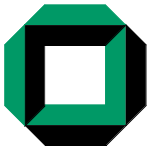
PHYSIK II

ELEKTRO DYNAMIK



F. HERRMANN
SKRIPTEN ZUR EXPERIMENTALPHYSIK
ABTEILUNG FÜR DIDAKTIK DER PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
AUFLAGE 1997

Hergestellt mit RagTime
Druck: Universitätsdruckerei Karlsruhe
Vertrieb: Studentendienst der Universität Karlsruhe
März 1997

Alle Rechte vorbehalten

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

A. DIE ELEKTRISCHE LADUNG

1. Die elektrische Ladung und ihr Strom 7

1.1 Die Kontinuitätsgleichung 7
1.2 Der Fluß eines Vektorfeldes - die Stromdichte 8
1.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes - der Gaußsche Integralsatz 9
1.4 Die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form 11

2. Elektrischer Strom und Energiestrom 13

2.1 Der Zusammenhang zwischen elektrischer Stromstärke und Energiestromstärke 13
2.2 Energiedissipation 15
2.3 Die elektrische Spannung als Antrieb eines elektrischen Stroms 16
2.4 Kennlinien - das Ohmsche Gesetz 16
2.5 Die Differenz der intensiven Variable als Antrieb des Stroms der extensiven 17

3. Elektrischer Strom und Stoffmengenstrom 19

3.1 Das chemische Potential 19
3.2 Stoffe und Teilchen 19
3.3 Das elektrochemische Potential 20
3.4 Die Kontaktspannung 21
3.5 Das Prinzip der galvanischen Zelle 22
3.6 Brennstoffzelle - Elektrolyse 26
3.7 Die Kopplung zwischen Strömen - die Onsager-Beziehung 27
3.8 Die Kopplung zwischen elektrischem Strom und Entropiestrom 29
3.9 Thermoelement und Peltier-Wärmepumpe 32

B. DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

4. Ladung und Polarisation als Quellen des elektrischen Feldes 34

4.1 Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und elektrischer Ladung 34
4.2 Der Zusammenhang zwischen elektrischem Potential und elektrischer Feldstärke 35
4.3 Die Kapazität 40
4.4 Dipol, Dipoldichte und Polarisation 41
4.5 Induzierte Polarisation, Influenz 44
4.6 Die Kapazität eines Kondensators, der mit Materie gefüllt ist 45
4.7 Piezo- und pyroelektrischer Effekt 46
4.8 Die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt 46
4.9 Die Energie im Feld des Kondensators 47

5. Energiedichte und mechanische Spannung im elektrostatischen Feld 48

5.1 Die Energiedichte 48
5.2 Die Zugspannung in Richtung der Feldlinien 48
5.3 Die Druckspannung quer zu den Feldlinien 49

6. Die Quellen des magnetischen Feldes 51

6.1 Die magnetische Feldstärke 51
6.2 Die Magnetisierung 52

6.3 Das magnetische Potential 54
6.4 Die induzierte Magnetisierung 54
6.5 Ferromagnetismus 56
6.6 Die magnetische Kapazität 58

7. Energiedichte und mechanische Spannung im magnetostatischen Feld 59

8. Die erste und die zweite Maxwellsche Gleichung 60

8.1 Das Ampèresche Gesetz 60
8.2 Berechnung magnetischer Feldstärken 61
8.3 Die erste Maxwellsche Gleichung 63
8.4 Die zweite Maxwellsche Gleichung 64
8.5 Elektrische Leiter im induzierten elektrischen Feld 65
8.6 Die Induktivität 68
8.7 Bezugssysteme 70
8.8. Zusammenfassung der Gleichungen 71

9. Kräfte auf Ströme und bewegte Ladung 72

9.1 Der Druck des Magnetfeldes auf einen elektrischen Strom 72
9.2 Die Lorentzkraft 73
9.3 Beispiele zur Lorentzkraft 74

10. Supraleiter 77

10.1 Die supraleitende Phase 77
10.2 Idealtypen magnetischer Materialien 78

11. Energieströme und Impuls im elektromagnetischen Feld 80

11.1 Die Energiestromdichte im elektromagnetischen Feld 80
11.2 Beispiele für Energieströmungen 81
11.3 Energieübertragung mit magnetischen Verschiebungsströmen 83
11.4 Geschlossene Energiestromkreise im elektromagnetischen Feld 84
11.5 Der Impuls des elektromagnetischen Feldes 84
11.6 Zusammenfassung 85

12. Strukturen in der Elektrodynamik 86

12.1 Die Gibbssche Fundamentalform des elektromagnetischen Feldes 86
12.2 Die Analogie zwischen Ladungsdichte und Stromdichte 87

13. Elektrische Schwingungen - der Wechselstrom 88

13.1 Die Maschenregel in Stromkreisen, die Induktivitäten enthalten 88
13.2 Elektrische Schwingkreise 88
13.3 Wechselstrom und Wechselspannung 90
13.4 Der Wechselstromwiderstand 91
13.5 Die Beschreibung von Wechselstromnetzwerken mit komplexen Größen 95
13.6 Der Transformator 97

14. Elektromagnetische Wellen 100

14.1 Kinematik harmonischer Wellen 100
14.2 Harmonische Wellen als Lösungen der Maxwellgleichungen 101
14.3 Die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen - der Hertzsche Oszillator 102
14.4 Bemerkungen Maxwells zur elektromagnetischen Theorie des Lichts 105

Vorwort

Dieses Skriptum gehört zu einer Experimentalphysikvorlesung. Was ist der Unterschied zwischen Experimentalphysik und theoretischer Physik? Statt diese Frage direkt zu beantworten, geben wir Maxwell das Wort. Er macht in seinem berühmten "Treatise on Electricity & Magnetism" einige Bemerkungen über zwei Physiker, von denen man den einen, nämlich Faraday, als typischen Experimentalphysiker, den anderen, Ampère, als typischen Theoretiker bezeichnen kann:

> In seinen Untersuchungen hat Faraday stets die Methode befolgt, einerseits die Richtigkeit seiner Ansichten und Ideen durch das Experiment zu prüfen und andererseits sich durch Experimente direct zu weitern Ueberlegungen führen zu lassen. Daraus erklärt sich, dass er in seinen Veröffentlichungen seinen Ideen einen Ausdruck verleiht, der sich ganz besonders einer entstehenden Wissenschaft anpasst. In der Tat entfernt sich auch seine Schreibweise beträchtlich von der der Physiker, die wie Ampère dazu berufen waren, ihre Ideen in mathematische Form zu kleiden.
>
> Ampères Untersuchungen, durch die er die Gesetze der mechanischen Wirkung electrischer Ströme auf einander begründete, gehören zu den glänzendsten Taten, die je in der Wissenschaft vollbracht worden sind. Theorie und Experiment scheinen in voller Macht und Ausbildung dem Hirn des ‚Newton der Electricität' entsprungen zu sein. Seine Schrift ist in der Form vollendet, in der Präcision des Ausdrucks unerreichbar, und ihre Bilance besteht in einer Formel, aus der man alle Phänomene, die die Electricität bietet, abzuleiten vermag, und die in allen Zeiten als Cardinal-Formel der Electrodynamik bestehen bleiben wird.
>
> Obgleich er nun bei seinen Auseinandersetzungen der inductiven Methode folgt, so gestattet er uns doch keinen Einblick in die Werkstatt seiner

Die Vorlesung gliedert sich in zwei Teile, **A** und **B**, von denen der erste etwa ein Drittel, der zweite zwei Drittel der Zeit in Anspruch nimmt.

Teil **A** könnte man einfach Elektrizitätslehre nennen. Er befaßt sich mit der elektrischen Ladung und ihrem Strom. Die Tatsache, daß Ladung nie allein fließen kann, daß ein Ladungsstrom stets von Strömen anderer Größen begleitet ist, spielt hier eine wichtige Rolle.

Der Gegenstand von Teil **B** ist ein einziges physikalisches System: das elektromagnetische Feld. Es werden zunächst spezielle Zustandsklassen dieses Systems behandelt: das elektrostatische und das magnetostatische Feld. Es zeigt sich, daß die Struktur der Theorien dieser beiden Felder identisch ist. Danach wird der Zusammenhang zwischen diesen Feldern beschrieben, der durch das Ampèresche und das Faradaysche Gesetz (1. und 2. Maxwellsche Gleichung) geregelt wird. Die Behandlung des elektromagnetischen Feldes lehnt sich eng an Maxwells eigene Darstellung seiner Theorie an. Demzufolge sind die Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ bequeme Hilfsmittel, alle physikalisch interessanten Größen des Feldes auszudrücken: Energie, Energiestrom, Impuls und Impulsstrom (oder mechanische Spannung, wie man zu Maxwells Zeit sagte). Alle Kraftgesetze können aus Maxwells Ausdruck für die Impulsstromdichte hergeleitet werden.

Die Elektrodynamik steckt voller Strukturen und Symmetrien. Je mehr dieser Strukturen man kennt, desto besser versteht man die Elektrodynamik. Als Anfänger wird man aber nicht alle Strukturen gleichzeitig zu verstehen versuchen. Diese Vorlesung macht sehr stark von der Symmetrie Gebrauch, bei der sich die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ entsprechen. Sie gestattet ein fast blindes Übersetzen vieler Gesetze der Elektrodynamik in ein Analogon. Eine weitere Symmetrie, die wir Dualismus nennen, hatten wir bereits in der Mechanik-Vorlesung kennengelernt: Bei ihr entsprechen sich elektrische Stromstärke und Spannung, Induktivität und Kapazität, Knoten und Masche usw. Wir treffen sie in diesem Skriptum wieder an. Die Behandlung einer dritten Symmetrie, bei der sich die Ladungsdichte und die elektrische Stromdichte entsprechen, überlassen wir der Vorlesung über theoretische Physik.

A. DIE ELEKTRISCHE LADUNG

1. Die elektrische Ladung und ihr Strom

1.1 Die Kontinuitätsgleichung

So wie der Impuls für die Mechanik charakteristisch ist, ist die elektrische Ladung, oder Elektrizität, für die Elektrizitätslehre charakteristisch.

Das Symbol der elektrischen Ladung ist Q, die Maßeinheit Coulomb (C).

Wie $\boldsymbol{p}$, so ist auch Q mengenartig, d.h.
- die Ladung ist einem Raumbereich zugeordnet;
- es gibt eine Ladungsdichte ρ_Q;
- es gibt eine Ladungsstromstärke I_Q (= elektrische Stromstärke);
- es gibt eine Ladungsstromdichte $\boldsymbol{j}_Q$ (= elektrische Stromdichte).

Besteht keine Verwechslungsgefahr, so lassen wir den Index Q weg, schreiben also einfach ρ, I bzw. $\boldsymbol{j}$. Im Fachjargon nennt man die elektrische Stromstärke auch einfach "Stromstärke", "elektrischer Strom" oder, noch kürzer, "Strom". Die Maßeinheit der elektrischen Stromstärke ist das Ampere (A).

1 A = 1 C/s.

Man mißt die elektrische Stromstärke mit dem Amperemeter. Dabei geht man so vor wie bei jeder anderen Stromstärkemessung auch:

- Leitung, in der der Strom fließt, durchtrennen;
- neu entstandene Enden mit den Anschlüssen des Meßgeräts verbinden. Der Strom fließt jetzt durch das Meßgerät hindurch.

Wie der Impuls, so ist auch die elektrische Ladung eine Erhaltungsgröße. Für einen beliebigen Raumbereich gilt der Erfahrungssatz:

$$\frac{dQ}{dt} + I_Q = 0$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung.

Sie bezieht sich auf einen Raumbereich, Abb. 1.1. dQ/dt ist die zeitliche Änderung der elektrischen Ladung innerhalb des Bereichs, I_Q ist die Stärke des elektrischen Stroms durch die nach außen orientierte Berandungsfläche des Bereichs.

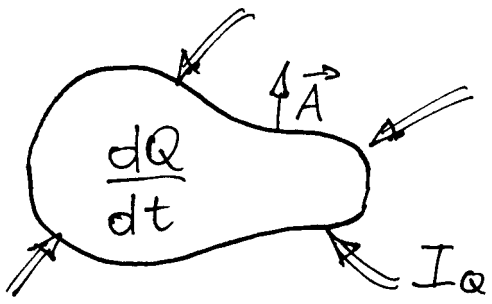


Abb. 1.1. Die elektrische Ladung im Innern des Bereichs kann sich nur dadurch ändern, daß ein Strom durch die Oberfläche des Bereichs fließt.

(Dieser Schreibweise der Kontinuitätsgleichung liegt die Konvention zugrunde, ge-

schlossene Flächen nach außen zu orientieren. In der Mechanik hatten wir geschlossene Flächen nach innen orientiert.)

Wir werden in den nächsten Abschnitten eine "lokale" Version der Kontinuitätsgleichung kennenlernen.

In dem Stromkreis von Abb. 1.2 ist dQ/dt überall gleich Null (in den Energiequellen ist zwar $dE/dt \neq 0$, aber $dQ/dt = 0$). Damit vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu

$$I_Q = \sum I_{Q_i} = 0 \qquad (1.1)$$

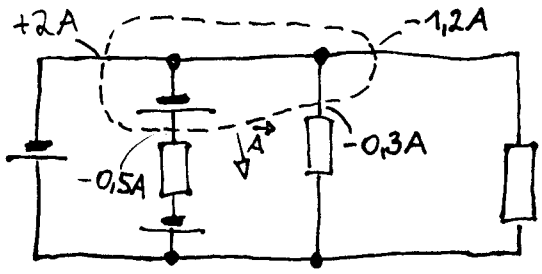


Abb. 1.2. Der Gesamtstrom durch die gestrichelt gezeichnete Fläche hat die Stärke null.

für jeden geschlossenen Raumbereich, für den $dQ/dt = 0$ ist. Gleichung (1.1) heißt "Kirchhoffsche Knotenregel".

Die physikalische Größe Q kann positive und negative Werte annehmen. Man sagt daher manchmal leider, es gebe "zwei Arten elektrischer Ladung", nämlich positive und negative. (Gibt es auch 2 Arten von Geschwindigkeiten?)

1.2 Der Fluß eines Vektorfeldes - die Stromdichte

Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$. Man versteht unter dem Fluß des Vektorfeldes durch die Fläche S das Integral

$$\int_S \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{A} \qquad (1.2)$$

Man kann sich von dieser Größe leicht eine Anschauung bilden, wenn es sich bei dem Vektorfeld um eine Stromdichte handelt. Der Fluß eines Stromdichtefeldes ist nämlich einfach gleich der Stromstärke. Im Fall eines elektrischen Stroms gilt also:

$$I = \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{A} \qquad (1.3)$$

Diese Gleichung gestattet es, die Stärke I des Stroms, der durch die Fläche S hindurchfließt, aus der Stromdichteverteilung $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ zu berechnen.

In Abb.1.3 fließt durch die Flächen S_1 und S_2 derselbe Strom. Wie zu erwarten, liefert das Integral (1.3) auch für beide Flächen denselben Wert, denn es trägt nur die zu $\boldsymbol{j}$ parallele Komponente von $d\boldsymbol{A}$ zum Integral bei.

Die Berechnung des Integrals (1.2) in kartesischen Koordinaten geschieht nach der folgenden Formel

$$\iint_S \boldsymbol{V} dA = \iint_{S_{yz}} \boldsymbol{V}_x dy dz + \iint_{S_{zx}} \boldsymbol{V}_y dz dx + \iint_{S_{xy}} \boldsymbol{V}_z dx dy$$

Hier ist S_{yz} die Projektion der Fläche S auf die y-z-Koordinatenebene. S_{zx} ist die Projektion auf die z-x- und S_{xy} die Projektion auf die x-y-Ebene.

Man kann sich bei manchen Strömungen vorstellen, daß sich die strömende Größe an jeder Stelle des Strömungsfeldes mit einer eindeutig bestimmten Geschwindigkeit

bewegt. So hat das Wasser eines Flusses an jeder Stelle des Flusses eine eindeutige Geschwindigkeit, und wir sagen auch, die Masse des Wassers bewege sich mit dieser Geschwindigkeit. Es gibt Fälle, in denen es vernünftig ist, der strömenden Größe an einem festen Ort mehr als eine einzige Geschwindigkeit zuzuordnen. So unterscheidet man im Fall eines elektrischen Stroms in einem metallischen Leiter zwischen der Geschwindigkeit der sogenannten beweglichen und der der unbeweglichen Ladungsträger. (Im Bezugssystem des Leiters ist die Geschwindigkeit der unbeweglichen Ladungsträger Null). Schließlich gibt es Strömungen bei denen es sinnlos ist, von einer Strömungsgeschwindigkeit zu sprechen, obwohl die Stromdichte eine eindeutig bestimmte Größe ist.

Existiert eine Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, so gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{v}$ und der Stromdichte:

$$\boldsymbol{j}_X = \rho_X \boldsymbol{v}$$

Hier ist ρ_X die Dichte der strömenden Größe X und $\boldsymbol{j}_X$ ihre Stromdichte.

Wir erläutern die Beziehung an Hand von Abb. 1.4. Durch die kleine Fläche A strömt in der Zeit dt die in dem Raumbereich $Adx = Avdt$ enthaltene Menge $dX = \rho_X\, Avdt$. Die Stärke des Stroms ist also

$$I_X = \frac{dX}{dt} = \rho_X A v$$

Der Betrag der Stromdichte ist $j_X = I_X/A = \rho_X v$. Da Stromdichtevektor und Strömungsgeschwindigkeitsvektor parallel sind, ergibt sich

$$\boldsymbol{j}_X = \rho_X \cdot \boldsymbol{v} \qquad (1.4)$$

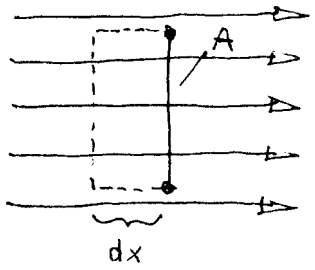


Abb. 1.4. Im Zeitintervall dt strömt die im Volumen Adx enthaltene Menge durch die Fläche A.

1.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes - der Gaußsche Integralsatz

Die folgende Herleitung gilt für jedes Vektorfeld. Sie ist besonders leicht zu durchschauen, wenn man sich ein Stromdichtefeld vorstellt: $\boldsymbol{j}(x,y,z)$.

Die Stärke I des Stroms durch die geschlossene Fläche S (Abb. 1.5) ist

$$I = \oiint_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A}$$

Wir teilen das von S eingeschlossene Gebiet in zwei Gebiete auf mit den Begrenzungsflächen S_1 und S_2. Ein Teil von S_1 fällt mit einem Teil von S_2 zusammen. Es ist

$$I = I_1 + I_2 = \oiint_{S_1} \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A} + \oiint_{S_2} \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A}$$

da sich der Anteil von I_1, der durch die S_1 und S_2 gemeinsame Fläche fließt, gegen den entsprechenden Anteil von I_2 weghebt. Wir teilen das Gebiet weiter auf in immer kleinere Teilgebiete und erhalten

$$I = \sum I_i = \sum \oiint_{S_i} \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A}$$

wo I_i die Stärke des Stroms durch die Oberfläche S_i des i-ten Teilbereichs ist. Wir nennen das Volumen des i-ten Teilbereichs V_i. Für immer kleinere Teilungen werden die I_i immer

kleiner, ‚der Quotient I_i/V_i dagegen geht gegen einen Grenzwert:

$$\frac{dI}{dV} = \lim_{V_i \to 0}\left[\frac{1}{V_i}\oiint_{S_i} \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{A}\right] = \operatorname{div}\boldsymbol{j}$$

Man nennt diesen Grenzwert die Divergenz des Feldes ***j*** an der Stelle, auf die man das Volumen zusammenschrumpfen lassen hat.

$$I = \oiint_S \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{A}$$

ist ein Maß für die Zahl der Stromlinien, die in dem durch S begrenzten Bereich beginnen oder enden, also ein Maß für die "Quellstärke" der Strömung. Man nennt daher *div* **j** auch die Quelldichte des ***j***-Feldes, und zwar auch dann, wenn das ***j***-Feld gar kein Strömungsfeld ist. Wir schreiben nun die Summe:

$$I = \sum I_i = \sum V_i \frac{\oiint_{S_i} \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{A}}{V_i}$$

Für $V_i \to 0$ geht die rechte Seite über in

$$\iiint_{V_S} \operatorname{div}\boldsymbol{j}\,dV$$

wobei V_S der von S eingeschlossene Raumbereich ist. Damit wird

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{A} = \iiint_{V_S} \operatorname{div}\boldsymbol{j}\,dV \qquad (1.5)$$

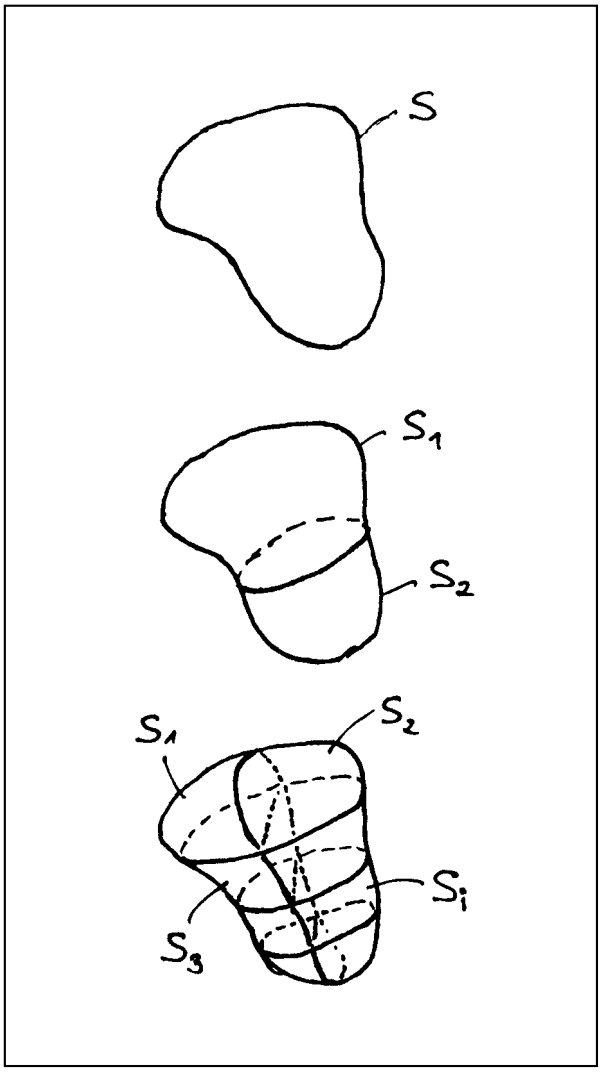


Abb. 1.5. Der von S eingeschlossene Raumbereich wird unterteilt.

Dieses ist der Gaußsche Integralsatz. In Worten: Die Stärke des Stroms durch die Oberfläche eines Gebietes ist gleich dem Volumenintegral über die Quelldichte in dem Gebiet. Ist das Feld ***j*** in kartesichen Koordinaten gegeben, so kann das Skalarfeld div ***j*** leicht berechnet werden. Es ist

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Zum Beweis berechnen wir die Stärke *I* des Stroms durch die Wände eines Quaders mit den Kantenlängen *dx*, *dy* und *dz* (Abb. 1.6): Durch die beiden zur *z*-Achse senkrechten Flächen fließt (Achtung: Orientierung der Flächen nach außen):

$$dI_{z,\,\text{unten}} - dI_{z,\,\text{oben}} = -\left[j_z(x,y,z) + \frac{\partial j_z}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{\partial j_z}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dxdy + \left[j_z(x,y,z+dz) + \frac{\partial j_z}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{\partial j_z}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dxdy$$

$$= \left[-j_z(x,y,z) + j_z(x,y,z) + \frac{\partial j_z}{\partial z}dz\right]dxdy = \frac{\partial j_z}{\partial z}dV$$

Für die beiden zur *x*-Achse und die beiden zur *y*-Achse senkrechten Flächen erhält man entsprechende Ausdrücke, so daß sich für den Gesamtstrom durch alle 6 Flächen ergibt:

$$dI = \left[\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right] dV$$

Mit der Definitionsgleichung der Divergenz folgt daraus:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

1.4 Die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form

Die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung lautet

$$\frac{dQ}{dt} + I = 0$$

Wir ersetzen Q durch $\iiint \rho dV$ und, mit dem Gaußschen Integralsatz, $I = \iint \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A}$ durch $\iiint \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, dV$:

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint \operatorname{div} \boldsymbol{j} dV = 0$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Raumbereich gilt, muß für die Integranden gelten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \qquad (1.6)$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung in differentieller Form. Sie sagt: Die Quellen des Stromdichtefeldes befinden sich dort, wo sich die Ladungsdichte zeitlich ändert. Eine entsprechende Gleichung gilt für jede andere Erhaltungsgröße.

Abb. 1.7 zeigt ein Feld, dessen Divergenz überall ungleich Null ist, und zwar links in Vektorpfeildarstellung und rechts in Feldliniendarstellung.

Die Divergenz des Feldes von Abb. 1.8 ist überall gleich Null.

Wir wenden schließlich noch die differentielle Kontinuitätsgleichung auf eine Massenströmung an. Man kann sich den entsprechenden Versuch besonders leicht vorstellen.

In einem Zylinder ist Luft eingesperrt, Abb. 1.9. Der Kolben (Ortskoordinate x_K) wird mit der Geschwindigkeit v_K bewegt. (v_K muß klein gegen die Schallgeschwindigkeit sein, damit

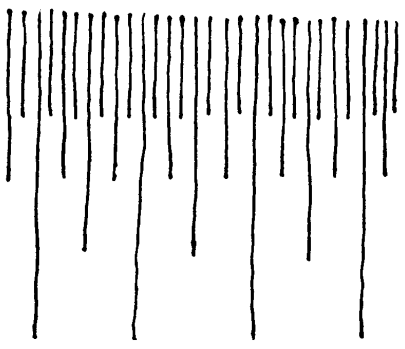


Abb. 1.7. Vektorpfeil- und Feldliniendarstellung eines Feldes, dessen Divergenz überall ungleich Null ist

die Dichte im ganzen Kolben dieselbe ist). Die Ortskoordinate der Luft ist x, ihre Geschwindigkeit $v(x)$.

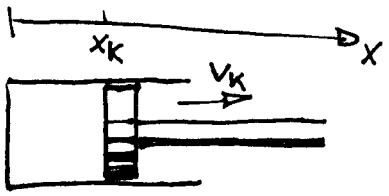


Abb. 1.9. Zur Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf die Masse der Luft im Innern eines Zylinders

Aus

$$\frac{v(x)}{v_\mathrm{K}} = \frac{x}{x_\mathrm{K}}$$

erhält man das Geschwindigkeitsfeld:

$$v(x) = \frac{x}{x_\mathrm{K}} v_\mathrm{K}$$

Die Massendichte ist

$$\rho_m = \frac{m}{A x_\mathrm{K}}$$

Mit (1.4) kann man die Massenstromdichte berechnen:

$$j_m = \rho_m v = \frac{m}{A x_\mathrm{K}} \frac{x}{x_\mathrm{K}} v_\mathrm{K} = \frac{m}{A} \frac{v_\mathrm{K}}{{x_\mathrm{K}}^2} x$$

Daraus ergibt sich die Divergenz zu:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{j}_m = \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} = \frac{\partial j_m}{\partial x} = \frac{m}{A} \frac{v_\mathrm{K}}{{x_\mathrm{K}}^2}$$

Andererseits ist

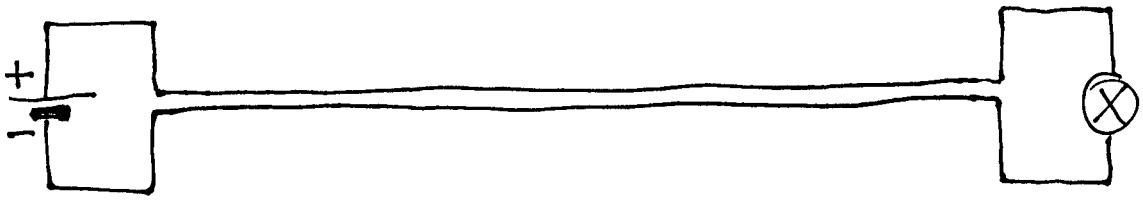
$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \frac{m}{A} \frac{\partial (1/x_\mathrm{K})}{\partial t} = -\frac{m}{A} \frac{1}{{x_\mathrm{K}}^2} \frac{\partial x_\mathrm{K}}{\partial t} = -\frac{m}{A} \frac{v_\mathrm{K}}{{x_\mathrm{K}}^2}$$

$\mathrm{div}\, \boldsymbol{j}_\mathrm{m}$ ist also, wie zu erwarten war, gleich $-\partial \rho_m / \partial t$.

2. Elektrischer Strom und Energiestrom

2.1 Der Zusammenhang zwischen elektrischer Stromstärke und Energiestromstärke

Von der Batterie zur Lampe in Abb. 2.1 fließt ein Energiestrom. Außerdem fließt in jedem der beiden Drähte ein elektrischer Strom, und zwar im oberen von links nach rechts und im unteren von rechts nach links.



Legt man zwei Stromkreise so übereinander, daß die Drähte zusammenfallen, so verdoppelt sich sowohl der Energiestrom, als auch der elektrische Strom in jeder Leitung, Abb. 2.2. Es gilt also

$$P \propto I$$

Da die gesamte elektrische Stromstärke (Hin- und Rückleitung zusammengenommen) den Wert Null hat, muß die Beziehung zwischen P und I die folgende Form haben:

$$P = -\varphi_1 I + \varphi_2 I$$

φ ist eine Größe, die für einen zusammenhängenden Leiter einen bestimmten Wert hat. Für die beiden Leitungen in Abb. 2.1 muß φ verschiedene Werte haben. Anderenfalls würde

$P = 0$.

Es ist also

$$P = (\varphi_2 - \varphi_1) I \qquad (2.1)$$

φ heißt das elektrische Potential. Durch Gleichung (2.1) werden nur Potentialdifferenzen definiert. Der Potentialnullpunkt kann willkürlich festgelegt werden. Man setzt gewöhnlich das Potential der Erde gleich Null. Die Differenz $U = \varphi_2 - \varphi_1$ heißt elektrische Spannung. Ihre Maßeinheit ist Volt = Watt/Ampere = Joule/Coulomb.

Die elektrische Spannung zwischen den beiden Leitungen eines elektrischen Kabels gibt also an, wie groß der mit Hilfe des Kabels übertragene Energiestrom ist, bei fester Stärke des elektrischen Stroms. Bildlich kann man diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Die Elektrizität "trägt" die Energie. Die elektrische Spannung gibt an, wie stark der Träger mit Energie "beladen" ist.

Gleichung (2.1) hat dieselbe Struktur wie die aus der Mechanik bekannte Gleichung

$$P = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

Daß die Gleichungen (2.1) und (2.2) dieselbe Form haben ist kein Zufall. Jeder Energietransport läßt sich nämlich durch eine Gleichung dieses Typs beschreiben:

$$P = \xi I_X \tag{2.3}$$

Gleichung (2.3) bringt zum Ausdruck, daß ein Energiestrom stets vom Strom einer anderen extensiven oder mengenartigen Größe *X* begleitet ist, Abb. 2.3a. Wir nennen die Größe *X* den Energieträger. Der Proportionalitätsfaktor ist eine sogenannte intensive Größe.

Viele Energietransporte sind so beschaffen, daß die Trägergröße *X* in einem geschlossenen Stromkreis fließt, daß es für *X* eine Hin- und eine Rückleitung gibt, Abb. 2.3b. Damit ein Nettoenergiestrom resultiert, muß die intensive Größe in Hin- und Rückleitung verschiedene Werte haben. Die Stärke des Nettoenergiesroms ist dann:

$$P = (\xi_2 - \xi_1)I_X \tag{2.4}$$

Ein Beispiel hierfür ist der gerade behandelte Energietransport mit einem zweiadrigen elektrischen Kabel.

Wir betrachten noch zwei weitere Typen von Energietransporten, d. h. zwei weitere Beispiele für Gleichungen vom Typ der Gleichung (2.3) oder (2.4).

Wird Energie "in Form von Wärme" übertragen (zum Beispiel durch die Wand eines schlecht isolierten Hauses), so fließt außer der Energie noch Entropie. Der Energieträger *X* in Gleichung (2.3) ist also die Entropie *S*. Die zugehörige intensive Größe ist die absolute Temperatur *T*. Es ist also

$$P = T I_S \tag{2.5}$$

Die Maßeinheit der Entropie ist das Carnot (Ct), die der absoluten Temperatur das Kelvin (K). Aus Gleichung (2.5) folgt daher

$$\mathrm{K} \cdot \mathrm{Ct} = \mathrm{J}$$

Wir betrachten schließlich noch ein System, in dem eine chemische Reaktion stationär abläuft, Abb. 2.4. Durch eine Leitung werden dem Reaktionsraum die Ausgangsstoffe der Reaktion zugeführt, durch eine andere werden die Reaktionsprodukte weggeleitet. Durch die Fläche *A* fließt ein Energiestrom, und auch dieser ist vom Typ der Gleichung (2.4):

$$P = (\mu_2 - \mu_1)I_n \tag{2.6}$$

Hier ist μ das chemische Potential. μ ist eine Größe, die einem Stoff oder einem Stoffgemisch zugeordnet ist. *n* ist der Reaktionsumsatz. Die Maßeinheit von *n* ist das Mol (mol). Die Maßeinheit der Umsatzrate I_n ist daher mol/s. Die Maßeinheit von μ ergibt sich aus Gleichung (2.6) zu Joule/mol. Man kürzt diese Einheit manchmal ab durch Gibbs (G). Es ist also

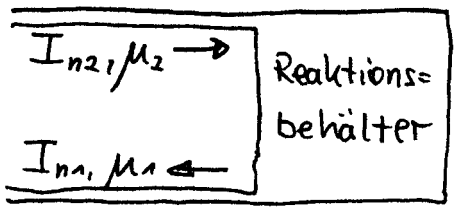


Abb. 2.4. Reaktionsbehälter mit Zuleitung für die Ausgangsstoffe und Wegleitung für die Reaktionsprodukte

G · mol = J.

Das chemische Potential eines Stoffes hängt ab vom Druck, von der Temperatur und vom Aggregatzustand des Stoffes. Falls der Stoff gelöst vorliegt, hängt es noch ab von der Konzentration und von der Natur des Lösungsmittels.

Zurück zur Elektrizitätslehre.

Wir legen noch einmal zwei Stromkreise übereinander. Diesmal aber so, daß sich die Stromstärken in zwei der Leitungen zu Null addieren, Abb. 2.5. Aus Gleichung (2.1) folgt, daß die Spannung im letzten Teilbild gleich der Summe der Spannungen im ersten Bild sein muß.

Da in jedem Punkt des Stromkreises das Potential einen bestimmten Wert hat, gilt die "Maschenregel"

$$\sum U_i = 0 \qquad (2.7)$$

Die Summe aller Spannungen in einer "Masche" ist gleich Null. Allen Spannungen innerhalb einer Masche muß dieselbe Zählrichtung zugrunde gelegt werden, Abb. 2.6.

Spannungen mißt man mit dem Voltmeter. Man verbindet die beiden Anschlüsse des Voltmeters mit den beiden Punkten, zwischen denen die Spannung gemessen werden soll. Die Frage nach dem Absolutwert des Potentials ist (wahrscheinlich) sinnlos, genauso sinnlos wie die Frage nach dem Absolutwert einer Geschwindigkeit (Ein Tachometer hat, genauso wie ein Voltmeter, zwei Anschlüsse; es mißt die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Auto und Erde). Genauso wie man zur Angabe einer Geschwindigkeit ein Bezugssystem, d.h. einen Geschwindigkeitsnullpunkt wählen muß, muß man zur Angabe eines elektrischen Potentials das "elektrische Bezugssystem", d.h. den Potentialnullpunkt, festgelegt haben.

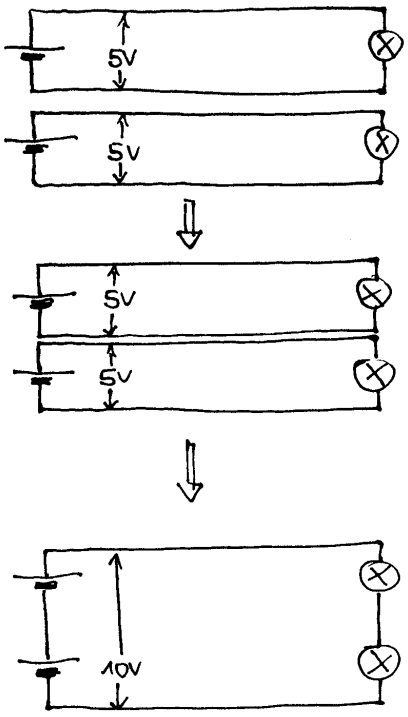
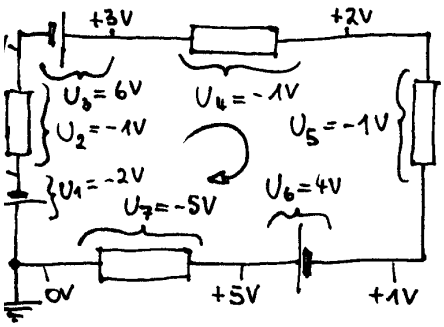


Abb. 2.5. Zwei gleiche Stromkreise werden so zusammengefaßt, daß sich die Stromstärken in einer Leitung zu Null addieren.



. Den Spannungen innerhalb einer Masche muß die-
hlrichtung zu Grunde gelegt werden.

2.2 Energiedissipation

In das Gerät von Abb. 2.7 fließt Energie elektrisch hinein. Diese Energie wird im Gerät vollständig dissipiert. Energie dissipieren heißt, mit Hilfe der Energie Entropie erzeugen. Es könnte sich bei dem Gerät handeln um eine Glühlampe, die Heizspirale eines Bügeleisens oder einen technischen Widerstand, aber nicht um einen Elektromotor oder eine Batterie, die gerade geladen wird. Da in dem Gerät die ganze ankommende Energie $U \cdot I$ dissipiert wird, gilt:

$$U \cdot I = T \cdot I_S$$

'. Die ganze ankommende Energie wird in dem Wi-
dissipiert.

Abb. 2.8. Flußdiagramm des elektrischen Widerstandes

Abb. 2.9. Die Umkehrung des Vorgangs, der in einem elektrischen Widerstand abläuft, ist unmöglich.

I_S ist die Stärke des Entropiestroms, der das Gerät verläßt und T die absolute Temperatur des Geräts. Abb. 2.8 zeigt das Flußbild des Vorgangs.

Es ist eine Erfahrungstatsache, daß man Entropie zwar erzeugen, aber nicht vernichten kann. Der Vorgang von Abb. 2.8 kann daher nicht rückwärts ablaufen, er ist irreversibel, Abb. 2.9.

2.3 Die elektrische Spannung als Antrieb eines elektrischen Stroms

Von einem System, in dem Energie dissipiert wird, sagt man, es habe einen Widerstand. Das Wort Widerstand beinhaltet, ebenso wie das Wort Spannung, ein Bild. Danach wird das Fließen des Stroms durch den Widerstand behindert. Daß der Strom trotz der Behinderung fließt, liegt an der Spannung. Sie stellt einen "Antrieb" dar, sie ist die "Ursache" des Stroms. Dieses Bild ist zwar sehr brauchbar, ist aber reine menschliche Erfindung. Man könnte genauso gut sagen, der Strom sei die Ursache der Spannung (man sagt sogar oft, der Strom rufe einen Spannungs-"Abfall" hervor).

2.4 Kennlinien - das Ohmsche Gesetz

Wir betrachten Gegenstände mit zwei elektrischen Anschlüssen: Widerstände, Drahtstücke, Dioden und andere Dinge. Stellt man für einen solchen Gegenstand den Zusammenhang zwischen der Stärke des Stroms, der durch ihn fließt, und der Spannung zwischen seinen Anschlüssen graphisch dar, so erhält man seine Kennlinie, Abb. 2.10.

Für manche Gegenstände gilt unter bestimmten Voraussetzungen - konstante Temperatur, Stromdichte nicht zu hoch - ein besonders einfacher Zusammenhang:

$U \propto I$.

