
   (Akademie-Verlag, Berlin, 1973)

9. A. Sommerfeld, *Elektrodynamik,*
   (Harri Deutsch, Thun, 1977)

10. R. J. Jelitto, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik,*
    (Aula-Verlag, Wiesbaden, 1985)

Nach der ersten Stunde einer doppelstündigen Vorlesung wird jeweils eine kurze Pause eingeschoben. Fragen können nach Ablauf der zweiten Stunde gestellt werden.

Es ist geplant, die folgenden Themenbereiche zu umfassen:

1. Elektrostatik
2. Multipolentwicklungen und Dielektrika
3. Magnetostatik
4. Maxwell-Gleichungen
5. Ebene Wellen
6. Strahlung

Das Verständnis der Theoretischen Elektrodynamik sowie der zugehörigen mathematischen Grundkonzepte ist eine Grundvoraussetzung für das Verständnis der Quantenmechanik-Vorlesung als nächste Vorlesung im Vorlesungszyklus der Theoretischen Physik. Die Elektrodynamik hat ferner außergewöhnlich weitreichende Implikationen für die Anwendung in der industriellen Forschung.
Die theoretische Elektrodynamik erweist sich für den Anfänger oftmals als ein recht schwieriges und komplexes Gebiet. Vielfältige neue mathematische Methoden müssen erlernt werden. Aufgrund ihres Umfangs und Komplexität kann der faszinierende physikalische Gehalt leicht zugedeckt werden. Das gründliche Aneignen dieser mathematischen Verfahrensweisen ist aber unumgänglich insbesondere auch für das Verständnis der Theoretischen Physik in fortgeschrittenen Vorlesungen. Als Beispiel werden wir einige Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen erlernen. Zielsetzung ist es aber hierbei nicht auf die korrespondierenden Mathematik-Vorlesungen zu verweisen, die aber sicherlich eine rigorose Ergänzung repräsentieren, sondern vielmehr konsistente Ableitungen im Rahmen dieser Vorlesungen zu präsentieren.
Diese Vorlesungsmitschrift wäre nicht entstanden ohne die hilfreiche und wertvolle Unterstützung zahlreicher Mitarbeiter. Mein ausdrücklicher und besonderer Dank gilt Frau Dipl.-Ing. Gundula Schädlich für ihr Engagement bei der Erstellung des umfangreichen Latex-Textes sowie für das

Zeichnen der zahlreichen Figuren mit Hilfe des Softwarte-Paketes “Corel Draw”. Bei der technischen Erstellung des Scriptes halfen dankenswerterweise Dr. Thomas Beier, Dr. Jörg Bergmann, Dipl.-Phys. Mark Beinker, Dipl.-Phys. André Peshier und Dipl.-Phys. Bernd Heide.
Dieses Script ist kein Originalwerk. Es basiert auf mehreren publizierten Monographien. Als Vorlesungsmitschrift reflektiert es die in den jeweiligen Vorlesungen präsentierten Inhalte.

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatik **6**

1.1 Grundgleichungen 6
1.2 Coulomb-Gesetz 7
1.3 Die Diracsche δ-Funktion 10
1.4 Die Sprungfunktion 17
1.5 Der Satz von Gauß 18
1.6 Ladung und Stromdichte 22
1.7 Feldlinien 24
1.8 Das Potential 25
1.9 Grundgleichungen der Elektrostatik 28
1.10 Elektrostatische Feldenergie 30
1.11 Grenzflächen 36
1.12 Der Kondensator 38
1.13 Die Greenschen Theoreme 40
1.14 Randwertprobleme 41
1.15 Die Greensche Funktion 45
1.16 Methode der Bildladungen 47

2 Multipolentwicklungen und Dielektrika **54**

2.1 Vollständige Funktionensysteme 54
2.2 Legendre-Polynome 57
2.3 Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten 62
2.4 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten 63
2.5 Einführung der Kugelfunktionen 66
2.6 Das Additionstheorem der Kugelfunktionen 72
2.7 Multipolentwicklung 75
2.8 Wechselwirkungsenergie einer ausgedehnten Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld 82
2.9 Dielektrika 84
2.10 Die dielektrische Verschiebung 87
2.11 Die Polarisation 88
2.12 Molekulare Polarisierbarkeit 92
2.13 Elektrostatische Energie 97

3 Magnetostatik **98**

3.1 Das Ohmsche Gesetz 98

3.2 Das Biot-Savartsche Gesetz . . . 102
3.3 Zweites Ampèresches Gesetz . . . 106
3.4 Das Vektorpotential . . . 109
3.5 Das magnetische Moment . . . 110
3.6 Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld . . . 114
3.7 Magnetostatik in der Materie . . . 116
3.8 Feldverhalten an Grenzflächen . . . 121

4 Die Maxwell-Gleichungen 123
4.1 Grundgleichungen . . . 123
4.2 Elektromagnetische Potentiale . . . 126
4.3 Eichtransformationen . . . 127
4.4 Energie des elektromagnetischen Feldes . . . 130
4.5 Der Feldimpuls . . . 132

5 Ebene Wellen 137
5.1 Felder im Vakuum . . . 137
5.2 Wellenpakete . . . 147
5.3 Kugelwellen . . . 152
5.4 Fourier–Integrale . . . 153
5.5 Kovariante Notation der Maxwell-Gleichungen . . . 157

6 Elektromagnetische Strahlung 162
6.1 Funktionentheorie . . . 162
6.2 Liénard–Wiechert Potentiale . . . 169
6.3 Die Strahlung zeitlich oszillierender Quellen . . . 172
6.4 Elektrische Dipolstrahlung . . . 176
6.5 Eine einfache Dipolantenne . . . 184
6.6 Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung . . . 185

1 Elektrostatik

1.1 Grundgleichungen

Ohne Ableitung und ohne ausführliche Diskussion geben wir einführend die wesentlichen Gleichungen - die Maxwell-Gleichungen - an, um einen ersten Eindruck bezüglich der mathematischen Struktur der Basisgleichungen zu erhalten. Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad , \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad . \tag{1.4}$$

Hiebei bezeichnet ρ die Ladungsdichte eines Systems, $\vec{J}$ ist der Vektor der Stromdichte. ρ und $\vec{J}$ sind die Quellen der elektromagnetischen Felder. $\vec{E}$ kennzeichnet den Vektor der elektrischen Feldstärke, entsprechend ist $\vec{H}$ die magnetische Feldstärke. $\vec{B}$ heißt die magnetische Induktion und $\vec{D}$ die dielektrische Verschiebung. Es gelten die Verknüpfungsgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad , \tag{1.5}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad . \tag{1.6}$$

Hierbei ist ε die Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permeabilität. Damit ist die Nomenklatur in Teilaspekten festgelegt, jedoch fehlt natürlich jedes tiefere Verständnis. Die Maxwell-Gleichungen bestehen aus zwei Gleichungen in skalarer Form, die jeweils die Divergenz eines Vektors beinhalten. Zwei Gleichungen haben Vektorcharakter, sie beinhalten die Rotation eines Vektors. Die Maxwell-Gleichungen lassen sich auch jeweils in zwei homogene und zwei inhomogene Gleichungen gruppieren. Die inhomogenen Gleichungen beinhalten die äußeren Quellen ρ bzw. $\vec{J}$ als inhomogene Terme. Auffällig ist ferner die etwas unsymmetrische Struktur sowie die Einfachheit der Grundgleichung der magnetischen Induktion, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Ferner stellen wir fest, daß die Maxwell-Gleichungen ein Satz gekoppelter partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in den drei Raumdimensionen und in der Zeitvariablen sind. Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{x}, t) \quad , \tag{1.7}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t) \quad , \tag{1.8}$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t) \quad , \tag{1.9}$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{x}, t) \quad . \tag{1.10}$$

Erst die Angabe der Randbedingungen bzw. Anfangsbedingungen erlaubt eine eindeutige Lösung dieser Differentialgleichungen.

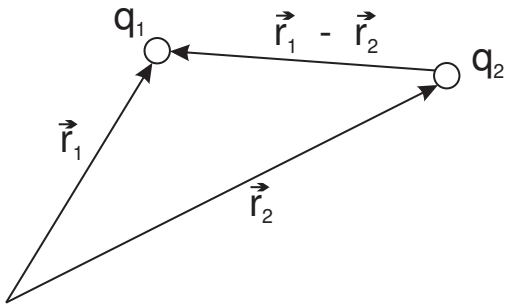
Auffallend ist weiterhin das Auftreten der Lichtgeschwindigkeit c, was bereits auf einen Zusammenhang von Licht und elektromagnetischen Phänomenen hindeutet.

1.2 Coulomb-Gesetz

Als empirischen Sachverhalt stellen wir fest, daß geladene Körper Kräfte aufeinander ausüben. Es gibt zwei Arten von Ladung, die wir als positive bzw. negative Ladung bezeichnen. Einfache Experimente belegen, daß sich gleichnamige Ladungen abstoßen, während sich verschiedenartige Ladungen anziehen. Ferner stellt man fest, daß die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 proportional zu ihrem Produkt ist und daß weiterhin die Kraft mit dem Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen abnimmt. Elektrostatische Kräfte sind Zentralkräfte. Damit folgt in großer Analogie zum Newtonschen Gravitationsgesetz als experimentelles Ergebnis für die Kraft zwischen zwei Ladungen

$$\vec{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \, \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad . \tag{1.11}$$

Dies ist das Coulombsche Gesetz. k ist eine Proportionalitätskonstante, die noch festgelegt werden muß.
Elektrostatische Kräfte sind Zwei-Körper-Kräfte, es gilt das Superpositionsprinzip.



Bei der Anwesenheit von N weiteren Ladungen q_i mit $i = 2, 3, \cdots, N$ wird auf die Ladung q_1 die folgende Kraft ausgeübt

$$\vec{F} = k\, q_1 \sum_{i=2}^{N} q_i \, \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|} \quad . \tag{1.12}$$

Das Coulombsche Gesetz gilt in dieser Form nur exakt für Punktladungen. Für Ladungsverteilungen beliebiger Gestalt treten Abweichungen auf. Wir wenden uns nun der Festlegung der Konstanten k zu und damit auch des Einheitensystems, in dem wir die Ladung messen wollen.

Die Kraft wird nach wie vor in Newton und Abstände in Meter gemessen. Je nach Wahl von k erhalten wir verschiedene Maßsysteme für die Festlegung der Ladung q. Wir verwenden das Gaußsche Maßsystem und setzen

$$k = 1 \quad .$$

Für den Betrag der Kraft zwischen zwei Ladungen gilt

$$F = \frac{q_1\, q_2}{r^2} \tag{1.13}$$

und damit für die Dimension der Ladung

$$\dim [q] = [\mathrm{Nm}^2]^{1/2} = \left[\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}\right]^{1/2} \quad . \tag{1.14}$$

Dies nennt man auch die die elektrostatische Einheit.

Setzt man hingegen die Einheit der Ladung fest als 1 Coulomb mit der Abkürzung C, so folgt

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad . \tag{1.15}$$

Hierbei heißt ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums und hat den Wert

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \quad . \tag{1.16}$$

Es ist ein Coulomb gleich einer Ampère-Sekunde (As),

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As} \quad . \tag{1.17}$$

Die Elementarladung e, dies ist die Ladung eines einzelnen Elektrons, beträgt in diesen Einheiten

$$e = 1.602\,177\,33 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad .$$

Wir führen jetzt das Konzept der elektrischen Feldstärke ein. Dazu betrachten wir die Kraft, die von einer Ladung q_1 auf eine möglichst kleine Testladung q ausgeübt wird. Mittels der Gleichung

$$\vec{F}\,(\vec{r}\,) = q\,\vec{E}\,(\vec{r}\,) \tag{1.18}$$

definieren wir die elektrische Feldstärke $\vec{E}\,(\vec{r}\,)$ einer Punktladung q_1. Offensichtlich folgt

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = q_1\,\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad . \tag{1.19}$$

Man beachte die Umbenennung $q_1 \to q$, $q_2 \to q_1$ und entsprechend $r_1 \to r$, $r_2 \to r_1$ gegenüber den anfänglichen Betrachtungen. Für eine Summe von N Ladungen q_i folgt nach dem Superpositionsprinzip

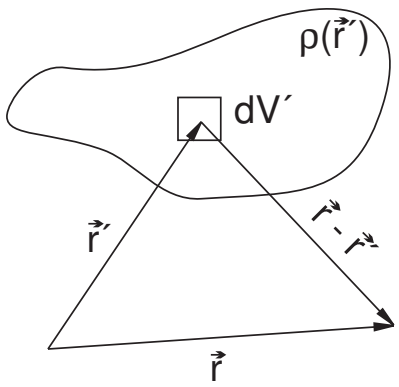
$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \quad . \tag{1.20}$$

Haben wir eine kontinuierliche Ladungsverteilung vorliegen, so müssen wir von der Summation über die Punktladungen zu einer Integration über die räumliche Verteilung übergehen. Wir setzen an die Stelle einer Punktladung q_i das Ladungselement $\rho(\vec{r}\,')\,dV'$,

$$q_i \to \rho(\vec{r}\,')\,dV' \quad ,$$

mit $dV' = dx'\,dy'\,dz'$. Für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}\,)$ erhalten wir dann

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \int \rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV' \quad . \tag{1.21}$$



1.3 Die Diracsche δ-Funktion

Als mathematischen Einschub zur Ermittlung auftretender Integrale behandeln wir einige Eigenschaften der Diracschen δ-Funktion. Der Begriff "Funktion" ist hier im streng mathematischen Sinn falsch gewählt, da es sich vielmehr um eine Distribution handelt. Die δ-Funktion ist durch eine Integrationseigenschaft definiert. Es ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \begin{cases} f(a), & \text{falls } \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta) \end{cases} . \tag{1.22}$$

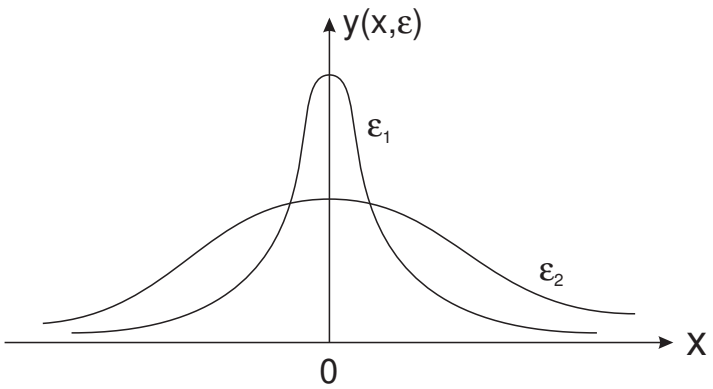
Mittels der δ-Funktion weisen wir der Funktion $f(x)$ einen speziellen Funktionswert $f(a)$ zu. Man spricht von einem Funktional. Speziell gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-a)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta) \end{cases} . \tag{1.23}$$

Wir wollen dies weiter mittels eines Grenzübergangs veranschaulichen. Wir gehen zunächst aus von der Folge von Glockenkurven

$$y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \tag{1.24}$$

mit $\varepsilon > 0$. Mit kleiner werdendem ε werden diese Glockenkurven immer schmaler und höher.



Verlauf der Funktion $y(x,\varepsilon)$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Im Limes $\varepsilon \to 0$ verschwindet die Funktion für $x \neq 0$, während sie für $x = 0$ divergiert.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} . \tag{1.25}$$

Als essentielle Eigenschaft resultiert, daß die unter den Kurven (1.24) liegenden Flächen,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x,\varepsilon)\,dx = \frac{1}{\pi}\,\arctan\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \quad , \tag{1.26}$$

stets eins sind unabhängig von ε. Nun betrachten wir für stetige Funktionen $f(x)$ das Integral

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, y(x,\varepsilon)\, dx \tag{1.27}$$

als Funktion des Parameters ε. Für den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ schreiben wir formal

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, y(x,\varepsilon)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx \quad . \tag{1.28}$$

Die auf diese Weise definierte Diracsche δ-Funktion ist keine Funktion im Sinne der gewöhnlichen Analysis. Die Bildung des Grenzwertes $\varepsilon \to 0$ ist mit der Integration über x nicht vertauschbar.

Zur Berechnung des Grenzwertes (1.28) machen wir im Integral (1.27) die Substitution

$$x = \varepsilon\xi \tag{1.29}$$

und erhalten

$$F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon\xi)\, g(\xi)\, d\xi \tag{1.30}$$

mit

$$g(\xi) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{\xi^2 + 1} \tag{1.31}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, d\xi = 1 \quad . \tag{1.32}$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz des Integrals $F(\varepsilon)$ ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f die Funktion $F(\varepsilon)$ stetig, so daß in (1.30) der Limes $\varepsilon \to 0$ unter dem Integral ausgeführt werden kann.

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\, g(\xi)\, d\xi = f(0) \quad . \tag{1.33}$$

Für die durch (1.28) definierte Funktion haben wir somit das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0) \quad . \tag{1.34}$$

Für $f = 1$ ergibt sich insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \quad . \tag{1.35}$$

Anhand dieser Beziehung erkennen wir auch, daß die δ-Funktion nicht dimensionslos ist. Vielmehr gilt

$$\dim \delta(x) = \dim \frac{1}{x} \quad . \tag{1.36}$$

Wegen des Grenzwertes $\varepsilon \to 0$ in (1.28) kann man das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ auch durch eine Integration über ein kleines Intervall der Umgebung des Nullpunktes $(-a < x < +a)$ ersetzen,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0) \quad . \tag{1.37}$$

An Stelle der speziellen Glockenkurve (1.24) lassen sich für $y(x, \varepsilon)$ auch andere Funktionen wählen, die bei gleichem Vorgehen ebenfalls auf die δ-Funktion führen, z. B.

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-x^2/(2\varepsilon^2)} \quad , \tag{1.38}$$

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \left(\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon} \right)^2 \quad , \tag{1.39}$$

$$y(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad . \tag{1.40}$$

Für all diese Funktionen gilt nämlich ebenfalls

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\, g(\xi) \tag{1.41}$$

mit

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, d\xi = 1 \quad . \tag{1.42}$$

Zur Anwendung der δ-Funktion sei das folgende physikalische Beispiel angeführt.
Betrachtet man eine im Grenzfall punktförmige Ladung q, die sich an der Stelle $x = 0$ befinden soll, so läßt sich diese formal auch als kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(x)$ schreiben, wenn man

$$\rho(x) = q\, \delta(x) \tag{1.43}$$

setzt. Für die Gesamtladung ergibt sich dann nämlich

$$\int \rho(x)\,dx = \int q\,\delta(x)\,dx = q \quad . \tag{1.44}$$

Führt man in den Glockenkurven (1.24) eine Translation $x \to x - x'$ aus, so liegt das Maximum an der Stelle $x = x'$. In diesem Fall ersetzen wir in der Definitionsgleichung (1.28) $\delta(x)$ durch $\delta(x - x')$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x - x')\,dx = f(x') \quad . \tag{1.45}$$

Es wird der Wert der Funktion f an der Stelle x' herausprojeziert.
Die Beziehung (1.45) zeigt eine Analogie zwischen der Diracschen δ-Funktion für kontinuierliches x und dem Kronecker-Symbol $\delta_{xx'}$ für diskretes x. Denn aus

$$\delta_{xx'} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x' \\ 1 & \text{für } x = x' \end{cases} \tag{1.46}$$

folgt

$$\sum_x f_x\,\delta_{xx'} = f_{x'} \quad . \tag{1.47}$$

Die δ-Funktion kann als Erweiterung des Kronecker-Symbols für kontinuierliche x verstanden werden.

In mehreren Variablen $x_1, x_2, \cdots$ ist die δ-Funktion durch

$$\delta(x_1 - x_1',\, x_2 - x_2', \cdots) = \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\cdots \tag{1.48}$$

definiert. Sie hat die Eigenschaft

$$\int_G f(x_1, x_2, \cdots)\,\delta(x_1 - x_1',\, x_2 - x_2',\, \cdots)\,dx_1\,dx_2\,\cdots = f(x_1', x_2', \cdots) \quad . \tag{1.49}$$

Die Integration ist hierbei über ein Gebiet G zu erstrecken, das den Punkt $(x_1', x_2', \cdots)$ enthält.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der δ-Funktion behandeln. Ist $g(x)$ eine stetige Funktion mit nur einfachen Nullstellen x_n

$$g(x_n) = 0 \quad , \tag{1.50}$$

$$g'(x_n) \neq 0 \quad , \tag{1.51}$$

so gilt

$$\delta[g(x)] = \sum \frac{1}{|g'(x_n)|}\,\delta(x - x_n) \quad . \tag{1.52}$$

Die Summe in (1.52) erstreckt sich über die Nullstellen x_n. Wegen der bereits diskutierten Eigenschaft der δ-Funktion

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0) \tag{1.53}$$

genügt es bei der Auswertung des Integrals

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[g(x)]\,f(x)\,dx \tag{1.54}$$

allein die Beiträge zu, die von den Umgebungen der einzelnen Nullstellen x_n herrühren, zu betrachten,

$$I = \sum_n \int_{x_n-a}^{x_n+a} \delta[g(x)]\,f(x)\,dx \tag{1.55}$$

Hierbei ist a kleiner als der Abstand zwischen zwei Nullstellen. Mit Hilfe von

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \tag{1.56}$$

und daher

$$dx = \frac{dg}{g'(x)} \tag{1.57}$$

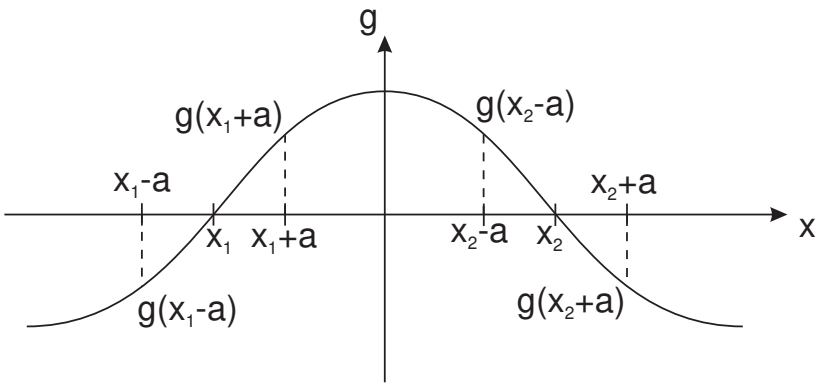
sowie der Umkehrfunktion $x = x(g)$ in den Umgebungen der Nullstellen lassen sich die einzelnen Beiträge als Integrale über g schreiben

$$I = \sum_n \int_{g(x_n-a)}^{g(x_n+a)} \delta(g)\,f[x(g)]\,\frac{dg}{g'[x(g)]} \quad . \tag{1.58}$$

Diese Integrale sind aber aufgrund der Definition der δ-Funktion gleich den Funktionswerten an den Stellen $g = 0$, so daß man mit $x(g = 0) = x_n$ erhält

$$I = \sum_n f(x_n)\,\frac{1}{|g'(x_n)|} \quad . \tag{1.59}$$

Das Betragszeichen bedarf einer besonderen Erläuterung. Wir betrachten die Funktion $g(x)$ mit ihren Nullstellen.



Es ist der Betrag von g' zu nehmen, weil bei negativer Neigung von g die Integration in der negativen g-Achse erfolgt $[g(x_2 - a) \to g(x_2 + a)]$. Den Ausdruck (1.59) können wir aber auch in der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\, \delta(x - x_n)\, f(x)\, dx \tag{1.60}$$

schreiben. Damit ist (1.52) bewiesen. Speziell folgt aus (1.52)

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\, \delta(x) \quad . \tag{1.61}$$

Setzt man insbesondere $\lambda = -1$, so ergibt sich, daß $\delta(x)$ eine gerade Funktion ist

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad . \tag{1.62}$$

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der δ-Funktion abzuleiten, ersetzen wir $f(x)$ durch das Produkt $g(x)\, f(x)$. Wir erhalten so

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, \delta(x)\, dx = g(0)\, f(0) = g(0) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx \quad . \tag{1.63}$$

Es gilt also

$$g(x)\, \delta(x) = g(0)\, \delta(x) \quad . \tag{1.64}$$

Wir können auch die Ableitung der δ-Funktion diskutieren. Zunächst bilden wir die Ableitung $\frac{d}{dx} y(x, \varepsilon)$ der Funktion $y(x, \varepsilon,)$. Es folgt

$$y'(x, \varepsilon) = -\frac{2}{\pi}\, \frac{\varepsilon x}{(\varepsilon^2 + x^2)^2} \quad . \tag{1.65}$$

Nun betrachten wir für differenzierbare Funktionen $f(x)$ die Integrale

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, y'(x, \varepsilon)\, dx \quad . \tag{1.66}$$

Den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ schreiben wir

$$I(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, y'(x,\varepsilon)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta'(x)\, dx \quad . \tag{1.67}$$

$\delta'(x)$ nennen wir die Ableitung der Diracschen δ-Funktion. Den Grenzwert berechnen wir durch partielle Integration

$$I(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x)\, y(x,\varepsilon)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, y(x,\varepsilon)\, dx \quad . \tag{1.68}$$

Wenn $f(x)\, y(x,\varepsilon)$ im Unendlichen verschwindet, ist der erste Term Null. Für den zweiten Term erhalten wir $-f'(0)$, also die negative Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0$. Es gilt demnach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta'(x)\, dx = -f'(0) \quad . \tag{1.69}$$

Wenn wir noch eine Translation um eine Strecke x' vornehmen, folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta'(x - x')\, dx = -f'(x') \quad . \tag{1.70}$$

1.4 Die Sprungfunktion

Wir betrachten nun die Integrale

$$Y(x,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{x} y(x',\varepsilon)\,dx' \quad . \tag{1.71}$$

Mit den zuerst angegebenen Glockenkurven ergibt sich

$$Y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2}\right) \quad . \tag{1.72}$$

Lassen wir den Parameter ε gegen Null gehen, so nähern sich diese Funktionen dem Einheitssprung

$$\Theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} Y(x,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad . \tag{1.73}$$

Diese Sprungfunktion können wir als Integral über die δ-Funktion bei variabler oberer Grenze schreiben

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')\,dx' \quad . \tag{1.74}$$

Dies bedingt auch, daß die δ-Funktion die Ableitung der Sprungfunktion ist, d. h.

$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx} \quad . \tag{1.75}$$

1.5 Der Satz von Gauß

Bereits im letzten Semester hatten wir im Zusammenhang mit dem Begriff der konservativen Kräfte und der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen den Satz von Stokes bewiesen:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot}\, \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad . \tag{1.76}$$

Hierbei geht der Weg entlang des Randes der betrachteten Fläche F.

Wir werden jetzt einen weiteren wichtigen Integralsatz behandeln, den Gaußschen Integralsatz. Er lautet: Es sei $\vec{E}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld und V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche $S(V)$, dann gilt

$$\int_V \text{div}\, \vec{E}(\vec{r}\,)\, d^3r = \oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} \quad . \tag{1.77}$$

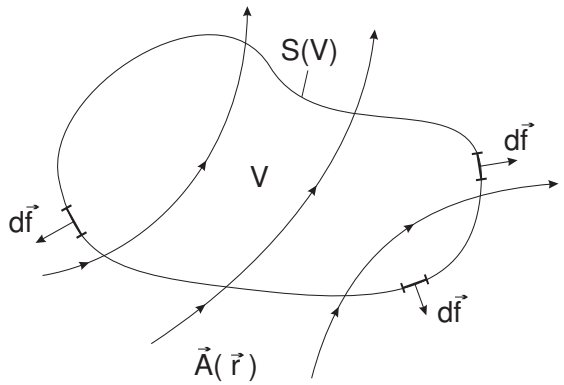
Zunächst wollen wir den Fluß durch eine Fläche S diskutieren. Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = (A_1(\vec{r}\,),\, A_2(\vec{r}\,),\, A_2(\vec{r}\,)) \tag{1.78}$$

und ein Volumen V mit der geschlossenen Oberfläche $S(V)$. In der Elektrodynamik benötigt man häufig ein Maß dafür, wie stark $\vec{A}(\vec{r}\,)$ die Oberfläche $S(V)$ von innen nach außen oder umgekehrt durchsetzt. Hierzu definieren wir den Fluß von $\vec{A}(\vec{r}\,)$ durch die Fläche S

$$\varphi_S(\vec{A}\,) = \int_S \vec{A}(\vec{r}\,) \cdot d\vec{f} \quad . \tag{1.79}$$

An jeder Stelle der Fläche S ist das Skalarprodukt aus dem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}\,)$ und dem Flächenelement $d\vec{f}$ zu bilden, wobei letzteres die Richtung der nach außen gerichteten Normalen hat. Der Fluß ist eine skalare Größe.



Zu einer näherungsweisen Berechnung zerlegen wir die Fläche S in viele kleine Flächenelemente $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$, wobei das Argument $\vec{r}_i$ angeben soll, an welcher Stelle auf S das Flächenelement zu finden ist. Es ist dann $\vec{A}(\vec{r}_i)\, \Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$ der Fluß durch das Flächenelement $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$. Sind die

Flächenelemente hinreichend klein, so können wir das Feld $\vec{A}$ auf Δf als homogen annehmen, also durch einen repräsentativen Wert $\vec{A}(\vec{r}_i)$ ersetzen. Einen Näherungsausdruck für den gesamten Fluß $\varphi_S(\vec{A})$ des Feldes A durch die Fläche S erhalten wir durch Addition der Teilflüsse durch die Flächen $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$

$$\varphi_S \simeq \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i)\,\Delta\vec{f}(\vec{r}_i) \quad . \tag{1.80}$$

Der Limes dieser Riemann-Summen heißt Flächenintegral

$$\varphi_S(\vec{A}) = \int\limits_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\vec{r})\,\Delta\vec{f}(\vec{r}_i) \quad . \tag{1.81}$$

Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert

$$\varphi_{S(V)}(\vec{A}) = \oint_{S(V)} \vec{A}\,(\vec{r}\,)\; d\vec{f} \quad . \tag{1.82}$$

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Fluß eines homogenen Feldes durch einen Quader der Länge a in x-Richtung, der Länge b in y-Richtung und der Länge c in z-Richtung. Es ist

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{1.83}$$

wobei $A_x,\ A_y$ und A_z jeweils konstant sind. Damit folgt

$$\begin{aligned} \oint_{S(V)} \vec{A}\, d\vec{f} &= \oint_{S(V)} (A_x\, df_x + A_y\, df_y + A_z\, df_z) \\ &= A_x cb - A_x cb + A_y ca - A_y ca + A_z ab - A_z ab \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.84}$$

Der Fluß eines homogenen Feldes durch einen Quader ist also Null. Dies läßt sich bei homogenen Flächen verallgemeinern. Das, was in das Volumen V hineinfließt, fließt auch wieder heraus. Die Größe

$$D = \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E}\, d\vec{f} \tag{1.85}$$

nennt man die mittlere Quelldichte des Feldes $\vec{E}$ in ΔV. Wir betrachten nun den Grenzübergang $\Delta V \to 0$ und können damit auch die Divergenz eines Feldes definieren,

$$\text{div}\ \vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\ \frac{1}{\Delta V} \oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E}\, d\vec{f} \quad . \tag{1.86}$$

Wir betrachten eine Folge von Volumina ΔV_n, die um den Punkt $\vec{r}_0$ zentriert sein mögen und sich für $n \to \infty$ auf diesem zusammenziehen. Der Einfachheit halber denken wir dabei an Quader

mit den Kantenlängen $\Delta x_n,\, \Delta y_n,\, \Delta z_n$, die für $n \to \infty$ gegen Null streben. Es sei

$$\begin{aligned} \Delta\vec{f}_1 &= \Delta y\, \Delta z\, \vec{e}_x = -\Delta\vec{f}_2 \quad , & (1.87)\\ \Delta\vec{f}_3 &= \Delta x\, \Delta z\, \vec{e}_y = -\Delta\vec{f}_4 \quad , & (1.88)\\ \Delta\vec{f}_5 &= \Delta x\, \Delta y\, \vec{e}_z = -\Delta\vec{f}_6 \quad . & (1.89) \end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec{E}$ durch die Quaderflächen gilt

$$\begin{aligned} \oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E}\, d\vec{f} &= \int\int dy\, dz \left[E_x\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right) - E\left(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)\right] \\ &\quad + \int\int dx\, dz \left[E_y\left(x, y_0 + \frac{1}{2}\Delta y, z\right) - E_y\left(x, y_0 - \frac{1}{2}\Delta y, z\right)\right] \\ &\quad + \int\int dx\, dy \left[E_z\left(x, y, z_0 + \frac{1}{2}\Delta z\right) - E_z\left(x, y, z_0 - \frac{1}{2}\Delta z\right)\right] \quad . (1.90) \end{aligned}$$

Auf den Integranden wenden wir nun die Taylor-Entwicklung an. Es folgt

$$\begin{aligned} \oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E}\, d\vec{f} &= \int\int dy\, dz \left[\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y, z)\, \Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right] \\ &\quad + \int\int dx\, dz \left[\frac{\partial E_y}{\partial y}(x, y_0, z)\, \Delta y + \mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right] \\ &\quad + \int\int dx\, dy \left[\frac{\partial E_z}{\partial z}(x, y, z_0)\, \Delta z + \mathcal{O}\left(\Delta z^3\right)\right] \quad . \qquad (1.91) \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und

$$\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \qquad (1.92)$$

können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{S(\Delta V)} \vec{E}\, d\vec{f} &= \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_1, z_1) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x_2, y_0, z_2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \\ &\quad + \frac{\partial E_z}{\partial z}(x_3, y_3, z_0) + \mathcal{O}(\Delta z^2) \quad . \qquad (1.93) \end{aligned}$$

Dabei gilt für die Punkte

$$\begin{aligned} x_2, x_3 &\in \left[x_0 - \frac{1}{2}\Delta x,\, x_0 + \frac{1}{2}\Delta x\right] \quad , \\ y_1, y_3 &\in \left[y_0 - \frac{1}{2}\Delta y,\, y_0 + \frac{1}{2}\Delta y\right] \quad , \\ z_1, z_2 &\in \left[z_0 - \frac{1}{2}\Delta z,\, z_0 + \frac{1}{2}\Delta z\right] \quad . \qquad (1.94) \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\Delta V \to 0$ müssen diese Zwischenwerte gegen $x_0,\ y_0$ bzw. z_0 streben und die Korrekturterme verschwinden. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{\partial E_x}{\partial x}(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(\vec{r}_0) \\ &= \text{div } \vec{E}(\vec{r}_0) \quad . \end{aligned} \tag{1.95}$$

Wir haben damit näherungsweise für endliches ΔV gefunden

$$\oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \Delta V \text{ div } \vec{E}(\vec{r}\,) + \cdots \quad , \tag{1.96}$$

wobei der mit $\cdots$ angegebene Rest beim Grenzübergang $\Delta V \to 0$ verschwindet. Wir legen nun an ein erstes Teilvolumen $\Delta V(\vec{r}_i)$ einen weiteren Quader, $\Delta V_{i+1}(\vec{r}_{i+1})$, der mit ΔV_i eine Seitenfläche gemeinsam haben möge

$$\oint\limits_{S(\Delta V_i)} \vec{E} \cdot d\vec{f} + \oint\limits_{S(\Delta V_{i+1})} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \Delta V_i \text{ div } \vec{E}(\vec{r}_i) + \Delta V_{i+1} \text{ div } \vec{E}(\vec{r}_{i+1}) \quad . \tag{1.97}$$

Der Beitrag der gemeinsamen Seitenflächen zu den Flächenintegralen auf der linken Seite der Gleichung hebt sich wegen der entgegengesetzten Richtungen der entsprechenden Flächennormalen gerade heraus. Es bleibt das Oberflächenintegral über die Einhüllende des Gesamtvolumens.
Zusammengefaßt folgt damit insgesamt

$$\oint\limits_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \text{ div } \vec{E}(\vec{r}_i)\, \Delta V_i + \cdots \tag{1.98}$$

Im Grenzfall $n \to \infty$ haben wir es auf der rechten Seite mit einer Riemann-Summe zu tun, und es folgt der Satz von Gauß

$$\int\limits_{V} \text{ div } \vec{E}(\vec{r}\,)\, d^3r = \oint\limits_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} \quad . \tag{1.99}$$

1.6 Ladung und Stromdichte

Wir hatten bereits die Ladung als vierte Grundgröße neben der Masse, der Länge und der Zeit eingeführt. Für die Ladung gilt ein strenger Erhaltungssatz: In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aus positiver und negativer Ladung konstant. Die Ladung tritt als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e auf.

$$Q = n\,e \quad ; \qquad n \in \mathcal{R} \quad . \tag{1.100}$$

Bewegte Ladungen führen zu einem elektrischen Strom. Wir führen die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,)$ ein. Der Einheitsvektor $\vec{j}/|\vec{j}|$ ist die Normale in Bewegungsrichtung der fließenden Ladung. Der Betrag $|\vec{j}|$ gibt die Ladung an, die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung transportiert wird. Bei einer homogenen Verteilung von N Teilchen der Ladung q über ein Volumen V, die alle gleiche Geschwindigkeit $\vec{v}$ aufweisen, folgt

$$\vec{j} = nq\vec{v} \tag{1.101}$$

mit

$$n = \frac{N}{V} \quad . \tag{1.102}$$

Als Stromstärke I durch eine vorgegebene Fläche F bezeichnet man dann das Flächenintegral

$$I = \int\limits_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad . \tag{1.103}$$

Die Einheit ist das Ampère. Ein Strom der Stärke 1A transportiert in 1s die Ladung 1C.

Wir wollen jetzt einige Anwendungen des Gaußschen Satz behandeln. Zunächst betrachten wir das spezielle Vektorfeld rot $\vec{A}$, also ein Wirbelfeld. Für den Wirbelfluß durch eine geschlossenen Fläche folgt

$$\oint\limits_{S(V)} \text{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{f} = \int\limits_V \underbrace{\text{div rot}\,\vec{A}}_{=0}\, d^3r = 0 \quad . \tag{1.104}$$

Als weitere Anwendung betrachten wir die Stromdichte $\vec{j}$ (Strom pro Fläche). Dann ist $\oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{f}$ der Strom durch die Oberfläche des Volumens V. Ist schließlich ρ die Ladungsdichte (Ladung pro Volumen) und damit $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, d^3r$ die zeitliche Änderung der Gesamtladung im Volumen V, dann muß die zeitliche Änderung der Ladung in dem Volumen V dem Ladungsstrom durch die Oberfläche entgegengesetzt gleich sein, d. h.

$$\int\limits_V d^3r\, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \oint\limits_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0 \quad . \tag{1.105}$$

Mit dem Gaußschen Satz ergibt sich damit

$$\int d^3r \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) = 0 \quad . \tag{1.106}$$

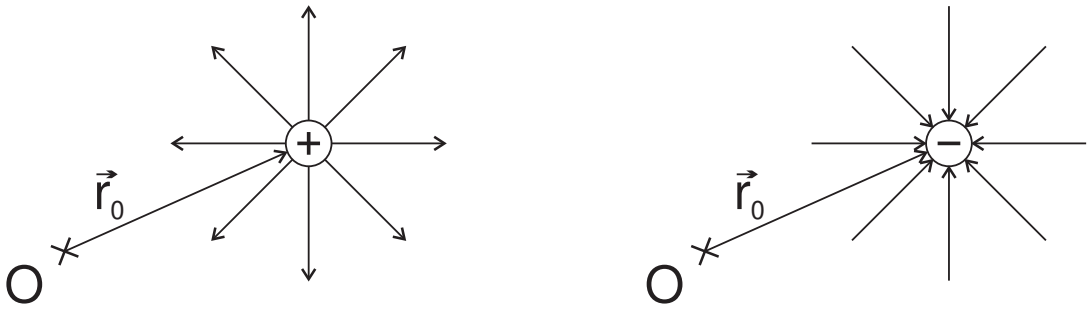
Diese Relation gilt für beliebige Volumina V, was nur richtig sein kann, wenn gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad . \tag{1.107}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung, es ist eine der fundamentalen Gleichungen in der Physik.

1.7 Feldlinien

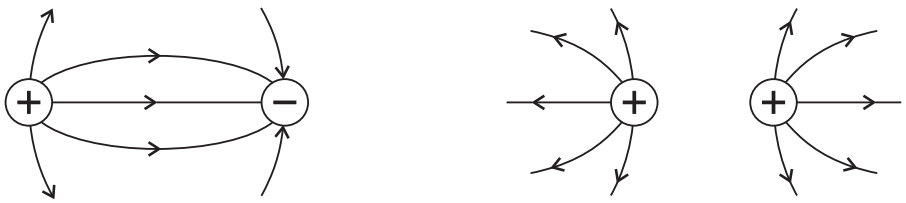
Unter Feldlinien versteht man Bahnen, auf denen sich ein kleiner, positiv geladener Körper aufgrund der Coulomb-Kraft zwischen Ladungen fortbewegen würde. Das elektrische Feld einer Punktladung ist ein Zentralfeld. Demgemäß sind die Feldlinien von Punktladungen radial.



In jedem Raumpunkt $\vec{r}$ liegt das Feld

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = q\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \tag{1.108}$$

tangential an der dort existierenden Feldlinie. Nähert man zwei Punktladungen einander, so beeinflussen sich die Kraftlinien, da der die Linien durch seine Bahn definierende Probekörper nun unter dem Einfluß beider Punktladungen steht.



Feldlinien starten in positiven und enden in negativen Ladungen.

1.8 Das Potential

Wir hatten für die elektrische Feldstärke einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,')$ geschrieben

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad . \tag{1.109}$$

Wir werden jetzt einen Ausdruck für das elektrische Potential ableiten. Ähnlich wie wir im Rahmen der Newtonschen Mechanik einen Zusammenhang zwischen der Gravitationskraft und dem Potential erarbeitet haben, können wir auch in der Elektrostatik eine Relation zwischen der elektrischen Feldstärke und dem Potential ableiten. Hierzu nutzen wir aus, daß wir schreiben können

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{1.110}$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} & \frac{(x-x',\,y-y',\,z-z')}{\left(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)^3} \\ = \quad & -\left(\frac{\partial}{\partial x},\,\frac{\partial}{\partial y},\,\frac{\partial}{\partial z},\right)\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \quad . \end{aligned} \tag{1.111}$$

Damit läßt sich das statische elektrische Feld als Gradientenfeld schreiben. Wir setzen

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = -\vec{\nabla}\,\Phi\,(\vec{r}\,) \quad . \tag{1.112}$$

Damit folgt für das so definierte elektrische Potential

$$\Phi(\vec{r}\,) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad . \tag{1.113}$$

Analog zum Newtonschen Gravitationskraftfeld ist auch die Coulomb-Kraft konservativ. Die Coulomb-Kraft ist eine Zentralkraft. Es gilt

$$\text{rot}\,(q\vec{E}\,) = 0 \quad . \tag{1.114}$$

Damit folgt, die Coulomb-Kraft ist aus einem Potential ableitbar,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\,V \tag{1.115}$$

mit

$$V(\vec{r}\,) = q\,\Phi(\vec{r}\,) \quad . \tag{1.116}$$

Das Linienintegral über $\vec{E}$ muß wegunabhängig sein

$$\Phi(\vec{r}\,) - \Phi(\vec{r}_0) = -\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' \quad . \tag{1.117}$$

Man bezeichnet diese Potentialdifferenz als Spannung $U(\vec{r}, \vec{r}_0)$. Die Einheiten von U und von Φ sind das Volt.

Für das Feld von N Punktladungen

$$\rho(\vec{r}\,') = \sum_{j=1}^{N} q_j \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_j) \tag{1.118}$$

ist das Potential

$$\Phi(\vec{r}\,) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad . \tag{1.119}$$

Das Potential ist eine skalare Größe. Jedoch sei bereits wieder an dieser Stelle deutlich darauf hingewiesen, daß das Potential keinesfalls eindeutig ist. Z. B. kann man ein beliebiges konstantes Feld zu $\Phi(\vec{r}\,)$ addieren, ohne die Feldstärke oder die Kraft zu ändern. Vielmehr bedarf es einer zusätzlichen konkreten Eichung, um das Potential eindeutig zu fixieren.

Um die Grundgesetze der Elektrostatik abzuleiten, müssen wir zunächst weitere mathematische Vorbereitungen treffen. Wir beweisen die folgende Darstellung der dreidimensionalen δ-Funktion

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi} \, \Delta \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad . \tag{1.120}$$

Für $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$ gilt: $\quad \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = 0$. Dies muß verifiziert werden,

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} &= \text{div grad} \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \text{div} \, \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, \text{div} \, (\vec{r} - \vec{r}\,') + (\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot \text{grad} \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \\ &= \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} - 3(\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^4} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.121}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß gilt

$$\text{div} \, \vec{r} = 3 \quad . \tag{1.122}$$

Weiterhin gilt für die δ-Funktion

$$\int\limits_V d^3r \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \vec{r}\,' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \tag{1.123}$$

Auch diese Relation wollen wir verifizieren. Dazu substituieren wir

$$\overline{r} = |\vec{r} - \vec{r}\,'| \quad . \tag{1.124}$$

Es folgt

$$\int\limits_V d^3r\, \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int\limits_{\overline{V}} d^3\overline{r}\, \Delta_{\overline{r}} \frac{1}{\overline{r}} \quad . \tag{1.125}$$

Für $\overline{r} \neq 0$ ist der Integrand Null. Dies führt zu der ersten Schlußfolgerung

$$\int\limits_{\overline{V}} d^3\overline{r}\, \Delta_{\overline{r}} \frac{1}{\overline{r}} = 0 \qquad \text{für } \overline{r} = 0 \notin \overline{V} \quad . \tag{1.126}$$

Enthält $\overline{V}$ den Nullpunkt, so können wir offensichtlich, ohne den Wert des Integrals zu ändern, $\overline{V}$ durch eine Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, ersetzen.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\overline{V}} d^3\overline{r}\, \Delta_{\overline{r}} \frac{1}{\overline{r}} &= \int\limits_{V_k} d^3\overline{r}\ \text{div}\left(\text{grad}_{\,\overline{r}} \frac{1}{\overline{r}}\right) = \int\limits_{S(V_k)} d\vec{\overline{f}} \cdot \left(-\frac{1}{\overline{r}^2}\, \vec{e}_{\overline{r}}\right) \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\overline{\varphi} \int\limits_0^{\pi} \sin\overline{\vartheta}\, d\overline{\vartheta}\ \ \overline{r}_0^2\, \vec{e}_{\overline{r}} \cdot \left(-\frac{1}{\overline{r}_0^2}\, \vec{e}_{\overline{r}}\right) = -4\pi \quad . \end{aligned} \tag{1.127}$$

$\overline{r}_0$ ist der Radius der Kugel. Ferner haben wir den Gaußschen Satz ausgenutzt und für das Flächenelement auf der Kugeloberfläche geschrieben

$$d\vec{\overline{f}} = d\overline{\varphi}\, \sin\overline{\vartheta}\, d\,\overline{\vartheta}\, \overline{r}_0^2\, \vec{e}_{\overline{r}} \quad . \tag{1.128}$$

Wir haben also insgesamt gefunden

$$\int\limits_V d^3r\, \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \begin{cases} -4\pi & \text{falls} \quad \vec{r}\,' \in V \quad , \\ 0 & \text{falls} \quad \vec{r}\,' \notin V \quad . \end{cases} \tag{1.129}$$

Dies entspricht gerade der geforderten Bedingung.

1.9 Grundgleichungen der Elektrostatik

Wir leiten jetzt die fundamentalen Feldgleichungen für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ her.

Wir betrachten den Fluß der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}\,)$ durch die Oberfläche $S(V)$ eines vorgegebenen Volumens V

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{f} &= \int d^3r'\rho(\vec{r}\,') \int\limits_{S(V)} d\vec{f}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \\
&= -\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') \int\limits_{S(V)} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}_r\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= -\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') \int\limits_{V} d^3r\,\Delta_r\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= -\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')(-4\pi) \int\limits_{V} d^3r\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \\
&= 4\pi\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') = 4\pi\,q \quad . \qquad (1.130)
\end{aligned}$$

Bei dieser Ableitung haben wir vom Gaußschen Satz Gebrauch gemacht. Ebenso wurde die zwar abgeleitete Darstellung der δ-Funktion verwendet. Zusammenfassend haben wir das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik abgeleitet

$$\int\limits_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{f} = 4\pi\,q \quad . \qquad (1.131)$$

Wir wenden nochmals den Gaußschen Satz an. Es folgt

$$\int\limits_{V} d^3r(\text{div}\;\vec{E} - 4\pi\rho(\vec{r}\,)) = 0 \quad . \qquad (1.132)$$

Dieses Resultat gilt für beliebige Volumina. Infolgedessen muß gelten

$$\text{div}\;\vec{E}(\vec{r}\,) = 4\pi\rho(\vec{r}\,) \quad . \qquad (1.133)$$

Damit haben wir eine erste Feldgleichung abgeleitet. Sie drückt die Tatsache aus, daß die Quellen des elektrischen Feldes die elektrischen Ladungen sind.

Die zweite Feldgleichung sagt aus, daß das elektrostatische Feld wirbelfrei ist. Wir können den Stokesschen Satz anwenden und finden

$$\int\limits_{C} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{F} \text{rot}\;\vec{E}\cdot d\vec{f} = 0 \quad . \qquad (1.134)$$

Die Zirkulation des $\vec{E}$-Feldes längs eines beliebigen geschlossenen Weges verschwindet.

Wir fassen die essentiellen Gesetze nochmals zusammen.

