Vorlesung Optimierung I WS 1998/99

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
- 1.1 Allgemeines und Historie . . . 1
- 1.2 Problemstellung . . . 1
- 1.3 Anwendungsbeispiele . . . 2
  - 1.3.1 Ein Produktionsproblem . . . 2
  - 1.3.2 Ein Fütterungsproblem . . . 3
  - 1.3.3 Ein Transportproblem . . . 4

2 Lineare Optimierung **6**
- 2.1 Der Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen . . . 6
- 2.2 Konvexe Kegel . . . 7
- 2.3 Das Lemma von Farkas und der Dualitätsssatz . . . 8
- 2.4 Der Simplexalgorithmus . . . 13
- 2.5 Das Simplextableau . . . 16
- 2.6 Der revidierte Simplexalgorithmus . . . 19
- 2.7 Pivotwahl und Antizykelalgorithmen . . . 20
- 2.8 Der duale Simplexalgorithmus . . . 22

3 Ganzzahlige lineare Optimierung **24**
- 3.1 Einführung . . . 24
- 3.2 Ein Schnittebenenverfahren von Gomory . . . 26

4 Konvexe Optimierung **31**
- 4.1 Einleitung . . . 31
- 4.2 Konvexe Funktionen . . . 31
- 4.3 Trennungssätze . . . 34
- 4.4 Der Sattelpunktsatz von Kuhn–Tucker . . . 35
- 4.5 Lokale Kuhn–Tucker–Bedingungen . . . 37
- 4.6 Quadratische Optimierung . . . 40
- 4.7 Das Verfahren von Wolfe . . . 42
- 4.8 Ein Verfahren zulässiger Richtungen . . . 47

4.9 Ein Schnittebenenverfahren 50
4.10 Ganzzahlige konvexe Optimierung 52

5 Komplexität und das Ellipsoid–Verfahren **54**
5.1 Zeitschranken 54
5.2 Der Simplexalgorithmus ist nicht polynomial 55
5.3 Komplexität von LP, LI und LSI 57
5.4 Ellipsoide 59
5.5 Das Ellipsoidverfahren 63

Literatur

[1] Burkhard, R.E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung, Springer, Wien-New York 1972.

[2] Collatz, L., Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben, Springer, Berlin-New York 1971.

[3] Dantzig, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, Springer, Berlin-New York 1966.

[4] Gaede, K.W., Heinhold,J.: Grundzüge des Operations Research, Carl-Hanser-Verlag, München-Wien 1976.

[5] Gass, S.I.: Linear Programming, Methods and Applications, Mac Graw-Hill, New York 1958.

[6] Grötschel, M., Lovasz, L., Schrijver, A.: Geometric algorithms and Combinatorial Optimization, Springer, Berlin-New York 1988.

[7] Hadley, G.: Linear Programming, Addison Wesley Publ. Comp., London 1972.

[8] Hu, T.Chiang: Ganzzahlige Programmierung und Netzwerkflüsse, Oldenburg, München 1972.

[9] Kall, P.: Mathematische Methoden des Operations Research, Teubner, Stuttgart 1976.

[10] Marti, J.: Konvexe Analysis, Birkhäuser, Basel 1977.

[11] Neumann, K.: Operations-Research-Verfahren I-III, Carl-Hanser-Verlag, München-Wien 1975.

[12] Nozicka, F.: Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis, Akadem. Verl., Berlin 1988.

[13] Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K.: Combinatorial Optimization, Prentice-Hall Inc., New Jerssey 1982.

[14] Roberts, A.W., Verberg, D.E.: Convex Functions, Academic Press, New York 1973.

[15] Rockafellar, R.: Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton 1972.

[16] Schrijver, A.: Theory of Linear and Integer Programming, Wiley, Chichester 1986.

[17] Stoer, Witzgall: Convexity and Optimization in finite dimensions, Springer 1970.

[18] Suchowitzki, S.I., Andejewa, L.I.: Lineare und konvexe Optimierung, Oldenburg, München 1969.

[19] van Tiel, J.: Convex Analysis, Wiley, Chichester 1984.

[20] Valentine, F.A.: Konvexe Mengen, Bibliograph. Inst., Mannheim 1968.

[21] Vogel, W.: Lineares Optimieren, Akad. Verlagsges., Leipzig 1967.

Index

Allgemeines Konvexes Optimierungsproblem, 35
Antizykelregel
    Blandsche, 15
    Lexikographische, 21

Basis einer Ecke, 13
Basislösung, 13
Beispiel von Klee–Minty, 57
bfs, 13
Blandsche Antizykelregel, 15
bs, 13

Der Simplexalgorithmus, 13
dualer Simplexalgorithmus, 22
duales Problem, 12
Dualitätssatz der linearen Optimierung, 9

Ecke, 13
Einschließungssatz, 41
Ellipsoid, 59
Ellipsoidverfahren, 64
endlich erzeugter Kegel, 7
exponentieller Algorithmus, 55

Farkas
    Lemma von, 8
Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen, 6
Funktion
    konkave, 31
    konvexe, 31
    streng konvexe, 31

Ganzzahlige konvexe Optimierung, 52
Ganzzahlige lineare Optimierung, 24
Gebrochen–dualer Algorithmus, 27
global optimale Lösung, 1
Gomory
    Schnittebenenverfahren von, 26
Gomory–Schnitt, 26

Hülle
    lineare, 6
    positive, 7
Hessesche Matrix, 33

Jensensche Ungleichung, 32

kanonische Form von LP, 11
Kegel
    endlich erzeugter, 7
    konvexer, 7
    polyedrischer, 7
Kelley
    Schnittebenenverfahren von, 50
Kelley–Schnitt, 50
Klee–Minty
    Beispiel von, 57
Komplementäre Schlupfbedingungen, 12
Komplexität eines Verfahrens, 55
konkave Funktion, 31
Konvexe
    Funktion, 31
    Menge, 7
Konvexer Kegel, 7
Konvexes Optimierungsproblem, 35
Kuhn–Tucker
    Bedingungen, lokale, 37
    Satz von, 36

Löwner–John–Ellipsoid, 62
Lagrange–Multiplikatoren, 35
Lagrangefunktion, 35
Landau–Symbole, 54
Lemma von Farkas, 8
lexikographisch negativ, 21
lexikographisch positiv, 21
Lexikographische Antizykelregel, 21
lexikographische Antizykelregel
    für den dualen Simplexalgorithmus, 23
lineare Hülle, 6
Lineare Optimierungsaufgabe, 2
Lineare strenge Ungleichungen, 58
Lineare Ungleichungen, 58
Linearkombination, 6
Lokale Kuhn–Tucker–Bedingungen, 37

Menge
    Konvexe, 7
    polare, 7

Optimierungsaufgabe, 1
Optimierungsproblem, 1

Phase I–Problem, 15
Pivotelement, 18
Pivotschritt, 18
Pivotspalte, 18
Pivotzeile, 18
polare Menge, 7
Polyeder, 9
polyedrischer Kegel, 7
polynomialer Algorithmus, 55
Polytop, 9
positiv definite Matrix, 32
positiv semidefinite Matrix, 32
positive Hülle, 7
primales Problem, 12
Problem des Handlungsreisenden, 2

Quadratische Optimierungsproblem, 40

relative Kosten, 14
Relaxation eines ILP, 25
revidierter Simplexalgorithmus, 19

Sattelpunkt, 36
Sattelpunktsatz, 36
Satz
    von Kuhn–Tucker, 36
Schlupfbedingungen
    Komplementäre, 12
Schnittebenenverfahren, 50
Schnittebenenverfahren von Gomory, 26
Simplexalgorithmus
    dualer, 22
    revidierter, 19
Simplextableau, 16
Slater–Bedingung, 37
Standardform von LP, 11
streng konvexe Funktion, 31

Transformationsgesetz, 17
Traveling SalesmanProblem, 2
Trennebene, 34
Trennungssatz, 35

Ungleichung
    von Jensen, 32

Verfahren
    der Schnittebenenen, 50
    der zulässigen Richtungen, 47
    von Wolfe, 42

Wachstumsrate, 54
Wolfe
    Verfahren von, 42

Zentralschnitt, 60
zulässige Basislösung, 13
zulässige Richtung, 47
zulässiger Bereich, 12
zulässiger Punkt, 12
Zwei–Phasen–Simplexalgorithmus, 18
Zykel, 15

1 Einführung

1.1 Allgemeines und Historie

Probleme der linearen und kombinatorischen Optimierung sind in den 40er Jahren aus Anforderungen der Wirtschaft und militärischen Logistik im stärkeren Umfang behandelt worden. Die ersten Beispiele reichen weit in die klassische Mathematik zurück. Als eigenständige Disziplin wird das Optimieren mit Georg Dantzigs Entdeckung des Simplex–Algorithmus 1947 geschaffen. Etwa gleichzeitig entwickelte von Neumann das Dualitätsprinzip. Weitere wichtige Namen der Gründerzeit sind Motzkin, Leontief, Kantorowicz, Gale, Kuhn, Tucker, Gomory, Klee, ... Die schnelle Entwicklung des Gebietes liegt an der besonders engen Verflechtung von Theorie und Anwendung, vor allem aber direkter und vielfältiger Anwendung. Mathematische Verbesserungen, die effizientere Verfahren versprachen, gingen durch die Weltpresse, so z. B. Khachians Ellipsoid–Methode (1979) oder der Algorithmus von Karmarkar (1984). Optimierungsprobleme gab es schon in der Geometrie der alten Griechen, vor allem aber in der mathematischen Physik (Prinzipien von Newton, Euler, Lagrange, d'Alembert, Gauß, etc.). Aber diese Methoden der Analysis paßten nicht auf die Probleme der Ökonomie. Das führte auf die Methoden der linearen, konvexen, diskreten und kombinatorischen Optimierung, deren mathematische Grundlagen vor allem aus der Linearen Algebra und der Konvexgeometrie, aber auch der Kombinatorik, Graphentheorie und Geometrie der Zahlen kommen. Insofern ist das Optimieren eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der genannten mathematischen Disziplinen. Außerdem ist für eine effektive und kostengünstige Anwendung der verschiedenen Methoden die Frage nach schnellen und effektiven Algorithmen entscheidend, d. h. die Verbindung zur Informatik, Computational Geometry und Computer Algebra.

1.2 Problemstellung

Das allgemeine Optimierungsproblem läßt sich folgendermaßen beschreiben. Sei F eine Menge, M eine geordnete Menge (z. B. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$) und $c : F \to M$ eine Abbildung. Gesucht wird ein $x_0 \in F$ mit $c(x_0) \leq c(x)$ für alle $x \in F$.
In dieser Allgemeinheit ist das Problem praktisch unangreifbar. Darum wendet man sich bestimmten Klassen von Problemen zu.

Definition 1.1 *Ein Beispiel einer* Optimierungsaufgabe *ist ein Paar* (F, c) *mit* F Menge der zulässigen Punkte $c : F \to M$ Kostenfunktion. *Gesucht ist* $x \in F$ *mit*

$$c(x) \leq c(y), \text{ für alle } y \in F.$$

x *heißt* global optimale Lösung *des gegebenen Beispiels oder, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, einfach optimale Lösung.*

Definition 1.2 *Ein* Optimierungsproblem *ist eine Menge von Beispielen eines Optimierungsproblems.*

Ein wichtiger Spezialfall ist $F \subset \mathbb{R}^n, \quad M = \mathbb{R}$, wobei F in der Form beschrieben werden kann $F = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m, h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p\}$.

Mit diesem Problem befaßt sich die *nichtlineare Optimierung*, die unter passenden Voraussetzungen an c, die g_i und h_j Bedingungen für ein Minimum angibt, sowie iterative Algorithmen, die es gestatten, das Minimum zu berechnen. Sind c und alle g_i, h_j konvex (linear) so sprechen wir von *konvexer (linearer) Optimierung.*

Beispiel 1.1 (Lineare Optimierungsaufgabe, Linear programming, LP) *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ *und* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Ein Beispiel von LP ist definiert durch*

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}, \quad c : x \mapsto c^\top x.$$

Ist die Menge F endlich, so sprechen wir von *kombinatorischer Optimierung.* Das Problem ist im Prinzip trivial in dem Sinne, daß wir als Lösungsmöglichkeit haben, alle Punkte aus F zu untersuchen und dann den passenden auszuwählen. Nur hat F im allgemeinen so viele Punkte, daß man sich um effizientere Algorithmen bemühen muß. Dabei stellt sich natürlich das Problem zu sagen, was ein effizienter Algorithmus ist. Auf dieses Problem werden wir später zurückkommen.

Beispiel 1.2 (Traveling SalesmanProblem (TSP)) *In einem Beispiel des TSP ist der Abstand zwischen jedem Paar von n Städten gegeben. Gesucht ist eine Rundreise minimaler Gesamtlänge. F ist hier die Menge von zyklischen Permutationen. Die Kostenfunktion c ist durch eine* $n \times n$*–Matrix* (a_{ij}) *bestimmt mit* $c(i_1, \ldots, i_n) = a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \ldots + a_{i_{n-1} i_n} + a_{i_n i_1}$.

Prinzipiell ist LP ein stetiges Optimierungsproblem, es kann aber auch als kombinatorisches Problem angesehen werden. Dazu zunächst nur ein Beispiel, gegeben durch $m = 1, n = 3$ und $A = (1, 1, 1)$, $b = (2)$. F ist der Durchschnitt einer Ebene mit dem ersten Oktanten des $\mathbb{R}^3$, also ein Dreieck. Gesucht wird das Minimum von $c^\top x$. Dies wird offensichtlich stets an einer Ecke angenommen. Damit genügt die Bestimmung von $c^T x$ für jede Ecke. Für größere m, n kann man entsprechend vorgehen. Die Aufgabe wird dann schnell sehr groß, bleibt aber endlich.

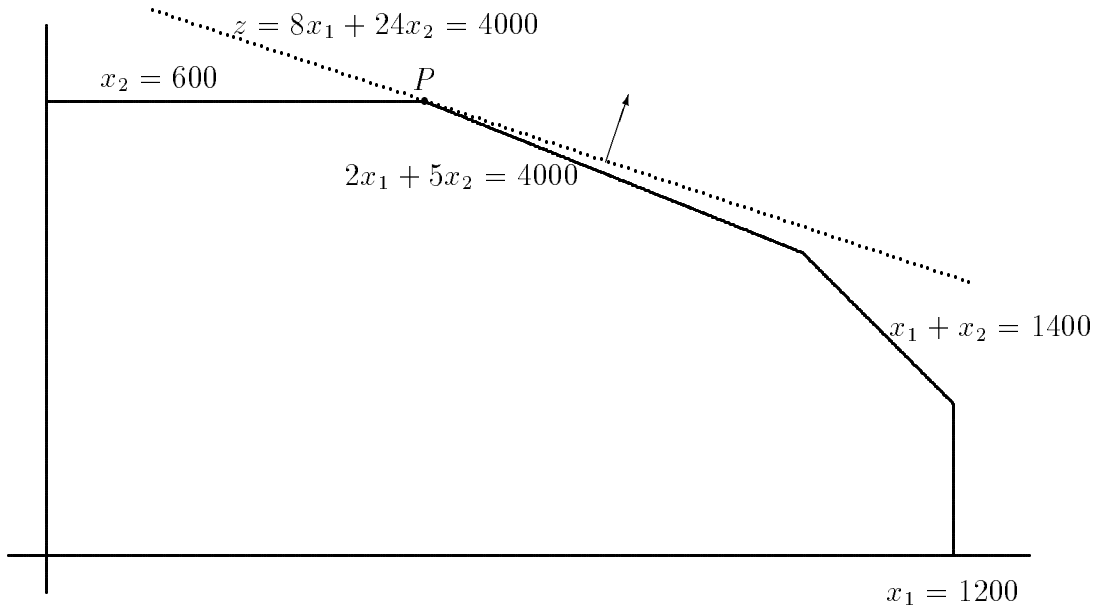
1.3 Anwendungsbeispiele

1.3.1 Ein Produktionsproblem

In einem Textilbetrieb werden 2 Tuche gewebt und anschließend gefärbt.

	Aufwand in Stunden		Gewinn	Kapazitäten an
	Weben	Färben	pro Einheit	Tucheinheiten
Tuch 1	2	1	8	1200
Tuch 2	5	1	24	600
Kapazität in Std	4000	1400	–	–

Sei x_i die Einheiten an Tuch i, $i = 1, 2$. Dann ergeben sich die Restriktionen
$x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 1200$, $x_2 \leq 600$, $2x_1 + 5x_2 \leq 4000$, $x_1 + x_2 \leq 1400$.
Die Zielfunktion $z = 8x_1 + 24x_2$ ist zu maximieren.
Da nur zwei Variablen vorhanden sind, ist eine graphische Darstellung möglich.



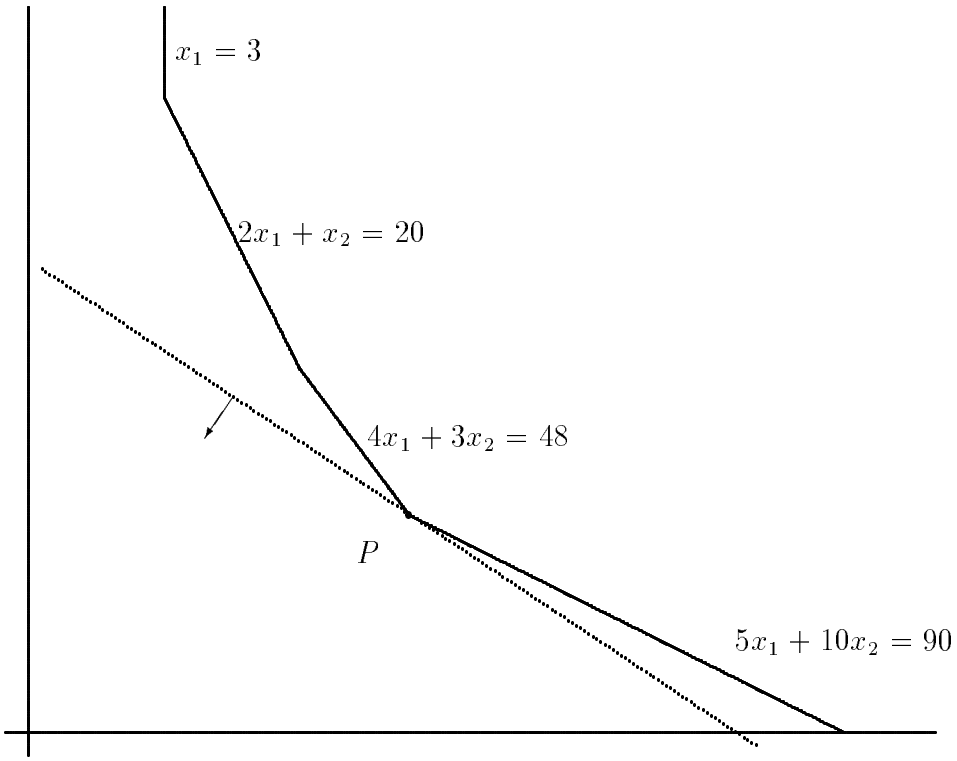
Der Bereich der zulässigen (feasible) Vektoren (Punkte, Lösungen) ist ein konvexes Sechseck. z = const ist eine Parallelenschar, der z–Wert wächst in $\rightarrow$ Richtung. Die optimale Lösung ist $P = (500, 600)$. Der maximale Gewinn ist $8 \cdot 500 + 24 \cdot 600 = 18400$. Die Kapazität der Weberei (4000) wird voll ausgenutzt, ebenso das Material (600) für Tuch 2. Dagegen wird die Kapazität der Weberei nicht voll ausgenutzt, ebenso das Material für Tuch 1. Ein weiteres Problem bestände darin, ungenutzte Kapazitäten (Materialien) zu minimieren.

