Optimierung I

(ohne 1.1 Beispiele,
ein paar Beweise und Beispiele fehlen
ohne konvexe Optimierung)

bearbeitet nach dem Skript von Prof. Maurer WS 88/89

Michael Kerkhoff

Januar 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Optimierung **1**

1.1 Beispiele . . . 1

1.2 Mathematische Formulierung linearer Optimierungsprobleme . . . 1

– Rückführung anderer LP's auf die Standardform . . . 1

– Elementare Eigenschaften von LP's . . . 2

1.3 Der Hauptsatz der linearen Optimierung . . . 2

– Kompakte zulässige Mengen . . . 4

– Anwendung auf LP's mit Ungleichungen . . . 5

1.4 Das Simplex–Verfahren . . . 5

– Basislösung und Parametrisierung . . . 5

– Spezialfall: LP mit Ungleichungen . . . 6

– Das Simplex–Verfahren . . . 6

– Vorüberlegungen zum Basistausch . . . 7

– Basistausch: Jordan–Elimination . . . 9

– Berechnung in Tableau-Form . . . 10

– Basistausch: Zielfunktion und reduzierte Kosten . . . 10

– Der Simplex–Algorithmus . . . 11

– Anwendung auf LP mit Ungleichungen . . . 12

– Kreisen des Simplex–Verfahrens . . . 13

1.5 Berechnung einer zulässigen Basislösung . . . 14

– Die Zweiphasen–Methode zur Lösung des LP 1.2.1 . . . 15

– Die Zweiphasen–Methode zur Lösung des gemischten LPs mit Gleichungen und Ungleichungen . . . 16

– Die Zweiphasen–Methode zur Lösung des LPs mit gemischten Ungleichungen . . . 18

1.6 Das revidierte Simplex–Verfahren . . . 19

– Das Grundschema des revidierten Simplex–Verfahrens . . . 19

1.7 Dualität . . . 23

– Duale Programme . . . 23

– Der Dualitätssatz . . . 24

– Das duale Simplex–Verfahren . . . 26

– Idee des dualen Simplex–Verfahrens . . . 27

– Sensitivität und Schattenpreise . . . 29

– Die Dreiphasenmethode . . . 29

– Zusammenfassung: Simplex–Verfahren . . . 32

1.8 Parametrische lineare Programme 34
– Linerare Parameter in der Zielfunktion 35
– Linerare Parameter im Begrenzungsvektor 37
– Linerare Parameter in der Koeffizientenmatrix 38

2 Konvexe Optimierung **39**

2.9 Konvexe Funktionen 39
2.10 Konvexe Optimierungsprobleme: Der Sattelpunktsatz von Kuhn/Tucker 39
2.11 Dualität und Sensitivität 39
2.13 Der Algorithmus von Goldfarb/Idnani für quadratische Optimierungsprobleme . . 39

Kapitel 1

Lineare Optimierung

1.1 Beispiele

1.2 Mathematische Formulierung linearer Optimierungsprobleme

Standardform (1.2.1) (**LP** lineares Optimierungsproblem):
Sei $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (Spaltenvektor); $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (Zeilenvektor);
$b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($m \times n$ - Matrix).
Dann lautet die Standardform:

minimiere (die Zielfunktion)	$z(x) := cx$
unter	$Ax = b$ und $x \geq 0$.
Kurz:	$\min\{\, cx \mid Ax = b \text{ und } x \geq 0 \,\}$.

Definition: LP sei wie in (1.2.1). Dann heißt:

$K := \{\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Ax = b \ \wedge \ x \geq 0 \,\}$ die Menge der **zulässigen Punkte** von LP.
$L := \{\, \overline{x} \in K \mid z(\overline{x}) = \min\limits_{x\in K} z(x) \,\}$ die Menge der **optimalen Lösungen** von LP.
$a^1, a^2, \ldots a^n$ bezeichne die Spalten von A.

Rückführung anderer LP's auf die Standardform

1.) Ungleichungen

Standardform (1.2.2) (**LP** für Ungleichungen):
Voraussetzungen wie in (1.2.1) (nicht notwendig $m < n$).
Dann läßt sich das Problem:

minimiere (die Zielfunktion)	$z(x) := cx$
unter	$Ax \leq b$ und $x \geq 0$

als äquivalentes LP in Standardform schreiben.
Mit Hilfe der **Schlupfvariablen**:
$y := b - Ax \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ (dann: $Ax \leq b \iff Ax + y = b \ \wedge \ y \geq 0$)
und den Abkürzungen:
$\widetilde{c} := (c|0_m) \in \mathbb{R}^{1\times(n+m)}$ (Zeilenvektor);
$\widetilde{x} := \binom{x}{y} = \binom{x}{b-Ax} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times 1}$ (Spaltenvektor) und
$\widetilde{A} := (A|I_m) \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ mit $I_m := (m \times m)$-Einheitsmatrix
folgt die äquivalente Formulierung:

minimiere (die Zielfunktion)	$z(\widetilde{x}) := \widetilde{c}\widetilde{x}$	$\widetilde{c}\widetilde{x} = (c\|0_m)\binom{x}{y} = cx + 0y$
unter	$\widetilde{A}\widetilde{x} = b$ und $\widetilde{x} = \binom{x}{y} \geq 0$	$\widetilde{A}\widetilde{x} = (A\|I_m)\binom{x}{y} = Ax + y$.
mit der zulässigen Menge	$K = \{\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Ax \leq b \ \wedge \ x \geq 0 \,\}$	
bzw. der zulässigen Menge	$\widetilde{K} = \{\, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times 1} \mid \widetilde{A}\widetilde{x} = b \ \wedge \ \widetilde{x} \geq 0 \,\}$	

2.) Freie Variablen

Problem: Für ein oder mehre x_i fehlt die Einschränkung $x_i \geq 0$.

1. Lösung: Elimination von x_i liefert ein reduziertes LGS in $n-1$ oder $n-2, \ldots$ Variablen.

2. Lösung: Setze $x_i =: u_i - v_i$ genauer:
$u_i := \max\{0, x_i\} \geq 0$,
$v_i := \max\{0, -x_i\} \geq 0$.

Das liefert ein LP in $n+1$ oder $n+2, \ldots$ Variablen z. B.: in $u_1, v_1, x_2, x_3, \ldots$.

3.) Maximiere Zielfunktion $z(x)$

Minimiere $z(x) = cx$ in (1.2.1) $\iff$ Maximiere $-z(x) = (-c)x$.

Elementare Eigenschaften von LP's

Satz (1.2.5): LP sei wie in (1.2.1). Dann gilt:
(i) L ist konvex.
(ii) K beschränkt $\Rightarrow$ es gibt eine optimale Lösung (d. h. $L \neq \{\}$).

siehe Abbildung auf Seite 2.6.

1.3 Der Hauptsatz der linearen Optimierung

x Ecke von $K \Rightarrow a^1x_1 + \ldots + a^nx_n = Ax = b, \quad x \geq 0$.
Die Ecken (vgl. Def A.9) x von K lassen sich durch den folgenden Satz beschreiben:

Satz (1.3.2): LP sei wie in (1.2.1). Sei $x = (x_1 \ldots \quad x_n)^T \in K$. Dann gilt:
x Ecke in $K \iff$ Die zu positiven Komponenten $x_k > 0$ gehörenden Spaltenvektoren a^k sind linear unabhängig.

Beweis: Sei OE: $x = (x_1 \ldots \quad x_r \quad 0 \ldots \quad 0)^T$ (sonst permutiere Spalten von A) mit $x_1, \ldots, x_r > 0$ und $r \geq 0$.

„$\Rightarrow$“:

1. Fall $r = 0$: Die zugehörige Menge der Spaltenvektoren ist leer und somit l. u..

2. Fall $r > 0$:

$\not\forall$: $a_1, \ldots, a_r$ l. a. $\Rightarrow \exists\, d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{R}$ nicht alle $d_i = 0 : \sum_{i=1}^{r} a^i d_i = 0$.
$\forall\, i = 1, \ldots, r$ ist $x_i > 0$, also $\exists\, \varepsilon > 0$ klein genug: $x_i \pm \varepsilon d_i > 0$.
Setze $y := x + \varepsilon d \geq 0$,
$z := x - \varepsilon d \geq 0$ mit $d := (d_1 \ldots \quad d_r \quad 0 \ldots \quad 0)^T \Rightarrow$
$Ay = \underbrace{Ax}_{=b} + \varepsilon \underbrace{Ad}_{=0} = b$, analog $Az = b \xRightarrow[y, z \geq 0]{} y, z \in K$, da außerdem $y \neq z$ und
$x = \dfrac{y+z}{2} = \dfrac{1}{2}y + (1 - \dfrac{1}{2})z \Rightarrow x$ ist keine Ecke von K ↯ zur Vor..

„$\Leftarrow$“:

$\not\forall$: x keine Ecke von $K \Rightarrow$
$\exists\, y, z \in K$ (also $y, z \geq 0$) mit $y \neq z$ und $\exists\, \alpha \in]0, 1[: x = \alpha y + (1-\alpha)z$.

①: $\forall\, i = r+1, \ldots, n : y_i = z_i = 0$, denn: $0 = x_i = \underbrace{\alpha}_{>0}\underbrace{y_i}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\underbrace{z_i}_{\geq 0} \Rightarrow y_i = 0 = z_i$.

②: $\forall\, i = 1, \ldots, r : y_i = z_i$, denn:
Aus $Ay \underset{\in K}{=} b \underset{\in K}{=} Az \Rightarrow 0 = A(y-z) \underset{①}{=} \sum_{i=1}^{r} a^i(y_i - z_i) \xRightarrow[i = 1, \ldots, r]{a^i \text{ l. u.}} y_i - z_i = 0 \Rightarrow$ ②.

Aus ① und ② $\Rightarrow$ $y = z$ $\lightning$ zu $y \neq z$ $\Rightarrow$ x Ecke in K.

□

Korollar (1.3.3): LP sei wie in (1.2.1). Dann gilt:

i) $x \in K$ Ecke $\Rightarrow$ höchstens m Komponenten von x sind > 0.

ii) Es gibt höchstens $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{m}$ Ecken von K.

Beweis:

i): Wegen (S 1.3.2) sind die zu positiven Komponenten von x gehörenden Spaltenvektoren von A l. u.. Da $\operatorname{rang}(A) \leq \max(n, m)$ ist die Anzahl der l. u. Spaltenvektoren $\leq m$. Also können höchstens m Komponenten positiv sein.

ii): Wegen (S 1.3.2) gehört zu jeder Ecke $\in K$ ein System von l. u. Spaltenvektoren von A, das wegen $\operatorname{rang}(A) \leq \max(n, m)$ (K 1.3.3–i) höchstens m Spaltenvektoren enthält. Die Anzahl der Möglichkeiten r Spalten von A auszuwählen ist $\binom{n}{r}$. Also gehört zu jeder Ecke $\in K$ eine der insgesammt $\sum_{r=0}^{m} \binom{n}{r}$ Möglichkeiten ein System von Spaltenvektoren aus A auszuwählen. Nicht jedes dieser Syteme ist l. u. und nicht zu jedem System gehört eine Ecke $\Rightarrow$ „höchstens“ nicht „=“.

□

Satz (1.3.4): LP sei wie in (1.2.1). Dann gilt:

$K \neq \{\}$ $\Rightarrow$ K enthält eine Ecke.

Beweis: Definiere: $\mathrm{r}(x) :=$ Anzahl der positiven Komponenten ($x_i > 0$) von x.

Bestimme $z \in K$, so daß: $r_0 := \mathrm{r}(z) = \min_{x \in K} \mathrm{r}(x)$. (Diese Definition ist sinnvoll, da $K \neq \{\}$).

OE: $z = (z_1 \ldots \quad z_{r_0} \quad 0 \ldots \quad 0)^T$ (sonst permutiere Spalten von A)

Beh.: z ist Ecke von K.

↯: z ist keine Ecke von $K \xRightarrow[\text{(S 1.3.2)}]{}$ $a_1, \ldots, a_{r_0}$ l. a. $\Rightarrow$

⊛: $\exists\, d_1, \ldots, d_{r_0} \in \mathbb{R}$ nicht alle $d_i = 0 : \sum_{i=1}^{r_0} a^i d_i = Ad = 0$, mit $d := (d_1 \ldots \quad d_{r_0} \quad 0 \ldots \quad 0)^T$.

Bestimme Index k mit: $\frac{z_k}{d_k} = \min\{ \frac{z_i}{d_i} \mid d_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, r_0 \}$.

OE: $d_k \geq 0$ (sonst multipliziere ⊛ mit -1).

$y := z - \frac{z_k}{d_k} d \in K$, denn

$Ay = \underbrace{Ax}_{\substack{x \in K \\ \Rightarrow\, b}} - \frac{z_k}{d_k} \underbrace{Ad}_{\substack{\text{⊛} \\ \Rightarrow\, 0}} = b$ und

$y_i = z_i - \frac{z_k}{d_k} d_i \begin{cases} = 0\,; & i = k \\ \geq 0\,; & i \neq k \end{cases} \Leftarrow ⊙$

⊙: $z_i \geq 0$, da $z \in K$. $\frac{z_k}{d_k} \geq 0$, da „OE: $d_k > 0$“.

Ist $d_i \leq 0$ so folgt direkt $z_i - \frac{z_k}{d_k} d_i \geq 0$.

Ist $d_i > 0$ so gilt: $\frac{z_i}{d_i} \geq \frac{z_k}{d_k} \Rightarrow z_i \geq \frac{z_k}{d_k} d_i \Rightarrow z_i - \frac{z_k}{d_k} d_i \geq 0$.

Da $y = \left(z_1 - \frac{z_k}{d_k} d_1 \quad \ldots \quad y_k = 0 \quad \ldots \quad z_{r_0} - \frac{z_k}{d_k} d_{r_0} \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \right) \in K$ und

$z = \left(z_1 \quad \ldots \quad z_k \quad \ldots \quad z_{r_0} \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \right)$ $\Rightarrow$

$\mathrm{r}(y) < \mathrm{r}(z) = r_0$ $\lightning$ zur Minimalität von $\mathrm{r}(z)$.

□

„Standardform" für L (L hat die gleiche Struktur wie K):
LP sei wie in (1.2.1) mit $L \neq \{\}$.
Mit $\beta := \min_{x \in K} cx$ und $\widetilde{A} := \begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix}$ und $\widetilde{b} := \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix}$
läßt sich L schreiben als:

$$\begin{aligned} L &= \{ x \in K \mid cx = \beta \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid \widetilde{A}x = \widetilde{b}\,; x \geq 0 \} \quad \text{(hat die gleiche Struktur wie } K\text{)}. \end{aligned}$$

Satz (1.3.5): LP sei wie in (1.2.1). Dann gilt:

i) $L \neq \{\} \implies L$ enthält eine Ecke.
ii) $x \in L$ Ecke $\implies x \in K$ Ecke.

Beweis:

i) (S 1.3.4) mit „Standardform für L".

ii) Sei $x \in L$ eine Ecke in L.
Setze $\beta := cx$ den Zielfunktionsoptimalwert.

$\not\exists$: x keine Ecke in $K \implies$
$\exists\, y, z \in K$ mit $y \neq z$ und $\exists\, \alpha \in]0,1[: x = \alpha y + (1-\alpha)z$.
Da x Ecke von L kann nicht $y, z \in L$ gelten.

1. Fall „$y \notin L$": $\implies cy > \beta \underset{\alpha > 0}{\Longrightarrow}$
$\alpha cy > \alpha\beta \implies \beta = cx = \alpha cy + (1-\alpha)cz > \alpha\beta + (1-\alpha)cz \implies \beta > \alpha\beta + (1-\alpha)cz \implies$
$(1-\alpha)\beta > (1-\alpha)cz \underset{1-\alpha>0}{\Longrightarrow} \beta > cz$ ↯ zur Optimalität von β.

2. Fall „$z \notin L$": $\implies cz > \beta \implies$
$\beta > \alpha cy + (1-\alpha)\beta \underset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \beta > cy$ ↯ zur Optimalität von β.

□

Satz (1.3.6) (**Hauptsatz der linearen Optimierung**):
LP sei wie in (1.2.1). Dann gilt:

$L \neq \{\} \implies \exists\, x \in L : x$ ist Ecke $\in K$.
d. h.: Das LP besitzt eine otimale Lösung $\implies \exists$ eine optimale Ecke von K.

Beweis:

$L \neq \{\} \underset{\text{(S 1.3.5–i)}}{\Longrightarrow}$
$\exists$ Ecke $x \in L$ (also x optimal) $\underset{\text{(S 1.3.5–ii)}}{\Longrightarrow}$
x Ecke $\in K$. □

Man kann also (S 1.3.6) das LP (1.2.2) lösen indem man die endlich vielen Ecken von K (K 1.3.3–ii) ausprobiert.

Beispiel:

Kompakte zulässige Mengen

Sei LP wie in (1.2.1) und die zulässige Menge K kompakt.

Seien $x^1, \ldots, x^k$ die Ecken von K (S 1.3.4).

Die konvexe Hülle der Ecken $\mathrm{co}(x^1, \ldots, x^k)$ ist abgeschlossen.