Man sagt, für den Gegenstand gelte das Ohmsche Gesetz. Es gilt z.B. für Metalldrähte (bei festgehaltener Temperatur). Man nennt in diesem Fall den Quotienten

$R = U/I$

den Widerstand des Gegenstandes. Die Maßeinheit

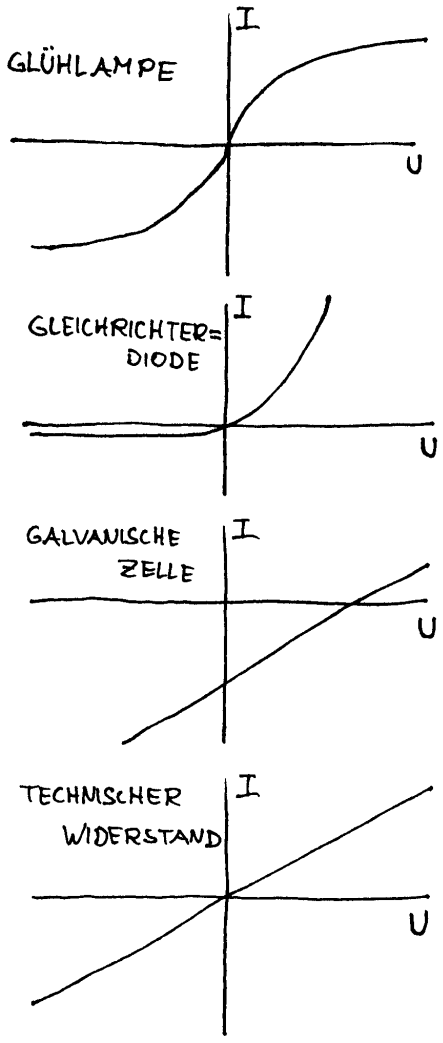


Abb. 2.10. Beispiele für Strom-Spannungs-Kennlinien

des Widerstandes ist das Ohm, abgekürzt Ω. (1Ω = 1 V/A).

Für einen "Ohmschen Leiter" der Länge l mit konstantem Querschnitt A gilt

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A}$$

ρ heißt spezifischer Widerstand (Achtung: dasselbe SI-Symbol wie für Massen- und für Ladungsdichte). Der Kehrwert σ des spezifischen Widerstandes heißt elektrische Leitfähigkeit.

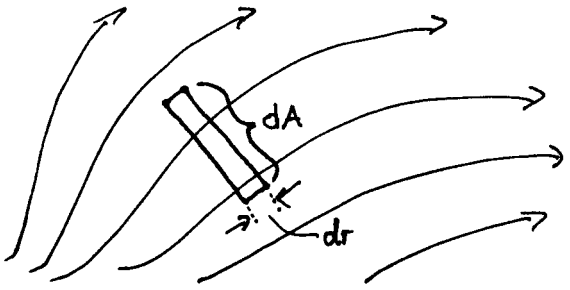


Abb. 2.11. Zum Zusammenhang zwischen Stromdichte und Potentialgradient

Das Ohmsche Gesetz macht eine globale Aussage über einen Leiter. Wir wollen daraus eine lokale Beziehung zwischen Stromdichte und Potentialdifferenz herleiten.

Wir betrachten ein rechtwinkliges Volumenelement in einer Strömung, mit der Länge dr (in Strömungsrichtung) und der Querschnittsfläche dA, Abb. 2.11. Die Stärke $dI = |\boldsymbol{j}|\, dA$ des Stroms durch diersen Querschnitt ist mit dem Ohmschen Gesetz:

$$|\boldsymbol{j}| dA = \frac{d\varphi}{dR} = \frac{d\varphi}{dr} dA\sigma$$

wo $d\varphi$ die Potentialdifferenz zwischen den beiden um dr voneinander entfernten Flächen ist. Hieraus folgt $|\boldsymbol{j}| = \sigma d\varphi/dr$. Da der Strom in die Richtung fließt, in der φ am stärksten abnimmt, ist

$$\boldsymbol{j} = -\sigma \,\mathrm{grad}\, \varphi \qquad (2.8)$$

2.5 Die Differenz der intensiven Variable als Antrieb des Stroms der extensiven

Damit ein elektrischer Strom durch einen elektrischen Widerstand fließt, braucht er einen Antrieb: eine elektrische Spannung, Abb. 2.12. Manchmal ist $I \propto U$ bzw. $\boldsymbol{j} \propto \mathrm{grad}\, \varphi$ (Ohmsches Gesetz). Im elektrischen Widerstand wird Entropie erzeugt:

$$T\, I_{S,\mathrm{erzeugt}} = \Delta\varphi\ I$$

Name des Vorgangs: Erzeugung Joulescher Wärme.

Damit ein Impulsstrom F durch einen mechanischen Widerstand (Stoßdämpfer, viskoses Medium) fließt, braucht er einen Antrieb: eine Geschwindigkeitsdifferenz, Abb. 2.13. Manchmal ist $F = \Delta v/R_p$. Im mechanischen Widerstand wird Entropie erzeugt:

$$T\, I_{S,\,\mathrm{erzeugt}} = \Delta v\, F$$

Name des Vorgangs: Reibung.

Damit ein Stoffmengenstrom durch einen "chemischen Widerstand" fließt (z.B. gasförmiges Wasser von einer Stelle eines Zimmers durch die Luft zu einer anderen), braucht er einen Antrieb: eine Differenz der chemischen Potentiale μ ("chemische Spannung"), Abb. 2.14. Manchmal ist $j_n \propto \mathrm{grad}\, \mu$ (1. Ficksches Gesetz). Bei dem Vorgang wird Entropie erzeugt:

$$TI_{S,\mathrm{erzeugt}} = \Delta\mu I_n$$

Name des Vorgangs: Diffusion.

Damit ein Entropiestrom durch einen Wärmewiderstand (z.B. Hauswand, Kupferstab) fließt, braucht er einen Antrieb: eine Temperaturdifferenz ("Thermische Spannung"), Abb. 2.15.

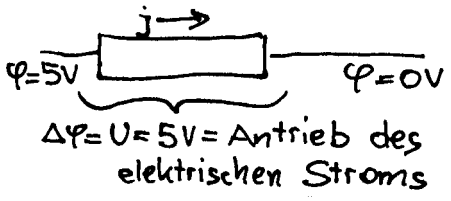


Abb. 2.12. Elektrische Potentialdifferenz als Antrieb eines elektrischen Stroms

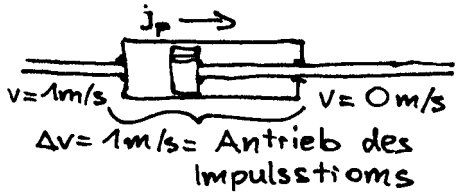


Abb. 2.13. Geschwindigkeitsdifferenz als Antrieb eines Impulsstrom

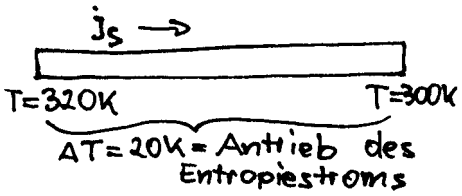


Abb. 2.14. Chemische Potentialdifferenz als Antrieb eines Stoffmengenstroms

Abb. 2.15. Temperaturdifferenz als Antrieb eines Entropiestroms

Manchmal ist $I_S \propto \text{grad}\, T$ (Wärmeleitungsgleichung). Bei dem Vorgang wird Entropie erzeugt:

$TI_{S,\text{erzeugt}} = \Delta TI_{S,\text{hinein}}$

Name der Vorgangs: Wärmeleitung.

Wir fassen zusammen: Eine Differenz der intensiven Variablen stellt einen Antrieb für einen Strom der zugehörigen extensiven Variablen dar.

Die Ströme der extensiven Größen fließen nur solange, wie der Antrieb, d.h. die Differenz der intensiven Größen, von Null verschieden ist. Ist diese Differenz gleich Null, so sagt man es bestehe Gleichgewicht bezüglich der zugehörigen extensiven Größe, Abb. 2.16 - 2.19.

Abb. 2.16. Elektrisches Gleichgewicht: Es fließt kein Q mehr wenn $\varphi_1 = \varphi_2$

Abb. 2.17.Rotationsgleichgewicht: Es fließt kein L mehr wenn $\omega_1 = \omega_2$

Abb. 2.18.Chemisches Gleichgewicht: Es fließt keine Stoffmenge mehr wenn $\mu_{\text{Brot}} = \mu_{\text{Knäckebrot}}$

Abb. 2.19. Thermisches Gleichgewicht: Es fließt kein S mehr wenn $T_1 = T_2$

3. Elektrischer Strom und Stoffmengenstrom

3.1 Das chemische Potential

Wie ein elektrischer Potentialunterschied einen Antrieb für einen Q-Strom darstellt, so stellt eine Differenz des chemischen Potentials $\Delta\mu$, einen Antrieb für einen n-Strom dar. Der Wert des chemischen Potentials bezieht sich stets auf einen bestimmten Stoff. Man schreibt daher im Zweifelsfall den Stoffnamen in Klammern hinter das μ. Um eine qualitative Vorstellung von den Werten des chemischen Potentials und dem Zusammenhang zwischen μ und anderen physikalischen Größen zu bekommen, braucht man nur nachzusehen, von wo nach wo Stoffe fließen.

Ein Gas oder eine Flüssigkeit fließt in einem Rohr von Stellen hohen zu Stellen niedrigen Drucks. Das chemische Potential hängt also vom Druck ab, es wächst mit zunehmendem Druck.

Wasserdampf, der mit Luft vermischt ist, "diffundiert" von Stellen hoher zu Stellen niedriger Konzentration. Ebenso diffundiert in Wasser gelöstes Salz von Stellen hoher zu Stellen niedriger Konzentration. μ nimmt also mit der Konzentration zu.

Bei trockener Luft verdunstet eine Wasserpfütze. Das chemische Potential des Wassers in der Pfütze ist also höher als in der Luft.

Benutzt man Silicagel zum Trocknen der Luft, so ist das chemische Potential des Wassers im Silicagel niedriger als in der Luft. Das chemische Potential eines Stoffes hängt also auch von dem Medium ab, in dem sich der Stoff befindet.

3.2 Stoffe und Teilchen

Kommt es bei einem System nicht auf die Menge an, so spricht man von einem Stoff. 1 g Luft ist derselbe Stoff wie 1 kg Luft. Um einen Stoff zu charakterisieren, kommt es aber sehr wohl auf den Zusammenhang der Werte der mengenartigen Größen untereinander an:

Für Wasser z.B. ist m/n = 18 g/mol.

Für freie Elektronen ist m/n = 0,55 mg/mol und Q/m = 1,76 x 10^{11}C/kg.

Für Licht ist E/p = 3 x 10^{8}m/s.

Einige der mengenartigen Größen sind quantisiert. Was heißt das? Kann ein System von einer Größe nichts abgeben oder aufnehmen, so ist der Wert der Größe ein ganzzahliges Vielfaches eines Elementarquantums z.B.:

$Q = l_1 \cdot e$ $\qquad e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C = Elementarladung

$L = l_2 \cdot \frac{\hbar}{2}$ $\qquad \hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Js = elementares Drehimpulsquantum (Planck – Konstante)

$n = l_3 \cdot \tau$ $\qquad \tau = 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ mol = Elementarmenge (1/Avogadrokonstante)

l_1, l_2, l_3 = ganze Zahlen

Der Quotient $F = e/\tau = 0{,}965 \cdot 10^5$ C/mol heißt Faraday-Konstante.

Ein System, bei dem die Stoffmenge den Wert $n = 1\tau$ hat, nennt man ein Teilchen. Unter bestimmten Umständen darf man sich darunter ein kleines lokalisierbares Individuum vorstellen, oft versagt aber diese Vorstellung.

Das Teilchen Elektron z.B. ist ein System mit

$n = 1\tau, Q = 1e, L = \hbar/2, E = \ldots,$ etc.

Teilchen für die $Q \neq 0$ ist, nennt man Ladungsträger.

Beispiele für Ladungsträger:
freies Elektron
bewegliches Elektron in Halbleiter
Defektelektron in Halbleiter
freies Positron
Cu^{++}-Ion in wäßriger Lösung
Myon

So wie zu einer bestimmten Menge eines Stoffs ein Ensemble der Werte aller mengenartigen Größen gehört, so gehört zu einem Stoffstrom ein Ensemble von Strömen der entsprechenden mengenartigen Größen. So entspricht einem Elektronenstrom ein Ensemble von Strömen bestehend aus einem elektrischen Strom (Stärke I), einem Massenstrom (Stärke I_m), einem Stoffmengenstrom (Stärke I_n), einem Entropiestrom (Stärke I_S) . . . Die Stromstärken hängen für einen bestimmten Stoff wieder auf charakteristische Art zusammen. So ist für einen Strom freier Elektronen $I/I_m = 1{,}76 \cdot 10^{11}\text{C/kg}$.

Die mengenartigen Größen sind mehr oder weniger stark "aneinander gekoppelt". So ist elektrische Ladung stets fest an Stoffmenge und an Masse gekoppelt. Es gibt keinen elektrischen Strom ohne Massenstrom und ohne Stoffmengenstrom. Es gibt also keinen rein elektrischen Strom. Daraus folgt, daß man einen Stoff- oder Teilchenstrom auf verschiedene Arten antreiben kann.

So kann man einen Elektronenstrom antreiben:

– indem man einen elektrischen Potentialgradienten erzeugt; dieser Potentialgradient "zieht" an der Ladung der Elektronen;

– indem man einen Gradienten des chemischen Potentials erzeugt; dieser zieht an der Stoffmenge der Elektronen;

– indem man einen T-Gradienten erzeugt; dieser zieht an der Entropie der Elektronen.

3.3 Das elektrochemische Potential

Wir betrachten den Strom irgendwelcher Ladungsträger zwischen den Stellen a und b einer Leitung, Abb. 3.1. Haben alle intensiven Variablen bei a und b denselben Wert, bis auf das elektrische Potential φ, ist also $T_a = T_b$, $\mu_a = \mu_b$ etc. $\varphi_a \neq \varphi_b$, so wird der Teilchenstrom durch die elektrische Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_2$ angetrieben. In der Leitung wird Energie dissipiert gemäß

$$P = TI_{S,\text{erzeugt}} = (\varphi_a - \varphi_b)I.$$

Haben dagegen alle intensiven Variablen außer μ bei a und b denselben Wert, ist also $T_a = T_b$, $\varphi_a = \varphi_b$ etc. . . . $\mu_a \neq \mu_b$, so wird der Teilchenstrom durch die chemische Spannung $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$ angetrieben, und in der Leitung wird Energie dissipiert gemäß $P = TI_{S,\text{erzeugt}} = (\mu_a - \mu_b)\, I_n$.

Haben sowohl φ als auch μ bei a und b unterschiedliche Werte, so hat der Strom zwei Antriebe: $\Delta\varphi$ und $\Delta\mu$. Diese können an den Elektronen in dieselbe oder in die entgegengesetzte Richtung "ziehen".

Die dissipierte Energie ist dann

$$P = TI_{S,\text{erzeugt}} = (\varphi_a - \varphi_b)\, I + (\mu_a - \mu_b)\, I_n.$$

Nun sind I und I_n aneinander gekoppelt. Ein Teilchen ($n = 1\tau$) trägt eine ganze Zahl z von Elementarladungen:

$$Q = ze.$$

Für Elektronen zum Beispiel ist $z = -1$.

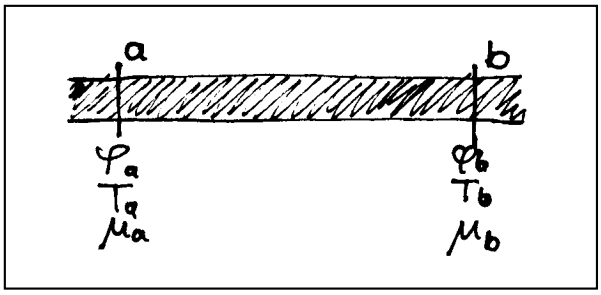


Abb. 3.1. Ein Stoffstrom kann verschiedene Antriebe haben.

Elektrischer und Stoffmengenstrom hängen also zusammen gemäß

$$\frac{I}{I_n} = \frac{ze}{\tau}$$

und mit $e/\tau = F$ (= Faraday-Konstante) folgt

$$I = zFI_n \tag{3.1}$$

Damit wird die dissipierte Energie

$$P = [(\varphi_a - \varphi_b)zF + (\mu_a - \mu_b)]I_n$$

Man nennt die Größe

$$\eta = \mu + zF\varphi \tag{3.2}$$

das elektrochemische Potential der Ladungsträger in der entsprechenden Umgebung. Damit wird

$$P = (\eta_a - \eta_b)I_n \tag{3.3}$$

Der Gesamtantrieb des Teilchenstroms ist also durch die elektrochemische Spannung

$\Delta\eta = \eta_a - \eta_b$ gegeben.

Es fließt kein Teilchenstrom, wenn $\Delta\eta = 0$, wenn also $\eta_a = \eta_b$ ist. Das bedeutet, daß

$$\mu_a - \mu_b = -zF(\varphi_a - \varphi_b)$$

ist. "Stromlosigkeit" heißt also nicht, daß das elektrische, sondern daß das elektrochemische Potential überall gleich ist.

3.4 Die Kontaktspannung

Das chemische Potential der Elektronen ist in unterschiedlichen Leitern verschieden. Es besteht also für die Elektronen zwischen zwei Metallen eine chemische Potentialdifferenz. Legt man fest, daß das chemische Potential freier Elektronen im Vakuum den Wert 0 G hat, so gelten die Werte von Tabelle 3.1.

Zwischen Kupfer und Platin z.B. besteht für Elektronen eine chemische Potentialdifferenz μ(Cu)-μ(Pt)= 85 kG. Das chemische Potential der Elektronen ist im Cu größer als im Pt. Bringt man Cu und Pt in Berührung, so fließen zunächst Elektronen, dem chemischen Potentialgefälle nach, vom Kupfer zum Platin. Dadurch laden sich die beiden Metalle entgegengesetzt auf, und zwar das Kupfer positiv und das Platin negativ. Das elektrische Potential des Kupfers nimmt dabei zu, das des Platins ab. Es entsteht also ein elektrischer Antrieb in die dem Stoffmengenstrom entgegengesetzte Richtung. Wenn $F\Delta\varphi = \Delta\mu$, also $\Delta\eta = 0$ geworden ist, wenn also elektrischer und chemischer Antrieb entgegengesetzt gleich sind, fließt kein Teilchenstrom mehr. Es herrscht elektrochemisches Gleichgewicht.

Zwischen zwei Stücken aus verschiedenen Metallen, die sich berühren, besteht also eine elektrische Spannung, die Kontaktspannung oder Voltaspannung. Wir berechnen die Kontaktspannung zwischen Kupfer und Platin.

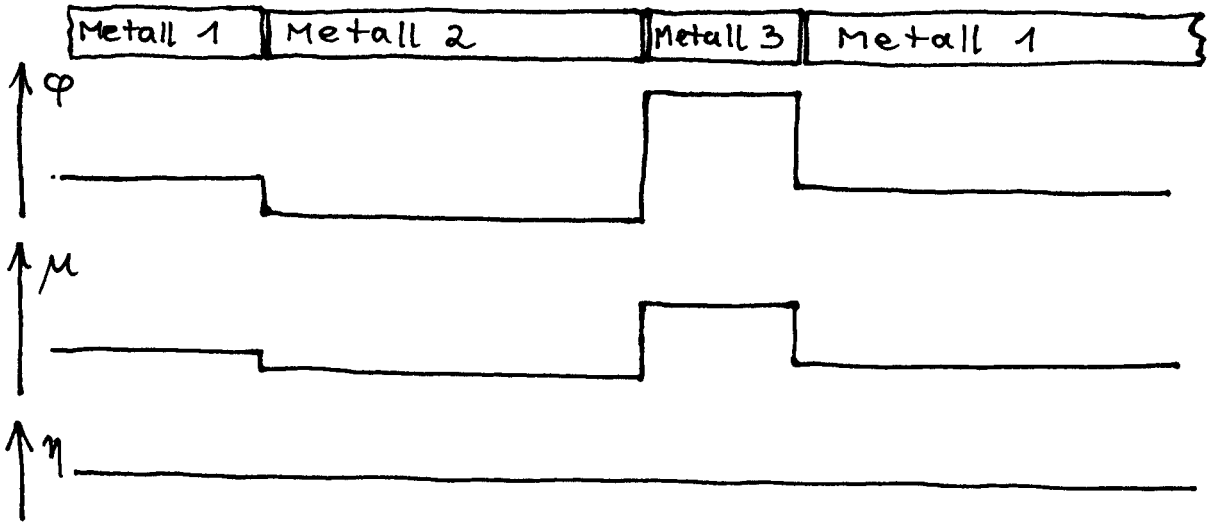
Aus $\eta = 0$ folgt $\Delta\varphi = (1/F)\Delta\mu$.

Mit $F = 0{,}965 \cdot 10^5$C/mol und $\Delta\mu = 85$ kG erhält man

$\Delta\varphi = \varphi$(Cu) – φ(Pt) = 0,88 V.

Tabelle 3.1. Chemische Potentiale der Elektronen in einigen Metallen

Stoff	μ (in kG)
Ag	– 460
Cs	– 170
Cu	– 430
Ni	– 445
Pt	– 515
W	– 435



Trotz (oder besser: wegen) dieser Spannung fließt kein elektrischer Strom.

Baut man aus verschiedenen Metallen einen geschlossenen “Kreis” auf, so fließt natürlich kein Strom, Abb. 3.2.

Man kann die Kontaktspannung nicht einfach mit einem Voltmeter messen. Abbildung 3.3 zeigt, warum. Ein Voltmeter zeigt immer die elektrochemische Spannung an. Nur wenn das chemische Potential in den beiden Punkten, zwischen denen man mißt, dasselbe ist, ist die elektrochemische mit der elektrischen Spannung identisch.

Wenn man trotzdem so tut, als zeige das Voltmeter die elektrische Spannung an, so gibt es in der Regel kein Unglück, denn in vielen Fällen, in denen man glaubt, man brauche die elektrische Spannung, braucht man tatsächlich die elektrochemische; etwa zur Berechnung von I nach dem Ohmschen Gesetz.

Die Messung der elektrischen Potentialdifferenz zwischen zwei Materialien ist sehr schwierig. Die Werte von Tabelle 3.1 sind daher mit großen Unsicherheiten behaftet.

3.5 Das Prinzip der galvanischen Zelle

In der Anordnung, die in Abbildung 3.4 dargestellt ist, fließt ein elektrischer Strom in einem geschlossenen “Kreis”. Sind die beiden Anschlüsse der Batterie aus demselben Material, so ist das elektrische Potential des Pluspols höher als das des Minuspols. Außerhalb der Batterie fließt die elektrische Ladung vom hohen zum niedrigen Potential, in der Batterie vom niedrigen zum hohen. Außerhalb der Batterie wird der elektrische Strom also durch das elektrische Potentialgefälle angetrieben. Innerhalb wird er gehemmt. Wie kommt aber die Elektrizität in der Batterie den elektrischen Potentialberg hinauf?

Außerhalb der Batterie seien die Ladungsträger Elektronen. Ihr chemisches Potential hat in den beiden Anschlüssen der Batterie denselben Wert. Ihr elektrochemisches Potential $\eta = \mu - F\varphi$ nimmt auf dem Weg vom Minus- zum Pluspol ab. Die Elektronen folgen dem elektrochemischen Potentialgefälle und fließen vom Minus- zum Pluspol. Sie fließen, weil an ihrer Ladung das elektrische Potentialgefälle zieht.

In der Batterie können nicht die Elektronen Ladungsträger sein, denn Elektronen müßten ja in der Batterie den elektrochemischen Potentialberg hinauffließen. In der Batterie wird die Ladung daher von einem Stoff getragen, für den es wieder den elektrochemischen Potentialberg hinunter geht. Da es in der Batterie den elektrischen Berg hinaufgeht, muß für diesen Stoff ein chemischer Potentialabfall existieren, der die elektrische Potentialdifferenz überkompensiert.

Um einen elektrischen Strom mit einer galvanischen Zelle aufrechtzuerhalten, sind also mindestens zwei verschiedene Ladungsträgerarten nötig.

Wir betrachten eine Realisierung einer galvanischen Zelle, die zwar praktisch bedeutungslos, dafür physikalisch aber leicht durchschaubar ist, Abb. 3.5. Zwei Platinstücke A und C ("Elektroden") sind über die Schwefelsäure B ("Elektrolyt") miteinander verbunden. An den Platinelektroden befindet sich je eine Kupferzuleitung. Platin hat die Eigenschaft, daß sich Wasserstoff in ihm sehr gut löst. Der Wasserstoff ist dabei vollständig ionisiert, d.h. in H^+ (Protonen) und Elektronen zerfallen.

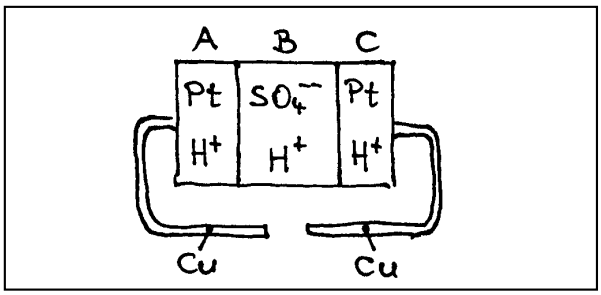


Abb. 3.5. Einfache Realisierung einer galvanischen Zelle

In den beiden Platinelektroden befinde sich nun unterschiedlich viel H^+. Die Schwefelsäure stellt eine Verbindung zwischen den Elektroden dar, die für H^+-Ionen durchlässig und für Elektronen undurchlässig ist. Im Fachjargon heißt eine solche nur für bestimmte Stoffe durchlässige Verbindung eine Membran.

(Andere Beispiele für Gegenstände, die für bestimmte Ströme durchlässig sind und für andere nicht: Kupfer läßt Elektronen durch aber keine H^+-Ionen; Glas läßt Licht durch aber keine Luft).

Wegen dieser leitenden Verbindung ist das elektrochemische Potential der Protonen in den drei Bereichen A, B, und C gleich, es herrscht elektrochemisches Gleichgewicht:

$$\eta_A(H^+) = \eta_B(H^+) = \eta_C(H^+)$$

Ist die H^+-Konzentration, und damit das chemische Potential des H^+, in A größer als in C, so muß das elektrische Potential um den entsprechenden Betrag niedriger sein. Mit $z = 1$ wird

$$\mu_A(H^+) + F\varphi_A = \mu_C(H^+) + F\varphi_C \Rightarrow \Delta\varphi = -(1/F)\,\Delta\mu\,(H^+).$$

Da das chemische Potential der Elektronen bei A und C gleich ist, ist ihr elektrochemisches Potential verschieden.

$$\Delta\eta(e^-) = \Delta\mu(e^-) - F\Delta\varphi = -F\Delta\varphi = \Delta\mu(H^+)$$

Zwischen den Anschlüssen herrscht also eine mit dem Voltmeter meßbare (elektrochemische) Spannung. Unterscheiden sich die Konzentrationen um einen Faktor 50, so ist $\Delta\varphi \approx 0{,}1$ V.

Verbindet man nun die beiden Anschlüsse über einen Energieverbraucher, Abb. 3.6, so vermindert man die elektrische Spannung zwischen A und C. Das elektrochemische Gleichgewicht des H^+ wird damit gestört. Die chemische Spannung des H^+ zwischen A und C, die das H^+ zur geringeren Konzentration treiben möchte, wird durch die elektrische Spannung nicht mehr voll kompensiert, und es fließt ein H^+-Strom durch die Säure von A nach C.

Die Stoffmengenstromstärke der Protonen durch den Elektrolyten ist dabei genauso groß wie die

der Elektronen im Draht. Das H^+ überwindet den elektrischen Potentialanstieg dadurch, daß es einen chemischen Potentialberg hinunterfließt.

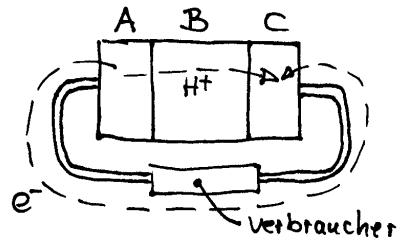
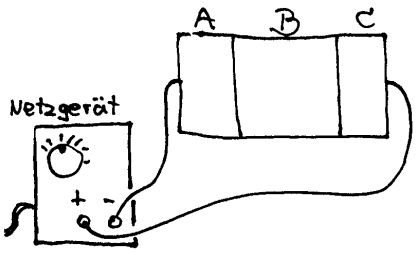


Abb. 3.6. Von A nach C fließen H^+- Ionen durch den Elektrolyten und Elektronen durch den Verbraucher

Der Energievorrat dieser Zelle ist erschöpft, wenn sich die H^+-Konzentrationen bei A und C angeglichen haben. Die Zelle ist dann leergeworden. (Das Wort "leer" bezieht sich auf die verfügbare Energie.)

Statt die elektrische Spannung, die der chemischen bei offenem Stromkreis das Gleichgewicht hielt, zu verringern, kann man sie aber auch erhöhen, Abb. 3.7. Dann wird das elektrochemische Gleichgewicht in der anderen Richtung gestört. Das elektrische Potentialgefälle, das die H^+-Ionen nach A zieht, ist größer als das chemische, das sie nach C zieht, und es fließt ein H^+-Strom von der niedrigen Konzentration zur hohen. Die Zelle wird geladen.



'. Die galvanische Zelle wird geladen

In Abbildung 3.8 sind $\mu(e^-)$, $\eta(e^-)$ $\mu(H^+)$, $\eta(H^+)$ und φ für die folgenden 3 Fälle dargestellt: 1) elektrochemisches Gleichgewicht für H^+, 2) Entladen der Zelle, 3) Laden der Zelle. Die beiden Cu-Drahtenden rechts und links hat man sich hinten herum verbunden zu denken.

Man kann nun diese Zelle so modifizieren, daß sie wie eine Brennstoffzelle arbeitet. (Eine Brennstoffzelle ist eine Zelle, die nie leer wird, weil man ihr den "Brennstoff", d.h. den Stoff, der in ihr vom hohen zum niedrigen chemischen Potential fließt, kontinuierlich zuführt.)

Man setzt hinter jede Elektrode ein Reservoir mit Wasserstoff und sorgt dafür, daß die Protonenkonzentrationen in den beiden Elektroden ihre unterschiedlichen Werte beibehalten. Bei geschlossenem Stromkreis, Abb. 3.9, fließt dann Wasserstoff aus dem Reservoir ins Platin A hinein. Dabei teilt er sich in Protonen und Elektronen. Die Elektronen fließen, dem elektrischen Potentialgefälle nach, durch den Draht und den Energieverbraucher nach C, die Protonen gegen das elektrische Potentialgefälle, dem chemischen Potentialgefälle nach, durch den Elektrolyten auch nach C.

Protonen und Elektronen vereinigen sich an der Grenzfläche zwischen C und dem rechten H_2-Reservoir und gehen in dieses H_2-Reservoir auf niedrigem Druck über. Insgesamt hat sich der Wasserstoff also einfach entspannt.

Verfolgt man die elektrische Ladung auf ihrem geschlossenen Weg im Stromkreis, so erkennt man, daß eine wichtige Funktion der Elektroden darin besteht, daß hier die elektrische Ladung ihren Träger wechselt.

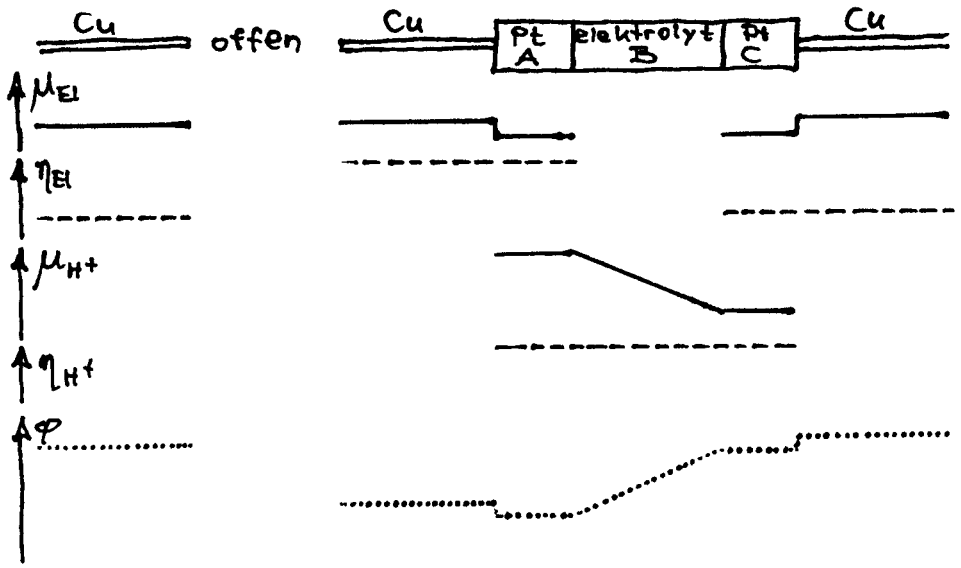


Abb. 3.8. Verlauf des elektrischen Potentials, sowie der chemischen und elektrochemischen Potentiale von H^+- Ionen und Elektronen (a) im elektrochemischen Gleichgewicht, (b) beim Entladen und (c) beim Laden der galvanischen Zelle

3.6 Brennstoffzelle - Elektrolyse

Ist die chemische Reaktion

$A + B \leftrightarrow C + D$

im Gleichgewicht, so ist die Summe der chemischen Potentiale der linken Seite gleich der der rechten:

$\mu(A) + \mu(B) = \mu(C) + \mu(D)$.

Für eine Reaktion $A + B \rightarrow C$ gilt im Gleichgewicht $\mu(A) + \mu(B) = \mu(C)$ und für eine Reaktion $A + B \rightarrow 2C$ ist $\mu(A) + \mu(B) = 2\mu(C)$.

Wir betrachten die Reaktion

$2H_2 + O_2 \leftrightarrow 2H_2O$

Das chemische Potential der rechten Seite ist bei Normaldruck und Zimmertemperatur um 474 kG niedriger als das der linken. Es besteht also ein Antrieb von

$\Delta\mu = (2\mu(H_2) + \mu(O_2)) - 2\,\mu(H_2O) = 474$ kG

Diesen Antrieb nutzt man in der Wasserstoff-Sauerstoff-Brennstoffzelle aus, um einen elektrischen Strom anzutreiben. Bei der Elektrolyse, d.h. elektrischen Zerlegung von Wasser in Wasserstoff und Sauerstoff, muß man diesen Antrieb überwinden.

Abbildung 3.10 zeigt den Aufbau einer Wasserstoff-Sauerstoff-Zelle. In jede der porösen Elektroden kann von der einen Seite das Gas und von der anderen der Elektrolyt eintreten, aber weder Gas noch Elektrolyt können auf der jeweils anderen Seite die Elektrode wieder verlassen. Der Elektrolyt ist für H^+-Ionen leitfähig, nicht dagegen für Elektronen und Sauerstoffionen.

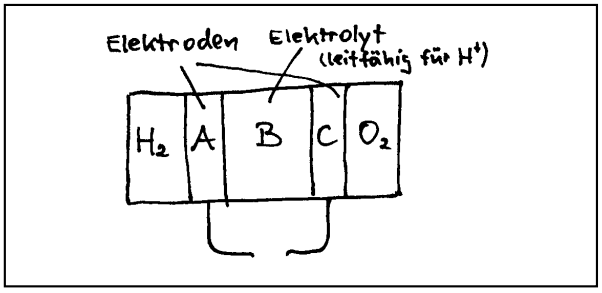


Abb. 3.10. Wasserstoff-Sauerstoff-Zelle

In den Elektroden herrschen Gleichgewichte, die durch die folgenden Reaktionsgleichungen beschrieben werden:

Elektrode A	Elektrode C
$2H_2 \leftrightarrow 4H^+ + 4e^-$	$2H_2O \leftrightarrow 4H^+ + 4e^- + O_2$
$2\mu(H_2) = 4\mu_A(H^+) + 4\mu(e^-)$	$2\mu(H_2O) = 4\mu_C(H^+) + 4\mu(e^-) + \mu(O_2)$

Das chemische Potential der Elektronen ist in A und C gleich, da die Elektroden aus demselben Material bestehen mögen. Das chemische Potential von H^+ dagegen ist sehr verschieden, denn durch die Verbrennung in C wird seine Konzentration in C niedrig gehalten. Wir suchen die elektrische Potentialdifferenz zwischen A und C. Wir ziehen dazu die rechte Gleichung von der linken ab:

$$(2\mu(H_2) + \mu(O_2)) - 2\mu(H_2O) = 4\mu_A(H^+) - 4\mu_C(H^+) = 4(\eta_A(H^+) - F\varphi_A) - 4(\eta_C(H^+) - F\varphi_C)$$

Im letzten Gleichungsschritt wurde $\eta = \mu + zF\varphi$ verwendet. Da die H^+-Ionen zwischen A und C durch den Elektrolyten hindurch frei hin- und herströmen können, herrscht für H^+ zwischen A und C elektrochemisches Gleichgewicht: $\eta_A(H^+) = \eta_C(H^+)$. Man erhält also

$$\Delta\mu = (2\mu(H_2) + \mu(O_2)) - 2\mu(H_2O) = 4F(\varphi_C - \varphi_A) = 4FU$$

Die elektrische Spannung zwischen A und C ist also:

$$U = \frac{1}{4F}\Delta\mu \tag{3.4}$$

wo $\Delta\mu$ die chemische Spannung der in der Zelle insgesamt ablaufenden Reaktion ist. Mit $\Delta\mu$ = 474 kG und F = 96500 C/mol erhält man U = 1,23 V.

Dieser Wert gilt für den Fall, daß für H^+ zwischen den Elektroden elektrochemisches Gleichgewicht herrscht. Es fließt kein Teilchenstrom und kein elektrischer Strom.

Schließt man den Stromkreis über einen Verbraucher, so ist der chemische Antrieb für die H^+-Ionen größer als der elektrische, und es fließt ein H^+-Strom von A nach C. In der Elektrode C wird Wasser gebildet (der Elektrolyt wird dadurch vermehrt und verdünnt). Die Zelle arbeitet als Brennstoffzelle.

Sorgt man dagegen durch eine äußere Energiequelle dafür, daß der elektrische Antrieb der H^+-Ionen von C nach A größer wird als der chemische von A nach C, so fließt H^+ von C nach A, und in der Elektrode C wird Wasser zersetzt. Die Zelle arbeitet jetzt als Elektrolysezelle.

In technischen Galvanischen Elementen (Bleiakkumulator, Leclanché-Element, Daniell-Element, Weston-Element) stellen die Elektroden gleichzeitig das "Brennstoffreservoir" dar. Das Elektrodenmaterial löst sich im Elektrolyten auf. Es hat, solange es Bestandteil der Elektrode ist, ein anderes chemisches Potential als in der Lösung. Diese chemische Potentialdifferenz benutzt man als Antrieb für den elektrischen Strom.

3.7 Die Kopplung zwischen Strömen - die Onsager-Beziehung

Wir wollen den mathematischen Formalismus an einem einfachen Beispiel kennenlernen: an der bereits behandelten Kopplung zwischen elektrischem Strom und Stoffmengenstrom.

Ein Stoffmengenstrom, der in einer Leitung fließt, kann auf zwei Arten angetrieben werden, Abb. 3.11:

– durch ein Gefälle grad μ des chemischen Potentials;

– durch ein Gefälle grad φ des elektrischen Potentials, das an der fest an die Stoffmenge gekoppelten Ladung zieht.

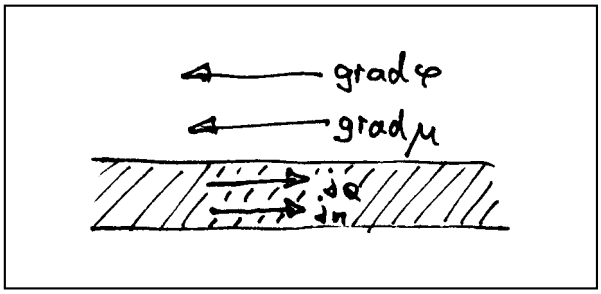


Abb. 3.11. Da n an Q gekoppelt ist, kann sowohl der n-Strom als auch der Q-Strom durch einen φ- oder einen μ-Gradienten angetrieben werden.

Entsprechend gilt, daß ein Ladungsstrom angetrieben werden kann:

- durch einen φ-Gradienten;

- durch einen μ-Gradienten.

Mathematisch kann man das so ausdrücken:

$$j_n = L_{11}\ \text{grad}\,\mu + L_{12}\ \text{grad}\,\varphi \tag{3.5a}$$

$$j_Q = L_{21}\ \text{grad}\,\mu + L_{22}\ \text{grad}\,\varphi \tag{3.5b}$$

j_n und j_Q sind die Stoffmengen- und die Ladungsstromdichte. Wir betrachten im Folgenden den Fall, daß die Gradienten von μ und von φ parallel zur x-Richtung liegen. Die Gleichungen (3.5a) und (3.5b) vereinfachen sich dann zu:

$$j_n = L_{11}\frac{d\mu}{dx} + L_{12}\frac{d\varphi}{dx} \tag{3.6a}$$

$$j_Q = L_{21}\frac{d\mu}{dx} + L_{22}\frac{d\varphi}{dx} \tag{3.6b}$$

Da Q fest an n gekoppelt ist, sind die Gleichungen linear abhängig: $j_Q = zFj_n$ (F = Faradaykonstante, z = ganze Zahl). Das Analoge wird nicht mehr der Fall sein, wenn wir andere Ströme wählen, etwa wenn wir statt j_n die Entropiestromdichte j_S betrachten (Abschnitt 3.8).