Differentielle Darstellung

$$\text{div}\ \vec{E} \;=\; 4\pi\rho \quad . \tag{1.135}$$

$$\text{rot}\ \vec{E} \;=\; 0 \quad . \tag{1.136}$$

Integrale Darstellung

$$\int\limits_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{f} \;=\; 4\pi\, q \quad , \tag{1.137}$$

$$\int\limits_{C(F)} \vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; 0 \quad . \tag{1.138}$$

Mit

$$\vec{E} = -\text{grad}\ \Phi \tag{1.139}$$

erhalten wir aus (1.135) die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}\,) = -4\pi\,\rho(\vec{r}\,) \quad . \tag{1.140}$$

Die Lösung dieser linearen, inhomogenen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist ein Grundproblem der Elektrostatik.

Falls $\rho(\vec{r}\,')$ für alle $\vec{r}\,'$ bekannt ist und keine Randbedingungen für $\Phi(\vec{r}\,')$ im Endlichen vorliegen, dann läßt sich die Poisson-Gleichung sofort lösen

$$\Phi(\vec{r}\,) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad . \tag{1.141}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\vec{r}\,) \;&=\; \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\Delta_r\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\\ &=\; -4\pi\int d^3r'\rho(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -4\pi\rho(\vec{r}\,) \quad .\end{aligned} \tag{1.142}$$

Häufig jedoch ist die Situation eine andere: $\rho(\vec{r}\,')$ ist in einem endlichen Volumen V gegeben, und die Werte für $\Phi(\vec{r}\,')$ oder für die Ableitungen von $\Phi(\vec{r}\,)$ sind auf der Oberfläche $S(V)$ bekannt. Gesucht wird dann das Potential $\Phi(\vec{r}\,)$ für alle $r \in V$. Man spricht dann von einem Randwertproblem der Elektrostatik. Ist der Raumbereich ladungsfrei, so gilt die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}\,) = 0 \quad . \tag{1.143}$$

Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung läßt sich als Summe einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung und der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung darstellen.

1.10 Elektrostatische Feldenergie

Wir betrachten die Arbeit, um die Punktladung q im Feld $\vec{E}(\vec{r}\,)$ vom Punkt A nach dem Punkt B zu verschieben. Die geleistete Arbeit nennen wir W_{AB}. Wir gehen aus von der Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = q\,\vec{E}(\vec{r}\,) \quad . \tag{1.144}$$

Für die Arbeit folgt

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= q\int_A^B d\phi = q\,[\phi(B)-\phi(A)] = q\,U_{AB} \quad . \end{aligned} \tag{1.145}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß gilt

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\phi \tag{1.146}$$

und daher

$$-\vec{E}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\phi\; dx_i = d\phi \quad . \tag{1.147}$$

Die Arbeit wird positiv gezählt, wenn sie an dem System geleistet wird.

Die Wechselwirkungsenergie einer auf einen endlichen Raumbereich beschränkten Ladungskonfiguration $\rho(\vec{r}\,)$ entspricht der Arbeit, um Ladungen aus dem Unendlichen mit der willkürlichen Eichung $\phi(\infty) = 0$ zu dieser Konfiguration zusammenzuziehen.

Wir untersuchen zunächst das Feld von N Punktladungen. $(i-1)$ Punktladungen q_j mit $j = 1, \cdots, i-1$ an den Orten $\vec{r}_j$ erzeugen am Ort $\vec{r}_i$ das Potential

$$\phi(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad . \tag{1.148}$$

Die Arbeit, um die i-te Ladung q_i von ∞ nach $\vec{r}_i$ zu bringen, ist dann

$$W_i = q_i\,\phi(\vec{r}_i) \quad . \tag{1.149}$$

Wir summieren nun diese Teilarbeiten W_i von $i = 2$ bis $i = N$ auf. Die erste Ladung $(i = 1)$ wird mit dem Arbeitsaufwand Null von ∞ nach $\vec{r}_1$ verschoben, da der Raum noch feldfrei ist. Es folgt für die Gesamtarbeit

$$W = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i\,q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i\,q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad . \tag{1.150}$$

Im letzten Schritt haben wir von der Symmetrie des Ausdruckes Gebrauch gemacht. Wir gehen nun über zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen.

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen erhalten wir

$$W = \frac{1}{2} \int \int d^3r \; d^3r' \; \frac{\rho(\vec{r}\,)\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \; \rho(\vec{r}\,)\,\phi(\vec{r}\,) \quad . \tag{1.151}$$

$\phi(\vec{r}\,)$ ist das von der Ladungsdichte ρ selbst erzeugte elektrostatische Potential. Man kann W statt durch ρ und ϕ auch durch die elektrische Feldstärke ausdrücken. Es ist

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3r \; \rho(\vec{r}\,)\,\phi(\vec{r}\,) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\Delta\phi)\phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \; \text{div}\,(\phi\,\vec{\nabla}\phi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{\nabla}\phi)^2 \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d\vec{f} \cdot (\phi\,\vec{\nabla}\phi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{\nabla}\phi)^2 \quad . \end{aligned} \tag{1.152}$$

Hierbei haben wir von der Poisson-Gleichung und vom Gaußschen Satz Gebrauch gemacht. Das Flächenintegral über eine im Unendlichen liegenden Oberfläche verschwindet, denn es ist

$$\phi \sim \frac{1}{r} \quad , \qquad \phi\,\vec{\nabla}\phi \sim \frac{1}{r^3} \quad , \qquad df \sim r^2 \quad . \tag{1.153}$$

Damit verbleibt

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \, |\vec{E}(\vec{r}\,)|^2 \quad . \tag{1.154}$$

Im Integranden steht die Energiedichte des elektrostatischen Feldes.

$$w = \frac{1}{8\pi} \, |\vec{E}|^2 \quad , \tag{1.155}$$

und es ist

$$W = \int d^3r \, w \quad . \tag{1.156}$$

Der soeben abgeleitete Ausdruck für die Energie im elektrostatischen Feld beinhaltet auch die Selbstenergie eines geladenen Teilchens. Beim Übergang von der diskreten Formulierung der Wechselwirkungsenergie zur kontinuierlichen Form haben wir nicht Gebrauch gemacht von der einschränkenden Bedingung $i \neq j$. Dies führt jedoch zu nicht behebbaren Schwierigkeiten im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. Betrachten wir als Beispiel die elektrische Feldstärke einer Punktladung mit der Ladung e.

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{e}{r^2} \, \vec{e}_r \quad . \tag{1.157}$$

Damit folgt für die Energie im Feld dieser Ladung

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int r^2 \, dr \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, \frac{e^2}{r^4} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{e^2}{r^2} \, dr = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \Big|_{r \to 0}^{\infty} \longrightarrow \infty \quad . \end{aligned} \tag{1.158}$$

Dieses Integral divergiert also im Bereich $r \to 0$. Formal ist die Gesamtenergie, die im Feld einer Punktladung enthalten ist, im Rahmen der klassischen Elektrodynamik unendlich. Erst im Rahmen der Quantenelektrodynamik kann auf diese Frage eine formal befriedigende Antwort gegeben werden. Die Selbstenergie in der Quantenelektrodynamik ist endlich.

Wir können uns im Rahmen der klassischen Elektrodynamik bereits die Frage stellen, bis zu welchem minimalen Radiuswert r wir integrieren müssen, damit die Gesamtenergie im elektrischen Feld der Punktladung der Masse m der Punktladung entspricht. Es folgt

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{r} = mc^2 \quad . \tag{1.159}$$

Dahinter steht die Vorstellung, daß die Gesamtmasse einer Punktladung rein elektrischer Natur ist und durch die Feldenergie gegeben ist. Betrachten wir speziell ein Elektron mit

$$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \, \mathrm{kg} \quad ,$$

so folgt, wenn man etwas willkürlich den Faktor $\frac{1}{2}$ unbeachtet läßt und nur eine Kombination von Naturkonstanten in Betracht zieht, für den sogenannten klassischen Elektronenradius

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.81794092 \, \mathrm{fm} \tag{1.160}$$

mit

$$1 \, \mathrm{fm} = 10^{-15} \, \mathrm{m} \quad . \tag{1.161}$$

Es muß jedoch erneut betont werden, daß dies eine reine Kombination von Naturkonstanten ist. Aus gegenwärtigen Präzisionsexperimenten schließen wir, daß ein möglicher Radius des Elektrons kleiner als 10^{-3} fm ist.

Wir führen einige häufig verwendete Ladungsverteilungen im Rahmen des Mikrokosmos an. Speziell untersuchen wir die Ladungsverteilungen von Atomkernen mit der Gesamtladung $Q = Ze$. Z ist die Ordnungszahl eines Atoms und gibt die Zahl der Protonen in einem Atomkern an. Es gilt $1 \leq Z \leq 112$.

a) Punktladung
Es ist

$$\rho(\vec{r}\,) = Ze\,\delta(\vec{r}\,) \quad . \tag{1.162}$$

Für das Potential folgt

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{Ze}{|\vec{r}\,|} = \frac{Ze}{r} \quad . \tag{1.163}$$

b) Geladene Kugelschale
Es gilt mit dem Radius R der Kugelschale

$$\rho(\vec{r}\,) = \frac{Ze}{4\pi R^2}\,\delta(r-R) \quad . \tag{1.164}$$

Das Potential läßt sich aus den analogen Betrachtungen der Newtonschen Gravitationstheorie übernehmen

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{Ze}{R}\,\Theta(R-r) + \frac{Ze}{r}\,\Theta(r-R) \quad . \tag{1.165}$$

Das Potential ist also im Inneren der Kugelschale konstant und nimmt den Wert am Kugelradius an.

c) Homogen geladene Kugel
Hier haben wir

$$\rho(\vec{r}\,) = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\Theta(R-r) \quad . \tag{1.166}$$

d) Exponentialverteilung
Insbesondere für $Z = 1$ gilt

$$\rho(\vec{r}\,) = Ze\,\rho_0\,\exp\{-r/a\} \quad . \tag{1.167}$$

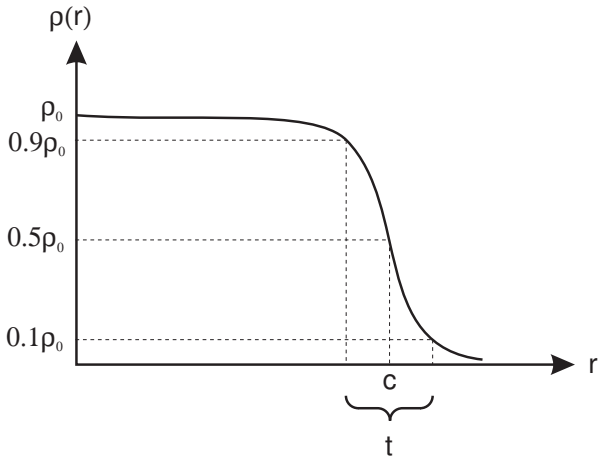
Die Normierungskonstante ρ_0 bestimmt die Ladungsdichte am Ursprung für $r \to 0$. ρ_0 läßt sich trivial bestimmen aus der Normierungsbedingung

$$\int \rho(\vec{r}\,)\,d^3r = Ze \quad . \tag{1.168}$$

e) Fermi-Verteilung

$$\rho(\vec{r}\,) = \frac{N\,Ze}{1+\exp\{4\ln 3\,\frac{r-c}{t}\}} \tag{1.169}$$

Dies ist eine sehr realistische Beschreibung für die Ladungsverteilung von Atomkernen. N ist wiederum eine Normierungskonstante, die leider nicht geschlossen analytisch bestimmt werden kann und daher numerisch ermittelt werden muß. Der Parameter c ist der Halbdichteradius. Er gibt an, bei welchem Wert von r die Dichte $\rho(\vec{r}\,)$ auf 50 % ihres Wertes am Ursprung abgefallen ist. Der Parameter t kennzeichnet die Oberflächendicke der Ladungsverteilung. Er gibt den Bereich an, in dem die Ladungsdichte von 90% des Wertes am Ursprung $(\rho_0 = \rho(r = 0))$ auf 10% des Wertes am Ursprung abgefallen ist.



Die Konstante $4 \ln 3$ ist gerade so bestimmt, daß der Parameter t die ihm zugewiesene Rolle übernimmt.

f) Gauss-Verteilung

$$\rho(\vec{r}\,) = Ze\,\rho_0\,\exp\{-r^2/a^2\} \quad . \tag{1.170}$$

Für leichte Atomkerne ist dies eine häufig verwendete Variante.

Auch die Ladungsdichteverteilung von Elektronen in Atomen lassen sich in recht guter Näherung durch einfache analytische Funktionen repräsentieren. So gilt beispielsweise für die Elektronenladungsdichte im Wasserstoff-Atom

$$\rho_e(\vec{r}\,) = -\frac{e}{\pi a^3}\,\exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \quad . \tag{1.171}$$

Die Konstante a ist der Bohrsche Radius und hat den Wert

$$a = 0,529177249 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \quad .$$

Um die verschiedenen funktionalen Abhängigkeiten der Ladungsverteilungen hinsichtlich des Radius vergleichen zu können, führt man als Maß für den Radius den mittleren quadratischen

Radius ein. Es ist für sphärisch symmetrische Verteilungen

$$\begin{aligned}\langle r^2\rangle^{1/2} &= \left[\frac{4\pi \int\limits_0^\infty \rho(r)\, r^2\; r^2\, dr}{4\pi \int\limits_0^\infty \rho(r)\, r^2\, dr}\right]^{1/2} = \left[\frac{4\pi}{Ze}\int\limits_0^\infty \rho(r)\, r^2\; r^2\, dr\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{4\pi}{Ze}\int\limits_0^\infty \rho(r)\, r^4\, dr\right]^{1/2} \quad . \end{aligned} \tag{1.172}$$

$\langle r^2\rangle^{1/2}$ bezeichnet den root-mean-square radius. Speziell folgt für die Ladungsverteilung einer Kugelschale

$$\langle r^2\rangle^{1/2} = \left[\frac{4\pi}{Ze}\int\limits_0^\infty \frac{Ze}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)\, r^4\, dr\right]^{1/2} = [R^2]^{1/2} = R \quad . \tag{1.173}$$

Die Wurzel aus dem mittleren quadratischen Radius ist also mit dem Radius der Kugelschale identisch. Hingegen folgt für die Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel

$$\langle r^2\rangle^{1/2} = \left[\frac{4\pi}{Ze}\int\limits_0^\infty \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3}R^3}\,\Theta(r-R)\, r^4\; dr\right]^{1/2} = \left[\frac{3}{R^3}\,\frac{1}{5}\, r^5\Big|_0^R\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{5}}\, R \quad . \tag{1.174}$$

1.11 Grenzflächen

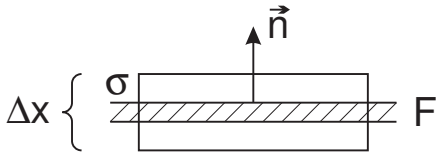
Als nächstes Problem der Elektrostatik untersuchen wir das Verhalten der elektrischen Feldstärke an Grenzflächen, die eine Flächenladungsdichte σ tragen. Für die Flächenladungsdichte gilt

$$\dim \sigma = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{1.175}$$

und weiter

$$q = \int\limits_{\Delta F} \sigma(\vec{r})\, df \quad . \tag{1.176}$$

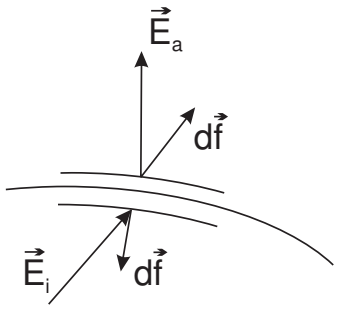
Wir legen zunächst um die Grenzfläche ein sogenanntes Gaußsches Kästchen mit dem Volumen ΔV. Die Kante senkrecht zur Grenzfläche habe die Länge Δx, die wir im Grenzprozeß gegen Null gehen lassen.



Mit dem Gaußschen Gesetz folgt

$$\oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot \vec{n}\, df = 4\pi\, q = 4\pi \int\limits_{\Delta F} \sigma(\vec{r})\; df \quad . \tag{1.177}$$

Das Integral erstreckt sich über die Oberfläche $S(\Delta V)$ des Volumenelements ΔV, welches das Flächenelement ΔF umschließt. Wir wählen nun das Volumenelement als Quader mit vernachlässigbarer Dicke, so daß der Fluß des $\vec{E}$-Feldes durch die Seitenflächen vernachlässigbar ist.



Es folgt nun

$$\oint\limits_{S(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \quad \Delta F\; \vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \quad . \tag{1.178}$$

Ebenso gilt

$$\oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int\limits_{\Delta F} \sigma(\vec{r})\, df = 4\pi\, \sigma(\vec{r})\, \Delta F \quad . \tag{1.179}$$

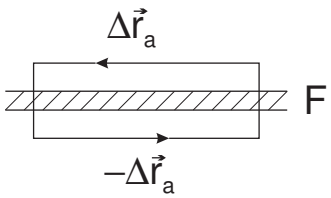
Der Vergleich ergibt

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 4\pi\sigma \quad . \tag{1.180}$$

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes verhält sich an der Grenzfläche also unstetig, falls $\sigma \neq 0$ ist. Die Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes ändert sich beim Durchgang durch eine geladene Fläche sprungartig um den Betrag $4\pi\sigma$.

Um das Verhalten der Tangentialkomponente zu untersuchen, verwenden wir den Stokesschen Satz. Da die elektrische Feldstärke aus einem Potential herleitbar ist, wissen wir, daß das Umlaufintegral verschwindet,

$$\int\limits_{\Delta F} \mathrm{rot}\vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint\limits_{C(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \quad . \tag{1.181}$$



Wir integrieren nun auf einem geschlossenen Weg parallel zu der Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes auf der Oberfläche ΔF. Der Betrag von den Stirnseiten zum Linienintegral sei wieder vernachlässigbar, und wir erhalten

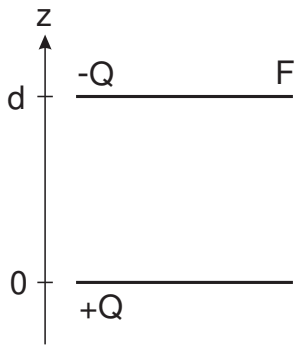
$$\oint\limits_{C(\Delta F)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \Delta\vec{r}_a = 0 \quad . \tag{1.182}$$

Daraus folgt

$$\vec{E}_{a,t} = \vec{E}_{i,t} \quad . \tag{1.183}$$

Die Tangentialkomponenten des $\vec{E}$-Feldes ändern sich beim Durchgang durch die geladenen Grenzflächen nicht.

1.12 Der Kondensator



Unter einem Kondensator versteht man ein System von zwei parallel zueinander angeordneten Platten mit dem Abstand d und der Fläche F. Die beiden Platten tragen homogen verteilt die entgegengesetzt gleich großen Ladungen $\pm Q$. Die Flächenladungsdichte beträgt dann

$$\sigma = \frac{Q}{F} \quad . \tag{1.184}$$

Zur Vereinfachung des Problems vernachlässigen wir die Streufelder am Kondensatorrand. Wir nehmen ferner an, daß außerhalb des Kondensators das Feld verschwindet. Die zwischen den Platten herrschende Feldstärke können wir berechnen, indem wir für eine Platte das Gaußsche Gesetz anwenden. Es ist

$$(\vec{E}_i - \vec{E}_a) \cdot \vec{n} = \vec{E}_i \cdot \vec{n} = E = 4\pi\sigma = 4\pi \, \frac{Q}{F} \quad . \tag{1.185}$$

Die Feldstärke innerhalb des Kondensators ist konstant und hat den Betrag $E = 4\pi \, Q/F$. Für die Potentialdifferenz zwischen den Platten erhalten wir

$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_0^d E \, dz = -Ed \quad . \tag{1.186}$$

Für die Spannung U bekommen wir daher

$$U = \phi_1 - \phi_2 = 4\pi \, \frac{Q}{F} \, d \quad . \tag{1.187}$$

Wir definieren die Kapazität C eines Kondensators durch

$$C = \frac{Q}{U} \quad . \tag{1.188}$$

Diese Größe bestimmt die Ladung Q, die bei gegebener Spannung U auf den Kondensator paßt. Für die Kapazität des Flächenkondensators folgt

$$C = \frac{F}{4\pi d} \quad . \tag{1.189}$$

Die Kapazität ist damit durch rein geometrische Materialgrößen bestimmt. Wir können auch leicht die Energiedichte im Kondensator ermitteln. Es folgt

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 = \frac{(4\pi\sigma)^2}{8\pi} = 2\pi\,\sigma^2 \quad . \tag{1.190}$$

Für die Gesamtenergie folgt

$$\begin{aligned} W &= \omega F d = 2\pi\sigma^2\, F d = 2\pi\,\frac{Q^2}{F^2}\, F d \\ &= 2\pi Q^2\,\frac{d}{F} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,QU = \frac{1}{2}CU^2 \quad . \end{aligned} \tag{1.191}$$

1.13 Die Greenschen Theoreme

Unter Verwendung des Gaußschen Satzes können wir die oftmals wertvollen Greenschen Theoreme ableiten. Es seien φ und ψ zwei stetig differenzierbare skalare Felder und V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche $S(V)$. Wir untersuchen jetzt das spezielle Vektorfeld

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = \varphi\,(\vec{r}\,)\ \mathrm{grad}\psi\,(\vec{r}\,) \tag{1.192}$$

und wenden darauf den Gaußschen Satz an. Zunächst müssen wir $\mathrm{div}\vec{E}$ berechnen.

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{E}\,(\vec{r}\,) &= \mathrm{div}\,(\varphi\,\mathrm{grad}\psi\,) = \varphi\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\psi + \mathrm{grad}\psi\cdot\mathrm{grad}\varphi \\ &= \varphi\Delta\psi + \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi \quad . \end{aligned} \tag{1.193}$$

Mit der Flächennormalen $\vec{n}$ können wir schreiben

$$d\vec{f} = \vec{n}\,df \quad . \tag{1.194}$$

Somit folgt

$$\vec{E}\cdot d\vec{f} = \varphi\left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n}\right)df \quad . \tag{1.195}$$

Wir definieren nun die Normalenableitung von ψ auf $S(V)$

$$\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad . \tag{1.196}$$

Jetzt können wir den Gaußschen Satz anwenden und erhalten das
1. Greensche Theorem

$$\int\limits_V \left(\varphi\Delta\psi + \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi\right)d^3r = \oint\limits_{S(V)} \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,df \quad . \tag{1.197}$$

Vertauschen wir nun in dieser Ableitung die Felder φ und ψ und ziehen die resultierende Identität von dem Ausdruck (1.197) ab, so folgt das
2. Greensche Theorem

$$\int\limits_V \left(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\right)d^3r = \oint_{S(V)} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)df \quad . \tag{1.198}$$

Setzt man schließlich im 1. Greenschen Theorem $\varphi \equiv 1$, so folgt eine weitere nützliche Identität

$$\int\limits_V \Delta\psi\,d^3r = \oint\limits_{S(V)} \frac{\partial\psi}{\partial n}\,df \quad . \tag{1.199}$$

1.14 Randwertprobleme

Ein Grundproblem der Elektrostatik ist die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -4\pi\varrho \quad . \tag{1.200}$$

Hierzu müssen wir Lösungsverfahren entwickeln, um diese lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zu entwickeln. Falls die Ladungsdichte $\varrho\left(\vec{r}\,'\right)$ bekannt ist und keine speziellen Randbedingungen auf Grenzflächen im Endlichen zu erfüllen sind, dann reicht als allgemeine Lösung das Poisson-Integral völlig aus,

$$\phi\left(\vec{r}\right) = \int d^3r' \, \frac{\varrho\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \quad . \tag{1.201}$$

Ist ϱ räumlich begrenzt, so gilt insbesondere

$$\phi \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\phi \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad . \tag{1.202}$$

Bei vielen praktischen Problemen ist jedoch der Ausgangspunkt ein anderer. Oftmals ist $\varrho\left(\vec{r}\,'\right)$ in einem gewissen Raumbereich V sowie ϕ oder $\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{E}\cdot\vec{n}$ auf gewissen Grenz- oder Randflächen in V vorgegeben. Gesucht ist dann das skalare Potential in allen Punkten $\vec{r}$ des Raumbereiches V. Wir wollen zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen ein elektrostatisches Randwertproblem eine eindeutige mathematische Lösung besitzt. Dazu verwenden wir die Greenschen Theoreme und die Poisson-Gleichung. Wir setzen

$$\varphi \longrightarrow \phi\left(\vec{r}\,'\right) \quad ; \quad \psi \longrightarrow \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \quad . \tag{1.203}$$

Es folgt unter Verwendung des 2. Greenschen Theorems

$$\begin{aligned}
&\int\limits_V \left[\phi\left(\vec{r}\,'\right)\Delta_{r'}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\Delta_{r'}\phi\left(\vec{r}\,'\right)\right] d^3r' \\
= \; & -4\pi\int\limits_V d^3r'\,\phi\left(\vec{r}\,'\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right) + 4\pi\int\limits_V d^3r'\,\frac{\varrho\left(r'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \\
= \; & \int\limits_{S(V)} df'\left[\phi\left(\vec{r}\,'\right)\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{1.204}$$

Es sei nun $\vec{r}\in V$, dann folgt als Lösung für das Potential

$$\begin{aligned}
\phi\left(\vec{r}\right) \; = \; & \int\limits_V d^3r'\,\frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \\
& + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(V)} df'\left[\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi\left(\vec{r}\,'\right)\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{1.205}$$

Dieses Resultat bedarf einiger Erläuterungen. ρ in V und ϕ bzw. $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf $S(V)$ bestimmen das Potential in ganz V. Ist V ladungsfrei, dann gilt mit $\vec{r} \in V$

$$\phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S(V)} df' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi\left(\vec{r}\,'\right) \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] \quad . \tag{1.206}$$

ϕ ist also vollständig durch seine Werte und die seiner Normalenableitung auf $S(V)$ bestimmt. Ferner ist durch die Angabe von ϕ und $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ auf $S(V)$ das Problem überbestimmt. Dies sind die Cauchy-Randbedingungen. Beide Vorgaben dürfen nicht willkürlich sein. Wir wollen die Randbedingungen etwas klassifizieren. Wir unterscheiden zwei Typen von Randbedingungen. Bei den Dirichlet-Randbedingungen ist ϕ auf $S(V)$ vorgegeben. Bei den Neumann-Randbedingungen ist $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\vec{n} \cdot \vec{E}$ auf $S(V)$ vorgegeben. Es liegen gemischte Randbedingungen vor, wenn diese auf $S(V)$ stückweise Dirichlet- und stückweise Neumann-Charakter haben. Wir wollen nun die Eindeutigkeit der Lösung nachweisen. Es seien $\phi_1\left(\vec{r}\right)$ und $\phi_2\left(\vec{r}\right)$ Lösungen der Poisson-Gleichung mit

$$\Delta \phi_{1/2}\left(\vec{r}\right) = -4\pi \rho\left(\vec{r}\right) \quad , \tag{1.207}$$

und es gelte

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{auf} \quad S(V) \tag{1.208}$$

bzw.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \text{auf} \quad S(V) \quad . \tag{1.209}$$

Dies entspricht Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen. Für

$$\psi\left(\vec{r}\right) = \phi_1\left(\vec{r}\right) - \phi_2\left(\vec{r}\right) \tag{1.210}$$

folgt dann

$$\Delta \psi\left(\vec{r}\right) = 0 \tag{1.211}$$

mit

$$\psi = 0 \quad \text{auf} \quad S(V) \tag{1.212}$$

bzw.

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf} \quad S(V) \quad . \tag{1.213}$$

Das 1. Greensche Theorem liefert dann für $\phi = \psi$

$$\int\limits_V d^3r \left[\psi \Delta \psi + \left(\vec{\nabla} \psi \right)^2 \right] = \oint\limits_{S(V)} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, df \quad . \tag{1.214}$$

Mit beiden Typen von Randbedingungen wird die rechte Seite zu Null. Es bleibt mit $\Delta \psi = 0$

$$\int\limits_V d^3r \left(\vec{\nabla} \psi \right)^2 = 0 \tag{1.215}$$

und damit

$$\vec{\nabla}\psi = 0 \tag{1.216}$$

und weiter

$$\psi = \text{const.} \tag{1.217}$$

Mit den Dirichlet-Randbedingungen haben wir $\psi = 0$ auf $S(V)$ und somit $\psi = 0$ in V. Damit resultiert $\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})$ in V, was die Eindeutigkeit belegt. Aufgrund der Neumann-Randbedingung folgt $\psi = \text{const.}$ in V und $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ auf $S(V)$. Dies impliziert

$$\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r}) + C \quad . \tag{1.218}$$

Die Konstante C ist ohne Bedeutung und fällt bei der Bestimmung der observablen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ heraus. Beide Typen von Randbedingungen legen also physikalisch eindeutig die Lösung der Poisson-Gleichung fest.

Wir wollen nun einige physikalische Anwendungen diskutieren. Zunächst klassifizieren wir die Materialien, die Ladungen tragen können. Als Nichtleiter oder Isolatoren bezeichnen wir Stoffe, deren geladene Konstituenten auch bei Anlegen eines elektrischen Feldes fixiert bleiben. In Leitern lassen sich elektrische Ladungen verschieben. Befindet sich ein Leiter in einem elektrischen Feld, so wird sich ein Gleichgewichtszustand einstellen, in dem sich die Ladungen auf der Oberfläche und im Innern in Ruhe befinden. Dies bedeutet aber

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{1.219}$$

oder

$$\phi(\vec{r}) = \text{const.} \tag{1.220}$$

im Leiter. Was passiert an der Grenzfläche Leiter-Volumen? An der Innenseite der Leiteroberfläche muß gelten

$$E_i^{(n)} = E_i^{(t)} = 0 \quad . \tag{1.221}$$

Tangential- und Normalkomponenten des $\vec{E}$-Feldes sind Null. Die Tangentialkomponente an der Grenzfläche ist stetig, also

$$E_a^{(t)} = 0 \quad . \tag{1.222}$$

Für die Normalkomponente folgt

$$E_a^{(n)} = 4\pi\sigma \quad . \tag{1.223}$$

Das elektrische Feld steht also stets senkrecht auf der Leiteroberfläche. Die Leiteroberfläche ist damit auch Äquipotentialfläche. Aus dem Gaußschen Satz folgt weiterhin, daß das Innere des elektrischen Leiters stets ladungsneutral ist. Bringen wir einen elektrischen Leiter in ein externes elektrisches Feld, so werden sich die quasifreien Ladungsträger so lange verschieben, bis das

resultierende Feld senkrecht in die Leiteroberfläche einmündet. Somit verschwindet die Tangentialkomponente von $\vec{E}$. Das externe Feld wird damit deformiert. Wenn aber $E_a^{(n)} \neq 0$ ist, folgt, daß sich eine korrespondierende Oberflächenladungsdichte σ gebildet haben muß. Das äußere Feld erzeugt eine Influenzladung an der Leiteroberfläche.

1.15 Die Greensche Funktion

Wir können die Lösung für die Poisson-Gleichung oder die Laplace-Gleichung in einem bestimmten begrenzten Volumen mit bekannten Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen mit Hilfe des zweiten Greenschen Theorems und der sogenannten Greenschen Funktion vornehmen. Wir betrachten das Potential einer Punktladung mit $q = 1$, für das gelten muß

$$\Delta\psi = \Delta\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) \quad . \tag{1.224}$$

Diese Funktion ψ ist nur eine der Klassen von Funktionen G, die von $\vec{r}$ und $\vec{r'}$ abhängen und für die gilt

$$\Delta_r\, G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{1.225}$$

mit

$$G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + f\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) \quad . \tag{1.226}$$

Hierbei muß f die Laplace-Gleichung

$$\Delta_r f\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) = 0 \tag{1.227}$$

erfüllen. Die Freiheit in der Wahl der Funktion $f\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)$ werden wir ausnutzen, um darin die Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen zu inkorporieren. Wir setzen im 2. Greenschen Theorem $\varphi = \phi$ und $\psi = G(\vec{r}, \vec{r}\,')$.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_V d^3r'\left[\phi\left(\vec{r}\,'\right)\Delta_{r'}G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) - G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)\Delta_{r'}\phi\left(\vec{r'}\right)\right] \\
= \;& -4\pi\int\limits_V d^3r'\,\phi\left(r'\right)\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) + 4\pi\int\limits_V d^3r'\,G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\rho\left(\vec{r}\,'\right) \\
= \;& \int\limits_{S(V)} df'\left[\phi\left(\vec{r}\,'\right)\frac{\partial G}{\partial n'} - G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{1.228}$$

Wir haben die Symmetrie ausgenutzt

$$\Delta_r G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) = \Delta_{r'} G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) \quad . \tag{1.229}$$

Für $\vec{r} \in V$ impliziert dies

$$\phi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_V d^3r'\,\rho\left(\vec{r}\,'\right)G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(V)} df'\left[\phi\left(\vec{r}\,'\right)\frac{\partial G}{\partial n'} - G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right] \quad . \tag{1.230}$$

Jetzt haben wir die Möglichkeit, über die noch frei verfügbare Funktion $f\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)$ die Überbestimmtheit des Problems zu beseitigen. Wir diskutieren zunächst Dirichlet-Randbedingungen. Falls $\phi\left(\vec{r}\,'\right)$ auf $S(V)$ vorgegeben ist, wird man $f\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)$ so wählen, daß

$$\int\limits_{S(V)} df'\,G_D\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n'} = 0 \tag{1.231}$$

gilt. Wir können dies realisieren durch

$$G_D\left(\vec{r},\vec{r'}\right)=0 \quad \forall \quad \vec{r'}\in S(V). \tag{1.232}$$

Es bleibt dann für das skalare Potential

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\int\limits_V d^3r'\,\rho\left(\vec{r}\,'\right)G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(V)} df'\,\phi\left(\vec{r}\,'\right)\frac{\partial G_D}{\partial n'} \quad . \tag{1.233}$$

Da ϕ auf $S(V)$ und ρ in V bekannt sind, ist hiermit die Lösung des Problems auf die Bestimmung der Greenschen Funktion zurückgeführt, die (1.232) erfüllen muß.

Wir diskutieren jetzt Neumann-Randbedingungen. Falls $\frac{\partial\phi}{\partial n}=-\vec{E}\cdot\vec{n}$ auf $S(V)$ vorgegeben ist, wird man $f\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$ so wählen, daß

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(V)} df'\,\phi\left(\vec{r}\,'\right)\frac{\partial G_N\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)}{\partial n'}=-\phi_0 \tag{1.234}$$

gilt, wobei ϕ_0 eine beliebige Konstante sein darf. Es bleibt dann als formale Lösung für das skalare Potential

$$\phi\left(\vec{r}\right)-\phi_0=\int\limits_V d^3r'\,\rho\left(\vec{r}\,'\right)G_N\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(V)} df'\,G_N\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n'} \quad . \tag{1.235}$$

Da $\frac{\partial\phi}{\partial n'}$ auf $S(V)$ und ρ in V bekannt sind, ist auch in diesem Fall das zu lösende Problem auf die Bestimmung einer Greenschen Funktion zurückgeführt. Die Greensche Funktion $G_N\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$ muß nun die Randbedingungen (1.234) erfüllen.

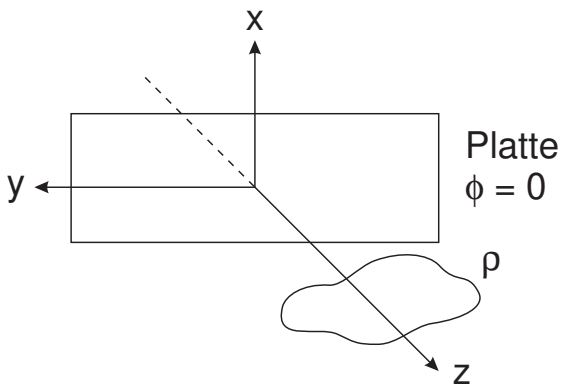
1.16 Methode der Bildladungen

Als erstes Anwendungsbeispiel, um den Wert der Einführung der Greenschen Funktionen zu erkennen, betrachten wir eine Ladungsverteilung ρ vor einer in der xy-Ebene unendlich ausgedehnten leitenden, geerdeten Platte. Wir suchen das Potential im Halbraum ($z \geq 0$). Die zu erfüllenden Randbedingungen sind vom Dirichlet-Typ

$$\phi(x, y, z = 0) = 0, \tag{1.236}$$

$$\phi(x = \pm\infty, y, z > 0) = \phi(x, y = \pm\infty, z > 0) = \phi(x, y, z = +\infty) = 0 \quad . \tag{1.237}$$

ϕ ist also auf $S(V)$ identisch Null.



Es bleibt demnach die Greensche Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ zu bestimmen, für die zunächst gilt

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f_D(\vec{r}, \vec{r}') \quad . \tag{1.238}$$

Wir können G_D als das Potential einer Punktladung bei $\vec{r}' \in V$ auffassen. Folgende Bedingungen sollen dabei erfüllt sein

$$\Delta_r f_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \qquad \forall \qquad \vec{r} \in V \quad , \tag{1.239}$$

$$\int\limits_{S(V)} df'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} = 0 \quad . \tag{1.240}$$

Die zweite Bedingung können wir realisieren durch

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für} \quad \vec{r} \in S(V) \quad . \tag{1.241}$$

Wir betrachten zunächst die xy-Ebene, die einen Teil von $S(V)$ darstellt. Wir fordern

$$f_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (-z')^2}} \quad \text{für} \quad z = 0 \quad . \tag{1.242}$$

Dies legt für $f_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$ den folgenden Ansatz nahe

$$f_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)=\frac{-1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'_B\right|} \quad . \tag{1.243}$$

Dabei soll $\vec{r}\,'_B$ aus $\vec{r}\,'$ durch Spiegelung an der xy-Ebene entstehen

$$\vec{r}\,'=(x',y',z') \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}\,'_B=(x',y',-z') \quad . \tag{1.244}$$

Wenden wir den Laplace-Operator auf $f_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta_r f_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) &= 4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}\,'_B\right)\\ &= 4\pi\delta\left(x-x'\right)\delta\left(y-y'\right)\delta\left(z+z'\right)\\ &= 0 \quad \forall \quad \vec{r},\vec{r}\,'\in V \quad .\end{aligned} \tag{1.245}$$

Damit ist die erste Forderung an $f_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$ erfüllt. Für die gesamte Greensche Funktion folgt

$$\begin{aligned}G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) &= \left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'_B\right|}\right)\\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}}\right.\\ &\quad \left.-\frac{1}{\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z+z'\right)^2}}\right] \quad .\end{aligned} \tag{1.246}$$

Auf der xy-Ebene (z=0) kompensieren sich die beiden Summanden in der Klammer. Für die im Unendlichen liegenden Begrenzungsflächen von V ist jeder Summand für sich bereits Null

$$G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)=0 \quad \forall \quad \vec{r},\vec{r}\,'\in S(V) \quad . \tag{1.247}$$

Damit können wir das vollständige Resultat für das skalare Potential ϕ der Ladungsdichte ρ angeben. Mit (1.233) und (1.246) folgt

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\int d^3r'\,\rho\left(\vec{r}\,'\right)\left[\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'_B\right|}\right] \quad . \tag{1.248}$$

Wir schreiten weiter fort in der Diskussion von Bildladungseffekten. Wir hatten für die Greensche Funktion gefunden

$$G\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)=\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}+f\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) \quad , \tag{1.249}$$

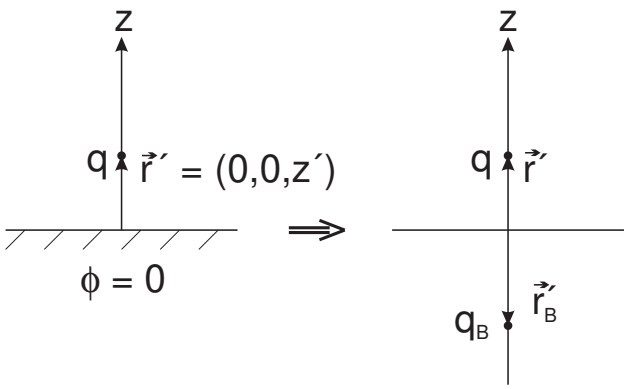
wobei f die Laplace-Gleichung erfüllen muß,

$$\Delta_r f\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)=0 \quad \forall \quad \vec{r},\vec{r}\,'\in V \quad . \tag{1.250}$$

Damit kann $f(\vec{r},\vec{r}\,')$ aber als das Potential einer Ladungsverteilung außerhalb V verstanden werden, das zusammen mit dem Potential $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ der Punktladung $q=1$ bei $\vec{r}\,'$ für die gegebenen Randbedingungen auf $S(V)$ sorgt. Die Position dieser fiktiven Ladungsverteilung, der sogenannten Bildladung, hängt von der Position $\vec{r}\,'$ der realen Ladung $q=1$ ab. Dies ist der Kernpunkt der Methode der Bildladungen. Man bringt außerhalb von V Bildladungen an, derart, daß die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Da diese Bildladungen außerhalb von V positioniert sind, ändern sie die Poisson-Gleichung innerhalb von V nicht. Wir ersetzen somit Randbedingungen quasi durch Bildladungen,

$$\rho\,(\vec{r}\,') \quad \text{und Randbedingungen} \quad \Longrightarrow \quad \rho\,(\vec{r}\,') \quad \text{plus Bildladungen} \tag{1.251}$$

Wir wollen dieses Verfahren anhand von zwei Beispielen verifizieren. Zunächst betrachten wir eine Punktladung über einer geerdeten, unendlich ausgedehnten Metallplatte.



Hierbei ist V der Halbraum mit $z\geq 0$. Die Randbedingungen sind vom Dirichlet-Typ und lauten $\phi=0$ auf $S(V)$. Für das Potential machen wir angesichts der geforderten Randbedingungen den Ansatz

$$\phi\,(\vec{r}\,)=\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}+\frac{q_B}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_B|} \tag{1.252}$$

mit $\vec{r}\,'=(0,0,z')$ und $\vec{r}\,'_B=(0,0,z'_B)$. Die Aufgabe lautet nun, q_B und $\vec{r}\,'_B$ so zu bestimmen, daß gilt $\vec{r}\,'_B\notin V$ sowie

$$\phi\,(\vec{r}\,)=0 \quad \forall \quad \vec{r}=(x,y,0) \quad . \tag{1.253}$$

Dies impliziert

$$0=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(-z')^2}}+\frac{q_B}{\sqrt{x^2+y^2+(-z'_B)^2}} \quad . \tag{1.254}$$

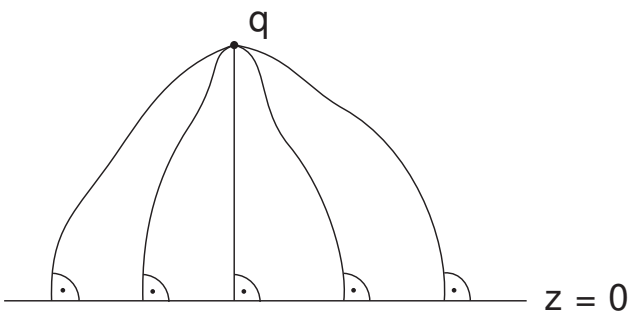
Hieraus folgt sofort $q_B=-q$ und $z'_B=-z'$, also

$$\phi\,(\vec{r}\,)=q\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}-\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}\,'|}\right) \quad . \tag{1.255}$$

Für die elektrische Feldstärke resultiert

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,) = q\left[\frac{(x,y,z-z')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} - \frac{(x,y,z+z')}{\left|\vec{r}+\vec{r}\,'\right|^3}\right] \quad . \tag{1.256}$$

Die Metalloberfläche ist eine Äquipotentialfläche, $\phi = 0$. Das Feld $\vec{E}\,(\vec{r}\,)$ steht senkrecht auf dieser Fläche.



Wir haben insbesondere

$$\vec{E}\,(\vec{r};z=0) = -2q\frac{z'}{\left(x^2+y^2+z'^2\right)^{3/2}}\,\vec{e}_z \quad . \tag{1.257}$$

Mit Hilfe des Verhaltens der elektrischen Feldstärke an Grenzflächen können wir die Influenz-Flächenladungsdichte auswerten. Es ist

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\,(\vec{r},z=0) = -\frac{q}{2\pi}\frac{z'}{\left(x^2+y^2+z'^2\right)^{3/2}} \quad . \tag{1.258}$$

Die gesamte Influenz-Flächenladung erhalten wir durch Integration über die Metalloberfläche

$$\bar{q} = \int\limits_{z=0} df\;\sigma \tag{1.259}$$

Hierzu verwenden wir ebene Polarkoordinaten mit

$$df = \rho\,d\rho\,d\varphi \tag{1.260}$$

und

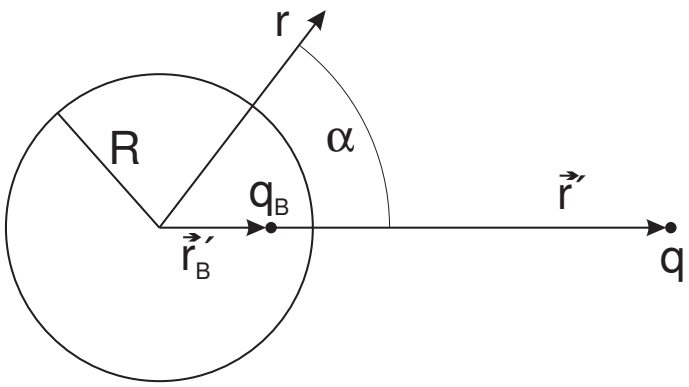
$$\rho^2 = x^2+y^2 \quad . \tag{1.261}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\bar{q} &= -q\int\limits_0^\infty d\rho\,\rho\frac{z'}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{3/2}} \\ &= -qz'\int\limits_0^\infty d\rho\left(-\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{1/2}}\right) = -q \quad .\end{aligned} \tag{1.262}$$

Die Influenz-Flächenladung entspricht somit gerade der Bildladung $q_B = -q$.

Als zweites Anwendungsbeispiel diskutieren wir das Feld einer Punktladung über einer geerdeten Metallkugel. Gegenüber der ersten Aufgabe haben wir also die Geometrie etwas abgeändert.



In diesem Fall sei V der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit dem Radius R und $R' \longrightarrow \infty$. Wieder simulieren wir die Randbedingung, nämlich

$$\phi = 0 \quad \text{auf} \quad S(V) \quad , \tag{1.263}$$

durch Einführen einer Bildladung q_B, die nicht in V und daher im Innern der geerdeten Metallkugel lokalisiert sein muß. Aus Symmetriegründen erwarten wir $\vec{r}'_B \parallel \vec{r}'$ mit $r_B < R$. Dies führt uns auf den Ansatz

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{q_B}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|} \\ &= \frac{q/r}{\left|\vec{e}_r - \frac{r'}{r}\vec{e}_{r'}\right|} + \frac{q_B/r'_B}{\left|\frac{r}{r'_B}\vec{e}_r - \vec{e}_{r'}\right|} \quad . \end{aligned} \tag{1.264}$$

Es ist

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'} = \cos\alpha \quad . \tag{1.265}$$

Die Randbedingung $\phi(r = R) = 0$ lautet explizit

$$0 = \frac{q}{R}\left(1 + \frac{r'^2}{R^2} - 2\frac{r'}{R}\cos\alpha\right)^{-1/2} + \frac{q_B}{r'_B}\left(\frac{R^2}{r'^2_B} + 1 - 2\frac{R}{r'_B}\cos\alpha\right)^{-1/2} \quad . \tag{1.266}$$

Diese Bedingung wird offensichtlich erfüllt durch

$$\frac{q}{R} = -\frac{q_B}{r'_B} \tag{1.267}$$

und

$$\frac{r'}{R} = \frac{R}{r'_B} \quad . \tag{1.268}$$

Somit lautet die Lösung

$$r'_B = \frac{R^2}{r'} < R \tag{1.269}$$

und

$$q_B = -q\,\frac{R}{r'} \quad . \tag{1.270}$$

Das Potential lautet daher

$$\phi\left(\vec{r}\right) = q\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} - \frac{\frac{R}{r'}}{\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|}\right) \quad . \tag{1.271}$$

Es erfüllt in V die Poisson-Gleichung und auf $S(V)$ die Dirichlet-Randbedingungen. Aus dem Potential $\phi\left(\vec{r}\right)$ können wir sofort die Greensche Funktion für die geerdete Kugel deduzieren. Es ist

$$\begin{aligned} G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) &= \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} - \frac{1}{\left|\frac{r'}{R}\vec{r}-\frac{R}{r'}\vec{r}\,'\right|} \\ &= \left(r^2+r'^2-2rr'\vec{e}_r\cdot\vec{e}_{r'}\right)^{-1/2} - \left(\frac{r^2r'^2}{R^2}+R^2-2rr'\vec{e}_r\cdot\vec{e}_{r'}\right)^{-1/2} \end{aligned} \tag{1.272}$$

Offensichtlich gilt die Symmetrie

$$G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) = G_D\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right) \tag{1.273}$$

sowie

$$G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) = 0 \quad \forall \quad \vec{r},\vec{r}\,' \in S(V). \tag{1.274}$$

Damit haben wir mittels dieses speziellen Beispiels eine große Klasse von allgemeinen Potentialproblemen einer Lösung zugeführt. Die Kenntnis der Greenschen Funktion $G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$ ist ausreichend, um das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho\left(\vec{r}\,'\right)$ außerhalb einer Kugel von Radius R zu berechnen, auf deren Oberfläche ϕ beliebig, aber bekannt ist. Es muß also nicht notwendigerweise eine geerdete Metallkugel sein. Zur vollständigen Lösung benötigen wir noch die Normalableitung von G_D. Dabei ist zu beachten, daß der Normaleneinheitsvektor senkrecht auf $S(V)$ nach außen gerichtet ist, nach unserer Wahl von V also ins Kugelinnere. Es folgt

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial G_D}{\partial n'}\right|_{S(V)} &= -\left.\frac{\partial G_D}{\partial r'}\right|_{r'=R} \\ &= -\frac{1}{R}\frac{r^2-R^2}{\left(r^2+R^2-2r\,R\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_{r'}\right)^{3/2}} \quad . \end{aligned} \tag{1.275}$$

Bei bekannter Ladungsdichte ρ in V und bekanntem Oberflächenpotential $\phi\left(r'=R,\vartheta',\varphi'\right)$ auf $S(V)$ ist dann das Problem nach (1.230) vollständig gelöst durch

$$\phi\left(\vec{r}\right) = \phi\left(r,\vartheta,\varphi\right)$$

$$= \int\limits_V d^3r'\,\rho\left(\vec{r}\,'\right) G_D\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right) +$$

$$\frac{R\left(r^2-R^2\right)}{4\pi} \int\limits_{-1}^{+1} d\cos\vartheta' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\phi\left(R,\vartheta',\varphi'\right)}{\left(r^2+R^2-2rR\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_{r'}\right)^{3/2}} \quad . \tag{1.276}$$

Die analytische Durchführung der Winkelintegrale kann unter Umständen recht komplex werden. Wir kehren zurück zum konkreten Beispiel der geerdeten Metallkugel und wollen die Influenz-Flächenladungsdichte ermitteln. Es gilt

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi}\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} \quad . \tag{1.277}$$

Dieselbe Rechnung wie für $\frac{\partial G}{\partial n'}$ führt zu

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{r'}\right)\frac{1-\frac{R^2}{r'^2}}{\left(1+\frac{R^2}{r'^2}-2\frac{R}{r'}\cos\alpha\right)^{3/2}} \quad . \tag{1.278}$$

σ ist rotationssymmetrisch um die Richtung $\vec{e}_{r'}$ und maximal für $\alpha = 0$.