Wegen K kompakt $\underset{\text{(A.10)}}{\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}}$

(**1.3.7**) $\boxed{K = \mathrm{co}(x^1, \ldots, x^k)\,.}$ (Ein konvexes Polyeder.)

Falls K kompakt, gibt es einen einfachen Beweis des Hauptsatzes:
Beweis (von (S 1.3.6)):

$\circledast$: Sei x^r eine unter allen Ecken von K optimale Ecke: $z(x^r) = cx^r = \min_{i=1,\ldots,k} cx^i$.

Beh.: $x^r \in L$ (x^r ist optimale Lösung in K).

Bew.: $\forall\, x \in K$ hat wegen (1.3.7) die Darstellung: $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$ mit $\alpha_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \implies$

$$z(x) = cx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c x^i \underset{\circledast}{\geq} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}_{=1}\Big) c x^r = c x^r = z(x^r)\,.$$

Also $\forall\, x \in K : z(x) \geq z(x^r)$.

□

Anwendung auf LP's mit Ungleichungen

Lemma (1.3.8): Sei LP, K und $\widetilde{K}$ wie in (1.2.2) Dann gilt:

$$x \in K \text{ Ecke} \iff \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ b - Ax \end{pmatrix} \in \widetilde{K} \text{ Ecke.}$$

1.4 Das Simplex–Verfahren

Basislösung und Parametrisierung

Das Simplex–Verfahren ist die am häufigsten benutzte Methode zur rechnerischen Lösung eines LPs in Standardform (1.2.1):

PHASE I: Bestimmung einer zulässigen Basislösung (Ecke von K).

PHASE II: Entscheidung:

- Die vorliegende Basislösung ist optimal $\implies$ Fertig.
- Sonst: Übergang von einer Basislösung zu einer benachbarten, für welche die Zielfunktion verkleinert werden kann (Basistausch).

Voraussetzung: $\operatorname{rang}(A) = m < n$.

Der Lösungsraum des LGS $Ax = b$ ist ein $(n-m)$–dim. affiner Unterraum (wegen $\operatorname{rang}(A) = m$).

Nach dem Hauptsatz (S 1.3.6) ist die optimale Lösung in einer Ecke von K zu suchen. Mit (S 1.3.2) kommt man zum Begriff der Basislösung (D 1.4.5).

Zur rechnerischen Beschreibung einer Ecke ist der Begriff der Basis bzw. Basislösung des LGS $Ax = b$ grundlegend.

Definition (1.4.2): LP sei wie in (1.2.1) und $\operatorname{rang}(A) = m < n$. Dann heißt:

Indexvektor $B = (i_1, \ldots, i_m)$ **Basis**	$:\iff$	Die zugehörigen Spaltenvektoren a^i, $i \in B$ von A sind linear unabhängig. ($i_k \in \{1, \ldots, n\}$.)
Indexvektor $N = (j_1, \ldots, j_{n-m})$ **Nicht–Basis**	$:\iff$	N komplementär zu B, d. h. $j_k \in N \iff j_k \in \{1, \ldots, n\} \setminus B$.
x_i **Basis–Variable**	$:\iff$	$i \in B$.
x_j **Nicht–Basis–Variable**	$:\iff$	$j \in N$.

$$\begin{array}{rcl} x_B & := & (x_i)_{i \in B} \in \mathbb{R}^m \\ x_N & := & (x_j)_{j \in N} \in \mathbb{R}^{n-m} \\ A_B & := & (m \times m)\text{–Matrix mit Spalten } a^i, i \in B\,. \\ A_N & := & (m \times (n-m))\text{–Matrix mit Spalten } a^j, j \in N\,. \end{array}$$

Damit geht das LGS $Ax = b$ über in:

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

und man erhält eine

Parametrisierung (1.4.3) (des $(n-m)$–dim. Lösungsraums von „$Ax = b$"):

$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N\,, \quad x_N \in \mathbb{R}^{n-m}\,.$

x_B heißt **abhängige Variable**,

x_N heißt **unabhängige Variable**.

Entsprechend: $z(x) = cx = c_B x_B + c_N x_N$

$\overset{(1.4.3)}{=\!=}\; c_B A_B^{-1}b - c_B A_B^{-1}A_N x_N + c_N x_N$

$= c_B A_B^{-1}b - (c_B A_B^{-1}A_N - c_N)x_N\,.$

erhält man:

Parametrisierung (1.4.4) (der Zielfunktion):

$z(x) = cx = z_0 - r_N x_N\,,$ mit

$z_0 := c_B A_B^{-1}b \in \mathbb{R}$ und

$r_N := c_B A_B^{-1}A_N - c_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ **Vektor der reduzierten Kosten**.

$z(x) = cx$ reduziert auf x_N .

Definition (1.4.5): B sei eine Basis von LP (1.2.1). Dann heißt:

$x \in \mathbb{R}^n$ **Basislösung** von LP $\quad :\Longleftrightarrow \quad x_N = 0 \;\wedge\; x_B = A_B^{-1}b\,.$

Eine Basislösung x heißt:

1.) **zulässig** $\quad :\Longleftrightarrow \quad x_B \geq 0\,.$

2.) **nicht entartet** $\quad :\Longleftrightarrow \quad x_B > 0\,.$

Da die zu den positiven Komponenten ($x_i > 0$) von x_B gehörenden Spaltenvektoren von A linear unabhängig (wegen der Definition von „Basis“) sind, ist nach (S 1.3.2) jede zulässige Basislösung (ob entartet oder nicht) eine Ecke von K .

Satz (1.4.6) (Hinreichendes Optimalitätskriterium): vgl. (S 1.4.11).
B sei eine Basis von LP (1.2.1) und x sei die zugehörige Basislösung.
Dann gilt:

(1) $x_B \geq 0$ (x ist zulässig) und
(2) $r_N = c_B A_B^{-1}A_N - c_N \leq 0\,.$

$\Longrightarrow$

(1) $x \in L$ (x optimal) mit
(2) optimalem Wert $z(x) = z_0 = c_B A_B^{-1}b\,.$

Spezialfall: LP mit Ungleichungen

Spezialfall (1.4.7): Für das LP für Ungleichungen (1.2.2) wähle:

Nichtbasis: $N := (1, \ldots, n)\,,$

Basis: $B := (n+1, \ldots, n+m)\,,$

Basislösung: $\widetilde{x} = \binom{x}{y} := \binom{0}{b} \in \mathbb{R}^{n+m}$

Dann ist:

$x_N = x = 0\,, \quad x_B = y = b\,,$

$\widetilde{A}_N = A\,, \quad \widetilde{A}_B = I_m\,,$

$\widetilde{c}_N = c\,, \quad \widetilde{c}_B = 0\,.$ Und damit in (1.4.4):

$r_N = \widetilde{c}_B \widetilde{A}_B^{-1}\widetilde{A}_N - \widetilde{c}_N = -c \in \mathbb{R}^n$ (Vektor der reduzierten Kosten) und

$z_0 = \widetilde{c}_B \widetilde{A}_B^{-1} b = 0 \in \mathbb{R}\,.$

Das Simplex–Verfahren

Das Simplex–Verfahren basiert auf dem hinreichenden Optimalitätskriterium (S 1.4.6).

Es liefert eine Basis B mit: (1) $x_B \overset{(1.4.3)}{=\!=} A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \quad \geq 0$ und

(2) $r_N \overset{(1.4.4)}{=\!=} c_B A_B^{-1}A_N - c_N \quad \leq 0\,.$

Dazu startet man mit einer Basis B, für die (1) erfüllt ist.
Ist das Kriterium (2) verletzt $\Longrightarrow$ **Basistausch**,
d. h. man geht zu einer benachbarten Basis B' über, in der die Zielfunktion „verbessert“ wird.

Die Multiplikation mit A_B^{-1} um das Kriterium (1) zu überprüfen, kann mittels elementarer Zeilenoperationen (Gauß–Jordan–Elimination) durchgeführt werden, s. das folgende Beispiel (Bsp 1), daß gleichzeitig zur Illustration eines Austauschschrittes dient.

Beispiel (**Bsp 1**): s. Beispiel auf Seite 3.8

minimiere $z(x) = cx = (-1 \quad -2 \quad -3)\, x = -1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3$

unter $Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = b$ und $x \geq 0$.

Berechnung von x_B

Wir wählen die Basis $B = (1, 2)$ und führen die Rechnungen in **Tableau–Form** an der Matrix $\boxed{b \mid A}$ durch:

b	x_1	x_2	x_3	
5	2	1	5	$\cdot\frac{1}{2}$
4	1	2	1	
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	
4	1	2	1	-1.Zeile
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\cdot\frac{2}{3}$
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}\cdot$ 2.Zeile
1	0	1	-1	
2	1	0	3	
1	0	1	-1	

Also: $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3$.

Die Baisislösung: $x_1 = 2\,, x_2 = 1\,, x_3 = 0$

ist zulässig (und nicht entartet), aber nicht optimal, denn (S 1.4.11) die

reduzierten Kosten sind: $r_N = r_3 = c_B A_B^{-1} A_N - c_N = (-1 \quad -2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - (-3) = 2 > 0$.

Basistausch

Für $0 \leq x_3 \leq \dfrac{2}{3}$ ist $x_B \geq 0$ also zulässig: hierbei läuft man entlang einer Kante von K.

Für $x_3 = \dfrac{2}{3}$ erhält man die neue Basislösung: $x = (0 \quad \frac{5}{3} \quad \frac{2}{3})^T$.

Der Übergang: $x_3 = 0 \quad \longrightarrow x_3 = \frac{2}{3}$ entspricht einem

Basistausch: $B = (1, 2) \longrightarrow B' = (3, 2)$

$N = (3) \quad \longrightarrow N' = (1)$ (von einer Ecke von K zur nächsten).

Die Nicht–Basis–Variable x_3 wird dabei mit der Basisvariablen x_1 getauscht:

$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} x_1 \quad \text{(wegen } x_1 = 2 - 3x_3\text{)}.$$

In der neuen Basis B' ergibt dies die

Darstellung: $x_{B'} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} x_1 \quad \text{(wegen } x_2 = 1 + x_3 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} x_1\text{)}.$

mit: $r_{N'} = r_1 = (-3 \quad -2) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - (-1) = -\dfrac{2}{3} < 0$.

Also ist die gefundene Basislösung optimal.

Vorüberlegungen zum Basistausch

(s bezeichnet die Spalte, i bezeichnet die Zeile.)

Sei $A_B = I$ und $x_B \overset{x_N = 0}{\underset{(1.4.3)}{=}} b \geq 0$,

d. h. die gegenwärtige Basislösung x ist zulässig (D 1.4.5) ($\Longrightarrow \; x_N = 0$).

Ist $r_N \leq 0$ so ist x nach (S 1.4.6) optimal.

Sei $s \in N$ mit $r_s > 0$ und $x_j = 0 \; \forall j \in N \setminus \{ s \}$ (also nicht unbedingt ganz $x_N = 0$) $\Longrightarrow$

(1.4.8)
$$\boxed{\begin{array}{lll} x_B & \overset{(1.4.3)}{=\!=} A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N & = b - a^s x_s \,, \\ z(x) & \overset{(1.4.4)}{=\!=} z_0 - r_N x_N & = z_0 - r_s x_s \text{ mit } z_0 = c_B b \,. \end{array}}$$

1. Fall $a^s \leq 0$:

$$\begin{array}{lll} x_B & = b - a^s x_s & \geq 0 \quad \forall\, x_s \geq 0 \quad \text{also zulässig,} \\ z(x) & = z_0 - r_s x_s & \xrightarrow[x_s \to \infty]{} -\infty \,, \quad \text{denn } r_s > 0 \,. \end{array}$$

Es gibt keine endliche Lösung; die zulässige Menge K ist unbeschränkt.

2. Fall $\exists\, i \in \{ 1, \ldots, m \} : a_{is} > 0$:

Definiere Zeilen–Index $p \in B$ durch:

(1.4.9)
$$\boxed{\frac{b_p}{a_{ps}} = \min_{i=1,\ldots,m} \{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \}}$$

Um $x_B \geq 0$ in (1.4.8) zu garantieren (wegen (S 1.4.6)), muß gelten:

$$0 \leq x_s \leq b'_p := \frac{b_p}{a_{ps}}$$

(denn: $x_s \leq \frac{b_p}{a_{ps}} \overset{\text{Def. von } p}{\leq} \frac{b_i}{a_{is}} \quad (\forall\, i = 1, \ldots, m) \Longrightarrow a_{is} x_s \leq b_i \quad (\forall\, i = 1, \ldots, m) \Longrightarrow a^s x_s \leq b \Longrightarrow$
$x_B \overset{(1.4.8)}{=\!=} b - a^s x_s \geq 0$.)

$x_s = b'_p$ gewählt ($\Longrightarrow \; x_p \overset{(1.4.8)}{=\!=} b_p - a_{ps}\frac{b_p}{a_{ps}} = 0$)), bedeutet einen Basistausch der Nicht–Basis–Variablen x_s ($x_s = 0$ und $s \in N = (i_{m+1}, \ldots, i_n)$) gegen die Basisvariablen x_p ($x_p \neq 0$ und $p \in B = (i_1, \ldots, i_m)$).

$a_{ps} > 0$ heißt **Pivotelement**.

(1.4.10): Außerdem gilt:

$$z(x) \overset{(1.4.8)}{=\!=} z_0 - \underbrace{r_s}_{>0} \frac{b_p}{a_{ps}} \underset{a_{ps} > 0}{\leq} z_0 \quad \text{und} \quad x_B \overset{(1.4.8)}{=\!=} b - a^s \frac{b_p}{a_{ps}} \,.$$

Für die Fälle:
(a) $b_p = 0$ gilt: Basislösung entartet (D 1.4.5) ($x_B = b \not> 0$) und $z(x) = z_0$.
(b) $b_p > 0$ gilt: ???:

Hinreichend, Basislösung nicht entartet ($x_B = b \overset{?}{>} 0$) und
Verbesserung der Zielfunktion ($z(x) < z_0$).

???:
vor allem Bedeutung
d. h. in der Bedingung kann man erreichen, daß die Basislösung ≥ 0 bleibt.
Was ist Basistausch?
Was ist Zweideutigkeit?

???:
als Folgerung erhält man:

Satz (1.4.11) (Notwendiges Optimalitätskriterium): vgl. (S 1.4.6).
B sei eine Basis von LP (1.2.1) und x sei die zugehörige Basislösung.
Dann gilt:

(1) $x \in L$ (x optimal) und
(2) $x_B > 0$ (x nicht entartet) $\quad \Longrightarrow \quad r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N \leq 0 \,.$

Der Spalten–Index $s \in N$ der Pivotspalte wird meist gemäß:

(1.4.12)
$$\boxed{r_s = \max_{j \in N} r_j}$$

gewählt. s ist nicht eindeutig bestimmt, aber man hofft bei dieser Wahl von s auf Verbesserung der Zielfunktion.

Basistausch: Jordan–Elimination

Basistausch begreifen, aber Formeln nicht wiedergeben.

Wegen der Vorausetzungen: $A_B = I, B = (1, \ldots, m), N = (m+1, \ldots, n)$ gilt:

(1.4.13) $$\forall\, i \in B: \quad x_i \quad \underset{(1.4.3)}{=\!=} b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \,.$$

Für $p \in B$ folgt wegen $a_{ps} > 0$: $x_p = b_p - \sum_{j \in N \setminus \{ s \}} a_{pj} x_j \quad - a_{ps} x_s$

und ergibt nach a_{ps} aufgelöst:

(1.4.14) $$x_s \;=\; \underbrace{\frac{b_p}{a_{ps}}}_{=:\, b'_p} - \sum_{j \in N \setminus \{ s \}} \underbrace{\frac{a_{pj}}{a_{ps}}}_{=:\, a'_{pj}} x_j \quad - \underbrace{\frac{1}{a_{ps}}}_{=:\, a'_{ps}} x_p$$

Einsetzen von x_s in die übrigen Gleichungen (1.4.13) ergibt:

$\forall\, i \in B \setminus \{ p \}$:

(1.4.15)
$$\begin{aligned}
x_i \quad &\underset{(1.4.3)}{=\!=} \quad b_i - \sum_{j \in N \setminus \{ s \}} a_{ij} x_j - a_{is} x_s \\
&= \quad b_i - \sum_{j \in N \setminus \{ s \}} a_{ij} x_j - a_{is} \frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j \in N \setminus \{ s \}} -a_{is} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} x_j \quad + \frac{a_{is}}{a_{ps}} x_p \\
&= \quad \underbrace{b_i - a_{is} \frac{b_p}{a_{ps}}}_{\substack{=:\, b'_i \\ = b_i - a_{is} b'_p}} - \sum_{j \in N \setminus \{ s \}} \underbrace{\left[a_{ij} x_j - a_{is} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} \right]}_{\substack{=:\, a'_{ij} \\ = a_{ij} - a_{is} a'_{pj}}} x_j \quad - \underbrace{\left(- \frac{a_{is}}{a_{ps}} \right)}_{=:\, a'_{is}} x_p \,.
\end{aligned}$$

Man erreicht in (1.4.15) durch Umformen die alte Schreibweise aus (1.4.13) zur neuen Basis.