Wir interpretieren zunächst die Koeffizienten L_{ik}.

L_{11} ist ein Maß für die Stärke des n-Stroms, der durch eine gegebenes μ-Gefälle verursacht wird, für den Fall, daß kein weiterer Antrieb vorhanden ist ($d\varphi/dx = 0$). Es hat die Bedeutung einer Stoffleitfähigkeit.

L_{22} ist entsprechend ein Maß für die Stärke des elektrischen Stroms, der durch ein gegebenes φ-Gefälle verursacht wird, solange kein μ-Gefälle vorhanden ist. Für $d\mu/dx = 0$ ist $j_Q = L_{22}\, d\varphi/dx$. Der Vergleich mit $j_Q = -\sigma\, d\varphi/dx$ (siehe Gleichung (2.8)) zeigt, daß $L_{22} = -\sigma$ ist.

L_{12} und L_{21} bringen zum Ausdruck, daß zwischen j_n und j_Q eine Kopplung besteht. L_{12} gibt an, wie stark ein n-Strom durch einen φ-Gradienten beeinflußt wird und L_{21}, wie stark ein Q-Strom durch einen μ-Gradienten angetrieben wird. Es ist einleuchtend, daß, falls L_{12} groß ist, auch L_{21} groß sein muß, und umgekehrt. Es gibt ein allgemeines Theorem, das behauptet, daß

$$L_{12} = L_{21} \tag{3.7}$$

gilt, und zwar immer, wenn sich zwei Ströme in der Form der Gleichungen (3.6a) und (3.6b) schreiben lassen. Diese Beziehung heißt nach ihrem Entdecker Onsager-Beziehung. Sie kann in unserem konkreten Fall leicht bewiesen werden.

Der Antrieb eines Teilchenstroms ist durch $d\eta/dx$ gegeben:

$$j_n = L_1\frac{d\eta}{dx} = L_1\frac{d(\mu + zF\varphi)}{dx} = L_1\frac{d\mu}{dx} + L_1 zF\frac{d\varphi}{dx}$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten mit denen in Gleichung (3.6a) folgt:

$L_{11} = L_1$ und $L_{12} = L_1 zF$

und daraus ergibt sich

$L_{12} = zFL_{11}$.

Mit $j_Q = zFj_n$ wird, wenn man den Fall mit $d\varphi/dx = 0$ betrachtet, aus Gln. (3.6a) und (3.6b):

$$j_n = L_{11}\frac{d\mu}{dx}$$

$$j_Q = zFj_n = L_{21}\frac{d\mu}{dx}$$

Dividiert man durcheinander, so ergibt sich:

$L_{21} = zFL_{11}$.

Es ist also $L_{12} = L_{21}$ q. e. d.

Dividiert man Gl. (3.6b) durch Gl. (3.6a), nachdem man $d\mu/dx = 0$ gesetzt hat, so erhält man

$L_{22} = zFL_{12}$

Wir können nun alle 4 Koeffizienten L_{ik} durch die elektrische Leitfähigkeit σ und die Faradaykonstante F ausdrücken:

$$L_{22} = -\sigma \qquad L_{12} = L_{21} = -\frac{\sigma}{zF} \qquad L_{11} = -\frac{\sigma}{z^2F^2}$$

Wir beschreiben nun die Stärke der Kopplung zwischen Q- und n-Strom durch eine dimensionslose Konstante m:

$$m = \left(\frac{j_n}{j_Q}\right)_{d\mu/dx=0} \cdot \left(\frac{j_Q}{j_n}\right)_{d\varphi/dx=0}$$

Der erste Faktor drückt aus, wie stark n von Q mitgenommen wird, wenn für n kein eigener Antrieb besteht ($d\mu/dx = 0$), der zweite ist entsprechend ein Maß dafür, wie stark Q von n mitgenommen wird. Aus Gln. (3.6a) und (3.6b) ergibt sich

$$m = \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{{L_{12}}^2}{L_{11}L_{22}}$$

Wir setzen die Ausdrücke für L_{21}, L_{12} und L_{22} ein:

$$m = \frac{\sigma^2/(zF)^2}{\left[-\sigma/(z^2F^2)\right](-\sigma)} = 1$$

In unserem Fall der festen Kopplung ist $m = 1$. Bei anderen Strömen erwarten wir kleinere Werte für m.

3.8 Die Kopplung zwischen elektrischem Strom und Entropiestrom

Die Kopplung zwischen n und Q ist ein trivialer Sonderfall. Man kann Gln. (3.6a) und (3.6b) im vorigen Abschnitt durch eine einzige Gleichung ersetzen:

$$j_n = -\frac{\sigma}{z^2F^2}\frac{d\eta}{dx}$$

j_Q berechnet man aus j_n einfach durch Multiplikation mit zF.

Besteht nun neben dem η-Gefälle noch ein Temperaturgefälle, so können wir auf Gleichungen vom Typ der Gln. (3.6a) und (3.6b) nicht mehr verzichten:

$$j_n = L_{11}\frac{d\eta}{dx} + L_{12}\frac{dT}{dx} \qquad (3.8a)$$

$$j_S = L_{21}\frac{d\eta}{dx} + L_{22}\frac{dT}{dx} \qquad (3.8b)$$

Die Koeffizienten L_{ik} haben jetzt natürlich andere Bedeutungen als im vorigen Abschnitt. Um die Gleichungen zu interpretieren, betrachten wir einige Spezialfälle:

1) $dT/dx = 0$, $d\eta/dx \neq 0$

$dT/dx = 0$ bedeutet: Die Temperatur des Leiters ist überall dieselbe. Gl. (3.8a) sagt, was wir schon wußten: Ein η-Gradient hat einen Stoffstrom zur Folge, z.B. einen Elektronenstrom. Gl. (3.8b) sagt nun, daß dieser Stoffstrom einen Entropiestrom mitschleppt.

2) $d\eta/dx = 0$, $dT/dx \neq 0$

Gl. (3.8b) sagt, was wir schon wußten: Ein *T*-Gradient hat einen *S*-Strom zur Folge (siehe Abschnitt 2.5). Gl. (3.8a) behauptet, daß ein *T*-Gradient einen Elektronenstrom antreibt, obwohl keine elektrochemische (und auch keine elektrische) Potentialdifferenz besteht.

3) $j_n = 0$

Wir verhindern das Fließen eines Teilchenstroms, indem wir den Leiter einfach nicht in einen Stromkreis einbauen. Aus Gl. (3.8a) folgt:

$$\frac{d\eta / dx}{dT / dx} = -\frac{L_{12}}{L_{11}}$$

Ein *T*-Gradient hat also einen Gradienten des elektrochemischen Potentials zur Folge.

Wir suchen nun den Zusammenhang zwischen den L_{ik} und den Materialkonstanten, die man in Tabellen findet.

Wir vergleichen Gl. (3.8a) für $dT/dx = 0$ mit der für $dT/dx = 0$ gültigen Gleichung

$$j_n = -\frac{\sigma_Q}{z^2 F^2}\frac{d\eta}{dx}$$

und erhalten

$$L_{11} = -\frac{\sigma_Q}{z^2 F^2}$$

(Wir geben hier der elektrischen Leitfähigkeit den Index *Q*, um sie von der Entropieleitfähigkeit σ_S zu unterscheiden).

Die experimentell gefundene Wärmeleitungsgleichung lautet

$$j_S = -\sigma_S \frac{dT}{dx}$$

(Siehe auch Abschnitt 2.5).

σ_S ist die Entropieleitfähigkeit. In den Tabellen wird gewöhnlich die "Wärmeleitfähigkeit" $\lambda = T\,\sigma_S$ angegeben.

Vergleich mit Gleichung (3.8b) für $d\eta/dx = 0$ liefert

$$L_{22} = -\sigma_S$$

Die Größe

$$\alpha = -\frac{1}{zF}\left(\frac{d\eta / dx}{dT / dx}\right)_{j_n = 0} \qquad (3.9)$$

heißt "Thermokraft" oder "Thermospannung". Sie ist tabelliert und gibt für den stromlosen Zustand die (elektrochemische) Spannung zwischen zwei Punkten pro Temperaturdifferenz zwischen den Punkten an (Maßeinheit V/K). Aus Gleichung (3.8a) folgt:

$$\frac{L_{12}}{L_{11}} = -\alpha z F$$

Wir berechnen noch die Kopplungsstärke *m*:

$$m = \left(\frac{j_n}{j_S}\right)_{d\eta/dx=0} \cdot \left(\frac{j_S}{j_n}\right)_{dT/dx=0} = \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{{L_{12}}^2}{L_{11}L_{22}}$$

$$m = \alpha^2 \frac{\sigma_Q}{\sigma_S}$$

Tabelle 3.2 enthält die Werte von σ_Q, σ_S und α für einige Metalle bei Normaltemperatur ($\approx$ 300 K).

Was bedeutet die Tatsache, daß manche α positiv, manche negativ sind? In Gleichung (3.9) ist

$(d\eta/dx)/(dT/dx)$ stets negativ, da das Temperaturgefälle ein entgegengesetzt gerichtetes elektrochemisches Potentialgefälle aufbaut. $\alpha < 0$ heißt daher $z < 0$, d.h. die Ladungsträger sind negativ, nämlich Elektronen. Ist $\alpha > 0$, so ist $z > 0$. Die Ladungsträger sind positiv. Man nennt sie "Defektelektronen".

Der Quotient σ_Q/σ_S (letzte Spalte von Tabelle 3.2) ist annähernd temperaturunabhängig, obwohl σ_Q und σ_S einzeln stark von T abhängen. Außerdem ist σ_Q/σ_S für alle Metalle nahezu gleich. Diese Tatsache heißt das Wiedemann-Franzsche Gesetz. Man erkennt daran, daß die Leitung von Q und von S durch dieselben Träger bewerkstelligt wird.

Für den Wert von m ergibt sich größenordnungsmäßig:

$m \approx 2{,}5 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{7} \approx 10^{-4}$

Die Kopplung zwischen Entropie- und Mengenstrom ist also sehr schwach.

Tabelle 3.2. Elektrische Leitfähigkeit, Entropieleitfähigkeit und Thermokraft für einige Metalle

Stoff	$10^{-7}\,\sigma_Q\,(\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1})$	$\sigma_S\,(\mathrm{JK}^{-2}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1})$	$10^{6}\alpha\,(\mathrm{VK}^{-1})$	$10^{-7}\sigma_Q/\sigma_S\,(\mathrm{K}^2\mathrm{V}^{-2})$
Ag	6,29	1,43	+1,5	4,4
Al	3,77	0,79	–1,7	4,8
Cs	0,5	0,12	+0,1	4,2
Cu	6,0	1,34	+1,86	4,5
Fe	1,03	0,27	+16,6	3,8
Hg	0,10	0,028	+8,6	3,6
Mg	2,25	0,52	+4,3	4,3
Na	2,38	0,47	–-8,7	5,0
Ni	1,46	0,303	–-20,0	4,8
Pb	0,48	0,118	–1,26	4,1
Pt	0,94	0,239	–5,13	3,9

3.9 Thermoelement und Peltier-Wärmepumpe

Zwischen den Enden eines Cu-Drahtes, die sich auf den unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 befinden, Abb. 3.12, besteht nach Gl. (3.8a) eine elektrochemische Potentialdifferenz. Ist der Temperaturunterschied nicht zu groß, so daß man die T-Abhängigkeit von σ vernachlässigen kann, so ist:

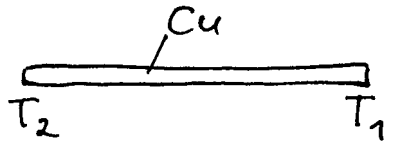


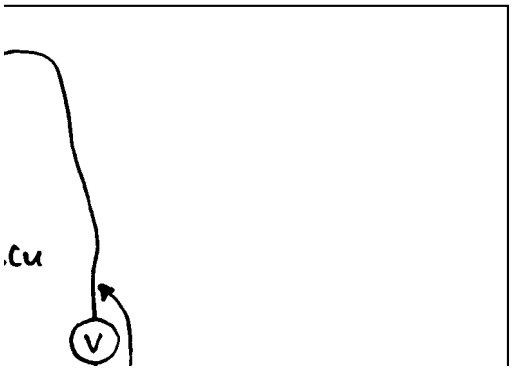
Abb. 3.12. Kupferdraht, dessen Enden sich auf verschiedener Temperatur befinden

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta T} = \frac{d\eta/dx}{dT/dx} = -zF\alpha$$

Und daraus folgt:

$$\Delta\eta = -zF\alpha\Delta T$$

Wir versuchen, $\Delta\eta$ mit dem Voltmeter zu messen. Es ergibt sich aber $\Delta\eta = 0$. Aus Abbildung 3.13a geht hervor, warum.



Wir ersetzen nun die zweite Verbindung zwischen der hohen und der niedrigen Temperatur durch ein anderes Metall, Abb. 3.13b. Es ist dann

$$\eta_A - \eta_B = -zF\alpha_{Cu}\,(T_1 - T_2)$$

und

$$\eta_B - \eta_C = -zF\alpha_{Al}\,(T_2 - T_1)$$

Daraus folgt

$$\eta_A - \eta_C = (\eta_A - \eta_B) + (\eta_B - \eta_C)$$

$$= -zF\,(\alpha_{Cu} - \alpha_{Al})\,(T_1 - T_2)$$

Zwischen den Punkten A und C herrscht also eine meßbare elektrochemische Potentialdifferenz. Eine solche Anordnung von zwei Leitern aus verschiedenem Material heißt Thermoelement. Sie wird u.a. zur Messung von Temperaturen verwendet.

Man findet dieselbe Spannung, wenn man den Kreis an irgendeiner anderen Stelle unterbricht, Abb. 3.14a. Entscheidend ist, daß die Kontaktstellen zwischen den beiden Metallen die unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 haben müssen.

Schließt man die beiden Metalle zu einem geschlossenen Kreis zusammen, Abb. 3.14b, so fließt ein Strom. Seine Stärke hängt vom Widerstand, also von Querschnitt und Länge der Leiter ab.

Schließt man statt des Voltmeters einen elektrischen Energieverbraucher an, so arbeitet die Anordnung als “Energiewandler”. In den Kontakt der hohen Temperatur T_2 fließt ein Energiestrom der Stärke $T_2 I_{S2}$ hinein. Am Kontakt

der niedrigen Temperatur fließt ein Energiestrom $T_1 I_{S1} < T_2 I_{S2}$ heraus. Der Differenzbetrag fließt über die Drähte "in Form von elektrischer Energie" heraus. Wegen der schwachen Kopplung zwischen S und n rutscht die Entropie im Wesentlichen den T-Berg hinunter und erzeugt dabei neue Entropie, statt den elektrischen Strom anzutreiben. Thermoelemente sind also stark irreversible Energiewandler. Ihr Wirkungsgrad ist viel schlechter als etwa der von Dampfturbine und Generator.

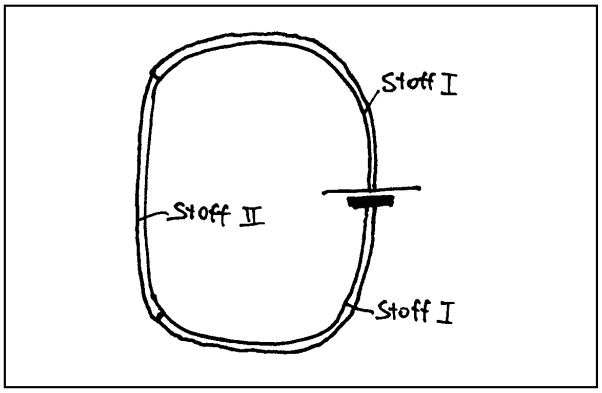


Abb. 3.15. Peltier-Wärmepumpe

Man kann das Thermoelement auch umgekehrt betreiben: Man pumpt mit einer elektrischen Energiequelle einen Teilchenstrom durch die beiden Kontakte, Abb. 3.15. Da der Teilchenstrom in den beiden Materialien die Entropie verschieden gut mitnimmt, kommt ein Nettoentropiestrom zwischen den beiden Kontakten zustande. Sind die Kontakte gegen die Umgebung thermisch isoliert, so erwärmt sich der eine, während sich der andere abkühlt. Diesen Vorgang nennt man Peltier-Effekt. Eine solche Wärmepumpe ist zwar sehr einfach, sie hat aber einen sehr schlechten Wirkungsgrad.

B. DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

4. Ladung und Polarisation als Quellen des elektrischen Feldes

4.1 Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und elektrischer Ladung

An elektrischer Ladung hängt stets ein elektrisches Feld. Das System elektrisches Feld ist erkennbar an

– den Kräften, die es auf elektrisch geladene Körper ausübt;

– der Energie, die in ihm enthalten ist.

Das elektrische Feld ist ein Teilsystem des elektromagnetischen Feldes: Seine Zustände bilden eine Teilmannigfaltigkeit der Zustände des elektromagnetischen Feldes.

Bringt man in ein gegebenes Feld an eine bestimmte Stelle einen punktförmigen, elektrisch geladenen Körper, eine sogenannte Punktladung, so wirkt auf die Punktladung eine Kraft (man erkennt sie daran, daß sich der Impuls des geladenen Punktes ändert). Verdoppelt man den Wert der Ladung Q, so verdoppelt sich auch der Betrag der Kraft $\boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{F} \propto Q$.

Der vektorielle Proportionalitätsfaktor ist also für das Feld ohne die zusätzliche Punktladung charakteristisch. Man nennt ihn die Stärke des elektrischen Feldes. Das SI-Symbol der elektrischen Feldstärke ist $\boldsymbol{E}$, die Maßeinheit N/C = V/m:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}Q \tag{4.1}$$

Das $\boldsymbol{E}$-Vektorfeld beschreibt das elektrische Feld eindeutig. Aus $\boldsymbol{E}$ können mechanische Spannung (Impulsstromdichte) und Energiedichte berechnet werden. Die Energiestromdichte im rein elektrischen Feld ist Null.

Die $\boldsymbol{E}$-Feldverteilung einer Punktladung Q folgt aus dem Coulombschen Gesetz:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.2}$$

$\boldsymbol{r}$ ist der Abstandsvektor von der Punktladung, und

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\text{C/(Vm)}$

ist die elektrische Feldkonstante. Addiert man zu einer Ladungsverteilung $\rho_1(\boldsymbol{r})$ eine andere Ladungsverteilung $\rho_2(\boldsymbol{r})$, so addieren sich die dazugehörigen Feldstärkeverteilungen vektoriell:

$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_1(\boldsymbol{r}) + \rho_2(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$.

Unter dem Fluß eines beliebigen Vektorfeldes $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ durch die Fläche S versteht man das Integral

$$\iint_S \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{A}$$

Ist $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ eine Stromdichte, so ist der Fluß die dazugehörige Stromstärke.

Wir berechnen den Fluß des $\boldsymbol{E}$-Feldes einer Punktladung durch eine geschlossene Kugelfläche, deren Mittelpunkt am Ort der Punktladung liegt, Abb. 4.1:

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \underset{\text{Kugel-oberfläche}}{\oiint} \frac{dA}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \underset{\text{Kugel-oberfläche}}{\oiint} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Bei der Rechnung wurde benutzt, daß $d\boldsymbol{A}$ überall zu $\boldsymbol{r}$ parallel ist.

Der Fluß durch eine beliebig geformte andere geschlossene Fläche, die um die Punktladung herumgelegt wird, hat denselben Wert, da außerhalb der Ladung nirgends Feldlinien beginnen oder enden.

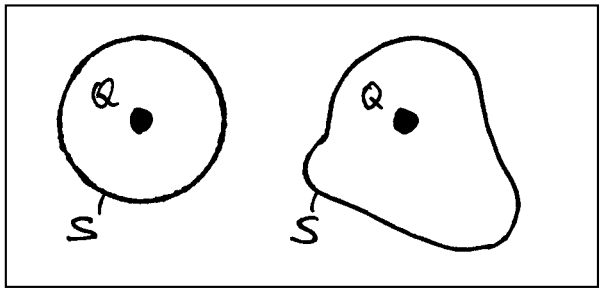


Abb. 4.1. Flächen, die eine Punktladung einschließen

Wir setzen nun ins Innere der geschlossenen Fläche eine beliebige andere Ladungsverteilung und nähern sie durch eine Menge von Punktladungen an. Da sich die Feldstärken addieren, wenn man die Ladungen addiert, gilt

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_i$$

$\sum Q_i$ ist die gesamte Ladung, die sich innerhalb der Fläche S befindet. Beschreiben wir nun die Ladung im Innern der Fläche durch die Ladungsdichteverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$, so ist

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(\boldsymbol{r})dV \tag{4.3}$$

Mit dem Gaußschen Satz

$$\oiint \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{A} = \iiint \operatorname{div}\boldsymbol{E}\, dV$$

wird aus (4.3)

$$\iiint \operatorname{div}\boldsymbol{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV$$

Da diese Beziehung für jeden beliebigen Raumbereich richtig ist, muß gelten

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.4}$$

Die Gleichungen (4.3) und (4.4) sind Ausdruck der Tatsache, daß die elektrische Ladung die Stelle ist, an der das elektrische Feld an der Materie “befestigt” ist.

4.2 Der Zusammenhang zwischen elektrischem Potential und elektrischer Feldstärke

Gegeben sei eine Punktladung. Wir wollen zeigen, daß der Wert des Integrals

$$\int_A^B \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$$

nur vom Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom Integrationsweg abhängt.

Der Beitrag zum Integral auf dem Wegstück zwischen den Radien r und r', Abb. 4.2, ist

$\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r} \;=\; |\boldsymbol{E}|\, |d\boldsymbol{r}| \cos\varphi$.

Es ist aber

$$|d\boldsymbol{r}| = \frac{r' - r}{\cos\varphi} = \frac{dr}{\cos\varphi}$$

$|d\boldsymbol{r}|$ ist der Betrag des Vektors $d\boldsymbol{r}$, dr die Differenz r' –r der Radien. Der Betrag des Feldstärkevektors $\boldsymbol{E}$ wird mit $|\boldsymbol{E}|$ bezeichnet, um Verwechslungen mit der Energie E zu vermeiden.

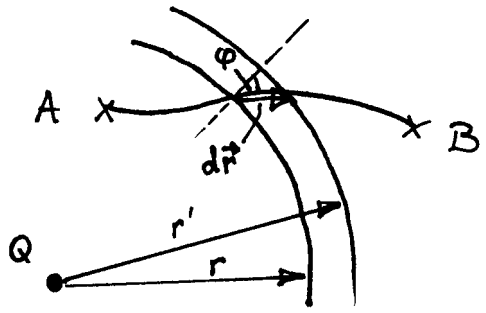
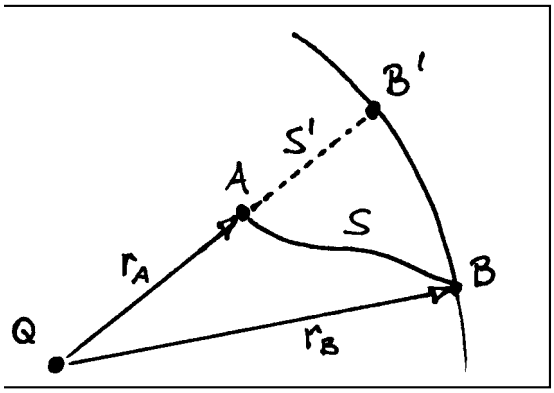


Abb. 4.2. Der Beitrag zum Integral auf dem Wegstück zwischen den Radien r und r' hängt nicht von der Richtung dieses Wegstücks ab.

Damit wird

$\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{E}|\, dr$.

Der Beitrag hängt also nur von den beiden Radien r und r' ab, nicht aber von der Richtung des Integrationsweges. Das gesamte Integral setzt sich aus solchen Beiträgen zusammen. Sein Wert hängt damit nur vom Abstand der Punkte A und B von der Punktladung ab. Insbesondere hat das Integral über den Weg S' in Abb. 4.3 denselben Wert wie über den Weg S.



). 4.3. Das Wegintegral über die elektrische Feldstärke auf dem Weg S denselben Wert wie auf dem Weg S'.

Es ist also

$$\int_A^B \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = \int_A^{B'} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = \int_A^{B'} |\boldsymbol{E}|dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

Man kann sich nun eine beliebige Ladungsverteilung in Punktladungen zerlegt denken. Da sich die Feldstärken dieser Punktladungen zur Gesamtfeldstärke addieren, gilt:

$\int_A^B \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$ ist unabhängig vom Integrationsweg

Man kann damit eine Potentialfunktion $\varphi(\boldsymbol{r})$ definieren:

$$\int_A^B \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = -\left[\varphi(\boldsymbol{r}_B) - \varphi(\boldsymbol{r}_A)\right] \qquad (4.5)$$

Hiermit sind allerdings nur φ-Differenzen definiert. Der Nullpunkt von φ darf noch beliebig festgelegt werden.

Für eine Punktladung erhält man

$$\varphi(\boldsymbol{r}_A) - \varphi(\boldsymbol{r}_B) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

Setzt man $\varphi(r = \infty) = 0$, so ergibt sich für die Punktladung

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad (4.6)$$

Die Definitionsgleichung (4.5) hat zur Folge:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{4.7}$$

Durch $\varphi(\boldsymbol{r})$ = const wird eine Fläche konstanten Potentials definiert, eine Äquipotentialfläche. Die Beziehung $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ sagt uns, daß die $\boldsymbol{E}$-Feldlinien senkrecht zu den Äquipotentialflächen verlaufen. In Abb. 4.4 sind die $\boldsymbol{E}$-Feldlinien und die Schnitte der Äquipotentialflächen mit der Zeichenebene für zwei kugelsymmetrische Ladungsverteilungen dargestellt.

Auf ein geladenes Teilchen, das sich im elektrischen Feld der Stärke $\boldsymbol{E}$ anderer Ladungen befindet, übt das Feld eine Kraft $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ aus. Bewegt sich das Teilchen im Feld, so fließt der Energiestrom $P = \boldsymbol{v}\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}$ in das Teilchen hinein. Diese Energie kann man ihm während der Bewegung abnehmen. Bewegt sich das Teilchen z.B. in einem dissipativen Leiter, so wird die Energie zur Entropieerzeugung verwendet. Bewegt sich das Teilchen von einer Stelle A nach einer Stelle B, so beträgt diese Energie

$$\Delta E = \int P\,dt = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = Q\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r} = Q\left[\varphi(\boldsymbol{r}_A) - \varphi(\boldsymbol{r}_B)\right]$$

Fließt ein ganzer Teilchenstrom, und damit ein elektrischer Strom von A nach B, so wird ständig der Energiestrom

$$P = I\,(\varphi(\boldsymbol{r}_A) - \varphi\,(\boldsymbol{r}_B)\,)$$

dissipiert. Das hier definierte elektrische Potential ist also mit dem durch Gleichung (2.1) definierten identisch. Wir sehen jetzt aber, daß man nicht nur einem elektrischen Leiter ein Potential zuordnen kann, sondern daß jeder Punkt eines statischen elektrischen Feldes ein Potential hat.

Mit $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ können wir die Gleichung $\boldsymbol{j} = -\sigma\operatorname{grad}\varphi$ (Ohmsches Gesetz, Gleichung (2.8)) vereinfachen:

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{4.8}$$

Das Ohmsche Gesetz gilt in dieser Form

– nur für isotrope Medien, im Allgemeinen ist σ ein Tensor;

– nur, wenn man das elektrochemische Potential durch das elektrische ersetzen darf, also für Leiter mit konstantem chemischem Potential.

Aus $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ und $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ folgt eine Beziehung zwischen ρ und φ:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\rho/\varepsilon_0\,.$$

Den Operator div grad kürzt man ab durch Δ, man nennt ihn den Laplace-Operator. Es ist also

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0\,.$$

Diese Gleichung heißt Poisson-Gleichung. Der Laplace-Operator ist in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Oft ist die Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ bekannt und die Feldstärkeverteilung $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ gesucht.

Beispiel: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Das $\boldsymbol{E}$-Feld ist radialsymmetrisch, Abb. 4.5. Die Feldstärke findet man, indem man Gleichung (4.3) auf eine Kugel mit dem Radius r anwendet. Die linke Seite ist

$$\oiint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|4\pi r^2$$

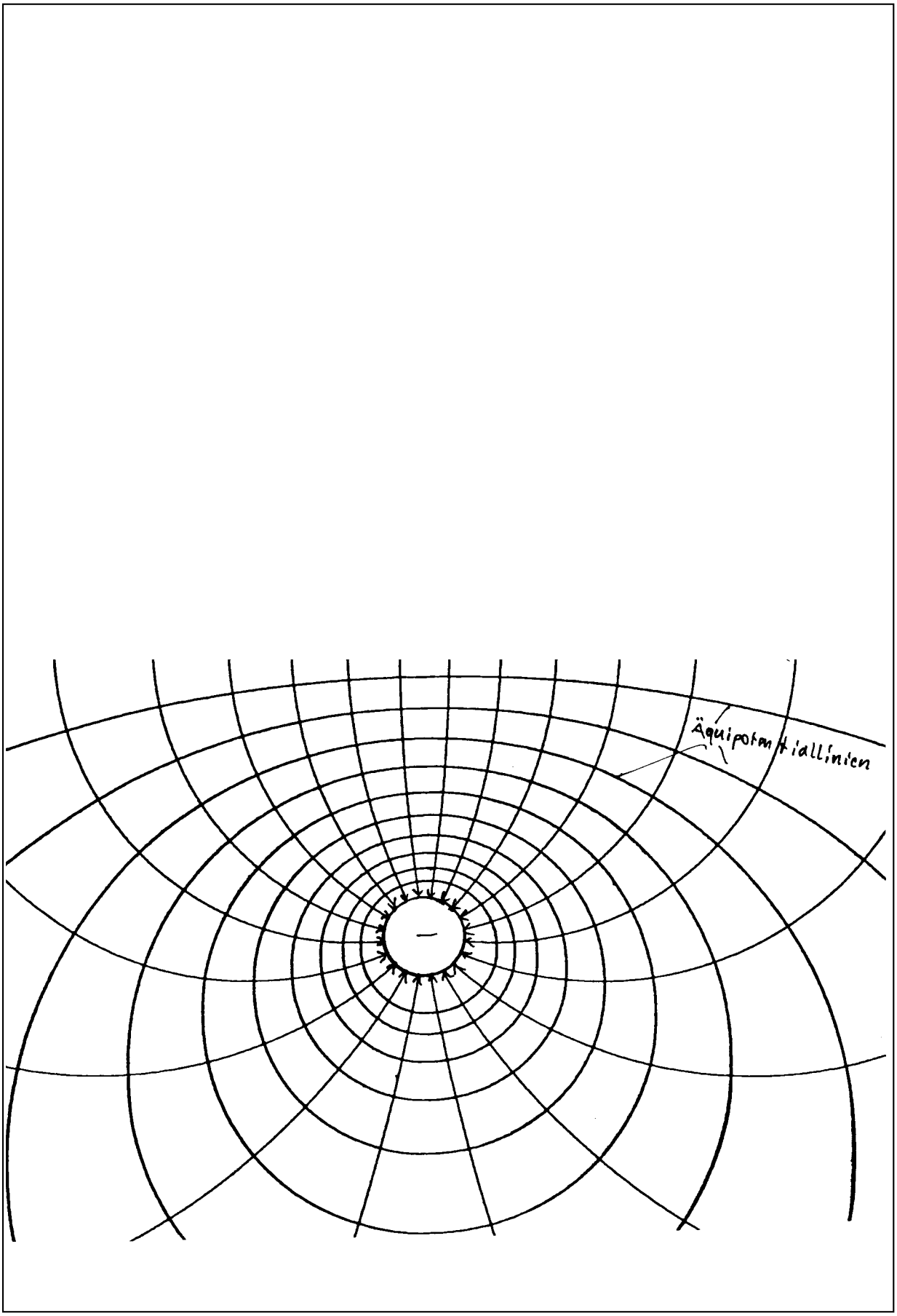


Abb. 4.4. Elektrische Feldlinien und Äquipotentialflächen des Feldes von zwei kugelsymmetrisch und entgegengesetzt gleich geladenen Körpern

Die rechte Seite ist die Gesamtladung $Q(r)$ innerhalb der Kugel vom Radius r. Es ist also

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

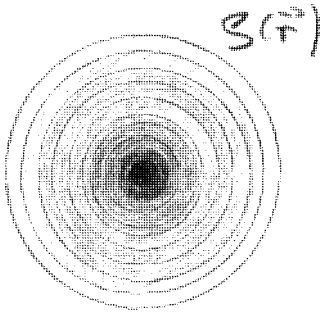


Abb. 4.5. Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Die Feldstärke im Abstand r vom Mittelpunkt der Verteilung hängt also nur von der Gesamtladung innerhalb der Kugel vom Radius r ab, nicht aber davon, wie die Ladungsdichte von r abhängt. Auch wenn die ganze Ladung, die sich in der Kugel befindet, im Kugelmittelpunkt vereinigt wäre, wäre die Feldstärke dieselbe. Die Feldstärke ist also dieselbe wie die einer Punktladung vom Betrag $Q(r)$, die sich im Mittelpunkt befindet. Ist die Ladungsdichte im Innern der Ladungsverteilung zwischen $r = 0$ und $r = r_0$ gleich Null, so ist dieser ganze Innenraum feldfrei.

Beispiel: Feld zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Metallplatten

Die Ladung pro Fläche ρ_A sei überall gleich. Die Ladung der einen Platte habe aber das entgegengesetzte Vorzeichen der Ladung der anderen. Für den gestrichelten Bereich in Abbildung 4.6 ist

$$\oiint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \cdot |\boldsymbol{A}|$$

und

$$\iiint \rho\, dV = \rho_A A$$

Mit (4.3) folgt daraus

$$|\boldsymbol{E}| \cdot A = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_A A$$

und

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_A \qquad (4.9)$$

Das $\boldsymbol{E}$-Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen parallelen Metallplatten endlicher Ausdehnung ist annähernd homogen. Es ist um so homogener, je kleiner der Plattenabstand gegen die Ausdehnung der Platten ist.

Beispiel: Feld eines Metallkörpers einheitlicher Zusammensetzung

Lädt man einen elektrisch leitenden, gegen die Umgebung elektrisch isolierten Gegenstand auf, so verschiebt sich die Ladung solange, bis elektrochemisches Gleichgewicht herrscht, d.h. bis η überall denselben Wert hat. Ist der Gegenstand einheitlich zusammengesetzt, besteht er also z.B. aus einem einzigen Metall, so hat das chemische Potential überall denselben Wert und es folgt aus η = const auch φ = const.

Alle Punkte des Gegenstandes befinden sich

also auf demselben elektrischen Potential. Insbesondere ist auch seine Oberfläche eine Äquipotentialfläche, Abb. 4.7. Bei nicht einheitlicher Zusammensetzung ist die Oberfläche nur noch eine Fläche konstanten elektrochemischen Potentials. Da die Abweichung der Oberfläche von einer Äquipotentialfläche nur einige Volt beträgt, kann man aber, wenn man es mit hohen Spannungen zu tun hat, die Oberfläche praktisch mit einer Äquipotentialfläche identifizieren.

4.3 Die Kapazität

Wir betrachten einen geladenen, elektrisch leitenden Gegenstand. Sein Potential sei φ_1. In seiner Umgebung sollen sich keine anderen Gegenstände oder sonstigen Ladungen befinden. Für große Entfernungen vom Gegenstand geht die Feldstärke gegen Null, das Potential gegen einen konstanten Wert: $\varphi\,(r \to \infty) = \varphi_\infty$.

Verändert man die Ladungsverteilung auf dem Gegenstand um den Faktor k von ρ_0 auf $\rho = k\,\rho_0$, so verändert sich

– die Gesamtladung von Q_0 auf $Q = kQ_0$;
– die Feldstärke in jedem Punkt des Feldes um denselben Faktor k;
– die elektrische Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten um denselben Faktor k.

Die neue Ladungsverteilung ist wieder eine Gleichgewichtsverteilung, denn für den Gegenstand ist nach wie vor $\varphi = \text{const}$.

Die Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_\infty$ hat sich auch um den Faktor k verändert. Es ist also $Q/Q_0 = U/U_0$, oder $U \propto Q$, oder $Q = CU$.

Der von Q unabhängige Proportionalitätsfaktor C heißt Kapazität des Gegenstandes. Er drückt aus, wieviel Ladung bei gegebener Spannung zwischen dem Körper und einem unendlich entfernten Punkt auf dem Gegenstand sitzt.

Wir betrachten nun zwei elektrisch leitende Gegenstände, deren Gesamtladung immer Null ist, Abb. 4.8. Ändert man die Ladung jedes einzelnen Gegenstandes um den Faktor k, so ändert sich die Feldstärke überall und die Spannung zwischen den Gegenständen auch um den Faktor k:

$$Q = CU \tag{4.10}$$

C heißt die Kapazität der Anordnung. Ist diese Kapazität groß gegen die, die die beiden Gegenstände einzeln haben, so nennt man die Anordnung einen Kondensator.

Abb. 4.9 zeigt einen sogenannten Plattenkondensator. Da sein $\boldsymbol{E}$-Feld annähernd homogen ist, gilt für ihn

$$\int_{\text{Platte 1}}^{\text{Platte 2}} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{E}| \cdot d = U$$

Hier ist d der Plattenabstand. Mit Gleichung (4.9) wird daraus $Q = \varepsilon_0 AU/d$, und mit (4.10) schließlich

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{4.11}$$

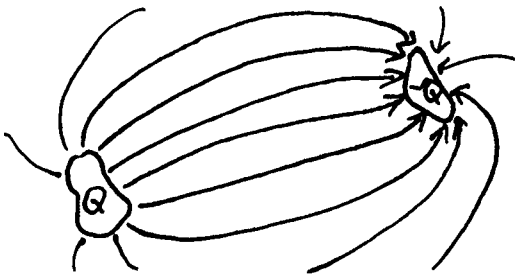
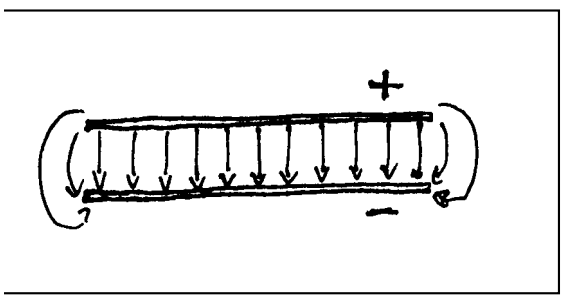


Abb. 4.8. Feld von zwei entgegengesetzt gleich geladenen Körpern



b. 4.9. Feld des Plattenkondensators

4.4 Dipol, Dipoldichte und Polarisation

Eine Anordnung aus zwei punktförmigen Körpern von entgegengesetzt gleich großer Ladung heißt Dipol, Abb. 4.10. Man nennt

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{a} \qquad (4.12)$$

das elektrische Moment, oder das elektrische Dipolmoment. (Vergleiche: $\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i^{(S)}$ ist das Impulsmoment = Drehimpuls). Achtung: Die SI-Symbole von Impuls und elektrischem Moment sind identisch!

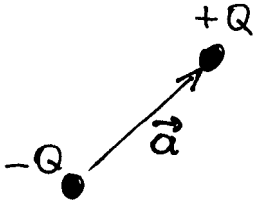
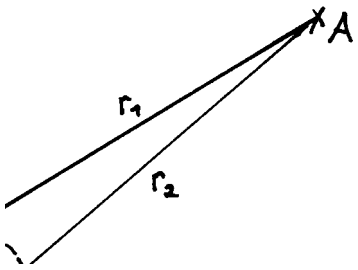


Abb. 4.10. Elektrischer Dipol

Genauso, wie es mathematisch besonders einfach ist, mit Punktladungen umzugehen, ist es auch besonders einfach, mit Punkt-Dipolen zu operieren: Man erhält einen Punktdipol aus einem "echten", hantelförmigen Dipol, indem man $\boldsymbol{a} \to 0$ gehen läßt, wobei man gleichzeitig Q so vergrößert, daß $\boldsymbol{p}$ konstant bleibt. Für Abstände, die groß sind gegen den Abstand der Punktladungen der Hantel, sind die Felder von Hantel- und Punktdipol identisch.

Wir berechnen das Feld eines Punktdipols, indem wir die Felder von zwei Punktladungen überlagern und den Grenzübergang $\boldsymbol{a} \to 0$ mit $\boldsymbol{p}$ = const durchführen.

