Theoretische Physik III:

Elektrodynamik

Vorlesungsskript

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines, Formelsprache und etwas "Mathematik" 1

1.1 Vorbemerkungen . . . 1
1.2 Verwendete Formelsprache. Abkürzungen . . . 1
1.3 Einheiten . . . 2
1.4 Einige Formeln aus der Vektoranalysis . . . 2
1.5 Etwas Mathematik . . . 3

2 Elektrostatik 9

2.1 Einführung . . . 9
2.1.1 Das Gaußsche Gesetz . . . 11
2.1.2 Ladungen auf Oberflächen und auf Leitern . . . 13
2.2 Randwertprobleme: Laplace- und Poisson-Gleichung . . . 14
2.2.1 Dirichletsche Randbedingungen . . . 15
2.2.2 Neumannsche Randbedingungen . . . 15
2.2.3 Beispiele . . . 15
2.2.4 Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten . . . 21
2.2.5 Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten . . . 28
2.2.6 Konforme Abbildungen in der komplexen Ebene . . . 29
2.3 Multipolentwicklungen . . . 31
2.4 Elektrostatik der Dielektrika . . . 35
2.4.1 Polarisation . . . 35
2.4.2 Randbedingungen für die Felder der Elektrostatik . . . 37
2.4.3 Freundliche Vereinfachungen . . . 38
2.4.4 Beispiele . . . 38
2.4.5 Elektrostatische Energie . . . 42

3 Magnetostatik 45

3.1 Biot-Savart-Gesetz, Ampère-Gesetz, Vektorpotential . . . 45
3.1.1 Das Gesetz von Biot und Savart . . . 45
3.1.2 Kraft auf Ströme in Magnetfeldern, Stromschleifen . . . 46
3.1.3 Das Vektorpotential. Durchflutungsgesetz . . . 47
3.1.4 Eichungen I . . . 48
3.2 Konstruktion eines Feldes aus Quellen und Wirbeln . . . 48
3.3 Felder lokalisierter Stromverteilungen . . . 49
3.4 Magnetisierung . . . 50
3.5 Randbedingungen für die Felder der Magnetostatik . . . 51
3.6 Anwendungen: Lösungsmethoden für Randwertprobleme . . . 52
3.6.1 Lösungen mit Hilfe des Vektorpotentials . . . 52
3.6.2 Verschwindende Stromdichte: Magnetisches Skalarpotential . . . 52
3.6.3 Harte Ferromagnete 1: $\vec{M} = const, \vec{j} = 0$ . . . 53
3.6.4 Harte Ferromagnete 2: Effektive Stromdichte . . . 54

4 Elektrodynamik **57**
4.1 Gesetze des elektrischen Stromes . . . 57
4.1.1 Erstes Kirchhoff-Gesetz . . . 57
4.1.2 Ohmsches Gesetz . . . 58
4.1.3 Joulesche Wärme . . . 58
4.2 Lorentz-Kraft und magnetische Induktion . . . 59
4.3 Selbstinduktion und gegenseitige Induktion. Stromkreise . . . 61
4.4 Maxwell-Gleichungen und Erhaltungssätze . . . 64
4.4.1 Der Maxwell-Term: Verschiebungsstrom . . . 64
4.4.2 Potentiale. Eichungen II . . . 66
4.4.3 Mikroskopische und makroskopische Maxwell-Gleichungen . . . 69
4.4.4 Energie- und Impulserhaltung . . . 70
4.5 Transformationseigenschaften der Felder . . . 72
4.5.1 Drehungen . . . 72
4.5.2 Räumliche Spiegelung . . . 73
4.5.3 Zeitumkehr . . . 73
4.6 Magnetische Monopole . . . 75
4.7 Elektromagnetische Wellen . . . 77
4.7.1 Ebene Wellen in nichtleitenden Medien . . . 77
4.7.2 Reflexion und Brechung . . . 79
4.7.3 Frequenzabhängigkeit von $\epsilon(\omega)$ und $\sigma(\omega)$ . . . 81
4.7.4 Ebene Wellen in leitenden und dissipativen Medien . . . 83
4.7.5 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen . . . 85
4.8 Wellen in einem Hohlleiter . . . 87
4.9 Das Feld vorgegebener Ladungen und Stromverteilungen . . . 89
4.9.1 Lösung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Lorentz-Eichung . . . 89
4.9.2 Felder und Strahlung einer lokalisierten, oszillierenden Quelle . . . 91
4.9.3 Die Dipolstrahlung als wichtiger Spezialfall . . . 92
4.9.4 Anwendung: Die lineare Antenne mit symmetrischer Speisung . . . 94
4.9.5 Höhere multipolare Anteile der Strahlung . . . 94
4.9.6 Strahlung einer beliebig bewegten Ladung . . . 95
4.9.7 Streuung von Licht . . . 100

5 Spezielle Relativitätstheorie **103**
5.1 Koordinatentransformationen . . . 103
5.1.1 Die Galilei-Transformation . . . 103
5.1.2 Die Lorentz-Transformation . . . 106
5.2 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum . . . 110
5.3 Lorentz-Transformation im Viererraum . . . 113
5.4 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik . . . 114
5.4.1 Ströme, Dichten, Potentiale . . . 114
5.4.2 Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie . . . 115
5.4.3 Transformation der Felder . . . 117
5.5 Relativistische Mechanik . . . 118
5.6 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes . . . 121
5.6.1 Allgemeine kontinuierliche Systeme . . . 121
5.6.2 Elektromagnetische Felder . . . 121
5.7 Der Energie-Impuls-Tensor . . . 122
5.7.1 Allgemeine kontinuierliche Systeme . . . 122
5.7.2 Elektromagnetische Felder . . . 124

Kapitel 1

Allgemeines, Formelsprache und etwas "Mathematik"

1.1 Vorbemerkungen

Dies ist ein Skriptum zur Vorlesung "Theoretische Physik III: Elektrodynamik". Die Vorlesung orientiert sich stark an einem der Standardwerke der Elektrodynamik, dem "Jackson" [9]. Das Skript soll kein Lehrbuch ersetzen, sondern einen gegliederten Überblick über die große Stoffülle bieten, und dafür ist es nicht wichtig, die genaue mathematische Herleitung der Lösung jeder einzelnen Differentialgleichung nachzuvollziehen. Es wurden dagegen an sehr vielen Stellen Hinweise auf Literatur eingestreut, in der man dann Genaueres über das entsprechende Thema erfahren kann — wenn man will. Die meisten Referenzen beziehen sich dabei auf die Standardwerke von Jackson, Greiner [7] und Sommerfeld [16].

Also dann, viel Spaß ...

1.2 Verwendete Formelsprache. Abkürzungen

Die Formelsprache richtet sich weitgehend nach Greiner [7].

Integrale ohne Angabe von Grenzen sind über den ganzen Raum zu ziehen; seine Dimension kann man dann den Differentialen (z. B. "d^3r'") entnehmen.

Im Falle partieller Integration stehen über dem entsprechenden "="-Zeichen die Buchstaben *"p.I."*, bei Substitutionen (wenn sie nicht offensichtlich sind) findet man dort die Definition der neuen Variablen:

$$\int \sin\vartheta d\vartheta \cos\vartheta \overset{x:=cos\vartheta}{=} -\int x\, dx$$

Im allgemeinen bezeichnen gestrichene Buchstaben im Integranden eine Variable, über die integriert werden soll. Dann paßt aber immer auch das Differential (z. B. "dr'") dazu.

Bei Flächenintegralen wird das Flächenelement als Vektor oder als Skalar multipliziert mit der Flächennormale geschrieben, je nachdem, worauf es gerade ankommt:

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{F} \equiv \oint_{\partial V} \vec{E}\vec{n}\, dF$$

Der Übergang zu krummlinigen Koordinaten wird oft durch eine Buchstabenkombination über dem Gleichheitszeichen gekennzeichnet, und dabei bedeuten "PK" Polar-, "ZK" Zylinder-, und "KK" Kugelkoordinaten:

$$\int f(\vec{r})\, d^3r \overset{KK}{=} \int f(\vec{r})\, r^2 dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\phi$$

Die Einstein-Summenkonvention wird ausgiebig angewendet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k$$

Wenn die Summation nicht über alle Indices geht, bzw. die Einstein-Konvention unübersichtlich wäre, werden Summenzeichen verwendet.

Bei trigonometrischen Funktionen wird an einigen Stellen aus Gründen der Übersichtlichkeit das Argument in den Index des Anfangsbuchstabens verbannt:

$$s_\vartheta := \sin\vartheta \qquad c_{\omega t} := \cos(\omega t)$$

...oder, wenn es keine Verwechslungen geben kann, mit einem entsprechenden Hinweis auch völlig weggelassen.

Die Konvention, partielle Ableitungen durch ein "∂" mit der tiefgestellten Differentiationsvariable zu schreiben ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_x^2 f$) wird hier *nicht* verwendet, da diese Schreibweise für die spezielle Relativitätstheorie reserviert ist. Ebenso bedeuten tiefgestellte x, y oder was auch immer *nie* partielle Ableitungen, denn die Gefahr der Verwechslung mit den Komponenten eines Vektors ist zu groß. Lediglich vektorielle Differentialoperatoren erhalten ein tiefgestelltes "r'" bzw. "r", wenn nach gestrichenen bzw. ungestrichenen Variablen differenziert werden soll...

$$\vec{\nabla}_{r'} = \left[\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] \quad ,$$

im Normalfall wird immer nach den *ungestrichenen* Variablen abgeleitet.

Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl werden auf folgende Weise gewonnen:

$$x = \Re\,(x + iy) \qquad\qquad y = \Im\,(x + iy)$$

Tensoren zweiter Stufe werden durch doppelte Unterstreichung gekennzeichnet, wenn das gegenüber der Indexschreibweise geeigneter erscheint:

$$\underline{\underline{\sigma}}\vec{E} \equiv \vec{e}_k \sigma_{kl} E_l$$

Der logische Terminus 'so daß' wird durch ':' abgekürzt:

$$\exists\,\phi \quad : \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

Ein Skalar- oder Vektorfeld heißt genau dann *freundlich,* wenn es genügend oft, d. h. im allgemeinen mindestens dreimal stetig partiell differenzierbar ist, man also die üblichen Differentialoperatoren anwenden kann, ohne Randeffekte (δ-Terme!) berücksichtigen zu müssen.

Es wurde versucht, größtmögliche Konsistenz in der Verwendung von Formelzeichen, andererseits aber auch Übereinstimmung mit der Standardliteratur zu erreichen. Wegen der mehrfachen Belegung mancher Buchstaben (z. B. σ für Flächenladungsdichten und Leitfähigkeiten) ist das aber nicht perfekt machbar. Trotzdem halten sich die Überschneidungen in Grenzen.

1.3 Einheiten

Es wird das Gaußsche (CGS-) Einheitensystem verwendet. Zur Thematik der Einheitensysteme, Umrechnungen usw. siehe [9, Anhang]. Dort befindet sich auch eine Tabelle mit den wichtigsten Gleichungen in verschiedenen Einheitensystemen.

1.4 Einige Formeln aus der Vektoranalysis

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \\
(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}) \\
\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi &= 0 \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) &= 0 \\
\Delta\vec{A} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} \\
\vec{\nabla}(\psi\vec{A}) &= \vec{A}\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\vec{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\psi \vec{A}) &= \vec{\nabla}\psi \times \vec{A} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B}) &= (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla}\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\vec{A}) + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}
\end{aligned}$$

Identitäten von *Green:*

$$\begin{aligned}
\int_V (\phi \Delta\psi + \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi)\, d^3r &= \oint_{\partial V} \phi \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\psi \, dF \\
\int_V (\phi \Delta\psi - \psi \Delta\phi)\, d^3r &= \oint_{\partial V} (\phi \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\phi)\vec{n} \, dF
\end{aligned}$$

Differentialoperatoren in allgemeinen orthogonalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\vec{e}_i}{h_j h_k} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_k h_k) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \kappa_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i h_j h_k) \\
\vec{\nabla}\psi &= \frac{\vec{e}_i}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\
\Delta\psi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \kappa_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right]
\end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\kappa_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j,k \text{ zyklisch} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$$

metrischer Tensor für orthogonale Koordinaten: $(g_{ij}) = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$

Levi-Civita-Symbol: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

1.5 Etwas Mathematik

Dieser Abschnitt zeigt einige wichtige Umformungen, Tricks und Funktionen, die für das Verständnis vieler Ableitungen erforderlich sind. Die Aufstellung erhebt jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Vielmehr ist es so, daß im Laufe des Skripts noch einige Neuheiten eingeführt werden, die hier nicht auftauchen.

Delta-Distribution Einige wichtige Regeln für die Delta-Distribution sind (siehe auch [7]):

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \qquad \int f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|\partial_x f(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

Die x_i sind dabei *einfache Nullstellen* von f. Es gibt auch eine mehrdimensionale Darstellung:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

In krummlinigen Koordinaten muß noch durch den Betrag der Jacobi-Determinante dividiert werden, z. B.:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \overset{PK}{=} \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho')\delta(\phi - \phi')$$

Daß die δ-Distribution keine *Funktion* ist, wird hier nicht so besonders ernst genommen — es funktioniert ja alles, wie es soll. Trotzdem sollte man das immer im Hinterkopf haben.[1]

Fourier-Transformation Wir definieren die Hin- und Rücktransformation zu

$$F(\omega) = \int f(t) e^{i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad .$$

Als Abkürzung wird oft

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \qquad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

verwendet. Wichtig sind auch die folgenden Beziehungen zur δ-Funktion:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

Der besonders wichtige *Faltungssatz* der Fourier-Transformation lautet:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\} \text{ , wobei } \quad f * g = \int f(x) g(t-x) dx$$

Zu gegebener Zeit sind auch die vielen anderen freundlichen Eigenschaften der Fourier-Transformation (Verschiebungssatz, Ableitungssatz, Regel über mehrfache Transformation ($\mathcal{F}\mathcal{F}\{f(t)\} = f(-t)$), Transformation der Gauß-Kurve, Unschärferelation usw.) nützlich. [4] bietet einen umfassenden Überblick über Theorie und Anwendungen, in [2] findet man Beziehungen zur digitalen Signalverarbeitung und eine "Herleitung" der Fourier-Integraltransformation aus der Theorie der Fourier-Reihen, und in [16] steht wohl die "klassischste" aller Bearbeitungen dieses Themas.

Partielle Integration Einige der in 1.4 genannten Formeln werden ausgiebig für die partielle Integration benutzt, wenn es um das Verschieben von Differentialoperatoren im Integranden geht. Ein Beispiel hierfür ist

$$\int \vec{A}(\vec{r}\,') \vec{\nabla}_{r'} \phi(\vec{r}\,') d^3r' \overset{p.I.}{=} \int \vec{\nabla}_{r'} \left[\vec{A}(\vec{r}\,') \phi(\vec{r}\,') \right] d^3r' - \int \left[\vec{\nabla}_{r'} \vec{A} \right] \phi(\vec{r}\,') d^3r' \; . \qquad (*)$$

Dabei wurde die Identität

$$\vec{\nabla} \left[\vec{A}\phi \right] = \phi \vec{\nabla} \vec{A} + \vec{A} \vec{\nabla} \phi$$

verwendet.

Nun hat man es oft mit Feldern zu tun, die außerhalb eines bestimmten Raumbereiches gleich Null sind oder schnell abfallen, wenn $r \to \infty$ geht. Das erste Integral auf der rechten Seite von $(*)$ kann dann mit dem Satz von Gauß in ein Oberflächenintegral verwandelt werden und verschwindet.

Für jede Produktregel der Vektoranalysis läßt sich im Grunde so eine Integrationsformel angeben. Wir brauchen praktisch alle.

Orthogonale Funktionensysteme Ein äußerst wichtiges Werkzeug bei der Lösung vieler Probleme der Elektrodynamik ist die Möglichkeit, Funktionen nach *orthogonalen Funktionensystemen* in endliche oder unendliche Reihen zu entwickeln bzw. als Integraldarstellungen zu schreiben. Beispiele hierfür sind die Fourier-Reihen und -Integrale und die Legendre-Polynome. Da sich in vielen Büchern, z. B. in [7, Kap. 3] oder [9, Kap. 2.8] sehr gute Abhandlungen über dieses Thema finden, soll dieser kurze Hinweis hier genügen.

Der Satz über den Cauchy-Hauptwert Dieser Satz aus der Funktionentheorie wird in Abschnitt 4.7.5 bei der Ableitung der Kramers-Kronig-Relationen benötigt. Er wird im folgenden bewiesen.[2]

[1] Zur Definition der Delta-Distribution siehe auch *American Journal of Physics*, Vol. 57, No. 3, März 1989, p. 289

[2] Der Rest des Abschnittes stammt aus der Vorlesung von Prof. Kerner über Analysis IV (Funktionentheorie).

Der Cauchy-Hauptwert ist in einem größeren Zusammenhang als lediglich in der Funktionentheorie erklärt. Sei allgemein $X \subset \mathbb{R}^n$, $p \in X$, $f : X \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei $U_\epsilon(p) := \{x \in X : \|x - p\| < \epsilon\}$. Dann definiert

$$\mathcal{P} \int_X f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{X \setminus U_\epsilon(p)} f(x)\,dx$$

den *Cauchyschen Hauptwert.* Wir benötigen hier die auf eine Dimension eingeschränkte Definition.

Definition. Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $p \in]a,b[$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{p-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{p+\epsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

Cauchyscher Hauptwert.[3]

Wie läßt sich im Einzelfall dieser Hauptwert berechnen und was hat er mit der Funktionentheorie zu tun? Es läßt sich jetzt ein Satz beweisen, der die Antwort auf beide Fragen liefert. Zunächst einige Definitionen:

Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $p \in D$, $f : D \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to D$ eine reguläre Kurve durch p. Wie in Abb. 1.1 gezeigt, legt man einen Kreis in D um p (geht immer, da D offen). Dies

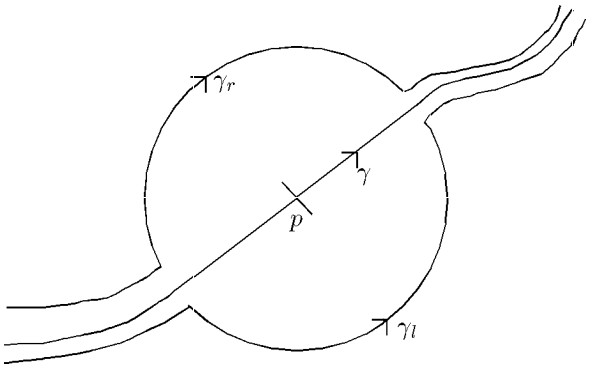


Abbildung 1.1: *Ein Kreis um p definiert zwei neue Kurven γ_l und γ_r.*

definiert zwei neue Kurven γ_l und γ_r, die außerhalb des Kreises mit γ übereinstimmen, wobei p "links" von γ_l liegen soll. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \int_\gamma f(z)\,dz &:= \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \\ \mathcal{L} \int_\gamma f(z)\,dz &:= \int_{\gamma_l} f(z)\,dz \quad . \end{aligned}$$

Ist K ein Kreis um p mit Radius ρ, so ist nach dem Residuensatz

$$\mathcal{L} \int_\gamma f(z)\,dz - \mathcal{R} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z-p|=\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_p f \quad . \tag{1.1}$$

Der zentrale Satz über den Cauchy-Hauptwert lautet nun folgendermaßen.

[3] Für $\mathcal{P} \int$ schreibt man oft auch p.V. $\int$ oder $\fint$.

Satz. Sei $p \in [a,b] \subset D \subset \mathbb{C}$, sei $f : D \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorph, und f besitze in p einen Pol 1. Ordnung. Sei außerdem $\gamma : [a,b] \to D, t \mapsto t$. Dann existiert $\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx$ und es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz - \mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \\ &= \mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz + \pi i \operatorname{Res}_p f = \\ &= \mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz - \pi i \operatorname{Res}_p f \quad .\end{aligned}$$

Beweis. Sei o.E. $p = 0$. Im folgenden steht $\mathcal{L}$ auch für $\mathcal{L}\int \ldots$.

a) Zunächst gilt

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}+\mathcal{R}) \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}(2\pi i \operatorname{Res}_p f + \mathcal{R} + \mathcal{R}) = \mathcal{R} + \pi i \operatorname{Res}_p f \overset{(1.1)}{=} \mathcal{L} - \pi i \operatorname{Res}_p f \quad .$$

b) Sei K der Kreis um p mit Radius ρ. Wähle $0 < \epsilon < \rho$, und die Kurven α_ρ bzw. α_ϵ seien obere Halbkreise um $p = 0$ (Abb. 1.2). Die Funktion f hat laut Voraussetzung einen Pol 1. Ordnung in

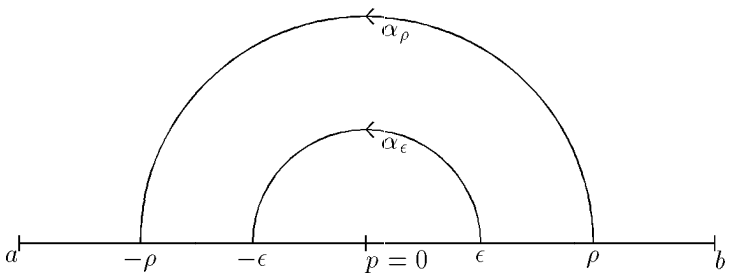


Abbildung 1.2: *Zum Beweis des Satzes über den Cauchy-Hauptwert.*

p, also lautet ihre Laurent-Entwicklung in diesem Punkt

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \ldots$$

Wählt man

$$g(z) := f(z) - \frac{a_{-1}}{z} = a_0 + a_1 z + \ldots \ ,$$

so ist g holomorph in D und es gilt $f = \frac{a_{-1}}{z} + g$. Somit wird

$$\int_{\alpha_\epsilon} f(z)\,dz = \int_{\alpha_\epsilon} g(z)\,dz + a_{-1}\int_{\alpha_\epsilon}\frac{dz}{z} \quad .$$

Im Grenzfall $\epsilon \to 0$ wird der erste Term auf der rechten Seite verschwinden, da g holomorph ist. Der zweite Term ist nach dem Residuensatz gleich $a_{-1}\pi i$ (es wird ja nur der halbe Kreis durchlaufen). Unter Anwendung des Cauchy-Integralsatzes ist

$$\int_{-\rho}^{-\epsilon} f(x)\,dx - \int_{\alpha_\epsilon} f(z)\,dz + \int_\epsilon^\rho f(x)\,dx + \int_{\alpha_\rho} f(z)\,dz = 0 \ ,$$

oder

$$\int_{-\rho}^{-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{\epsilon}^{\rho} f(x)\,dx = \int_{\alpha_\epsilon} f(z)\,dz - \int_{\alpha_\rho} f(z)\,dz \quad . \tag{1.2}$$

Damit kann man die eingangs erwähnte Definition des Cauchy-Hauptwertes einsetzen, jetzt allerdings noch mit $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_a^{-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{\epsilon}^{b} f(x)\,dx &= \left(\int_a^{-\rho} f(x)\,dx + \int_{-\rho}^{-\epsilon} f(x)\,dx\right) + \left(\int_{\epsilon}^{\rho} f(x)\,dx + \int_{\rho}^{b} f(x)\,dx\right) = \\
&\overset{(1.2)}{=} \left(\int_a^{-\rho} f(x)\,dx - \int_{\alpha_\rho} f(z)\,dz + \int_{\rho}^{b} f(x)\,dx\right) + \int_{\alpha_\epsilon} f(z)\,dz = \\
&= \mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx + \int_{\alpha_\epsilon} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \longrightarrow 0$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{\epsilon}^{b} f(x)\,dx\right) = \\
&= \mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\alpha_\epsilon} f(z)\,dz = \\
&= \mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx + \pi i\,\mathrm{Res}_p f \ ,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Beispiel: Berechne $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-1}$. Die Nullstellen von x^3-1 liegen bei 1, ρ und ρ^2, mit

$$\rho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad .$$

Es ist

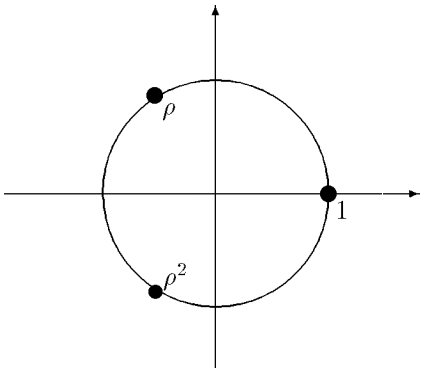


Abbildung 1.3: *Beispiel zur Berechnung eines Hauptwertes.*

$$x^3 - 1 = (x-1)(x-\rho)(x-\rho^2) \ ,$$

und damit

$$\mathrm{Res}_1 \frac{1}{z^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-\rho)(x-\rho^2)} = \frac{1}{(1-\rho)(1-\rho^2)} = \frac{1}{3} \quad .$$

Außerdem ist

$$\mathrm{Res}_\rho \frac{1}{z^3-1} = \frac{1}{(\rho-1)(\rho-\rho^2)} = -\frac{1}{6} + \frac{i}{6}\sqrt{3} \ ,$$

und damit

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-1} \overset{\text{Satz}}{=} \mathcal{R}\int_\gamma \frac{dz}{z^3-1} + \pi i\,\mathrm{Res}_1 \frac{1}{z^3-1} = 2\pi i\,\mathrm{Res}_\rho \frac{1}{z^3-1} + \pi i\,\mathrm{Res}_1 \frac{1}{z^3-1} = -\frac{\pi}{3}\sqrt{3} \ ,$$

denn $\mathcal{R}\int$ ist nach dem Residuensatz gleich der Summe aller Residuen in der oberen Halbebene, und da gibt es nur das bei ρ (Abb. 1.4).

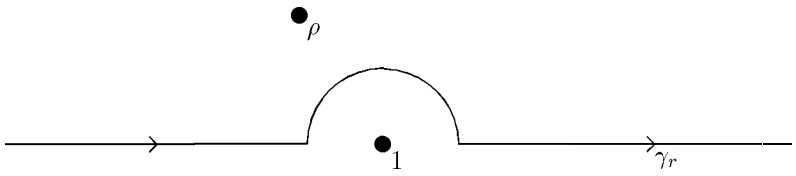


Abbildung 1.4: *Das einzige Residuum in der oberen Halbebene liegt bei ρ.*

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Einführung

Die Elektrostatik beschäftigt sich mit der Untersuchung *elektrischer* Felder, die nicht von der Zeit abhängen. Das elektrische Feld ist ein *Vektor.* Es ist definiert über die Kraft $\vec{F}$, die es auf eine Probeladung der Stärke q ausübt:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Es ist bei den folgenden Betrachtungen stets darauf zu achten, daß $\vec{E}$ in der Elektrostatik *das einzige physikalisch relevante Feld darstellt.* Was man auch immer zur Vereinfachung der Theorie an anderen Feldern aus $\vec{E}$ konstruieren mag (damit sind vor allem Potentiale gemeint, aus denen sich $\vec{E}$ ableiten läßt, s. u.) — die Physik steckt in *diesem* Feld, alles andere sind *Hilfsgrößen!*

Da das elektrische Feld nun schon über die Kraft auf eine Ladung definiert ist, liegt es nahe, Ladungen als Erzeugende von Feldern aufzufassen. Nichts anderes besagt das *Coulombsche Gesetz der Elektrostatik:* Seien q_1, q_2 elektrische Ladungen an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Die Kraft, die die beiden Ladungen dann aufeinander ausüben, ist proportional ihrem inversen quadratischen Abstand und parallel zur Verbindungsgeraden gerichtet:

$$\vec{F} = kq_1q_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = q_1\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = kq_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{2.1}$$

Eine Punktladung erzeugt also ein *radiales* elektrisches Feld, das bei zunehmender Entfernung mit r^{-2} abfällt.

Die Konstante k ist noch zu bestimmen. Sie hängt vom verwendeten *Einheitensystem* ab:

i) Im SI-(MKSA)-System beträgt die Einheitsladung 1 Coulomb= 1As. Um zu konsistenten Einheiten zu kommen, setzt man

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ ,$$

wobei ϵ_0 die *elektrische Feldkonstante* ist. Sie trägt die Einheit $\left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\right]$.

ii) Im Gaußschen (CGS-, natürlichen) Einheitensystem ist k quasi in die Elementarladung e_0 "hineindefiniert". Es ist $k = 1$, und

$$e_0 \approx 4,80 \cdot 10^{-10}\sqrt{\mathrm{erg\,cm}} \ .$$

Für elektrische Felder gilt das *Superpositionsprinzip:* Das Gesamtfeld vieler Ladungen am Ort $\vec{r}$ ist gleich der Vektorsumme der von den einzelnen Ladungen erzeugten Felder:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \tag{2.2}$$

Bekanntlich ist elektrische Ladung auf kleinste Einheiten quantisiert, sie tritt nur in Vielfachen der Elementarladung auf. Oft ist es jedoch günstig und statthaft, diese Tatsache zu vergessen und zu

kontinuierlichen Ladungsverteilungen überzugehen. In (2.2) bedeutet das, daß jede Einzelladung q_i durch eine *Ladungsdichte* ρ am Ort r_i zu ersetzen ist, multipliziert mit einem Volumenelement ΔV_i :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=0}^{N} \Delta V_i \rho(\vec{r}_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \int \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \underbrace{dV'}_{=d^3r'} \tag{2.3}$$

Man hat also die Summe in ein Integral verwandelt. Um die alte Summendarstellung wieder zu bekommen, muß man offenbar die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ durch einzelne δ-förmige Terme ersetzen, von denen jeder einer Punktladung entspricht:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Aus der Integralformel (2.3) ergibt sich jetzt eine wichtige Eigenschaft des $\vec{E}$-Feldes: Es ist nämlich

$$-\vec{\nabla}_r \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' = \int \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3r' = \vec{E}(\vec{r}) \quad .$$

Das elektrische Feld ist also als *Gradient* eines Skalarfeldes darstellbar. Damit folgt sofort

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0 \text{ , mit } \Phi = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' \quad . \tag{2.4}$$

> Elektrostatische Felder sind wirbelfrei!

Das Skalarfeld Φ bezeichnet man als *elektrostatisches Potential.* Es gilt stets

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad .$$

Mit Hilfe des Potentials ist es nun möglich, einfache Aussagen über die an bewegten Ladungen geleistete Arbeit abzuleiten. Die Frage ist: Welche Arbeit wird verrichtet, wenn eine Ladung q in einem Feld $\vec{E}$ von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ gebracht wird? Das Wegintegral lautet:

$$A_{12} = \int_{1\to2} \vec{F}\, d\vec{l} = \int_{1\to2} q\vec{E}\, d\vec{l} = -q \int_{1\to2} \underbrace{\vec{\nabla}\Phi\, d\vec{l}}_{=d\Phi} = -q\ (\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1))$$

Also ist die verrichtete Arbeit *unabhängig vom Weg,* d. h. seiner Form, und nur bestimmt durch die Potentiale am Anfangs- und Endpunkt. Daraus ergeben sich mehrere Folgerungen:

i)

$$A_{11} = q(\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_1)) = 0$$

Wird eine Ladung auf einem geschlossenen Weg transportiert, so ist die dabei verrichtete Arbeit gleich Null.

ii) Wählt man einen beliebigen Bezugspunkt als Potential-Nullpunkt, so ist $q\Phi(\vec{r})$ die beim Transport einer Ladung q an den Ort $\vec{r}$ zu verrichtende Arbeit.

iii) An Grenzflächen zwischen Medien ist die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes *stetig.* Zum Beweis betrachte man ein kleines Stück der Grenzfläche und wähle einen geschlossenen Integrationsweg, der zum Teil im Medium 1 und zum Teil in Medium 2 verläuft (Abb. 2.1). Die Wegstücke parallel zur Grenzfläche sollen die Länge l haben, die beiden anderen die Länge a. Nun ist

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{l} = (E^i_{tg} - E^a_{tg})\, l + (E^1_n - E^2_n) a \ ,$$

und da der letzte Term für $a \to 0$ verschwindet, ist die Behauptung bewiesen.

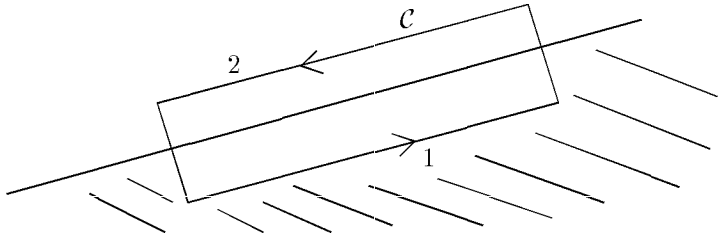


Abbildung 2.1: *Zum Beweis der Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes.*

2.1.1 Das Gaußsche Gesetz

Das Gaußsche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluß durch eine ein Volumen begrenzende Oberfläche und der in diesem Volumen enthaltenen Ladung her. Man betrachte dazu eine Oberfläche S, die den Nullpunkt des Koordinatensystems einschließt (umhüllt). Ein Flächenstück dA auf S läßt sich dann darstellen durch

$$dA = \frac{r^2 d\Omega}{\cos\vartheta} \ ,$$

wobei ϑ der Winkel ist, den die Flächennormale $\vec{n}$ und der Ortsvektor des Flächenstückes miteinander einschließen. Im Koordinatenursprung sitze nun eine Punktladung q. Der *elektrische Fluß* durch das Flächenelenent dA ist dann unter Anwendung von (2.1) gegeben durch

$$\vec{E}\vec{n}\, dA = q\,\frac{\cos\vartheta}{r^2}\, dA = q\, d\Omega \quad .$$

Nun ist aber $\int_S d\Omega = 4\pi$, also wird der Fluß durch die gesamte Fläche S gleich

$$\oint_S \vec{E}\vec{n}\, dA = 4\pi q \quad . \tag{2.5}$$

Das ist das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik:

> Der durch eine geschlossene Oberfläche tretende elektrische Fluss ist gleich 4π mal der in der Fläche eingeschlossenen Ladung.

Der Beweis für diesen Satz ist aber noch nicht ganz vollständig. Wir betrachteten bisher nur Ladungen *innerhalb* der Oberfläche. Zu zeigen ist, daß eine Ladungsverteilung *außerhalb* von S nichts zum elektrischen Fluß durch S beiträgt. Man betrachte dazu Abb. 2.2. Aus ihr geht der Beweisgang unmittelbar

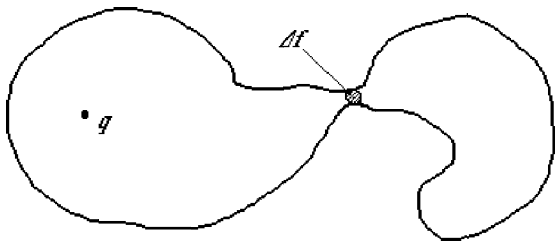


Abbildung 2.2: *Zum zweiten Teil des Beweises für das Gaußsche Gesetz*

hervor: Man spaltet von einer geschlossenen Oberfläche, die eine Ladung q enthält, einen "leeren" Teil ab. Da der Fluß durch die kleine Verbindungsfläche Δf beliebig klein und schließlich zu 0 gemacht

werden kann, ist klar, daß der Fluß durch die abgespaltete Fläche verschwindet, was zu beweisen war.[1] Das Gaußsche Gesetz lautet also, formuliert für eine Punktladung:

$$\oint_S \vec{E}\vec{n}\,dA = \begin{cases} 4\pi q & \text{falls } q \text{ innerhalb } S \\ 0 & \text{falls } q \text{ außerhalb } S \end{cases} \tag{2.6}$$

Unter Anwendung des Superpositionsprinzips läßt sich das leicht auf eine Ansammlung verschiedener Punktladungen q_i und schließlich auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ verallgemeinern (es wird angenommen, daß sich alle Ladung innerhalb der Fläche S befindet):

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}\vec{n}\,dA &= 4\pi \sum_i q_i \\ \oint_S \vec{E}\vec{n}\,dA &= 4\pi \int \rho(\vec{r})\,d^3r \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aus (2.7) folgt unmittelbar mit Hilfe des Gaußschen Satzes der Vektoranalysis

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{E}\vec{n}\,dA &= \int_V \vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r})\,d^3r \\ \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) &= 4\pi\rho(\vec{r}) \quad . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nimmt man noch die bereits erwähnte Tatsache $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ hinzu, so ergibt sich

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho \qquad \textit{(Poisson-Gleichung)}\ ,$$

was für den häufigen Fall $\rho = 0$ in die *Laplace-Gleichung* $\Delta\Phi = 0$ übergeht. Zusammen mit der oben hergeleiteten Beziehung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ haben wir so zwei *Maxwell-Gleichungen* für stationäre Verhältnisse kennengelernt.

Die Poisson-Gleichung ist eine *Differentialgleichung,* deren Lösung unmittelbar angegeben werden kann. Sie lautet

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,d^3r' \quad . \tag{2.9}$$

Die Überprüfung dieser Tatsache reduziert sich offensichtlich auf die Verifikation der Beziehung

$$\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\ , \tag{2.10}$$

oder auch $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$. Daß dies für $r \neq 0$ gilt, rechnet man sofort nach. Bei $r = 0$ jedoch ist zunächst keine Aussage möglich, hier greift man zu einem Trick: Man "nähert" die singuläre Funktion $\frac{1}{r}$ durch die differenzierbare Funktion

$$\chi_\epsilon(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$$

an, die für $\epsilon \longrightarrow 0$ wieder in $\frac{1}{r}$ übergeht. Dann wird unter Anwendung der Formel für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (Radialanteil)

$$\Delta\chi_\epsilon(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} - \frac{r\cdot r}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}^3}\right) = \frac{\epsilon^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}^3} =$$

$$= -3\frac{\epsilon^2}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}^5} =: \mu_\epsilon(r) \quad .$$

Für $\epsilon \longrightarrow 0$ gibt es nun zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mu_\epsilon(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq 0 \\ -\infty & \text{für } r = 0 \end{cases}$$

[1] Beweisidee aus [13].

Das ist bisher nichts Neues. Der Vorteil der Funktion μ_ϵ besteht nun in ihrer Integrierbarkeit:

$$\int \mu_\epsilon(r)\, d^3r = 4\pi \int_0^\infty r^2 \mu_\epsilon(r)\, dr = 4\pi \int_0^\infty \underbrace{r^2 \Delta\chi_\epsilon(r)}_{=r\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\chi_\epsilon}\, dr \overset{p.I.}{=} -4\pi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}\left(r\chi_\epsilon(r)\right)\, dr =$$

$$= -4\pi \frac{r}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}}\Big|_0^\infty = -4\pi$$

Der Parameter ϵ spielt keine Rolle mehr. Damit ist gezeigt, daß $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$, und Gleichung (2.9) ist bewiesen. Die vektoranalytische Beziehung (2.10) ist von größter Wichtigkeit in der gesamten Elektrodynamik und wird im folgenden oft in Herleitungen verwendet.

2.1.2 Ladungen auf Oberflächen und auf Leitern

Angenommen, es existiert eine Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$, die innerhalb eines kleinen Volumens ΔV als konstant gleich ρ_0 angenommen werden kann. Dann ist die in diesem Volumen enthaltene Ladung gleich

$$\Delta q = \rho_0 \Delta V \quad .$$

Sei nun $\sigma(\vec{r})$ eine auf *einer Fläche,* also zweidimensional, aufgetragene Ladungsdichte. Sie trage die Einheit einer Ladung pro Fläche. Dann ist, falls σ_0 wieder gleich einer innerhalb einer kleinen Fläche Δf konstanten Ladungsdichte gesetzt werden darf, die auf dieser Fläche enthaltene Ladung gleich

$$\Delta q = \sigma_0 \Delta f \quad .$$

Ganz analog zum Fall einer Raumladung läßt sich nun das von einer wie auch immer geladenen Fläche F erzeugte Feld durch das Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \int_F \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, df \tag{2.11}$$

beschreiben, falls die konkrete Ladungsverteilung $\sigma(\vec{r})$ bekannt ist.

Man betrachte nun eine konstante Flächenladung σ. Wie in Abbildung 2.3 gezeigt, wird ein Quader des Volumens ΔV so in die Fläche eingearbeitet, daß Boden- und Deckfläche parallel zu der ladungstragenden Fläche liegen. Die "Dicke" des Quaders sei beliebig klein. Von dem Quader wird offensichtlich

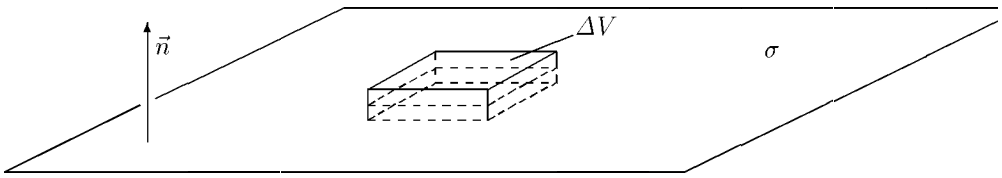


Abbildung 2.3: *Zum Verhalten des elektrischen Feldes an geladenen Flächen*

eine kleine Fläche Δf ausgeschnitten, die die Ladung $\Delta q = \sigma \Delta f$ trägt. Der elektrische Fluß durch $\partial\Delta V$ ist dann gleich

$$\oint_{\partial\Delta V} \vec{E}\vec{n}\, df = \left(\vec{E}^a\vec{n} - \vec{E}^i\vec{n}\right)\Delta f = 4\pi\sigma\Delta f \quad . \tag{2.12}$$

Dabei bedeutet $\vec{E}^a$ das Feld auf der (willkürlich gewählten) Außenseite der Flächenladung, $\vec{E}^i$ das auf der Innenseite. Die letzte Gleichung sagt aus, daß die Normalkomponente des elektrischen Feldes an einer geladenen Fläche um den Betrag $4\pi\sigma$ *springt.*

Aus dem bisher Gesagten lassen sich einige wichtige Schlüsse für das Verhalten elektrischer Felder in und an Leitern ziehen. Im folgenden wird angenommen, daß die Ladungsträger innerhalb des Leiters *in Ruhe* sind.

i) Innerhalb jedes Leiters, in dem die Ladungsträger ruhen, verschwindet das elektrische Feld, da es ja sonst einen Strom geben müßte. Die Konsequenz ist, daß in jedem solchen Leiter (also auch über seine Oberfläche) das *Potential konstant* sein muß.

ii) An der Grenzfläche vom Leiter in das ihn umgebende Medium ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes stetig: $\vec{E}^a \times \vec{n} = \vec{E}^i \times \vec{n}$. Das wurde früher schon abgeleitet.

iii) An der Außenseite des Leiters ist das elektrische Feld gleich $4\pi\sigma\vec{n}$, also *senkrecht zur Oberfläche,* da das Feld im Inneren verschwindet (siehe **i)** und **ii)**).

iv) Wird ein Leiter in ein elektrisches Feld gebracht, so ordnen sich Ladungen auf seiner Oberfläche so zu einer Oberflächenladungsdichte σ an, daß das externe Feld im Inneren genau zu 0 kompensiert wird.

2.2 Randwertprobleme: Laplace- und Poisson-Gleichung

Die Formeln (2.9) und (2.11) genügen dann zur eindeutigen Berechnung des Potentials, wenn alle existierenden Raum- und Flächenladungen genau bekannt sind. Oft sind jedoch nur gewisse *Randbedingungen* gegeben (das könnte z. B. das Potential eines Leiters sein), aus denen dann das Potential im restlichen Raum, in dem dann die Laplace-Gleichung gilt, bestimmt werden muß. Die genaue *Ladungsverteilung* auf den Grenzflächen ergibt sich dann durch Grenzwertbetrachtungen, wenn das Feld bekannt ist (siehe vorangegangener Abschnitt).

Mathematische Hilfsmittel stellen dabei die beiden *Greenschen Identitäten* dar. Um diese abzuleiten, betrachte man zwei beliebige freundliche Skalarfelder Φ und Ψ, und das aus ihnen gebildete spezielle Vektorfeld $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \Phi\vec{\nabla}\Psi \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi\vec{\nabla}\Psi + \Phi\Delta\Psi$$

Weiterhin ist dann

$$\vec{A}\vec{n} = \Phi\vec{\nabla}\Psi\vec{n} = \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}} \ ,$$

und das führt unter Anwendung des Gaußschen Satzes direkt zur ersten Greenschen Identität:

$$\int_V \left(\Phi\Delta\Psi + \vec{\nabla}\Phi\vec{\nabla}\Psi\right) dV = \oint_{\partial V} \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}}\, dF \tag{2.13}$$

Die Ableitung nach der Flächennormale $\vec{n}$ ist als Richtungsableitung zu verstehen. Vertauscht man in dieser Formel Φ mit Ψ (dadurch ergibt sich natürlich wieder eine wahre Aussage) und subtrahiert beide Gleichungen, so kommt man zur zweiten Greenschen Identität (manchmal einfach als "Satz von Green" bezeichnet):

$$\int_V (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi)\, dV = \oint_{\partial V} \left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}\right) dF \tag{2.14}$$

Wir betrachten nun einen Spezialfall. Setzt man

$$\Psi := \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \ ,$$

und läßt Φ weiter beliebig zu, so liefert Green 2 zusammen mit $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$ und $\Delta\Phi = -4\pi\rho$:

$$\int_V \left(-4\pi\Phi(\vec{r}\,')\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\left(-4\pi\rho(\vec{r}\,')\right)\right) d^3r' = \oint_{\partial V} \left(\Phi\frac{\partial}{\partial\vec{n}\,'}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}\,'}\right) dF'$$

Daraus läßt sich — durch die Auflösung des Integrals mit der Deltafunktion im Integranden — Φ ausrechnen, sofern man sich mit dem Aufpunkt $\vec{r}$ innerhalb von V befindet:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}\,'} - \Phi\frac{\partial}{\partial\vec{n}\,'}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right]\right) dF' \tag{2.15}$$

Diese Formel hält wieder interessante Folgerungen bereit:

i) Falls im Inneren des betrachteten Volumens V keine Ladung existiert, so ist das Potential (für das dann die Laplace-Gleichung gilt) dort durch seinen Wert und seine Richtungsableitung bezüglich der Normalen *am Rand* eindeutig festgelegt, denn das erste Integral in (2.15) verschwindet dann (später wird noch gezeigt werden, daß die Angabe von Potential *und* Ableitung auf dem Rand sogar eine Überbestimmung darstellt).

ii) Läßt man das Volumen V gegen unendlich streben, so verschwindet das Oberflächenintegral genau dann, wenn die Richtungsableitung von Φ (also die Normalkomponente des Feldes) am Rand schneller als $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ abfällt (dann genügt das r'^2 aus dem Flächenelement nicht mehr zur "Kompensation"). In diesem Fall reduziert sich (2.15) auf (2.9). Das verwundert nicht, denn die Poisson-Gleichung wurde ja zur Herleitung verwendet.

Wie bereits erwähnt, ist es nicht notwendig, zur Lösung der Laplace-Gleichung innerhalb von V sowohl das Potential als auch seine Richtungsableitung am Rand anzugeben. Man unterscheidet also zwei Fälle: *Dirichletsche* und *Neumannsche* Randbedingungen.

2.2.1 Dirichletsche Randbedingungen

Dirichletsche Randbedingungen bedeuten die Vorgabe des Potentials auf dem Rand des betrachteten Volumens. Man kann nun zeigen, daß die Laplace- oder Poisson-Gleichung unter diesen Bedingungen eindeutig lösbar ist.

Dazu nehmen wir an, es gäbe tatsächlich zwei unterschiedliche Lösungen $\phi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r})$ der Gleichung $\Delta\phi = \Delta\psi = -4\pi\rho$, für die dann

$$\phi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \quad \forall\, \vec{r} \in \partial V \tag{2.16}$$

gilt, d. h beide Lösungen erfüllen die gleiche Randbedingung. Dann gilt $\Delta(\phi - \psi) = \Delta\phi - \Delta\psi = 0$. Setzt man in die erste Greensche Identität für $\Phi = \Psi = \phi - \psi$ ein, so ergibt sich

$$\int_V \left((\phi-\psi) \underbrace{\Delta(\phi-\psi)}_{=0} + (\vec{\nabla}(\phi-\psi))^2 \right) dV = \oint_{\partial V} (\phi-\psi) \frac{\partial(\phi-\psi)}{\partial \vec{n}}\, dF \quad \Rightarrow \quad \int_V (\vec{\nabla}(\phi-\psi))^2 dV = 0 \ ,$$

da $(\phi - \psi)$ auf ∂V laut (2.16) verschwindet. Damit folgt, daß $\vec{\nabla}(\phi - \psi) = 0$ und somit $(\phi - \psi) = \text{const.}$ in V. Wegen (2.16) ist die Konstante jedoch gleich 0, und die Eindeutigkeit der Lösung ist bewiesen.

2.2.2 Neumannsche Randbedingungen

Neumannsche Randbedingungen bedeuten die Vorgabe der Normalkomponente des elektrischen Feldes (also $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}$) auf ∂V. Die Eindeutigkeit der Lösung ist hier jedoch nur bis auf eine Konstante gegeben. Der Beweis ist analog zu dem für Dirichlet-Randbedingungen, bis auf den letzten Schritt: Die Randbedingung lautet ja jetzt

$$\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial\vec{n}} = \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial\vec{n}} \quad \forall\, \vec{r} \in \partial V \ , \tag{2.17}$$

also müssen die beiden Lösungen auf dem Rand nicht mehr gleich sein. Das läßt die Freiheit der Wahl einer beliebigen Konstante für $\phi - \psi = \text{const.}$. Dies ist aber irrelevant, da, wie bereits mehrfach hervorgehoben, nur das elektrische Feld — und nicht das Potential — den physikalischen Gehalt ausmacht.

Somit ist es offensichtlich, daß die Festlegung Dirichletscher *und* Neumannscher Randbedingungen die Lösung überbestimmt, ja sogar (bei Unverträglichkeit der beiden Vorgaben) unter Umständen in diesem Fall gar keine Lösung existiert.

2.2.3 Beispiele

Dieser Abschnitt stellt anhand einiger Beispiele wichtige Methoden zur Behandlung von Randwertproblemen in der Elektrostatik vor. Für weitergehende Informationen ist [9, Kap. 2] empfehlenswert, außerdem [16].

Metallische, geladene Kugel

Man betrachte eine mit der Ladung q aufgeladene, metallische Kugel mit Radius $r = a$ (Abb. 2.4 links). Man hat es also mit einer absolut symmetrischen Ladungsverteilung zu tun, denn es gibt keinen

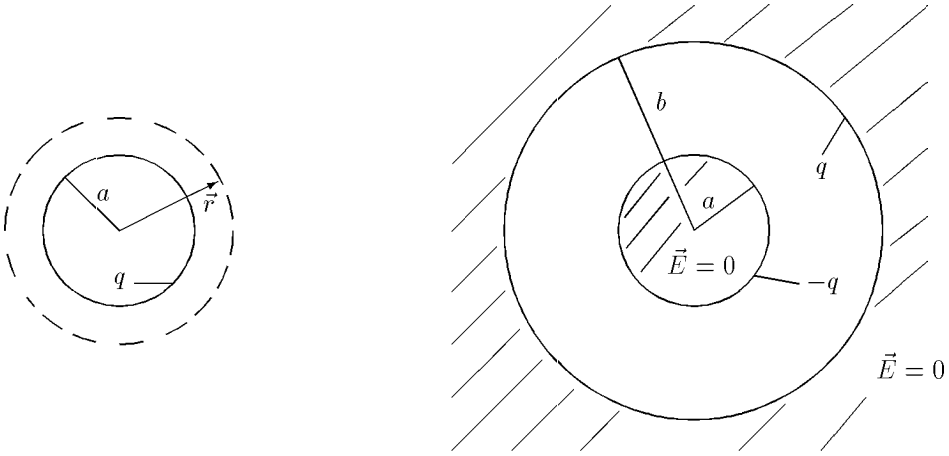


Abbildung 2.4: *Zur elementaren Anwendung des Gaußschen Gesetzes der Elektrostatik: Links geladene Metallkugel im Vakuum, rechts Kugelkondensator.*

Grund, weshalb sich die elektrische Ladung auf der Kugeloberfläche an bestimmten Orten häufen sollte. Offensichtlich gilt dann für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} \quad .$$

Gesucht ist das Potential innerhalb und außerhalb der Kugel.