2 Multipolentwicklungen und Dielektrika

2.1 Vollständige Funktionensysteme

Eine häufig angewendete Technik bei der Lösung der Poisson-Gleichung besteht in der Entwicklung der gesuchten Lösungsfunktion in einem vollständigen Funktionensystem. Analog wie wir in der Mechanik einen Vektor darstellen konnten als Superposition von Basisvektoren, können wir auch Funktionen repräsentieren als Superposition von Basisfunktionen. Diese Entwicklung in vollständige Funktionensysteme wollen wir in diesem Kapitel diskutieren. Für den Ortsvektor gilt beispielsweise

$$\vec{r} = \sum_{n=1}^{3} a_n \, \vec{e}_n, \tag{2.1}$$

analog schreiben wir für eine Funktion $f\,(x)$

$$f\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, g_n\,(x) \quad . \tag{2.2}$$

Hierbei sind die a_n wieder die Entwicklungskoeffizienten und die $g_n\,(x)$ sind die Basisfunktionen, die im allgemeinen den Raum der quadratintegrablen Funktionen aufspannen sollen. Im allgemeinen ist dieser Raum unendlich dimensional. Betrachten wir nun ein endliches oder unendliches System von reellen oder komplexen Funktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$,..., $g_n(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$. Dieses Funktionensystem heißt orthogonal, wenn die Funktionen die Orthogonalitätrelation erfüllen,

$$\int_a^b g_n(x)\, g_m^*(x)\, dx \, = \, N_n \, \delta_{nm} \quad . \tag{2.3}$$

Hierbei bezeichnet $g_m^*(x)$ die komplex-konjugierte Funktion von $g_m(x)$. Ist $N_n \, = \, 1 \quad \forall n$, so nennt man das System ein Orthonormalsystem. Als Norm der Funktion bezeichnen wir generell das Integral

$$\int_a^b g(x)\, g^*(x)\, dx \quad . \tag{2.4}$$

Jede Funktion, die nicht die Nullfunktion ist, kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten normiert werden. Es ist

$$G(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g(x)\, g^*(x)\, dx}} \tag{2.5}$$

die zu $g(x)$ zugehörige normierte Funktion. Diese Relation entspricht der Normierung eines Vektors

$$\vec{e}_a \, = \, \frac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}} \quad . \tag{2.6}$$

Wir wollen nun eine beliebige Funktion $f(x)$ in ein orthogonales Funktionensystem $g_n(x)$ entwickeln. Diese Entwicklung sei gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, g_n(x) \quad . \tag{2.7}$$

Wir müssen nun ermitteln wie die Entwicklungskoeffizienten a_n zu bestimmen sind. Wir gehen jetzt von einer orthonormalen Basis aus. Wir multiplizieren (2.7) mit $g_m^*(x)$ und integrieren. Es folgt

$$a_m = \int_a^b f(x) \, g_m^*(x) \, dx \tag{2.8}$$

als Ausdruck für die Entwicklungskoeffizienten. Wir wollen nun die Vollständigkeit des Funktionensystems behandeln. Wir gehen aus von einer quadratintegrablen Funktion $f(x)$. Wir definieren nun

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \, g_n(x) \quad . \tag{2.9}$$

Wir wollen die Koeffizienten a_n so wählen, damit $f_N(x)$ die vorgegebene Funktion $f(x)$ in optimaler Weise approximiert. Es wird gefordert, daß der Ausdruck

$$A = \int_a^b dx \, |f(x) - f_N(x)|^2 \tag{2.10}$$

minimal wird. Dies führt auf

$$A = \int_a^b dx \, f^*(x) f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_a^b dx \, g_n^*(x) f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b dx \, g_n(x) f^*(x) + \sum_{n=1}^{N} a_n^* a_n \quad . \tag{2.11}$$

Als Extremalbedingung fordern wir

$$\frac{\partial A}{\partial a_n} = \quad 0 \quad = - \int_a^b dx \, g_n(x) \, f^*(x) + a_n^* \quad , \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_n^*} = \quad 0 \quad = - \int_a^b dx \, g_n^*(x) \, f(x) + a_n \quad . \tag{2.13}$$

Die optimale Wahl für die Koeffizienten a_n ist demzufolge

$$a_n = \int_a^b g_n^*(x) \, f(x) \, dx \quad . \tag{2.14}$$

Man spricht nun von der Konvergenz im Mittel falls

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b dx \, |f(x) - f_N(x)|^2 = 0 \quad . \tag{2.15}$$

Wir definieren nun: Ein orthonormales Funktionensystem $g_n(x)$ mit $n = 1, 2, \ldots$ heißt vollständig, falls für jede quadratintegrable Funktion $f(x)$ die Reihe $f_N(x)$ im Mittel gegen $f(x)$ konvergiert, so daß gilt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, g_n(x) \tag{2.16}$$

mit a_n aus (2.14). Wir setzen (2.14) in (2.16) ein und bekommen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b dy \, g_n^*(y) \, f(y) \, g_n(x) \quad . \tag{2.17}$$

Dies führt auf die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y) \, g_n(x) = \delta(x - y) \quad . \tag{2.18}$$

Als Beispiel für Systeme orthonormaler Funktionen behandeln wir jetzt Fourier-Reihen. Da für positive ganzzahlige n, m die Beziehung gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \pi \, \delta_{nm}, \tag{2.19}$$

stellt im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ die Funktionenfolge $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ mit $n = 1, 2, \ldots$ ein Orthonormalsystem dar. Da diese Folge jedoch nur aus ungeraden Funktionen, $f(x) = -f(-x)$, besteht, können damit nur ungerade Funktionen approximiert werden. Nimmt man das ebenso orthonormale System von geraden Funktionen, $f(x) = f(-x)$,

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

und

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.21}$$

dazu, kann man beliebige Funktionen darstellen als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \quad . \tag{2.22}$$

Bei geraden Funktionen $f(x)$ verschwindet b_n, bei ungeraden Funktionen verschwindet a_n. Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \tag{2.23}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \quad . \tag{2.24}$$

2.2 Legendre-Polynome

Als ein weiteres wichtiges Beispiel eines vollständigen Funktionensystems, das insbesondere in der Elektrostatik von großer Bedeutung ist, wollen wir die Kugelfunktionen einführen. Zunächst gehen wir aus von der Funktion

$$\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \tag{2.25}$$

die auch in der Form

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\alpha + r'^2}} \tag{2.26}$$

dargestellt werden kann. α ist der Zwischenwinkel von $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$. Die Wurzel soll nun in eine Potenzreihe nach dem Verhältnis der Abstände r und r' entwickelt werden. Dazu definieren wir

$$r_< = \max(r, r'), \tag{2.27}$$

$$r_> = \min(r, r') \quad . \tag{2.28}$$

Damit ist immer ($r \neq r'$)

$$\frac{r_<}{r_>} < 1, \tag{2.29}$$

und wir erhalten die folgende Entwicklung

$$\frac{1}{r_>\sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} = \frac{1}{r_>}\left[1 - \cos\alpha\,\frac{r_<}{r_>} + \frac{1}{2}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 + \ldots\right] \quad . \tag{2.30}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten sind die Legendre-Polynome $P_l(\cos\alpha)$. Die Entwicklung können wir dann schreiben als

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_>\sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} &= \frac{1}{r_>}\left[P_0 + P_1(\cos\alpha)\frac{r_<}{r_>} + P_2(\cos\alpha)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right. \\ &\quad \left. + P_3(\cos\alpha)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^3 + \ldots\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\alpha) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad .\end{aligned} \tag{2.31}$$

Wir setzen

$$x = \cos\alpha \tag{2.32}$$

mit $x \in [1, -1]$.

Die ersten Legendre-Polynome haben die folgende Gestalt

$$P_0(x) = 1, \tag{2.33}$$

$$P_1(x) = x, \tag{2.34}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \tag{2.35}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - x\right) \quad . \tag{2.36}$$

Wir erkennen schon hier, daß die Legendre-Polynome zu geradem Index gerade Funktionen sind, die zu ungeradem Index sind ungerade Funktionen. Die Legendre-Polynome können mittels der folgenden Relation berechnet werden

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \quad . \tag{2.37}$$

Dies ist für die ersten der oben angegebenen Legendre-Polynome leicht zu verifizieren. (2.37) nennt man auch Rodrigues-Formel. Wir hatten gefunden, daß gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^l} P_l(\cos\alpha) \tag{2.38}$$

Mit $x = \cos\alpha$ und

$$t = \frac{r_<}{r_>} \tag{2.39}$$

schreiben wir dies auch als

$$g(t,x) = \left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n \tag{2.40}$$

mit $|t| < 1$. $g(t,x)$ wird als generierende Funktion bezeichnet. Damit folgt

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{x - t}{\left(1 - 2xt + t^2\right)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n(x)\, t^{n-1} \quad . \tag{2.41}$$

Dies ergibt nach Multiplikation mit $(1 - 2xt + t^2)$

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n(x)\, t^{n-1} + (t - x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = 0 \quad . \tag{2.42}$$

Wir führen jetzt einen Koeffizientenvergleich in Potenzen von t durch und schreiben

$$\sum_{m=0}^{\infty} m\, P_m(x)\, t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nx\, P_n(x)\, t^n + \sum_{s=0}^{\infty} s\, P_s(x)\, t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)\, t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x\, P_n(x)\, t^n = 0 \quad . \tag{2.43}$$

Zum Koeffizientenvergleich setzen wir

$$m = n + 1 \tag{2.44}$$

und

$$s = n - 1 \quad . \tag{2.45}$$

Dies führt auf

$$(2n+1)x\,P_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x) \tag{2.46}$$

mit $n = 1, 2, \ldots$. Wir lösen dies auf nach $P_{n+1}(x)$ und bekommen

$$P_{n+1}(x) = 2x\,P_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{[x\,P_n(x) - P_{n-1}(x)]}{n+1} \quad . \tag{2.47}$$

Dies ist eine numerisch stabile Rekursionsformel, um aus der Kenntnis von $P_0 = 1$ und $P_1 = x$ alle beliebigen $P_n(x)$ zu ermitteln. Als nächsten Schritt wollen wir die Differentialgleichung ableiten, deren Lösung die Legendre-Polynome sind. Wir differenzieren die generierende Funktion in bezug auf x

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{\left(1 - 2xt + t^2\right)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,t^n \tag{2.48}$$

oder

$$\left(1 - 2xt + t^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n = 0 \quad . \tag{2.49}$$

Wieder führen wir einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten zunächst

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m'(x)\,t^m - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^{n+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s'(x)\,t^{s+2} = 0 \quad . \tag{2.50}$$

Mit $m = n + 1$ und $s = n - 1$ haben wir

$$P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) = 2x\;P_n'(x) + P_n(x) \quad . \tag{2.51}$$

Eine weitere Relation können wir ableiten, wenn wir die Rekursionsbeziehung differenzieren, d.h.

$$\frac{d}{dx}\left\{(2n+1)x\,P_n(x)\right\} = (n+1)\,P_{n+1}'(x) + n\,P_{n-1}'(x) \quad . \tag{2.52}$$

Es folgt

$$2(2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)x\,P_n'(x) = 2(n+1)\,P_{n+1}'(x) + 2n\,P_{n-1}'(x) \quad . \tag{2.53}$$

Zu dieser Gleichung addieren wir das $(2n+1)$-fache von (2.51)

$$\begin{aligned} &2(2n+1)P_n(x) + 2(2n+1)x\,P_n'(x) + (2n+1)P_{n+1}' + (2n+1)P_{n-1}'(x) \quad = \\ &2(n+1)P_{n+1}'(x) + 2n\,P_{n-1}'(x) + 2x(2n+1)P_n'(x) + (2n+1)P_n(x) \quad . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dies ergibt

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad . \tag{2.55}$$

Wir addieren (2.55) und (2.51) und bekommen

$$2P'_{n+1}(x) = 2xP'_n(x) + 2(n+1)P_n(x) \tag{2.56}$$

und somit

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + x\,P'_n(x) \tag{2.57}$$

Subtraktion von (2.55) von (2.51) ergibt

$$2P'_{n-1}(x) = 2x\,P'_n(x) + P_n(x) - (2n+1)P_n(x), \tag{2.58}$$

also

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x). \tag{2.59}$$

Wir behaupten ferner, daß gilt

$$\left(1-x^2\right)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad . \tag{2.60}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} nP_{n-1}(x) &= \left(1-x^2\right)P'_n(x) + nxP_n(x) \\ &= (2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{2.61}$$

wobei wir im letzten Schritt die Rekursionsformel der Legendre-Polynome ausgenutzt haben. Dies führt sofort auf

$$\left(1-x^2\right)P'_n(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) \quad . \tag{2.62}$$

Wir müssen aber noch (2.60) beweisen. Wir gehen hierzu von (2.57) aus und ersetzen n durch $n-1$. Es folgt

$$P'_n(x) = nP_{n-1}(x) + xP'_{n-1}(x) \quad . \tag{2.63}$$

Aus (2.59) resultiert

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x) \quad . \tag{2.64}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit x und subtrahieren das Ergebnis von (2.63). Wir haben dann das Ergebnis

$$\left(1-x^2\right)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad . \tag{2.65}$$

Wir differenzieren jetzt diesen Ausdruck. Es resultiert

$$-2xP'_n(x) + \left(1-x^2\right)P''_n(x) = nP'_{n-1}(x) - nP_n(x) - nxP'_n(x) \quad . \tag{2.66}$$

Es folgt weiter nach (2.59)

$$\left(1-x^2\right) P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n^2 P_n(x) - nxP_n'(x) + nP_n(x) + nxP_n'(x) = 0 \qquad (2.67)$$

und somit

$$\left(1-x^2\right) P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad . \qquad (2.68)$$

Dies ist die Legendre-Differentialgleichung. Es ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir wollen nun die Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome ableiten. Dazu schreiben wir die Legendre-Differentialgleichung um in

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_n'(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad . \qquad (2.69)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit $P_m(x)$ und subtrahieren davon den gleichen Ausdruck, wobei die Indices m und n ausgetauscht wurden. Wir integrieren von -1 bis $+1$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left\{ P_m(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_n'(x)\right] - P_n(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_m'(x)\right] \right\} dx \\ = \quad & [m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx \quad . \end{aligned} \qquad (2.70)$$

Wir integrieren partiell, der ausintegrierte Anteil verschwindet aufgrund des Faktors $(1-x^2)$. Es verbleibt

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad . \qquad (2.71)$$

Für $m \neq n$ folgt daher

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad (2.72)$$

oder mit $x = \cos\Theta$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\Theta)\, P_m(\cos\Theta)\, \sin\Theta\, d\Theta = 0 \quad . \qquad (2.73)$$

Wir müssen jetzt noch den Spezialfall $n = m$ studieren. Dabei gehen wir aus von der generierenden Funktion

$$\left(1-2tx+t^2\right)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n\right]^2 \quad . \qquad (2.74)$$

Wir integrieren über x im Intervall $[-1,+1]$. Es folgt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 \, dx \quad . \tag{2.75}$$

Wir substituieren

$$y = 1 - 2tx + t^2 \quad . \tag{2.76}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{t-2tx+t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad . \tag{2.77}$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \quad . \tag{2.78}$$

Der Vergleich mit (2.75) zeigt

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} \quad . \tag{2.79}$$

Damit ist die Orthogonalitätsrelation abgeleitet.

Wir stellen nun eine Funktion in einer Reihenentwicklung in Legendre-Polynomen dar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad . \tag{2.80}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n multiplizieren wir mit $P_m(x)$ und integrieren. Es ergibt sich

$$\frac{2}{2m+1} a_m = \int_{-1}^{+1} f(x) \, P_m(x) \, dx \quad . \tag{2.81}$$

Damit haben wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\int_{-1}^{+1} f(t) \, P_n(t) \, dt \right) P_n(x) \quad . \tag{2.82}$$

Dies ist die Legendre-Reihe.

2.3 Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Wir wollen den Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \text{div grad} \tag{2.83}$$

von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten umschreiben. Im Rahmen der klassischen Mechanik hatten wir bereits die Divergenz und den Gradienten in Kugelkoordinaten dargestellt. Generell galt

$$\text{div}\vec{a} = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(b_{y_2} b_{y_3} a_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(b_{y_3} b_{y_1} a_2 \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(b_{y_1} b_{y_2} a_3 \right) \right] \tag{2.84}$$

sowie

$$\text{grad} f = \sum_j \vec{e}_{y_j} b_{y_j}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} f \quad . \tag{2.85}$$

Hierbei sind die b_{y_i} Skalenfaktoren, definiert durch

$$b_{y_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right| \quad . \tag{2.86}$$

Der Ortsvektor in Kugelkoordinaten ist

$$\vec{r} = \left(r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta \right) \quad . \tag{2.87}$$

Die krummlinigen Koordinaten y_i sind entsprechend r, ϑ, φ. Wir hatten bereits die Skalenfaktoren bestimmt. Es resultiert

$$b_r = 1, \tag{2.88}$$

$$b_\vartheta = r, \tag{2.89}$$

$$b_\varphi = r \sin\vartheta \quad . \tag{2.90}$$

Generell erhalten wir für den Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \text{div grad}\phi \\ &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_{y_2} b_{y_3}}{b_{y_1}} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_{y_3} b_{y_1}}{b_{y_2}} \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_{y_1} b_{y_2}}{b_{y_3}} \frac{\partial \phi}{\partial y_3} \right) \right] \end{aligned} \tag{2.91}$$

Wir setzen jetzt die Kugelkoordinaten ein und bekommen

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \vec{\nabla}^2 \phi = \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad . \end{aligned} \tag{2.92}$$

2.4 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir wollen nun die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0 \tag{2.93}$$

untersuchen. Wir verwenden hierbei Kugelkoordinaten, deren Anwendung in der Elektrostatik oftmals von Vorteil ist. In Kugelkoordinaten lautet der Laplace-Operator

$$\Delta\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad . \tag{2.94}$$

Wir werden uns zunächst beschränken auf Felder mit axialer Symmetrie, d.h. ϕ ist unabhängig vom Winkel φ. Es verbleibt

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) = 0 \quad . \tag{2.95}$$

Für die Lösung machen wir einen Separationsansatz

$$\phi(r,\vartheta) = R(r)P(\vartheta) \quad . \tag{2.96}$$

Einsetzen in (2.95) führt auf

$$P\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right) = 0 \quad . \tag{2.97}$$

Wir dividieren durch RP, es resultiert

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{P\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) = 0 \quad . \tag{2.98}$$

Der zweite Term ist vollkommen unabhängig von r, also muß es auch der erste sein. Beide Terme sind konstant. Es ist damit

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = k \tag{2.99}$$

und

$$\frac{1}{P\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) = -k \quad . \tag{2.100}$$

Wir untersuchen zunächst die Radialgleichung

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - kR = 0 \quad . \tag{2.101}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Form

$$R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad . \tag{2.102}$$

Wir setzen diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned} &An(n-1)r^n + 2Anr^n - kAr^n \\ &+B(-n-1)(-n-2)r^{-n-1} + 2B(-n-1)r^{-n-1} - kBr^{-n-1} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.103}$$

Aus der zweiten Zeile setzen wir

$$(n+1)(n+2) - 2(n+1) = n^2 + 3n + 2 - 2n - 2 = n^2 + n = n(n+1) \quad . \tag{2.104}$$

Damit wird die Gleichung (2.103) befriedigt durch

$$n(n+1) = k \quad . \tag{2.105}$$

Wir untersuchen jetzt den winkelabhängigen Teil der Laplace-Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dP}{d\vartheta}\right) + n(n+1)\sin\vartheta P = 0 \tag{2.106}$$

Wir setzen jetzt

$$x = \cos\vartheta \quad . \tag{2.107}$$

Dies ergibt

$$\frac{df}{d\vartheta} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{d\vartheta} = -\sin\vartheta \frac{df}{dx} = -\left(1-x^2\right)^{1/2} \frac{df}{dx} \quad . \tag{2.108}$$

Wir erhalten damit

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right] + n(n+1)P = 0 \quad . \tag{2.109}$$

Dies ist gerade wieder die Legendre-Differentialgleichung mit den Legendre-Polynomen als Lösung

$$P = P_n(\cos\vartheta) \quad . \tag{2.110}$$

Als allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten unter der Annahme axialer Symmetrie haben wir damit

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\vartheta) \quad . \tag{2.111}$$

2.5 Einführung der Kugelfunktionen

Wir gehen wieder aus von der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta V(r,\vartheta,\varphi) = 0 \quad . \tag{2.112}$$

Wieder machen wir einen Separationsansatz

$$V(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi) \quad . \tag{2.113}$$

Nach Abseparation des Radialanteils bekommen wir

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \frac{\Theta(\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\,\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi) = 0 \quad . \tag{2.114}$$

Die Separationskonstante für den Radialanteil haben wir wieder $n(n+1)$ genannt. Von der Bedingung der axialen Symmetrie machen wir jetzt nicht mehr Gebrauch. Wir dividieren (2.114) durch $\Phi(\varphi)\,\Theta(\vartheta)$. Es folgt

$$\frac{1}{\sin\vartheta\,\Theta(\vartheta)}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)\sin^2\vartheta}\,\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1) = 0 \quad . \tag{2.115}$$

Multiplikation mit $\sin^2\vartheta$ führt schließlich auf

$$\frac{\sin\vartheta}{\Theta(\vartheta)}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + n(n+1)\sin^2\vartheta + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\,\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0 \quad . \tag{2.116}$$

Offensichtlich separiert auch diese Differentialgleichung in einen φ-abhängigen und in einen ϑ-abhängigen Anteil. Die Separationskonstante nennen wir $-m^2$. Es folgt

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\,\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{2.117}$$

oder

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\,\Phi(\varphi) = 0 \quad . \tag{2.118}$$

Der φ-abhängige Teil der Laplace-Gleichung läßt sich leicht lösen durch

$$\Phi = e^{im\varphi} = \cos m\varphi + i\sin m\varphi \quad . \tag{2.119}$$

Die Orthogonalitätsrelation lautet damit

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi}\,e^{+im_2\varphi}\,d\varphi = 2\pi\,\delta_{m_1 m_2} \quad . \tag{2.120}$$

Die normierte Lösungsfunktion können wir also angeben als

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi} \quad . \tag{2.121}$$

Damit Φ eine eindeutige Funktion vom Azimuthwinkel φ ist, muß m ganzzahlig sein, d. h.

$$m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots \tag{2.122}$$

Eindeutigkeit bedeutet

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad . \tag{2.123}$$

Damit ist die Lösungsfunktion bezüglich φ vollständig bestimmt. Wir wollen jetzt die verbleibende Differentialgleichung bezüglich der Variablen ϑ untersuchen. Es gilt

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0 \tag{2.124}$$

Wieder setzen wir

$$x = \cos\vartheta \quad . \tag{2.125}$$

Damit transformiert sich die Gleichung (2.124) in

$$(1-x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 \tag{2.126}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 \quad . \tag{2.127}$$

Wir setzen jetzt

$$\Theta = (1-x^2)^{m/2}\, v_m(x) \tag{2.128}$$

und setzen dies in (2.126) ein. Es resultiert

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\,\frac{d}{dx}\left[\frac{m}{2}(1-x^2)^{m/2-1}\,(-2x)\,v_m(x) + (1-x^2)^{m/2}\,v_m'(x)\right] \\
&-2x\left[\frac{m}{2}(1-x^2)^{m/2-1}\,(-2x)v_m(x) - (1-x^2)^{m/2}\,v_m'(x)\right] \\
&+\left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right](1-x^2)^{m/2}\,v_m(x) = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Weiter ausgewertet ergibt dies

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\left[\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)(1-x^2)^{m/2-2}(-2x)^2\,v_m(x) - m(1-x^2)^{m/2-1}\,v_m(x)\right.\\
&\left.-m(1-x^2)^{m/2-1}x\,v_m'(x) + \frac{m}{2}(1-x^2)^{m/2-1}(-2x)\,v_m'(x) + (1-x^2)^{m/2}\,v_m''(x)\right]\\
&-2x\left[\frac{m}{2}(1-x^2)^{m/2-1}(-2x)\,v_m(x) + (1-x^2)^{m/2}\,v_m'(x)\right]\\
&+\left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right](1-x^2)^{m/2}\,v_m(x) = 0 \quad . \qquad (2.130)
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(1-x^2)^{-m/2}$, es folgt

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\,v_m'' + \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)(1-x^2)^{-1}(-2x)^2\,v_m(x) - m\,v_m(x) - mx\,v_m'(x) - mx\,v_m'(x)\\
&+(2x)^2\frac{m}{2}(1-x^2)^{-1}\,v_m(x) - 2x\,v_m'(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v_m(x) = 0 \quad . \qquad (2.131)
\end{aligned}
$$

Dies ergibt weiter zusammengefaßt

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)v_m'' - 2(m+1)x\,v_m' + n(n+1)\,v_m - m\,v_m\\
&+\frac{1}{1-x^2}\left[4x^2\frac{m^2}{4} + 4x^2\left(-\frac{m}{2}\right) + 4x^2\frac{m}{2} - m^2\right]v_m = 0 \quad . \qquad (2.132)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir schließlich für v_m als Differentialgleichung

$$
(1-x^2)v_m'' - 2(m+1)x\,v_m' + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]v_m = 0 \quad . \qquad (2.133)
$$

Wir differenzieren diese Differentialgleichung nochmals. Es folgt

$$
(1-x^2)(v_m')'' - 2(m+2)x(v_m')' + \left[n(n+1) - (m+1)(m+2)\right]v_m' = 0 \quad . \qquad (2.134)
$$

Vergleichen wir dies mit der Differentialgleichung (2.133) so erkennen wir die Lösung

$$
v_m' = v_{m+1} \qquad (2.135)
$$

oder rekursiv weiter

$$
v_m(x) = \frac{d^m v_0(x)}{dx^m} \quad . \qquad (2.136)
$$

Dabei ist $v_0(x)$ die Lösung von

$$
(1-x^2)v_0'' - 2xv_0' + n(n+1)v_0 = 0 \quad . \qquad (2.137)
$$

Dies ist aber gerade die Differentialgleichung für die gewöhnlichen Legendre-Polynome $P_n(x)$. Zusammengefaßt erhalten wir damit

$$
\Theta(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \quad . \qquad (2.138)
$$

In der Physik ist es üblich, in die Definition der erweiterten Legendre-Polynome noch einen Phasenfaktor $(-1)^m$ aufzunehmen, d.h.

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad . \tag{2.139}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (2.124) sind die assoziierten Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \tag{2.140}$$

mit $x = \cos\vartheta$ und den Legendre-Polynomen $P_l(x)$. Der Faktor $(-1)^m$ ist Konvention. Für $m = 0$ gilt offensichtlich

$$P_l^{m=0}(x) = P_l(x) \quad . \tag{2.141}$$

Mit dieser Beziehung ergibt sich für die Rodrigues-Formel für die assoziierten Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad . \tag{2.142}$$

Die Orthogonalitätsrelation der assoziierten Legendre-Polynome lautet

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x) P_l^m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l} \quad . \tag{2.143}$$

Wir wollen nun die Orthogonalitätsrelation (2.143) beweisen. Hierbei gehen wir von der Rodrigues-Formel aus, und wir nehmen an, daß beide assoziierten Legendre-Polynome den gleichen m-Wert aufweisen. Wir finden

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)\, P_q^m(x)\, dx = \frac{(-1)^m}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^{1} X^m \left(\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} X^q \, dx \tag{2.144}$$

mit $X = x^2 - 1$. Für $p \neq q$ nehmen wir an $p < q$. Wir wenden jetzt die partielle Integration an. Der ausintegrierte Anteil verschwindet jeweils aufgrund des Faktors X. Wir integrieren $(q+m)$-mal und bekommen

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)\, P_q^m(x)\, dx = \frac{(-1)^m (-1)^{q+m}}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) X^q \, dx \quad . \tag{2.145}$$

Im Integranden auf der rechten Seite verwenden wir die Leibnitz-Formel bezüglich der n-ten Ableitung eines Produktes

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[A(x)\, B(x) \right] = \sum_{s=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ s \end{array} \right) \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x) \tag{2.146}$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\left(\begin{array}{c} n \\ s \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-s)! s!} \quad . \tag{2.147}$$

Damit bekommen wir

$$X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) = X^q \sum_{i=0}^{q+m} \frac{(q+m)!}{i!(q+m-i)!} \frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} X^m \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p \quad . \tag{2.148}$$

Der Ausdruck X^m enthält keine Potenz von x größer als x^{2m}. Daher muß gelten

$$q + m - i \leq 2m \quad , \tag{2.149}$$

oder die Ableitung verschwindet. Ähnlich folgt

$$p + m + i \leq 2p \quad . \tag{2.150}$$

Dies bedingt

$$i \geq q - m \tag{2.151}$$

und

$$i \leq p - m \quad . \tag{2.152}$$

Wir hatten angenommen $p < q$, damit haben diese Ungleichungen keine Lösung, und das Integral verschwindet. Als verbleibenden Fall untersuchen wir nun den Fall $p = q$. Dann können wir noch den Spezialfall $i = q - m$ vorliegen haben. Damit folgt

$$I = \int_{-1}^{1} [P_q^m(x)]^2 \, dx = \frac{(-1)^{q+2m}(q+m)!}{2^{2q} q! q! (2m)! (q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \right) \left(\frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q \right) \, dx \quad . \tag{2.153}$$

Es ist

$$X^m = (x^2 - 1)^m = x^{2m} - m\, x^{2m-2} + \ldots \tag{2.154}$$

und daher

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m = (2m)! \quad . \tag{2.155}$$

Es verbleibt

$$I = \frac{(-1)^{q+2m}(2q)!(q+m)!}{2^{2q} q! q! (q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q \, dx \quad . \tag{2.156}$$

Das Integral auf der rechten Seite läßt sich durch partielle Integration geschlossen auswerten:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} dx \, (x^2-1)^q = (-)^q \int_{-1}^{1} dx \, (1-x)^q (1+x)^q \\
&= \frac{(-)^q q}{q+1} \int_{-1}^{1} dx \, (1-x)^{q-1} (1+x)^{q+1} \qquad \text{(1. partielle Integration)} \\
&= \frac{(-)^q q(q-1)}{(q+1)(q+2)} \int_{-1}^{1} dx \, (1-x)^{q-2} (1+x)^{q+2} \qquad \text{(2. partielle Integration)} \\
&= \frac{(-)^q q! q!}{(2q)!} \int_{-1}^{1} dx \, (1+x)^{2q} \qquad \text{(q-te partielle Integration)} \\
&= \frac{(-)^q q! q!}{(2q)!} \frac{2^{2q+1}}{2q+1} = \frac{(-)^q 2^{2q+1} q! q!}{(2q+1)!} \quad .
\end{aligned} \tag{2.157}$$

Zusammengefaßt erhalten wir als Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x) P_q^m(x)\, dx = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!}\, \delta_{p,q} \quad . \tag{2.158}$$

Wir fügen jetzt die Teillösungen für die Winkelvariablen zusammen und definieren die Kugelfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ durch

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\cos\vartheta)\; e^{im\varphi} \quad . \tag{2.159}$$

Die Orthonormalitätsrelation der Kugelfunktionen lautet damit

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\; Y^*_{l'm'}(\vartheta, \varphi)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'} \quad . \tag{2.160}$$

Wir schreiben die ersten Kugelfunktionen explizit aus

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \tag{2.161}$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{i\varphi} \quad , \tag{2.162}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \quad , \tag{2.163}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\vartheta\, e^{2i\varphi} \quad , \tag{2.164}$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\; \sin\vartheta\; \cos\vartheta\, e^{i\varphi} \quad , \tag{2.165}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right) \quad . \tag{2.166}$$

Für $m = 0$ folgt

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\vartheta) \quad . \tag{2.167}$$

Wir wollen eine Funktion auf der Einheitskugel in Kugelfunktionen entwickeln

$$f(\vec{r}, r=1) = f(r=1, \vartheta, \varphi) = g(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{2.168}$$

Wir bekommen

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{2.169}$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation folgt für die Entwicklungskoeffizienten a_{lm}

$$a_{lm} = \int d\Omega\, Y^*_{lm}(\vartheta, \varphi)\, g(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{2.170}$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(r,\vartheta,\varphi) = 0 \tag{2.171}$$

können wir daher in sphärischen Koordinaten durch eine Reihenentwicklung in Kugelfunktionen darstellen als

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{lm}\,r^{l} + b_{ml}\,r^{-l-1}\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{2.172}$$

Als Spezialfall betrachten wir nun noch $g(\vartheta,\varphi)$ für $\vartheta = 0$. Alle Y_{lm} verschwinden für diesen Spezialfall außer für $m = 0$. Damit finden wir

$$[g(\vartheta,\varphi)]_{\vartheta=0} = \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,a_{l0} \tag{2.173}$$

mit

$$a_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int d\Omega\,P_l(\cos\vartheta)\,g(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{2.174}$$

2.6 Das Additionstheorem der Kugelfunktionen

Wir hatten für die Ortsabhängigkeit der Coulomb-Wechselwirkung die Darstellung gefunden

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,P_l(\cos\alpha) \quad , \tag{2.175}$$

wobei α der von den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ eingeschlossene Winkel ist mit

$$\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = rr'\cos\alpha \quad . \tag{2.176}$$

In diesem Kapitel werden wir mit

$$\vec{r} = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) \quad , \tag{2.177}$$

$$\vec{r}\,' = (r'\sin\vartheta'\cos\varphi', r'\sin\vartheta'\sin\varphi', r'\cos\vartheta') \tag{2.178}$$

eine Entwicklung ausgedrückt durch die Winkel ϑ,φ und ϑ',φ' ableiten. Es gilt

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{2.179}$$

Mit

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{r}\,' &= rr'\sin\vartheta\sin\vartheta'(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi') + rr'\cos\vartheta\cos\vartheta' \\ &= rr'[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')] \quad .\end{aligned} \tag{2.180}$$

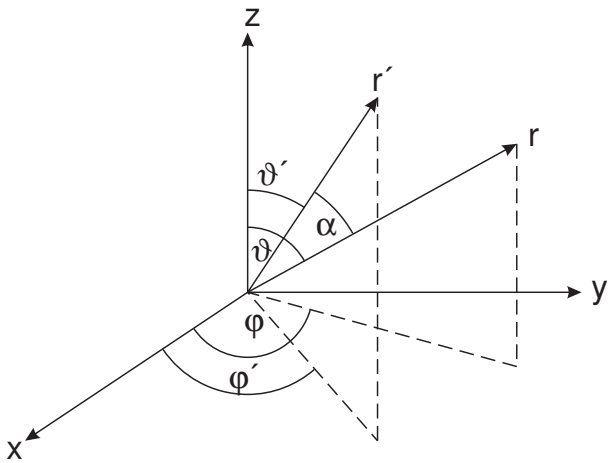
Damit folgt der Zusammenhang für die verschiedenen Winkel

$$\cos\alpha = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi') \quad . \tag{2.181}$$

Vergleichen wir die beiden Entwicklungen bezüglich der Coulomb-Wechselwirkung, so muß offensichtlich gelten

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{2.182}$$

Dies gilt es zu beweisen.



Wir wollen nun das Additionstheorem der Kugelfunktionen beweisen. Dazu setzen wir

$$g(\vartheta,\varphi) = Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad \text{relativ zu } \vec{r} \tag{2.183}$$

$$= \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\,Y_{lm}(\alpha,\beta) \qquad \text{relativ zu } \vec{r}\,' \quad . \tag{2.184}$$

Die besondere Wahl des Azimuth-Winkels β ist hierbei irrelevant. Für $\alpha = 0$ haben wir

$$g(\vartheta,\varphi)|_{\alpha=0} = a_{l0}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \quad . \tag{2.185}$$

Wir multiplizieren (2.184) mit $Y^*_{l0}(\alpha,\beta)$ und integrieren über den Raumwinkel

$$\int g(\vartheta,\varphi)\,Y^*_{l0}(\alpha,\beta)\,d\Omega_{(\alpha,\beta)} = a_{l0} \quad . \tag{2.186}$$

Nach (2.183) ist dies gleichzeitig

$$\int Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\,Y^*_{l0}(\alpha,\beta)\,d\Omega = a_{l0} \quad . \tag{2.187}$$

Für das Legendre-Polynom $P_l(\cos\alpha)$ führen wir jetzt eine Entwicklung durch der Form

$$P_l(\cos\alpha) = \sum_{m=-l}^{l} b_{lm}\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{2.188}$$

Wir multiplizieren dies mit $Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)$ und integrieren in bezug auf ϑ und φ. Es resultiert

$$\int P_l(\cos\alpha)\, Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\, d\Omega_{(\vartheta,\varphi)} = b_{lm} \quad . \tag{2.189}$$

Ausgedrückt durch Kugelfunktionen lautet diese Gleichung

$$\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int Y_{l0}(\alpha,\beta)\, Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\, d\Omega_{(\vartheta,\varphi)} = b_{lm} \quad . \tag{2.190}$$

Da wir über den gesamten Raum integrieren, ist die Polarachse irrelevant. Vergleichen wir (2.190) mit (2.187), so erhalten wir

$$b^*_{lm} = a_{l0} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \quad . \tag{2.191}$$

Mit (2.185) bekommen wir

$$b^*_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1}\, g(\vartheta,\varphi)|_{\alpha=0} \quad . \tag{2.192}$$

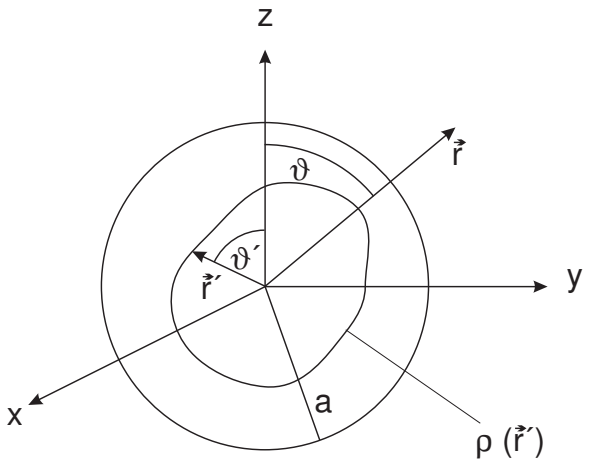
Für $\alpha \to 0$ folgt $\vartheta \to \vartheta'$ und $\varphi \to \varphi'$. Mit (2.183) können wir (2.192) schreiben als

$$b^*_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1}\, Y_{lm}(\vartheta',\varphi') \quad . \tag{2.193}$$

Dies setzen wir ein in (2.188) und bekommen so

$$P_l(\cos\alpha) = \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\, Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{2.194}$$

2.7 Multipolentwicklung



Wir betrachten eine im Raum begrenzte Ladungsverteilung, die außerhalb einer Kugel mit dem Radius a um den Ursprung verschwindet. Wir wollen das Potential im Außenraum mit $r > a$ ermitteln. Randbedingungen im Endlichen seien nicht vorgegeben. Damit erhalten wir

$$\Phi(\vec{r}\,) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' \quad . \tag{2.195}$$

Da wir die Ladungsverteilung begrenzt haben und das Potential im Außenraum betrachten, können wir mit $r > r'$ die Entwicklung ansetzen

$$\Phi(\vec{r}\,) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\, \frac{1}{r^{l+1}}\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \int \rho(\vec{r}\,') r'^{l}\, Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi')\, d^3r' \quad . \tag{2.196}$$

Bei der Diskussion der nun folgenden Multipolmomente müssen wir zwischen der sphärischen und der kartesischen Darstellung differenzieren. Wir verbleiben zunächst in der sphärischen Darstellung. Wir nennen die Koeffizienten

$$q_{lm} = \int Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi')\, r'^{l} \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' \quad . \tag{2.197}$$

die Multipolmomente der Ladungsverteilung. Speziell heißen die Größen mit

$l = 0$: Monopolmoment
$l = 1$: Dipolmoment
$l = 2$: Quadrupolmoment
$l = 3$: Oktupolmoment
$l = 4$: Hexadekupolmoment.

Für das Monopolmoment folgt

$$q_{00} = \int \rho(\vec{r}\,') r'^{0} Y^*_{00}(\vartheta', \varphi')\, d^3r' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \quad . \tag{2.198}$$

Das Monopolmoment entspricht also bis auf einen Faktor $1/\sqrt{4\pi}$ der Gesamtladung. Für große Abstände vom Ladungszentrum dominiert in der Multipolentwicklung des Potentials der Monopolterm

$$\Phi(\vec{r}) = 4\pi\, q_{00}\, \frac{1}{r}\, Y_{00} + \ldots = \frac{Q}{r} + \ldots \quad . \tag{2.199}$$

Wir wenden uns jetzt der kartesischen Darstellung zu. Eine besondere Diskussion erfordert das Dipolmoment. Das Dipolmoment ist ein Vektor, es ist definiert durch

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'\, d^3r' \quad . \tag{2.200}$$

Die kartesischen Komponenten dieses Vektors sind gegeben durch

$$p_x = \int \rho(\vec{r}\,')\, x'\, d^3r' \quad , \tag{2.201}$$

$$p_y = \int \rho(\vec{r}\,')\, y'\, d^3r' \quad , \tag{2.202}$$

$$p_z = \int \rho(\vec{r}\,')\, z'\, d^3r' \quad . \tag{2.203}$$

Als Modell für einen Dipol betrachten wir die Ladung q am Ort $a/2$ und die Ladung $-q$ am Ort $-a/2$. Damit lautet die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}\,') = q\,\delta(\vec{r}\,' - a/2) - q\,\delta(\vec{r}\,' + a/2) \quad . \tag{2.204}$$

Für das Dipolmoment $\vec{p}$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'\, d^3r' = \int \left(q\,\delta(\vec{r}\,' - a/2) - q\,\delta(\vec{r}\,' + a/2)\right) \vec{r}\,'\, d^3r' \\ &= q\frac{\vec{a}}{2} - q\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right) = q\vec{a} \quad . \end{aligned} \tag{2.205}$$

In sphärischer Darstellung ergibt sich

$$q_{11} = \int \rho(\vec{r}\,')\, r'\, Y_{11}^*(\vartheta', \varphi')\, d^3r' \quad . \tag{2.206}$$

Wir setzen die explizite Darstellung von $Y_{11}^*(\vartheta', \varphi')$ ein und erhalten

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}\,')\, r' (\sin\vartheta' \cos\varphi' - i \sin\vartheta' \sin\varphi')\, d^3r' \quad . \tag{2.207}$$

Wir transformieren jetzt die sphärische und die kartesische Darstellung ineinander. Die sphärischen Komponenten können wir durch die kartesischen darstellen

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}\,')(x' - iy')\, d^3r' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y) \quad . \tag{2.208}$$

Ebenso gilt

$$q_{10} = \int \rho(\vec{r}\,')\, r'\, Y_{10}^*(\vartheta', \varphi')\, d^3r' = \int \rho(\vec{r}\,')\, r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta'\, d^3r' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \quad . \tag{2.209}$$

Als Einschub behandeln wir generell die Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten. Die Entwicklung einer Funktion $f(\vec{r}\,')$ in eine Taylor-Reihe um die Stelle $\vec{r}\,' = 0$ lautet

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2', x_3') &= f(0,0,0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_i'} x_i' + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_i' \partial x_j'} x_i' x_j' + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i' \frac{\partial}{\partial x_i'} \right)^n f(x_1', x_2', x_3')|_{x_1'=x_2'=x_3'=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}')^n}{n!} f(\vec{r}\,')|_{\vec{r}\,'=0} \quad . \end{aligned} \tag{2.210}$$

Der Gradient $\vec{\nabla}$ wirkt dabei nur auf die Funktion $f(\vec{r}\,')$. Für die spezielle Funktion

$$f(\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i')^2}} \tag{2.211}$$

ergibt sich

$$f(\vec{r}\,')|_{\vec{r}\,'=0} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{1}{r} \quad , \tag{2.212}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(\vec{r}\,')}{\partial x_i'} \right|_{\vec{r}\,'=0} &= \left. \frac{x_i - x_i'}{\left(\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \right)^3} \right|_{\vec{r}\,'=0} \\ &= \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = \frac{x_i}{r^3} \quad , \end{aligned} \tag{2.213}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f(\vec{r}\,')}{\partial x_j' \partial x_i'} \right|_{\vec{r}\,'=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_j'} \frac{x_i - x_i'}{((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2)^{3/2}} \right|_{\vec{r}\,'=0} \\ &= \left. \left\{ \frac{3(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2)^{5/2}} \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. - \frac{\delta_{ij}}{((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2)^{3/2}} \right\} \right|_{\vec{r}\,'=0} \\ &= \frac{3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \quad . \end{aligned} \tag{2.214}$$

Das Potential lautet damit im Bereich $r > r'$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}\,) &= \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3 r' \\ &= \int \rho(\vec{r}\,') \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i' x_i}{r^3} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{3 x_i x_j - r^2 \, \delta_{ij}}{r^5} \, x_i' x_j' + \ldots \right\} d^3 r' \\ &= \frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int \rho(\vec{r}\,') \, x_i' x_j' \, d^3 r' + \ldots \quad . \end{aligned} \tag{2.215}$$

Der dritte Term, das sogenannte Quadrupolmoment, läßt sich noch weiter umformen in

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}\int\rho(\vec{r}\,')(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\,d^3r' \\
&+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}\int\rho(\vec{r}\,')\,r'^2\delta_{ij}\,d^3r' \\
= &\quad \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})Q_{ij}}{r^5}+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\frac{3x_i^2-r^2}{r^5}\int\rho(\vec{r}\,')\,r'^2\,d^3r' \\
= &\quad \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})Q_{ij}}{r^5}
\end{aligned} \tag{2.216}$$

mit dem Quadrupoltensor

$$Q_{ij}=\int\rho(\vec{r}\,')(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\,d^3r' \quad . \tag{2.217}$$

Dabei haben wir ferner ausgenutzt, daß gilt

$$\sum_{i=1}^{3}(3x_i^2-r^2)=3r^2-3r^2=0 \quad . \tag{2.218}$$

Das Potential außerhalb der Ladungsverteilung mit $r>r'$ lautet demnach

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}\,) &= \int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \\
&= \frac{Q}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}+\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}Q_{ij}\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}+\ldots \quad .
\end{aligned} \tag{2.219}$$

Jetzt wenden wir uns wieder der sphärischen Darstellung der Multipolmomente zu. Als spezielles Beispiel betrachten wir die Komponente

$$\begin{aligned}
q_{22} &= \int\rho(\vec{r}\,')r'^2Y_{22}^*(\vartheta',\varphi')\,d^3r' \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int\rho(\vec{r}\,')(r'\sin\vartheta'(\cos\varphi'-i\sin\varphi'))^2\,d^3r' \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int\rho(\vec{r}\,')(x'-iy')^2\,d^3r' \quad .
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Mit der Umformung

$$(x'-iy')^2=\frac{1}{3}[(3x'^2-r'^2)-6ix'y'-(3y'^2-r'^2)] \tag{2.221}$$

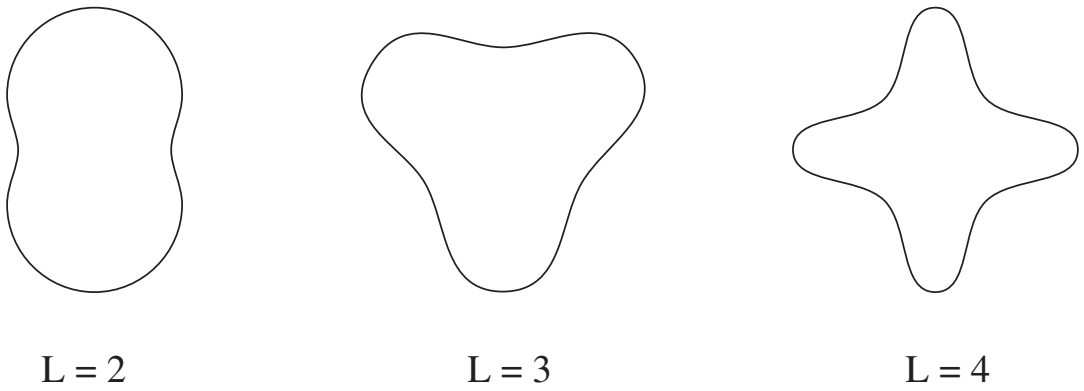
erhalten wir

$$q_{22}=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11}-2iQ_{12}-Q_{22}) \quad . \tag{2.222}$$

Weiter haben wir als Beispiel

$$q_{20} = \int \rho(\vec{r}\,')\, r'^2\, Y_{20}^*(\vartheta', \varphi')\, d^3r' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33} \quad . \tag{2.223}$$

Beispiele für Quadrupol-, Oktupol- und Hexadekupolmomente sind in der folgenden Figur dargestellt, wobei der angegebene Multipol l das jeweilige Moment charakterisiert.