Für $r \to \infty$ sei das Potential Null. Mit Gleichung (4.6) ergibt sich für das Potential im Punkt A (Abb. 4.11)



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

Für $\boldsymbol{a} \to 0$ ist $r_2 - r_1 = a\cos\alpha$ und

$r_1 \cdot r_2 \approx r^2$, also

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qa\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{pr}}{r^3}$$

Die Äquipotentialflächen sind in Abb. 4.12 dargestellt.

So wie in einen punktförmigen Körper der Ladung Q in einem Feld der Stärke $\boldsymbol{E}$ ein Impulsstrom der Stärke $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ hineinfließt, so fließt in einen punktförmigen Körper mit dem Di-

polmoment $\boldsymbol{p}$ ein Drehimpulsstrom der Stärke

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

hinein. (Achtung $\boldsymbol{p}$ ist hier das elektrische Dipolmoment, nicht der Impuls.)

Beweis: Wir stellen uns den Dipol zunächst ausgedehnt vor, Abb. 4.13. Dann ist

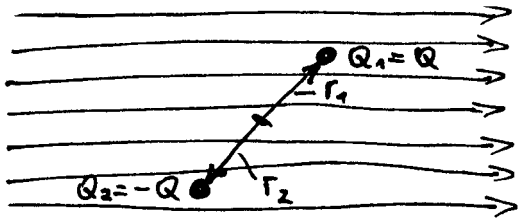


Abb. 4.13. Das Feld übt auf den Dipol ein Drehmoment aus

$$\boldsymbol{M} = \sum_{1,2} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{1,2} \boldsymbol{r}_i \times Q_i \boldsymbol{E} = 2Q\left(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{E}\right)$$

und mit $2\boldsymbol{r}_1 Q = \boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \tag{4.13}$$

Viele Stoffe bestehen aus Molekülen, deren Dipolmoment von Null verschieden ist. Bringt man nun einen Körper, der aus solchen Molekülen besteht, in ein "äußeres" Feld, so werden diese Dipole teilweise ausgerichtet. In manchen Stoffen liegen die Dipolmomentvektoren schon von Natur aus parallel.

Wir untersuchen das Feld eines Stücks solcher polarisierter Materie. Jedes Molekül habe das Dipolmoment $\boldsymbol{p}_i$. Das Feld eines kleinen Volumenelements entsteht durch Überlagerung der Felder der n Elementardipole, die sich in ihm befinden. Es ist in hinreichend großer Entfernung dasselbe, welches ein einziger Dipol mit dem Dipolmoment $d\boldsymbol{p} = n\boldsymbol{p}_i$ hätte. Wir definieren die Dipolmomentdichte $\boldsymbol{P}$:

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}\, dV \tag{4.14}$$

$\boldsymbol{P}$ heißt auch elektrische Polarisation oder kurz Polarisation. $\boldsymbol{P}$ ist einem Punkt eines Körpers zugeordnet. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ ist also ein Vektorfeld.

Wir können die polarisierte Materie im Volumenelement dV ersetzen durch nichtpolarisierte Materie, die an den beiden Stirnflächen entgegengesetzt geladen ist, Abb. 4.14.

Setzt man an die Flächen Ladung vom Betrag $|\boldsymbol{P}d\boldsymbol{A}|$ bzw. $-|\boldsymbol{P}d\boldsymbol{A}|$, so hat das neue Materieelement dasselbe Feld wie das ursprüngliche polarisierte Materieelement. Wir bauen nun aus vielen Volumenelementen einen makroskopischen Körper zusammen. Das Ergebnis ist ein Körper, der im Innern neutral, dessen Grund- und Deckfläche aber geladen ist, Abb. 4.15.

Ein gleichmäßig polarisierter Körper trägt also an seiner Grund- und an seiner Deckfläche Ladungen, wobei

$$|Q_P| = |\boldsymbol{P}|A \ .$$

Es ist üblich, diese Polarisationsladung Q_P von der gewöhnlichen Ladung Q zu unterscheiden. Da sich Q_P nicht frei bewegen kann, nennt man sie "gebundene" Ladung, manchmal auch Scheinladung.

Die letzte Gleichung läßt sich verallgemeinern zu (Abb. 4.16):

$$Q_P = \oiint \boldsymbol{P} d\boldsymbol{A} \qquad (4.15)$$

In dieser Form gilt sie auch dann, wenn die Dipoldichte nicht mehr räumlich konstant ist. Die Beziehung $|Q_P| = |\boldsymbol{P}|A$ ergibt sich daraus als Sonderfall.

Wir wollen Gleichung (4.15) noch in eine lokal gültige Beziehung umformen.

Mit

$$Q_P = \iiint \rho_P dV$$

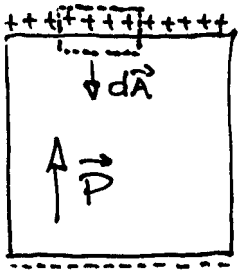


Abb. 4.16. Zum Zusammenhang zwischen Polarisation und Oberflächenladung

(ρ_P = Dichte der Polarisationsladung) wird aus Gleichung (4.15):

$$\iiint \rho_P dV = -\oiint \boldsymbol{P} d\boldsymbol{A}$$

Wir formen die rechte Seite mit dem Gaußschen Satz um:

$$\iiint \rho_P dV = -\iiint \mathrm{div}\boldsymbol{P} dV$$

Da diese Gleichung für jeden Raumbereich gilt, ist

$$\rho_p = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} \qquad (4.16)$$

Wir können nun die Gleichung div $\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Gleichung 4.4) verallgemeinern. Da man mit dem Symbol ρ nur die Dichte der freien Ladung meint, da also die Polarisationsladung in ρ nicht enthalten ist, kommt zur rechten Seite von Gleichung (4.4) im Fall, daß polarisierte Materie vorhanden ist, noch der Term ρ_P/ε_0 hinzu:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_P}{\varepsilon_0}$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\boldsymbol{P} \qquad (4.17)$$

Befindet sich an einer Stelle keine freie Ladung, so ist dort div $\boldsymbol{E} = -(1/\varepsilon_0)$ div $\boldsymbol{P}$. Das heißt, dort wo das $\boldsymbol{E}$-Feld Quellen hat, hat das $\boldsymbol{P}$-Feld Senken und umgekehrt. Es ist üblich, Gleichung (4.17) noch eine andere Form zu geben. Wir schreiben zunächst

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho$$

Man kürzt nun die Summe hinter dem div-Zeichen ab:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\,. \qquad (4.18)$$

Die Größe $\boldsymbol{D}$ heißt die elektrische Verschiebung. Damit wird Gleichung (4.17) kürzer und einprägsamer:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \qquad (4.19)$$

Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert schließlich

$$\oiint \boldsymbol{D} d\boldsymbol{A} = Q \qquad (4.20)$$

4.5 Induzierte Polarisation, Influenz

Wir untersuchen im Folgenden das Verhalten eines Stücks Materie, das in ein elektrisches Feld, welches von anderen Körpern herrührt, gebracht wird. Um eine möglichst durchsichtige Situation zu erhalten, wählen wir die Anordnungen stets so, daß homogene Felder entstehen: Die felderzeugenden Körper sind zwei unendlich ausgedehnte, entgegengesetzt gleich geladene Platten, deren Ladung pro Fläche einen ein für allemal festgelegten Wert hat. Das zu untersuchende Materiestück ist eine unendlich ausgedehnte Platte, die sich zwischen den Kondensatorplatten befindet, Abb. 4.17.

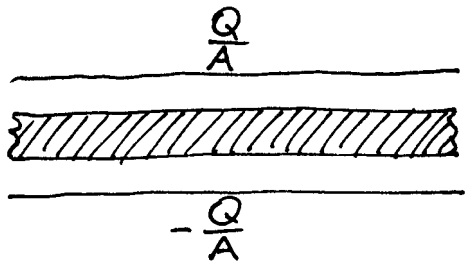
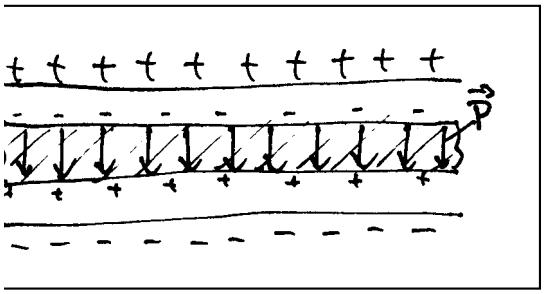


Abb. 4.17. Eine Platte aus dem zu untersuchenden Material befindet sich zwischen den Platten eines Kondensators



4.18. Polarisierte Materie zwischen den Platten eines lensators

Zwischen den Kondensatorplatten befinde sich zunächst eine Platte aus polarisierter Materie, Abb. 4.18. Gesucht ist die elektrische Feldstärke innerhalb der Materie. Die elektrische Feldstärke im materiefreien Raum zwischen den Kondensatorplatten ist (Gleichung (4.9)):

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}$$

An der Oberfläche des Materiestücks sitzen Quellen des $\boldsymbol{P}$-Feldes, aber keine freien Ladungen. Daher ist div $(\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = 0$. Daraus folgt, daß der Ausdruck $\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ auf beiden Seiten der Oberfläche der Materie, d.h. innerhalb (i) und außerhalb (a), denselben Wert hat. Da außerhalb $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$ ist, folgt

$$\boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{E}_i + \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

und daraus

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_a - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

Wir befassen uns nun mit der Frage, wie die Polarisation von Materie zustande kommt. Polarisierte Materie, wie die, von der wir bisher gesprochen haben, trifft man normalerweise gar nicht an: die Polarisationsladungen an den Endflächen werden durch die allgegenwärtigen freien Ladungen kompensiert. Andererseits kann man aber Materie polarisieren, indem man sie in ein elektrisches Feld bringt, man kann eine Polarisation inkduzieren. Je nach Stoff geschieht das auf verschiedene Weise.

Verschiebungspolarisation: Die positive Ladung innerhalb der Materie wird gegen die negative unter dem Einfluß des $\boldsymbol{E}$-Feldes etwas verschoben. Solange $\boldsymbol{E}$ nicht zu groß ist, ist die Verschiebung, und damit die Polarisation, proportional zur Feldstärke in der Materie.

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \,. \qquad (4.22)$$

Der dimensionslose Faktor χ_e heißt elektrische Suszeptibilität. Je größer χ_e ist, desto stärker ist bei gegebener $\boldsymbol{E}$-Feldstärke die Polarisation.

Orientierungspolarisation: Manche Stoffe bestehen aus Molekülen, die ein von Null verschiedenes Dipolmoment haben, im Allgemeinen aber ungeordnet durcheinanderliegen, z.B. Wasser. Bei Anlegen eines elektrischen Feldes werden diese Dipole teilweise ausgerichtet. Auch hier gilt näherungsweise Gleichung (4.22).

Verschiebungs- und Orientierungspolarisation können nur in Nichtleitern auftreten. In ihnen ist die elektrische Feldstärke nicht Null, die Feldlinien laufen, wenn auch abgeschwächt, durch die Materie hindurch. Nichtleiter heißen deshalb auch "Dielektra" (von δια = durch).

Die Werte von χ_e liegen für die meisten Nichtleiter in der Gegend zwischen 2 und 10. Der Wert für Wasser ist ungewöhnlich groß, er beträgt 80. Diese Größe hat ihre Ursache in dem großen Dipolmoment der Wassermoleküle.

Influenz: Bringt man elektrisch leitende Materie, d.h. einen Stoff, der frei bewegliche Ladung enthält, zwischen die Kondensatorplatten, Abb. 4.19, so verschiebt sich die Ladung solange, bis die Feldstärke in der Materie gleich Null ist. Obwohl dieser Vorgang dem Polarisieren eines Nichtleiters sehr ähnlich ist, bezeichnet man ihn anders. Man nennt den Vorgang Influenz und beschreibt ihn nicht durch ein $\boldsymbol{P}$-Feld. Man sagt vielmehr, an den Begrenzungsflächen des Materials sitzen echte Ladungen. Tatsächlich hätte man den Vorgang genauso beschreiben können wie bei den Nichtleitern: Mit $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = 0$ wird aus (4.21) $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_\mathrm{a}$. Die Polarisation ist also ungleich Null.Unterstellt man nun, daß auch hier $\boldsymbol{P}$ mit $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ gemäß Gleichung (4.22) zusammenhängt, so folgt, da die Feldstärke Null ist, $\chi_e = \infty$.

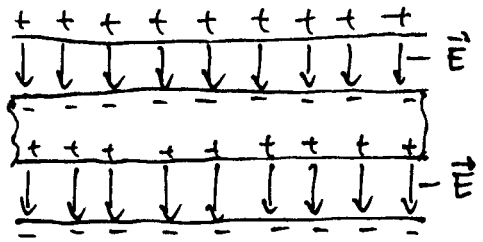
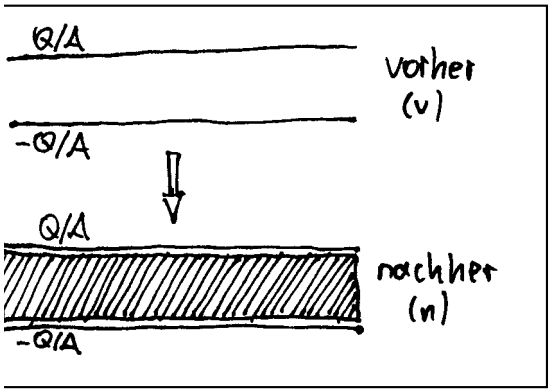


Abb. 4.19. Elektrisch leitende Materie zwischen den Platten eines Kondensators

4.6 Die Kapazität eines Kondensators, der mit Materie gefüllt ist

Wir machen nun die Platte aus polarisiertem Material in Abb. 4.18 immer dicker, so daß sie schließlich den ganzen Raum zwischen den Kondensatorplatten ausfüllt, Abb. 4.20. Die Feldstärke in dem jeweils noch nicht von Materie erfüllten Raum bleibt bei diesem Vorgang konstant. Nach Gleichung (4.9) ist dort immer

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}$$



. 4.20. Durch Einschieben des Dielektrikums wird die stärke vermindert.

Nachdem das Gebiet mit Materie gefüllt worden ist, hat dort die Feldstärke auf den durch Gleichung (4.21) gegebenen Wert abgenommen. Wenn wir die Feldstärke an einer Stelle vor dem Einschieben der Materie mit $\boldsymbol{E}_\mathrm{v}$ und die danach mit $\boldsymbol{E}_\mathrm{n}$ bezeichnen, haben wir also:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\mathrm{n} &= \boldsymbol{E}_\mathrm{v} - (1/\varepsilon_0)\,\boldsymbol{P} \\ &= \boldsymbol{E}_\mathrm{v} - \chi_e \boldsymbol{E}_\mathrm{n}\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{v} = \boldsymbol{E}_\mathrm{n} + \chi_e \boldsymbol{E}_\mathrm{n} = (1 + \chi_e)\,\boldsymbol{E}_\mathrm{n}$$

Der Faktor

$$\varepsilon = 1 + \chi_e$$

um den die Feldstärke abnimmt, heißt Dielektrizitätskonstante. (Die um 1 vergrößerte Materialkonstante hat einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol! Glücklicherweise ist so etwas sonst in der Physik nicht üblich).

Wegen $U = \int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{E}|\, d$ nimmt die Spannung um denselben Faktor ab:

$U_\mathrm{v} = \varepsilon U_\mathrm{n}$.

Da $Q = CU$, und da Q konstant bleibt, nimmt die Kapazität um ε zu:

$C_\mathrm{n} = \varepsilon\, C_\mathrm{v}$.

Wir können damit Gleichung (4.11), die nur für den materiefreien Kondensator galt, verallgemeinern:

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (4.23)$$

Außerdem wird aus Gleichung (4.9)

$$\rho_A = \varepsilon\varepsilon_0 |\boldsymbol{E}| \qquad (4.24)$$

Schiebt man die Materie in einen Kondensator, dessen Spannung konstant gehalten wird, so vergrößert sich, wegen $Q = CU$ seine Ladung um den Faktor ε, Abb. 4.21:

$Q_\mathrm{n} = \varepsilon\, Q_\mathrm{v}$.

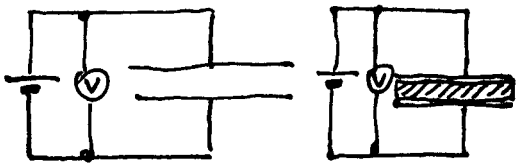


Abb. 4.21. Schiebt man in einen Kondensator bei konstanter Spannung ein Dielektrikum hinein, so vergrößert sich die Ladung.

4.7 Piezo- und pyroelektrischer Effekt

Materialien, deren Kristallstruktur hinreichend unsymmetrisch ist, werden polarisiert wenn sie verformt werden. Durch das Verformen entsteht zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen eine elektrische Spannung. Dieser Effekt heißt piezoelektrischer Effekt. Umgekehrt resultiert eine Verformung des Kristalls, wenn man zwischen den entsprechenden Flächen eine elektrische Spannung anlegt.

Kristalle mit noch niedrigerer Symmetrie zeigen den pyroelektrischen Effekt: Bei Änderung der Temperatur ändert sich die Polarisation; zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen entsteht eine elektrische Spannung.

4.8 Die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt

Wir wollen die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt, mit Hilfe von Gleichung (4.1) berechnen:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$$

Wir betrachten dazu die eine der Platten, Platte A, im Feld der anderen, Platte B. Platte A trägt die Ladung Q_A, die Stärke des Feldes von Platte B ist $\boldsymbol{E}_\mathrm{B}$. Ist aber diese Gleichung hier überhaupt anwendbar? Die Voraussetzung dafür, daß Gleichung (4.1) benutzt werden darf, ist, daß wir es mit einem einzigen Feldstärkewert $\boldsymbol{E}_\mathrm{B}$ zu tun haben. Und das heißt, daß die Feldstärke an allen Orten, über die sich die Ladung Q_A erstreckt, denselben Wert hatte, bevor die Ladung dort hin gebracht wurde.

Dies ist nun bei unserem Kondensator der Fall. Das Feld der linken Platte allein zeigt Abb. 4.22. Überall rechts von dieser Platte hat das Feld die Stärke $\boldsymbol{E}_\mathrm{B}$, wobei $\boldsymbol{E}_\mathrm{B}$ halb so groß ist wie die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ im kompletten Kondensator:

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{B} = \frac{\boldsymbol{E}}{2}$$

Man findet dies unter Verwendung von Gleichung (4.3). Man erhält dann für die Kraft:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{E} \cdot Q}{2}$$

Mit Gleichung (4.24) und $Q = \rho_A A$ wird daraus

$$\boldsymbol{F} = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 A} \tag{4.25}$$

4.9 Die Energie im Feld des Kondensators

Man erhält die Energie, indem man eine Platte gegen die andere senkrecht zur Plattenebene bei konstant gehaltener Ladung verschiebt, Abb. 4.23. Dabei soll der Raum zwischen den Platten vollständig mit Materie ausgefüllt bleiben. Man stellt sich deshalb das Dielektrikum am besten als Flüssigkeit vor, in die die ganze Anordnung eingetaucht ist.

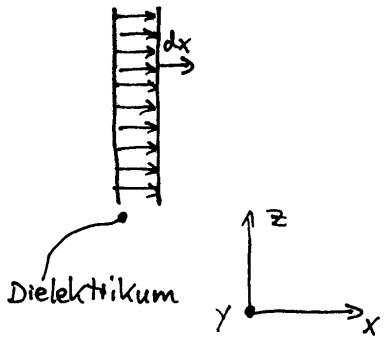


Abb. 4.23. Zum Verschieben der rechten Platte nach rechts wird Energie gebraucht.

Aus

$dE = F\,dx.$

wird mit (4.25)

$$dE = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 A}\,dx$$

Integriert von $x = 0$ bis $x = d$ wird die gesamte Energie im Feld:

$$E = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 A}\,d \tag{4.26}$$

Mit (4.23) erhalten wir schließlich

$$E = \frac{Q^2}{2C} \tag{4.27}$$

5. Energiedichte und mechanische Spannung im elektrostatischen Feld

Wir berechnen in diesem Kapitel die lokalen Größen Energiedichte und mechanische Spannung. Zur Berechnung ziehen wir die einfachste Feldverteilung heran, die es gibt: das homogene Feld. Da wir den Zusammenhang zwischen Größen berechnen, die sich auf Raumpunkte, und nicht auf Raumbereiche beziehen, beschränkt sich aber die Gültigkeit unserer Ergebnisse nicht auf homogene Felder.

5.1 Die Energiedichte

Nach Gleichung (4.26) ist die Energie im homogenen Feld eines Kondensators mit dem Plattenabstand d und der Plattenfläche A

$$E = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 A} d$$

Wir ersetzen die Ladung Q mit Gleichung (4.24) und mit $\rho_A = Q/A$:

$$E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 \cdot A \cdot d$$

Da $V = A\ d$ das felderfüllte Volumen ist, ergibt sich für die Energiedichte

$$\rho_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 \tag{5.1}$$

5.2 Die Zugspannung in Richtung der Feldlinien

Die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt, ist nach Gleichung (4.25):

$$\boldsymbol{F} = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 A}$$

Diese Kraft übt nicht nur eine Platte auf die andere aus, sondern auch die eine Platte auf den unmittelbar vor ihr liegenden Feldbereich, dieser auf den nächsten usw. Im Feld herrscht demzufolge eine mechanische Zugspannung in Feldlinienrichtung. Man erhält diese, indem man einfach die Kraft durch die Fläche A dividiert:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 A^2} = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \rho_A{}^2$$

Das positive Vorzeichen bedeutet, daß es sich um eine Zugspannung handelt.

Mit Gl. (4.24) erhalten wir schließlich

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 \tag{5.2}$$

Aus der Tatsache, daß an Ladungen immer elektrische Feldlinien beginnen oder enden, schließen wir, daß das elektrische Feld an geladener Materie immer zieht.

Lädt man eine Seifenblase elektrisch auf, so wird sie größer. Das elektrische Feld zieht die Flüssigkeitslamelle nach außen, Abb. 5.1.

Wie erklärt sich aber die Abstoßung zwischen zwei gleichnamig geladenen Körpern? Man entnimmt Abb. 5.2 die Antwort auf diese Frage. Wir betrachten den linken Körper: Das Feld zieht an allen Teilen seiner Oberfläche. Da die Feldlinien links dichter sind als rechts, zieht es aber stärker nach links als nach rechts, und es resultiert eine Nettokraft nach links. Entsprechendes gilt für den rechten Körper.

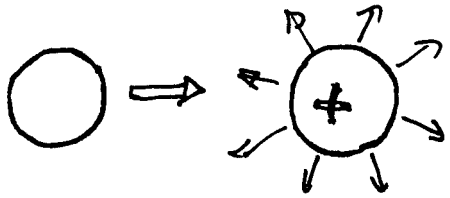


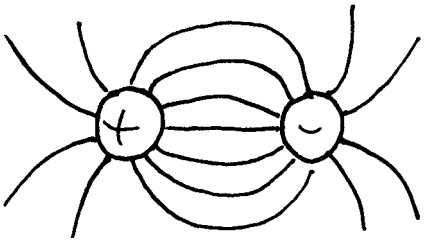
Abb. 5.1. Das elektrische Feld zieht an der Oberfläche der Seifenblase.

Statt "Gleichnamig geladene Körper stoßen sich ab", wäre es also richtiger zu sagen:

Gleichnamig geladene Körper werden vom elektrischen Feld voneinander weggezogen.

Auf analoge Art interpretieren wir Abb. 5.3. Wieder zieht das Feld am linken Körper nach allen Richtungen. Diesmal sind aber die Feldlinien rechts vom Körper dichter als links, und es resultiert eine Nettokraft nach rechts. Statt "die Körper ziehen sich an" sagen wir also richtiger:

Ungleichnamig geladene Körper werden vom elektrischen Feld zueinander hingezogen.



5.3 Die Druckspannung quer zu den Feldlinien

Wir betrachten zwei entgegengesetzt gleich geladene, punktförmige Körper, Abb. 5.4. Wir denken uns nun eine unendlich ausgedehnte Fläche, die so liegt, daß eine der Punktladungen auf der einen, die andere auf der anderen Seite der Fläche liegt. Die Nettokraft, die das Feld auf der einen Seite auf das Feld auf der anderen Seite der Fläche ausübt, muß eine Druckkraft sein. Sie wird sich aber im Allgemeinen auf komplizierte Art aus den Druck- und Zugspannungsbeiträgen der verschiedenen Flächenelemente unserer Trennfläche zusammensetzen.

Nun gibt es eine Trennfläche bei der die Verhältnisse einfacher sind: die Symmetrieebene zwischen den Punktladungen. Hier liegen alle Feldstärkevektoren in der Ebene der Fläche, d. h. senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen den Punktladungen. Aus der Tatsache, daß auch in dieser Fläche eine Nettodruckkraft herrscht, können wir schließen, daß im elektrischen Feld quer zu den Feldlinien eine Druckspannung herrscht. Wir wollen diese als Funktion der Feldstärke berechnen.

Bei dem Kondensator von Abb. 5.5 lassen sich die Platten auseinanderziehen, so daß sich ihre Fläche $y_0 z_0$ auf $y_0(z_0 + dz_0)$ vergrößert. Dabei werde die Ladung konstant gehalten. Beim

Auseinanderziehen vermindert sich die Energie des Feldes.

Aus Gleichung (5.1) folgt für die Energie des Feldes

$$E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 x_0 y_0 z_0 \qquad (5.3)$$

(Achtung: E steht für Energie, $\boldsymbol{E}$ für elektrische Feldstärke). Wir wollen nun die Feldstärke durch die Ladung ausdrücken, denn die Ladung bleibt bei dem betrachteten Prozeß konstant. Wir benutzen dazu (4.24):

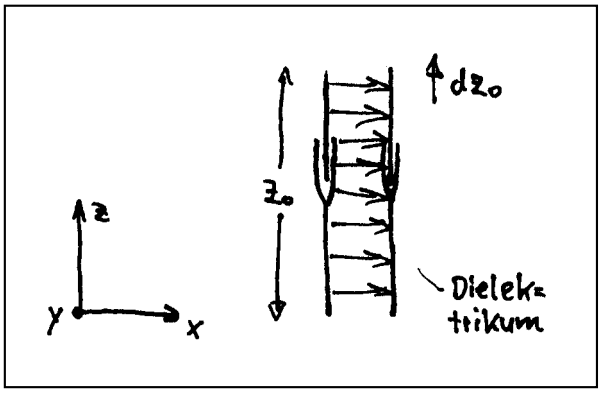


Abb. 5.5. Beim Vergrößern der Plattenflächen gibt das Feld Energie ab.

$$\frac{Q}{y_0 z_0} = \rho_A = \varepsilon\varepsilon_0 |\boldsymbol{E}|$$

Damit wird aus (5.3):

$$E = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x_0}{y_0 z_0}$$

Bei einer Verschiebung dz_0 ändert sich die Energie um:

$$dE = -\frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x_0}{y_0 {z_0}^2} dz_0$$

Der Vergleich mit $dE = F_z dz_0$ ergibt die Kraft, die das Feld auf seine Aufhängung, nämlich die Platten, ausübt:

$$F_z = -\frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x_0}{y_0} \frac{1}{{z_0}^2}$$

Wir ersetzen mit Gleichung (4.24) Q wieder durch $|\boldsymbol{E}|$:

$$F_z = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 x_0 y_0$$

Die mechanische Spannung $\sigma_\perp = F_z/(x_0 y_0)$ ergibt sich damit zu

$$\sigma_\perp = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 \qquad (5.4)$$

Quer zu den $\boldsymbol{E}$-Feldlinien herrscht also eine Druckspannung vom Betrag $\varepsilon\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2/2$.

6. Die Quellen des magnetischen Feldes

6.1 Die magnetische Feldstärke

Die Erscheinungen der Magnetostatik sind denen der Elektrostatik formal sehr ähnlich. Außer der strukturellen Übereinstimmung scheint es aber keinen Zusammenhang zwischen diesen beiden Erscheinungsbereichen zu geben, solange man sich auf statische Phänomene beschränkt. Ein praktischer Unterschied zwischen Elektrizität und Magnetismus folgt daraus, daß man bisher keine isolierten magnetischen Ladungen beobachtet hat. Die Suche danach ist aber nach wie vor aktuell und wird heute mit mehr finanziellem Aufwand betrieben als je zuvor. Praktisch operieren kann man daher bisher nur mit magnetischen Polarisationsladungen, also dem Analogon zu den elektrischen gebundenen oder Scheinladungen. Der Umgang mit gebundener magnetischer Ladung ist allerdings viel bequemer als der mit gebundener elektrischer. Permanente elektrische Dipole sind schwer aufzubewahren, weil sie schnell durch freie Ladungen neutralisiert werden. Da es keine freie magnetische Ladung gibt, kann man permanente Magneten sehr gut aufbewahren.

Magnetische oder magnetisierte Materie besteht aus magnetischen Dipolen, die man nicht in getrennte magnetische Ladungen teilen kann. Hier ist sogar der punktförmige Dipol realisiert: Elektronen z.B. haben ein magnetisches Dipolmoment (= magnetisches Moment) und verhalten sich manchmal wie punktförmige Teilchen (Elektronen haben auch ein von Null verschiedenes Impulsmoment ohne eine räumlich ausgedehnte Impulsverteilung zu haben. Impulsmomentvektor und magnetischer Momentvektor liegen antiparallel.)

Wir bezeichnen die magnetische Ladung mit Q_m (kein SI-Symbol; die Größe wird auch Polstärke genannt). Die SI-Maßeinheit ist Weber (Wb), mit 1 Wb = Vs. Die Maßeinheit des magnetischen Moments $\boldsymbol{m}$ ist demzufolge Wb · m. Daß hier Kombinationen von Maßeinheiten auftreten, mit denen auch elektrische Größen gemessen werden, können wir erst begründen, wenn der Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus behandelt wird. Wir nehmen voraus, daß man magnetische Einheiten dadurch erhält, daß man in der Einheit der analogen elektrischen Größe Volt durch Ampere ersetzt und umgekehrt. So ist die Einheit der elektrischen Ladung As (abgekürzt Coulomb). Daraus erhält man die der magnetischen Ladung Vs (abgekürzt Weber).

Den magnetisch positiv geladenen Teil eines Magneten ($Q_m > 0$) nennt man Nordpol, den magnetisch negativ geladenen ($Q_m < 0$) Südpol. Die magnetische (Schein-)Ladung am Pol eines Permanentmagneten ist größenordnungsmäßig 10^{-4} Wb, das magnetische Moment eines Elektrons beträgt $1{,}166766 \cdot 10^{-29}$ Wb · m.

Bringt man in ein gegebenes Magnetfeld an eine bestimmte Stelle eine magnetische Punktladung Q_m (z.B. das Ende eines sehr langen, dünnen Stabmagneten), so wirkt auf diese eine Kraft, Abb. 6.1. Verdoppelt man den Wert der Ladung, so verdoppelt sich auch der Wert der Kraft:

$$\boldsymbol{F} \propto Q_m \,.$$

Der vektorielle Proportionalitätsfaktor ist also für das Feld ohne Punktladung charakteristisch. Man nennt ihn die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\, Q_m \qquad (6.1)$$

Für die Maßeinheit von $\boldsymbol{H}$ ergibt sich A/m.

Coulomb fand nicht nur das nach ihm benannte Gesetz der Kraftwirkung von elektrischen Punktladungen aufeinander, sondern auch das entsprechende magnetische Gesetz:

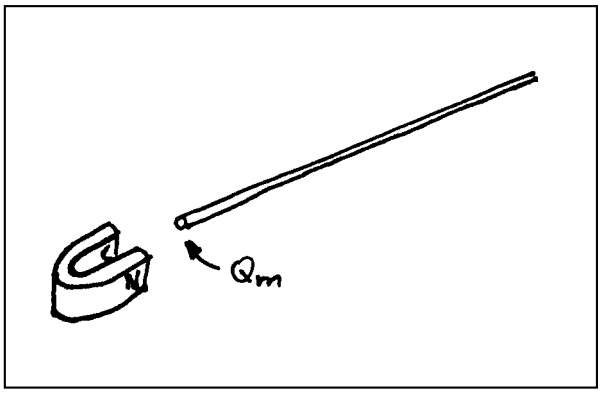


Abb. 6.1. Um die Stärke des Feldes zu bestimmen, mißt man die Kraft auf die magnetische Probeladung Q_m.

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_{m1}Q_{m2}}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{6.2}$$

Hier ist

μ_0 = magnetische Feldkonstante = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am = $1{,}2566 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am

Aus (6.2) folgt die $\boldsymbol{H}$-Feldverteilung einer magnetischen Punktladung:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

In Analogie zum elektrischen Dipolmoment (Gleichung (4.12)) definieren wir das magnetische Dipolmoment

$\boldsymbol{m} = Q_m\boldsymbol{a}$.

Achtung: Die Definition von $\boldsymbol{m}$ ist in der Literatur nicht einheitlich! Wir folgen ausnahmsweise nicht der SI-Konvention.

So wie auf einen einzelnen Magnetpol eine Kraft wirkt, wirkt auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment:

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}$

Vergleiche mit Gleichung (4.13).

6.2 Die Magnetisierung

Die atomaren Bausteine mancher Stoffe haben ein von Null verschiedenes magnetisches Moment. Manchmal sind die magnetischen Dipole so ausgerichtet, daß ihre Dipolmomentvektoren parallel liegen. Dann hat auch ein makroskopischer Körper ein von Null verschiedenes Dipolmoment. Man nennt einen solchen Körper einen Magneten. Wir definieren die Dichte $\boldsymbol{M}$ des magnetischen Dipolmoments (Vergleiche mit Gleichung (4.14)):

$$d\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\, dV \tag{6.3}$$

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ ist ein Vektorfeld und heißt auch Magnetisierung. Die Maßeinheit von $\boldsymbol{M}$ ist das Tesla (T). Man findet 1 T = 1 Wb/m^2.

(Unser $\boldsymbol{M}$ ist das μ_0-fache der nach dem SI definierten Magnetisierung, genauso wie unser $\boldsymbol{m}$ das μ_0-fache des nach dem SI definierten magnetischen Dipolmoments ist; verschiedene Bücher benutzen verschiedene Namen für dieselbe Größe, geben verschiedenen Größen denselben Namen und benutzen verschiedene Symbole für dieselbe Größe; diese Uneinigkeit herrscht nur bei der magnetischen Polstärke, dem magnetischen Dipolmoment und dessen Dichte; bei den elektrischen Feldgrößen, sowie bei $\boldsymbol{H}$ und der noch einzuführenden Größe $\boldsymbol{B}$ ist man sich einig.)

Genauso wie die gebundenen elektrischen Ladungen an den Enden eines elektrisch polarisierten Körpers Quellen des $\boldsymbol{E}$-Feldes sind, sind die magnetischen Scheinladungen an den Enden eines Magneten die Quellen des $\boldsymbol{H}$-Feldes. Der mathematische Formalismus, der den Zusammenhang zwischen Quellen und Feld beschreibt, ist in beiden Fällen identisch, und wir können die Gleichungen aus Abschnitt 4.4 direkt übernehmen, wobei wir die folgenden Übersetzungsregeln anwenden:

ersetze $\boldsymbol{E}$ durch $\boldsymbol{H}$;

" ε_0 " μ_0;

" $\boldsymbol{P}$ " $\boldsymbol{M}$;

" ρ " Null (denn es gibt keine freie magnetische Ladung).

Aus Gleichung (4.17) erhalten wir

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \boldsymbol{M} \tag{6.4}$$

oder

$$\operatorname{div} (\mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0,$$

und mit der Abkürzung

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{6.5}$$

(in Analogie zu (4.18)) erhalten wir die zu (4.19) analoge Beziehung:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.6}$$

Die Größe $\boldsymbol{B}$ heißt magnetische Induktion oder magnetische Flußdichte. Ihre Maßeinheit ist dieselbe wie die der Magnetisierung, nämlich Tesla.

Die Gleichungen (6.4) und (6.6) besagen, daß das $\boldsymbol{H}$-Feld seine Quellen dort hat, wo das $\boldsymbol{M}$-Feld seine Senken hat, und umgekehrt.Unter Zuhilfenahme des Gaußschen Satzes verwandeln wir die lokale Gleichung (6.4) noch in eine integrale Beziehung:

$$\oiint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{A} = -\frac{1}{\mu_0} \oiint \boldsymbol{M} d\boldsymbol{A}$$

Aus (6.6) wird entsprechend

$$\oiint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{A} = 0 \tag{6.7}$$

Abbildung 6.2 zeigt das $\boldsymbol{H}$-Feld eines gleichmäßig magnetisierten Stabes, dessen Länge groß ist gegen seine seitliche Ausdehnung. Das $\boldsymbol{H}$-Feld ist näherungsweise dasselbe wie das von zwei magnetischen Punktladungen, die sich an den Enden des Stabes befinden. Das $\boldsymbol{M}$-Feld ist auf das Innere des Stabes beschränkt und ist dort homogen.

Die Ringe in Abbildung 6.3 seien homogen, d.h. gleichmäßig magnetisiert. In Abb. 6.3a ist das $\boldsymbol{H}$-Feld praktisch nur im Spalt von Null verschieden. Es ist dort, wie das $\boldsymbol{E}$-Feld im Plattenkondensator, annähernd homogen.

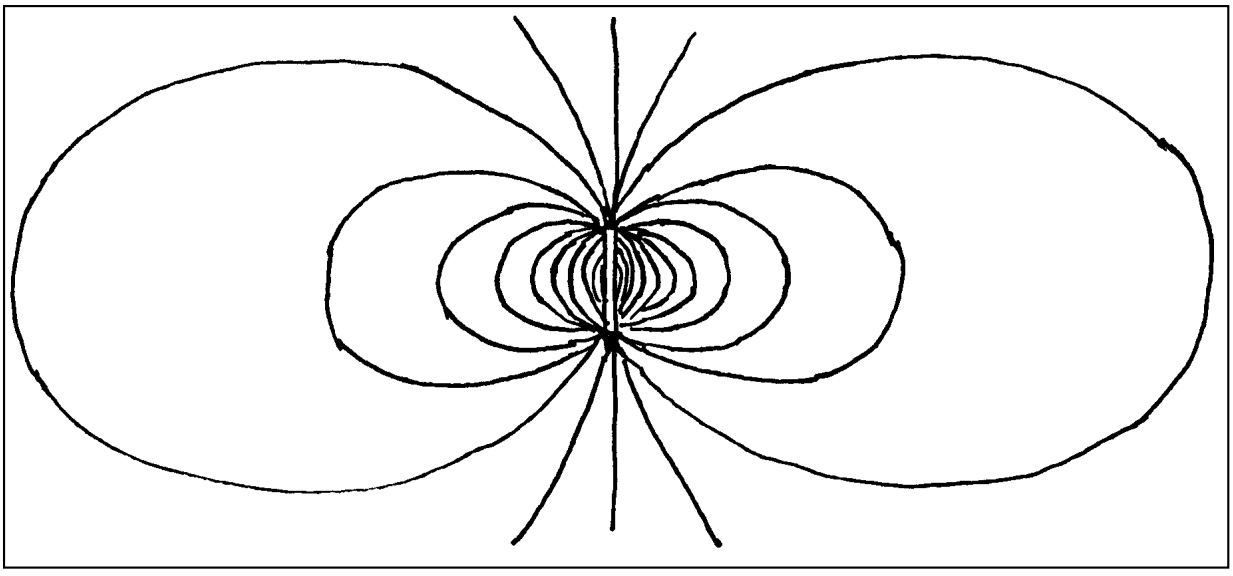


Abb. 6.2. $\boldsymbol{H}$-Feldlinien eines langen, dünnen Stabmagneten

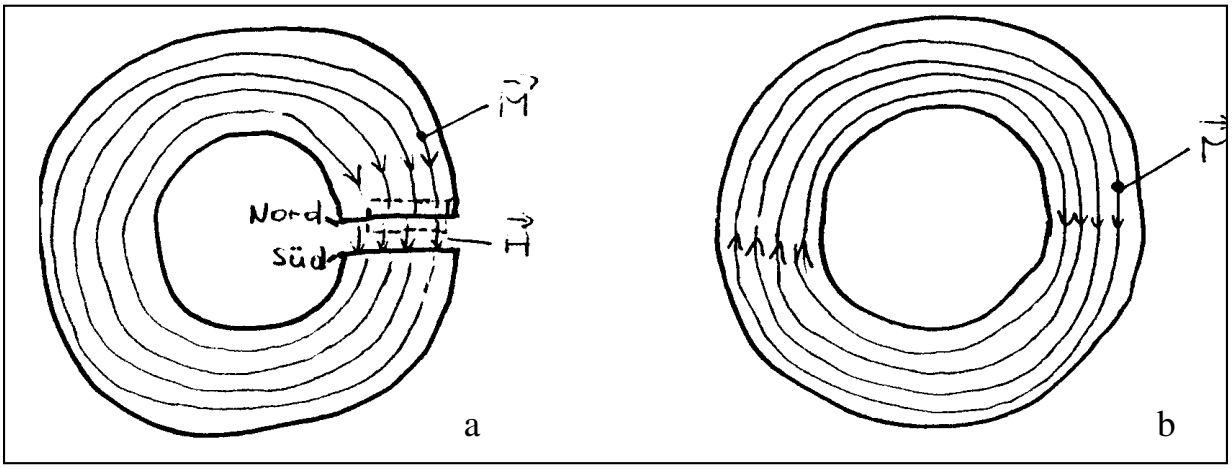


Abb. 6.3. Magnetisierung und magnetische Feldstärke für einen Ringmagneten mit (a) und ohne (b) Spalt

Wendet man Gleichung (6.7) auf die in Abb. 6.3a gestrichelte angedeutete, geschlossene Oberfläche an, so erhält man

$$\boldsymbol{H}_{\text{Spalt}} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{M}_{\text{Materie}}$$

In Abb. 6.3b ist das $\boldsymbol{H}$-Feld überall Null.