Außerhalb: Durch das Vorhandensein einer Oberflächenladung muß die Normalkomponente des elektrischen Feldes an der Oberfläche *springen,* und zwar um

$$\Delta E_n = 4\pi\sigma \quad .$$

Da im Metall das elektrische Feld aber völlig verschwindet, gilt also für das Feld an der Oberfläche aus Symmetriegründen

$$\vec{E}(a) = \vec{e}_r \Delta E_n^a = 4\pi\sigma\vec{e}_r = \frac{q}{a^2}\,\vec{e}_r \quad . \tag{2.18}$$

Um nun das elektrische Feld im gesamten umgebenden Raum zu berechnen, legt man eine "imaginäre" Kugelfläche konzentrisch um die geladene Kugel. Das Gaußsche Gesetz liefert dann unter Anwendung der Symmetrie die Identität

$$\oint_{\bigcirc_r} \vec{E}(r)\, d\vec{F} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q \quad .$$

Damit folgt für das Feld im Außenraum sofort

$$\vec{E}(\vec{r})\,\Big|_{r\geq a} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \quad . \tag{2.19}$$

Für das elektrische Potential Φ betrachte man den radialen Anteil der Laplace-Gleichung (aus Symmetriegründen fallen die anderen Terme weg):[2]

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi = \frac{A}{r} + B$$

[2]Natürlich könnte man auch ein Linienintegral bis zum Radius r berechnen, das führt zum selben Ergebnis. Der Potentialnullpunkt wird dann durch den Anfangspunkt des Integrationsweges festgelegt.

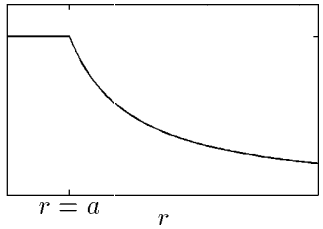
In der allgemeinen Lösung sind also noch die beiden Konstanten A und B zu bestimmen. Dazu bildet man unter Anwendung von $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ einen Ausdruck für das Feld an der Kugeloberfläche:

$$\vec{E}_n = \vec{E}(r=a) = -\vec{\nabla}\Phi\Big|_{r=a} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=a} = \vec{e}_r\frac{A}{r^2}\Big|_{r=a} = \vec{e}_r\frac{A}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad A = q,\ B := 0$$

Die Konstante B wurde hier zu 0 gewählt, damit das Potential im Unendlichen verschwindet. Das muß zwar nicht sein (die Konstante wirkt sich ja bei $\vec{E}$ nicht aus), ist aber oft günstig.

Innerhalb: Ist $r < a$, so enthält die imaginäre "Gauß-Kugel" keine Ladung, d. h. das Feld im Inneren der Metallkugel verschwindet. Da die Kugel insgesamt auf dem Potential $\frac{q}{a}$ liegt, muß das Potential innerhalb gleich diesem Wert sein. Insgesamt ergibt sich dann

$$\Longrightarrow \qquad \Phi(r) = \begin{cases} \frac{q}{a} & \text{wenn } r \le a \\ \frac{q}{r} & \text{wenn } r > a \end{cases}$$



.

Kugelkondensator

In einem Metallkörper befinde sich ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius b, darinnen konzentrisch eine Metallkugel vom Radius a (s. Abb. 2.4 rechts). Auf den Oberflächen von Kugel und Hohlraum seien Ladungen q und $-q$ aufgebracht. Gesucht ist die Kapazität des so entstandenen Kondensators unter der Annahme, daß im Hohlraum Vakuum herrscht.

Unter Anwendung der im vorangegangenen Beispiel erhaltenen Ergebnisse lautet die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung im Zwischenraum

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} + B \quad .$$

Der Potentialunterschied zwischen Innen- und Außenfläche beträgt somit

$$U = \Phi(a) - \Phi(b) = q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \ ,$$

und die Kapazität der Anordnung erhält man zu

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{ab}{b-a} \quad . \tag{2.20}$$

Man beachte, daß im Grenzfall eines (im Vergleich zu a und b) schmalen Zwischenraumes dieser Ausdruck in den für die Kapazität eines *Plattenkondensators* (siehe nächstes Beispiel) der Fläche $4\pi a^2$ übergeht, was ja auch zu erwarten ist:

$$d = b - a \approx 0 \quad \Longrightarrow \qquad C \approx \frac{a^2}{d}$$

Plattenkondensator

In den beiden vorangegangenen Beispielen konnten hohe Symmetrien ausgenutzt werden, um Felder und Potentiale zu bestimmen. So einfach ist es jedoch nicht immer.

Bereits bei einem "simplen" Plattenkondensator (Abb. 2.5 links) müssen *vereinfachende Annahmen* gemacht werden, um das Problem — hier die Bestimmung der Kapazität — überhaupt angehen zu können. Die Vereinfachung besteht hier in der Vernachlässigung der Randeffekte, d. h. bei Annahme *quadratischer* Platten soll die Kantenlänge einer Platte groß gegen d sein.

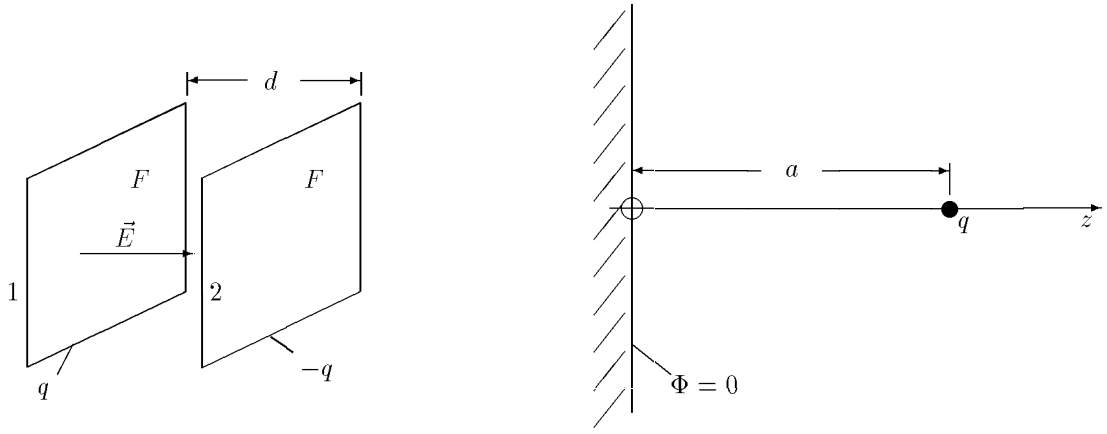


Abbildung 2.5: *Randwertprobleme ohne hohe Symmetrie. Links Plattenkondensator, rechts Punktladung vor ∞ ausgedehnter, leitender Ebene.*

Die Normalkomponente des $\vec{E}$-Feldes springt an einer Platte aufgrund der Oberflächenladung $\sigma = q/F$ um

$$\Delta E_n = \Delta E = E = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{F} \quad .$$

Hier wurde mit der oben erwähnten Vereinfachung Ernst gemacht: Das Feld wird zwischen den Platten als *homogen* angenommen (d. h. auch die Flächenladungsdichte ist homogen), außderdem soll es außerhalb des Kondensators *verschwinden.* Dann gilt für den Potentialunterschied

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 = \int\limits_{1\to 2} \vec{E}\, d\vec{l} = Ed = \frac{4\pi q d}{F} \ ,$$

und die Kapazität wird zu

$$C = \frac{q}{U} = \frac{F}{4\pi d} \quad . \tag{2.21}$$

Punktladung vor leitender Ebene: Spiegelladungen

Man betrachte eine Punktladung q im Abstand a vor einer unendlich ausgedehnten, beliebig gut leitenden Ebene, deren Potential auf 0 festgehalten wird. Gesucht ist das Potential Φ in jedem Raumpunkt vor der Ebene (Abb. 2.5 rechts).

Hier muß man von dem aüßerst wichtigen Satz Gebrauch machen: Wenn eine Lösung der Laplace-Gleichung gefunden ist, die den Randbedingungen gehorcht, so ist dies die *einzige* Lösung (siehe Abschnitt 2.2). Um dies praktisch auswerten zu können, macht man meist mit intelligenten Annahmen einen Ansatz und überprüft seine Richtigkeit durch nachrechnen bzw. legt noch freie Konstanten fest.

In diesem Fall weiß man, daß wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-feldes an der Ebene verschwinden muß, denn im Metall ist $\vec{E} = 0$:

$$E_\rho(z = 0) = 0$$

Man sucht also für die Lösung ein Feld, das lokal (an der Ebene) senkrecht zur Fläche $z = 0$ steht. Das vermittelt schon einen Eindruck von der Lösung (d. h. ihrer Symmetrie), ist aber noch keine ausreichende Randbedingung. Außerdem ist natürlich $\Phi(z = 0) = 0$, und dies ist ein *Dirichletsches* Randwertproblem.

Ein Feld, das dieser Dirichletschen Bedingung gehorcht, ist leicht zu finden. Es handelt sich um das Feld zweier entgegengesetzter Punktladungen q und $-q$. Man führt also auf der anderen Seite der Ebene im Abstand a eine *"virtuelle" Punktladung* $-q$ ein *und erfüllt so die Randbedingung!* Für das Potential gilt dann folgender Ansatz:

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}}_{\text{Ladung in } a} \underbrace{- \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}}_{\text{Spiegelladung}} \tag{2.22}$$

Wie man sofort sieht, erfüllt dieses Potential die Randbedingung $\Phi(z=0)=0$. *Also ist es die einzige Lösung.*

Wir suchen nun noch einen Ausdruck für die durch q auf der Ebene erzeugte Flächenladungsdichte σ. Dazu bildet man die Normalkomponente von $\vec{E}$ bei $z=0$:

$$4\pi\sigma = E_n = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{2aq}{(a^2+\underbrace{x^2+y^2}_{=\rho^2})^{3/2}} \quad\Longrightarrow\quad \sigma(\rho) = \frac{-aq}{2\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Das ist eine radialsymmetrische Verteilung um den Ursprung. Wie groß ist nun die auf der Oberfläche versammelte Gesamtladung? Integration über die Fläche:

$$\Longrightarrow\quad q' = 2\pi\int_0^\infty \sigma(\rho)\rho\,d\rho = -aq\int_0^\infty \frac{\rho\,d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} = -q$$

Also wird von der realen Ladung q auf der Oberfläche genau die Spiegelladung $-q$ erzeugt. Man könnte sagen, zur Erfüllung von Randbedingungen ist der Natur jedes Mittel recht.

Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten: Langer Kasten mit Potentialunterschieden

Zum Abschluß noch ein komplizierteres Beispiel, das auch gleich die Vorgehensweise bei der Lösung der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten zeigt. Gegeben sei ein metallischer Kasten mit rechteckigem Querschnitt, der sich unendlich weit in positive und negative z-Richtung erstrecke (Abb. 2.6).

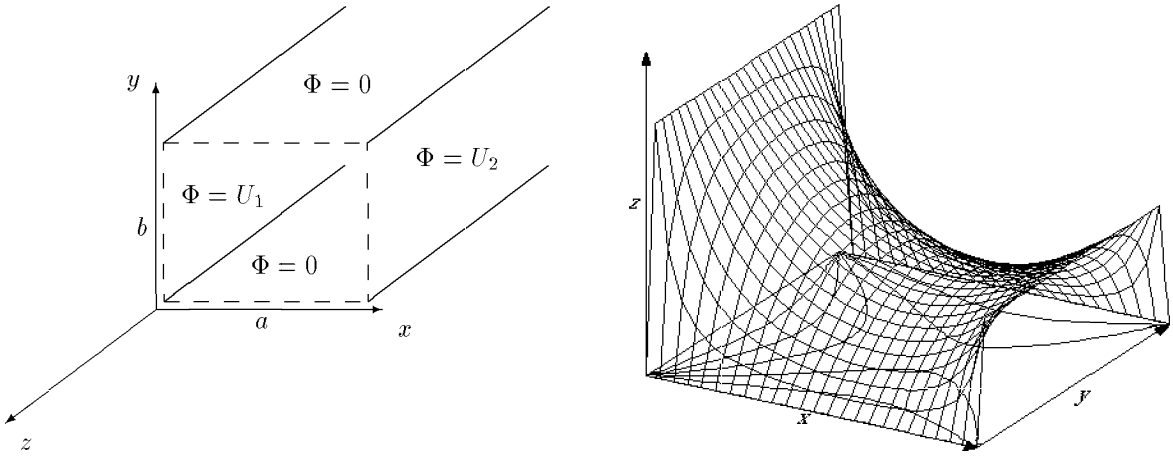


Abbildung 2.6: *Ein langer, metallischer Kasten mit voneinander isolierten Wänden, die auf verschiedenen Potentialen liegen. Rechts Lösung der Laplace-Gleichung mit $a=b$ und $U_2=U_1/2$.*

Die vier Seitenwände des Kastens seien voneinander isoliert, so daß sie auf folgenden Potentialen liegen können:

$$\Phi(x=0)=U_1 \qquad \Phi(x=a)=U_2 \qquad \Phi(y=0)=\Phi(y=a)=0$$

Diese Vorgaben sind offensichtlich Dirichletsche Randbedingungen. Gesucht ist das Potential Φ im Inneren des Kastens. Da es sich um ein in z-Richtung translationssymmetrisches Problem handelt, genügt es aus Symmetriegründen, zwei Dimensionen zu betrachten (es gibt keinen Grund, weshalb eine z-Richtung irgendwie ausgezeichnet sein sollte, also muß $E_z=0$ gelten). Die Laplace-Gleichung lautet somit

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{2.23}$$

In solchen Fällen empfiehlt sich ein sogenannter *Separationsansatz* zur Lösung für Φ. Man setzt

$$\Phi(x,y) := G(x)\,H(y) \quad .$$

Eingesetzt in die Laplace-Gleichung ergibt sich dann

$$\Delta\Phi = H(y)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + G(x)\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{2.24}$$

Die Funktionen $G(x)$ und $H(y)$ hängen von unabhängigen Variablen ab. Demzufolge kann (2.24) nur dann erfüllt sein, wenn beide Summanden *konstant* sind:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} =: \kappa^2 = \text{ const.}$$

Dies sind bereits zwei homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die erste lautet

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2\right) H = 0 \quad . \tag{2.25}$$

Sie ist vom Typ einer einfachen Schwingungsgleichung, deren allgemeine Lösung bekanntlich durch

$$H(y) = \alpha \sin(\kappa y) + \beta \cos(\kappa y) \tag{2.26}$$

gegeben ist, mit noch zu bestimmenden Konstanten α und β. Zwei der Randbedingungen kann man bereits hier einsetzen:

$$\begin{aligned} H(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \beta = 0 \\ H(b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \kappa b = n\pi \text{ , mit } n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.27) \\ &\Longrightarrow \quad H(y) = \alpha \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \qquad (2.28) \end{aligned}$$

Jetzt noch die zweite Differentialgleichung und ihre allgemeine Lösung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa^2\right) G = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad G(x) = \gamma\, e^{\kappa x} + \delta\, e^{-\kappa x} \tag{2.29}$$

Setzt man die Forderung $\kappa = \frac{n\pi}{b}$ aus (2.28) hier ein, so wird daraus

$$G(x) = \gamma_n \exp\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \delta_n \exp\left(\frac{-n\pi x}{b}\right) \quad . \tag{2.30}$$

Schließlich gilt also durch Kombination aller unabhängigen Lösungen für Φ:

$$\Phi(x,y) = G(x)\,H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n \exp\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \delta_n \exp\left(\frac{-n\pi x}{b}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \tag{2.31}$$

Dazu ist einiges zu sagen. Zunächst geht die Summe nur von 1 bis ∞, da in die Lösung nur alle *unabhängigen* Terme aufgenommen werden sollen. Diejenigen für negatives n lassen sich jedoch aus denen für $n > 0$ linear kombinieren. Außerdem wurde der Faktor α aus (2.28) mit in die Konstanten γ_n und δ_n gezogen.

Zwei Randbedingungen sind noch übrig. Die für $x = 0$ liefert

$$\Phi(x=0) = U_1 = \sum_n (\gamma_n + \delta_n) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad . \tag{2.32}$$

Dies ist offensichtlich eine Fourier-Reihe. Um die Koeffizienten $(\gamma_n + \delta_n)$ zu erhalten, nutzt man eine der Orthogonalitätsrelationen der harmonischnen Analyse aus:

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y\right) dy = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n \neq p \\ \frac{b}{2} & n = p \end{array} \right\} = \frac{b}{2}\delta_{p,n}$$

Multipliziert man also (2.32) mit $\sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right)$ und integriert von 0 bis b, so fallen alle Summenglieder weg, bis auf jenes mit $p = n$:

$$U_1 \underbrace{\int_0^b \sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right) dy}_{=\begin{cases} 0 & p \text{ gerade} \\ 2\frac{b}{p\pi} & p \text{ ungerade} \end{cases}} = \frac{b}{2}(\gamma_p + \delta_p) \qquad \Longrightarrow \qquad (\gamma_p + \delta_p) = \begin{cases} \frac{4U_1}{p\pi} & p \text{ ungerade} \\ 0 & p \text{ gerade} \end{cases} \tag{2.33}$$

Die letzte verfügbare Randbedingung ergibt für $x = a$:

$$\Phi(x = a) = U_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + \delta_n e^{\frac{-n\pi a}{b}}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Und mit den gleichen Überlegungen wie bei $x = 0$ folgt

$$\left(\gamma_p e^{\frac{p\pi a}{b}} + \delta_p e^{\frac{-p\pi a}{b}}\right) = \begin{cases} \frac{4U_2}{p\pi} & p \text{ ungerade} \\ 0 & p \text{ gerade} \end{cases} . \tag{2.34}$$

Für den Fall, daß p gerade ist, bekommt man aus (2.33) und (2.34) die Lösungen $\gamma_p = 0$ und $\delta_p = 0$. Ist p ungerade, so ergeben sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten γ_p und δ_p für jedes (ungerade) p. Die Gesamtlösungen lauten dann

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{4}{p\pi}\frac{U_1 - U_2\, e^{p\pi a/b}}{1 - e^{2\pi a p/b}} \\ \delta_p &= \frac{4}{p\pi}\frac{U_1 - U_2\, e^{-p\pi a/b}}{1 - e^{2\pi a p/b}} \end{aligned} \Bigg|_{p \text{ ungerade}} , \qquad \gamma_p = \delta_p = 0 \Big|_{p \text{ gerade}} \tag{2.35}$$

Durch Einsetzen in (2.31) bekommt man dann die allgemeine Lösung für Φ. In Abb. 2.6 ist rechts ein 3D-Plot der Lösung für das Potential im Kasten zu sehen, wenn man $U_2 = U_1/2$ und $a = b$ setzt. Dabei zeigt die z-Richtung *nach oben* (d. h. man muß sich den Kasten gegenüber dem linken Bild um 90° nach hinten gekippt denken), und in dieser Richtung ist dann auch $\Phi(x, y)$ aufgetragen. In der Ebene $z = 0$ sind zusätzlich einige Äquipotentiallinien eingezeichnet. Das Bild wurde allerdings nicht durch das Aufsummieren der Reihe, sondern mittels eines numerischen Näherungsverfahrens berechnet [13, Kap. 3, Übungen].

Das hier in zwei Dimensionen vorgestellte Verfahren läßt sich problemlos auf drei Dimensionen übertragen. Siehe dazu auch [9, Kap. 2.9].

2.2.4 Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten: Allgemeine Lösung

Ähnlich wie in dem eben behandelten Beispiel kann man auch in Kugelkoordinaten die Laplace-Gleichung zunächst allgemein behandeln, um dann die auftretenden Differentialgleichungen zu lösen und die freien Konstanten mit Hilfe der Randbedingungen zu bestimmen. Die Gleichung lautet also

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi = 0 \quad . \tag{2.36}$$

Zur Lösung bietet sich abermals ein *Separationsansatz* an:

$$\Phi := \frac{U(r)}{r}P(\vartheta)Q(\phi) \tag{2.37}$$

Daß man hier U noch durch r dividiert, ist deshalb günstig, weil in der Laplace-Gleichung (2.36) nicht Φ alleine, sondern $r\Phi$ nach r abgeleitet wird.

Die einzelnen Ableitungen in (2.36) lauten somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(UPQ) = PQ\frac{\partial^2}{\partial r^2}U \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Phi\right) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{U}{r}Q\frac{\partial}{\partial\vartheta}P\right) = \frac{U}{r}Q\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}P\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi &= \frac{U}{r}P\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Q \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Terme in die Laplace-Gleichung und Multiplikation mit $\frac{r^3 \sin^2\vartheta}{UPQ}$ liefert

$$r^2 \sin^2\vartheta \left[\frac{1}{U}\frac{\partial^2}{\partial r^2}U + \frac{1}{Pr^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}P\right)\right] + \frac{1}{Q}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Q = 0 \quad . \tag{2.38}$$

In dieser Gleichung hängt nur der letzte Summand von ϕ ab und muß deshalb konstant sein. Wir setzen

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Q =: -m^2 \quad .$$

Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichung für $Q(\phi)$ sind[3]

$$Q = e^{\pm im\phi} \; ; 0 \le \phi < 2\pi \; , \; m \in \mathbb{Z}. \tag{2.39}$$

Der Parameter m *muß* ganzzahlig sein, damit es nach einem vollen "ϕ-Umlauf" von 0 bis 2π nicht zu Zweideutigkeiten kommt. Damit ist das Thema Q eigentlich erledigt, bis auf eine kleine Einschränkung bei m, auf die wir später noch kommen. m^2 wird jetzt in (2.38) eingesetzt:

$$r^2\sin^2\vartheta\left[\frac{1}{U}\frac{\partial^2}{\partial r^2}U + \frac{1}{Pr^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}P\right)\right] - m^2 = 0 \qquad \Big| \quad \cdot\sin^{-2}\vartheta$$

$$\Longrightarrow \qquad \underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{\partial^2}{\partial r^2}U}_{=:\,l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{P\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}P\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}}_{=-l(l+1)} = 0$$

Aus den üblichen Gründen muß das hier etwas verquer — wenn auch nützlich, wie sich später zeigen wird — eingeführte l konstant sein (der erste Teil hängt nur von r ab, der zweite nur von ϑ). Wie gehabt bekommt man so noch zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}U - \frac{l(l+1)}{r^2}U = 0 \tag{2.40}$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}P\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)P = 0 \tag{2.41}$$

Die Lösung für (2.40) erhält man noch recht einfach zu

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad . \tag{2.42}$$

Bei (2.41) wird es interessant. Wie sich zeigen wird, ist das die "versteckte" Version einer bekannten Differentialgleichung. Um diese Gleichung zu bekommen, substituiert man $x := \cos\vartheta$. Dann wird

$$\sin\vartheta = \sqrt{1-x^2} \; , \text{ und } \quad dx = -\sin\vartheta\, d\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}f(x(\vartheta)) = \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\cos\vartheta)\right]\frac{\partial}{\partial x}f = -\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial x}f \quad .$$

(2.41) kann damit so geschrieben werden:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}(-\sin\vartheta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2}(-\sin\vartheta)\frac{\partial}{\partial x}P\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)P = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0 \tag{2.43}$$

Dies ist die sogenannte *Legendre-Differentialgleichung,* deren Lösungen man kennt ([5, Kap. 3.3.1.3.4], in [9, Kap. 3.2] findet sich eine ausführlichere mathematische Behandlung). Dabei betrachtet man günstigerweise folgende Fälle:

[3] Man mag hier auf den Gedanken kommen, daß $\frac{1}{Q}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Q(\phi)$ ja auch positiv sein könnte (wenn man imaginäre m außer acht läßt). Das ist aber unmöglich, da $Q(\phi)$ offensichtlich eine Periode von 2π haben und differenzierbar sein muß. Mit reellen e-Funktionen ist das aber nicht zu erfüllen.

Fall 1: $m = 0$. Die Gleichung, die sich mit dieser Vereinfachung ergibt, heißt *gewöhnliche Legendre-Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P\right] + l(l+1)P = 0 \tag{2.44}$$

Wenn man will, kann man das als eine Eigenwertgleichung für einen linearen Operator $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\right]$ zu den Eigenwerten $-l(l+1)$ schreiben:

$$\mathcal{L}P = -l(l+1)P$$

Es zeigt sich, daß dieser Operator ein diskretes Spektrum mit unendlich vielen Eigenfunktionen besitzt. Diese Funktionen sind die sogenannten *Legendre-Polynome* $P_l(x)$, die z. B. nach der folgenden Rekursionsformel berechnet werden können (Formel von Rodriguez):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\left[\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\right] \quad , l \in \mathbb{N}_0, \tag{2.45}$$

denn nur für diese l erhält man linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung, die an den Stellen -1 und 1 beschränkt sind [9]. Man normiert per Konvention die P_l so, daß $P_l(1) = 1\,\forall l$. Die ersten Polynome in diesem Satz lauten:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 & P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\\
P_1(x) &= x & P_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_6(x) &= \tfrac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)\\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) & P_7(x) &= \tfrac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)
\end{aligned}$$

Abbildung 2.7 gibt einen Eindruck von den Graphen der Polynome P_0 bis P_4. Man sieht (auch schon aus den Formeln), daß die P_l mit steigendem l abwechselnd gerade und ungerade sind. Die Normierungsbedingung $P_l(1) = 1$ ist jedoch erfüllt. Das Wichtige dabei ist, daß die Legendre-

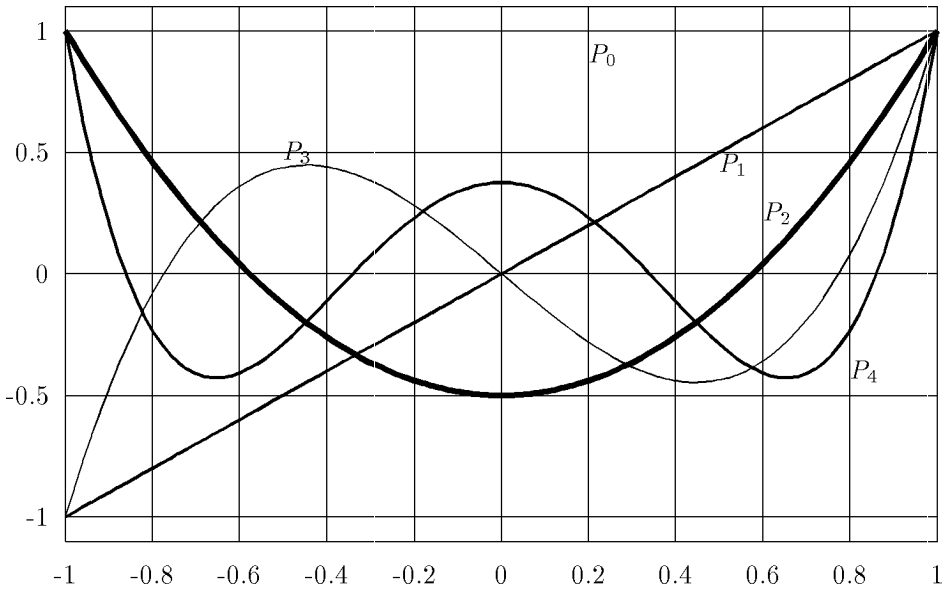


Abbildung 2.7: *Die Graphen der ersten fünf Legendre-Polynome.*

Polynome in $[-1; 1]$ einen *vollständigen Satz orthogonaler Funktionen* bilden. Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\, P_l(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{l,l'} \quad . \tag{2.46}$$

Sei jetzt eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ definiert auf $[-1;1]$. Dieses f ist dann als Linearkombination im Sinne einer Reihe aus Legendre-Polynomen synthetisierbar:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

Analog zur Fourier-Zerlegung gewinnt man auch hier die Entwicklungskoeffizienten A_l durch Multiplikation dieser Gleichung mit $P_{l'}$, Integration über das Synthese-Intervall und Anwendung der Orthogonalitätsbeziehung:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_{l'}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l P_{l'}\, dx \overset{(2.46)}{=} \frac{2}{2l'+1} A_{l'}$$

Damit folgt

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x)\, dx \quad . \tag{2.47}$$

Nun zurück zum behandelten Spezialfall $m = 0$. Nach (2.39) erfaßt man durch diese Einschränkung alle Probleme mit *azimutaler Symmetrie*, d. h. die Geometrie ist unabhängig vom Azimutwinkel ϕ (G ist keine Funktion von ϕ, also $\frac{\partial}{\partial\phi} G = 0$). Damit folgt durch Linearkombination aller unabhängigen Lösungen und Anwendung von (2.42):

$$\Phi = \Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\vartheta) \tag{2.48}$$

Dies ist also die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten für Probleme mit *azimutaler Symmetrie* (die Konstanten vor den Legendre-Polynomen und die Konstante G wurden wieder in die A_l und B_l aufgenommen und die Substitution $x = \cos\vartheta$ rückgängig gemacht). Die freien Konstanten A_l und B_l müssen anhand von Randbedingungen bestimmt werden, dazu folgt später noch ein Beispiel.

Ein Hinweis noch zu den Legendre-Polynomen. Oft sind bei der Berechnung bestimmter Integrale folgende Beziehungen zwischen Legendre-Polynomen und deren Ableitungen sehr nützlich. Beweise findet man in vielen Büchern [16], so daß hier nur die Gleichungen wiedergegeben werden:

$$P'_{l+1} - xP'_l - (l+1)P_l = 0 \tag{2.49}$$
$$lP_{l-1} - lxP_l + (x^2-1)P'_l = 0 \tag{2.50}$$

Fall 2: $m \neq 0 \quad \wedge \quad m \in \mathbb{Z}$. Außerdem sei $-l \leq m \leq l$. Hier schlägt die oben bereits angedeutete Einschränkung für den Bereich von m also zu. Die Lösungen der Legendre-Differentialgleichung (2.43) für diesen Fall werden *zugeordnete Legendre-Funktionen* genannt:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{\partial^{(l+m)}}{\partial x^{(l+m)}} (x^2-1)^l \tag{2.51}$$

Oder, in einer anderen Darstellung:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_l(x) \tag{2.52}$$

Aus diesen Funktionen gehen, wie man leicht sieht, die Legendre-Polynome wieder hervor, wenn man $m = 0$ setzt. Aus den zugeordneten Legendre-Polynomen läßt sich ebenfalls ein vollständiges System orthonormaler Funktionen ableiten, das nun auf der *Einheitskugel* definiert ist, d. h. die "Basisvektoren" hängen von ϕ und ϑ ab. Man definiert

$$Y_{lm}(\vartheta,\phi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\phi} \text{ , mit } -l \leq m \leq l \tag{2.53}$$

als Lösungen des Azimutal- und Polaranteils der Laplace-Gleichung (die Wurzel dient zur Normierung, siehe unten). Auch hieraus gehen die Legendre-Polynome (bis auf Vorfaktoren) durch $m = 0$ wieder hervor. In den Y_{lm} begegnet man wieder den schon aus der Quantenmechanik bekannten *Kugelflächenfunktionen*. Sie bilden ein Funktionensystem auf der *Einheitskugel* — die unabhängigen Variablen sind ϕ und ϑ — und gehorchen wieder einer Orthonormalitätsrelation:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \, Y^*_{l'm'}(\vartheta,\phi)\, Y_{lm}(\vartheta,\phi) = \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'} \tag{2.54}$$

Außerdem ist der Funktionensatz Y_{lm} *vollständig* (d. h. erzeugend):

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta',\phi')Y_{lm}(\vartheta,\phi) = \delta(\phi-\phi')\,\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta') \tag{2.55}$$

Es existiert noch eine nützliche Beziehung zwischen Funktionen zu positivem und negativem m, die man aus (2.53) leicht ableitet:

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y^*_{lm} \tag{2.56}$$

Die ersten Kugelflächenfunktionen lauten:

$l \in \{0,1,2\}$

$$\begin{cases} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\phi} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \\ Y_{22} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\vartheta\, e^{2i\phi} \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{i\phi} \\ Y_{20} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(3\cos^2\vartheta-1) \end{cases}$$

$l = 3$

$$\begin{cases} Y_{33} &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3\vartheta\, e^{3i\phi} \\ Y_{32} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{2i\phi} \\ Y_{31} &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}}\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta-1)\, e^{i\phi} \\ Y_{30} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{4\pi}}(5\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta) \end{cases}$$

Die Funktionen für negative m sind hier nicht angegeben, denn man kann sie über (2.56) ermitteln.

Sei jetzt eine Funktion $g(\vartheta,\phi)$ vorgegeben. Diese läßt sich dann wegen (2.54) und (2.55) schreiben als Synthese aus Kugelflächenfunktionen:

$$g(\vartheta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\phi) \tag{2.57}$$

Und die A_{lm} erhält man durch eine Umformung unter Verwendung von (2.54) wie bei den Legendre-Polynomen zu

$$A_{lm} = \int d\Omega\, Y^*_{lm}(\vartheta,\phi)\, g(\vartheta,\phi) \quad .$$

Die Vollständigkeitsrelation (2.55) garantiert dann wieder, daß

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \, \sin\vartheta' Y^*_{lm}(\vartheta',\phi')\, g(\vartheta',\phi')\, Y_{lm}(\vartheta,\phi) = g(\vartheta,\phi) \ ,$$

d. h. die Synthese unter Verwendung der Entwicklungskoeffizienten A_{lm} liefert tatsächlich wieder g, wie in (2.57) gefordert.

Jetzt ist man endlich soweit, die volle, allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten aufschreiben zu können. (2.42) gibt die Lösung für U, und in (2.53) hat man die Lösung für Azimutal- und Polaranteil. Also:

$$\Phi(r,\vartheta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right] Y_{lm}(\vartheta,\phi) \tag{2.58}$$

Ein Beispiel soll verdeutlichen, wie man in solchen allgemeinen Ausdrücken durch Einsetzen von Randbedingungen die freien Konstanten bestimmt.

Ungeladene, metallische Kugel im homogenen $\vec{E}$-Feld

Hier geht es um eine metallische Kugel, die in ein ursprünglich homogenes und polar gerichtetes elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$ gebracht wurde und auf dem Potential $\Phi = 0$ liegt (Abb. 2.8). Gesucht ist das Potential im umgebenden Raum. Wir nehmen an, daß der Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung

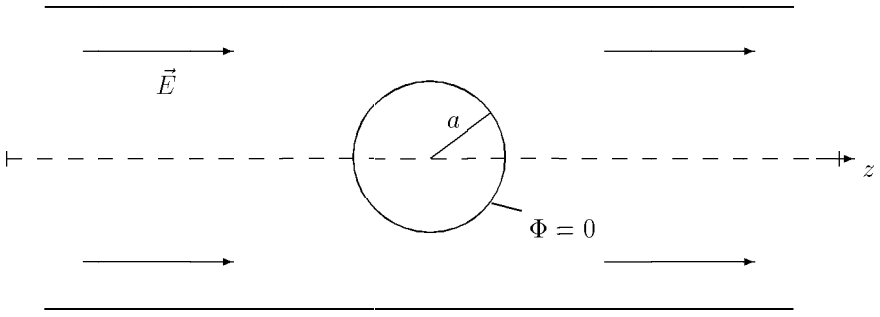


Abbildung 2.8: *Eine leitende Kugel wird in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld gebracht und auf das Potential $\Phi = 0$ gelegt.*

liegt. Es existieren hier folgende Randbedingungen:

$$\Phi(r = a) = 0 \qquad \Phi\Big|_{r\gg a} = -E_0 z = -E_0 r\cos\vartheta$$

Im Unendlichen soll also das Feld wieder homogen sein. In der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung für Kugelkoordinaten (2.58) kann man wegen der azimutalen Symmetrie $m = 0$ setzen, oder man verwendet gleich (2.48):

$$\Phi = \Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta)$$

Für sehr große r verschwindet der zweite Term in der Klammer und man bekommt

$$\Phi(r,\vartheta)\Big|_{r\to\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta) \quad . \tag{2.59}$$

Nun lauten die ersten drei Legendre-Polynome $P_l(\cos\vartheta)$ wie folgt:

$$P_0(\cos\vartheta) = 1 \qquad P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta \qquad P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1) \ ,$$

und die folgenden Terme enthalten noch höhere Potenzen von $\cos\vartheta$. Durch Vergleich mit der zweiten Randbedingung, daß nämlich das Potential im Unendlichen proportional zu $(r\cos\vartheta)$ sein soll, ergeben sich sofort (fast) alle Koeffizienten A_l:

$$A_0 = \text{const.} \qquad A_1 = -E_0 \qquad A_{l\geq 2} = 0$$

Die Konstante A_0 wird später noch bestimmt. Die erste Randbedingung ($\Phi = 0$ auf der Kugel, also bei $r = a$) liefert jetzt noch die B_l. Man hat

$$\Phi(r = a) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta) = 0 \quad . \tag{2.60}$$

Hier ist es ratsam, schrittweise die einzelnen Summanden zu untersuchen. Das ist statthaft, da die P_l ein Orthonormalsystem bilden und sich aus diesem Grund *nur trivial* zu Null kombinieren lassen, d. h. für jedes einzelne l muß der Faktor in der Klammer verschwinden.

i) $l \geq 2$. Da für $l \geq 2$ alle A_l verschwinden, müssen auch die B_l gleich 0 sein, das folgt direkt aus der Orthonormalität der P_l.

ii) $l = 1$. Hier hat man die Bestimmungsgleichung

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0 \ ,$$

woraus mit $A_1 = -E_0$ sofort $B_1 = E_0 a^3$ folgt.

iii) $l = 0$. Die Bestimmungsgleichung lautet

$$A_0 + \frac{B_0}{a} = 0 \quad .$$

Angenommen, es würde $B_0 \neq 0$ gelten. Das würde dann bedeuten, daß die Kugel an sich Ladung trüge, was nicht der Fall ist. Also ist $B_0 = 0$, und es folgt unmittelbar auch $A_0 = 0$.

Damit lautet die Lösung für das Potential in dem die Kugel umgebenden Raum:

$$\Phi(r, \vartheta) = \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) E_0 \cos\vartheta \tag{2.61}$$

Das ist offenbar die Überlagerung des unrsprünglichen Potentials (ohne Kugel) und eines Dipols, der durch Ladungsverlagerung auf der Kugeloberfläche *influenziert* wurde. Da für einen Dipol das Potential

$$\Phi_D = \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}$$

lautet, ist das auf der Kugel entstehende Dipolmoment gleich

$$\vec{p} = a^3 E_0 \, \vec{e}_z \quad .$$

Um noch weiter gehende Erkenntnisse über die Lösung von Laplace- und auch Poisson-Gleichung mit Hilfe von Legendre-Funktionen zu erhalten, untersuchen wir im folgenden die Reihenentwicklung des allgegenwärtigen $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$-Terms nach Legendre-Polynomen. Bekanntlich gilt folgende Taylor-Entwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r_> \sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} \approx \frac{1}{r_>} \left[1 + \cos\alpha \, \frac{r_<}{r_>} + \frac{1}{2} \left(3\cos^2\alpha - 1 \right) \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^2 + \ldots \right] \tag{2.62}$$

Dabei ist $r_>$ der größere, $r_<$ der kleinere der beiden Radien r und r'. Das bedeutet also, daß die Reihenentwicklung im konkreten Fall auf zwei Bereiche aufgeteilt werden muß. α ist stets der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$.

Nun sind die Taylor-Vorfaktoren innerhalb der großen Klammer genau die Legendre-Polynome $P_l(\cos\alpha)$, d. h. $1/\sqrt{1 - 2x\zeta + x^2}$ ist die *erzeugende Funktion* der Polynome $P_l(\zeta)$ [16, §22.A]. Damit folgt unmittelbar

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha) \quad . \tag{2.63}$$

Das ist zwar nicht schlecht, nützt aber noch wenig, da α lediglich einen *Zwischenwinkel* darstellt (mit einer Ausnahme: Bei der Berechnung von Potentialen rotationssymmetrischer Ladungsverteilungen *auf der Symmetrieachse* ist α tatsächlich gleich dem Polarwinkel). Man hätte aber gerne einen Ausdruck in Abhängigkeit von ϑ und ϕ, um in ordentlichen Koordinaten integrieren zu können. Hier hilft das *Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen,* das den Zusammenhang zwischen α und den Koordinaten ϑ und ϕ herstellt (zum Beweis siehe [9, Kap. 3.6], oder besser [16, §22.31*ff*]):

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\vartheta', \phi') Y_{lm}(\vartheta, \phi) \tag{2.64}$$

Die Variablen $\vartheta^{(\prime)}$ und $\phi^{(\prime)}$ sind dabei die dem Vektor $\vec{r}^{\,(\prime)}$ zugeordneten Polar- und Azimutwinkel. Damit gewinnt man die folgende Darstellung für $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \phi') Y_{lm}(\vartheta, \phi) \tag{2.65}$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall ergibt sich wieder für die azimutale Symmetrie. Hier ist stets $m = 0$, und aus (2.64) wird

$$P_l(\cos\alpha) = P_l(\cos\vartheta') P_l(\cos\vartheta) \quad .$$

2.2.5 Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten: Bessel-Funktionen

Die Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten läuft analytisch auf dieselbe Art und Weise ab wie in Kugelkoordinaten, nur daß man hier für den *Radialanteil* auf eine andere bekannte Differentialgleichung stößt und so ein anderes vollständiges Funktionensystem bekommt als die Y_{lm}. Genaueres über dieses Thema findet man in vielen Büchern über Elektrodynamik oder Differentialgleichungen (z. B. in [16] oder [9, Kap. 3.7]), so daß hier nur das Allerwichtigste Erwähnung finden soll.

Die Laplace-Gleichung lautet in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z):

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi = 0$$

Wie gewohnt probieren wir einen Separationsansatz:

$$\Phi(r, \phi, z) = R(r) Q(\phi) Z(z)$$

Mit exakt den gleichen Überlegungen wie bei den Kugelkoordinaten im vorangegangenen Abschnitt erhält man auch hier wieder drei entkoppelte partielle Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z - k^2 Z = 0 \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Q + \nu^2 Q = 0 \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} R + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} R + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0 \tag{2.68}$$

Für die ersten beiden Gleichungen lassen sich die allgemeinen Lösungen sofort aufschreiben.

$$(2.66) \quad \Rightarrow \quad Z(z) = e^{\pm kz} \text{ , mit } k > 0$$
$$(2.67) \quad \Rightarrow \quad Q(\phi) = e^{\pm i\nu\phi} \text{ , mit } \nu \in \mathbb{Z}$$

Bei (2.68) ist noch etwas Umformung nötig, um wieder eine bekannte Differentialgleichung zu bekommen. Man setzt $\kappa := kr$ und kommt so zur *Besselschen Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} R + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial \kappa} R + \left(1 - \frac{\nu^2}{\kappa^2}\right) R = 0 \tag{2.69}$$

Zum Glück sind die Lösungen dieser Gleichung — wie auch schon im "Fall Legendre" — bekannt. Es handelt sich um die *Bessel-Funktionen 1. Art* J_ν. Sie sind *nicht analytisch,* sondern nur in Form unendlicher Reihen darstellbar. Natürlich gelten auch hier wieder die üblichen Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen. Eine Besonderheit gibt es dabei allerdings. ν kann ja aus ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden, und J_ν ist dann eine Lösung von (2.69) für alle ν. Damit ist aber noch nichts über die *Unabhängigkeit* dieser Lösungen ausgesagt. In der Tat kann man zeigen, daß für $\nu \in \mathbb{Z}$ die Funktionen J_ν und $J_{-\nu}$ linear abhängig sind: $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}$. Also sucht man für solche ν alternative, unabhängige Lösungen von (2.69). Diese Funktionen sind die *Bessel-Funktionen 2. Art,* auch *Neumannsche Funktionen* N_ν genannt. Sie gehen aus den J_ν durch einen Grenzübergang hervor:

$$N_\nu(x) = \lim_{m \to \nu} \frac{J_\nu(x)\cos(m\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(m\pi)}$$

Damit läßt sich nun die Lösung für den Radialteil R der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten hinschreiben:

$$R(r) = \sum_{\nu} A_\nu J_\nu(kr) + \sum_{m} B_m N_m(kr) \tag{2.70}$$

2.2.6 Konforme Abbildungen in der komplexen Ebene

Mittels konformer Abbildungen in der komplexen Ebene ist es oft möglich, in *zwei Dimensionen* Lösungen für Potentialprobleme zu finden, die mit den bisher vorgestellten Methoden nur schwer oder überhaupt nicht angegangen werden können. Trotz der Beschränkung auf ebene Probleme findet sich in der Elektrostatik für konforme Abbildungen ein weites Anwendungsfeld.

Zunächst soll jedoch genau definiert werden, was Konformität eigentlich bedeutet.

Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *konform,* wenn gilt:

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$$

Insbesondere sind konforme Abbildungen *winkeltreu,* d. h. wenn sich in D zwei Kurven γ_1 und γ_2 im Punkt z_0 unter einem Winkel α schneiden, so tun sie das im Bildbereich ebenfalls unter α, und zwar im Punkt $f(z_0)$.

Bevor es aber mit der Anwendung konformer Abbildungen so richtig losgeht, ist es ganz nützlich, einige allgemeine Betrachtungen zu "zweidimensionalen", d. h. von einer der Raumrichtungen unabhängigen $\vec{E}$-Feldern anzustellen. Man betrachte das elektrische Feld $\vec{E} = \vec{E}(x, y)$. Es soll quellenfrei sein, d. h. $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$. Damit folgt sofort die Existenz eines Vektorpotentials $\vec{A}$ mit $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{E}$. Außerdem ist natürlich $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, also gilt die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = -\vec{\nabla}\vec{E} = 0$. Da man es mit einem rein *zweidimensionalen* Problem zu tun hat (das 3D-Analogon ist ein in z-Richtung translationssymmetrisches Problem), muß das Vektorpotential folgende Form haben:[4]

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi(x, y) \end{pmatrix}$$

Es gelten also für die Koordinaten von $\vec{E}$ folgende Bestimmungsgleichungen:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi \tag{2.71}$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\Phi = \frac{\partial}{\partial x}\Psi \tag{2.72}$$

Das sind aber genau die aus der Funktionentheorie bekannten *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen,* die für die komplexwertige Funktion

$$\omega(z) = \omega(x, y) = \Phi + i\Psi$$

Holomorphie zur Folge haben. Strapaziert man nun die Analogie zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ etwas, so ergeben sich überraschende Folgerungen.

Einerseits läßt sich das Vektorfeld $\vec{E}$ als eine Abbildung

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto E_x + iE_y$$

auffassen. Bildet man

$$\omega' = \frac{\partial}{\partial x}\Phi + i\frac{\partial}{\partial x}\Psi = -E_x + iE_y = -E^* \; ,$$

[4] Natürlich könnten statt der Nullen beliebige Funktionen von x (in der ersten Komponente) und y (in der zweiten) eingesetzt werden — in der Tat kann man zu dem angeschriebenen $\vec{A}$ *jedes Gradientenfeld* $\vec{\nabla}\lambda$ einer Skalarfunktion λ addieren, ohne daß sich $\vec{E}$ ändert. Solche Betrachtungen sollen jedoch hier außer acht gelassen werden, vor allem weil dieser Fragenkomplex im Kapitel über Potentiale und Eichungen noch ausführlich diskutiert wird (Abschnitt 4.4.2).

so wird klar, daß ω so etwas wie ein "Überpotential" zu $\vec{E}$ darstellt und gleichzeitig eine *holomorphe Funktion* ist, deren Ableitung im allgemeinen sicher nicht verschwindet. Folglich beschreibt ω — zumindest auf einigen Teilmengen von $\mathbb{C}$ — eine *konforme Abbildung.* Konforme Abbildungen sind winkeltreu. Daß sich im Bildraum von ω die Kurven $\Phi = \text{const.}$ und $\Psi = \text{const.}$ senkrecht schneiden, ist klar, denn es sind ja gerade Real- und Imaginärteil der Funktion. Aus der Konformität von ω folgt dann zwingend, daß die Kurven $\Phi(x, y) = \text{const.}$ und $\Psi(x, y) = \text{const.}$ *im Ursprungsraum ebenfalls orthogonal sind!* Die Kurven $\Phi = \text{const.}$ beschreiben bekanntlich Äquipotentiallinien, und auf diesen senkrecht stehen die *Feldlinien* von $\vec{E}$. Also legen die Kurven $\Psi(x, y) = \text{const.}$ genau den Feldlinienverlauf des $\vec{E}$-Feldes fest!

Beispiel für konforme Abbildungen: Linienladung in metallischer Ecke

Als Anwendungsbeispiel für die Leistungsfähigkeit konformer Abbildungen zur Lösung von Randwertproblemen soll hier das Problem einer 2D-Punktladung (d. h. einer 3D-Linienladung) diskutiert werden, die symmetrisch in einer metallischen Ecke sitzt, und zwar mit einem Abstand von $\sqrt{a/2}$ von jeder Wand. Beide Wände sind unendlich ausgedehnt und das Metall liegt auf Nullpotential (Abb. 2.9 links). Gesucht ist das Potential im Raum vor der Ecke. Es handelt sich um ein zweidimensionales Problem,

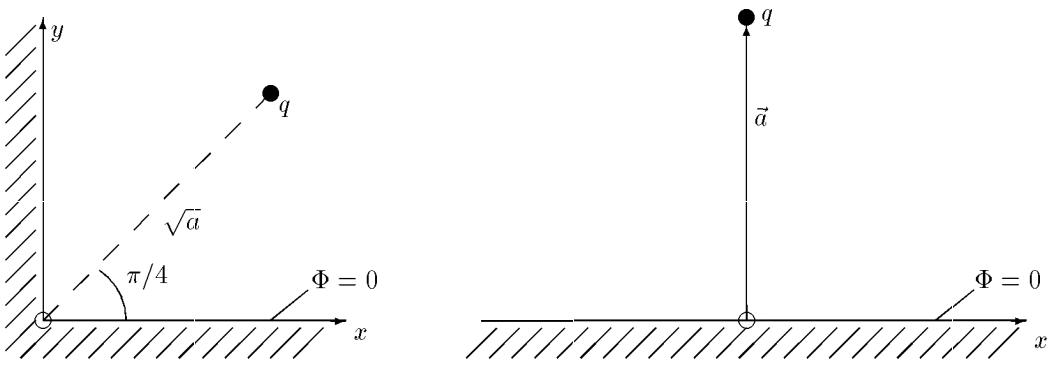


Abbildung 2.9: *Anwendungsbeispiel für die konforme Abbildung* $z \mapsto z^2 =: z'$. *Links ursprüngliches, rechts transformiertes Problem.*

das man auch mit den üblichen Methoden (mehrfache Spiegelladungen, siehe unten) lösen könnte. Wir versuchen es hier aber mit einer konformen Abbildung, die die gegebene Geometrie in eine einfachere transformiert. Eine solche Abbildung kann man oft durch intelligentes Probieren finden. In diesem Fall bietet sich z. B. die Transformation $z \mapsto z^2 =: z'$ an, die aus dem $\pi/4$-Winkel einen rechten Winkel werden läßt (Abb. 2.9 rechts). Diese Abbildung ist konform in allen Punkten mit Ausnahme des Nullpunktes, was man verschmerzen kann. Das Problem einer Linienladung (in zwei Dimensionen also einer *Punktladung*) vor leitender Ebene ist aber mit Hilfe einer einfachen Spiegelladung leicht zu lösen. Jetzt wird auch die Wahl des Abstandes $\sqrt{a}$ deutlich.