Definiere neue Basis:

$$B' := B \cup \{ s \} \setminus \{ p \} = (1, \ldots, p-1, s, p+1, \ldots, m)$$

$$N' := N \cup \{ p \} \setminus \{ s \} = (m+1, \ldots, s-1, p, s+1, \ldots, n)$$

(allgemein tausche i–tes Element von B mit j–tem Element von N).

Die Ausdrücke (1.4.14) und (1.4.15) haben die Form:

$$x_{B'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_s \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = b' - A'_{N'} x_{N'} \,,$$

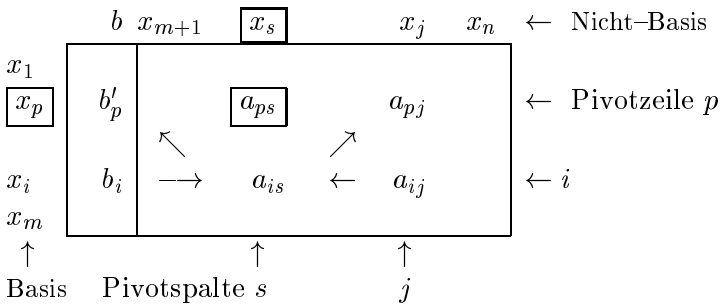
sind also von der Gestalt (1.4.13).

Die Elemente der neuen Matrix $\boxed{b' \mid A'}$ sind gegeben durch:

(1.4.16)

für Pivotelement	⟵ reziproker Wert vom **Pivotelement** a_{ps}:	
	a'_{ps}	$:= \dfrac{1}{a_{ps}}$.
Übrige Zeile p	⟵ dividiere durch Pivotelement:	
	a'_{pj}	$:= \dfrac{a_{pj}}{a_{ps}}$, $\quad (j \neq s)$,
	b'_p	$:= \dfrac{b_p}{a_{ps}}$.
Übrige Spalte s	⟵ dividiere durch negatives Pivotelement:	
	a'_{is}	$:= -\dfrac{a_{is}}{a_{ps}}$, $\quad (i \neq p)$.
Sonstige Elemente	⟵ subtrahiere das a_{is}–fache der neuen Zeile p von i–ter Zeile:	
	a'_{ij}	$:= a_{ij} - a_{is}\dfrac{a_{pj}}{a_{ps}} = a_{ij} - a_{is}a'_{pj}$, $\quad (i \neq p\,, j \neq s)$,
	b'_i	$:= b_i - a_{is}\dfrac{b_p}{a_{ps}} = b_i - a_{is}b'_p$, $\quad (i \neq p)$.

Berechnung in Tableau-Form



Beispiel (**Bsp 2**):

	b	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	1	−1
x_2	3	2	−3	1
x_3	−1	−1	2	−1

Tausche Nicht–Basis–Variable x_4 gegen Basisvariable x_1 .

	b'	x_1	x_5	x_6
x_4	5	1	1	−1
x_2	−7	−2	−5	3
x_3	4	1	3	−2

Basistausch: Zielfunktion und reduzierte Kosten

(1.4.17)

$$
\begin{aligned}
z(x) &\overset{(1.4.8)}{=\!=} z_0 - \sum_{j\in N} r_j x_j \\
&\overset{(1.4.14)}{=\!=} z_0 - \sum_{j\in N\setminus\{s\}} r_j x_j \; - r_s\frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j\in N\setminus\{s\}} -r_s\frac{a_{pj}}{a_{ps}}x_j \; - \frac{-r_s}{a_{ps}}x_p \\
&= \underbrace{z_0 - r_s\frac{b_p}{a_{ps}}}_{=:\,z'_0} - \sum_{j\in N\setminus\{s\}} \underbrace{\left(r_j - r_s\frac{a_{pj}}{a_{ps}}\right)}_{=:\,r'_j} x_j \; + \underbrace{\frac{r_s}{a_{ps}}}_{=:\,r'_p} x_p \\
&= z'_0 - \sum_{j\in N'} r'_j x_j \,.
\end{aligned}
$$

Also:

(1.4.18)

z'_0	$:=$	$z_0 - r_s\dfrac{b_p}{a_{ps}} = z_0 - r_s b'_p$	vgl. (1.4.10)
r'_p	$:=$	$-\dfrac{r_s}{a_{ps}}$	
r'_j	$:=$	$r_j - r_s\dfrac{a_{pj}}{a_{ps}} = r_j - r_s a'_{pj}$	

Die Zeile (r_0, r_n) wird also wie die Zeilen von $\boxed{b \mid A_N}$ in (1.4.12) transformiert.

Damit kann die Pivotoperation des Basistauschs an der erweiterten Matrix durchgeführt werden:

(1.4.19) **(Simplex–Tableau)**

	$x_j, j \in N$
$z(x)$	z_0 | r_N
$x_i,$ $i \in B$	b | A_N

$= T = \left(t_{ij}\right)_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n-m}}$ = Die **Tableau–Matrix**.

Beispiel (**Bsp 3**): vgl. (Bsp 1) auf S. 7

maximiere $z(x) = cx = (\,1 \quad 2 \quad 3\,)\,x = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$

unter $Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = b$ und $x_1, x_2, x_3 \geq 0\,.$

Für $B = (1,2)$ kann das LGS überführt werden in das LGS mit $A_B = I$ vgl. (Bsp 1):

b	A_N	$=$	2	3
			1	-1

$x_B = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} > 0\,,$

$c = (\,-1 \quad -2 \quad -3\,)\,,$

$z_0 = c_B b = (\,-1 \quad -2\,) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4\,,$

$r_3 = c_B A_N - c_3 = (\,-1 \quad -2\,) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - (-3) = 2 > 0\,,$

Simplex–Tableau

		x_3
$z(x)$	-4	2
x_1	2	$\boxed{3}$
x_2	1	-1

$p = 1\,, s = 3\,, a_{ps} = 3 > 0$ (1.4.9), (1.4.12). Tausche x_3 gegen x_1 :

		x_1
$z(x)$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$

$r_1' = -\frac{2}{3} \leq 0\,,$ also (S 1.4.6) ist die Basislösung (da $x_B \geq 0$):
$x_1 = 0\,, x_2 = \frac{5}{3}\,, x_3 = \frac{2}{3}\,,$ optimal,
mit Optimalwert $z_0 = -\frac{16}{3}$.
(Nach (D 1.4.5) ist $x_B = A_B^{-1} b = I^{-1} b = b$ und $x_N = 0$).

Der Simplex–Algorithmus

Die Algorithmische Durchführung des Simplexverfahrens wird vereinfacht durch die im Simplex-Tableau (1.4.19) auftretene Tableau–Matrix $\left(t_{ij}\right)_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n-m}}$.

Simplex–Algorithmus (**1.4.20**): Sei LP wie in (1.2.1) mit $\operatorname{rang}(A) = m < n\,.$

1. Start:
   Sei B eine Basis mit $A_B = I\,.$ Die zugehörige Basislösung sei zulässig (D 1.4.5), d. h. $x_B = b \geq 0\,.$ Berechne (1.4.4) mit N die Tableau–Matrix $T = \left(t_{ij}\right)$ in (1.4.19):

	$x_j, j \in N$		
$z(x)$	z_0	r_N	mit $z_0 = c_B b \in \mathbb{R}$ und
$x_i,$ $i \in B$	b	A_N	$r_N = c_B A_N - c_N \in \mathbb{R}^{n-m}\,.$

   ($B = (1, \dots, m)$ kann durch eine geeignete Permutation der Spalten von A erreicht werden. $A_B = I$ entspricht einer Multiplikation des ursprünglichen LGS: $Ax = (A_B | A_N)x = b$ mit A_B^{-1} : $(I | A_B^{-1} A_N)x = A_B^{-1} b$, vgl. (Bsp 1) auf S. 7.)

2. Ist die Basislösung optimal?
   Gibt es ein $s \in \{\,1, \dots, n-m\,\} : t_{0s} > 0\,?$ ja: Gehe zum 3. Schritt.
   nein: Fertig (S 1.4.6), (D 1.4.5):

Die Basislösung ist optimal, setze:
$x_B = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) := (t_{10}, \ldots, t_{m0})$,
$x_N = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m}}) := (0, \ldots, 0)$,
$z_0 := t_{00}$.
Stop.

3. Bestimmung der Austauschspalte (1.4.12):
Wähle Index s (kleinstmöglichst) mit: $t_{0s} = \max\limits_{1 \le j \le n-m} t_{0j}$.

4. Gibt es eine endliche Lösung (1.4.8–1.Fall)?
Gibt es $i \in \{1, \ldots, m\} : t_{is} > 0$? ja: Gehe zum 5. Schritt.
nein: Es gibt keine endliche Lösung. Stop.

5. Bestimmung der Austauschzeile (1.4.9):
Wähle Index p mit: $\frac{t_{p0}}{t_{ps}} = \min\limits_{i=1,\ldots,m} \{ \frac{t_{i0}}{t_{is}} \mid t_{is} > 0 \}$ und gehe zum 6. Schritt.

6. Führe eine Pivotoperation mit Pivotelement $t_{ps} > 0$ durch (1.4.16), (1.4.18):
Vertausche die p–te Komponente von B mit der s–ten Komponente von N und setze (ohne Strich: alte Elemente von T , mit „'“: neue Elemente von T):

für Pivotelement ⟵ reziproker Wert:
$$t'_{ps} := \frac{1}{t_{ps}} .$$

Übrige Pivotzeile p ⟵ dividiere durch Pivotelement:
$$t'_{pj} := \frac{t_{pj}}{t_{ps}} , \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-m; j \neq s) ,$$

Übrige Pivotspalte s ⟵ dividiere durch negatives Pivotelement:
$$t'_{is} := -\frac{t_{is}}{t_{ps}} , \qquad (i = 0, 1, \ldots, m; i \neq p) .$$

Sonstige Elemente ⟵ subtrahiere das t_{is}–fache der neuen Zeile p von i–ter Zeile:
$$t'_{ij} := t_{ij} - t_{is}\frac{t_{pj}}{t_{ps}} = t_{ij} - t_{is}t'_{pj} , \quad (i \neq p , j \neq s) .$$

Setze $t_{ij} := t'_{ij}$ $(\begin{smallmatrix} i = 0, 1, \ldots, m \\ i = 0, 1, \ldots, n-m \end{smallmatrix})$ und gehe zum 2. Schritt.

Anwendung auf LP mit Ungleichungen

(**1.4.21**): Vgl. Spezialfall (1.4.7).
Für das LP für Ungleichungen (1.2.2) wähle:

Start: Nichtbasis: $N := (1, \ldots, n)$,
Basis: $B := (n+1, \ldots, n+m)$, dann ist die
Basislösung: $c_N = c, c_B = 0, A_N = A, A_B = I_m$ und damit
$x_N = x = 0 , x_B = y = A_B^{-1}b = b \ge 0$,
$z_0 = c_B A_B^{-1} b = 0 , r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N = -c$.

Das Simplex–Tableau (1.4.19) lautet:

	x	
$z(\widetilde{x})$	0	$-c$
y	b	A

Beispiel (**Bsp 4**) (Luenberger, S 41): vgl. (Bsp 3) auf S. 11
maximiere $3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$, bzw.
minimiere $z(x) = cx = (-3 \quad -1 \quad -3)\, x = -3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3$
unter
$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = b \text{ und } x_1, x_2, x_3 \ge 0 .$$

1. Tableau:

		x_1	x_2	x_3	
z	0	3	1	3	
y_1	2	$\boxed{2}$	1	1	$\leftarrow$
y_2	5	1	2	3	
y_3	6	2	2	1	
		$\uparrow$		$\uparrow$	

$r_N = -c = (\,3 \quad 1 \quad 3\,)$,
Basislösung: $x = 0\,, y = b > 0\,.$
Wähle $p = 1\,, s = 1$: Tausche x_1 gegen $y_1\,.$

2 Möglichkeiten für die Wahl von p

2. Tableau:

		y_1	x_2	x_3	
z	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
y_2	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$\leftarrow$
y_3	4	-1	1	0	
				$\uparrow$	

Wähle $p = 2\,, s = 3$: Tausche y_2 gegen $x_3\,.$

3. Tableau:

		y_1	x_2	y_2
z	$-\frac{27}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{5}$
x_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_3	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
y_3	4	-1	1	0

Wegen $r_N \le 0$ hat man die optimale Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}\,, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\,, \max z(x,y) = \tfrac{27}{5}\,.$$

Kreisen des Simplex–Verfahrens

Bei einer Pivotoperation mit $b_p = 0$ ändert sich die Zielfunktion nicht; vgl. (1.4.8):

$$z(x) = z_0 - r_s \frac{b_p}{a_{ps}} = t_{00} - t_{0s}\frac{t_{p0}}{t_{ps}} = z_0\,.$$

Beispiele zeigen, daß bei entarteter Basislösung der Simplex–Algorithmus nicht endlich ist, sondern ins Kreisen geraten kann.

Beispiel (**Bsp 5**) (Gass):

maximiere $\frac{3}{4}\cdot x_1 + 150\cdot x_2 + \frac{1}{50}\cdot x_3\,,$ bzw.
minimiere $z(x) = cx = (\,-\frac{3}{4} \quad -150 \quad -\frac{1}{50}\,)\,x$

unter
$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -150 & +\frac{1}{50} & -6 \\ \frac{1}{2} & -60 & -\frac{1}{25} & +9 \\ 0 & -90 & -\frac{1}{50} & +3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

und $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\,.$

Ausgangs–Tableau:
Schlupfvariable: $x_5, x_6, x_7, Basis : B = (5,6,7)\,.$

Der Simplex–Algorithmus (1.4.20) ergibt nach sechs Schritten dieselbe Basislösung wie im Ausgangstableau; d. h. der Simplex–Algorithmus gerät ins Kreisen.

Zur Vermeidung des Kreisens muß die Bestimmung des Index der Austauschzeile gemäß

$$\frac{t_{p0}}{t_{ps}} = \min_{i=1,\ldots,m} \{\, \frac{t_{i0}}{t_{is}} \mid t_{is} > 0 \,\}\,.$$

abgeändert werden.

Definition (**1.4.22**): Sei $v \in \mathbb{R}^k \setminus \{\,0\,\}$ ein Vektor. Dann heißt:

v **lexikographisch positiv** $:\Longleftrightarrow$ Die erste nicht verschwindende Komponente von v ist positiv.

$u \in \mathbb{R}^k$ **lexikographisch kleiner** als v $:\Longleftrightarrow$ $v - u$ lexikographisch positiv.

Z. B.: $v = (0,0,1,-3)$ ist lexikographisch positiv.

???:
richtig?:
OE können wir annehmen, daß die Zeilenvektoren

$$t_i$$

der Tableau–Matrix T in (1.4.19) lexikographisch positiv sind.

(**1.4.23**) (**Lexikographische Zeilenauswahlregel**):
Die Pivotzeile wird bestimmt durch das lexikographische Minimum der gewichteten Zeilenvektoren „$\frac{t_i}{t_{is}}$“:

$$\frac{t_p}{t_{ps}} = \operatorname*{lex\,min}_{i=1,\ldots,m}\{\, \frac{t_i}{t_{is}} \mid t_{is} > 0 \,\}\,.$$

Satz (**1.4.24**):

(i) Der Index p in (1.4.23) ist eindeutig bestimmt.

(ii) Der Vektor in der Zielfunktionszeile nimmt lexikographisch ab.

(iii) ???:
Alle Zeilenvektoren bleiben lexikographisch positiv.

(iv) Das Simplex–Verfahren mit lexikographischer Zeilenauswahlregel ist endllich.

Beispiel→(Bsp 5):
Die Anwendung von (1.4.23) auf (Bsp 5) ergibt folgendes Ergebnis:

(1) die entartete Ecke wird im 4. Tableau verlassen.

(2) das 5. Tableau ergibt die Optimallösung.

1.5 Berechnung einer zulässigen Basislösung

Zu lösen sei das LP (1.2.1).

Vorausetzung: OE: $b \geq 0$.
(Sonst, falls ein $b_i < 0$ multipliziere die i–te Gleichung in $Ax = b$ mit -1.)

Zum Start des Simplex–Algorithmus (1.4.20) benötigt man eine zulässige Lösung des LGS

(**1.5.1**) $Ax = b, x \geq 0$ zur Basis B.

Zusätzlich muß $Ax = b$ überführt werden in ein LGS mit $A_B = I$.

Beides kann man erreichen durch Lösen des folgenden LPs:

(**1.5.2**)
(**Hilfsproblem**)

minimiere	$z = \sum_{i=1}^{m} y_i$
unter	$Ax + y = b$ und $x \geq 0, y \geq 0$.

Für diese Hilfsproblem gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) (1.5.2) besitzt eine optimale Lösung mit $z = 0$, (d. h. $y = (\, y_1 \ldots \quad y_m \,) = (\, 0 \ldots \quad 0 \,)$).
Dann ist die zugehörige Basislösung x zulässig für das LGS (1.5.1).

2.) (1.5.2) besitzt eine optimale Lösung mit $z > 0$.
Dann besitzt das LGS (1.5.1) keine zulässige Lösung.