6.3 Das magnetische Potential

Genauso wie $\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$ im elektrostatischen Feld wegunabhängig ist, gilt auch:

$\int_{\text{A}}^{\text{B}} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ ist für statische magnetische Felder unabhängig vom Integrationsweg

Folglich kann man ein magnetisches Potential $\varphi_m(\boldsymbol{r})$ definieren (vergleiche Gl. (4.5)):

$$\int_{\text{A}}^{\text{B}} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = -\left[\varphi_m(\boldsymbol{r}_{\text{B}}) - \varphi_m(\boldsymbol{r}_{\text{A}})\right] = U_m \qquad (6.8)$$

U_m ist die magnetische Spannung zwischen A und B. Aus der letzten Gleichung folgt weiter (vergleiche Gl. (4.7)):

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ = - grad $\varphi_m(\boldsymbol{r})$

Die Maßeinheit der magnetischen Spannung ist Ampere. U_m ist ein SI-Symbol, für das magnetische Potential gibt es kein genormtes Symbol.

6.4 Die induzierte Magnetisierung

Wir untersuchen, wie sich Materie im Magnetfeld verhält. Das Feld sei homogen und habe außerhalb der Materie einen festen Wert. Ein solches Feld realisiert man zum Beispiel dadurch, daß man ein plattenförmiges Stück Materie in den schmalen Spalt zwischen den breiten Polen eines homogen magnetisierten Magneten bringt, Abb. 6.4. Wegen div ($\mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$) = 0 hat der Ausdruck $\mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$ auf beiden Seiten der Oberfläche der Materie, d.h. innerhalb (i) und außerhalb (a), denselben Wert. Da außerhalb $\boldsymbol{M}$ = 0 ist folgt:

$$\boldsymbol{H}_{\text{a}} = \boldsymbol{H}_{\text{i}} + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{M}$$

und daraus

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{M} \qquad (6.9)$$

Ist die Materie nicht selbst ein Magnet, d. h. ist sie nicht von vornherein magnetisch polarisiert (= magnetisiert), so findet man, daß sie unter dem Einfluß eines $\boldsymbol{H}$-Feldes magnetisiert wird. Es gilt näherungsweise

$$\boldsymbol{M} = \mu_0 \chi_m \boldsymbol{H} \qquad (6.10)$$

χ_m ist die magnetische Suszeptibilität. Damit wird aus (6.9)

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} - \chi_m \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}$$

und

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} = (1 + \chi_m)\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}$$

Die Materie soll nun den ganzen Raum zwischen den Magnetpolen ausfüllen, Abb. 6.5. Vergleicht man die $\boldsymbol{H}$-Feldstärke vor dem Einschieben der Materie (v) mit der nachher (n), so ist

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{v}} = (1 + \chi_m)\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}} \ .$$

Die Feldstärke wird also durch das Einbringen der Materie um den Faktor $1 + \chi_m$ verändert. Man nennt diesen Faktor μ die Permeabilität des Materials:

$$\mu = 1 + \chi_m .$$

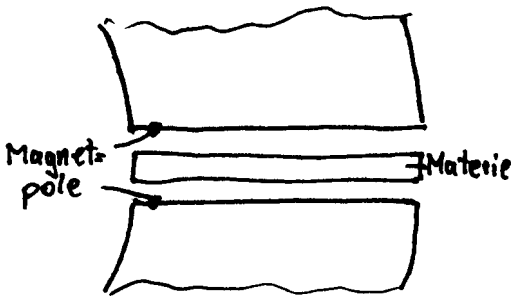
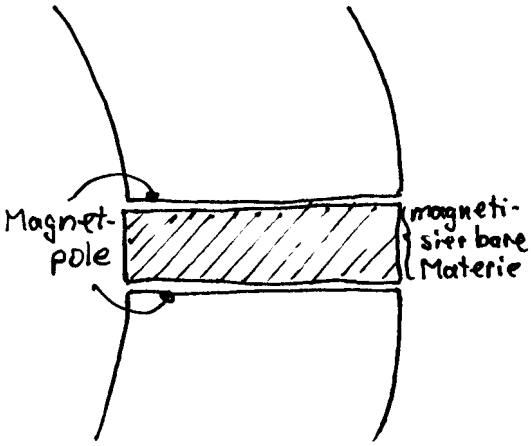


Abb. 6.4. Magnetisierbare Materie zwischen den Polen eines Magneten



bb. 6.5. Durch Einschieben magnetisierbarer Materie wird e Feldstärke vermindert.

Wegen $U_m = \int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ ändert sich auch die magnetische Spannung zwischen den beiden Magnetpolen um diesen Faktor: $U_{m\mathrm{v}} = \mu U_{m\mathrm{n}}$. Die magnetische Spannung ist weniger gebräuchlich als die elektrische, da sie schwerer zu messen ist. Alle Voltmeter machen davon Gebrauch, daß es frei verschiebbare elektrische Ladung gibt. Dank der Verschiebbarkeit von Q kann man einen Potentialwert mit Hilfe von Drähten übertragen. Dagegen ist die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ praktisch leichter meßbar als die elektrische (etwa mit einer Hall-Sonde).

Wie bei der elektrischen Polarisation gibt es auch bei der magnetischen Polarisation durch ein $\boldsymbol{H}$-Feld unterschiedliche Mechanismen. Das Elektron hat ein magnetisches Moment. In vielen Stoffen stellen sich die Elektronen jedes Atoms oder Moleküls so ein, daß das Atom bzw. Molekül insgesamt das magnetische Moment Null hat. In anderen Stoffen haben die Moleküle ein resultierendes magnetisches Moment. Diese letzteren heißen paramagnetische Stoffe. Bringt man sie in ein magnetisches Feld, so werden die magnetischen Momente in Feldrichtung orientiert (die paramagnetische Polarisation im $\boldsymbol{H}$-Feld entspricht also der Orientierungspolarisation im $\boldsymbol{E}$-Feld). In Tabelle 6.1 sind die Suszeptibilitätswerte einiger paramagnetischer Stoffe aufgeführt.

χ_m nimmt mit abnehmender Temperatur zu. Die Ausrichtung der magnetischen Momente ist bei Normaltemperatur weit davon entfernt, vollständig zu sein.

Aber auch die Stoffe, deren Moleküle normalerweise kein resultierendes magnetisches Mo-

ment haben, werden im $\boldsymbol{H}$-Feld magnetisch, nämlich so, daß $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{H}$ in die entgegengesetzte Richtung weisen, χ_m ist also negativ. Man nennt diesen Vorgang diamagnetische Polarisation. Er tritt auch bei den paramagnetischen Stoffen auf, wird dort aber von der paramagnetischen Polarisation überdeckt. Tabelle 6.2 enthält die χ_m-Werte einiger diamagnetischer Stoffe.

Tabelle 6.2. Beispiele für diamagnetische Stoffe

	χ_m
Blei	$-0{,}12\cdot10^{-6}$
Gold	$-3{,}1\cdot10^{-6}$
Kupfer	$-0{,}8\cdot10^{-6}$
Silber	$-1{,}5\cdot10^{-6}$
NaCl	$-1\cdot10^{-6}$
Wasser	$-0{,}72\cdot10^{-6}$
Wismut	$-14\cdot10^{-6}$

6.5 Ferromagnetismus

Es gibt Stoffe, deren Atome ein resultierendes magnetisches Moment haben, und bei denen sich die magnetischen Dipole aller Atome von allein parallel einstellen. Bei ihnen ist $\boldsymbol{M} \neq 0$, auch wenn $\boldsymbol{H} = 0$ ist. Da die Ausrichtung der elementaren magnetischen Momente vollständig ist (im Gegensatz zu den paramagnetischen Stoffen), ist $\boldsymbol{M}$ sehr groß.

Diese Stoffe heißen ferromagnetisch. Zu ihnen gehören Fe, Ni, Co und Legierungen dieser und anderer Stoffe.

Daß ein gewöhnliches Stück Eisen kein magnetisches Moment hat, liegt daran, daß die Ausrichtung der atomaren Dipole domänenweise geschieht. Diese Domänen heißen Weißsche Bezirke. Sie sind unterschiedlich orientiert, so daß makroskopisch keine Magnetisierung feststellbar ist. Bringt man ein Stück Eisen in ein $\boldsymbol{H}$-Feld, so wachsen die Domänen, die in Feldrichtung liegen, auf Kosten der Domänen, die in anderen Richtungen liegen.

Abb. 6.6 zeigt die Magnetisierung in Abhängigkeit von der Feldstärke. Wenn man von einem unmagnetischen Stück Eisen ausgehend die Feldstärke wachsen läßt, bewegt man sich auf dem Kurvenstück 1. Läßt man dann $\boldsymbol{H}$ abnehmen bis zu negativen Werten, so folgt man dem Kurvenstück 2. Läßt man darauf $\boldsymbol{H}$ wieder wachsen, so wird Kurve 3 durchlaufen. Die bei $\boldsymbol{H} = 0$ zurückbleibende Magnetisierung M_R heißt remanente Magnetisierung, die Feldstärke $\boldsymbol{H}_K$, die notwendig ist, um das Material auf die Magnetisierung Null zurückzubringen, heißt Koerzitivfeldstärke.

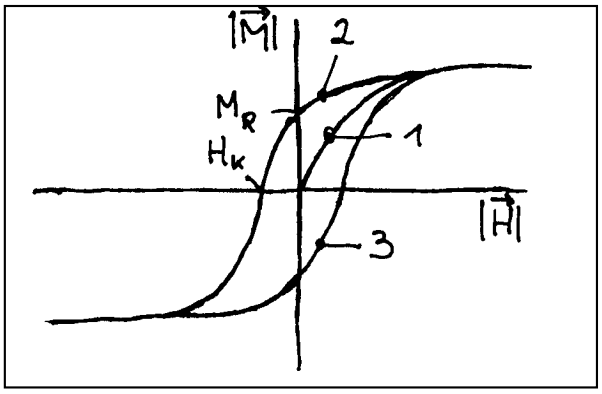


Abb. 6.6. *M-H*-Zusammenhang mit Hysteresis

Die Magnetisierung in einem gegebenen Zeitpunkt hängt also von der Feldstärke in früheren Zeitpunkten ab. Das Material hat somit ein "Gedächtnis". Man nennt eine solche Erscheinung "Hysteresis". Der Effekt wird bei Ton- und Videobändern, Computerdisketten etc. zur Datenspeicherung benutzt.

Der $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{H}$-Zusammenhang ist für verschiedene ferromagnetische Materialien verschieden. Abbildung 6.7 zeigt zwei Beispiele. Abb. 6.7a entspricht einem magnetisch "harten" Material. Es ist zur Herstellung von Permanentmagneten geeignet. Man erreicht heute Werte von M_R bis über 1 T und von H_K bis über 150 kA/m (Alnico; Oxidmagneten). Für einen idealen Permanentmagneten müßte die Magnetisierung völlig unabhängig von H sein (gestrichelte Linie). Abbildung 6.7b zeigt den $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{H}$-Zusammenhang für ein magnetisch "weiches" Material (Weicheisen, μ-Metall). Solange $\boldsymbol{M}$ klein ist gegen die Sättigungsmagnetisierung, gilt hier $\boldsymbol{M} = \mu_0\chi_m\boldsymbol{H}$, wie für diamagnetische und paramagnetische Stoffe. χ_m ist hier aber viel größer, nämlich einige Tausend. Bringt man ein solches Material in ein Magnetfeld, das vorher den Wert $\boldsymbol{H}_v$ hatte, so ist $\boldsymbol{H}_v = (1 + \chi_m)\boldsymbol{H}_n \Rightarrow \boldsymbol{H}_n \approx 1/10^4\ \boldsymbol{H}_v$. Die Feldstärke im Material wird also praktisch Null. Ein Körper aus weichmagnetischem Material verdrängt das Magnetfeld aus seinem Innern.

Ein weichmagnetischer Stoff verhält sich demnach im $\boldsymbol{H}$-Feld analog zu elektrischen Leitern im elektrischen Feld. Genauso wie die Oberfläche eines elektrischen Leiters eine elektrische Äquipotentialfläche bildet, so ist die Oberfläche von Weicheisen nahezu eine Fläche konstanten magnetischen Potentials (vgl. Abschnitt 4.2 und 4.5).

Verschiedene ferromagnetische Materialien stellen also gute Näherungen dar für sehr unterschiedliche Idealstoffe, Abb. 6.8:

- magnetisch harte Materialien für den Werkstoff idealer Permanentmagnete;
- magnetisch weiche Materialien für ideale magnetische Leiter.

Bei einer für jeden ferromagnetischen Stoff charakteristischen Temperatur, der Curie-Temperatur, verschwindet der Ferromagnetismus. Der Stoff ist oberhalb dieser Temperatur (bei Eisen 1047 K) ein gewöhnlicher Paramagnet.

Mit Hilfe von "magnetischen Leitern", d.h. Teilen aus magnetisch weichem Material, kann man auf bequeme Art das Feld eines Permanentmagneten verändern. Wir stellen uns vor, Permanentmagnet und magnetischer Leiter bestehen aus idealem Material. Abbildung 6.9a zeigt ein Beispiel, Abbildung 6.9b das elektrische Analogon. Wie in Abbildung 6.9b die Drähte auf konstantem elektrischem Potential sind, so sind die magnetischen Leiter in Abbildung 6.9a auf nahezu konstantem magnetischem Potential. Die elektrische Feldstärke in den Drähten in Abb. 6.9b ist Null und die magnetische Feldstärke in den Weicheisenteilen in Abb. 6.9a ist nahezu Null.

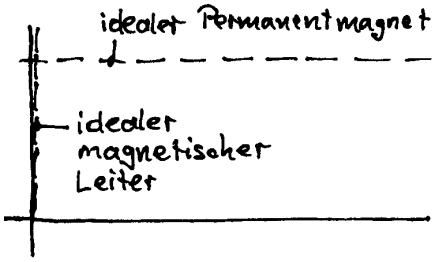


Abb. 6.8. *M-H*-Zusammenhang für ideale magnetische Werkstoffe

Es ist in Abb. 6.9b

$$\int_{P}^{Q} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = \int_{P'}^{Q'} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$$

und in Abb. 6.9a

$$\int_{P}^{Q} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = \int_{P'}^{Q'} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$$

Da der Weg PQ viel länger ist als der Weg P'Q' ist die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{H}$ auf dem Weg P'Q' viel größer als auf dem Weg PQ. Daher verlaufen die meisten Feldlinien zwischen den Flächen A und A', und auf diesen Flächen sitzt damit der größte Teil der elektrischen Influenzladung bzw. der magnetischen Polarisationsladung. Die Felder zwischen den Flächen A und

A' sind nahezu homogen, solange der Abstand der Flächen voneinander klein ist gegen ihre seitliche Ausdehnung.

Mit Hilfe der Weicheisenstücke haben wir also aus dem ursprünglichen Feld des Stabmagneten ein homogenes Feld gemacht.

6.6 Die magnetische Kapazität

In Analogie zu $C=Q/U$ könnte man eine magnetische Kapazität definieren: $C_m = Q_m/U_m$. Diese Größe ist allerdings nicht gebräuchlich. Die Maßeinheit der magnetischen Kapazität ist Wb/A=Henry (H). Wir werden aber später eine Größe derselben Dimension, die Induktivität, kennenlernen. Daß die magnetische Kapazität durchaus eine sinnvolle Größe ist, sieht man am Beispiel des Ringmagneten im vorigen Abschnitt. Um einen wohldefinierten Raum hoher magnetischer Feldstärke zu bekommen, kann man einen magnetischen Kondensator bauen und über magnetische Leitungen mit einem Permanentmagneten (oder auch Elektromagneten) verbinden. Die Kapazität der Leitungen muß dabei klein sein gegenüber der des "Kondensators". Da $C_m = \mu_0 A/l$ ist (analog zu $C = \varepsilon_0 A/l$), legt man die Leitungen im großen Bogen zum Kondensator, d.h. so, daß l möglichst groß ist. Abb. 6.10 zeigt, wie man es nicht machen darf: die (magnetische) Leitungskapazität ist zu groß.

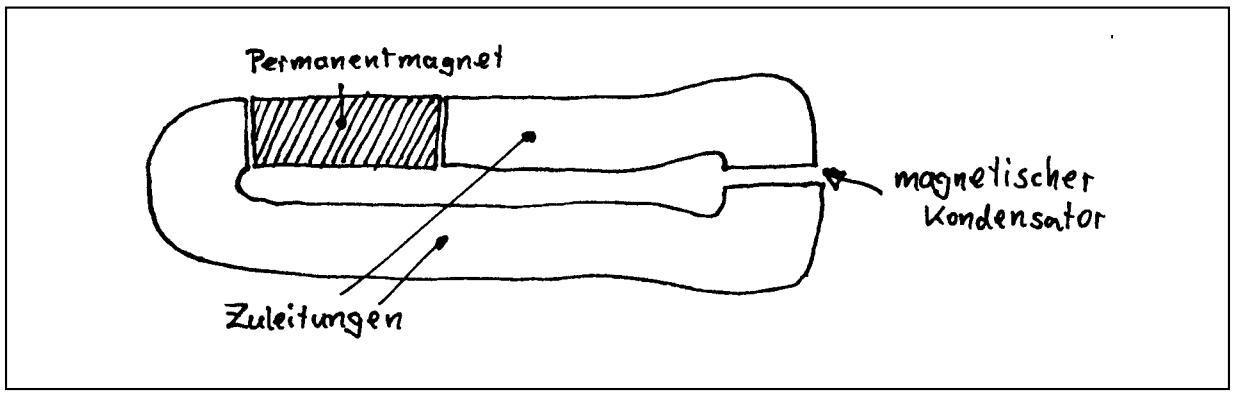


Abb. 6.10. Die Kapazität der Zuleitungen zum magnetischen Kondensator ist zu groß.

7. Energiedichte und mechanische Spannung im magnetostatischen Feld

Wir können die Argumente von Abschnitt 5 fast wörtlich übersetzen. Wir müssen nur ersetzen:

$\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{H}$

$\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{M}$

$\chi_e \rightarrow \chi_m$

$\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$

Für die Energiedichte erhalten wir, in Analogie zu Gleichung (5.1):

$$\rho_E = \frac{\mu\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 \tag{7.1}$$

Parallel zu den Feldlinien des $\boldsymbol{H}$-Feldes herrscht eine Zugspannung (vergleiche mit (5.2)):

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\mu\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 \tag{7.2}$$

und quer zu den Feldlinien eine Druckspannung (siehe auch (5.4)):

$$\sigma_{\perp} = -\frac{\mu\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2 \tag{7.3}$$

Da an Magnetpolen stets magnetische Feldlinien beginnen oder enden, schließen wir, daß das magnetische Feld an Magnetpolen immer zieht.

Gleichnamige Magnetpole werden vom Magnetfeld voneinander weggezogen, ungleichnamige werden zueinander hingezogen.

8. Die erste und die zweite Maxwellsche Gleichung

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit dem Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen.

8.1 Das Ampèresche Gesetz

Oersted entdeckte 1820, daß ein elektrischer Strom auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment ausübt. Ampère beschrieb die Kraftwirkung von Drähten, in denen Elektrizität fließt, durch eine elegante Theorie. Faraday erkannte, daß man aus diesen Erscheinungen auf die Existenz eines Feldes schließen konnte. Maxwell schließlich verallgemeinerte Ampères und Faradays Gedanken. In moderner Sprache läßt sich Oersteds Entdeckung folgendermaßen beschreiben: Ein Leiter, in dem Elektrizität fließt, ist von einem Magnetfeld umgeben, dessen $\boldsymbol{H}$-Feldlinien geschlossen sind. Dieses $\boldsymbol{H}$-Feld hat keine Quellen oder Senken, es ist div $\boldsymbol{H} = 0$, Abb. 8.1.

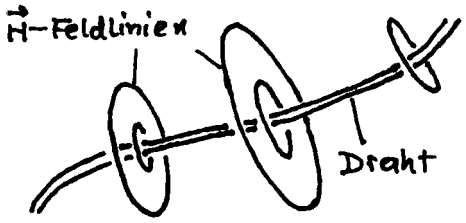


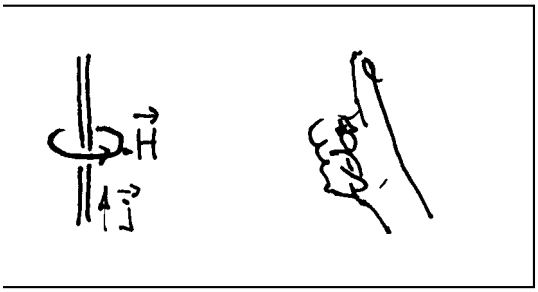
Abb. 8.1. Magnetisches Feld eines Drahtes, der von einem elektrischen Strom durchflossen wird

Aus Ampères Theorie folgt die Beziehung zwischen Stromstärke und $\boldsymbol{H}$-Feld:

$$\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = I \quad \text{Ampèresches Gesetz (Durchflutungsgesetz)} \tag{8.1}$$

In Worten: Das Integral $\int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ über einen geschlossenen Weg ist gleich der Stärke des elektrischen Stroms, der durch diese Fläche fließt. Dieser Gleichung liegt die Konvention zu Grunde, daß der geschlossene Integrationsweg zusammen mit der Ebene, auf die sich die Stromstärke bezieht, eine Rechts-Schraube definiert.

Dies läßt sich auch mit der "Rechte-Hand-Regel" formulieren: Weist der Daumen der rechten Hand in die Richtung des elektrischen Stroms (= Richtung der Stromdichtevektoren), so zeigen die gekrümmten Finger den Drehsinn der magnetischen Feldlinien an, Abb. 8.2.



8.2. Weist der Daumen der rechten Hand in die Richtung ektrischen Stroms, so zeigen die gekrümmten Finger die ung der magnetischen Feldstärke an.

Mit $I = \iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A}$ lautet das Ampèresche Gesetz:

$$\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A} \tag{8.2}$$

Achtung: In einem $\boldsymbol{H}$-Feld, das durch einen elektrischen Strom verursacht wird, ist $\int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ nicht vom Integrationsweg unabhängig. Ein Potential kann deshalb bestenfalls noch in begrenzten Gebieten definiert werden.

8.2 Berechnung magnetischer Feldstärken

Der gerade Draht

Man wählt als Integrationsweg einen Kreis vom Radius *r*, der senkrecht zur Drahtrichtung liegt, und dessen Mittelpunkt sich in der Mitte des Drahtes befindet, Abb. 8.3. Aus Symmetriegründen ist der Betrag von $\boldsymbol{H}$ auf dem gesamten Integrationsweg konstant. Die Richtung von $\boldsymbol{H}$ muß tangential zum Kreis sein, andernfalls hätte das $\boldsymbol{H}$-Feld am Draht Quellen oder Senken, was nicht der Fall ist. Es ist also

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{H}| 2\pi r = I \quad \Rightarrow \quad = |\boldsymbol{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

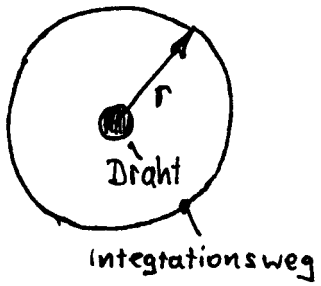


Abb. 8.3. Integrationsweg bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke in der Umgebung eines geraden Drahts

Die lange Spule

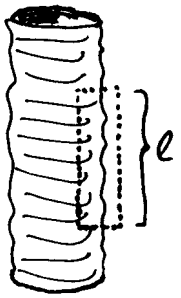
Wir wählen den in Abb. 8.4 gestrichelt gezeichneten Weg als Integrationsweg: Im Innern der Spule folgen wir einer Feldlinie; außerhalb ist die Feldstärke sehr klein, wir vernachlässigen ihren Beitrag zum Integral:

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = H \cdot l = N \cdot I$$

N = Zahl der Windungen, die durch den Integrationsweg laufen.

Damit wird

$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$



egrationsweg bei der Berechnung der magnetiärke in einer langen Spule

$\boldsymbol{H}$ hängt innerhalb der Spule nicht vom Ort ab, insbesondere nicht davon, welche Stelle innerhalb eines Spulenquerschnitts man betrachtet. Das $\boldsymbol{H}$-Feld ist also homogen. Außerdem hängt $\boldsymbol{H}$ nicht ab vom Querschnitt der Spule, und bei fester Windungszahl pro Länge nicht von der Länge der Spule.

Die torusförmige Spule

Der Durchmesser *R* des Rings sei groß gegen den "Rohrdurchmesser" *r*, Abb. 8.5.Dann ist das Feld nahezu homogen. Das Feld außerhalb der Spule ist Null. Für das Innere erhält man durch Integration über einen im Torusrohr verlaufenden Weg der Länge $l = 2\,\pi R$:

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{H}| \cdot l = N \cdot I \quad \Rightarrow \quad H = \frac{N \cdot I}{l}$$

Der ringförmige Elektromagnet

Der Abstand der ebenen Polflächen sei klein gegen die seitliche Ausdehnung dieser Flächen. Das $\boldsymbol{H}$-Feld zwischen den Polen ist also homogen. Abbildung 8.6 zeigt zwei Realisierungen. Wir berechnen die Feldstärke H_a zwischen den Polen und die Feldstärke H_i im Weicheisenkern.

Mit Hilfe von Gl. (6.6) erhalten wir

$\mu_0 H_a = M + \mu_0 H_i$

Mit (6.10) wird daraus

$\mu_0 H_a = \mu_0 \chi_m H_i + \mu_0 H_i = \mu_0 (1 + \chi_m) H_i$

Da $\chi_m >> 1$ ist, wird

$\mu_0 H_a \approx \mu_0 \chi_m H_i$,

also

$$H_i = \frac{H_a}{\chi_m}$$

Wir integrieren über den gestrichelten Weg. Das Wegstück innerhalb des Eisens habe die Länge l_i, die außerhalb l_a :

$H_i l_i + H_a l_a = N \cdot I$

Wir vernachlässigen H_i hier nicht gegen H_a, da vor H_i der Faktor l_i steht, der groß gegen l_a ist.

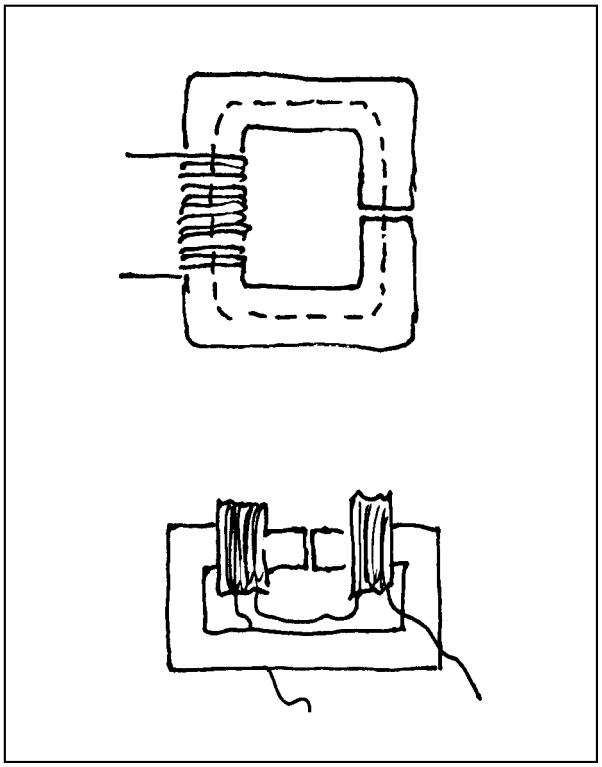


Abb. 8.6. Zwei Realisierungen eines Elektromagneten mit schmalem Spalt

Elimination von H_i mit Hilfe der vorletzten Gleichung ergibt:

$$H_a = \frac{NI}{\frac{l_i}{\chi_m} + l_a}$$

Mit $H_i = H_a/\chi_m$ erhält man daraus die Feldstärke im Eisenkern:

$$H_i = \frac{NI}{l_i + \chi_m l_a}$$

Diskussion von zwei Extremfällen:

$$\frac{l_i}{\chi_m} << l_a \quad \Rightarrow \quad H_a = \frac{NI}{l_a}, \quad H_i = \frac{NI}{\chi_m l_a}$$

Ist der Spalt nicht zu schmal, so ist das Feld im Spalt gerade so stark, als wäre die gesamte Spule über der kurzen Länge l_a aufgewickelt. Im Eisen ist die Feldstärke sehr klein.

$$\frac{l_i}{\chi_m} >> l_a \quad \Rightarrow \quad H_a = \frac{NI}{l_i}\chi_m, \quad H_i = \frac{NI}{l_i}$$

Die Feldstärke im Eisen ist dieselbe wie in einer Ringspule derselben Windungszahl. Im Spalt ist H um den Faktor χ_m größer.

Der lange Elektromagnet (Spule mit Eisenkern)

Da das Feld inhomogen ist, ist es schwerer zu berechnen. Der Effekt des Eisenkerns läßt sich qualitativ so beschreiben, Abb. 8.7: Bei einer leeren Spule kommt der größte Beitrag zu $\int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ vom Innern der Spule her. Ist die Spule mit einem weichmagnetischen Material gefüllt, so wird im Innern $\boldsymbol{H}$ sehr klein. Da $\int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = NI$ denselben Wert hat wie vorher, muß jetzt das Außenfeld einen großen Beitrag liefern. Das Außenfeld wird also durch den Eisenkern verstärkt.

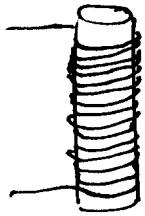
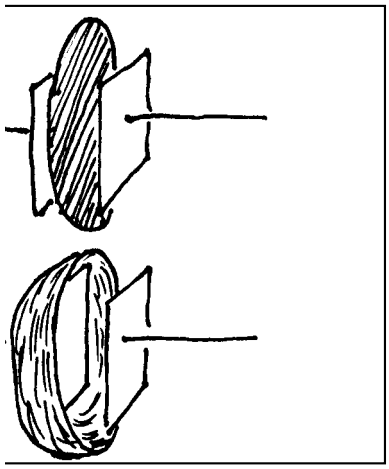


Abb. 8.7. Der Eisenkern verdrängt das magnetische Feld aus der Spule

8.3 Die erste Maxwellsche Gleichung

Das Ampèresche Gesetz ist ein Provisorium, das nur solange gilt, wie der Stromkreis geschlossen ist. Im Fall von Abbildung 8.8, in dem eine Leitung durch den leeren Raum zwischen den Platten eines Kondensators unterbrochen ist, führt es zu einer Inkonsistenz. Durch die Leitung fließe ein Strom konstanter Stärke I, so daß sich der Kondensator auflädt.



chkeiten für die Wahl der Integrationsner Berandung

Während dieser Strom fließt, hat das Integral $\int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ auf dem eingezeichneten Weg einen wohldefinierten, von Null verschiedenen Wert. Die rechte Seite des Ampèreschen Gesetzes, nämlich $\iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A}$ hat aber verschiedene Werte, je nachdem, wie die Fläche, deren Rand die gestrichelte Linie ist, gelegt wird. Schneidet die Fläche den Draht, so ist $\iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A} = I$; läuft sie dagegen durch den Raum zwischen den Kondensatorplatten, so ist $\iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A} = 0$. Bei dieser zweiten Wahl der Fläche kann also $\int \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}$ nicht gleich $\iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A}$ sein. Dieses Problem tritt nur auf, wenn der Stromkreis nicht geschlossen ist, wenn also $\boldsymbol{j}$ Quellen oder Senken hat. Maxwell verallgemeinerte deshalb das Ampèresche Gesetz, indem er auf der rechten Seite zu $\iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A}$ zwei Terme hinzufügte:

$$\oint_{\text{Rand von S}} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = \iint_{\text{S}} \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A} + \iint_{\text{S}} \dot{\boldsymbol{P}}d\boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \iint_{\text{S}} \dot{\boldsymbol{E}}d\boldsymbol{A} \tag{8.3}$$

Mit Gleichung (4.18) lassen sich die beiden letzten Summanden zusammenfassen:

$$\oint_{\text{Rand von S}} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{r} = \iint_{\text{S}} \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A} + \iint_{\text{S}} \dot{\boldsymbol{D}}d\boldsymbol{A} \qquad \text{1. Maxwellsche Gleichung} \tag{8.4}$$

Der gewöhnliche elektrische Strom $\iint \boldsymbol{j}d\boldsymbol{A}$ ist ergänzt worden durch zwei weitere Terme, die zum Magnetfeld beitragen:

1) $I_p = dQ_p/dt = \iint(\partial \boldsymbol{P}/\partial t)d\boldsymbol{A}$ ist der Strom, der durch die Verschiebung von Polarisationsladungen zustande kommt.

2) Selbst wenn keine polarisierbare Materie vorhanden ist, liefert der Raum zwischen den Kondensatorplatten einen Beitrag zum magnetischen Feld; der Term $\varepsilon_0 \iint(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)d\boldsymbol{A}$ verhält sich, was das Magnetfeld betrifft, wie ein elektrischer Strom. Dieser Term ist, bis auf den Faktor ε_0, die Zeitableitung des Flusses des $\boldsymbol{E}$-Feldes durch die Fläche S.

Ist damit die oben angesprochene Inkonsistenz beseitigt? Wir berechnen die rechte Seite der 1. Maxwellschen Gleichung für den Fall, daß die Integrationsfläche zwischen den Kondensatorplatten liegt. Da hier $\boldsymbol{j} = 0$ und $\partial \boldsymbol{P}/\partial t = 0$ ist, bleibt nur der Term $\varepsilon_0 \iint (\partial \boldsymbol{E}/\partial t) d\boldsymbol{A}$.

Mit $|\boldsymbol{E}| = Q/(\varepsilon_0 A)$ und $Q = I \cdot t$ wird

$$\varepsilon_0 \iint \dot{E} dA = \varepsilon_0 \iint \frac{\dot{Q}}{\varepsilon_0 A} dA = I$$

Es ist also $\int \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = I$, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das man erhält, wenn die Integrationsfläche die Leitung schneidet.

Maxwell interpretierte auch den Beitrag $\iint (\partial \boldsymbol{D}/\partial t) d\boldsymbol{A}$ als elektrischen Strom und nannte ihn Verschiebungsstrom. Die Summe $I + \int (\partial \boldsymbol{D}/\partial t) d\boldsymbol{A}$ nannte er den wahren Strom. Nach dieser Vorstellung gibt es überhaupt nur geschlossene Stromkreise. Bezeichnet man mit Maxwell die Stromdichte dieses wahren Stroms mit $\boldsymbol{C}$ (Current), so lautet die 1. Maxwellsche Gleichung einfach:

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{C} d\boldsymbol{A}$$

Nach dieser Auffassung ist die Ursache für $\int \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r}$ immer ein elektrischer Strom.

Wir weisen daraufhin, daß die Rechte-Hand-Regel für alle Beiträge zum Strom in Gleichung (8.3) gilt.

8.4 Die zweite Maxwellsche Gleichung

Faraday erkannte die strukturellen Gemeinsamkeiten von elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Diese Erkenntnis führte ihn zur Entdeckung des Induktionsgesetzes. Er hat dieses Gesetz nicht durch Zufall gefunden, sondern bewußt gesucht. Die Suche hat mehr als 10 Jahre gedauert. Hätte er den Teil des Maxwellschen Formalismus zur Verfügung gehabt, den wir bisher in der Vorlesung behandelt haben, so wäre seine Suche schneller gegangen. Er hätte das Induktionsgesetz einfach durch formales Übersetzen der ersten Maxwellschen Gleichung (8.3) finden können:

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A} + \iint \dot{\boldsymbol{P}} d\boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \iint \dot{\boldsymbol{E}} d\boldsymbol{A} \qquad \text{1. Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{j}_m d\boldsymbol{A} + \iint \dot{\boldsymbol{M}} d\boldsymbol{A} + \mu_0 \iint \dot{\boldsymbol{H}} d\boldsymbol{A} \qquad ?? \begin{cases} \text{noch nicht ganz korrekte Version der} \\ \text{2. Maxwellschen Gleichung} \end{cases}$$

Den einzigen Fehler, den man bei dieser formalen Übersetzung macht, ist ein Vorzeichenfehler: Die erhaltene Gleichung erweist sich als richtig, wenn man vor $\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r}$ ein Minuszeichen setzt. (Wäre das Vorzeichen der elektrischen oder der magnetischen Ladung andersherum festgelegt worden, so stünde das Minuszeichen in der ersten Maxwellschen Gleichung. In einer der beiden muß es aber stehen, sonst entsteht ein Konflikt mit dem Energiesatz.)

Da es keine einzelnen magnetischen Ladungen gibt, gibt es auch keinen gewöhnlichen magnetischen Strom, wir können deshalb den Term $\iint \boldsymbol{j}_m d\boldsymbol{A}$ weglassen. (Sobald jemand einen magnetischen Monopol entdeckt hat, fügen wir ihn wieder hinzu).

Es bleibt also

$$-\oint_{\text{Rand von S}} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = \iint_{\text{S}} \dot{\boldsymbol{M}} d\boldsymbol{A} + \mu_0 \iint_{\text{S}} \dot{\boldsymbol{H}} d\boldsymbol{A} \qquad (8.5)$$

Mit Gleichung (6.5) lassen sich die beiden Summanden auf der rechten Seite zusammenfassen:

$$-\oint_{\text{Rand von S}} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = \iint_{S} \dot{\boldsymbol{B}}d\boldsymbol{A} \quad \begin{cases} \text{2. Maxwellsche Gleichung} \\ \text{(Faradaysches Gesetz, Induktionsgesetz)} \end{cases} \tag{8.6}$$

Wie die erste Maxwellsche Gleichung macht auch die zweite eine Aussage über eine Fläche, genauer: über einen Zusammenhang zwischen dem Rand und dem Inneren der Fläche. Das Integral $\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$ über den Rand kommt zustande durch zwei Beiträge:

- die zeitliche Änderung des Flusses von $\boldsymbol{M}$ durch S
- die zeitliche Änderung des Flusses von $\boldsymbol{H}$ (mal μ_0) durch S.

Auch hier kann man die rechte Seite interpretieren als einen Verschiebungsstrom: einen magnetischen Verschiebungsstrom. Danach entstehen um einen magnetischen Strom herum geschlossene elektrische Feldlinien.

Achtung: In einem $\boldsymbol{E}$-Feld, das durch Induktion verursacht wird, ist $\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$ nicht vom Integrationsweg unabhängig. Ein Potential kann deshalb bestenfalls noch in begrenzten Gebieten definiert werden.

Um die Richtung der elektrischen Feldstärke des induzierten Feldes zu erhalten, kann man wieder eine Hand-Regel anwenden; wegen des Minuszeichen in den Gleichungen (8.5) und (8.6) aber eine Linke-Hand-Regel: Weist der Daumen der linken Hand in die Richtung des magnetischen Stroms (d.h. in die Richtung von $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$), so zeigen die gekrümmten Finger den Drehsinn der elektrischen Feldlinien an.

8.5 Elektrische Leiter im induzierten elektrischen Feld

Um das durch die 2. Maxwellsche Gleichung beschriebene elektrische Feld nachzuweisen, könnte man eine "Probeladung" benutzen. Dieser Nachweis ist aber schwierig, da $\boldsymbol{E}$, und demzufolge $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}Q$ in den üblichen praktischen Anordnungen zu klein ist. Wir bringen deshalb in den zu untersuchenden Raum einen elektrischen Leiter. Wir erkennen das $\boldsymbol{E}$-Feld dann indirekt an einer zwischen den Enden des Leiters auftretenden "Induktionsspannung", oder an einem im Leiter fließenden "Induktionsstrom".