Das Potential einer unendlichen Linienladung geht mit dem Logarithmus des Abstandes, wobei man sich einen beliebigen Nullpunkt aussuchen darf — nur nicht im Unendlichen oder direkt auf der Ladung. Es gibt mehrere Wege, um das einzusehen. Einer führt über eine Differentialgleichung für den Radialteil von ψ, dem Potential *einer* 2D-Punktladung. Das $\vec{E}$-Feld darf außerhalb der Ladung keine Quellen haben, also setzt man den Radialanteil der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten gleich 0:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\psi\right) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\psi + \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\psi = -\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi$$

Die allgemeine Lösung für ψ ist dann

$$\psi = A \ln\frac{\rho}{\rho_0} \quad .$$

Die Konstante ρ_0 bestimmt den Potentialnullpunkt, und jetzt ist klar, daß dieser in endlichem Abstand von der Ladung liegen muß. Um A zu bestimmen, muß man sich die 2D-Punktladung q trotz allem als Linienladung vorstellen, und zwar mit einer Linienladungsdichte λ. *Dieses λ und q haben die gleiche Einheit,* nämlich $\left[\frac{\text{esE}}{\text{cm}}\right]$, weil es eben die *gleichen Größen* sind, nur jeweils in drei bzw. zwei Dimensionen. Legt man nun einen imaginären Zylinder mit Radius ρ und Länge l konzentrisch um die Linienladung,

so erkennt man unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (analog zum Beispiel der geladenen Kugel auf Seite 16), daß das $\vec{E}$-Feld durch

$$\vec{E}(\rho) = \frac{2\lambda}{r}\,\vec{e}_\rho$$

gegeben ist. Durch eine einfache Integration mit ρ_0 als unterer Grenze (und unter Beachtung von $\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi$) bekommt man dann $A = -2q$. Zusammen mit der Spiegelladung lautet also die Lösung für das gesuchte Potential

$$\Phi(\vec{r}\,') = -2q\Big[\underbrace{\ln|\vec{r}\,' - \vec{a}|}_{\text{Originalladung}} - \underbrace{\ln|\vec{r}\,' + \vec{a}|}_{\text{Spiegelladung}}\Big] \text{ , mit } \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

Der Strich an den Koordinaten deutet an, daß man sich im "transformierten" Raum bewegt. Um nun in das ursprüngliche Problem zu schalten, schreibt man das Potential als komplexe Funktion

$$\omega(z') = -2q\left[\ln(z' - ia) - \ln(z' + ia)\right] \ ,$$

und ist sich darüber im klaren, daß $\Re\omega = \Phi$. Die Rücktransformation erfolgt jetzt einfach durch Ersetzen von z' durch $z^2 = (x+iy)^2$, und das gesuchte Potential lautet dann endgültig

$$\Phi = \Re\omega(z^2) = -2q\ln\left|\frac{(x+iy)^2 - ia}{(x+iy)^2 + ia}\right| \quad . \tag{2.74}$$

Natürlich läßt sich durch mutiges Einsetzen und konsequentes Nicht-Verrechnen bestätigen, daß tatsächlich $\Delta\Phi = 0$ erfüllt ist.

Sieht man sich das Potential (2.74) noch einmal genauer an, so bemerkt man, daß es zwar im interessanten Bereich ($\Re z,\, \Im z > 0$) den erwarteten Pol gibt (bei $z_0 = \sqrt{a/2} + i\sqrt{a/2}$), jedoch in den anderen drei Quadranten symmetrisch auch noch Pole existieren. Dabei ergeben die Nullstellen des Zählers im Argument des Logarithmus positive, die des Nenners negative Pole (bei $z_0^*,\, -z_0,\, -z_0^*$). Somit wird deutlich, daß man die Randbedingungen auch mittels der Einführung dreier Spiegelladungen geeigneter Polarität hätte erfüllen können.

2.3 Multipolentwicklungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß man sich das elektrostatische Potential jeder Ladungsverteilung als eine Überlagerung bestimmter "Elementarpotentiale" vorstellen darf. In gewisser Weise ähnelt diese Vorgehensweise der Entwicklung einer Funktion in eine Taylor-Reihe (die Analogie sollte aber über die reine Ähnlichhkeit hinaus nicht strapaziert werden).

Man betrachte eine Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, die räumlich um den Nullpunkt *lokalisiert* sei, d. h. es existiert eine Kugel mit endlichem Radius R, Volumen V, und Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems, in der die gesamte Ladung $Q = \int \rho\, d^3r$ enthalten ist: $\rho(\vec{r}) = 0 \quad \forall r > R$. Das Potential im gesamten Raum errechnet sich bekanntlich zu

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' \quad . \tag{2.75}$$

Um in der Terminologie der Kugelflächenfunktionen zu sprechen, seien jetzt:

$$r_< := |\vec{r}\,'| \qquad\qquad r_> := |\vec{r}\,|$$

Diese Wahl ist aufgrund der oben getroffenen Beschränkung für $\rho(\vec{r})$ berechtigt, solange man sich außerhalb der Kugel befindet, was im folgenden stets der Fall sei. Aus (2.65) bekommt man so zunächst einen Ausdruck für $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\, Y_{lm}^*(\vartheta', \phi')Y_{lm}(\vartheta, \phi) \tag{2.76}$$

Wenn man dies in die Potentialformel (2.75) einsetzt und zusammenfaßt, dann erhält man bereits die *Multipolentwicklung* des Potentials Φ:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} Y_{lm}(\vartheta,\phi) \frac{1}{r^{l+1}} \text{ , mit } q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta',\phi') r'^l \rho(\vec{r}')\, d^3r' \tag{2.77}$$

Die q_{lm} heißen *Multipolmomente* der Verteilung $\rho(\vec{r})$. Die erste der beiden Summen in (2.77) enthüllt nach einer gliedweisen Betrachtung das "Wesen" der Multipole:

i) $l = 0 \Rightarrow m = 0$. Es folgt

$$q_{00} = \int Y_{00}^*(\vartheta',\phi') r'^0 \rho(\vec{r}')\, d^3r' \quad .$$

Nun ist aber $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, also wird

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\vec{r}')\, d^3r' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \quad .$$

q_{00} ist das *Monopolmoment* einer Ladungsverteilung mit der Gesamtladung Q.

ii) $l = 1$. Hier bleiben für m die Möglichkeiten $m \in \{-1, 0, 1\}$, über die dann summiert wird (zweite Summe!). Im folgenden benötigen wir die Beziehung zwischen den Kugelflächenfunktionen mit positivem und negativem m, (2.56). Da die Y_{lm}^* in (2.77) schön linear unter dem Integral stehen, gilt also auch

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^* \quad . \tag{2.78}$$

Zunächst betrachten wir die Fälle $m = -1$ und $m = 1$. Die zugehörigen Kugelflächenfunktionen lauten

$$Y_{1,-1}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{i\phi} \qquad Y_{11}^* = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{-i\phi} \text{ ,}$$

und damit bekommt man für die beiden Multipolmomente

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int r' \sin\vartheta' e^{i\phi'} \rho(\vec{r}')\, d^3r' \qquad q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int r' \sin\vartheta' e^{-i\phi'} \rho(\vec{r}')\, d^3r' \quad . \tag{2.79}$$

Im Fall $m = 0$ ist es noch einfacher. Hier gilt

$$Y_{10}^* = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underbrace{P_1(\cos\vartheta)}_{=\cos\vartheta} \qquad \Longrightarrow \qquad q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int r' \cos\vartheta' \rho(\vec{r}')\, d^3r' \quad . \tag{2.80}$$

Die Zahlen q_{10}, $q_{1,-1}$ und q_{11} heißen *sphärische Dipolmomente* der Ladungsverteilung ρ. Daß es genau drei sind, ist kein Zufall: sie legen nämlich einen Tensor erster Stufe, also einen *Vektor* fest. Dies allerdings nicht direkt, sondern nur als Bestimmungsstücke. Um das zu verifizieren, betrachten wir die Beziehung der sphärischen zu den *kartesischen* Momenten p_x, p_y und p_z, unter denen man sich dann doch etwas Konkretes vorstellen kann ($\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ könnte man aus Konsistenzgründen (s. u.) als "Dipoltensor" bezeichnen). Es gelten nämlich folgende Zerlegungen:

$$\begin{aligned}
q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int r' \sin\vartheta' e^{-i\phi'} \rho(\vec{r}')\, d^3r' = \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy')\, \rho(\vec{r}')\, d^3r' =: -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \\
q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int r' \cos\vartheta' \rho(\vec{r}')\, d^3r' = \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\vec{r}')\, d^3r' =: \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \\
q_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int r' \sin\vartheta' e^{i\phi'} \rho(\vec{r}')\, d^3r' = \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' + iy')\, \rho(\vec{r}')\, d^3r' =: \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y)
\end{aligned}$$

Die sphärischen Dipolmomente sind also mit den kartesischen durch Linearkombinationen verknüpft: Wenn die einen bekannt sind, dann sind es auch die anderen.

Man erkennt hier auch die starke Ähnlichkeit der kartesischen Dipolmomente mit den Schwerpunktskoordinaten einer Massenverteilung (es wird nur nicht durch die Gesamtladung dividiert). Und das führt zu einem wichtigen Punkt: Es ist immer möglich, das Koordinatensystem so zu wählen, daß das Dipolmoment *verschwindet,* vorausgesetzt, die Gesamtladung $Q = \int \rho\, d^3r$ ist ungleich Null (um den Verschiebungsvektor zu bekommen, muß man eben doch — wie beim Schwerpunkt — durch Q teilen, und dazu muß $Q \neq 0$ sein).[5]

iii) $l = 2$. Die fünf Möglichkeiten bei $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ liefern die *sphärischen Quadrupolmomente* der Ladungsverteilung, und diese sind die Bestimmungsgrößen für den *Quadrupoltensor* (Q_{ij}). Dieser Tensor zweiter Stufe ist einerseits symmetrisch (siehe später bei der Taylor-Entwicklung des Potentials). Auf der anderen Seite gibt es für m wie erwähnt fünf Möglichkeiten, ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe hat jedoch *sechs* freie Plätze. Es wird sich weiter unten herausstellen, daß diese Diskrepanz durch das Verschwinden der Spur, $\mathrm{Sp}(Q_{ij}) = 0$, ausgeglichen wird.

iv-∞) $l \geq 3$. Für jedes l in diesem Bereich bekommt man $2l + 1$ sphärische Dipolmomente, die wieder als Bestimmungsstücke für Multipoltensoren l-ter Stufe betrachtet werden können (diese heißen dann *Oktupol-, Hexadekupol-* usw. Tensoren). Die Ausdrücke hierfür werden aber sehr schnell sehr unangenehm, sowohl in sphärischen als auch in kartesischen Koordinaten. Im allgemeinen geht man bei einer Multipolentwicklung nicht über den Quadrupoltensor hinaus.

Um einen endgültigen Überblick über den Zusammenhang von sphärischen mit kartesischen Multipolmomenten zu bekommen, betrachte man die schon aus (2.62) bekannte Taylor-Entwicklung des Potentials (2.75) und beachte, daß $|\vec{r}| > |\vec{r}\,'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(2\frac{\vec{r}\vec{r}\,'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2}\right)}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}\,'}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{r}\,')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \ldots \tag{2.81}$$

$$\Longrightarrow \qquad \Phi(\vec{r}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(\vec{r})$$

Die einzelnen Terme dieser Entwicklung liefern jetzt sofort die kartesischen Multipolmomente und die zugehörigen Multipolpotentiale:

i)

$$\Phi_0 = \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho(\vec{r}\,')\, d^3r'}_{=Q}$$

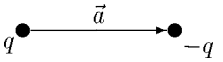
heißt *Monopol-Potential* der Ladungsverteilung. Es entspricht genau dem Summanden für $l = 0$ in der Entwicklung (2.77).

ii)

$$\Phi_1 = \frac{\vec{r}}{r^3} \underbrace{\int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\, d^3r'}_{=\vec{p}} = \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} \tag{2.82}$$

ist das *Dipolpotential,* und $\vec{p}$ ist der Vektor des *Dipolmomentes* der Ladungsverteilung (korrekterweise müßte man sagen: Bei den Koordinaten von $\vec{p}$ handelt es sich um die kartesichen Dipolmomente; überhaupt sollte immer der Zusatz "kartesisch" bzw. "sphärisch" angegeben werden).

Beispiel: Man betrachte zwei Punktladungen q und $-q$ im Abstand a symmetrisch zum Ort $\vec{r}\,'$:



$$\rho(\vec{r}\,') = q\left[\delta(\vec{r}\,' - \tfrac{1}{2}\vec{a}) - \delta(\vec{r}\,' + \tfrac{1}{2}\vec{a})\right]$$

[5] Dies ist nur ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes: Das auf das erste nicht verschwindende Multipolmoment folgende Moment kann durch eine Koordinatentransformation *stets* zu Null gemacht werden.

Damit wird

$$\vec{p} = q \int \vec{r}\,' \left[\delta(\vec{r}\,' - \frac{1}{2}\vec{a}) - \delta(\vec{r}\,' + \frac{1}{2}\vec{a}) \right] d^3r' = q \left[\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a}}{2} \right] = q\vec{a} \quad .$$

Rücken die beiden Ladungen "unendlich nahe" aneinander und geht gleichzeitig q gegen unendlich, so daß $|\vec{p}|$ erhalten bleibt, dann hat man praktisch einen *Punktdipol* erzeugt. Das ist auf folgende Weise einzusehen:

$$\Phi(\vec{r}) = q \left[\frac{1}{|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{a}|} \right] \overset{a \to 0}{\approx} -qa \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$$

iii) Jetzt kommt endlich der interessante Teil: das *Quadrupolpotential.* Im folgenden beachte man die Einstein-Summenkonvention!

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2r^5} \int \left[3(\vec{r}\vec{r}\,')^2 - r^2 r'^2 \right] \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' = \tag{2.83}$$

$$= \frac{1}{2r^5} Q_{ij} x_i x_j \tag{2.84}$$

Die Frage ist nun, wie der *Quadrupoltensor* (Q_{ij}) genau aussieht. Dazu multipliziert man den Integranden von (2.83) in Koordinaten aus und ordnet nach den ungestrichenen Variablen, so daß die Summe (2.84) aufgeschrieben werden kann. Man erhält auf diese Weise

$$\left[3(\vec{r}\vec{r}\,')^2 - r^2 r'^2 \right] = \mathcal{Q}_{ij} x_i x_j \ , \text{ mit } \mathcal{Q}_{ij} = 3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2 \quad .$$

Um jetzt Q_{ij} zu bekommen, muß man nur noch $\mathcal{Q}_{ij}$ mit $\rho(\vec{r}\,')$ multiplizieren und über d^3r' integrieren, wie es (2.83) vorschreibt:

$$Q_{ij} = \int \mathcal{Q}_{ij} \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' = \int \left(3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2 \right) \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' \tag{2.85}$$

Sofort erkennt man hier die wichtigste Eigenschaft des Quadrupoltensors: seine *Symmetrie* ($\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}$). Das hat aber zur Folge, daß dieser Tensor durch eine Hauptachsentransformation mittels einer unitären Matrix stets *diagonalisierbar* ist: $\exists \underline{\underline{U}} : \underline{\underline{Q}}_D = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{U}}$. Die Spaltenvektoren von $\underline{\underline{U}}$ sind dabei die (normierten) Eigenvektoren von $\underline{\underline{Q}}$.

Außerdem ist (Q_{ij}) ganz offensichtlich *spurlos,* wie man durch bilden der Summe Q_{ii} leicht erkennt. Damit ist das oben bereits erwähnte Ergebnis exakt hergeleitet: Zur eindeutigen Bestimmung des Quadrupoltensors genügen *fünf* Größen, die anderen vier sind dann festgelegt. Nun läßt sich auch leicht überprüfen, daß im Beispiel der beiden Punktladungen der Quadrupoltensor verschwindet, wenn man $\vec{r}\,' = 0$ setzt. Dabei kommt es *nicht* auf die Orientierung des Dipolvektors $\vec{p}$ an. Der Vollständigkeit halber seinen hier noch die Beziehungen zu den sphärischen Quadrupolmomenten angegeben:

$$\begin{aligned}
q_{22} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int \rho(\vec{r}\,') r'^2 \sin^2\vartheta' \,(\cos\phi' - i\sin\phi')^2 d^3r' = \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int \rho(\vec{r}\,')(x' - iy')^2 d^3r' = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \\
q_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}\,') r'^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta' \,(\cos\phi' - i\sin\phi')\, d^3r' = \\
&= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}\,') z'(x' - iy')\, d^3r' = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13} - iQ_{23}) \\
q_{20} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int \rho(\vec{r}\,') r'^2 (3\cos\vartheta' - 1)\, d^3r' = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int \rho(\vec{r}\,')(3z'^2 - r'^2)\, d^3r' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33} \\
q_{2,-1} &= -q_{21}^* \\
q_{2,-2} &= q_{22}^*
\end{aligned}$$

Die Enwicklung des Potentials nach Multipolmomenten bis zum Quadrupol ist also schließlich gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} Q_{ij} x_i x_j + \dots \tag{2.86}$$

Zur Veranschaulichung des Gelernten betrachte man noch einmal das Beispiel der metallischen Kugel im homogenen $\vec{E}$-Feld auf Seite 26. Die dort gefundene Lösung für das Potential kann auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\Phi = -E_0 \cos\vartheta \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) = \underbrace{-\vec{E}_0 \vec{r}}_{\text{äuß. Pot.}} + \frac{\overbrace{(\vec{E}_0 a^3)}^{\text{Dipol}} \vec{r}}{r^3}$$

Das Potential setzt sich also zusammen aus dem Anteil *ohne* Kugel und einem Dipolterm, der durch das Dipolmoment $\vec{p} = \vec{E}_0 a^3$ hervorgerufen wird. Dieses Moment müßte man aber auch durch Integration über die Ladungsdichte nach (2.82) bekommen. Die Flächenladungsdichte auf der Kugeloberfläche (nur dort gibt es Ladungen) lautet

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E(r=a) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}\Phi \Big|_{r=a} = \frac{1}{4\pi} \left[E_0 \cos\vartheta + 2E_0 \cos\vartheta \frac{a^3}{a^3} \right] = \frac{3E_0}{4\pi} \cos\vartheta \ ,$$

denn an der Oberfläche steht das Feld radial und verschwindet im Inneren der Kugel. Die *Raumladungsdichte* ist also dann $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(r-a)$.[6] Damit ergibt sich für die $z-$Koordinate des Dipolmomentes

$$p_z = \int z' \rho(\vec{r}\,') \, d^3r' = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r' \cos\vartheta' \, \frac{3E_0}{4\pi} \cos\vartheta' \, \delta(r'-a) \, r'^2 \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\phi' \, dr' = E_0 a^3,$$

wie es zu erwarten war. Die anderen Koordinaten von $\vec{p}$ verschwinden, was man leicht nachrechnet.

2.4 Elektrostatik der Dielektrika

In diesem Abschnitt wird das Verhalten stationärer elektrischer Felder in Materie untersucht. An diese Materie sollen dabei folgende Bedingungen gestellt sein:

- Es findet kein Stromfluß im Material statt.
- Anders als in Metallen soll das elektrische Feld innerhalb des Materials im allgemeinen nicht verschwinden.
- Die Materie kann *polarisiert* sein (s. u.), jedoch soll die Gesamtladung unverändert bleiben.

Von dieser Materie kann man sich somit ein höchst einfaches Bild machen, das aber zur Erklärung vieler Phänomene dienen kann (Abb. 2.10).

2.4.1 Polarisation

Wir betrachten im folgenden zunächst nur Elementar*dipole*. Wenn die Dipole statistisch verteilt gerichtet sind, so bleibt im Mittel (nach außen) kein Feld übrig, das durch die Dipole hervorgerufen sein könnte. Anders verhält es sich bei Ausrichtung der Dipole in einem äußeren Feld (Abb. 2.10 rechts). Um das mathematisch zu fassen, definiert man zunächst den Vektor

$$\vec{P}(\vec{r}) \ := \sum_i N_i \langle \vec{p}_i \rangle \ , \tag{2.87}$$

[6] Durch die Dirac-Funktion bekommt man noch einmal die Einheit L^{-1}, also stimmt das mit den Einheiten.

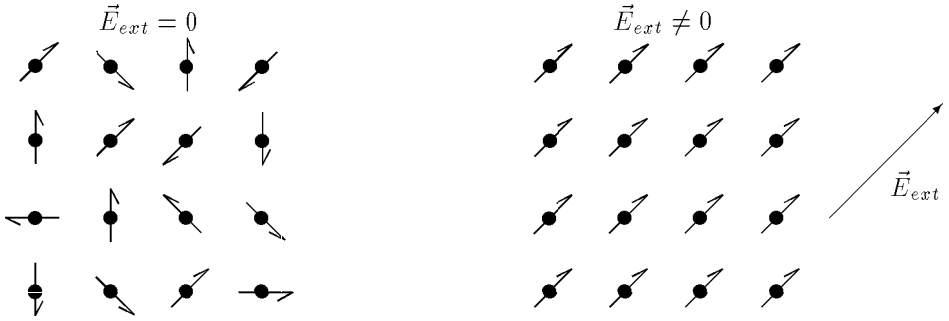


Abbildung 2.10: *Ein einfaches Modell für polarisierbare Materie. Ohne äußeres Feld $\vec{E}_{ext}$ stehen die Elementardipole ungeordnet (links). Im angelegten $\vec{E}_{ext}$-Feld werden sie ausgerichtet.*

der *Polarisationsvektor* oder auch *Polarisationsdichtevektor* genannt wird. Gleichung (2.87) beschreibt eine *lokale Mittelung* über die mikroskopischen Dipolmomente $\vec{p}_i$, wobei der Index i eine bestimmte Ausprägung des Dipols, z. B. eine Molekülart, bezeichnet. Die Zahl N_i ist die Anzahl der Elementardipole dieser Art in einem kleinen Volumenelement am Ort $\vec{r}$, und $\langle \vec{p}_i \rangle$ beschreibt die Mittelung der Dipolmomente eines Typs über dieses kleine Volumen. Die Summe faßt dann nur noch alle verschiedenen Dipole am Ort $\vec{r}$ zusammen.

Man betrachte nun die Situation nicht verschwindender Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und einer vorhandenen Polarisation $\vec{P}$. Der Beitrag eines kleinen Volumenstückes dV am Ort $\vec{r}\,'$ zum Gesamtpotential setzt sich dann zusammen aus den Potentialen der Ladungsdichte und der Polarisation:

$$d\Phi(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV + \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dV$$

Durch Integration über alle Polarisations- und Ladungsdichten bekommt man dann also

$$\Phi(\vec{r}) = \int \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \vec{P}(\vec{r}\,') \vec{\nabla}_{r'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \right] d^3r' \overset{p.I.}{=} \int \underbrace{\left[\rho(\vec{r}\,') - \vec{\nabla}_{r'} \vec{P}(\vec{r}\,') \right]}_{=:\tilde{\rho}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' \,, \qquad (2.88)$$

wobei man $\tilde{\rho}$ als eine *neue Ladungsverteilung* betrachten kann: Das Integral ist ja von der Form einer Lösung für die Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\tilde{\rho}$. Den neu hinzugekommenen Anteil

$$\rho_p := -\vec{\nabla}\vec{P}$$

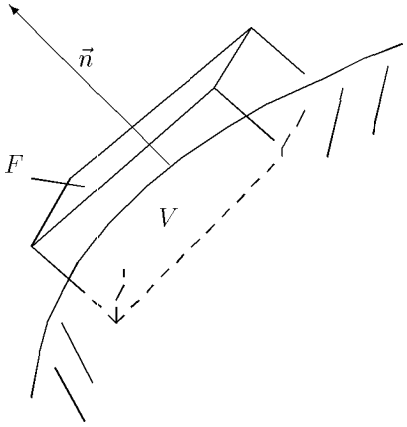
bezeichnet man als *Polarisationsladungsdichte*. Es läßt sich nun zeigen, daß ρ_p zum Monopolanteil des resultierenden Gesamtpotentials keinen Beitrag liefert. Man betrachte ein räumlich begrenztes Dielektrikum, das vollständig in einem Volumen V enthalten ist. Außerhalb der Materie herrsche Vakuum, dann ist dort offensichtlich $\vec{P} = 0$. Integration über den Rand des Volumens ergibt

$$\int_{\partial V} \vec{P}\, d\vec{F} = \int_V \vec{\nabla}\vec{P}\, dV = -\int_V \rho_p dV = 0 \,,$$

da es auf ∂V ja keine Polarisation geben soll. Also liefert ρ_p keinen Beitrag zum Monopolpotential.

Wenn ρ_p durch die Ausrichtung von Elementardipolen entstehen soll, dann lohnt eine genauere Untersuchung der Effekte am *Rand* eines Dielektrikums. Wir betrachten ein kleines, flaches Volumen V, von dem zwei gegenüberliegende Seiten der Fläche F jeweils innerhalb bzw. außerhalb der Materie liegen sollen (Abb. 2.11). Die Größe σ_p ist die durch die Polarisation an der Oberfläche erzeugte *Flächenladungsdichte,* deshalb geht auch das Integral über σ_p nur über F. Auf einer kleinen Fläche kann man die Polarisation (und damit auch ihre Normalkomponente) als konstant betrachten, deshalb läßt sich das letzte Integral einfach zu $\vec{P}\vec{n}F$ auflösen. Außerhalb ist $\vec{P} = 0$, also kann man sagen, daß mit einer polarisationsbedingten Oberflächenladung stets ein *Sprung in der Polarisation* einhergeht.

Hat nun die Einführung der Polarisation auch auf die Maxwell-Gleichungen Auswirkungen? Oder: Ist es vielleicht möglich, die Polarisation dort irgendwie "einzuarbeiten"? Die Antwort auf diese Fragen



$$\Rightarrow \int_V \rho_p(\vec{r}\,')\, d^3r' = \int_F \sigma_p\, dF = \\ = -\int_V \vec{\nabla}\vec{P}(\vec{r}\,')\, d^3r' = -\int_{\partial V} \vec{P}\vec{n}\, dF = \\ = \vec{P}\vec{n}F$$

Abbildung 2.11: *Randeffekte bei polarisierter Materie.*

ergibt sich aus einer Untersuchung des *elektrischen Feldes,* das durch das oben ausgedrückte Potential beschrieben wird. Es gilt $\vec{\nabla}\vec{E} = -\Delta\Phi$. Aus (2.88) weiß man, daß

$$\Phi(\vec{r}) = \int \left[\rho(\vec{r}\,') - \vec{\nabla}_{r'}\vec{P}\right] \frac{d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad .$$

Nun ist also wegen $\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$:

$$-\Delta\Phi = \vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi \int \left[\rho(\vec{r}\,') - \vec{\nabla}_{r'}\vec{P}\right] \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, d^3r' = 4\pi\left[\rho - \vec{\nabla}\vec{P}\right]$$

Die "alte" Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho$ kann also nun durch einen *Polarisationsterm* ergänzt werden:

$$\vec{\nabla} \underbrace{\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right)}_{=:\vec{D}} = 4\pi\rho \tag{2.89}$$

Mit ρ sind hier natürlich *nur freie* Ladungen bezeichnet — die Polarisationsladungsdichte steckt ja in $\vec{\nabla}\vec{P}$. Der Vektor $\vec{D}$ heißt *Verschiebungsdichte.* Somit bekommt man also eine neue, um die Polarisation erweiterte Maxwell-Gleichung:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho \text{ , mit } \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

2.4.2 Randbedingungen für die Felder der Elektrostatik

Zusammen mit der schon bekannten Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ lassen sich daraus wichtige Folgerungen für das Verhalten von Feldern an Randflächen ziehen. Im folgenden steht der hochgestellte Index "^{i}" für das Feld innerhalb (bzw. auf einer Seite), der Index "^{a}" für das Feld außerhalb (bzw. auf der anderen Seite) der Grenzfläche zwischen zwei Medien. Die tiefgestellten Buchstaben "$_{tg}$" bezeichnen den zur Grenzfläche tangentialen Anteil eines Feldes, und mit "$_n$" ist die Normalkomponente gemeint.

i) Aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ folgt direkt

$$E^a_{tg} = E^i_{tg} \quad .$$

Die *Tangentialkomponente* von $\vec{E}$ (also $\vec{E} \times \vec{n}$, wenn $\vec{n}$ eine Flächennormale bezeichnet) ist also an einer Grenzfläche stetig!

ii) Aus $\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho$ folgt

$$D^a_n - D^i_n = 4\pi\sigma \text{ ,}$$

wobei σ eine an der Grenzfläche sitzende *Oberflächenladungsdichte* darstellt. Damit ist aber *nicht* die durch Polarisationssprünge erzeugte Ladung gemeint, sonder nur externe, d. h. freie Ladung. Üblicherweise (man hat es oft mit Isolatoren zu tun) ist $\sigma = 0$, und damit ist dann die *Normalkomponente* von $\vec{D}$ (also $\vec{D}\vec{n}$) an der Grenzfläche stetig!

2.4.3 Freundliche Vereinfachungen

Um in der Praxis mit Dielektrika überhaupt rechnen zu können, machen wir hier einige vereinfachende Annahmen, die aber — zumindest für schwache Felder — meist brauchbare Ergebnisse liefern.

i) *Lineare Response* des Materials. Es sollen die Beziehungen

$$\vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r})\vec{E} \text{ , und } \vec{P} = \underline{\underline{\chi}}_e(\vec{r})\vec{E} \tag{2.90}$$

gelten, wobei die Tensoren $\underline{\underline{\epsilon}}$ (*Dielektrizität*) und $\underline{\underline{\chi}}_e$ (*elektrische Suszeptibilität*) nicht von $\vec{E}$ abhängen (dies wäre bei *ferroelektrischen* Materialien der Fall). Zwischen den beiden Tensoren besteht offensichtlich die Beziehung

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{1}} + 4\pi\underline{\underline{\chi}}_e \quad .$$

ii) *Isotropie* des Materials. Die Forderung, daß $\underline{\underline{\epsilon}}$ und $\underline{\underline{\chi}}_e$ Tensoren sein sollen, wird jetzt auch noch fallengelassen und die Größen werden durch Skalare (bzw. Einheitstensoren multipliziert mit Skalaren) ersetzt.

iii) *Homogenität* des Materials. Die Dielektrizitäts- und Suszeptibilitätskonstanten sollen ortsunabhängig sein. Die Maxwell-Gleichung für $\vec{D}$ vereinfacht sich damit zu

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\frac{\rho}{\epsilon} \quad .$$

Damit läßt sich arbeiten.[7] Es folgen einige Beispiele.

2.4.4 Beispiele

Plattenkondensator, verschärft

Wir betrachten eine kompliziertere Version des bekannten Plattenkondensators ohne Randeffekte (Abb. 2.12 links). Zwischen zwei Platten der Fläche F befindet sich eine dielektrische Schicht der Dicke d, die jedoch den Kondensator nicht ganz ausfüllt. Stattdessen besteht auf beiden Seiten noch ein Zwischenraum der Breite d_1. Aufgrund der von außen angelegten Spannung U liegt die obere Platte auf

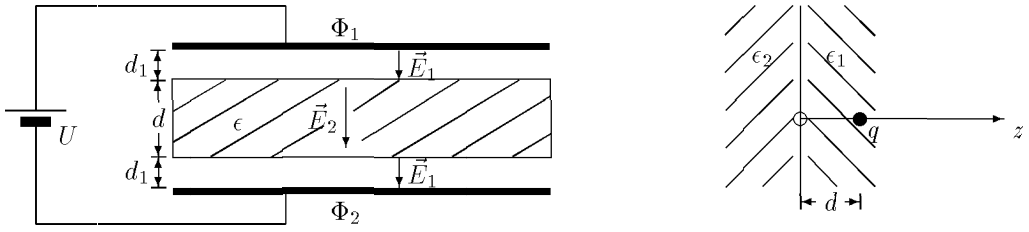


Abbildung 2.12: *Beispiele zur Elektrostatik der Dielektrika: Links Plattenkondensator mit Dielektrikum, rechts Punktladung nahe der Grenze zwischen zwei Medien.*

dem Potential Φ_1, die untere auf Φ_2. Wir bezeichnen mit $\vec{E}_0$ das elektrische Feld, das im Kondensator *ohne* Dielektrikum vorhanden wäre (da die Feldvektoren sowieso nur eine Komponente haben, werden Vektorpfeile weggelassen):

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = (2d_1 + d)E_0 = 2d_1E_1 + dE_2$$

[7] Die allgemeinste lineare Beziehung zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ ist durch die *allgemeine lineare Response* gegeben:

$$D_\alpha(\vec{r},t) = \sum_{\beta=1}^{3}\int \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}',t,t')E_\beta(\vec{r}',t')\,d^3r'dt'$$

Diese Gleichung bezieht sowohl Zeitverzögerungen als auch jede Art von Orts- und Richtungsabhängigkeit mit ein.

Wie stark sind nun die Felder $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$? Aus der Stetigkeit der Normalkomponente des $\vec{D}$-Feldes an den Grenzflächen Vakuum/Dielektrikum folgt

$$E_1 = \epsilon E_2 \quad \Rightarrow \quad U = E_1(2d_1 + \frac{d}{\epsilon}) = (2d_1 + d)E_0 \quad \Longrightarrow \quad E_1 = \frac{2d_1 + d}{2d_1\epsilon + d}\epsilon E_0 \ ,$$

und damit ist auch E_2 bekannt. Folgende Grenzfälle sind hier relevant:

i) $d_1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \epsilon E_0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_0$.

ii) $d \to 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_0/\epsilon$.

Die polarisationsbedingte Oberflächenladungsdichte auf dem Dielektrikum errechnet sich zu

$$\sigma_p = P_n = \frac{1}{4\pi}(E_1 - E_2) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}E_2 = \chi_e E_2 \ ,$$

was im Grenzfall des aufgefüllten Kondensators in $\chi_e E_0$ übergeht. Die Flächenladungsdichte auf den Kondensatorplatten ist gleich

$$\frac{Q}{F} = \sigma = \frac{E_1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\frac{U}{2d_1 + d/\epsilon} = \frac{U\epsilon}{4\pi(2d_1\epsilon + d)} \ ,$$

und das wird wieder zu $\frac{U\epsilon}{4\pi d}$, falls d_1 verschwindet. Die Kapazität des Kondensators ergibt sich dann zu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon F}{4\pi d} \ ,$$

also genau dem ϵ-fachen des Vakuum-Kondensators.

Punktladung im dielektrischen Halbraum

In diesem Beispiel wird der Potentialverlauf untersucht, der sich einstellt, wenn eine Punktladung q sich innerhalb eines Dielektrikums (ϵ_1) befindet, und zwar im Abstand d zu einem zweiten Dielektrikum (ϵ_2). Die beiden Materialien sollen jeweils die Halbräume $z > 0$ und $z < 0$ ausfüllen (Abb. 2.12 rechts). Die Ladungsverteilung wird also beschrieben durch

$$\rho = q\delta(\vec{r} - \vec{d}) \ , \text{ mit } \vec{d} = d\vec{e}_z \quad .$$

Da wir annehmen, daß wir es mit einfachen Dielektrika zu tun haben (siehe Abschnitt 2.4.3), können wir für die beiden Halbräume folgende Feldgleichungen aufstellen:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_1} 4\pi\rho & \text{für } z > 0 \\ \frac{0}{\epsilon_2} = 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \tag{2.91}$$

Die Stetigkeitsbedingungen für elektrische Felder an der Grenzfläche bilden in diesem Problem die Randbedingungen. Sie lauten

$$\lim_{z\to 0+} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ \epsilon_1 E_z \end{pmatrix} = \lim_{z\to 0-} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ \epsilon_2 E_z \end{pmatrix} \quad . \tag{2.92}$$

Um einen Ansatz für das Potential zu bekommen, wendet man hier für das Gebiet $z > 0$ den schon bekannten Trick mit der Spiegelladung im Abstand d auf der *anderen* Seite der Grenzfläche an — nur darf man hier nicht erwarten, daß die Spiegelladung auch noch gleich $-q$ ist:

$$\Phi\Big|_{z>0} = \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}|} - \frac{q'}{|\vec{r} + \vec{d}|}\right) \overset{ZK}{=} \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} - \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}}\right) \tag{2.93}$$

Die Größe q' ist also noch zu bestimmen. Im Halbraum $z < 0$ "sieht" man die reale Ladung bei $\vec{d}$ durch die Grenzfläche hindurch, und sie erscheint dort mit dem Wert q'':

$$\Phi\Big|_{z<0} = \frac{1}{\epsilon_2}\frac{q''}{|\vec{r} - \vec{d}|} \overset{ZK}{=} \frac{1}{\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}$$

Auch q'' ist noch nicht bekannt. Wie man durch nachrechnen bestätigt, erfüllen die Ansätze für das Potential die Feldgleichungen (2.91). Wenn man nun noch die Randbedingungen (2.92) erfüllen kann (durch geschickte Wahl von q' und q''), dann ist die Lösung gefunden.

Die Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{D}$, also $\epsilon_i E_z$, liefert

$$\lim_{z\to 0^+} \epsilon_1 E_z = -\epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=0^+} = \frac{qd + q'd}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \stackrel{!}{=} \lim_{z\to 0^-} \epsilon_2 E_z = \frac{q''d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \quad .$$

$$\Longrightarrow \qquad q + q' = q'' \tag{2.94}$$

Und mit der Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec{E}$ folgt

$$\lim_{z\to 0^+} E_\rho = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\Big|_{z=0^+} = \frac{1}{\epsilon_1}\frac{q\rho - q'\rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \stackrel{!}{=} \lim_{z\to 0^-} = \frac{1}{\epsilon_2}\frac{q''\rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \quad .$$

$$\Longrightarrow \qquad \epsilon_2(q - q') = \epsilon_1 q'' \tag{2.95}$$

Die Gleichungen (2.94) und (2.95) bestimmen q' und q'' eindeutig. Die Lösungen lauten

$$q' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \qquad\qquad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \quad .$$

Hier lassen sich drei Fälle unterscheiden, die zu verschiedenen charakteristischen Feldverläufen führen (siehe [9, Abb. 4.5]):

i) $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Hier ist das Vorzeichen der Spiegelladung q' dem der Originalladung entgegengesetzt (man beachte das '$-$' im Ansatz (2.93)), d. h. im Halbraum $z > 0$ sind die Feldlinien zur Grenzfläche hin gekrümmt.

ii) $\epsilon_2 < \epsilon_1$. In diesem Fall sind die Feldlinien bei $z > 0$ von der Grenzfläche weg gekrümmt, da das Vorzeichen der Spiegelladung mit dem der Originalladung übereinstimmt.

iii) $\epsilon_2 \to \infty$. Die Ladung steht dann einer metallischen Fläche gegenüber, in die die Feldlinien senkrecht eintreten (siehe Abschnitt 2.1.2 auf Seite 14). Hier ist dann auch $q = q'$.

Dielektrische Kugel im äußeren Feld

Wir betrachten eine Vollkugel mit Radius a aus dielektrischem Material der Dielektrizitätskonstante ϵ. Die Kugel wird in ein anfangs homogenes, parallel zur z-Achse gerichtetes elektrisches Feld gebracht, dessen Potential

$$\Phi = -E_0 z = -E_0 r \cos\vartheta$$

lautet. Gesucht sind Potential- und Feldverlauf innerhalb und außerhalb der Kugel.

Es handelt sich um ein Problem mit azimutaler Symmetrie. In den Ansätzen für die Potentiale in beiden Bereichen ist deshalb $m = 0$ zu setzen:

$$\Phi^i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta) \tag{2.96}$$

$$\Phi^a = \sum_{l=0}^{\infty} \left(B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta) \tag{2.97}$$

Im Ansatz für den Innenbereich wurden die bei $r = 0$ singulären Lösungen wegen ihrer physikalischen Sinnlosigkeit gleich weggelassen. Die Randbedingungen ergeben sich aus dem Verhalten des Feldes im Unendlichen und am Kugelrand. Es gilt

$$\Phi\Big|_{r\gg a} = -E_0 z = -E_0 r\cos\vartheta \quad .$$

Damit folgt sofort

$$B_1 = -E_0 \qquad\qquad B_{l\neq 1} = 0 \ ,$$

da die P_l einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen bilden und $P_1(\xi) \propto \xi$ ist. Am Kugelrand muß wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig sein, das ist also die zweite Randbedingung:

$$E_{tg} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi^i}{\partial \vartheta}\Big|_{r=a} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi^a}{\partial \vartheta}\Big|_{r=a}$$

Es gilt nun

$$\frac{d}{d\vartheta}P_l(\cos\vartheta) = -\sin\vartheta \left(\frac{d}{dx}P_l(x)\right) \quad .$$

Um dies weiterzuverarbeiten, muß man die besondere Darstellung (2.52) verwenden. Aus dieser folgt für $x = \cos\vartheta$ und $m = 1$

$$P_l^1(\cos\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}P_l(\cos\vartheta) \quad .$$

Die P_l^1 bilden aber ebenso ein orthogonales Funktionensystem wie die P_l. Daraus ergibt sich, daß man am Kugelrand ($r = a$) die Summanden der Ansätze (2.96) und (2.97) einzeln vergleichen darf:

$$A_l a^l = \left(B_l a^l + C_l a^{-(l+1)}\right) \quad \Rightarrow \quad A_l = B_l + C_l a^{-(2l+1)}$$

Dies führt auf die beiden Beziehungen:

$$A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \tag{2.98}$$

$$A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \forall l \neq 1 \tag{2.99}$$

Die Konstante C_0 (und folglich A_0) muß verschwinden, da die Kugel keine freien Oberflächenladungen tragen soll. Nun zunächst zur letzten Randbedingung: der Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Es gilt

$$-\epsilon\frac{\partial \Phi^i}{\partial r}\Big|_{r=a} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \Phi^a}{\partial r}\Big|_{r=a} \quad \Rightarrow \quad \epsilon l A_l a^{l-1} = l B_l a^{l-1} - (l+1) C_l a^{-(l+2)} \ ,$$

woraus sich zwanglos die Gleichungen

$$\epsilon A_1 = -E_0 - \frac{2C_1}{a^3} \tag{2.100}$$

$$\epsilon A_l = -\frac{l+1}{l}\frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \forall l \neq 1 \tag{2.101}$$

ableiten. Das Gleichungssystem (2.98)-(2.99)-(2.100)-(2.101) wird gelöst von den Konstanten

$$A_1 = -\left(\frac{3}{\epsilon+2}\right)E_0 \qquad C_1 = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)a^3 E_0 \qquad A_l = C_l = 0 \quad \forall l \geq 2$$

gelöst. Damit erhält man als Lösung für das Potential im Inneren der Kugel

$$\Phi^i = -\frac{3}{\epsilon+2}E_0 \underbrace{r\cos\vartheta}_{=z} \ ,$$

was einem *homogenen Feld* in z-Richtung entspricht, das aber gegenüber dem ursprünglichen Vakuum-Feld *abgeschwächt* ist (falls $\epsilon > 1$). Im Außenraum gestaltet sich die Lösung zu

$$\Phi^a = -E_0 r\cos\vartheta + \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\vartheta \quad . \tag{2.102}$$

Dies entspricht einem homogenen Anteil (der erste Summand), überlagert von einem *Dipolfeld,* das von dem Dipolmoment

$$\vec{p} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0 a^3 \vec{e}_z$$

erzeugt wird. Die Polarisation im Dielektrikum bekommt man dann wegen $4\pi\vec{P} = (1-\epsilon)\vec{E}$ aus dem homogenen Innenfeld zu

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\,\vec{E} = \frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\,\vec{E}_0 \ ,$$

und die polarisationsbedingte Oberflächenladung ist

$$\sigma_p(\vartheta) = -(\vec{P}^a - \vec{P}^i)\,\vec{n} = \frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\,E_0\cos\vartheta \quad .$$

In der Literatur findet man oft Ansätze für die Lösung des Problems der dielektrischen Kugel im äußeren Feld, die von (2.102) ausgehen. Dann wird lediglich noch die "Stimmigkeit" mit den Randbedingungen geprüft. Unser Weg verzichtet jedoch auf solche Annahmen und kommt trotzdem zum richtigen Ziel.

2.4.5 Elektrostatische Energie

In diesem Abschnitt untersuchen wir noch den Energiegehalt des elektrischen Feldes im Vakuum und in Dielektrika.

Ladungen im freien Raum

Sei q_i eine Punktladung in einem Potential $\Phi(\vec{r})$. Dann ist die beim Transport der Ladung von Potentialnullpunkt zum Ort $\vec{r}_i$ verrichtete Arbeit gleich

$$W = q_i\Phi(\vec{r}_i) \ ,$$

wie bereits in Abschnitt 2.1 auf Seite 10 festgestellt. Für die beim Zusammenbringen von zwei Ladungen aus dem Unendlichen aufgewandte Energie ergibt sich dann also $W = q_iq_j/|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Dies läßt sich leicht auf N Punktladungen verallgemeinern:

$$W = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_iq_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Bigg|_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Schließlich geht man zu *Raumladungsdichten* über. Es gilt

$$q_i = \rho_i\Delta V_i \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,d^3r\,d^3r' \ ,$$

und wenn man berücksichtigt, daß

$$\Phi(\vec{r}) = \int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,d^3r' \ ,$$

dann folgt

$$W = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\,\Phi(\vec{r})\,d^3r \quad . \tag{2.103}$$

Mit Hilfe der bekannten Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ können wir (2.103) noch weiter massieren:

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{1}{8\pi}\int\Phi(\vec{r})\Delta\Phi(\vec{r})\,d^3r \overset{p.I.}{=} \frac{1}{8\pi}\int|\vec{\nabla}\Phi|^2d^3r = \frac{1}{8\pi}\int|\vec{E}|^2d^3r$$

Wenn das ein Ausdruck für die Gesamtenergie ist, dann liegt es nahe, die *Energiedichte*

$$w := \frac{1}{8\pi}|\vec{E}|^2$$

zu definieren. Wir testen diese Definition gleich am Beispiel zweier Punktladungen an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = \frac{q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \ ,$$

und die Energiedichte wird dann zu

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\underbrace{\frac{q_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^4}}_{\text{Selbstenergie}} + \frac{2q_1q_2(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \right) \quad . \tag{2.104}$$

In diesem Ausdruck gibt es zwei Terme, die jeweils nur von einer Ladung abhängen und *Selbstenergie* genannt werden. Die Selbstenergie steckt in dem von der Ladung erzeugten Feld und ist *keine* potentielle Energie, die aus dem Vorhandensein einer zweiten Ladung resultiert. Man sieht das auf folgende Weise ein: Sei w' die Energiedichte ohne Selbstenergie-Anteil. Dann gilt

$$W' = \int w'(\vec{r})\, d^3r = \frac{q_1q_2}{4\pi} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\, d^3r \overset{p.I.}{=} -\frac{q_1q_2}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\, d^3r = \frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \quad .$$

Das ist genau der schon weiter oben abgeleitete Ausdruck für die potentielle Energie zweier Punktladungen.

Die Überraschung wird von der Selbstenergie bereitgehalten: Integriert man über die beiden entsprechenden Terme in (2.104), so erhält man *divergente Ausdrücke!* Offensichtlich ist in bezug auf die Energiedichte das Modell "Punktladung" nicht adäquat, obwohl es ja für viele Anwendungen ausreicht. Man behilft sich mit der Vorstellung einer kleinen metallischen Kugel, auf der außen die Ladung q flächenartig aufgetragen ist. Da das Feld im Inneren verschwindet (siehe Beispiel auf Seite 16), ist das Integral für die Selbstenergie nicht mehr divergent, sondern bekommt für *eine* Ladung den Wert $q^2/2a$, falls a der Radius der Kugel ist.

Energiedichte im Dielektrikum

Die Betrachtungen zur Energiedichte in Dielektrika fußen auf der Tatsache, daß die Polarisation (d. h. die Ausrichtung von Elementardipolen im externen Feld) zusätzliche Beiträge zur elektrostatischen Energie liefert. Der Ausdruck (2.103) erfaßt diese aber nicht von alleine. Stattdessen betrachtet man eine kleine Änderung δW der Gesamtenergie, die von einer kleinen Änderung $\delta\rho$ der Ladungsdichte hervorgerufen wird. Es gilt

$$\delta W = \int \delta\rho(\vec{r}')\, \Phi(\vec{r}')\, d^3r' = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(\vec{r}')\, \vec{\nabla}\delta\vec{D}(\vec{r}')\, d^3r' \quad .$$

Dabei wurde die Identität $\delta\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\delta\vec{D}$ verwendet. Zusammen mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ erhält man durch partielle Integration

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}(\vec{r}')\, \delta\vec{D}(\vec{r}')\, d^3r' \ ,$$

woraus für die Gesamtenergie W folgt:

$$W = \frac{1}{4\pi} \iint_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{r}')\, \delta\vec{D}(\vec{r}')\, d^3r' \tag{2.105}$$

Bei der etwas diffusen inneren Integration stellt man sich vor, daß das $\vec{D}$-Feld vom Anfangswert 0 auf den Endwert $\vec{D}$ "aufgedreht" wird, wobei dann natürlich $\vec{E}$ und $\vec{D}$ voneinander abhängen. Bei *linearer* Antwort des Materials ($\vec{D} = \epsilon\vec{E}$) wird dann

$$\int_0^{\vec{D}} \vec{E}\, \delta\vec{D} = \frac{1}{2} \int_0^{\vec{D}} \delta(\vec{E}\vec{D}) = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} \ ,$$

und die Energiedichte ist

$$w = \frac{1}{8\pi}\, \vec{E}\vec{D} \quad . \tag{2.106}$$

Reagiert das Medium nichtlinear (Hysterese etc.), so gilt diese Formel natürlich nicht. Dann muß (2.105) wirklich berechnet werden.

Kapitel 3

Magnetostatik

3.1 Biot-Savart-Gesetz, Ampère-Gesetz, Vektorpotential

3.1.1 Das Gesetz von Biot und Savart

Als "Aufhänger" für die Magnetostatik dient folgende *experimentell* gefundene, differentielle Beziehung zwischen einem Leitungsstrom I und der von ihm erzeugten *magnetischen Induktion* (auch *Flußdichte* genannt):

$$d\vec{B} = k' I d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{3.1}$$

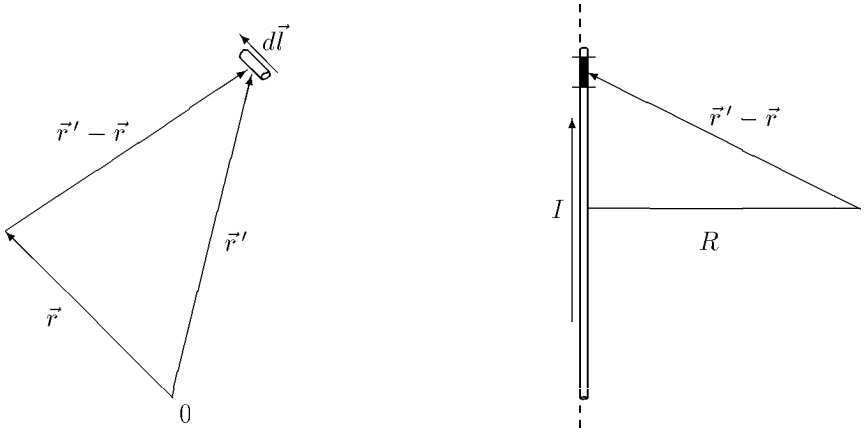


Abbildung 3.1: *Zum Biot-Savart-Gesetz, links allgemeine differentielle Beziehung, rechts Spezialfall eines langen geraden Drahtes.*

Die Konstante k' hat im Gauß-System den Wert $1/c$, wobei c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit darstellt, und im SI/MKSA-System dem Wert $\frac{\mu_0}{4\pi}$, mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$. Warum gerade hier die Lichtgeschwindigkeit auftaucht, wird später noch klar werden.

Beispiel: Magnetische Induktion eines ∞ langen Drahtes, der vom Strom I durchflossen wird

Siehe Abb. 3.1:

$|d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')| = dl|\vec{r} - \vec{r}\,'| \sin(\vartheta)$. Außerdem:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Die Felder aller einzelnen Leitungselemente zeigen in die gleiche Richtung, also:

$$|\vec{B}| = B = \frac{IR}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{(R^2+l^2)^{3/2}} \overset{x:=l/R}{=} \frac{2I}{Rc}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=1} =$$

$$= \frac{2I}{cR}$$

Dies ist das *Biot-Savart-Gesetz*, hier für den unendlich langen Draht. Die Feldlinien bilden ein perfektes Wirbelfeld um den Draht als Achse mit einer $1/r$-Charakteristik.

Für die weiteren Betrachtungen empfiehlt sich die Einführung der *Stromdichte* $\vec{\jmath}$ statt des Leitungsstromes I:

$$I d\vec{l} = \vec{\jmath}(\vec{r})\, df\, dl = \vec{\jmath}(\vec{r})\, d^3r \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{c}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3r' \tag{3.2}$$

Damit ist es möglich, aus jeder beliebigen Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ die durch sie erzeugte magnetische Induktion zu berechnen.

3.1.2 Kraft auf Ströme in Magnetfeldern, Stromschleifen

Ist $d\vec{F}$ die auf ein Stromelement $I_1 d\vec{l}_1$ durch die Flußdichte $\vec{B}$ hervorgerufene Kraft, so gilt:

$$d\vec{F} = \frac{I_1}{c}(d\vec{l}_1 \times \vec{B}) \tag{3.3}$$

Betrachtet man das Feld $\vec{B}_2$ einer *geschlossenen Stromschleife* mit Strom I_2, das die Ursache für die Kraft auf eine zweite Stromschleife mit Strom I_1 ist, so erhält man sofort aus (3.2) und (3.3):

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\oint\!\!\oint \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}-\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{3.4}$$

Dies ist das *Ampèresche Gesetz über die Kraft zwischen Stromschleifen*, das sich durch folgende "bac-cab"-Umformung...

$$\frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}-\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = d\vec{l}_2\left(\frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right) - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

auch in der Form

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c}\oint\!\!\oint \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{3.5}$$

schreiben läßt. Dabei fällt der 'bac'-Term bei der Integration weg, denn die Klammer beschreibt das totale Differential eines $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$-Potentials. Bei einer Integration über geschlossene Kurven oder von ∞ nach ∞ wird so etwas bekanntlich verschwinden.