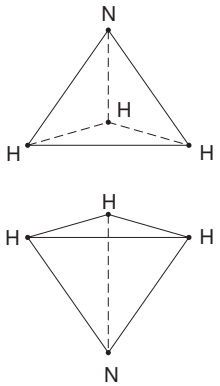


Homogene Ladungsverteilungen (Querschnitt) mit 2^l-Pol-Moment

Viele Atomkerne sind deformiert, d.h., sie besitzen große Quadrupolmomente. Die Kernoberfläche kann durch

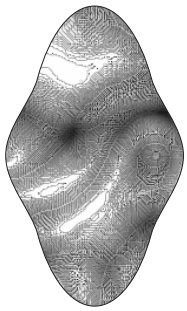
$$R = R_0(1 + \beta_{20}\, Y_{20} - \beta_{40}\, Y_{40}) \tag{2.224}$$

dargestellt werden. Die Ladungsverteilung innerhalb der Kernoberfläche ist weitgehend homogen. β_{20} heißt Quadrupoldeformation, und β_{40} heißt Hexadekupoldeformation der Kerne. Typische Deformationen sind $\beta_{20} \approx 0.3$ und $\beta_{40} \approx 0.05$. Ist $\beta_{20} > 0$ haben die Kerne eine Zigarrenform oder prolate Form. Falls $\beta_{20} < 0$ haben die Kerne die Form eines runden Laib Brotes und haben somit eine oblate Form. Als ein Beispiel für ein Oktupolmoment zeigen wir aus der Molekülphysik das NH_3-Molekül.

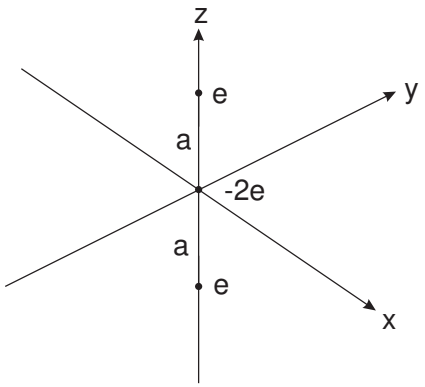


Symmetrisierte Form des Ammoniak

Hier zeigen wir bereits die symmetrisierte Form des Ammoniaks. Das nächste Bild zeigt das Modell eines Urankerns, der sowohl ein großes Quadrupol- als auch ein Hexadekupolmoment besitzt.



Das Quadrupolmoment beträgt $q_{20} = 2.68$ eb und das Hexadekupolmoment $q_{40} = 0.808\,\mathrm{eb}^2$. Hierbei ist e die Elementarladung und b ist 1 barn $= 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$. Aus einzelnen Punktladungen lassen sich auf einfache Weise Multipole bilden, indem wir Multipole von geringerer Ordnung zusammenfügen. Wir betrachten das folgende Zusammenfügen von zwei Dipolen zu einem Quadrupol.



Bei zwei antiparallelen Dipolen auf einer Geraden ist die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot(\delta(z-a) - 2\delta(z) + \delta(z+a)) \quad . \tag{2.225}$$

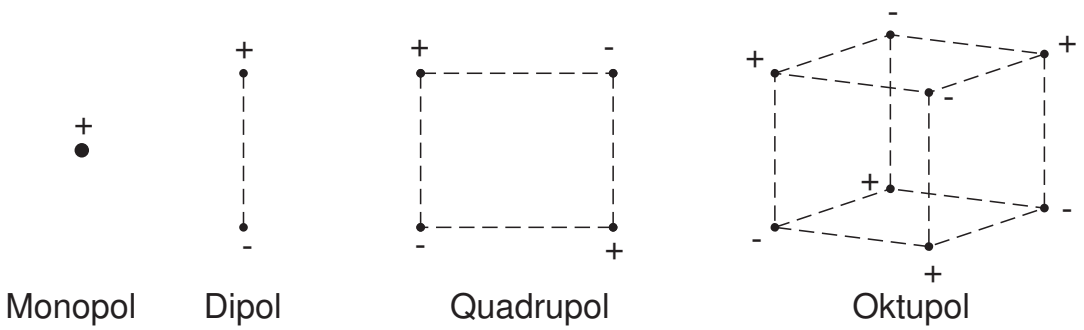
Die nichtverschwindenden kartesischen Quadrupolmomente sind

$$Q_{11} = Q_{22} = -2\,a^2 e \quad , \tag{2.226}$$

$$Q_{33} = 4\,a^2 e \quad . \tag{2.227}$$

Zum Schluß geben wir noch eine Reihe von reinen Multipolen an, die sukzessive auseinander hervorgehen. Ein reiner Dipol wird aus zwei reinen Monopolen $+q, -q$ im Abstand d aufgebaut,

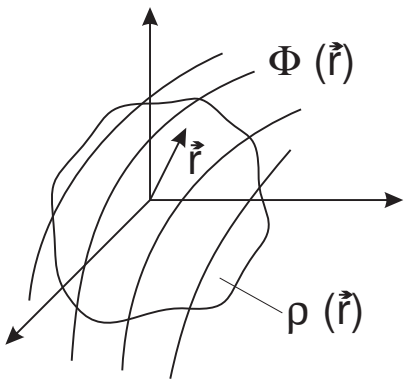
ein reiner Quadrupol aus zwei reinen, entgegengesetzten Dipolen im Abstand d. Reine Multipole l-ter Ordnung impliziert dabei, daß alle Multipole geringerer Ordnung mit $l' < l$ verschwinden.



2.8 Wechselwirkungsenergie einer ausgedehnten Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld

Die Multipolentwicklung des Potentials einer Ladungsverteilung kann helfen, die Wechselwirkungsenergie dieser Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld zu ermitteln. Die Energie der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,)$ in dem äußeren Feld $\Phi(\vec{r}\,)$ ist nach (1.145) und (1.149) gegeben durch

$$W = \int \rho(\vec{r}\,)\Phi(\vec{r}\,)\, dV \quad . \tag{2.228}$$



Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,)$ in einem äußeren Potential $\Phi(\vec{r}\,)$

Das äußere Feld entwickeln wir in eine Taylor-Reihe

$$\Phi(\vec{r}\,) = \Phi(0) + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}\Phi\big|_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0 + \ldots \quad . \tag{2.229}$$

Mit $\vec{\nabla}\Phi\big|_0 = -\vec{E}(0)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = -\left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_0 \tag{2.230}$$

lautet die Reihenentwicklung

$$\Phi(\vec{r}\,) = \Phi(0) - \vec{r}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_0 + \ldots \quad . \tag{2.231}$$

Den letzten Term schreiben wir um. Wir subtrahieren von jedem Term der Summe $\frac{1}{6}\, r^2\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$. Dabei gilt für das äußere Feld in dem betrachteten Gebiet $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, denn die felderzeugenden Ladungen werden als weit außerhalb liegend angenommen. Damit folgt

$$\Phi(\vec{r}\,) = \Phi(0) - \vec{r}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} \left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right) \left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_0 + \ldots \quad . \tag{2.232}$$

Wird nun die Integration durchgeführt, bekommen wir für die Energie

$$W = \int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})\,dV = q\,\Phi(0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_0 + \ldots \quad . \tag{2.233}$$

Wir erkennen, daß die verschiedenen Multipole in unterschiedlicher Weise mit dem äußeren Feld wechselwirken: Die Gesamtladung ist mit dem Potential, der Dipol ist mit der Feldstärke (also mit dem Gradienten des Potentials), der Quadrupol ist mit der Ableitung der Feldstärke verbunden.
Wir betrachten nun die Wechselwirkung zweier Dipole. Das Feld eines Dipols, lokalisiert am Ursprung, betrachtet im Punkt $\vec{r}$, ist nach (2.215)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad . \tag{2.234}$$

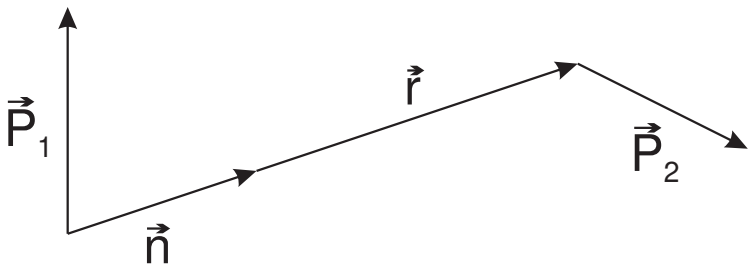
Die Feldstärke ist für $\vec{r} \neq 0$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\Phi(\vec{r}) = -\frac{\vec{p} - 3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p})}{r^3} \tag{2.235}$$

mit $\vec{n} = \vec{r}/r$. Dann folgt für die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

$$W_{12} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1 = \frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 - 3(\vec{n}\cdot\vec{p}_1)(\vec{n}\cdot\vec{p}_2)}{r^3} \quad . \tag{2.236}$$

Die Wechselwirkungsenergie ist also nicht nur vom Abstand r, sondern auch noch vom Orientierungswinkel zur Verbindungsgeraden abhängig.



2.9 Dielektrika

Die Gleichungen, die wir bisher im Rahmen der Elektrostatik diskutiert hatten,

$$\vec{\nabla}\,\vec{E} = 4\pi\rho \quad , \tag{2.237}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad , \tag{2.238}$$

gelten streng genommen nur für das Vakuum und sind nicht direkt auf ein Medium anwendbar. In einem Medium können Ladungen verschoben werden, und es treten Polarisationseffekte auf. Diese Rückwirkung des externen Feldes auf das Medium muß mitberücksichtigt werden, um den resultierenden Gesamteffekt ermitteln zu können. In einem realistischen Festkörper müssen aber typischerweise 10^{23} Ladungen behandelt werden, die zudem noch zeitlichen Variationen unterworfen sind. Die Gleichung für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \int \rho(\vec{r}\,') \, \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, d^3r' \tag{2.239}$$

kann nicht unter Berücksichtigung all dieser Ladungen gelöst werden. Es erscheint sinnvoller, hier Mittelungsprozeduren durchzuführen. Diese Mittelwerte definieren wir folgendermaßen

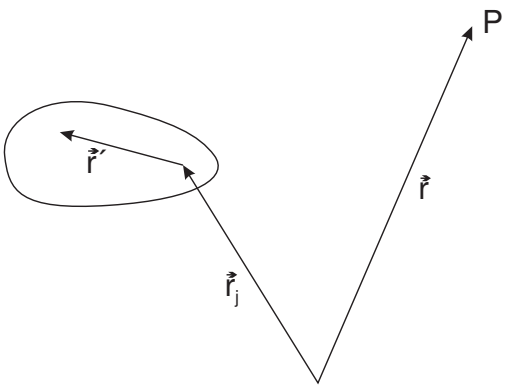
$$< \vec{E}(\vec{r}\,) > = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}\,') \, dV' \quad , \tag{2.240}$$

$$< \rho(\vec{r}\,) > = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho(\vec{r} + \vec{r}\,') \, dV' \quad . \tag{2.241}$$

Die Integrationsvariable $\vec{r}\,'$ erstreckt sich hierbei über das Volumen ΔV. Den Mittelwert kennzeichnen wir zuweilen auch als

$$< \vec{E}(\vec{r}\,) >= \overline{\vec{E}(\vec{r}\,)} \quad . \tag{2.242}$$

Die betrachteten räumlichen Mittelwerte bleiben zeitlich konstant, da die Bewegung der Ladungsträger ungeordnet und gegenüber der Größenordnung von ΔV vernachlässigbar ist. Äußere Felder können in einem Festkörper Dipolmomente induzieren, die wir bei der mittleren Ladungsdichte berücksichtigen müssen. Wir betrachten das Feld eines Moleküls, dessen Schwerpunkt bei $\vec{r}_j$ ist.



Das mikroskopische Feld durch das j-te Molekül ist

$$\begin{aligned}\vec{E}_j(\vec{r}\,) &= \int \rho_j(\vec{r}\,') \, \frac{(\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{r}\,'|^3} \, d^3r' \\ &= -\vec{\nabla} \int \rho_j(\vec{r}\,') \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{r}\,'|} \, d^3r' \quad . \end{aligned} \tag{2.243}$$

Für Beobachtungspunkte außerhalb des Moleküls können wir das Feld in Multipole um den Schwerpunkt des Moleküls entwickeln. Wir verwenden die Entwicklung

$$\Phi(\vec{r}\,) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \ldots \tag{2.244}$$

und erhalten

$$\vec{E}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left[\frac{e_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \vec{\nabla}_j\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\right)\cdot\vec{p}_j + \ldots\right] \tag{2.245}$$

mit

$$e_j = \int_{\text{Molekül}} \rho_j(\vec{r}\,') \, d^3r' \quad , \tag{2.246}$$

$$\vec{p}_j = \int_{\text{Molekül}} \vec{r}\,' \, \rho_j(\vec{r}\,') \, d^3r' \quad . \tag{2.247}$$

e_j ist die molekulare Ladung, und $\vec{p}_j$ ist das molekulare Dipolmoment. Um das mikroskopische Feld aller Moleküle zu erhalten, summieren wir über j

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = -\vec{\nabla}\sum_j \left[\frac{e_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \vec{p}_j\cdot\vec{\nabla}_j\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\right) + \ldots\right] \quad . \tag{2.248}$$

Um die Mittelung durchführen zu können, ersetzen wir die Summe über die einzelnen Moleküle durch ein Integral. Hierzu setzen wir an

$$\rho_{\text{mol}}(\vec{r}\,) = \sum_j e_j \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_j) \quad , \tag{2.249}$$

$$\vec{\Pi}_{\text{mol}}(\vec{r}\,) = \sum_j \vec{p}_j \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_j) \quad . \tag{2.250}$$

Damit können wir die Feldstärke formal umschreiben in

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = -\vec{\nabla}\int d^3r''\left[\frac{\rho_{\text{mol}}(\vec{r}\,'')}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|} + \vec{\Pi}_{\text{mol}}(\vec{r}\,'')\cdot\vec{\nabla}''\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}\right) + \ldots\right] \quad . \tag{2.251}$$

Wir illustrieren nun die Mittelwertbildung

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{E}(\vec{r}\,)\right\rangle &= \frac{1}{\Delta V'}\int\limits_{\Delta V'} \vec{E}(\vec{r}+\vec{r}\,') \, d^3r' \\ &= -\frac{1}{\Delta V'}\int\limits_{\Delta V'} d^3r' \, \vec{\nabla}\int d^3r''\left[\frac{\rho_{\text{mol}}(\vec{r}\,'')}{|\vec{r}+\vec{r}\,'-\vec{r}\,''|}\right. \\ &\quad \left. + \vec{\Pi}_{\text{mol}}(\vec{r}\,'')\cdot\vec{\nabla}''\left(\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}\,'-\vec{r}\,''|}\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.252}$$

Das Volumen $\Delta V'$, über das gemittelt wird und das Volumen ΔV, in dem sich die Moleküle befinden, sollen gleich sein

$$\Delta V' = \Delta V \ . \tag{2.253}$$

Ferner vertauschen wir die Differentiation mit der Mittelwertbildung, was als weitere Annahme in unsere Ableitung eingeht. Um die Integranden zu vereinfachen, substituieren wir

$$\vec{x} = \vec{r}\,'' - \vec{r}\,' \ , \tag{2.254}$$

$$d^3r'' = d^3x \ . \tag{2.255}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle &= -\frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} d^3r' \, \vec{\nabla} \int\limits_{\Delta V} d^3x \left[\frac{\rho_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right. \\ &\quad \left. + \vec{\Pi}_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) \right] \ . \end{aligned} \tag{2.256}$$

In dieser Gleichung vertauschen wir nun die Mittelwertbildung mit der Differentiation und den von $\vec{r}\,'$ unabhängigen Ausdruck $1/|\vec{r}-\vec{x}|$ ziehen wir vor das Integral. Damit resultiert

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle &= -\vec{\nabla} \int\limits_{\Delta V} d^3x \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \, \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \rho_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,') \, d^3r' \right. \\ &\quad \left. + \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) \cdot \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \vec{\Pi}_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,') \, d^3r' \right] \ . \end{aligned} \tag{2.257}$$

Nun gilt

$$\int_{\Delta V} \rho_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,') \, d^3r' = \sum_j q_j \ . \tag{2.258}$$

Wir bezeichnen mit $N(\vec{x})$ die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit und mit $\langle q_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle$ die durchschnittliche Ladung pro Molekül an der Stelle $\vec{x}$. Damit erhalten wir

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \rho_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,') \, d^3r' = N(\vec{x}) \, \langle q_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \ . \tag{2.259}$$

Ganz entsprechend formen wir den zweiten Term in (2.257) um

$$\frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \vec{\Pi}_{\rm mol}(\vec{x}+\vec{r}\,') \, d^3r' = N(\vec{x}) \, \langle \vec{p}_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle \equiv \vec{P}(\vec{x}) \ . \tag{2.260}$$

Hierbei ist $\langle \vec{p}_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle$ die mittlere Polarisation pro Molekül an der Stelle $\vec{x}$. Damit können wir für die mittlere Feldstärke schreiben

$$\left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle = -\vec{\nabla} \int\limits_{\Delta V} N(\vec{x}) \left\{ \frac{\langle q_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle}{|\vec{r}-\vec{x}|} + \langle \vec{p}_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle \cdot \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) \right\} d^3x \ . \tag{2.261}$$

Wir führen jetzt die makroskopische Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) \quad = \quad N(\vec{x}) \, \langle q_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle \tag{2.262}$$

sowie den Polarisationsdichtevektor

$$\vec{P}(\vec{x}) = N(\vec{x}) \, \langle \vec{p}_{\rm mol}(\vec{x}) \rangle \tag{2.263}$$

ein. Ferner ersetzen wir wieder in der Schreibweise $\vec{x}$ durch $\vec{r}\,'$. Damit bekommen wir

$$\left\langle \vec{E}(\vec{r}) \right\rangle = -\vec{\nabla} \int d^3r' \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \right] \quad . \tag{2.264}$$

Falls das makroskopische Feld $\left\langle \vec{E}(\vec{r}) \right\rangle$ von verschiedenen geladenen Sorten von Atomen und Molekülen hervorgerufen wird, können wir diese Gleichung leicht verallgemeinern, indem wir setzen

$$\vec{P}(\vec{r}\,) \quad = \quad \sum_i N_i(\vec{r}\,) \, \langle \vec{p}_i(\vec{r}\,) \rangle \ , \tag{2.265}$$

$$\rho(\vec{r}\,) \quad = \quad \sum_i N_i(\vec{r}\,) \, \langle q_i(\vec{r}\,) \rangle + \rho_a \ . \tag{2.266}$$

Hierbei bezeichnet $\rho_{\rm a}$ eine möglicherweise vorhandene äußere Ladungsverteilung. Der Index i kennzeichnet die Sorte der Atome oder Moleküle.

2.10 Die dielektrische Verschiebung

Zu den Grundgleichungen der Elektrostatik wollen wir nun äquivalente Gleichungen ableiten, die auch für Festkörper gelten. Dazu bilden wir die Divergenz des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{E}(\vec{r}) \right\rangle \quad = \quad & -\int\limits_{\Delta V} d^3r' \left[\rho(\vec{r}\,') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \right. \\ & \left. + \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \left\{ \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \right\} \right] \ . \end{aligned} \tag{2.267}$$

Wir verwenden nun die Beziehung

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) = -4\pi \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \ . \tag{2.268}$$

Damit bekommen wir

$$\vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{E}(\vec{r}) \right\rangle = 4\pi \int\limits_{\Delta V} d^3r' \, \left[\rho(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') + \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \right] \quad . \tag{2.269}$$

Jetzt gilt

$$\vec{\nabla}' \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \quad = \quad -\vec{\nabla} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \ . \tag{2.270}$$

Da wir über $\vec{r}\,'$ integrieren, können wir unter Berücksichtigung dieser Relation den Nabla–Operator vor das Integral ziehen.

$$\vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle = 4\pi \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \int \vec{P}(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, d^3r' \; . \tag{2.271}$$

Nach Ausführung der Integration bekommen wir

$$\vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle \;\; = \;\; 4\pi\rho(\vec{r}\,) - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,) \tag{2.272}$$

und damit

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle + 4\pi \vec{P}(\vec{r}\,) \right) = 4\pi\rho(\vec{r}\,) \; . \tag{2.273}$$

Verglichen mit unserer Ursprungsgleichung der Elektrostatik haben wir also einen Zusatzterm vorliegen, der von den induzierten Ladungen herrührt. Wir definieren jetzt die dielektrische Verschiebung durch

$$\vec{D} = \left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle + 4\pi \vec{P}(\vec{r}\,) \; . \tag{2.274}$$

Damit bekommen wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \mathrm{div}\, \vec{D} = 4\pi\rho \; . \tag{2.275}$$

Da stets gilt $\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \phi = 0$ folgt nach wie vor

$$\mathrm{rot} \left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle = 0 \; . \tag{2.276}$$

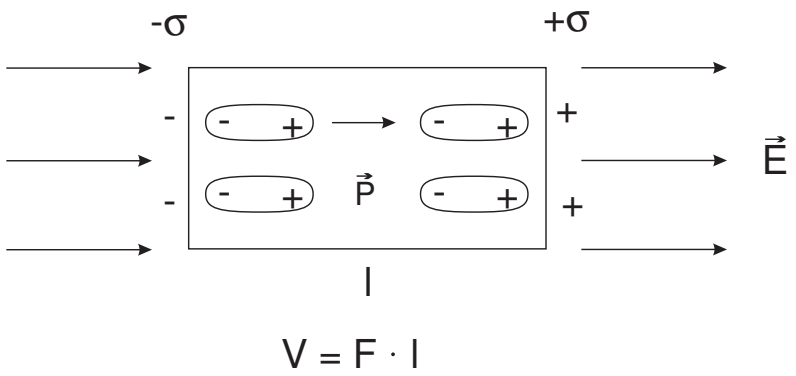
Ersetzen wir nun in der Schreibweise $\left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle$ durch $\vec{E}(\vec{r}\,)$, so haben wir zusammenfassend

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \;\; = \;\; 4\pi\rho \; , \tag{2.277}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \;\; = \;\; 0 \; . \tag{2.278}$$

2.11 Die Polarisation

In diesem Unterkapitel wollen wir die Polarisation $\vec{P}(\vec{r}\,)$ etwas eingehender beleuchten. Die Polarisation beschreibt die Verschiebung von Ladungen in einem Material bei Anlegen eines äußeren Feldes. Jedes Atom oder Molekül wird zu einem elektrischen Dipol. Die Polarisation ergibt sich als elektrisches Dipolmoment pro Volumeneinheit und somit als Dipoldichte. Als Beispiele betrachten wir ein quaderförmiges Materialstück. Durch ein angelegtes elektrisches Feld werden auf den Stirnflächen die Ladungen $\pm Q$ induziert.



Wir erinnern uns, daß der Betrag des Dipolmomentes gegeben ist durch Ladung mal Abstand. Für den Quader erhalten wir unter Verwendung von

$$\sigma = \frac{Q}{F} \tag{2.279}$$

den einfachen Zusammenhang

$$|\vec{P}|V = Q \cdot l = \sigma F \cdot l = \sigma \cdot V \ . \tag{2.280}$$

Hierbei ist Q die Ladung auf der Fläche F des polarisierten Materials und σ die Flächenladungsdichte. Es folgt

$$|\vec{P}| = \sigma \ . \tag{2.281}$$

Wir wollen nun den allgemeinen Zusammenhang zwischen σ und $\vec{P}$ bzw. zwischen ρ und $\vec{P}$ erstellen. Wir gehen aus von der Gleichung für das makroskopische elektrische Feld und drücken $\vec{E}$ als Gradient von Potentialen aus,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \int d^3r' \left[\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) \right] \\ &= -\vec{\nabla}\phi_\rho(\vec{r}) - \vec{\nabla}\phi_P(\vec{r}) \ . \end{aligned} \tag{2.282}$$

Hierbei ist also

$$\phi_P(\vec{r}) = \int d^3r' \, \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad . \tag{2.283}$$

Wir nutzen aus, daß gilt

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\vec{P}(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') + \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{2.284}$$

und schreiben damit $\phi_P(\vec{r})$ um in

$$\phi_P(\vec{r}) = \int d^3r' \, \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) - \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') \ . \tag{2.285}$$

Den ersten Term schreiben wir mit Hilfe des Gaußschen Satzes um

$$\begin{aligned}\phi_P(\vec{r}) &= \int \frac{\vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dF + \int \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' \\ &= \phi_{\sigma_P} + \phi_{\rho_P} \ . \end{aligned} \tag{2.286}$$

Hierbei ist $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor, der senkrecht auf der Oberfläche des Volumens V steht. Wir wissen bereits, welcher Zusammenhang zwischen Potential und der Flächen– und Raumladung besteht,

$$\phi_\sigma = \int \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dF \ , \tag{2.287}$$

$$\phi_\rho = \int \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV \ . \tag{2.288}$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir sofort

$$\vec{P}(\vec{r}\,) \cdot \vec{n} = P_n = \sigma_P \ . \tag{2.289}$$

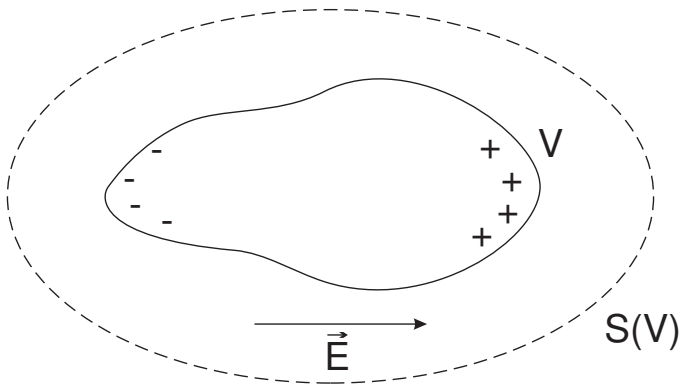
Die Normalkomponente des Polarisationsvektors entspricht der auf der Oberfläche induzierten Flächenladungsdichte. Ferner schreiben wir ϕ_{ρ_P} als

$$\phi_{\rho_P} = \int \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' = \int \frac{\rho_P(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' \tag{2.290}$$

und haben damit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_P \ . \tag{2.291}$$

Die Quellen der Polarisation sind die induzierten Raumladungsdichten.



Das Polarisationsfeld resultiert aus induzierten Dipolen. Bei diesem Prozeß wird Ladung weder zu– noch abgeführt. Die gesamte Polarisationsladung muß demnach verschwinden.

$$Q_P = \int\limits_V d^3r\, \rho_P(\vec{r}\,) = -\int\limits_V d^3r\, \mathrm{div}\, \vec{P}(\vec{r}\,) = -\int\limits_{S(V)} \vec{P} \cdot d\vec{F} \ . \tag{2.292}$$

Es ist ein genereller Gesichtspunkt, daß die durch Polarisation erzeugte Gesamtladung verschwindet. Dies ist eine notwendige Konsequenz des Ladungserhaltungssatzes. Im Rahmen der klassischen Elektrostatik können wir davon ausgehen, daß $\vec{P}$ nur innerhalb der Materie von Null verschieden ist. Obwohl die Gesamtladung Q_P verschwindet, tritt jedoch lokal eine endliche Polarisationsladungsdichte $\rho_P(\vec{r}\,)$ auf, sobald $\mathrm{div}\,\vec{P}(\vec{r}\,)$ ungleich Null ist. Dies ist z. B. an der Oberfläche der Fall. Dort induziert $\vec{P}(\vec{r}\,)$ eine Oberflächenladungsdichte σ_P, die sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechnen läßt. Beim Studium des Verhaltens der elektrischen Feldstärke an Oberflächen fanden wir

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 4\pi\sigma \ . \tag{2.293}$$

Die gleiche Rechnung führt jetzt auf

$$\vec{n} \cdot (\vec{P}_a - \vec{P}_i) = -\sigma \ . \tag{2.294}$$

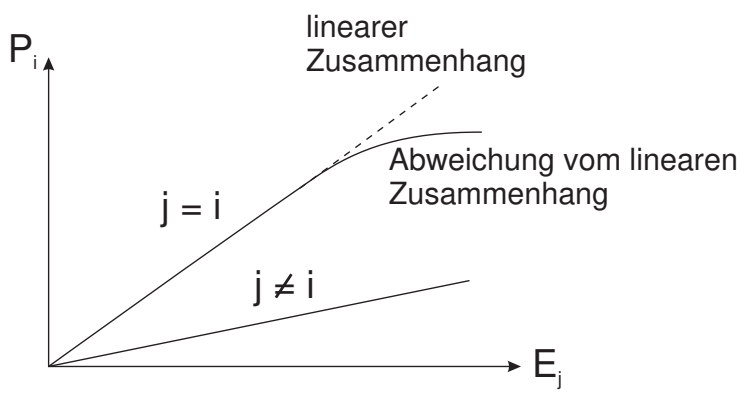
Zum Verständnis des Vorzeichens und des fehlenden Faktors 4π erinnern wir an die Relation (2.291). Da nun $\vec{P}_i = \vec{P} \neq 0$ ist, folgt erneut

$$\sigma_P = \vec{n} \cdot \vec{P} \ . \tag{2.295}$$

Man beachte jedoch, daß lokale Polarisationsladungsdichten immer dann auftreten, wenn $\mathrm{div}\,\vec{P} \neq 0$ ist, also nicht notwendigerweise nur an der Oberfläche. Die molekulare Polarisierbarkeit hängt von dem lokalen elektrischen Feld bei dem Molekül ab. In Abwesenheit des elektrischen Feldes verschwindet auch die mittlere Polarisation, es sei denn, daß in dem Material eine permanente elektrische Polarisierung vorliegt. Im allgemeinen kann $\vec{P}$ eine beliebige Funktion von $\vec{E}$ sein. Zumindest für schwache elektrische Felder bietet sich eine Potenzreihenentwicklung im elektrischen Feld an. Als Ansatz für die Komponenten von $\vec{P}$ machen wir

$$P_i = \sum_j a_{ij} E_j + \sum_{j,k} b_{ijk} E_j E_k + \cdots \tag{2.296}$$

A priori ist die Bedeutung der Terme höherer Ordnung keineswegs klar.



Empirisch erweist sich, daß in guter Näherung ein linearer Zusammenhang vorliegt, und daß $\vec{P}$ weitgehend parallel zu $\vec{E}$ ist. Dann gilt

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \ . \tag{2.297}$$

Den konstanten Proportionalitätsfaktor χ_e nennt man die elektrische Suszeptibilität des Mediums. Damit können wir zusammenfassend für die dielektrische Verschiebung schreiben

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} \ . \tag{2.298}$$

Wir führen die Dielektrizitätskonstante ε ein durch

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e \ . \tag{2.299}$$

Somit erhalten wir als Zusammenhang zwischen der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ und der von außen vorgegebenen Feldstärke $\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \ . \tag{2.300}$$

Sofern das Medium isotrop und uniform ist, ist ε unabhängig von der Koordinate $\vec{r}$. Aus der Divergenzgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \tag{2.301}$$

bekommen wir dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \ . \tag{2.302}$$

2.12 Molekulare Polarisierbarkeit

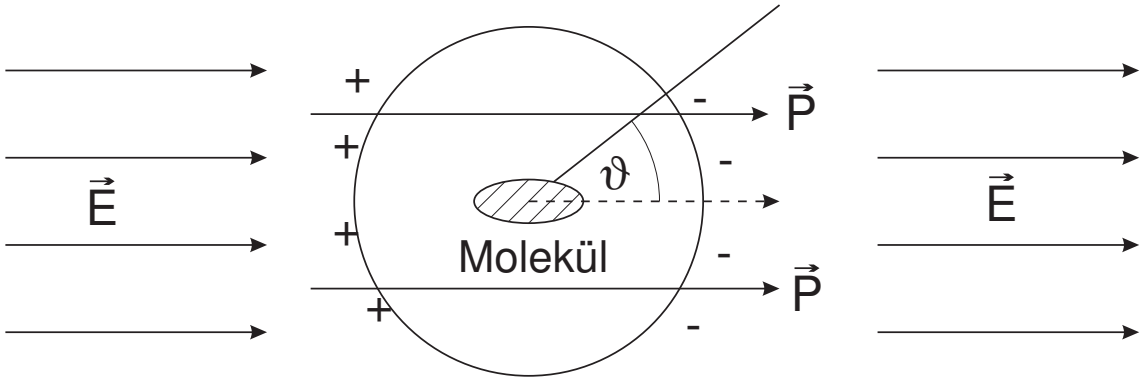
In diesem Kapitel wollen wir einen Zusammenhag zwischen der molekularen Polarisierbarkeit und der elektrischen Suszeptibilität χ_e als makroskopische Größe ableiten. Dies erfolgt als Näherung vollständig im Rahmen der klassischen Physik.
Wir wollen zunächst das lokale Feld $\vec{E}_l$ im Inneren eines Dielektrikums angeben. Dieses Feld ist von dem gemittelten makroskopischen Feld $\vec{E}$ verschieden, da wir auch die Polarisationseffekte zu berücksichtigen haben.
Wir teilen das lokale Feld am Ort eines vorgegebenen Moleküls in zwei Teile auf,

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \vec{E}_i \ . \tag{2.303}$$

Das zusätzlich auftretende Feld $\vec{E}_i$ soll den Einfluß der umgebenden Moleküle reflektieren. Das innere Zusatzfeld $\vec{E}_i$ spalten wir wieder in zwei Anteile auf,

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{Pl} - \vec{E}_P \tag{2.304}$$

$\vec{E}_P$ ist der makroskopische, gemittelte Beitrag der Ladungen in V zum Polarisationsfeld. $\vec{E}_{Pl}$ ist der tatsächliche lokale Beitrag zum Polarisationsfeld. $\vec{E}_P$ rührt von der Polarisation der umgebenden Moleküle her.
Zur Berechnung des Polarisationsfeldes $\vec{E}_P$ schlagen wir eine Kugel um das betrachtete Molekül. Der Radius der Kugel soll groß sein gegen die molekularen Abstände. Die umgebenden Moleküle behandeln wir als Näherung als Kontinuum.



Die Polarisationsladung an der Oberfläche der Hohlkugel erzeugt am Molekülort das Feld $\vec{E}_P(0)$. $\vec{P}$ ist eine makroskopische Feldgröße, und V wurde makroskopisch klein gewählt. Wir können deshalb annehmen, daß $\vec{P}$ innerhalb der Kugel praktisch konstant ist.
$\vec{P}$ bewirkt auf der Kugel eine Oberflächenladung

$$\sigma_P = P_n = P\cos\vartheta \ . \tag{2.305}$$

Die dazugehörige Raumladungsdichte können wir schreiben als

$$\rho_P(\vec{r}\,) = P\cos\vartheta\,\delta(r-R) \ . \tag{2.306}$$

$\rho_P(\vec{r}\,)$ erzeugt am Ort des Moleküls in $(0,0,0)$ das folgende Feld

$$\begin{aligned}\vec{E}_P(0) &= \int d^3r'\,\rho_P(\vec{r}\,')\frac{(-\vec{r}\,')}{|-\vec{r}\,'|^3} \\ &= -P\int_0^\infty dr'\,\delta(r'-R)\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta'\,\cos\vartheta'\begin{pmatrix}\sin\vartheta'\cos\varphi'\\ \sin\vartheta'\sin\varphi'\\ \cos\vartheta'\end{pmatrix} \ .\end{aligned} \tag{2.307}$$

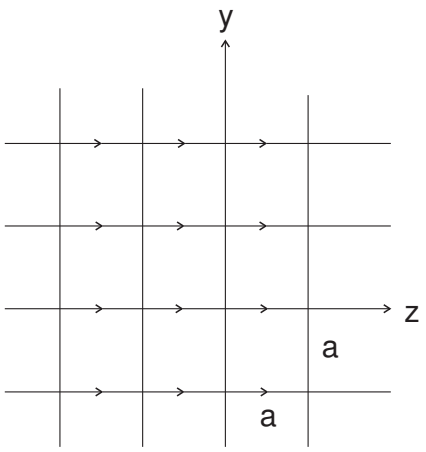
Aufgrund der φ'–Integration verbleibt nur die z–Komponente von $\vec{E}_P$. Es folgt

$$\vec{E}_P(0) = -\frac{4\pi P}{3}\vec{e}_z = -\frac{4\pi}{3}\vec{P}(0) \ . \tag{2.308}$$

Wir wenden uns jetzt der Berechnung des zweiten Feldtermes $\vec{E}_{Pl}$ zu. Hier geht die spezifische Gitterstruktur ein. Wir machen die folgenden Annahmen:

1. Alle atomaren Dipole $\vec{p}_i$ innerhalb des Volumens V sind nach Richtung und Betrag gleich.

2. Die Dipole sind auf einem kubischen Gitter mit der Gitterkonstanten a angeordnet.



Für die Dipolpositionen können wir schreiben

$$\vec{r}_{ijk} = a(i,j,k) \tag{2.309}$$

mit $i,j,k \in \mathbf{Z}$.
Der Dipol bei $\vec{r}_{ijk}$ erzeugt im Ursprung das folgende Feld

$$\vec{E}_{ijk} = \frac{3\vec{r}_{ijk}(\vec{p}\cdot\vec{r}_{ijk}) - \vec{p}\,r_{ijk}^2}{r_{ijk}^5} \ . \tag{2.310}$$

Das gesamte Feld erhalten wir durch Summation über alle in V erlaubten i,j,k. Dies bedeutet z. B. für die x–Komponente

$$E_{pl,x} = \frac{1}{a^3}\sum_{i,j,k}\frac{3i(ip_x + jp_y + kp_z) - p_x(i^2+j^2+k^2)}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} \ . \tag{2.311}$$

Nun gilt offensichtlich

$$\sum_{i,j,k}\frac{ij}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k}\frac{ik}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = 0 \quad , \tag{2.312}$$

da i,j,k dieselben positiven wie negativen ganzen Zahlen durchlaufen. Ferner folgt aus der kubischen Symmetrie

$$\sum_{i,j,k}\frac{i^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k}\frac{j^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k}\frac{k^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} \ . \tag{2.313}$$

Damit bleibt für die x–Komponente des resultierenden Feldes

$$E_{pl,x} \quad = \quad \frac{1}{a^3}\sum_{i,j,k}\frac{3i^2p_x - 3i^2p_x}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = 0 \ . \tag{2.314}$$

Das gleiche folgt für die beiden anderen Komponenten, so daß insgesamt gilt

$$\vec{E}_{Pl} = 0 \ . \tag{2.315}$$

Um nun den Zusammenhang zwischen der molekularen Polarisierbarkeit und der dielektrischen Suszeptibilität zu erhalten, gehen wir von der Definition aus. Die Suszeptibilität ist definiert durch

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \ , \tag{2.316}$$

wobei $\vec{E}$ das makroskopische Feld im Dielektrikum ist. Ferner gilt

$$\vec{P} = N \left\langle \vec{p}_{\rm mol} \right\rangle \ , \tag{2.317}$$

wobei $\langle \vec{p}_{\rm mol} \rangle$ das mittlere Dipolmoment eines Moleküls ist und N die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit bezeichnet. Das mittlere Dipolmoment ist näherungsweise proportional dem Feld, das auf das Molekül wirkt,

$$\left\langle \vec{p}_{\rm mol} \right\rangle = \gamma_{\rm mol} \vec{E}_l \ , \tag{2.318}$$

wobei $\gamma_{\rm mol}$ die molekulare Polarisierbarkeit bedeutet. Ferner haben wir

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \quad , \tag{2.319}$$

und damit folgt

$$\left\langle \vec{p}_{\rm mol} \right\rangle = \gamma_{\rm mol} \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) \tag{2.320}$$

und weiter

$$\vec{P} = N \gamma_{\rm mol} \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) = N \gamma_{\rm mol} \left(\frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \vec{P} \ . \tag{2.321}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert sofort

$$1 = N \gamma_{\rm mol} \left(\frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \ . \tag{2.322}$$

Wir lösen diese Gleichung nach χ_e auf,

$$\chi_e = \frac{N \gamma_{\rm mol}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \gamma_{\rm mol}} \quad . \tag{2.323}$$

Jetzt gilt weiterhin

$$\chi_e = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \ . \tag{2.324}$$

Dies setzen wir in (2.322) ein und bekommen

$$\begin{aligned} 1 &= N\gamma_{\mathrm{mol}}\left(\frac{4\pi}{\varepsilon-1}+\frac{4\pi}{3}\right) = 4\pi N\gamma_{\mathrm{mol}}\left(\frac{1}{\varepsilon-1}+\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}N\gamma_{\mathrm{mol}}\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1}\,. \end{aligned} \tag{2.325}$$

Dies führt auf die Clausius–Massotti–Formel

$$\gamma_{\mathrm{mol}} = \frac{3}{4\pi N}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,. \tag{2.326}$$

Im Vakuum $(\varepsilon = 1)$ gibt es keine Moleküle und daher ist sinnvollerweise auch $\gamma_{\mathrm{mol}} = 0$. Die Messung der Dielektrizitätskonstanten ε eines Mediums erlaubt somit bei bekannter Dichte — dies ist die Teilchenzahl pro Volumeneinheit — die Bestimmung der molekularen Polarisierbarkeit. Da γ_{mol} nach Definition unabhängig von der Teilchendichte N ist, sollte $(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)$ proportional zur Teilchendichte der Substanz sein. Für manche Materialien ist dies in guter Näherung erfüllt.

2.13 Elektrostatische Energie

Für das Vakuum hatten wir gefunden

$$W_{\text{Vakuum}} = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}\,) \, \phi(\vec{r}\,) \; . \tag{2.327}$$

Dieser Ausdruck kann für ein Dielektrikum nicht direkt übernommen werden, da der Aufbau der Polarisiationsladungen ebenfalls Energie erfordert. Die Ladung $\delta\rho(\vec{r}\,)\, d^3r$ hat im Potential $\phi(\vec{r}\,)$, das von anderen Ladungen generiert wird, die Energie $\phi(\vec{r}\,)\, \delta\rho(\vec{r}\,)\, d^3r$. Für die Arbeit, die notwendig ist, um die Ladungsdichte von ρ auf $\rho + \delta\rho$ zu ändern, gilt somit

$$\delta W = \int d^3r \, \phi(\vec{r}\,) \delta\rho(\vec{r}\,) \; . \tag{2.328}$$

$\phi(\vec{r}\,)$ ist gedacht als das Potential, das durch die bereits vorhandene Ladungsdichte $\rho(\vec{r}\,)$ generiert wird. Jetzt ist

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) \; . \tag{2.329}$$

Damit bekommen wir mit

$$\phi \, \delta\rho \;\; = \;\; \phi \frac{1}{4\pi} \text{div}\, (\delta \vec{D}) = \frac{1}{4\pi} \text{div}\, (\phi \; \delta \vec{D}) - \frac{1}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \phi \right) \cdot \delta \vec{D} \tag{2.330}$$

für die Energieänderung

$$\delta W = \int d^3r \, \frac{1}{4\pi} \text{div}\, (\phi \; \delta \vec{D}) + \frac{1}{4\pi} \int d^3r \; \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \; . \tag{2.331}$$

Den ersten Summanden verwandeln wir mit dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral, welches für den Fall $\phi(r \to \infty) = 0$ verschwindet. Es verbleibt

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \; d^3r \; . \tag{2.332}$$

Wir summieren zum Ermitteln der Gesamtenergie die Einzelbeiträge δW. Die totale elektrostatische Energie können wir formal als Integral schreiben, indem wir $\vec{D}$ vom Anfangswert $\vec{D} = 0$ zum Endwert $\vec{D}$ bringen,

$$W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \int_0^D \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \; . \tag{2.333}$$

Wenn das Medium linear ist mit $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ folgt

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \frac{1}{2} \delta (\vec{E} \cdot \vec{D}) \; . \tag{2.334}$$

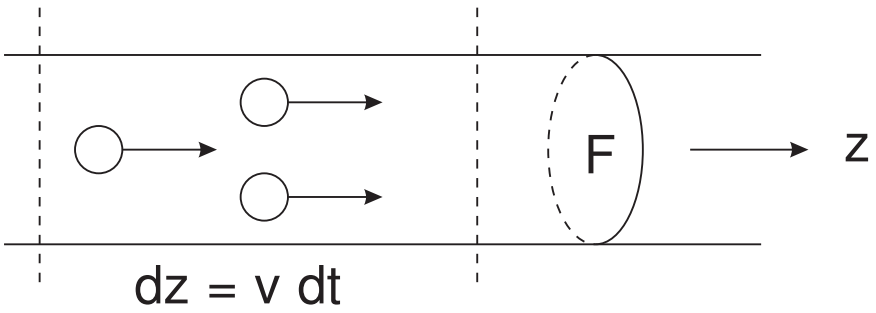
Damit erhalten wir für die gesamte elektrostatische Energie

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \vec{D} \; d^3r \; . \tag{2.335}$$

3 Magnetostatik

3.1 Das Ohmsche Gesetz

Elektrostatische Felder enstehen durch ruhende elektrische Ladungen und lassen sich durch Kraftwirkungen auf elektrische Ladungen beobachten. Magnetostatische Felder enstehen durch stationäre elektrische Ströme, also durch bewegte elektrische Ladungen.
Der Hauptunterschied zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen beruht auf der Tatsache, daß es zwar frei elektrische Ladungen, aber keine freien magnetischen Ladungen gibt. Dies ist ein rein empirischer Sachverhalt. Die Suche nach eventuell vorhandenen magnetischen Ladungen wird gegenwärtig weiter fortgesetzt. Momentan ist jedoch die Grundeinheit des Magnetismus nicht irgendeine Elementarladung, der magnetische Monopol, sondern der magnetische Dipol $\vec{m}$. Das relevante Feld des Magnetismus ist die magnetische Induktion $\vec{B}$. Sie wird durch elektrische Ströme erzeugt.
Wir betrachten den elektrischen Stom als Bewegung von elektrischen Ladungen in einem metallischen Leiter



Es sei v die mittlere Teilchengeschwindigkeit in z–Richtung, $n = N/V$ die zeitlich konstante, homogene Teilchendichte, q die Ladung eines Teilchens und F der Querschnitt des Leiters. Dann ist

$$dQ = (Fv\,dt)nq \tag{3.1}$$

die in der Zeit dt durch den Leiterquerschnitt fließende Ladung.
Die Stromstärke definieren wir durch

$$I = \frac{dQ}{dt}\,. \tag{3.2}$$

I ist als die den Leiterquerschnitt pro Zeiteinheit durchließende Ladungsmenge.
In dem obigen Beispiel ist die Stromstärke damit

$$I = nFvq\,. \tag{3.3}$$

Die Stromdichte $\vec{j}$ ist ein Vektor, dessen Richtung durch die Bewegungsrichtung der elektrischen Ladung gegeben ist und dessen Betrag der pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung transportierten Ladung entspricht. In dem angegeben Beispiel bedeutet dies

$$j = \frac{I}{F} = nqv \ . \tag{3.4}$$

nq ist die homogene Ladungsdichte. Im allgemeinen Fall ist die Stromdichte ein zeitabhängiges Vektorfeld

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\ \vec{v}(\vec{r},t)\ , \tag{3.5}$$

das über die Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ des Systems verknüpft ist. Die Stromstärke I durch eine vorgegebene Fläche F ist das Flächenintegral von $\vec{j}$ über F,

$$I = \int\limits_F \vec{j} \cdot d\vec{f}\ . \tag{3.6}$$

Es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0\ . \tag{3.7}$$

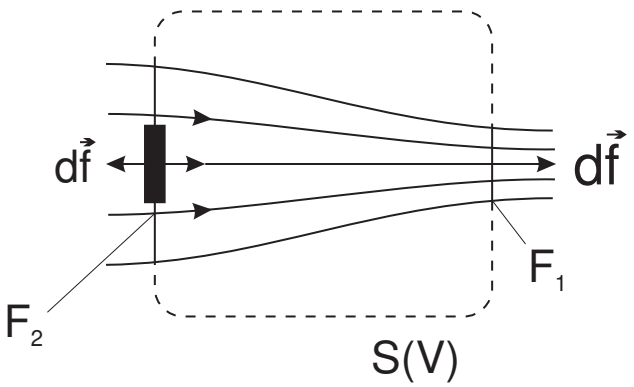
Im stationären Fall der Magnetostatik gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.8}$$

und damit

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0\ . \tag{3.9}$$

Im stationären Fall fließt durch jeden Querschnitt derselbe Strom.



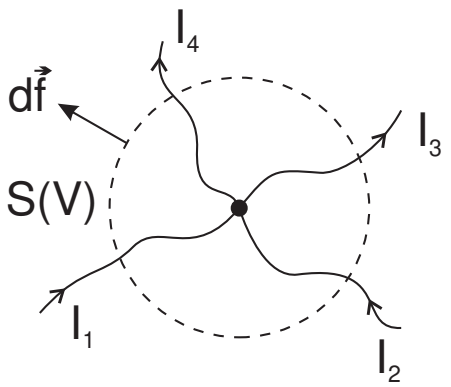
Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_V d^3r\ \operatorname{div}\vec{j} = \int\limits_{S(V)} d\vec{f}\cdot\vec{j} = \int\limits_{F_1} \vec{j}\cdot d\vec{f} + \int\limits_{F_2} \vec{j}\cdot d\vec{f} \\ &= I_1 - I_2\ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Also folgt

$$I_1 = I_2 \ . \tag{3.11}$$

Ferner gilt die Kirchhoffsche Knotenregel, nach der an einem Leiterknoten die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist.