1.3.2 Ein Fütterungsproblem

In einer Hühnerfarm werden 2 Futtersorten F_1, F_2 mit 4 Nährstoffen $N_1, \ldots, N_4$ verwendet. Folgende Daten liegen zugrunde.

	Gehalt in Einheiten		Bedarf pro Huhn
	F_1	F_2	und Zeiteinheit
N_1	5	10	90
N_2	4	3	48
N_3	0.5	0	1.5
N_4	2	1	20
Kosten pro Einheit	2	3	

Ist x_i die Anzahl der Einheiten von Futter F_i, $i = 1, 2$, die ein Huhn pro Zeiteinheit bekommt, so ergeben sich die Restriktionen
$5x_1 + 10x_2 \geq 90, \quad 4x_1 + 3x_2 \geq 48, \quad 0.5x_1 \geq 1.5, \quad 2x_1 + x_2 \geq 20, \quad x_1, x_2 \geq 0.$
Die Zielfunktion $z = 2x_1 + 3x_2$ (die Kosten) ist zu minimieren.



Der Bereich der zulässigen Lösungen ist unbeschränkt (polyedrisch). Aber es existiert ein Minimum, da z in $\rightarrow$ Richtung abnimmt. Die optimale Lösung ist $P = (8.4, 4.8)$ mit minimalen Kosten $z = 2 \cdot 8.4 + 3 \cdot 4.8 = 31.2$. Man beachte, daß nur N_1 und N_2 voll ausgenutzt werden.

1.3.3 Ein Transportproblem

Es soll Ware von Lagerhäusern L_1, L_2 zu Verteilerstationen $V_1, \ldots, V_5$ transportiert werden. Dabei sind Vorrat, Bedarf und Transportkosten gegeben (Transportkosten ∞ heißt, daß ein Transport nicht möglich ist).

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	Vorrat in L_i
L_1	3	∞	5	∞	4	10
L_2	2	4	∞	6	5	12
Bedarf von V_i	4	3	4	5	6	$\rightarrow \sum \stackrel{\downarrow}{=} 22$

Ist x_{ij} die transportierte Menge vom Lager L_i zum Verteiler V_j, so ergeben sich die Restriktionen
$x_{11} + x_{13} + x_{15} \leq 10, \quad x_{21} + x_{22} + x_{24} + x_{25} \leq 12$
$x_{11} + x_{21} \geq 4, x_{22} \geq 3, x_{13} \geq 4, x_{24} \geq 5, x_{15} + x_{25} \geq 6$ und $x_{ij} \geq 0$, für alle i, j.
Die Zielfunktion
$z = 3x_{11} + 5x_{13} + 4x_{15} + 2x_{21} + 4x_{22} + 6x_{24} + 5x_{25}$
ist zu minimieren. Da der Gesamtvorrat gleich dem Gesamtbedarf (=22) ist, kann jeder Verteiler nur genau seinen Bedarf erhalten und jedes Lager muß seine Kapazität voll ausschöpfen,

d.h. alle Ungleichungen gelten mit Gleichheit. Insbesondere $x_{22} = 3, x_{13} = 4, x_{24} = 5$. Der zugehörige Kostenanteil ist $z_0 = 12 + 20 + 30 = 62$. Daher ergibt sich ein reduziertes Problem:
$z = 3x_{11} + 4x_{15} + 2x_{21} + 5x_{25} + 62 \to \min$ unter
$x_{11} + x_{15} = 6, x_{21} + x_{25} = 4, x_{11} + x_{21} = 4, x_{15} + x_{25} = 6$ und $x_{ij} \geq 0$.
Hier ist wegen der 4 Variablen keine graphische Lösung möglich. Jedoch können weitere Variable eliminiert werden: $x_{15} = 6 - x_{11},\ x_{25} = x_{11},\ x_{21} = 4 - x_{11}$. Wegen $0 \leq x_{11} \leq 4$ ist der zulässige Bereich also eine Strecke. Das Minimum von $z = 3x_{11} + 4(6 - x_{11}) + 2(4 - x_{11}) + 5x_{11} + 62 = 2x_{11} + 94$ wird offensichtlich für $x_{11} = 0$ angenommen mit $z_{\min} = 94$.

2 Lineare Optimierung

2.1 Der Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen

Definition 2.1 *Seien* $a^1, \ldots, a^m, b \in \mathbb{R}^n$. *Dann heißt* b Linearkombination *von* $a^1, \ldots, a^m$, *falls es* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *gibt, mit* $b = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_m a^m$.
Die Linearkombination heißt nichtnegativ, *falls* $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$.

Bezeichnung: (1) Für $X \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet lin$X$ die lineare Hülle von X.
(2) Für $a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet $\operatorname{rank}\{a^1, \ldots, a^m\} = \dim \operatorname{lin}\{a^1, \ldots, a^m\}$ den Rang, d.h. die Dimension des von $a^1, \ldots, a^m$ aufgespannten Unterraums.

Satz 2.1 *Seien* $a^1, \ldots, a^m, b \in \mathbb{R}^n, \quad t = \operatorname{rank}\{a^1, \ldots, a^m, b\}$. *Dann gilt entweder*

1. b *ist eine nichtnegative Linearkombination linear unabhängiger Vektoren aus* $\{a^1, \ldots, a^m\}$.

   oder

2. *Es existiert eine Hyperebene* $\{x \mid c^\top x = 0\}$, *die* $t-1$ *linear unabhängige Vektoren aus* $\{a^1, \ldots, a^m\}$ *enthält und* $c^\top b < 0$ *und* $c^\top a^1, \ldots, c^\top a^m \geq 0$ *genügt.*

Beweis: Sei $L = \operatorname{lin}(a^1, \ldots, a^m)$. Gilt $b \notin L$, so gilt sicher (2) und nicht (1). Für $b \in L$ genügt es die Behauptung für L statt $\mathbb{R}^n$ zu beweisen (sonst fasse L als $\mathbb{R}^{n'}$ auf mit $n' = \dim L$). Sei daher o.B.d.A. $L = \mathbb{R}^n$.
Die beiden Fälle (1), (2) schließen sich aus, denn aus $b = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_m a^m$ mit $\lambda_i \geq 0$ folgt

$$c^\top b = \lambda_1 c^\top a^1 + \ldots + \lambda_m c^\top a^m \geq 0.$$

Zeige: Es gilt (1) oder (2). Dazu sei $D = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_n}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Jetzt wende man folgende Iteration an:

i. Schreibe $b = \lambda_{i_1} a^{i_1} + \ldots + \lambda_{i_n} a^{i_n}$. Gilt $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n} \geq 0$, so gilt Fall (1).

ii. Wähle unter $i_1, \ldots, i_n$ den kleinsten Index h mit $\lambda_h < 0$. Sei $\{x \mid c^\top x = 0\}$ die von $D \setminus \{a^h\}$ aufgespannte Hyperebene. Es sei o.B.d.A. $c^\top a^h = 1$ und daher $c^\top b = \lambda_h$.

iii. Gilt $c^\top a^1, \ldots, c^\top a^m \geq 0$, so gilt Fall (2).

iv. Ansonsten wähle das kleinste s mit $c^\top a^s < 0$. Dann ersetze man D durch $(D \setminus \{a^h\}) \cup \{a^s\}$ und setze mit (i) fort.

Es bleibt zu zeigen, daß die Iteration abbricht. Sei D_k die Basis der k-ten Iteration. Da nur endlich viele Basen existieren, hat man im Fall des Nichtabbruchs $D_k = D_l$, für $k < l$. Sei r der größte Index, für den a^r aus D in den Iterationen $k, \ldots, l-1$ eliminiert wird. Dies sei die Iteration p. Wegen $D_k = D_l$ ist a^r für eine Iteration q mit $k \leq q < l$ zu D hinzugefügt worden. Nach Definition von r gilt:

$$D_p \cap \{a^{r+1}, \ldots, a^m\} = D_q \cap \{a^{r+1}, \ldots, a^m\}. \tag{2.1}$$

Sei jetzt $D_p = \{a^{i_1}, \ldots, a^{i_n}\}$, $\quad b = \lambda_{i_1} a^{i_1} + \ldots + \lambda_{i_n} a^{i_n}$ und sei c_q der Vektor c aus der Iteration q, dann gilt

$$0 > {c_q}^\top b = {c_q}^\top (\lambda_{i_1} a^{i_1} + \ldots + \lambda_{i_n} a^{i_n}) = \lambda_{i_1} {c_q}^\top a^{i_1} + \ldots + \lambda_{i_n} {c_q}^\top a^{i_n} > 0.$$

Dabei gilt die erste Ungleichung nach (ii) aus der Iteration q. Die zweite Ungleichung ergibt sich aus

a) Für $i_j < r$ gilt nach (ii), Iteration p, $\lambda_{i_j} \geq 0$ und nach (iv), Iteration q, $\quad {c_q}^\top a^{i_j} \geq 0$.

b) Für $i_j = r$ gilt nach (ii), Iteration p, $\lambda_{i_j} < 0$ und nach (iv), Iteration q, $\quad {c_q}^\top a^{i_j} < 0$.

c) Für $i_j > r$ gilt ${c_q}^\top a^{i_j} = 0$ nach (ii) und Gleichung (2.1).

□

Bemerkung: Der Beweis ist konstruktiv und liefert einen Algorithmus zur Bestimmung der Fälle. Dies wird dem Simplexalgorithmus mit der Blandschen Antizykelregel entsprechen.

Beispiel 2.1 *Seien* $a^1 = (1,0,0)^\top$, $a^2 = (0,1,0)^\top$, $a^3 = (0,0,1)^\top$, $a^4 = (1,1,-1)^\top$, $b = (-1,-1,-1)^\top$. *b ist keine nichtnegative Linearkombination von a^1, a^2, a^3, a^4, da $c = (1,0,0)^\top$ der Bedingung (2) genügt.*

2.2 Konvexe Kegel

Definition 2.2 *$K \subset \mathbb{R}^n$ heißt* konvex, *falls für $x, y \in K$ und $\lambda \in [0,1]$ stets $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$ gilt (d.h. mit je zwei Punkten ist auch die Verbindungsstrecke in K enthalten).*

Definition 2.3 *$C \subset \mathbb{R}^n$ heißt* (konvexer) Kegel, *falls für $x, y \in C$ und $\lambda, \mu \geq 0$ stets $\lambda x + \mu y \in C$ gilt.*
Ein Kegel C heißt endlich erzeugt, *falls $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ existieren, so daß*

$$C = \operatorname{pos}\{x^1, \ldots, x^m\} = \{\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0\}.$$

Ein Kegel heißt polyedrisch, *falls $C = \{x \,|\, Ax \leq 0\}$, für eine Matrix A gilt.*

Bemerkung: Eine Ungleichung zwischen Vektoren wird stets komponentenweise verstanden. Bezeichnet man eine Menge $\{x \,|\, a^\top x \leq 0\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $\quad a \neq 0$, als *Halbraum*, so ist ein polyedrischer Kegel der Durchschnitt endlich vieler Halbräume.

Definition 2.4 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Die zu M* polare Menge *$M^\star$ ist definiert durch*

$$M^\star = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y^\top x \leq 0 \text{ für alle } x \in M\}.$$

Satz 2.2 *Ist C ein Kegel, so ist $C^\star$ ebenfalls ein Kegel.*

Beweis: Übung.

□

Satz 2.3 *1. Ist C der von $x^1, \ldots, x^m$ erzeugte Kegel, so ist $C^\star$ der polyedrische Kegel $C^\star = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y^\top x^i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$.*

2. Ist C der durch $C = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y^\top x^i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ gegebene Kegel, so ist $C^\star$ der von $x^1, \ldots, x^m$ erzeugte Kegel.

Bemerkung: Insbesondere gilt $(C^\star)^\star = C$, wenn C endlich erzeugt oder polyedrisch ist.

Beweis: (1) Sei $D = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y^\top x^i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$. Sei $y \in D,\ x = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m \in C$. Es folgt $y^\top x = \lambda_1 y^\top x^1 + \ldots + \lambda_m y^\top x^m \leq 0$, also $D \subset C^\star$. Sei $y \in C^\star$. Dann gilt $y^\top x^i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$, also $y \in D$.
(2) Sei $D = \text{pos}\{x^1, \ldots, x^m\}$. Sei $x = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m \in D,\ y \in C$. Es folgt $y^\top x = \lambda_1 y^\top x^1 + \ldots + \lambda_m y^\top x^m \leq 0$, also $D \subset C^\star$. Sei jetzt $b \notin D$. Nach Satz 2.1 existiert ein c mit $c^\top b < 0,\ c^\top x^i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$. Also gilt $-c \in C$ und damit $b \notin C^\star$. □

Satz 2.4 *Ein konvexer Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.*

Beweis: a) Seien $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$. $C = \text{pos}\{x^1, \ldots, x^m\}$ ist polyedrisch: Sei zunächst $\mathbb{R}^n = \text{lin}\{x^1, \ldots, x^m\}$. Zu einer Hyperebenen $H_c = \{x : c^\top x = 0\}$ sei $H_c^+ = \{x : c^\top x \geq 0\}$ einer der beiden zugehörigen Halbräume. Setze

$$Q := \bigcap_{x^1,\ldots,x^m \in H_c^+,\ H_c = \text{lin}(x^{i_1},\ldots,x^{i_{n-1}})} H_c^+.$$

Q ist sicher polyedrischer Kegel. Bleibt $C = Q$ zu zeigen. Es gilt $b \notin Q$, genau dann, wenn $\exists H_c$ mit $x^1, \ldots, x^m \in H_c^+,\ H_c = \text{lin}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{n-1}})$ und $b \notin H_c^+$ bzw. $\exists c$ mit $c^\top x^i \geq 0, i = 1, \ldots, m$, $c^\top x^{i_1} = \ldots = c^\top x^{i_{n-1}} = 0$ und $c^\top b < 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn (2) in Satz 2.1, also nicht (1) in Satz 2.1 gilt. D.h. genau dann, wenn $b \notin C$.
Sei jetzt $L = \text{lin}\{x^1, \ldots, x^m\}$ unterdimensional: Zu jedem Halbraum $H \subset L$ existiert ein Halbraum $H' \subset \mathbb{R}^n$ mit $H = H' \cap L$ und L ist selbst Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen. Nach dem vorhergehenden gilt die Behauptung im Raum L und damit auch in $\mathbb{R}^n$.
b) Sei $C = \{x \,|\, a^{1\top} x \leq 0, \ldots, a^{m\top} x \leq 0\}$ ein polyedrischer Kegel. Nach Satz 2.3 gilt $C^\star = \text{pos}\{a^1, \ldots, a^m\}$. Nach a) ist $C^\star = \{y \,|\, y^\top b^i \leq 0,\ i = 1, \ldots, t\}$. Nach Satz 2.3 gilt $C^{\star\star} = C$ und $C^{\star\star}$ ist ein endlich erzeugter Kegel. □

2.3 Das Lemma von Farkas und der Dualitätsssatz

Eine Formulierung des Fundamentalsatzes in der Sprache der linearen Algebra gibt

Satz 2.5 (Lemma von Farkas) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\quad b \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x \geq 0,\quad Ax = b$ genau dann, falls für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^\top A \geq 0$ gilt $\quad y^\top b \geq 0$.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar, da für alle x, y mit $x \geq 0,\quad y^\top A \geq 0$ und $Ax = b$ sofort $y^\top b = y^\top Ax \geq 0$ folgt.
Die Bedingung ist hinreichend: Es gebe kein $x \geq 0$ mit $Ax = b$. Seien $a^1, \ldots, a^m$ die Spalten von A. Dann gilt $b \notin \text{pos}\{a^1, \ldots, a^m\}$ und daher existiert nach Satz 2.1 ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^\top b < 0$ und $y^\top A \geq 0$. □

Ein LP kann in verschiedenen Varianten vorliegen. Z.B. lieferten die Kapazitätsbedingungen in den Anwendungsbeispielen Restriktionen in der Form von Ungleichungen. Diese können aber durch die Einführung neuer (künstlicher) Variablen in Gleichungen überführt werden:
Die Bedingung $Ax \leq b$ bedeutet $A^{i\top}x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n$, falls A^i die Zeilen von A sind. Substituiere

$$x_{m+i} := b_i - A^{i\top}x,\ i = 1, \ldots, n.$$

Diese x_{m+i} werden *Schlupfvariable* genannt. Sie bilden zusammen einen Vektor $\tilde{x} \geq 0$. Mit dieser Substitution ist $Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^m$ äquivalent zu $(A \mid I)\binom{x}{\tilde{x}} = b$ *und* $\tilde{x} \geq 0$.

Die entsprechende Variante des Lemmas von Farkas zu der Form $\{x \mid Ax \leq b\}$ ist:

Satz 2.6 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\quad b \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax \leq b$ genau dann, wenn $y^\top b \geq 0$ für jedes $y \geq 0$ und $y^\top A = 0$ gilt.*

Beweis: Durch die Einführung von Schlupfvariablen ist die Existenz eines $x \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax \leq b$ äquivalent zu der Existenz eines $(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ mit $(A \mid I)\binom{x}{\tilde{x}} = b,\ \tilde{x} \geq 0$. Dies ist äquivalent zur Lösbarkeit von $(A \mid -A \mid I)(x', x'', \tilde{x})^\top = b,\quad x', x'' \in \mathbb{R}^m, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n\ x', x'', \tilde{x} \geq 0$ (Augabe), d.h. zu $\exists z \in \mathbb{R}^{2m+n}, z \geq 0$ und $(A| - A|I)z = b$.
Nach Satz 2.5 hat dies genau dann eine Lösung, falls $y^\top b \geq 0$, für jedes y mit $y^\top A \geq 0,\quad y^\top(-A) \geq 0,\quad y^\top I \geq 0$ gilt. □

Definition 2.5 *(1) Ein Menge $P \subset \mathbb{R}^n$ der Form $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\quad b \in \mathbb{R}^m$ heißt* Polyeder.
(2) Ein beschränktes Polyeder heißt Polytop.

Die *lineare Optimierung, linear programming, LP* beschäftigt sich mit der Minimierung bzw. Maximierung linearer Funktionen auf einem Polyeder. Beispiele sind

$$\max\{c^\top x \mid Ax \leq b\} \qquad \min\{c^\top x \mid x \geq 0,\ Ax \leq b\}.$$

Ein erster Satz ist

Satz 2.7 (Dualitätssatz der linearen Optimierung) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\quad b \in \mathbb{R}^n,\quad c \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\max\{c^\top x \mid x \in \mathbb{R}^m,\ Ax \leq b\} = \min\{y^\top b \mid y \in \mathbb{R}^n,\ y \geq 0,\ y^\top A = c^\top\}, \tag{2.2}$$

unter der Voraussetzung, daß beide Mengen in (2.2) nichtleer sind.