In seiner allgemeinsten Form lautet dieses Gesetz folgendermaßen: Gegeben sei eine Stromverteilung $\vec{\jmath}(\vec{r})$ in einem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$. Dann ist nach (3.3) die auf die Stromverteilung wirkende Gesamtkraft gleich

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int d^3r\, \vec{\jmath}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad , \tag{3.6}$$

wobei sich die Integration über den ganzen Raum erstreckt.

3.1.3 Das Vektorpotential. Durchflutungsgesetz

Man betrachte noch einmal Gleichung (3.2). Für den Bruch $(\vec{r}-\vec{r}\,')/|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3$ gilt bekanntlich

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) ,$$

also wird

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3r' = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r \times \int \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r' \quad .$$

$\vec{B}$ ist also als *Rotation eines Vektorfeldes* darstellbar:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \qquad \text{mit} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r' \tag{3.7}$$

$\vec{A}(\vec{r})$ heißt *Vektorpotential* des $\vec{B}$-Feldes.[1] Dieses Ergebnis wird später in etwas verallgemeinerter Form noch große Bedeutung haben.

Es lassen sich nun einige wichtige *Folgerungen* ziehen:

a) Da $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, gilt

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_V \vec{\nabla}\vec{B}\, dV = \oint_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{F} = 0 \tag{3.8}$$

Die Flußdichte ist quellenfrei, oder etwas suggestiver:

ES GIBT KEINE MAGNETISCHEN LADUNGEN!

Man beachte, daß wir angenommen haben, Magnetfelder würden allein von Stromdichten erzeugt — nichts anderes besagt ja das Biot-Savart-Gesetz. Dann folgt die Quellenfreiheit ganz natürlich. Sie ist also ein Ergebnis einer *Annahme*, die bisher noch durch kein Experiment widerlegt werden konnte. Gleichung (3.8) ist eine weitere *Maxwell-Gleichung*. Sie wurde hier in differentieller Form und in Integralform angegeben.

b) Es gilt:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{3.9}$$

Nun ist aber

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r \int \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \underbrace{\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{-\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} d^3r' \overset{p.I.}{=} \frac{1}{c}\vec{\nabla}_r \int \left(\vec{\nabla}_{r'}\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\right)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r' \quad .$$

Soll für Ströme die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\vec{\jmath}$ gelten, so verschwindet dieses Integral, solange man sich in der Magnetostatik befindet, wo $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (diese Einschränkung führt später auf eine Inkonsistenz in den Maxwell-Gleichungen, s. Abschnitt 4.4.1). Außerdem ist noch wegen $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$:

$$-\Delta\vec{A} = -\frac{1}{c}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,')\Delta_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r' \quad \Longrightarrow \quad -\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}(\vec{r}) \tag{3.10}$$

Die Bestimmung des Vektorpotentials und damit der Flußdichte entspricht also der Lösung dieser drei "Poisson-Gleichungen" für die Komponenten von $\vec{A}$, was natürlich äquivalent zu (3.7) ist.

[1] Bei der Berechnung dieses Integrals ist zu beachten, daß es sich bei dem Integranden nicht um ein *Skalarfeld*, sondern um ein *Vektorfeld* handelt. Ist es in nicht-kartesischen Koordinaten gegeben, so hängt die Lage des lokalen Dreibeins von der Position im Raum ab, *die Einheitsvektoren ändern sich also über der Integration*. Deshalb formt man so etwas vorher in kartesische Koordinaten um. Dann tritt dieses Problem nicht auf (s. auch [9, Kap. 5.5]).

Damit ist ein Teil einer weiteren Maxwell-Gleichung abgeleitet, und zwar für den *Spezialfall stationärer Felder*[2]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \int_F \vec{\nabla} \times \vec{B}\, d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{B}\, d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_F \vec{j} d\vec{F}}_{=I} \tag{3.11}$$

Diese Gleichung, das *Ampèresche Durchflutungsgesetz*, ermöglicht — ebenso wie das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik — die Berechnung der magnetischen Induktion in hochsymmetrischen Anordnungen.[3]

3.1.4 Eichungen I

Aus dem Integralcharakter des Vektorpotentials läßt sich ein wichtiger Schluß ziehen: Da $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi) = 0$, kann man zu einem Vektorpotential ein völlig beliebiges Gradientenfeld hinzuaddieren, *ohne daß sich dadurch die magnetische Flußdichte ändert:*

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\psi)$$

Die Transformation

$$\vec{A} \quad \longrightarrow \quad \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \tag{3.12}$$

wird *Eichtransformation* genannt. Die Allgemeine Formel für das Vektorpotential lautet somit:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' + \vec{\nabla}\psi \tag{3.13}$$

Dies bedeutet aber, daß die Größe $\vec{\nabla}\vec{A}$ *jede beliebige Form* annehmen kann, denn durch eine einfache partielle Integration und unter Verwendung von $\vec{\nabla}_{r'}(1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|) = -\vec{\nabla}_r(1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ erhält man

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\overbrace{\vec{\nabla}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,')}^{=0}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' + \Delta\psi \ , \tag{3.14}$$

was eine Differentialgleichung für ψ darstellt. Wählt man $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ (*Coulomb-Eichung*), so ist also für ψ eine Laplace-Gleichung zu lösen. Aus der Formel (3.13) für $\vec{A}$ ist allerdings zu erkennen, daß die Coulomb-Eichung in der Magnetostatik auch schon ohne Eichfeld $\vec{\nabla}\psi$ *immer erfüllt* ist, da stets $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$ gilt.

3.2 Konstruktion eines Feldes aus Quellen und Wirbeln

Strom– und Ladungsdichte bilden die "Ursache" elektrischer und magnetischer Felder. Da es sich dabei laut den Maxwell-Gleichungen, wie sie uns bisher bekannt sind, um die Quellen und Wirbel dieser Felder handelt, stellt sich die Frage, auf welche Weise überhaupt ein Feld durch seine Quellen und Wirbel festgelegt ist. Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{W}(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) + \vec{U}(\vec{r})$, so daß

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 & \Rightarrow & \vec{V} = \vec{\nabla}\phi \\ \vec{\nabla}\vec{U} = 0 & \rightarrow & \vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{W} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A} \ .$$

Die Felder ϕ und $\vec{A}$ sind also zu bestimmen. Nun gilt

$$\begin{array}{rcl} \vec{\nabla}\vec{W} & = & \vec{\nabla}\vec{V} = \Delta\phi \\ \vec{\nabla} \times \vec{W} & = & \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \end{array}$$

[2]Zum Zusammenhang von Ampère-Gesetz und Biot-Savart-Gesetz, insbesondere zur Einschränkung auf stationäre Ströme, siehe *American Journal of Physics*, Vol. 57, No. 1, Jan. 1989, pp. 57-59

[3]Ein Beispiel hierzu, in dem auch gleich auf die Problematik unphysikalischer Limetes (unendlich dünne, stromführende Flächen) eingegangen wird, findet sich in *American Journal of Physics*, Vol. 55, No. 2, Feb. 1987, pp. 166-167

und unter Anwendung der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\vec{A}=0$ wird $\vec{\nabla}\times\vec{W}=-\Delta\vec{A}$. Also sind zur Bestimmung der Potentiale ϕ und $\vec{A}$ zwei Poisson-Gleichungen zu lösen:

$$\Delta\phi = \vec{\nabla}\vec{W} \tag{3.15}$$
$$-\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{W} \tag{3.16}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind aber wohlbekannt. Sie lauten für den gesamten Raum

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{W}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \tag{3.17}$$
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{W}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \quad . \tag{3.18}$$

Nun kann also das Feld $\vec{W}$ aus seinen Quellen und Wirbeln rekonstruiert werden:

$$\vec{W}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{W}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{W}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \tag{3.19}$$

3.3 Felder lokalisierter Stromverteilungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß eine beliebige lokalisierte Stromverteilung aus genügender Entfernung eine Dipolcharakteristik hat.

Wir betrachten Formel (3.7) für das Vektorpotential und gehen davon aus, daß $\vec{\jmath}(\vec{r})$ auf einen *endlichen Raumbereich begrenzt* ist; außerdem soll der Koordinatenursprung ebenfalls innerhalb der Verteilung liegen. Legt man dann eine Kugelfläche um den Ursprung und berechnet das Vektorpotential an einem Punkt außerhalb dieser Kugel, so kann man $|\vec{r}|>|\vec{r}\,'|$ annehmen. In erster Näherung gilt dann:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\approx\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} \tag{3.20}$$

Ersetzt man folglich in Formel (3.7) für das Vektorpotential den $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$-Bruch durch diese Entwicklung, so ergibt das:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr}\int\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\,d^3r' + \frac{\vec{r}}{cr^3}\int\vec{r}\,'\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

... oder für die i-te Komponente:

$$A_i = \frac{1}{cr}\int j_i(\vec{r}\,')\,d^3r' + \frac{\vec{r}}{cr^3}\int\vec{r}\,' j_i(\vec{r}\,')\,d^3r' \tag{3.21}$$

Um dies in eine einfachere, suggestive Form zu bringen, betrachte man die Identität

$$\int\left[f(\vec{r}\,')\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}g(\vec{r}\,') + g(\vec{r}\,')\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{r'}f(\vec{r}\,')\right]\,d^3r' = 0 \quad , \tag{3.22}$$

die für beliebige freundliche Skalarfelder $f(\vec{r}\,')$ und $g(\vec{r}\,')$ gilt. Zum Beweis genügt nachrechnen (die $\vec{r}\,'$-Abhängigkeiten werden weggelassen):

$$\int\left[f\vec{\jmath}\vec{\nabla}_{r'}g + g\vec{\jmath}\vec{\nabla}_{r'}f\right]\,d^3r' \overset{p.I.}{=} \int\vec{\nabla}_{r'}(fg\vec{\jmath})\,d^3r' - \int g\vec{\nabla}_{r'}(f\vec{\jmath})\,d^3r' + \int\vec{\nabla}_{r'}(fg\vec{\jmath})\,d^3r' - \int f\vec{\nabla}_{r'}(f\vec{\jmath})\,d^3r' =$$

... das erste und das dritte Integral können mit dem Satz von Gauß in Oberflächenintegrale verwandelt werden. Da $\vec{\jmath}$ räumlich begrenzt ist, verschwinden diese. Weiter gilt dann unter Verwendung von $\vec{\nabla}\vec{\jmath}=0$ ...

$$= -\int\left[(\vec{\jmath}\vec{\nabla}_{r'}f + f\vec{\nabla}_{r'}\vec{\jmath})g + (\vec{\jmath}\vec{\nabla}_{r'}g + g\vec{\nabla}_{r'}\vec{\jmath})f\right]\,d^3r' = -\int\left[g\vec{\jmath}\vec{\nabla}_{r'}f + f\vec{\jmath}\vec{\nabla}_{r'}g\right]\,d^3r'$$

Das ist genau das Negative des Ausdrucks auf der linken Seite von (3.22), also ist die Behauptung bewiesen.

Wir untersuchen jetzt folgende Spezialfälle:

a) *Seien* $f = 1, g = x_i'$*:*
Dann wird (3.22) zu

$$\int j_k \underbrace{\frac{\partial x_i'}{\partial x_k'}}_{\delta_{ik}} d^3r' = \int j_i(\vec{r}')\, d^3r' = 0 \quad ,$$

d. h. der *Monopolterm* in der Entwicklung (3.21) *verschwindet*, was man auch mit dem Gaußschen Satz und der Wahrheit $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$ erkennt.

b) *Seien* $f = x_i', g = x_j'$*:*
Aus (3.22) folgt

$$\int (x_i' j_j + x_j' j_i)\, d^3r' = 0$$

Damit läßt sich der zweite Term in (3.21) umformen:

$$\vec{r} \int \vec{r}' j_i \, d^3r' = \sum_j x_j \int x_j' j_i \, d^3r' = -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x_i' j_j - x_j' j_i)\, d^3r' =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \int (\vec{r}' \times \vec{j})_k \, d^3r' = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int (\vec{r}' \times \vec{j})\, d^3r'$$

Für das Vektorpotential kann man also schreiben:

$$\vec{A} = -\frac{1}{2cr^3} \vec{r} \times \underbrace{\int (\vec{r}' \times \vec{j})\, d^3r'}_{=2c\vec{m}}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')\, d^3r' \Longrightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{3.23}$$

Hierbei bedeutet $\vec{m}$ das *Dipolmoment* oder *magnetische Moment* der Stromverteilung. Also gilt:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{3\vec{r}(\vec{r}\vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \tag{3.24}$$

3.4 Magnetisierung

Genau wie im Fall der dielektrischen Polarisation kann man sich von der Wirkung eines Magnetfeldes in Materie ein Modell konstruieren, das auf der Ausrichtung mikroskopischer Dipole im äußeren Feld beruht. Dadurch wird eine *Magnetisierung* bzw. *makroskopische Momentdichte* im Material erzeugt. Wir fangen an zu *definieren* :

$$\vec{M}(\vec{r}) \; := \sum_i N_i \, \langle \vec{m}_i \rangle$$

Dabei ist N_i die Zahl magnetischer Dipole vom "Typ i" (d. h. z. B. einer bestimmten Molekülart) pro Volumenelement und $< \vec{m}_i >$ das über dieses Volumen bei $\vec{r}$ gemittelte magnetische Moment *eines Dipols vom Typ i*. Die Summe addiert dann die lokalen Momentdichten aller Dipoltypen. Angenommen, es gibt noch eine makroskopische Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$, so wie im vorangehenden Abschnitt. Dann gilt für das Vektorpotential offenbar:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, d^3r' + \int \frac{\vec{M}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, d^3r' \quad . \tag{3.25}$$

Wegen $\vec{\nabla}_{r'}(1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ kann man das zweite Integral umformen:

$$\int \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{r'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' = \int \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, d^3r'$$

Damit wird

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') + \overbrace{c\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}^{=:\vec{j}^{(i)}}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r' \tag{3.26}$$

Die sogenannte *effektive Stromdichte* $\vec{j}^{(i)} = c\vec{\nabla} \times \vec{M}$ kann man sich als den Beitrag der Magnetisierung zur Gesamtstromdichte vorstellen. Damit erhalten wir eine erweiterte Maxwell-Gleichung, die nun auch Magnetisierungseffekte berücksichtigt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}^{(i)}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{3.27}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{3.28}$$

Wir *definieren* die *magnetische Feldstärke*[4] $\vec{H}(\vec{r})$ zu:

$$\vec{H} := \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{3.29}$$

... und somit gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{3.30}$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Maxwell-Gleichungen für *zeitunabhängige Prozesse* aufzuschreiben:

$$\begin{array}{rclcrcl} \vec{\nabla}\vec{B} & = & 0 & & \vec{\nabla}\vec{D} & = & 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} & = & \frac{4\pi}{c}\vec{j} & & \vec{\nabla} \times \vec{E} & = & 0 \end{array}$$

Ergänzt werden diese durch die *Materialgleichungen*

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{3.31}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \tag{3.32}$$

Der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$ bzw. $\vec{B}$ und $\vec{H}$ kann u. U. sehr kompliziert werden — unberechenbar kompliziert (im allgemeinen Fall tensoriell (d. h. anisotrop) und inhomogen). Es ist jedoch oft statthaft, *vereinfachende Annahmen* über diese Relationen zu machen, insbesondere, wenn man es mit schwachen Feldern zu tun hat. Eine der einfachsten denkbaren Beziehungen ist natürlich die *Linearität*:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{3.33}$$

μ heißt *Permeabilitätszahl* des Materials. Es lassen sich hier zwei Fälle unterscheiden:

$\mu > 1$: *Paramagnetismus*. Der Stoff "bündelt" die magnetischen Feldlinien.

$\mu < 1$: *Diamagnetismus*. Der Stoff schließt magnetische Felder mehr oder weniger stark aus sich aus.

Ist der Zusammenhang zwischen Induktion und Feldstärke *nichtlinear*, und μ dabei recht groß (z. B. einige 1000), so spricht man von *Ferromagnetismus*. Die Effekte sind hier diffiziler, z. B. im Fall der magnetischen Hysterese, wo das Verhalten eines Stoffes von seiner magnetischen Vorgeschichte abhängt [9, Kap. 5.8].

3.5 Randbedingungen für die Felder der Magnetostatik

Genau wie in der Elektrostatik unterliegen die Felder der Magnetostatik an der Grenzfläche zwischen Medien bestimmten Randbedingungen. Aus dem Maxwell-Gleichungen lassen sich diese schnell ableiten. Im folgenden ist $\vec{n}$ der Normalenvektor auf die Grenzfläche:

[4] In der Literatur findet man verwirrenderweise für $\vec{B}$ und $\vec{H}$ jeweils verschiedene Namen. Wir verwenden für $\vec{H}$ die Bezeichnung **Feldstärke** und für $\vec{B}$ die Bezeichnung **Induktion** oder **Flußdichte**. "Magnetfeld" ist ein allgemeiner Terminus und keinem der Felder fest zugeordnet.

a) $\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\vec{B}^{(i)} = \vec{n}\vec{B}^{(a)}$. Die Normalkomponente von $\vec{B}$ ist also an der Grenzfläche stetig. Dies erhält man sofort durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf ein kleines Volumen, das ein Stückchen Grenzfläche enthält, und von dem man zunächst die Dicke gegen 0 gehen läßt.

b) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ falls $\vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \times \vec{H}^{(a)} = \vec{n} \times \vec{H}^{(i)}$. Also ist die Tangentialkomponente von $\vec{H}$ stetig. Hier verwendet man den Satz von Stokes bzgl. eines Integrationsweges, der im einen Material hin- und im anderen wieder zurückläuft.

Die Bedingungen für die Normalkomponente von $\vec{H}$ und die Tangentialkomponente von $\vec{B}$ erhält man dann einfach durch Einsetzen in die Materialgleichungen. Dann lauten also die Stetigkeitsbedingungen der Magnetostatik (bei linearer Antwort des Materials):

$$\begin{array}{lcllcl} \vec{n}\vec{B}^{(i)} & = & \vec{n}\vec{B}^{(a)} & \vec{n} \times \vec{B}^{(i)} & = & \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(a)}} \vec{n} \times \vec{B}^{(a)} \\ \vec{n}\vec{H}^{(i)} & = & \frac{\mu^{(a)}}{\mu^{(i)}} \vec{n}\vec{H}^{(a)} & \vec{n} \times \vec{H}^{(i)} & = & \vec{n} \times \vec{H}^{(a)} \end{array} \tag{3.34}$$

Betrachtet man den Spezialfall eines Materials mit sehr großer Permeabilität ($\mu^{(i)} \gg 1$) im Vakuum ($\mu^{(a)} = 1$), so liefert die Bedingung für die Normalkomponente von $\vec{H}$, daß — außer im Fall eines zur Oberfläche perfekt parallelen Feldes — $\vec{H}$ praktisch *senkrecht* zur Oberfläche steht: Man hat dann eine Situation analog zu der an der Oberfläche von Metallen in der Elektrostatik.

3.6 Anwendungen: Lösungsmethoden für Randwertprobleme

Die Frage ist nun, wie man aus gegebenen Strom- und Materialverteilungen mit Hilfe der Maxwell- und Materialgleichungen die Induktion bestimmen kann. Wie sich zeigen wird, ist das nur eine Frage der Einhaltung bestimmter Randbedingungen bei der Lösung der Differentialgleichungen.

3.6.1 Lösungen mit Hilfe des Vektorpotentials

Aus den Gleichungen

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

erhält man durch gegenseitiges Einsetzen

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ .$$

Unter Zugrundelegung der Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla}\vec{A} = 0$), die ja in der Magnetostatik immer erfüllt ist, wird dies wegen $\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$ zu

$$\Delta\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \tag{3.35}$$

Das sind drei "Poisson-Gleichungen" für die Komponenten von $\vec{A}$, die sich prinzipiell lösen lassen.

3.6.2 Verschwindende Stromdichte: Magnetisches Skalarpotential

Aus $\vec{j} = 0$ folgt $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$. Daraus folgt, daß es ein *magnetisches Skalarpotential* Φ_M geben muß, so daß

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M \ . \tag{3.36}$$

Bei linearer Antwort des Materials gilt dann

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{\nabla}(\mu\vec{\nabla}\Phi_M) = 0 \ .$$

Das gilt allgemein; die Vereinfachung

$$\Delta\Phi_M = 0 \tag{3.37}$$

gilt zumindest für stückweise konstantes μ. Es ist also wieder einmal eine Laplace-Gleichung zu lösen; man beachte, daß bei konstantem μ auch für $\vec{B}$ ein Skalarpotential existiert: $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Psi_M$.

Eines ist wichtig bei den letzten beiden Abschnitten: Betrachtet man die Situation in einem Raum, in dem Materialien mit verschiedenen Permeabilitäten μ aneinandergrenzen, so müssen die Lösungen von (3.37) bzw. (3.35) in den verschiedenen Bereichen über die Stetigkeitsbedingungen (3.34) zusammenpassen.

3.6.3 Harte Ferromagnete 1: $\vec{M} = const, \vec{j} = 0$

In Materialien, in denen die Momentdichte $\vec{M}$ fest vorgegeben ist, hat ein von außen angelegtes Magnetfeld keinen Einfluß auf die Magnetisierung. Bei verschwindender Stromdichte gilt weiterhin $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$. Dann ist

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{H} + 4\pi\vec{M}\right) = -\Delta\Phi_M + 4\pi\vec{\nabla}\vec{M} = 0 \quad .$$

Also wieder eine Poisson-Gleichung. Definiert man eine *effektive magnetische Ladungsdichte*

$$\rho_M := -\vec{\nabla}\vec{M} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_M = -4\pi\rho_M \quad ,$$

so lautet die Lösung der Poisson-Gleichung für das Potential Φ_M wie üblich

$$\Phi_M = -\int \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' \overset{p.I.}{=} \int \vec{M}(\vec{r}')\vec{\nabla}_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) d^3r' = \tag{3.38}$$

$$= -\vec{\nabla}_r \int \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' \tag{3.39}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß $\vec{M}$ auf einen endlichen Raumbereich begrenzt ist.

Befindet man sich in großem Abstand von der Materieverteilung, so kann man näherungsweise $1/|\vec{r}-\vec{r}'| \approx 1/r$ setzen und erhält

$$\Phi_M \approx -\vec{\nabla}_r\frac{\vec{m}}{r} = \frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3} \quad , \text{mit} \quad \vec{m} = \int \vec{M}(\vec{r}')\, d^3r' \quad . \tag{3.40}$$

Der Vektor $\vec{m}$ heißt *Gesamtmagnetisierung* oder *gesamtes magnetisches Moment* der Materieverteilung. Man sieht also, daß jede Materieverteilung mit fester Magnetisierung aus genügend großem Abstand eine *Dipolcharakteristik* hat.

Für die Praxis erweist es sich oft als günstig, Materieverteilungen als *unstetig* zu betrachten, d. h. am Rand der Materie fällt $\vec{M}$ sprunghaft von einem endlichen Wert auf 0 ab (betrachte z. B. das Beispiel eines zylinderförmigen Stabmagneten mit homogener Magnetisierung parallel zur Achse). In (3.38) enthält die Divergenz von $\vec{M}$ dann δ-förmige Randterme (in manchen Büchern findet man dafür Ausdrücke wie "Flächendivergenz" [15] oder "Sprungdivergenz" [17], zuweilen zusammen mit einem neuen Differentialoperator "Div"). Man stelle sich ein kleines Volumen (am besten einen flachen Zylinder) vor, der ein Stückchen Randfläche enthält (Abb. 3.2).

Abgesehen von dieser mehr intuitiven Darstellung kann man sich das auch mathematisch ein bißchen klar machen. Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall, daß ein Vektorfeld $\vec{M}$ für negative z-Werte verschwindet und für positive z-Werte irgendwie aussieht:

$$\vec{M}(\vec{r}) := \vec{M}'(\vec{r})\Theta(z) \quad .$$

Wir bilden nun das Volumenintegral über die Divergenz von $\vec{M}$:

$$\int \vec{\nabla}\vec{M}(\vec{r})d^3r = \int \left[\Theta(z)\vec{\nabla}\vec{M}'(\vec{r}) + \vec{M}'(\vec{r})\vec{e}_z\delta(z)\right] d^3r =$$

$$= \int \Theta(z)\vec{\nabla}\vec{M}'(\vec{r})d^3r + \int \vec{M}'(\vec{r})\vec{e}_z\delta(z)d^3r$$

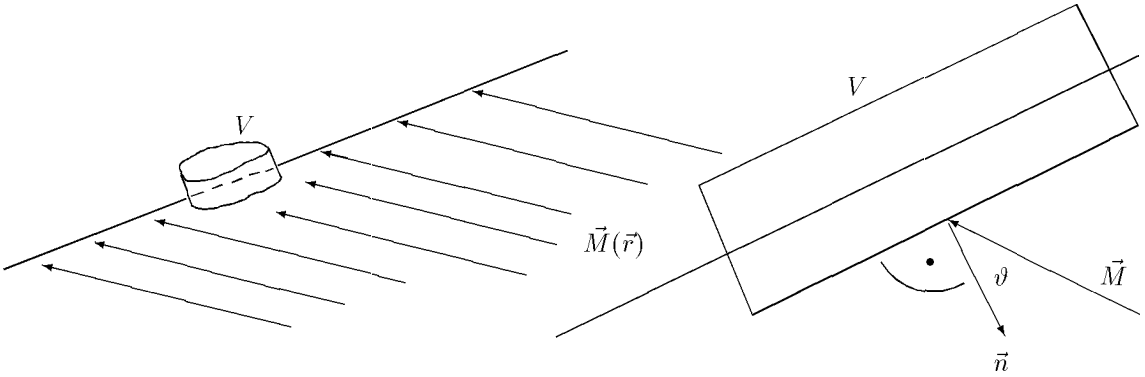


Abbildung 3.2: *Zum Verständnis der Randeffekte bei unstetiger Magnetisierung. Zur Divergenz tragen nur die $\vec{M}$-Anteile bei, die senkrecht zu den Randflächen des infinitesimalen Volumens V stehen.*

Das erste Integral ist klar. Das zweite möchte man gerne als Flächenintegral bzgl. der Normalenrichtung *aus dem "Feldvolumen" heraus* schreiben. Es gilt aber hier $\vec{n} = -\vec{e}_z$, also:

$$\int \vec{\nabla}\vec{M}(\vec{r})d^3r = \int \Theta(z)\vec{\nabla}\vec{M}'(\vec{r})d^3r - \int \vec{M}'(\vec{r})\vec{n}d^2r$$

Damit versteht man nun die endgültige Formel für das magnetische Skalarpotential (dadurch, daß der $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$-Nenner dazukommt, ändert sich nichts am Rechengang!):

$$\Phi_M(\vec{r}) = -\int_V \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' + \oint_F \frac{\vec{n}'\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dF' \tag{3.41}$$

Man kann $\sigma_M := \vec{n}\vec{M}$ als *effektive Oberflächenladungsdichte* definieren.

Eines ist zu beachten: Die Formel (3.39) ist *immer gültig*, egal, ob das $\vec{M}$-Feld unstetig ist oder nicht. Man sieht das leicht ein, wenn man sich zunächst dieses Feld an den Sprungstellen mit einer Skalarfunktion moduliert denkt, die die Randunstetigkeiten ausgleicht, und erst *nach* (3.39) den Grenzübergang zur Unstetigkeit vollzieht.

Dennoch ist (3.41) nützlich, z. B. dann, wenn die Materie im Innern homogen magnetisiert ist. Dann fällt nur das Oberflächenintegral ins Gewicht und die Berechnung wird oft recht einfach.

Aufgabe: Gegeben ist ein Zylinder der Länge L mit Radius R, der parallel zu seiner Achse homogen mit der Momentdichte $\vec{M}$ magnetisiert ist. Berechne $\vec{B}$- und $\vec{H}$-Feld auf der Achse innerhalb und außerhalb des Zylinders (die Berechnung außerhalb der Achse ist zwar möglich, führt aber — je nach Ansatz — entweder auf unendliche Reihen oder elliptische Integrale).

3.6.4 Harte Ferromagnete 2: Effektive Stromdichte

Man betrachte noch einmal Formel (3.35). Wir nehmen an, daß es keine makroskopische Stromdichte gibt, jedoch soll irgendwo eine Magnetisierung $\vec{M}$ existieren. Dann gibt es, wie bereits erwähnt, dennoch eine Stromdichte, die *effektive magnetische Stromdichte* $\vec{j}_M = c\vec{\nabla} \times \vec{M}$ (siehe (3.26)):

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_M$$

Die Lösung für das Vektorpotential lautet dann allgemein:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'$$

Wie im Falle der magnetischen Ladungsdichte kann man auch hier Betrachtungen bzgl. unstetiger Magnetisierung anstellen, um diese Formel in ein Integral über ein beschränktes Volumen plus ein Oberflächenintegral zu verwandeln. Es ergibt sich ganz analog:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' + \oint_F \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times \vec{n}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dF' \tag{3.42}$$

Das von einer homogen magnetisierten Kugel erzeugte Feld im Vakuum

Für die Magnetisierung gilt (siehe Abb. 3.3):

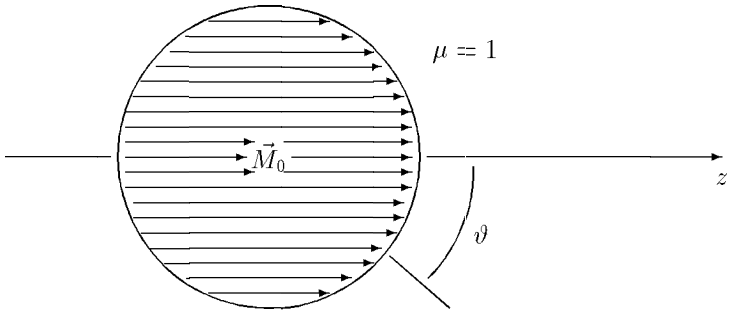


Abbildung 3.3: *Die homogen magnetisierte Kugel*

$$\vec{M} = \begin{cases} M_0\vec{e}_z & \text{innerhalb} \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{M} = 0 \quad \text{innerhalb.}$$

Wir wählen die Methode des magnetischen Skalarpotentials. Es tritt wegen der homogenen Magnetisierung nur der Oberflächenterm von (3.41) auf:

$$\Phi_M = \oint_F \frac{\vec{M}\vec{n}'dF'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = M_0 a^2 \int d\Omega' \cos\vartheta' \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta',\phi') Y_{lm}(\vartheta,\phi)$$

mit $dF' = a^2 \sin\vartheta' d\vartheta' d\phi' = a^2 d\Omega'$. $r_>$ bedeutet wieder den größeren, $r_<$ den kleineren der beiden Radien a und r. Die magnetische Oberflächenladung ist $\sigma_M = \vec{M}\vec{n} = M_0 \cos\vartheta$. Man beachte nun, daß

$$\cos\vartheta' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\vartheta',\phi') \quad .$$

Aufgrund der Orthonormalitätsrelationen für Kugelflächenfunktionen bleibt also von der Summe zum Glück nur ein Term übrig, nämlich der für $m = 0,\ l = 1$:

$$\Phi_M(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} M_0 a^2 \frac{r_<}{r_>^2} \cos\vartheta = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} M_0 r \cos\vartheta & \text{für } r < a \\ \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \frac{\cos\vartheta}{r^2} & \text{für } r > a \end{cases}$$

Mit $r\cos\vartheta = z$ und der Ersetzung $\vec{m} := \frac{4\pi a^3}{3}\vec{M}$ wird dies zu

$$\Phi_M(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} M_0 z & \text{für } r < a \\ \frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3} & \text{für } r > a \end{cases}$$

Damit erhält man für die Felder im Inneren:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M = -\frac{4\pi}{3}\vec{M} \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \frac{8\pi}{3}\vec{M}$$

... also *homogene Felder*. Im Außenraum gilt

$$\vec{H} = \vec{B} = \frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r})}{r^3} - \frac{\vec{m}}{r^3} \quad .$$

Von außen sieht also die Kugel genau wie ein magnetischer Dipol aus. Tatsächlich ist es der *einzige Körper*, der homogen magnetisiert diese Eigenschaft besitzt (so wie es auch in der Elektrostatik bei homogener Ladungsdichte die *Kugel* war, die nach außen wie ein reiner *Monopol* wirkte).

Man beachte, daß die Normalkomponente des $\vec{H}$-Feldes an der Kugeloberfläche aufgrund der effektiven Oberflächenladung σ_M "springt", während $\vec{B}$ natürlich quellenfrei ist. Im Inneren der Kugel weisen $\vec{H}$ und $\vec{B}$ sogar in verschiedene Richtungen!

Kapitel 4

Elektrodynamik

4.1 Gesetze des elektrischen Stromes

4.1.1 Erstes Kirchhoff-Gesetz

Der Zusammenhang zwischen Leitungsstrom und Stromdichte lautet bekanntlich

$$Id\vec{l} = \vec{j}d^3r \qquad \Rightarrow I = \int_F \vec{j}d\vec{F} \quad . \tag{4.1}$$

Das bedeutet nichts anderes, als daß man den durch eine Fläche F fließenden Gesamtstrom I erhält, wenn man über dieser Fläche die Stromdichte $\vec{j}$ integriert (natürlich inclusive cosinus durch das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor).

Wir wollen zunächst *stationäre Ströme* betrachten, wobei $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, woraus über die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$ folgt. Schon jetzt ist es möglich, z. B. das erste Kirchhoff-Gesetz, d. h. die Knotenregel, abzuleiten. Wir betrachten eine Stromverzweigung (Abb. 4.1):

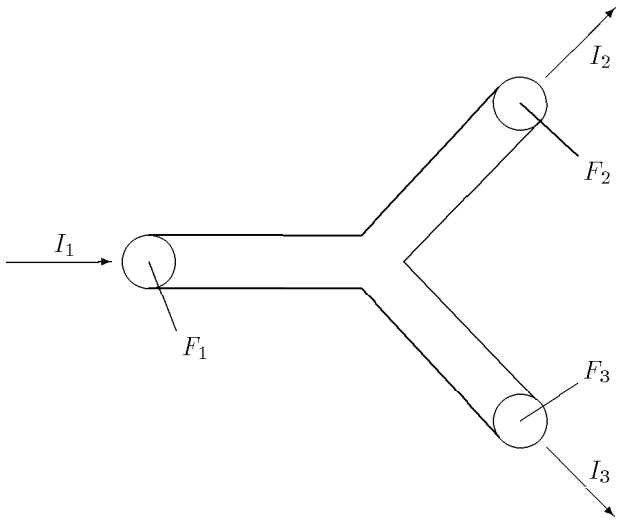


Abbildung 4.1: *Eine Stromverzweigung mit Teilströmen und den Grenzflächen, durch die sie hindurchtreten*

$$\vec{\nabla}\vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_{F_1} \vec{j}d\vec{F}}_{-I_1} + \underbrace{\int_{F_2} \vec{j}d\vec{F}}_{I_2} + \underbrace{\int_{F_3} \vec{j}d\vec{F}}_{I_3} = 0$$

Hierbei wurde der Satz von Gauß

$$\oint_{\partial V} \vec{j}d\vec{F} = \int_V \vec{\nabla}\vec{j}dV$$

verwendet. Eigentlich muß man sich das Flächenintegral bei der Verzweigung um die gesamte Anordnung herum gezogen denken. Da aber außerhalb der Leiter kein Strom fließt, genügt es, die Flächenstücke F_x zu betrachten.

4.1.2 Ohmsches Gesetz

Das *Ohmsche Gesetz* besagt, daß zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung U und dem durch sie bewirkten Strom I ein *linearer Zusammenhang* besteht:

$$I = \frac{U}{R} \tag{4.2}$$

Die Proportionalitätskonstante $1/R$ ist der Kehrwert des *elektrischen Widerstandes* R. Betrachtet man einen zylinderförmigen Leiter des Querschnittes F und der Länge l, so ergibt sich für den elektrischen Widerstand eine Proportionalität zu l und eine umgekehrte Proportionalität zu F:

$$R = \frac{l}{F\sigma} \implies \frac{I}{F} = \sigma\frac{U}{l} \tag{4.3}$$

σ ist dabei als *elektrische Leitfähigkeit* definiert. Zusätzlich zu den Maxwell-Gleichungen erhält man somit eine weitere *Materialgleichung*:

$$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{E}, \quad \text{oder auch:} \quad j_i = \sigma_{ik}E_k \tag{4.4}$$

Das bedeutet, daß der *Leitfähigkeitstensor* $\underline{\underline{\sigma}}$ im allgemeinen Fall eine *anisotrope, räumlich inhomogene* Beziehung ($\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r})$) zwischen Stromdichte und elektrischem Feld vermittelt.

4.1.3 Joulesche Wärme

Um zu untersuchen, wie elektrische Energie in Wärme umgesetzt wird, betrachten wir die Entladung eines Kondensators: Ein Kondensator mit der Kapazität C trägt die Ladung Q. Parallel zu ihm liegt ein Widerstand R.

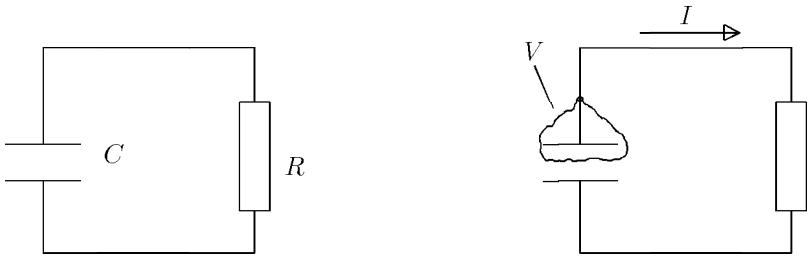


Abbildung 4.2: *Entladung eines Kondensators über einen Widerstand. Rechts: Der Entladestrom I muß durch die Fläche hindurch, die die obere Platte vollständig umschließt.*

Bezeichnet man mit U die elektrische Spannung (die Potentialdifferenz) zwischen den Kondensatorplatten (oder was immer die ladungstragenden Teile sind — auch der Mensch bildet zusammen mit der Erde einen Kondensator, der u. U. auf respektable Spannungen aufgeladen sein kann), so gilt laut Definition der Kapazität:

$$Q(t) = C \cdot U(t), \text{ außerdem ist} \quad I(t) = \frac{U(t)}{R} \tag{4.5}$$

Man stelle sich nun eine geschlossene Fläche vor, die *eine* der Kondensatorplatten vollständig umschließt und folglich an einer Stelle von der Zuleitung durchstoßen wird (Abb. 4.2 rechts). Wendet man auf das so erzeugte Volumen V die Kontinuitätsgleichung an, so folgt:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d^3r = -\int_V \vec{\nabla}\vec{j}\, d^3r = -\oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{F} = -I$$

Mit $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, d^3r = \dot{Q}$ erhält man die bekannte Beziehung

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{Q(t)}{CR} \quad . \tag{4.6}$$

Die Lösung für diese Differentialgleichung lautet offensichtlich

$$Q(t) = Q_0\, e^{-t/RC} \qquad \Rightarrow \qquad U(t) = \frac{Q}{C} = U_0\, e^{-t/RC} \quad . \tag{4.7}$$

Die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie beträgt bekanntlich $W = \frac{1}{2}CU^2$. Damit erhält man die im Widerstand umgesetzte Wärmeleistung zu

$$P(t) = -\dot{W} = -CU\frac{dU}{dt} = -U\dot{Q} = U(t)\cdot I(t) \quad . \tag{4.8}$$

4.2 Lorentz-Kraft und magnetische Induktion

Die *Lorentz-Kraft* ist die auf ein Teilchen der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ausgeübte mechanische Kraft:

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.9}$$

Diese Beziehung ist *experimentell ermittelt* und kann (bis jetzt noch) nicht aus theoretischen Ansätzen hergeleitet werden.

Wir werden im folgenden einen ersten Bezug zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen aufbauen, und zwar mittels eines Experiments, bei dem sich eine geschlossene Leiterschleife (also ein Medium, das bewegliche Ladungen enthält) durch ein nicht notwendigerweise homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Wir nehmen ferner an, daß keine elektrischen Felder, also auch keine rein elektrostatischen Kräfte auf das Teilchen existieren (Abb. 4.3).

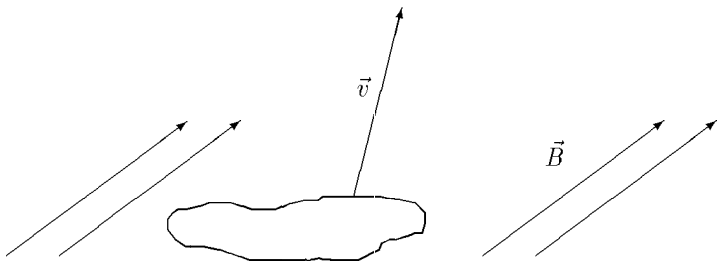


Abbildung 4.3: *Bewegung einer Leiterschleife durch ein Magnetfeld*

Das experimentelle Ergebnis ist hier, daß man (unter bestimmten Bedingungen) einen Stromfluß messen kann. Geht man nun davon aus, daß ein Stromfluß durch ein *elektrisches Feld* zustande kommt (genauso war ja das $\vec{E}$-Feld definiert, nämlich über die Kraft auf eine Probeladung), so kann man annehmen, daß durch die Bewegung der Leiterschleife durch das $\vec{B}$-Feld ein *elektrisches* Feld $\vec{E}_{\mathrm{ind}}$ *induziert*[1] wurde:

$$\Longrightarrow \qquad \vec{F} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{E}_{\mathrm{ind}} \tag{4.10}$$

Dies ist ein äußerst wichtiger Punkt: Man kann also in einem Leiter dadurch einen Stromfluß erzeugen, daß man ihn in einer bestimmten Richtung durch ein $\vec{B}$-Feld bewegt, nämlich so, daß $\vec{v} \times \vec{B}$ über die Leiterlänge integriert nicht verschwindet (die Integration deshalb, weil sich ja die Spannung, die den Strom dann zur Folge hat, durch Aufsummieren aller $\vec{E}$-Feldanteile errechnet). Genauso läßt sich sagen,

[1] Leider taucht der Terminus "Induktion" sowohl als Bezeichnung für das $\vec{B}$-Feld auf (*magnetische Induktion*), als auch für die Beschreibung des Vorgangs der Erzeugung elektrischer Felder aus zeitveränderlichen Magnetfeldern. Meist ist aber klar, was gemeint ist.

daß man durch die Bewegung ein neues, *elektrisches* Feld erzeugt hat. Hier finden wir die erste *Verbindung von elektrischen und magnetischen Erscheinungen.* Außerdem kommt zum ersten Mal *Dynamik* in die Sache:

> DIE VERBINDUNG ZWISCHEN ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN ERSCHEINUNGEN WIRD VON NICHTSTATIONÄREN VORGÄNGEN VERMITTELT !

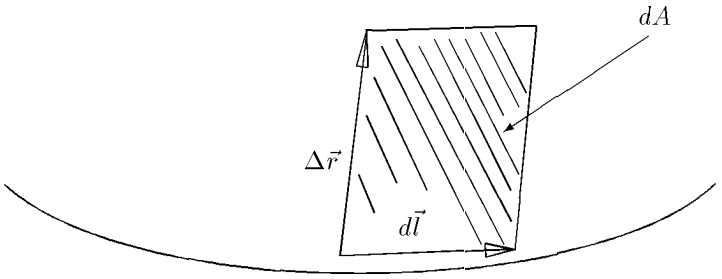
Wie groß ist nun die Spannung genau, die den Stromfluß im Leiter bewirkt? Aus (4.10) folgt durch Integration entlang der Leiterschleife:

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial F} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{\partial F} \frac{1}{c} \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) d\vec{l}$$

Die Leiterschleife bewegt sich in der Zeit Δt um den Vektor $\Delta \vec{r}$. Also gilt:

$$\vec{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad U_{\text{ind}} \Delta t = \frac{1}{c} \oint_{\partial F} \left(\Delta \vec{r} \times \vec{B} \right) d\vec{l} = \frac{1}{c} \oint_{\partial F} \left(d\vec{l} \times \Delta \vec{r} \right) \cdot \vec{B} = \frac{1}{c} \int_A \vec{B} d\vec{A} \qquad (4.11)$$

Im vorletzten Schritt wurde hier das Spatprodukt "durchrotiert". Das letzte Integral wird über die *Mantelfläche* gezogen, die die Leiterschleife bei ihrer Bewegung überstreicht — das orientierte Flächenelement von A wird offensichtlich durch $d\vec{A} = d\vec{l} \times \Delta \vec{r}$ beschrieben (s. Abb. 4.4).



$$d\vec{A} = d\vec{l} \times \Delta \vec{r}$$

Abbildung 4.4: *Ein Stück der Leiterschleife, vergrößert. Das Mantelflächen-Element ist die Fläche, die $d\vec{l}$ und $\Delta \vec{r}$ bei der Bewegung der Leiterschleife aufspannen.*

Betrachten wir nun die beiden Zeitpunkte t und $t + \Delta t$. Während des kurzen Intervalls hat sich die Leiterschleife um $\Delta \vec{r}$ weiterbewegt. Bildet man aus der eben erwähnten Mantelfläche und den von der Leiterschleife eingeschlossenen Flächen vor und nach der Bewegung die Umhüllung eines abgeschlossenen Volumens V, so gilt wegen $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$:

$$\oint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0 = \int_{\text{Mantel}} \vec{B} d\vec{A} + \int_{\substack{\text{Deckel} \\ \text{Boden}}} \vec{B} d\vec{A}$$

Bei den "Deckel"- und "Boden"-Integralen ist natürlich das Flächenelement $d\vec{A}$ *nicht* mehr gleich dem in Abb. 4.4 angegebenen Ausdruck. Dann folgt aus (4.11)

$$U_{\text{ind}} \Delta t = -\frac{1}{c} \int_{\substack{\text{Deckel} \\ \text{Boden}}} \vec{B} d\vec{A} = -\frac{1}{c} \left[\int_{\text{Deckel}} \vec{B} d\vec{A} - \int_{\text{Boden}} \vec{B} d\vec{A} \right] \quad .$$

Das Vorzeichen des "Boden"-Integrals wurde hier umgedreht, weil die Orientierung des Normalenvektors auf Deckel und Boden gleich sein soll. Dann ist nämlich der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich der Ableitung des Deckel- (oder Boden-) Integrals nach der Zeit multipliziert mit Δt. Damit folgt:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_F \vec{B} d\vec{F}}_{=:\Phi}$$

Das Integral bezeichnet den *magnetischen Fluß* oder *Induktionsfluß* Φ durch die von der Leiterschleife umschlossene Fläche F. Außerdem ist natürlich

$$U_{\rm ind} = \oint_{\partial F} \vec{E}_{\rm ind} d\vec{l} \stackrel{\rm Stokes}{=} \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\vec{F} \quad .$$

Wir erhalten so eine auf nichtstationäre Vorgänge verallgemeinerte *Maxwell- Gleichung:*

$$\oint_{\partial F} \vec{E}_{\rm ind} d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{4.12}$$

Diese Gleichung ist auch als das *Faraday'sche Induktionsgesetz* bekannt. Vor allem die Integralform ist bei der Berechnung von Induktionsspannungen in symmetrischen Anordnungen nützlich.

Der uns bisher bekannte Satz von Maxwell-Gleichungen lautet mit dieser Ergänzung also (in differentieller Form):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= 4\pi\rho & \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 & \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3 Selbstinduktion und gegenseitige Induktion. Stromkreise

In den folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß man es mit *quasistationären Verhältnissen* zu tun hat. Der Terminus "quasistationär" ist exakt so definiert, daß in den *vollständigen* Maxwell-Gleichungen der Verschiebungsstrom (s. Kap. 4.4.1) vernachlässigt, Induktionsvorgänge (Faraday-Gesetz!) jedoch berücksichtigt werden. Eigentlich ist also mit den Gleichungen, die bis *jetzt* abgeleitet sind, keine andere als eine quasistationäre Elektrodynamik beschreibbar. Fürs erste soll jedoch die Veranschaulichung genügen, daß in den betrachteten Situationen die Zeit, die das Licht zur Zurücklegung der Strecke zwischen zwei entfernten Punkten einer Leiteranordnung benötigt, verschwindend klein sein soll.

Man betrachte nun n Stromkreise, in denen die Ströme $I_k,\ k = 1 \ldots n$ fließen. Sei Φ_j der Induktionsfluß durch die vom j-ten Stromkreis eingeschlossene Fläche F_j. Dieser Fluß wird erzeugt durch die Magnetfelder aller anderen Kreise *und* vom Feld des j-ten Kreises selbst:

$$\frac{1}{c}\Phi_j = \frac{1}{c}\int_{F_j} \vec{B} d\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} L_{jk} I_k \tag{4.14}$$

Die L_{jk} sind dabei Proportionalitätskonstanten. Man bezeichnet L_{jj} als *Selbstinduktivität* des Stromkreises j, und $L_{jk},\ j \neq k$, als *gegenseitige Induktivität* des j-ten mit dem k-ten Kreis.

Diese Koeffizienten kann man etwas genauer betrachten. Der von einem bestimmten Stromkreis k durch sein Magnetfeld B_k im Kreis j bewirkte Induktionsfluß (das ist einer der Summanden in (4.14)) berechnet sich zu: (keine Summation!)

$$L_{jk} I_k = \frac{1}{c}\int_{F_j} \underbrace{\vec{B}_k}_{=(\vec{\nabla}\times\vec{A})_k} d\vec{F}_j \stackrel{\rm Stokes}{=} \frac{1}{c}\oint_{\partial F_j} d\vec{l}_j \vec{A}_k = \frac{\mu}{c^2}\oint_{\partial F_j} d\vec{l}_j \oint_{\partial F_k} d\vec{l}_k \frac{I_k}{|\vec{l}_j - \vec{l}_k|}$$

Hier wurde die lineare Antwort eines eventuell vorhandenen Mediums (μ) vorausgesetzt.[2] Damit gilt also für die gegenseitige Induktion

$$L_{jk} = \frac{\mu}{c^2}\oint_{\partial F_j}\oint_{\partial F_k} \frac{d\vec{l}_j \cdot d\vec{l}_k}{|\vec{l}_j - \vec{l}_k|} \qquad \Longrightarrow \qquad L_{jk} = L_{kj} \quad . \tag{4.15}$$

[2]Das μ ist hier nicht "hineingeschmuggelt" worden. Man betrachte die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ .$$

Gilt nun $\vec{B} = \mu\vec{H}$, so kann man das $\vec{H}$-Feld eigentlich vergessen und schreibt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \ .$$

Also ist das $\vec{B}$-Feld einfach μ-mal stärker als *ohne* Material, da die Rotation ein linearer Operator ist.

Also ist bei der gegenseitigen Induktion keiner der beiden Stromkreise ausgezeichnet.

Nach den eben angestellten Untersuchungen zu der Wechselwirkung vieler Stromkreise betrachte man nun wieder n Stromkreise, die diesmal jedoch neben Induktivitäten auch je einen ohmschen Widerstand $R_j, j = 1 \ldots n$ enthalten. Außerdem befinde sich in jedem Kreis eine Spannungsquelle, die dort eine Spannung U_j^a einprägt (Abb. 4.5).