Es ist

$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{j}\, d^3r = \int\limits_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{f} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 \ . \tag{3.12}$$

Damit resultiert

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \ . \tag{3.13}$$

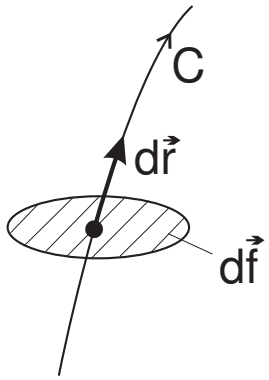
Als empirischen Sachverhalt gehen wir ferner von der Proportionalität des fließenden Stromes I und der angelegten Spannung U aus

$$U = R\, I \ . \tag{3.14}$$

Dies ist das Ohmsche Gesetz. Der Proportionalitätsfaktor R heißt elektrischer oder ohmscher Widerstand mit der Einheit

$$[R] = \left[\frac{U}{I}\right] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega \ . \tag{3.15}$$

Ω steht für Ohm. R hängt in der Regel von der Temperatur ab. Das Ohmsche Gesetz ist kein physikalisches Gesetz im strengen Sinne. Es ist eine Materialeigenschaft und wird keineswegs von allen elektrischen Leitern erfüllt. Der Widerstand R ist auch keine Materialkonstante. Er hängt vielmehr von den Abmessungen des elektrischen Leiters ab.
Wir führen jetzt das Konzept des Stromfadens ein. In der Elektrostatik war das Konzept der Punktladung sehr vorteilhaft gewesen. Das Analogon für den elektrischen Strom ist der Stromfaden, unter dem man einen linienförmigen Strom I längs eines Weges C versteht. In der Anschauung kann man sich einen extrem dünnen stromdurchflossenen Draht vorstellen.



Wir parametrisieren C nach der Bogenlänge s, $\vec{r} = \vec{r}(s)$. In jedem Punkt der Bahn sei $\vec{t}$ der Tangenteneinheitsvektor. Dann gilt

$$d\vec{r} = ds\,\vec{t}\,, \tag{3.16}$$

$$d\vec{f} = df\,\vec{t}\,, \tag{3.17}$$

$$d^3r = d\vec{f}\cdot d\vec{r} = df\,ds\ . \tag{3.18}$$

Es gilt ferner

$$\vec{j} = j\vec{t}\,, \tag{3.19}$$

$$I = \vec{j}\cdot d\vec{f} = j\,df\ . \tag{3.20}$$

Damit haben wir

$$\vec{j}\,d^3r = j\vec{t}\,df\,ds = j\,df\,d\vec{r} = I\,d\vec{r}\,. \tag{3.21}$$

Der Übergang zum Stromfaden erfolgt also durch die Substitution

$$\vec{j}\,d^3r = I\,d\vec{r}\,. \tag{3.22}$$

Als nächsten Punkt betrachten wir die elektrische Leistung. Wenn wir in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ die Ladung q um die Strecke $d\vec{r}$ verschieben, so wird an der Ladung die Arbeit

$$dW = \vec{F}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r} = q\,\vec{E}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r} \tag{3.23}$$

geleistet. Geschiet dies in der Zeit dt, so besitzt die Ladung die Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Das Feld bewirkt die *Leistung*

$$\frac{dW}{dt} = q\,\vec{E}(\vec{r}\,)\cdot\vec{v}(\vec{r}\,)\ . \tag{3.24}$$

Betrachten wir nun eine allgemeine Ladungsdichte $\rho(\vec{r}\,)$, so ist die vom Feld am Volumenelement verrichtete Leistung

$$dP = \left[\rho(\vec{r}\,)\,d^3r\right]\vec{E}(\vec{r}\,)\cdot\vec{v}(\vec{r}\,) = \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot\vec{j}(\vec{r}\,)\ d^3r\ . \tag{3.25}$$

Die gesamte, vom Feld $\vec{E}$ an dem System im Volumen V bewirkte Leistung P beträgt dann

$$P = \int_V \vec{j}(\vec{r}\,) \cdot \vec{E}(\vec{r}\,)\, d^3r \ . \tag{3.26}$$

Betrachten wir als Spezialfall den Stromfaden, so folgt

$$P = I \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = I\,U = R\,I^2 = \frac{1}{R}U^2 \ . \tag{3.27}$$

Die beiden letzten Gleichheitszeichen gelten nur falls wir einen ohmschen Leiter vorliegen haben. Die Größe $P = RI^2$ nennt man auch die Verlustleistung, die beim Durchgang des Stromes I durch den ohmschen Verbraucher R auftritt. Die Dimension von P ist

$$[P] = \mathrm{VA} = \mathrm{W} = \mathrm{J/s} \quad . \tag{3.28}$$

Abschließend zu diesen einführenden Betrachtungen der Magnetostatik wollen wir noch die lokale Form des Ohmschen Gesetzes behandeln, nach der es einen linearen Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}\,(\vec{r}\,)$ und der Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r}\,)$ gibt,

$$\vec{j}\,(\vec{r}\,) = \sigma\,(\vec{r}\,)\ \vec{E}\,(\vec{r}\,) \quad . \tag{3.29}$$

Die Größe $\sigma\,(\vec{r}\,)$ ist die elektrische Leitfähigkeit. Das Reziproke dieser Größe ist der spezifische elektrische Widerstand $\rho\,(\vec{r}\,)$,

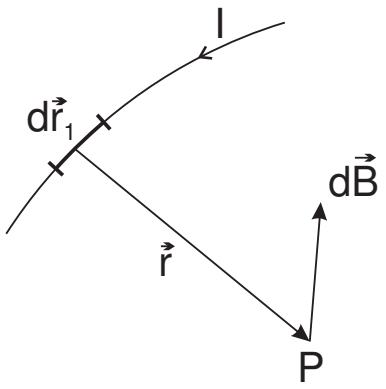
$$\rho\,(\vec{r}\,) = \sigma^{-1}\,(\vec{r}\,) \quad . \tag{3.30}$$

In diesem Fall darf $\rho\,(\vec{r}\,)$ nicht mit der Ladungsdichte und $\sigma\,(\vec{r}\,)$ nicht mit der Flächenladungsdichte verwechselt werden.

3.2 Das Biot-Savartsche Gesetz

Im Jahre 1819 beobachtete Oersted, daß stromdurchflossene Drähte eine Ablenkung von magnetischen Dipolen hervorrufen. Später haben Biot und Savart (1820) sowie Ampère (1820 – 1825) den elementaren Zusammenhang zwischen dem Strom, der magnetischen Induktion $\vec{B}$ und der wirkenden Kraft erstellt.
Betrachten wir ein Längenelement $d\vec{r}_1$ eines Stromfadens, so gilt

$$d\vec{B} = k\,I\,\frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}}{|\vec{r}\,|^3}\,. \tag{3.31}$$

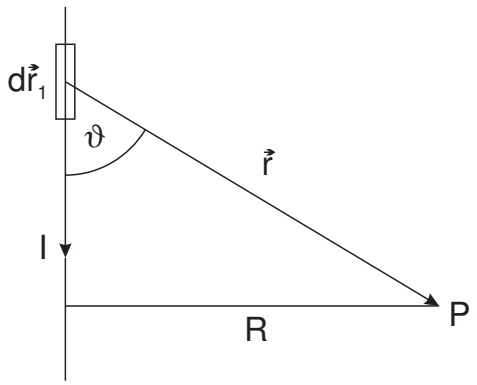


I ist die Stromstärke des Stromfadens und $\vec{r}$ der Abstandsvektor vom Längenelement $d\vec{r}_1$ zum Beobachtungspunkt P. Die magnetische Induktion ist in ihrer Richtung durch das Kreuzprodukt $d\vec{r}_1 \times \vec{r}$ bestimmt. Damit ist der Beitrag umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes in Analogie zur elektrischen Feldstärke in der Elektrostatik. Die Proportionalitätskonstante k hängt vom gewählten Einheitensystem ab. Wir wählen Gaußsche Einheiten, für die gilt

$$k = \frac{1}{c} \quad . \tag{3.32}$$

Als einfachstes Beispiel wollen wir mal unter der Annahme des Superpositionsprinzips das gesamte Magnetfeld eines unendlich langen geraden Leiters bestimmen. Es gilt dann

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \, . \tag{3.33}$$



Es ist $|d\vec{r}_1 \times \vec{r}\,| = dr_1 \, r \sin\vartheta$ sowie $\vec{r}^{\,2} = r^2 = r_1^2 + R^2$. Damit haben wir in skalarer Form mit $r \, \sin\vartheta = R$

$$B = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 \frac{r \sin\vartheta}{r^3} = \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr_1}{\left(r_1^2 + R^2\right)^{3/2}}. \tag{3.34}$$

Mit der Substitution

$$r_1 = R \sinh u \tag{3.35}$$

folgt für das Integral der Wert $2/R^2$. Dies ist die Urform des Biot-Savartschen Gesetzes. Das $\vec{B}$-Feld zeigt in Richtung von $\vec{e}_\varphi$, es gilt

$$\vec{B} = \frac{2I}{cR}\,\vec{e}_\varphi \quad . \tag{3.36}$$

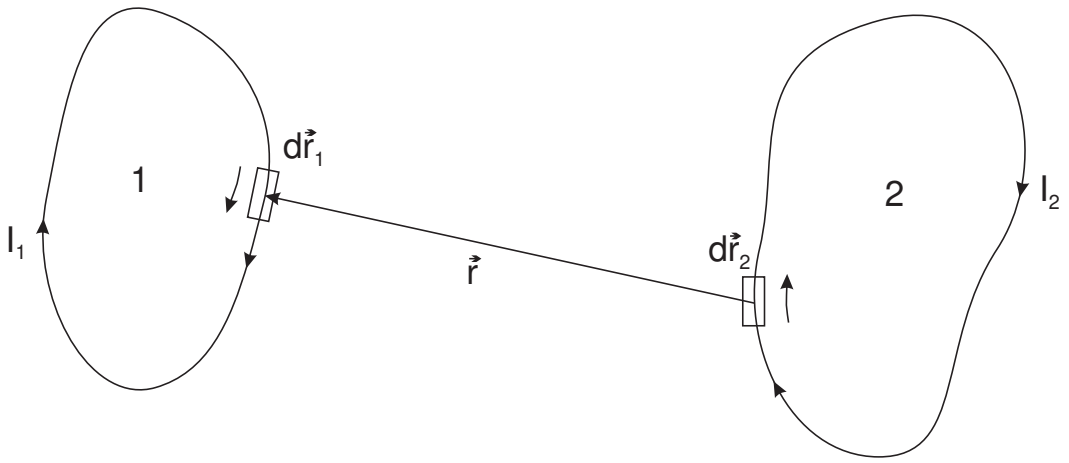
Ein äußeres $\vec{B}$-Feld übt auf einen stromdurchflossenen Leiter eine Kraft aus. Für diese Kraft gilt als erstes Ampèresches Gesetz

$$d\vec{F} = \frac{I_2}{c}\left(d\vec{r}_2 \times \vec{B}\right) . \tag{3.37}$$

Hierbei ist I_2 der Strom in einem Element. Wird die magnetische Induktion $\vec{B}$ durch einen geschlossenen Stromkreis mit dem Strom I_1 erzeugt, dann gilt als resultierende Kraft zwischen den Stromkreisen 1 und 2

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r}_2 \times (d\vec{r}_1 \times \vec{r}\,)}{|\vec{r}\,|^3} \quad . \tag{3.38}$$

Hierbei ist $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der Abstandsvektor des Linienelements $d\vec{r}_2$ von $d\vec{r}_1$.



Die Linienintegrale werden über beide Schleifen durchgeführt. Dies ist das Ampèresche Kraftgesetz.
Wir wollen dieses Gesetz etwas umformen. Wir nutzen aus, daß gilt

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} \quad . \tag{3.39}$$

Damit folgt

$$d\vec{r}_2 \times (d\vec{r}_1 \times \vec{r}\,) = (d\vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,)\, d\vec{r}_1 - (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\,\vec{r} \quad . \tag{3.40}$$

Wir betrachten jetzt bezüglich der Kraft $\vec{F}_{12}$ das Integral

$$\oint_{C_2} d\vec{r}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\oint_{C_2} d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\int_{A_{C_2}} d\vec{f} \cdot \text{rot grad}\,\frac{1}{|r|} = 0 \quad . \tag{3.41}$$

Wir haben hierbei den Satz von Stokes verwendet. Damit verbleibt als resultierende Kraft zwischen den beiden Stromfäden

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint\oint \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\, d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \quad . \tag{3.42}$$

Da $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist, erkennen wir auch sofort in dieser symmetrischen Form die Gültigkeit des dritten Newtonschen Axioms,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad . \tag{3.43}$$

Ausgehend von dem ersten Ampèreschen Gesetz $d\vec{F} = I\left(d\vec{r} \times \vec{B}\right)/c$ und unter Ausnutzung der Relation $I d\vec{r} = \vec{j}\, d^3r$ für einen Stromfaden, erhalten wir die allgemeine Struktur

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int_{\text{Körper}} \vec{j}\,(\vec{r}\,) \times \vec{B}\,(\vec{r}\,)\, d^3r \quad . \tag{3.44}$$

Dies gilt für die Kraft, die ein beliebiger Leiter mit der Stromdichteverteilung $\vec{j}\,(\vec{r}\,)$ in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}\,(\vec{r}\,)$ erfährt. Für eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}\,(\vec{r}\,)$ bewegt, gilt

$$\vec{j}\,(\vec{r}\,) = q\,\vec{v}\,(\vec{r}\,)\,\delta\,(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{3.45}$$

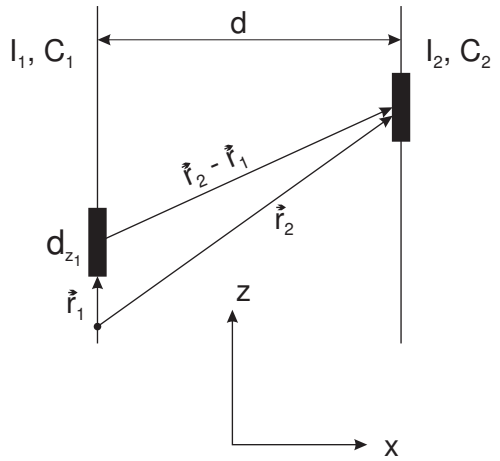
Einsetzen in (3.44) führt auf die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c} q\,\vec{v}\,(\vec{r}_0) \times \vec{B}\,(\vec{r}_0) \quad . \tag{3.46}$$

Dies ist die Kraft, die eine Punktladung bei der Bewegung durch das $\vec{B}$-Feld erfährt.
Die Kraft (3.44) übt auf den Körper ein Drehmoment aus, für das gilt

$$\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{1}{c}\int \vec{r} \times \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) d^3r \quad . \tag{3.47}$$

Als ein wichtiges Anwendungsbeispiel betrachten wir die Kraft zwischen zwei langen, parallelen, geraden Drähten.



Der Abstand der Drähte sei d. Durch die Drähte sollen die Ströme I_1 und I_2 fließen. Wir fragen uns, welche Kraft übt der stromdurchflossene Leiter C_2 auf das Element dz_1 des Leiters C_1 aus. Wir wollen das Gesetz (3.42) anwenden. Dazu stellen wir uns vor, daß C_1, C_2 im Unendlichen auf großen Halbkreisen geschlossen sind, so daß die Beiträge zur Kraft auf dz_1 von den Halbkreisen keine Rolle spielen. Somit folgt mit $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_{12} &= -\frac{I_1 I_2}{c^2}\, dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2\, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\
&= -\frac{I_1 I_2}{c^2}\, dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2\, \frac{-d\vec{e}_x - (z_2 - z_1)\,\vec{e}_z}{\left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}} \\
&= d\frac{I_1 I_2}{c^2}\, dz_1\, \vec{e}_x \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2\, \frac{1}{\left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}} \\
&= d\frac{I_1 I_2}{c^2}\, dz_1\, \vec{e}_x \left\{ \frac{z_2 - z_1}{d^2 \left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}} \right\}_{z_2=-\infty}^{z_2=+\infty} \\
&= \frac{2 I_1 I_2}{c^2 d}\, dz_1 \vec{e}_x\,. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Die von C_2 auf C_1 ausgeübte Kraft pro Länge

$$\vec{f}_{12} = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 d} \vec{e}_x \qquad (3.49)$$

wirkt also senkrecht zu den beiden Stromrichtungen, und zwar anziehend, falls die Ströme gleich gerichtet, und abstoßend, falls sie entgegen gerichtet sind.

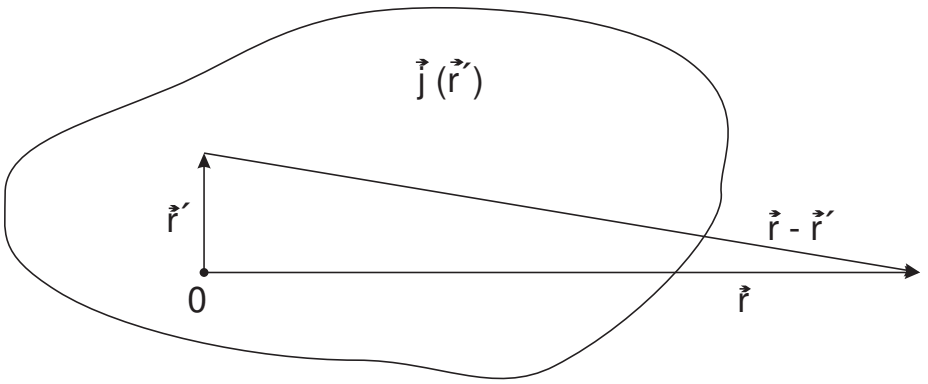
3.3 Zweites Ampèresches Gesetz

Wir gehen aus vom Biot-Savartschen Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} I \frac{d\vec{r}_1 \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}\,. \qquad (3.50)$$

Wir wollen nicht mehr die Näherung des Stromfadens verwenden und ersetzen generell $Id\vec{r}_1$ durch $\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,d^3r'$. Ausgehend von der Stromdichte $j\,(\vec{r}\,')$ in einem Leiter gilt für die entsprechende magnetische Induktion $\vec{B}\,(\vec{r}\,)$

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,) = \int d\vec{B} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} d^3r' \tag{3.51}$$



Dieser Ausdruck ist analog der uns schon bekannten Gleichung für das elektrische Feld in Abhängigkeit von der Ladungsdichte

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \int \rho\,(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} d^3r' \quad . \tag{3.52}$$

Jetzt substituieren wir

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} = \vec{\nabla}'\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \quad . \tag{3.53}$$

Damit erhalten wir für das $\vec{B}$-Feld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} d^3r' \quad . \tag{3.54}$$

Da die Divergenz einer Rotation immer verschwindet, können wir schreiben

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad . \tag{3.55}$$

Diese Beziehung impliziert, daß es keine isolierbaren Quellen des Magnetfeldes gibt. Es gibt keine magnetischen Monopole. Für jeden beliebigen Vektor $\vec{A}$ gilt

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \triangle\vec{A} \quad . \tag{3.56}$$

Damit können wir $\mathrm{rot}\ \vec{B}$ weiter umformen

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' \right) \\ &= \frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) d^3 r' - \frac{1}{c} \int \triangle \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' \quad . \end{aligned} \tag{3.57}$$

Wir nutzen ferner aus, daß gilt

$$\triangle \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\, \delta\,(\vec{r} - \vec{r}\,') \quad . \tag{3.58}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \vec{B} &= \frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) d^3 r' \\ &\quad + \frac{4\pi}{c} \int \delta\,(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \vec{j}\,(\vec{r}\,')\, d^3 r' \quad . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Den zweiten Summanden können wir sofort integrieren

$$\frac{4\pi}{c} \int \delta\,(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \vec{j}\,(\vec{r}\,')\, d^3 r' = \frac{4\pi}{c} \vec{j}\,(\vec{r}\,) \quad . \tag{3.60}$$

Den ersten Summanden formen wir um

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) d^3 r' &= -\frac{\vec{\nabla}}{c} \int \vec{j}\,(\vec{r}\,')\, \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' \\ &= \frac{\vec{\nabla}}{c} \int \frac{\left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}\,(\vec{r}\,') \right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' - \frac{\vec{\nabla}}{c} \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) d^3 r' \\ &= \frac{\vec{\nabla}}{c} \int \frac{\left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}\,(\vec{r}\,') \right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' - \frac{\vec{\nabla}}{c} \int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dF' \quad . \end{aligned} \tag{3.61}$$

$\vec{n}$ ist der Normalenvektor auf der Oberfläche F'. Der zweite Term verschwindet, da die Stromdichte begrenzt ist und die Oberfläche ins Unendliche gelegt werden kann. Der erste Term verschwindet auch, da für magnetostatische Probleme gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad . \tag{3.62}$$

Somit verbleibt

$$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}\,(\vec{r}\,) \ . \tag{3.63}$$

Dies ist das zweite Ampèresche Gesetz. Mit Hilfe des Stokesschen Satzes können wir die integrale Form des Ampèreschen Gesetzes ableiten. Es folgt

$$\int_F \mathrm{rot}\ \vec{B} \cdot \vec{n}\, dF = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot \vec{n}\, dF = \frac{4\pi}{c} I \quad . \tag{3.64}$$

I ist die Gesamtstromstärke und $\vec{n}$ ist wieder der Normalenvektor auf der Fläche. Damit haben wir äquivalenterweise

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I \, . \tag{3.65}$$

3.4 Das Vektorpotential

Als Grundgleichungen der Magnetostatik haben wir jetzt die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, && (3.66) \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} && (3.67) \end{aligned}$$

vorliegen. Verschwindet die Stromdichte $\vec{j}$, so folgt, daß sich das Magnetfeld als Gradient eines skalaren Potentials darstellen läßt

$$\vec{B} = \operatorname{grad} \Phi_m, \tag{3.68}$$

da $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi_m$ immer Null ist. Aus (3.66) folgt, daß sich das Magnetfeld $\vec{B}$ schreiben läßt als

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}\,, \tag{3.69}$$

da $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ ist. $\vec{A}$ ist das Vektorpotential. Das Vektorpotential ist nur bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion bestimmt. Wir können stets die Eichtransformation

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \varphi \tag{3.70}$$

vornehmen, ohne etwas am Magnetfeld zu ändern. Das skalare Feld φ ist ein Eichfreiheitsgrad des Feldes. Um eine Eindeutigkeit des Vektorpotentials zu erreichen, brauchen wir noch eine zusätzliche Festlegung. Wir wählen

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad . \tag{3.71}$$

Diese Festlegung wird Coulomb-Eichung genannt. Mit der Vektorrelation

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \triangle \vec{A} \quad . \tag{3.72}$$

können wir eine weitere Beziehung zwischen Magnetfeld und Vektorpotential herleiten. Wegen der Coulomb-Eichung verschwindet der erste Term auf der rechten Seite, und wir erhalten

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -\triangle \vec{A} \tag{3.73}$$

Damit folgt für das Vektorpotential

$$\triangle \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad . \tag{3.74}$$

Mit der Beziehung

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r'\right) \tag{3.75}$$

folgt offensichtlich

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' \quad . \tag{3.76}$$

Dieser Ausdruck des Vektorpotentials entspricht der Lösung der Poisson-Gleichung in der Elektrostatik.

3.5 Das magnetische Moment

Wir betrachten ein begrenztes Gebiet, in dem die stationäre Stromverteilung $\vec{j}\,(\vec{r}\,')$ vorliegt. Für das Vektorpotential, das durch diese Stromverteilung generiert wird, gilt dann

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' \quad . \tag{3.77}$$

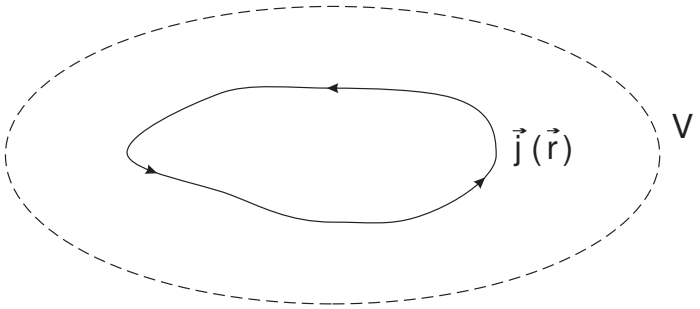
Der Beobachtungspunkt $\vec{r}$ soll weit außerhalb der Stromverteilung liegen, so daß gilt $|\vec{r}\,| \gg |\vec{r}\,'|$. Dann können wir den Nenner $1/\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ in eine Taylor-Reihe entwickeln, wobei wir uns nur auf die ersten beiden Terme beschränken,

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \ldots \tag{3.78}$$

In Komponentendarstellung ergibt sich dann für das Potential

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{c}\int j_i\,(\vec{r}\,')\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \ldots\right) d^3r' \\ &= \frac{1}{cr}\int j_i\,(\vec{r}\,')\,d^3r' + \frac{1}{c}\int j_i\,(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}d^3r' + \ldots \end{aligned} \tag{3.79}$$

Das Volumenintegral geht über die gesamte Stromverteilung. Es verschwindet somit, da gilt $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.



Auch formal läßt sich das Verschwinden des Volumenintegrals zeigen. Es seien x_i die Komponenten von $\vec{r}$. Dann folgt mit $\vec{\nabla}x_i = \vec{e}_i$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \left(x_i \operatorname{div}\vec{j}\right) d^3r \\ &= \int \operatorname{div}\,\left(x_i\vec{j}\right) d^3r - \int j_i\,d^3r \\ &= \int_F \left(x_i\vec{j}\right)\cdot d\vec{F} - \int j_i\,d^3r \quad . \end{aligned} \tag{3.80}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, weil F außerhalb des Stromgebietes liegen kann. Daher resultiert

$$\int j_i\,d^3r = 0 \quad . \tag{3.81}$$

Das abgeschlossene Stromgebiet hat keinen Monopol. Damit folgt weiter

$$A_i\left(\vec{r}\,\right) = \frac{1}{cr^3}\int j_i\left(\vec{r}\,'\right)\vec{r}\cdot\vec{r}\,' d^3r' + \ldots \tag{3.82}$$

und für den Vektor des Vektorpotentials

$$\vec{A}\left(\vec{r}\,\right) = \frac{1}{cr^3}\int \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)\vec{r}\cdot\vec{r}\,' d^3r' + \ldots \tag{3.83}$$

Nützlich für viele Auswertungen ist der folgende Hilfssatz: Es seien $f\left(\vec{r}\,\right)$ und $g\left(\vec{r}\,\right)$ stetig differenzierbare, sonst aber beliebige skalare Felder. Dann gilt im Rahmen der Magnetostatik

$$\hat{I} = \int d^3r\left[f\left(\vec{r}\,\right)\vec{j}\cdot\vec{\nabla}g\left(\vec{r}\,\right) + g\left(\vec{r}\,\right)\vec{j}\cdot\vec{\nabla}f\left(\vec{r}\,\right)\right] = 0 \quad . \tag{3.84}$$

Zur Beweisführung untersuchen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\left(gf\vec{j}\right) &= (gf)\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \vec{j}\cdot\mathrm{grad}\;(gf) \\
&= \vec{j}\cdot\mathrm{grad}\;(gf) \\
&= f\left(\vec{j}\cdot\vec{\nabla}g\right) + g\left(\vec{j}\cdot\vec{\nabla}f\right) .
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Daraus folgt

$$\hat{I} = \int d^3r\;\mathrm{div}\,\left(gf\vec{j}\right) = \int_{S(V)\to\infty} d\vec{f}\cdot\left(gf\vec{j}\right) = 0\,, \tag{3.86}$$

da die Stromdichte im Unendlichen Null wird. Setzen wir zunächst $f = 1$ und $g = x,\ y,$ oder z, so erhalten wir wieder

$$\int d^3r\;\vec{j}\cdot\vec{e}_{x,y,z} = 0 \tag{3.87}$$

und damit

$$\int d^3r\;\vec{j}\left(\vec{r}\,\right) = 0 \quad . \tag{3.88}$$

Setzen wir nun $f = x_i$, $g = x_k$, wobei $x_i,\ x_k \in \{x, y, z\}$, so folgt

$$0 = \int d^3r\;\left(x_i j_k + x_k j_i\right) \tag{3.89}$$

und damit

$$\int d^3r\;x_k j_i = -\int d^3r\;x_i j_k\,. \tag{3.90}$$

Mit Hilfe dieser Relation berechnen wir mit einen beliebigen Vektor $\vec{a}$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\int d^3r'\,\vec{r}\,' j_i\left(\vec{r}\,'\right) &= \sum_j a_j \int d^3r'\,x'_j j_i\left(\vec{r}\,'\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_j a_j \int d^3r'\left(x'_i j_j - x'_j j_i\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\,a_j\int d^3r'\left(\vec{r}\,'\times\vec{j}\right)_k \quad .
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Dies führt auf die Vektoridentität

$$\int d^3r' \; (\vec{a} \cdot \vec{r}\,') \, \vec{j} \, (\vec{r}\,') = -\frac{1}{2} \left\{ \vec{a} \times \int \left[\vec{r}\,' \times \vec{j} \, (\vec{r}\,') \right] d^3r' \right\} \quad . \tag{3.92}$$

Insbesondere gilt

$$\int \vec{j} \, (\vec{r}\,') \, \vec{r} \cdot \vec{r}\,' d^3r' \; = -\frac{1}{2} \left\{ \vec{r} \times \int \left[\vec{r}\,' \times \vec{j} \, (\vec{r}\,') \right] d^3r' \right\} \quad . \tag{3.93}$$

Wir definieren jetzt das magnetische Moment durch

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{r}\,' \times \vec{j} \, (\vec{r}\,') \, d^3r' \quad . \tag{3.94}$$

Dann hat das Vektorpotential in großem Abstand von dem Bereich, in dem die Stromdichte $\vec{j}$ nicht verschwindet, die Gestalt

$$\vec{A} \, (\vec{r} \,) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \ldots \tag{3.95}$$

Wir haben hierbei nur den Dipolterm aufgeführt. Wir wollen nun, ausgehend vom Dipolanteil des Vektorpotentials die magnetische Induktion ermitteln. Hierzu verwenden wir die Relationen

$$\begin{aligned} \text{rot} \; (\vec{a}\varphi) &= \varphi \, \text{rot} \, \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla} \varphi \, , & (3.96) \\ \text{rot} \; \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) &= \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{b} + \vec{a} \, \text{div} \, \vec{b} - \vec{b} \, \text{div} \, \vec{a} \quad . & (3.97) \end{aligned}$$

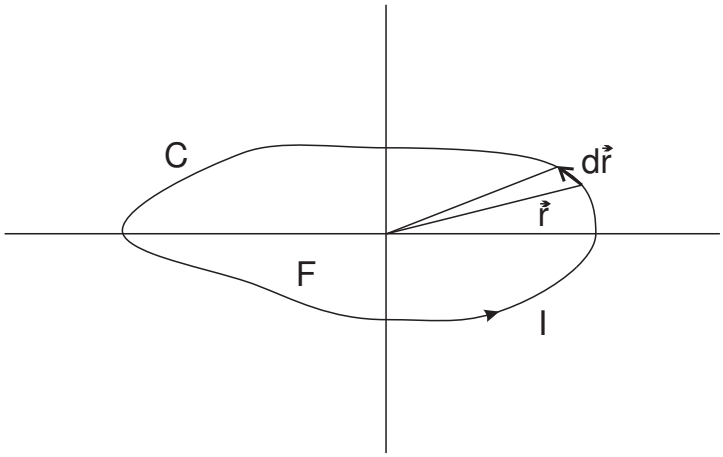
Wir erhalten mit $\vec{m} = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \text{rot} \, \vec{A} &= \frac{1}{r^3} \, \text{rot} \; (\vec{m} \times \vec{r} \,) - (\vec{m} \times \vec{r} \,) \times \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{1}{r^3} \left[\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{m} - \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{r} + \vec{m} \, \text{div} \, \vec{r} - \vec{r} \, \text{div} \, \vec{m} \right] + \frac{3}{r^5} \, (\vec{m} \times \vec{r} \,) \times \vec{r} \\ &= -\frac{1}{r^3} \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{m} \, \text{div} \, \vec{r} - \frac{3}{r^5} \left(\vec{m} \vec{r}^{\,2} - \vec{r} (\vec{m} \cdot \vec{r} \,) \right) \\ &= -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5} \vec{r} \, (\vec{m} \cdot \vec{r} \,) \quad . \end{aligned} \tag{3.98}$$

Mit $\vec{B} = \text{rot} \, \vec{A}$ bekommen wir somit

$$\vec{B} = \frac{3 \, (\vec{r} \cdot \vec{m} \,) \, \vec{r} - \vec{m} \, \vec{r}^{\,2}}{r^5} \, . \tag{3.99}$$

Die von $\vec{j}$ erzeugte magnetische Induktion $\vec{B}$ verhält sich hinreichend weit entfernt von der Stromdichteverteilung stets wie ein Dipolfeld, wenn das Dipolmoment $\vec{m}$ wie oben definiert wird.
Das Dipolmoment wollen wir anhand von zwei konkreten Beispielen auswerten. Zunächst betrachten wir einen geschlossenen ebenen Stromkreis. Wir fassen die Leiterschleife als Stromfaden mit $\vec{j} d^3r = I d\vec{r}$ auf.



Für das magnetische Moment folgt demnach

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int [\vec{r} \times \vec{j}\,(\vec{r})] d^3r = \frac{1}{2c}\, I \int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{I}{c}\vec{F}\,. \tag{3.100}$$

Dieses einfache Resultat gilt unabhängig von der Gestalt der umflossenen Fläche. $\vec{m}$ steht senkrecht auf der Leiterebene.

Als zweites Beispiel betrachten wir ein System von Punktladungen. Die Stromdichte $\vec{j}$ werde durch eine Anzahl geladener Teilchen hervorgerufen, die wir als Punktladungen auffassen wollen. Alle Teilchen mögen dieselbe Ladung q besitzen. Das $i-$te Teilchen bewegt sich zur Zeit t am Ort $\vec{R}_i(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$. Damit haben wir

$$\vec{j}\,(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i\, \delta\left(\vec{r} - \vec{R}_i\right) \quad . \tag{3.101}$$

Für das magnetische Moment resultiert damit

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} q \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i \times \vec{v}_i\right) = \frac{q}{2Mc} \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \quad . \tag{3.102}$$

Hierbei ist $\vec{L}_i$ der Bahndrehimpuls des i-ten Teilchens. Die Masse M wurde für alle Teilchen als gleich angenommen. Das Verhältnis vom magnetischen Moment zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \tag{3.103}$$

bezeichnet man als gyromagnetisches Verhältnis G.

$$G = \frac{q}{2Mc} \quad . \tag{3.104}$$

Das hier rein klassisch abgeleitete Resultat für G bleibt bis in den atomaren Bereich hin gültig. Es gilt auch für Elektronen, solange es sich um deren Bahnbewegung handelt. Hingegen findet man aus der relativistischen Dirac-Gleichung bezüglich des Spins $\vec{s}$ des Elektrons mit $q = -e$

$$\vec{m}_s = \frac{-e}{Mc}\,\vec{s} = gG\,\vec{s} \quad . \tag{3.105}$$

Also ist der $g-$Faktor des Elektrons 2.

3.6 Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld

Eine äußere Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ übt auf eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right] d^3r \tag{3.106}$$

und das Drehmoment

$$\vec{N} = \frac{1}{c}\int \vec{r} \times \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right) d^3r \tag{3.107}$$

aus. Diese Beziehung wollen wir nun für den Fall untersuchen, daß sich das $\vec{B}-$Feld in der Region, in der die Stromdichte von Null verschieden ist und die lokal begrenzt sein möge, nur wenig ändert. Dann bietet sich eine Taylor-Entwicklung des $\vec{B}-$Feldes um den Ursprung in diesem Gebiet an,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + \left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} + \ldots \quad . \tag{3.108}$$

Dies ergibt für $\vec{F}$

$$\vec{F} = -\frac{1}{c}\vec{B}(0) \times \int \vec{j}(\vec{r})\, d^3r - \frac{1}{c}\int \left[\left(\vec{r}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}}\right)\vec{B}(0)\right] \times \vec{j}(\vec{r})\, d^3r + \ldots \quad . \tag{3.109}$$

Der erste Summand verschwindet. Ein homogenes $\vec{B}-$Feld übt auf eine stationäre Stromverteilung keine Kraft aus. Wir berechnen jetzt die $i-$te Komponente der Kraft

$$\begin{aligned} F_i &\approx -\frac{1}{c}\int d^3r \left\{\left[\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}(0)\right] \times \vec{j}(\vec{r})\right\}_i \\ &= -\frac{1}{c}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\left[\vec{\nabla}B_j(0)\right]\int \vec{r}\, j_k(\vec{r})\, d^3r \quad . \end{aligned} \tag{3.110}$$

Jetzt nutzen wir die Vektoridentität

$$\int d^3r' \left(\vec{a}\cdot\vec{r}'\right)\vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\left\{\vec{a} \times \int \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')\right] d^3r'\right\} \tag{3.111}$$

aus. Wir setzen $\vec{a} = \vec{\nabla}B_j$, es folgt

$$\begin{aligned} F_i &\approx \frac{1}{2c}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\left\{\left[\vec{\nabla}B_j(0)\right] \times \int \left[\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\right] d^3r\right\}_k \\ &= -\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\left[\vec{m} \times \vec{\nabla}B_j(0)\right]_k \\ &= -\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\left[\vec{m} \times \vec{\nabla}\right]_k B_j(0) \\ &= \sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\left[\vec{m} \times \vec{\nabla}\right]_j B_k(0) \\ &= \left[\left(m \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{B}(0)\right]_i \quad . \end{aligned} \tag{3.112}$$

Damit haben wir insgesamt für die Kraft $\vec{F}$ auf die Stromverteilung $\vec{j}$ den folgenden Ausdruck gefunden.

$$\vec{F} \approx \left(\vec{m} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{B}\left(0\right) \quad . \tag{3.113}$$

Es handelt sich hierbei jedoch nur um den ersten nicht verschwindenden Term in der Taylor-Entwicklung. Wir wenden den Entwicklungssatz an und erhalten

$$\vec{F} \approx -\vec{m}\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\left(0\right)\right] + \vec{\nabla}\left[\vec{m} \cdot \vec{B}\left(0\right)\right] \quad . \tag{3.114}$$

Mit $\mathrm{div}\ \vec{B} = 0$ folgt somit

$$\vec{F} \approx \vec{\nabla}\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right) \quad . \tag{3.115}$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem entsprechenden Resultat der Elektrostatik

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p} \cdot \vec{E}\right) \ , \tag{3.116}$$

so erkennen wir formale Äquivalenz. Allgemein ist die Kraft als negativer Gradient einer potentiellen Energie V definiert. Dies impliziert

$$V = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad . \tag{3.117}$$

Ein magnetischer Dipol wird versuchen, sich parallel zum $\vec{B}-$Feld einzustellen, um den Zustand geringster Energie einzunehmen. Die magnetische Induktion $\vec{B}$ übt auf die Stromverteilung $\vec{j}$ auch ein Drehmoment $\vec{N}$ aus. Im Gegensatz zur Kraft trägt zum Drehmoment bereits der erste Term der obigen Feldentwicklung bei. Auf diesen ersten Term wollen wir uns hier beschränken.

$$\begin{aligned} \vec{N} &\approx \frac{1}{c}\int \left\{\vec{r} \times \left[\vec{j}\left(\vec{r}\right) \times \vec{B}\left(0\right)\right]\right\} d^3r \\ &= \frac{1}{c}\int d^3r \left\{\vec{j}\left(\vec{r}\right)\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\left(0\right)\right) - \vec{B}\left(0\right)\left(\vec{r} \cdot \vec{j}\left(\vec{r}\right)\right)\right\} \quad . \end{aligned} \tag{3.118}$$

Wir benutzen erneut den Hilfssatz der Magnetostatik (3.84) mit $f = g = r$. Damit ergibt sich

$$0 = 2\int d^3r \ \left(r\vec{j} \cdot \vec{\nabla} r\right) = 2\int d^3r \ \left(r\vec{j} \cdot \vec{e}_r\right) = 2\int d^3r \ \left(\vec{j} \cdot \vec{r}\right) \quad . \tag{3.119}$$

Damit verschwindet der zweite Summand in (3.118) und wir bekommen

$$\vec{N} \approx \frac{1}{c}\int d^3r \left[\vec{r} \cdot \vec{B}\left(0\right)\right] \vec{j}\left(\vec{r}\right) \quad . \tag{3.120}$$

An dieser Stelle verwenden wir erneut die Vektoridentität (3.111) mit $\vec{a} = \vec{B}\left(0\right)$. Es resultiert

$$\vec{N} \approx -\frac{1}{2c}\left\{\vec{B}\left(0\right) \times \int d^3r \left[\vec{r} \times \vec{j}\left(\vec{r}\right)\right]\right\} \quad . \tag{3.121}$$

Benutzen wir die Definition des magnetischen Momentes $\vec{m}$, dann lautet der führende Term in der Entwicklung des Drehmomentes

$$\vec{N} \approx \vec{m} \times \vec{B}\left(0\right) \tag{3.122}$$

Diese Relation bietet eine Möglichkeit, bei vorgegebenem magnetischen Moment die Richtung und den Betrag von $\vec{B}$ zu messen.

3.7 Magnetostatik in der Materie

Bisher sind wir immer von genau bekannten Stromdichteverteilungen $\vec{j}\,(\vec{r}\,)$ ausgegangen. Wenn wir das Magnetfeld im materieerfüllten Raum berechnen wollen, können wir dies nicht mehr streng voraussetzen. Es existieren Molekularströme, magnetische Momente von Atomen und Ionen, die im einzelnen nicht bekannt sind und von denen für makroskopische Betrachtungen auch nur die Mittelwerte interessieren. Wir werden wie bei der Behandlung des elektrostatischen Feldes in Materie vorgehen. Die gesamte Stromdichte wird aufgeteilt in einen Anteil, der vom makroskopischen Ladungstransport herrührt, und einen Anteil der mikroskopischen Stromdichte, die die Kreisströme von Elektronen in Atomen berücksichtigt. Das mikroskopische Vektorpotential, das von allen Strömen abhängt und das auch den atomaren Bereich genau beschreibt, lautet

$$\vec{A} = \vec{A}_{\mathrm{makr}} + \vec{A}_{\mathrm{mol}} \tag{3.123}$$

oder durch die Stromdichteverteilung ausgedrückt

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}_{\mathrm{mol}}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' \quad . \tag{3.124}$$

Unabhängig von den makroskopischen $\vec{j}$ ist das zu einem Molekül an der Stelle $\vec{r}_i$ gehörige Vektorpotential am Ort $\vec{r}$ angenähert durch

$$\vec{A}_{\mathrm{mol}}\,(\vec{r}\,) = \sum_i \frac{\vec{m}_{\mathrm{mol}} \times (\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,, \tag{3.125}$$

wobei $\vec{m}_{\mathrm{mol}}$ das magnetische Moment des Moleküls ist. Das gesamte Vektorpotential lautet damit

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + \sum_i \frac{\vec{m}_{\mathrm{mol}} \times (\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \quad . \tag{3.126}$$

Für $\vec{m}_{\mathrm{mol}}$ wird ein mittlerer Wert $\langle\vec{m}\rangle$ angenommen. Ist N die Anzahl der Moleküle pro Volumen, so können wir mit der magnetischen Dipoldichte

$$\vec{M} = N\,\langle\vec{m}_{\mathrm{mol}}\rangle \tag{3.127}$$

von der Summe zum Integral über das Volumen übergehen.
Die makroskopische Größe $\vec{M}$ wird als Magnetisierung bezeichnet. Sie ist entsprechend der Polarisation im elektrischen Feld eine Dichte der magnetischen Dipole. Wir erhalten damit für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + \int \vec{M} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3r' \quad . \tag{3.128}$$

Dieser Ausdruck läßt sich folgendermaßen umformen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + \int \vec{M}\times\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' \quad . \tag{3.129}$$

Jetzt verwenden wir erneut

$$\vec{\nabla}\times\left(\varphi\vec{M}\right) = (\text{grad}\,\varphi)\times\vec{M} + \varphi\ \text{rot}\ \vec{M} \tag{3.130}$$

mit einer skalaren Funktion φ. Wir haben hier

$$\varphi = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.131}$$

vorliegen. Daher können wir das Integral über die Magnetisierung umschreiben in

$$\int \vec{M}\,(\vec{r}\,)\times\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' = -\int\vec{\nabla}'\times\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + \int\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' \quad . \tag{3.132}$$

Wir wenden uns jetzt der Auswertung des ersten Integrals auf der rechte Seite zu. Dazu beweisen wir, daß für ein Vektorfeld $\vec{B}\,(\vec{r}\,)$ gilt

$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{B}\,d^3r = \int_F \vec{n}\times\vec{B}\,df \quad . \tag{3.133}$$

Hierzu bilden wir mit einem <u>konstanten</u> Vektor $\vec{C}$ das Vektorfeld

$$\vec{A} = \vec{B}\times\vec{C} \quad . \tag{3.134}$$

Mit dem Gaußschen Satz gilt dann

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3r = \int\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)d^3r = \int_F\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{n}\,dF \quad . \tag{3.135}$$

Jetzt ist

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{C}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \tag{3.136}$$

sowie

$$\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{n} = \vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{n}\right) = \left(\vec{C}\times\vec{n}\right)\cdot\vec{B} = \vec{C}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{B}\right) \quad . \tag{3.137}$$

Daher folgt

$$\int_V \vec{C}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)d^3r = \int_F\vec{C}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)dF\,. \tag{3.138}$$

Da $\vec{C}$ ein konstanter Vektor ist, können wir ihn vor das Integral ziehen,

$$\vec{C}\cdot\int_V\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)d^3r = \vec{C}\cdot\int_F\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)dF\,. \tag{3.139}$$

Da $\vec{C}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist, folgt die Behauptung. Unter Ausnutzung dieser Behauptung können wir schreiben

$$\int_V \vec{\nabla}\,' \times \frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' = -\int_F \frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \times \vec{n}\,dF \quad . \tag{3.140}$$

Unter der Annahme, daß $\vec{M}$ räumlich beschränkt ist und die Oberfläche F ins Unendliche verlegt wird, wird dieses Integral verschwinden. Es verbleibt für das Vektorpotential

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r'}\right) + c\vec{\nabla}' \times \vec{M}\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} d^3r' \quad . \tag{3.141}$$

Der makroskopischen Magnetisierung entspricht der sogenannte Magnetisierungsstrom

$$\vec{j}_M = c\,\vec{\nabla} \times \vec{M} \quad . \tag{3.142}$$

Damit können wir für den effektiven Strom die Summe aus Leitungsstrom $\vec{j}$ und Magnetisierungsstrom $\vec{j}_M$ verwenden. Es gilt

$$\text{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_M\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + c\,\text{rot}\vec{M}\right) \quad . \tag{3.143}$$

Umformen ergibt

$$\text{rot}\left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad . \tag{3.144}$$

Die Größe

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{3.145}$$

bezeichnet man als magnetische Feldstärke. Somit haben wir

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad . \tag{3.146}$$

Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ersetzt bei Anwesenheit von Materie die magnetische Induktion $\vec{B}$. Im Vakuum sind beide Feldgrößen gleich, im Vakuum gilt $\vec{H} = \vec{B}$. Die Definition des makroskopischen Magnetfeldes $\vec{H}$ erfolgt völlig analog zu der der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ in der Elektrostatik. Bei beiden handelt es sich nur um Hilfsgrößen. Die eigentlichen Fundamentalobjekte sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Nun müssen wir noch einen Zusammenhang zwischen $\vec{M}$ und $\vec{H}$ suchen. Unter der Voraussetzung eines isotropen, linearen Mediums können wir analog zur Elektrostatik ansetzen

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad . \tag{3.147}$$

χ_m ist die magnetische Suszeptibilität. Für die magnetische Induktion folgt für diesen Spezialfall

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\,\vec{H} = \mu\vec{H} \quad . \tag{3.148}$$

Wir haben also für das lineare Medium

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{3.149}$$

mit der magnetischen Permeabilität

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m \quad . \tag{3.150}$$

Je nach Wert von χ_m bzw. μ unterscheidet man die folgenden Stoffe

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & Diamagnetika & \mu < 1, \quad \chi_m < 0 \\ \text{II)} & Paramagnetika & \mu > 1, \quad \chi_m > 0 \\ \text{III)} & Ferromagnetika & \mu \gg 1, \quad \mu = \mu(H) \end{array} \tag{3.151}$$

Im Unterschied zur elektrischen Suszeptibilität χ_e kann die magnetische Suszeptibilität χ_m auch negativ werden. Der Diamagnetismus ist charakterisiert durch

$$\chi_m < 0 \quad . \tag{3.152}$$

Diamagnete enthalten keine permanenten magnetischen Dipole. Erst wenn ein magnetisches Feld eingeschaltet wird, werden solche Dipole induziert. Nach der Lenzschen Regel sind die induzierten Dipole dem erregenden Feld entgegengesetzt. χ_m ist daher negativ. Typisch ist ferner, daß χ_m praktisch temperatur- und feldunabhängig sowie betragsmäßig sehr klein ist, $|\chi_m| \approx 10^{-5}$. Diamagnetismus ist eine Eigenschaft aller Stoffe. Paramagnetismus und Ferromagnetismus können jedoch den Diamagnetismus überkompensieren. Als Beispiel sind anzuführen fast alle organische Substanzen, Edelmetalle wie Bi, Zn, Hg, Nichtmetalle wie S, J, Si und Supraleiter. Entscheidende Voraussetzung für Paramagnetismus ist die Existenz von permanenten magnetischen Dipolen, die im Feld mehr oder weniger stark ausgerichtet werden. Dieser Ausrichtungstendenz steht die Unordnungstendenz der thermischen Bewegung entgegen. Typisch ist deshalb

$$\chi_m > 0; \quad \chi_m = \chi_m(T) \quad . \tag{3.153}$$

Diese permanenten Dipole können an gewissen Gitterplätzen streng lokalisiert sein. Bei magnetischen Isolatoren befolgt die Suszeptibilität bei hohen Temperaturen T das Curie-Gesetz

$$\chi_m(T) = \frac{C}{T} \quad , \tag{3.154}$$

wobei C eine Konstante ist.
Bei einer kollektiven Magnetisierung ist die Suszeptibilität eine recht komplizierte Funktion des Feldes und der Temperatur

$$\chi_m = \chi_m(T, H) \quad . \tag{3.155}$$

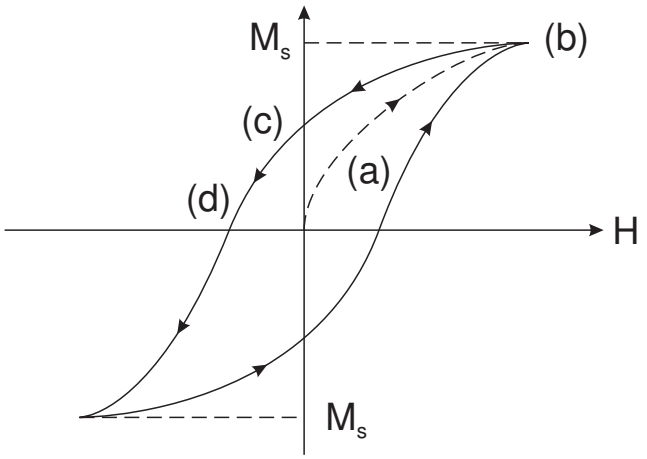
Voraussetzung für das Auftreten des kollektiven Magnetismus ist die Existenz von permanenten magnetischen Dipolen, die sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_{kr} spontan, d.h. ohne

äußere Felder, parallel ausrichten. Die permanenten magnetischen Momente können lokalisiert sein, aber auch frei beweglich sein wie z.B. beim Eisen, Nickel und Kobalt.
Die kollektiven Formen des Magnetismus lassen sich noch in drei große Unterklassen einteilen.