Beweis: Gilt $Ax \leq b,\quad y \geq 0$ und $y^\top A = c^\top$, so gilt $c^\top x = y^\top Ax \leq y^\top b$. Damit gilt sicher stets max $\leq$ min. Es bleibt die Existenz von x, y mit $Ax \leq b,\quad y \geq 0,\quad y^\top A = c^\top,\quad c^\top x \geq y^\top b$ zu zeigen, d.h. die Existenz von x, y mit

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^\top & b^\top \\ 0 & A^\top \\ 0 & -A^\top \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Nach Satz 2.6 ist dies äquivalent zu: Sind $u, \lambda, v, w, z \geq 0$ mit $u^\top A - \lambda c^\top = 0$ und $\lambda b^\top + v^\top A^\top - w^\top A^\top - z^\top = 0$, dann gilt $u^\top b + v^\top c - w^\top c \geq 0$.
Um dies zu zeigen, mögen u, λ, v, w, z den Voraussetzungen genügen. Gilt $\lambda > 0$ so folgt

$$\begin{aligned} u^\top b &= \lambda^{-1}\lambda b^\top u = \lambda^{-1}((w^\top - v^\top)A^\top + z^\top)u \\ &\geq \lambda^{-1}\lambda(w^\top - v^\top)c. \end{aligned}$$

Gilt $\lambda = 0$, so seien x^0, y^0 so gewählt, daß $Ax^0 \leq b$ und $y^0 \geq 0, \quad y^{0\top}A = c^\top$ gilt (nach Voraussetzung möglich). Es folgt

$$u^\top b \geq u^\top A x^0 = 0 = ((w^\top - v^\top)A^\top + z^\top)y^0 \geq (w^\top - v^\top)c.$$

□

Beispiel 2.2 *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann zeigen $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$2 = \max\{c^\top x \,|\, Ax \leq b\} = \min\{y^\top b \,|\, y \geq 0, \; y^\top A = c^\top\}.$$

Setzt man wie üblich $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$, so läßt sich der Dualitätssatz noch etwas verschärfen zu:

Satz 2.8 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}^m$. *Dann gilt*

$$\sup\{c^\top x \,|\, Ax \leq b\} = \inf\{y^\top b \,|\, y \geq 0, \; y^\top A = c^\top\} \tag{2.4}$$

unter der Voraussetzung, daß eine Menge in (2.4) nichtleer ist.

Beweis: Nach Satz 2.7 bleibt zu zeigen:

$$\{y \,|\, y \geq 0, \; y^\top A = c^\top\} = \emptyset \;\Rightarrow\; \sup\{c^\top x \,|\, Ax \leq b\} = \infty. \tag{2.5}$$

und

$$\{x \,|\, Ax \leq b\} = \emptyset \;\Rightarrow\; \inf\{y^\top b \,|\, y \geq 0, \; y^\top A = c^\top\} = -\infty. \tag{2.6}$$

(1) zu (2.5): Sei $D = \{y \,|\, y \geq 0, \; y^\top A = c^\top\} = \emptyset$. Dann ist nach Voraussetzung $\{x \,|\, Ax \leq b\} \neq \emptyset$. Angenommen, das Supremum ist endlich. Mit $M(\gamma) = \{x \mid -c^\top x \leq -\gamma, \; Ax \leq b\}$ gibt es dann $\gamma_1 < \gamma_2$ mit $M(\gamma_1) \neq \emptyset$ und $M(\gamma_2) = \emptyset$. Nach Satz 2.6 ist $M(\gamma) \neq \emptyset$ genau dann, wenn aus $(y_0, y^\top) \geq 0, y^\top A - y_0 c^\top = 0$ folgt: $y^\top b - y_0\gamma \geq 0$. Mit $\gamma = \gamma_2$ folgt also die Existenz eines $\binom{y_0}{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $y_0 \geq 0, y \geq 0, y^\top A = y_0 c^\top$ und $y_0\gamma_2 > y^\top b$. Mit $\gamma = \gamma_1$ gilt aber für dieses

$(y_0, y^\top)$ nun $y_0\gamma_1 \le y^\top b$. Somit $y_0\gamma_2 > y_0\gamma_1$ und darum $y_0 > 0$. Dann ist aber $z := 1/y_0 \cdot y \in D$. Widerspruch.
(2) zu (2.6): Sei $\{x \mid Ax \le b\} = \emptyset$. Nach Voraussetzung existiert ein y^0 mit $y^0 \ge 0,\ y^{0\top}A = c^\top$. Nach Satz 2.6 gibt es ein $y^1 \in \mathbb{R}^n$ mit $y^1 \ge 0,\ y^{1\top}A = 0$ aber $y^{1\top}b < 0$. Die Betrachtung von $y^0 + \lambda y^1,\ \lambda \ge 0$ zeigt sofort, daß das Infimum in 2.6 $-\infty$ ist. □

Bemerkung: Es ist möglich, daß beide Mengen in Satz 2.8 leer sind (Aufgabe!).

Es gibt für LP viele Formulierungen, die in dem Sinn äquivalent sind, daß sie leicht ineinander überführt werden können, z. B.

1. $\max\{c^\top x \mid Ax \le b\}$,
2. $\max\{c^\top x \mid x \ge 0,\ Ax \le b\}$ (kanonische Form),
3. $\max\{c^\top x \mid x \ge 0,\ Ax = b\}$,
4. $\min\{c^\top x \mid Ax \ge b\}$,
5. $\min\{c^\top x \mid x \ge 0,\ Ax \ge b\}$,
6. $\min\{c^\top x \mid x \ge 0,\ Ax = b\}$ (Standardform).

(2) wird in (1) überführt, da $x \ge 0,\ Ax \le b$ äquivalent zu $\binom{-I}{A} x \le \binom{0}{b}$. (3) wird in (2) überführt, indem $Ax = b$ durch $Ax \le b,\ -Ax \le -b$ ersetzt wird. (1) wird in (3) überführt, indem $Ax \le b$ durch $x', x'', \tilde{x} \ge 0, Ax' - Ax'' + \tilde{x} = b$ ersetzt wird. Weiter sind (3) und (6) durch Austauschen von c und $-c$ ineinander überführbar.
Jedes der obigen Probleme, ebenso wie Mischformen heißt *allgemeines LP-Problem.*
Ebenso hat der Dualitätssatz äquivalente Formulierungen. So gilt z.B.

$$\max\{c^\top x \mid x \ge 0, Ax \le b\} = \min\{y^\top b \mid y \ge 0,\ y^\top A \ge c^\top\},$$

falls beide Mengen nichtleer sind.
Eine allgemeine Formulierung ist: Seien A, B, C, D Matrizen und a, b, c, d Vektoren. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\max\{c^\top x + d^\top y \mid x \ge 0,\ Ax + By \le a,\ Cx + Dy = b\} = \\ &\min\{u^\top a + v^\top b \mid u \ge 0,\ u^\top A + v^\top C \ge c^\top,\ u^\top B + v^\top D = d^\top\},\end{aligned}$$

falls beide Mengen nichtleer sind. (Man beachte, daß in den beiden Formeln $\ge$ und $\le$ vertauscht sind.)
Das Maximum in der Formel ist äquivalent zu:

$$\max\{c^\top x + d^\top y \mid -Ix \le 0,\ Ax + By \le a,\ Cx + Dy \le b,\ -Cx - Dy \le -b\}.$$

Hierauf wendet man den Dualitätssatz an und erhält einen zum zweiten Ausdruck äquivalenten Ausdruck (Aufgabe!).
Beziehungen wie die obige bzw. im Satz 2.7 heißen Dualitätsgleichungen. Sie drücken aus, daß der optimale Wert eines gewissen Maximierungsproblems gleich dem Optimum eines anderen

Minimierungsproblems ist. Das Minimierungsproblem heißt das *duale* Problem des Maximierungsproblems, das dann *primal* heißt. Da sich Minimierungs– und Maximierungsprobleme ineinander überführen lassen, läßt sich ebenso das Minimierungsproblem als primales Problem auffassen. Man sieht leicht, daß das duale Problem eines dualen Problems wieder das primale Problem ist (Aufgabe!).
Anhand der folgenden Tabelle kann man ablesen, welche Fälle für das primale Problem **P** und das Duale **D** möglich sind.

P \ **D**	$\emptyset$	∞	opt
$\emptyset$	x	x	–
∞	x	–	–
opt	–	–	x

Die Bedingungen $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $Cx = d$ usw. heißen *Restriktionen.* Ein Punkt x, der den Restriktionen genügt, heißt *zulässig.* Die Menge der zulässigen Punkte wird als *zulässiger Bereich* bezeichnet. Ist der zulässige Bereich nichtleer, so heißt das Problem *zulässig*, andernfalls *unzulässig.*
Die Funktion $x \mapsto c^\top x$ heißt *Zielfunktion* oder *Kostenfunktion.* $c^\top x$ heißt *Zielwert* oder *Kosten.* Ein zulässiger Punkt, dessen Kosten gleich dem Maximum sind, heißt *Optimum* oder *optimale Lösung.*

Satz 2.9 (Komplementäre Schlupfbedingungen) *Gegeben sei das LP*

$$\max\{c^\top x \,|\, Ax \leq b\}$$

und sein duales

$$\min\{y^\top b \,|\, y \geq 0,\ y^\top A = c^\top\}.$$

Sei x^0 zulässige Lösung des primalen und y^0 zulässige Lösung des dualen Problems. Dann ist äquivalent:

1. *x^0, y^0 sind optimale Lösungen,*
2. *$c^\top x^0 = y^{0\top} b$,*
3. *Ist eine Komponente von y^0 positiv, dann ist die entsprechende Ungleichung von $Ax \leq b$ mit Gleichheit erfüllt, d.h. $y^{0\top}(b - Ax^0) = 0$.*

Beweis: Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt sofort aus Satz 2.7. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt, da in $c^\top x^0 = y^{0\top} Ax^0 \leq y^{0\top} b$ Gleichheit gelten muß. □

2.4 Der Simplexalgorithmus

Das älteste und wohl immer noch wichtigste Verfahren für LP ist der Simplexalgorithmus. In diesem Abschnitt wird seine Theorie dargestellt, im nächsten seine praktische Durchführung. Es wird ein Problem in Standardform

$$\min\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)},\ c \in \mathbb{R}^{n+m},\ b \in \mathbb{R}^m \tag{2.7}$$

betrachtet. Nach dem Vorhergehenden ist dies keine Einschränkung. Weiter lassen sich mit linearer Algebra (Gaußelimination) linear abhängige Zeilen von A entfernen. Daher sei o.B.d.A. rank$A = m$. Offensichtlich bleibt das Problem gleich, wenn für eine nichtsinguläre Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und ein $u \in \mathbb{R}^m$ A ersetzt wird durch QA, b ersetzt wird durch Qb und $c^\top$ ersetzt wird durch $c^\top + u^\top QA$ (es ändert sich nur der Wert des Minimums um $u^\top QAb$ wegen $u^\top QAx = u^\top Qb$).

Beispiel 2.3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $P = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ wird das Polyeder der zulässigen Punkte bezeichnet. Das duale Problem ist $\min\{y^\top b \mid y^\top A \leq c^\top\}$. Schließlich sei wie üblich e^i der i–te Einheitsvektor.

Definition 2.6 *x heißt* Basislösung (basic solution, bs) *von (2.7), falls $Ax = b$ gilt und e^{i_j}, $j = 1, \ldots, n$ existieren mit $e^{i_j\top} x = 0$ und* rank $\begin{pmatrix} e^{i_1\top} \\ \vdots \\ e^{i_n\top} \\ A \end{pmatrix} = n + m$. *Für eine Basislösung x und eine zugehörige Menge von Indizes $M = \{i_1, \ldots, i_n\}$ heißt die geordnete Menge $B = \{k_1, \ldots, k_m\}$ eine* zu x gehörige Basis, *falls $B = \{1, \ldots, n+m\} \setminus M$.*
x heißt Ecke (zulässige Basislösung, basic feasible solution, bfs) *von (2.7), falls zusätzlich $x \geq 0$.*

Bemerkung: Man konstruiert eine Basislösung, indem man eine Menge von m linear unabhängigen Spaltenvektoren von A findet (deren Indizes eine Basis bilden), die Variablen, die zu den übrigen Spalten gehören (Nichtbasis–Variablen) auf Null setzt, und das so entstandene, eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem löst. Sind alle Koordinaten der Lösung nichtnegativ, so hat man eine Ecke gefunden.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung) *$x = (0, 0, 1, 2, 3)^\top$ ist eine Ecke und $B = \{3, 4, 5\}$ eine zu x gehörige Basis.*

Sei zunächst eine Ecke x^0 gegeben. Es wird eine Folge von Ecken konstruiert, bis entweder ein optimaler Punkt gefunden ist oder die Unbeschränktheit des Problems gezeigt wird.
Für x^0 sind die Spalten A^{k_j} mit $k_j \in B$ linear unabhängig. Daher existiert eine Matrix Q, so daß für $j = 1, \ldots, m$ in QA in der k_j–ten Spalte der Vektor e^j steht.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung) *Es ist*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad QA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Qb = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Setze $u^\top = {c_B}^\top = (c_{k_1}, \ldots, c_{k_m})$ und

$$\tilde{c}^\top = c^\top - u^\top QA.$$

Dann gilt $\tilde{c}^\top e^{k_j} = c_{k_j} - c_{k_j} = 0$, für $j = 1, \ldots, m$. Ferner gilt für $\tilde{c}^\top$

$$\tilde{c}^\top x^0 = 0, \quad \tilde{c}^\top x = c^\top x - u^\top QAx = c^\top x - u^\top Qb = c^\top x - c^\top x^0, \quad \forall x \text{ mit } Ax = b.$$

(letzte Gleichung mit $x = x^0$). $\tilde{c}^\top x$ gibt also die Veränderung der Kosten bei Übergang von x^0 zu x an. Daher wird $\tilde{c}$ als *Vektor der relativen Kosten* bezeichnet.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung) $\tilde{c}^\top = (-3, -3, 0, 0, 0)$.

Fallunterscheidung:
Fall 1: $\tilde{c} \geq 0$: Dann ist $u^\top QA \leq c^\top$, d.h. $u^\top Q$ ist dual zulässig und weiter

$$c^\top x^0 = c^\top x^0 - \tilde{c}^\top x^0 = u^\top QAx^0 = u^\top Qb \leq \max\{y^\top b \,|\, y^\top A \leq c^\top\} = \min\{c^\top x \,|\, x \geq 0,\ Ax = b\}$$

nach Satz 2.7. Damit ist x^0 optimal.
Fall 2: Wähle den kleinsten Index $i^\star$ mit $\tilde{c}^\top e^{i^\star} < 0$ und setze

$$y = e^{i^\star} - \sum_{j=1}^{m} (QA)_{ji^\star} e^{k_j}.$$

Es gilt $QAy = 0$ (wegen $QAe^{k_j} = e^j$ ergibt sich zweimal die $i^\star$–te Spalte von QA) und damit auch $Ay = 0$. Setzt man

$$x(\lambda) = x^0 + \lambda y,$$

so folgt $Ax(\lambda) = Ax^0 = b$, d.h. $x(\lambda)$ erfüllt die Gleichungen für alle $\lambda > 0$. Weiter gilt wegen $\tilde{c}^\top e^{k_j} = 0$

$$c^\top x(\lambda) = \tilde{c}^\top x(\lambda) + u^\top QAx(\lambda) = \tilde{c}^\top x^0 + \lambda \tilde{c}^\top \left(e^{i^\star} - \sum_{j=1}^{m} (QA)_{ji^\star} e^{k_j} \right) + u^\top Qb = \lambda \tilde{c}_{i^\star} + u^\top Qb.$$

Also $\tilde{c}^\top y < 0$ und die Zielfunktion fällt in λ. Wieder sind zwei Fälle zu unterscheiden:
Fall 2a: $(QA)_{ji^\star} \leq 0$, für alle j. Dann ist $x(\lambda)$ für alle $\lambda \geq 0$ zulässig und damit das Optimum unbeschränkt.
Fall 2b: $(QA)_{ji^\star} > 0$ für mindestens ein j. Sei jetzt

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{x^0_{k_j}}{(QA)_{ji^\star}} \,|\, (QA)_{ji^\star} > 0 \right\}.$$

Weiter sei $k^\star$ der kleinste Index k_j, für den das Minimum angenommen wird (*nicht* die erste Zeile!). Dann ist $x(\lambda_0)$ Ecke von P und $(B \setminus \{k^\star\}) \cup \{i^\star\}$ eine Basis von $x(\lambda_0)$ (die $i^\star$–te Spalte von QA ist wegen $(QA)_{ji^\star} > 0$ nicht linear abhängig zu den Spalten zu $B \setminus \{k^\star\}$). Mit $x(\lambda_0)$ und dieser Basis wird das Verfahren fortgesetzt.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung) $i^\star = 1,\ k^\star = 3,\ \lambda_0 = \min\{1/2, 1/1\} = 1/2,$
$y = (1, 0, -2, 1, -3),\ x(\lambda_0) = (1/2, 0, 0, 5/2, 3/2),\ c^\top x(\lambda_0) = 9/2.$

Bemerkung: $\lambda_0 = 0$ und damit $x(\lambda_0) = x^0$ ist durchaus möglich. Dazu müssen aber einige (mindestens eine) Basisvariable 0 sein. Zu x^0 gibt es dann i.a. verschiedene Basen. Geometrisch bedeutet dies für das Polyeder P der zulässigen Lösungen mit Dimension n (im Lösungsraum von $Ax = b$, die Ungleichungen $x \geq 0$ liefern Halbräume), daß eine entartete Ecke vorliegt, d.h. eine Ecke liegt in mehr als n begrenzenden Hyperebenen (Facetten von P). Es könnte sein, daß im Laufe des Verfahrens ein *Zykel* auftritt, d.h. die Ecke ändert sich nicht, nur die Basen werden periodisch vertauscht. Durch die spezielle Wahl von $i^\star$ und $k^\star$ (hier: Blandsche Antizykelregel) wird dies aber ausgeschlossen.

Satz 2.10 *Der Algorithmus bricht stets mit Fall 1 oder Fall 2a ab.*

Beweis: Die Größen im j–ten Schritt werden mit $x^j,\ B_j, \tilde{c}^{j\top}, y^j, u^j, Q^j$ bezeichnet. Nach Konstruktion gilt $c^\top x^{j+1} \leq c^\top x^j$ und Gleichheit gilt nur falls $x^{j+1} = x^j$. Widerspruchsannahme: Der Algorithmus bricht nicht ab. Es gibt nur endlich viele Basen und so existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k < l$ und $B_k = B_l$. Da eine Basis eine Ecke eindeutig festlegt, gilt $x^k = x^l$ und damit $x^k = x^{k+1} = \ldots = x^l =: x$. Sei jetzt r der größte Index, so daß r in den Schritten $k, \ldots, l-1$ aus einer Basis eliminiert wurde, etwa im Schritt p. Wegen $B_k = B_l$ ist r in einem Schritt q mit $k \leq q < l$ der Basis hinzugefügt worden. Nun gilt für $k \leq j < l$:

$$\tilde{c}^{j\top} y^p = c^\top y^p - u^{j\top} Q^j A y^p = c^\top y^p,$$

also insbesondere $\tilde{c}^{q\top} y^p = \tilde{c}^{p\top} y^p < 0$. Darum gibt es einen Index a, so daß $\tilde{c}^q_a \cdot y^p_a < 0$.
(i) Ist $a > r$, dann gilt nach Definition von r entweder $a \in B_p \cap B_q$ oder $a \notin B_p$. Dann folgt aber $\tilde{c}^q_a = 0$ oder $y^p_a = 0$ (wegen $i^\star_p \leq r$).
(ii) Ist $a = r$, dann gilt wegen $r = i^\star_q$: $\tilde{c}^q_r < 0$ und wegen $r = k^\star_p$: $y^p_r < 0$.
(iii) Ist $a < r$, so gilt im Falle $x_a > 0$ dann $a \in B_q$ und daher $\tilde{c}^q_a = 0$. Sei also $x_a = 0$. Wegen $r = i^\star_q$ folgt $\tilde{c}^q_a \geq 0$. Angenommen, $y^p_a < 0$. Dann gilt $a = k_j$, für ein j mit $(QA)_{ji^\star} > 0$. Also $\lambda_0 = 0$ und $r = k^\star_p \leq a$. Widerspruch und darum $y^p_a \geq 0$.
In jedem Falle gilt also $\tilde{c}^q_a \cdot y^p_a \geq 0$. Widerspruch. □

Der allgemeine Fall:
Gegeben sei das Problem $\min\{c^\top x \,|\, x \geq 0,\ Ax = b\}$. O.B.d.A. sei $b \geq 0$. Ist keine Ecke bekannt, so sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ und $d \in \mathbb{R}^{n+2m}$ gegeben durch $d^\top = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ mit m Einsen. Es wird jetzt das neue Problem (Phase I–Problem)

$$\min\left\{ d^\top \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \,|\, \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \geq 0,\ (A, I) \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = b \right\}$$

betrachtet. Dies hat die Ecke $\binom{0}{b}$. Weiter ist das Minimum genau dann 0, wenn das ursprüngliche Problem zulässig ist. Sei x^0 die optimale Lösung des Hilfsproblems. Dann bilden die ersten $n+m$ Koordinaten von x^0 eine Ecke von P: Sei etwa B_0 die zu x^0 gehörige Basis. Gilt für alle $j \in B_0 \quad j \leq n+m$, so ist alles klar. Sei daher $j > n+m$. Dann gilt wegen $d^\top x^0 = 0$ notwendigerweise $x^0_j = 0$. Sei Q_0 die zu B_0 gehörige Matrix aus dem Algorithmus, so daß für

passendes i gilt $(Q_0A)_{ij} = 1$. Da die ersten $n+m$ Spalten von A den Rang m haben, existiert sicher ein $k \leq n+m$ mit $(Q_0A)_{ik} \neq 0$. Damit ist aber $B_0 \setminus \{j\} \cup \{k\}$ Basis. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich so eine Basis zu x^0 als Ecke von P.
Hat A nicht Höchstrang, so kann man dies mit der Phase I feststellen: Das "Herausdrehen"der künstlichen Variablen aus der Basis kann nur fehlschlagen, wenn die i–te Zeile von Q_0A eine Nullzeile ist (bis zur $(n+m)$–ten Spalte). Wegen $x_j^0 = 0$ ist dann $(Qb)e^i = 0$. Die i–te Zeile ist also überflüssig (redundant) und kann gestrichen werden. Dreht man jeden Basisindex $j > n+m$ entweder heraus oder streicht die entsprechende Zeile, dann hat die so entstandene Matrix Höchstrang, der identisch mit dem Rang von A ist.
Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 2.11 *Sei das LP* $\min\{c^T x \mid x \geq 0,\ Ax = b\}$ *gegeben und A habe Höchstrang. Bezeichnet F die Menge der zulässigen Punkte, so gilt eine der drei folgenden Möglichkeiten:*

1) $F = \emptyset$.