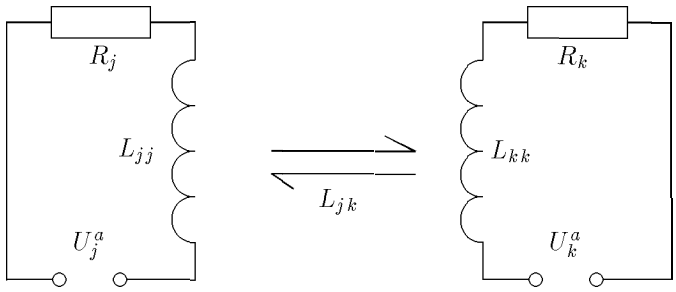


Abbildung 4.5: *Stromkreise mit gegenseitigen und Selbstinduktivitäten, in denen von außen zusätzlich Spannungen eingeprägt sind.*

Sei Φ_j wieder der Induktionsfluß durch den j-ten Kreis. Dann gilt die Maschenregel (keine Summation)

$$I_j R_j = U_j^a + U_j^i = U_j^a - \frac{1}{c}\dot{\Phi}_j \quad .$$

Dabei ist U_j^i die im Stromkreis induzierte Spannung (Faraday-Gesetz!). Dann ist wegen (4.14) (keine Summation über j !):

$$U_j^a = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\frac{dI_k}{dt} + I_j R_j \tag{4.16}$$

Man betrachte nun folgende Spezialfälle:

a) $n = 1, U^a = 0$. Dann gilt

$$L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad I(t) = I_0\, e^{-tR/L} \tag{4.17}$$

Der Quotient R/L heißt *Zeitkonstante* der Anordnung.

b) $n = 1, U^a = U_0 \cos\omega t$. Es ergibt sich eine inhomogene Dgl. bekannten Typs.

$$\Longrightarrow \qquad I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \tag{4.18}$$

Allerdings gilt das erst im eingeschwungenen Zustand (die Lösung der homogenen Dgl. ist ja eine abklingende e-Funktion, siehe a). Dann gilt weiter:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{4.19}$$

Den Wurzelausdruck im Nenner der ersten Gleichung bezeichnet man als *Impedanz* der gegebenen R-L-Anordnung. Die Wurzel ist eine "pythagoräische Summe". Man beachte schon hier den Bezug zu den komplexen Zahlen.

Im allgemeinen Fall schreibt man für harmonische Vorgänge lieber e-Funktionen statt die unhandlichen sin- und cos-Terme und nimmt dann den Realteil, um zu physikalischen Größen zurückzukommen:

$$I(t) = \Re\left(\tilde{I}(t)\right) = I_0 \Re\left(e^{i(\omega t - \varphi)}\right)$$

Die Tilden über den komplexen Wechselgrößen werden im folgenden weggelassen, wenn klar ist, daß es sich um solche handelt.

Hinweis: In der Literatur herrscht Uneinigkeit über das bei der Maschenregel zu verwendende Zählpfeilsystem. Wir setzen hier die Summe aller Spannungen im Maschenumlauf *gleich Null*. Die Richtung, in der die Spannungspfeile in der Masche eingetragen werden, ist eigentlich egal, wenn man nur eine einheitliche Konvention über die Polaritäten trifft — z. B. daß ein Pfeil immer vom *positiven* zum *negativen* Pol einer Spannungsquelle geht (bei Wechselspannungen ist sogar das irrelevant, hier bewirkt das Umdrehen des Zählpfeiles eben eine Phasendrehung um π). Bei den Verbrauchern, die ja keine Pole im Sinne einer Spannungsquelle haben, kann man den Pfeil in der Tat *irgendwie* antragen. Beim Umlauf in der Masche werden nun die Spannungen negativ gezählt, deren Pfeile entgegen der Umlaufrichtung (die mit der Stromrichtung übereinstimmen sollte) zeigen. Im Lauf der Rechnung ergeben sich dann automatisch die richtigen Polaritäten, bezogen auf die gewählte Richtung der Zählpfeile.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und einen Stromkreis betrachten, der *ohmsche*, *induktive* und *kapazitive* Elemente enthält, zusammen mit einer eingeprägten Spannung U^a (Abb. 4.6).

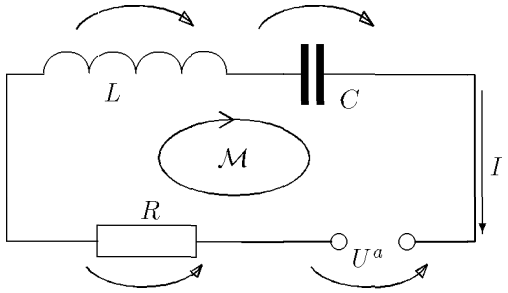


Abbildung 4.6: *R, L, C und U^a bilden einen gedämpften Schwingkreis mit äußerer Anregung.*

Auch hier führt die Maschenregel auf eine bekannte lineare Differentialgleichung, diesmal jedoch von zweiter Ordnung:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = U^c - U^a \tag{4.20}$$

Mit $I = -C\frac{dU^c}{dt}$ aus Gl. (4.5) wird dies zu

$$U^c + RC\frac{dU^c}{dt} + LC\frac{d^2U^c}{dt^2} = U^a \quad .$$

Aus dieser einfachen Differentialgleichung bekommt man nun eine sehr leistungsfähige Methode zur Berechnung von Wechselstromkreisen. Wir nehmen an, die Erregerspannung sei harmonisch in der Zeit:

$$U^a(t) = U_0\, e^{i\omega t} \qquad \Longrightarrow \qquad I(t) = I_0\, e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Dies ergibt sich aus der Lösung der inhomogenen Dgl. für U^c, das ja mit I nur über eine Ableitung verknüpft ist (s.o.). Also besteht zwischen der Erregerspannung und dem Strom im Kreis eine *Phasenverschiebung*. Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich (dank der harmonischen Zeitabhängigkeiten — man beachte die komplexen Größen)

$$\tilde{U}^a = R\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} - \frac{i\tilde{I}}{\omega C} = \tilde{R}\tilde{I} \quad \text{, mit} \quad \tilde{R} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad . \tag{4.21}$$

Also ein *Ohmsches Gesetz*, nur jetzt mit komplexen Wechselgrößen und einem *komplexen* Widerstand $\tilde{R}$. $\tilde{R}$ vermittelt durch sein Argument die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, wie dies durch (4.21) zum Ausdruck kommt.

Man sieht hier sofort, daß bei fehlendem ohmschem Anteil in $\tilde{R}$ die Phasenverschiebung genau $\pi/2$ beträgt, denn dann ist $\tilde{R}$ rein imaginär. Den Betrag $|\tilde{R}|$ nennt man *Impedanz*, wie oben beim Spezialfall "*RL*" bereits erwähnt.

Da sich $R = \Re(\tilde{R})$ nicht ändern kann, erhält man genau dann minimale Impedanz, d. h. größtmöglichen Effektivstrom, wenn $|\Im(\tilde{R})|$ minimal ist, d. h. wenn

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{(Resonanzbedingung)}. \tag{4.22}$$

Mit Hilfe dieser komplexen Widerstände läßt sich das Verhalten von Schaltungen mit induktiven, kapazitiven und ohmschen Elementen genauso leicht berechnen, als hätte man es *nur* mit ohmschen Größen zu tun. Man setzt einfach die komplexen Werte in die bekannnten Ohmschen und Kirchhoffschen Gesetze ein und bildet zum Schluß z. B. den Betrag, um Spannungsverhältnisse zu berechnen bzw. bestimmt die Phase, um Verschiebungen festzustellen. Das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung, und deren Phasenverschiebung läßt sich so in Schaltungen wie der in Abb. 4.7 leicht berechnen (siehe auch [13, Kap. 8]).

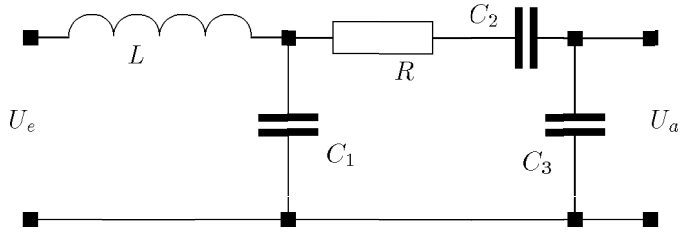


Abbildung 4.7: *Ein RLC-Netzwerk, bei dem Eingangs- und Ausgangsspannung phasenverschoben sind.*

Das eben Gesagte läßt sich natürlich auch — wie eingangs bei den einfacheren Schaltungen auch beschrieben — auf beliebig viele *induktiv gekoppelte* Stromkreise erweitern, es ergeben sich dann eben Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen. Die zu (4.20) analoge Gleichung lautet dann für den j-ten Stromkreis analog (keine Summation über j !):

$$\sum_{k=1}^{n} L_{jk}\frac{dI_k}{dt} + R_j I_j = U_j^c + U_j^a$$

Es gibt n Kreise, also hat man ein System von n gekoppelten, linearen, inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

4.4 Maxwell-Gleichungen und Erhaltungssätze

4.4.1 Der Maxwell-Term: Verschiebungsstrom

Man betrachte die Gleichung für $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ in (4.13) noch einmal genauer. Aus ihr folgt durch Bildung der Divergenz

$$\vec{\nabla}\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 \quad .$$

Dies widerspricht aber der Kontinuitätsgleichung, die ja $\vec{\nabla}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ lautet. Man beachte hierzu auch noch einmal Abb. 4.2 rechts. Dort wird der Sachverhalt unmittelbar deutlich.

Offensichtlich "fehlt" etwas in der eben erwähnten Maxwell-Gleichung. Es gilt nun:

$$4\pi\rho = \vec{\nabla}\vec{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Man kann also in der unvollständigen Maxwell-Gleichung die Stromdichte $\vec{j}$ durch einen Term *erweitern*, der proportional zu $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ ist, und so einen Ausdruck gewinnen, dessen Divergenz tatsächlich *immer* verschwindet. Der fehlende "Maxwell-Term" (dieser Term war es, der den Maxwell-Gleichungen erst ihren gemeinsamen Namen verlieh) hat die Dimension einer Stromdichte. Für ihn hat sich die unglückliche Bezeichnung *Verschiebungsstrom* eingebürgert (s. auch [9] und [13, Kap. 9]). Damit lautet die vollständige Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \quad . \tag{4.23}$$

Um zu verifizieren, daß die Einführung des Verschiebungsstromes auch wirklich Sinn macht, testen wir die neue Maxwell-Gleichung anhand einer genaueren Untersuchung des zu Abb. 4.2 auf Seite 58 gehörenden Beispiels.

Dort erhielten wir für den Stromfluß im Leiter folgende Zeitabhängigkeit:

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} = \frac{U_0}{R}\, e^{-t/RC}$$

Die Kondensatorplatten haben die Fläche A und den Abstand d. Wir sehen den Kondensator als *ideal* an, d. h. Streufelder werden nicht berücksichtigt (der Abstand der Platten ist genügend klein) und das Feld im Inneren soll homogen sein. Da sich das Ganze im Vakuum abspielt, ist $\vec{E} = \vec{D}$ und $\vec{B} = \vec{H}$. Für die elektrische Feldstärke gilt dann

$$\vec{E}(t) = \vec{e}_z \frac{U(t)}{d} = \vec{e}_z \frac{U_0}{d}\, e^{-t/RC} \quad \text{, und damit } \dot{\vec{D}} = \dot{\vec{E}} = -\vec{e}_z \frac{U_0}{dRC}\, e^{-t/RC} \quad .$$

Außerhalb des Kondensators ist sowohl der Verschiebungsstrom als auch der Leitungsstrom Null. Trotzdem kommt es darauf an, auf welche Weise man das entstehende Magnetfeld um den Leiter berechnet. Wir unterscheiden zwei Fälle, die zum gleichen Ergebnis führen sollten:

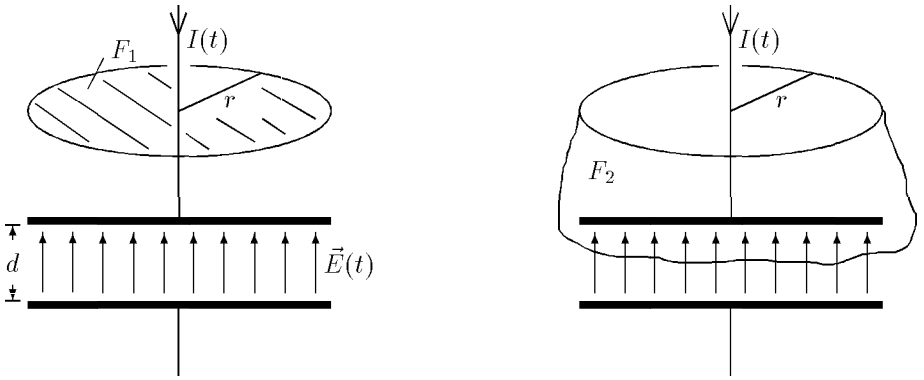


Abbildung 4.8: *Ein Kondensator wird entladen. Das Magnetfeld um den Leiter kann mit dem Satz von Stokes auf zwei Arten berechnet werden. Der Verschiebungsstrom stellt die Gleichheit der Ergebnisse sicher.*

i) Berechnung durch Anwendung des Stokesschen Satzes auf die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad .$$

Der Verschiebungsstrom verschwindet, wenn man die Integrationsfläche außerhalb des Kondensators wählt (Abb. 4.8 links). Es gilt (die Normalenrichtung auf die Fläche F_1 wird in Richtung des Stromflusses gewählt):

$$\int_{F_1} \vec{\nabla} \times \vec{B}\, d\vec{F} = \frac{4\pi}{c} \int_{F_1} \vec{j} d\vec{F} = \frac{4\pi}{c}\, I(t)$$

ii) Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Integrationsfläche *durch den Kondensator* zu legen (Abb. 4.8 rechts). Hier verschwindet der *Leitungsstrom,* und es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$$

zu integrieren:

$$\int_{F_2} \vec{\nabla} \times \vec{B}\, d\vec{F} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \int_{F_2} \vec{E}\, d\vec{F} = \frac{1}{c}\frac{AU_0}{dRC}\, e^{-t/RC} = \frac{4\pi}{c}\, I(t) \ ,$$

wegen $I_0 = U_0/R$ und $C = A/4\pi d$. Das Minuszeichen aus der Zeitableitung wird durch das dem Normalenvektor entgegen gerichtete $\vec{E}$-Feld kompensiert.

Die beiden Ansätze führen also zum gleichen Ergebnis. Wäre der Verschiebungsstrom nicht in den Maxwell-Gleichungen enthalten, so ergäbe sich hier (wie schon oben im allgemeinen Fall) ein Widerspruch! Natürlich funktioniert das für *jeden beliebigen* Stromverlauf $I(t)$.

Nunmehr können die jetzt *wirklich kompletten* Maxwell-Gleichungen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= 4\pi\rho & \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 & \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Und die Materialgleichungen für Medien mit linearer Antwort lauten:

$$\vec{D}=\epsilon\vec{E} \qquad \vec{B}=\mu\vec{H} \qquad \vec{\jmath}=\underline{\underline{\sigma}}\vec{E} \tag{4.25}$$

Mit diesem vollständigen Satz von Gleichungen hat man das Rüstzeug für die klassische Elektrodynamik in der Hand.

Auf geht's.

4.4.2 Potentiale. Eichungen II

Die Maxwell-Gleichungen enthalten sechs Variable $(\vec{E},\vec{B})$, die zu ihrer vollständigen Lösung zu berechnen sind. Im folgenden wird gezeigt, daß dieses Gleichungssystem *überbestimmt* ist, und daß zur Beschreibung der Elektrodynamik, d. h. zur Festlegung aller Felder, *vier* Variablen in *zwei* Gleichungen genügen.

Aus $\vec{\nabla}\vec{B}=0$ folgt bekanntlich: $\exists\vec{A}\ :\ \vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$. Eingesetzt in die Maxwell-Gleichung für $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ ergibt das:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad \exists\,\phi\ :\ \vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\vec{\nabla}\phi$$

$$\Longrightarrow\qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{4.26}$$

Man beachte, daß ϕ hier genau dann das gewohnte Skalarpotential aus der Elektrostatik darstellt, wenn man es mit stationären Vorgängen zu tun hat. Insofern ist der erste Term auf der rechten Seite als "elektrostatischer", der zweite als "induktiver" Anteil des $\vec{E}$-Feldes zu bezeichnen.

Wir betrachten jetzt nur die Situation im Vakuum, also ist $\mu=\epsilon=1 \quad\Rightarrow\quad \vec{D}=\vec{E}$ und $\vec{B}=\vec{H}$. Dann folgt mit (4.26) aus

$$\vec{\nabla}\vec{E}=4\pi\rho \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=-4\pi\rho \qquad\Longrightarrow\qquad \Delta\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A})=-4\pi\rho\ . \tag{4.27}$$

Das ist die erste der erwähnten Gleichungen. Die vier Variablen stecken in ϕ und $\vec{A}$. Nun geht es noch darum, $\vec{B}$ zu eliminieren. Von Maxwell weiß man

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})-\Delta\vec{A}}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}\ ,\ \text{und nach (4.26) ist}\ \ \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=-\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}\ .$$

Das alles eingesetzt ergibt die zweite gesuchte Gleichung:

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)=-\frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} \tag{4.28}$$

Also hat man die vier Maxwell-Gleichungen (gekoppelte partielle Dgl. erster Ordnung) auf *zwei gekoppelte inhomogene partielle Dgl. zweiter Ordnung*

$$\Delta\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A})=-4\pi\rho \tag{A}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{B}$$

reduziert und damit gleichzeitig die Elektrodynamik auf den *Potentialen* $\vec{A}$ und ϕ aufgebaut, statt auf den realen, physikalischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Da aber die Felder *Ableitungen* der eben erwähnten Potentiale sind, hat man bei diesen gewisse Freiheiten:

ELEKTROMAGNETISCHE FELDER SIND EICHINVARIANT !

Was das genau bedeutet, wird im folgenden klar.

Es wäre ja beispielsweise wünschenswert, wenn die beiden eben abgeleiteten Differentialgleichungen *entkoppelt* wären. Und genau das ist durch die Eichinvarianz möglich geworden. Aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ folgt, wie bereits in Abschnitt 3.1.4 erwähnt, daß $\vec{B}$ unverändert bleibt, wenn man zu $\vec{A}$ den Gradienten einer skalaren Funktion Λ addiert: $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$, mit $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$. Da in der Gleichung (4.26) für $\vec{E}$ das Vektorpotential vorkommt, gilt also für das $\vec{E}$-Feld:

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = -\vec{\nabla}\underbrace{\left(\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\right)}_{\stackrel{!}{=}\phi} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

Damit sich das $\vec{E}$-Feld bei der erwähnten Transformation für $\vec{A}$ — so wie $\vec{B}$ — nicht ändert, muß der Klammerausdruck gleich ϕ sein. Das impliziert die folgende Transformation für ϕ:

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \tag{4.29}$$

Eichung bedeutet also, die Potentiale, aus denen die Felder abgeleitet werden, so zu "verbiegen", daß sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändern. Wie (4.29) zeigt, hängen dabei die Eichungen von ϕ und $\vec{A}$ voneinander ab.

Der Sinn des Ganzen ist nun, diese Freiheiten so auszunutzen, daß in der aktuellen "mathematischen Situation" die Gleichungen möglichst *einfach* werden. Man beachte, daß Λ noch überhaupt nicht spezifiziert ist — *jedes* Skalarfeld ist geeignet. Dadurch sind noch alle Möglichkeiten offen, denn in den bisherigen Erörterungen ist noch überhaupt keine besondere Forderung an Λ gestellt worden!

Lorentz-Eichung So stört zum Beispiel der Klammerterm in Gleichung (B). Gibt es also ein Λ, so daß diese Klammer verschwindet? Die Bedingung lautet:

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi \tag{4.30}$$

Setzt man diesen Ausdruck direkt in Gleichung (A) ein, so ergibt sich

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -4\pi\rho \quad . \tag{4.31}$$

Das ist offensichtlich eine inhomogene *Wellengleichung* für ϕ, die $\vec{A}$ *nicht enthält*. Man beachte, daß durch das Wegfallen des Klammerterms auch (B) zu einer inhomogenen Wellengleichung, und zwar für $\vec{A}$, wird:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.32}$$

Trotz allem ist Λ noch immer nicht bestimmt. Man betrachte noch einmal die Bedingung (4.30). Sie gilt ja für die neuen, *bereits geeichten* Potentiale. Versieht man diese Potentiale mit einem Strich, die "alten" jedoch nicht, so lautet (4.30):

$$\vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi' = 0 = \vec{\nabla}\vec{A} + \Delta\Lambda + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda$$

Hier wurde Gleichung (4.29) verwendet. Es folgt unmittelbar

$$\Longrightarrow \qquad \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = -\left(\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) \quad . \tag{4.33}$$

Das ist also die Bedingung, der Λ gehorchen muß. Es handelt sich abermals um eine inhomogene Wellengleichung, bei der die Inhomogenität aus einem Ausdruck besteht, der die alten, "ungeeichten" Potentiale $\vec{A}$ und ϕ enthält. Gleichung (4.33) heißt auch *Lorentz-Bedingung*, und die Forderung (4.30) heißt *Lorentz-Eichung*. Durch diese Maßnahmen bewirkt man also eine *Entkopplung* der Gleichungen (A) und (B) und erhält zwei inhomogene Wellengleichungen für die Potentiale ϕ und $\vec{A}$, nämlich (4.31) und (4.32). **Man beachte, daß man hier ganz nebenbei die Existenz elektromagnetischer Wellen vorausgesagt hat, denn die Wellengleichungen drücken ja nichts anderes aus, als daß die betroffenen Felder Wellencharakter besitzen.**

Erwähnenswert ist noch, daß im Spezialfall stationärer Verhältnisse die Lorentz-Bedingung offensichtlich zu einer Poisson-Gleichung wird:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\Lambda = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\Lambda = -\vec{\nabla}\vec{A}$$

Seien nun die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ so beschaffen, daß sie schon der Lorentz-Eichung unterliegen, d. h. $\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$. Die Frage ist dann, ob es immer noch möglich ist, eine Skalare Funktion λ zu finden, mit der diese Potentiale geeicht werden können, ohne daß sich die Felder ändern. Aus (4.33) folgt unmittelbar, daß λ genau dann die Forderungen erfüllt, wenn es einer *homogenen Wellengleichung* gehorcht:

$$\Delta\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda = 0 \tag{4.34}$$

Eine Eichung unter Verwendung dieses λ nennt man *eingeschränkte Eichtransformation*, denn man beschränkt sich ja auf solche λ, die der Bedingung (4.34) genügen.

Coulomb-Eichung Bereits in Abschnitt 3.1.4 wurde die *Coulomb-Eichung* vorgestellt, die an das neue Vektorpotential die Forderung $\vec{\nabla}\vec{A}' = 0$ stellt. Für das Eichfeld λ ist dann eine Poisson-Gleichung zu lösen: $\Delta\lambda = -\vec{\nabla}\vec{A}$ (*dieses* $\vec{A}$ ist jetzt das alte, ungeeichte Vektorpotential). Zieht man wieder die Gleichungen (A) und (B) zu Rate und setzt dort $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ ein, so gewinnt man aus (A) die Bestimmungsgleichung für ϕ:

$$\Delta\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A}) = -4\pi\rho \quad \wedge \quad \vec{\nabla}\vec{A} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\phi = -4\pi\rho \quad . \tag{4.35}$$

Bekannterweise lautet die Lösung für diese Poisson-Gleichung

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r' \quad . \tag{4.36}$$

Gleichung (B) wird unter der Coulomb-Eichung zu einer inhomogenen Wellengleichung für $\vec{A}$:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi \tag{4.37}$$

Dies kann man noch etwas vereinfachen. Es läßt sich nämlich zeigen, daß ein bestimmter Anteil der Stromdichte $\vec{j}$ den ϕ-Term auf der rechten Seite kompensiert. Dazu zeigt man zunächst, daß sich jedes Vektorfeld $\vec{j}(\vec{r},t)$ in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Anteil aufspalten läßt:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'}_{=\vec{j}_l} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int \frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'}_{=\vec{j}_t} \tag{4.38}$$

Den ersten Summanden auf der rechten Seite nennt man den *longitudinalen Anteil* $\vec{j}_l$, den zweiten den *transversalen Anteil* $\vec{j}_t$ des Feldes $\vec{j}$. Offensichtlich gilt wie gefordert

$$\vec{\nabla}\vec{j}_t = 0 \quad \wedge \quad \vec{\nabla} \times \vec{j}_l = 0 \ .$$

Zum Beweis von (4.38) betrachte man die Vektoridentität

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \ ,$$

die für jedes freundliche Vektorfeld $\vec{A}$ gilt. Dann ist also

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'\right] = \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'\right] - \Delta\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' =$$

$$= -\vec{\nabla}\int \vec{j}(\vec{r}\,',t)\vec{\nabla}_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r' + \int \vec{j}(\vec{r}\,',t)\cdot 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r' \overset{p.I.}{=} \vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' + 4\pi\vec{j}(\vec{r},t) \ ,$$

was zu beweisen war. Hierbei wurde die Identität $\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ benutzt. Um nun die gewollte Vereinfachung zu erhalten, schreibt man $\vec{j}_l$ etwas um, indem man die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$ einsetzt:

$$\vec{j}_l = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi$$

Der letzte Schritt verwendet dabei die Lösung für ϕ aus der Coulomb-Eichung (Gl. (4.36)). Damit gilt: $\frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_l$. (4.37) wird so zu

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_t \ , \tag{4.39}$$

da sich der longitudinale Anteil der Stromdichte mit dem ϕ-Term verflüchtigt.

Betrachtet man nun den Fall verschwindender Strom- und Ladungsdichte, also $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$, so ist $\phi = 0$ und für $\vec{A}$ gilt wieder eine homogene Wellengleichung:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0$$

Arnowitt-Fickler-Eichung In manchen Fällen mag es wünschenswert erscheinen, das Vektorpotential $\vec{A}$ so zu eichen, daß eine Komponente, z. B. A_z, verschwindet. Dies bezeichnet man als die *Arnowitt-Fickler-* oder *axiale Eichung.* Im allgemeinen Fall ist es dann möglich, das $\vec{A}$-Feld so zu wählen, daß es zu einem *beliebigen* Normalenvektor $\vec{n}$ orthogonal ist: $\vec{A}\vec{n} = 0$. Der Einfachhheit halber beschränken wir uns hier auf die Elimination der z-Komponente, denn durch eine Drehung des Koordinatensystems ist der erwähnte allgemeine Fall dann stets erreichbar.

Man sucht also ein Skalarpotential ψ, so daß unter der Transformation $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ die z-Komponente von $\vec{A}$ verschwindet. Dazu muß der Gradient von ψ die z-Komponente $-A_z$ haben. Man setzt also

$$\psi := -\int_0^z A_z(x,y,z')\,dz' \ . \tag{4.40}$$

Für die dadurch erzwungene Transformation für ϕ gilt dann wieder (4.29).

4.4.3 Mikroskopische und makroskopische Maxwell-Gleichungen

Wenn auch die Maxwell-Gleichungen durch die Einbeziehung von elektrischer und magnetischer Polarisation bereits die Vorgänge in Materie beschreiben können, bleibt doch die Frage, ob die *makroskopischen* Gleichungen (4.24) auch wirklich durch einen geeigneten Mittelungsprozeß aus den mikroskopischen, leichter beherrschbaren Verhältnissen hervorgehen. *Mikroskopisch* gibt es nur die physikalischen Felder $\vec{e}$ und $\vec{b}$ (wir bezeichnen zur Unterscheidung diese Felder mit kleinen Buchstaben). Die Hilfsgrößen $\vec{d}$ und $\vec{h}$ treten nicht auf, da in genügend kleinen Dimensionen *alle Dipolmomente als aus freien*

Ladungen zusammengesetzt zu betrachten sind. Der Mittelungsprozeß einer beliebigen Funktion F ist zu verstehen als räumliche Faltung mit einer geeigneten Testfunktion $f(\vec{r})$:

$$\langle F(\vec{r},t)\rangle := \int f(\vec{r}\,')F(\vec{r}-\vec{r}\,',t)\,d^3r'$$

Die Testfunktion muß dabei die Bedingung $\int f(\vec{r})\,d^3r = 1$ erfüllen (vgl. entsprechende Situation in der Quantenmechanik). Üblicherweise wählt man etwas in der Art von

$$f(\vec{r}) = (\pi R)^{-3/2} e^{-r^2/R^2}\ ,$$

aber solange der Bereich, in dem f wesentlich von 0 verschieden ist (im Beispiel R), groß gegenüber typischen Molekülabmessungen ist, ist es eigentlich egal, wie diese Funktion genau aussieht. Man leitet leicht die folgenden Beziehungen ab:

$$\vec{\nabla}\,\langle F(\vec{r},t)\rangle = \left\langle \vec{\nabla} F(\vec{r},t)\right\rangle \qquad \frac{\partial\langle F(\vec{r},t)\rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial F(\vec{r},t)}{\partial t}\right\rangle$$

Die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen lauten nun:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{e} &= 4\pi\eta & \vec{\nabla}\times\vec{e} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{b} \\ \vec{\nabla}\vec{b} &= 0 & \vec{\nabla}\times\vec{b} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{e} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Die Funktionen η und $\vec{j}$ stellen die mikroskopische Ladungs- und Stromdichte dar.

Bei den beiden homogenen Gleichungen gibt es mit der Mittelung keine Schwierigkeiten, denn es ist $\vec{E} = \langle\vec{e}\rangle$ und $\vec{B} = \left\langle\vec{b}\right\rangle$, also gilt

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\ .$$

Probleme bereitet die Mittelung von η und $\vec{j}$. Es läßt sich zeigen, daß folgende Beziehungen erfüllt sind (siehe [9, Kap. 6.7]):

$$\langle\eta(\vec{r},t)\rangle = \rho(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\vec{P} \qquad \left\langle\vec{j}(\vec{r},t)\right\rangle = \vec{\jmath}(\vec{r},t) + c\vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)$$

Zusammen mit den Definitionen für $\vec{D}$ und $\vec{H}$ aus den Materialgleichungen (4.25) bekommt man durch einsetzen die bekannten Gleichungen

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

zurück. Die Sache funktioniert also.

4.4.4 Energie- und Impulserhaltung

a) Der Energiesatz

Bisher haben wir nur in der Elektrostatik Aussagen über den Energiegehalt des elektrischen Feldes gemacht. Gesucht ist jetzt ein allgemeines Gesetz über die Energieerhaltung (oder besser: den Energiefluß) in elektromagenetischen Feldern. Wir gehen aus von der elektromagnetischen Kraft auf ein geladenes Teilchen:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{4.42}$$

Die verbratene Leistung ergibt sich dann zu jedem Zeitpunkt mit

$$N = \vec{v}\vec{F} = q\vec{v}\vec{E} = \vec{\jmath}\vec{E}\ ,$$

das bedeutet, daß das Magnetfeld *keine Arbeit* am Teilchen verrichtet. Die gesamte in einem Volumen V umgesetzte Leistung ist dann gleich

$$\int_V \vec{j}\vec{E}\, d^3r' = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(c\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{E}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) d^3r' \quad .$$

Nun ist

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}} - \vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H}) \ ,$$

und damit

$$\int_V \vec{j}\vec{E}\, d^3r' = -\frac{1}{4\pi}\int_V \left(c\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{E}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{H}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) d^3r' \quad . \tag{4.43}$$

Mit den freundlichen Annahmen der Linearität, Homogenität und Isotropie des Mediums ist dann

$$\vec{E}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\vec{D}) \qquad \vec{H}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\vec{B}) \quad .$$

An dieser Stelle definiert man die *Energiedichte* zu

$$w := \frac{1}{8\pi}\,(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) \ , \tag{4.44}$$

und (4.43) wird zur *Energie-Bilanzgleichung*

$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H})\right) d^3r' = -\int_V \vec{j}\vec{E}\, d^3r' \quad . \tag{4.45}$$

Das muß für jedes beliebige Volumen V gelten. Also gilt auch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = -\vec{j}\vec{E} \ , \tag{4.46}$$

mit der Definition

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{H} \qquad (\textit{Poynting-Vektor}) \quad .$$

Gleichung (4.46) ist von zentraler Bedeutung. Sie sagt aus, daß die Quellen und Senken der *Energiestromdichte* $\vec{S}$ an Orten veränderlicher Energiedichte liegen und/oder an Orten, wo Leistung durch Bewegung von Ladung gegen einen Widerstand aufgebracht wird (Joulesche Wärme!).

b) Der Impulssatz

Um ein analoges Gesetz für den Impuls aufzustellen, geht man wieder von (4.42) aus und berücksichtigt $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Dann gelangt man durch Integration über ein Volumen V zu

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \int_V \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right) d^3r' \quad . \tag{4.47}$$

Da man Ladung und Geschwindigkeit durch Strom- und Ladungsdichten ersetzt hat, steht im Integranden rechts eine *Kraftdichte*. Wir betrachten im folgenden nur die Situation im Vakuum, d. h. $\epsilon = \mu = 1$. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho &=& \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\vec{E} \\ \vec{j} &=& \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\vec{\nabla}\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{B}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right) \quad .$$

Mit

$$\frac{1}{c}\vec{B}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \frac{1}{c}\vec{E}\times\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}}_{=-c(\vec{\nabla}\times\vec{E})}$$

und dem Trick, $0 = \vec{B}\vec{\nabla}\vec{B}$ zu addieren, bekommt man also schließlich

$$\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\vec{\nabla}\vec{E} + \vec{B}\vec{\nabla}\vec{B} - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right) - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) \quad . \tag{4.48}$$

Der Vektor

$$\vec{g} := \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{B})$$

heißt *elektromagnetische Impulsdichte*. Der Grund für diese Bezeichnung wird später klar. Wie man sieht, entspricht $\vec{g}$ im Vakuum dem Poynting-Vektor dividiert durch c^2. Den Rest von (4.48) kann man weiterverarbeiten, wenn man die Beziehung

$$\left[\vec{A}\vec{\nabla}\vec{A} - \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[A_iA_k - \frac{1}{2}\vec{A}^2\delta_{ik}\right]$$

verwendet (Einstein-Konvention!). Der Klammerausdruck stellt offenbar einen Tensor zweiter Stufe dar. Wir definieren den *Maxwellschen Spannungstensor* zu

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ik}\right] \quad .$$

Dann gilt, wenn man den Impuls in (4.47) als mechanischen Impuls $\vec{p}_{mech}$ auffaßt,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{p}_{mech} + \underbrace{\int_V g(\vec{r},t)\,d^3r}_{=\vec{p}_{Feld}}\right)_i = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ik}d^3r = \oint_{\partial V} T_{ik}n_k dF \quad . \tag{4.49}$$

Der letzte Ausdruck gibt also dann die *Kraft* an, die insgesamt auf den Rand des betrachteten Volumens ausgeübt wird. Damit ist der *Impulserhaltungssatz* für elektromagnetische Felder hergeleitet. Er besagt insbesondere, daß jedem elektromagnetischen Feld ein Impulsgehalt $\vec{p}_{Feld}$ zuzuordnen ist. Folglich ist es prinzipiell möglich, mit Hilfe solcher Felder Materie zu bewegen (Strahlungsdruck!).

4.5 Transformationseigenschaften der Felder

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Eigenschaften der elektromagnetischen Felder und Quellen unter

- Drehungen
- Spiegelungen
- Zeitumkehr.

Als Anwendung für die abgeleiteten Gesetze wird dann der Hall-Effekt herhalten.

4.5.1 Drehungen

Die *Drehung* eines Vektors um eine bestimmte Achse soll die Eigenschaft besitzen, daß die Länge des Vektors unverändert bleibt. Allein aus dieser Forderung läßt sich die zentrale Bedingung dafür herleiten, daß eine Matrix eine Drehmatrix ist. Sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektor und $R_{\alpha\beta}$ eine Matrix. Für die Transformation

$$v'_\alpha = R_{\alpha\beta}v_\beta$$

soll dann also $|\vec{v}\,'| = |\vec{v}|$ gelten:

$$|\vec{v}\,'|^2 = v'_\alpha v'_\alpha = R_{\alpha\beta}v_\beta R_{\alpha\gamma}v_\gamma = \left(R^T\right)_{\beta\alpha}R_{\alpha\gamma}v_\beta v_\gamma \stackrel{!}{=} v_\alpha v_\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(R^T\right)_{\beta\alpha}R_{\alpha\gamma} \stackrel{!}{=} \delta_{\beta\gamma}$$

Also lautet die Bedingung an $\underline{\underline{R}}$ *Orthogonalität*:

$$\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$$

Mit dem Determinantensatz bekommt man

$$\det\left(\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}\right) = \det\underline{\underline{R}}^T \det\underline{\underline{R}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det\underline{\underline{R}} = \pm 1 \quad .$$

Für $\det\underline{\underline{R}} = 1$ nennt man die Drehung *eigentlich,* für $\det\underline{\underline{R}} = -1$ *uneigentlich,* es handelt sich dann um eine mit einer Spiegelung verknüpfte Drehung.

Wie verhalten sich nun verschiedene Objekte unter Drehungen? Zunächst ist es offensichtlich, daß *Skalare* unter Drehungen *invariant* sind. Komplizierter wird es mit dem Kreuzprodukt. Sei $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$, also

$$A_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\beta C_\gamma \quad .$$

Was passiert mit $\vec{A}$, wenn $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einer Drehung unterworfen werden? Es gilt

$$\vec{A}\,' = \vec{B}\,' \times \vec{C}\,' \quad \Rightarrow \quad A'_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} R_{\beta\delta} B_\delta R_{\gamma\eta} C_\eta = \varepsilon_{\chi\beta\gamma} R_{\beta\delta} B_\delta R_{\gamma\eta} C_\eta R_{\chi\nu} R_{\alpha\nu} \quad .$$

Dabei wurde unter Verwendung der Orthogonalität von $\underline{\underline{R}}$ einfach eine Einheitsmatrix hinten angehängt. Nun muß man die spezielle Darstellung der Determinante

$$\det\underline{\underline{R}} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} R_{\alpha 1} R_{\beta 2} R_{\gamma 3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \det\underline{\underline{R}} = \varepsilon_{\eta\delta\rho} R_{\eta\alpha} R_{\delta\beta} R_{\rho\gamma}$$

benutzen. Durch sie bekommt man dann

$$A'_\alpha = \det\underline{\underline{R}}\, R_{\alpha\nu} A_\nu \ ,$$

und dieses Ergebnis besagt, daß sich Kreuzprodukte unter eigentlichen Drehungen ganz normal verhalten, unter uneigentlichen Drehungen aber die zugehörige Spiegelung einfach nicht "mitmachen". Solche Vektoren heißen *Pseudovektoren.* Durch die Determinante der Drehmatrix wird jede eventuell in der Drehung enthaltene Spiegelung wieder eliminiert: Pseudovektoren sind invariant unter Spiegelungen.

4.5.2 Räumliche Spiegelung

Hierzu ist das meiste bereits bei den Drehungen abgehandelt worden. Die einer reinen Spiegelung zugeordnete Transformationsmatrix hat nur Diagonalelemente; sie sind alle vom Betrag 1, wobei eine ungerade Anzahl (also eines oder alle drei) von ihnen negativ ist. Dann ist also $\det\underline{\underline{R}} = -1$. Unter Spiegelungen wird der Unterschied zwischen Vektoren (auch *polare* Vektoren) und Pseudovektoren (auch *axiale* Vektoren) deutlich:

a) *polare Vektoren:* $\vec{v} \longrightarrow \vec{v}\,' = -\vec{v}$

b) *axiale Vektoren:* $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}\,' = \vec{A}$

Auch bei Skalaren gibt es eine Unterscheidung in *Skalare* und *Pseudoskalare,* je nachdem, ob bei Spiegelungen das Vorzeichen bleibt oder sich ändert. Demnach ist $\vec{A}\vec{B}$ ein Skalar, falls $\vec{A}$ und $\vec{B}$ Vektoren sind. Hingegen ist $\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C})$ ein Pseudoskalar: er ändert unter räumlicher Spiegelung der drei Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ sein Vorzeichen.

4.5.3 Zeitumkehr

Zeitumkehr bedeutet die Inversion der Zeitachse: $t \longrightarrow t' = -t$. Es ist klar, daß sich dabei der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ nicht ändert, wohl aber seine zeitliche Ableitung: $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{r} \longrightarrow \vec{v}\,' = -\vec{v}$.

Wir untersuchen nun die Felder in den Maxwell-Gleichungen für Vakuum auf ihr Verhalten unter räumlicher Spiegelung und Zeitumkehr. Zunächst betrachte man

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \quad .$$

Da ρ ein Skalar und $\vec{\nabla}$ ein polarer Vektor ist, muß $\vec{E}$ ein polarer Vektor sein. Das Verhalten von $\vec{E}$ unter Zeitumkehr ergibt sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$$

Offensichtlich ist $\ddot{\vec{r}}$ invariant (gerade) unter Zeitumkehr, also auch $\vec{E}$.

Die Flußdichte $\vec{B}$ ist ein *axialer* Vektor, wie sich aus

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\text{axial}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

ergibt, denn auch $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ist axial. Außerdem ist $\vec{B}$ offenbar ungerade bezüglich Zeitumkehr, denn $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ist gerade — die Zeitableitung muß durch ein weiteres Minuszeichen kompensiert werden.

In unserer Betrachtung fehlt noch der Vektor $\vec{j}$. Aus

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\text{polar}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}}_{\text{polar}}$$

erhält man $\vec{j}$ als polar und ungerade unter Zeitumkehr. Tabelle 4.1 enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse. Abgesehen von den vier hier betrachteten Größen lassen sich auch noch andere (z. B. der

Größe	**Art**	**Zeitumkehr**	**Spiegelung**
$\vec{E}$	Vektor	gerade	polar
$\vec{B}$	Pseudovektor	ungerade	axial
$\vec{j}$	Vektor	ungerade	polar
ρ	Skalar	gerade	invariant

Tabelle 4.1: *Das Verhalten der Felder und Quellen unter räumlicher Spiegelung und Zeitumkehr.*

Spannungstensor) in dieses Schema einordnen, siehe dazu [9, Kap. 6.11].

Als Anwendung für die gewonnenen Erkenntnisse betrachten wir den Hall-Effekt. Eine Probe sei einem magnetischen Feld $\vec{B}$ senkrecht zu einem Stromfluß $\vec{I}$ ausgesetzt (dieser Strom wird durch ein äußeres elektrisches Feld hervorgerufen). Bekanntlich stellt sich dann entlang der Achse senkrecht zu $\vec{I}$ und $\vec{B}$ ein elektrisches Feld ein. Dieser Vorgang soll genauer untersucht werden. Was man kennt, ist das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad j_i = \sigma_{ik}E_k \quad \Rightarrow \quad E_i = \rho_{ik}j_k \quad .$$

Die letzte Gleichung enthält ρ_{ik} als tensoriellen spezifischen Widerstand. Dieser ist nun irgendeine Funktion des Magnetfeldes $\vec{H}$, und unter Berücksichtigung dieser Tatsache und der Eigenschaften der Felder und Quellen unter räumlicher Drehung soll ein verallgemeinertes Ohmsches Gesetz hergeleitet werden, das kleine $\vec{H}$-Felder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt.

Die Transformationsformeln für die beteiligten Größen lauten

$$E_i' = R_{ip}E_p \qquad j_k' = R_{kq}j_q \qquad H_l' = R_{ls}H_s \det \underline{\underline{R}} \quad .$$

Zunächst muß ρ_{ik} nach Potenzen von $\vec{H}$ entwickelt werden. Für $\vec{E}$ bedeutet das

$$E_i = \rho_{ik}^0 j_k + \rho_{ikl}j_k H_l + \rho_{iklm}j_k H_l H_m \quad . \tag{4.50}$$

Dreht man nun das Koordinatensystem mittels einer orthogonalen Transformationsmatrix, so darf sich die Struktur dieser Entwicklung nicht ändern, nur daß jetzt die transformierten Felder eingesetzt sind. Mit Umbenennung einiger Indizes (das passiert hier öfters) ergibt sich so

$$R_{ap}E_p = \rho_{ik}^0 R_{kq}j_q + \rho_{akl}R_{kq}j_a \det \underline{\underline{R}} R_{ls}H_s + \rho_{aklm}R_{kq}j_q R_{ls}H_s R_{mt}H_t \quad .$$

Und dreht man jetzt mit der inversen Matrix wieder zurück, dann *muß* das alte $\vec{E}$-Feld herauskommen, also ist

$$E_i = \rho^0_{ak} R_{ai} R_{kq} j_q + \rho_{akl} R_{ai} R_{kq} R_{ls} \det\underline{\underline{R}}\, j_q H_s + \rho_{aklm} R_{ai} R_{kq} R_{ls} R_{mt} j_q H_s H_t \quad . \tag{4.51}$$

Das muß mit (4.50) übereinstimmen. Der Koeffizientenvergleich bzgl. der Ordnungen in $\vec{H}$ liefert dann die drei Beziehungen

$$\rho^0_{ik} = \rho^0_{aq} R_{ai} R_{qk} \tag{4.52}$$

$$\rho_{ikl} = \det\underline{\underline{R}}\, \rho_{aqs} R_{ai} R_{qk} R_{sl} \tag{4.53}$$

$$\rho_{iklm} = \rho_{aqst} R_{ai} R_{qk} R_{sl} R_{tm} \tag{4.54}$$

Man sucht jetzt Ausdrücke für ρ^0_{ik}, ρ_{ikl} und ρ_{iklm}, drei von $\vec{H}$ *unabhängige* Tensoren. Für ρ^0_{ik} ist das einfach. Wir setzen an, daß das Medium in 0. Ordnung in $\vec{H}$ *isotrop* ist. Demzufolge ist $\rho^0_{ik} := \rho\delta_{ik}$. Eingesetzt in die rechte Seite von (4.52) gibt das eine wahre Aussage.

Für ρ_{ikl} macht man einen intelligenten Ansatz. Man probiert

$$\rho_{ikl} := -R_H \varepsilon_{ikl} \ ,$$

wobei R_H eine Konstante ist (s. u.). Einsetzen in die rechte Seite von (4.53) liefert

$$-R_H \det\underline{\underline{R}} \underbrace{(\varepsilon_{aqs} R_{ai} R_{qk} R_{sl})}_{=\det\underline{\underline{R}}\,\varepsilon_{ikl}} = -R_H \epsilon_{ikl} \ ,$$

da $(\det\underline{\underline{R}})^2 = 1$. Das haut also auch hin.
Bei ρ_{iklm} bieten sich zwei Ansätze an:

- $\rho_{iklm} := \beta_1 \delta_{ik}\delta_{lm}$. Einsetzen in die rechte Seite von (4.54) gibt

  $$\beta_1 \delta_{aq}\delta_{st} R_{ai} R_{qk} R_{sl} R_{tm} = \beta_1 \delta_{ik}\delta_{lm} \ ,$$

  also korrekt.

- $\rho_{iklm} := \beta_2 \delta_{il}\delta_{km}$. Die Rechnung geht analog zum ersten Ansatz und führt wieder zu einer korrekten Aussage.

Da beide Ansätze zu richtigen Ergebnissen führen, müssen sie auch beide in die Lösung aufgenommen werden.

Die Entwicklung (4.51) lautet dann mit den eben abgeleiteten Ersetzungen

$$E_i = \rho\delta_{ik} j_k - R_H \varepsilon_{ikl} j_k H_l + \beta_1 \delta_{ik}\delta_{lm} j_k H_l H_m + \beta_2 \delta_{il}\delta_{km} j_k H_l H_m \ ,$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\vec{E} = \rho\vec{j} + R_H \vec{H} \times \vec{j} + \beta_1 \vec{j}\vec{H}^2 + \beta_2 (\vec{j}\vec{H})\vec{H} \quad . \tag{4.55}$$

Ist kein Magnetfeld vorhanden, so überlebt nur der erste Ausdruck auf der rechten Seite und das Medium ist isotrop, wie gefordert. Mit dem Anlegen eines $\vec{H}$-Feldes erscheinen die höheren Ordnungen der Entwicklung und *das Material wird anisotrop!*

4.6 Magnetische Monopole

Die Nichtexistenz von Quellen für die magnetische Flußdichte ($\vec{\nabla}\vec{B} = 0$) ist, wie mehrfach erwähnt, lediglich ein durch nichts widerlegtes Postulat. In der Tat gibt es bisher noch keine experimentellen Hinweise auf magnetische "Monopole", also Objekte, die Quellen für $\vec{B}$ darstellen; jedoch lassen sich die *möglichen Eigenschaften* dieser Gebilde recht genau vorhersagen. Außerdem bringt ihre Postulierung eine hohe Symmetrie in die Maxwell-Gleichungen. In diesem Abschnitt soll die Frage der magnetischen Monopole jedoch nur kurz angerissen werden.

Die mit magnetischen ("m") Ladungs- und Stromdichten erweiterten Feldgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= 4\pi\rho_e & \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 4\pi\rho_m & \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e \end{aligned} \tag{4.56}$$

Aus diesen folgt noch eine eigene "magnetische" Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_m + \vec{\nabla}\vec{j}_m = 0$$

Welche Auswirkungen hat die Hinzufügung magnetischer Quellen? Man betrachte dazu die folgende Feldtransformation:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}'\cos\xi + \vec{H}'\sin\xi & \vec{H} &= -\vec{E}'\sin\xi + \vec{H}'\cos\xi \\ \vec{D} &= \vec{D}'\cos\xi + \vec{B}'\sin\xi & \vec{B} &= -\vec{D}'\sin\xi + \vec{B}'\cos\xi \end{aligned} \tag{4.57}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese Transformation die Ausdrücke für Poynting-Vektor, Energiedichte und Maxwell-Spannungstensor in die gleichen Ausdrücke für die gestrichenen Felder überführt. Anders gesagt, die drei erwähnten Größen sind invariant gegenüber der Transformation (4.57). Beispiel Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned} \vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H}) &= \frac{c}{4\pi}\left((\vec{E}'\cos\xi + \vec{H}'\sin\xi)\times(-\vec{E}'\sin\xi + \vec{H}'\cos\xi)\right) = \\ &= \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}'\times\vec{H}'\cos^2\xi - \vec{H}'\times\vec{E}'\sin^2\xi\right) = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}'\times\vec{H}') = \vec{S}' \end{aligned}$$

Analog gilt $w = w'$ und $T_{ik} = T'_{ik}$. Konsequenterweise transformiert man nun auch die Quellen unter Anwendung von

$$\begin{aligned} \rho_e &= \rho'_e\cos\xi + \rho'_m\sin\xi & \vec{j}_e &= \vec{j}_e{}'\cos\xi + \vec{j}_m{}'\sin\xi \\ \rho_m &= -\rho'_e\sin\xi + \rho'_m\cos\xi & \vec{j}_m &= -\vec{j}_e{}'\sin\xi + \vec{j}_m{}'\cos\xi \quad . \end{aligned} \tag{4.58}$$

Aus den beiden Gleichungen für die Ladungsdichten läßt sich ρ'_e als Funktion von ρ_e und ρ_m ausdrücken:

$$\rho'_e = \rho_e\cos\xi - \rho_m\sin\xi$$

Und aus den Transformationsformeln für die Felder gewinnt man

$$\vec{D}' = \vec{D}\cos\xi - \vec{B}\sin\xi \ ,$$

also wird

$$\vec{\nabla}\vec{D}' = \vec{\nabla}\vec{D}\cos\xi - \vec{\nabla}\vec{B}\sin\xi = 4\pi(\rho_e\cos\xi - \rho_m\sin\xi) = 4\pi\rho'_e \quad .$$

Tatsächlich sind die Maxwell-Gleichungen *invariant* gegenüber der Transformation (4.57)-(4.58). Der Parameter ξ ist dabei völlig beliebig! Das bedeutet aber, daß er so bestimmt werden kann, daß die magnetische Ladung ρ_m verschwindet — vorausgesetzt, *für alle Teilchen ist das Verhältnis ρ'_m/ρ'_e gleich.* Man sieht das ein, indem man in der obigen Transformationsformel für ρ_m die linke Seite, also ρ_m, gleich 0 setzt. Dann ergibt sich zwanglos

$$\frac{\rho'_m}{\rho'_e} = \tan\xi \quad .$$

In diesem Fall wird dann auch $\vec{j}_m = 0$. Experimentelle Hinweise auf das Vorhandensein magnetischer Ladung in normaler Materie (Nukleonen) gibt es (innerhalb gewisser Fehlergrenzen) nicht. Das würde also heißen, daß für diese Teilchen das obige Verhältnis konstant ist. Bei anderen, kurzlebigen oder instabilen Teilchen kann man da nicht so sicher sein.

Zum Schluß soll noch die Frage erörtert werden, wie es mit dem Verhalten der magnetischen Quellen unter Spiegelung und Zeitumkehr steht. Da $\vec{B}$ axial und ungerade unter Zeitumkehr ist, muß ρ_m ein *Pseudoskalar* sein, der ebenfalls unter Zeitumkehr ungerade ist. Der Vektor $\vec{j}_m$ muß axial und unter Zeitumkehr gerade sein. Für weitere Informationen zum Thema "magnetische Monopole" ist [9, Kap. 6.12*ff*] empfehlenswert, außerdem die dort zitierten Veröffentlichungen.