1. Ferromagnetismus
   Typisch für den Ferromagnetismus ist die betragsmäßig sehr große Suszeptibilität χ_m. Am absoluten Nullpunkt $T = 0$ sind alle Momente parallel ausgerichtet ($\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$). Für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur tritt eine gewisse Unordnung ein, die mit wachsender Temperatur zunimmt, aber es verbleibt noch eine von Null verschiedene Gesamtmagnetisierung. Die kritische Temperatur heißt in diesem Fall die Curie-Temperatur

$$T_{kr} = T_C \tag{3.156}$$

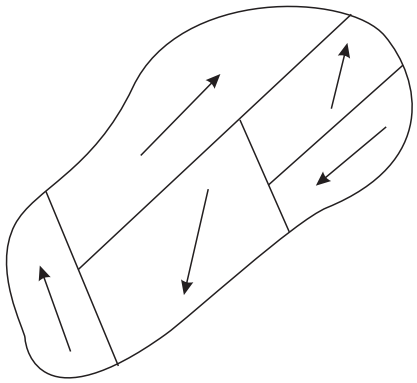
   Für Eisen liegt diese Curie-Temperatur beispielsweise bei $T_C = 1043°\text{K}$. Typisch für ferromagnetisches Verhalten ist auch die starke Abhängigkeit von der Vorbehandlung des Materials, die zu der Hysteresekurve führt.



Hysteresekurve

Beim Einschalten des Feldes wird das jungfräuliche Material zunächst längs der sogenannten Neukurve (a) magnetisiert, um schließlich eine Sättigung (b) zu erreichen. Beim Abschalten des Feldes bleibt eine Restmagnetisierung, die man Remanenz (c) nennt. Erst durch ein Gegenfeld, die sogenannte Koerzitivkraft (d) wird diese Restmagnetisierung aufgehoben. Die Remanenz bestimmt auch den Permanentmagneten. Für Ferromagneten gilt nicht der lineare Zusammenhang zwischen Magnetisierung und magnetischer Feldstärke. Die Hystereseschleife ist durch die Tatsache bedingt, daß das makroskopische Material in kleine mikroskopische Bereiche, die Weißschen Bezirke, zerfällt, die jeweils spontan magnetisiert sind. Aus thermodynamischen Gründen erfolgt diese Magnetisierung in

unterschiedlichen Richtungen.



Das äußere Feld H richtet diese bis zur Parallelisierung aus.

2. Ferrimagnetismus
   Das Festkörpergitter setzt sich in diesem Fall aus zwei ferromagnetischen Untergittern A und B zusammen, die unterschiedliche Magnetisierung aufweisen, $\vec{M}_A \neq \vec{M}_B$.

$$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \tag{3.157}$$

   Es gilt hierbei unterhalb der kritischen Temperatur

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B \neq 0 \quad . \tag{3.158}$$

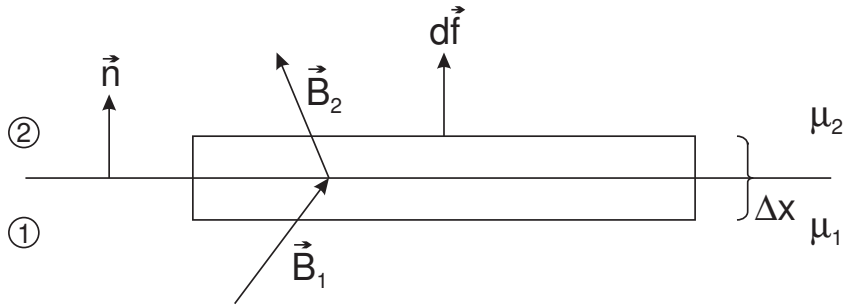
3. Antiferromagnetismus
   Dies ist ein Spezialfall des Ferrimagnetismus, bei dem die beiden Untergitter entgegengesetzt gleich magnetisiert sind ($\vec{M}_A = -\vec{M}_B$). Die Gesamtmagnetisierung ist also stets Null,

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = 0 \quad . \tag{3.159}$$

   Die kritische Temperatur heißt beim Antiferromagneten Neèl-Temperatur.

3.8 Feldverhalten an Grenzflächen

Mit Hilfe der Gaußschen und Stokeschen Integralsätze können wir Verhalten des Magnetfeldes an Grenzflächen studieren.



Zunächst legen wir um die Grenzfläche ein Gaußsches Kästchen mit dem Volumen $\Delta V = \Delta F \cdot \Delta x$. Dann gilt mit $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

$$0 = \int\limits_{\Delta V} d^3r \,\mathrm{div}\,\vec{B} = \int\limits_{S(\Delta V)} d\vec{f}\cdot\vec{B} \quad . \tag{3.160}$$

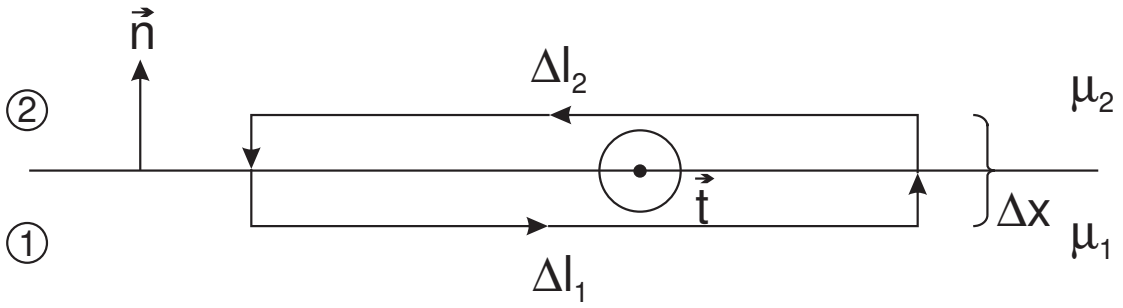
Für den Grenzfall $\Delta x \to 0$ bekommen wir für dieses Oberflächenintegral

$$0 = \Delta F\,\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \quad . \tag{3.161}$$

Wir erhalten also das Resultat, daß die Normalkomponente der magnetischen Induktion an der Grenzfläche stetig ist,

$$B_{2n} = B_{1n} \quad . \tag{3.162}$$

Wir legen nun um die Grenzfläche eine kleine Stokesche Fläche



$\vec{t}$ sei die Flächennormale von $\Delta\vec{F}$ tangential zur Grenzfläche gerichtet. Dann gilt

$$\Delta\vec{l}_2 = \Delta l\left(\vec{t}\times\vec{n}\right) = -\Delta\vec{l}_1 \quad . \tag{3.163}$$

Ferner sei $\vec{j}_F$ die Flächenstromdichte, d.h. der Strom pro Längeneinheit auf der Grenzfläche. Aufgrund der Grundgleichung der Magnetstärke gilt

$$\int\limits_{\Delta F} \mathrm{rot}\vec{H}\,\vec{n}\,dF = \frac{4\pi}{c}\int\limits_{\Delta F}\vec{j}\cdot\vec{n}\,dF \quad . \tag{3.164}$$

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes kann man diese Relation umformen in

$$\oint\limits_{\partial\Delta F} d\vec{s}\cdot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_{\Delta F}\vec{j}\cdot\vec{n}\,dF \quad . \tag{3.165}$$

Für $\Delta x \to 0$ geht die rechte Seite über in $\left(\vec{j}_F\cdot\vec{t}\right)\Delta l$. Aus der linken Seite wird für $\Delta x \to 0$ der Ausdruck $\Delta l\left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)$. Bei fehlender Flächenstromdichte ($\vec{j}_F = 0$) resultiert, daß die Tangentialkomponente des $\vec{H}$-Feldes stetig ist,

$$H_{2t} = H_{1t} \tag{3.166}$$

Wir fassen zusammen:

$$B_{2n} = B_{1n} \quad , \quad E_{2t} = E_{1t} \quad , \tag{3.167}$$

$$H_{2t} = H_{1t} \quad , \quad D_{2n} = D_{1n} \quad . \tag{3.168}$$

4 Die Maxwell-Gleichungen

4.1 Grundgleichungen

Wir haben bislang die elektrostatischen und magnetostatischen Phänomene weitgehend unabhängig voneinander behandelt. Die mathematischen Lösungstechniken der verschiedenen Probleme waren recht ähnlich trotz der unterschiedlichen physikalischen Betrachtungsweisen. Wir wenden uns jetzt zeitabhängigen Prozessen und Feldern zu, bei denen der Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Feldern relativiert wird.

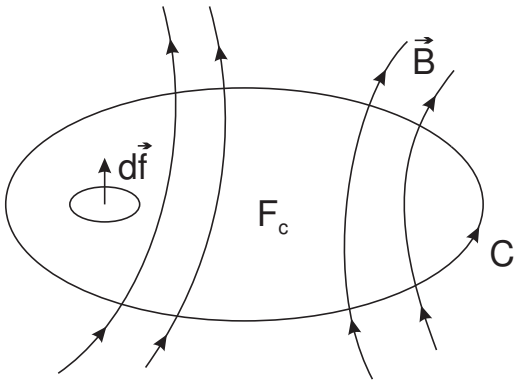
Ausgangspunkt zur Diskussion dynamischer Vorgänge ist das Faradaysche Induktionsgesetz. Das Biot-Savart-Gesetz enthält die Aussage, daß eine Stromdichte $\vec{j}$ eine magnetische Induktion $\vec{B}$ erzeugt. Faraday befaßte sich im Jahre 1831 mit dem Problem, ob umgekehrt mittels der magnetischen Induktion $\vec{B}$ auch Strom erzeugt werden kann. Faraday führte Experimente zum Verhalten von Strömen in zeitlich veränderlichen Magnetfeldern durch. Es ergaben sich als empirische Erkenntnisse, daß in einem Leiterkreis C_1 ein Strom erzeugt wird, wenn erstens relativ zu diesem ein permanenter Magnet bewegt wird und wenn zweitens ein zweiter Stromkreis C_2 relativ zum ersten bewegt wird. Das gleiche gilt, wenn der Strom in C_2 geändert wird.

Wir wollen die Faradaysche Beobachtung jetzt mathematisch formulieren. Hierzu definieren wir die sogenannte elektromotorische Kraft κ

$$\kappa = \oint\limits_{C}\vec{E}\cdot d\vec{r} \quad . \tag{4.1}$$

Wir erkennen, daß κ nicht die Dimension einer Kraft sondern vielmehr einer Spannung hat. Ferner definieren wir den magnetischen Fluß Φ durch die Fläche F_C

$$\Phi = \int\limits_{F_C}\vec{B}\cdot d\vec{f} \tag{4.2}$$



Die Faradayschen Experimente ergeben eine Proportionalität zwischen der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flußes $\dot{\Phi}$ und der elektromotorischen Kraft κ.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -k \frac{d}{dt} \int_{F_C} \vec{B} \cdot d\vec{f} \quad . \tag{4.3}$$

In den gewählten Gaußschen Einheiten wird die Proportionalitätskonstante zu

$$k = \frac{1}{c} \quad . \tag{4.4}$$

Das Vorzeichen in (4.3) wird durch die Lenzsche Regel festgelegt, die besagt, daß der induzierte Strom und der damit verbundene magnetische Fluß so gerichtet sind, daß sie der Änderung des äußeren Flusses entgegenwirken. Damit haben wir

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{F_C} \vec{B} \cdot d\vec{f} \quad . \tag{4.5}$$

Mit Hilfe des Stokesschen Saztes bekommen wir

$$\int_{F_C} d\vec{f} \cdot \left(\text{rot}\, \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \right) = 0 \quad . \tag{4.6}$$

Dies gilt für beliebige Flächen F_C. Demnach können wir schließen

$$\text{rot}\, \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \quad . \tag{4.7}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der homogenen Maxwell-Gleichung $\text{rot}\vec{E} = 0$ der Elektrostatik auf zeitabhängige Phänomene. Die zeitliche Änderung der magnetischen Induktion ist verknüpft mit der Verwirbelung der elektrischen Feldstärke.

Wir fassen die bisher gefundenen Grundgesetze der Elektrodynamik zusammen.

$$\begin{aligned} &\text{Coulomb-Gesetz:} && \text{div}\, \vec{D} = 4\pi \varrho \quad , \\ &\text{Ampère-Gesetz:} && \text{rot}\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad , \\ &\text{Faraday-Gesetz:} && \text{rot}\, \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ & && \text{div}\, \vec{B} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bis auf das Faradaysche Gesetz wurden alle diese Gesetze aus Experimenten gefolgert, die statische Ladungsverteilungen bzw. stationäre Ströme betreffen. Für nichtstationäre Ströme können diese Gesetze nicht in dieser Form gelten. Wir wollen das Ampèresche Gesetz weiter analysieren. Es basiert auf der Annahme $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Wir bilden die Divergenz des Ampèreschen Gesetzes

$$\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = 0 \quad . \tag{4.9}$$

Jedoch gilt allgemein die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{4.10}$$

Wir substituieren hierin ϱ mittels des Coulomb-Gesetzes durch div $\vec{D}$. Es folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad . \tag{4.11}$$

Maxwell führte daher im Ampèreschen Gesetz die Substitution durch

$$\vec{j} \to \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{4.12}$$

Damit wird aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\text{rot}\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{4.13}$$

Der zusätzliche Strom auf der rechten Seite wird der Verschiebungsstrom genannt.
Wir haben jetzt einen konsistenten Satz von Differentialgleichungen zur Bestimmung der elektromagnetischen Felder vorliegen. Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \varrho \quad , \tag{4.14}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \tag{4.15}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \tag{4.16}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{4.17}$$

Für makroskopische lineare Medien gelten ferner die Verknüpfungsgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \tag{4.18}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \tag{4.19}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad . \tag{4.20}$$

4.2 Elektromagnetische Potentiale

Die Maxwellschen Gleichungen repräsentieren einen Satz von vier gekoppelten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder miteinander verbinden. Oftmals ist es zum Auffinden der Lösungen günstiger, zunächst eine Transformation auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchzuführen, die äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen sind. Analog zur Elektrostatik und Magnetostatik werden wir das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ einführen. Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt, daß wir schreiben können

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \tag{4.21}$$

Die Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial\vec{B}/\partial t = 0$ können wir damit ausdrücken als

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad . \tag{4.22}$$

Da stets gilt rot grad $\Phi = 0$ können wir das skalare Potential Φ einführen durch

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{4.23}$$

und somit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad . \tag{4.24}$$

Wenn wir im gleichen Sinn die inhomogenen Maxwell-Gleichungen behandeln wollen, können wir uns zum Aufzeigen der Grundprinzipien nur die mikroskopischen Felder betrachten. Wir setzen hier als $\vec{D} = \vec{E}$ und $\vec{H} = \vec{B}$. Damit folgt für die inhomogenen Gleichungen

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = -4\pi\varrho \quad , \tag{4.25}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad . \tag{4.26}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß gilt

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A} \quad . \tag{4.27}$$

Wir haben also die vier Maxwellschen Gleichungen reduziert auf die zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Potentiale Φ und $\vec{A}$. Führen wir bezüglich des Vektorpotentials die Eichtransformation

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \tag{4.28}$$

wobei Λ eine beliebige skalare Funktion ist, so bleibt die magnetische Induktion unverändert. Damit auch das elektrische Feld $\vec{E}$ unverändert bleibt, muß offensichtlich gleichzeitig gelten

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad . \tag{4.29}$$

Eine spezielle Wahl der Eichung können wir so festlegen, daß gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad . \tag{4.30}$$

Dies nennen wir die Lorentz-Eichung. Diese Bedingung entkoppelt die beiden Bestimmungsgleichungen (4.25) und (4.26). Es resultiert

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho \quad , \tag{4.31}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad . \tag{4.32}$$

Mit $\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ führen wir jetzt den d'Alembert-Operator $\Box$ ein durch

$$\Box \vec{A} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \quad . \tag{4.33}$$

Somit folgen die inhomogenen Wellengleichungen

$$\Box \Phi = -4\pi \varrho \quad , \tag{4.34}$$

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad . \tag{4.35}$$

In Abwesenheit von äußeren Quellen und Strömen ($\varrho = 0$, $\vec{j} = 0$) gelten die homogenen Wellengleichungen

$$\Box \Phi = 0 \quad , \tag{4.36}$$

$$\Box \vec{A} = 0 \quad . \tag{4.37}$$

4.3 Eichtransformationen

Wir wollen zunächst aufzeigen, daß wir stets Potentiale finden können, die die Lorentz-Bedingung erfüllen. Wir gehen aus von Potentialen Φ und $\vec{A}$, die nicht die Lorentz-Bedingung erfüllen. Dann führen wir eine Eichtransformation auf neue Potentiale Φ' und $\vec{A}'$ durch, die die Lorentz-Bedingung erfüllen sollen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \quad . \tag{4.38}$$

Damit muß die skalare Funktion Λ die Bedingungsgleichung

$$\vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \tag{4.39}$$

befriedigen. Haben wir hierdurch die skalare Funktion Λ bestimmt, so gilt auch die Lorentz-Bedingung für die Potentiale Φ' und $\vec{A}'$. Die Lorentz-Bedingung bestimmt jedoch nicht eindeutig die Potentiale. Befriedigen Φ und $\vec{A}$ die Lorentz-Eichung, so gilt dies auch für

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \tag{4.40}$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad , \tag{4.41}$$

sofern gilt

$$\vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{4.42}$$

oder

$$\Box \Lambda \left(\vec{r}, t\right) = 0 \quad . \tag{4.43}$$

Die Lorentz-Bedingung bestimmt daher eine ganze Eichklasse.
Eine weitere häufig verwendete Eichung ist die Coulomb-Eichung oder transversale Eichung oder instantane Eichung. Sie ist definiert durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{4.44}$$

Damit lautet (4.25)

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \varrho \tag{4.45}$$

mit der Lösung

$$\Phi \left(\vec{r}, t\right) = \int \frac{\varrho \left(\vec{r'}, t\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} d^3 r' \quad . \tag{4.46}$$

Die Lösung ist das instantane Coulomb-Potetnial $\Phi \left(\vec{r}, t\right)$ durch die Ladungsdichte $\varrho \left(\vec{r}, t\right)$. Die Bezeichnung Coulomb-Eichung ist somit offensichtlich. Das Vektorpotential befriedigt in dieser Eichung die inhomogene Wellengleichung

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad . \tag{4.47}$$

Wir verwenden (4.46) sowie die Kontinuitätsgleichung und schreiben damit um

$$\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\nabla}\int \frac{\frac{\partial}{\partial t}\varrho \left(\vec{r}', t\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} d^3 r' = -\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j} \left(\vec{r}', t\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} d^3 r' \quad . \tag{4.48}$$

Jetzt spalten wir die Stromdichte $\vec{j}$ auf in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_t \tag{4.49}$$

mit den Definitionsgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_l = 0 \quad , \tag{4.50}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = 0 \quad . \tag{4.51}$$

Diese Anteile kann man ausdrücken durch

$$\vec{j}_l = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r' \quad , \tag{4.52}$$

$$\vec{j}_t = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int \frac{\vec{j}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r' \quad . \tag{4.53}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\vec{j}_l+\vec{j}_t &= \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\int \frac{\vec{j}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r'\right)-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2\int \frac{\vec{j}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r' \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\left(\vec{r'},t\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r' \quad .\end{aligned} \tag{4.54}$$

Mit

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} = -4\pi\,\delta\left(\vec{r}-\vec{r'}\right) \tag{4.55}$$

und

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} = -\vec{\nabla}'\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} \tag{4.56}$$

haben wir

$$\begin{aligned}\vec{j}_l+\vec{j}_t &= \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\int \frac{\vec{j}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r'\right)+\vec{j} \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{j}\left(\vec{r'},t\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\right)d^3r'+\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \vec{j}\left(\vec{r'},t\right)\vec{\nabla}'\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,d^3r' \\ &= \vec{j} \quad .\end{aligned} \tag{4.57}$$

Der erste Term in der zweiten Zeile kann mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden, das aber verschwindet. Zusammengefaßt folgt mit (4.48) und (4.52) somit

$$\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 4\pi\vec{j}_l \quad . \tag{4.58}$$

Das Vektorpotential kann daher nach (4.47) vollständig durch den transversalen Strom bestimmt werden.

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_t \quad . \tag{4.59}$$

Dies ist der Ursprung der Bezeichnung transversale Eichung. Die Coulomb-Eichung wird auch häufig in Situationen verwendet, wenn keine Quellen vorliegen. Es gilt dann nach (4.46) $\Phi = 0$ und $\vec{A}$ befriedigt die homogene Wellengleichung

$$\Box\vec{A}\left(\vec{r},t\right) = 0 \quad . \tag{4.60}$$

Für die Felder folgt in diesem Fall

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \tag{4.61}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \tag{4.62}$$

4.4 Energie des elektromagnetischen Feldes

Als eine wichtige Konsequenz der Elektrodynamik wollen wir den Energiesatz der Elektrodynamik behandeln. Dazu betrachten wir zunächst ein punktförmiges Teilchen mit der Ladung q, das im elektromagnetischen Feld die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \tag{4.63}$$

erfährt. Bei der Verschiebung um $d\vec{r}$ leistet das Feld am Teilchen die Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad . \tag{4.64}$$

Dabei wird Feldenergie in kinetische Teilchenenergie umgewandelt. Dies entspricht der Leistung

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \quad . \tag{4.65}$$

Nur der elektrische Anteil der Kraft $\vec{F}$ ist am Energieaustausch zwischen Teilchen und Feld beteiligt. Die magnetische Kraftkomponente leistet keine Arbeit, sie steht stets senkrecht auf der Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}$. Diese Aussage gilt unverändert auch für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\varrho\left(\vec{r},t\right)$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}\left(\vec{r},t\right)$, die im elektromagnetischen Feld die Kraftdichte

$$\vec{f}\left(\vec{r},t\right) = \varrho\left(\vec{r},t\right)\left[\vec{E}\left(\vec{r},t\right) + \frac{v\left(\vec{r},t\right)}{c} \times \vec{B}\left(\vec{r},t\right)\right] \tag{4.66}$$

erfahren. Die Größe $\vec{f}\left(\vec{r},t\right)$ ist eine Kraft pro Volumeneinheit. Die zugehörige Leistungsdichte

$$\vec{f}\left(\vec{r},t\right) \cdot \vec{v}\left(\vec{r},t\right) = \varrho\left(\vec{r},t\right)\vec{E}\left(\vec{r},t\right) \cdot \vec{v}\left(\vec{r},t\right) = \vec{j}\left(\vec{r},t\right) \cdot \vec{E}\left(\vec{r},t\right) \tag{4.67}$$

ist allein durch das elektrische Feld $\vec{E}$ und durch die Stromdichte $\vec{j}$ bestimmt. Die gesamte Arbeitsleistung im Volumen V beträgt somit

$$\frac{dW_V}{dt} = \int\limits_V d^3r\, \vec{j} \cdot \vec{E} \quad . \tag{4.68}$$

Diese Beziehung wollen wir mit Hilfe der Maxwell-Gleichung etwas umformen. Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4.69}$$

resultiert

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \tag{4.70}$$

und damit

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) - \frac{1}{c}\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}\right] \quad . \tag{4.71}$$

Jetzt ist

$$\text{div}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H} \cdot \text{rot}\,\vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot}\,\vec{H} \quad . \tag{4.72}$$

Mit Hilfe des Faradayschen Gesetzes finden wir

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi}\text{div}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) - \frac{1}{4\pi}\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \frac{1}{4\pi}\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} \tag{4.73}$$

und weiter

$$\frac{dW_V}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3r \left[c\ \text{div}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] \quad . \tag{4.74}$$

Per Definition führen wir an dieser Stelle zwei wichtige Größen ein. Wir definieren den Poynting-Vektor $S\left(\vec{r}, t\right)$ durch

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \quad . \tag{4.75}$$

Ferner ist die Energiedichte $\omega(\vec{r}, t)$ des elektromagnetischen Feldes gegeben durch

$$\omega(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right) \quad . \tag{4.76}$$

Auch das Produkt $\vec{B} \cdot \vec{H}$ hat die Dimension einer Energiedichte. Wir betrachten hier nur lineare Medien mit $\epsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$. Dann gilt offensichtlich

$$\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H} \cdot \vec{B}\right) \tag{4.77}$$

und

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \cdot \vec{D}\right) \quad . \tag{4.78}$$

Für die Leistung des Feldes im Volumen V folgt nach diesen Definitionen und Umformungen

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V d^3r\, \vec{j} \cdot \vec{E} = -\int_V d^3r \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}\,\vec{S}\right) \quad . \tag{4.79}$$

Da V beliebig ist, muß die folgende Kontinuitätsgleichung gelten :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}\,\vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad . \tag{4.80}$$

Dies ist das Poyntingsche Theorem. Wir schreiben die Energiebilanz in der folgenden Form um:

$$\frac{d}{dt}\left(W_V^{(\mathrm{mech})} + W_V^{(\mathrm{Feld})}\right) = -\int_{S(V)} d\vec{f}\cdot\vec{S} \quad . \tag{4.81}$$

Hierbei gilt für die Feldenergie im Volumen V

$$\frac{dW_V^{(\mathrm{Feld})}}{dt} = \int_V d^3r\,\frac{\partial\omega}{\partial t} \tag{4.82}$$

Diese Feldenergie wandelt sich partiell in Teilchenenergie und letztlich über Teilchenstöße in Joulesche Wärme um. Es ist

$$\frac{dW_V^{(\mathrm{mech})}}{dt} = \int_V d^3r\,\vec{j}\cdot\vec{E} \quad . \tag{4.83}$$

Der letzte Term beschreibt den Energiestrom durch Strahlung durch die Oberfläche von V, es ist

$$\int_V d^3r \quad \mathrm{div}\,\vec{S} = \int_{S(V)} d\vec{f}\cdot\vec{S} \quad . \tag{4.84}$$

In die bisherigen Überlegungen ging nur $\mathrm{div}\,\vec{S}$ ein. $\vec{S}$ selbst ist damit nicht eindeutig fixiert, denn eine Transformation der Form

$$\vec{S} \to \vec{S} + \mathrm{rot}\,\vec{F} \tag{4.85}$$

ändert $\mathrm{div}\,\vec{S}$ nicht. Es kann also durchaus $\vec{S} \neq 0$ sein, ohne eine Energiestrahlung stattfinden zu lassen. Als Beispiel betrachten wir die homogenen Felder

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E,0,0) \quad , \\ \vec{H} &= (0,0,H) \quad . \end{aligned}$$

Es resultiert

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H}) = \frac{c}{4\pi}(0,-EH,0) \neq 0 \quad . \tag{4.86}$$

Da aber $\mathrm{div}\,\vec{S} = 0$ ist, tritt keine Energiestrahlung durch die Oberfläche von V auf.

4.5 Der Feldimpuls

Wir wollen nun den Impulssatz der Elektrodynamik als weitere wichtige Konsequenz der Maxwell-Gleichungen behandeln. Für ein punktförmiges Teilchen gilt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}^{\,(\mathrm{mech})} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \quad . \tag{4.87}$$

Haben wir ein System von Teilchen in einem Volumen V vorliegen, so gilt für den Gesamtimpuls aller Teilchen in V

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{p}_V^{(\mathrm{mech})} &= \int_V d^3r\,\rho\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\\ &= \int_V d^3r\left(\rho\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right) \quad .\end{aligned} \tag{4.88}$$

Wir eliminieren jetzt ρ und $\vec{j}$ mittels der inhomogenen Maxwell–Gleichungen. Es ist

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot D \quad , \tag{4.89}$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \quad . \tag{4.90}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_V^{(\mathrm{mech})} = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})+(\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}\right] \tag{4.91}$$

Addieren wir noch als nahrhafte Null den Term $(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{H}=0$ und benutzen die Beziehung

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})-\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{4.92}$$

so geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{p}_V^{(\mathrm{mech})} = \quad & \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\,\Big[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})+(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{H}+(\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B}\\ & -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})+\frac{1}{c}\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Big]\end{aligned} \tag{4.93}$$

Setzen wir die Maxwell–Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{p}_V^{(\mathrm{mech})} &= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\,\Big[(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\vec{E}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{H}+(\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B}\\ &- \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})-\vec{D}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\Big]\end{aligned} \tag{4.94}$$

und weiter

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_V^{\,(\mathrm{mech})} + \frac{d}{dt}\frac{1}{4\pi c}\left[\int_V d^3r\,(\vec{D}\times\vec{B})\right] =$$
$$\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{H} + (\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{D}\right] \quad . \tag{4.95}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen betrachten wir das elektromagnetische Feld im Vakuum mit $\epsilon = \mu = 1$, d. h. , es gilt $\vec{E} = \vec{D}$ und $\vec{B} = \vec{H}$. Dann folgt

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_V^{\,(\mathrm{mech})} + \frac{d}{dt}\frac{1}{4\pi c}\left[\int_V d^3r(\vec{E}\times\vec{B})\right] =$$
$$\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E}\right] \quad . \tag{4.96}$$

Das Volumenintegral auf der linken Seite dieser Gleichung kann als der elektromagnetische Feldimpuls im Volumen V verstanden werden. Dabei ist der Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{\vec{S}}{c^2} \tag{4.97}$$

als die räumliche Dichte des Feldimpulses $\vec{p}^{\,(\mathrm{Feld})}$ anzusehen. Sie ist dem Poynting–Vektor $\vec{S}$ mit dem Faktor $\frac{1}{c^2}$ proportional.

$$\frac{1}{4\pi c}\int_V d^3r\,(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{p}_V^{\,(\mathrm{Feld})} = \frac{1}{c^2}\int_V d^3r\,\vec{S} \quad . \tag{4.98}$$

Die Gleichung (4.96) wird durch Einsetzen von $\vec{p}_V^{\,(\mathrm{Feld})}$ zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_V^{\,(\mathrm{mech})} + \vec{p}_V^{\,(\mathrm{Feld})}\right] &= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}\right. \\ &+ \left.(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E}\right] \quad .\end{aligned} \tag{4.99}$$

Der Integrand auf der rechten Seite läßt sich als Divergenz des Maxwellschen Spannungstensors ausdrücken. Um dies aufzuzeigen, benutzen wir für die Darstellung von Divergenz und Rotation die Einsteinsche Summenkonvention, wonach automatisch über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Das Summenzeichen wird dann unterdrückt. Z. B. gilt

$$\sum_i A_i A_i = A_i A_i \quad . \tag{4.100}$$

Ebenso gilt dann in kartesischen Koordinaten

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\vec{F} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad , \tag{4.101}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\vec{F} = \vec{e}_i\times\vec{e}_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad . \tag{4.102}$$

Hierbei ist F ein beliebiges stetiges, differenzierbares Vektorfeld. Wir formen nun den Teil in (4.99) um, der vom elektrischen Feld $\vec{E}$ abhängt. Es ist

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E} &= \left(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)E_k\,\vec{e}_k+\left(\vec{e}_i\times\vec{e}_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\times E_k\,\vec{e}_k \\ &= \left(\delta_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)E_k\,\vec{e}_k+\left(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)E_k\,\vec{e}_j \\ &\quad -\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\vec{e}_j\cdot\vec{e}_kE_k\right)\vec{e}_i \quad . \qquad (4.103)\end{aligned}$$

Wir schreiben weiter für $i,j,k=1,2,3$

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i}\right)E_k\,\vec{e}_k+\delta_{ik}E_k\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\vec{e}_j-\left(E_k\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\delta_{jk}\right)\vec{e}_i \\ &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i}\right)E_k\vec{e}_k+E_i\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\vec{e}_j-E_j\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\vec{e}_i \\ &= \left(E_i\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_j}\right)+E_j\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)-E_j\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)\right)\vec{e}_i \quad .(4.104)\end{aligned}$$

Wir haben dabei ausgenutzt, daß wir wegen der Summation über alle Indizes die einzelnen Indizes in den verschiedenen Termen umbenennen können. Wir betrachten im folgenden nur die i–te Komponente dieses Ausdrucks und nehmen weitere Umformungen vor.

$$\begin{aligned}\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E}\right]_i &= E_i\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_j}\right)+E_j\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)-E_j\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right) \\ =\frac{\partial}{\partial x_j}(E_jE_i)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(E_jE_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_jE_i-\frac{1}{2}\delta_{ij}(E_kE_k)\right) \quad . \qquad (4.105)\end{aligned}$$

Ein völlig analoges Ergebnis bekommen wir für den nur von $\vec{B}$ abhängigen Teil des Integranden von Gleichung (4.99),

$$\left[\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)\vec{B}+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right]_i=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_jB_i-\frac{1}{2}\delta_{ij}(B_kB_k)\right) \quad . \qquad (4.106)$$

Mit diesen Beziehungen können wir den Integranden der Gleichung (4.99) als Divergenz eines Tensors ausdrücken. Es resultiert

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_V^{\,(\mathrm{mech})}+\vec{p}_V^{\,(\mathrm{Feld})}\right]_i=\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_iE_j+B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(E_kE_k+B_kB_k)\right) \quad .(4.107)$$

Wir definieren nun den Maxwellschen Spannungstensor durch

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_k E_k + B_k B_k)\right) \quad . \tag{4.108}$$

Dies ist offensichtlich ein symmetrischer Tensor

$$T_{ij} = T_{ji} \quad . \tag{4.109}$$

Damit können wir zusammenfassend schreiben

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_V^{\,(\mathrm{mech})} + \vec{p}_V^{\,(\mathrm{Feld})}\right]_i = \int_V d^3r\, \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad . \tag{4.110}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes kann das Volumenintegral formal in ein Flächenintegral umgeschrieben werden,

$$\int_V d^3r\, \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \int_{S(V)} dF\, T_{ij}\, n_j \quad . \tag{4.111}$$

Damit bekommen wir als Erhaltungssatz für den linearen Impuls

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_V^{\,(\mathrm{mech})} + \vec{p}_V^{\,(\mathrm{Feld})}\right]_i - \int_{S(V)} dF\, T_{ij}\, n_j = 0 \quad . \tag{4.112}$$

Liegt die Fläche F in einem vom Feld abgeschirmten Gebiet oder im Unendlichen, so verschwindet das Oberflächenintegral. Wir lernen daraus, daß nicht der mechanische Impuls allein, sondern als Gesamtimpuls nur die Summe aus mechanischem Impuls und Feldimpuls erhalten wird.
Im allgemeinen verschwindet die Größe $-T_{ij}n_j$ nicht, sie repräsentiert die i–te Komponente des Impulsflusses durch die Eiheitsfläche. Impulsfluß ist der Impuls pro Sekunde durch die Flächeneinheit, es ist also eine zeitliche Änderung des Impulses pro Flächeneinheit. Damit läßt sich der Ausdruck $-T_{ij}n_j\Delta F$ als die i–te Komponente einer Kraft

$$K_i = -T_{ij}\, n_j\, \Delta F \tag{4.113}$$

auf das Flächenelement verstehen. Wird die Strahlung z. B. an dem geschwärzten Flächenelement $d\vec{F} = dF\,\vec{n}$ absorbiert, so wird von der Strahlung auf die Fläche ΔF die Kraft

$$\vec{K}\cdot\vec{n} = K_i\, n_i = -T_{ij}\, n_j\, n_i\, \Delta F \tag{4.114}$$

ausgeübt. Damit ist das Gesamtsystem, bestehend aus mechanischen Kräften, Feldkräften und Kräften, die das Feld auf seine Berandung ausübt, im Gleichgewicht. Bilden wir die Kraft pro Flächeneinheit, so finden wir als Strahlungsdruck

$$P_{\mathrm{Strahl}} = \frac{\vec{K}\cdot\vec{n}}{\Delta F} = -T_{ij}\, n_i\, n_j \quad . \tag{4.115}$$

Durch eine elektromagnetische Strahlung wird neben der Energie auch Impuls von einer Strahlungsquelle auf einen Absorber übertragen. Auf dem Absorber kann dann die zeitliche Änderung dieses Impulses per Flächeneinheit gemessen werden. So ist z. B. der Schweif der Kometen ein augenfälliger Effekt des Strahlungsdrucks.

5 Ebene Wellen

5.1 Felder im Vakuum

Wir wollen nun elektromagnetische Wellen im Vakuum behandeln. Wir gehen von den Maxwell-Gleichungen aus, um zeitlich und räumlich rasch wechselnde elektromagnetische Felder zu diskutieren. Wir beschränken uns zunächst dabei auf Felder im Vakuum. Wir setzen also $\vec{D} = \vec{E}$ und $\vec{B} = \vec{H}$. Ferner gehen wir von der Annahme aus, daß die äußeren Ladungsdichten und Ströme verschwinden, d.h. $\varrho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Dann lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \tag{5.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{5.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \tag{5.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \tag{5.4}$$

Aus diesem Gleichungssystem können wir jeweils entweder $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ eliminieren. Wir bilden die Rotation von (5.1),

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \quad . \tag{5.5}$$

In diese Gleichung setzen wir (5.2) ein, es folgt

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad . \tag{5.6}$$

Wieder verwenden wir die Vektoridentität

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \triangle \vec{B} \tag{5.7}$$

sowie (5.4). Damit resultiert

$$\triangle \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{5.8}$$

In der gleichen Weise können wir $\vec{B}$ eliminieren, und wir erhalten ebenso

$$\triangle \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{5.9}$$

Die beiden Vektoren $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen demnach dieselbe Wellengleichung. Die homogene Wellengleichung wird von jeder Funktion der Form

$$\psi\left(\vec{r},t\right)=f_{-}\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)+f_{+}\left(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t\right) \tag{5.10}$$

gelöst, wobei f_{-} und f_{+} hinreichend oft differenzierbare, ansonsten aber beliebige Funktionen der Phase

$$\varphi_{\mp}\left(\vec{r},t\right)=\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t \tag{5.11}$$

sind. Hierbei steht $\psi\left(\vec{r},t\right)$ repräsentativ für jede Komponente von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$, und es gilt

$$\Box\psi\left(\vec{r},t\right)=0 \quad . \tag{5.12}$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $\omega\geq 0$, da durch den Ansatz (5.10) bereits beide Vorzeichen impliziert sind. Allerdings ist (5.10) nur dann eine Lösung, wenn zwischen ω und k eine bestimmte Relation erfüllt ist, die man auch Dispersionsrelation nennt. Diese Relation finden wir durch Einsetzen der Lösung in die Wellengleichung. Es ist

$$\begin{aligned}\triangle\psi &= k^{2}\psi'' \quad , &(5.13)\\ \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\psi &= \omega^{2}\psi'' \quad . &(5.14)\end{aligned}$$

Hierbei ist mit ψ'' die zweite Ableitung nach der Phase $\varphi_{\mp}$, also dem vollen Argument, gemeint. Die Wellengleichung hat damit die Gestalt

$$\left(k^{2}-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right)\psi''\left(\vec{r},t\right)=\left(k^{2}-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right)\left(\frac{d^{2}f_{-}}{d\varphi_{-}^{2}}+\frac{d^{2}f_{+}}{d\varphi_{+}^{2}}\right)=0 \quad . \tag{5.15}$$

Dies wird gelöst durch

$$\omega=ck \quad . \tag{5.16}$$

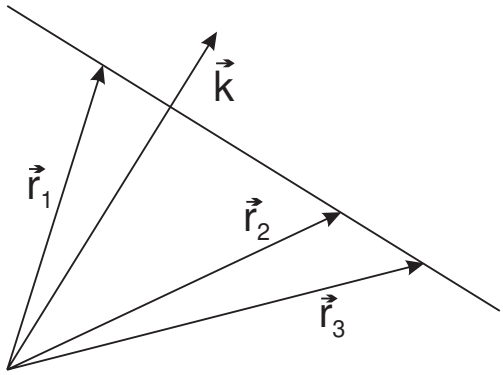
Zur weiteren Diskussion der Lösung beschränken wir uns zunächst auf die Teillösung f_{-}. Bei konstanter Phase $\varphi_{-}\left(\vec{r},t\right)$ ist offensichtlich auch f_{-} konstant, d.h. Flächen gleicher Phase sind auch Flächen konstanter f_{-}-Werte. Betrachten wir eine Momentaufnahme bei $t=t_{0}$,

$$\varphi_{-}\left(\vec{r},t_{0}\right)=\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t_{0} \quad , \tag{5.17}$$

so ist die Fläche konstanter Phase φ_{-} durch die Bedingung

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=\text{const.} \tag{5.18}$$

definiert.



Das ist die Gleichung einer Ebene senkrecht zu $\vec{k}$, diese Ebene kann als Wellenfront betrachtet werden. Für alle Punkte $\vec{r}$ mit gleicher Projektion $\vec{k} \cdot \vec{r}$ auf die Richtung von $\vec{k}$ hat f_- denselben Wert.
Jetzt betrachten wir den gesamten Raum-Zeit-Ablauf. Dann lautet die Bedingung für die Bewegung einer Ebene konstanter Phase $\varphi_-^{(0)}$,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k r_{\|} - \omega t = \varphi_-^{(0)} = \text{const.} \tag{5.19}$$

und daher

$$r_{\|} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{k}}{k} = \frac{\varphi_-^{(0)}}{k} + \frac{\omega}{k} t \quad . \tag{5.20}$$

Diese Ebene bewegt sich offensichtlich mit der Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dr_{\|}}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \tag{5.21}$$

in die Richtung von $\vec{k}$. $\vec{k}$ heißt deshalb auch Ausbreitungsvektor. Die Teillösung $f\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$ beschreibt also die Ausbreitung einer Störung mit ebenen Fronten in Richtung von $\vec{k}$ mit der Phasengeschwindigkeit c. $f_+\left(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t\right)$ drückt dann die entsprechende Bewegung in $\left(-\vec{k}\right)$-Richtung aus. f_- und f_+ können speziell periodische Funktionen sein, also z.B.

$$f_-\left(\vec{r}, t\right) = A\, e^{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \quad , \tag{5.22}$$

$$f_+\left(\vec{r}, t\right) = B\, e^{i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t\right)} \tag{5.23}$$

Räumlich-zeitlich periodische Funktionen, bei denene für feste Werte t die Punkte gleicher Phase eine Ebene bilden, nennt man ebene Wellen. Wir verwenden hier wieder die zweckmäßige komplexe Schreibweise. Dennoch müssen wir deutlich betonen, daß der physikalisch relevante Anteil nur der Realteil ist. Für eine feste Zeit gilt als Periodizitätsbedingung für die Abstandsvektoren

$$\Delta\vec{r}_n \cdot \vec{k} = 2\pi n \tag{5.24}$$

mit $n \in \mathcal{Z}$. Der Abstand zwischen nächstbenachbarten Wellenfronten mit denselben $f_\pm$-Wert ist die Wellenlänge,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad . \tag{5.25}$$

$\vec{k}$ nennt man auch den Wellenvektor. Halten wir statt der Zeit den Ort fest, d.h. betrachten wir von einem festen Raumpunkt $\vec{r}_0$ aus, so ändert sich $f_\pm$ dort mit der Zeit t, erreicht aber nach der Zeit

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.26}$$

wieder den ursprünglichen Wert. τ heißt deshalb Periode oder Schwingungsdauer. Daraus ergibt sich die Frequenz ν der Schwingung,

$$\nu = \frac{1}{\tau} \tag{5.27}$$

und die Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi\nu \quad . \tag{5.28}$$

Die Kombination von (5.21), (5.25) und (5.26) führt auf

$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau} \quad . \tag{5.29}$$

Wir wollen jetzt diese allgemeinen Resultate auf das elektromagnetische Feld übertragen. Als Lösungen finden wir

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \quad , \tag{5.30}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t\right)} \quad . \tag{5.31}$$

Die elektromagnetischen Felder erfüllen nicht nur die homogene Wellengleichung, sondern auch die Kopplungen in den Maxwell-Gleichungen. Aus $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$ folgt

$$i\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} = i\frac{\omega'}{c}\vec{B}_0\, e^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t\right)} \quad . \tag{5.32}$$

Dies soll für alle Raum-Zeit-Punkte gültig sein. Daher müssen wir offensichtlich fordern

$$\omega = \omega' \quad , \tag{5.33}$$

$$\vec{k} = \vec{k}' \quad . \tag{5.34}$$

Es bleibt noch

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0 \quad . \tag{5.35}$$

Aus $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ folgt

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \quad . \tag{5.36}$$

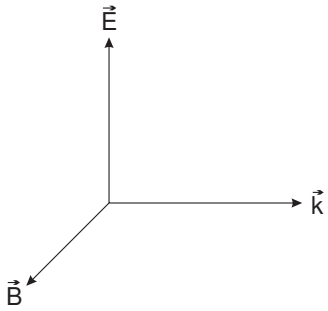
Aus $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ folgt

$$\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \quad . \tag{5.37}$$

Schließlich bleibt noch rot$\vec{B} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$,

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c}\vec{E}_0 \quad . \tag{5.38}$$

Die Vektoren $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$ bilden ein orthogonales Rechtssystem. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stehen immer und überall senkrecht auf $\vec{k}$ und aufeinander. Man spricht daher auch von transversalen Wellen.