2) $c^\top x$ *ist auf F unbeschränkt.*

3) Das Optimum wird in einer Ecke angenommen.

2.5 Das Simplextableau

Die Durchführung des Simplexalgorithmus erfolgt in einer $(m+1) \times (m+n+1)$-Matrix, dem sogenannten Simplextableau, dessen Elemente im folgenden mit ξ_{ij} bezeichnet werden:

$-c^\top x$	$\tilde{c}^\top$
Qb	QA

Zu Beginn wird die Berechnung von QA z.B. mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren durchgeführt und $\tilde{c}^\top, -c^\top x, Qb$ berechnet. Also wird Beispiel 2.3 zu

Beispiel 2.4

0	1	1	1	1	1
1	2	3	1	0	0
3	1	5	1	1	0
4	5	2	1	0	1

Eine Basis ist $\{3,4,5\}$. *Daraus ergibt sich das Starttableau*

-6	-3	-3	0	0	0
1	2	3	1	0	0
2	-1	2	0	1	0
3	3	-1	0	0	1

Im Tableau entspricht jede Zeile j dem Basiselement k_j, in dessen Spalte die 1 der Einheitsuntermatrix von QA steht. Schließlich gibt ξ_{j0} den Wert der Basisvariablen x_{k_j} an.

Als nächstes erfolgt die Wahl einer Spalte $i^\star$ gemäß $i^\star = \min\{i \geq 1 \,|\, \xi_{0i} < 0\}$. λ_0 ergibt sich aus

$$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{\xi_{j0}}{\xi_{ji^\star}} \,|\, \xi_{ji^\star} > 0 \right\}.$$

Schließlich ergibt sich das Element, das die Basis verläßt aus:

$$k^\star = \min\left\{ k_j \,|\, \frac{\xi_{j0}}{\xi_{ji^\star}} = \lambda_0 \right\}.$$

Die zugehörige Zeile ist $j^\star$, also $k^\star = k_{j^\star}$.

Beispiel 2.4 (Fortsetzung) *Gemäß dem vorigen Abschnitt ist* $\lambda_0 = 1/2$, $i^\star = 1$, $k^\star = 3$, $j^\star = 1$.

Es bleibt die Aufstellung des Tableaus für den nächsten Schritt. Dies geschieht vorteilhaft mit Hilfe des alten Tableaus. Im folgenden werden daher alte Größen mit einem "′" bezeichnet, also Q', ξ'_{lt} usw. Zunächst ist $B = (B' \setminus \{k^\star\}) \cup \{i^\star\}$, nun also $k_{j^\star} = i^\star$ statt $k^\star$.

Satz 2.12 (Transformationsgesetz) *Für* $0 \leq l \leq m$, $0 \leq t \leq n+m$ *gilt*

$$\xi_{lt} = \begin{cases} \xi'_{lt} - \frac{\xi'_{j^\star t}\xi'_{li^\star}}{\xi'_{j^\star i^\star}} & l \neq j^\star \\ \frac{\xi'_{lt}}{\xi'_{j^\star i^\star}} & l = j^\star \end{cases}. \tag{2.8}$$

Beweis: Die Berechnung von QA bedeutet die Inversion einer Matrix. Diese vereinfacht sich erheblich durch Berechnung von $(QQ'^{-1})(Q'A)$. Die Transformation (2.8) entspricht der Multiplikation mit einer Matrix R, die bis auf die $j^\star$–te Spalte die Einheitsmatrix ist (elementare Zeilenumformungen: Zeile $j^\star$ wird durch $\xi'_{j^\star i^\star}$ dividiert, zu der l–ten Zeile, $l \neq j^\star$, wird $\xi'_{li^\star}/\xi_{j^\star i^\star}$ mal die $j^\star$–te Zeile abgezogen). Es folgt $R = Q(Q')^{-1}$, wenn $(\xi_{lt}) \cdot e^{k_k} = e^j$, für $k_j \in B$, da Q hierdurch eindeutig bestimmt ist. Dies rechnet man für $t = k_j \in B' \setminus \{k^\star\}$ und für $t = i^\star = k_{j^\star}$ anhand (2.8) leicht nach.
Also gilt die Formel für $1 \leq l \leq m$, $1 \leq t \leq n+m$.
Wegen $Qb = RQ'b$ gilt sie auch für $t = 0, 1 \leq l \leq m$.
Für $l = t = 0$ folgt mit $(\tilde{c}')^\top x = c^\top(x - x')$

$$\xi_{00} = -c^\top x = -c^\top x' - \tilde{c}'^\top x = \xi'_{00} - \tilde{c}'_{i^\star} x_{i^\star} = \xi'_{00} - \frac{\xi'_{0i^\star}\xi'_{j^\star 0}}{\xi'_{j^\star i^\star}},$$

da $M' \cap B = \{i^\star\}$.
Für den Rest der 0–ten Zeile gilt

$$\tilde{c}^\top - \tilde{c}'^\top = {c_{B'}}^\top Q'A - {c_B}^\top QA = ({c_{B'}}^\top - {c_B}^\top R)Q'A$$

$c_{B'}$ und c_B unterscheiden sich nur in der $j^\star$–ten Stelle und I und R unterscheiden sich nur in der $j^\star$–ten Spalte. Es folgt, daß $\tilde{c}^\top - \tilde{c}'^\top = \mu(Q'A)^{j^\star}$, also ein Vielfaches der $j^\star$–ten Spalte des alten Tableaus ist. Wegen $\tilde{c}_{i^\star} = 0$ folgt $\mu = -(\xi'_{0i^\star})/(\xi'_{j^\star i^\star})$ und darum für $1 \leq t \leq n+m$: $\xi_{0t} = \xi'_{0t} - \frac{\xi'_{j^\star t}\xi'_{0i^\star}}{\xi'_{j^\star i^\star}}$. □

Üblicherweise bezeichnet man die $j^\star$–te Zeile als *Pivotzeile*, die $i^\star$–te Spalte als *Pivotspalte*, $\xi'_{j^\star i^\star}$ als *Pivotelement*, die Transformation als *Pivotschritt*. Damit läßt sich der Pivotschritt auch beschreiben durch: Man teile die Pivotzeile durch das Pivotelement und ziehe von den übrigen Zeilen Vielfache der Pivotzeile ab, so daß die übrigen Elemente der Pivotspalte Null werden.

Beispiel 2.4 (Fortsetzung) *Der Pivotschritt ergibt*

$-9/2$	0	$3/2$	$3/2$	0	0
$1/2$	1	$3/2$	$1/2$	0	0
$5/2$	0	$7/2$	$1/2$	1	0
$3/2$	0	$-11/2$	$-3/2$	0	1

Da alle Elemente von $\tilde{c}$ nichtnegativ sind, ist damit das Optimum bestimmt, es ist $(1/2, 0, 0, 5/2, 3/2)$*, sein Wert ist* $9/2$*.*

Zusammenfassend ergibt sich, daß so bei einem Pivotschritt $O(m(n+m))$ (Anzahl der Elemente in dem Tableau) Rechenschritte benötigt werden, eine völlige Neuberechnung jedoch $O(m^2(n+m))$ Rechenschritte benötigt.

Algorithmus 2.1 (Twophase)
Input: Ein LP in Standardform.
Output: Unzulässigkeit, Unbeschränktheit oder eine optimale Ecke.

Procedure Simplex
begin
  opt := nein, unbesch := nein;
  while opt = nein **and** unbesch = nein **do**
    if $\tilde{c}_i \geq 0$, für alle i **then** opt := ja, **stop** ; **else**
    begin
      wähle ein $i^\star$ mit $\tilde{c}_{i^\star} < 0$;
      if $\xi_{ji^\star} \leq 0$, für alle j **then** unbesch := ja, **stop** ; **else**
      begin
        bestimme $\lambda_0 = \min\{\frac{\xi_{j0}}{\xi_{ji^\star}} \mid \xi_{ji^\star} > 0\} = \frac{\xi_{j^\star 0}}{\xi_{j^\star i^\star}}$;
        pivotiere mit Pivotelement $\xi_{j^\star i^\star}$;
      end;
    end;
end;

begin
  unzul := nein, redund := nein;
  (* Phase I *)
  führe eine künstliche Basis $\tilde{x}$ ein;
  call simplex mit den Kosten $d = \sum \tilde{x}_j$;
  if $d_{\text{opt}} > 0$ in Phase I **then** unzul := ja, **stop** ; **else**
  begin
    if eine künstliche Variable in der Basis, die nicht eliminiert werden kann **then**

```
    begin
      redund := ja;
      streiche die entsprechende Zeile;
    end;
    (*                Phase II                *)
    call Simplex mit den ursprünglichen Kosten;
  end;
end.
```

2.6 Der revidierte Simplexalgorithmus

Zur Durchführung eines Schrittes des Simplexalgorithmus ist die Kenntnis der Komponenten von $\tilde{c}^\top$ und nach Wahl der Spalte $i^\star$ die Kenntnis von $QA^{i^\star}$, wobei A^i die i–te Spalte von A bezeichnet, und Qb notwendig. Wir setzen voraus, daß das Starttableau eine Einheitsmatrix enthält und die zugehörigen c_i Null sind. Dies ist z.B. der Fall in der kanonischen Form nach Einführung von Schlupfvariablen oder wenn eine Ecke bekannt ist (dann sei o.E. $c = \tilde{c}$). Der entsprechende Ausschnitt im Starttableau ist

0	$0 \quad \cdots \quad 0$
b	I

.

Im Laufe des Verfahrens wird dies zu

$-c^\top x$	$-c_B Q$
Qb	Q

.

Hierin ist also alle nötige Information enthalten. Zunächst erzeuge man $\tilde{c}$ durch $\tilde{c}_i = c_i(c_B Q)A^i$ und wähle i^*. Dann bestimme man die Pivotspalte $(QA)^{i^\star} = Q(A^{i^\star})$ und $j^\star$ wie gewohnt mit Hilfe der Pivotzeile und Qb. Die Umrechnung des Ausschnittes kann wie üblich erfolgen, da die Pivotspalte ja bekannt ist. Wird zusätzlich die Basis B als geordnete Menge gespeichert, so ergibt sich x aus $x_k = (Qb)_j$, falls k das j–te Element von B ist und $x_k = 0$, sonst.
Als Vorteil des revidierten Simplexalgorithmus ergibt sich zunächst, daß weniger Speicherplatz benötigt wird. Ferner sind für die Erneuerung des Tableaus nur $O(m^2)$ statt $O(m(m+n))$ Operationen notwendig. Als zusätzlicher Aufwand ist die Berechnung von $QA^{i^\star}$ und der $\tilde{c}_i$ dazugekommen. Der eine erfordert $O(m^2)$ Operationen, der andere einen Aufwand zwischen $O(m)$ und $O(m(n+m))$ Operationen. Damit ist der Aufwand des revidierten Algorithmus i.a. nicht kleiner als der Aufwand im normalen Tableau.
Der revidierte Algorithmus hat jedoch zwei weniger offensichtliche Vorteile: Bei manchen (kombinatorischen) Problemen ist n sehr groß gegen m und A nur als Vorschrift zur Spaltenerzeugung bekannt, so daß nur der revidierte Algorithmus praktikabel ist. Weiter enthält A oft vor allem

Nullen (schwach besetzte Matrix), QA jedoch keinesfalls, so daß der Aufwand beim revidierten Algorithmus viel geringer ist. Schließlich läßt sich mit speziellen Techniken der Aufwand zur Berechnung der $QA^{i\star}$, ${c_B}^\top Q$ vermindern.

2.7 Pivotwahl und Antizykelalgorithmen

Die Beschreibung des Simplexalgorithmus in Abschnitt 2.4 bzw. seine Durchführung in Abschnitt 2.5 zeigen, daß für den Übergang von einem Tableau zum anderen nur die Wahl der Spalte $i^\star$ gemäß $\tilde{c}_{i^\star} < 0$ und der Zeile $j^\star$ gemäß $\frac{\xi_{j^\star 0}}{\xi_{j^\star i^\star}} = \lambda_0$ wichtig sind. Die spezielle Methode diente nur zum Nachweis der Endlichkeit. In der Praxis wird insbesondere Wert auf mehr Freiheit bei der Wahl der Spalte gelegt. So sind einige Möglichkeiten für die Spaltenwahl:

1. Man wählt das kleinste $\tilde{c}_i$. Diese Methode ist am weitesten verbreitet und entspricht dem steilsten Anstieg im Raum der Nichtbasisvariablen, da $\tilde{c}_i$ als Ableitung der Kostenfunktion nach der Nichtbasisvariablen x_i angesehen werden kann.

2. Man wählt die Spalte so, daß die Kosten im betreffenden Schritt maximal vermindert werden. Dies erfordert einen erheblichen Aufwand bei der Berechnung.

3. Ein Zuwachs der Nichtbasisvariablen x_i um 1 ändert x gemäß

$$x_k = \begin{cases} +1 & k = i \\ -\xi_{ji} & k = k_j,\ j = 1, \ldots, m \\ 0 & sonst \end{cases} .$$

   Damit ergibt sich als Ableitung der Kosten nach dem Abstand im Raum aller Variablen $\tilde{c}_i / \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{m} \xi_{ji}^2}$ und man wählt die Spalte mit der minimalen Ableitung.

Ist $\lambda_0 \neq 0$, so ändern sich die Kosten und damit ist eine Wiederholung der Basis unmöglich. Dies kann für $\lambda_0 = 0$ der Fall sein:

Beispiel 2.5 *Gegeben sei das Tableau*

3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
0	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Man verwende folgende Pivotsuche:
Spaltenwahl: Wähle das kleinste $\tilde{c}_i$.
Zeilenwahl: Wähle die erste Zeile, in der λ_0 angenommen wird.
Nach sechs Pivotschritten ist die erste Basis wieder erreicht.

Diese Erscheinung heißt Zykeln. Gesucht ist daher eine Methode, die bei freier Wahl der Spalte das Zykeln verhindert. Die einfachste Methode ist es, die Zeile nach einem Zufallsprinzip auszuwählen. Sie führt mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Erfolg. Zur Einführung einer deterministischen Regel dient

Definition 2.7 *$v \in \mathbb{R}^n$ heißt lexikographisch positiv (lex–positiv), falls seine erste von Null verschiedene Komponente positiv ist. Ist $v = 0$, so heißt v lex–null, und v heißt lex–negativ, falls $-v$ lex–positiv ist.*
Schreibweisen: $v \overset{L}{>} 0,\ v \overset{L}{=} 0,\ v \overset{L}{<} 0$.
Entsprechend lassen sich lex–größer , lex–kleiner und lex–gleich definieren. Weiter sind die Begriffe lex–min *und* lex–max *in der offensichtlichen Weise definiert.*

Beispiel 2.6 $(0,0,1,-3) \overset{L}{>} (0,0,0,2)$.

Zur Beschreibung des folgenden Verfahrens wird die i–te Zeile des Tableaus mit a_i bezeichnet. Zur Lösung von Mehrdeutigkeiten bei der Zeilenwahl beim Simplexalgorithmus wird jetzt die Zeile statt durch $\min\{\xi_{j0}/\xi_{ji^\star} \,|\, \xi_{ji^\star} > 0\}$ durch

$$\text{lex} - \min\{a_j/\xi_{ji^\star} \,|\, \xi_{ji^\star} > 0\}$$

festgelegt. Da zwei Zeilen nie gleich sein können, ist damit eine eindeutige Pivotwahl gesichert. Weiter läßt sich durch passende Numerierung stets erreichen, daß die Zeilen des Tableaus zu Beginn des Algorithmus lex–positiv sind, da das Tableau eine Einheitsmatrix enthält.

Satz 2.13 (Lexikographische Antizykelregel) *Zu Beginn des Simplexalgorithmus gelte $a_i \overset{L}{>} 0,\ i = 1,\ldots,m$. Dann implizieren die folgenden Pivotregeln, daß die Zeilen lex–positiv bleiben, die Zeile Null lexikographisch wächst und der Simplexalgorithmus nach endlich vielen Schritten endet:*
a) Wähle eine Spalte $i^\star$ mit $\tilde{c}_{i^\star} < 0$.
b) Wähle die Zeile gemäß

$$a_{j^\star}/\xi_{j^\star i^\star} = \textit{lex–min}\{a_j/\xi_{ji^\star} \,|\, \xi_{ji^\star} > 0\}.$$

Beweis: Die $a_j, j = 1,\ldots,m$ bleiben nach dem Pivotschritt lex–positiv: Für $j = j^\star$ gilt $a_{j^\star} = a'_{j^\star}/\xi'_{j^\star i^\star}$ und so $a_{j^\star} \overset{L}{>} 0$. Für $j \neq j^\star$ und $\xi'_{ji^\star} > 0$ gilt nach der lexikographischen Wahl von $j^\star$:

$$a_j = a'_j - \frac{\xi'_{ji^\star}}{\xi'_{j^\star i^\star}} a'_{j^\star} = \xi'_{ji^\star}\left(\frac{a'_j}{\xi'_{ji^\star}} - \frac{a'_{j^\star}}{\xi'_{j^\star i^\star}}\right) \overset{L}{>} 0.$$

Schließlich ist für $\xi'_{ji^\star} \leq 0$

$$a_j = a'_j - (\xi'_{ji^\star}/\xi'_{j^\star i^\star}) \cdot a'_{j^\star} = a'_j + |\xi'_{ji^\star}/\xi'_{j^\star i^\star}| \cdot a'_{j^\star} \overset{L}{>} 0.$$

Für die 0-te Zeile gilt

$$a_0 = a'_0 - (\xi'_{0i^\star}/\xi'_{j^\star i^\star}) \cdot a'_{j^\star} \overset{L}{>} a'_0.$$

Damit wächst die 0–te Zeile lexikographisch streng monoton. Da die 0–te Zeile durch die Basis festgelegt ist, kann sich keine Basis wiederholen und die Endlichkeit des Algorithmus folgt aus der endlichen Anzahl von Basen. □

2.8 Der duale Simplexalgorithmus

Zu (irgend-) einer Basislösungen gemäß Definition 2.6 kann man ein Tableau aufstellen. I.a. wird weder $x \geq 0$ oder äquivalent $Qb \geq 0$ sein, noch $\tilde{c} \geq 0$ gelten. Der (primale) Simplexalgorithmus beginnt mit einer zulässigen Basis, d.h. $Qb \geq 0$. In Pivotoperationen wird $x \geq 0$ erhalten und $\tilde{c} \geq 0$ erreicht. Der duale Simplexalgorithmus beginnt mit einer optimalen, aber unzulässigen Lösung, d.h. $\tilde{c} \geq 0$. Anschließend werden Pivotoperationen durchgeführt, die $\tilde{c} \geq 0$ erhalten und $x \geq 0$ erreichen.