Man löse das Hilfsproblem (1.5.2) mit dem Simplex–Algorithmus (1.4.20):

Start: $B = (n+1, \ldots, n+m)\,, A_B = I_m\,, \quad N = (1, \ldots, n)\,, A_N = A\,,$
$c_B = (1, 1, \ldots, 1)\,, \qquad\qquad c_N = (0, 0, \ldots, 0)\,.$

(**1.5.5**)
(Tableau)

		x	
z	z_0	r_N	
y	b	A	

mit

$$z_0 \underset{(1.4.4)}{=\!=} c_B A_B^{-1} b = c_B b = \sum_{i=1}^{m} b_i \underset{b \geq 0}{\geq} 0\,,$$

$$r_N \underset{(1.4.4)}{=\!=} c_B A_B^{-1} A_N - c_N = c_B A \in \mathbb{R}^n \text{ also}$$

$$r_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Die Zweiphasen–Methode zur Lösung des LP 1.2.1

Phase I: Löse das Hilfsproblem (1.5.2) mit Start–Tableau (1.5.5).
Die Basisvariablen $y_1, \ldots, y_m$ müssen im optimalen Tableau Nicht–Basis–Variablen sein ($\Rightarrow\ y_1, \ldots, y_m = 0$).

Phase II: Berechne Start–Tableau zur Lösung von (1.2.1) durch:

1.) Streichung der zu $y_1, \ldots, y_m$ gehörenden Spalten,

2.) Berechnung der neuen Werte z_0, r_N mit den neuen Werten B', N' und b':

$$z_0 \overset{(1.4.4)}{=\!=} c_{B'} b'$$
$$r_N \overset{(1.4.4)}{=\!=} c_{B'} A_{N'} - c_{N'} .$$

Beispiel (**Bsp 1**) (Luenberger, S 45):

$$\text{minimiere} \quad z(x) = cx = (4 \quad 1 \quad 1)\, x = 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$
$$\text{unter} \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = b \text{ und } x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

Phase I

Start–Tableau: $B = (4,5)$, $N = (1,2,3)$, $z_0 = b_1 + b_2 = 7$, $r_N = \left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right)_{j=1,2,3} = (5,4,3)$.

1. Tabl.:

		x_1	x_2	x_3	
z	7	5	4	3	
y_1	4	2	1	2	
y_2	3	[3]	3	1	$\leftarrow$

Tausche $\uparrow$ y_2 mit x_1.

2. Tabl.:

		y_2	x_2	x_3	
z	2	$-\frac{5}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	
y_1	2	$-\frac{2}{3}$	-1	[$\frac{4}{3}$]	$\leftarrow$
x_1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	

Tausche y_1 mit x_3 $\uparrow$

3. Tabl.:

		y_2	x_2	y_1
z	0	-1	0	-1
x_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Es ist $r_N \leq 0$, $z_0 = 0$, $b \geq 0$ und y_1, y_2 sind Nicht–Basis–Variable.
Also haben wir eine zulässige Baislösung von $Ax = b$, $x \geq 0$ mit:
$B = (3,1)$ und $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

Phase II

1.) Streiche Spalten von y_1, y_2.

2.) Berechne z_0, r_N neu:

alt: $c = (4,1,1)$,

neu: $B = (3,1)$, $N = (2)$, $b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

also: $c_B = (1,4)$

$\Rightarrow$ $z_0 = c_B b = \frac{7}{2}$,

$r_N = c_B A_N - c_2 = (1 \quad 4) \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - 1 = \frac{13}{4}$.

1. Tabl.:

		x_2	
z	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}$	
x_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
x_1	$\frac{1}{2}$	[$\frac{5}{4}$]	$\leftarrow$

$\uparrow$

Tausche x_1 mit x_2.

2. Tabl.:

		x_1
z	$\frac{11}{5}$	$-\frac{13}{5}$
x_3	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

Wegen $r_1 = -\frac{13}{5} \leq 0$ ist die optimale Lösung: $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{9}{5}$.

Die Zweiphasen–Methode zur Lösung des gemischten LPs mit Gleichungen und Ungleichungen

Mit den vorhergehenden Methoden lassen sich auch Probleme mit Gleichungen und Ungleichungen

$$\begin{aligned} a_i x &= b_i, \quad i = 1, \ldots, k; \\ a_i x &\le b_i, \quad i = k+1, \ldots, m; \end{aligned}$$

behandeln. Mit Schlupfvariablen $y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m$ löst man in Phase I das LP:

(**Hilfsproblem**)

minimiere	$z = \sum_{i=1}^{k} y_i$
unter	$a_i x + y_i = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$
und	$x \ge 0, y \ge 0\,.$

Das zugehörige Start–Tableau ist identisch mit (1.5.5), wobei

$$\begin{aligned} z_0 &\underset{(1.4.4)}{=\!=} c_B A_B^{-1} b = c_B b = \sum_{i=1}^{k} b_i \text{ und} \\ r_j &= \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n)\,. \end{aligned}$$

In Phase I werden also die Basisvariablen $y_1, \ldots, y_k$ in Nicht–Basis–Variable transformiert, müssen also $= 0$ sein damit eine Lösung existiert.

$$(y_1, \ldots, y_k) \neq 0 \Longrightarrow \text{Es gibt keine Lösung.}$$

Beispiel (**Bsp 2**) (Böhm/Heinze S. 98):
Drei Gase mit denen in der folgenden Tabelle angeführten Konstanten sollen so gemischt werden, daß ein möglichst billiges Mischgas mit einem Heizwert H von 3000 kcal/m^3 und einem Schwefelgehalt S von höchstens 3 g/m^3 entsteht.

Gas–Nr. $i =$	1	2	3	Einheit
Preis p_i	10	30	20	DM/m^3
Heizwert h_i	1000	3000	6000	kcal/m^3
Schwefel s_i	8	1	2	g/m^3

Bezeichnet man die Mengengehalte der einzelnen Gase pro m^3 Mischgas mit x_i, so lautet das zughörige LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcll} \text{minimiere} & z(x) = cx = (\,10 & & 30 & & 20\,)\,x & = & 10 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 & \\ \text{unter} & x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & 6 \cdot x_3 & = & 3 & \text{Heizwert} \\ & 8 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & \le & 3 & \text{Schwefel} \\ & x_1 & & & & & \le & 1 & \text{Anteil pro Gas} \\ & & & x_2 & & & \le & 1 & \text{zwischen 0 und 1} \\ & & & & & x_3 & \le & 1 & \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & \text{Summe der Anteile} = 1 \\ \text{und} & x_1, x_2, x_3 \ge 0\,. & & & & & & & \end{array}$$

Phase I

Eliminiere y_1, y_6.
Die Hilfsfunktion ist $\min y_1 + y_6$ und man erhält

$$\begin{aligned} z_0 &= b_1 + b_6 = 4\,, \\ r_N &= (a_{1j} + a_{6j})_{j=1,\ldots,3} = (2, 4, 7) \end{aligned}$$

und damit das Start–Tableau:

		x_1	x_2	x_3	
z	4	2	4	7	
y_1	3	1	3	$\boxed{6}$	$\leftarrow p=1$
y_2	3	8	1	2	
y_3	1	1	0	0	Tausche
y_4	1	0	1	0	y_1 gegen x_3
y_5	1	0	0	1	und streiche
y_6	1	1	1	1	die 3. Spalte.
			$s=3\uparrow$		

2. Tabl.:

	x_1	x_2	
z	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	Tausche
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	y_6 gegen x_2
y_2	2	$\frac{23}{3}$	0	und streiche
y_3	1	1	0	die 2. Spalte.
y_4	1	0	1	Warum
y_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	nicht $s=1$?
y_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\leftarrow p=6$
		$s=2\uparrow$		

3. Tabl.:

	x_1
z	0	0
x_3	0	$-\frac{2}{3}$
y_2	2	$\frac{23}{3}$
y_3	1	1
y_4	0	$-\frac{5}{3}$
y_5	1	$\frac{2}{3}$
x_2	1	$\frac{5}{3}$

Damit ist Phase I beendet.

Berechne neue Werte für das Start–Tableau der Phase II:

Hierbei ist $B=(3,4,5,6,7,2)$ $(\overset{\text{zu B}=(4,\dots,7}{\text{gehört }(y_2,\dots,y_5)})$, $N=(1)$,

$c=(10,30,20,0,0,0,0)$, $c_B=(20,0,0,0,0,30)$,

$z_0=c_Bb=30$,

$r_N=r_1=c_BA_N-c_1=-\frac{40}{3}+\frac{150}{3}-10=\frac{80}{3}=\frac{240}{9}$.

Phase II

4. Tabl.:

	x_1	
z	30	$\frac{80}{3}$	
x_3	0	$-\frac{2}{3}$	
y_2	2	$\boxed{\frac{23}{3}}$	$\leftarrow$
y_3	1	1	$p=2$
y_4	0	$-\frac{5}{3}$	Tausche
y_5	1	$\frac{2}{3}$	y_2 gegen x_1
x_2	1	$\frac{5}{3}$	
		$s=1\uparrow$	

5. Tabl.:

	x_2	
z	$\frac{530}{23}$	$-\frac{80}{23}$	
x_3	$\frac{4}{23}$	$\frac{2}{23}$	
x_1	$\frac{6}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\leftarrow$
y_3	$\frac{17}{23}$	$-\frac{3}{23}$	$p=2$
y_4	$\frac{10}{23}$	$\frac{5}{23}$	
y_5	$\frac{19}{23}$	$-\frac{2}{23}$	
x_2	$\frac{13}{23}$	$-\frac{5}{23}$	
	$s=1\uparrow$		

optimale Lösung:

$x_1=2\cdot\frac{3}{23} = \frac{6}{23} = 0.2609$

$x_2=1-\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{23} = \frac{13}{23} = 0.5652$

$x_3=0+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{23} = \frac{4}{23} = 0.1739$

$z = 30-\frac{80}{3}\cdot\frac{6}{23}=\frac{530}{23}=23.043$

Beispiel (**Bsp 3**) (vgl. Krabs S. 38):

minimiere $z(x)=cx=(2 \quad 4 \quad 5)\,x=\cdot x_1+4\cdot x_2+5\cdot x_3$

unter

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 &+6\cdot x_2 &&+x_3 &&\geq 40\\ 2\cdot x_1 &&+x_2 &+3\cdot x_3 &&\geq 30\\ x_1 &&&+4\cdot x_3 &&\geq 20 \end{aligned}$$

und $x_i\geq 0$, $i=1,\dots,3$.

Durch Einführung der Schlupfvariablen x_4,x_5,x_6 gehen die Nebenbedingungen über in

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 &+6\cdot x_2 &&+x_3 &-x_4 &&&= 40\\ 2\cdot x_1 &&+x_2 &+3\cdot x_3 &&-x_5 &&= 30\\ x_1 &&&+4\cdot x_3 &&&-x_6 &= 20 \end{aligned}$$

und $x_i\geq 0$, $i=1,\dots,6$.

Phase I

Führe Hilfsvariable $y_1,y_2,y_3\geq 0$ ein.

$N=(1,2,\dots,6)$, $B=(7,8,9)$,

Start: $z_0=\sum_{i=1}^{3}b_i=90$, $r_N=\left(\sum_{i=1}^{3}a_{ij}\right)_{j=1,\dots,6}=(6,7,8,-1,-1,-1)$.

Das Start–Tableau (1.5.5):

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	90	6	7	8	-1	-1	-1	
y_1	40	3	6	1	-1	0	0	
y_2	30	2	1	3	0	-1	0	
y_3	20	1	0	4	0	0	-1	$\leftarrow$
		$s=3$ $\uparrow$						

nach 3 Simplex–Schritten erhält man das 4. Tableau:

4. Tabl.:

		y_2	x_2	y_3	x_4	y_1	x_6
z	0	-1	0	-1	0	-1	0
x_5	$\frac{10}{11}$	-1	$\frac{19}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{7}{11}$
x_1	$\frac{140}{11}$	0	$\frac{24}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$
x_3	$\frac{20}{11}$	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$

Wegen $r_N \leq 0$ lautet eine zulässige Basislösung:

$$x_1 = \tfrac{140}{11} = 12.727$$
$$x_3 = \tfrac{20}{11} = 1.8182$$
$$x_5 = \tfrac{10}{11} = 0.90909$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = 0.0$$

Phase II

1.) Streiche Spalten von y_1, y_2 und y_3 .

2.) Berechne z_0, r_N neu:

alt: $c = (2,4,5,0,0,0)$,

neu: $B = (5,1,3)$, $N = (2,4,6)$, $b^T = (\,\frac{10}{11} \quad \frac{140}{11} \quad \frac{20}{11}\,)$.

also: $c_B = (0,2,5)$, $c_N = (4,0,0)$

$\Rightarrow$ $r_N = c_B A_N - c_N = (\,-\frac{26}{11} \quad -\frac{3}{11} \quad -\frac{13}{11}\,)$

Wegen $r_N < 0$ ist die in Phase I berechnete Basis–Lösung schon optimal.

Bemerkung: Dieses Beispiel kann einfacher mit dem dualen Simplex–Verfahren vgl. (Abschn. 1.7) gelöst werden.

Die Zweiphasen–Methode zur Lösung des LPs mit gemischten Ungleichungen

In den Anwendungen treten oft „gemischte Ungleichungen“ auf:

$$\begin{aligned} &a_i x \geq b_i, && i = 1,\ldots,k; \\ &a_i x \leq b_i, && i = k+1,\ldots,m; \\ &x \geq 0, && \text{wobei } b \geq 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen sind äquivalent zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &a_i x - x_{n+i} = b_i, && i = 1,\ldots,k; \\ &a_i x + y_i = b_i, && i = k+1,\ldots,m; \\ &x_i \geq 0, && i = 1,\ldots,n+k; \\ &y_i \geq 0, && i = k+1,\ldots,m; \\ &\text{wobei } b \geq 0 \text{ ist.} \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} \text{also ist die} \\ \text{Koeffizienten-} \\ \text{matrix} \end{array} = \left(A_{m\times n} \middle| \begin{array}{c} -I_{k\times k} \\ \hline 0_{(m-k)\times k} \end{array} \right) \tag{1.5.7}$$

Zur Berechnung einer zulässigen Basislösung von (1.5.7) müssen nur in den ersten k Gleichungen Hilfsvariablen $y_1,\ldots,y_k$ eingeführt werden. (In den Gleichungen $k+1,\ldots,m$ stehen schon die Hilfsvariablen $y_{k+1},\ldots,y_m$).

Anstatt (1.5.2) lautet dann das Hilfsproblem:

(**Hilfsproblem**)

$$\begin{aligned} &\text{minimiere} && z = \sum_{i=1}^{k} y_i && \\ &\text{unter} && a_i x - x_{n+i} + y_i = b_i\,, && i = 1,\ldots,k\,, \\ & && a_i x + y_i = b_i\,, && i = k+1,\ldots,m\,, \\ &\text{und} && x_i \geq 0\,, && i = 1,\ldots,n+k\,, \\ & && y_i \geq 0\,, && i = 1,\ldots,m \\ &\text{wobei} && b \geq 0 \text{ ist.} && \end{aligned}$$

Zur Bestimmung eines Start–Tableaus für dieses Hiflsproblem sortiere man die $n+m+k$ Variablen in der Reihenfolge:

$$\underbrace{x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+k}}_{N=(1,\ldots,n+k)},\qquad \underbrace{y_1,\ldots,y_k,y_{k+1},\ldots,y_m}_{B=(n+k+1,\ldots,n+k+m)}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}
c_B &= (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m-k}) \in \mathbb{R}^m\,,\ c_N=(0,\ldots,0)\,,\\
z_0 &\overset{(1.4.4)}{=\!=} c_B A_B^{-1} b = c_B b = \sum_{i=1}^{k} b_i\,,\\
r_N &\overset{(1.4.4)}{=\!=} c_B A_B^{-1} A_N - c_N = c_B A_N \in \mathbb{R}^{n+k} \text{ also}\\
r_j &= c_B a^j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_{ij}\ ;\ j=1,\ldots,n \\ -1 \quad\ ;\ j=n+1,\ldots,n+k \end{cases}.
\end{aligned}$$

und das Start–Tableau

(**1.5.8**)

		$x_1 \ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots x_{n+k}$
z	$\sum_{i=1}^{k} b_i$	$\sum_{i=1}^{k} a_{i1} \ldots \sum_{i=1}^{k} a_{in}$	$-1 \ldots -1$
y_1	b_1	a_1	$-I_{k\times k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
y_k	b_k	a_k	
y_{k+1}	b_{k+1}	a_{k+1}	$0_{(m-k)\times k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
y_m	b_m	a_m	

1.6 Das revidierte Simplex–Verfahren

Beim Simplex–Verfahren (1.4.20) wird im wesentlichen die $m \times (n-m)$ Matrix A_N benutzt. Im Falle

$$m \ll n$$

ist es aus Gründen des Rechenaufwandes und des Speicherplatzbedarfs günstiger, mit der $m \times m$ Matrix A_B zu arbeiten. Zudem ist beim Start $A_B = I$.

Die Spalten von A seien $a^1,\ldots,a^n$.

Das Grundschema des revidierten Simplex–Verfahrens

... zur Lösung des LPs (1.2.1) mit $\operatorname{rang}(A) = m < n$ lautet:

Grundschema (**1.6.1**): B sei die augenblickliche Basis. Beim Start sei $A_B = I$.