Wir nehmen ferner an, daß der Wellenvektor $\vec{k}$ in z-Richtung zeigt,

$$\vec{k} = k\,\vec{e}_z \quad . \tag{5.39}$$

Dann lautet die Lösung der Maxwell-Gleichung, die gleichzeitig die Wellengleichung befriedigt,

$$\vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)} \quad , \tag{5.40}$$

$$\vec{B} = (-E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)} \quad . \tag{5.41}$$

Die endgültige Form der Welle ist durch E_{0x} und E_{0y} festgelegt. Dies können jedoch in der Regel komplexe Größen sein. Als ein Beispiel betrachten wir die physikalischen Lösungen für reelles E_{0x} und $E_{0y} = 0$. Es folgt

$$\vec{E} = E_{0x}\cos(kz - \omega t)\,\vec{e}_x \quad , \tag{5.42}$$

$$\vec{B} = E_{0x}\cos(kz - \omega t)\,\vec{e}_y \quad . \tag{5.43}$$

Wir kehren in unseren Betrachtungen zurück zur Dispersionsrelation. Wir hatten gefunden

$$\omega = ck \tag{5.44}$$

oder

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad . \tag{5.45}$$

Wir gehen zu einer vierdimensionalen Schreibweise über und führen den vierdimensionalen Vektor

$$k_\mu = \left(\vec{k}, i\frac{\omega}{c}\right) \tag{5.46}$$

ein. Das Quadrat

$$\sum_{\mu=1}^{4} k_\mu k_\mu = k_\mu k_\mu = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{5.47}$$

entspricht gerade der Dispersionsrelation. Ebenso schreiben wir

$$x_\mu = (\vec{r}, ict) \tag{5.48}$$

und den Vierergradienten

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial\,(ict)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial\,(ict)}\right) \quad . \tag{5.49}$$

Damit können wir für den d'Alembert-Operator schreiben

$$\Box\psi\,(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi\,(\vec{r}, t) \quad . \tag{5.50}$$

Für die Wellengleichung für $f_-\,(\vec{r}, t)$ resultiert in dieser Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} f_-\,(k_\nu x_\nu) = k_\mu k_\mu f_- \quad . \tag{5.51}$$

Ferner wollen wir uns noch einmal die Wirkung der Ableitungsoperatoren auf die ebenen Wellen anschauen. Wir gehen aus von

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \tag{5.52}$$

und bilden die Divergenz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{E}_0\cdot\vec{\nabla}\left(e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}\right) = \vec{E}_0\cdot\left(i\vec{k}\right) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \quad . \tag{5.53}$$

Bei der zeitlichen Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{E}_0\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}\right) = \vec{E}_0\,(-i\omega)\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \quad . \tag{5.54}$$

Die Wirkung der Operatoren $\vec{\nabla}$ und $\partial/\partial t$ können wir also durch die Substitutionen ersetzen

$$\vec{\nabla} \quad \longrightarrow \quad i\vec{k} \quad , \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad -i\omega \quad . \tag{5.56}$$

Wir wollen uns als nächstes die Energie- und Impulsverhältnisse einer ebenen Welle anschauen. Die Energiedichte des elektromagnetischen Felds ergibt sich aus dem zeitlichen Mittel der Summe der Quadrate der Feldstärke $\vec{E}$ und der magnetischen Induktion $\vec{B}$. Bei der Berechnung dieser Quadrate müssen wir beachten, daß nur die Realteile von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ quadriert werden müssen. Wir gehen aus von dem Mittelwert

$$\overline{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2} \quad . \tag{5.57}$$

Damit resultiert für die Energiedichte einer monochromatischen, ebenen Welle

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{8\pi}\left(\overline{\vec{E}^2}+\overline{\vec{B}^2}\right)\\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}_0^2\,\overline{\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}+\vec{B}_0^2\,\overline{\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)\\ &= \frac{1}{16\pi}\left(E_0^2+B_0^2\right)=\frac{1}{8\pi}E_0^2 \quad .\end{aligned} \tag{5.58}$$

Für den den Energiefluß beschreibenden Poynting-Vektor elektromagnetischer Wellen bekommen wir

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}} &= \frac{c}{4\pi}\overline{\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)}=\frac{c}{4\pi}\,\overline{\vec{E}^2}\,\frac{\vec{k}}{k}\\ &= \frac{c}{4\pi}E_0^2\,\overline{\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\frac{\vec{k}}{k}=\frac{c}{8\pi}E_0^2\frac{\vec{k}}{k}=c\omega\frac{\vec{k}}{k}\end{aligned} \tag{5.59}$$

Der Energiefluß einer elektromagnetischen Welle pro Flächeneinheit verläuft demnach in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$.
Weiter wollen wir für ebene Wellen die folgende Eigenschaft deutlich festhalten:

$$\vec{E}\perp\vec{B} \tag{5.60}$$

sowie

$$\vec{E}\perp\vec{k} \quad \text{und} \quad \vec{B}\perp\vec{k} \quad . \tag{5.61}$$

In der Quantenmechanik gilt für die Energie einer ebenen Welle

$$E=\hbar\omega \tag{5.62}$$

und für den Impuls

$$\vec{p}=\hbar\vec{k} \tag{5.63}$$

Hierbei ist

$$\hbar=\frac{h}{2\pi} \tag{5.64}$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum h. Der numerische Wert von $\hbar$ beträgt

$$\hbar = 6.582173\cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeVs} \quad . \tag{5.65}$$

Mit dem Zusammenhang $\omega^2=\vec{k}^2c^2$ folgt in der Quantenmechanik

$$E^2=\vec{p}^{\,2}c^2 \quad . \tag{5.66}$$

Erinnern wir uns an den relativistischen Energiesatz der Mechanik

$$E^2=\vec{p}^{\,2}c^2+m_0^2c^4 \quad , \tag{5.67}$$

so entspricht (5.66) dem relativistischen Energiesatz für ein Teilchen der Ruhemasse $m_0 = 0$.
Transversale Wellen haben als weiteres Charakteristikum eine Polarisation, die wir nun besprechen wollen. Die ebene Welle als Lösung der Maxwell-Gleichung repräsentiert die räumliche Ausbreitung einer harmonischen Schwingung. Offensichtlich ist die elektromagnetische Welle allein durch den $\vec{E}$-Vektor vollständig bestimmt.
Zunächst konstatieren wir, daß es sich bei den Koeffizienten E_{0x} und E_{0y} im allgemeinen um komplexe Größen handelt,

$$E_{0x} = |E_{0x}|\, e^{i\varphi} \quad , \tag{5.68}$$

$$E_{0y} = |E_{0y}|\, e^{i(\varphi+\delta)} \quad . \tag{5.69}$$

Dann folgt für das reelle, physikalische $\vec{E}$-Feld

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \tag{5.70}$$

mit

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad , \tag{5.71}$$

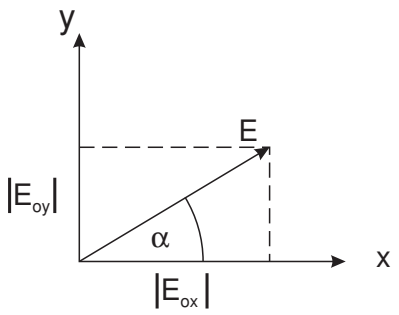
$$E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \varphi + \delta) \quad . \tag{5.72}$$

Bezüglich der relativen Phase δ können wir nun mehrere Fälle unterscheiden:

1. $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$
   Dann gilt

   $$\vec{E} = (|E_{0x}|\, \vec{e}_x \pm |E_{0y}|\, \vec{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad . \tag{5.73}$$

   Der Koeffizient vor der Cosinusfunktion ist ein orts- und zeitunabhängiger Vektor. Dies impliziert, daß die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ relativ zur Ausbreitungsrichtung in einer festen Richtung schwingt.



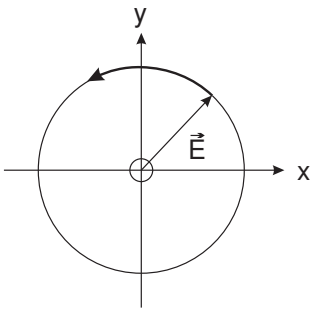
   Man nennt diese Welle linear polarisiert und die Richtung von $\vec{E}$ die Polarisationsrichtung. Sie ist um den Winkel α gegen die x-Achse geneigt

   $$\tan\alpha = \pm\frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} \quad . \tag{5.74}$$

2. $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$; $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$.
In diesem Fall folgt

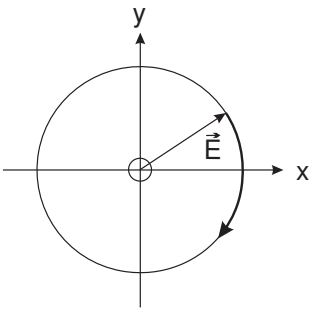
$$\vec{E} = E\left[\cos\left(kz - \omega t + \varphi\right)\vec{e}_x \mp \sin\left(kz - \omega t + \varphi\right)\vec{e}_y\right] \quad . \tag{5.75}$$

Das obere Zeichen gilt für $\delta = +\pi/2$; das untere für $\delta = -\pi/2$. Für einen festen Raumpunkt z stellt die Klammer die Parameterdarstellung des Einheitskreises dar. Der $\vec{E}$-Vektor durchläuft als Funktion der Zeit einen Kreis mit dem Radius E mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Man nennt diese Welle deshalb zirkular polarisiert. Je nach Vorzeichen von δ wird der Kreis in einer der beiden möglichen Richtungen durchlaufen. Für $\delta = +\frac{\pi}{2}$ sprechen wir von rechts-zirkular, für $\delta = -\frac{\pi}{2}$ von links-zirkular. In den folgenden Figuren zeigt der $\vec{k}$-Vektor senkrecht aus der Zeichenebene heraus.



œ[0,5cm]

rechts-zirkular: $\delta = +\frac{\pi}{2}$



links-zirkular: $\delta = -\frac{\pi}{2}$

3. $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$; $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$
In diesem Fall haben wir

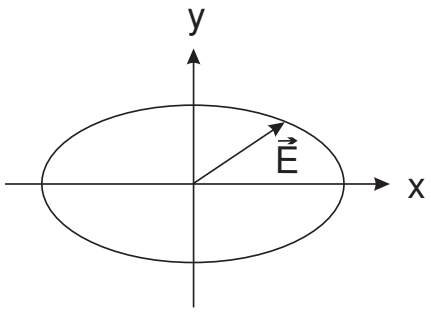
$$E_x = |E_{0x}|\cos\left(kz - \omega t + \varphi\right) \quad , \tag{5.76}$$

$$E_y = \mp|E_{0y}|\sin\left(kz - \omega t + \varphi\right) \quad . \tag{5.77}$$

Damit gilt auch

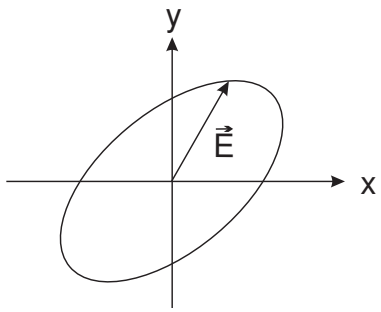
$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1 \quad . \tag{5.78}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$, die in x- bzw. y-Richtung liegen. Man spricht in diesem Fall von elliptisch polarisierten Wellen



Der $\vec{E}$-Vektor durchläuft eine elliptische Spirale, seine Amplitude ist offensichtlich nicht mehr konstant.

4. δ ist beliebig; $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$
   Dies ist der allgemeinste Fall, in dem die Ellipse, bezogen auf das xy-Achsenkreuz, verdreht ist. Auch diese Welle nennt man elliptisch polarisiert.



Jede beliebige, elliptisch polarisierte Welle läßt sich als Basis aus zwei senkrecht zueinander linear polarisierten Wellen aufbauen. Auch mit zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen läßt sich jede elliptisch polarisierte Welle aufbauen. Um dies zu zeigen, verwenden wir komplexe Vektoren

$$\vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y\right) \quad . \tag{5.79}$$

Wir können nach den Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ auflösen,

$$\vec{e}_x \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_+ + \vec{e}_-\right) \quad , \tag{5.80}$$

$$\vec{e}_y = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_+ - \vec{e}_- \right) \quad . \tag{5.81}$$

Damit gilt

$$E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(E_{0x} - iE_{0y} \right) \vec{e}_+ + \left(E_{0x} + iE_{0y} \right) \vec{e}_- \right] \quad . \tag{5.82}$$

Die Größen in der Klammer sind komplex. Komplexe Größen können wir als Betrag mal Phasenfaktor darstellen. Wir schreiben

$$E_{0x} \pm iE_{0y} = E_\pm e^{i\gamma_\pm} \quad . \tag{5.83}$$

E_+ und E_- sind reell. Dann läßt sich auch die ebene Welle darstellen als

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[E_- e^{i(kz-\omega t+\gamma_-)} \vec{e}_+ + E_+ e^{i(kz-\omega t+\gamma_+)} \vec{e}_- \right] \tag{5.84}$$

Für den physikalischen Realteil resultiert

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\vec{E} &= \frac{1}{2} E_- \left[\cos\left(kz - \omega t + \gamma_- \right) \vec{e}_x - \sin\left(kz - \omega t + \gamma_- \right) \vec{e}_y \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} E_+ \left[\cos\left(kz - \omega t + \gamma_+ \right) \vec{e}_x + \sin\left(kz - \omega t + \gamma_+ \right) \vec{e}_y \right] \quad . \end{aligned} \tag{5.85}$$

Dies ist die Summe zweier entgegengesetzt zirkular polarisierter Wellen mit unterschiedlichen Amplituden.

5.2 Wellenpakete

Als allgemeine Lösung der Wellengleichung hatten wir Ausdrücke der Form $f_\pm \left(kz \pm \omega t \right)$ abgeleitet. Die Ausbreitungsrichtung liege in z-Richtung. Bezüglich der Phasengeschwindigkeit gilt der Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz ω und dem Betrag des Wellenvektors k,

$$c = \frac{\omega}{k} \quad . \tag{5.86}$$

Ist k festgelegt, so gilt dies auch für ω. Dies bedeutet aber auch, daß jede lineare Überlagerung von $f_\pm$ zu verschiedenen k die Wellengleichung löst, falls nur die angegebene Dispersionsrelation erfüllt ist. Eine allgemeine Lösung ist demnach

$$F_\pm \left(z, t \right) = \int_{-\infty}^{\infty} a\left(k \right) f_\pm \left(kz \pm \omega t \right) dk \tag{5.87}$$

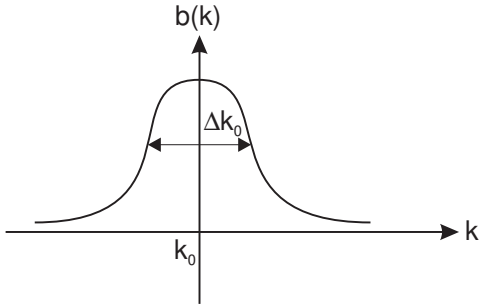
mit einer beliebigen Gewichtsfunktion $a\left(k \right)$. Bislang haben wir monochromatische ebene Wellen diskutiert, dies sind Wellen mit fixiertem (k, ω). Jedoch sendet keine Quelle perfekt monochromatische Wellen aus, sondern vielmehr ein mehr oder weniger scharfes Frequenzbündel. In dispersiven Medien gilt für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r \left(\omega \right) \quad . \tag{5.88}$$

Die Phasengeschwindigkeit u in diesen Medien ist nicht mehr die Lichtgeschwindigkeit ($u \neq c$). Man kann keine einheitliche Phasengeschwindigkeit mehr angeben. Wir wollen nun gewichtete Überlagerungen von ebenen Wellen diskutieren,

$$H_{\pm}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k)\, e^{i(kz \pm \omega t)} dk \quad . \tag{5.89}$$

Die Gewichtsfunktion $b(k)$ möge eine gewisse Bandbreite Δk_0 um einen Zentralwert k_0 aufweisen.



Der Hauptbeitrag zum Integral (5.89) folgt aus dem Wellenvektor-Bereich Δk_0. Wir machen nun eine Taylor-Entwicklung von $\omega(k)$ um k_0,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \cdots \quad . \tag{5.90}$$

Wir schreiben $\omega_0 = \omega(k_0)$ und definieren die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \quad . \tag{5.91}$$

In dispersionsfreien Medien ist die Gruppengeschwindigkeit gleich der Phasengeschwindigkeit. Beispielsweise folgt aus $\omega = kc$ die Gruppengeschwindigkeit $d\omega/dk = c$. Wir setzen die Taylor-Entwicklung in die ebenen Wellen ein,

$$e^{i(kz \pm \omega t)} = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} e^{iq(z \pm v_g t)} + \cdots \tag{5.92}$$

mit

$$q = k - k_0 \quad . \tag{5.93}$$

Wir brechen die Taylor-Entwicklung nach dem linearen Term ab. Für die Überlagerung von ebenen Wellen bekommen wir dann

$$\begin{aligned} H_{\pm}(z,t) &\approx e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dq\, b(k_0 + q)\, e^{iq(z \pm v_g t)} \\ &= e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \tilde{H}_{\pm}(z \pm v_g t) \quad . \end{aligned} \tag{5.94}$$

Das ist eine ebene Welle, deren Wellenlänge und Frequenz dem Maximum der Verteilung $b(k)$ entsprechen, moduliert mit einer orts- und zeitabhängigen Funktion $\tilde{H}_{\pm}$. Diese Modulationsfunktion bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_g in z-Richtung. Eine konstante Modulationsphase

$$z \pm v_g t = \text{const.} \tag{5.95}$$

impliziert

$$\frac{dz}{dt} = \mp v_g \quad . \tag{5.96}$$

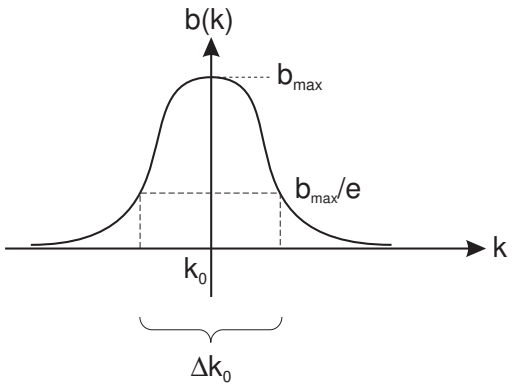
Eine derart modulierte ebene Welle nennt man ein Wellenpaket. Das Paket bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g.
Als Beispiel betrachten wir als spezielles Wellenpaket ein Gaußsches Wellenpaket. Die Gewichtsfunktion $b(k)$ sei durch eine Gaußverteilung gegeben

$$b(k) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{4\,(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right) \quad . \tag{5.97}$$

Bei $k = k_0$ liege das Maximum

$$b_{\max} = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \quad . \tag{5.98}$$

Die Funktion ist symmetrisch um k_0.



Die Fläche unter dieser Kurve ist stets 1. Das wollen wir nachweisen. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk\; b(k) &= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\; \exp\left(-\frac{4\,(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} I \end{aligned} \tag{5.99}$$

mit

$$y = 2(k-k_0)/\Delta k_0 \tag{5.100}$$

und

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-y^2} \quad . \tag{5.101}$$

Zur Auswertung von I verwenden wir den folgenden Trick

$$\begin{aligned} I^2 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 2\pi \int\limits_{0}^{\infty} d\varrho\ \varrho\, e^{-\varrho^2} \\ &= -\frac{1}{2}2\pi \int\limits_{0}^{\infty} d\varrho\ \frac{d}{d\varrho}\, e^{-\varrho^2} = \pi \quad . \end{aligned} \tag{5.102}$$

Somit folgt

$$I = \sqrt{\pi} \tag{5.103}$$

und weiter

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\ b(k) = 1 \quad . \tag{5.104}$$

Damit liegt mit (5.97) eine mögliche Grenzwert-Darstellung für die Dirac'sche δ-Funktion vor,

$$\delta\left(k - k_0\right) = \lim_{\Delta k_0 \to 0} b(k) \quad . \tag{5.105}$$

Wir setzen nun die Gauß-Funktion $b(k)$ in die Modulationsfunktion $\tilde{H}_{\pm}$ ein,

$$\tilde{H}_{\pm}\left(z \pm v_g t\right) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\ e^{-\left(4q^2/\Delta k_0^2\right)} e^{iq\left(z \pm v_g t\right)} \quad . \tag{5.106}$$

Wir schreiben das Argument der Exponentialfunktion um,

$$4q^2/\Delta k_0^2 - iq\left(z \pm v_g t\right) = \left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0\left(z \pm v_g t\right)\right)^2 + \frac{\Delta k_0^2}{16}\left(z \pm v_g t\right)^2 \quad . \tag{5.107}$$

Jetzt substituieren wir

$$y = \frac{2q}{\Delta k} - \frac{i}{4}\Delta k_0\left(z \pm v_g t\right) \quad . \tag{5.108}$$

Dies erlaubt es uns, das Gauß–Integral auszuführen. Es resultiert

$$\widetilde{H}_{\pm}(z \pm v_g t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, I\, e^{-(\Delta k_0^2/16)(z \pm v_g t)^2} \tag{5.109}$$

Es folgt somit insgesamt

$$H_{\pm}(z,t) = e^{i\left(k_0 z \pm \omega_0 t\right)} e^{-(\Delta k_0^2/16)(z \pm v_g t)^2}. \tag{5.110}$$

Dies ist eine ebene Welle, deren Amplitude Gauß–förmig von $(z \pm v_g t)$ abhängt. Die Gauß–Glocke bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_g in $\mp z$–Richtung. Man spricht von einem aperiodischen Wellenzug. Die Gauß–Kurve ist die Einhüllende. Die Breite des Wellenpaketes ist gegeben durch

$$\Delta z \quad = \quad \frac{8}{\Delta k_0}. \tag{5.111}$$

Dies impliziert auch

$$\Delta z \cdot \Delta k_0 \quad = \quad \text{const.} \tag{5.112}$$

Je breiter die k–Verteilung, desto schmaler die z–Verteilung des Wellenpakets und umgekehrt. Eine scharf lokalisierte Verteilung im k–Raum mit $b(k) = \delta(k - k_0)$, also $\Delta k_0 \to 0$, bedeutet im Ortsraum eine nicht–modulierte ebene Welle

$$H_{\pm}(z,t) \quad \underset{\Delta k_0 \to 0}{\longrightarrow} \quad e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}. \tag{5.113}$$

Eine ebene Welle ist im Ortsraum nicht lokalisierbar.
Für $\Delta k_0 \to \infty$ wird Δz sehr klein, und damit ist die Welle räumlich scharf lokalisiert. Die Verteilung im k–Raum ist damit völlig verschmiert.
Die Ausbreitung der Welle ist durch zwei Ausbreitungsgeschwindigkeiten charakterisiert, nämlich durch die Phasengeschwindigkeit

$$u \quad = \quad \frac{\omega(k)}{k} \tag{5.114}$$

(In dem von uns studierten Fall galt $u = c$) und durch die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g \quad = \quad \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k} \quad . \tag{5.115}$$

Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Ausbreitung einer ebenen Welle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Wellenpakets ist die Gruppengeschwindigkeit. Mit der Gruppengeschwindigkeit werden Informationen oder Signale übertragen. Aus der speziellen Relativitätstheorie wissen wir, daß für die Gruppengeschwindigkeit als Maximalwert die Lichtgeschwindigkeit c gilt,

$$v_g \quad \leq \quad c \quad . \tag{5.116}$$

Man spricht von Dispersion, wenn gilt $u \neq v_g$.

5.3 Kugelwellen

Die ebenen Wellen repräsentieren eine wichtigen Lösungstyp der homogenen Wellengleichung. Eine andere Klasse von Lösungen bilden die Kugelwellen. Hierzu stellen wir den Laplace–Operator in Kugelkoordinaten dar:

$$\Delta \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta\varphi} \tag{5.117}$$

mit

$$\Delta_{\vartheta\varphi} \;=\; \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad . \tag{5.118}$$

Wir gehen jetzt von kugelsymmetrischen Lösungen aus $\Psi(\vec{r},t)=\Psi(r,t)$. Dies bedeutet

$$\Delta_{\vartheta\varphi}\Psi \;=\; 0 \quad . \tag{5.119}$$

Die Wellengleichung lautet damit

$$\Box\Psi \;=\; \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Psi \;=\; 0 \quad . \tag{5.120}$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) \;&=\; \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\Psi\right) \;=\; r\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+2\,\frac{\partial\Psi}{\partial r}\\ &=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\end{aligned} \tag{5.121}$$

sowie

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Psi)\,. \tag{5.122}$$

Nun substituieren wir

$$v(r,t) \;=\; r\,\Psi(r,t) \tag{5.123}$$

und bekommen somit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)v(r,t) \;=\; 0. \tag{5.124}$$

Diese Differentialgleichung wird von allen Funktionen des Typs

$$v(r,t) \;=\; v_+(kr+\omega t)+v_-(kr-\omega t) \tag{5.125}$$

gelöst, sofern gilt

$$k^2 \;=\; \frac{\omega^2}{c^2} \tag{5.126}$$

oder

$$\omega \;=\; kc \quad . \tag{5.127}$$

Damit haben wir als zweite Klasse von Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\Psi(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{r}\left[v_+(kr+\omega t)+v_-(kr-\omega t)\right] \quad . \tag{5.128}$$

Die Phase

$$\varphi_\pm \;=\; kr \pm \omega t \tag{5.129}$$

hängt nur vom Betrag des Ortsvektors r ab. Zu einer festen Zeit $t = t_0$ sind die Punkte gleicher Phase und damit gleicher Ψ–Werte solche gleichen Abstands vom Ursprung. Sie liegen damit auf Kugelflächen vom Radius r. Die Amplitude nimmt mit wachsendem Abstand vom Ursprung gemäß $1/r$ ab.
Falls $v_\pm(kr \pm \omega t)$ zusätzlich periodisch ist, also z. B.

$$v_\pm \;=\; A_\pm\, e^{i(kr\pm\omega t)} \tag{5.130}$$

spricht man von Kugelwellen,

$$\Psi_\pm(\vec{r},t) \;=\; \frac{A_\pm}{r}\, e^{i(kr\pm\omega t)}. \tag{5.131}$$

Wieder folgt für die Phasengeschwindigkeit der Wert c. Die Lösung (5.131) stellt die Ausbreitung einer Störung mit kugelförmigen Wellenfronten dar. Gilt für die Wellenfront

$$r(t) \;=\; r_0 - ct \quad , \tag{5.132}$$

so sprechen wir von einer einlaufenden Kugelwelle, gilt hingegen

$$r(t) \;=\; r_0 + ct \quad , \tag{5.133}$$

so sprechen wir von einer auslaufenden Kugelwelle.

5.4 Fourier–Integrale

Wir hatten bereits die Fourier–Reihe einer quadrat–integrablen Funktion $f(x)$ behandelt,

$$f(x) \;=\; f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right)\right] \tag{5.134}$$

mit

$$f_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \tag{5.135}$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right)\,\mathrm{d}x \quad , \tag{5.136}$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{5.137}$$

Mit der Definition

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(i\,\frac{n\pi}{a}\,x\right) \tag{5.138}$$

mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und den Eulerschen Formeln können wir schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_n(x) + v_{-n}(x)) \quad , \tag{5.139}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(v_n(x) - v_{-n}(x)) \quad . \tag{5.140}$$

Auch die $v_n(x)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Wir untersuchen

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{+a} v_n^*(x)\,v_m(x)\,\mathrm{d}x \overset{(n\neq m)}{=} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} e^{-i(\pi/a)(n-m)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\cos\left[\frac{\pi}{a}(n-m)x\right]\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2a}\int_{-a}^{+a}\sin\left[\frac{\pi}{a}(n-m)x\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi(n-m)}\,\sin\left(\frac{\pi}{a}(n-m)x\right)\Big|_{-a}^{+a} + \frac{i}{2\pi(n-m)}\,\cos\left(\frac{\pi}{a}(n-m)x\right)\Big|_{-a}^{+a} \\
&= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.141}$$

Für den Fall $n = m$ gilt trivial

$$|v_n(x)|^2 = \frac{1}{2a} \quad . \tag{5.142}$$

Damit haben wir zusammengefaßt

$$\int_{-a}^{+a} v_n^*(x)\,v_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm} \quad . \tag{5.143}$$

Jede in $[-a, +a]$ quadratintegrable, mit der Periodenlänge $2a$ periodische Funktion $f(x)$ läßt sich somit auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n\, e^{i(n\pi/a)x} \tag{5.144}$$

mit

$$\alpha_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} f(x)\,e^{-i(n\pi/a)x}\,\mathrm{d}x \quad . \tag{5.145}$$

Insbesondere gilt für die δ–Distribution mit $-a < x_0 < +a$ die Darstellung

$$\delta(x - x_0) \quad = \quad \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i(n\pi/a)(x-x_0)}. \tag{5.146}$$

Jetzt führen wir die abkürzenden Bezeichnungen ein

$$\Delta k \quad = \quad \frac{\pi}{a} \quad , \tag{5.147}$$

$$k_n \quad = \quad n\Delta k \quad , \tag{5.148}$$

$$\bar{f}_n \quad = \quad \alpha_n a\sqrt{2/\pi} \quad . \tag{5.149}$$

Damit resultiert

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, e^{ik_n x} \, \Delta k \quad , \tag{5.150}$$

$$\bar{f}_n \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(x) \, e^{-ik_n x} \, \mathrm{d}x \quad . \tag{5.151}$$

Δk ist die Differenz benachbarter k_n.
Wir gehen nun zu nicht–periodischen Funktionen, d. h. zu Funktionen mit einem Periodizitätsintervall $[-a, +a]_{a\to\infty}$ über. Wir nähern die Summe in (5.150) im Riemannschen Sinn mit $\Delta k \to 0$ durch ein entsprechendes Integral. Es folgt

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \, \bar{f}(k) \, e^{ikx} \quad , \tag{5.152}$$

$$\bar{f}(k) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, f(x) \, e^{-ikx} \quad . \tag{5.153}$$

Man nennt $\bar{f}(k)$ die Fourier–Transformierte oder auch Spektralfunktion der Funktion $f(x)$.
Wir wollen nun die wichtigsten Eigenschaften der Fourier–Transformierten diskutieren. Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, $f(x) = f(-x)$, dann gilt

$$\bar{f}(k) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, f(x) \, \cos(kx) \quad . \tag{5.154}$$

Damit ist auch $\bar{f}(k)$ eine gerade Funktion,

$$\bar{f}(k) = \bar{f}(-k) \quad . \tag{5.155}$$

Ist $f(x)$ reell, so ist es auch $\bar{f}(k)$.
Ist hingegen $f(x)$ ungerade, $f(x) = -f(-x)$, so haben wir

$$\bar{f}(k) \quad = \quad \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, f(x) \, \sin(kx) \quad . \tag{5.156}$$

Somit ist auch $\bar{f}(k)$ ungerade, d. h. $f(k) = -f(-k)$. Wenn $f(x)$ reell ist, kann $\bar{f}(k)$ zerlegt werden in

$$\bar{f}(k) = \bar{f}_1(k) - i\bar{f}_2(k) \tag{5.157}$$

mit reellen $\bar{f}_{1,2}(k)$. Dabei ist $\bar{f}_1(k)$ eine gerade und $\bar{f}_2(k)$ eine ungerade Funktion von k. Demnach gilt

$$\bar{f}(-k) \;=\; \bar{f}_1(k) + i\bar{f}_2(k) \;=\; \bar{f}^*(k) \quad . \tag{5.158}$$

Die Fourier–Transformation ist linear. Mit

$$g(x) \;=\; \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \tag{5.159}$$

folgt

$$\bar{g}(k) \;=\; \alpha_1 \bar{f}_1(k) + \alpha_2 \bar{f}_2(k) \quad . \tag{5.160}$$

Bezüglich der δ–Funktion gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \delta(x)\, e^{-ikx} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad . \tag{5.161}$$

Als Fourier–Umkehrung erhalten wir

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \; e^{ikx} \quad . \tag{5.162}$$

Vertauschen wir die Bezeichnungen k und x, so folgt

$$\delta(k) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{ikx} \quad . \tag{5.163}$$

Die Regeln, die wir für das Variablenpaar (x, k) abgeleitet haben, gelten in analoger Weise auch für Zeiten und Frequenzen. Als Konvention ändern wir hier jedoch die Vorzeichen in den Exponenten ab,

$$f(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \; \bar{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \quad , \tag{5.164}$$

$$\bar{f}(\omega) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; f(t)\, e^{i\omega t} \quad . \tag{5.165}$$

Bei mehrdimensionalen Funktionen liegt die Verallgemeinerung der Fourier–Transformation auf der Hand

$$f(\vec{r}, t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \; \bar{f}(\vec{k}, \omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad , \tag{5.166}$$

$$f(\vec{k}, \omega) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^3r \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; f(\vec{r}, t)\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad . \tag{5.167}$$

Ferner notieren wir die Parseval'sche Identität. Es sei

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}k \quad , \tag{5.168}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(k') \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}k' \quad . \tag{5.169}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g^*(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}^*(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}k' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}^*(k') \, \delta(k - k') \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}k' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k) \, \bar{g}^*(k) \, \mathrm{d}k \quad . \end{aligned} \tag{5.170}$$

In der gleichen Weise folgt der Faltungssatz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g^*(x - y) \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k) \, \bar{g}^*(k) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}k \quad . \tag{5.171}$$

5.5 Kovariante Notation der Maxwell-Gleichungen

Wir werden nun eine kovariante Schreibweise der Grundgesetze der klassischen Elektrodynamik einführen. Aus Einfachheitsgründen werden wir uns dabei auf die mikroskopischen Gleichungen und damit auf die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beschränken.

Wir beginnen die Diskussion mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad . \tag{5.172}$$

Wir führen die Stromdichte j_μ als Vierervektor ein mit

$$j_\mu = (\vec{j}, \, ic\rho) \quad . \tag{5.173}$$

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung in kovarianter Form

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad . \tag{5.174}$$

Mit der abkürzenden Operatorschreibweise

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu \equiv \partial_\mu j_\mu \tag{5.175}$$

haben wir schließlich

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \quad . \tag{5.176}$$

Ausgehend von der Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{5.177}$$

führen wir das Potential als Vierervektor ein mit

$$A_\mu = (\vec{A},\, i\Phi) \quad . \tag{5.178}$$

Damit kann die Lorentz-Eichung kovariant notiert werden als

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{5.179}$$

oder

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad . \tag{5.180}$$

In dieser Eichung lauten die Wellengleichung für das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential Φ

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^{\,2} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad , \\ \vec{\nabla}^{\,2} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \quad . \end{aligned} \tag{5.181}$$

In der vierdimensionalen Schreibweise wird hieraus

$$\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c}\, j_\mu \quad . \tag{5.182}$$

Wir betrachten nun die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Vierervektor-Schreibweise. Ausgedrückt durch die Potentiale lauten die Feldstärken

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \end{aligned} \tag{5.183}$$

Mit $A_4 = i\Phi$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 = ic \frac{\partial}{\partial x_4} A_1 \tag{5.184}$$

resultiert beispielsweise

$$iE_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \quad , \tag{5.185}$$

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \quad . \tag{5.186}$$

Wir führen nun den antisymmetrischen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ vom Rang 2 ein durch die Definition

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{5.187}$$

oder

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad . \tag{5.188}$$

Ausgedrückt durch die Komponenten der Feldstärkevektoren lautet der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ explizit

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5.189}$$

Wir wollen nun die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Notation darstellen. Diese Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad , \tag{5.190}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad . \tag{5.191}$$

Die rechten Seiten bilden die Komponenten eines Vierervektors, damit muß dies auch für die linke Seite gelten. Die linke Seite können wir als Divergenz des Feldstärketensors ausdrücken

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \quad . \tag{5.192}$$

Mit Hilfe des Feldstärketensors (5.189) können wir die expliziten Gleichungen (5.190) und (5.191) verifizieren. Man beachte, daß die Divergenz des Feldstärketensors einen Vierervektor liefert, während die Divergenz eines Vektors einen Skalar ergibt. Wir betrachten jetzt die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \tag{5.193}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad . \tag{5.194}$$

Mit Hilfe des Feldstärketensors (5.189) können sie umgeschrieben werden in

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{5.195}$$

mit $\lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Mit (5.192) und (5.195) haben wir die Maxwell-Gleichungen vollständig in kovarianter Form ausgedrückt.

Wir wollen jetzt noch die Erhaltungsgesetze in kovarianter Form darstellen. Dazu betrachten wir zunächst die Lorentz-Kraft – genauer die Kraftdichte, d.h. die Kraft pro Volumeneinheit

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} \quad . \tag{5.196}$$

Spezifisch betrachten wir jetzt die erste Komponente von $\vec{f}$, d.h.

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho E_1 + \frac{1}{c}(j_2 B_3 - j_3 B_2) \\ &= \frac{1}{c}(F_{12} j_2 + F_{13} j_3 + F_{14} j_4) \quad . \end{aligned} \tag{5.197}$$

Auch für die anderen Komponenten resultiert das gleiche Ergebnis

$$f_k = \frac{1}{c} F_{k\nu} j_\nu \tag{5.198}$$

mit $k = 1, 2, 3$. Die rechte Seite von (5.198) bilden die Raumkomponenten eines Vierervektors. Gleiches muß für $\vec{f}$ gelten, also

$$f_\mu = \left(\vec{f}, \frac{i}{c} f_0\right) \quad . \tag{5.199}$$

Allgemeiner erwarten wir das Gesetz

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu \tag{5.200}$$

mit μ, $\nu = 1, 2, 3, 4$. Für f_4 folgt

$$f_4 = \frac{1}{c}\left(F_{41} j_1 + F_{42} j_2 + F_{43} j_3\right) = \frac{i}{c}\vec{E} \cdot \vec{j} \quad . \tag{5.201}$$

Mit diesen Größen können wir das Erhaltungsgesetz für die Summe aus mechanischer und elektromagnetischer Energie in kovarianter Form ausdrücken. Aus der inhomogenen Maxwell-Gleichung (5.192) resultiert

$$j_\mu = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \tag{5.202}$$

und damit für (5.200)

$$f_\mu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} \quad . \tag{5.203}$$

Die rechte Seite kann als Divergenz eines Tensors zweiten Ranges ausgedrückt werden. Wir definieren nun den elektromagnetischen Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}\right) \quad . \tag{5.204}$$

$T_{\mu\nu}$ ist ein symmetrischer Tensor

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad . \tag{5.205}$$

Mit dem Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ (5.204) können wir die Kraftgleichung (5.203) ausdrücken durch

$$f_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad . \tag{5.206}$$

In expliziter Form läßt sich der Energie-Impuls-Tensor schreiben als

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -icg_1 & -icg_2 & -icg_3 & \omega \end{pmatrix} \quad . \tag{5.207}$$

Hierbei ist T_{ij} der Maxwellsche Spannungstensor,

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_k E_k + B_k B_k)\right) \tag{5.208}$$

mit $i, j, k = 1, 2, 3$. $\vec{g}$ ist die elektromagnetische Impulsdichte und ist durch den Poynting-Vektor bestimmt,

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c}\,\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\vec{S} \quad . \tag{5.209}$$

Die T_{44}-Komponente gibt die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes an,

$$\omega = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right) \quad . \tag{5.210}$$

Der Energie-Impuls-Tensor hat eine verschwindende Spur, d.h.

$$\sum_\mu T_{\mu\mu} = 0 \quad . \tag{5.211}$$

6 Elektromagnetische Strahlung

6.1 Funktionentheorie

Einführend zum theoretischen Studium der elektromagnetischen Strahlung werden wir uns mit der zeitabhängigen Green'schen Funktion beschäftigen. Wir wollen nun die allgemeinen Wellengleichungen

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \quad , \tag{6.1}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \quad , \tag{6.2}$$

lösen. Dazu betrachten wir allgemein Gleichungen der Art

$$\vec{\nabla}^{\,2}\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -4\pi f(\vec{r},t) \quad . \tag{6.3}$$

Zur Lösung ist es, wie wir bereits in der Elektrostatik sahen, zweckmäßig, eine nun jedoch zeitabhängige Greensche Funktion $G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')$ zu suchen, die der inhomogenen Wellengleichung genügt:

$$\left(\vec{\nabla}^{\,2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t') \quad . \tag{6.4}$$

Die Greensche Funktion in (6.4) ist translationsinvariant — weder eine spezielle Ortskoordinate noch eine spezielle Zeitkoordinate ist ausgezeichnet. Daher hängt die Greensche Funktion nur von der Differenz der Orts– und Zeitkoordinaten ab. Im unendlichen vierdimensionalen Raum können wir nun als Lösung von (6.3) ansetzen

$$\Psi(\vec{r},t) = \int G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')f(\vec{r}\,',t')\,\mathrm{d}^3r'\mathrm{d}t' \quad . \tag{6.5}$$

Diese Wellenfunktion befriedigt jedoch nur dann (6.3), wenn keine Randbedingungen gestellt sind.

Für die weitere Vorgehensweise wollen wir zunächst die Fourier–Darstellung der Greenschen Funktion betrachten

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\; e^{i\,\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\,e^{-i\,\omega(t-t')} \quad . \tag{6.6}$$

Wir setzen für die zeitabhängige Greensche Funktion die Fourier–Darstellung an

$$G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\; g(\vec{k},\omega)\,e^{i\,\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\,e^{-i\,\omega(t-t')} \quad . \tag{6.7}$$

Die Fourier–Transformierte $g(\vec{k},\omega)$ müssen wir noch ermitteln. Wir wenden den Operator $\Box$ auf beide Seiten von (6.7) an. Es folgt

$$\Box\, G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\; g(\vec{k},\omega)\,\Box\, e^{i\,[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]}. \tag{6.8}$$

Nun ist

$$\Box\, e^{i\,[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]} \;=\; e^{-i\omega(t-t')}\vec{\nabla}^{\,2} e^{i\,\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} - \frac{1}{c^2} e^{i\,\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, e^{-i\omega(t-t')} \quad . \tag{6.9}$$

Wir führen die Differentiation durch und erhalten

$$\Box\, e^{i\,[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]} \;=\; \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) e^{i\,[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]} \quad . \tag{6.10}$$

Somit bekommen wir

$$\Box\, G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\; g(\vec{k},\omega)\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) e^{i\,[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]}. \tag{6.11}$$

Dies vergleichen wir mit (6.4) und (6.6). Es resultiert

$$g(\vec{k},\omega) \;=\; \frac{1}{4\pi^3}\,\frac{1}{k^2-\omega^2/c^2} \quad . \tag{6.12}$$

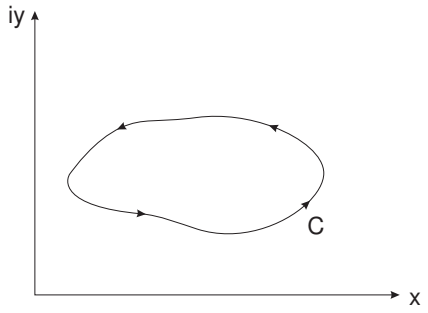
Dies nennt man auch einen Propagator! Damit ergibt sich für die Greensche Funktion die Darstellung

$$G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') \;=\; \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c^2}{c^2k^2-\omega^2}\, e^{i\,[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]}\,\mathrm{d}\omega \quad . \tag{6.13}$$

Wir müssen jetzt die Vorschriften bedenken, um die Singularitäten bei $\omega = \pm ck$ zu umgehen. Hierzu werden wir einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie verwenden.
Die Variable z sei komplex. Eine Funktion $f(z)$ heißt holomorph, wenn sie in einem Teilgebiet G der komplexen Ebene differenzierbar ist. Es gilt der Cauchy'sche Integralsatz:

Ist $f(z)$ holomorph in G und ist C eine einfach geschlossene Kurve, so gilt

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; 0 \quad . \tag{6.14}$$



Für den Begriff holomorph verwendet man auch den Begriff analytisch. Alle Punkte, in denen eine komplexe Funktion nicht analytisch ist, nennt man singuläre Punkte. Ist $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 analytisch, dagegen keine Aussage über die Analytizität in z_0 möglich, dann nennt

man z_0 eine isolierte singuläre Stelle. Ist dagegen $(z - z_0)^n f(z)$ für irgendeine positive ganze Zahl n analytisch in z_0, dann sagt man, $f(z)$ habe an der Stelle z_0 einen Pol. Das kleinste n, für das diese Aussage zutrifft, heißt die Ordnung des Pols. Komplexwertige Funktionen können in Form einer Potenzreihe dargestellt werden. Es gilt die Laurent–Entwicklung

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{6.15}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi \quad . \tag{6.16}$$

Von besonderer Bedeutung ist der Koeffizient a_{-1}, er heißt das Residium von $f(z)$ an der Stelle z_0,

$$a_{-1} \quad = \quad \mathrm{Res} f(z) \quad . \tag{6.17}$$

Es sei $f(z)$ in der Umgebung von z_0 analytisch und C ein z_0 umschließender Weg. Dann gilt

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) \quad = \quad a_{-1} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z \quad . \tag{6.18}$$

Liegen im Innengebiet von C mehrere isolierte singuläre Stellen z_i, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_i} f(z) \quad . \tag{6.19}$$

Wir formulieren das Resultat noch etwas um. Das im mathematisch positiven Umlaufsinn über einen geschlossenen Weg genommene Integral der Funktion $f(z)$, die im gesamten einfach zusammenhängenden Gebiet G innerhalb des Integrationsweges außer in den endlich vielen Punkten $z_1, \ldots, z_n$ analytisch ist, ist gleich der Summe der Residuen in allen diesen singulären Punkten $z_1, \ldots, z_n$ multipliziert mit $2\pi i$.

$$\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z \quad = \quad 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_i} f(z) \quad . \tag{6.20}$$

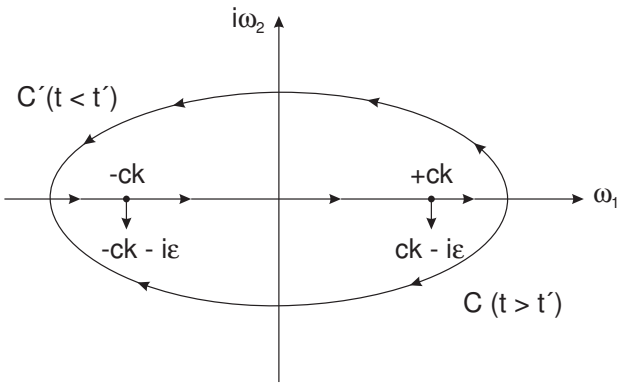
Mit Hilfe dieser mathematischer Sachverhalte können wir die zeitabhängige Greensche Funktion weiter untersuchen. Die Greensche Funktion repräsentiert die Ausbreitung einer Störung, die von einer Punktladung $\vec{r}'$ zum Zeitpunkt $t = t'$ hervorgerufen wird und sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Aus Kausalitätsgründen muß für eine Welle gelten

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \quad = \quad 0 \qquad \text{für } t < t' \quad . \tag{6.21}$$

Für $t \geq t'$ stellt G eine sich in die Zukunft ausbreitende Welle dar. Die Singularitäten von $g(\vec{k}, \omega)$ liegen bei $\omega = \pm ck$. Wir betrachten nun die komplexe ω–Ebene mit

$$\omega \quad = \quad \omega_1 + i \, \omega_2 \quad . \tag{6.22}$$

Wir versuchen durch einen geeigneten Integrationsweg in der komplexen Ebene die kausalen Wellen zu realisieren.