Beispiel 2.7 *Beispiel 2.3 mit der Basis* $\{1,4,2\}$ *ergibt das Tableau*

$-\frac{45}{11}$	0	0	$\frac{12}{11}$	0	$\frac{3}{11}$
$\frac{10}{11}$	1	0	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{3}{11}$
$\frac{38}{11}$	0	0	$-\frac{5}{11}$	1	$\frac{7}{11}$
$-\frac{3}{11}$	0	1	$\frac{3}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$

Ist $\xi'_{j^\star i^\star}$ das Pivotelement, so gilt für die Pivotzeile $a_{j^\star} = a'_{j^\star}/\xi'_{j^\star i^\star}$. Also wird $j^\star$ so gewählt, daß $\xi'_{j^\star 0} < 0$ und $\xi'_{j^\star i^\star} < 0$ gilt. Weiter ist $i^\star$ so zu wählen, daß $\xi_{0i} \geq 0$, für $1 \leq i \leq n+m$. Dies wird gewährleistet durch die Wahl der Pivotspalte $i^\star$ mit $\xi'_{0i^\star}/\xi'_{j^\star i^\star} = \max\{\xi'_{0i}/\xi'_{j^\star i} \,|\, \xi'_{j^\star i} < 0\}$.

Beispiel 2.7 (Fortsetzung) $\xi_{3,5}$ *ergibt sich als Pivotelement. Der Pivotschritt ergibt*

$-\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1

Damit ist das Tableau optimal.

Ist das Problem nicht entartet, also $\xi'_{0i^\star}/\xi'_{j^\star i^\star} < 0$, so folgt

$$\xi_{00} = \xi'_{00} - \frac{\xi'_{j^\star 0}\xi'_{0i^\star}}{\xi'_{j^\star i^\star}} < \xi'_{00}.$$

Damit kann sich keine Basis wiederholen und das Verfahren ist endlich. Im Fall der Entartung wird die Endlichkeit durch eine geeignete Modifizierung eines Antizykelalgorithmus erreicht. Zum Start wird vorausgesetzt, daß alle Spalten lexikographisch positiv sind. Dies kann evtl. durch Zeilenvertauschungen und -umformungen geschehen. Eine sichere Methode ist es, die zusätzliche Restriktion

$$x_1 + \ldots + x_{n+m} \leq M$$

einzuführen, wobei M so groß ist, daß dies für alle zulässigen Punkte, die in Frage kommen, erfüllt ist, (M kann etwa aus der Problemstellung erraten werden oder auch systematisch bestimmt werden). Versehen mit einer Schlupfvariablen wird die Restriktion als erste Zeile hinzugefügt, so daß wegen $\tilde{c} \geq 0$ alle Spalten lexikographisch positiv sind.

Satz 2.14 *Beim Beginn des dualen Simplexalgorithmus seien alle Spalten nach der Nullten lexikographisch positiv, $A_i \overset{L}{>} 0,\ i = 1, \ldots, n+m$. Dann implizieren die folgenden Pivotregeln, daß diese Spalten lexikographisch positiv bleiben und die Spalte 0 lexikographisch streng fällt ($A_0 \downarrow_{\mathrm{L}}$) und daß der duale Simplexalgorithmus nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbricht:*

(a) Wähle eine Zeile $j^\star$ mit $\xi_{j\star 0} < 0$.

(b) Wähle die Spalte $i = i^\star$ gemäß $A_{i\star}/\xi_{j\star i\star} = \mathrm{lex} - \max\{\mathrm{A_i}/\xi_{\mathrm{j\star i}} \,|\, \xi_{\mathrm{j\star i}} < 0\}$.

Beweis: Das Pivotieren bedeutet für die i–te Spalte

$$A_i = A'_i - \frac{\xi'_{j\star i}}{\xi'_{j\star i\star}} \left(A'_{i\star} - e^{j^\star} \right).$$

Da $A'_{i\star} \overset{L}{>} 0$ und $\xi'_{j\star i\star} < 0$, muß $A'_{i\star} - e^{j^\star} \overset{L}{>} 0$ gelten. Für Spalten mit $\xi'_{j\star i} \geq 0$ folgt $A_i \overset{L}{\geq} A'_i \overset{L}{>} 0$. Für Spalten mit $\xi'_{j\star i} < 0$ folgt nach Wahl von $i^\star$

$$A_i = \xi'_{j\star i} \left(\frac{A'_i}{\xi'_{j\star i}} - \frac{A'_{i\star}}{\xi'_{j\star i\star}} \right) + \frac{\xi'_{j\star i}}{\xi'_{j\star i\star}} e^{j^\star} \overset{L}{>} 0.$$

Für $i = 0$ gilt $A_0 = A'_0 - \frac{\xi'_{j\star 0}}{\xi'_{j\star i\star}} \left(A'_{i\star} - e^{j^\star} \right) \overset{L}{<} A'_0$. Darum kann keine Basis doppelt vorkommen, und das Verfahren bricht ab. □

Die Wahl der Pivotspalte ist eindeutig, wenn alle Spalten paarweise verschieden sind. Dies kann man aber vor dem Start dadurch erreichen, daß Variable mit identischen Spalten zu einer zusammengefaßt werden.

Es bleibt die Interpretation des Algorithmus. Diese ergibt sich aus

$$c^\top = u^\top Q A + \tilde{c}^\top.$$

Die Bedingung an die Basis heißt also $c^\top \geq u^\top Q A$, d.h. $u^\top Q$ ist dual zulässig. Bezeichnet man mit A_k die Spalten von A, so gilt für $k \in B$ Gleichheit in $c_k \geq u^\top Q A_k$, d.h. $u^\top Q$ liegt in den m unabhängigen Ebenen $\{y \,|\, y^\top A_k = c_k,\ k \in B\}$, damit ist $y^\top = u^\top Q$ eine Ecke des zum dualen Problem gehörigen Polyeders. Also löst der duale Simplexalgorithmus das duale Problem durch Konstruktion einer Folge von dualen Ecken, für die die Zielfunktion $y^\top b$ wächst:

$$(u^\top Q) b = c^\top x = -\xi_{00}.$$

Diese Betrachtungen zeigen auch, daß unter gewissen Bedingungen, die optimale Lösung des dualen Problems aus dem Schlußtableau des primalen Problems abgelesen werden kann: Enthält das Starttableau eine Einheitsmatrix I und sind die zugehörigen Komponenten von c im Starttableau c', so enthält das Schlußtableau gerade oberhalb von I $\quad \tilde{c}' = c' - u^\top Q$, d.h. die Lösung y des dualen Problems ergibt sich zu $y = c' - \tilde{c}'$.

	$c'^\top$	
	I	

Starttableau

	$\tilde{c}' = c'^\top - y^\top$	
	Q	

Endtableau

3 Ganzzahlige lineare Optimierung

3.1 Einführung

Bei vielen Optimierungsproblemen sind nur ganzzahlige Lösungen von Interesse, z.B. Stückzahlen von Flugzeugen, etc. Darum betrachten wir :

Definition 3.1 *Ganzzahlige lineare Optimierung (Integer linear programming, ILP):*

$$\min\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n\},$$

für $c \in \mathbb{Z}^n, \quad A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{Z}^m$.
ILP kann ebenso in (wieder äquivalenter) kanonischer Form definiert werden.

Eine naheliegende Lösungsmöglichkeit wäre es, die Ganzzahligkeitsbedingung fallenzulassen, das normale LP zu lösen, und dann die optimale Lösung zu runden. Jedoch kann der Abstand der nähesten ganzzahligen Lösung sehr groß sein.

Beispiel 3.1 *Die optimale Lösung von* $\max\{x_1 \mid x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 - 20x_2 \leq 0,\ x_1 + 20x_2 \leq 20\}$ *ist* $(10, 1/2)$. *Es gibt aber nur die beiden ganzzahligen Lösungen* $(0,0)$ *und* $(0,1)$.

Ferner muß die gerundete Lösung nicht optimal sein.

Beispiel 3.2 *Betrachte* $\min\{2x_1 - 3x_2 \mid x_1, x_2 \geq 0,\ -x_1 + 2x_2 \leq 3\}$. *Die optimale Lösung ist* $(0, 3/2)$ *mit Zielfunktionswert* -4.5. *Die gerundete Lösung ist* $(0,1)$ *mit Zielfunktionswert* -3, *aber* $(1,2)$ *ist zulässig mit Zielfunktionswert* -4.

Desweiteren ist ILP durch die Beschreibung kombinatorischer Bedingungen als Ganzzahligkeitsbedingungen motiviert. Ein Runden würde hierbei die Struktur des Problems verletzen.

Beispiel 3.3 *A) Das TSP als ILP: Sei ein TSP mit* $n+1$ *Städten* $0, 1, \ldots, n$ *und den Abständen* c_{ij} *gegeben. Sei* T *eine Tour, d.h. eine Rundreise, die alle Städte genau einmal durchläuft. Es wird* $x_{ij} = 1$ *gesetzt, falls von Stadt* i *zu Stadt* j *gegangen wird. Damit wird TSP:*

$$\min\{z = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x_{ij} \mid \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ für alle } i,j, \tag{3.1}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i,j, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 0, \ldots, n, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 0, \ldots, n\} \tag{3.4}$$

Gleichungen (3.3) liefern, daß in jede Stadt genau einmal hineingegangen wird. (3.4) liefert, daß aus jeder Stadt genau einmal herausgegangen wird.
Man beachte, daß TSP nicht vollständig erfaßt ist, da jede Menge disjunkter Kreise den obigen Restriktionen genügt. Dies kann aber durch zusätzliche Bedingungen verhindert werden.

B) Logische Ausdrücke (falls $x, y \geq 0$):

$$(x \geq a \text{ oder } y \geq b) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \delta a;\ y \geq (1-\delta)b;\ \delta \in \mathbb{Z};\ 0 \leq \delta \leq 1.$$

Ersetzen einer Disjunktion durch MILP-Bedingung (MILP heißt mixed integer linear programming, da ganzzahlige Variable zusammen mit reellen Variablen auftreten).
C) Diskrete Variablen. Es sei eine Restriktion der Form $x \in \{s_1, \ldots, s_m\}$ gegeben. Darstellung: $x = s_1\delta_1 + \ldots + s_m\delta_m$ mit

$$\delta_1 + \ldots + \delta_m = 1,\ \delta_j \in \mathbb{Z},\ \delta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, m.$$

Zu einem ILP

$$\min\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n\} \tag{3.5}$$

kann man die zugehörige *LP–Relaxation*

$$\min\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \tag{3.6}$$

betrachten. Anhand der folgenden Tabelle kann man ablesen, welche Beziehungen zwischen (3.5) und (3.6) bestehen können.

ILP \ LP	$\emptyset$	∞	opt
$\emptyset$	x	x	x
∞	–	x	–
opt	–	–	x

Die erste Spalte erklärt sich von selbst. Genauso die zweite Zeile. Für die erste Zeile verwende man das Beispiel $\max\{x_1 \mid 3x_2 \geq 1,\ 3x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 0\}$ bzw. mit zusätzlicher Restriktion $x_1 \leq 1$. Es bleibt nur zu zeigen, daß im Falle der Unbeschränktheit von (3.6) das ganzzahlige Problem entweder unzulässig oder unbeschränkt ist. Hierzu geben wir zunächst ein Kriterium mit Hilfe des Lemmas von Farkas.

Satz 3.1 *Es gilt genau dann $\min\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} = -\infty$, falls ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b,\ x \geq 0$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ay = 0,\ c^\top y = -1,\ y \geq 0$ existiert.*

Beweis: Existieren x, y mit den genannten Eigenschaften, so ist das LP sicher unbeschränkt. Sei jetzt das LP unbeschränkt. Existiert kein x, so gilt $\min\{c^\top x \mid Ax = b,\ x \geq 0\} = \infty$. Existiert kein y, so folgt nach Satz 2.5, angewandt auf $A' = \binom{A}{c^\top}$ und $b' = \binom{0}{-1}$, daß es ein z gibt mit $z^\top \binom{A}{c^\top} \geq 0$ und $z^\top \binom{0}{-1} < 0$. Die letzte Koordinate von z sei daher o.B.d.A. 1. Sei jetzt z' der Vektor, den man aus z durch Weglassen der letzten Koordinate erhält, so folgt $z'^\top A \geq -c^\top$ oder $-z'^\top A \leq c^\top$, d.h. das duale Problem ist zulässig und so ein Widerspruch nach Satz 2.8. □

Satz 3.2 *Ist (3.6) unbeschränkt und hat (3.5) eine zulässige Lösung, dann ist (3.5) ebenfalls unbeschränkt.*

Beweis: Sei x eine zulässige Lösung von (3.5). Offensichtlich ist x eine zulässige Lösung von (3.6). Weiter existiert nach Satz 3.1 eine Lösung y^0 von $Ay^0 = 0,\ c^\top y^0 = -1,\ y^0 \geq 0$.
Wir können o.B.d.A. annehmen, daß alle Koordinaten von y rational sind: Der Lösungsraum L von $Ay = 0, c^\top y = -1$, zusammen mit $y_i = 0$, für die $y_i^0 = 0$, hat eine rationale Basis. Somit kann man y^0 mit rationalen $y^n \in L$ approximeren, so daß auch für die übrigen Koordinaten $y_i^n > 0$ gilt.
Für ein geeignetes Vielfaches $z = \alpha y^0$ gilt also $z \in \mathbb{Z}^n,\ Az = 0,\ c^\top z < 0,\ z \geq 0$. Somit liefert $\{x + nz \mid n = 0, 1, \dots\}$ eine unbeschränkte Folge von ganzzahligen zulässigen Lösungen für (3.5). □

3.2 Ein Schnittebenenverfahren von Gomory

Beim folgenden Schnittebenenverfahren wird für eine nichtganzzahlige Lösung des LP der zulässige Bereich weiter eingeschränkt, bis sich eine ganzzahlige Lösung ergibt. Sei das ILP (3.5) und die zugehörige LP–Relaxation (3.6) gegeben. Weiter seien F bzw. F^* die zulässigen Mengen von (3.5) bzw. (3.6).
Ist x^* eine optimale Ecke von (3.6), dann gilt:

1. Gilt $x^* \in \mathbb{Z}^n$, dann ist x optimal für (3.5).
2. $c^\top x^*$ ist eine untere Schranke für die Kosten in (3.5).

Ist $x^* \notin \mathbb{Z}^n$, so kann man versuchen, aus x^* und (3.6) neue lineare Restriktionen zu erzeugen, die

1. x^* abschneiden,
2. kein $x \in F$ abschneiden.

Eine solche Restriktion, die keine ganzzahlige Lösung ausschließt, heißt Schnittebene oder einfach Schnitt. Ein entsprechender Algorithmus stammt von R.E. Gomory. Dazu sei ein Beispiel von ILP gegeben. Eine Lösung von (3.6) mit dem Simplexalgorithmus ergibt eine Ecke x^* mit zugehöriger Basis $B = \{k_1, \dots, k_m\}$. Die Gleichungen im abschließenden Tableau haben die Gestalt

$$x_{k_i} + \sum_{j \notin B} \xi_{ij} x_j = \xi_{i0}, \quad 0 \leq i \leq m.$$

(Sind z die Kosten, so fasse man x_{k_0} als $-z$ auf. Der Fall $i = 0$ entspricht dann der Gleichung $\tilde{c}^\top x = c^\top x - c^\top x^*$.)
Aus $x \geq 0$ folgt für alle $x \in F^*$

$$\sum_{j \notin B} \lfloor \xi_{ij} \rfloor x_j \leq \sum_{j \notin B} \xi_{ij} x_j,$$

wobei $\lfloor \alpha \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq \alpha$ bedeutet. Damit wird aus der Gleichung des Tableaus

$$x_{k_i} + \sum_{j \notin B} \lfloor \xi_{ij} \rfloor x_j \leq \xi_{i0}. \tag{3.7}$$

Für jedes $x \in F$ ist die linke Seite von (3.7) in $\mathbb{Z}$. Daher gilt für $x \in F$

$$x_{k_i} + \sum_{j \notin B} \lfloor \xi_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \xi_{i0} \rfloor.$$

Subtraktion von der ursprünglichen Gleichung ergibt: $\sum_{j \notin B} (\xi_{ij} - \lfloor \xi_{ij} \rfloor) x_j \geq \xi_{i0} - \lfloor \xi_{i0} \rfloor$. Bezeichnet $f_{ij} = \xi_{ij} - \lfloor \xi_{ij} \rfloor$ den gebrochenen Teil von ξ_{ij}, so ergibt sich die Restriktion

$$\boxed{\sum_{j \notin B} f_{ij} x_j \geq f_{i0}.} \tag{3.8}$$

Diese heißt Gomory-Schnitt zur erzeugenden Zeile i und wird dem Tableau hinzugefügt. Damit x Basislösung bleibt, wird (3.8) mit -1 multipliziert und die Schlupfvariable s hinzugefügt:

$$\sum_{j \notin B} -f_{ij} x_j + s = -f_{i0}.$$

Der Effekt dieses Prozesses für ein optimales Tableau ist:

Satz 3.3 *Wird ein Gomoryschnitt dem optimalen Tableau eines LP hinzugefügt, dann werden keine ganzzahligen zulässigen Punkte ausgeschlossen und das neue Tableau ist ein Basistableau, das primal unzulässig ist, wenn ξ_{i0} nicht ganzzahlig ist, und dual zulässig ist.*

Beweis: Nach Konstruktion wird keine ganzzahlige zulässige Lösung ausgeschlossen. s ist eine neue Basisvariable und bildet zusammen mit der optimalen Basis B wieder eine Basis. Ist ξ_{i0} nicht ganzzahlig, dann gilt $f_{i0} > 0$ und die Basislösung schließt $s = -f_{i0}$ ein und ist damit primal unzulässig. Sie bleibt dual zulässig, da die nullte Zeile nicht geändert wird. □

Es ergibt sich

Algorithmus 3.1
Procedure Gebrochen–Dual (GDA);
begin
  löse (3.6) mit optimaler Lösung x^*;
  Zulässig:='Ja';
  while (x^* nicht ganzzahlig) **and** (Zulässig='Ja') **do**
  begin
    Wähle eine erzeugende Zeile i;
    Füge den erzeugten Gomory-Schnitt und eine entsprechende Basisvariable s zu (3.6) hinzu;
    Wende den dualen Simplexalgorithmus an;
    if (duales Problem ist unbeschränkt) **then** Zulässig:='Nein';
    Sei x^* das neue Optimum;
  end;
end.

Der Algorithmus heißt gebrochen–dualer Algorithmus, da gebrochene Anteile auftreten und die duale Zulässigkeit aufrechterhalten wird.