4.7 Elektromagnetische Wellen

4.7.1 Ebene Wellen in nichtleitenden Medien

Wir betrachten ein lineares, homogenes, isotropes, nicht frequenzabhängiges, also freundliches Medium (ϵ, $\mu = \text{const.}$) ohne Quellen, d. h. $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{E} &= 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{aligned} \quad .$$

Aus den rechten beiden Gleichungen folgt

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{E})}_{=0} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \ ,$$

und damit die *homogene Wellengleichung*

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \tag{4.59}$$

mit $v = c/n$ und $n = \sqrt{\mu\epsilon}$. Die dimensionslose Zahl n heißt *Brechungsindex* des Mediums. Analog leitet man

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \tag{4.60}$$

ab. Man sieht hier, wie wichtig die Einführung des Verschiebungsstromes durch Maxwell für die Vorhersage elektromagnetischer Wellen war. Egal, welche Wellengleichung man nun betrachtet, gilt für eine Komponente des entsprechenden Feldes stets

$$\Delta u(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\vec{r},t) = 0 \quad . \tag{4.61}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung lautet offenbar

$$u(\vec{r},t) = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \ ,$$

und zwar genau dann, wenn

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \ ,$$

was man durch einsetzen bestätigt. Damit folgt unmittelbar, daß $|\vec{k}| = \omega/v = \sqrt{\mu\epsilon}\,\omega/c$. Dies ist die *Dispersionsrelation* für elektromagnetische Wellen in den betrachteten Medien. Wir untersuchen die Ausbreitung von Wellen in x-Richtung. Das heißt $\vec{k} \parallel \vec{e}_x$ und die Grundlösung für u lautet

$$u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)} = Ae^{ik(x-vt)} + Be^{-ik(x+vt)} \quad . \tag{4.62}$$

Das sind zwei Wellen , die sich in positive bzw. negative x-Richtung mit der *Phasengeschwindigkeit* $v = \omega/k$ ausbreiten. Allerdings gibt es noch weitere Lösungen. Jede Funktion der Form

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ik(x-vt)}dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k)\, e^{-ik(x+vt)}dk$$

ist Lösung der Wellengleichung (4.61). Also wieder zwei diesmal beliebige Funktionen (beispielsweise Impulse), die sich mit der Phasengeschwindigkeit in negative und positive x-Richtung fortbewegen. Hier nochmals eine Zusammenfassung der verschiedenen Beziehungen von v, n, c, μ, ϵ und k :

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \qquad v = \frac{c}{n} \qquad k = \frac{\omega}{v}$$

Wie sehen aber *vektorielle* Lösungen von (4.59) und (4.60) aus? Wir probieren den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{B}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \ ,$$

wobei nur der Realteil physikalische Relevanz haben soll. Aus der Quellenfreiheit von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ folgt dann

$$\vec{k}\vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \wedge \quad \vec{k}\vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}} \ \perp \ \vec{k} \ .$$

Man hat es also mit *Transversalwellen* zu tun. Die Feldvektoren stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Bleibt noch die Frage, wie $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{B}}$ zueinander stehen. Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = i\,\frac{\omega}{c}\vec{\mathcal{B}}$$

folgt

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{n\vec{k}}{k} \times \vec{\mathcal{E}} \ . \tag{4.63}$$

Dabei ist n wieder der Brechungsindex. Also ist auch $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{E}}$. Mit den Ersetzungen

$$\vec{e}_1 := \frac{\vec{\mathcal{E}}}{|\vec{\mathcal{E}}|} \qquad \vec{e}_2 := \frac{\vec{\mathcal{B}}}{|\vec{\mathcal{B}}|} \qquad \vec{\eta} := \frac{\vec{k}}{k}$$

bilden die drei Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{\eta}$ ein *Orthonormalsystem.* Falls $|\vec{\mathcal{E}}| = E_0$, dann ist also $\vec{\mathcal{B}} = nE_0\vec{e}_2$: das $\vec{B}$-Feld ist n-mal so stark wie das $\vec{E}$-Feld.

An dieser Stelle ist es angebracht, etwas über die Probleme bei Verwendung komplexer Feldgrößen zu sagen. Man muß berücksichtigen, daß der Realteil des *zeitlichen Mittels* des Produktes zweier komplexer Wechselgrößen mit harmonischer Zeitabhängigkeit gleich der Hälfte des Produktes der einen Größe mit dem konjugiert Komplexen der anderen Größe ist:

$$\overline{\vec{A}(\vec{r},t) \diamond \vec{B}(\vec{r},t)} = \frac{1}{2}\left(\vec{A}(\vec{r}) \diamond \vec{B}^*(\vec{r})\right) \tag{4.64}$$

Das Zeichen "$\diamond$" kann für "$\cdot$" oder auch "$\times$" stehen. Für den komplexen Poynting-Vektor der Energiestromdichte bedeutet das also mit den obigen Beziehungen

$$\vec{S} := \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|E_0|^2\vec{\eta} \ . \tag{4.65}$$

Die Erkenntnis dabei ist, daß Energieausbreitung immer in der Richtung stattfindet, in die sich auch die Welle bewegt. Für die zeitlich gemittelte Energiedichte gilt

$$w = \frac{1}{16\pi}\left(\epsilon\vec{E}\vec{E}^* + \frac{1}{\mu}\vec{B}\vec{B}^*\right) = \frac{\epsilon}{8\pi}|E_0|^2 \ . \tag{4.66}$$

Die Geschwindigkeit des Energiestromes ergibt sich dann aus dem Quotienten

$$\frac{|\vec{S}|}{w} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v \ ,$$

und ist (in diesem Fall) gleich der Phasengeschwindigkeit der Welle. Nun ist auch endlich klar, was die Konstante c in den Maxwell-Gleichungen bedeutet: es handelt sich um die *Vakuum-Lichtgeschwindigkeit!*

Vorhin wurde bemerkt, daß die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{\eta}$ ein Orthonormalsystem bilden. Es spricht jedoch nichts dagegen, eine zweite elektromagnetische Welle anzunehmen, deren $\vec{\mathcal{E}}$-Vektor in $\vec{e}_2$-Richtung zeigt und die der ersten überlagert ist. Die Darstellung einer allgemeinen ebenen Welle lautet also

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(E_1\vec{e}_1 + E_2\vec{e}_2\right) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \ .$$

Die Koeffizienten vor den Einheitsvektoren können natürlich komplex sein und beliebige Phasenfaktoren beinhalten:

$$E_1 = |E_1|\, e^{i\varphi_1} \qquad E_2 = |E_2|\, e^{i\varphi_2}$$

Man unterscheidet hier drei Fälle:

i) $\varphi_1 = \varphi_2$. Diese Welle heißt *linear polarisiert.* In jeder Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen die $\vec{E}$-Vektoren entlang einer Geraden.

ii) $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Das ist eine *elliptisch polarisierte* Welle. Die $\vec{E}$-Vektoren schwingen auf Ellipsenbahnen.

iii) $\varphi_1 = \varphi_2 - \pi/2$. Falls auch noch $|E_1| = |E_2|$ gilt, ist die Welle *zirkular polarisiert.*

4.7.2 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen. Fresnelsche Formeln

Wir untersuchen die Situation an der Grenzfläche zweier Medien mit den Brechungsindizes n und n'. Eine ebene elektromagnetische Welle mit dem Wellenvektor $\vec{k}$ treffe unter dem Winkel α auf die Grenzschicht, die in der xy-Ebene liege. Es gibt einen reflektierten (Wellenvektor $\vec{k}''$) und einen gebrochenen Anteil (Wellenvektor $\vec{k}'$). Die Winkel, die diese beiden Vektoren mit der z-Achse einschließen, seien β'' und β' (siehe Abb. 4.9). Zunächst eine Rekapitulation der schon aus der Optik bekannten Gesetzmäßig-

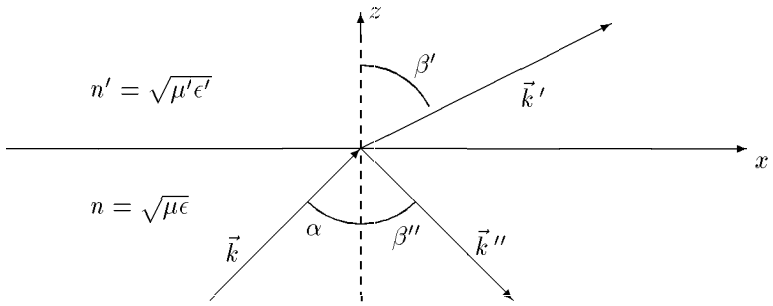


Abbildung 4.9: *Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei Medien*

keiten:

i) *Reflexionsgesetz.* Es ist $\alpha = \beta''$.

ii) *Snelliussches Brechungsgesetz.* Es gilt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \frac{n'}{n}$.

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben die zeitliche Entwicklung der Feldgrößen. Also müßten Reflexions- und Brechungsgesetz daraus herleitbar sein. Für die drei beteiligten ebenen Wellen machen wir die Ansätze

$$\begin{array}{lllllllll} \vec{E} & = & \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} & & \vec{E}' & = & \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)} & & \vec{E}'' & = & \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}''\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{B} & = & \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} & & \vec{B}' & = & \sqrt{\mu'\epsilon'}\frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{E}' & & \vec{B}'' & = & \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{E}'' \end{array} \quad .$$

Da einfallende und reflektierte Welle im selben Medium laufen, ist es klar, daß

$$|\vec{k}| = |\vec{k}''| = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon} \quad .$$

In der Ebene $z = 0$ und zum Zeitpunkt $t = 0$ müssen alle Grenzbedingungen für die beteiligten Felder erfüllt sein, welche das auch immer sind. Eine Bedingung dafür ist jedenfalls, daß dann die drei *Phasenfaktoren* übereinstimmen:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{k}\vec{r}\Big|_{z=0} & = & \vec{k}'\vec{r}\Big|_{z=0} & = & \vec{k}''\vec{r}\Big|_{z=0} \\ k_x x & = & k'_x x + k'_y y & = & k''_x x + k''_y y \end{array}$$

Hierbei wurde $\vec{k}$ gleich in die Ebene $y = 0$ gelegt. Es folgt, daß $\vec{k}$, $\vec{k}'$ und $\vec{k}''$ *in einer Ebene liegen,* also ist $k'_y = k''_y = 0$. Da dann $k_x = k''_x$ und (s. o.) $k = k''$, folgt

$$k_z = -k''_z \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta'' \quad .$$

Das ist aber das *Reflexionsgesetz!* Dagegen folgt aus $k_x = k'_x$:

$$k \sin\alpha = k' \sin\beta' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n}$$

Und damit ist auch das *Brechungsgesetz* hergeleitet. Man beachte, daß wir bis jetzt nichts als die Wellennatur des Lichtes verwendet haben. Die Maxwell-Gleichungen tauchten noch gar nicht auf!

Die geometrischen Gesetze der Reflexion und Brechung werden auch als *kinematische* Eigenschaften des Lichtes bezeichnet. Die *dynamischen* Eigenschaften beschreiben die Strahlungsintensität und Polarisation der reflektierten und gebrochenen Wellen. Sie ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für die verschiedenen Felder bei $z = 0$: Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ und $\vec{E}$, Normalkomponenten von $\vec{D}$ und $\vec{B}$. Unter Verwendung von $\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\,\vec{k} \times \vec{E}/k$, $k = n\omega/c$ und der Linearität der Medien ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left(\epsilon(\vec{E}_0 + \vec{E}''_0) - \epsilon'\vec{E}'_0\right)\vec{n} = 0 \qquad \text{für } \vec{D} \tag{4.67}$$

$$\left(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}''_0 - \vec{k}' \times \vec{E}'_0\right)\vec{n} = 0 \qquad \text{für } \vec{B} \tag{4.68}$$

$$\left(\vec{E}_0 + \vec{E}''_0 - \vec{E}'_0\right) \times \vec{n} = 0 \qquad \text{für } \vec{E} \tag{4.69}$$

$$\left(\frac{1}{\mu}(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}''_0) - \frac{1}{\mu'}\vec{k}' \times \vec{E}'_0\right) \times \vec{n} = 0 \qquad \text{für } \vec{H} \tag{4.70}$$

Dabei ist $\vec{n} = \vec{e}_z$. Aus der Optik weiß man schon, daß diese Gleichungen auf die *Fresnelschen Formeln* führen. Man unterscheidet dabei bekanntlich zwei Fälle:

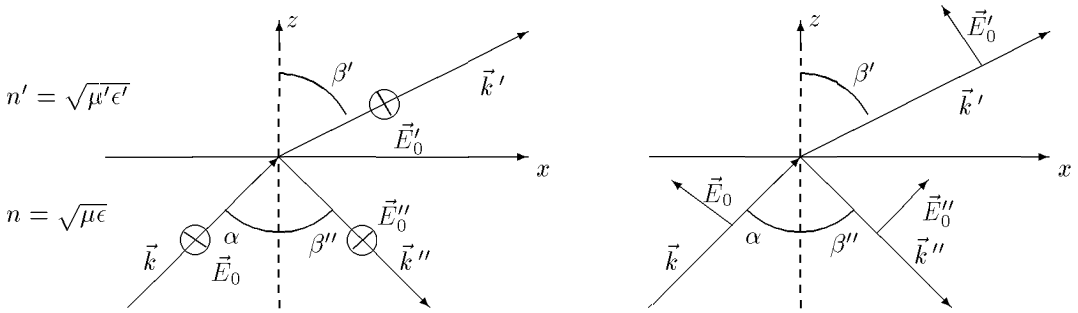


Abbildung 4.10: *Konventionen über Vektoren bei der Herleitung der Fresnelschen Formeln. Links bei zur Einfallsebene senkrechtem, rechts parallelem* $\vec{E}_0$.

i) $\vec{E}_0 \times (\vec{n} \times \vec{k}) = 0$. Der elektrische Feldvektor der einfallenden Welle steht senkrecht zu der von $\vec{k}$ und $\vec{n}$ aufgespannten *Einfallsebene* (Abb. 4.10 links). Gleichung (4.67) wird dadurch zu $0 = 0$, liefert also nichts Neues. Aus (4.68) wird

$$n\ (E_0 \sin\alpha + E''_0 \sin\alpha) - n' E'_0 \sin\beta' = 0\ ,$$

und zusammen mit $\sin\beta' = \sin\alpha\, n/n'$ ergibt sich

$$E_0 + E''_0 - E'_0 = 0\ . \tag{4.71}$$

Auf das gleiche Ergebnis führt auch (4.69). Bleibt noch (4.70), aus der man ähnlich (4.68)

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 - E''_0)\cos\alpha - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E'_0 \cos\beta' = 0 \tag{4.72}$$

ableitet. Aus (4.71) und (4.72) lassen sich die Verhältnisse E'_0/E_0 und E''_0/E_0 bestimmen und durch Anwendung des Brechungsgesetzes allein auf den Winkel α beziehen:

$$\left.\frac{E'_0}{E_0}\right|_\perp = \frac{2n\cos\alpha}{n\cos\alpha + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\alpha}} \tag{4.73}$$

$$\left.\frac{E_0''}{E_0}\right|_{\perp} = \frac{n\,\cos\alpha - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\alpha}}{n\,\cos\alpha + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\alpha}} \tag{4.74}$$

Das "$\perp$" bedeutet, daß diese Formeln nur für zur Einfallsebene senkrechtes $\vec{E}_0$ gelten.

ii) $\vec{E}_0 \cdot (\vec{n} \times \vec{k}) = 0$. Der Vektor $\vec{E}_0$ liegt in der Einfallsebene (Abb. 4.10 rechts). Die beiden Bestimmungsgleichungen bekommt man ganz analog wie in **i)** zu

$$(E_0 - E_0'')\,\cos\alpha - E_0'\cos\alpha' = 0 \tag{4.75}$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 + E_0'') - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0' = 0 \quad . \tag{4.76}$$

Und die Fresnelschen Formeln für zur Einfallsebene parallelem $\vec{E}_0$-Vektor lauten dann

$$\left.\frac{E_0'}{E_0}\right|_{\parallel} = \frac{2nn'\cos\alpha}{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\,\cos\alpha + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\alpha}} \tag{4.77}$$

$$\left.\frac{E_0''}{E_0}\right|_{\parallel} = \frac{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\,\cos\alpha - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\alpha}}{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\,\cos\alpha + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\alpha}} \tag{4.78}$$

In der Praxis kann man oft $\mu = \mu'$ setzen. Damit vereinfachen sich dann die Formeln etwas. Gleichung (4.78) verdient noch etwas mehr Aufmerksamkeit. Der Zähler der rechten Seite kann offensichtlich verschwinden, und das ist bei

$$\tan\alpha_B = \frac{n'}{n}$$

der Fall. Der spezielle Einfallswinkel α_B heißt *Brewster-Winkel*. Fällt Strahlung, egal welcher Polarisation, unter α_B auf die Grenzfläche, so ist der reflektierte Anteil linear und *senkrecht zur Einfallsebene polarisiert!* Hatte die einfallende Strahlung keine Komponente in dieser Richtung, dann wird eben gar nichts reflektiert.

4.7.3 Frequenzabhängigkeit von $\epsilon(\omega)$ und $\sigma(\omega)$

a) Oszillatormodell für $\epsilon(\omega)$

Wir betrachten ein Medium der Permeabilität $\mu = 1$ und vernachlässigen *lokale Feldeffekte*, d. h. unter anderem die gegenseitige Beeinflussung elementarer Dipole. Demzufolge müssen wir uns auf Medien mit geringer Dichte, z. B. Gase, beschränken. Als Modell für die molekulare Polarisierung dient eine kleine Masse m, die die Ladung q trägt und in einem harmonischen Potential $m\omega_0^2\vec{x}^2/2$ schwingen kann ($\vec{x}$ ist die Auslenkung aus der Ruhelage). Verluste werden durch eine Dämpfungskonstante γ vermittelt, es herrscht Stokes-Reibung. Die beschreibende Differentialgleichung lautet dann für ein einzelnes Molekül oder Atom:

$$m\,(\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}, t) \tag{4.79}$$

Bei Annahme harmonischer Anregung $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ und dem Ansatz $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ für die eingeschwungene Lösung ergibt sich

$$\vec{x}_0 = \frac{q\vec{E}_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad .$$

Diese Auslenkung $\vec{x}_0$ aus der Ruhelage bedeutet aber, daß ein molekulares *Dipolmoment* $\vec{p}$ erzeugt wird:

$$\vec{p} = q\vec{x}_0 = \frac{q^2}{m}\frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

Das läßt sich dann noch auf das äußere Feld $\vec{E}_0$ normieren und man erhält als *molekulare Polarisierbarkeit pro Teilchen*

$$\alpha = \frac{|\vec{p}|}{E_0} = \frac{q^2}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} = \alpha(\omega) \quad . \tag{4.80}$$

Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil heißt das (siehe auch Abb. 4.11)

$$\begin{aligned} \Re\alpha(\omega) &= \frac{q^2}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \\ \Im\alpha(\omega) &= \frac{q^2}{m}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \quad . \end{aligned}$$

Die Beziehung zur Dielektrizität ϵ schafft die Materialgleichung $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$. Da $\vec{P}$ aber eine Pola-

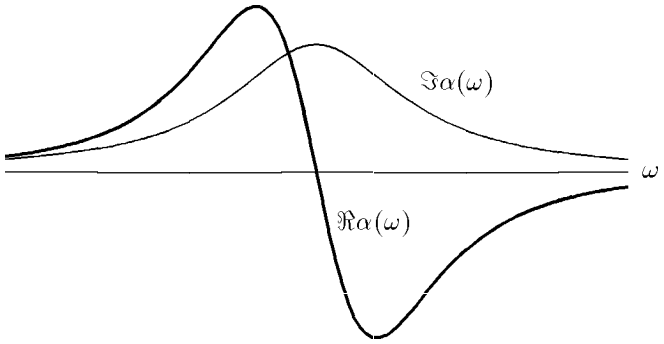


Abbildung 4.11: *Qualitativer Verlauf der komplexen Polarisierbarkeit α über ω im Oszillatormodell*

risations*dichte* ist (s. 2.87), muß auch irgendwo die Teilchendichte des Mediums eine Rolle spielen. Wir verallgemeinern gleich auf Materialien der Moleküldichte N, deren Moleküle jeweils Z schwingungsfähige Systeme (Elektronen) mit verschiedenen Eigenfrequenzen ω_j und Dämpfungskonstanten γ_j tragen. Dann ist also

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon(\omega)\vec{E} \ ,$$

mit

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi q^2 N}{m}\sum_{j=1}^{Z}\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j} \qquad \text{und} \qquad \sum_j f_j = Z \quad . \tag{4.81}$$

Die f_j heißen *Oszillatorstärken.* Nun lohnt eine genauere Untersuchung dieser Formel in verschiedenen Frequenzbereichen.

b) Niederfrequenzverhalten: $\omega \to 0$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

i) Das Medium ist ein *Isolator.* Dann gibt es keine freien Ladungsträger und die kleinste Eigenfrequenz ω_j ist verschieden von 0. Das hat zur Folge, daß $\lim_{\omega\to 0}\epsilon(\omega)$ existiert:

$$\lim_{\omega\to 0}\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi q^2 N}{m}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2}$$

ii) In Leitern gibt es freie Elektronen und die niedrigste Eigenfrequenz verschwindet für einige der Z Elektronen pro Molekül. Bei $\omega \to 0$ sind also diverse Glieder der Summe in (4.81) divergent. Man zerlegt dann $\epsilon(\omega)$ in konvergente (ϵ_0) und divergente Anteile:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i4\pi N\,\frac{q^2 f_0}{m\omega\,(\gamma_0 - i\omega)} \tag{4.82}$$

Um dieses Ergebnis interpretieren zu können, muß man die Maxwell-Gleichung für $\vec{\nabla}\times\vec{H}$ bemühen, außerdem die Beziehungen $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ und $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$. Zusammen mit der harmonischen Zeitabhängigkeit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ ergibt sich dann

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \left(\frac{4\pi}{c}\sigma - \frac{\epsilon_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E} = -\frac{i\omega}{c}\left(\frac{i4\pi\sigma}{\omega} + \epsilon_0\right)\vec{E} \quad .$$

Die Stromdichte hat sich verflüchtigt, stattdessen gibt es in dem Klammerausdruck eine *komplexe, verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante.* Identifiziert man diese mit (4.82), so bekommt man für die *Leitfähigkeit*

$$\sigma(\omega) = \frac{f_0 N q^2}{m\,(\gamma_0 - i\omega)} \qquad \text{(Drude-Modell)} \quad . \tag{4.83}$$

Bei niedrigen Frequenzen, genauer wenn $\omega \ll \gamma_0$, ist dieser Ausdruck beinahe ganz reell. Das bedeutet, im Medium sind Strom und elektrisches Feld praktisch in Phase, und die Leitfähigkeit hängt fast nicht von ω ab.

c) Hochfrequenzlimes: $\omega \gg \omega_j$

Bei großen Frequenzen dominiert im "Resonanznenner" von (4.81) der ω^2-Term; es wird

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \approx -\frac{1}{\omega^2} \ ,$$

und für $\epsilon(\omega)$ bedeutet das

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{1}{\omega^2} \underbrace{\left[\frac{4\pi N q^2}{m} \sum_j f_j\right]}_{=:\,\omega_p^2} =: 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad . \tag{4.84}$$

Die Größe ω_p heißt *Plasmafrequenz.* Da $\sum_j f_j = Z$, gilt also

$$\omega_p = 2\sqrt{\frac{\pi N Z q^2}{m}} \quad .$$

Normalerweise gilt (4.84) nur für $\omega \gg \omega_p$. Allerdings gibt es Fälle (Ionosphäre), wo die Dämpfungskonstante γ so klein ist, daß diese Formel auch für kleinere Frequenzen bis unter ω_p richtig ist. Aus (4.84) ergibt sich dann eine interessante Folgerung für das Eindringverhalten elektromagnetischer Wellen. Es ist nämlich

$$\omega^2\epsilon = \omega^2 - \omega_p^2 \quad \Rightarrow \quad \omega n = ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \ ,$$

für $\mu = 1$, und das bedeutet, daß für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz die Wellenzahl *rein imaginär wird!* Dies hat offenbar ein exponentielles Abklingen der Wellenamplitude zur Folge, falls eine ebene Welle auf das Medium trifft: es wird alles reflektiert.

4.7.4 Ebene Wellen in leitenden und dissipativen Medien

Dieses verschärfte Szenario wird hier anhand einiger Spezialfälle diskutiert. Wie üblich geht man von den Annahmen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

aus und macht die folgenden Ansätze für Felder und Quellen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{B}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad \rho(\vec{r},t) = \tilde{\rho}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \ ,$$

wobei der Beitrag von ρ zum $\vec{E}$-Feld vernachlässigt werden soll. Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} i\epsilon_0 \vec{k}\vec{E} &= 4\pi\rho & i\vec{k} \times \vec{E} &= \frac{i\omega}{c}\vec{B} \\ \vec{k}\vec{B} &= 0 & \frac{1}{\mu} i\vec{k} \times \vec{B} &= \frac{1}{c}\,(4\pi\sigma - i\omega\epsilon_0)\vec{E} \end{aligned} \quad .$$

Nun zu den erwähnten Spezialfällen.

a) $\rho = 0$**.**

In diesem Fall ist also auch $\vec{k}\vec{E} = 0$. Die Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden ein kartesisches Dreibein, so wie das früher schon einmal abgeleitet wurde. Da wir es jetzt aber mit ebenen Wellen zu tun haben, wird alles einfacher:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = \vec{k} \underbrace{(\vec{k}\vec{E})}_{=0} - \vec{k}^2 \vec{E} = \frac{\omega}{c} (\vec{k} \times \vec{B}) = -i \frac{\omega}{c} \frac{\mu}{c} (4\pi\sigma - i\omega\epsilon_0)\vec{E}$$

Daraus folgt für die komplexe Wellenzahl

$$k^2 = \frac{\omega\mu}{c^2} (\omega\epsilon_0 + i4\pi\sigma) = \omega^2 \frac{\mu\epsilon_0}{c^2} \left(1 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) \quad . \tag{4.85}$$

Wir unterscheiden nun in Leiter und Isolatoren.

i) $\sigma = 0$: *Isolatoren.* Damit wird wie gewohnt

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon_0} \; ,$$

wobei das Vorzeichen bei der Wurzel eben richtig gewählt wurde.

α) Weit weg von jeglichen Resonanzstellen (also Frequenzen $\omega \approx \omega_j$) ist $\epsilon_0(\omega)$ praktisch reell, und damit erst recht der Brechungsindex $n = \sqrt{\mu\epsilon_0}$.

β) In der Nähe einer Resonanzstelle hat ϵ_0 einen großen Imaginärteil, deshalb ist auch n komplex:

$$\tilde{n} = \sqrt{\mu\epsilon_0} = n + i\kappa$$

Die dimensionslose Zahl κ heißt *Extinktionskoeffizient.* Der Grund für diese Bezeichnung wird klar, wenn man den Phasenfaktor der resultierenden ebenen Welle aufschreibt (hier nur in einer Dimension):

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{i\omega(nx/c-t)} e^{-\kappa x\omega/c}$$

Das entspricht einer *gedämpften Welle*, und $c/\kappa\omega$ ist gleich der Strecke, auf der die Amplitude auf $1/e$ ihres Anfangswertes abfällt.

ii) $\sigma \neq 0$: *Leiter.* Der σ-abhängige Term in der Formel für die Wellenzahl (4.85) verschwindet nicht, und es wird

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon_0 \left(1 + i4\pi\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)} = k_1 + ik_2 \quad .$$

In Leitern gibt es also im allgemeinen *gedämpfte Wellen* aufgrund des Imaginärteils der Wellenzahl. Bei guten Leitern ist $4\pi\sigma/\omega\epsilon_0 \gg 1$ auch noch bis zu sehr hohen Frequenzen, also ist

$$k \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon_0 i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0\omega}} = \frac{(1+i)}{c}\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} = (1+i)k_1 \quad .$$

Die *Eindringtiefe* d elektromagnetischer Wellen in einen Leiter ist die Strecke, auf der die ursprüngliche Amplitude auf $1/e$ ihres Wertes abgeklungen ist und ergibt sich dann zu

$$d = \frac{1}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \quad . \tag{4.86}$$

Sie ist umso kleiner, je größer die Frequenz ist. Dieses Verhalten — Stromverdrängung aus Leitern bei hohen Frequenzen — wird auch als *Skineffekt* bezeichnet, d demzufolge als *Skintiefe.*

b) $\rho \neq 0$.

Hier betrachten wir nur einen Spezialfall, nämlich

$$4\pi\sigma - i\omega\epsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{B} = 0 \quad . \tag{4.87}$$

Zusammen mit $\vec{k}\vec{B} = 0$ bedeutet das $\vec{B} = 0$, es gibt also *rein elektrische Schwingungen!* Da $\vec{k}\vec{E} = 4\pi\rho/i\epsilon_0 = \omega\rho/\sigma$ und wegen $\vec{B} = 0$ auch $\vec{k} \times \vec{E} = 0$, folgt, daß $\vec{E} \parallel \vec{k}$: *Longitudinalwellen!* Mit den oben gemachten Ansätzen für die Felder und Quellen hat man sich darunter Schwankungen in der Raumladungsdichte vorzustellen. Die Frage ist, bei welcher Frequenz dieser Effekt eintritt. Wie früher schon bemerkt, ist die Dielektrizitätskonstante durch σ darstellbar:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega} = 0$$

unter der Bedingung (4.87). Setzt man voraus, daß die Formel $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ auch für niedrigere Frequenzen Gültigkeit hat, dann muß also $\omega = \omega_p$ sein: der beschriebene Effekt entsteht bei der *Plasmafrequenz.*

4.7.5 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen

Recht allgemeine Kausalitätsbetrachtungen liefern interessante Beziehungen zur Polarisierbarkeit und damit zur Dielektrizität. Man geht von einer frequenzabhängigen, linearen, isotropen Relation zwischen Verschiebungsdichte und Feldvektor aus:

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$$

Diese Gleichung gilt für jede einzelne Frequenzkomponente der beiden Vektorfelder. Diese ω-abhängigen Felder (einschließlich ϵ) sind zu verstehen als Fourier-Transformierte der entsprechenden zeitabhängigen Größen:

$$\vec{D}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\vec{D}(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega)\} = \epsilon(t) * \vec{E}(t)$$

Hierbei wurde der Faltungssatz der Fourier-Transformation verwendet. Nun ist

$$\mathcal{F}^{-1}\{\epsilon(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 + (\epsilon(\omega) - 1)\} = \delta(t) + G(t) \ , \tag{4.88}$$

wobei $G(t)$ die inverse Fourier-Transformierte von $(\epsilon(\omega) - 1)$ ist und deshalb *Suszeptibilitätskern* genannt wird. Damit ist dann

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + G(t) * \vec{E}(t) \tag{4.89}$$

wegen der Distributivität des Faltungsproduktes[3]. Diese Beziehung beschreibt aber eine *Nichtlokalität in der Zeit:* Das $\vec{D}$-Feld zum aktuellen Zeitpunkt ist abhängig vom $\vec{E}$-Feld zu *anderen Zeiten!* Hier schlägt nun die physikalische Grundprämisse zu, auf der die kommende Argumentation fußt: Das $\vec{D}$-Feld kann nur von $\vec{E}$-Feldern "aus der Vergangenheit" beeinflußt sein (*Kausalitätsprinzip*). Für $G(t)$ bedeutet das eine wichtige Einschränkung:

$$G(t) = 0 \quad \forall\, t < 0 \tag{4.90}$$

Damit wird also

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_0^\infty G(\tau)\vec{E}(t - \tau)\, d\tau$$

und

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty G(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau \ , \tag{4.91}$$

also im allgemeinen komplex. Drei Tatsachen sind jetzt von Bedeutung:

[3] Wichtig ist hier folgendes: Das Faltungsprodukt wird natürlich nicht über t gezogen, sondern über eine Zwischenvariable τ, so daß als Ergebnis wieder eine t-abhängige Funktion herauskommt.

i) Die Felder $\vec{D}$ und $\vec{E}$ sind meßbar, also reell. Deshalb muß wegen (4.89) auch $G(t)$ reell sein. Aus der Theorie zur Fourier-Transformation folgt zusammen mit (4.88) unmittelbar, daß $\epsilon(\omega)$ *hermite-symmetrisch* zu sein hat:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon^*(-\omega^*)$$

Diese Forderung wurde hier gleich auf komplexe ω erweitert. Dies ist zwar rein *physikalisch* nicht sinnvoll, erweist sich aber für die spätere mathematische Behandlung als günstig.[4]

ii) Die Funktion $G(t)$ ist endlich für alle t. Aus (4.91) folgt dann, daß $\epsilon(\omega)-1$ in der oberen ω-Halbebene *analytisch,* d. h. komplex differenzierbar und damit bzgl. jedes Punktes in eine Taylor-Reihe darstellbar ist. Insbesondere fällt $\epsilon(\omega) - 1$ mit $\Im\omega \to \infty$ exponentiell gegen 0 ab.

iii) Ab jetzt beschränken wir uns auf *Dielektrika.* Hier muß aus physikalischen Gründen $\epsilon(\omega)$ auf der reellen Achse analytisch sein. Wegen (4.91) ist dann

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = 0 \quad .$$

Mit der Analytizität von $\epsilon(\omega)$ in der oberen Halbebene läßt sich der *Cauchy-Integralsatz* anwenden, der einen Zusammenhang zwischen den Werten einer holomorphen Funktion *entlang* einer geschlossenen Kurve und jenen *innerhalb* der Kurve herstellt. Es ist

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega' \ ,$$

wobei $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve ist, für die Umlaufzahl $\mathcal{I}(\mathcal{C}, \omega) = 1$ gilt und die üblichen Voraussetzungen für solche Sätze sowieso erfüllt sind. Um aus dieser Formel etwas zu gewinnen, wählt man einen günstigen Integrationsweg: Zunächst von $-\infty$ bis $+\infty$ entlang der reellen Achse und dann als Abschluß einen Halbkreis mit unendlich großem Radius durch die obere Halbebene, der zum Integral nichts beiträgt (exponentieller Abfall des Zählers). Da man aber gerne $\epsilon(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ wissen möchte, muß man durch einen Grenzübergang $\Im\omega \to 0$ gehen lassen. Im Grenzfall von reellen ω ist dann der Integrationsweg durch einen kleinen Halbkreis mit infinitesimalem Radius *unterhalb* der reellen Achse zu verbiegen, und was man unter Anwendung des Satzes über den Cauchy-Hauptwert bekommt, ist die folgende Gleichung:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega - \delta}\, d\omega' = \frac{1}{2\pi i} \left[\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega' + i\pi(\epsilon(\omega) - 1) \right] \tag{4.92}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ergibt $\epsilon(\omega) - 1$, wenn man davon ausgeht, daß Limes und Integration hier vertauschbar sind. Das Ganze läßt sich jetzt nach $\epsilon - 1$ auflösen:

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega' \tag{4.93}$$

Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil erhält man die sogenannten *Dispersions-* oder *Kramers-Kronig-Relationen:*

$$\Re\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\epsilon(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega' \tag{4.94}$$

$$\Im\epsilon(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega' \tag{4.95}$$

Die große Bedeutung dieser Gleichungen liegt in der Tatsache, daß sie Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante *eindeutig* miteinander verknüpfen. Kennt man einen der beiden (z. B. durch eine Messung), dann läßt sich der andere prinzipiell berechnen. Als Voraussetzungen wurden dabei nur die lineare Response des Mediums und das Kausalitätsprinzip hineingesteckt.

Die Gleichungen (4.94) und (4.95) gelten nicht nur für den speziellen Fall der dielektrischen Verschiebung, sondern für alle physikalischen Systeme mit linearer Response (z. B. Oszillatoren mit Anregung etc.).

[4] Statt der Fourier-Transformation könnte man durchweg auch die Laplace-Transformation anwenden. Die geschilderte Eigenschaft ergibt sich dann ganz natürlich.

4.8 Wellen in einem Hohlleiter

Als Anwendung für das bisher Gelernte betrachten wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem unendlich langen Rohr mit rechteckigem Querschnitt (Seiten a und b). Das Rohr bestehe aus ideal leitendem Material ($\sigma \to \infty$), die Situation ist also ganz wie in Abb 2.6 links, nur daß die vier Wände leitend verbunden sein sollen. Die Lösung der Feldgleichungen ist sicher von der Form einer propagierenden Welle, also pro Komponente so etwas wie

$$f(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)} \ ,$$

wobei f eine noch zu bestimmende Funktion ist. Die Randbedingungen für die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an den Wänden folgen aus der Tatsache, daß im Metall kein elektrisches Feld existieren kann. Demzufolge muß die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ verschwinden. Die Normalkomponente von $\vec{B}$ muß zunächst nur stetig sein — da es aber im Metall kein elektrisches Feld gibt, kann dort das Magnetfeld allenfalls statisch sein, und das ist bei einer sich ausbreitenden Welle nicht möglich. Also verschwindet auch die Normalkomponente von $\vec{B}$, und man hat als Randbedingungen

$$\begin{array}{ll} E_y = E_z = B_x = 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = a \\ E_x = E_z = B_y = 0 & \text{für } y = 0 \text{ und } y = b \end{array} \ .$$

Für die einzelnen Komponenten macht man jetzt einen Ansatz, dessen Berechtigung durch Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen und Bestimmung von freien Konstanten entsteht:

$$\begin{aligned} E_x &= \alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ B_x &= \alpha' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ E_y &= \beta \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ B_y &= \beta' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ E_z &= \gamma \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)} \\ B_z &= \gamma' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

$$m, n \in \mathbf{N}_0$$

Innerhalb des Hohlleiters herrsche Vakuum, d. h. es ist $\epsilon = \mu = 1$. Die richtige Lösung der Feldgleichungen muß natürlich auch die *Wellengleichung* erfüllen, und zwar für jede einzelne Komponente $g(\vec{r},t)$ von $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) g(\vec{r},t) = 0 \tag{4.96}$$

Durch Einsetzen läßt sich bestätigen, daß die Ansätze wirklich (4.96) erfüllen, und zwar unter der Bedingung

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \ .$$

Aus dieser Gleichung kann man sofort eine "Ausbreitungsbedingung" für Wellen im Hohlleiter herleiten: k ist nur dann reell, wenn gilt

$$\omega > \omega_{nm} \ , \text{ mit } \ \omega_{nm} = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \ .$$

Man sieht, daß sich die Dispersionsbeziehung im Hohlleiter von jener im freien Vakuum unterscheidet, so lange a und b endlich sind. Das war zu erwarten. Unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz ω_{10} (für $a > b$) ist überhaupt keine Wellenausbreitung möglich! Auch diese Frequenz geht mit wachsendem a gegen 0.

Zu bestimmen sind jetzt noch die Konstanten $\alpha^{(\prime)}$, $\beta^{(\prime)}$ und $\gamma^{(\prime)}$. Dazu werden die Ansätze in die Maxwell-Gleichungen eingesetzt:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha n\pi}{a} + \frac{\beta m\pi}{b} = ik\gamma \tag{4.97}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha' n\pi}{a} + \frac{\beta' m\pi}{b} = -ik\gamma' \tag{4.98}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad ik\beta - \gamma\frac{m\pi}{b} = -i\frac{\omega}{c}\alpha' \tag{4.99}$$

$$\gamma\frac{n\pi}{a} - ik\alpha = -i\frac{\omega}{c}\beta' \tag{4.100}$$

$$\alpha\frac{m\pi}{b} - \beta\frac{n\pi}{a} = -i\frac{\omega}{c}\gamma' \tag{4.101}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad ik\beta' - \gamma'\frac{m\pi}{b} = i\frac{\omega}{c}\alpha \tag{4.102}$$

$$-\gamma'\frac{n\pi}{a} - ik\alpha' = i\frac{\omega}{c}\beta \tag{4.103}$$

$$-\alpha'\frac{m\pi}{b} + \beta'\frac{n\pi}{a} = i\frac{\omega}{c}\gamma \tag{4.104}$$

Wie sich zeigen läßt, sind die Gleichungen (4.102) bis (4.104) als Linearkombinationen von (4.99) bis (4.101) darstellbar und können für das Weitere außer Acht gelassen werden. Die verbleibenden fünf Gleichungen stellen ein homogenes, lineares Gleichungssystem mit sechs Unbekannten dar. Man hat also zwei freie Parameter, die mit δ und δ' bezeichnet werden. Das folgende Gleichungssystem ist äquivalent zu (4.97) bis (4.101) und stellt die sechs gesuchten Konstanten in Abhängigkeit von δ und δ' dar:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{n\pi}{a}k\delta + \frac{m\pi}{b}\frac{\omega}{c}\delta' & \qquad \alpha' &= \frac{n\pi}{a}k\delta' - \frac{m\pi}{b}\frac{\omega}{c}\delta \\
\beta &= \frac{m\pi}{b}k\delta - \frac{n\pi}{a}\frac{\omega}{c}\delta' & \qquad \beta' &= \frac{m\pi}{b}k\delta' + \frac{n\pi}{a}\frac{\omega}{c}\delta \\
\gamma &= -i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\delta & \qquad \gamma' &= i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\delta'
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Man unterscheidet nun folgende Spezialfälle:

i) $\delta' = 0$, $\delta \neq 0$. Damit folgt $B_z = 0$, d. h. man hat ein rein *transversales* $\vec{B}$-Feld. Man nennt die zugehörige Welle *TM-Welle* (transversal-magnetisch).

Nichttriviale Lösungen für die Felder ergeben sich hier nur, falls $n > 0$ *und* $m > 0$, was man durch Einsetzen der Gleichungen (4.105) in die Ansätze erkennt. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz für eine TM-Welle im Hohlleiter ist demnach durch

$$\omega_{TM} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

gegeben.

ii) $\delta = 0, \delta' \neq 0$. Es folgt $E_z = 0$, und jetzt ist das $\vec{E}$-Feld transversal. Man spricht von einer *TE-Welle* (transversal-elektrisch).

In diesem Fall hat man schon nichttriviale Lösungen, falls *einer* der beiden Indizes n und m von Null verschieden ist. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz ist

$$\omega_{TE} = \frac{c\pi}{a}\ ,$$

falls $a > b$.

In Hohlleitern sind Wellen, die transversal in elektrischem *und* magnetischem Anteil (*TEM-Wellen*) sind nicht ausbreitungsfähig, was man ebenfalls durch Einsetzen von $\delta = \delta' = 0$ erkennt.

Für die Bezeichnung verschiedener Moden in Hohlleitern, die durch die Werte von n und m gekennzeichnet sind, gibt es ein Nomenklatursystem. Man stellt der Grundeigeschaft der Welle (TM bzw. TE) die Indizes n und m zur Seite: TM_{nm} bzw. TE_{nm}. Die niederfrequenteste ausbreitungsfähige Welle ist demnach TE_{10}. Diese Welle wird in der Technik am häufigsten angewandt.

Eine eingehende Behandlung der Hohlleiter-Thematik findet sich in [3].

4.9 Das Feld vorgegebener Ladungen und Stromverteilungen

4.9.1 Lösung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Lorentz-Eichung

In Abschnitt 4.4.2 auf Seite 67 wurde die *Lorentz-Eichung* vorgestellt, die aus den vier Maxwell-Gleichungen für die Felder zwei inhomogene Wellengleichungen für die Potentiale macht:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -4\pi\rho \tag{4.106}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.107}$$

Im folgenden werden allgemeine Ausdrücke für die Lösung dieser Gleichungen hergeleitet, und zwar unter Anwendung *Greenscher Funktionen.* Die Idee dabei ist, statt der "vollständigen" Inhomogenitäten ρ und $\vec{j}$ eine *Norm-Inhomogenität* $\delta(\vec{r},t)$ einzuführen, die Differentialgleichungen zu lösen und dann auf die eigentliche Lösung zurückzurechnen. Sei also allgemein die folgende Gleichung zu lösen:

$$\Delta f(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\vec{r},t) = -4\pi g(\vec{r},t) \tag{4.108}$$

Sei $G(\vec{r},t)$ die Lösung für die Norm-Inhomogenität, so daß

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},\vec{r}',t,t') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \quad . \tag{4.109}$$

Die Homogenität des Problems bzgl. Zeit und Raum ($G(\vec{r}+\Delta\vec{r},\vec{r}'+\Delta\vec{r},t+\Delta t,t'+\Delta t) = G(\vec{r},\vec{r}',t,t')$) verlangt, daß

$$G(\vec{r},\vec{r}',t,t') = G(\vec{r}-\vec{r}',t-t') \quad .$$

Aus der Lösung von (4.109) bekommt man dann die Lösung von (4.108) offenbar mittels

$$f(\vec{r},t) = \int G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\, g(\vec{r}',t')\, d^3r'dt' \ , \tag{4.110}$$

wie man durch Anwendung von $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ leicht erkennt.

Das Problem besteht also in der Bestimmung von G. Dazu transformieren wir zunächst (4.109) bzgl. $(t-t')$ nach Fourier:

$$G(\vec{r}-\vec{r}',\omega) = \int e^{i\omega(t-t')}G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\, d(t-t') \quad \Rightarrow \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\vec{r}-\vec{r}',\omega) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{4.111}$$

Die zeitliche δ-Funktion wurde dabei zu einer Eins. Gleichung (4.111) heißt *inhomogene Helmholtz-Wellengleichung* und ist hier speziell mit einer δ-Inhomogenität ausgestattet, die nur von $|\vec{r}-\vec{r}'|$ abhängt. Also ist auch

$$G(\vec{r}-\vec{r}',\omega) = G(R,\omega) \ , \text{ mit } \ R = |\vec{r}-\vec{r}'| \quad .$$

Der physikalische Hintergrund ist, daß G die Wellengleichung für eine *Punktförmige Quelle* löst, also muß die Lösung ebenfalls symmetrisch sein.

In Kugelkoordinaten lautet die Helmholtz-Gleichung für G dann mit $k = \omega/c$:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RG(R,\omega)) + k^2 G(R,\omega) = -4\pi\delta(R) \quad .$$

Wir betrachten diese Gleichung für zwei Fälle:

i) $R \neq 0$. Hier verschwindet die rechte Seite:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RG(R,\omega)) + k^2 RG(R,\omega) = 0$$

Die allgemeine Lösung für RG lautet dann

$$RG(R,\omega) = ae^{ikR} + be^{-ikR} \quad . \tag{4.112}$$

ii) Im statischen Fall $k \to 0$ erfüllt $G(R, \omega \to 0)$ eine Poisson-Gleichung. Da die Inhomogenität punktförmig ist, muß G dann eine $1/R$-Charakteristik haben (das stimmt *mit Vorfaktor!*). Zusammen mit (4.112) ergibt sich die Bedingung

$$a + b = 1 \quad .$$

Die allgemeine Lösung der Helmholtz-Gleichung für unseren Fall lautet also

$$G(R, \omega) = \frac{1}{R}\left(a e^{ikR} + b e^{-ikR}\right) \quad . \tag{4.113}$$

Offenbar beschreiben die Terme in der Klammer aus- und einlaufende *Kugelwellen.* Etwas in der Art war zu erwarten, denn eine Punktquelle kann kein anisotropes Potential erzeugen. Durch Rücktransformation in den Zeitbereich bezieht man nicht nur eine Frequenz ω, sondern alle möglichen ein und bekommt so eine Vorstellung von der physikalischen Bedeutung der beiden Anteile:

$$\begin{aligned} G(R, t-t') &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega(t-t')} G(\vec{r}-\vec{r}', \omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega(t-t')}\frac{1}{R}\left(a e^{i\omega R/c} + b e^{-i\omega R/c}\right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{a}{R}\, e^{-i\omega(t-t'-R/c)} + \frac{b}{R}\, e^{-i\omega(t-t'+R/c)}\right) d\omega = \\ &= \underbrace{\frac{a}{R}\,\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}_{=:G^+} + \underbrace{\frac{b}{R}\,\delta\left(t - t' + \frac{R}{c}\right)}_{=:G^-} \quad . \end{aligned} \tag{4.114}$$

Die Funktionen $G^+(R, t-t')$ und $G^-(R, t-t')$ heißen *retardierte* bzw. *avancierte Greensche Funktion.* "Retardiert" bedeutet, daß ein am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t beobachteter Effekt seine Ursache in einer Quelle hat, die zur Zeit $t' = t - R/c$ um die Strecke R von $\vec{r}$ entfernt war — ein *kausales* Verhalten, denn ein Signal benötigt die Zeit R/c, um am Ort $\vec{r}$ Wirkung zu zeigen.

Die *avancierte* Greensche Funktion dagegen beschreibt ein *antikausales* Geschehen: Ein Ereignis, das von $\vec{r}$ um R entfernt ist, hat Auswirkungen bei $\vec{r}$ um die Zeitdifferenz R/c *früher* als es selbst geschieht.

Die Konstanten a und b in (4.114) sind durch zeitliche Randbedingungen bestimmt. Wir setzen hier ohne Einschränkung $a = 1, b = 0$ (beachte $a + b = 1$). Dann lautet die *kausale* Lösung der Wellengleichung nach (4.110)

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= \int G^+(\vec{r}-\vec{r}', t-t')\, g(\vec{r}', t')\, d^3r' dt' = \\ &= \int \frac{g(\vec{r}', t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right]\right) d^3r' dt' = \\ &= \int \frac{g\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' \quad . \end{aligned}$$

In der Lorentz-Eichung ergeben sich also folgende Ausdrücke für die Potentiale ϕ und $\vec{A}$:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' \tag{4.115}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' \tag{4.116}$$

Nun ist es also möglich, die von beliebigen, zeitlich veränderlichen Ladungs- und Stromverteilungen erzeugten Potentiale zumindest prinzipiell zu berechnen. Einen besonders wichtigen Spezialfall stellen hier bewegte Punktladungen dar, die auf sogenannte *Liénard-Wiechert-Potentiale* führen. Sie werden in einem der nächsten Abschnitte behandelt.

4.9.2 Felder und Strahlung einer lokalisierten, oszillierenden Quelle

In diesem Abschnitt werden die Potentiale und Felder berechnet, die eine *lokalisierte, harmonisch oszillierende Quelle* erzeugt. Dabei ist die Anwendung gewisser Näherungen unumgänglich. Schließlich wird als wichtiger Spezialfall der Hertzsche Dipol behandelt.

Das Verhalten der Quellen soll stets durch

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \qquad\qquad \vec{\jmath}(\vec{r},t) = \vec{\jmath}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

gegeben sein. Dann wird laut (4.116):

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, e^{i\omega|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c}}_{=:\vec{A}(\vec{r})}\, e^{-i\omega t} = \vec{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \tag{4.117}$$

Damit wurde die Zeitabhängigkeit des Vektorpotentials abgespalten. Durch Anwendung der Rotation wird daraus das Magnetfeld $\vec{B}$:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \text{ , mit } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

Nun gilt laut Maxwell außerhalb der lokalisierten Stromverteilung, d. h. im Vakuum ($\vec{\jmath} = 0$), außerdem für harmonische Zeitabhängigkeit:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -i\frac{\omega}{c}\vec{E} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{ic}{\omega}\vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{4.118}$$

Aus $\vec{\jmath}$ ist also $\vec{A}$, daraus $\vec{B}$ und schließlich $\vec{E}$ berechenbar.

Für die weitere Behandlung führt man einige vernünftige *Längenskalen* ein. Die Abmessungen der Quelle seien von der Größenordnung d, die Wellenlänge der emittierten Strahlung sei $\lambda = 2\pi c/\omega$. Der Abstand des Beobachters von der Quelle sei $r = |\vec{r}|$. *Stets* gelte

$$d \ll \lambda \quad .$$

Dann unterscheidet man drei verschiedene Bereiche:

Nahbereich:	$d \ll r \ll \lambda$
Übergangsbereich:	$d \ll r \sim \lambda$
Fernbereich:	$r \gg d, \lambda$

a) Nahbereich.

$r \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad kr \ll 1$. Da sowieso $r \gg d$, ist die Näherung

$$e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx 1$$

vertretbar. Damit ergibt sich für das Vektorpotential nach (4.117)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r' = \frac{1}{c}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{Y_{lm}(\vartheta,\phi)}{r^{l+1}}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,')\, r'^l Y_{lm}^*(\vartheta',\phi')\, d^3r' \quad .$$

Das Vektorpotential folgt ohne Verzögerung den Veränderungen der Stromdichte (es gilt die gewohnte "statische" Formel), man hat es mit einer *quasistationären Situation* zu tun.

b) Fernbereich.