0. Start: Wegen $A_B = I$ ist $\widetilde{b} = x_B = b$. Gehe zum 2. Schritt.

1. Bestimme $\widetilde{b} = x_B$:
   Berechne (mit einer Pivotoperation) die augenblickliche Basislösung $x_B =: \widetilde{b}$ als Lösung von $Ax = b$.

2. Bestimme λ :
   Löse $\lambda A_B = c_B$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^m$, und berechne $r_N := \lambda A_N - c_N$.
   Ist $r_N \le 0$? ja: Fertig: $x_B = \widetilde{b}\,, x_N = 0$ ist optimal, Stop.
   nein: Gehe zum 3. Schritt.

3. Bestimmung der Austauschspalte (1.4.12):
   Wähle Index s so, daß: $r_s = \max_{j\in N}\{\, r_j \mid r_j > 0 \,\}$.

4. Bestimme $\widetilde{a}^s$:
   ???:
   Löse $A_B\widetilde{a}^s = a^s$.

5. Gibt es eine endliche Lösung (1.4.8–1.Fall)?
   Ist $\widetilde{a}^s \leq 0$? ja: Es gibt keine endliche Lösung. Stop.
   nein: Gehe zum 6. Schritt.

6. Bestimmung der Austauschzeile (1.4.9):
   Wähle Index p so, daß: $\dfrac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{ps}} = \min\limits_{i\in B=1,\ldots,m} \{ \dfrac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{is}} \mid \widetilde{a}_{is} > 0 \}$.

7. Bestimme die neue Basis $\widetilde{B}$:
   durch Vertauschung des p–ten Elementes von B mit dem s–ten Element von N ,
   benenne $\widetilde{B}, \widetilde{a}^s, \widetilde{b}$ um in B, a^s, b und
   gehe zum 1. Schritt.

In diesem Algorithmus müssen lediglich drei LGS gelöst werden, zwei mit der Matrix A_B und eins mit der transponierten Matrix A_B^T :

???:
: transponiert?

(1.6.2) $\quad x_B : Ax = b\,, \quad \lambda : \lambda A_B = c_B\,, \quad \widetilde{a}^s : A_B\widetilde{a}^s = a^s$.

Die dazu erforderliche Rechenarbeit für sukzessive Basen $B \longrightarrow \widetilde{B}$ kann man erheblich reduzieren, wenn man berücksichtigt, daß B und $\widetilde{B}$ benachbart sind. Darauf basierend gibt es zwei Methoden, die LGS (1.6.2) zu lösen:

I Inverse–Basis–Methode: explizite Berechnung von A_B^{-1} .

II Faktorisierung von A_B :

$$FA_B = R\,, \quad F \text{ regulär}, \quad R \text{ rechte Dreiecksmatrix.}$$

Die Lösung von (1.6.2) wird dann auf gestaffelte LGS zurückgeführt, vgl. NUMERIK I. Der Vorteil gegenüber der expliziten Berechnung von A_B^{-1} besteht darin, daß Eigenschaften von A_B (Bandmatrizen, dünnbesetzte Martrizen) bei der Dreieckszerlegung erhalten bleiben.

I Inverse–Basis–Methode

Die Matrix A_B^{-1} zur Basis B sei bekannt.
Problem: Wie berechnet man beim Basis–Übergang $B \longrightarrow \widetilde{B}$ die neue Matrix $A_{\widetilde{B}}^{-1}$?

I.1 Direkte Methode für „Handrechnungen“

Führe Pivotoperation mit Pivotelement $\widetilde{a}_{ps}$ an der Matrix

$\widetilde{a}^s$	A_B^{-1}

???:
aus, d. h. erzeuge Einheitsvektor $e_p \in \mathbb{R}^m$ anstelle von $\widetilde{a}^s$

e_p	$A_{\widetilde{B}}^{-1}$

Beispiel **(Bsp 1)** (Luenberger, S 56 ff): vgl. (Bsp 4) auf S. 12
minimiere cx unter $Ax = b$ und $x \geq 0$ mit

$$c = (-3 \quad -1 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \text{ und}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} b & a^1 & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline b & A \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|cccccc|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Start und 1. Schritt von (1.6.1)**:**

wähle:

$$\begin{array}{rlrl} B &= (4,5,6) \text{ und} & N &= (1,2,3) \text{ dann} \\ c_B &= (0\ \ 0\ \ 0) \text{ und} & c_N &= (-3\ \ -1\ \ -3) \text{ und} \\ A_B &= I_3 \text{ und} & & \\ \widetilde{b} := x_B &= (2\ \ 5\ \ 6)^T \text{ und} & x_N &= (0\ \ 0\ \ 0)^T . \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{rlll} \lambda &= c_B A_B^{-1} & = (0\ \ 0\ \ 0)\, I_3 & = (0\ \ 0\ \ 0)\,, \\ r_N &= \lambda A_N - c_N & = (0\ \ 0\ \ 0)\, A_N - c_N & = (3\ \ 1\ \ 3) \not\leqq 0\,. \end{array}$$

3. Schritt: $3 = \max\limits_{j\in\{1,2,3\}} \{ r_j \mid r_j > 0 \} \implies$ wähle $s := 1$ oder $s := 3$.

Zur Vereinfachung der Handrechnung soll x_2 in die Basis gebracht werden, d. h. wähle $s := 2$.

4. Schritt: $\widetilde{a}^2 = A_B^{-1} a^2 = I_3 a^2 = a^2 = (1\ \ 2\ \ 2)^T \not\leqq 0$.

6. Schritt: $= \min\limits_{i=1,\ldots,3} \{ \dfrac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{i2}} \mid \widetilde{a}_{i2} > 0 \} = \min\{ \dfrac{2}{1}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{6}{2} \}\ \ 2 = \dfrac{\widetilde{b}_1}{\widetilde{a}_{12}} \implies$ wähle $p := 1$.

B	$\widetilde{b} = x_B$	$\widetilde{a}^2$	A_B^{-1}			
4	2	**1**	1	0	0	$\leftarrow p = 1$
5	5	2	0	1	0	
6	6	2	0	0	1	
		$s = 2 \uparrow$				

7. Schritt:

$$\begin{array}{rlrl} \widetilde{B} &:= (2,5,6)\,, & \widetilde{N} &:= (1,4,3)\,. \\ c_{\widetilde{B}} &= (-1,0,0)\,, & c_{\widetilde{N}} &= (-3,0,-3)\,. \end{array}$$

1. Schritt (Pivotoperation und Streichen der „Spalte a^2“):

B	$\widetilde{b}$	A_B^{-1}		
2	2	1	0	0
5	1	−2	1	0
6	2	−2	0	1

2. Schritt:

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = (-1\ \ 0\ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1\ \ 0\ \ 0)\,,$$

$$r_N = \lambda A_N - c_N = (-1\ \ 0\ \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (-3\ \ 0\ \ -3)$$

$$= (-2\ \ -1\ \ -1) + (3\ \ 0\ \ 3) = (1\ \ -1\ \ 2) \not\leqq 0\,.$$

3. Schritt: $r_3 = \max\limits_{j\in\{1,3,4\}} \{ r_j \mid r_j > 0 \} \implies$ wähle $s := 3$. x_3 in die Basis.

4. Schritt:

$$\widetilde{a}^3 = A_B^{-1} a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \not\leqq 0\,.$$

6. Schritt: $= \min\limits_{i=1,\ldots,3} \{ \dfrac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{i3}} \mid \widetilde{a}_{i3} > 0 \} = \min\{ \dfrac{2}{1}, \dfrac{1}{1} \}\ \ 1 = \dfrac{\widetilde{b}_2}{\widetilde{a}_{23}} \implies$ wähle $p := 2$.

B	$\widetilde{b}$	$\widetilde{a}^3$	A_B^{-1}			
2	2	1	1	0	0	
5	1	**1**	−2	1	0	$\leftarrow p = 2$
6	2	−1	−2	0	1	
		$s = 3 \uparrow$				

7. Schritt:

$$\begin{array}{rlrl} \widetilde{B} &:= (2,3,6)\,, & \widetilde{N} &:= (1,4,5)\,. \\ c_{\widetilde{B}} &= (-1,-3,0)\,, & c_{\widetilde{N}} &= (-3,0,0)\,. \end{array}$$

1. Schritt (Pivotoperation und Streichen der „Spalte a^3“):

B	$\widetilde{b}$	A_B^{-1}		
2	1	3	−1	0
3	1	−2	1	0
6	3	−4	1	1

2. Schritt:

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = (-1 \quad -3 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad -2 \quad 0)\,,$$

$$r_N = \lambda A_N - c_N = (3 \quad -2 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-3 \quad 0 \quad 0) = (4+3 \quad 3 \quad -2)$$

$$= (7 \quad 3 \quad -2) \not\leq 0\,.$$

3. Schritt: $r_1 = \max\limits_{j\in\{1,4,5\}} \{ r_j \mid r_j > 0 \} \implies$ wähle $s := 1$. x_1 in die Basis.

4. Schritt: $\widetilde{a}^1 = A_B^{-1} a^1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \not\leq 0\,.$

6. Schritt: $= \min\limits_{i=1,\ldots,3} \{ \dfrac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{i1}} \mid \widetilde{a}_{i1} > 0 \} = \min\{\frac{1}{5}\}$ $\dfrac{1}{5} = \dfrac{\widetilde{b}_1}{\widetilde{a}_{11}} \implies$ wähle $p := 1$.

B	$\widetilde{b}$	$\widetilde{a}^1$	A_B^{-1}		
2	1	5	3	−1	0
3	1	−3	−2	1	0
6	3	−5	−4	1	1
		$s = 1 \uparrow$			

$\leftarrow p = 1$

7. Schritt: $\widetilde{B} := (1, 3, 6)\,, \quad \widetilde{N} := (2, 4, 5)\,.$

$c_{\widetilde{B}} = (-3, -3, 0)\,, \quad c_{\widetilde{N}} = (-1, 0, 0)\,.$

1. Schritt (Pivotoperation und Streichen der „Spalte a^1“):

B	$\widetilde{b}$	A_B^{-1}		
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
3	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
6	4	−1	0	1

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = (-3 \quad -3 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{3}{5} \quad 0)\,,$$

2. Schritt:

$$r_N = \lambda A_N - c_N = (-\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{3}{5} \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-1 \quad 0 \quad 0)$$

$$= (-\tfrac{12}{5} \quad -\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{3}{5}) + (1 \quad 0 \quad 0) = (-\tfrac{7}{5} \quad -\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{3}{5}) < 0\,.$$

Da $r_N \leq 0$ ist die optimale Lösung:

$$x_1 = \frac{1}{5} = 0.2\,, \quad x_3 = \frac{8}{5} = 1.6\,, \quad x_6 = 4\,, \quad x_2 = x_4 = x_5 = 0\,.$$

I.2 Kompakte Methode: Produktform der Inversen

Die Inverse A_B^{-1} kann als Produkt von geeigneten Tranformationsmatrizen gespeichert werden; vgl. Luenberger S. 58.

Die numerische Analyse zeigt, daß die Inverse–Basis–Methode numerisch nicht stabil ist.

II Faktorisierung von A_B

Eine Stabilisierung des Simplex–Verfahrens wird durch die Faktorisierung von A_B erreicht; vgl. die Modifikationstechniken in §4.9 von J. Stoer: Numerische Mathematik I.

1.7 Dualität

Duale Programme

Jedem LP kann man ein duales LP zuordnen. Zwischen diesen beiden Problemen bestehen wichtige Beziehungen. Die Dualitätsbeziehungen können in symmetrischer Form am besten für LP's mit Ungleichungen ausgedrückt werden:

Duale Programme (1.7.1) (**symmetrische Form**):
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($m \times n$ - Matrix);
$x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (Spaltenvektor) (Variable des primären Problems);
$\lambda \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (Zeilenvektor) (Variable des dualen Problems);
$c \in \mathbb{R}^{1\times n}$;
$b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Primärproblem (P) $\min\{\, cx \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0 \,\}$,
Die zulässige Menge wird mit $K \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$ bezeichnet.

Dualproblem(P*) $\max\{\, \lambda b \mid \lambda A \leq c, \lambda \geq 0 \,\}$,
Die zulässige Menge wird mit $K^* \subseteq \mathbb{R}^{1\times m}$ bezeichnet.

Bemerkung: Das Dualproblem des Dualproblems ist wieder das Primärproblem.

Beispiel (**Bsp 1**):

Primärproblem (P)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{minimiere} & 3\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & \geq & 5 \\ & 2\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\ \text{und} & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. & & & & & & \end{array}$$

Dualproblem (P*)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{maximiere} & 5\cdot \lambda_1 & + & 6\cdot \lambda_2 & & & & \\ \text{unter} & \lambda_1 & + & 2\cdot \lambda_2 & \leq & 3 & & \\ & 2\cdot \lambda_1 & + & 2\cdot \lambda_2 & \leq & 4 & & \\ & 3\cdot \lambda_1 & + & \lambda_2 & \leq & 5 & & \\ \text{und} & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\,. & & & & & & \end{array}$$

Primärproblem (P)
$$\begin{array}{ll} \text{minimiere} & (3 \quad 4 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{unter} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \text{und} & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{array}$$

Dualproblem (P*)
$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & (\lambda_1 \quad \lambda_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \text{unter} & (\lambda_1 \quad \lambda_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leq (3 \quad 4 \quad 5) \\ \text{und} & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\,. \end{array}$$

Das LP in Standardform (1.2.1) $\min\{\, cx \mid Ax = b \text{ und } x \geq 0 \,\}$ kann auf die symmetrische Form (1.7.1) zurückgeführt werden. Die Gleichung

$$Ax = b$$

entspricht den beiden Ungleichungen

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$$

Das Dualproblem für die Variable $\omega \in \mathbb{R}^{1\times 2m}$ ist dann nach (1.7.1):

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & \omega \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ \text{unter} & \omega \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq c, \quad \omega \geq 0\,. \end{array}$$

Setzt man $\omega =: (u, v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}^{1\times m}$, so erhält man:

maximiere $ub - vb$
unter $uA - vA \le c\,, \quad u, v \ge 0\,.$

Mit $\lambda := u - v$ wird daraus:

Duale Programme (1.7.2) (**unsymmetrische Form**): Voraussetzungen wie in (1.7.1).

Primärproblem (P) $\min\{\, cx \mid Ax = b \text{ und } x \ge 0 \,\}\,.$

Dualproblem (P*) $\max\{\, \lambda b \mid \lambda A \le c \,\}\,.$

Beachte: Die duale Variable $\lambda = u - v$ unterliegt keiner Vorzeichenbeschränkung.

Beispiel (Bsp 2) (Transportproblem):

Primärproblem: Das Problem eines Erzeugers liegt darin, einen Plan zu festzulegen, wie die von ihm erzeugten Waren möglichst günstig an die Abnehmer versandt werden; vgl. §1. (Abschn. 1.1).

Dualproblem: Ein Unternehmer meint den Versand kostengünstiger durchführen zu können. Er bietet dem Erzeuger an, seine Waren am Erzeugungsort zu kaufen und am Bestimmungsort wieder zu verkaufen. Der Preis der Produkte variiert von Ort zu Ort und wird vom Unternehmer im Voraus festgesetzt. Er muß jedoch die Preise so wählen, daß sein Angebot attraktiv für den Erzeuger ist. Somit muß der Unternehmer

Preise $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ für die m Produktionsorte und
Preise $\mu_1, \ldots, \mu_n$ für die n Bestimmungsorte wählen.

Um gegenüber den herkömlichen Transportmöglichkeiten konkurrenzfähig zu sein,
müssen seine Preise: $\mu_j - \lambda_i \le c_{ij}\,, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ erfüllen.
dabei ist c_{ij} = Transportkosten des Produkts von Ort i zu Ort j.

Die Gewinnmaximierung des Unternehmers führt dann auf das Problem:

maximiere $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$
unter $\mu_j - \lambda_i \le c_{ij}\,, \qquad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\,.$
dabei ist b_j = Verkaufsmenge des Produkts am Ort j,
a_i = Einkaufsmenge des Produkts am Ort i.

Der Dualitätssatz

wir gehen aus von den dualen Programmen (P) und (P*) in (1.7.2) mit den zulässigen Mengen K und K^*:

(P) $\min\{\, cx \mid Ax = b \text{ und } x \ge 0 \,\}\,,$
(P*) $\max\{\, \lambda b \mid \lambda A \le c \,\}\,.$

Satz (1.7.3) (**schwacher Dualitätssatz**):
Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ zulässige Punkte. Dann gilt:

$\lambda b \;\le\; cx$

Beweis:

$\lambda b \underset{(\mathrm{P})}{=\!=} \lambda A x \overset{x \ge 0}{\underset{(\mathrm{P}^*)}{\le}} cx\,.$ □

Korollar (1.7.4): Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ zulässige Punkte. Dann gilt:

$\lambda b = cx \;\Longrightarrow\; x \in L \;\wedge\; \lambda \in L^*$
d. h. x und λ sind optimale Lösungen.