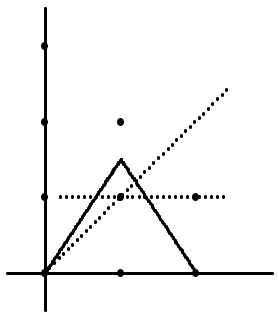
Beispiel 3.4 *Gegeben sei das ILP*

$$\max x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$x \geq 0, x \text{ ganzzahlig}$$



Mit den Schlupfvariablen x_3 und x_4 wird die Standardform

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-z =$	0	0	-1	0	0
$x_3 =$	6	3	2	1	0
$x_4 =$	0	-3	2	0	1

Das optimale Tableau folgt mit zwei Pivotschritten

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-z =$	3/2	0	0	1/4	1/4
$x_1 =$	1	1	0	1/6	$-1/6$
$x_2 =$	3/2	0	1	1/4	1/4

Dies entspricht $x = (1, 3/2)$ mit den Kosten $z = -3/2$. Wegen $x \notin \mathbb{Z}^2$ werden Schnitte erzeugt: Die Nullte Gleichung ist

$$-z + 1/4x_3 + 1/4x_4 = 3/2.$$

Dies ergibt den Schnitt

$$1/4x_3 + 1/4x_4 \geq 1/2.$$

Ersetzen von x_3 und x_4 durch die Gleichungen des Starttableaus zeigt, daß dies mit $x_2 \leq 1$ äquivalent ist.
(Die Wahl der ersten bzw. zweiten Zeile als erzeugende Zeile hätte als Schnitt

$$1/6x_3 + 5/6x_4 \geq 0 \quad \textit{bzw.} \quad 1/4x_3 + 1/4x_4 \geq 1/2$$

ergeben. Dies ist zu $x_2 \leq x_1 + 1/2$ bzw. $x_2 \leq 1$ äquivalent.)
Hinzufügen von $-1/4x_3 - 1/4x_4 + s_1 = -1/2$ ergibt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
$-z =$	3/2	0	0	1/4	1/4	0
$x_1 =$	1	1	0	1/6	$-1/6$	0
$x_2 =$	3/2	0	1	1/4	1/4	0
$s_1 =$	$-1/2$	0	0	$\mathbf{-1/4}$	$-1/4$	1

Der angegebene duale Pivotschritt ergibt

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
$-z =$	1	0	0	0	0	1
$x_1 =$	2/3	1	0	0	$-1/3$	2/3
$x_2 =$	1	0	1	0	0	1
$x_3 =$	2	0	0	1	1	-4

Die erste Zeile ergibt den nichttrivialen Schnitt $2/3x_4 + 2/3s_1 \geq 2/3$ *(äquivalent zu* $x_1 \geq x_2$*). Hinzufügen von* $-2/3x_4 - 2/3s_1 + s_2 = -2/3$ *zum Tableau ergibt*

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
$-z =$	1	0	0	0	0	1	0
$x_1 =$	2/3	1	0	0	−1/3	2/3	0
$x_2 =$	1	0	1	0	0	1	0
$x_3 =$	2	0	0	1	1	−4	0
$x_6 =$	−2/3	0	0	0	−2/3	−2/3	1

Optimieren mit dem dualen Simplexalgorithmus ergibt das optimale Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
$-z =$	1	0	0	0	0	1	0
$x_1 =$	1	1	0	0	0	1	−1/2
$x_2 =$	1	0	1	0	0	1	0
$x_3 =$	1	0	0	1	0	−5	3/2
$x_4 =$	1	0	0	0	1	1	−3/2

Satz 3.4 *Sei der GDA mit folgenden Regeln gegeben:*

(a) Die erzeugende Zeile sei die erste mit $\xi_{i0} \notin \mathbb{Z}$*.*

(b) Man benutze die lexikographische Version des dualen Simplexalgorithmus.

Dann gibt der GDA nach einer endlichen Zahl von Schritten die optimale Lösung oder die Unzulässigkeit des ILP.

Beweis: Die Hauptschleife im Algorithmus heiße Reoptimierung und das Tableau nach der l–ten Reoptimierung sei A^l mit den Spalten A^l_j. Da Zeilen immer am Ende des Tableaus angefügt werden, folgt $A^1_0 \overset{L}{>} A^2_0 \overset{L}{>} A^3_0 \overset{L}{>} \ldots$. Ist das ILP zulässig, so ist die erste Komponente $\xi^l_{00} = -z$ nach unten beschränkt. Wegen der Monotonie konvergiert also ξ^l_{00} gegen $w_{00} = \lfloor w_{00} \rfloor + f_{00}$. Für hinreichend großes $l = k$ gilt somit

$$\xi^k_{00} = \lfloor w_{00} \rfloor + f^k_{00}.$$

Nach der Regel (a) ist 0 die nächste erzeugende Zeile und der Schnitt

$$-f^k_{00} = -\sum_{j \notin B} f^k_{0j} x_j + s$$

wird dem Tableau hinzugefügt. Der nächste Schritt im dualen Algorithmus habe p als Pivotspalte, die in die Basis kommt. Nach diesem Pivotschritt wird

$$\xi^{k+1}_{00} = \xi^k_{00} - \frac{\xi^k_{0p}}{f^k_{0p}} f^k_{00}. \tag{3.9}$$

In einem optimalen Tableau des dualen Simplexalgorithmus gilt $\xi^k_{0p} \geq 0$ und somit ist ξ^k_{0p} größer als sein gebrochener Anteil: $\xi^k_{0p} \geq f^k_{0p}$. Aus (3.9) folgt dann

$$\xi^{k+1}_{00} \leq \xi^k_{00} - f^k_{00} = \lfloor \xi^k_{00} \rfloor = \lfloor w_{00} \rfloor.$$

Wegen der Monotonie gilt $\xi^l_{00} = \lfloor w_{00} \rfloor$, für $l \geq k+1$. Es folgt nun, daß ξ^l_{01} monoton fallend und beschränkt (nämlich ≥ 0) ist. Aus $\xi^{l+1}_{00} = \xi^l_{00}$ folgt $\xi^l_{0p} = 0$ und da A^l_p lex–positiv ist, gilt $\xi^l_{1p} \geq 0$. Wie oben ist dann auch ξ^l_{10} für hinreichend große l konstant und ganzzahlig.
Dieses Argument kann wiederholt werden, bis entweder alle Variablen ganzzahlig sind oder der duale Algorithmus die Unbeschränktheit des dualen Problems und damit die Unzulässigkeit des ILP liefert. □

Beim Algorithmus in dieser Form wird die Zahl der Gleichungen immer größer. Dies läßt sich vermeiden, indem die Schlupfvariable s_i mit der zugehörigen Zeile aus dem Tableau entfernt wird, wenn diese Variable in die Basis kommt. Auf diese Weise wird die Zahl der Zeilen nie größer als die Zahl der ursprünglichen Variablen. Es läßt sich zeigen, daß der Algorithmus auch bei dieser Variante abbricht und daß die Zahl der Schritte exponentiell beschränkt ist.

4 Konvexe Optimierung

4.1 Einleitung

Die lineare Optimierung ist durch Dantzigs Simplexverfahren sowohl theoretisch als auch praktisch im Prinzip vollständig erschlossen. Denn das Verfahren liefert immer eine Antwort und das mit relativ geringem Aufwand. Wie in anderen mathematischen Disziplinen bieten lineare Probleme oft nur ein idealisiertes Bild der realen Probleme, z.B. sind Kosten i.a. nicht proportional zu Stückzahlen (Mengenrabatte, Rationalisierung etc.). Wird dies bei den mathematischen Modellen berücksichtigt, gelangt man zu nichtlinearen Optimierungsaufgaben, die allgemein sowohl theoretisch als auch praktisch kein Patentverfahren zulassen. Der allgemeine Typ lautet:

Minimiere $F(x)$ unter den Nebenbedingungen

$$f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \quad \text{und} \quad g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, k.$$

Dabei sind F und die f_i, g_j stetige, reellwertige Funktionen von $x \in \mathbb{R}^n$. Ist F etwa die Höhe des Luftdrucks, so zeigt ein Blick auf die Wetterkarte, daß es viele lokale Minima und Maxima gibt. Damit wird das Auffinden eines absoluten Extremums höchst schwierig. Wenn man jedoch von den Restriktionen f_i, g_j und der Zielfunktion einschränkend Konvexität verlangt, dann kann man die Aufgaben theoretisch vernünftig behandeln und hat auch praktisch eine Fülle von Methoden zur Verfügung. Es wird sich zeigen, daß die Zielfunktion, wenn überhaupt, ihr Minimum auf einer konvexen Punktmenge annimmt und daß dieses Minimum absolut ist und keine (weiteren) relativen Minima existieren.

4.2 Konvexe Funktionen

Definition 4.1 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt* konvex, *wenn*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \textit{für alle } x, y \in K \textit{ und } \lambda \in (0,1). \tag{4.1}$$

f heißt streng konvex, *wenn für $x \neq y$ in (4.1) sogar $<$ gilt. Eine Funktion f heißt (streng)* konkav, *wenn $-f$ (streng) konvex ist.*

Insbesondere sind lineare Funktionen sowohl konvex als auch konkav.
Eine einfache Eigenschaft ist

Lemma 4.1 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f, g : K \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $\alpha, \beta \geq 0$. Dann ist $\alpha f + \beta g$ konvex.*

Beweis: Nachrechnen. □

Eine Verbindung zwischen konvexen Mengen und konvexen Funktionen gibt

Lemma 4.2 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn die Teilmenge $\{(\mu, x) : x \in K, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ konvex ist.*

Beweis: Aufgabe. □

Lemma 4.3 (Jensensche Ungleichung) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion. Dann gilt für $x^1, \ldots, x^m \in K$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$*

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x^i).$$

Beweis: Die Menge $M = \{(\mu, x) \in \mathbb{R}^n \,|\, x \in K, \mu \geq f(x)\}$ ist konvex, da f konvex ist. Damit ist jede Konvexkombination von Punkten aus M wieder in M. Dies ist äquivalent zur Ungleichung. □

Lemma 4.4 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig auf K.*

Beweis: Sei $x^0 \in K$. Dann gibt es einen Würfel $W = \text{conv}\{x^1, \ldots, x^{2^n}\}$ mit Mittelpunkt x^0 und $W \subset K$. Für alle $x \in W$ gilt nach Lemma 4.3 $f(x) \leq \max_{1 \leq i \leq 2^n} f(x^i) =: M$. Sei $B_r(x^0)$ eine Kugel mit Radius $r > 0$ um x^0, so daß $B_r(x^0) \subset W$ und somit $f(x) \leq M$, für $x \in B_r(x^0)$. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig und (o.E. $f(x^0) < M$) $\delta := \min\{r, \epsilon r/(M - f(x^0))\} > 0$. Für $y \in B_\delta(x^0)$ sei

$$x^1 = x^0 + \frac{r}{\delta}(y - x^0) \quad \text{und} \quad x^2 = x^0 - \frac{r}{\delta}(y - x^0).$$

Dann gilt $x^1, x^2 \in B_r(x^0)$ und

$$y = \frac{\delta}{r}x^1 + (1 - \frac{\delta}{r})x^0 \quad \text{und} \quad x^0 = \frac{\delta}{\delta + r}x^2 + \frac{r}{\delta + r}y.$$

Aus der Konvexität von f folgt, daß $f(y) - f(x^0) \leq \delta/r(M - f(x^0)) \leq \epsilon$ und $f(x^0) - f(y) \leq \delta/r(M - f(x^0)) \leq \epsilon$. Also ist f in x^0 stetig. □

Bemerkung: Für allgemeine konvexe Mengen gilt Lemma 4.4 nicht (vgl. Übung).

Definition 4.2 *Sei A eine $(n \times n)$–Matrix. Ist $x^\top Ax \geq 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so heißt A* positiv semidefinit. *Gilt für $x \neq 0$ sogar $x^\top Ax > 0$, dann heißt A* positiv definit.

Satz 4.1 *Sei A eine positiv definite $(n \times n)$–Matrix. Dann ist $f(x) = x^\top Ax$ streng konvex im $\mathbb{R}^n$. Ist A positiv semidefinit, dann ist f konvex.*

Beweis: Sei A positiv definit und $0 < \lambda < 1$. Dann gilt für $x \neq y$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(y + \lambda(x - y)) = \{y + \lambda(x - y)\}^\top A\{y + \lambda(x - y)\} \\ &= \lambda^2(x - y)^\top A(x - y) + \lambda(x - y)^\top Ay + \lambda y^\top A(x - y) + y^\top Ay. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda^2 < \lambda$ folgt

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &< \lambda(x - y)^\top A(x - y) + \lambda(x - y)^\top Ay + \lambda y^\top A(x - y) + y^\top Ay \\ &= \lambda(x^\top Ax - y^\top Ay) + y^\top Ay = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Ist A positiv semidefinit, so gilt nur $\leq$ statt $<$. □

Satz 4.2 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann gilt:*
(a) f ist konvex, genau dann, wenn für alle $x, y \in K$ gilt

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)^\top \operatorname{grad} f(x).$$

(b) f ist streng konvex, genau dann, wenn für alle $x, y \in K, x \neq y$ gilt

$$f(y) > f(x) + (y - x)^\top \operatorname{grad} f(x).$$

Beweis: (1) Es sei $\lambda \in (0, 1)$ und $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Dann gilt $f(x) \geq f(z) + (x - z)^\top \operatorname{grad} f(z)$ und $f(y) \geq f(z) + (y - z)^\top \operatorname{grad} f(z)$. Multiplikation mit λ bzw. $(1 - \lambda)$ und Addieren ergibt $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(z)$, d.h. f ist konvex. Analog für streng konvex mit $<$.
(2) Sei f konvex und $x, y \in K$. Für $\lambda \in [0, 1]$ setze

$$F(\lambda) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

Offensichtlich gilt $F(\lambda) \geq 0$ und $F(0) = F(1) = 0$. Für $\lambda \leq 1/2$ gilt $(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - 2\lambda)x + 2\lambda(x + y)/2$ und darum

$$F(\lambda) \geq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - (1-2\lambda) f(x) - 2\lambda f((x+y)/2) = \lambda(f(x) + f(y) - 2f((x+y)/2)).$$

Mit $c := f(x) + f(y) - 2f((x + y)/2) \geq 0$ gilt also $F(\lambda) \geq c\lambda$ und somit $F'(0) \geq c$. Aus $F'(0) = f(y) - f(x) - (y - x)^\top \operatorname{grad} f(x)$ folgt die Behauptung (beachte $c > 0$, wenn f streng konvex). □

Satz 4.3 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ sei 2–mal stetig partiell differenzierbar. Ist die (Hessesche) Matrix $A(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots n}$ für alle $x \in K$ positiv semidefinit (positiv definit), dann ist f konvex (streng konvex) auf K.*

Beweis: Entwickle f nach Taylor: Zu $x, y \in K$ gibt es ein ξ auf der Verbindungsstrecke mit

$$f(y) = f(x) + (y - x)^\top \operatorname{grad} f(x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top A(\xi)(y - x).$$

Es ist $A(\xi)$ positiv semidefinit, also

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)^\top \operatorname{grad} f(x).$$

Nach Satz 4.2 ist f also konvex. Analog mit $>$, wenn $A(\xi)$ positiv definit ist. □

Bei der Linearen Optimierung war die Menge der Minimallösungen eine *Seite* des zulässigen Polyeders. Hier ist diese Menge zumindest konvex.

Satz 4.4 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt*
(a) Jedes relative Minimum von f ist absolutes Minimum.
(b) Die Menge der Minimallösungen ist konvex.

Beweis: (a) Sei x relatives Minimum und $y \in K$. Für $\lambda > 0$ hinreichend klein gilt dann also $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)$. Also

$$f(x) \leq f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

woraus $f(x) \leq f(y)$ folgt.
(b) Sind $x, y \in K$ Minimalpunkte mit $f(x) = f(y) = M$, so gilt für $\lambda \in (0,1)$ einerseits $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq M$. Andererseits gilt wegen der Konvexität $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M$. □

Satz 4.5 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ streng konvex. Dann gibt es höchstens einen Minimalpunkt.*

Beweis: Seien $x \neq y$ Minimalpunkte mit $f(x) = f(y) = M$. Dann gilt $f((x+y)/2) < 1/2f(x) + 1/2f(y) = M$, Widerspruch. □

4.3 Trennungssätze

Der Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen kann geometrisch wie folgt interpretiert werden. Liegt ein Punkt b außerhalb eines Kegels K, so gibt es eine (Trenn–) Hyperebene H, so daß b und K auf verschiedenen Seiten von H liegen. Solche *Trennungssätze* gelten aber viel allgemeiner.

Satz 4.6 *Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvex, K_1 sei abgeschlossen, K_2 kompakt und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dann gibt es eine* (echte) Trennhyperebene *zu K_1 und K_2, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $c^\top x < \gamma < c^\top y$, für alle $x \in K_1, y \in K_2$.*

Beweis: Sei $d := \inf\{\|x-y\| \mid x \in K_1, y \in K_2\}$. Das Infimum wird angenommen:
Es gibt Folgen $x^\nu \in K_1, y^\nu \in K_2$ mit $\|x^\nu - y^\nu\| \to d$, für $\nu \to \infty$. $\{y^\nu\}$ hat nach Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge, o. E. sei $y^\nu \to v \in K_2$. Die x^ν sind o. E. alle aus $K_1 \cap B_{d+1}(v)$ (kompakt). Also hat auch $\{x^\nu\}$ eine konvergente Teilfolge, o. E. sei $x^\nu \to u \in K_1$. Es folgt $\|u - v\| = \lim \|x^\nu - y^\nu\| = d$.
Somit gilt $\|x-y\| \geq \|u-v\|$, für alle $x \in K_1, y \in K_2$. Es sei nun $x \in K_1$, dann gilt für die Funktion

$$d(\lambda) = \|((1-\lambda)u + \lambda x) - v\|^2 = \|u - v + \lambda(x-u)\|^2$$

$d'(0) \geq 0$. Nach der Kettenregel ist $d'(0) = 2(u-v)^\top(x-u)$ und mit $c = (v-u)$ folgt, daß $c^\top x \leq c^\top u$. Analog gilt $c^\top y \geq c^\top v > c^\top u$, für alle $v \in K_2$ und mit $\gamma = c^\top(u+v)/2$ folgt die Behauptung. □

Satz 4.7 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen und $p \in \mathrm{bd}(K)$ ein Randpunkt von K. Dann gibt es eine* Stützhyperebene *zu K, die p enthält, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit $c^\top x \leq c^\top p$, für alle $x \in K$.*

Beweis: Es gibt eine Folge von Punkten $\{p^\nu\}$ mit $p^\nu \to p$ und $p^\nu \notin K$. Nach Satz 4.6 gibt es Vektoren c^ν mit $\|c^\nu\| = 1$ mit ${c^\nu}^\top x < {c^\nu}^\top p^\nu$, für alle $x \in K$. O.E. sei c^ν konvergent gegen c mit $\|c\| = 1$ (Bolzano–Weierstraß). Dann gilt für alle $x \in K$

$$c^\top x = \lim {c^\nu}^\top x \leq \lim {c^\nu}^\top p^\nu = c^\top p.$$

□

.

Bemerkung: Die Bedingung K_2 ist notwendig, wie das Beispiel $K_1 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \leq\}$ und $K_2 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 \geq 1/x_1\}$ zeigt.