Es gilt $r \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad kr \gg 1$. Wir verwenden die Näherungen

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{\vec{r}^2 - 2\vec{r}\vec{r}\,' + \vec{r}\,'^2} \approx r\left(1 - \frac{\vec{r}\vec{r}\,'}{r^2}\right) = r - \vec{n}\vec{r}\,'$$

für den Exponenten und

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r}\frac{1}{1-\vec{r}\vec{r}\,'/r^2} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}\,'}{r^2}\right) \approx \frac{1}{r}$$

für den Nenner in (4.117). Dann wird

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx e^{ikr}\frac{1}{rc}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,')\, e^{-ik\vec{n}\vec{r}\,'}\, d^3r' \quad . \tag{4.119}$$

Dieser Ausdruck beschreibt eine von der Quelle auslaufende Welle mit Winkelabhängigkeit, d. h. es besteht *keine Kugelsymmetrie,* denn $\vec{n}$ gibt ja die Beobachtungsrichtung $\vec{r}/r$ an! Die aus $\vec{A}$ über (4.118) resultierenden $\vec{B}$- und $\vec{E}$-Felder sind erstens *transversal* (das wurde bereits in Abschnitt 4.7.1 auf Seite 78 allgemeiner hergeleitet) und zweitens *Strahlungsfelder* mit $1/r$-Charakteristik. In (4.119) kann man nämlich wegen $d \ll \lambda \;\Rightarrow\; kr' \ll 1$ die e-Funktion unter dem Integral in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{cr}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-ik)^m}{m!}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,')(\vec{n}\vec{r}\,')^m d^3r' \tag{4.120}$$

Diese Entwicklung enthält alle Glieder der Reihe und ist damit vollkommen gleichbedeutend mit (4.119). Unter der Summe kommt der Abstand r nicht mehr vor, also fällt $\vec{A}$ in jeder Richtung und jeder Komponente wie r^{-1} ab (überlagert mit einer Oszillation aus e^{ikr}). Für große r ergibt sich deswegen auch für die Felder ein $1/r$-Verhalten.

c) Übergangsbereich.

Die für Nah- bzw. Fernbereich gemachten Näherungen können hier nicht angewendet werden. Genaueres in [9, Kap. 16.1].

4.9.3 Die Dipolstrahlung als wichtiger Spezialfall

In diesem Abschnitt wird der Dipolanteil der von einer oszillierenden Stromverteilung abgegebenen Strahlung untersucht. Insbesondere stößt man dabei auf das bekannte ω^4-Gesetz.

Der Dipolanteil ist in (4.120) in dem Summanden für $m = 0$ enthalten. Nimmt man nur diesen Term in die Näherung auf, so ergibt sich

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{cr}\int \vec{\jmath}(\vec{r}\,')\, d^3r' \overset{p.I.}{=} -\frac{e^{ikr}}{cr}\int \vec{r}\,'(\vec{\nabla}_{r'}\vec{\jmath}(\vec{r}\,'))\, d^3r' = -i\frac{\omega}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

wegen $\vec{\nabla}\vec{\jmath} = -\dot{\rho} = i\omega\rho$ (man kann zeigen, daß diese Näherung ebenfalls im Nahbereich gilt). Das Integral stellt aber genau das Dipolmoment $\vec{p}$ der Ladungsverteilung ρ dar. Damit ist also in Dipolnäherung

$$\vec{A}(\vec{r}) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p} \quad . \tag{4.121}$$

Aus $\vec{A}$ bekommt man das $\vec{B}$- und $\vec{E}$-Feld laut (4.118) zu

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -ik\left(\vec{\nabla}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\times\vec{p} = k^2(\vec{n}\times\vec{p})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \tag{4.122}$$

und

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B} = k^2(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}\,\frac{e^{ikr}}{r} + [3\vec{n}(\vec{n}\vec{p}) - \vec{p}]\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr} \quad . \tag{4.123}$$

Für $kr \gg 1$ werden in $\vec{B}$ und $\vec{E}$ die Terme von höherer als erster Ordnung in r^{-1} klein und können vernachlässigt werden. Man bekommt

$$\vec{B} \approx k^2(\vec{n}\times\vec{p})\frac{e^{ikr}}{r} \tag{4.124}$$

$$\vec{E} \approx k^2(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}\frac{e^{ikr}}{r} = \vec{B}\times\vec{n} \quad . \tag{4.125}$$

Hier wird der Gegensatz zur Elektrostatik offenbar: Die Felder fallen nur noch mit r^{-1} ab — es handelt sich um *Strahlungsfelder!* Die Energiestromdichte wird ja durch den Poynting-Vektor $\vec{S} \propto \vec{E}\times\vec{B}$ gegeben und hat damit eine r^{-2}-Charakteristik. Die Integration von $\vec{S}$ über eine Kugeloberfläche, die die Stromverteilung enthält, liefert also für den hindurchtretenden Energiestrom unabhängig vom Radius immer den gleichen Wert. Das bedeutet, daß wirklich Energie *in den Raum abgegeben wird.*

Die Vektoren $\vec{n}$, $\vec{B}$ und $\vec{E}$ bilden im Fernfeld offenbar ein orthogonales Dreibein. Man kann also in großer Entfernung von den Quellen für einen kleinen Raumbereich in guter Näherung mit *ebenen Wellen* rechnen. Wie sieht es aber im Nahbereich ($kr \ll 1$) aus? Hier dominieren die Terme mit höheren Potenzen von r in den Nennern von (4.122) und (4.123):

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{ik}{r^2}(\vec{n}\times\vec{p}) \tag{4.126}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{r^3}\left[3\vec{n}(\vec{n}\vec{p}) - \vec{p}\right] \tag{4.127}$$

In der Nähe der Quellen sind also die $\vec{B}$-Felder im Vergleich zu den elektrischen Feldern *schwach,* insbesondere bei kleinen Frequenzen. Außerdem handelt es sich nicht um Strahlungsfelder.

Zurück zum Fernfeld. Wir berechnen die *zeitgemittelte ausgestrahlte Leistung pro Raumwinkel* $d\Omega$. Die durch ein Flächenelement $df = r^2 d\Omega$ tretende Leistung beträgt

$$dP = r^2 d\Omega\, \Re(\vec{n}\vec{S}) \quad .$$

Damit wird (beachte (4.64))

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\Re(\vec{n}\vec{S}) = \frac{c}{8\pi}r^2\Re\left[(\vec{E}\times\vec{B}^*)\vec{n}\right] \quad ,$$

und im Fernfeld wegen (4.124) und (4.125):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}\,\Re\left[r^2\left[(\vec{B}\times\vec{n})\times\vec{B}^*\right]\vec{n}\right] = \frac{ck^4}{8\pi}\left\{[[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}]\times(\vec{n}\times\vec{p})]\,\vec{n}\right\}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist ein Spatprodukt, das zu

$$[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}]\,[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}] = [(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}]^2 = [\vec{p} - \vec{n}(\vec{n}\vec{p})]^2 = \vec{p}^2 - (\vec{n}\vec{p})^2$$

umgeschrieben werden kann. Damit wird

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi}\underbrace{\left(\vec{p}^{\,2} - (\vec{n}\vec{p})^2\right)}_{p^2(1-\cos^2\vartheta)} = \frac{ck^4}{8\pi}p^2\sin^2\vartheta \tag{4.128}$$

mit der Konvention $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$. Ausdruck (4.128) beschreibt die bekannte Torus-ähnliche Dipol-Abstrahlcharakteristik.

Die gesamte, vom Dipol im Zeitmittel ausgestrahlte Leistung bekommt man aus (4.128) durch Integration über den Raumwinkel:

$$P = \frac{ck^4}{8\pi}p^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\,d\phi = \frac{c}{3}k^4p^2 = \frac{p^2}{3c^3}\,\omega^4 \tag{4.129}$$

Die vom Dipol ausgestrahlte Leistung ist proportional zur vierten Potenz der Frequenz !

4.9.4 Anwendung: Die lineare Antenne mit symmetrischer Speisung

Die lineare Antenne (Abb. 4.12) ist eine der einfachsten strahlungsfähigen Anordnungen. Wir nehmen

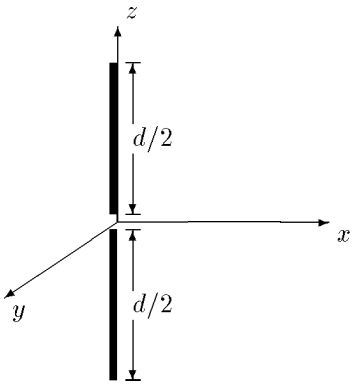


Abbildung 4.12: Anwendungsfall der linearen Antenne.

an, daß der in der Antenne fließende Strom durch

$$I(z,t) = I(z)\, e^{-i\omega t} \text{ , mit } I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)$$

gegeben ist. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt sofort für die zeitfreie Ladungsdichte

$$-i\omega\rho(z) = \pm\frac{2}{d} I_0 \text{ ,}$$

wobei das positive Vorzeichen für $z > 0$, das negative für $z < 0$ gilt. Damit ist

$$\rho(z)\, e^{-i\omega t} = \pm\frac{2I_0}{\omega d}\, e^{-i(\omega t - \pi/2)} \quad .$$

Die Ladungsverteilung auf der Antenne ist also *konstant über z*. Das Dipolmoment ergibt sich so zu

$$p = \int_{-d/2}^{d/2} z\rho(z)\, dz = \frac{I_0 d}{2\omega} \text{ ,}$$

also ω-*abhängig!* Die gesamte abgestrahlte Leistung ist nach (4.129) dann gleich

$$P = \frac{I_0^2 d^2 \omega^2}{12c^3} \quad .$$

4.9.5 Höhere multipolare Anteile der Strahlung

Durch die Berücksichtigung von Summanden mit $m \neq 0$ in (4.120) werden höhere multipolare Anteile der Strahlung offenbar. Wir betrachten den Fall $m = 1$ und kommen zur *elektrischen Quadrupol–* und *magnetischen Dipolstrahlung:*

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}(-ik) \int \vec{j}(\vec{r})(\vec{n}\vec{r}')\, d^3r' \tag{4.130}$$

Nun kann man den Integranden günstiger schreiben. Es ist nämlich

$$\frac{1}{c}(\vec{n}\vec{r}')\vec{j} = \frac{1}{2c}\left[(\vec{n}\vec{r}')\vec{j} + (\vec{n}\vec{j})\vec{r}'\right] + \frac{1}{2c}(\vec{r}' \times \vec{j}) \times \vec{n}$$

wegen der "bac-cab"-Regel. Wir betrachten zunächst nur den Beitrag des letzten Terms. Dieser erinnert aber stark an die Definition des magnetischen Moments in (3.23). Es ist

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')\, d^3r' \text{ ,}$$

also kann man für den Beitrag des letzten Terms in (4.130)

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}(ik)\,\vec{n}\times\vec{m} \tag{4.131}$$

schreiben. Die elektrischen und magnetischen Felder ergeben sich dann zu

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \;=\; -k^2\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{m})\frac{e^{ikr}}{r} \tag{4.132}$$

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; -k^2(\vec{n}\times\vec{m})\frac{e^{ikr}}{r} \quad . \tag{4.133}$$

Man sieht, daß das Magnetfeld von der Struktur her genau dem elektrischen Dipolfeld aus (4.125) entspricht, nur daß $\vec{p}$ durch $\vec{m}$ ersetzt ist. Genauer gesagt, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben (bis auf ein Vorzeichen) die Rollen getauscht!

Bleibt noch der erste, symmetrische Term in (4.130) zu untersuchen. Es gilt

$$\frac{1}{2c}\int\left[(\vec{n}\vec{r}\,')\vec{\jmath}+(\vec{n}\vec{\jmath})\vec{r}\,'\right]d^3r' = -i\frac{k}{2}\int\vec{r}\,'(\vec{n}\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

wegen

$$\int x_i'(n_kx_k')\frac{\partial j_l}{\partial x_l}\,d^3r' \overset{p.I.}{=} -\int\frac{\partial}{\partial x_l}\left[x_i'(n_kx_k')\right]j_l\,d^3r' = -\int\left[(\vec{n}\vec{r}\,')\vec{\jmath}+(\vec{n}\vec{\jmath})\vec{r}\,'\right]d^3r'$$

und der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}\vec{\jmath}=-\dot{\rho}$. Was also übrig bleibt, ist

$$\left[\vec{A}_1\right]_i = -\frac{k^2}{2}\frac{e^{ikr}}{r}\int x_i'(n_kx_k')\rho(\vec{r}\,')\,d^3r' = -\frac{k^2}{2}\frac{e^{ikr}}{r}n_k\int x_i'x_k'\rho(\vec{r}\,')\,d^3r' \quad . \tag{4.134}$$

Offenbar ist es für die physikalische Situation irrelevant, ob man zu dem Tensor noch eine Konstante hinzuaddiert. Wählt man geschickterweise das Negative seiner Spur, so hat man den bekannten *Quadrupoltensor*

$$Q_{ik} = \int\left(3x_ix_k - r^2\delta ik\right)\rho(\vec{r})\,d^3r \quad .$$

Daß der untersuchte Anteil der Strahlung etwas mit dem Quadrupolmoment zu tun haben muß, kann man bereits am Auftreten zweiter Momente der Ladungsverteilung in (4.134) erkennen. Das Vektorpotential läßt sich also schreiben als

$$\vec{A}_1 = -\frac{k^2}{6}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{Q} \quad \text{mit} \quad Q_i = n_kQ_{ik} \quad . \tag{4.135}$$

In [9, Kap. 9.3] finden sich weitere Ausführungen zur elektrischen Quadrupolstrahlung.

4.9.6 Strahlung einer beliebig bewegten Ladung

Eine durch den Raum bewegte Ladung stellt einen veränderlichen Strom dar, also ist zu erwarten, daß Strahlung in irgend einer Form auftreten wird. In diesem Abschnitt werden die durch bewegte Ladungen erzeugten Felder untersucht und gezeigt, daß jede *beschleunigte Ladung* strahlen muß und somit Energie verliert.

Gegeben sei also ein Teilchen der Ladung e und der Bahnkurve $\vec{u}(t)$. Die Teilchengeschwindigkeit ist also $\vec{v}=d\vec{u}/dt$ und der zugehörige Strom läßt sich durch

$$\vec{\jmath}(\vec{r}\,',t') = e\vec{v}(t')\,\delta\left(\vec{r}\,'-\vec{u}(t')\right)$$

ausdrücken. Die gesamte Ladung sei in einem Punkt vereint; das bedeutet für die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}\,',t') = e\,\delta\left(\vec{r}\,'-\vec{u}(t')\right) \quad .$$

Wenn Strom– und Ladungsdichte bekannt sind, können über (4.115) und (4.116) die retardierten Potentiale berechnet werden:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\int\vec{v}(t')\frac{\delta\left(\vec{r}\,'-\vec{u}(t')\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)dt'd^3r'$$

Durch die zusätzliche t-Integration wird die retardierte Zeit eingeführt. Die $\vec{r}\,'$-Integration kann nun leicht durchgeführt werden, dazu muß man einfach im Integranden $\vec{r}\,'$ durch $\vec{u}(t')$ ersetzen. Da im folgenden oft die Differenz $(\vec{r}-\vec{u}(t')) = (\vec{r}-\vec{r}\,')$ auftritt, wählt man die Substitution

$$\vec{R} := \vec{r} - \vec{u}(t')$$

und bekommt schließlich

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\int \vec{v}(t')\,\frac{\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)}{R}\,dt' \tag{4.136}$$

beziehungsweise analog

$$\phi(\vec{r},t) = e\int \frac{\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)}{R}\,dt' \quad . \tag{4.137}$$

Hierbei ist zu beachten, daß $\vec{R}$ von t' abhängt. Zur Vereinfachung führt man die Umformung

$$q := t' - t + \frac{R}{c}$$

ein. Damit wird

$$\frac{dq}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR}{dt'}\,; \quad \frac{dR}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(\vec{R}^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\vec{R}^2\right)^{-1/2}\cdot 2\vec{R}\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{R}\dot{\vec{R}}}{R} = -\frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{R}\ ,$$

also

$$\frac{dq}{dt'} = 1 - \frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{Rc} \quad \text{und} \quad dt' = \frac{dq}{1-\frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{Rc}} \quad .$$

Damit kann man (4.136) und (4.137) umschreiben und ausintegrieren und erhält

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left.\frac{e}{c}\frac{\vec{v}(t')}{R-\frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{c}}\right|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{4.138}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \left.\frac{e}{R-\frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{c}}\right|_{t'=t-\frac{R}{c}} \quad . \tag{4.139}$$

Dies sind die sogenannten *Liénard-Wiechert-Potentiale.* Die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder gewinnt man direkt aus den Integralen (4.136) und (4.137):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\nabla}\phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned}$$

$$\text{mit} \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\int \frac{\vec{v}(t')}{R}\,\delta(q)\,dt' \quad \text{und} \quad \phi(\vec{r},t) = e\int\frac{\delta(q)}{R}\,dt'$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{e}{c}\int\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{v}(t')\,\delta(q) + \vec{\nabla}\delta(q)\times\frac{\vec{v}(t')}{R}\right]dt'$$

Dabei wurde benutzt, daß $\vec{v}$ nicht von $\vec{r}$ abhängt. Nach der Kettenregel ist

$$\vec{\nabla}\delta(q) = \frac{d\delta(q)}{dq}\underbrace{\frac{dq}{dR}}_{=\frac{1}{c}}\underbrace{\vec{\nabla}R}_{=\frac{\vec{R}}{R}} \quad .$$

Damit wird

$$\vec{B} = \frac{e}{c}\int\left[-\frac{\vec{R}\times\vec{v}(t')}{R^3}\,\delta(q) + \frac{\vec{R}\times\vec{v}(t')}{cR^2}\frac{d\delta(q)}{dq}\right]dt' \quad . \tag{4.140}$$

Zur Berechnung von $\vec{E}$ benötigt man

$$\vec{\nabla}\phi = e\int\left[-\frac{\vec{R}}{R^3}\,\delta(q)+\frac{\vec{R}}{cR^2}\frac{d\delta(q)}{dq}\right]dt' \quad\text{und}\quad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{e}{c}\int\frac{\vec{v}(t')}{R}\frac{\partial\delta(q)}{\partial t}\,dt'\ ,$$

wobei

$$\frac{\partial\delta(q)}{\partial t}=\frac{d\delta(q)}{dq}\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{d\delta(q)}{dq}\quad .$$

Also ist

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{e}{c}\int\frac{\vec{v}(t')}{R}\frac{d\delta(q)}{dq}\,dt'\ ,$$

und

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}\phi=e\int\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\,\delta(q)-\left(\frac{\vec{R}}{cR^2}-\frac{\vec{v}(t')}{c^2R}\right)\frac{d\delta(q)}{dq}\right]dt'\quad . \tag{4.141}$$

Nun geht es an das Auflösen der Integrale. Aufgrund der vielen δ-Funktionen ist das keine Schwierigkeit. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\int\frac{d\delta(q)}{dq}f(t')\,dt' &= \int\frac{d\delta(q)}{dt'}\frac{dt'}{dq}f(t')\,dt' \overset{p.I.}{=} \underbrace{\delta(q)\,\frac{dt'}{dq}f(t')\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\int\delta(q)\,\frac{d}{dt'}\frac{f(t')}{1-\frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{Rc}}\,dt' = \\ &= -\frac{d}{dt'}\left[\frac{f(t')}{1-\frac{\vec{R}\vec{v}(t')}{Rc}}\right]\Bigg|_{q=0,\,t'=t-\frac{R}{c}}\quad .\end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Regeln auf die Ausdrücke für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ergibt dann

$$\vec{E}(\vec{r},t) = e\,\frac{(\vec{R}c-R\vec{v}(t'))c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\vec{R}\times\left[(\vec{R}c-R\vec{v}(t'))\times\dot{\vec{v}}(t')\right]}{(Rc-\vec{R}\vec{v}(t'))^3}\Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{4.142}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = e\,\frac{-(\vec{R}\times\vec{v}(t'))c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\vec{R}\times\left[\vec{R}\times\left((\vec{R}c-R\vec{v}(t'))\times\dot{\vec{v}}(t')\right)\right]/R}{(Rc-\vec{R}\vec{v}(t'))^3}\Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}}, \tag{4.143}$$

wobei wieder $\vec{R}=\vec{r}-u(t')$. Da, wie man nachvollziehen kann,

$$\vec{B}=\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c}\ ,\quad \text{gilt also:}\quad \vec{B}\ \perp\ \vec{E},\vec{v}\quad .$$

Um die Formeln (4.142) und (4.143) genauer zu untersuchen, teilt man die Ausdrücke in Anteile mit bzw. ohne $\dot{\vec{v}}$-Terme auf.

i) Beiträge ohne $\dot{\vec{v}}$.

Läßt man alle Beiträge, die $\dot{\vec{v}}$ enthalten, weg, so hat man genau dann noch exakte Formeln, wenn sich die Ladung gleichförmig bewegt oder ruht. Das elektrische Feld lautet dann

$$\vec{E}=e\,\frac{(\vec{R}c-R\vec{v}(t'))c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{(Rc-\vec{R}\vec{v}(t'))^3}\Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}}\quad . \tag{4.144}$$

Das ist für große R proportional zu R^{-2}. Für das Magnetfeld gilt

$$\vec{B}=e\,\frac{-(\vec{R}\times\vec{v}(t'))c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{(Rc-\vec{R}\vec{v}(t'))^3}\Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}}, \tag{4.145}$$

und auch das geht für große R mit R^{-2}. Der Betrag des Poynting-Vektors ist aber proportional $|\vec{B}||\vec{E}|$:

$$|\vec{S}| \propto |\vec{B}||\vec{E}| \propto \frac{1}{R^4} \quad .$$

Das bedeutet also, daß eine gleichförmig bewegte Ladung *nicht strahlen kann.* Um nun in den Formeln noch die lästige Retardierung zu eliminieren, führt man einige Umformungen durch. Zunächst ist klar, daß bei konstanter Geschwindigkeit der Unterschied zwischen $\vec{R}(t)$ und $\vec{R}(t')$ nur gleich $\vec{v}\cdot(t-t')$ sein kann, denn es gilt ja $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{u}(t')$:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t') - (t-t')\vec{v} \quad \Rightarrow \quad c\vec{R}(t) = c\vec{R}(t') - \vec{v}R(t') \ ,$$

da $R = c(t-t')$. Somit hat man schon einmal die erste Klammer im Zähler von (4.144) allein auf t statt auf t' bezogen. Man betrachte nun folgenden Ausdruck:

$$\left(c\vec{R}(t)\right)^2 - \left(\vec{R}(t)\times\vec{v}\right)^2 = c^2R^2(t') - 2c\vec{R}(t')\vec{v}R(t') + \underbrace{v^2R^2(t') - \left(\vec{R}(t)\times\vec{v}\right)^2}_{=\left(\vec{R}(t')\vec{v}(t')\right)^2}$$

Damit kann der Nenner in den Ausdrücken für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ umgeschrieben werden:

$$\left(cR(t') - \vec{R}(t')\vec{v}\right)^2 = \left(c\vec{R}(t)\right)^2 - \left(\vec{R}(t)\times\vec{v}\right)^2$$

Erreicht wurde damit also quasi eine Elimination der Variable t' aus den Feldern. Die Retardierte Zeit tritt nicht mehr auf:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{ec^3\vec{R}(t)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\left(c\vec{R}(t)\right)^2 - \left(\vec{R}(t)\times\vec{v}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{e\vec{R}(t)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[R^2(t) - \left(\vec{R}(t)\times\frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{4.146}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c} = \frac{e}{c}\frac{\left(\vec{v}\times\vec{R}(t)\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[R^2(t) - \left(\vec{R}(t)\times\frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{4.147}$$

Im folgenden werden diese Felder für die Grenzfälle $v \ll c$ und $v \lesssim c$ untersucht.

a) $v \ll c$. Damit ist $v/c \approx 0$ und die Felder werden zu

$$\vec{E} = e\,\frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \qquad \vec{B} = \frac{e}{c}\frac{\vec{v}\times\vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad .$$

Das $\vec{E}$-Feld ist also in erster Näherung das einer *ruhenden* Ladung (Abb. 4.13 links).

b) $v \lesssim c$. Hier unterscheiden wir zwei Fälle, je nach der gewählten Beobachtungsrichtung:

$\alpha)$ $\vec{R} \parallel \vec{v}$. Dann fallen die Kreuzprodukte im Nenner von (4.146) weg und es ist

$$|\vec{E}| = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \ ,$$

was einem *schwachen, statischen Feld* entspricht; die Klammer ist klein.

$\beta)$ $\vec{R} \perp \vec{v}$. Dann wird

$$|\vec{E}| = \frac{e}{R^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{-1} \ ,$$

und das ist ein *starkes* elektrisches Feld, denn die kleine Größe steht jetzt im Nenner (siehe auch [9, Kap. 11.9]).

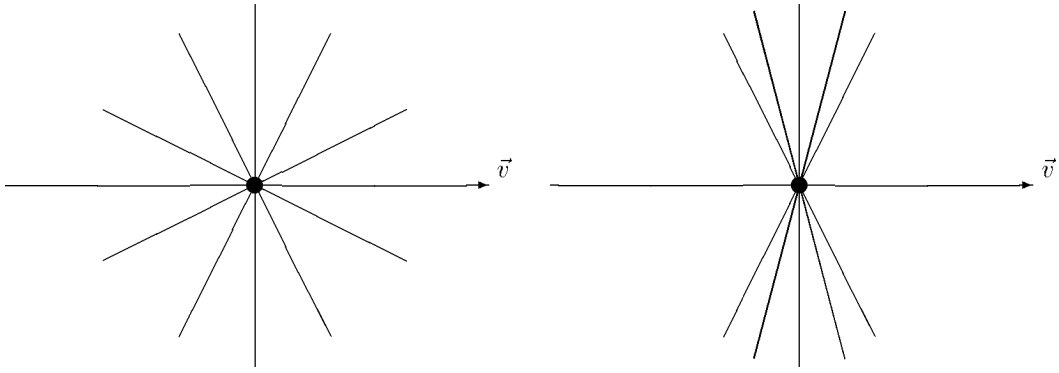


Abbildung 4.13: *Andeutung des Feldverlaufs einer bewegten Ladung bei Beobachtung senkrecht zur Flugrichtung und* $\vec{v} = \text{const}$. *Links* $v \ll c$, *rechts* $v \lesssim c$.

Betrachtet man also das Teilchen in Flugrichtung, so wird das Feld umso schwächer sein, je näher die Teilchengeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit kommt. Bei Beobachtung senkrecht zur Flugrichtung hingegen findet man dann ein sehr starkes Feld (siehe Abb. 4.13 rechts). Man kann sagen, die Ladung "konzentriert" die Feldlinien in einer Ebene senkrecht zur Flugrichtung.

ii) Beiträge $\propto \dot{\vec{v}}$.

Da wir nun lediglich die Terme betrachten werden, die $\dot{\vec{v}}$ auch enthalten, sind die im folgenden zu berechnenden $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder als *Zusätze* bzw. Korrekturen zu den in i) angegebenen Feldern zu verstehen und erhalten deshalb den Index '2'. Die einzelnen Beiträge lauten

$$\vec{E}_2 = e\,\frac{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}c - R\vec{v}(t')\right)\times\dot{\vec{v}}(t')\right]}{(Rc-\vec{R}\vec{v}(t'))^3}\bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{4.148}$$

$$\vec{B}_2 = e\,\frac{\vec{R}\times\left[\vec{R}\times\left((\vec{R}c - R\vec{v}(t'))\times\dot{\vec{v}}(t')\right)\right]/R}{(Rc-\vec{R}\vec{v}(t'))^3}\bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} . \tag{4.149}$$

Das ist bei großen R beides proportional R^{-1}, also gilt

$$|\vec{S}| \propto \frac{1}{R^2}$$

und man hat es mit *Strahlungsfeldern* zu tun!

NUR BESCHLEUNIGTE LADUNGEN STRAHLEN ENERGIE AB!

Da

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{R}\times\vec{E}_2}{R}\ , \quad \text{folgt} \quad \vec{B}_2 \perp \vec{E}_2\ .$$

Auch hier lohnt es sich wieder, die Fälle $v \ll c$ und $v \lesssim c$ getrennt zu betrachten.

a) $v \ll c$. Hier kann man in den Nennern den zweiten gegen den ersten Term vernachlässigen, genauso wie in der innersten Klammer des Zählers. Damit vereinfachen sich die Felder zu

$$\vec{E}_2 = e\,\frac{\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)}{c^2R^3} \qquad \vec{B}_2 = e\,\frac{\vec{R}\times\left[\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{c^2R^4}$$

(die t'-Abhängigkeit wird im folgenden der Kürze halber weggelassen). Den Zähler im Ausdruck für das Magnetfeld kann man noch etwas weiter massieren:

$$\vec{R}\times\left[\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]=\underbrace{\left(\vec{R}\dot{\vec{v}}\right)\vec{R}\times\vec{R}}_{=0}-R^2\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{B}_2=-e\,\frac{\vec{R}\times\dot{\vec{v}}}{c^2R^2}$$

Wie sieht es in diesem Fall mit der Abstrahlung aus? Der mit den $\dot{\vec{v}}$-Anteilen assoziierte Poynting-Vektor lautet

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}_2\times\vec{B}_2\right)=-\frac{ce^2}{4\pi c^4}\frac{1}{R^5}\left[\left(\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right)\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]\ ,$$

und die Klammer läßt sich noch vereinfachen:

$$\left[\left(\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right)\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]=\underbrace{\left[\vec{R}\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}_{=0}\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)-\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)^2\vec{R}$$

Für den Poynting-Vektor bekommt man dann

$$\vec{S}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{\vec{R}\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right)^2}{R^5}\quad\Rightarrow\quad|\vec{S}|=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{\dot{\vec{v}}^2}{R^2}\sin^2\vartheta\ ,\quad\text{mit}\quad\vartheta=\angle\left(\dot{\vec{v}},\vec{R}\right)\quad.$$

Die Abstrahlung ist also in einer Richtung *senkrecht zur Momentanbeschleunigung* am größten. Die in den gesamten Raumwinkel abgestrahlte Leistung erhält man durch Integration zu

$$P=\int R^2|\vec{S}|\,d\Omega=e^2\frac{\dot{\vec{v}}^2}{4\pi c^3}2\pi=\frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\vec{v}}^2}{c^3}\quad.\tag{4.150}$$

Dies ist das sogenannte *Larmor-Gesetz.*

b) $v\lesssim c$. Die Rechnung ergibt hier eine starke Ausstrahlung in Richtung $\vec{v}$ (Synchrotronstrahlung). Genaueres findet sich in [9, Kap. 14.6].

4.9.7 Streuung von Licht

In diesem Abschitt wird u. a. gezeigt, daß das ω^4-Gesetz nicht nur für selbst strahlende Dipole, sondern auch für die Streuung von Licht an Dipolen gilt (*induzierte Dipolstrahlung*). Dies führt direkt zur Erklärung der blauen Himmelsfarbe durch Rayleigh.

Gegeben sei also eine *einfallende Welle* mit $\vec{E}_e$, $\vec{B}_e$ und der Einfallsrichtung $\vec{n}_e$. Nach der Streuung durch Dipole beobachtet man in der Richtung $\vec{n}_s$ die gestreute, *ausfallende Welle* mit $\vec{E}_s$ und $\vec{B}_s$. Die einfallende Welle werde beschrieben durch

$$\vec{E}_e=\vec{E}_0e^{ik\vec{n}_e\vec{r}}\qquad\vec{B}_e=\vec{n}_e\times\vec{E}_e\quad\text{(siehe (4.63))},$$

und zur Vereinfachung betrachten wir die Situation im Vakuum, d. h. $\epsilon=\mu=1$. Es interessiert die Streustrahlung im Fernbereich, und es handelt sich, obwohl die Energie ja "von außen" zugeführt wird, um *strahlende Dipole.* Demzufolge sind die in den Abschnitten 4.9.3 und 4.9.5 abgeleiteten Formeln für elektrische und magnetische Dipolstrahlung anwendbar. Es gilt also

$$\vec{E}_s=k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left[\vec{n}_s\times(\vec{p}\times\vec{n}_s)-\vec{n}_s\times\vec{m}\right]\qquad\vec{B}_s=\vec{n}_s\times\vec{E}_s\ ,$$

wobei $\vec{p}$ das elektrische und $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment darstellt. Die ausgestrahlte Leistung in Richtung $\vec{n}_s$ pro Flächeneinheit ergibt sich aus dem Anteil des komplexen Poynting-Vektors entlang $\vec{n}_s$:

$$\begin{aligned}\vec{S}\cdot\vec{n}_s&=\frac{c}{8\pi}\vec{n}_s\left[\vec{E}_s\times\left(\vec{n}_s\times\vec{E}_s\right)^*\right]=\frac{c}{8\pi}\vec{n}_s\Big[\left(\vec{E}_s\vec{E}_s^*\right)\vec{n}_s-\underbrace{\left(\vec{E}_s\vec{n}_s\right)}_{=0}\vec{E}_s^*\Big]=\\&=\frac{c}{8\pi}\vec{E}_s^2=\frac{c}{8\pi}\frac{k^4}{r^2}\left[\vec{n}_s\times(\vec{p}\times\vec{n}_s)-\vec{n}_s\times\vec{m}\right]^2\end{aligned}\tag{4.151}$$

Der *differentielle Streuquerschitt* ist nun definiert als ausgestrahlte Leistung pro Einheits-Raumwinkel und einfallendem Fluß:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}_s, \vec{n}_e) := \frac{r^2 \frac{c}{8\pi}\vec{E}_s^2}{\frac{c}{8\pi}\vec{E}_0^2} = \frac{k^4}{E_0^2}\left[\vec{n}_s \times (\vec{p} \times \vec{n}_s) - \vec{n}_s \times \vec{m}\right]^2 \tag{4.152}$$

In diesem Ausdruck kommen aber die elektrischen und magnetischen Dipolmomente noch vor. Wir wollen jedoch *induzierte Dipolstrahlung* untersuchen, also bleibt noch auszurechnen, wie überhaupt Dipole durch die einfallende Strahlung entstehen. Dazu machen wir einige vereinfachende Annahmen. Zunächst sei die bewegte Ladung $q = e$. Wenn ω die Frequenz der einfallenden Welle ist und ω_0 die Resonanzfrequenz der erregten Dipole, dann entsteht bekanntlich ein Dipolmoment der Form

$$\vec{p} = \frac{e^2 \vec{E}_0}{m}\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)^{-1} \quad .$$

Vereinfachend wird angenommen, daß das magnetische Dipolmoment verschwindet, $\vec{m} = 0$. Der *totale Streuquerschnitt,* der ja ein Maß für die "Streufähigkeit" des Dipols darstellt, ergibt sich zunächst zu

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{k^4}{E_0^2}\int \left[p^2 + (\vec{p}\vec{n}_s)^2 - 2(\vec{p}\vec{n}_s)^2\right] d\Omega = \frac{p^2 k^4}{E_0^2}\int \sin^2\vartheta\, d\Omega = \\ &= \frac{8\pi}{3}\frac{k^4}{E_0^2}p^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{c^4 E_0^2}p^2 \quad . \end{aligned} \tag{4.153}$$

Dabei wurde wieder $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$ gesetzt. Beim Einsetzen des induzierten Dipolmomentes unterscheidet man zweckmäßig zwei Fälle.

i) $\omega \ll \omega_0$. Man setzt

$$\frac{p^2}{E_0^2} \approx \frac{e^4}{m^2\omega_0^4} \ ,$$

und erhält

$$\Sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \quad . \tag{4.154}$$

Dieser totale Wirkungsquerschnitt wurde von Rayleigh bereits 1871 hergeleitet. Die ω^4-Abhängigkeit ist verantwortlich für die blaue Himmelsfarbe: Licht von der Sonne wird umso stärker gestreut, je höher die Frequenz ist.

ii) $\omega \gg \omega_0$. Dann dominiert der ω^2-Term im Resonanznenner des Dipolmoments und man setzt

$$\frac{p^2}{E_0^2} \approx \frac{e^4}{m^2\omega^4} \quad .$$

Daraus folgt

$$\Sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ , \tag{4.155}$$

und das ist bis auf m unabhängig vom Material und der eingestrahlten Frequenz. Dieses Phänomen heißt *Thomson-Streuung.*

Kapitel 5

Spezielle Relativitätstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) gelegt. Nach Einführung der Viererschreibweise und der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik wird dann noch auf die relativistische Mechanik eingegangen.

Um vermeintliche Paradoxa zu umgehen, die auf eine allzu anschauliche Vorstellung des Minkowski-Raumes zurückgehen, wird an vielen Stellen ein sehr "theoretischer" Standpunkt eingenommen. *In der SRT versagt die Anschauung!*

5.1 Koordinatentransformationen

Welche Motivation steckt hinter der Einführung der SRT? Um diese grundlegende Frage zu beantworten, beschäftigt man sich zunächst mit Koordinatentransformationen und leitet dann Widersprüche ab, aus denen ein neues Verständnis für den Aufbau von Raum und Zeit erwächst.

5.1.1 Die Galilei-Transformation

Ein *Ereignis* ist bezüglich eines Koordinatensystems K definiert als ein vier-Tupel

$$(x, y, z, t) = (\vec{r}, t) \quad .$$

Ein *Beobachter* in K "mißt" dieses Ereignis an den angegebenen Raumkoordinaten, wenn er bezüglich K ruht. Ein Ereignis kann von verschiedenen Bezugssystemen aus beobachtet werden, wobei seine Koordinaten (dazu zählt auch die Zeit, wie sich später zeigen wird) in unterschiedlichen Systemen (d. h. für verschiedene Beobachter) unterschiedliche Werte haben können. In einem System K', das sich bezüglich K mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, hat das Ereignis für einen dort ruhenden Beobachter gestrichene Raum- und Zeitkoordinaten:

$$(x', y', z', t') = (\vec{r}', t')$$

Innerhalb der SRT betrachtet man lediglich *Inertialsysteme.* Ein Inertialsystem ist definiert als ein Bezugssystem, in dem die Trajektorien dreier von einem Punkt in drei verschiedene Richtungen fortgeschleuderten und dann sich selbst überlassenen Massenteilchen geradlinig sind und bleiben. Bezüglich einer Transformation, die den Übergang von einem solchen System in ein anderes vermittelt, sind die Gesetze der Mechanik, so wie wir sie bisher kennen, *forminvariant.* Diese Transformation heißt *Galilei-Transformation:*

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \qquad t' = t \qquad \vec{v} = \text{const.} \tag{5.1}$$

Als Beispiel betrachte man die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein N-Körper-Problem mit zwei-Körper-Wechselwirkungen (Summation über gleiche Indizes!):

$$m_i \frac{d\vec{v}_i'}{dt'} = -\vec{\nabla}_{r_i'} \sum_j V_{ij} \left(|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|\right)$$

Da

$$\vec{v}_i{}' = \frac{d\vec{r}_i'}{dt'} = \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v} \ , \quad \text{folgt} \quad \frac{d\vec{v}_i'}{dt'} = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad .$$

Außerdem ist $(\vec{r}_i' - \vec{r}_j{}') = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ und damit

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla}_{r_i} \sum_j V_{ij} \left(|\vec{r}_j - \vec{r}_j| \right) \quad .$$

Die Forminvarianz ist also gezeigt.

In allen Inertialsystemen gelten die Gesetze der Mechanik in gleicher Form!

Soweit ist also alles konsistent. Probleme treten dann auf, wenn man auch die Elektrodynamik einer Galilei-Transformation unterwirft. Man betrachte beispielsweise die homogene Wellengleichung, die im Vakuum für die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ gilt:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\vec{r}, t) = 0 \ , \quad \text{mit} \quad f = \phi, A_i$$

Bei der Transformation dieser Gleichung nach Galilei bleibt so ziemlich nichts heil. Wir gehen von $(\vec{r}, t)$ auf $(\vec{r}\,', t')$ über. Dabei ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \ ,$$

und weiter

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \delta_{ij} \ , \quad \frac{\partial t'}{\partial x_i} = 0 \ , \quad \frac{\partial x_i'}{\partial t} = -v_i \ , \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \quad .$$

Einsetzen dieser Transformationen in die zweiten Ableitungen ergibt für den Laplace-Operator Invarianz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \Delta_{r'} f$$

Bei der Zeitableitung passiert es dann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x_j'} v_j + \frac{\partial f}{\partial t'} = -\vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} f + \frac{\partial f}{\partial t'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -2\vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} \frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} \left(\vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} f \right)$$

Die Wellengleichung nimmt daher im gestrichenen System folgende Form an:

$$\left(\Delta_{r'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{c^2} \vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} \vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} \vec{v}\,\vec{\nabla}_{r'} \right) f = 0 \tag{5.2}$$

Also ist die Wellengleichung *nicht invariant* gegen die Galilei-Transformation. Offenbar beschreibt diese den Übergang zwischen zueinander bewegten Systemen nicht adäquat. Die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins bietet hier einen Ausweg. Sie baut lediglich auf zwei einfachen Postulaten auf und erlaubt die Herleitung einer Transformation, die die o. a. Schwächen nicht aufweist. Die Postulate lauten wie folgt.

Das Relativitätsprinzip
In allen Inertialsystemen gelten die Naturgesetze in gleicher Form.

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
In allen Inertialsystemen ist die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit konstant gleich c.

Man betrachte als Beispiel für die Folgen dieser Postulate folgendes Gedankenexperiment: Gegeben seien zwei Beobachter B und B′, die sich mit der Geschwindigkeit v in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Irgendwann begegnen sie sich. Einer der Beobachter halte eine Streichholzschachtel mit Reibfläche, der andere ein Streichholz. Die Frage ist, welcher der beiden Beobachter nach der Begegnung und dem Aufflammen des Streichholzes das Recht hat, zu behaupten, die Kugelwelle des Lichtes breite sich um ihn herum aus.

Die Antwort ist natürlich, daß *beide* dies behaupten können. Man sieht das folgendermaßen ein: Das Ereignis 1 "Lichtblitz" habe in den Systemen K und K' folgende Koordinaten:

$$\begin{array}{ll} \text{in } K: & (x_1, y_1, z_1, t_1) \\ \text{in } K': & (x_1', y_1', z_1', t_1') \end{array}$$

Das Ereignis 2 sei dadurch definiert, daß die Lichtwelle verschiedene Punkte in den beiden Systemen erreicht:

$$\begin{array}{c} \text{in } K \text{ erreicht die Lichtwelle den Punkt } (x_2, y_2, z_3, t_2) \\ \text{in } K' \text{ erreicht die Lichtwelle den Punkt } (x_2', y_2', z_2', t_2') \end{array}$$

Jetzt wird das zweite Postulat eingesetzt. Da c in beiden Koordinatensystemen gleich ist, gelten in K bzw. K' die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{in } K: & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0 \\ \text{in } K': & (x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0 \end{array} \quad .$$

Die Kugelwelle bleibt also *in beiden Systemen* eine Kugelwelle! Die beiden Beobachter sind vollkommen gleichberechtigt.

Um das bisher Gesagte zu systematisieren, definieren wir den *Abstand zwischen zwei Ereignissen* 1 und 2 zu

$$s_{12}^2 := c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \quad .$$

Das *Linienelement* und damit die Metrik des betrachteten Raumes ergibt sich dann folgendermaßen:

$$ds^2 = c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \tag{5.3}$$

Man beachte, daß diese Größe negativ werden kann, obwohl sie als Quadrat geschrieben wird. Welche Bedeutung das Vorzeichen von ds^2 hat, wird später noch klar werden.

Offensichtlich gilt wegen des zweiten Postulates der SRT, daß ein verschwindendes Linienelement in allen Inertialsystemen verschwindet:

$$ds^2=0 \quad \Longrightarrow \quad ds'^2=0$$

Außerdem gilt für Linienelemente in verschiedenen Systemen ganz allgemein aus Gründen der Homogenität und Isotropie des Raumes und der Zeit

$$ds^2 = a\,ds'^2 \quad . \tag{5.4}$$

Es gibt also eine *lineare Beziehung* zwischen Linienelementen in verschiedenen Koordinatensystemen. Die vorangegangenen Definitionen lassen schon vermuten, daß die Welt, in der sich die SRT abspielt, schwer mit unserer Erfahrung in Einklang zu bringen ist. Die *Zeit* spielt bei der Berechnung von Abständen offensichtlich eine entscheidende Rolle. In Abschnitt 5.2 wird dies weiter vertieft.

Fürs erste soll die Forderung genügen, daß diese "Raumzeit" — wie auch immer sie beschaffen ist — *homogen und isotrop* sein muß. Die Konstante a in (5.4) kann damit nur vom Betrag der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ abhängen: $a = a(|\vec{v}|)$. Wie groß ist a? Um dies zu beantworten, betrachte man drei Koordinatensysteme K, K_1 und K_2, wobei $\vec{v}_1$ die Relativgeschwindigkeit von K_1 zu K und $\vec{v}_2$ die von K_2 zu K angeben soll. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} ds^2 & = & a(|\vec{v}_1|)\,ds_1^2 \\ ds^2 & = & a(|\vec{v}_2|)\,ds_2^2 \\ ds_1^2 & = & a(|\vec{v}_1-\vec{v}_2|)\,ds_2^2 \end{array} \quad .$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$a(|\vec{v}_1|)\, ds_1^2 = a(|\vec{v}_2|)\, ds_2^2 \quad \Rightarrow \quad ds_1^2 = \frac{a(|\vec{v}_2|)}{a(|\vec{v}_1|)}\, ds_2^2 \ ,$$

und zusammen mit der dritten Gleichung ergibt sich

$$a(|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|) = \frac{a(|\vec{v}_2|)}{a(|\vec{v}_1|)} \quad .$$

Hier kommt keinerlei Winkelabhängigkeit vor, obwohl das zu erwarten wäre, da es sicher einen Unterschied macht, ob sich K_1 und K_2 in gleiche oder entgegengesetzte Richtungen bewegen. Die einzige mögliche Folgerung aus dieser Tatsache ist, daß a *konstant* sein muß. Aus offensichtlichen Gründen ist daher

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = ds'^2 \quad \Rightarrow \quad s^2 = s'^2 \quad . \tag{5.5}$$

Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist also *invariant* unter einer Transformation in ein anderes Inertialsystem. Das ist ein Ergebnis, das unsere (zunächst unmotivierte) Wahl des Abstandsbegriffes untermauert. Befänden wir uns in einem vierdimensionalen Raum mit *euklidischer Geometrie,* so wäre der Abstand zu einem beliebig gewählten Nullpunkt

$$s_{12}^e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

konstant unter solchen Transformationen. Da sich die beiden Abstandsbegriffe ja offensichtlich stark unterscheiden, ist die euklidiche Vorstellung vom Raum nun endgültig gestorben.

WIR LEBEN IM MINKOWSKI-RAUM!

Die Beschaffenheit eines Raumes ist durch sein Linienelement vollständig festgelegt. Das Minkowski-Linienelement (5.3) ist von nun an das Maß der Dinge.

5.1.2 Die Lorentz-Transformation (LT)

Von nun an betrachten wir immer zwei Koordinatensysteme K und K', die sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\vec{v} = (v, 0, 0)$$

gegeneinander bewegen. Es gilt also laut (5.5)

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \quad .$$

Diese Gleichung ist automatisch erfüllt, wenn man die Transformation

$$\begin{aligned} x &= x' \cosh\psi + ct' \sinh\psi \\ ct &= x' \sinh\psi + ct' \cosh\psi \end{aligned}$$

einsetzt. Die Zahl ψ stellt dabei anscheinend so etwas wie einen "Drehwinkel" in der x-t-Ebene dar. Diese Bezeichnung ist natürlich aufgrund des Auftretens von Hyperbelfunktionen nicht ganz korrekt. Welche Bedeutung hat nun ψ? Wir betrachten den Koordinaten-Ursprung in K' von K aus. Dann ist also $x' = 0$ und

$$\begin{aligned} x &= ct' \sinh\psi \\ ct &= ct' \cosh\psi \end{aligned} \quad .$$

Daraus folgt

$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \tanh\psi =: \beta \ ,$$

und mit den Entsprechungen

$$\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1 \qquad \sinh\psi = \frac{\tanh\psi}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} \qquad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} && (5.6)\\ t &= \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1-\beta^2}} && (5.7)\\ y &= y' \\ z &= z' \ . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beschreiben den Übergang von K nach K' korrekt. Der Parameter ψ heißt *Rapidität.* Die Transformation heißt *Lorentz-Transformation* und ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- Die Umkehrtransformation erhält man offensichtlich einfach durch die Ersetzung von β für $-\beta$.
- Im Grenzfall $v \ll c$ geht die LT in die Galilei-Transformation über.
- Die Maxwell-Gleichungen (und damit auch die Wellengleichung) sind invariant unter LT.

Die LT hat weitreichende und für den "gesunden Menschenverstand" verwirrende Konsequenzen, die von der besonderen Beschaffenheit des Minkowski-Raumes herrühren. Einige sollen hier erläutert werden.

a) Die Relativität der Gleichzeitigkeit

Es hat keinen Sinn zu fragen, ob zwei Ereignisse bezüglich zweier gegeneinander bewegter Bezugssysteme *gleichzeitig* sind. Man betrachte zwei im Bezugssystem K gleichzeitige Ereignisse 1 und 2 ($\Delta t = 0$), die jedoch verschiedene x-Koordinaten haben sollen ($\Delta x \neq 0$). Vom System K' aus gesehen stellt sich das folgendermaßen dar (man beachte $\beta \to -\beta$):

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{-\beta\Delta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \Delta x' &= \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

In K' sind also die Ereignisse keineswegs gleichzeitig! Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist zur Beschreibung von Ereignissen in verschiedenen Koordinatensystemen eben nicht geeignet.

b) Die Lorentz-Kontraktion

Bei einer Längenmessung kommt es darauf an, wie sich ein Beobachter relativ zum zu messenden Objekt bewegt. Man betrachte einen im System K ruhenden Maßstab der Länge $L = x_2 - x_1$. In K' gilt für seine Länge

$$L' = x_2'(t') - x_1'(t') = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{(t_2 - t_1)v}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \qquad (5.8)$$

und mittels

$$ct' = \frac{ct_2 - \beta x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct_1 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)$$

wird das zu

$$L' = \frac{1 - v\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}} L = L \underbrace{\sqrt{1-\beta^2}}_{<1} \ . \qquad (5.9)$$

Im gestrichenen System erscheint also der Maßstab um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ *verkürzt!* Hier ist kein "Betrug" geschehen, wie man bei (5.8) vielleicht vermuten könnte. Vielmehr spielt die Relativität der

Gleichzeitigkeit bei der Längenmessung eine entscheidende Rolle. Die Messung geschieht per definitionem gleichzeitig an beiden Enden des Maßstabes *in* K', d. h. *nicht gleichzeitig in* K !

Man sieht hier, wie wichtig es ist, für Meßprozesse exakte Verfahrensweisen anzugeben. Die Gleichzeitigkeit der Messungen an den beiden Enden des Maßstabes ist kein Muß [8].

c) Die Zeitdilatation

Nicht nur auf die Längenmessung hat die LT Auswirkungen. Durch die Verknüpfung von Orts– und Zeitkoordinaten kann man bereits erwarten, daß auch mit der Zeitmessung Seltsames passiert, falls man Uhren in gegeneinander bewegten Koordinatensystemen beobachtet. Wir führen in K' eine Zeitmessung durch, und zwar mit einer Uhr, die zur Zeit t'_1 losläuft und bei t'_2 stoppt. Dann ist das Zeitintervall, das man an der Uhr ablesen kann, gleich

$$T' = t'_2(x') - t'_1(x') = \frac{1}{c}\sqrt{1-\beta^2}\,(ct_2 - ct_1) = T\sqrt{1-\beta^2}\ ,$$

denn der Beobachter in K hat eine eigene Uhr, die in seinem System ruht ($x_2 = x_1$). Demnach gilt

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}} > T' \quad . \tag{5.10}$$

Also beurteilt ein Beobachter eine sich relativ zu ihm bewegende Uhr als langsamer laufend als seine eigene, mit ihm verbundene Uhr. Ein bekannter experimenteller Beweis für die Zeitdilatation wird vom verlangsamten Zerfall schneller Myonen aus der kosmischen Strahlung geliefert.

d) Transformation von Geschwindigkeiten

Eines der erstaunlichsten Ergebnisse der SRT ist die Tatsache, daß Geschwindigkeiten nicht mehr einfach so linear addiert werden dürfen. Sei $\vec{u}$ die Geschwindigkeit eines Massenpunktes im System K. In K' habe dieser Punkt die Geschwindigkeit $\vec{u}'$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Vektor $\vec{u}'$ in der x'-y'-Ebene liegt. Es gilt also

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \qquad u'_z = 0 \quad .$$

Gesucht ist $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Aus der LT gewinnt man

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dt' + \beta\, dx'/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ dx &= \frac{dx' + v\, dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad dy = dy' \qquad dz = dz' \quad . \end{aligned}$$

Damit ist

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\, dt'}{dt' + \beta\, dx'/c} \qquad u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \beta\, dx'/c^2}\ ,$$

und schließlich

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \beta u'_x/c} \tag{5.11}$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta u'_x/c^2} \quad . \tag{5.12}$$

Außerdem gilt $u_z = u'_z$. Das ist das sogenannte *Additionstheorem für Geschwindigkeiten.* In der "Galilei-Welt" könnten sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes und die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme zu einem Wert größer c addieren. Das ist im Minkowski-Raum nicht möglich.