Durch die angegebene Integralführung beschreiben wir kausale Wellen. Diese dürfen nicht verschwinden. Deshalb müssen die Pole von $g(\vec{k},\omega)$ in der unteren Halbebene liegen. In der oberen Halbebene dürfen keine Pole liegen, damit sich akausal ausbreitende Wellen, bei denen die Störung zu einer früheren Zeit t vorhanden ist, bevor sie überhaupt gesendet wurde, verschwindet. Damit G für $t < t'$ verschwindet, müssen wir die Pole bei $\omega = \pm ck$ umgehen. Dies geschieht, indem wir sie um die infinitesimale Größe $(-i\varepsilon)$ verschieben. Wir ersetzen also ω durch $\omega + i\varepsilon$. Für die Greensche Funktion folgt dann

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}-i\omega\tau}}{k^2-(\omega+i\varepsilon)^2/c^2} \tag{6.23}$$

mit

$$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}' \quad , \tag{6.24}$$

$$\tau = t-t' \quad . \tag{6.25}$$

Zunächst wollen wir das folgende Teilintegral berechnen,

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,\frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2-(\omega+i\varepsilon)^2/c^2} \quad . \tag{6.26}$$

Die Bedingungen, die zur Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes und des Residuensatzes gestellt sind, werden erfüllt. Für $\tau = t-t' > 0$ müssen wir entlang der Kurve C integrieren, während das Integral für $t < t'$ entlang C' verschwindet. Dies ist durch das Versetzen der Pole um $-i\varepsilon$ gesichert. Wir berechnen nun nach dem Residuensatz

$$\oint_C \mathrm{d}\omega\,\frac{c^2\,e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-(\omega+i\varepsilon)^2} = \oint_C \mathrm{d}\omega\,f(\omega,k) \quad . \tag{6.27}$$

Es gilt

$$\frac{1}{c^2k^2-\omega^2} = \frac{1}{2ck}\left(\frac{1}{\omega+ck} - \frac{1}{\omega-ck}\right) \quad . \tag{6.28}$$

Es liegen zwei Pole erster Ordnung vor, somit erhalten wir auch zwei Residuen.
Hat eine Funktion $f(z)$ in einem Punkt z_0 einen Pol ersten Grades, dann können wir das Residuum ermitteln entsprechend

$$\text{Res}_{z_0} f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \quad . \tag{6.29}$$

Wir betrachten zunächst den Pol bei $\omega_1 \;=\; ck - i\varepsilon$. Wir müssen dabei den Umlaufsinn der Integral–Contour beachten. Es folgt

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{\omega_1} f(\omega,k) &= c^2\, e^{-i\omega_1\tau} \lim_{\omega\to\omega_1} \frac{\omega-ck+i\varepsilon}{c^2k^2-(\omega+i\varepsilon)^2} \\
&= c^2\, e^{-i\omega_1\tau} \lim_{\omega\to\omega_1} \frac{\omega-ck+i\varepsilon}{(ck+(\omega+i\varepsilon))(ck-(\omega+i\varepsilon))} \\
&= c^2\, e^{-i\omega_1\tau} \lim_{\omega\to\omega_1} \frac{\omega-\omega_1}{(\omega_1-\omega)(ck+\omega+i\varepsilon)} \quad .
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\text{Res}_{\omega_1} f(\omega,k) \;=\; -\frac{c}{2k}\, e^{-ick\tau} \quad . \tag{6.31}$$

Für den anderen Pol $\omega_2 = -ck - i\varepsilon$ folgt analog

$$\text{Res}_{\omega_2} f(\omega,k) \;=\; \frac{c}{2k}\, e^{ick\tau} \quad . \tag{6.32}$$

Jetzt ist

$$\oint f(\omega,k)\,\mathrm{d}\omega \;=\; 2\pi i(\text{Res}_{\omega_1} f + \text{Res}_{\omega_2} f) \tag{6.33}$$

und somit

$$\begin{aligned}
I(k) &= -2\pi i\,\left(-\frac{c}{2k}e^{-ick\tau} + \frac{c}{2k}e^{ick\tau}\right) \\
&= \frac{2\pi c}{k}\,\sin(ck\tau) \quad .
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Nach Durchführung der Integration über $\mathrm{d}\omega$ erhalten wir folgendes Zwischenergebnis

$$G(\vec{R},\tau) \;=\; 0 \qquad \text{für } t < t' \quad , \tag{6.35}$$

$$G(\vec{R},\tau) \;=\; \frac{c}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{\sin(ck\tau)}{k}\,e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{R}} \qquad \text{für } t > t' \quad . \tag{6.36}$$

Jetzt müssen wir noch die Integration über d^3k durchführen. Hierzu führen wir Kugelkoordinaten im $\vec{k}$–Raum ein, wobei $\vec{k}$ mit der Richtung der k_z–Achse übereinstimmen soll. Wir schreiben somit

$$\mathrm{d}^3k \;=\; k^2 \sin\Theta_k \,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Theta_k\,\mathrm{d}\varphi_k \tag{6.37}$$

und

$$\vec{k}\cdot\vec{R} \;=\; kR\cos\Theta_k \quad . \tag{6.38}$$

Dies führt bezüglich der Greenschen Funktion auf

$$G(\vec{R},\tau) \;=\; \frac{c}{2\pi^2}\int \mathrm{d}\varphi_k\,\mathrm{d}\Theta_k\,\mathrm{d}k\;k\;\sin\Theta_k\sin(ck\tau)\,e^{ikR\cos\Theta_k} \quad . \tag{6.39}$$

Die Integration über $\mathrm{d}\varphi_k$ ergibt den Faktor 2π, und wir erhalten

$$G(\vec{R},\tau) \;=\; \frac{c}{\pi}\int_{k=0}^{\infty} k\sin(ck\tau)\,\mathrm{d}k\int_{\Theta_k=0}^{\pi} e^{ikR\cos\Theta_k}\sin\Theta_k\,\mathrm{d}\Theta_k \quad . \tag{6.40}$$

Wir berechnen zunächst das Teilintegral

$$P_{\Theta_k} \;=\; \int_{\Theta_k=0}^{\pi} e^{ikR\cos\Theta_k}\sin\Theta_k\,\mathrm{d}\Theta_k \quad . \tag{6.41}$$

Wir substituieren

$$u \;=\; ikR\cos\Theta_k \quad . \tag{6.42}$$

Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\Theta_k} \;=\; -ikR\sin\Theta_k \tag{6.43}$$

und daher

$$P_{\Theta_k} = \frac{-1}{ikR}\int_{u=ikR}^{u=-ikR} e^u\,\mathrm{d}u = \frac{-1}{ikR}\left[e^{-ikR}-e^{ikR}\right] = \frac{2\sin(kR)}{kR} \quad . \tag{6.44}$$

Wir setzen dieses Resultat in die Greensche Funktion ein. Es folgt

$$G(\vec{R},\tau) \;=\; \frac{2c}{\pi R}\int_0^{\infty}\sin(kR)\sin(ck\tau)\,\mathrm{d}k \quad . \tag{6.45}$$

Wir substituieren nun $x = ck$. Der Integrand ist eine gerade Funktion in bezug auf k. Wir können daher das Integrationsintervall von $[0,\,\infty]$ auf $[-\infty,\,\infty]$ ausdehnen, wenn wir einen Faktor $1/2$ beimultiplizieren

$$G(\vec{R},\tau) \;=\; \frac{1}{\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(xR/c)\sin(x\tau)\,\mathrm{d}x \quad . \tag{6.46}$$

Wir nutzen die folgenden trigonometrischen Relationen aus

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad , \tag{6.47}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad . \tag{6.48}$$

Es gilt damit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[e^{i\left[\tau-\frac{R}{c}\right]x} - e^{i\left[\tau+\frac{R}{c}\right]x}\right] &= \frac{1}{2}\Big[\cos(\tau - \frac{R}{c}x) + i\sin(\tau - \frac{R}{c}x) - \cos(\tau + \frac{R}{c}x) \\
&\quad -i\sin(\tau + \frac{R}{c}x)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\cos\tau x\cos\frac{R}{c}x + \sin\tau x\sin\frac{R}{c}x + i\sin\tau x\cos\frac{R}{c}x \\
&\quad -i\cos\tau x\sin\frac{R}{c}x - \cos\tau x\cos\frac{R}{c}x + \sin\tau x\sin\frac{R}{c}x \\
&\quad -i\sin\tau x\cos\frac{R}{c}x - i\cos\tau x\sin\frac{R}{c}x\Big] \\
&= \sin\tau x\sin\frac{R}{c}x - i\cos\tau x\sin\frac{R}{c}x \quad .
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Unter Ausnutzung von diesen elementaren trigonometrischen Relationen folgt

$$G(\vec{R},\tau) = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\left(e^{i[\tau-(R/c)]x} - e^{i[\tau+(R/c)]x}\right) \quad . \tag{6.50}$$

Hierbei ist zu beachten, daß auftretende Integrale über $-i\,\cos(\tau x)\sin(xR/c)$ wegen des ungeraden Charakters verschwinden. Jetzt nutzen wir aus, daß gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(a) \quad . \tag{6.51}$$

Damit folgt für die Greensche Funktion

$$G = \frac{1}{R}[\delta(\tau - R/c) - \delta(\tau + R/c)] \quad . \tag{6.52}$$

Da das Argument $(\tau + R/c)$ für $\tau > 0$ nirgends verschwindet, kann die Deltafunktion mit diesem Argument zur Lösung nichts beitragen. Somit verbleibt

$$G = \frac{1}{R}\,\delta(\tau - R/c) \tag{6.53}$$

oder

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \frac{\delta(t - t' - |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad . \tag{6.54}$$

Dies ist die gesuchte Darstellung der zeitabhängigen Greenschen Funktion. Diese Greensche Funktion wird auch retardierte Green–Funktion genannt, denn sie beschreibt das kausale Verhalten, das mit einer Wellenstörung verbunden ist. Findet zur Zeit $t = t'$ am Ort $\vec{r} = \vec{r}'$ eine

Störung statt, so erreicht diese Störung den Ort $\vec{r} \neq \vec{r}'$ erst nach der Zeit $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$. Die Erregung breitet sich also mit Lichtgeschwindigkeit in die Zukunft aus. Wir setzen jetzt die Lösung für die Greensche Funktion in die Ausgangsgleichung ein. Es folgt

$$\Psi(\vec{r}, t) \quad = \quad \int \mathrm{d}^3 r' \, \mathrm{d}t' \, \frac{f(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \quad . \tag{6.55}$$

Führen wir die Integration über $\mathrm{d}t'$ durch, so erhalten wir das retardierte Potential. Dabei setzen wir die Ladungsdichte für die Funktion f ein. Es resultiert

$$\Phi(\vec{r}, t) \quad = \quad \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \tag{6.56}$$

Die analoge Rechnung für das Vektorpotential liefert

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \quad = \quad \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \tag{6.57}$$

Die Potentiale mit der versetzten Zeitabhängigkeit $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ heißen retardierte Potentiale. Die avancierten Potentiale mit der Abhängigkeit $t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ hätten sich ergeben, wenn wir bei der Integration in der komplexen Ebene den oberen Integrationsweg genommen hätten, also von Anfang an die Ausbreitung rückwärts in der Zeit mit $(t - t') < 0$ betrachtet hätten.
Mit den retardierten Potentialen werden die Felder sich bewegender Ladungen berechnet. Die Zeitabhängigkeit

$$t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c \quad = \quad t' \tag{6.58}$$

gibt an, daß das an der Stelle $\vec{r}$ zur Zeit t beobachtete Feld zu der früheren Zeit $t' < t$ am Ort $\vec{r}'$ verursacht wurde. Der Quotient $|\vec{r} - \vec{r}'|/c$ gibt ja gerade die Zeit an, die eine mit Lichtgeschwindigkeit laufende Welle braucht, um von $\vec{r}$ nach $\vec{r}'$ zu gelangen. Somit wird durch die retardierten Potentiale dem Kausalitätsprinzip für die sich in die Zukunft ausbreitenden Störungen Rechnung getragen.

6.2 Liénard–Wiechert Potentiale

Um die Gesamtladung q zu berechnen, muß im statischen Fall einfach das Integral

$$q \quad = \quad \int \rho(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 r' \tag{6.59}$$

berechnet werden. Im dynamischen Fall ist dies nicht so einfach möglich. Es gehört zu jedem Aufpunkt eine retardierte Zeit, die auch noch explizit vom Aufpunkt abhängt. Gleiches gilt für die Potentiale. Um eine formale Abhängigkeit von der Zeit t' zu erreichen, greifen wir auf die Darstellung der retardierten Potentiale mit der δ–Funktion zurück. Wir betrachten Punktladungen.

$\vec{r}_0(t)$ sei die Trajektorie dieser Ladung und $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_0(t)}{\mathrm{d}t}$ deren Geschwindigkeit. Die Ladungs– und Stromdichten lauten dann

$$\rho(\vec{r},t) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \quad , \tag{6.60}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = e\,\vec{v}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \quad . \tag{6.61}$$

Als eine mögliche Darstellung für das Coulomb–Potential resultiert dann

$$\Phi(\vec{r},t) = e\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)) \quad . \tag{6.62}$$

Dieses Integral ist im allgemeinen recht schwierig auszuführen. Nur für spezielle explizite Vorgaben der Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ kann man eine geschlossene Lösung angeben.
Wir schreiben das Coulomb–Potential hier in der folgenden Form

$$\Phi(\vec{r},t) = e\int \mathrm{d}t'\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t'))\,\delta(t'-t+|\vec{r}-\vec{r}'|/c) \quad . \tag{6.63}$$

In dieser Form läßt sich die räumlich Integration leicht durchführen. Wir bekommen

$$\Phi(\vec{r},t) = e\int \mathrm{d}t'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\,\delta(t'-t+|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c) \quad . \tag{6.64}$$

Zur weiteren Auswertung führen wir die folgende Substitution durch

$$\begin{aligned} u &= t'-t+|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c \\ &= t'-t+\frac{1}{c}\sqrt{(x-x_0(t'))^2+(y-y_0(t'))^2+(z-z_0(t'))^2} \quad . \end{aligned} \tag{6.65}$$

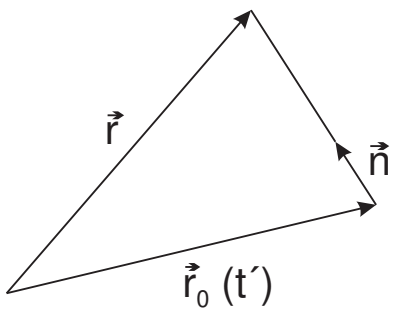
Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'} &= 1-\frac{(x-x_0(t'))\dot{x}_0(t')+(y-y_0(t'))\dot{y}_0(t')+(z-z_0(t'))\dot{z}_0(t')}{c\sqrt{(x-x_0(t'))^2+(y-y_0(t'))^2+(z-z_0(t'))^2}} \\ &= 1-\vec{n}(t')\cdot\frac{\vec{v}(t')}{c} \end{aligned} \tag{6.66}$$

mit

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0(t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} \quad . \tag{6.67}$$

$\vec{n}$ ist der Einheitsvektor, der von der Ladung e am Ort $\vec{r}_0(t')$ zum Aufpunkt $\vec{r}$ zeigt.



Demzufolge gilt

$$\mathrm{d}t' \;=\; \frac{\mathrm{d}u}{1-\vec{n}(u)\cdot\vec{v}(u)/c} \quad . \tag{6.68}$$

Somit können wir das retardierte Potential schreiben als

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r},t) &= e\int \mathrm{d}u\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(u)|}\cdot\frac{1}{1-\vec{n}(u)\cdot\vec{v}(u)/c}\,\delta(u)\\ &= \left.\frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|\cdot(1-\vec{n}(t')\cdot\vec{v}(t')/c)}\right|_{t'=t-|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c} \quad .\end{aligned} \tag{6.69}$$

Wir haben hierbei $u = 0$ bzw. $t' = t - |\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c$ eingesetzt. Man beachte, daß dies eine implizite Gleichung ist. In ähnlicher Weise ergibt sich für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r},t) \;=\; \left.\frac{e\,\vec{v}(t')/c}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|\cdot(1-\vec{n}(t')\cdot\vec{v}(t')/c)}\right|_{t'=t-|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c} \quad . \tag{6.70}$$

Diese retardierten Potentiale nennt man Liénard–Wiechert Potentiale. Es sind exakte Lösungen der inhomogenen Wellengleichung für die Potentiale eines sich beliebig auf der Trajektorie $\vec{r}_0(t')$ bewegenden Punktteilchens.

6.3 Die Strahlung zeitlich oszillierender Quellen

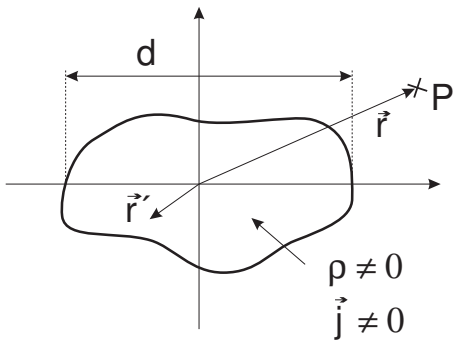
Wir betrachten ein zeitlich oszilierendes System von Ladungen und Strömen in einem abgeschlossenen Raumbereich und wollen dafür die Lösungen der inhomogenen Wellengleichung diskutieren. Wir nehmen eine Fourier-Zerlegung einer Quelle $f(\vec{r},t)$ nach Frequenzen vor. Generell gilt

$$f(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \;\; \bar{f}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t} \quad . \tag{6.71}$$

Wegen der Linearität der Maxwell-Gleichungen können wir jede Fourier-Komponente separat behandeln. Bezüglich der Ladungsdichte ρ und des Stromdichtevektors $\vec{j}$ beschränken wir uns auf eine einzelne Fourier-Komponente

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \quad , \tag{6.72}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \quad . \tag{6.73}$$



Die Fourier-Komponenten $\rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ werden im allgemeinen komplex sein, nur der Realteil des Ausdruckes beschreibt die physikalische Größe. $\rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ sollen außerhalb eines begrenzten Raumbereiches mit der Linearabmessung d verschwinden. Wir hatten gezeigt, daß als Lösung der Wellengleichung für das Vektorpotential resultiert

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, \delta\left(t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} - t\right) \quad , \tag{6.74}$$

sofern keine spezifischen Randbedingungen im Endlichen vorliegen. Die Diracsche δ-Funktion stellt das kausale Verhalten der Felder sicher. Augrund dieser δ-Funktion müssen wir in $\vec{j}(\vec{r}\,',t')$ die retardierte Zeit $t' = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ einsetzen. Damit haben wir

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{j}(\vec{r}\,')\, e^{-i\omega t}\, e^{i\omega|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c} \quad . \tag{6.75}$$

Mit

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \tag{6.76}$$

und $k = \omega/c$ ergibt sich nachdem die Zeitintegration über dt' ausgeführt wurde

$$\vec{A}(\vec{r}\,') = \frac{1}{c}\int d^3r'\ \vec{j}(\vec{r}\,')\ \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad . \tag{6.77}$$

Das Vektorpotential oszilliert mit derselben Frequenz wie die Quelle. Die magnetische Induktion ist gegeben durch

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \tag{6.78}$$

Aufgrund der Maxwellschen Gleichung gilt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad . \tag{6.79}$$

Mit (6.78) und dem zeitlichen Verhalten (6.76) ergibt dies

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}\,)\, e^{-i\omega t}\right) \quad . \tag{6.80}$$

Die Integration führt sofort auf

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\,\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}\,)\, e^{-i\omega t}\right) \tag{6.81}$$

und damit

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B} \quad . \tag{6.82}$$

Damit kann die magnetische Induktion und auch die elektrisch Feldstärke vollständig aus dem Vektorpotential deduziert werden. $\vec{A}$ wiederum ist aus dem Stromdichtevektor $\vec{j}$ eindeutig bestimmt.

Wir machen nun einige Dimensionsbetrachtungen. Die Dimension der Quelle ist von der Größenordnung d , die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad . \tag{6.83}$$

Es sei d klein gegenüber dem Abstand r zum Aufpunkt P,

$$d \ll r \quad . \tag{6.84}$$

Es sei auch d klein gegenüber der Wellenlänge λ,

$$d \ll \lambda \quad . \tag{6.85}$$

Dabei darf das Verhältnis λ/r zunächst noch beliebig sein. Es bietet sich folgende Entwicklung an, wobei $\vec{r}\,'$ aus dem Gebiet stammt, in dem gilt $\rho \neq 0$, $\vec{j} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left|\vec{r} - \vec{r'}\right| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r'}} \\ &\approx r\sqrt{1 - \frac{2}{r}\vec{n} \cdot \vec{r'}} \approx r\left(1 - \frac{1}{r}\vec{n} \cdot \vec{r'}\right) \end{aligned} \tag{6.86}$$

mit

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{6.87}$$

In der zweiten Zeile wurde der Term r'^2/r^2 vernachlässigt. In der dritten Zeile haben wir uns in der Taylor-Entwicklung der Wurzel auf die ersten beiden Terme beschränkt. Wir vernachlässigen weiter die quadratischen Terme in r'^2. Damit folgt

$$e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} \approx e^{ikr}e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r'}} \approx e^{ikr}\left(1 - ik\vec{n} \cdot \vec{r'}\right) \ldots, \tag{6.88}$$

$$\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{r}\vec{n} \cdot \vec{r'}\right) \quad . \tag{6.89}$$

Diese beiden Ausdrücke kombinieren wir zu

$$\frac{e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} \approx \frac{e^{ikr}}{r}\left[1 + \left(\vec{n} \cdot \vec{r'}\right)\left(\frac{1}{r} - ik\right)\right] \quad . \tag{6.90}$$

Somit resultiert für das Vektorpotential näherungsweise

$$\begin{aligned} \vec{A}\left(\vec{r}\right) \approx\ & \frac{1}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, \vec{j}\left(\vec{r'}\right) \\ & + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, \vec{j}\left(\vec{r'}\right)\left(\vec{n} \cdot \vec{r'}\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.91}$$

Der erste Term entspricht elektrischer Dipolstrahlung, der zweite magnetischer Dipol- und elektrischer Quadrupolstrahlung.
Weitere Möglichkeiten für Approximationen bietet die Aufteilung in verschiedene Zonenbereiche:

$$d \ll r \ll \lambda \qquad \text{Nahzone (statische Zone),} \tag{6.92}$$

$$d \ll r \sim \lambda \qquad \text{intermediäre Zone,} \tag{6.93}$$

$$d \ll \lambda \ll r \qquad \text{Fernzone (Strahlungszone).} \tag{6.94}$$

Dies führt zu verschiedenen genäherten Ausdrücken für das Vektorpotential. In den verschiedenen Zonen weisen die elektromagnetischen Felder ein unterschiedliches Verhalten auf.
In der Strahlungszone können wir mit (6.88) und (6.89) zunächst schreiben

$$\frac{e^{ik\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} \approx \frac{1}{r}e^{ikr}e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r'}} \quad . \tag{6.95}$$

Damit ergibt sich für das Vektorpotential der einfache Ausdruck

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) \approx \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{c}\int d^3r'\;\vec{j}\left(\vec{r'}\right)e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r'}}\right) \quad . \tag{6.96}$$

Der Vektor in der Klammer ist unabhängig von r. Das Vektorpotential verhält sich in der Strahlungszone wie eine auslaufende Kugelwelle proportional zu e^{ikr}/r, die zunächst sphärisch symmetrisch ist, multipliziert mit einem sphärischen Koeffizienten. Wir können jetzt noch ausnutzen, daß gilt $d \ll \lambda$ und somit $kr' \ll 1$. Damit folgt im einfachsten Fall nach einer Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) \approx \frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{c}\int d^3r'\;\vec{j}\left(\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.97}$$

Dies entspricht gerade dem Dipolterm im Vektorpotential.
In der Nahzone hingegen haben wir $d \ll r \ll \lambda$ ud damit $k\left|\vec{r}-\vec{r'}\right| \ll 1$. Somit können wir approximieren

$$e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} \approx 1 \quad . \tag{6.98}$$

Für das Vektorpotential folgt einfach der Ausdruck der Magnetostatik

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{c}\int d^3r'\;\frac{\vec{j}\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} \quad , \tag{6.99}$$

abgesehen von der harmonischen Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$. Retardierungseffekte sind hierbei vollkommen unterdrückt.

6.4 Elektrische Dipolstrahlung

Wir diskutieren jetzt die elektrische Dipolstrahlung. Dabei gehen wir von dem folgenden genäherten Ausdruck für das Vektorpetential aus

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r'\; \vec{j}\left(\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.100}$$

V sei das Volumen des Raumbereichs, in dem gilt $\rho \neq 0$ und $\vec{j} \neq 0$. Für stationäre Stromdichten verschwindet das Volumenintegral. Das gilt hier nun nicht mehr. Wir wollen das Volumenintegral umformen. Es sei $x_i{}'$ eine kartesische Komponente von $\vec{r'}$. Damit ergibt sich

$$\text{div}\left(x_i{}'\vec{j}\right) = x_i{}'\,\text{div}\,\vec{j} + \vec{j}\,\vec{\nabla}x_i{}' = x_i{}'\,\text{div}\,\vec{j} + j_i \quad . \tag{6.101}$$

Für das Volumenintegral erhalten wir damit

$$\int d^3r'\; j_i\left(\vec{r'}\right) = \int d^3r'\,\text{div}\left(x_i{}'\vec{j}\right) - \int d^3r'\,x_i{}'\,\text{div}\,\vec{j} \quad . \tag{6.102}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes können wir das erste Integral auf der rechten Seite in ein Oberflächenintegral umwandeln, das verschwindet. Es verbleibt

$$\int d^3r'\; \vec{j}\left(\vec{r'}\right) = -\int d^3r'\; \vec{r'}\,\text{div}\,\vec{j} \quad . \tag{6.103}$$

Wir nutzen jetzt die Kontinuitätsgleichung aus

$$\text{div}\,\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{r},t) = 0 \quad . \tag{6.104}$$

Aufgrund der harmonischen Zeitabhängigkeit resultiert

$$\text{div}\,\vec{j}(\vec{r}\,) - i\omega\varrho(\vec{r}\,) = 0 \tag{6.105}$$

und daher für das Volumenintegral

$$\int d^3r'\; \vec{j}\left(\vec{r'}\right) = -i\omega \int d^3r'\; \vec{r'}\varrho\left(\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.106}$$

Das Integral auf der rechten Seite repräsentiert aber gerade das elektrische Dipolmoment $\vec{p}$ der Ladungsverteilung ϱ

$$\vec{p} = \int d^3r'\; \vec{r'}\varrho\left(\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.107}$$

Somit können wir das Vektorpotential in der folgenden Form schreiben

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = -i\omega\vec{p}\,\frac{e^{ikr}}{cr} = -ik\vec{p}\,\frac{e^{ikr}}{r} \quad . \tag{6.108}$$

Die Bezeichnung elektrische Dipolstrahlung ist damit gerechtfertigt. Wir wollen jetzt die zugehörige magnetische Induktion $\vec{B}\,(\vec{r}\,)$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E}\,(\vec{r}\,)$ ermitteln. Wir nutzen nun aus, daß gilt

$$\text{rot}\,(\vec{a}\varphi) = \varphi\,\text{rot}\,\vec{a} + \vec{a} \times \vec{\nabla}\varphi \quad . \tag{6.109}$$

$\vec{p}$ hängt nicht von $\vec{r}$ ab. Somit bekommen wir

$$\text{rot}\,\vec{A}\,(\vec{r}\,) = ik\vec{p} \times \left(\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad . \tag{6.110}$$

Nun ist

$$\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} = \vec{n}\,\frac{d}{dr}\frac{e^{ikr}}{r} = \vec{n} ik \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \quad . \tag{6.111}$$

Dies führt für die magnetische Induktion schließlich auf

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,) = k^2\,(\vec{n} \times \vec{p}\,)\,\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \quad . \tag{6.112}$$

Die magnetische Induktion ist transversal zum Radiusvektor. Die Berechnung der elektrischen Feldstärke ist etwas komplizierter. Wir gehen aus von

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B} \quad . \tag{6.113}$$

Damit müssen wir berechnen

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\vec{A}\,(\vec{r}\,) = k^2 \Bigg\{ & \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \text{rot}\,(\vec{n} \times \vec{p}\,) \\ & - (\vec{n} \times \vec{p}\,) \times \left(\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \right] \Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{6.114}$$

Dabei ist

$$\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) = \vec{n}\,\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{2}{r} + \frac{2}{ikr^2}\right) \quad . \tag{6.115}$$

Mit

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{6.116}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} (\vec{n} \times \vec{p}\,) \times \vec{\nabla}\,\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) &= ik\frac{e^{ikr}}{r}\,(\vec{n} \times \vec{p}\,) \times \vec{n} + \\ & e^{ikr}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{ikr^3}\right)[\vec{n}\,(\vec{n} \cdot \vec{p}\,) - \vec{p}\,] \quad . \end{aligned} \tag{6.117}$$

Desweiteren müssen wir auswerten

$$\text{rot}\,(\vec{n} \times \vec{p}\,) = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{n} - \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{p} + \vec{n}\,\text{div}\,\vec{p} - \vec{p}\,\text{div}\,\vec{n} \quad . \tag{6.118}$$

Dabei ist

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{p} = 0 \quad , \tag{6.119}$$

$$\vec{n}\,\text{div}\,\vec{p} = 0 \quad , \tag{6.120}$$

$$\vec{p}\,\text{div}\,\vec{n} = \vec{p}\,\text{div}\,\frac{\vec{r}}{r} = \vec{p}\,\frac{1}{r}\,\text{div}\,\vec{r} + \vec{p}\,\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r}$$

$$= \frac{3\vec{p}}{r} - \vec{p}\,\vec{r}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{2\vec{p}}{r} \quad , \tag{6.121}$$

$$\begin{aligned}
\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{n} &= \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} + \vec{r}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{r} \\
&= \frac{1}{r}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} + \vec{r}\left(\vec{p}\cdot\vec{n}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{r} \\
&= \frac{1}{r}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\,(\vec{p}\cdot\vec{n}\,)\frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} - \frac{1}{r}\vec{n}\,(\vec{p}\cdot\vec{n}\,) \\
&= \frac{1}{r}\vec{p} - \frac{1}{r}\vec{n}\,(\vec{p}\cdot\vec{n}\,) \quad .
\end{aligned} \tag{6.122}$$

Damit folgt zusammengefaßt für die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned}
\vec{E} = \frac{i}{k}k^2\Bigg\{ & \frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\left[\frac{1}{r}\vec{p} - \frac{1}{r}\vec{n}\,(\vec{p}\cdot\vec{n}\,) - \frac{2\vec{p}}{r}\right] \\
& - ik\frac{e^{ikr}}{r}(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n} \\
& - e^{ikr}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{ikr^3}\right)[\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{p}\,) - \vec{p}\,]\Bigg\} \quad .
\end{aligned} \tag{6.123}$$

Wir fassen zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{e^{ikr}}{r}\Bigg\{ k^2\left[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}\right] - ik\frac{\vec{p}}{r} + \frac{\vec{p}}{r^2} \\
&\qquad -\frac{ik}{r}\vec{n}\,(\vec{p}\cdot\vec{n}\,) + \frac{1}{r^2}\vec{n}\,(\vec{p}\cdot\vec{n}) - \frac{2ik}{r}\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{p}\,) \\
&\qquad +2ik\frac{\vec{p}}{r} + \frac{2}{r^2}\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{p}\,) - \frac{2}{r^2}\vec{p}\Bigg\} \\
&= \frac{e^{ikr}}{r}\left\{k^2\left[(\vec{n}\times\vec{p}\,)\times\vec{n}\,\right] + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)[3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{p}\,) - \vec{p}\,]\right\} \quad .
\end{aligned} \tag{6.124}$$

Während $\vec{B}$ transversal zum radialen Einheitsvektor $\vec{n} = \vec{r}/r$ polarisiert ist, hat $\vec{E}$ sowohl longitudinale als auch transversale Komponenten. Wir wollen die Felder für die verschiedenen Zonen noch etwas genauer untersuchen.
Wir betrachten zunächst die Strahlungszone. Hier gilt $kr \gg 1$ und damit

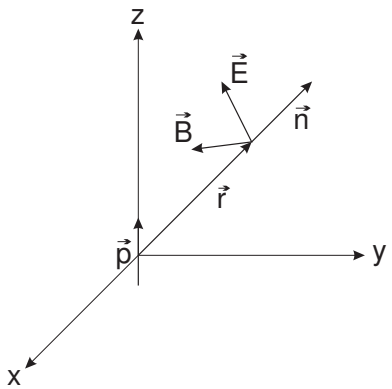
$$\frac{k^2}{r} \gg \frac{k}{r^2} \gg \frac{1}{r^3} \tag{6.125}$$

Damit vereinfachen sich die elektromagnetischen Feldstärken

$$\vec{B} = k^2\,(\vec{n}\times\vec{p}\,)\frac{e^{ikr}}{r} \quad , \tag{6.126}$$

$$\vec{E} = \vec{B}\times\vec{n} \quad . \tag{6.127}$$

In der Strahlungszone ist also auch $\vec{E}\,(\vec{r}\,)$ transversal zu $\vec{n}$. $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{n}$ bilden lokal ein orthogonales Dreibein.



Typischerweise fallen Felder in der Strahlungszone wie Kugelwellen mit $1/r$ ab.

$$\left|\vec{E}\right| \quad \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{r} \quad , \tag{6.128}$$

$$\left|\vec{B}\right| \quad \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{r} \quad . \tag{6.129}$$

In der Nahzone gilt $kr \ll 1$ und damit weiter

$$\frac{k^2}{r} \ll \frac{k}{r^2} \ll \frac{1}{r^3} \quad . \tag{6.130}$$

Ferner ist

$$e^{ikr} \approx 1 \quad . \tag{6.131}$$

Damit vereinfachen sich die Felder zu

$$\vec{B} \;=\; ik\left(\vec{n}\times\vec{p}\right)\frac{1}{r^2} \quad , \tag{6.132}$$

$$\vec{E} \;=\; \left[3\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{p}\right)-\vec{p}\right]\frac{1}{r^3} \quad . \tag{6.133}$$

Das elektrische Feld entspricht gerade dem elektrostatischen Dipolfeld, wenn man mal von der harmonischen Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ absieht. Die magnetische Induktion ist vom Betrag her um einen Faktor kr kleiner als das elektrische Feld in dem Bereich, in dem gilt $kr \ll 1$. In der Nahzone ist das Feld dominanterweise elektrischer Natur. Die magnetische Induktion verschwindet im statischen Limes $k \to 0$. Dann dehnt sich die sogenannte Nahzone bis in das Unendliche aus. Wir wollen nun die abgestrahlte Leistung diskutieren. Dabei gehen wir aus von dem Poynting-Vektor, der den Energiefluß beschreibt

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) \quad . \tag{6.134}$$

Der Pointing-Vektor hat die Dimension Energie/(Fläche·Zeit). Die elektromagnetische Energiedichte war gegeben durch

$$\omega = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right) \quad . \tag{6.135}$$

Bei der Diskussion des Strahlungsfeldes hatten wir stets die komplexe Schreibweise verwendet. Bei der Diskussion der abgestrahlten Energie müssen wir aber wieder eine Reduktion auf reelle Größen vornehmen.
Als Beispiel betrachten wir das Skalarprodukt der Realteile zweier komplexer Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Re}\,\vec{A}\right)\cdot\left(\mathrm{Re}\,\vec{B}\right) &= \frac{1}{4}\left(\vec{A}+\vec{A}^*\right)\cdot\left(\vec{B}+\vec{B}^*\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}^*+\vec{A}^*\cdot\vec{B}+\vec{A}^*\cdot\vec{B}^*\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.136}$$

Wir betrachten nun eine harmonische Zeitabhängigkeit der Felder

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right) = \vec{a}\left(\vec{r}\right)e^{-i\omega t} \quad , \tag{6.137}$$

$$\vec{B}\left(\vec{r},t\right) = \vec{b}\left(\vec{r}\right)e^{-i\omega t} \quad . \tag{6.138}$$

Von diesen Feldern benötigen wir schließlich nur das zeitliche Mittel

$$\bar{A}\left(t\right) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t}^{t+\tau} A\left(t'\right)\,dt' \quad . \tag{6.139}$$

Gemittelt wird über eine charakteristische Periode mit

$$\omega\tau + 2\pi \quad . \tag{6.140}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}\overline{\vec{A}\cdot\vec{B}} &= \frac{1}{\tau}\vec{a}\cdot\vec{b}\int\limits_{t}^{t+\tau} dt'\,e^{-2i\omega t'} \\ &= i\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\omega\tau}e^{-2i\omega t'}\Big|_{t}^{t+\tau} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.141}$$

Hingegen ist

$$\overline{\vec{A}^*\cdot\vec{B}} = \vec{a}^*\cdot\vec{b} \quad , \tag{6.142}$$

$$\overline{\vec{A}\cdot\vec{B}^*} = \vec{a}\cdot\vec{b}^* \quad . \tag{6.143}$$

Somit bekommen wir weiter

$$\begin{aligned}\overline{\left(\mathrm{Re}\,\vec{A}\right)\cdot\left(\mathrm{Re}\,\vec{B}\right)} &= \frac{1}{4}\left(\vec{a}^*\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}^*\right) \\ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{a}^*\cdot\vec{b}\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}^*\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.144}$$

Ganz analog finden wir für das entsprechende Vektorprodukt

$$\overline{\left(\mathrm{Re}\,\vec{A}\right)\times\left(\mathrm{Re}\,\vec{B}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{a}\times\vec{b}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{a}^*\times\vec{b}\right) \quad . \tag{6.145}$$

So resultiert beispielsweise bei elektromagnetischen Feldern mit einer harmonischen Zeitabhängigkeit für die Energiedichte

$$\bar{\omega} = \frac{1}{16\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{H}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{B}^{*}\left(\vec{r}\right)+\vec{E}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{D}^{*}\left(\vec{r}\right)\right) \tag{6.146}$$

sowie für die Energiestromdichte beschrieben durch den Poynting-Vektor

$$\overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\left(\vec{r}\right)\times\vec{H}^{*}\left(\vec{r}\right)\right) \quad . \tag{6.147}$$

Dies können wir beispielsweise direkt so auf ebene Wellen anwenden

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t\right)} \quad , \tag{6.148}$$

$$\vec{B}\left(\vec{r},t\right) = \vec{B}_0\, e^{i\left(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t\right)} \quad . \tag{6.149}$$

Die Strahlungsleistung ist gegeben durch

$$P = \int \overline{\vec{S}}\cdot d\vec{f} \tag{6.150}$$

mit dem Flächenelement

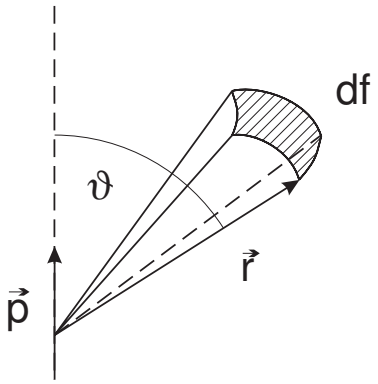
$$d\vec{f} = df\,\vec{n} \tag{6.151}$$

und

$$df = r^2\, d\Omega \tag{6.152}$$

sowie

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \tag{6.153}$$



Differentiell betrachtet bekommen wir damit für die Strahlungsleistung durch das Flächenelement $d\vec{f}$ bei $\vec{r}$

$$dP = \overline{\vec{S}}\cdot d\vec{f} \quad . \tag{6.154}$$

Bezogen auf das Raumwinkelelement $d\Omega$ resultiert damit

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\overline{\vec{S}}\cdot\vec{n} \quad . \tag{6.155}$$

Wir setzen den Ausdruck (6.147) für den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor für $\vec{B} = \vec{H}$ ein

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[r^2\vec{n}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right)\right] \quad . \tag{6.156}$$

Nun verwenden wir explizit die Felder (6.127) in der Strahlungszone. Es ist demnach

$$\begin{aligned}
\overline{\vec{S}} &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right) \\
&= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{B}\times\vec{n}\right)\times\vec{B}^*\right] \\
&= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[-\vec{B}\left(\vec{n}\cdot\vec{B}^*\right)+\vec{n}\left|\vec{B}\right|^2\right] \\
&= \frac{c}{8\pi}\vec{n}\left|\vec{B}\right|^2 \quad .
\end{aligned} \tag{6.157}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß $\vec{B}$ und $\vec{n}$ senkrecht aufeinander stehen, $\vec{n}\cdot\vec{B} = 0$. Ebenso bekommen wir für die mittlere elektromagnetische Energiedichte

$$\bar{\omega} = \frac{1}{16\pi}\left(\left|\vec{B}\right|^2+\left|\vec{E}\right|^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left|\vec{B}\right|^2 \quad . \tag{6.158}$$

Mit der magnetischen Induktion aus (6.127) wird daraus

$$\bar{\omega} = \frac{1}{8\pi}\frac{k^4p^2}{r^2}\,\sin^2\vartheta \tag{6.159}$$

mit $p = |\vec{p}\,|$ und

$$\vartheta = \sphericalangle(\vec{n},\vec{p}) \quad . \tag{6.160}$$

Wir können (6.158) mit (6.157) vergleichen und erkennen

$$\overline{\vec{S}} = c\,\vec{n}\,\bar{\omega} \tag{6.161}$$

also

$$\overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\frac{k^4p^2}{r^2}\sin^2\vartheta\,\vec{n} \quad . \tag{6.162}$$

Die Energie strömt mit der Geschwindigkeit c in Richtung des Ortsvektors. Dies setzen wir nun in (6.155) ein und finden

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}k^4p^2\sin^2\vartheta \quad . \tag{6.163}$$

Dies ist die typische Dipolcharakteristik. Der Dipol strahlt am stärksten senkrecht zum Dipolmoment. Keinerlei Abstrahlung erfolgt längs der Dipolachse. Die Charakteristik ist rorationssymmetrisch zur $\vec{p}$-Achse.

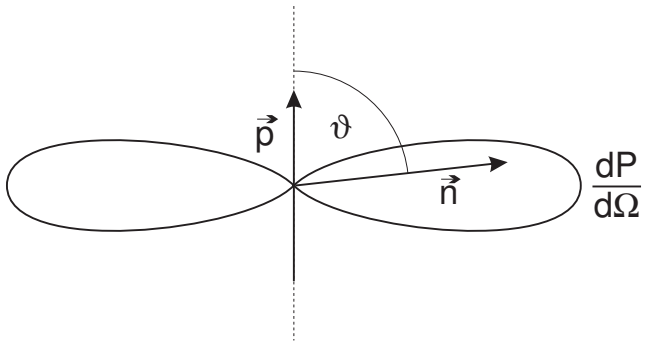
Die gesamte Strahlungsleistung ergibt sich durch Integration über alle Raumwinkel. Es ist

$$\begin{aligned}
\int d\Omega\ \sin^2\vartheta &= 2\pi\int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta\ \left(1-\cos^2\vartheta\right) \\
&= 2\pi\left(\cos\vartheta-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right)\Big|_{-1}^{+1} = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned} \tag{6.164}$$

Deshalb haben wir

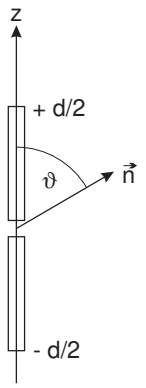
$$P = \frac{c\,k^4}{3} p^2 \quad . \tag{6.165}$$

Wichtig ist zu bemerken, daß die Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz ist ($k = \omega/c$) und proportional zum Quadrat des Dipolmomentes ist.



6.5 Eine einfache Dipolantenne

Wir betrachten eine Dipolantenne der Länge d, wobei d klein verglichen mit der Wellenlänge sein soll. Die Antenne sei entlang der z-Achse orientiert von $z = d/2$ bis $z = -d/2$ mit einem kleinen Spalt am Ursprung.



Der Strom habe ein Maximum I_0 am Spalt und soll linear zum Ende abfallen

$$I(z)\, e^{-i\omega t} = I_0 \left(1 - \frac{2\,|z|}{d}\right) e^{-i\omega t} \quad . \tag{6.166}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\mathrm{div}\, \vec{j} = i\omega\varrho \quad . \tag{6.167}$$

Für die lineare Ladungsdichte ϱ (Ladung pro Einheitslänge) folgt demnach

$$\varrho = \pm \frac{2iI_0}{\omega d} \quad . \tag{6.168}$$

Hierbei gilt das obere Vorzeichen für positive Werte von z und das untere Vorzeichen für negative Werte von z. Damit können wir das Dipolmoment, das parallel zur z-Achse ist, ausrechnen. Es hat den Betrag

$$p = \int\limits_{-d/2}^{d/2} z\varrho\, dz = \frac{iI_0 d}{2\omega} \quad . \tag{6.169}$$

Damit resultiert für die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{32\pi c}\,(k\,d)^2 \sin^2\vartheta \quad . \tag{6.170}$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung beträgt

$$P = \frac{I_0^2}{12\,c}\,(kd)^2 \quad . \tag{6.171}$$

Im Langwellengrenzfall mit $kd \ll 1$ steigt die abgestrahlte Leistung mit dem Quadrat der Frequenz an.

6.6 Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung

Wir diskutieren nun die verbleibenden Terme in (6.91) bezüglich des Vektorpotentials. Die nächsthöheren Terme lauten

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{e^{ikr}}{cr}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int \vec{j}\left(\vec{r'}\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\, d^3r' \quad . \tag{6.172}$$

$\vec{A}$ läßt sich in zwei charakteristische Summanden zerlegen. Dazu nutzen wir den Entwicklungssatz und schreiben

$$\frac{1}{2}\vec{n}\times\left(\vec{r'}\times\vec{j}\right) = \frac{1}{2}\vec{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{j}\right) - \frac{1}{2}\vec{j}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.173}$$

Es folgt weiter

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{r'}\times\vec{j}\right)\times\vec{n} + \frac{1}{2}\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right) + \left(\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r})\right)\vec{r'}\right] \quad . \tag{6.174}$$

Damit habe wir den Integranden in (6.172) in einen symmetrischen Teil in $\vec{j}$ und $\vec{r'}$ und in einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten. Somit bekommen wir

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \vec{A}_1\left(\vec{r}\right) + \vec{A}_2\left(\vec{r}\right) \tag{6.175}$$

mit dem magnetischen Dipolterm

$$\vec{A}_1\left(\vec{r}\right) = -\frac{e^{ikr}}{2cr}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\left[\vec{n}\times\int d^3r'\left(\vec{r'}\times\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\right)\right] \tag{6.176}$$

und dem elektrischen Quadrupolterm

$$\vec{A}_2\left(\vec{r}\right) = \frac{e^{ikr}}{2cr}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int d^3r'\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right) + \left(\vec{n}\cdot\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\right)\vec{r'}\right] \quad . \tag{6.177}$$

Wir hatten die Magnetisierung durch die Stromdichte definiert als

$$\vec{M} = \frac{1}{2c}\left(\vec{r}\times\vec{j}\right) \quad . \tag{6.178}$$

Entsprechend ist das magnetische Dipolmoment definiert als

$$\vec{m} = \int \vec{M}\, d^3r = \frac{1}{2c}\int\left(\vec{r}\times\vec{j}\right)\, d^3r \quad . \tag{6.179}$$

Damit können wir das Vektorprodukt $\vec{A}_1\left(\vec{r}\right)$ ausdrücken durch

$$\vec{A}_1\left(\vec{r}\right) = ik\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \quad . \tag{6.180}$$

Dieses Vektorpotential ist aber bis auf einen Faktor $-ik$ gleich der magnetischen Induktion $\vec{B}$ (6.112) für einen elektrischen Dipol, wenn wir das elektrische Dipolmoment $\vec{p}$ durch das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ substituieren. Jetzt ist weiter

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \text{rot}\,\vec{A}_1(\vec{r}) \quad . \tag{6.181}$$

Ferner hatten wir schon eingangs festgestellt, daß gilt

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \quad . \tag{6.182}$$

Indem wir die magnetische Induktion für den elektrischen Dipol mit dem Faktor i/k multiplizieren und $\vec{p}$ durch $\vec{m}$ ersetzen, erhalten wir das Vektorpotential für den magnetischen Dipol. Bilden wir erneut die Rotation, so folgt die magnetische Induktion für den magnetischen Dipol. Dies entspricht aber gerade der elektrischen Feldstärke für den elektrischen Dipol multipliziert mit k/i, sofern wir wieder $\vec{p}$ und $\vec{m}$ vertauschen.
Damit folgt für die magnetische Induktion für den magnetischen Dipol

$$\vec{B} = \frac{e^{ikr}}{r}\left\{k^2\,(\vec{n} \times \vec{m}\,) \times \vec{n} + [3\vec{n}\,(\vec{n} \cdot \vec{m}\,) - \vec{m}\,]\,\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\right\} \quad . \tag{6.183}$$

Jetzt müssen wir noch die elektrische Feldstärke für den magnetischen Dipol ermitteln. Dazu betrachten wir das Induktionsgesetz

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} \quad . \tag{6.184}$$

Wegen der angenommenen harmonischen Zeitabhängigkeit folgt

$$\text{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{c}\vec{B}(\vec{r}) \quad . \tag{6.185}$$

Also haben wir auch für die elektrische Dipolstrahlung

$$-\frac{i}{k}\,\text{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \quad . \tag{6.186}$$

Dies vergleichen wir mit

$$\frac{i}{k}\,\text{rot}\,\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) \quad , \tag{6.187}$$

was wir eingangs gefunden haben. Damit finden wir als Zuordnung, daß die elektrische Feldstärke für den magnetischen Dipol gerade dem Negativen der magnetischen Induktion für den elektrischen Dipol entspricht, wenn wir erneut $\vec{p}$ durch $\vec{m}$ substituieren. Also haben wir

$$\vec{E}_1 = -k^2\,(\vec{n} \times \vec{m}\,)\,\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \quad . \tag{6.188}$$

Wir können jetzt vollkommen analog die Strahlungsleistung in das Raumwinkelelement $d\Omega$ berechnen. Mit $m = |\vec{m}\,|$ finden wir erneut

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 m^2 \sin^2\vartheta \quad . \tag{6.189}$$

Anhand der Winkelverteilung kann man also nicht unterscheiden, ob es sich um elektrische oder magnetische Dipolstrahlung handelt. Der Unterschied liegt in der Polarisation der Strahlung. Für einen elektrischen Dipol liegt der elektrische Vektor in der von $\vec{n}$ und $\vec{p}$ aufgespannten Ebene, für einen magnetischen Dipol ist er senkrecht zu der von $\vec{n}$ und $\vec{m}$ aufgespannten Ebene.
Wir wenden uns jetzt der Diskussion der elektrischen Quadrupolstrahlung zu. Hierzu betrachten wir den Ausdruck (6.177), den wir umformen wollen. Dazu benutzen wir

$$\begin{aligned} \int d^3r' \,\mathrm{div}\left[x'\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\right] &= \int d^3r'\, x' \,\mathrm{div}\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\right] \\ &\quad + \int d^3r' \,\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\cdot\vec{\nabla}x' \quad . \end{aligned} \tag{6.190}$$

Die linke Seite kann mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Dieses Integral verschwindet, da nach Voraussetzung $\vec{j}$ auf einen endlichen Raumbereich beschränkt ist. Demnach folgt

$$\begin{aligned} \int d^3r' \,\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right) j_x\left(\vec{r'}\right) = -\int d^3r' \Big[&\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\mathrm{div}\vec{j}\left(\vec{r'}\right) \\ &+\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\cdot\vec{\nabla}_{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\Big] \quad . \end{aligned} \tag{6.191}$$

Nun ist

$$\vec{\nabla}_{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right) = \vec{n} \quad . \tag{6.192}$$

Also folgt weiter unter Einbeziehung der analogen Beziehungen für die y- und z-Komponente

$$\begin{aligned} \int d^3r' \,\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\vec{j}\left(\vec{r'}\right) + \vec{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{j}\left(\vec{r'}\right)\right)\right] &= -\int d^3r'\, \vec{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\mathrm{div}\,\vec{j}\left(\vec{r'}\right) \\ &= -\int d^3r'\, \vec{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\left(i\omega\varrho\left(\vec{r'}\right)\right) . \end{aligned} \tag{6.193}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder die Kontinuitätsgleichung ausgenutzt. Damit erhalten wir für die Vektorpotentiale mit $k = \omega/c$

$$\vec{A}_2\left(\vec{r}\right) = -\frac{k^2}{2}\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)\int d^3r'\, \vec{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\varrho\left(\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.194}$$

Im Integranden steht ein Moment zweiter Ordnung für die Ladungsdichte ϱ. Es handelt sich deshalb um einen Quadrupolterm. Den Ausdruck (6.194) für das Vektorpotential eines elektrischen Quadrupols formen wir weiter um. Dazu betrachten wir als vektorielle Größe das Integral

$$\vec{I}\left(\vartheta,\varphi\right) = \int d^3r'\, \vec{r'}\left(\vec{n}\cdot\vec{r'}\right)\varrho\left(\vec{r'}\right) = \left(I_1, I_2, I_3\right) \quad . \tag{6.195}$$

Die einzelnen Komponenten können wir schreiben als

$$\begin{aligned} I_j\left(\vartheta,\varphi\right) &= \int d^3r'\; {x_j}' \left(\sum_{i=1}^{3} n_i {x_i}'\right) \varrho\left(\vec{r'}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} n_i \int d^3r'\; \left(3{x_i}'{x_j}' - {r'}^2\delta_{ij}\right) \varrho\left(\vec{r'}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} n_j \int d^3r'\; {r'}^2 \varrho\left(\vec{r'}\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.196}$$

In diesem Ausdruck tritt der Quadrupoltensor auf

$$\hat{Q} = \left(Q_{ij}\right) \tag{6.197}$$

mit $i,j = 1,2,3$ und

$$Q_{ij} = \int d^3r\; \left(3{x_i}'{x_j}' - {r'}^2\delta_{ij}\right) \varrho\left(\vec{r'}\right) \quad . \tag{6.198}$$

Wir definieren nun den Vektor

$$\vec{Q}(\vec{n}\,) = \left(Q_1(\vec{n}\,), Q_2(\vec{n}\,), Q_3(\vec{n}\,)\right) \tag{6.199}$$

mit

$$Q_i(\vec{n}\,) = \sum_{j=1}^{3} Q_{ij} n_j \quad . \tag{6.200}$$

Damit können wir das Integral $\vec{I}$ schreiben als

$$\vec{I} = \frac{1}{3}\left\{\vec{Q}(\vec{n}\,) + \vec{n}\int d^3r'\; {r'}^2 \varrho\left(\vec{r'}\right)\right\} \quad . \tag{6.201}$$

Damit lautet das Vektorpotential

$$\vec{A}_2(\vec{r}\,) = -\frac{k^2}{6}\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)\left\{\vec{Q}(\vec{n}\,) + \vec{n}\int d^3r'\; {r'}^2 \varrho\left(\vec{r'}\right)\right\} \quad . \tag{6.202}$$

Dieses Vektorptential dient jetzt wieder als Ausgangspunkt für die Ermittlung der magnetischen Induktion $\vec{B}_2(\vec{r}\,)$, der elektrischen Feldstärke $\vec{E}_2(\vec{r}\,)$ und schließlich der abgestrahlten Leistung.