Satz 4.8 (Trennungssatz) *Es seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $K_1, K_2 \neq \emptyset$ und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit $c^\top x \leq c^\top y$, für alle $x \in K_1, y \in K_2$. Ist eine der beiden Mengen offen, so gilt sogar $<$.*

Beweis: Es ist $K = K_1 - K_2$ konvex und $0 \notin K$. Gilt $0 \notin \overline{K}$, dann existiert nach Satz 4.6 ein c mit $c^\top x < 0$, für alle $x \in \overline{K}$. Gilt $0 \in \overline{K}$, dann ist 0 Randpunkt von $\overline{K}$ (vgl. Übung). Nach Satz 4.7 gibt es also ein c mit $c^\top x \leq 0$, für alle $x \in \overline{K}$. Nach Definition von K folgt dann die Behauptung.
Ist eine der Mengen offen, so ist K offen. Aus $c^\top x = 0$, für ein $x \in K$, würde dann $c^\top y > 0$ für ein y in der Nähe von x gelten.
□

4.4 Der Sattelpunktsatz von Kuhn–Tucker

Im folgenden betrachten wir

Definition 4.3 *Allgemeines Konvexes Optimierungsproblem:*

$$\min\{F(x) \,|\, f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m,\, x \geq 0\}, \tag{4.2}$$

für konvexe Funktionen $F, f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Man beachte, daß die Menge M der zulässigen Punkte konvex ist. Dies ist i.a. nicht mehr der Fall, wenn konvexe Gleichungsrestriktionen hinzugefügt werden. Lineare Gleichungsrestriktionen $Ax - b = 0$ können aber ohne weiteres hinzugenommen werden. Die Nichtnegativitätsbedingung $x \geq 0$ ist keine echte Einschränkung, da man bei sinnvoll gestellten Problemen die Menge der zulässigen Punkte in den ersten Orthanten verschieben kann.

Definition 4.4 *Zu dem konvexen Optimierungsproblem (4.2) mit Zielfunktion F heißt*

$$\Phi(x, u) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) = F(x) + u^\top f(x)$$

die Lagrangefunktion *zu (4.2) und die u_i heißen* Lagrange–Multiplikatoren.

Definition 4.5 $\binom{x^0}{u^0} \in \mathbb{R}^{n+m}$ *mit* $x^0 \geq 0$, $u^0 \geq 0$ *heißt* Sattelpunkt *von* $\Phi(x,u)$ *(bezüglich des 1. Orthanten von* $\mathbb{R}^{n+m}$*), wenn für alle* $x \geq 0$, $u \geq 0$ *gilt*

$$\Phi(x^0,u) \leq \Phi(x^0,u^0) \leq \Phi(x,u^0).$$

Lemma 4.5 *Ist* $\binom{x^0}{u^0}$ *ein Sattelpunkt von* $\Phi(x,u)$*, so ist* x^0 *Minimallösung von (4.2).*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für alle $x \geq 0$ und $u \geq 0$

$$F(x^0) + u^\top f(x^0) \leq F(x^0) + u^{0\top} f(x^0) \leq F(x) + u^{0\top} f(x).$$

Also $u^\top f(x^0) \leq u^{0\top} f(x^0)$, für alle $u \geq 0$. Wählt man etwa $u = u^0 + e^i$, so folgt $f(x^0) \leq 0$. Also ist x^0 zulässiger Punkt und wegen $u^0 \geq 0$ folgt $u^{0\top} f(x^0) \leq 0$. Andererseits folgt mit $u = 0$ auch $u^{0\top} f(x^0) \geq 0$, also $u^{0\top} f(x^0) = 0$. Somit gilt für alle $x \geq 0$ zunächst $F(x^0) \leq F(x) + u^{0\top} f(x)$ und für zulässige x folglich $F(x^0) \leq F(x)$. Darum ist x^0 Minimalpunkt. □

Lemma 4.5 gilt für beliebige Funktionen F, f_i. Für die Umkehrung wird jedoch ausgenutzt, daß F und die f_i konvexe Funktionen sind.

Satz 4.9 (Kuhn-Tucker, 1951) *Es gebe ein zulässiges* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $f_i(x) < 0$*, für* $i = 1,\ldots,m$*. Dann ist* $x^0 \geq 0$ *genau dann Minimallösung von (4.2), wenn es ein* $u^0 \in \mathbb{R}^m$ *mit* $u^0 \geq 0$ *gibt, so daß* $\binom{x^0}{u^0}$ *ein Sattelpunkt von* $\Phi(x,u)$ *ist.*

Beweis: Die eine Richtung gilt nach Lemma 4.5. Sei nun x^0 Minimalpunkt und

$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, \exists x \geq 0 \text{ mit } y_0 \geq F(x) \text{ und } y_i \geq f_i(x), i = 1,\ldots,m\}$$

und

$$K_2 = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, y_0 < F(x^0),\ y_i < 0,\ i = 1,\ldots,m\}.$$

K_1 und K_2 sind nichtleer. K_2 ist offen und konvex.
K_1 ist konvex: Seien $v, w \in K_2$ und $\lambda \in (0,1)$. Dann gilt für $z = \lambda v + (1-\lambda)w$

$$z_0 = \lambda v_0 + (1-\lambda) w_0 \geq \lambda F(x^v) + (1-\lambda) F(x^w) \geq F(\lambda x^v + (1-\lambda) x^w)$$

und für $i = 1,\ldots,m$

$$z_i = \lambda v_i + (1-\lambda) w_i \geq \lambda f_i(x^v) + (1-\lambda) f_i(x^w) \geq f_i(\lambda x^v + (1-\lambda) x^w).$$

Ferner gilt $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, da x^0 Minimalpunkt. Somit gibt es nach Satz 4.8 ein $c = (c_0,\ldots,c_m)^\top \neq 0$ mit

$$c^\top v > c^\top w, \quad \forall v \in K_1, w \in K_2.$$

Mit $v \in K_1$ ist auch $v + \lambda e^i \in K_1$, für $\lambda \geq 0$ und $i = 0,\ldots,m$. Darum ist $c \geq 0$.
Für $x \geq 0$ ist $v = (F(x), f_1(x),\ldots,f_m(x))^\top \in K_1$ und $w = (F(x^0), 0, \ldots 0)^\top \in \overline{K_2}$, also $c^\top v \geq c^\top w$, d.h.

$$c_0 F(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \geq c_0 F(x^0).$$

Angenommen, $c_0 = 0$. Dann folgt $\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) \geq 0$, für alle $x \geq 0$, insbesondere für das x mit $f(x) < 0$. Mit $c \geq 0$ folgt dann $c_1 = \ldots = c_m = 0$, Widerspruch.
Also gilt $c_0 > 0$. Setze

$$u^0 := \frac{1}{c_0}(c_1, \ldots, c_m)^\top.$$

Dann ist also $u^0 \geq 0$. Aus obiger Gleichung folgt

$$F(x) + u^{0\top} f(x) \geq F(x^0), \quad \forall x \geq 0.$$

Insbesondere für $x = x^0$ folgt $u^{0\top} f(x^0) \geq 0$. Wegen $u^0 \geq 0$ und $f(x^0) \leq 0$ folgt dann $u^{0\top} f(x^0) = 0$. Zusammen mit $u^\top f(x^0) \leq 0$, für alle $u \geq 0$, folgt dann für alle $x \geq 0$ und $u \geq 0$

$$F(x^0) + u^\top f(x^0) \leq F(x^0) + u^{0\top} f(x^0) \leq F(x) + u^{0\top} f(x).$$

□

Bemerkungen: (1) Die Voraussetzung im Satz von Kuhn–Tucker heißt *Slater–Bedingung* und ist äquivalent zu der Bedingung: Zu jedem $i = 1, \ldots, m$ gibt es ein zulässiges x^i mit $f_i(x^i) < 0$.
(2) Für das Minimum der Zielfunktion kann man Schranken angeben. Sei x^0 Minimallösung. Ist einerseits x^1 zulässiger Punkt, so gilt $F(x^0) \leq F(x^1)$. Ist andererseits $u^\star \in \mathbb{R}^m, u^\star \geq 0$ fest und x^2 Lösung von $F(x) + u^{\star\top} f(x) \to \min$, für $x \geq 0$ (ohne Nebenbedingungen), so ist

$$F(x^2) + u^{\star\top} f(x^2) \leq F(x^0) + u^{\star\top} f(x^0) \leq F(x^0).$$

(3) Kuhn–Tuckers Satz ist eine Weiterführung der klassischen Lösung von Extremalproblemen mit Nebenbedingungen, wobei jetzt Ungleichungen erlaubt sind.

4.5 Lokale Kuhn–Tucker–Bedingungen

Im Satz von Kuhn–Tucker wird die Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe durch eine globale Sattelpunktbedingung charakterisiert. Sind F und die f_i differenzierbar, so kann man die globale Bedingung durch verschiedene lokale Bedingungen ersetzen. Wie im letzten Abschnitt sei $\Phi(x, u) = F(x) + u^\top f(x)$. Ferner setzen wir abkürzend

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)^\top \qquad \text{und} \\ \Phi_u &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}\right)^\top = f(x). \end{aligned}$$

Satz 4.10 *Es gebe ein zulässiges x mit $f_i(x) < 0, i = 1, \ldots, m$. $x^0 \geq 0$ ist genau dann Minimallösung von (4.2), wenn es ein $u^0 \geq 0$ gibt mit*

$$\Phi_x(x^0, u^0) \geq 0 \quad , \quad x^{0\top} \Phi_x(x^0, u^0) = 0 \tag{4.3}$$
$$\Phi_u(x^0, u^0) \leq 0 \quad , \quad u^{0\top} \Phi_u(x^0, u^0) = 0. \tag{4.4}$$

Beweis: (1) Es gebe ein $u^0 \geq 0$ mit (4.3) und (4.4). Da F und die f_i konvex sind und $u^0 \geq 0$, ist auch $\Phi(x, u^0)$ konvex. Nach Satz 4.2 gilt dann für alle $x \geq 0$

$$\Phi(x, u^0) \geq \Phi(x^0, u^0) + (x - x^0)^\top \Phi_x(x^0, u^0).$$

Weiter ist $\Phi(x^0, u)$ als Funktion von u linear (affin), d.h.

$$\Phi(x^0, u) = \Phi(x^0, u^0) + (u - u^0)^\top \Phi_u(x^0, u^0).$$

Mit (4.3) und (4.4) folgt $\Phi(x, u^0) \geq \Phi(x^0, u^0)$, für alle $x \geq 0$ und $\Phi(x^0, u) \leq \Phi(x^0, u^0)$, für alle $u \geq 0$, d.h. (x^0, u^0) ist Sattelpunkt.
(2) Sei (x^0, u^0) Sattelpunkt, also

$$\Phi(x^0, u) \leq \Phi(x^0, u^0) \leq \Phi(x, u^0), \quad \forall x \geq 0,\ u \geq 0.$$

Wäre $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} < 0$, für ein i, so wäre $x = x^0 + \epsilon e^i \geq 0$ mit $\Phi(x, u^0) < \Phi(x^0, u^0)$, für ein $\epsilon > 0$. Widerspruch. Also $\Phi_x(x^0, u^0) \geq 0$.
Wegen $x^0 \geq 0$ folgt $x^{0\top} \Phi_x(x^0, u^0) \geq 0$. Angenommen, für ein i gilt $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^0, u^0) > 0$ und $x_i^0 > 0$. Dann ist $x = x^0 - \epsilon e^i \geq 0$ und $\Phi(x, u^0) < \Phi(x^0, u^0)$, für ein $\epsilon > 0$. Widerspruch. Somit gilt $x^{0\top} \Phi_x(x^0, u^0) = 0$.
Analog zeigt man (4.4) für u mit umgekehrten Vorzeichen. □

Ein zulässiger Punkt x von (4.2) erfüllt die Restriktionen $f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$ und $g_j(x) := -x_j \leq 0,\ j = 1, \ldots, n$. Die Restriktionen, für die Gleichheit gilt, nennen wir *aktive* Restriktionen.

Satz 4.11 *Es gebe ein zulässiges x mit $f_i(x) < 0, i = 1, \ldots, m$. Ein zulässiger Punkt x^0 ist genau dann Minimallösung von (4.2), wenn $-\operatorname{grad} F(x^0)$ nichtnegative Linearkombination der Gradienten zu den aktiven Restriktionen ist. Gibt es keine aktive Restriktion, so gilt* $\operatorname{grad} F(x^0) = 0$.

Beweis: (1) Es sei $x^0 \geq 0$ Minimallösung, d.h. Φ hat einen Sattelpunkt $\binom{x^0}{u^0}$ mit $x^0 \geq 0$ und $u^0 \geq 0$. Nach Satz 4.10 gilt dann auch (4.3) und (4.4). Es seien P^0 und Q^0 die Menge der aktiven Restriktionen f_i bzw. g_j. Es gilt $\Phi_u(x^0, u^0) = f(x^0)$. Nach (4.4) ist $u^{0\top} f(x^0) = 0$, also kann nicht gleichzeitig $f_i(x^0) < 0$ und $u_i^0 > 0$ sein. Somit gilt $u_i^0 \geq 0$, für $i \in P^0$ und $u_i^0 = 0$, für $i \notin P_0$. Sei

$$v^0 := \Phi_x(x^0, u^0) = \operatorname{grad} F(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 \operatorname{grad} f_i(x^0).$$

Nach (4.3) in Satz 4.10 ist $v^0 \geq 0$ und $x^{0\top} v^0 = 0$. Somit kann nicht gleichzeitig $x_j^0 > 0$ und $v_j^0 > 0$ sein. Also $v_j^0 \geq 0$, für $j \in Q^0$ und $v_j^0 = 0$, für $j \notin Q^0$.
Mit der Darstellung

$$v^0 = -\sum_{j=1}^{n} v_j^0 \operatorname{grad} g_j(x^0) = -\sum_{j \in Q^0} v_j^0 \operatorname{grad} g_j(x^0)$$

wird

$$-\operatorname{grad} F(x^0) = \sum_{i \in P^0} u_i^0 \operatorname{grad} f_i(x^0) + \sum_{j \in Q^0} v_j^0 \operatorname{grad} g_j(x^0),$$

d.h. $-\operatorname{grad} F(x^0)$ ist nichtnegative Linearkombination der Gradienten zu aktiven Restriktionen. Insbesondere ist $\operatorname{grad} F(x^0) = 0$, wenn es keine aktiven Restriktionen gibt.
(2) Sei $-\operatorname{grad} F(x^0)$ nichtnegative Linearkombination der zu den aktiven Restriktionen gehörenden Gradienten, d.h. es gelte

$$-\operatorname{grad} F(x^0) = \sum_{i \in P^0} \alpha_i \operatorname{grad} f_i(x^0) + \sum_{j \in Q^0} \beta_j \operatorname{grad} g_j(x^0),$$

mit $\alpha_i, \beta_j \geq 0$. Setze $u_i^0 = \alpha_i$, für $i \in P^0$, und $u_i^0 = 0$, sonst und analog sei $v_j^0 = \beta_j$, für $j \in Q^0$, und $v_j^0 = 0$, sonst. Dann folgt $u^0 \geq 0, v^0 \geq 0, u^{0\top} f(x^0) = 0$ und $x^{0\top} v^0 = 0$. Ferner gilt

$$v^0 = \operatorname{grad} F(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 \operatorname{grad} f_i(x^0) = \Phi_x(x^0, u^0).$$

Also gelten mit $\Phi_u(x^0, u^0) = f(x^0) \leq 0$ genau die Bedingungen (4.3) und (4.4) aus Satz 4.10. (Im Falle $P^0 = Q^0 = \emptyset$ gilt dies alles mit $\operatorname{grad} F(x^0) = 0, u^0 = 0, v^0 = 0$.) □

Die Menge der Minimallösungen läßt sich wie folgt charakterisieren.

Satz 4.12 *Ist x^0 Minimallösung von (4.2), so ist die Menge der Minimallösungen die Menge der zulässigen z mit*

$$\operatorname{grad} F(z) = \operatorname{grad} F(x^0) \quad \textit{und} \quad (z - x^0)^\top \operatorname{grad} F(x^0) = 0. \tag{4.5}$$

Beweis: (1) Sei z zulässig und es gelte $\operatorname{grad} F(z) = \operatorname{grad} F(x^0)$ und $(z - x^0)^\top \operatorname{grad} F(x^0) = 0$. Da F konvex, gilt nach Satz 4.2

$$F(x^0) \geq F(z) + (x^0 - z)^\top \operatorname{grad} F(z) \geq F(z),$$

also ist z Minimallösung.
(2) Sei z Minimallösung. Dann ist die Funktion $g(\lambda) = F(x^0 + \lambda(z - x^0))$ auf $[0, 1]$ konstant, also nach der Kettenregel

$$(z - x^0)^\top \operatorname{grad} F(x^0) = \frac{d\, g}{d\, \lambda}(0) = 0.$$

Setze

$$H(y) = F(y) - (y - x^0)^\top \operatorname{grad} F(x^0).$$

Dann ist H konvex und $H(z) = F(z) = F(x^0) = H(x^0)$ und $\operatorname{grad} H(z) = \operatorname{grad} F(z) - \operatorname{grad} F(x^0)$. Nach Satz 4.2 für F (mit Basis x^0) eingesetzt in der Definition von H ergibt sich

$$H(y) \geq F(x^0) = H(z), \quad \forall y.$$

Somit hat H in z ein absolutes Minimum und es folgt $\operatorname{grad} H(z) = 0$, also $\operatorname{grad} F(z) = \operatorname{grad} F(x^0)$. □

4.6 Quadratische Optimierung

Unter den Verfahren der konvexen Optimierung nimmt die quadratische Optimierung eine Sonderstellung ein, weil es im wesentlichen auf das Simplexverfahren zurückgeführt werden kann.

Definition 4.6 *Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix. Dann lautet das Quadratische Optimierungsproblem*

$$\min\{Q(x) = p^\top x + x^\top Cx \,|\, Ax \le b,\, x \ge 0\}. \tag{4.6}$$

In Anlehnung an (4.2) sind hier die linearen Restriktionen in Form von Ungleichungen gegeben. Natürlich kann man das Problem äquivalent in der Standardform formulieren.

Satz 4.13 *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x) = Ax - b$, d.h. es treten nur lineare Restriktionen auf. Dann kann die Slater–Bedingung in den Sätzen 4.9, 4.10 und 4.11 entfallen.*

Beweis: Die Sätze 4.10 und 4.11 geben nur äquivalente Umschreibungen der Sattelpunktbedingung. Ferner wurde die Slater–Bedingung in Satz 4.9 nur in einer Richtung benötigt. Es reicht also die Notwendigkeit der Bedingung in Satz 4.11 zu zeigen.
Sei also x^0 Minimallösung. Ferner seien $a^{i_1}, \ldots, a^{i_p}, e^{j_1}, \ldots e^{j_q}$ die Vektoren zu den aktiven Restriktionen zu x^0, d. h. ${a^{i_k}}^\top x^0 = b_{i_k}$ bzw. $x^0_{j_k} = 0$, und

$$B = \left(-a^{i_1}, \ldots, -a^{i_p}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_q}\right) \in \mathbb{R}^{n\times(p+q)}.$$

Sei $y^\top B \ge 0$, d. h. $y^\top a^{i_k} \le 0$ und $y^\top e^{j_k} \ge 0$. Dann ist $x^0 + \lambda y$ für hinreichend kleine $\lambda > 0$ zulässig und somit $y^\top \operatorname{grad} F(x^0) \ge 0$. Nach Satz 2.5 existiert dann ein $z = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q) \ge 0$ mit $Bz = \operatorname{grad} F(x^0)$, d.h.

$$\operatorname{grad} F(x^0) = \sum_{i=1}^{p} -\alpha_i a^i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j e^j.$$

Damit ist $-\operatorname{grad} F(x^0)$ nichtnegative Linearkombination der Gradienten zu den aktiven Restriktionen. □

Bemerkung: Man kann zeigen, daß für Satz 4.13 die Bedingung F differenzierbar weggelassen werden kann. Treten sowohl lineare als auch nichtlineare Restriktionen auf, so gilt der Satz von Kuhn–Tucker, wenn die Slater–Bedingung für die nichtlinearen Restriktionen erfüllt ist.