> Die Lichtgeschwindigkeit c kann durch Koordinatentransformationen nicht erreicht oder überschritten werden, wenn alle beteiligten Geschwindigkeiten kleiner c sind!

Leicht erkennt man in (5.11) das zweite Postulat der SRT wieder, wenn man $u'_x = c$ setzt. Dann wird $u_x = c$ (Vereinfachung: $u'_y = 0$). Auch geht das Additionstheorem im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ in die "gewohnte" Form über — in diesem Fall darf man einfach addieren und macht keinen großen Fehler.

e) Kausalität

In einer Dimension läßt sich der Minkowski-Raum graphisch anschaulich im sogenannten *Raum-Zeit-Diagramm* darstellen. Teilchenbahnen sind darin als *Weltlinien* zu sehen (Abb. 5.1). Jeder Punkt im Raum-Zeit-Diagramm entspricht einem Ereignis $(\vec{r}, t)$. Weltlinien sind also Mengen von Ereignissen. Der *Lichtkegel* ist definiert durch die Gleichung

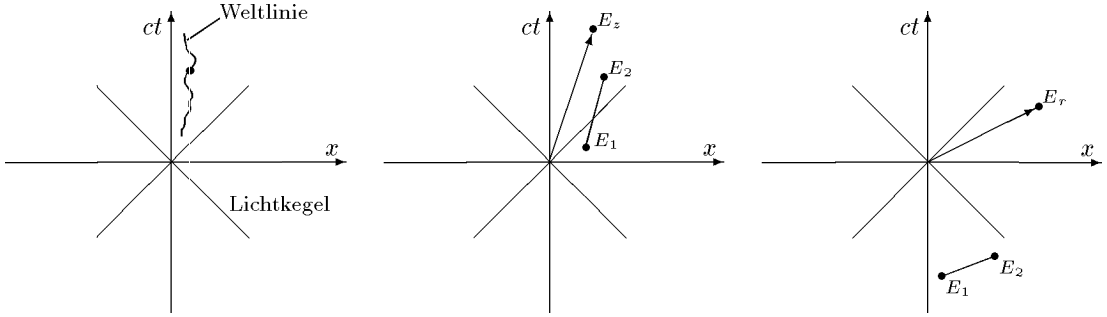


Abbildung 5.1: *Links: Weltlinie im Raum-Zeit-Diagramm. Mitte und rechts: Zeitartige und raumartige Ereignisse bzw. Abstände.*

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \ ,$$

und eine Gerade, die auf dieser Fläche verläuft, beschreibt die Weltlinie eines Photons. Die Transformation, die eine Weltlinie in ein bewegtes System überführt, lautet bekanntlich

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Per Konvention legt man die Ursprünge der Systeme K und K' so fest, daß $x = 0$ und $t = 0$ gilt, wenn auch $x' = 0$ und $t' = 0$ ist. Der Abstand s_{12}^2 zwischen zwei Ereignissen $(\vec{r}_1, t_1)$ und $(\vec{r}_2, t_2)$ ist unter LT invariant, also gilt

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - r_{12}^2 = t_{12}'^2 - r_{12}'^2 \quad \text{mit} \quad t_{12} = t_2 - t_1 \ , \quad r_{12}^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \ .$$

Man unterscheidet nun drei Arten von Ereignissen.

$$\text{Ein Ereignis heißt} \left\{ \begin{array}{c} \text{zeitartig} \\ \text{raumartig} \\ \text{lichtartig} \end{array} \right\}, \text{ wenn } s^2 = c^2t^2 - r^2 \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{array} \right. \ .$$

Dabei wurde mit s^2 der Minkowski-Abstand von $(\vec{r} = 0, t = 0)$ bezeichnet. Im folgenden wird o. E. angenommen, daß man sich nur auf der x-Achse bewegt, also $y = z = 0$ gilt. Wir betrachten zwei Ereignisse (x_1, t_1) und (x_2, t_2) und ihren Lorentz-invarianten Minkowski-Abstand $s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$. Man unterscheidet drei Fälle [12, Kap. 1.5]:

i) *Zeitartiger Abstand — kausale Verbindung.* Falls $s_{12}^2 > 0$, gilt also $(x_1 - x_2)^2 < c^2(t_1 - t_2)^2$, und das bedeutet, daß beide Ereignisse durch ein Lichtsignal verbunden werden können. Im Minkowski-Diagramm ist die Verbindungsgerade zwischen ihnen unter mehr als $\pi/4$ geneigt. Dies hat zur Folge, daß ein Lichtsignal, das von dem früheren Ereignis ausgeht, immer früher am Ort des späteren Ereignisses ankommt als dieses selbst geschieht — ein *kausaler* Zusammenhang (Abb. 5.1 Mitte). Außerdem gibt es immer ein Inertialsystem K', in dem beide Ereignisse *am selben Ort* stattfinden, denn

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - x_{12}^2 \stackrel{!}{=} c^2t_{12}'^2 > 0$$

ist erfüllt. Befindet man sich am Raumzeit-Punkt $(x = 0, t = 0)$, so kann man also von allen Punkten im unteren Teil des Lichtkegels Nachrichten empfangen, nicht jedoch von denen im oberen Teil. Die Hälfte des Lichtkegels mit $t < 0$ heißt deshalb *absolute Vergangenheit,* die mit $t > 0$ *absolute Zukunft.*

ii) *Raumartiger Abstand — keine kausale Verbindung.* Falls $s_{12}^2 < 0$, gilt $(x_1 - x_2)^2 > c^2(t_1 - t_2)^2$. Ein Lichtsignal vom früheren Ereignis kommt also immer zu spät, um auf das spätere Ereignis noch Einfluß haben zu können (Abb. 5.1 rechts). Durch eine LT läßt sich immer ein Inertialsystem K' finden, in dem beide Ereignisse *zur selben Zeit* stattfinden, denn es gilt

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2 \stackrel{!}{=} -x_{12}^2 < 0 \quad .$$

iii) *Lichtartiger Abstand — Überbrückung durch Lichtsignale.* Zwei Ereignisse, deren Verbindungsgerade im Minkowski-Diagramm genau unter $\pm\pi/4$ geneigt ist, können *nur* durch ein Lichtsignal und sonst keinen anderen Vorgang zur Informationsübermittlung verbunden werden. Ihr Abstand $s_{12}^2 = 0$ heißt folglich *lichtartig.*

Folglich bezeichnet man ein einzelnes Ereignis dann als zeitartig, wenn sein Abstand von $(x = 0, t = 0)$ zeitartig ist.

Das Minkowski-Diagramm eröffnet eine graphische Möglichkeit zur Durchführung von Lorentz-Transformationen. Dazu beschreibt man die Koordinatenachsen des bewegten Systems K' im Ruhesystem K. Die K'-Zeitachse ist demzufolge durch die Gleichung

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad x - \beta ct = 0$$

gegeben. Dies ist aber wegen $\beta < 1$ eine Ursprungsgerade mit einer Steigung größer $\pi/4$. Analog erhält man die K'-Ortsachse aus $t' = 0$ zu $ct - \beta x' = 0$ als Gerade mit einer Steigung kleiner $\pi/4$. Die Orts– und Zeitachsen des gestrichenen Systems sind symmetrisch zum Lichtkegel angeordnet und bilden so ein *schiefwinkliges Koordinatensystem.* Eine LT von K nach K' besteht folglich einfach aus der Projektion eines Ereignisses in K auf die Achsen von K' unter Beachtung dieser Schiefwinkligkeit [8].

5.2 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, einen Formalismus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Gesetze der Physik auf eine Weise geschrieben werden können, die ihre Invarianz gegen die LT evident macht. Der erste Schritt führt dabei über die Einführung der *Vierervektorschreibweise.*

Seien ct, x, y und z Koordinaten im Minkowski-Raum. Man definiert

$$\begin{aligned} x_\mu &:= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \ , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \\ x^\mu &:= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \end{aligned}$$

als *kovariante* (x_μ) bzw. *kontravariante* (x^μ) Vierervektoren. Per Konvention steht ein griechischer Index für $0 \ldots 3$, ein lateinischer für $1 \ldots 3$.[1] Die Einstein-Konvention, wie wir sie bisher verwendeten, wird nun eingeschränkt: summiert wird nur noch über gleichnamige Indizes, wenn sie *auf verschiedenen Ebenen stehen,* d. h.

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = s^2 \qquad x^i x_i = \sum_{i=1}^{3} x^i x_i \quad .$$

Die Beschaffenheit, d. h. die Geometrie eines Raumes ist durch seine Metrik und damit durch sein Linienelement eindeutig festgelegt. Es gilt

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx_\nu \quad . \tag{5.13}$$

[1] Diese Konvention wird in der Literatur u. U. genau umgekehrt verwendet. Eine allgemeine Übereinkunft gibt es nicht.

Im *euklidischen* vierdimemsionalen Raum lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

im *Minkowski-Raum* hat man dagegen

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{5.14}$$

Mit dieser Metrik ist es möglich, Indizes zu heben bzw. zu senken und damit kovariante in kontravariante Vektoren zu verwandeln und umgekehrt. Offenbar gilt

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{und} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu ,$$

wobei $g^{\mu\nu}$ die zu $g_{\mu\nu}$ inverse Metrik darstellt. Es gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ und

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda = \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ 1 & \mu = \lambda \end{cases} .$$

Wie transformieren sich nun allgemeine Vektoren beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem? Was macht überhaupt einen kovarianten Vektor aus? Man betrachte die ko- bzw. kontravarianten Vierervektoren

$$\begin{aligned} A_\mu &= (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \\ A^\mu &= (A^0, A^1, A^2, A^3) \end{aligned} .$$

Das Vektorfeld A_μ hänge von den Kontinuumskoordinaten ab: $A^\mu = A^\mu(x^\mu)$. Durch eine LT werde nun der Übergang zu neuen Koordinaten x'^μ vermittelt. Die ko– bzw. kontravariante Eigenschaft eines Vektors ist nun durch sein Transformationsverhalten in das neue System festgelegt:

$$\begin{aligned} \text{kontravarianter Vektor} \quad &: \quad A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \\ \text{kovarianter Vektor} \quad &: \quad B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \end{aligned}$$

Eine zentrale Forderung unseres Formalismus soll die Invarianz des Skalarproduktes $B_\mu A^\mu$ gegen LT sein. Dies ist wegen

$$B'_\mu A'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} B_\nu A^\lambda = \delta^\nu{}_\lambda B_\nu A^\lambda = B_\nu A^\nu$$

erfüllt (die Stellung der Indizes am Kroneckersymbol wird später noch klar). Die Motivation für diese Forderung ist offensichtlich: Minkowski-Abstände sollen unabhängig vom Koordinatensystem sein.

Den nächsten Schritt bildet die Untersuchung des Transformationsverhaltens von Ableitungen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} ,$$

also läßt sich folgende allgemeine Regel aufstellen:

> Die Ableitungen nach kovarianten (kontravarianten) Koordinaten verhalten sich wie kontravariante (kovariante) Vektoren!

Für die Formulierung von Ableitungen hat sich in der SRT eine abkürzende Schreibweise durchgesetzt:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right) , \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$
$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla}\right) , \quad \text{mit} \quad -\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) .$$

Durch die Stellung der Indizes an den '∂'s wird o. a. Eigenschaft verdeutlicht. Nun ist es möglich, die *Viererdivergenz* zu definieren:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu := \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} \tag{5.15}$$

Durch zweimalige Anwendung dieses Operators bekommt man eine elegante Schreibweise für den d'Alembert-Operator:

$$\Box := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \Delta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Als Anwendung des Formalismus untersuchen wir nun Geschwindigkeit und Beschleunigung.

a) Die Vierergeschwindigkeit

Aufgrund der Zeitdilatation ist es nicht so einfach, einen Ausdruck für eine Geschwindigkeit hinzuschreiben — nach welcher Zeit soll die Bahnlinie abgeleitet werden? Von besonderer Bedeutung ist hier der Begriff der *Eingenzeit.* Sie bezeichnet die Zeit τ, die eine Uhr anzeigt, die mit dem bewegten Körper fest verbunden ist, d. h. mit ihm bewegt wird. Mit t benennt man die Zeit im Ruhesystem des Beobachters. Wie bereits hergeleitet, ist

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2} \quad \Rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2\left(1-\beta^2\right) = \frac{1}{c^2}\left[(c\,dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right] = \frac{ds^2}{c^2} , \tag{5.16}$$

und damit ist die Eigenzeit *invariant* unter LT. Man hat also eine Zeit, die zur Definition eines Geschwindigkeitsbegriffes geeignet ist. Somit definiert man die *Vierergeschwindigkeit* u^μ zu

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad \text{also} \quad u^0 = \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} , \quad u^1 = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v_x \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ \ldots$$

$$\Longrightarrow \quad u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(c, \vec{v}) . \tag{5.17}$$

Es ist dann

$$u_\mu u^\mu = \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right] = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = c^2 . \tag{5.18}$$

b) Die Viererbeschleunigung

Analog zur Vierergeschwindigkeit definiert man die *Viererbeschleunigung*

$$b^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} .$$

Zwischen Vierergeschwindigkeit und –beschleunigung besteht ein besonderer Zusammenhang. Es ist nämlich nach (5.18)

$$0 = \frac{d}{d\tau}\underbrace{(u_\mu u^\mu)}_{=c^2} = \frac{du_\mu}{d\tau}u^\mu + u_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = g_{\mu\nu}\frac{du^\nu}{d\tau}u^\mu + u_\mu b^\mu = 2u_\mu b^\mu \quad \Rightarrow \quad \text{“}b \perp u\text{”} .$$

Ein Teilchen bewege sich nur entlang der x-Richtung. Dann ist

$$\frac{u^0}{u^1} = \frac{c}{v_x} = \frac{c\,dt}{dx} ,$$

was bedeutet, daß der Vektor der Vierergeschwindigkeit immer *tangential* an der Weltlinie liegt und damit *zeitartig* ist. Hingegen ist

$$b^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

im Ruhesystem des Teilchens, also ist b^μ ein *raumartiger Vektor.*

5.3 Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotationen und Boosts

Im letzten Abschnitt wurde oft der Übergang zu den Koordinaten eines neuen Inertialsystems x'^μ vollzogen. Wie findet man aber die x'^μ, wenn man die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme kennt?

Die allgemeinste lineare Transformation in ein anderes Koordinatensystem wird durch

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$$

vermittelt. Wir suchen die Bedingungen, denen $L^\mu{}_\nu$ genügt. Wegen der Invarianz des Minkowski-Abstandes unter LT ist

$$s^2 = s'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma \quad \Rightarrow \quad g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma \quad . \tag{5.19}$$

In etwas suggestiverer Notation liest sich das zu

$$g_{\rho\sigma} = \left(L^T\right)_\rho{}^\mu g_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma \quad . \tag{5.20}$$

Hier erkennt man deutlich die Ähnlichkeit zu orthogonalen Transformationen. Weiterhin gilt

$$\underbrace{\det g}_{=-1} = \underbrace{\det L^T}_{=\det L} \det g \det L \quad \Rightarrow \quad \det L = \pm 1 \quad .$$

Man nennt Transformationen mit

$$\det L = \begin{cases} 1 & \text{eigentliche LT} \\ -1 & \text{uneigentliche LT} \end{cases} \quad .$$

Wir untersuchen im folgenden zwei konkrete Beispiele für $L^\mu{}_\nu$.

i) *Rotationen.* Man setzt $L^0{}_0 = 1$, $L^0{}_i = L^i{}_0 = 0$:

$$L^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Die Untermatrix R beschreibt dabei eine Rotation, also eine orthogonale Transformation im euklidischen 3d-Unterraum. Wie gewohnt redet man bei

$$\left\{\begin{array}{c} \det L = \det R = 1 \\ \det L = -1 \end{array}\right\} \quad \text{von} \quad \left\{\begin{array}{c} \text{eigentlichen} \\ \text{uneigentlichen} \end{array}\right\} \quad \text{Rotationen.}$$

ii) *Boosts.* Die durch $L^\mu{}_\nu$ vermittelte Transformation soll in ein mit der Geschwindigkeit v z. B. in x-Richtung bewegtes Inertialsystem führen. Laut den Gleichungen der LT ist

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x'^2 = x^2 \qquad x'^3 = x^3 \ ,$$

was zu

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{führt.} \tag{5.21}$$

Für *kovariante* Ortsvektoren lautet das Transformationsgesetz

$$x'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \ , \quad \text{mit} \quad L_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\rho} L^{\rho}{}_{\lambda} g^{\lambda\nu} \ ,$$

was zu

$$L_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{führt.} \tag{5.22}$$

Drei Rotationen um und drei Boosts entlang der Raumachsen ergeben sechs unabhängige Parameter für die eindeutige Bestimmung einer LT. Man sieht das auch auf eine alternative Weise ein. Die 16 Transformationsgleichungen

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu} L^{\sigma}{}_{\nu}$$

sind nicht alle unabhängig. Wegen der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ hat man nur zehn unabhängige Gleichungen und damit sechs freie Parameter [9, Kap. 11.7].

Einige weitere Eigenschaften der LT sind die folgenden:

i) *Die LT bilden eine Gruppe.* Bei der Hintereinanderausführung zweier LT ergibt sich wieder eine LT. Diese Gruppe ist aber *nicht kommutativ,* da es sich ja um Matrix-Multiplikationen handelt. Die nächsten beiden Eigenschaften sind Folgen dieser Gruppen-Eigenschaft.

ii) *Die Identität ist eine LT.* Das ist klar, da sich ein Boost für $\beta = 0$ in die Identität verwandelt.

iii) *Zu jeder LT existiert eine Inverse.* Die Hintereinanderausführung einer LT und ihrer Inversen führt also zur Identität. Man kann die Inverse direkt angeben. Wie oben gezeigt, gilt

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu} L^{\sigma}{}_{\nu} \quad .$$

Damit ist

$$\delta^{\lambda}{}_{\nu} = g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \underbrace{g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu}}_{=: L_{\sigma}{}^{\lambda}} L^{\sigma}{}_{\nu} = L_{\sigma}{}^{\lambda} L^{\sigma}{}_{\nu} \quad .$$

Die gesuchte Inverse lautet also $L_{\sigma}{}^{\lambda} = g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^{\rho}{}_{\mu}$.

5.4 Die Feldgleichungen in kovarianter Form

Der in den letzten Abschnitten entwickelte Formalismus stellt eine extrem leistungsfähige Methode zur Formulierung der Elektrodynamik dar. Im folgenden werden die Gleichungen der Elektrodynamik so geschrieben, daß sie unter LT forminvariant bleiben.

5.4.1 Ströme, Dichten, Potentiale

i) *Die Kontiniutätsgleichung.* Die Viererdivergenz (5.15) legt schon einen Zusammenhang mit der KG nahe. Setzt man

$$j^{\mu} := (c\rho, \vec{j}) \ ,$$

so wird die KG einfach zu

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \ , \tag{5.23}$$

und da dies einen Skalar darstellt, ist die Gleichung Lorentz-invariant.[2] Diese Eigenschaft ist von nun an für *jede* physikalische Gleichung zu fordern. Die Frage ist hier speziell, ob j^μ wirklich ein Vierervektor ist. Dazu muß sich seine nullte Komponente $c\rho$ als zeitartige Variable transformieren. Die im Volumenelement d^3x eingeschlossene Ladung ist $\rho\, d^3x$. Das Minkowski-Volumenelement d^4x transformiert sich auf folgende Weise:

$$d^4x' = \underbrace{\left|\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^4)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^4)}\right|}_{=|\det L|=1} d^4x = d^4x \ ,$$

also ist d^4x eine Lorentz-Invariante. Andererseits ist wegen der Invarianz der elektrischen Ladung

$$\rho' d^3x' = \rho\, d^3x \quad .$$

Damit ist gezeigt, daß ρ eine zeitartige Variable ist: sie transformiert sich wie dx^0 [9, Kap. 11.9].

ii) *Die Lorentz-Eichung.* Die Lorentz-Eichbedingung lautet (siehe (4.30))

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0 \quad .$$

Mit der Definition

$$A^\mu := \left(\phi, \vec{A}\right)$$

wird dies zu

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad . \tag{5.24}$$

Auch das ist als Skalar wieder invariant unter LT. Das gilt offensichlich *nicht* für die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$.

iii) *Vektor– und Skalarpotential in Lorentz-Eichung.* Die Feldgleichungen (4.31) und (4.32) für die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ können nun kompakt hingeschrieben werden. Sie lauten zusammen einfach

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad . \tag{5.25}$$

iv) $\vec{E}$- *und* $\vec{B}$-*Felder.* Aus den Potentialen gewinnt man die physikalischen Felder nach (4.26) und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Mit $A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$ und $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$ ergibt sich beispielsweise für die x-Komponenten

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\left(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0\right)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\left(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2\right) \quad .$$

Im nächsten Abschnitt wird eine konsistente, elegante Formulierung der Maxwell-Gleichungen vorgestellt.

5.4.2 Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie

Wir definieren zunächst den antisymmetrischen *Feldstärketensor*

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5.26}$$

[2] Man unterscheide zwischen *Forminvarianz* unter LT (das ist das eigentliche Ziel der kovarianten Formulierung) und *Lorentz-Invarianten*, die ihren Wert unter LT beibehalten, so wie die linke Seite von (5.23). Hier ist das beides aufgrund der skalaren Eigenschaft von $\partial_\mu j^\mu$ der Fall.

Seine kovariante Form erhält man durch

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\lambda} g_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Aus diesem gewinnt man den sogenannten *dualen Feldstärketensor* $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ über

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5.27}$$

Analog zum dreidimensionalen Fall ist hier

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu,\ \nu,\ \lambda,\ \rho \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } \mu,\ \nu,\ \lambda,\ \rho \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad . \tag{5.28}$$

Man sieht, daß man von $F^{\mu\nu}$ direkt nach $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ gelangt, wenn man $\vec{B}$ für $\vec{E}$ und $-\vec{E}$ für $\vec{B}$ einsetzt. Mit diesen Definitionen können die Maxwell-Gleichungen äußerst kompakt aufgeschrieben werden. Wir trennen in inhomogene und homogene Gleichungen.

i) *Die inhomogenen Gleichungen.* Sie lauten unter Verwendung des Feldstärketensors einfach

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \ , \tag{5.29}$$

und diese Formulierung ist, wie man leicht zeigen kann, *Lorentz-invariant.* Also gilt in jedem anderen Inertialsystem K' die Gleichung

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu \quad .$$

ii) *Die homogenen Gleichungen.* Sie haben die Form

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{5.30}$$

Wie sich zeigen läßt, kann man die homogenen Gleichungen auch mit Hilfe des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ schreiben:

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \tag{5.31}$$

Diese Gleichung heißt auch *Jacobi-Identität* (der Beweis erfolgt einfach durch das Einsetzen der Defnition (5.26)). Da aber die Null auf der rechten Seite ganz automatisch allein durch die Definition von $F^{\mu\nu}$ herauskommt, *sind die homogenen Gleichungen ohne jede weitere Annahme automatisch erfüllt!* Mit anderen Worten: Schreibt man (5.26) hin, so sind die homogenen Gleichungen bereits impliziert und damit *trivial!* Beispielsweise bekommt man dann für $\mu = 0$, $\nu = 1$ und $\lambda = 2$ die z-Komponente der Induktionsgleichung wieder:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B_z - \frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right]_z = 0$$

Und für $\mu = 1$, $\nu = 2$ und $\lambda = 3$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = \vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad .$$

Zum Abschluß soll noch die kovariante Form der Feldgleichungen bei Anwesenheit von Materie diskutiert werden. Die homogenen Feldgleichungen ändern sich überhaupt nicht. Die inhomogenen haben die Form

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ .$$

Mit der Definition

$$G^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

lauten die Maxwell-Gleichungen nun endgültig

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{5.33}$$

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{5.34}$$

und aus den Materialgleichungen $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ und $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ wird

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}\right) \ , \quad \text{mit} \quad M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.35}$$

5.4.3 Transformation der Felder

Wenn man schon die Elektrodynamik kovariant formuliert, dann stellt sich die Frage, wie sich elektrische und magnetische Felder bzw. der Feldstärketensor unter Lorentz-Transformationen verhalten. Die universelle Transformationsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe lautet

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\lambda L^\nu{}_\rho F^{\lambda\rho} \ .$$

Das gestrichene System bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Richtung. Die zwischen K und K' vermittelnde Transformation ist ein Boost der Form (5.21) und bewirkt, daß im gestrichenen System die Felder folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & \qquad B'_x &= B_x \\ E'_y &= \left(E_y - \beta B_z\right)/\sqrt{1-\beta^2} & \qquad B'_y &= \left(B_y + \beta E_z\right)/\sqrt{1-\beta^2} \\ E'_z &= \left(E_z + \beta B_y\right)/\sqrt{1-\beta^2} & \qquad B'_z &= \left(B_z - \beta E_y\right)/\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Spätestens hier wird klar, daß elektrisches und magnetisches Feld untrennbar verknüpft sind. Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, nicht die getrennten Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ liefert die relativistisch konsequente Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. Die korrekte Verallgemeinerung von (5.36) für allgemeine Geschwindigkeiten $\vec{v}$ lautet

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \gamma\vec{B} - \frac{\gamma-1}{v^2}\left(\vec{B}\vec{v}\right)\vec{v} - \frac{\gamma}{c}\left(\vec{v}\times\vec{E}\right) \\ \vec{E}' &= \gamma\vec{E} - \frac{\gamma-1}{v^2}\left(\vec{E}\vec{v}\right)\vec{v} + \frac{\gamma}{c}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Zu beachten ist, daß zu einer Transformation in ein neues Bezugssystem immer auch eine Transformation der Raumzeit-Koordinaten gehört, denn andere Koordinaten hat der dortige Beobachter ja nicht zur Verfügung. In K' müssen also die Felder als $\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{x}', t')$ und $\vec{B}' = \vec{B}'(\vec{x}', t')$ ausgedrückt werden. In den Formeln (5.36) wird diese Tatsache noch nicht berücksichtigt.

Die obigen Formeln machen auch deutlich, daß beispielsweise ein in einem bestimmten Inertialsystem rein magnetisches Feld nicht in allen anderen Inertialsystemen auch rein magnetisch zu sein braucht. Bei der Transformation treten plötzlich *elektrische* Feldkomponenten auf! Das darf aber nicht zu der Annahme verführen, die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_l = \frac{e}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}$$

erwachse rein aus der Transformation des Magnetfeldes in das Bezugssystem eines bewegten Teilchens. Wie man sich mit Hilfe von (5.36) leicht überzeugt, gilt diese Aussage nur in niedrigster Ordnung in v/c [9, Kap. 11,12].

5.5 Relativistische Mechanik: Lagrange- und Hamilton-Formalismus

Ziel dieses Abschnittes wird es sein, die Gesetze der Mechanik kovariant zu formulieren. Aus dem ersten Postulat der SRT folgt unmittelbar, daß dies möglich sein muß.

Die klassische Mechnik kann bekanntlich auf dem *Hamiltonschen Variationsprinzip* aufgebaut werden:

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L - \frac{\partial}{\partial q_i} L = 0 \tag{5.37}$$

Diese *Euler-Lagrange-Gleichungen* sind dann die Bewegungsgleichungen des Systems. Sei nun im folgenden stets

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad .$$

Die sogenannte *Hamilton-Funktion* S soll nun eine Lorentz-Invariante sein. Dazu schreibt man

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \gamma L \,\frac{dt}{\gamma} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L \, d\tau \ ,$$

also ist ein L zu finden, so daß dies eine Lorentz-Invariante ist. Wir unterscheiden die beiden Fälle eines freien Teilchens und eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld.

a) Freies Teilchen

Offensichtlich kann L hier nur von $\dot{q}_i$ abhängen. Eine Lorentz-invariante Größe aus der Geschwindigkeit ist der Ausdruck

$$u_\mu u^\mu = c^2 \ ,$$

und das legt

$$\gamma L \propto c^2 \quad \Rightarrow \quad L = \alpha c^2 \sqrt{1-\beta^2}$$

nahe. Im Limes $\beta \ll 1$ wird das zu

$$L = \alpha c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha c^2 - \frac{\alpha}{2} v^2 \ , \quad \alpha = \text{const.} \quad .$$

Daraus folgt $\alpha = -m$ (*Ruhemasse*), und die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen ist dann

$$L = -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} \quad . \tag{5.38}$$

Mit diesem L lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mc^2 \gamma \cdot 2 \frac{v_i}{c^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\gamma m \vec{v}\right) = 0 \ , \tag{5.39}$$

was im nichtrelativistischen Grenzfall $\gamma \to 1$ zur bekannten Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0$$

wird. Wir betrachten nun die Lagrange-Funktion noch etwas genauer. Der kanonische Impuls berechnet sich zu

$$p_i = \frac{dL}{dv_i} = \gamma m v_i \quad . \tag{5.40}$$

Das entspricht bis auf den Faktor γ genau dem nichtrelativistischen Fall. Offenbar muß man davon ausgehen, daß die Masse eines bewegten Körpers um den Faktor γ größer ist als seine Ruhemasse.

Der gerade berechnete kanonische Impuls hat noch immer drei Komponenten. Wir suchen jetzt einen Viererimpuls, der in seinen raumartigen Komponenten diesen Impuls enthält. Es liegt nahe, dazu die bereits definierte Vierergeschwindigkeit u^μ aus (5.17) heranzuziehen:

$$p^\mu := \gamma m\,(c, \vec{v}) \tag{5.41}$$

Die Größe $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ ist dann eine Lorentz-Invariante.

Wie lautet der Ausdruck für die Gesamtenergie eines freien Teilchens? Damit hätte man dann auch gleich dessen Hamilton-Funktion. Analog zur klassischen Mechanik gewinnt man die Energie durch eine Legendre-Transformation aus L:

$$E = p_i\dot{q}_i - L = \vec{p}\vec{v} - L = \gamma m v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma\left(mv^2 + mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \gamma mc^2$$

Deswegen läßt sich für den Viererimpuls auch

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{5.42}$$

schreiben. Aus der Gleichung

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \overset{(5.42)}{=} \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

folgt dann für die Gesamtenergie

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad . \tag{5.43}$$

Im Fall $\vec{v} = 0$ ist also $E = mc^2$, wobei m die Ruhemasse darstellt. Entwickelt man (5.43) nach kleinen Geschwindigkeiten, so erhält man die vertraute Form

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

zurück.

b) Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Zunächst rekapitulieren wir die "gewohnten" Gleichungen zur Beschreibung eines Teilchens der Ladung e im elektromagnetischen Feld.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \tag{5.44}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.45}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{5.46}$$

Die Konstruktion der Lagrange-Gleichungen ist hier etwas komplizierter, da man es mit *geschwindigkeitsabhängigen Potentialen* zu tun hat. Durch Einsetzen der beiden letzten Gleichungen in die erste erhält man

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \quad .$$

Die weitere Behandlung verlangt eine Aufspaltung in Komponenten. Es gilt $\left[\vec{\nabla}\phi\right]_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ und

$$\begin{aligned}\left[\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]_x &= v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)= \\ &= v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}-v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}-v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}-v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\quad .\end{aligned}$$

Hier wurde im letzten Schritt eine "geschickte Null" addiert. Aus der Identität

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\vec{v}\,\vec{\nabla}A_x$$

gewinnt man schließlich

$$\left[\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}\vec{A}\right)-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\ ,$$

also läßt sich schreiben

$$\frac{dp_x}{dt}=e\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi-\frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right)\ \underbrace{-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\vec{v}\vec{A}\right)\right)}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\phi-\frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}\right)}\right)\quad .$$

Oder vereinfacht:

$$\frac{dp_x}{dt}=\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}\right)U\quad\text{mit}\quad U=e\phi-\frac{e}{c}\vec{v}\vec{A}\tag{5.47}$$

Das hat schon starke Ähnlichkeit mit Lagrange-Gleichungen. In der Tat erhält man genau (5.47), wenn man

$$L=T-U=T-e\phi+\frac{e}{c}\vec{v}\vec{A}\tag{5.48}$$

setzt. Das korrekte geschwindigkeitsabhängige Potential im elektromagnetischen Feld ist also gefunden. Mit

$$u_\mu=\gamma\,(c,-\vec{v})\quad\text{und}\quad A^\mu=\left(\phi,\vec{A}\right)$$

ist

$$U=\frac{e}{\gamma c}\,u_\mu A^\mu\quad .\tag{5.49}$$

Die *relativistische Lagrange-Funktion* ergibt sich nun einfach zu

$$L=-\sqrt{1-\beta^2}\left(mc^2+\frac{e}{c}\,u_\mu A^\mu\right)\ ,\tag{5.50}$$

was für $\beta\ll 1$ in das gewohnte Ergebnis

$$L\approx -mc^2+\frac{1}{2}mv^2-e\phi+\frac{e}{c}\vec{v}\vec{A}$$

übergeht. Die *Hamilton-Funktion* geht wieder aus L durch eine Legendre-Transformation hervor. Mit $\vec{P}$ bezeichnen wir den *generalisierten Impuls,* der in diesem speziellen Fall bekanntlich nicht mit dem mechanischen Impuls übereinstimmt.

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=\gamma m v_i+\frac{e}{c}A_i=p_i+\frac{e}{c}A_i$$

$$H=P_iv_i-L=v_i\frac{\partial L}{\partial v_i}-L=\gamma mc^2+e\phi$$

Der Hamilton-Formalismus verlangt, daß H durch den verallgemeinerten Impuls ausgedrückt wird. Dazu wendet man einen Trick an. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{H-e\phi}{c} &= \gamma mc\\ \vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A} &= \gamma m\vec{v}\quad .\end{aligned}$$

Man hebt beide Gleichungen ins Quadrat und subtrahiert die zweite von der ersten. Auf der rechten Seite steht dann $p_\mu p^\mu = m^2c^2$, und es ergibt sich

$$\left(\frac{H - e\phi}{c}\right)^2 - \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m^2c^2 \ ,$$

woraus

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\phi \tag{5.51}$$

folgt. Für $\beta \ll 1$ bekommt man wie früher

$$H \approx \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi + mc^2 \quad .$$

5.6 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes

Im vorigen Abschnitt wurde die Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik auf relativistische Verhältnisse verallgemeinert, indem Ausdrücke für Lagrange- und Hamilton-Funktion gefunden wurden. Es ist jedoch auch möglich, die *Elektrodynamik* in Lagrangescher Weise auszudrücken und damit die Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit Ladungs– und Stromdichten zu beschreiben. Dies verlangt allerdings nach der Einführung einer kontinuierlichen Beschreibungsweise.

5.6.1 Allgemeine kontinuierliche Systeme

Wir ersetzen die Raumkoordinaten q_i durch kontinuierliche Felder $\phi_k(x^\alpha)$, was den Übergang zu unendlich vielen Freiheitsgraden kennzeichnet. Der Index k zählt dabei die Freiheitsgrade *pro Raumzeit-Punkt* durch. Die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{q}_i$ wird durch den Vierergradienten $\partial_\mu\phi_k$ ersetzt, die Lagrange-Funktion

$$L = \sum_i L_i\,(q, \dot{q}) \quad \text{durch} \quad \int \mathcal{L}\,(\phi_k, \partial_\mu\phi_k)\; d^3x \quad .$$

Die Funktion $\mathcal{L}$ heißt *Lagrange-Dichte.* Die korrekte Verallgemeinerung der Euler-Lagrange-Gleichungen auf kontinuierliche Systeme lautet

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} \quad . \tag{5.52}$$

Man sieht das auf folgende Weise ein: Nach dem Hamilton-Prinzip soll die Variation der Wirkung

$$S = \int \mathcal{L}\, d^3x\, dt = \int \mathcal{L}\, d^4x \tag{5.53}$$

verschwinden. Es ist $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\phi_k, \partial_\mu\phi_k)$ und damit

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\,\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\,\delta\left[\partial_\mu\phi_k\right]\right) d^4x = \\ &\overset{p.I.}{=} \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\right)\delta\phi_k d^4x \overset{!}{=} 0 \quad \forall\,\delta\phi_k \quad . \end{aligned}$$

Der Integrand muß also verschwinden. Daraus ergibt sich direkt (5.52).

5.6.2 Elektromagnetische Felder

Im speziellen Fall elektromagnetischer Felder benutzt man folgende Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} \phi_k &\rightarrow A^\mu \\ \partial^\mu\phi_k &\rightarrow \partial^\mu A^\nu \quad \text{bzw.} \quad F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Da das Volumenelement d^4x eine Lorentz-Invariante ist, muß auch (wegen der Invarianz von S) $\mathcal{L}$ eine Lorentz-Invariante sein. Der Skalar

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$$

ist eine solche Invariante. Auch $F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ wäre eine Möglichkeit, jedoch gilt

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda\right) = \\ &= 2\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial_\lambda A_\rho\right) = 2\,\partial_\mu\left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu\partial_\lambda A_\rho\right) \quad . \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen von A_ρ fallen wegen der Eigenschaften von $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ weg (siehe (5.28)). Da für die Wirkung S in (5.53) ein Volumenintegral über $\mathcal{L}$ gebildet werden muß, verschwindet bei freundlichen Feldern der Beitrag von $F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ zu S (Satz von Gauß). In Analogie zur Mechanik fordert man weiterhin, daß der Term $j_\mu A^\mu$ in $\mathcal{L}$ vorkommen soll und postuliert folgende Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \tag{5.54}$$

Gelingt es, aus diesem $\mathcal{L}$ die Feldgleichungen abzuleiten, dann war das Postulat gerechtfertigt. Zunächst gilt

$$-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}\,g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}F^{\lambda\rho}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}\,g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu}\left(\partial^\lambda A^\rho - \partial^\rho A^\lambda\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \quad .$$

Damit wird nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial^\mu A^\nu]} = -\frac{1}{4\pi}\,g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu} \ , \tag{5.55}$$

und

$$\partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial^\mu A^\nu]} = -\frac{1}{4\pi}\partial^\mu F_{\mu\nu} \quad . \tag{5.56}$$

Weiterhin gilt offensichtlich

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu} = -\frac{1}{c}j_\mu \ , \tag{5.57}$$

also lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j_\nu \quad . \tag{5.58}$$

Das sind aber genau die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (5.29). Die Wahl von $\mathcal{L}$ war also gerechtfertigt. Die *homogenen Gleichungen* sind bereits direkt in der Definition von $\mathcal{L}$ "versteckt", denn das Wegfallen der zweiten Ableitungen von A_ρ in $F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ entspricht genau dem Einsetzen der homogenen Maxwell-Gleichungen $\partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$. In der Tat sind schon durch die Definition von $F^{\mu\nu}$ die homogenen Gleichungen *automatisch erfüllt* (Jacobi-Identität, siehe (5.31)).

5.7 Der Energie-Impuls-Tensor

In diesem Abschnitt gehen wir zunächst wieder zu allgemeinen kontinuierlichen Systemen zurück und untersuchen grundlegende Symmetrien und Erhaltungssätze. Später werden diese Beziehungen dann auf das elektromagnetische Feld angewandt.

5.7.1 Allgemeine kontinuierliche Systeme

Wir betrachten zunächst eine allgemeine, infinitesimale, x^μ-abhängige Transformation von Koordinaten x^μ auf Koordinaten x'^μ:

$$x'^\mu = R^\mu{}_\nu(x)\,x^\nu \ , \quad \text{mit} \quad R^\mu{}_\nu(x) = \delta^\mu{}_\nu + \eta^\mu{}_\nu(x) \quad \Rightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \underbrace{\eta^\mu{}_\nu x^\nu}_{=\delta\alpha^\mu(x)}$$

Die durch so eine Transformation induzierte Änderung $\delta\phi_k$ ergibt sich zu

$$\delta\phi_k = \phi_k(x+\delta\alpha) - \phi_k(x) = \delta\alpha^\mu(x)\,\partial_\mu\phi_k \quad .$$

Hier wird für die x^μ-Abhängigkeit eine vereinfachte Schreibweise gewählt. Die Änderung des Gradienten $\delta\partial_\mu\phi_k$ ist gegeben durch

$$\delta\partial_\mu\phi_k = \partial_\mu\phi_k(x') - \partial_\mu\phi_k \quad .$$

Gleichzeitig ist aber

$$\partial_\mu\phi_k = \lim_{\epsilon^\mu\to 0}\frac{1}{\epsilon^\mu}\left(\phi_k(x+\epsilon)-\phi_k(x)\right) \quad .$$

Wir untersuchen die beiden Ausdrücke in der Klammer. Um die Variation zu berechnen, die aus den neuen Koordinaten x'^μ erwächst, sind folgende Ersetzungen zu vollziehen:

$$\phi_k(x+\epsilon) \;\to\; \phi_k\Big(x+\epsilon+\underbrace{\delta\alpha+\epsilon^\nu\partial_\nu\delta\alpha(x)}_{=\delta\alpha(x+\epsilon)}\Big) = \phi_k(x+\epsilon) + \left(\delta\alpha^\nu+\epsilon^\mu\partial_\mu\delta\alpha^\nu\right)\partial_\nu\phi_k(x+\epsilon)$$

$$\phi_k(x) \;\to\; \phi_k(x+\delta\alpha) = \phi_k(x) + \delta\alpha^\nu\partial_\nu\phi_k(x)$$

Damit folgt

$$\delta\partial_\mu\phi_k = \lim_{\epsilon^\mu\to 0}\frac{1}{\epsilon^\mu}\Big(\delta\alpha^\nu\partial_\nu\underbrace{\left(\phi_k(x+\epsilon)-\phi_k(x)\right)}_{=\epsilon^\mu\partial_\mu\phi_k} + \epsilon^\mu\partial_\mu\left(\delta\alpha^\nu\right)\partial_\nu\phi_k\Big) = \delta\alpha^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi_k(x) + \partial_\mu\left(\delta\alpha^\nu\right)\partial_\nu\phi_k(x) \quad .$$

Die Variation der Wirkung ist dann gleich

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\,\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\,\delta\left[\partial_\mu\phi_k\right]\right)d^4x = \\ &= \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\left(\delta\alpha^\mu\partial_\mu\phi_k\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\left(\delta\alpha^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi_k\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\,\partial_\mu\left(\delta\alpha^\nu\right)\partial_\nu\phi_k\right)d^4x \quad .\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme im Integranden lassen sich wegen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\left(\delta\alpha^\mu\partial_\mu\phi_k\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\left(\delta\alpha^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi_k\right) = \delta\alpha^\nu\partial_\nu\mathcal{L}$$

vereinfachen, also ist schließlich mit der üblichen partiellen Integration

$$\delta S = \int\left(\partial_\nu\mathcal{L} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\,\partial_\nu\phi_k\right)\right)\delta\alpha^\nu\,d^4x \quad . \tag{5.59}$$

Mittels der Definition

$$\tilde{\Theta}^\mu{}_\nu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\,\partial_\nu\phi_k - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$$

läßt sich die Klammer im Integranden von (5.59) als Divergenz eines Tensors schreiben:

$$\delta S = -\int\left(\partial_\mu\tilde{\Theta}^\mu{}_\nu\right)\delta\alpha^\nu\,d^4x \tag{5.60}$$

In seiner total kontravarianten Form definiert man also den *kanonischen Energie-Impuls-Tensor*

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = g^{\lambda\nu}\tilde{\Theta}^\mu{}_\lambda = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_k]}\,\partial^\nu\phi_k - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad . \tag{5.61}$$

Genau dann, wenn die infinitesimale Transformation, von der wir ausgegangen waren, eine *Symmetrie* des Systems ist, d. h. $\delta S = 0$, dann gilt wegen (5.60)

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{5.62}$$

Dies ist der universelle Erhaltungssatz für kontinuierliche Systeme. Er hat die Form einer Kontinuitätsgleichung. Wir untersuchen einzelne Komponenten des Energie-Impuls-Tensors. Für $\mu = \nu = 0$ ist

$$\tilde{\Theta}^{00} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}}}_{p} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\dot{q}} - \mathcal{L} =: \mathcal{H} \ ,$$

und das entspricht offenbar der Energiedichte oder *Hamilton-Dichte.* Die Komponenten $\tilde{\Theta}^{0i}$ heißen *Impulsdichte.* Aus der Invarianz der Wirkung unter der betrachteten Koordinaten-Transformation folgt also die Energie- und Impulserhaltung, denn durch Integration von (5.62) über den gesamten Raum erkennt man:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Theta^{0\nu} d^3r = 0 \quad \Rightarrow \quad P^\nu := \left(\frac{H}{c}, \vec{P} \right) = \int \Theta^{0\nu} d^3r = \text{const.}$$

5.7.2 Elektromagnetische Felder

Wie in Abschnitt 5.6.2 setzen wir nun konkret als kontinuierliches System das elektromagnetische Feld ein. Dann ergeben sich folgende Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi_k]} \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu A_\nu]} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi_k]} \partial^\nu \phi_k \quad &\rightarrow \quad -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho \end{aligned}$$

Also bekommt man für die Situation im Vakuum (keine Quellen) folgenden kanonischen Energie-Impuls-Tensor:

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \tag{5.63}$$

Leider hat der Tensor in dieser Form unter anderem den schweren Nachteil, *nicht eichinvariant* zu sein. Bei einer Eichung des Vektorpotentials mittels

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad A_\mu - \partial_\mu \Lambda$$

kommt als Zusatzterm wegen des Auftretens einfacher Ableitungen von A_ρ offensichtlich

$$\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial^\nu \partial_\rho \Lambda$$

ins Spiel. Um dies zu umgehen, *symmetrisiert* man den Energie-Impuls-Tensor, indem man einen Zusatzterm einführt:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} := \tilde{\Theta}^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu &= \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \\ \Rightarrow \quad \Theta^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} g_{\lambda\rho} F^{\mu\rho} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \end{aligned} \tag{5.64}$$

Im Vakuum (ohne Quellen) kann man leicht zeigen, daß immer noch

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \tag{5.65}$$

gilt, wenn man die Gleichungen (5.29) einsetzt. Die einzelnen Komponenten von $\Theta^{\mu\nu}$ verdienen eine genauere Betrachtung:

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) = w \\ \Theta^{0i} &= \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{c} \vec{S} \\ \Theta^{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \right) = T_{ij} \end{aligned}$$

Diese drei Anteile stellen (von oben nach unten) die Energiedichte, den Poynting-Vektor und den Maxwellschen Spannungstensor dar. Schon jetzt könnte man aus (5.65) Erhaltungssätze ableiten, jedoch sollen zunächst die Verhältnisse beim Vorhandensein von Quellen geklärt werden. Dazu schreibt man

$$g_{\lambda\rho}F^{\mu\rho}F^{\lambda\nu} = F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\lambda\nu} = g^{\mu\rho}F_{\rho\lambda}F^{\lambda\nu} \ ,$$

und damit ist

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\partial^\rho\left(F_{\rho\lambda}F^{\lambda\nu}\right) + \frac{1}{4}\,\partial^\nu\left(F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\nu\lambda}j_\lambda \quad . \tag{5.66}$$

Für $\nu = 0$ wird dies zu

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S}\right) = -\frac{1}{c}\vec{j}\vec{E} \ ,$$

also dem Poyntingschen Satz (4.46)! Für $\nu = i = 1\ldots3$ erhält man dagegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]_i\right) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij} = -\left(\rho E_i + \frac{1}{c}\left[\vec{j}\times\vec{B}\right]_i\right) \ , \tag{5.67}$$

und das ist der Impulssatz (4.49) in differentieller Form.

Man betrachte die rechte Seite von (5.66) noch einmal genauer. Es ist

$$f^\mu := \frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu = \left(\frac{1}{c}\,\vec{j}\vec{E}, \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{j}\times\vec{B}\right)$$

definiert als *Lorentz-Kraftdichte.* Wir suchen die Bewegungsgleichungen für die Wechselwirkung von Ladungen und Strömen mit elektromagnetischen Feldern. Sei $\mathcal{E}$ die kinetische Energiedichte einer Ladungsverteilung ρ. Mit der offensichtlichen Entsprechung

$$\vec{j}\vec{E} = \rho\vec{v}\vec{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

gilt für den über ein bestimmtes Volumen V integrierten Vierimpuls

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \int_V f^\mu d^3x \quad . \tag{5.68}$$

Im speziellen Fall eines Punktteilchens der Ladung e sind die Ladungs– und Stromdichten mit

$$\vec{j}(\vec{x}) = e\,\frac{d\vec{x}}{dt}\,\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \qquad \rho(\vec{x}) = e\,\delta(\vec{x} - \vec{r}(t))$$

gegeben, womit (5.68) zu der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{1}{c}\,\vec{v}\vec{E}, e\vec{E} + \frac{1}{c}\,e\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{5.69}$$

führt, also zur Lorentz-Kraft. Die Größe E stellt die kinetische Energie des Teilchens dar. Man beachte, daß dies keineswegs eine Herleitung der Lorentz-Kraft ist, denn (4.42) bzw. (4.47) wurden beim Übergang von (5.67) zu (5.68) hineingesteckt. Gleichung (5.69) bzw. (5.68) geben lediglich die *kovariante Formulierung* der Lorentz-Kraft wieder.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Pocketbook of Mathematical Functions.* Harri Deutsch, Thun, Frankfurt a. M., 1984.

[2] S. A. Azizi. *Entwurf und Realisierung digitaler Filter.* R. Oldenburg, München, vierte Ausgabe, 1988.

[3] A. J. Baden Fuller. *Mikrowellen.* Vieweg, Braunschweig, 1974.

[4] E. O. Brigham. *The Fast Fourier Transform.* Prentice-Hall, 1974.

[5] I. N. Bronstein und K. A. Semendijajew. *Taschenbuch der Mathematik.* Harri Deutsch, Thun/Frankfurt a. M., 23. Ausgabe, 1987.

[6] W. Fischer und I. Lieb. *Funktionentheorie.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, fünfte Ausgabe, 1988.

[7] W. Greiner. *Theoretische Physik. Band 3: Klassische Elektrodynamik.* Harri Deutsch, Thun/Frankfurt a. M., fünfte Ausgabe, 1991.

[8] W. Greiner und J. Rafelski. *Theoretische Physik. Band 3A: Spezielle Relativitätstheorie.* Harri Deutsch, Thun/Frankfurt a. M., zweite Ausgabe, 1989.

[9] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik.* de Gruyter, Berlin, zweite Ausgabe, 1983.

[10] H. Kagermann und W. Köhler. *Aufgabensammlung Theoretische Physik 2: Elektrodynamik.* Zimmermann-Neufang, Ulmen, zweite Ausgabe, 1987.

[11] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie.* Akademie-Verlag, Berlin, elfte Ausgabe, 1989.

[12] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie und Thermodynamik.* Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1991.

[13] E. M. Purcell. *Berkeley Physik Kurs 2: Elektrizität und Magnetismus.* Vieweg, vierte Ausgabe, 1989.

[14] H. Ruder und M. Ruder. *Die Spezielle Relativitätstheorie.* Vieweg, Braunschweig, 1993.

[15] A. Sommerfeld. *Vorlesungen über Theoretische Physik. Band 3: Elektrodynamik.* Harri Deutsch, Thun, vierte Ausgabe, 1977.

[16] A. Sommerfeld. *Vorlesungen über Theoretische Physik. Band 6: Partielle Differentialgleichungen der Physik.* Harri Deutsch, Thun, sechste Ausgabe, 1978.

[17] G. Strassacker. *Rotation, Divergenz und das Drumherum. Eine kurze Einführung in die magnetische Feldtheorie.* Teubner Studienskripten, Stuttgart, zweite Ausgabe, 1986.

[18] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory.* Addison-Wesley, New York, London, 1941.