Beweis:

x optimal denn wegen (S 1.7.3) gilt: $\forall\, \tilde{x} \in K : c\tilde{x} \ge \lambda b \underset{\text{Vor.}}{=\!=} cx\,.$

λ optimal denn wegen (S 1.7.3) gilt: $\forall\, \tilde{\lambda} \in K^* : \tilde{\lambda} b \le cx \underset{\text{Vor.}}{=\!=} \lambda b\,.$

□

Satz (1.7.5) (**Dualitätssatz der linearen Optimierung**):

$$\begin{array}{ccc} \exists\, x \in L & \Longleftrightarrow & \exists\, \lambda \in L^* \,. \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ cx = \lambda b \,. & & \end{array}$$

$x \in L$ bzw. $\lambda \in L^*$ heißt: x bzw. λ ist endliche Optimallösung von (P) bzw. von (P*).
$cx = \lambda b$ bedeutet: Der Optimalwert der beiden Zielfunktionen ist gleich.

Beweis („$\Longrightarrow$"): Das Primärpropblem (P) besitze eine endliche Optimallösung $\overline{x} \in L$ mit Wert $z_0 = c\overline{x}$.

Definiere den abgeschlossenen Kegel:

$$\begin{aligned} X &:= \{\, t \begin{pmatrix} c\overline{x} - cx \\ b - Ax \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+m} \mid x \geq 0, t > 0 \,\} \;=\; \{\, \begin{pmatrix} tz_0 - c(tx) \\ tb - A(tx) \end{pmatrix} \mid x \geq 0, t > 0 \,\} \\ &= \{\, \begin{pmatrix} tz_0 - cx' \\ tb - Ax' \end{pmatrix} \mid x' \geq 0, t > 0 \,\} \,. \end{aligned}$$

$0 \in X$ (denn: $0 = \begin{pmatrix} 1 \cdot z_0 - c\overline{x} \\ 1 \cdot b - A\overline{x} \end{pmatrix}$ und $\overline{x} \geq 0$, da $\overline{x} \in L \subseteq K$).

Z. z.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X$

$\not\exists$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in X \;\Longrightarrow \exists\, t_0 > 0 \exists\, x_0 \geq 0 :$ ① $1 = t_0 z_0 - cx_0 \underset{t_0 > 0}{\Longrightarrow} z_0 - c\frac{x_0}{t_0} = \frac{1}{t_0} > 0$,
② $0 = t_0 b - Ax_0$.

Aus ② $\Longrightarrow A\frac{x_0}{t_0} = b \overset{\frac{x_0}{t_0} \geq 0}{\Longrightarrow} \frac{x_0}{t_0}$ ist zulässig $\Longrightarrow c\frac{x_0}{t_0} \geq c\overline{x} = z_0 \Longrightarrow z_0 - c\frac{x_0}{t_0} \leq 0$ ↯ zu ①.

Also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X \;\underset{(A.7)}{\overset{\text{Trennungssatz}}{\Longrightarrow}} \exists\, (\,\lambda_0 \quad \lambda\,) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times m} \setminus \{\,0\,\}$ (Zeilenvektor) mit:

$$\lambda_0 = (\,\lambda_0 \quad \lambda\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} < 0 \leq (\,\lambda_0 \quad \lambda\,) \begin{pmatrix} r \\ w \end{pmatrix} = \lambda_0 r + \lambda w \quad \forall \begin{pmatrix} r \\ w \end{pmatrix} \in X \,.$$

OE: $\lambda_0 = -1$ (sonst teile x, t in X durch $|\lambda_0| \neq 0$, dann: $\lambda_0 r' = \lambda_0 \frac{r}{|\lambda_0|} = -1 \cdot r$.)

Damit folgt (Def. von X) $\forall\, x \geq 0\ \forall\, t > 0$:
$0 \leq -1 \cdot (tz_0 - cx) + \lambda(tb - Ax) = t(\lambda b - z_0) + (c - \lambda A)x$.

Für $t \longrightarrow 0+$ folgt: $\forall\, x \geq 0 :\quad 0 \leq cx - \lambda Ax \Longrightarrow \lambda A \leq c \Longrightarrow \lambda \in K^*$.
D. h. λ zulässig für (P*) (keine Vorzeichenbeschränkung für λ).
$(x = (\,1 \quad 0 \ldots \quad 0\,)^T, (\,0 \quad 1 \quad 0 \ldots \quad 0\,)^T, \ldots, (\,0 \ldots \quad 0 \quad 1\,)^T$.)

Für $t = 1$ und $x = 0$ folgt: $\lambda b \geq z_0 = c\overline{x} \underset{(S\ 1.7.3)}{\Longrightarrow} \lambda b = c\overline{x} \underset{(K\ 1.7.4)}{\Longrightarrow} \lambda$ optimal.

□

Beweis („$\Longleftarrow$"):

???:

□

Bemerkungen:

(1) Ein anderer Beweis des Dualitätssatzes beruht aud dem Farkas–Lemma (A.8) vgl. (10.15).

(2) Der Dualitätssatz verwendet nicht die Voraussetzung $\operatorname{rang}(A) = m$ des Simplex–Verfahrens. Bei Existenz einer nichtentarteten Basis–Lösung ist der Beweis wesentlich einfacher; vgl. (§7.3).

Mit den Sätzen (S 1.7.3), (K 1.7.4) und (S 1.7.5) können auf einfache Weise Existenzaussagen und Kriterien für die Optimalität gewonnen werden.

Satz (1.7.6) (**Existenzsatz**):
Seien (P) und (P*) duale Programme wie in (1.7.2). Dann gilt:

(i) Besitzen (P) und (P*) zulässige Lösungen, so besitzen beide Probleme endliche Optimallösungen.

$$K \neq \{\,\} \;\wedge\; K^* \neq \{\,\} \Longrightarrow L \neq \{\,\} \;\wedge\; L^* \neq \{\,\} \,.$$

(ii) Besitzt nur eines der beiden Probleme (P) oder (P*) zulässige Punkte, ???:
so besitzt diese Aufgabe keine endliche Optimallösung.

$$K = \{\} \ \vee \ K^* = \{\} \Rightarrow L = L^* = \{\}\,.$$

(iii) Besitzt ein Problem (P) oder (P*) zwar zulässige Punkte, aber keine endliche Optimallösung, so hat die dazu duale Aufgabe keine zulässigen Punkte.

$$\begin{array}{lcll} K \neq \{\} & \wedge & L = \{\} & \Rightarrow \quad L^* = \{\}\,, \\ K^* \neq \{\} & \wedge & L^* = \{\} & \Rightarrow \quad L = \{\}\,. \end{array}$$

Beweis: Übung

Satz (1.7.7) (**Komplementarität: unsymmetrische Form**):
Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ zulässige Punkte für
die duale Programme (P) und (P*) (1.7.2). Dann gilt:

(i) x, λ sind optimal.

$\Longleftrightarrow$ (ii) $(\lambda A - c)x = 0\,.$

$\Longleftrightarrow$ (iii) Für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} x_i > 0 & \Rightarrow & \lambda a^i = c_i\,, \\ \lambda a^i < c_i & \Rightarrow & x_i = 0\,. \end{array}$$

Beweis: Übung

Satz (1.7.8) (**Komplementarität: symmetrische Form**):
Seien $x \in K$ und $\lambda \in K^*$ zulässige Punkte für
die duale Programme (P) und (P*) (1.7.1). Dann gilt:

(i) x, λ sind optimal.

$\Longleftrightarrow$ (ii) $(\lambda A - c)x = 0\,,\ \lambda(Ax - b) = 0\,.$

$\Longleftrightarrow$ (iii) Für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} x_i > 0 & \Rightarrow & \lambda a^i = c_i\,, \\ \lambda a^i < c_i & \Rightarrow & x_i = 0\,, \\ \lambda_j > 0 & \Rightarrow & a_j x = b_j\,, \\ a_j x > b_j & \Rightarrow & \lambda_j = 0\,. \end{array}$$

dabei ist: a^i die i–te Spalte von A und a_j die j–te Zeile von A.

Die Resultate dieses Abschnittes sind Grundlagen für Sattelpunltsätze (Anwendung: Minimax–Aufgaben, Spieltheorie).

Das duale Simplex–Verfahren

Der Dualitätssatz (S 1.7.5) kann unter den Voraussetzungen des Simplex–Verfahrens in (Abschn. 1.4) einfacher bewiesen werden. Gleichzeitig gelangt man dabei zum dualen Simplex–Verfahren.

Definition (1.7.9): Sei B eine Basis von $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$\lambda \quad := \quad c_B A_B^{-1} \in \mathbb{R}^m$ (Zeilenvektor) heißt **Simplex–Multiplikator**. Damit gilt:

$r_N \quad = \quad c_B A_B^{-1} A_N - c_N = \lambda A_N - c_N\,.$ (Vektor der reduzierten Kosten)

Satz (1.7.10) (**Dualitätssatz**):
Gegeben seien die dualen Probleme (1.7.2):

(P) $\min\{\, cx \mid Ax = b \text{ und } x \geq 0 \,\}$,

(P*) $\max\{\, \lambda b \mid \lambda A \leq c \,\}$,

mit $\operatorname{rang}(A) = m$, (Anzahl der Zeilen von A).
B sei eine Basis von (P) mit zugehöriger Basislösung: $x_B = A_B^{-1} b$ und $x_N = 0$.
Sei $\lambda = c_B A_B^{-1}$ der Simpelx–Multipliktor. Dann gilt:

(i) $\lambda A \leq c$ (λ zulässig für (P*)) $\Longleftrightarrow$ $r_N \leq 0\,,$

(ii) $x \in L$ und $x_B > 0$ (x optimal und nichtentartet) $\Rightarrow$ $\lambda \in L^*$ (λ optimal für (P*))
und es gilt: $z_0 = \lambda b = c_B A_B^{-1} b = c_B x_B = cx\,.$

Beweis:

(i) $\lambda A \le c \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda A_B, \lambda A_N) \le (c_B, c_N)$

$\xLeftarrow[\lambda = c_B A_B^{-1}]{} \quad \lambda A_N \le c_N$

$\Longleftrightarrow \quad r_N = \lambda A_N - c_N \le 0\,.$

(ii) x optimal und nichtentartet $\xRightarrow[\text{(S 1.4.11)}]{}$ $r_N \le 0$ $\xRightarrow[\text{(i)}]{}$ λ ist zulässig für (P*).

Da gilt: $\lambda b = c_B A_B^{-1} b = c_B x_B \xrightarrow[x_N = 0]{} cx \xRightarrow[\text{(K 1.7.4)}]{}$ λ ist optimal für (P*). □

Definition: Sei x eine Basislösung von (P) mit $x_B = A_B^{-1} b$ und $x_N = 0\,$.
Dann heißt:

x **dual–zulässig** für (P) $\quad :\Longleftrightarrow \quad \lambda = c_B A_B^{-1}$ zulässig für (P*)

$\xLeftarrow[\text{(S 1.7.10–i)}]{} \quad r_N \le 0\,.$

Idee des dualen Simplex–Verfahrens

(Vorausetzungen wie in (S 1.7.10).)

Bei vielen Beispielen vgl. (Bsp 1) auf S. 23 liegt eine Basislösung x vor, welche
(a) nicht zulässig ist $x_B \ngeq 0$,
(b) jedoch dual zulässig ist, also das Optimalitätskriterium $r_N \le 0$ erfüllt (S 1.7.10–i).

Daher kann man das Dualproblem (P*) lösen. Statt jedoch ein Simplex–Tableau für (P*) zu konstruieren, geht man vom alten Simplex–Tableau (1.4.19) aus und versucht (P) vom dualen Standpunkt zu lösen:

(1) erhalte die Optimalitätsbedingung $r_N \le 0\,$,

(2) versuche die Zulässigkeit von x zu erreichen, d. h. $x_B = A_B^{-1} b \ge 0\,$,

(3) lasse die Zielfunktion des dualen Problems wachsen.

Mit der beim Simplex–Verfahren getroffenen Annahme $A_B = I$ ist das Simplex–Tableau für (P) mit der zugehörigen Tableau–Matrix T nach (1.4.19):

(1.7.11)
(Simplex–Tableau)

	$x_j, j \in N$	
$z(x)$	z_0	r_N
$x_i,$ $i \in B$	b	A_N

$= T = \left(t_{ij}\right)_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n-m}}$

Das Tableau ist
1.) primal zulässig, wenn $b \ge 0\,$,
2.) dual zulässig, wenn $r_N \le 0\,$,
3.) optimal, wenn $b \ge 0, r_N \le 0\,$.

Da die Matrix A beim Übergang zum dualen Problem transponiert wird ($(A^T \lambda^T = (\lambda A)^T$), wechseln im dualen Simplex–Verfahren Zeilen und Spalten ihre Rolle.

Simplex–Algorithmus (1.7.12) (Das duale Simplex–Verfahren zur Lösung von (P)):

1. Start:
(P) sei dual–zulässig ZUR Basis $B\,$. Berechne die Tableau–Matrix $T = (t_{ij})\,$.

2. Ist die Basislösung optimal?
Ist $\forall\, i \in \{1, \dots, m\} : t_{i0} \ge 0\,$? nein: gehe zum 3. Schritt.
ja: Die Basislösung ist optimal. Setze:
$x_B = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) := (t_{10}, \dots, t_{m0})\,,$
$x_N = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}}) := (0, \dots, 0)\,,$
$z_0 := t_{00}\,.$
Stop.

3. Bestimmung der Austauschzeile:
Wähle Index p mit $t_{p0} = \min\limits_{1 \le i \le m} t_{i0}\,, \quad (t_{i0} = b_i).$

4. Gibt es eine endliche Lösung?
   Ist $\forall\, j \in \{1,\dots,n-m\} : t_{pj} \geq 0$ nein: gehe zum 5. Schritt.
   ja: (P*) besitzt keine endliche Lösung. Stop.

5. Bestimmung der Austauschspalte:
   Wähle Index s mit: $\dfrac{t_{0s}}{t_{ps}} = \min\{\, \dfrac{t_{0j}}{t_{pj}} \mid t_{pj} < 0, j = 1,\dots,n-m \,\}, \quad (t_{0j} = r_{N(j)} \leq 0).$

6. Pivotoperation:
   Vertausche die s–te Komponente von N mit der p–ten Komponente von B.
   Führe an der Matrix T die Pivotoperation mit Pivotelement $t_{ps} < 0$ durch wie in (1.4.20–6.) und gehe zum 2. Schritt.

Anwendung:

Das Primärproblem sei in der Form gegeben:

$$(P) \quad \min\{\, cx \mid Ax \geq b \text{ und } x \geq 0 \,\}, \quad c \geq 0$$

vgl. (Bsp 1) auf S. 23.

$Ax \geq b$ ist äquivalent zu $Ax - y = b\,, \quad y \geq 0\,.$

Zur Berechnung einer zulässigen Basislösung kann man z. B. Phase I aus (Abschn. 1.5) benutzen. Wegen $c \geq 0$ läßt sich das Problem (P) einfacher mit dem dualen Simplex–Verfahren lösen. Dazu betrachtet man das LGS

$$-Ax + y = -b\,, \quad y \geq 0\,.$$

Start–Tableau (vgl. (1.4.21))

Start: Nichtasis: $N := (1,\dots,n)\,, \quad c_N = c$
Basis: $B := (n+1,\dots,n+m)\,, \quad c_B = 0$
$r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N = -c \leq 0$, d. h.
Basislösung: $x_N = x = 0\,, x_B = y = -b$ ist dual zulässig (1.7.11)
$z_0 := 0\,, r_N := -c\,.$

Das Simplex–Tableau (1.4.19) lautet:

		x
z	0	$r_N = -c \leq 0$
y	$-b$	$-A$

Beispiel→(Bsp 1) (Lösung von (Bsp 1) auf S. 23):

Primärproblem (P)

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{minimiere} & 3\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & \geq & 5 \\ & 2\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\ \text{und} & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. & & & & & & \end{array}$$

Start–Tableau:

		x_1	x_2	x_3	
z	0	-3	-4	-5	tausche y_2 und x_1.
y_1	-5	-1	-2	-3	$\min\{-5,-6\} = -6 : p = 2$
y_2	-6	$\boxed{-2}$	-2	-1	$\leftarrow p = 2$
		$\uparrow s = 1:$			$\min\{\frac{-3}{-2}, \frac{-4}{-2}, \frac{-5}{-1}\} = \frac{3}{2}$

2. Tableau:

		y_2	x_2	x_3	
z	9	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{7}{2}$	tausche y_1 und x_2.
y_1	-2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-1}$	$-\frac{5}{2}$	$\leftarrow p = 1$
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\min\{-2\} = -2 : p = 1$
			$\uparrow s = 2:$		$\min\{3, 1, \frac{7}{5}\} = 1$

3. Tableau:

		y_2	y_1	x_3
z	11	-1	-1	-1
x_2	2	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$
x_1	1	-1	1	-2

Das Tableau ist optimal ($t_{10}, t_{20} \geq 0$);
die optimale Lösung ist: $x_1 = 1\,, x_2 = 2\,, x_3 = 0\,.$
Die optimale Lösung des dualen Problems ist:
??? $\lambda \underset{\circledast}{=\!=} = -(-1,-1)\,.$ = die zu $y_N = (y_2, y_1)$ gehörenden $-(t_{0j})\,.$

$\circledast$: Nur bei Ungleichungen! (Schlupfvariablen) Bei Gleichungen nicht mehr richtig.