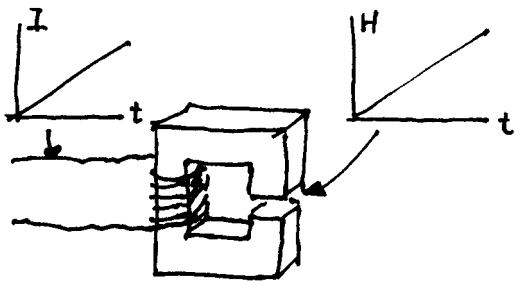


Abb. 8.9. Das Feld im Spalt des Elektromagneten sei homogen und nehme gleichmäßig zu.

Um eine mathematisch übersichtliche Situation zu erhalten, betrachten wir ein Magnetfeld $\boldsymbol{H}_a$ (Abb. 8.9),

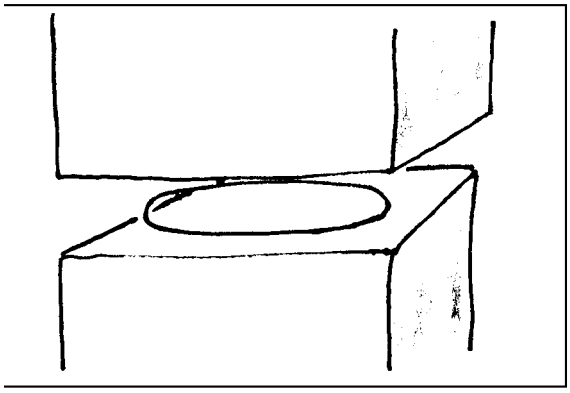
– das homogen ist;

– dessen Feldstärke gleichmäßig zunimmt (etwa in einem Elektromagneten, dessen elektrische Stromstärke gleichmäßig zunimmt): $\partial \boldsymbol{H}_a/\partial t = \text{const}$

Wir betrachten zwei Spezialfälle

a) Kurzschluß

Der Leiter ist ein geschlossener Ring, Abb. 8.10. Wegen des entstehenden $\boldsymbol{E}$-Feldes fließt im Leiter ein elektrischer Strom, und dieser verursacht ein Magnetfeld $\boldsymbol{H}_i$. Wir setzen die 2. Maxwellsche Gleichung an:



ɔb. 8.10. Kurzgeschlossene Leiterschleife in einem agnetfeld, dessen Stärke gleichmäßig zunimmt

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = -\mu_0 \iint \dot{\boldsymbol{H}}d\boldsymbol{A} = -\mu_0 \iint (\dot{\boldsymbol{H}}_a + \dot{\boldsymbol{H}}_i)d\boldsymbol{A}$$

Nun ist $\boldsymbol{H}_i$ zunächst noch unbekannt. Man findet aber leicht eine konsistente Lösung. Wir nehmen an, daß $\partial \boldsymbol{H}_i/\partial t = 0$, also $\boldsymbol{H}_i$ zeitlich konstant ist. Dann ist auch überall $\boldsymbol{E}$ zeitlich konstant und mit $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ auch die Stromstärke im Draht und folglich auch $\boldsymbol{H}_i$, wie vorausgesetzt. Damit wird also

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = -\mu_0 \iint \dot{\boldsymbol{H}}_a d\boldsymbol{A}$$

Die Gleichung hat also dieselbe Gestalt, als befände sich gar kein Leiter im Magnetfeld. Der Leiter ruft ein zusätzliches zeitlich konstantes Magnetfeld hervor, das aber keinen Einfluß auf den Induktionsvorgang hat.

b) Leerlauf

Die Leiterschleife ist unterbrochen, es fließt kein elektrischer Strom, Abb. 8.11. Daß kein Strom fließt, hat aber wegen $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ zur Folge, daß die elektrische Feldstärke im Draht gleich Null ist. Wie ist das mit der 2. Maxwellschen Gleichung zu vereinbaren? An der rechten Seite der Gleichung, d.h. am $\boldsymbol{H}$-Feld kann es nicht liegen, denn es fließt ja kein Strom, der das $\boldsymbol{H}$-Feld modifizieren könnte.

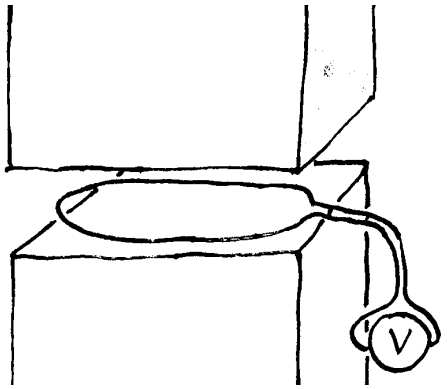


Abb. 8.11. Offene Leiterschleife in einem Magnetfeld, dessen Stärke gleichmäßig zunimmt

Im Draht verschieben sich, sobald das Experiment beginnt, Ladungen, und zwar gerade so, daß die **E**-Feldstärke im Draht Null wird. Dafür tritt aber zwischen den offenen Enden der Schleife ein $\boldsymbol{E}$-Feld auf, Abb. 8.12. Dieses ist gerade so stark, daß das Integral auf dem Wegstück S über die offene Stelle zwischen A und B gleich $\mu_0 \iint (\partial \boldsymbol{H}/\partial t)d\boldsymbol{A}$ ist. Bildet man $\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$ über den geschlossenen, gestrichelten Weg, so liefert nur dieses Wegstück S einen Beitrag. Man nennt dieses Integral Induktionsspannung U_{ind}.

Die Induktionsspannung kann zwischen den herausgeführten Drähten mit einem Voltmeter gemessen werden. In diesem Fall kann man die 2. Maxwellsche Gleichung so formulieren:

$$U_{ind} = -\mu_0 \iint \dot{\boldsymbol{H}}d\boldsymbol{A}$$

oder allgemeiner, falls $\chi_m \neq 0$ ist,

$$U_{ind} = -\iint \dot{\boldsymbol{B}}d\boldsymbol{A}$$

Man nennt

$$\Phi = \iint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{A}$$

den magnetischen Fluß. Damit wird

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} \tag{8.7}$$

Die Abbildungen 8.13 bis 8.19 zeigen einige Induktionsversuche.

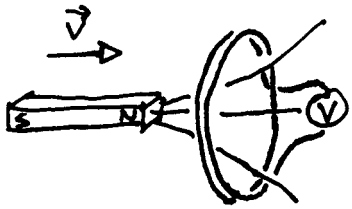
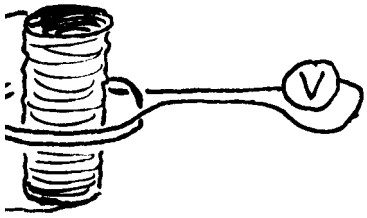


Abb. 8.15. Die Induktionsspannung ist proportional zur Windungszahl.



dänderung kommt durch Schließen ei-
tande.

In der Anordnung von Abb. 8.20b wird statt des Magneten die Leiterschleife bewegt. Der Ausschlag des Voltmeters ist natürlich derselbe wie in Abb. 8.20a, denn der Unterschied zwischen rechts und links besteht allein darin, daß zur Beschreibung ein anderes Bezugssystem gewählt wurde. Während man zur Beschreibung der linken Abbildung die 2. Maxwell-Gleichung heranzieht, braucht man zur Beschreibung der rechten, bei der das $\boldsymbol{H}$-Feld des Permanentmagneten

konstant ist, die 1. Maxwell-Gleichung. Die Beschreibung mit Hilfe der 2. Maxwell-Gleichung ist aber handlicher; man wird daher das Bezugssystem so wählen, daß die Leiterschleife ruht.

Auch bei der Anordnung von Abb. 8.21 ist das $\boldsymbol{H}$-Feld des Magneten zeitlich konstant. Man berechnet die Induktionsspannung daher in dem Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht und der Magnet rotiert.

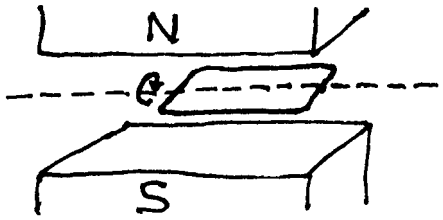


Abb. 8.21. Das $\boldsymbol{H}$-Feld ist zeitlich konstant. Zur Berechnung der Induktionsspannung geht man in das Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht.

8.6 Die Induktivität

Die Induktivität ist eine technisch wichtige Größe. Sie charakterisiert einen unverzweigten Stromkreis, in dem der elektrische Strom keine Quellen oder Senken hat, oder einen Teil eines solchen Stromkreises. Der Stromkreis definiert eine Fläche S, durch die der Fluß

$$\iint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{A} = \iint(\mu_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})d\boldsymbol{A}$$

hindurchtritt.

Nach der 1. Maxwellschen Gleichung ist die Feldstärke an jedem Ort proportional zur elektrischen Stromstärke I im Stromkreis. Solange $\boldsymbol{M} \propto \boldsymbol{H}$, ist auch $\boldsymbol{M}$ überall proportional zu I. Daraus folgt, daß sowohl der Fluß $\iint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{A}$ als auch $\iint \boldsymbol{M}d\boldsymbol{A}$ proportional zu I ist:

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{A} = \iint_S (\mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})d\boldsymbol{A} \propto I$$

Wir schreiben diese Beziehung

$$\Phi = LI \tag{8.8}$$

Der Proportionalitätsfaktor L heißt die Induktivität des Stromkreises. Die Maßeinheit ist Vs/A = H (Henry). Da es keine echten magnetischen Ströme gibt, gibt es auch die zu L analoge Größe nicht.

Mit der 2. Maxwellschen Gleichung (8.6) wird

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = -L\dot{I} \tag{8.9}$$

Befindet sich im Stromkreis ein großer Widerstand, d. h. ein kurzes Teilstück, dessen Widerstrand groß ist gegen den des Restes der Leitung, Abb. 8.22, so trät nur dieses Teilstück zu $\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}$ bei, und die Spannung zwischen den Enden dieses Widerstandes ist

$$U = -L\dot{I} \tag{8.10}$$

Oft ist ein Stromkreis so in Teile zerlegbar, wie es Abbildung 8.23 zeigt: in zwei nahezu geschlossene Flächen, bei denen der Fluß, der durch den einen Teil verursacht wird, nicht durch den anderen geht. In diesem Fall ist auch die Induktivität zerlegbar, man kann jedem Teil seine eigene Induktivität zuordnen.

Bei einer Spule mit N Windungen tritt jede $\boldsymbol{B}$-Feldlinie N mal durch ein und dieselbe Fläche des Stromkreises hindurch. Sie trägt damit N

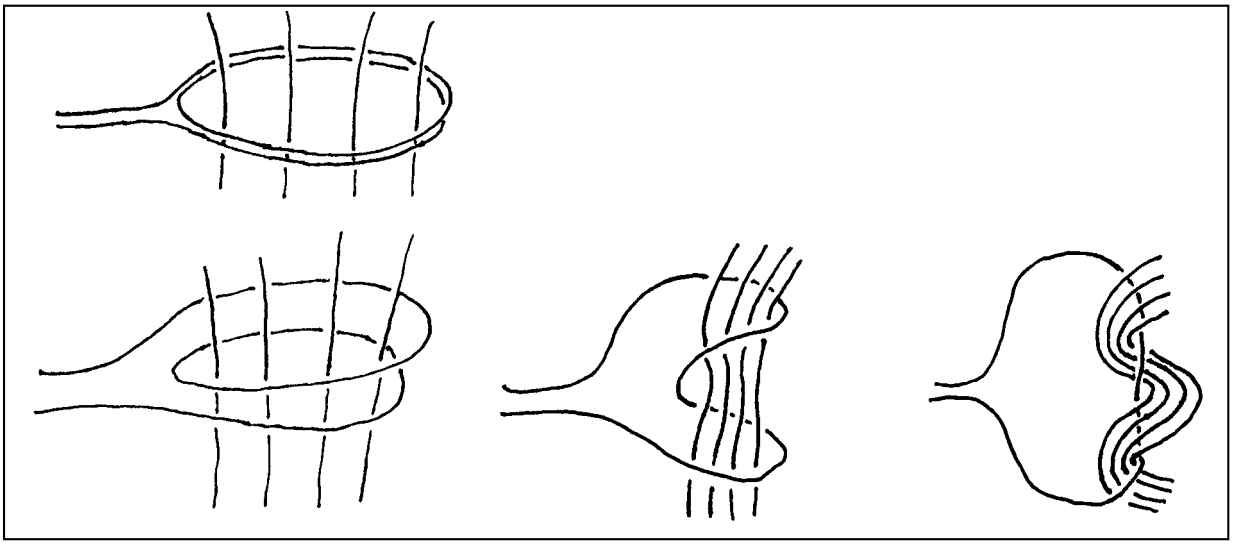


Abb. 8.24. Die durch den Stromkreis definierte Fläche wird von jeder Feldlinie zweimal durchstoßen.

mal zum Integral $\iint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{A}$ bei. Abbildung 8.24 zeigt, daß die Leiterfläche von 4 Feldlinien 8 mal durchstoßen wird: Alle 4 Teilbilder sind topologisch äquivalent.

Wir berechnen die Induktivität einer langen Spule. Im Innern der Spule ist $H = (N/l)\, I$. Mit $B = \mu_0 H$ ist der B-Fluß, der die Gesamtfläche der Spule durchsetzt,

$$\Phi = \mu_0 \cdot N \cdot A \cdot H = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} I$$

Durch Vergleich mit mit $\Phi = LI$ ergibt sich

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

Bezeichnet man den Fluß durch einen einzigen Spulenquerschnitt A mit Φ', so ist $\Phi' = \Phi/N$, und aus (8.8) wird:

$N\Phi' = LI$

Ist die Spule auf einen geschlossenen Eisenkern gewickelt, so ist (siehe Abschnitt 8.2) $H = (N/l)I$, $M = \mu_0 \chi_m H$ und folglich

$$B = \mu_0 H + M = \mu_0 (1 + \chi_m) \frac{N}{l} I = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I$$

Damit wird

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \tag{8.11}$$

Wir berechnen noch den Energieinhalt einer Spule mit geschlossenem Eisenkern. Das Feld befindet sich im Wesentlichen im Eisenkern, und damit auch die Energie. Mit Gleichung (7.1), sowie $H = (N/l)\, I$ und $V = A \cdot l$ (wobei V das Volumen ist) wird:

$$E = \rho_E \cdot V = \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} I^2 A l = \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{N^2 A}{l} I^2$$

Daraus wird, wenn man (8.11) benutzt,

$$E = \frac{L}{2} I^2 \tag{8.12}$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Gleichung ist größer, als es nach unserer Herleitung den Anschein hat. Sie gilt immer, wenn wir es mit dem Feld eines einzigen unverzweigten Stromkreises zu tun haben.

8.7 Bezugssysteme

Dieses Thema wird hier nur angerissen. Eine ausführliche Behandlung würde direkt zur Relativitätstheorie führen.

1. Wir betrachten einen gleichmäßig elektrisch geladenen Draht, der im Bezugssystem S ruht, Abb. 8.25. In diesem Bezugssystem stellt man ein von Null verschiedenes elektrisches Feld fest, während $\boldsymbol{H}$ überall gleich Null ist. Im Bezugssystem S', das sich gegen S in Richtung des Drahtes bewegt, bewegt sich die Ladung. Es fließt ein elektrischer Strom und es ist $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{0}$.

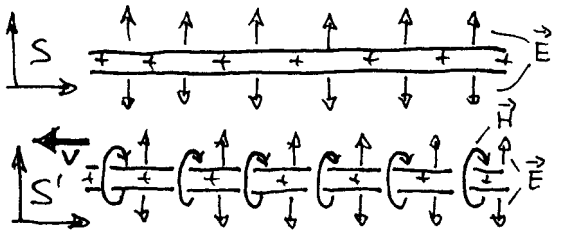


Abb. 8.25. In Bezugssystem S ist nur die elektrische, in Bezugssystem S' auch die magnetische Feldstärke von Null verschieden.

2. Wir betrachten einen Stabmagneten, der im Bezugssystem S ruht, Abb. 8.26. In S ist $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{0}$, aber $\boldsymbol{E}$ ist überall gleich Null. Im Bezugssystem S' ändert sich der $\boldsymbol{H}$-Fluß durch die Fläche σ mit der Zeit, es ist also $\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r}$ über den Rand dieser Fläche ungleich Null. In S' ist also die elektrische Feldstärke von Null verschieden.

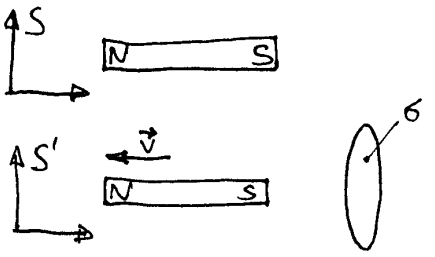
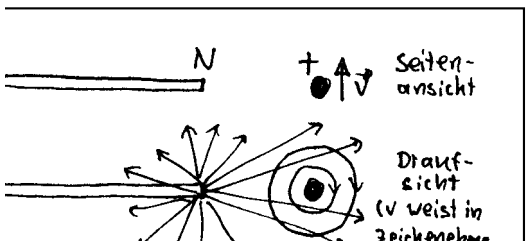


Abb. 8.26. In Bezugssystem S ist nur die magnetische, in Bezugssystem S' auch die elektrische Feldstärke von Null verschieden.

Wir sehen an diesen beiden Beispielen, daß $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ nicht nur durch irgendwelche physikalischen Gesetze miteinander verknüpft sind, etwa wie $\boldsymbol{F}$ und Q im Coulombschen Gesetz. $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ transformieren sich vielmehr ineinander bei Wechsel des Bezugssystems. Das elektrische und das magnetische Feld stellen nicht zwei verschiedene physikalische Systeme dar, sondern ein einziges: das elektromagnetische Feld. Der Zustand dieses Systems ist abhängig vom Bezugssystem.

Wir betrachten abschließend noch eine dritte Situation in zwei verschiedenen Bezugssystemen: Eine magnetische Punktladung und eine elektrische Punktladung bewegen sich relativ zueinander, Abb. 8.27. Dabei übt das eine Objekt auf das andere eine Kraft aus. Die Deutung ist nun je nach Bezugssystem eine andere.



In Bezugssystem S, Abb. 8.27a, ruht die magnetische Ladung. Die elektrische Ladung bewegt sich, bildet also einen elektrischen Strom. Nach der ersten Maxwellschen Gleichung entsteht daher ein zusätzliches magnetisches Feld. Dieses überlagert sich mit dem $\boldsymbol{H}$-Feld des Magnetpols. Im unteren Teil von Abb. 8.27a, bei dem die Geschwindigkeit senkrecht zur Zeichenebene steht, sieht man, daß das $\boldsymbol{H}$-

Feld oben verstärkt, unten abgeschwächt wird. Die Druckspannung nimmt oberhalb der elektrischen Ladung zu, darunter ab. Die Ladung wird also nach unten gedrückt.

Im Bezugssystem S', Abb. 8.27b, in dem die elektrische Ladung ruht, verursacht der Magnet ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld. Dieses hat nach der zweiten Maxwellschen Gleichung ein elektrisches Feld zur Folge.

Im unteren Teil der Abbildung, die die Anordnung wieder in der Aufsicht zeigt, sieht man, daß die $\boldsymbol{E}$-Feldstärke oberhalb der elektrischen Ladung abgeschwächt, unterhalb verstärkt werden. Die elektrische Ladung wird also nach unten gezogen, in Übereinstimmung mit unserer Deutung im anderen Bezugssystem.

Dieselbe Erscheinung wird also, je nach Bezugssystem, einmal mit der ersten und einmal mit der zweiten Maxwellschen Gleichung erklärt. Deutet man ein solches Experiment nach der ersten Maxwellschen Gleichung, so nennt man die auftretende Kraft "Lorentzkraft".

8.8 Zusammenfassung der Gleichungen

Wir wollen die wichtigsten Gleichungen der Elektrodynamik noch einmal zusammenstellen. Dies sind an erster Stelle die 1. und die 2. Maxwellsche Gleichung. Hinzu kommen die Gleichungen (4.20) und (6.7), die als 3. bzw. 4. Maxwellsche Gleichung bezeichnet werden. Die vier Maxwellgleichungen regeln das Zusammenspiel von elektrischen und magnetischen Feldern und deren Quellen.

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{j} d\boldsymbol{A} + \iint \dot{\boldsymbol{D}} d\boldsymbol{A} \qquad \text{1. Maxwellsche Gleichung}$$

$$-\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = \iint \dot{\boldsymbol{B}} d\boldsymbol{A} \qquad \text{2. Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oiint \boldsymbol{D} d\boldsymbol{A} = \iiint \rho dV \qquad \text{3. Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oiint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{A} = 0 \qquad \text{4. Maxwellsche Gleichung}$$

Wir haben hier die Maxwellschen Gleichungen"integral" formuliert. Für die 3. und 4. Maxwellsche Gleichung hatten wir schon früher eine lokale oder "differentielle" Formulierung gegeben, nämlich die Gleichungen (4.19) und (6.6). Man kann auch die 1. und 2. Maxwellsche Gleichung mit Hilfe des rot-Operators lokal formulieren. Die vier Maxwellgleichungen lauten in differentieller Schreibweise

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dot{\boldsymbol{D}}$$

$$-\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \dot{\boldsymbol{B}}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

9. Kräfte auf Ströme und bewegte Ladung

9.1 Der Druck des Magnetfeldes auf einen elektrischen Strom

Ein Feld drückt auf oder zieht an Materie immer dann, wenn das Feld "an der Materie hängt", das heißt wenn die Quellen des Feldes auf der Materie sitzen. Wir hatten in den Kapiteln 4 und 6 die elektrische und magnetische Ladung als Quellen des elektrischen bzw. magnetischen Feldes kennengelernt und in den Kapiteln 5 und 7 gefunden, daß die Felder an elektrisch oder magnetisch geladener Materie stets ziehen.

Wir haben nun im vorigen Kapitel als weitere Feldquellen Ströme kennengelernt: den elektrischen Strom $\boldsymbol{j} + \partial \boldsymbol{D}/\partial t$ und den magnetischen $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$. Felder müssen also auch auf Ströme oder auf Materie, durch die Elektrizität fließt, Kräfte ausüben. Von praktischer Bedeutung sind hier allerdings nur diejenigen Kräfte, die auf einen gewöhnlichen elektrischen Leitungsstrom ausgeübt werden. Wir beschränken uns daher auf die Diskussion dieses Falles.

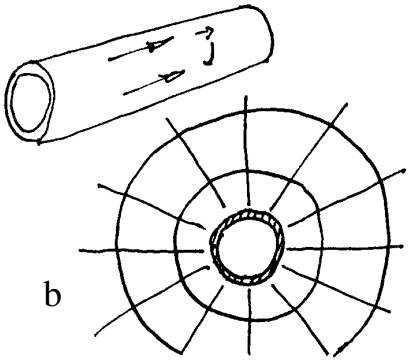


Abb. 9.1.(a) Von einem elektrischen Strom durchflossener Hohlzylinder. (b) Querschnitt mit Feldlinien und Äquipotentialflächen

Eine besonders einfache Situation liegt vor, wenn der elektrische Strom in einem zylindrischen Hohlleiter in Richtung der Zylinderachse fließt, Abb. 9.1a. Das Magnetfeld ist im Innern Null. Außen ist es ungleich Null. Die Feldlinien liegen parallel zur Zylinderoberfläche, die Äquipotentialflächen stehen senkrecht auf ihr, Abb. 9.1b. Wegen Gleichung (7.3) drückt das Feld auf den Leiter.

Wir schließen, daß das Magnetfeld auf elektrische Ströme immer drückt.

Die beiden in Abb. 9.2a im Querschnitt gezeigten Drähte "ziehen sich an". Wir können dieses Phänomen jetzt klären: Wir betrachten dazu den oberen Draht. Das Magnetfeld drückt von allen Seiten auf den Draht. Oben liegen aber die Feldlinien dichter als unten. Daher resultiert eine Nettokraft nach unten. Entsprechendes gilt für den unteren Draht. Auf gleiche Weise erklären wir, warum sich die Drähte von Abb.9.2b abstoßen. Wieder betrachten wir den oberen Draht. Das Magnetfeld drückt auf ihn von allen Seiten, aber von unten stärker als von oben. Es resultiert also eine Nettokraft nach oben.

Wir können damit die folgenden Regeln formulieren.

Zwei Drähte, in denen ein elektrischer Strom in dieselbe Richtung fließt, werden vom Magnetfeld zueinander hingedrückt. Fließen die Ströme in entgegengesetzte Richtungen, so werden die Drähte vom Feld voneinander weggedrückt.

9.2 Die Lorentzkraft

Gleichung (7.3) ist zur Berechnung der Kraft auf einen Leiter nur dann geeignet, wenn die Feldverteilung geometrisch einfach ist, wie etwa im Fall von Abb. 9.1. In vielen anderen Fällen kommt man mit einer anderen Formel leichter zum Ziel. Wir wollen diese andere Formel herleiten.

Wir wählen zunächst noch einmal eine geometrisch sehr einfache Anordnung, Abb. 9.3: eine unendlich ausgedehnte, von einem elektrischen Strom mit homogenem Stromdichtefeld durchflossene Platte (Stromdichte in z-Richtung, Stromstärke pro Breite = I/b). Wir bringen die Platte in ein Magnetfeld der Stärke $\boldsymbol{H}$, dessen Richtung parallel zur Platte und senkrecht zur Stromrichtung ist. Die Suszeptibilität des Mediums, und damit μ, sei auf beiden Seiten der Platte gleich. Bei dieser Konfiguration sind nur die x-Komponente von $\boldsymbol{H}$, die y-Komponente der Kraft $\boldsymbol{F}$ und die z-Komponente der Stromdichte $\boldsymbol{j}$ von Null verschieden. Wir beschränken uns daher bei der Rechnung auf diese Komponenten und lassen die Indices x,y und z weg.

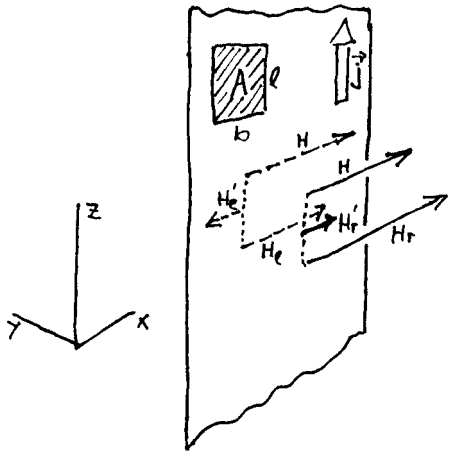


Abb. 9.3. Auf einen ebenen Leiter, durch den ein elektrischer Strom fließt, wirkt in einem äußeren Magnetfeld eine Kraft.

Wir berechnen die Kraft, die auf die Platte wirkt:

$F = (\sigma_r - \sigma_l)A$

("l" bedeutet links, "r" rechts.)

Zur Berechnung von $\sigma = -(\mu\mu_0/2)\,\boldsymbol{H}^2$ brauchen wir die links und rechts tatsächlich herrschende Feldstärke. Diese setzt sich zusammen aus der Feldstärke H des "äußeren" Feldes und der Stärke H' des Feldes, dessen Quelle der elektrische Strom in der Platte ist.

Die von der Platte verursachte Feldstärke H' berechnen wir mit Hilfe der 1. Maxwellgleichung, Abb. 9.4:

$H'_r b_r + H'_l b_l = (I/b)\, b$

und mit $b_r = b$ und $b_l = -b$ wird $H'_r - H'_l = I/b$.
Aus Symmetriegründen ist $H'_r = -H'_l$. Es ist also

$H'_r = I/(2b)$ und $H'_l = -(I/2)b$.

Damit wird die Gesamtfeldstärke

links $H_l = H - I/(2b)$ und rechts $H_r = H + I/(2b)$.

Hiermit erhält man die Differenz der mechanischen Spannungen

$$\sigma_r - \sigma_l = -\frac{\mu\mu_0}{2}(H_r^2 - H_l^2) = -\frac{\mu\mu_0}{2}\left[4\frac{HI}{2b}\right] = -\frac{\mu\mu_0}{2} H \frac{I}{b}$$

und mit $A = l \cdot b$

$F = -(\sigma_r - \sigma_l)A = \mu\mu_0 I l H$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der vektoriellen Beziehung

$$\boldsymbol{F} = \mu\mu_0 I(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}) = I(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) \qquad (9.1)$$

Der Vektor $\boldsymbol{l}$ hat dieselbe Richtung wie die elektrische Stromdichte. Gleichung (9.1) gilt nicht

nur unter den der Rechnung zu Grunde liegenden einfachen Bedingungen. Sie beschreibt in jedem Fall die Kraft, die auf einen Leiter wirkt, in welchem ein elektrischer Strom fließt und der sich in einem Magnetfeld befindet. Die Feldstärke $\boldsymbol{H}$, die in die Gleichung einzusetzen ist, ist die Feldstärke, die in Abwesenheit des Leiters vorhanden wäre. Man nennt die Kraft, die man mit Gleichung (9.1) berechnet, die Lorentzkraft.

9.3 Beispiele zur Lorentzkraft

Kraft auf einen Draht, in dem ein elektrischer Strom fließt (Abb. 9.5)

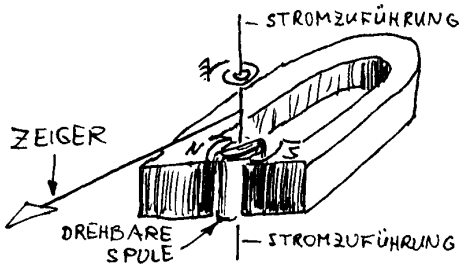


Abb. 9.6. Drehspulgalvanometer

Auf diesem Prinzip beruht das "Drehspulgalvanometer", Abb. 9.6. Es befindet sich in fast allen analogen Strom-, Spannungs- und Widerstandsmessern.

Kraft zwischen parallelen Leitern, in denen elektrische Ströme fließen

Wir betrachten Draht 2 im Feld von Draht 1, Abb. 9.7, und wenden Gleichung (9.1) an. In unserem Fall ist $F = \mu_0 I_2 l H_1$. Mit $H_1 = I_1/(2\pi r)$ wird

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r} \qquad (9.2)$$

Ist die Richtung des elektrischen Stroms in den beiden Drähten dieselbe, so ziehen sich die Drähte an, andernfalls stoßen sie sich ab.

Kraft auf bewegte, elektrisch geladene Teilchen

Wir fassen den elektrischen Strom in einem Leiter als Bewegung elektrischer Ladung mit der einheitlichen Geschwindigkeit v auf:

$$I = \rho v A = \frac{Q}{V} v A = \frac{Q}{l} v$$

Damit wird die Lorentzkraft:

$$\boldsymbol{F} = \frac{Q}{l} v(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

Da der Vektor $\boldsymbol{v}$ dieselbe Richtung hat wie $\boldsymbol{l}$, kann man schreiben

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (9.3)$$

In dieser Gleichung steckt keine geometrische Größe des Leiters mehr. Sie gilt deshalb auch für einzelne Ladungspakete, und damit auch für Teilchen. Ist das Teilchen ein Elektron, so wird

$$\boldsymbol{F} = -\, e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (9.4)$$

Elektronen im homogenen Magnetfeld

Ein Elektron bewege sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in einem Magnetfeld, das ohne die Gegenwart des Elektrons homogen wäre und die Stärke $\boldsymbol{H}$ hätte. $\boldsymbol{v}$ stehe senkrecht auf $\boldsymbol{H}$. Auf das Elektron wirkt die Kraft $\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Das hat eine Impulsänderung zur Folge. Da $\boldsymbol{F}$ senkrecht auf $\boldsymbol{v}$ steht, ist

$$d\boldsymbol{p}/dt = -m\omega^2\boldsymbol{r}.$$

$\boldsymbol{r}$ ist der Krümmungsradius der Bahn des Elektrons, ω die zugehörige Kreisfrequenz.

Mit der Kontinuitätsgleichung für den Impuls

$$d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$$

wird

$$-m\omega^2\boldsymbol{r} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

oder

$$m\omega^2 r = evB$$

Mit $v = \omega r$ erhalten wir schließlich die sogenannte Zyklotron-Frequenz:

$$\omega = \frac{e}{m} B$$

Erklärung von Induktionsvorgängen mit Hilfe der Lorentzkraft

Eine Leiterschleife wird in ein Magnetfeld hineinbewegt wie es Abb. 9.8 zeigt. Das Magnetfeld ist zeitlich konstant. Trotzdem tritt eine Induktionsspannung auf. Das erkennt man leicht, wenn man den Vorgang in dem Bezugssystem betrachtet, in dem die Leiterschleife ruht.

Stattdessen kann man den Vorgang aber auch in dem Bezugssystem, in dem der Magnet ruht, mit Hilfe der Lorentzkraft erklären: Wir betrachten den Teil PQ der Leiterschleife. Im Draht befinden sich bewegliche Ladungsträger. Sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ im Magnetfeld nach links. Daher wirkt die Lorentzkraft $\boldsymbol{F}_L = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ auf sie. Hierdurch werden die Ladungsträger solange verschoben, bis $\boldsymbol{F}_L$ durch $\boldsymbol{F}_{el} = Q\boldsymbol{E}$ kompensiert wird. Es entsteht also ein elektrisches Feld der Stärke:

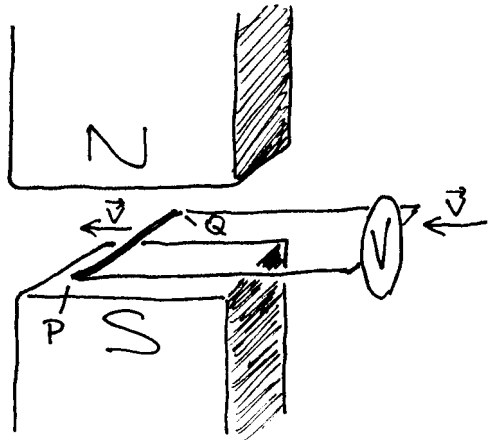


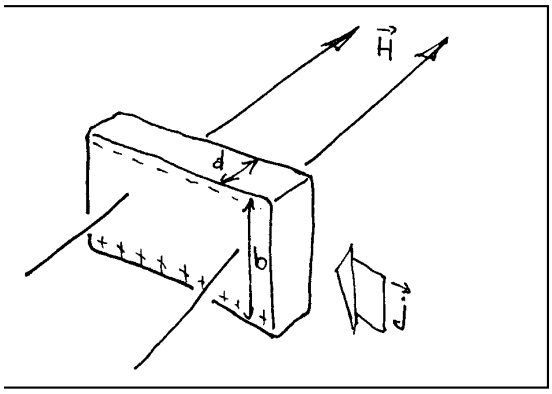
Abb. 9.8. Im Bezugssystem des Dauermagneten kann die Induktion nicht mit der 2. Maxwellschen Gleichung erklärt werden.

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{E}$ liegt in Richtung des Leiters.

Der Halleffekt

Ein elektrischer Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, werde von einem elektrischen Strom durchflossen, Abb. 9.9. Bewegen sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, so wirkt auf sie die Lorentzkraft $\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, quer zur Richtung des Leiters. Da in dieser Richtung kein elektrischer Strom fließen kann, häuft sich auf den Seiten des Leiters elek-



. 9.9. Zum Halleffekt

trische Ladung an, und zwar gerade so, daß $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}$ durch $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = Q\boldsymbol{E}$ kompensiert wird. Die elektrische Spannung zwischen den beiden Seiten des Leiters, die so entsteht, heißt Hall-Spannung U_{H}. Es gilt:

$$Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = Q\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad \text{oder} \quad |\boldsymbol{E}|_{\mathrm{H}} = v \cdot B \,.$$

Mit $v = I/(\rho db)$ und $U_{\mathrm{H}} = |\boldsymbol{E}|_{\mathrm{H}} b$ wird

$$U_{\mathrm{H}} = vBb = \frac{1}{\rho}\frac{IB}{d}$$

Durch Messen von I, B, U_{H} und d kann man damit die Dichte der beweglichen Ladung bestimmen. Insbesondere erhält man so auch das Vorzeichen der beweglichen Ladung.

Kräfte auf induzierte Ströme

Bewegt man eine geschlossene Leiterschleife in ein Magnetfeld hinein, Abb.9.10, so wird in der Leiterschleife ein Strom induziert. Auf den Draht, in dem jetzt ein elektrischer Strom fließt, wirkt im Magnetfeld die Lorentzkraft. Sie ist so gerichtet, daß sie die Bewegung der Leiterschleife "zu hindern versucht".

Auch wenn man eine volle Metallplatte in das Magnetfeld hineinbewegt, wird ein elektrischer Strom induziert. Da diesem sein Weg durch die Geometrie des Leiters nicht vorgeschrieben ist, nennt man ihn Wirbelstrom. Sonst gilt aber dasselbe wie für die Leiterschleife: Auf die Metallplatte wirkt eine Lorentzkraft, die die Bewegung zu hindern versucht.

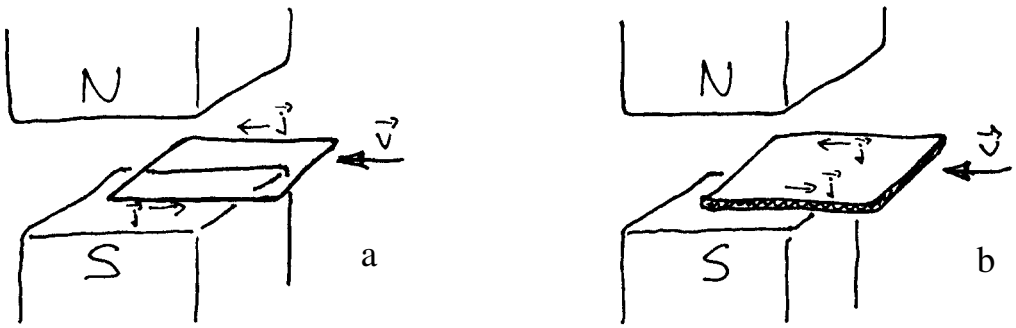


Abb. 9.10. Lorentzkraft auf induzierten Strom (a) in Leiterschleife und (b) in Metallplatte

10. Supraleiter

10.1 Die supraleitende Phase

Es gibt Stoffe, die sich in ihren elektromagnetischen Eigenschaften von den bisher betrachteten deutlich unterscheiden: die Supraleiter. Es gibt zahlreiche Varianten der Supraleitung. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung eines einfachen Idealfalls, der realisiert ist durch die sogenannten Supraleiter erster Art.

Die Supraleitung ist ein Zustand, der dem betrachteten Stoff nicht unabänderlich anhängt, sondern in dem sich der Stoff nur unter bestimmten Bedingungen befindet, ähnlich wie der ferromagnetische Zustand, oder der feste, flüssige oder gasige Zustand. Insbesondere darf die Temperatur einen bestimmten Wert nicht überschreiten; sonst verliert der Stoff seine supraleitende Eigenschaft. Genauso, wie ein Stoff nur fest ist, wenn die Temperatur nicht höher als die Schmelztemperatur ist, oder ferromagnetisch, solange die Temperatur die Curietemperatur nicht überschreitet, so ist ein Material auch nur supraleitend, wenn seine Temperatur nicht höher ist als die sogenannte Übergangstemperatur. Am Phänomen der Supraleitung nehmen nicht alle Elektronen teil, die im Normalzustand für die elektrische Leitung verantwortlich sind, sondern im Allgemeinen nur ein Teil von ihnen.

Es gibt sehr viele Stoffe, die eine supraleitende Phase haben. In Tabelle 10.1 sind die Übergangstemperaturen für einige chemische Grundstoffe aufgeführt. Es gibt Legierungen und chemische Verbindungen mit viel höheren Übergangstemperaturen.

Tabelle 10.1. Übergangstemperaturen einiger chemischer Grundstoffe

	Übergangstemperatur (K)
Hg	4,15
La	4,8
Nb	9,2
Ta	4,39
Tc	7,8
V	5,3

Hier die Eigenschaften der Supraleiter:

(1) Ihr elektrischer Widerstand ist Null. Statt der Gleichung

$$\boldsymbol{j} = \sigma \cdot \boldsymbol{E}$$

gilt die 1. Londonsche Gleichung:

$$\Lambda \cdot \frac{d\boldsymbol{j}_S}{dt} = \boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{j}_S$ ist die elektrische Stromdichte der supraleitenden Ladungsträger, Λ eine Materialkonstante. Die Gleichung sagt, daß ein elektrisches Feld zeitlich konstanter Stärke nicht einen Strom konstanter Stärke zur Folge hat, sondern einen Strom, dessen Stärke gleichmäßig zunimmt, einen gleichmäßig beschleunigten Strom sozusagen.