Sensitivität und Schattenpreise

Das LP

(**1.7.13**) $\quad \min\{\, cx \mid Ax = b \text{ und } x \geq 0 \,\}$

habe die optimale Basis B mit der zugehörigen nichtentarteten Basislösung

$$x_B = A_B^{-1} b > 0\,.$$

Die optimale Lösung des Dualproblems ist dann (S 1.7.10–ii)

$$\lambda = c_B A_B^{-1}\,.$$

Bei kleinen Änderungen

$$b \longrightarrow b + \Delta_b \Longrightarrow \widetilde{x}_B = A_B^{-1}(b + \Delta_b) > 0$$

der rechten Seite in (1.7.13) bleibt die Basis B optimal ($\widetilde{x}_B$ bleibt > 0), da $x_B > 0$ nichtentartet ist. Zu $b + \Delta_b$ gehört also die optimale Lösung $\widetilde{x}_B = A_B^{-1}(b + \Delta_b) \implies$

$$\Delta_{x_B} := \widetilde{x}_B - x_B = A_B^{-1}(b + \Delta_b) - A_B^{-1} b = A_B^{-1}\Delta_b\,.$$

Die Zielfunktion $z(x) = c_B x_B$ ändert sich also um den Wert

(**1.7.14**) $\quad \Delta_z := z(\widetilde{x}_B) - z(x_B) = c_B\widetilde{x}_B - c_B x_B = c_B(\widetilde{x}_B - x_B) = c_B\Delta_{x_B} = c_B A_B^{-1}\Delta_b = \lambda\Delta_b$

Die duale Variable λ gibt daher die Sensitivität des optimalen Wertes bzgl. Änderungen der rechten Seite b an. Insbesondere folgt die sogenannte

Schattenpreisformel (**1.7.15**):

$$\frac{\partial z}{\partial b_j} = \lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Also hat λ_j die Bedeutung des **marginalen Preises** bzgl. b_j.

λ ein Maß für die Änderung der Zielfunktion. ???:
z normalerweise nicht differenzierbar, aber in den Punkten.

Die Dreiphasenmethode

Bei praktischen Problemen wird man im allgemeinen Fall auf Nebenbedingungen der Form

$$\begin{aligned} a_i x &= b_i\,, \quad i = 1, \ldots, k_1\,, \\ a_i x &\geq b_i\,, \quad i = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\,, \\ a_i x &\leq b_i\,, \quad i = k_1 + k_2 + 1, \ldots, m\,. \end{aligned}$$

geführt. Durch Multiplikation der Ungleichungen $a_i x \geq b_i$ mit -1 kann man sich dann auf ein

LP in der Form:

$$\begin{array}{rlcll} \min & z & = & cx & \\ \text{unter} & a_i x & = & b_i\,, & i = 1, \ldots, k\,, \\ & a_i x & \leq & b_i\,, & i = k+1, \ldots, m\,. \\ & x & \geq & 0\,. & \\ \textbf{Beachte:} & \text{nicht notwendig } b \geq 0\,. & & & \end{array}$$

beschränken.

Mit Schlupfvariablen $y \in \mathbb{R}^m$ ist das zugehörige LP

$$\begin{array}{rrcll} \min & z & = & cx & \\ \text{unter} & a_i x + y_i & = & b_i\,, & i = 1, \ldots, m \text{ und} \\ & x, y & \geq & 0\,. & \end{array}$$

Ausgehend von dem

(**Tableau**)

		x
z	z_0	r_N
y	b	A

besteht die Dreiphasenmethode aus den folgenden 3 Schritten:

Phase I: Mache die Basisvariablen $y_1, \ldots, y_k$ zu Nicht–Basis–Variablen.

Erläuterung: Es wird keine Hilfszielfunkion wie in (Abschn. 1.5) betrachtet. Ein einzelner Schritt besteht aus:
(1) Wähle Pivotspalte $1 \le s \le n$,
(2) Wähle Pivotzeile $1 \le p \le k$,
so daß y_p Basisvariable und $a_{ps} \neq 0$ ist.
(3) Führe Austauschschritt durch und streiche Spalte s.

Phase II: Führe duale Simplex–Schritte durch, solange bis eine optimal zulässige Basislösung $x_B \ge 0$ erreicht ist.

Erläuterung: Das Tableau am Ende der Phase I ist i. a. weder dual noch primal zulässig, d. h. weder $r_N \le 0$ noch $x_B \ge 0$ ist gewährleistet (1.7.11). Ein einzelner dualer Simplex–Schritt besteht aus:
(1) Wähle Pivotzeile p mit: $b_p = \min\limits_{1 \le i \le m} b_i$,
(2) Wähle Pivotspalte s mit: $\dfrac{r_s}{a_{ps}} = \min\limits_{j \in N}\{ \dfrac{r_j}{a_{pj}} \mid a_{pj} < 0 \}$,
Falls alle $a_{pj} \ge 0$, so gibt es keine zulässige Lösung.

Phase III: Führe das primale Simplex–Verfahren durch mit der in Phase II berechneten zulässigen Basislösung $x_B \ge 0$.

Beispiel (**Bsp 3**) (Böhm/Heinze S. 121): vgl. (Bsp 2) auf S. 16
Das Beispiel (Bsp 2) einer kostengünstigen Gasmischung wird dahingehend abgeändert, daß der Heizwert mindestens 3000 kcal/m^3 beträgt.
Dies führt auf das LP:

$$
\begin{array}{lrcrcrcll}
\min & z(x) = cx = (\,10 & & 30 & & 20\,)\, x = 10 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 & & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & 6 \cdot x_3 & \ge & 3 & \\
& 8 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & \le & 3 & \\
& x_1 & & & & & \le & 1 & \text{Anteil pro Gas} \\
& & & x_2 & & & \le & 1 & \text{zwischen 0 und 1} \\
& & & & & x_3 & \le & 1 & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & \text{Summe der Anteile} = 1 \\
\text{und} & x_1, x_2, x_3 \ge 0\,. & & & & & & &
\end{array}
$$

Phase I

Durch Multiplikation der 1. Zeile mit -1 ergibt sich:
Das Ausgangstableau:

		x_1	x_2	x_3	
z	0	-10	-30	-20	Tausche y_6
y_1	-3	-1	-3	-6	gegen x_1
y_2	3	8	1	2	und streiche
y_3	1	1	0	0	die 1. Spalte.
y_4	1	0	1	0	
y_5	1	0	0	1	$p = 6$
y_6	1	[1]	1	1	$\leftarrow$
		$s = 1$ $\uparrow$			

Phase II

2. Tabl.:

		x_2	x_3	
z	10	-20	-10	
y_1	-2	2	-5	
y_2	-5	-7	[-6]	$\leftarrow$
y_3	0	-1	-1	$p = 2$
y_4	1	1	0	Das Tableau ist dual
y_5	1	0	1	zulässig (1.7.11), also
x_1	1	1	1	entfällt die Phase III.
			$s = 2$ $\uparrow$	Tausche y_2 gegen x_3.

3. Tableau:

		x_2	y_2
z	$18\frac{1}{3}$	$-\frac{25}{3}$	$-\frac{5}{3}$
y_1	$\frac{13}{6}$	$*$	$\cdots$
x_3	$\frac{5}{6}$	$\vdots$	$\ddots$
y_3	$\frac{5}{6}$		
y_4	1		
y_5	$\frac{1}{6}$		
x_1	$\frac{1}{6}$		

Die Basislösung ist primal zulässig (1.7.11), also optimal,
$x_1 = \frac{1}{6}\,, x_2 = 0\,, x_3 = \frac{5}{6}\,, z = 18\frac{1}{3}\,.$

Beispiel (**Bsp 4**) (Böhm/Heinze S. 122):
Die Herstellung einer Brennstoffmischung aus 4 Brennstoffen mit maximalem Heizwert, führt auf das folgende LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & z(x) = cx = (\,7 & & 4 & & 5 & & 6\,)\, x = 7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 6\cdot x_4 & & \\
\text{unter} & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 1.2\cdot x_3 & + & 1.4\cdot x_4 & \leq & 4000 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 3000 \\
& & & & & & & & \leq & 500 \\
& x_1 & & & & & & & \geq & 500 \\
\text{und} & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\,. & & & & & & & &
\end{array}$$

Die Phase I entfällt, da keine Gleichungen vorliegen.

Phase II

Das Ausgangs–Tableau ist weder dual noch primal zulässig (1.7.11).
Das Ausgangstableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	7	4	5	6	Tausche y_4 gegen x_1.
y_1	4000	2	1	1.2	1.6	Das resultierende Tableau ist primal zulässig (1.7.11).
y_2	3000	1	1	1	1	
y_3	500	0	0	1	0	$p = 4$
y_4	500	$\boxed{-1}$	0	0	0	$\leftarrow$
		$s = 1\ \uparrow$				

Phase III

2. Tabl.:

		y_4	x_2	x_3	x_4	
z	-3500	7	4	5	6	
y_1	3000	$\boxed{2}$	1	1.2	1.6	$\leftarrow$
y_2	2500	1	1	1	1	$p = 1$
y_3	500	0	0	1	0	
x_1	500	-1	0	0	0	
		$s = 1\ \uparrow$				

$\cdots$

6. Tabl.:

		y_1	y_2	y_3	y_4
z	$-15333\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_4	$666\frac{2}{3}$	$*$	$\cdots$		
x_2	$1333\frac{1}{3}$	$\vdots$	$\ddots$		
x_3	500				
x_1	500				

Nach 4 primalen Simplex–Schritten erhält man das optimale 6. Tableau mit maximalem Wert: $\max z(x) = 15\,333\frac{1}{3}$.

Zusammenfassung: Simplex–Verfahren

I Primales Simplex–Verfahren: $\boxed{b \geq 0}$

I.1 Grundform

$$\min\{\, cx \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}, \quad A_B = I, \quad \text{mit (1.4.19)}$$

		x_N
	z_0	r_N
x_B	b	A_N

I.2 Zweiphasen–Methode

Vgl.: S. 15, S. 16, S. 18

$$\begin{array}{lll}
\text{minimiere} & cx & \\
\text{unter} & a_i x \geq b_i\,, & i = 1, \ldots, k\,, \\
 & a_i x = b_i\,, & i = k+1, \ldots, \ell\,, \\
 & a_i x \leq b_i\,, & i = \ell+1, \ldots, m\,, \\
\Rightarrow & a_i x - x_{n+i} + y_i = b_i\,, & i = 1, \ldots, k\,, \\
 & a_i x + y_i = b_i & i = k+1, \ldots, m\,, \\
\text{mit} & x_i \geq 0\,, & i = 1, \ldots, n+k\,, \\
 & y_i \geq 0\,, & i = 1, \ldots, m\,.
\end{array}$$

			$x_1 \ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots x_{n+k}$	
		$z_0 = \sum_{i=1}^{\ell} b_i$	$r_N = \sum_{i=1}^{\ell} a_{i1} \ldots \sum_{i=1}^{\ell} a_{in}$	$-1 \ldots -1$	
	y_1		a_1		
	$\vdots$		$\vdots$	$-I_{k\times k}$	„$\geq$“
$\rightarrow$(1.5.8)	y_k		a_k		
	y_{k+1}		a_{k+1}		
	$\vdots$	b	$\vdots$		„$=$“
	y_ℓ		a_ℓ	$0_{(m-k)\times k}$	
	$y_{\ell+1}$		$a_{\ell+1}$		
	$\vdots$		$\vdots$		„$\leq$“
	y_m		a_m		

Phase I:

$$\begin{array}{lcl}
\min & & \sum_{i=1}^{\ell} y_i\,, \\
r_j & = & = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell} a_{ij}\,; & j = 1, \ldots, n \\ -1 \quad\; ; & j = n+1, \ldots, n+k \end{cases} \\
c_B & = & (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\ell}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-\ell}) \in \mathbb{R}^m\,.
\end{array}$$

Phase II:

$$\begin{array}{lcl}
\min & & cx\,, \\
r_N & = & c_B A_N - c_N\,.
\end{array}$$

II Duales Simplex–Verfahren: $\boxed{r_N \le 0}$

II.1 Grundform

$\min\{\, cx \mid Ax = b, x \ge 0 \,\}, \quad A_B = I, \quad$ mit (??)

		x_N
	z_0	$r_N = c_B A_N - c_N$
x_B	b	A_N

II.2 Ungleichungen: $\boxed{c \ge 0}$

II.2.a
$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{Ax} & \ge & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{-Ax + y} & = & \boldsymbol{-b} \end{array}$$

		x_N
	z_0	$r_N = -c \le 0$
y	$-b$	$-A$

(P*) $\max\{\, \lambda b \mid \lambda A \le c, \lambda \ge 0 \,\}, \quad \lambda_j = -r_{k_j}$ unter y_j NBV

Primales Simplex–Verfahren für (P*):

		λ^T
	z_0	$r_N = b^T$
y	c^T	A^T

II.2.b
$$\begin{array}{lcll} \boldsymbol{a_i x} & \ge & \boldsymbol{b_i}, & \boldsymbol{i = 1, \ldots, k} \\ \boldsymbol{a_i x} & \le & \boldsymbol{b_i}, & \boldsymbol{i = k+1, \ldots, m} \end{array}$$

		x
	z_0	$r_N = -c$
	$-b_1$	$-a_1$
	$\vdots$	$\vdots$
	$-b_k$	$-a_k$
y	$-b_{k+1}$	$-a_{k+1}$
	$\vdots$	$\vdots$
	$-b_m$	$-a_m$

III „Gemischte“ Simplex–Verfahren, Dreiphasen–Methode

(Weder $b \ge 0$ noch $r_N \le 0$)

minimiere	cx		
unter	$a_i x = b_i,$	$i = 1, \ldots, k,$	
	$a_i x \le b_i,$	$i = k+1, \ldots, m.$	
$\Longrightarrow$	$a_i x + y_i = b_i,$	$i = 1, \ldots, m..$	

		x
	z_0	$r_N = -c$
y_1		$-a_1$
$\vdots$		$\vdots$
y_k		$-a_k$
y_{k+1}	b	$-a_{k+1}$
$\vdots$		$\vdots$
y_m		$-a_m$

Phase I: $y_1, \ldots, y_k$ werden zu Nicht–Basis–Variablen, d. h. erzeuge A_B^{-1}.

Phase II: Erzeuge eine primal zulässige Lösung $x_B \ge 0$ mit dualen Simplex–Schritten.

Phase III: Erzeuge duale Zulässigkeit (Optimalität) mit primalen Simplex–Schritten.

1.8 Parametrische lineare Programme

In praktischen Anwendungen der linearen Optimierung tritt oft der Fall ein, daß die Datem des Problems, d. h. die Koeffizienten in den Vektoren c, b bzw. in der Matrix A, nicht genau bekannt sind, sondern von Parametern abhängen. Man möchte daher Aussagen machen können über den Einfluß der Parameter auf den Lösungs–Vektor und den Zielfunktionswert.

Das von einem Parameter

$$t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$$

abhängige LP lautet:

(**1.8.1**) $\mathrm{P}(t)$: $\min\{\, c(t)x \mid A(t)x = b(t), x \geq 0 \,\}\,, \quad x \in \mathbb{R}n$

Die Funktionen

$$c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{1\times n}\,, b : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m\times 1}\,, A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m\times n}$$

seien affin linear bzgl. des Parameters $t \in \mathbb{R}^k$. Die zulässige Menge von (1.8.1) ist

$$K(t) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid A(t)x = b(t)\,, x \geq 0 \,\}$$

Definition (**1.8.2**):

Die Funktion $\omega : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$$t \mapsto \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{\, c(t)x \mid A(t)x = b(t)\,, x \geq 0 \,\}$$

heißt **Optimalwert–Funktion** von (1.8.1).

Dabei ist:

$\omega t = \infty \quad :\Longleftrightarrow K(t) = \{\,\}$

$\omega t = -\infty \quad :\Longleftrightarrow$ (1.8.1) besitzt keine endliche Lösung.

Man interessiert sich för folgende Fragestellungen:

(1) Man gebe den Verlauf der Optimalwertfunktion $\omega(t)$ und der zugehörigen Optimallösung explizit an.

(2) Man bestimme das Minimum von $\omega(t)$

Das zu einem festem Parameter $t_0 \in \mathbb{R}^k$ (meistens $t_0 = 0$) gehörende Problem kann als Ausgangsproblem aufgefaßt werden. Dann stellt (1.8.1) eine Störung des Ausgangsproblems dar.

Definition (**1.8.3**): Sei $t_0 \in \mathbb{R}^k$ fest gewählt und
sei $B = B(t_0)$ eine Basis bzw. $N = N(t_0)$ eine Nicht–Basis von $\mathrm{P}(t_0)$.

Bzgl. B, N sind die reduzierten Kosten

$$r_N(t) := c_B(t)A_B(t)^{-1}a_N(t) - c_N(t)$$

eine rationale Funktion bzgl. t .