(2) Supraleiter verdrängen aus ihrem Innern magnetische Felder. Diese Eigenschaft nennt man den Meißner-Ochsenfeld-Effekt. Die Feldverdrängung bewerkstelligt der Supraleiter dadurch, daß an seiner Oberfläche elektrische Ströme fließen. Das magnetische Feld dieser Ströme ist gerade so, daß es das Gesamtfeld im Innern des Supraleiters zu Null kompensiert. Genauso wie ein elektrisches Feld in einen Körper mit freien Ladungsträgern bis zu einer gewissen Tiefe eindringt, falls die Ladungsträgerkonzentration nicht sehr groß ist, so dringt auch das magnetische Feld in eine dünne Oberflächenschicht eines Supraleiters ein. Die Dicke dieser Schicht läßt sich berechnen mit Hilfe der 2. Londonschen Gleichung

$$\Lambda \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{j}_S = -\boldsymbol{B}$$

Da Λ von der Konzentration der supraleitenden Ladungsträger abhängt, hängt auch die Dicke dieser Schicht davon ab.

10.2 Idealtypen magnetischer Materialien

Wir hatten früher zwei Idealformen des Magnetismus kennengelernt: den Magnetismus ideal weichmagnetischer Stoffe und den ideal hartmagnetischer Stoffe. Mit den Supraleitern haben wir einen dritten magnetischen Idealstoff kennengelernt. Wir wollen die drei Stoffe miteinander vergleichen.

Alle drei verlieren ihren Magnetismus bei hinreichend großen Temperaturen.

Den weichmagnetischen Stoff kann man auffassen als Idealform des paramagnetischen Stoffs, den Supraleiter als Idealform des diamagnetischen Stoffs.

Weichmagnetische und supraleitende Stoffe haben gemeinsam, daß sie ein magnetisches Feld in ihrem Innern nicht zulassen. Sie verhindern aber das Eindringen von Magnetfeldern auf verschiedene Art.

Der Weichmagnet kompensiert ein Feld, das eigentlich in seinem Innern sein möchte, dadurch, daß er an seiner Oberfläche Pole bildet. Der Supraleiter erreicht dasselbe Resultat , indem er an seiner Oberfläche Ströme fließen läßt. Die Folge für die Feldstärkeverteilung an der Außenseite ist in den beiden Fällen sehr verschieden.

Abb. 10.1a zeigt die Feldstärkeverteilung, die entsteht, wenn man einen einzelnen Magnetpol der ebenen Oberfläche eines Weicheisenkörpers nähert. Man erhält außerhalb des Weicheisens dieselbe Feldstärkeverteilung, wie wenn man das Weicheisen durch eine magnetische “Spiegelladung” ersetzt, eine Ladung desselben Betrages wie die erste Punktladung, aber des entgegengesetzten Vorzeichens, Abb. 10.1b.

Abb. 10.1c zeigt den Magnetpol vor der ebenen Oberfläche eines Supraleiters. Die Ströme an der Oberfläche bewirken ein Abbiegen der magnetischen Feldlinien, so daß sie tangential zur Oberfläche verlaufen. Man erhält dieselbe Feldstärkeverteilung, wenn man den Supraleiter ersetzt durch einen Spiegelpol desselben Betrages und desselben Vorzeichens, Abb. 10.1d.

Abb. 10.2 zeigt zwei zueinander analoge Versuche. Das Weicheisenstück in Abb. 10.2a hat eine Temperatur, die über seiner Curietemperatur liegt. Es ist also (fast) unmagnetisch. Man läßt nun die Temperatur abnehmen. Sobald sie die Curietemperatur unterschreitet, wird das Weicheisenstück vom Dauermagneten angezogen, Abb. 10.2b.

Die Temperatur des Supraleiters in Abb. 10.2c ist höher als die Übergangstemperatur. Der "Supraleiter" ist also noch nicht supraleitend. Seine Temperatur wird nun abgesenkt. Sobald sie die Übergangstemperatur unterschreitet, springt der Supraleiter in die Höhe und bleibt über den Dauermagneten in der Schwebe.

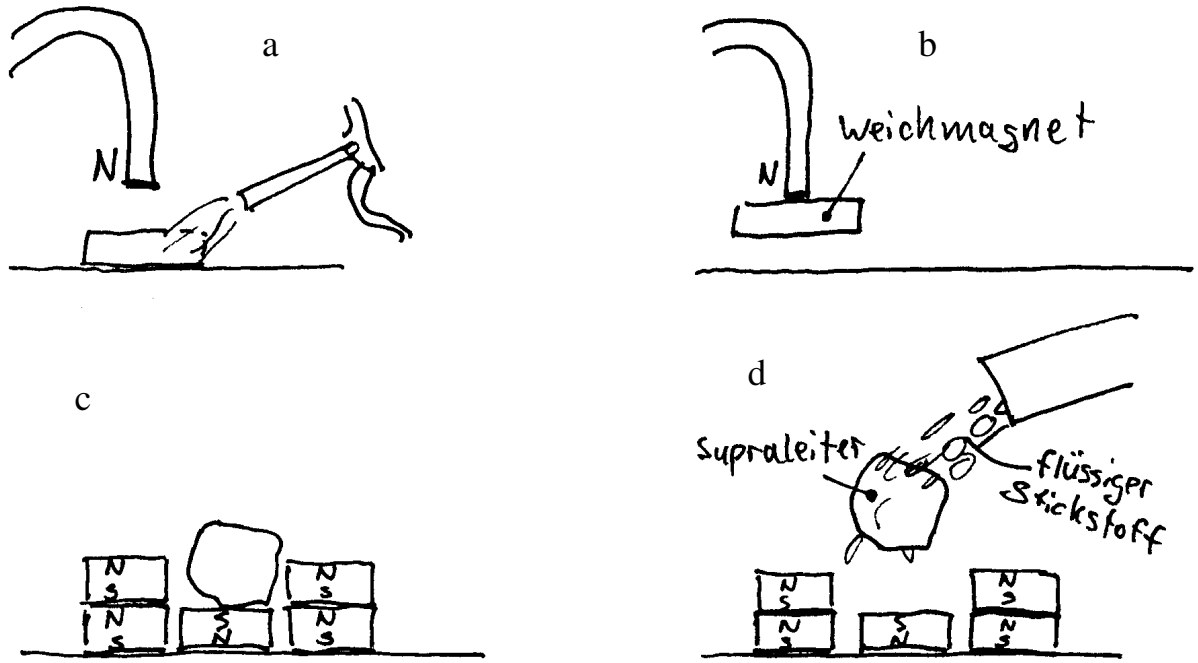


Abb. 10.2. Die Temperatur des Weicheisenstücks liegt über der Curietemperatur (a). Die Temperatur des Weicheisenstücks wurde unter die Curietemperatur abgesenkt (b). Die Temperatur des Supraleiters liegt über der Übergangstemperatur (c). Die Temperatur des Supraleiters wurde unter die Übergangstemperatur abgesenkt (d).

11. Energieströme und Impuls im elektromagnetischen Feld

11.1 Die Energiestromdichte im elektromagnetischen Feld

Wird ein Kondensator geladen, so fließt Energie in den Raum zwischen den Platten. Wird ein Elektromagnet eingeschaltet, so fließt Energie in den Raum zwischen den Polen. Während ein Elektromotor läuft, fließt Energie in den Rotor hinein, um durch die Motorwelle wegzufließen. Beim Generator ist es umgekehrt. In allen diesen Fällen fließt Energie im materiefreien Raum: im elektromagnetischen Feld. Ist das Feld durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ (und $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{M}$) eindeutig beschrieben, so muß sich auch der Energiestrom aus diesen Größen berechnen lassen. Da $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ lokale Größen sind, muß sich aus ihnen die lokale Größe Energiestromdichte $\boldsymbol{j}_E$ berechnen lassen.

Wir gehen aus von der bekannten Gleichung für die Energiestromstärke

$P = UI$.

Sie ist gültig für den Fall, daß der Energiestrom von einem Ladungsstrom begleitet ist. Diese Gleichung kann prinzipiell keine Aussage über den Ort machen, an dem die Energie fließt, denn sie enthält nur nichtlokale Größen. Um diese durch lokale Größen zu ersetzen, betrachten wir eine geometrisch besonders einfache Anordnung: Der elektrische Strom fließe durch zwei ebene, parallele Leiter, deren Abstand klein ist gegen die seitliche Ausdehnung, Abb. 11.1.

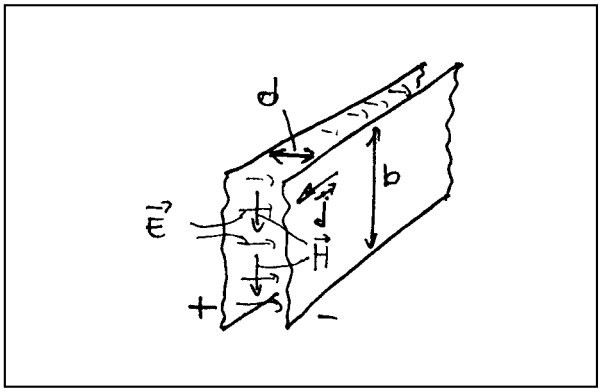


Abb. 11.1. Zur Berechnung der Energiestromdichte

Den Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung und elektrischer Feldstärke erhält man durch Anwendung von Gleichung (4.5):

$U = |\boldsymbol{E}|d$

und den zwischen elektrischer Stromstärke und magnetischer Feldstärke durch Anwendung von Gleichung (8.1):

$I = |\boldsymbol{H}|b$ (11.1)

Damit wird:

$P = |\boldsymbol{E}| \cdot d \cdot |\boldsymbol{H}| \cdot b$

und mit $|\boldsymbol{j}_E| = P/(db)$

$|\boldsymbol{j}_E| = |\boldsymbol{E}| \cdot |\boldsymbol{H}|$.

Die Energie fließt senkrecht zu $\boldsymbol{E}$ und zu $\boldsymbol{H}$, und zwar in der Abbildung nach hinten. Es ist also in unserem Fall

$\boldsymbol{j}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$. (11.2)

Diese Gleichung gilt für jedes elektromagnetische Feld, also nicht nur unter den einfachen Voraussetzungen unserer Rechnung. Die Größe $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ nennt man auch den Poyntingvektor.

Gleichung (11.2) enthält nur lokale Größen. Sie macht nicht nur eine Aussage darüber, ob und wieviel Energie fließt, sie sagt auch, wo sie fließt. $\boldsymbol{j}_E(\boldsymbol{r})$ ist ein Vektorfeld. Die Stromlinien dieses

Feldes veranschaulichen die Energieströmung genauso, wie die $\boldsymbol{j}_Q$-Stromlinien die Ladungsströmung veranschaulichen.

11.2 Beispiele für Energieströmungen

Energieübertragung mit Kabeln

Eine galvanische Zelle sei über zwei ideal leitende Drähte mit einem Stück Widerstandsdraht verbunden. Ausgangsstation der Energie ist also die Zelle, Endstation der Widerstandsdraht. Wir beschreiben qualitativ den Weg der Energie zwischen diesen beiden Stationen. In Abbildung 11.2 sind $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{H}$-Feld angedeutet. Die $\boldsymbol{j}_E$-Linien verlaufen senkrecht zu $\boldsymbol{E}$ und senkrecht zu $\boldsymbol{H}$. Drei $\boldsymbol{j}_E$-Linien sind eingezeichnet. Man sieht, daß ihre Quellen in der Zelle liegen und ihre Senken im Widerstandsdraht.

Im Widerstand wird die ankommende Energie dissipiert. Wenn die Zuleitungen nicht den Widerstand Null haben, so hat die elektrische Feldstärke eine Komponente in Drahtrichtung und einige $\boldsymbol{j}_E$-Linien münden in die Zuleitungsdrähte ein.

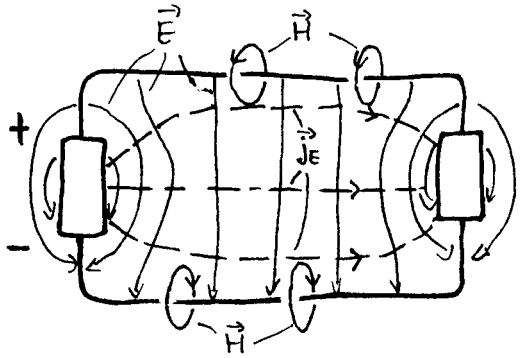
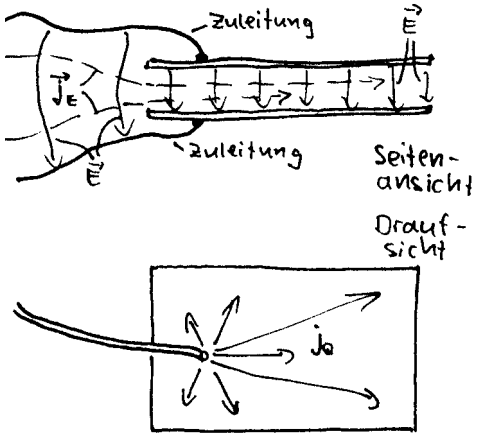


Abb. 11.2. Elektrische Feldstärke, magnetische Feldstärke und Energiestromdichte in einem einfachen Stromkreis

Die Energieströmung beim Laden eines Kondensators

Die elektrische Stromdichte nimmt von der Stelle, an der die Zuleitungen der Kondensatorplatten befestigt sind, ausgehend ab, und zwar so, daß sie an den Rändern der Platte Null ist, Abb. 11.3. Das Magnetfeld nimmt also auch zu den Rändern hin ab, und damit auch die Energiestromdichte $\boldsymbol{j}_E$. Die Energiestromdichte hat also zwischen den Kondensatorplatten Senken. Das muß so sein, denn hier wird ja die Energie deponiert.



)b. 11.3. (a) Elektrische Feldstärke und Energiestromdich- (b) Ladungsstromdichte

Der bewegte Kondensator

Ein Kondensator mit der Ladung pro Fläche $Q/A = \rho_A$ werde parallel zu seinen Plattenebenen mit der Geschwindigkeit v bewegt, Abb. 11.4. Gesucht ist das $\boldsymbol{j}_E$-Feld. Dazu müssen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ berechnet werden.

Überall zwischen den Platten ist nach Gleichung (4.9)

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{\rho_A}{\varepsilon_0}$$

und nach Gleichung (11.1)

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{I}{b}$$

Wir berechnen zunächst noch I als Funktion

der bekannten Größen. ρ_A ist die Ladung pro Fläche, $\rho_A b$ demzufolge die Ladung pro Länge (in Bewegungsrichtung). Die Stromstärke ist Ladung pro Länge mal Geschwindigkeit:

$I = \rho_A b\, v$

Damit wird

$|\boldsymbol{H}| = \rho_A\, v$

und mit (11.2) schließlich

$$|\boldsymbol{j}_E| = \frac{\rho_A^{\,2}}{\varepsilon_0}|\boldsymbol{v}|$$

Drückt man die Flächenladung durch die elektrische Feldstärke aus, so erhält man
$|\boldsymbol{j}_E| = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}^2\, |\boldsymbol{v}|$

Dieses Ergebnis ist erstaunlich, denn nimmt man an, daß die Feldenergie des Kondensators einfach mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ verschoben wird, so erhält man für die Energiestromdichte gerade den halben Wert, nämlich

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2|\boldsymbol{v}|$$

Was geschieht mit der anderen Hälfte? Sie fließt mechanisch durch die Platten zurück. Die Platten stehen unter Zugspannung und bewegen sich. Also fließt in ihnen ein Energiestrom, der sich nach $P = v\, F$ berechnen läßt.

Die Energieströmung in Motor und Generator

Die Beschreibung ist je nach Bezugssystem anders. Wir wählen für die Beschreibung das Bezugssystem, in dem der Magnet ruht und sich der Leiter bewegt.

a) Generator

Der stabförmige Leiter c, Abb. 11.5, wird nach rechts bewegt, so daß er auf den beiden Leitern a und b gleitet. Der Stromkreis sei zunächst offen. Auf die freien Ladungsträger in c, die wir uns positiv geladen denken, wirkt die Lorentz-Kraft und verschiebt sie in die Richtung von Leiter b, so daß das elektrische Potential von b gegen das von Leiter a ansteigt. Zwischen a und b befindet sich ein elektrisches Feld. Die Feldlinien laufen von b nach a. Wir schalten nun einen Energieempfänger ein. Ist dessen Widerstand groß gegen den restlichen Widerstand des Stromkreises, so bleibt die Spannung zwischen a und b unverändert. Durch c fließt nun ein elektrischer Strom gegen das elektrische Feld.

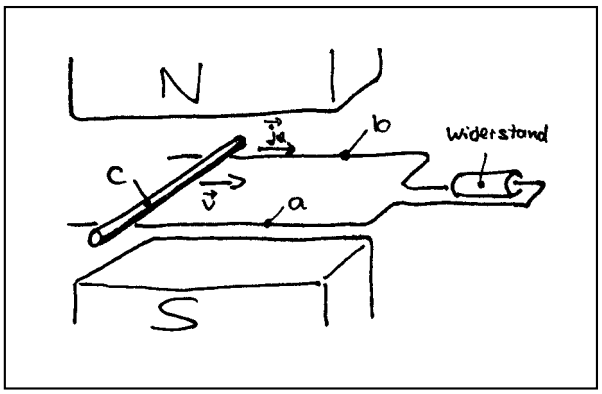


Abb. 11.5. Leiter c wird nach rechts bewegt; er gleitet dabei auf den Leitern a und b.

Abbildung 11.6 zeigt qualitativ das $\boldsymbol{E}$-, das $\boldsymbol{H}$- und das $\boldsymbol{j}_E$-Feld. Die Energie fließt aus dem bewegten Stab heraus und durch das elektromagnetische Feld in den Widerstand hinein.

b) Motor

Wir ersetzen den Widerstand durch eine elektrische Energiequelle. Die Quelle sei stromstabilisiert. Der Strom fließe zuerst durch a, dann durch b und durch a zurück zur Quelle. Auf die beweglichen Ladungsträger in Leiter c wirkt eine Lorentz-Kraft, deren Richtung parallel zu den Leitern a und b ist. Dadurch beginnt Leiter c, sich nach links zu bewegen. Bewegt sich c, so wirkt auf die Ladungsträger in c noch eine Lorentzkraft, die parallel zu c nach a gerichtet ist. Diese führt dazu,

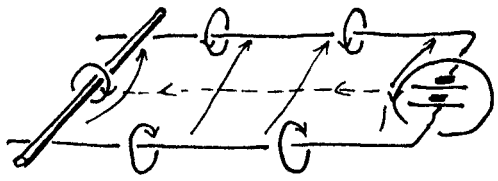


Abb. 11.7. $\boldsymbol{E}$-, $\boldsymbol{H}$- und $\boldsymbol{j}_E$-Feld beim Motor

daß ein elektrisches Feld entsteht, dessen Feldlinien von a nach b laufen.

Die resultierenden $\boldsymbol{j}_E$-Feldlinien laufen von der Quelle zum Leiter c, Abb. 11.7.

11.3 Energieübertragung mit magnetischen Verschiebungsströmen

In der Gleichung $P = UI$ müßte statt I eigentlich der gesamte elektrische Strom im Maxwellschen Sinn, nämlich $I + \iint(\partial \boldsymbol{D}/\partial t)d\boldsymbol{A}$, stehen.

Das erkennt man an Hand von Abb. 11.8. Der Energiestrom, der in den gestrichelt umrandeten Bereich hineinfließt, soll berechnet werden. Wir betrachten den Zeitpunkt kurz nach dem Einschalten, zu dem die Kondensatoren noch nicht geladen sind. Die gesamte Spannung der Quelle liegt dann noch am Widerstand, und damit fließt der gesamte Energiestrom, der von der Quelle kommt, zum Widerstand. Man erhält seinen Wert mit

$$P = U \cdot \iint \dot{\boldsymbol{D}} d\boldsymbol{A}$$

Man kann Energie auch mit Hilfe magnetischer Verschiebungsströme übertragen, und es gilt die analoge Gleichung:

$$P = U_m \cdot \iint \dot{\boldsymbol{B}} d\boldsymbol{A}$$

Abbildung 11.9a zeigt ein Beispiel. Ein Permanentmagnet bei A influenziert in einem magnetischen Leiter (Weicheisen) magnetische Ladungen. Dreht man den Permanentmagneten, so fließt im Weicheisen ein magnetischer Wechsel(verschiebungs-)strom. Dieser führt dazu, daß der magnetische Kondensator bei B mit wechselndem Vorzeichen geladen wird. Der Permanentmagnet bei B wird dadurch in Drehung versetzt.

Die Stärke des Energiestroms, der mit Hilfe der Weicheisenleitungen übertragen wird, ist durch die oben stehende Gleichung gegeben. Jede der beiden magnetischen Leitungen befindet sich auf räumlich nahezu konstantem magnetischem Potential. U_m ist die Potentialdifferenz zwischen den Leitungen. Da

$$\mu_0 \, \partial H/\partial t \ll \partial M/\partial t$$

ist, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$P = U_m \cdot \iint \dot{\boldsymbol{M}} d\boldsymbol{A}$$

Das Flächenintegral erstreckt sich über eine einzige der beiden Leitungen.

Auch diese Gleichung macht keine Aussage über den Weg, den der Energiestrom nimmt. Dieser Weg ist wieder durch $\boldsymbol{j}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ gegeben. Um jede der beiden Leitungen befinden sich nach der zweiten Maxwellschen Gleichung geschlossene elektrische Feldlinien. Vom einen zum anderen Leiter laufen magnetische Feldlinien. Die $\boldsymbol{j}_E$-Linien laufen von A nach B, Abb. 11.9b.

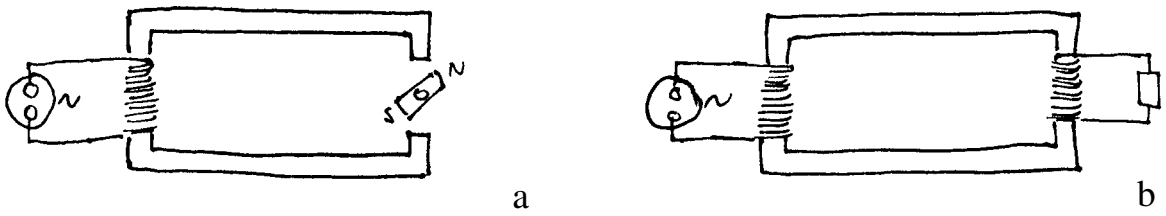
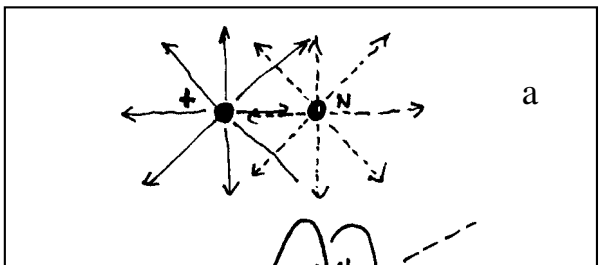


Abb. 11.10. Energieübertragung mit magnetischen Leitern; (a) Elektromotor; (b) Transformator

Ersetzt man einen der beiden Magneten durch eine Spule, durch die ein Wechselstrom fließt, Abb. 11.10a, so erhält man einen Elektromotor. Ersetzt man beide Magneten durch Spulen, Abb. 11.10b, so erhält man einen Transformator. In jedem Fall wird die Energie von links nach rechts mit Hilfe magnetischer Verschiebungsströme übertragen, und die $\boldsymbol{j}_E$-Stromlinien verlaufen im Wesentlichen außerhalb der magnetischen Leitungen.

11.4 Geschlossene Energiestromkreise im elektromagnetischen Feld

Eine positive elektrische und eine positive magnetische Punktladung befinden sich nebeneinander, und zwar in Ruhe, Abb. 11.11. Überall in der Umgebung der beiden Ladungen ist $\boldsymbol{E} \neq 0$ und $\boldsymbol{H} \neq 0$, und $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ sind, von der Verbindungslinie der beiden Ladungen abgesehen, nirgends parallel zueinander. Es ist also überall $\boldsymbol{j}_E \neq 0$. Die $\boldsymbol{j}_E$-Feldlinien bilden konzentrische Kreise um die Verbindungslinie der beiden Ladungen herum. Das $\boldsymbol{j}_E$-Feld hat also keine Quellen oder Senken. Das muß auch so sein, denn es gibt kein anderes System, dessen Energie ab- oder zunimmt.



11.5 Der Impuls des elektromagnetischen Feldes

Für einen Energie-Impuls-Transport durch den leeren Raum mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ gilt:

$$\boldsymbol{p} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{v}$$

Daraus folgt für die Dichten ρ_p und ρ_E von Energie und Impuls

$$\rho_p = \frac{\rho_E}{c^2}\boldsymbol{v}$$

Wenn sich die Energiestromdichte $\boldsymbol{j}_E = \rho_E \boldsymbol{v}$ schreiben läßt, gilt demnach:

$$\rho_p = \frac{\boldsymbol{j}_E}{c^2}$$

Diese Beziehung gilt viel allgemeiner als die Gleichungen, aus denen sie hergeleitet wurde. Oft kann man einen Energiestrom nicht, wie es die Gleichung $\boldsymbol{j}_E = \rho_E \boldsymbol{v}$ voraussetzt, als mit einer einheitlichen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegte Energie beschreiben. Trotzdem gilt auch dann der Zusammenhang $\rho_p = \boldsymbol{j}_E/c^2$ zwischen Impulsdichte und Energiestromdichte. Die Allgemeingültigkeit dieser Beziehung besagt, daß ρ_p und $\boldsymbol{j}_E$ eigentlich gar keine verschiedenen Größen sind, sondern ein und dieselbe. Man sollte ihnen also eigentlich auch keine verschiedenen Anschauungen zu Grunde legen. Tatsächlich kann man mit beiden Größen dieselbe Anschauung verbinden. Beide stellen nämlich das dar, was man umgangssprachlich "Schwung" nennt. Impuls ist Schwung, aber auch strömende Energie ist Schwung. (Man ist vielleicht eher geneigt zu sagen, strömende Energie <u>hat</u> Schwung.) Mit $\boldsymbol{j}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ folgt für die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes:

$$\rho_p = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}{c^2} \tag{11.3}$$

11.6 Zusammenfassung

Wir haben jetzt Ausdrücke für die Dichten und Stromdichten sowohl für die Energie als auch den Impuls des elektromagnetischen Feldes. Energiedichte und Energiestromdichte sind durch die Gleichungen (5.1), (7.1) und (11.2) gegeben. Die Impulsstromdichte ist identisch mit der mechanischen Spannung. Sie wird durch die Gln. (5.2), (5.4), (7.2) und (7.3) beschrieben. Die Impulsdichte schließlich berechnet sich nach Gl. (11.3). Wir fassen die Gleichungen noch einmal zusammen.

Wir haben damit alle Komponenten des sogenannten Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes, der in der Relativitätstheorie eine große Rolle spielt.

$\rho_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2$	$\rho_E = \frac{\mu\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2$	Energiedichte
$\boldsymbol{j}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$		Energiestromdichte
$\rho_p = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}{c^2}$		Impulsdichte
$\sigma_\parallel = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2$	$\sigma_\parallel = \frac{\mu\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2$	mechanische Spannung parallel zu den Feldlinien
$\sigma_\perp = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2$	$\sigma_\perp = -\frac{\mu\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2$	mechanische Spannung senkrecht zu den Feldlinien

12. Strukturen in der Elektrodynamik

12.1 Die Gibbssche Fundamentalform des elektromagnetischen Feldes

Wir betrachten einen Raumbereich vom Volumen V, in dem sich ein homogenes elektromagnetisches Feld befindet. Aus der Energiedichte

$$\frac{E}{V} = \rho_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}^2$$

erhält man

$$dE = V(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{E} + \mu_0 \boldsymbol{H} d\boldsymbol{H})$$

Diese Beziehung gibt an, um welchen Betrag dE sich die Energie ändert, wenn die elektrische oder magnetische Feldstärke geändert wird.

Wir wollen diese Energieänderung durch nichtlokale Größen ausdrücken und betrachten dazu zunächst den magnetischen Term $dE = V\mu_0 \boldsymbol{H} d\boldsymbol{H}$. Ist dE die Änderung der Energie in einer Spule, so gilt

$$dE = V\mu_0 \boldsymbol{H} d\boldsymbol{H} = V\boldsymbol{H} d\boldsymbol{B} = V\frac{NI}{l}\frac{d\Phi}{NA} = I d\Phi$$

Ist dagegen dE die Änderung der Energie in einem magnetischen Kondensator, so ist mit $U_m/d = H$ und $Q_m/A = \mu_0 H$:

$$dE = V\frac{U_m}{d}\frac{dQ_m}{A} = U_m dQ_m$$

Allgemein kann man also ersetzen:

$$V\mu_0 \boldsymbol{H} d\boldsymbol{H} = I\, d\Phi + U_m dQ_m.$$

Auf analoge Art kann man den lokalen Ausdruck für die Änderung der Energie des elektrischen Feldes durch einen nichtlokalen Ausdruck ersetzen.

$$V\varepsilon_0 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{E} = I_m d\Phi_{el} + U dQ\ ,$$

wo Φ_{el} der Fluß von D ist.

Insgesamt ist also

$$dE = I\, d\Phi + U_m dQ_m + I_m d\Phi_{el} + U dQ\ .$$

Eine Beziehung dieser Art heißt Gibbssche Fundamentalform.

In dieser Beziehung sind zwei Terme nicht wichtig:

$U_m dQ_m$ ist selten von Bedeutung, da magnetische Kondensatoren nicht als technische Bauelemente benutzt werden.

$I_m d\Phi_{el}$ ist praktisch gar nicht realisierbar, da es schwierig ist, magnetische Ströme zu erzeugen.

In praktischen Anwendungen bleibt also gewöhnlich nur der Ausdruck

$dE = I\, d\Phi + U dQ$.

Er beschreibt zum Beispiel die Energieänderung in einer Spule (1. Term) und in einem elektrischen Kondensator (2. Term). Dieser Ausdruck hat nicht mehr die Symmetrie zwischen elektrischen und magnetischen Größen, die wir bisher stets betrachtet haben, denn es fehlt das Analogon $I_m d\Phi_{el}$ zu $Id\Phi$ und das Analogon $U_m dQ_m$ zu UdQ.

Zwischen $Id\Phi$ und UdQ besteht aber eine Symmetrie anderer Art. Dies ist genau diejenige Symmetrie, die im Physik-I-Kurs ausgenutzt wurde und die wir "Dualismus" genannt hatten (und die ihr Analogon in der Mechanik hat). Bei dieser Abbildung sind nicht nur Größen durcheinander zu ersetzen, sondern auch topologische Beziehungen, etwa "Knoten ↔ Masche", "parallel ↔ hintereinander". Schließlich sind auch Größen durch ihren Kehrwert zu ersetzen, nämlich "Widerstand ↔ Leitwert", und hieraus folgen die Ersetzungen "Kurzschluß ↔ Leerlauf", und "Leiter ↔ Nichtleiter".

Während die Betrachtung der Symmetrie, bei der sich $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ entsprechen, für das Verständnis der physikalischen Grundlagen besonders hilfreich ist, ist der Dualismus, in dem sich U und I entsprechen, für das Verständnis technischer Anwendungen sehr nützlich.

12.2 Die Analogie zwischen Ladungsdichte und Stromdichte

In der theoretischen Physik ist eine weitere Analogie sehr beliebt. Sie beruht auf einem Vergleich zwischen ρ_Q und $\boldsymbol{j}_Q$. So wie ρ_Q die Quelle des $\boldsymbol{E}$-Feldes ist, so ist $\boldsymbol{j}_Q$ die Quelle des $\boldsymbol{B}$-Feldes. Hier entsprechen sich also $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$. In Analogie zum elektrischen Potential φ definiert man das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$.

In Analogie zur Poissongleichung

$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$

gilt dann (ohne Beweis)

$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$.

13. Elektrische Schwingungen - der Wechselstrom

13.1 Die Maschenregel in Stromkreisen, die Induktivitäten enthalten

In Stromkreisen, in denen nur Gleichstrom fließt, oder in denen Spannungen, die durch zeitlich veränderliche Ströme induziert werden, gegen die anderen auftretenden Spannungen vernachlässigt werden können, ist $\boldsymbol{Edr}$ auf jedem geschlossenen Weg, insbesondere entlang jeder "Masche", gleich Null. Es kann ein Potential definiert werden, und es gilt die Maschenregel (Gleichung (2.7):

$$\sum U_i = 0$$

Die Maschenregel gilt aber nicht mehr, sobald sich Induktivitäten im Stromkreis befinden. In dem in Abb. 13.1 dargestellten Stromkreis ist (Gleichung (8.9)):

$$\oint_{\text{Stromkreis}} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = -L\dot{I} \neq 0$$

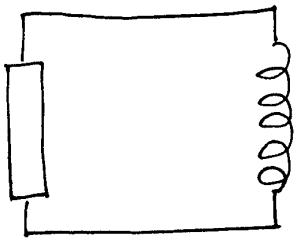


Abb. 13.1. Stromkreis mit Induktivität

Da aber die Maschenregel sehr praktisch ist, rettet man sie mit Hilfe eines Tricks. Im Stromkreis von Abb. 13.1 liegt der volle Beitrag zum Integral $\int \boldsymbol{Edr}$ am Widerstand. Es ist also

$$-L\dot{I} = RI$$

oder

$$RI + L\dot{I} = 0$$

Man tut nun so, als ob es in dem Stromkreis ein Potential gäbe; man tut so, als ob das negative von $(-L\partial I/\partial t)$, also $L\partial I/\partial t$, eine Spannung sei, die von einem elektrischen Feld in der Spule herrührt. Man interpretiert also die Gleichung $RI + L\partial I/\partial t = 0$ folgendermaßen: Am Widerstand fällt die Spannung $U_{\text{Wid}} = R\,I$ ab, und an der Spule fällt die Spannung $U_{\text{Sp}} = L\partial I/\partial t$ ab.

Mit dieser Festlegung gilt also wieder

$$\sum U_i = 0 \qquad \begin{cases} \text{Verallgemeinerte Maschenregel;} \\ \text{gilt, wenn } U_{\text{Spule}} = +L\dot{I} \text{ eingesetzt wird} \end{cases}$$

13.2 Elektrische Schwingkreise

Abbildung 13.2 zeigt einen elektrischen Schwingkreis. Zu seiner rechnerischen Behandlung benutzen wir die verallgemeinerte Maschenregel:

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0$$

Wir leiten die Gleichung nach der Zeit ab und benutzen $dQ/dt = I$ (die Beziehung zwischen Kondensatorladung und Ladestrom):

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

Wir dividieren schließlich noch durch L:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{I}{LC} = 0$$

Dies ist eine Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen. Die Lösung geschieht nach dem bekannten Rezept.

Für $R = 0$ sind die Schwingungen ungedämpft, und es ist

$$I = I_0 \sin \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Mit $U = L\partial I/\partial t$ ergibt sich

$$U = U_0 \cos \omega t \quad \text{mit} \quad U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_0$$

Mit der Beziehung

$$E_{\text{Kond}} = \frac{C}{2} U^2$$

die man aus (4.10) und (4.27) gewinnt und mit Gleichung (8.12)

$$E_{\text{Spule}} = \frac{L}{2} I^2$$

erhält man

$$E_{\text{Kond}} = \frac{C}{2} {U_0}^2 \cos^2 \omega t = \frac{L}{2} {I_0}^2 \cos^2 \omega t = \frac{L}{2} {I_0}^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

und

$$E_{\text{Spule}} = \frac{L}{2} {I_0}^2 \sin^2 \omega t = \frac{L}{2} {I_0}^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$$

Die Summe

$$E_{\text{Kond}} + E_{\text{Spule}} = \frac{L}{2} {I_0}^2 = \frac{C}{2} {U_0}^2$$

ist also zeitlich konstant.

Die Energie fließt mit der Frequenz 2ω zwischen Spule und Kondensator hin und her. Das sieht man auch am Energiestrom:

$$P = U \cdot I = I_0 \cdot U_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = I_0 U_0 \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

Für $R \neq 0$ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Die Amplituden des elektrischen Stroms und der Spannung klingen ab gemäß

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

und die des Energiestroms gemäß

$$e^{-\frac{R}{L}t}$$

Abbildung 13.3 zeigt den Schwingkreis, den man durch "duales Übersetzen" erhält: $C \leftrightarrow L$, $R \leftrightarrow 1/R$ parallel $\leftrightarrow$ hintereinander. Statt diese Schaltung mit der zur Maschenregel dualen Knotenregel zu berechnen, kann man einfach die Ergebnisse der vorigen Rechnung übersetzen. So ergibt sich z.B. für die Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

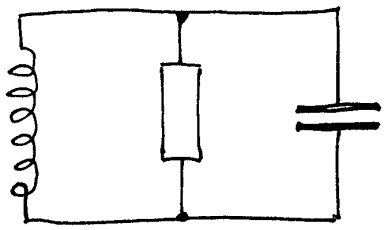


Abb. 13.3. Parallelschwingkreis

13.3 Wechselstrom und Wechselspannung

Wenn sich die Stromstärke (oder die Spannung) zeitlich gemäß einer Sinusfunktion ändert, wenn also $I(t) = I_0 \sin(\omega t+\varphi)$ (oder $U(t) = U_0 \sin(\omega t+\varphi)$) ist, so spricht man von einem Wechselstrom (bzw. einer Wechselspannung). Wechselstrom hat aus verschiedenen Gründen eine große technische Bedeutung.

Man verwendet Wechselstrom hoher Frequenz als Datenträger, und Wechselstrom niedriger Frequenz (meist 50 Hz) als Energieträger.

Die Vorteile des Wechselstroms beruhen zum großen Teil darauf, daß die durch die 1. und 2. Maxwellsche Gleichung beschriebenen Gesetze wirksam werden, denn in diesen Gleichungen stehen Zeitableitungen. Da die Zeitableitung einer harmonischen Funktion wieder eine harmonische Funktion ist, sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen elektrischen Größen besonders einfach.

Sind zwei Punkte A und B eines elektrischen Netzwerks durch eine beliebige Anordnung von Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen miteinander verbunden, Abbildung 13.4, und liegt zwischen A und B die Wechselspannung $U = U_0 \sin \omega t$, so fließt durch die Anordnung ein Wechselstrom derselben Frequenz: $I = I_0 \sin(\omega t+\varphi)$.

Der Strom ist im Allgemeinen gegen die Spannung phasenverschoben. Wir werden sehen, daß I_0 zu U_0 proportional ist. Der Quotient U_0/I_0 heißt der Scheinwiderstand der Anordnung. Er wird mit X bezeichnet.

Wir untersuchen im Folgenden den Zusammenhang zwischen $U(t)$, $I(t)$ und $P(t)$ für

- einen Ohmschen Widerstand;
- einen Kondensator;
- eine Spule;
- Widerstand, Kondensator und Spule hintereinandergeschaltet;
- Widerstand, Kondensator und Spule parallelgeschaltet.

13.4 Der Wechselstromwiderstand

a) Ohmscher Widerstand

Für den Ohmschen Widerstand gilt:

$U = RI$.

Zwischen die Enden des Widerstandes wird die Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ gelegt. Die Konsequenz: Es fließt ein Wechselstrom der Stärke

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

wobei $I_0 = U_0/R$ ist.

Die Stromstärke der im Widerstand dissipierten Energie ist:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 I_0 \sin^2 \omega t = \frac{{U_0}^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Der zeitliche Mittelwert von $P(t)$ ist

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} \frac{{U_0}^2}{R} = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

Welchen Wert U_{eff} müßte eine Gleichspannung haben, die dieselbe Dissipation im Widerstand verursacht?

$$\frac{{U_{\text{eff}}}^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{{U_0}^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Die entsprechende elektrische Stromstärke wäre

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{U_0}{\sqrt{2} R} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Man nennt U_{eff} und I_{eff} die Effektivwerte der Wechselspannung bzw. des Wechselstroms. Wechselstrom- und Wechselspannungsmeßgeräte sind in Effektivwerten von Strom bzw. Spannung geeicht. Man kann also mit den gemessenen Werten den mittleren Energiestrom als Produkt aus (Effektiv-)Spannung und (Effektiv-)Strom nach der Formel $P = UI$ berechnen.

Die 220 V der Steckdose stellen ebenfalls die Effektivspannung dar.

b) Kondensator, kapazitiver Widerstand

Für den Kondensator gilt Gleichung (4.10):

$Q = CU$.

Ableitung nach der Zeit und Einsetzen von I für $\partial Q/\partial t$ ergibt:

$$I = C\dot{U}$$

Wir legen die Spannung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ an und erhalten einen Strom der Stärke

$$I(t) = \omega C U_0 \cos \omega t = \omega C U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

wobei $I_0 = \omega C U_0$ ist.

Ändert sich die Spannung am Kondensator harmonisch, so ändert sich also auch die Stärke des Stroms durch den Kondensator harmonisch, $I(t)$ ist aber gegen $U(t)$ um $\pi/2$ phasenverschoben: $U(t)$ liegt gegen $I(t)$ um $\pi/2$ zurück.

Den Scheinwiderstand

$$X_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

nennt man kapazitiven Widerstand.

Wir berechnen noch den Energiestrom, der in den Kondensator fließt:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \omega C U_0^{\,2} \sin \omega t \cos \omega t = \omega C \frac{U_0^{\,2}}{2} \sin 2\omega t$$

Es fließt Energie abwechselnd in den Kondensator hinein und aus ihm heraus. Der zeitliche Mittelwert der Energiestromstärke ist Null.

c) Spule, induktiver Widerstand

Für die Spule gilt Gleichung:

$$U = L\dot{I}$$

Mit $I(t) = I_0 \sin \omega t$ wird

$$U(t) = \omega L I_0 \cos \omega t = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ändert sich die Stärke des Stroms durch die Spule harmonisch, so ändert sich auch die Spannung zwischen den Enden der Spule harmonisch, $U(t)$ ist aber gegen $I(t)$ um $\pi/2$ phasenverschoben: $I(t)$ liegt gegen $U(t)$ um $\pi/2$ zurück.

Den Scheinwiderstand

$$X_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$$

nennt man induktiven Widerstand.

Der Energiestrom, der in die Spule fließt, ist:

$$P(t) = U(t)\, I(t) = \omega L I_0^{\,2} \sin \omega t \cos \omega t$$

Es fließt Energie abwechselnd in die Spule hinein und aus ihr heraus. Der zeitliche Mittelwert der Energiestromstärke ist Null.

d) Ohmscher Widerstand, Spule und Kondensator hintereinandergeschaltet, Abb. 13.5

Die elektrische Stromstärke ist in allen drei Elementen dieselbe:

$I(t) = I_0 \sin \omega t$.

Gesucht ist die Spannung

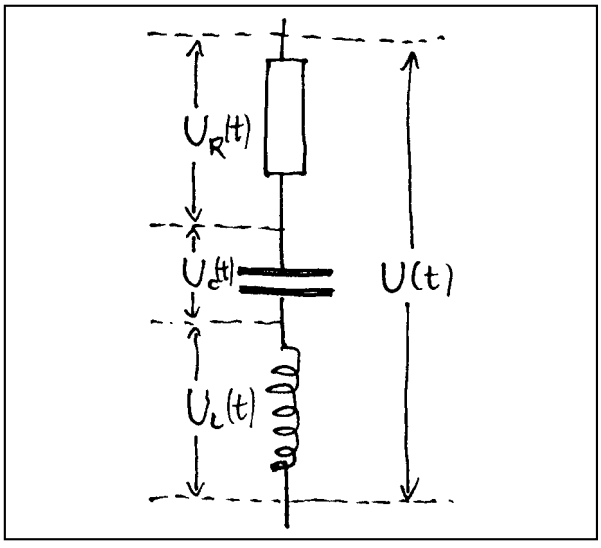


Abb. 13.5. Widerstand, Kondensator und Spule hintereinander geschaltet

$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t)$.

Da $U(t)$ die Summe von drei harmonischen Spannungen derselben Frequenz ist, muß sie die folgende Form haben:

$U(t) = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$.

Wir wollen U_0 und φ bestimmen.

$$U_0 \sin(\omega t - \varphi) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = RI_0 \sin\omega t - \frac{1}{\omega C} I_0 \cos\omega t + \omega L I_0 \cos\omega t$$

$$U_0(\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi) = I_0\left[R\sin\omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right]$$

Vergleich der Koeffizienten von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ liefert:

$U_0 \cos\varphi = I_0 R$

und

$$U_0 \sin\varphi = I_0\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)$$

Daraus folgt

$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

und

$$U_0{}^2 = I_0{}^2\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\right]$$

und schließlich

$$U_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

Der Scheinwiderstand der Anordnung ist also

$$X = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

Der gesamte Energiestrom in die Anordnung ergibt sich zu

$P(t) = U_0 \sin(\omega t - \varphi) I_0 \sin\omega t = U_0 I_0 \sin\omega t\,(\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi)$

Der zeitliche Mittelwert ist

$$\overline{P(t)} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$$

Der Faktor $\cos\varphi$ gibt an, welcher Bruchteil des Produkts $U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$ in der Anordnung dissipiert wird.

e) Ohmscher Widerstand, Spule und Kondensator parallel geschaltet, Abb. 13.6

Die Spannung an allen drei Elementen ist dieselbe:

$U(t) = U_0 \sin\omega t$.

Gesucht ist die elektrische Stromstärke

$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t)$.

Da $I(t)$ die Summe von drei harmonischen Stromstärken derselben Frequenz ist, muß sie die folgende Form haben:

$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$.

Wir wollen I_0 und φ berechnen.

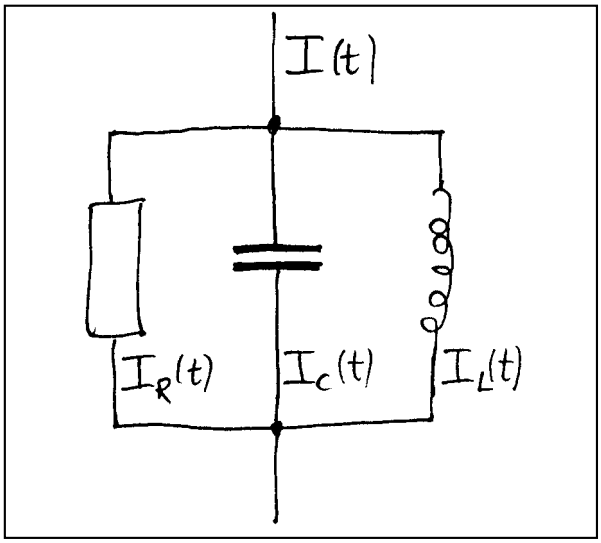


Abb. 13.6. Widerstand, Kondensator und Spule parallel geschaltet

$$I_0 \sin(\omega t - \varphi) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t) = \frac{U_0}{R}\sin\omega t + \omega C U_0 \cos\omega t - \frac{U_0}{\omega L}\cos\omega t$$

$$I_0(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) = U_0\left[\frac{1}{R}\sin\omega t + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\cos\omega t\right]$$

Vergleich der Koeffizienten von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ liefert:

$$I_0\cos\varphi = \frac{U_0}{R}$$

und

$$I_0\sin\varphi = U_0\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

Daraus folgt

$$\tan\varphi = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)R$$

und

$$I_0^{\,2} = U_0^{\,2}\left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2\right]$$

und schließlich

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

Der Scheinwiderstand dieser Anordnung ist also

$$R = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$$

Wir hätten uns diese Rechnung sparen können, wenn wir die Ergebnisse von Abschnitt d) dual übersetzt hätten.

Für den mittleren Energiestrom ergibt sich wieder

$$\overline{P(t)} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$$

13.5 Die Beschreibung von Wechselstromnetzwerken mit komplexen Größen

Ist die Frequenz eines Wechselstromkreises ein für allemal festgelegt, so braucht man zur Charakterisierung eines Wechselstroms nur noch zwei Werte: die Amplitude und die Phase. Dasselbe gilt für Wechselspannungen. Die Beschreibung durch die Zeitfunktion $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ist also unnötig umständlich. Die Darstellung von Wechselströmen und Wechselspannungen wird besonders einfach, wenn man komplexe Zahlen verwendet:

$I = I_0\cos(\omega t + \varphi)$ wird dargestellt durch $\underline{I} = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

$U = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ wird dargestellt durch $\underline{U} = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

Es ist also

$$I = \mathrm{Re}\left[\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] \quad \text{und} \quad U = \mathrm{Re}\left[\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]$$

Nun wissen wir, daß sich bei Addition von zwei komplexen Zahlen Realteile und Imaginärteile einzeln addieren. Wir erhalten damit ein einfaches Verfahren, Ströme (oder Spannungen), die gegeneinander phasenverschoben sind, graphisch zu addieren. Wir stellen die Ströme (oder Spannungen) in der Gaußschen Zahlenebene durch Vektorpfeile dar und addieren sie nach den Regeln der Vektoraddition, Abb. 13.7.

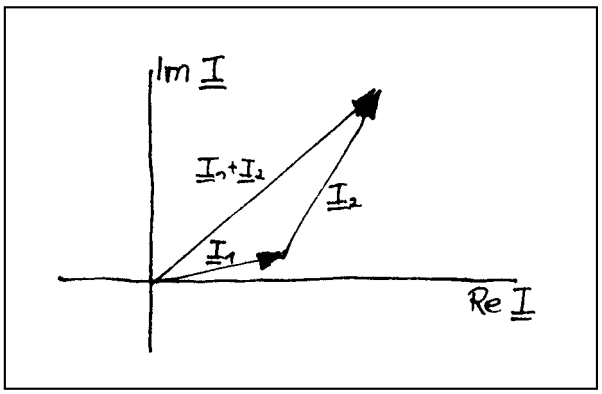


Abb. 13.7. Darstellung der Summe von zwei Wechselstromstärken in der Gaußschen Zahlenebene

Auch die Darstellung der zeitlichen Ableitung einer solchen Größe ist in komplexer Schreibweise sehr bequem. Es sei

$I(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi)$

also

$\underline{I} = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

Die zeitliche Ableitung von I ist

$$\dot{I}(t) = -\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi) = \omega I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die zeitliche Ableitung in komplexer Schreibweise ist

$$\dot{\underline{I}} = \omega I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} = \omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \underline{I} = \mathrm{i}\omega \underline{I}$$

Man erhält also die Zeitableitung durch Multiplikation mit $\mathrm{i}\omega$.

Auch der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung kann mit komplexen Zahlen beschrieben werden. Wir definieren den komplexen elektrischen Widerstand oder die Impedanz Z:

$$Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

Für einen Ohmschen Widerstand ergibt sich

$$Z_R = R$$

Für einen Kondensator, an dem die Spannung $U = U_0 \cos\omega t$ liegt, ist

$$\underline{U} = U_0$$

und

$$\underline{I} = C\dot{\underline{U}} = C\mathrm{i}\omega\underline{U} = \mathrm{i}\omega C U_0$$

also

$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}$$

Für eine Spule, durch die ein Strom der Stärke $I = I_0 \cos\omega t$ fließt, ist

$$\underline{I} = I_0$$

und

$$\underline{U} = \underline{L\dot{I}} = L\mathrm{i}\omega\underline{I} = \mathrm{i}\omega L I_0$$

also

$$Z_L = \mathrm{i}\omega L$$

Sind mehrere Elemente 1,2,3 . . . mit den Impedanzen $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ hintereinandergeschaltet, so ist die komplexe Gesamtspannung:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \ldots = Z_1\underline{I} + Z_2\underline{I} + Z_3\underline{I} + \ldots = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots)\underline{I}$$

Die Gesamtimpedanz ist daher

$$Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots$$

Die Impedanzen addieren sich also beim Hintereinanderschalten. Auch sie können deshalb in der komplexen Zahlenebene zusammengesetzt werden. So ist beispielsweise die Impedanz der Anordnung der Abbildung 13.8:

$$Z = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} + R + \mathrm{i}\omega L = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Der Betrag der Impedanz einer Anordnung aus Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen ist gleich dem Scheinwiderstand der Anordnung. Für R, C und L hintereinandergeschaltet ist zum Beispiel:

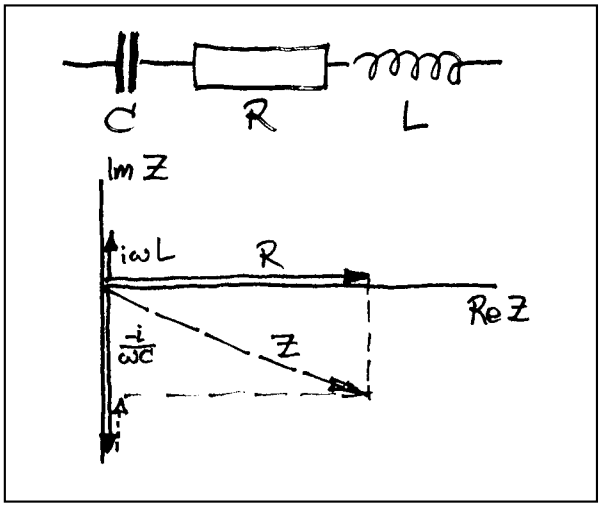


Abb. 13.8. Addition von Impedanzen in der Gaußschen Zahlenebene

$$|Z| = \left| R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = X$$

13.6 Der Transformator

Wir benutzen die komplexe Darstellung von Wechselspannungen, Wechselströmen und Wechselstromwiderständen zur Berechnung des Transformators. Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, die auf einen gemeinsamen Eisenkern, Abb. 13.9, gewickelt sind, so daß der gesamte magnetische Fluß Φ (Fluß des $\boldsymbol{B}$-Feldes) der einen Spule durch die andere Spule läuft, und umgekehrt. Die Induktivität der beiden einzelnen Spulen ist (Gleichung (8.11)):

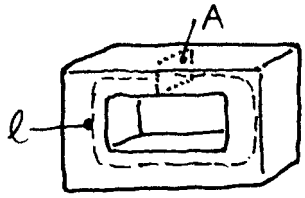


Abb. 13.9. Eisenkern eines Transformators

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} A \tag{13.1}$$

$$L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} A \tag{13.2}$$

Fließt durch Spule 1 ein Strom der Stärke I_1, so entsteht auch ein Fluß Φ_2 durch Spule 2:

$$\Phi_2 = N_2 B_1 A = N_2 \mu\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 A = L_{12} I_1$$

Die Größe

$$L_{12} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A \tag{13.3}$$

heißt gegenseitige Induktivität.

Fließt ein Strom der Stärke I_2 durch Spule 2, so entsteht auch ein Fluß in Spule 1:

$$\Phi_1 = L_{21} I_2$$

mit

$$L_{21} = L_{12}$$

Die Induktionsspannungen sind also

an Spule 1 (Primärspule)	$L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2$
an Spule 2 (Sekundärspule)	$L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1$

Die Spulen haben außer einem induktiven noch einen Ohmschen Widerstand R_1 bzw. R_2. Dieser verhält sich so, als wäre er zum induktiven Widerstand in Reihe geschaltet (warum?), Abb. 13.10. Für die komplexe Spannung an den beiden Spulen ergibt sich damit:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + \mathrm{i}\omega L_1)\underline{I}_1 \quad - \quad \mathrm{i}\omega L_{12}\underline{I}_2 \tag{13.4a}$$

$$\underline{U}_2 = \quad - \quad \mathrm{i}\omega L_{12}\underline{I}_1 + (R_2 + \mathrm{i}\omega L_2)\underline{I}_2 \tag{13.4b}$$

Die Primärspule des Transformators sei nun an eine Quelle angeschlossen, die eine Wechselspannung $\underline{U}_1$ fester Amplitude (und natürlich auch fester Frequenz) liefert. An die Sekundärspule ist ein rein Ohmscher Verbraucherwiderstand R angeschlossen, Abb. 13. 11, so daß

$$\underline{U}_2 = - R\,\underline{I}_2 \tag{13.5}$$

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ und zwischen $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$.

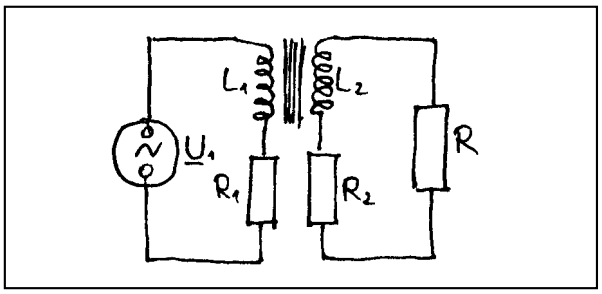


Abb. 13.11. Der Transformator ist mit einer Quelle der Spannung $\underline{U}_1$ und einem Verbraucherwiderstand R verbunden.

Wir ersetzen $\underline{U}_2$ in (13.4b) mit (13.5):

$$0 = - \mathrm{i}\omega L_{12}\underline{I}_1 + (\mathrm{R} + \mathrm{R}_2 + \mathrm{i}\omega L_2)\underline{I}_2$$

und erhalten

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{R + R_2 + \mathrm{i}\omega L_2}{\mathrm{i}\omega L_{12}} \tag{13.6}$$

Wir fragen nun nach dem Quotienten I_1/I_2 der Amplituden der Stromstärken. Dieser ist gleich $|\underline{I}_1/\underline{I}_2|$, d. h. gleich dem Betrag von (13.6):

$$\frac{I_1}{I_2} = \left|\frac{R + R_2 + \mathrm{i}\omega L_2}{\mathrm{i}\omega L_{12}}\right| = \left|\frac{L_2}{L_{12}} - \mathrm{i}\frac{R + R_2}{\omega L_{12}}\right| = \frac{1}{\omega L_{12}}\sqrt{\omega^2 {L_2}^2 + (R + R_2)^2}$$

Transformatoren sind gewöhnlich so gebaut, daß bei der verwendeten Frequenz gilt:

$$R_1 << \omega L_1 \qquad \text{und} \qquad R_2 << \omega L_2 \tag{13.7}$$

(Man erreicht das dadurch, daß man die Windungszahlen hinreichend groß macht. Der Widerstand R geht linear, die Induktivität L aber quadratisch mit der Windungszahl.)

Damit wird

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{1}{\omega L_{12}}\sqrt{\omega^2 {L_2}^2 + R^2}$$

Ist auch der Verbraucherwiderstand klein gegen den induktiven Widerstand der Sekundärspule, ist also

$$R << \omega L_2,$$

so wird

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_{12}} = \frac{N_2}{N_1} \tag{13.8}$$

Wir eliminieren nun $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ in (13.4a) mit Hilfe von (13.5) und (13.6):

$$\underline{U}_1 = (R_1 + \mathrm{i}\omega L_1)\frac{R + R_2 + \mathrm{i}\omega L_2}{\mathrm{i}\omega L_{12}}\underline{I}_2 - \mathrm{i}\omega L_{12}\underline{I}_2$$

$$= \left[(R_1 + \mathrm{i}\omega L_1)\frac{R + R_2 + \mathrm{i}\omega L_2}{\mathrm{i}\omega L_{12}} - \mathrm{i}\omega L_{12}\right]\left(-\frac{\underline{U}_2}{R}\right)$$

Unter Verwendung von $L_1 L_2 = L_{12}{}^2$, was aus den Gleichungen (13.1), (13.2) und (13.3) folgt, erhält man

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -\frac{(R_1 + \mathrm{i}\omega L_1)(R + R_2) + \mathrm{i}\omega L_2 R_1}{\mathrm{i}\omega L_{12} R} = -\frac{L_1(R + R_2) + L_2 R_2}{L_{12} R} - \mathrm{i}\frac{R_1(R + R_2)}{\omega L_{12} R}$$

Wieder fragen wir nach dem Quotienten der Amplituden des Ausdrucks:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{\omega L_{12} R}\sqrt{\left[\omega L_1(R + R_2) + \omega L_2 R_1\right]^2 + \left[R_1(R + R_2)\right]^2}$$

Mit (13.7) wird daraus näherungsweise:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1(R + R_2) + L_2 R_1}{L_{12} R}$$

Wenn man die Spulenwiderstände vernachlässigen kann, vereinfacht sich die Beziehung noch weiter. Dieses Vernachlässigen ist möglich, wenn die beiden folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$R >> R_2 \quad \text{und} \quad R >> \frac{L_2}{L_1} R_1 = \frac{N_2{}^2}{N_1{}^2} R_1$$

Unter diesen Voraussetzungen wird:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1}{L_{12}} = \frac{N_1}{N_2} \tag{13.9}$$

Gleichungen (13.8) und (13.9) gelten gleichzeitig wenn

$$R_2, \frac{L_2}{L_1} R_1 << R << \omega L_2$$

14. Elektromagnetische Wellen

14.1 Kinematik harmonischer Wellen

Ist der zeitliche Verlauf des Wertes einer physikalischen Größe f an einem beliebigen Ort x derselbe wie bei $x = 0$, jedoch um x/v zeitlich verschoben:

$$f(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$$

so spricht man von einer Welle. Ist f eine Sinusfunktion, ist also

$f(t,x) = f_0 \sin [\omega(t - x/v)] = f_0 \sin (\omega t - kx)$,

so bildet die raumzeitliche Verteilung von f eine harmonische Welle.

Betrachtet man einen festen Ort x_0, so beschreibt $f(t,x_0)$ eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω, Abb. 14.1a.

Betrachtet man den Verlauf von f zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0, Abb. 14.1b, so stellt $f(t_0,x)$ eine sinusförmige Variation von f mit x dar. $k = 2\pi/\lambda$ ist die Wellenzahl (nach SI "Kreiswellenzahl"), λ die Wellenlänge. Wenn man zwei solche "Momentaufnahmen" kurz hintereinander im zeitlichen Abstand Δt macht, erhält man denselben Verlauf als Funktion von x, nur in x –Richtung um $\Delta x = v\Delta t$ verschoben.

Macht man viele Momentaufnahmen nacheinander, so zeigt die Folge dieser Aufnahmen eine scheinbare Bewegung der Sinusfunktion in x-Richtung mit der Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

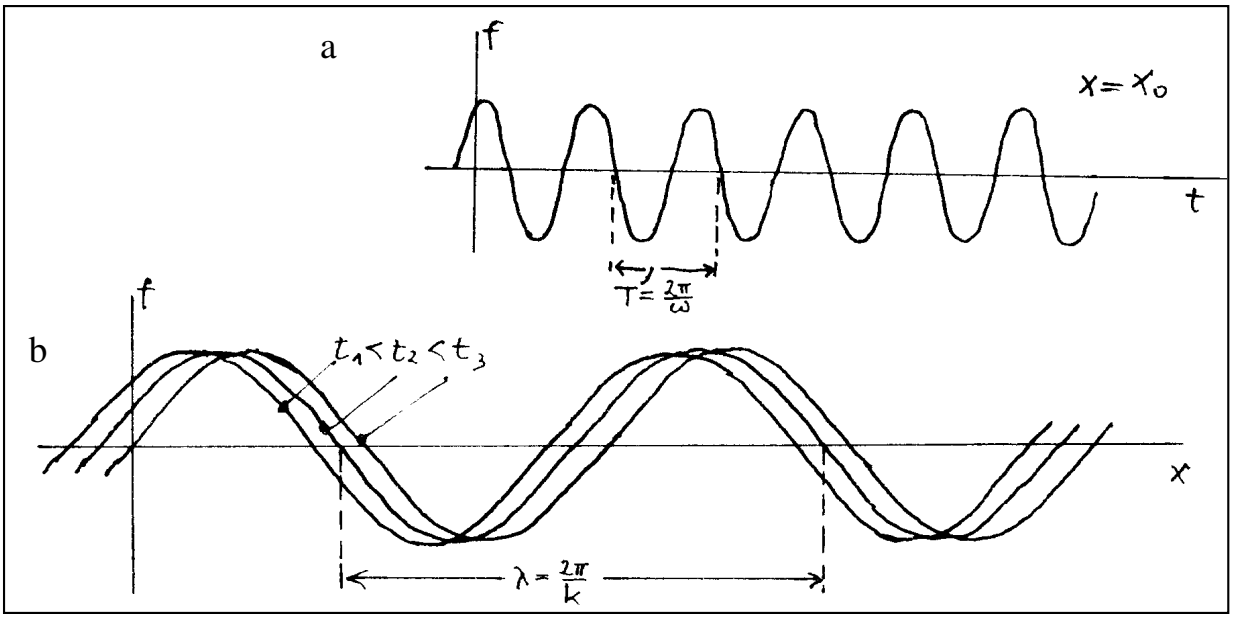


Abb. 14.1 Zur Kinematik einer Sinuswelle

14.2 Harmonische Wellen als Lösungen der Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen haben unter anderem harmonische Wellen als Lösung. Wir machen den Ansatz

$\boldsymbol{E}(z,t) = (E_x(z,t),0,0) \quad E_x(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$

$\boldsymbol{H}(z,t) = (0, H_y(z,t),0) \quad H_y(z,t) = H_0 \cos(kz - \omega t)$

Wir verifizieren diesen Ansatz durch Einsetzen in die erste und in die zweite Maxwellgleichung. Es wird über die in Abbildung 14.2 eingezeichneten Wege bzw. Flächen integriert. Es sei $j_Q = 0$ und $\chi_e = \chi_m = 0$, so daß sich die Maxwellgleichungen vereinfachen zu

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = \varepsilon_0 \iint \dot{\boldsymbol{E}} d\boldsymbol{A}$$

und

$$-\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = \mu_0 \iint \dot{\boldsymbol{H}} d\boldsymbol{A}$$

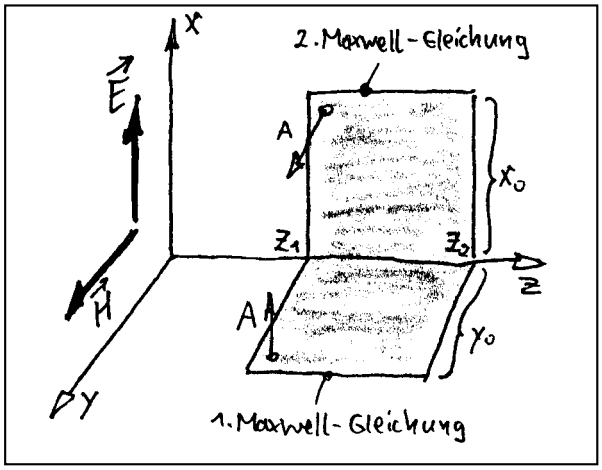


Abb. 14.2. Integrationswege und -flächen für die Verifikation des Wellenansatzes

1. Maxwellsche Gleichung

$$y_0 H_0 \cos(kz_1 - \omega t) - y_0 H_0 \cos(kz_2 - \omega t) = \varepsilon_0 y_0 \int_{z_1}^{z_2} \omega E_0 \sin(kz - \omega t) dz$$

$$= \varepsilon_0 y_0 \omega E_0 \frac{1}{k} \left[\cos(kz - \omega t)\right]_{z_2}^{z_1}$$

$$H_0 = \varepsilon_0 \frac{\omega}{k} E_0 \tag{14.1}$$

2. Maxwellsche Gleichung

$$-x_0 E_0 \cos(kz_2 - \omega t) + x_0 E_0 \cos(kz_1 - \omega t) = \mu_0 x_0 \int_{z_1}^{z_2} \omega H_0 \sin(kz - \omega t) dz$$

$$= \mu_0 x_0 \omega H_0 \frac{1}{k} \left[\cos(kz - \omega t)\right]_{z_2}^{z_1}$$

$$E_0 = \mu_0 \frac{\omega}{k} H_0 \tag{14.2}$$

Aus (14.1) und (14.2) folgt

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$c = \omega/k$ ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Außerdem folgt aus (14.1) und (14.2)

$$\varepsilon_0 E_0^2 = \mu_0 H_0^2 \qquad (14.4)$$

Unser Ansatz erfüllt also die Maxwellgleichungen, d.h. die Maxwellgleichungen haben harmonische Wellen als Lösung, für die die Zusammenhänge (14.3) und (14.4) gelten. Diese Wellen heißen elektromagnetische Wellen. Sie bilden eine Klasse von Zuständen des Systems "elektromagnetisches Feld". Wir diskutieren nun diese Lösung der Maxwellgleichungen.

a) Geschwindigkeit

Es zeigt sich, daß der Ausdruck (14.3) gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts ist. Dies ist der stärkste Hinweis darauf, daß Licht eine elektromagnetische Welle ist. Die Vereinigung der Optik mit der Theorie des elektromagnetischen Feldes ist Maxwells Verdienst. Die ersten Abschnitte seiner elektromagnetischen Theorie des Lichts sind in Abschnitt 14.4 wiedergegeben.

b) Phasenbeziehung zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$, Polarisation

Die elektrische und die magnetische Feldstärke sind in Phase. $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ stehen senkrecht aufeinander. Die Welle breitet sich senkrecht zu $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ aus. Man sagt, sie ist "transversal".

c) Energiedichte, Energiestromdichte, Impulsdichte und Impulsstromdichte

Aus Gleichung (14.4) folgt, daß das elektrische Feld und das magnetische Feld zu gleichen Teilen zur Energiedichte der Welle beitragen. Auch die Energiedichte bildet eine harmonische Welle, ihre Frequenz ist 2ω, die Wellenzahl $2k$.

Die Energiestromdichte $\boldsymbol{j}_E$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$, sie weist in die Ausbreitungsrichtung der Welle. Die Energie fließt also in dieselbe Richtung, in die sich die Phase der Welle ausbreitet. Auch $\boldsymbol{j}_E$ bildet eine harmonische Welle mit der Frequenz 2ω und der Wellenzahl $2k$.

Die Impulsdichte ist bis auf den Faktor $1/c^2$ mit der Energiestromdichte identisch.

In Ausbreitungsrichtung der Welle fließt ein Impulsstrom. (Benachbarte Bereiche der Welle üben Kräfte aufeinander aus.) Die zugehörige Stromdichte ist $\sigma = 1/2\ (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \mu_0 \boldsymbol{H}^2) = \mu_0 \boldsymbol{H}^2 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2$. Dieser Impulsstrom entspricht einer Druckspannung; man nennt ihn auch den Lichtdruck.

14.3 Die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen - der Hertzsche Oszillator

Es gibt viele Methoden, elektromagnetische Wellen zu erzeugen. Wir beschreiben hier eine Möglichkeit, die physikalisch und technisch besonders wichtig ist. Ihre rechnerische Behandlung ist aber schwieriger als die anderer Methoden, und wir überlassen die Berechnung der Vorlesung der theoretischen Physik. Die Methode funktioniert folgendermaßen: Die Punktladungen eines elektrischen Dipols werden sinusförmig hin- und herbewegt, so daß das Dipolmoment den zeitlichen Verlauf

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 \sin \omega t \qquad (14.5)$$

hat. Man kann sich vorstellen, daß das mit Hilfe einer mechanischen Vorrichtung geschieht, Abb. 14.3a.

Äquivalent hierzu kann man auch zwei räumlich feststehende kleine Kugeln mit Hilfe eines Wechselstromnetzgeräts periodisch positiv und negativ aufladen, Abb. 14.3b. Auch das hat ein sich harmonisch änderndes Dipolmoment (14.5) zur Folge.

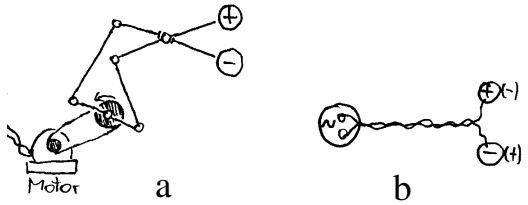


Abb. 14.3. Vorrichtungen zur Erzeugung elektrischer Dipolstrahlung

Heinrich Hertz wies nicht nur die elektromagnetischen Wellen zum ersten Mal experimentell nach, er berechnete auch die Feldverteilung für den schwingenden Dipol (Ann.d.Phys. 36,51,1888). Wir geben hier nur ein Teilergebnis seiner Rechnungen wieder: Wir stellen uns den schwingenden Dipol unendlich klein vor; das ist äquivalent dazu, daß man bei einem nicht unendlich kleinen Dipol nur nach dem sogenannten Fernfeld fragt. Für das Fernfeld gilt in Polarkoordinaten (der Dipol liege in z-Richtung):

$$\boldsymbol{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi)$$

$$E_r \approx 0$$

$$|E_\vartheta| = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sin\vartheta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$E_\varphi = 0$$

$$\boldsymbol{H} = (H_r, H_\vartheta, H_\varphi)$$

$$H_r = 0$$

$$H_\vartheta = 0$$

$$|H_\varphi| = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi c r} \sin\vartheta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

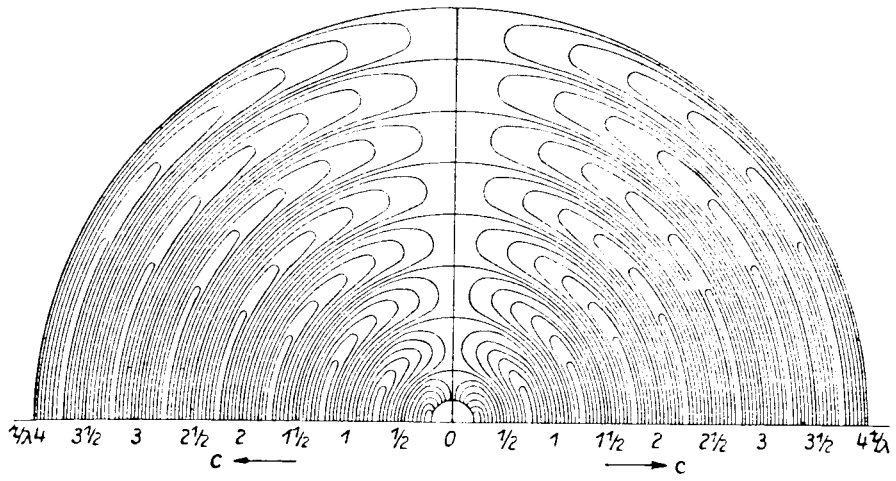
Wir diskutieren dieses Ergebnis.

a) lokale Eigenschaften

Lokal ist dieses Feld von dem der ebenen Welle von Abschnitt 14.2 nicht zu unterscheiden: $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ stehen senkrecht aufeinander, und $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ stehen beide senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Außerdem gilt überall $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 = \mu_0 \boldsymbol{H}^2$.

b) Verteilung von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ im Raum

Die Phase, d.h. das Argument der Sinusfunktion, hat auf Kugelschalen (Dipol im Kugelmittelpunkt) einen konstanten Wert. Die $\boldsymbol{H}$-Feldlinien bilden geschlossene “Breitenkreise”,



eldverteilung des strahlenden Hertzschen Dipols

Abb. 14.4. Die ***E***-Feldlinien folgen, außer in Polnähe, "Längenkreisen", Abb. 14.4 und 14.5. Das Umkehren der ***E***-Feldlinien geschieht an Stellen schwacher Feldstärke.

c) Verteilung der Energiestromdichte

Die $\boldsymbol{j}_E$-Vektoren weisen radial nach außen. Ihr Betrag ist

$$|\boldsymbol{j}_E| = \frac{\omega^4 {p_0}^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\vartheta \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \tag{14.6}$$

Die Amplitude nimmt nach außen mit $1/r^2$ ab, in Übereinstimmung mit dem Energiesatz.

Die ϑ-Abhängigkeit für ein festes r, Abbildung 14.6, ist so, daß $|\boldsymbol{j}_E|$ in der Äquatorialebene maximal ist. In Richtung der Dipolachse ist $|\boldsymbol{j}_E| = 0$.

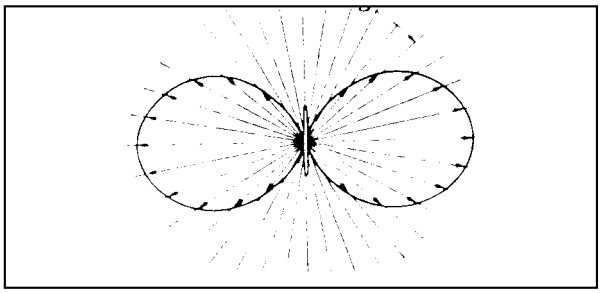


Abb. 14. 6. Richtungsabhängigkeit der Energiestromdichte des Hertzschen Oszillators

d) Die Frequenzabhängigkeit der Energiestromdichte

$|\boldsymbol{j}_E|$ ist proportional zu ω^4, Gleichung (14.6), d.h. die abgestrahlte Energie wächst sehr stark mit der Schwingungsfrequenz des Dipols an, oder in anderen Worten: Schwingt der Dipol langsam, so strahlt er nicht. Ein langsam schwingender Dipol baut einfach das aus der Elektrostatik bekannte Dipolfeld auf und wieder ab. Die beim Aufbau in das Feld hineingesteckte Energie bekommt man beim Abbau wieder heraus. Die Antriebsmaschine in Abbildung 14.3 verbraucht fast keine Energie. Nimmt die Frequenz zu, so nimmt der Energieverbrauch zu. Die Energie fließt mit der erzeugten Welle weg.

Eine genauere Betrachtung zeigt, daß für die Abstrahlung die zweite zeitliche Ableitung des Dipolmoments zuständig ist. Daraus folgt, daß zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen ein harmonisch schwingendes Dipolmoment nicht nötig ist, sondern daß auch eine gleichmäßig beschleunigte Ladung, z.B. ein gleichmäßig beschleunigtes geladenes Teilchen ein elektromagnetisches Feld erzeugt, in dem Energie ständig vom Teilchen wegfließt.

e) Magnetische Dipolstrahlung

Man kann elektromagnetische Wellen auch mit einem schwingenden magnetischen Dipol erzeugen, etwa mit der Maschine in Abb. 14.7a oder einem Ring, der von einem Wechselstrom durchflossen wird, Abb. 14.7b. Das Feld sieht genauso aus wie das des elektrischen Dipols, nur sind elektrische und magnetische Feldstärke gegeneinander vertauscht. Man erkennt also an der Feldverteilung, ob ein Feld von einem elektrischen oder magnetischen Dipol herrührt.

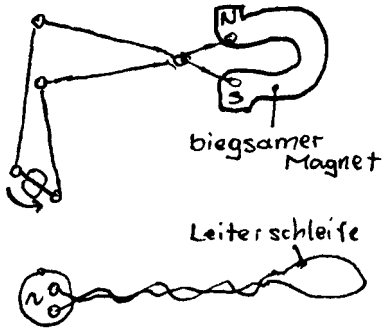


Abb. 14.7. Vorrichtungen zur Erzeugung magnetischer Dipolstrahlung

14.4 Bemerkungen Maxwells zur elektromagnetischen Theorie des Lichts

Lichtes.

umerfüllenden

rkes die electro-
irkung der Körper
nception gefolgt,
n Raum zwischen
Da nun auch die
Raum erfüllenden
haben, dass die
denen des licht-

man, so oft es
ı auch mit einem
liedener Wissens-
hrt und ist man
ler einen Erschei-
dieselben Eigen-
einungsclasse, der
Wahrscheinlichkeit

ebenso gross wie die für Lichtschwankungen ist, und zwar nicht blos in der Luft, sondern auch in andern durchsichtigen Medien, so hat man hinreichenden Grund zu der Annahme, das Licht sei eine electromagnetische Erscheinung. Zugleich giebt die Verbindung, in die dadurch zwei sonst so distincte Erscheinungsclassen, wie die des Electromagnetismus und die der Optik zu einander treten, die Ueberzeugung von der Realität eines Mediums, das in seinen Eigenschaften der durch unsere Sinne sich uns bemerkbar machenden Materie ähnelt.

Optische und electromagnetische Eigenschaften des Mediums.

782. Schickt ein Körper Licht aus, so giebt er damit einen gewissen Betrag von Energie fort, absorbirt dann ein anderer Körper das von jenem emittirte Licht, so nimmt er, wie daraus erhellt, dass er sich dabei erwärmt, eine gewisse Menge Energie in sich auf. In dem Zeitintervall, welches zwischen der Emission des Lichtes durch den einen und seiner Absorption durch den andern Körper verfliesst, muss es also irgendwo in dem Raume, der sich zwischen den beiden Körpern erstreckt, als Energie existirt haben.

Die Emissionstheorie des Lichtes nimmt an, dass die Energie durch Lichtkörperchen, die von dem leuchtenden zu dem erleuchteten Körper wirklich übergehen, und die dabei sowohl ihre kinetische Energie als auch eine gewisse andere Art Energie, die sie in sich aufzunehmen im Stande sind, mit sich führen, übertragen wird.

Nach der Undulationstheorie des Lichtes füllt ein materielles Medium den den leuchtenden von dem erleuchteten Körper trennenden Raum, und dieses Medium ist es, welches durch die Wirkung seiner Teilchen auf einander die Energie, die der leuchtende Körper ausgiebt, von Teilchen zu Teilchen fortleitet und bis zum erleuchteten Körper hinschafft. Darnach würde also dieses Medium während des Ueberganges des Lichtes von dem einen zu dem andern Körper der Träger der Energie sein.

Was die Art der im Medium während der Fortpflanzung des Lichtes befindlichen Energie anbetrifft, so sollte sie gemäss der Entwickelung, die Huyghens, Fresnel, Young, Green, Neumann u. A. der Undulationstheorie verliehen haben, teils potentieller, teils kinetischer Natur sein. Die potentielle nahm man als durch die Verdrehung der einzelnen Teilchen des Mediums gegen einander entstanden an; hiernach würde das Medium als elastisch zu betrachten sein. Die kinetische sollte durch vibratorische, in dem Medium vor sich gehende Bewegungen wachgerufen werden; und das setzt voraus, dass das Medium eine endliche Dichtigkeit besitzt.

Auch in der Theorie der Electricität und des Magnetismus, wie sie in diesem Werke adoptirt worden ist, hat man es mit zwei Arten von Energie, der electrostatischen und der electrokinetischen, zu tun, und diese beiden Energiearten sollten ihren Sitz nicht so sehr in den electrisirten oder