Der zu B, N gehörende **kritische Bereich** ist def. durch:

$$\mathrm{KR}\,(B, N) := \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid A_B(t) \text{ regulär}, A_B(t)^{-1}b(t) \geq 0 \text{ und } r_N(t) \leq 0 \,\}$$

Im Falle $\mathrm{KR}\,(B, N) \neq \{\,\}$ ist $\forall\, t \in \mathrm{KR}\,(B, N)$ die Basislösung

$$x_B(t) = A_B(t)^{-1}b(t)\,, \quad x_N(t) = 0$$

optimal für das Problem $\mathrm{P}(t)$ mit optimalem Wert

$$\omega(t) = c_B(t)x_B(t) \in \mathbb{R}\,.$$

Daher ist $t \to \omega(t)$ eine ratioanale Funktion auf $\mathrm{KR}\,(B, N)$ insbesondere also stetig.

Außerdem gilt für

$$t^* \in \mathrm{KR}\,(B, N) \cap \mathrm{KR}\,(\overline{B}, \overline{N})$$

mit $B \neq \overline{B}$

$$\omega(t^*-) = \omega(t^*+) = \omega(t^*)\,.$$

Satz (1.8.5):
Die Funktion $\omega(\cdot)$ ist stetig auf

$$D := \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid \omega(t) \in \mathbb{R} \,\}\,.$$

Der Bereich D ist zusammengesetzt aus kritischen Bereichen $\mathrm{KR}\,(B,N)$. Daher bestimmt man die kritischen Bereiche in den folgenden drei Fällen:

(1) Parameter in der Zielfunktion,

(2) Parameter im Begrenzungsvektor,

(2) Parameter in der Koeffizientenmatrix.

Linerare Parameter in der Zielfunktion

(**1.8.6**): Wir betrachten Probleme der Form:

$$\min\{\, c(t)x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}\,,$$

mit

$$c(t) = c + t_1 d_1 + \ldots + t_k d_k\,,\ d_i \in \mathbb{R}^n\,,\ t_i \in \mathbb{R}\,.$$

Der Vektor der reduzierten Kosten

$$r_N(t) = c_B(t) A_B^{-1} A_N - c_N(t)$$

ist affin linear bzgl. t. Der kritische Bereich (D 1.8.3–ii) reduziert sich hier auf

$$\mathrm{KR}\,(B,N) = \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid r_N(t) \leq 0 \,\}$$

und ist dahe ein abgeschlossenes konvexes Polyeder. Für $k = 1$ ist $\mathrm{KR}\,(B,N)$ ein abgeschlossenes Intervall.

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ konvex.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, t^1, t^2 \in D\ \forall\, 0 \leq \alpha \leq 1$:
$f(\alpha t^1 + (1-\alpha)t^2) \leq \alpha f(t^1) + (1-\alpha) f(t^2)$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **konkav** $:\Longleftrightarrow$ $-f$ ist konvex.
d. h. $\forall\, t^1, t^2 \in D\ \forall\, 0 \leq \alpha \leq 1$:
$f(\alpha t^1 + (1-\alpha)t^2) \geq \alpha f(t^1) + (1-\alpha) f(t^2)$

siehe Abbildung auf Seite §8.4.

Satz (1.8.7):
$D := \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid \omega(t) \in \mathbb{R} \,\}$ ist konvex und
die Optimalwertfunktion $\omega : D \to \mathbb{R}$ ist konkav.

Nun beschränken wir uns auf den Fall $k = 1$ in Problem (1.8.6).

$$c(t) = c + td\,,\quad c, d \in \mathbb{R}^n\,,\quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Idee zur Lösung des Problems 1.8.6 $\forall\, t \in \mathbb{R}$

Starte mit einem festen Parameter $t_0 \in \mathbb{R}$, etwa $t_0 = 0$, und

bestimme eine Optimallösung $x(0)$ zur Basis B.

Berechne den zugehörigen kritischen Bereich $\mathrm{KR}\,(0) = \mathrm{KR}\,(B,N) = [t_{-1}, t_1]$.

Sind die Endpunkte dieses Intervalls endlich, etwa $t_{-1} \in \mathbb{R}$, so gilt für mindestens ein $s \in N$

$$r_s(t_{-1}) = 0\,.$$

siehe Abbildung auf Seite §8.8.

1. Fall Gilt für die s-te Spalte $\widetilde{a}_s \leq 0$,
so gibt es keine Lösung von für alle $t < t_{-1}$. (Beweis: Übung).

2. Fall Es gelte für das Element $\widetilde{a}_{is} \leq 0$ für mindestens ein i. Führe dann für $t = t_{-1}$ eine Pivotoperation mit Pivotspalte s aus. Die neue Lösung sei $x(t_{-1})$ zur Basis $\overline{B}, \overline{N}$. Bestimme dann den kritischen Bereich

$$\mathrm{KR}\,(t_{-1}) = \mathrm{KR}\,(\overline{B}, \overline{N})\,.$$

Auf diese Weise bestimmt man eine Folge von Intervallen $[t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{Z}$.

Beachte, daß die Lösungen in den Endpunkten t_k i. a. nicht eindeutig sind, sondern eine Kante der zulässigen Menge K bilden.

Beispiel (1.8.8):

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{minimiere} & (2+t)\cdot x_1 & + & (3-t)\cdot x_2 & + & t & \\ \text{unter} & -x_1 & + & 2\cdot x_2 & \leq & 4 & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \\ & 2\cdot x_1 & - & x_2 & \leq & 8 & \\ \text{und} & x_1, x_2 \geq 0\,. & & & & & \end{array}$$

Graphische Lösung:

siehe Abbildung auf Seite §8.10.

Die Niveaulinien der Zielfunktion sind parallel zu den Kanten der zulässigen Menge K für:

$t = -7$: Kante zwischen $(0,2)$ und $(2,3)$,
$t = \frac{1}{2}$: Kante zwischen $(2,3)$ und $(\frac{13}{3}, \frac{2}{3})$,
$t = 8$: Kante zwischen $(\frac{13}{3}, \frac{2}{3})$ und $(4,0)$,

Die übrigen Lösungen sind:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} -\infty & < & t & \leq & -7- & : & x_1 & = & 0, & x_2 & = & 2, & \omega(t) & = & 6 - t\,, \\ -7+ & < & t & \leq & \frac{1}{2}- & : & x_1 & = & 2, & x_2 & = & 3, & \omega(t) & = & 13\,, \\ \frac{1}{2} & < & t & \leq & 8- & : & x_1 & = & \frac{13}{3}, & x_2 & = & \frac{2}{3}, & \omega(t) & = & \frac{32}{3} + \frac{14}{3}t\,, \\ 8 & < & t & < & \infty & : & x_1 & = & 4, & x_2 & = & 0, & \omega(t) & = & 8 + 5t\,. \end{array}$$

Die Optimalwertfunktion ist konvex
(wegen Maximierung (konkav beim Minimieren) und (S 1.8.7)).

siehe Abbildung auf Seite §8.11.

$\omega(t)$ ex für $t \neq t_i$
subgradient: $\partial\omega(t_i) = [\omega'(t_i^-), \omega'(t_i^+)] \in$ Hyperebene

Numerische Lösung:

$\max z = (2+t)x_1 + (3-t)x_2$:

Start–Tableau:

		x_1	x_2	
z	0	$2+t$	$3-t$	
y_1	4	-1	$\boxed{-2}$	$\leftarrow$
y_2	5	1	1	
y_3	8	2	-1	
		$s = 2:\ \uparrow$		

$N = (1,2)$:
Wegen $r_1(t) = c_1(t) = 2+t\,, r_2(t) = c_2(t) = 3-t$
ist das Start–Tableau für kein $t \in \mathbb{R}$ optimal.
Wähle $s = 2$.

1. Tableau:

		x_1	y_1	
z	$2t-6$	$\frac{1}{2}(7+t)$	$\frac{1}{2}(t-3)$	
x_2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
y_2	3	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$\leftarrow$
y_3	10	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
		$\uparrow$		

$N = (1,4)$: $r_1(t) = \frac{1}{2}(t+7)\,, r_2(t) = \frac{1}{2}(t-3)$.
$r_N \leq 0 \iff t \leq -7$.
$t \leq -7$: $B = (2,4,5)\,, x_1 = 0, x_2 = 2$ optimal,
$\mathrm{KR}\,(-7) =]-\infty, -7]$.
Wähle $s = 1$ wegen $r_1(-7) = 0$.

2. Tableau:

		y_2	y_1	
z	$2t-13$	$\frac{1}{3}(7+t)$	$\frac{1}{3}(2t-1)$	
x_2	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
x_1	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
y_3	7	-1	$\boxed{1}$	$\leftarrow$
		$s = 2:\ \uparrow$		

$N = (4,3)$:
$r_4(t) = -\frac{1}{3}(t+7)\,, r_3(t) = \frac{1}{3}(2t-1)$.
$r_N \leq 0 \iff -7 \leq t \leq \frac{1}{2}$.
Für $t \in [-7, \frac{1}{2}]$:
$B = (2,1,5)\,, x_1 = 2, x_2 = 3$ optimal,
$\mathrm{KR}\,(-7+0) = [-7, \frac{1}{2}]$.

Beachte: Wegen $r_1(-7) = 0$ für $N = (1,4)$ bzw. $r_4(-7) = 0$ für $N = (4,3)$ ist die optimale Lösung nicht eindeutig (vgl.(1.4.17)); alle optimalen Lösungen liegen auf der Kante $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $0 \le \alpha \le 1$.

Wähle $s = 3$ wegen $r_3(\frac{1}{2}) = 0$.

3. Tableau:

		y_2	y_3	
z	$-\frac{11}{3}t - \frac{32}{3}$	$\frac{1}{3}(t-8)$	$\frac{1}{3}(-2t+1)$	
x_2	$\frac{2}{3}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$\leftarrow$
x_1	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
y_1	7	-1	1	
		$\uparrow$		

$N = (4,5)$:
$r_4(t) = \frac{1}{3}(t-8)$, $r_5(t) = -\frac{1}{3}(-2t+1)$.
$r_N \le 0 \iff \frac{1}{2} \le t \le 8$.
Für $t \in [\frac{1}{2}, 8]$:
$B = (2,1,3)$, $x_1 = \frac{13}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$ optimal,
$\mathrm{KR}\,(\frac{1}{2}+0) = [\frac{1}{2}, 8]$.
Wähle $s = 4$ wegen $r_4(8) = 0$.

4. Tableau:

		y_2	y_3
z	$-4t-8$	$-\frac{1}{2}(t-8)$	$-\frac{1}{2}t - \frac{7}{3}$
x_2	1	$*$	$\cdots$
x_1	4	$\vdots$	$\ddots$
y_1	8		
		$\uparrow$	

$N = (2,5)$: $r_2(t) = -\frac{1}{2}(t-8)$, $r_5(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{3}$.
$r_N \le 0 \iff 8 \le t \le \infty$.
Für $t \in [8, \infty[$:
$B = (4,1,3)$, $x_1 = 4, x_2 = 0$ optimal,
$\mathrm{KR}\,(8+0) = [8, \infty[$.
Wähle $s = 4$ wegen $r_4(8) = 0$.

Linerare Parameter im Begrenzungsvektor

(**1.8.9**): Wir betrachten Probleme der Form:

$$\min\{\, cx \mid Ax = b(t), x \ge 0 \,\} ,$$

mit

$$b(t) = b + t_1 b^1 + \ldots + t_k b^k \,, b^i \in \mathbb{R}^n \,, t_i \in \mathbb{R} .$$

Das LP (1.8.9) ist dual zu einem geeignetem LP der Form (1.8.6).

Für eine Basislösung x zur Basus B ist der kritische Bereich (D 1.8.3–ii)

$$\mathrm{KR}\,(B,N) = \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid A_B^{-1} b(t) \ge 0 \,, r_N(t) \le 0 \,\} .$$

Nun ist

$$\widetilde{b}(t) := A_B^{-1} b(t)$$

affin linear bzgl. t und $\mathrm{KR}\,(B,N)$ ist daher ein abgeschlossenes, konvexes Polytop. Für $k = 1$ ist der kritische Bereich $\mathrm{KR}\,(B,N)$ ein Intervall.

Durch Dualisierung von (S 1.8.7) folgt:

Satz (**1.8.10**):

$D := \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid \omega(t) \in \mathbb{R} \,\}$ ist konvex und
die Optimalwertfunktion $\omega : D \to \mathbb{R}$ ist konvex und stetig.

Wir beschränken uns nun auf den Fall $k = 1$ in Problem (1.8.9).
Die konvexe Menge D in (S 1.8.10) setz sich dann aus Intervallen $\mathrm{KR}\,(B,N)$ zusammen.

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und

sei x eine optimale Lösung zur Basis B des Problems (1.8.9) mit $t = t_0$.

Bestimme den zugehörigen kritischen Bereich

$$\mathrm{KR}\,(0) = \mathrm{KR}\,(B,N) = \{\, t \in \mathbb{R}^k \mid \widetilde{b}(t) \ge 0 \,\} = [t_{-1}, t_1] .$$

Mindestens einer der Werte t_{-1}, t_1 ist endlich, sonst wäre $b_1 = 0$!
Sei etwa $t_1 \in \mathbb{R}$. Für einen Index $p \in \{\, 1, \ldots, m \,\}$ ist dann

$$\widetilde{b}(t_1) = 0 .$$

Die Zeile p wird dann als Pivotzeile für das duale Simplex–Verfahren genommen.

1. Fall Gilt für die p-te Zeile von A_B^{-1} : $\tilde{a}_p \leq 0$,
so gibt es $\forall\, t > t_1$ keine Lösung.

2. Fall Es gelte für das Element $\tilde{a}_{pj} < 0$ für mindestens ein j . Wähle s gemäß

$$\frac{r_s}{\tilde{a}_{ps}} = \min_{j=1,\ldots,n} \{ \frac{r_j}{\tilde{a}pj} \mid \tilde{a}pj < 0 \} .$$

und führe dann eine Pivotoperation mit Pivotelement $\tilde{a}_{ps}$ durch.
Bestimme für die neue Lösung den kritischen Bereich $\mathrm{KR}\,(\overline{B}, \overline{N})$, usw..

Beispiel (**1.8.11**): minimiere $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$
unter $x_1 + x_2 \leq 1 + t$
$2 \cdot x_1 - x_2 \leq 4 - t$
und $x_1, x_2 \geq 0$.

Offenbar existieren keine Lösungen für $t \leq -1$. Das Tableau:

		x_1	x_2	
z	0	-2	-3	$p = 2$,
y_1	$1+t$	1	1	$\tilde{a}_{22} = -1$
y_2	$4-t$	2	$\boxed{-1}$	$\leftarrow$
		$s = 2:\ \uparrow$		

zeigt, daß die $B = (3, 4)$ optimal ist für $b(t) \geq 0$,
d. h. für $-1 \leq t \leq 4$.
Der kritische Bereich ist also
$\mathrm{KR}\,(B, N) = [-1, 4] = [t_{-1}, t_1]$.
Für $t = 4$ ist $b_2(4) = 0$ und das neue Tableau lautet

2. Tableau:

		x_1	y_2
z	$2t-8$	-7	-2
y_1	5	3	1
x_2	$t-4$	-2	-1

Mit $B = (3, 2)$ und $N = (1, 4)$ gilt: $\mathrm{KR}\,(\overline{B}, \overline{N}) = [4, \infty[$.

Lösung für $t \leq -1$:

					$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
-1	$\leq$	t	$\leq$	4	0	0	0
-4	$\leq$	t	$\leq$	∞	0	$t-4$	$2t-8$

Linerare Parameter in der Koeffizientenmatrix

(**1.8.12**): Das Verhalten von $\omega(t)$ für das Problem:

$$\min\{ cx \mid Ax = b(t), x \geq 0 \} ,$$

soll an einem Beispiel aufgezeigt werden. Ein allgemeines Verfahren zur Lösung von (1.8.12) wird z. B. in DINKELBACH, Kap. 5.4, beschrieben.

Beispiel (**1.8.13**): minimiere $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2$
unter $x_1 + (1+t) \cdot x_2 \leq 1$
$2 \cdot x_1 - (1+t) \cdot x_2 \leq 4$
und $x_1, x_2 \geq 0$.

Für $t_0 = 0$ lautet die optimale Lösung: $x_1 = 0, x_2 = 1$ mit $B = (2, 4), N = (1, 3)$.
Man berechnet $\mathrm{KR}\,(B, N) =]-1, \infty[$ mit der zugehörigen optimalen Lösung
$x_1 = 0, \quad x_2 = \dfrac{1}{1+t}, \quad \omega(t) = -\dfrac{2}{1+t}$ für $t \in]-1, \infty[$

Für $t = -1$ erhält man das Problem:

$$\min\{ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 \mid x_1 \leq 1, 2 \cdot x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$$

welches keine endliche Lösung besitzt; d. h. $\omega(-1) = -\infty$.

Für $-\infty < t < -1$: berechnet man die optimale Lösung
$x_1 = 0, \quad x_2 = -\dfrac{4}{1+t}, \quad \omega(t) = \dfrac{8}{1+t}$

siehe Abbildung auf Seite §8.19.

Kapitel 2

Konvexe Optimierung

2.9 Konvexe Funktionen

2.10 Konvexe Optimierungsprobleme: Der Sattelpunktsatz von Kuhn/Tucker

2.11 Dualität und Sensitivität

2.13 Der Algorithmus von Goldfarb/Idnani für quadratische Optimierungsprobleme