Die Anwendung auf das quadratische Optimierungsproblem ergibt

Satz 4.14 *$x^0 \ge 0$ ist genau dann Lösung von (4.6), wenn gilt*
Es gibt $u^0 \in \mathbb{R}^m$, $v^0 \in \mathbb{R}^n, y^0 \in \mathbb{R}^m$ mit

$$u^0 \ge 0, v^0 \ge 0, y^0 \ge 0, \quad Ax^0 + y^0 = b, \quad v^0 - 2Cx^0 - A^\top u^0 = p \tag{4.7}$$

und

$${x^0}^\top v^0 + {u^0}^\top y^0 = 0. \tag{4.8}$$

Beweis: Es ist $\Phi(x,u) = p^\top x + x^\top C x + u^\top(Ax-b)$. Setze

$$v = \Phi_x = p + 2Cx + A^\top u, \quad y = -\Phi_u = -Ax + b.$$

Nach Satz 4.10 bzw. Satz 4.13 ist x^0 Minimallösung genau dann, wenn es ein $u^0 \geq 0$ gibt mit

$$\begin{aligned} v^0 = \Phi_x(x^0,u^0) \geq 0, \qquad & x^{0\top} v^0 = 0 \\ y^0 = -\Phi_u(x^0,u^0) \geq 0, \qquad & u^{0\top} y^0 = 0. \end{aligned}$$

Da in $x^{0\top}v^0$ und $u^{0\top}y^0$ nur nichtnegative Summanden stehen, ist $x^{0\top}v^0 = 0$ und $u^{0\top}y^0 = 0$ äquivalent zu $x^{0\top}v^0 + u^{0\top}y^0 = 0$. □

Man beachte, daß (4.8) die einzige nichtlineare Bedingung ist. Sie gibt zugleich eine Fehlerabschätzung ab:

Satz 4.15 (Einschließungssatz) *Sei $x^0 \geq 0, v^0, u^0, y^0$ Lösung von (4.7) und x^1 sei Minimallösung von (4.6). Dann gilt*

$$Q(x^0) - (x^{0\top}v^0 + y^{0\top}u^0) \leq Q(x^1) \leq Q(x^0).$$

Beweis: Sei $x^0 \geq 0, v^0 \geq 0, u^0 \geq 0, y^0 \geq 0$ Lösung von (4.7). Wegen $y^0 \geq 0$ ist $Ax^0 \leq b$. Also ist x^0 zulässig und die rechte Ungleichung folgt. Da Q konvex, folgt aus Satz 4.2 für zulässiges x

$$\begin{aligned} Q(x) - Q(x^0) &\geq (x-x^0)^\top \operatorname{grad} Q(x^0) = (x-x^0)^\top(p + 2Cx^0) \\ &= (x-x^0)^\top(v^0 - A^\top u^0) \\ &= x^\top v^0 - x^{0\top}v^0 - (Ax-b)^\top u^0 + (Ax^0-b)^\top u^0 \\ &\geq -x^{0\top}v^0 - y^{0\top}u^0. \end{aligned}$$

Mit $x = x^1$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 4.1 Gesucht ist $x = (x_1,x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 \leq 6$, $x_1 + 3x_2 \leq 18$ und minimalem $Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 48x_1 - 40x_2$. Also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -48 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Wählt man mit $x^0 = (3,5)^\top$ eine Ecke des zulässigen Polyeders, so wird $y^0 = b - Ax^0 = (0,3,0)^\top$. Mit $v^0 = 0$ findet man als eine nichtnegative Lösung von $v^0 - 2Cx^0 - A^\top u^0 = p$ den Vektor $u^0 = (30,6,0)^\top$. Mit $Q(x^0) = -301$ folgt aus Satz 4.15 folgende Einschließung für das Minimum $Q(x^1)$: $-319 \leq Q(x^1) \leq -301$. Minimallösung ist, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird oder wie aus Einsetzen in Satz 4.14 hervorgeht: $x^1 = (4,4)^\top$ mit $Q(x^1) = -304$.

Mit Satz 4.12 kann die Menge der Minimallösungen charakterisiert werden.

Satz 4.16 *Sei M die Menge der zulässigen Punkte für (4.6). Mit $x^0 \in M$ ist $x^0 + y \in M$ genau dann Minimallösung, wenn $Cy = 0$ und $p^\top y = 0$. Ist C positiv definit, so ist $y = 0$ die einzige Lösung.*

Beweis: Sei x^0 Minimallösung. Nach Satz 4.12 ist dann $x^0 + y$ genau dann Minimallösung, wenn $\operatorname{grad} Q(x^0) = \operatorname{grad} Q(x^0 + y)$ und $y^\top \operatorname{grad} Q(x^0) = 0$. Mit $\operatorname{grad} Q(x) = p + 2Cx$ ist dies ist äquivalent zu $Cy = 0$ und $p^\top y + 2y^\top Cx^0 = 0$. Da C symmetrisch, folgt die Behauptung. Ist C positiv definit, dann ist $Cy = 0$ genau dann, wenn $y = 0$. □

Die Menge der Minimallösungen ist also der Durchschnitt von M mit einem affinen Unterraum.

Falls die Restriktionen als Gleichungen gegeben sind, wird (4.6) zu

$$\min\{Q(x) = p^\top x + x^\top Cx \,|\, Ax = b,\, x \geq 0\}. \tag{4.9}$$

Anstelle von Satz 4.14 gilt dann

Satz 4.17 *$x^0 \geq 0$ ist genau dann Lösung von (4.9), wenn $Ax^0 = b$ gilt und es $u^0 \in \mathbb{R}^m$, $v^0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$v^0 - 2Cx^0 - A^\top u^0 = p, \quad v^0 \geq 0, \ (u^0 \textit{ beliebig}), \quad x^{0\top} v^0 = 0. \tag{4.10}$$

Beweis: Wende Satz 4.14 auf $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$ an: x^0 ist genau dann Minimallösung, wenn es $u', u'', y', y'' \in \mathbb{R}^m$ und ein $v^0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $u', u'', y', y'' \geq 0, v^0 \geq 0$ und

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x^0 + \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, \quad v^0 - 2Cx^0 - (A^\top, -A^\top) \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} = p$$

und

$$x^{0\top} v^0 + (u'^\top, u''^\top) \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = 0.$$

Notwendigerweise ist $y' = -y''$, also sind beide 0. Setzt man $u^0 = u' - u''$ (nun also ohne Vorzeichenrestriktion), so sind die Bedingungen äquivalent zu $Ax^0 = b$ und denen in (4.10). □

4.7 Das Verfahren von Wolfe

Unter den vielen Lösungsalgorithmen für quadratische Optimierung ist das bekannteste das von Wolfe (1959), das eine Variante des Simplexverfahrens mit einer Zusatzvorschrift ist, und das aus der Kuhn–Tucker–Theorie durch Spezialisierung folgt.
Ausgangspunkt des Verfahrens von Wolfe ist das Problem (4.9) mit positiv semidefiniter symmetrischer Matrix C. Wir setzen voraus, daß das Problem nicht unbeschränkt ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn C positiv definit ist oder wenn C positiv semidefinit und $p = 0$. Nach Satz 4.17 ist $x \geq 0$ genau dann Minimallösung von (4.9), wenn (ohne Indizes)

$$Ax = b, \quad -2Cx + v - A^\top u = p, \quad x \geq 0, \ v \geq 0, \ u \in \mathbb{R}^m, \quad x^\top v = 0. \tag{4.11}$$

In einem ersten Schritt sucht man einen zulässigen Punkt $\overline{x}$ von (4.9), d.h. mit $A\overline{x} = b, \overline{x} \geq 0$. Dies kann wie üblich durch Erraten oder durch die Phase–I im Simplexverfahren geschehen. Gibt es keinen zulässigen Punkt, so ist (4.9) nicht lösbar, ansonsten erhält man eine Ecke $\overline{x}$ des zulässigen Polyeders. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Lösung von (4.9) und damit von (4.11). Zur Lösung von (4.11) setzt man $h = p + 2C\overline{x}$ und löst das Hilfsproblem

$$\min\{\zeta \mid Ax = b,\ -2Cx + v - A^\top u + h\zeta = p,\ x \geq 0,\ v \geq 0,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \zeta \geq 0, \quad x^\top v = 0\}. \tag{4.12}$$

Wegen $x^\top v = 0$ ist das kein lineares Problem. Man kann es jedoch deuten als lineares Programm für den $(2n+m+1)$–dimensionalen Vektor $(x^\top, v^\top, u^\top, \zeta)$, mit der zusätzlichen Bedingung, daß zu jedem $i = 1, \ldots, n$ immer $x_i = 0$ oder $v_i = 0$ ist, da sonst $x^\top v > 0$. Das Problem (4.12) ist so konstruiert, daß $x = \overline{x}, v = 0, u = 0, \zeta = 1$ zulässiger Punkt ist und für $\zeta = 0$ (4.11) dasteht. Die Matrix zu (4.12) ist $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ -2C & I & -A^\top & h \end{pmatrix}$, d.h. eine $(2n + m + 1) \times (m + n)$–Matrix vom Rang $n + m$. Folgende $(m + n)$ Spaltenvektoren sind linear unabhängig.

(a) Die m Spaltenvektoren von A, die zu der Basis B von $\overline{x}$ gehören, ergänzt durch die entsprechenden Spalten von $-2C$.

(b) Alle Spaltenvektoren von $\begin{pmatrix} 0 \\ -A^\top \end{pmatrix}$ (beachte $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\top) = m$).

(c) Die $n - m$ Spaltenvektoren von $\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ zu Komponenten v_i mit $i \notin B$.

(Die Vektoren aus (b) und (c) sind linear unabhängig nach Definition der Basis bzw. der Ecke $\overline{x}$.) Diese $(m + n)$ linear unabhängigen Spalten sind noch keine Basis zum Startpunkt, da $\zeta = 1$. Darum muß einer der Vektoren zu den $u_i = 0$ oder $v_i = 0$ durch den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ ersetzt werden, und zwar so, daß die Menge linear unabhängig bleibt (es sei o.E. $h \neq 0$, sonst ist man fertig). Nun löst man (4.12) als lineares Programm wie beim Simplexverfahren, allerdings mit der Zusatzvorschrift

$$\begin{aligned} &\text{Verbleibt bei einem Austauschschritt } x_i \text{ (bzw. } v_i\text{) in der Basis,} \\ &\text{so darf } v_i \text{ (bzw. } x_i\text{) nicht in die Basis hineingenommen werden.} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dann ist immer $x^\top v = 0$ erfüllt. Das Verfahren endet, wenn $\zeta = 0$ erreicht wird, oder wenn bei $\zeta > 0$ kein zulässiger Austauschschritt mehr möglich ist.

Lemma 4.6 *Sei C positiv semidefinit und $x^\top Cx = 0$. Dann gilt $Cx = 0$.*

Beweis: Für $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig gilt

$$0 \leq (x + \lambda y)^\top C(x + \lambda y) = x^\top Cx + 2\lambda y^\top Cx + \lambda^2 y^\top Cy =: \varphi(\lambda).$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ ist 0 minimal und daher $\varphi'(0) = 0$. Also $y^\top Cx = 0$, für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und damit $Cx = 0$.

□

Satz 4.18 *Das Simplexverfahren mit der Zusatzvorschrift (4.13) führt zur Minimallösung* $\zeta = 0$ *von (4.12), wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) C *ist positiv definit.*

(b) C *ist positiv semidefinit und* $p = 0$*.*

(c) Ein Schritt, der zu $\zeta < 1$ *führt, ist möglich.*

Beweis: Angenommen das Verfahren bricht mit $\hat{\zeta} > 0$ ab. Es sei also in $\hat{x}, \hat{v}, \hat{u}, \hat{\zeta}$ kein erlaubter Pivotschritt mehr möglich. Dann hat das LP

$$\begin{aligned} \zeta \to \min & & \\ Ax &= b \\ -2Cx + v - A^\top u + h\zeta &= p \\ \hat{v}^\top x + \hat{x}^\top v &= 0 \\ x \geq 0, v \geq 0, u \in \mathbb{R}^m, \zeta \geq 0 & & \end{aligned}$$

in $\hat{x} \geq 0, \hat{v} \geq 0, \hat{u}, \hat{\zeta}$ eine optimale Lösung:
Nach jedem Pivotschritt muß für ein i sowohl x_i als auch v_i in der Basis sein. Sei o.E. vorher x_i in der Basis. Da die relativen Kosten zu v_i negativ sind, muß $\hat{x}_i > 0$ sein, da sonst der Tausch v_i gegen x_i erlaubt wäre (auch bei negativem Pivotelement). Wegen der zusätzlichen Voraussetzung kommt also v_i mit Wert 0 in die Basis und die Zielfunktion bleibt unverändert. Somit verbessert kein Pivotschritt die Zielfunktion.
Das hierzu duale LP

$$\begin{aligned} b^\top y + p^\top w \to \max & & \\ A^\top y - 2Cw + \hat{v}\xi &\leq 0 \\ w + \hat{x}\xi &\leq 0 \\ Aw &= 0 \\ h^\top w &\leq 1 \\ y \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R} & & \end{aligned}$$

hat eine Lösung $\hat{y}, \hat{w}, \hat{\xi}$ mit

$$b^\top \hat{y} + p^\top \hat{w} = \hat{\zeta} > 0.$$

Wegen $\hat{\zeta} > 0$ ist nach dem komplementären Schlupf $h^\top \hat{w} = 1$.
Wegen $\hat{x}^\top \hat{v} = 0$ tritt für jedes $i = 1, \ldots, n$ genau einer der drei folgenden Fälle auf:

1. $\hat{x}_i > 0, \hat{v}_i = 0$, dann ist $(A^\top \hat{y} - 2C\hat{w})_i = 0$,
2. $\hat{x}_i = 0, \hat{v}_i > 0$, dann ist $\hat{w}_i = 0$,
3. $\hat{x}_i = \hat{v}_i = 0$, dann ist $(A^\top \hat{y} - 2C\hat{w})_i \leq 0$ und $\hat{w}_i \leq 0$,

(jeweils mit komplementärem Schlupf). Also gilt $\hat{w}^\top(A^\top\hat{y} - 2C\hat{w}) \geq 0$.
Wegen $A\hat{w} = 0$ folgt $\hat{w}^\top C\hat{w} \leq 0$.
Ist C positiv definit, dann folgt $\hat{w} = 0$ im Widerspruch zu $h^\top\hat{w} = 1$. Also folgt (a).
Ist C positiv semidefinit, so folgt nur $C\hat{w} = 0$. Dann ist $1 = h^\top\hat{w} = (p + 2C\overline{x})^\top\hat{w} = p^\top\hat{w}$, im Widerspruch zu $p = 0$. Also folgt (b).
Schließlich ist $b^\top\hat{y} = \hat{x}^\top A^\top\hat{y} = 0$, denn mit $\hat{x}_i > 0$ ist $\hat{v}_i = 0$ und mit komplementärem Schlupf dann $(A^\top\hat{y})_i = 0$. Es folgt $\hat{\zeta} = 1$ und damit (c). □

Algorithmus 4.1
Procedure Wolfe ;
begin
Man finde mit Phase–I eine Ecke $\overline{x}$ von $Ax = b, x \geq 0$;
Setze $h = p + 2C\overline{x}$;
Man konstruiere eine Basis zur Lösung $(\overline{x}, 0, 0, 1)$ von (4.12);
Man löse (4.12) mit dem Simplexverfahren und der Vorschrift (4.13).
end.

Beispiel 4.2 Das Besipiel 4.1 wird nach Einführung von Schlupfvariablen zu

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 - 48x_1 - 40x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ x_1 + x_4 &= 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 &= 18, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Jetzt ist also $C = \mathrm{diag}(2, 1, 0, 0, 0)$. Startecke ist $\overline{x} = (0, 0, 8, 6, 18)^\top$. Dann ist $h = p + 2C\overline{x} = (-48, -40, 0, 0, 0)^\top$. Das zweite Gleichungssystem in (4.12) wird zu

$$\begin{aligned} -4x_1 + v_1 - u_1 - u_2 - u_3 - 48\zeta &= -48 \\ -2x_2 + v_2 - u_1 - 3u_3 - 40\zeta &= -40 \\ v_3 - u_1 &= 0 \\ v_4 - u_2 &= 0 \\ v_5 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die letzten 3 Gleichungen sind so gebaut, daß die nicht vorzeichenbeschränkten u_i eliminiert werden können. Dadurch reduziert sich das Gleichungssystem auf 5 Gleichungen. Das Problem hat dann Standardform und man erhält folgendes Tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	ζ
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_3	8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	6	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_5	18	1	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
v_1	-48	-4	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	-48
v_2	-40	0	-2	0	0	0	0	1	-1	0	-3	-40

Durch einen Pivotschritt (negatives Pivotelement) wird v_2 durch ζ ausgetauscht und man erhält das Basistableau

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	ζ
z	-1	0	$-1/20$	0	0	0	0	$1/40$	$-1/40$	0	$-3/40$	0
x_3	8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	6	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_5	18	1	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
v_1	0	-4	$12/5$	0	0	0	1	$-6/5$	$1/5$	-1	$13/5$	0
ζ	1	0	$1/20$	0	0	0	0	$-1/40$	$1/40$	0	$3/40$	1

Da v_2 nicht in der Basis ist, kann x_2 hineingenommen werden.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	ζ
z	-1	$-1/12$	0	0	0	0	$1/48$	0	$-1/48$	$-1/48$	$-1/48$	0
x_3	8	$8/3$	0	1	0	0	$-5/12$	$1/2$	$-1/12$	$5/12$	$-13/12$	0
x_4	6	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_5	18	6	0	0	0	1	$-5/4$	$3/2$	$-1/4$	$5/4$	$-13/4$	0
x_2	0	$-5/3$	1	0	0	0	$5/12$	$-1/2$	$1/12$	$-5/12$	$13/12$	0
ζ	1	$1/12$	0	0	0	0	$-1/48$	0	$1/48$	$1/48$	$1/48$	1

v_1 ist nicht in der Basis, also ist x_1 erlaubt.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	ζ
z	$-3/4$	0	0	$1/32$	0	0	$1/128$	$1/64$	$-3/128$	$-1/128$	$-7/128$	0
x_1	3	1	0	$3/8$	0	0	$-5/32$	$3/16$	$-1/32$	$5/32$	$-13/32$	0
x_4	3	0	0	$-3/8$	1	0	$5/32$	$-3/16$	$1/32$	$-5/32$	$13/32$	0
x_5	0	0	0	$-9/4$	0	1	$-5/16$	$3/8$	$-1/16$	$5/16$	$-13/16$	0
x_2	5	0	1	$5/8$	0	0	$5/32$	$-3/16$	$1/32$	$-5/32$	$13/32$	0
ζ	$3/4$	0	0	$-1/32$	0	0	$-1/128$	$-1/64$	$3/128$	$1/128$	$7/128$	1

Schließlich darf man v_3 in die Basis nehmen und man erhält

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	ζ
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_1	4	1	0	$1/3$	0	0	$-1/6$	$1/6$	0	$1/6$	$-1/3$	$4/3$
x_4	2	0	0	$-1/3$	1	0	$1/6$	$-1/6$	0	$-1/6$	$1/3$	$-4/3$
x_5	2	0	0	$-7/3$	0	1	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$	$-2/3$	$8/3$
x_2	4	0	1	$2/3$	0	0	$1/6$	$-1/6$	0	$-1/6$	$1/3$	$-4/3$
v_3	32	0	0	$-4/3$	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	$1/3$	$7/3$	$128/3$

Wegen $\zeta = 0$ ist man bei der Lösung der Aufgabe angelangt. Es wird $x_1 = 4, x_2 = 4$ und $Q_{\min} = -304$.

4.8 Ein Verfahren zulässiger Richtungen

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden zwei häufig benutzte iterative Verfahrenstypen beschrieben, die allgemein für konvexe Optimierung brauchbar sind. Für die quadratische Optimierung sind diese nur mittelmäßig, da sie im allgemeinen nicht nach endlich vielen Schritten abbrechen.
Bei dem Verfahren der zulässigen Richtungen wird folgendes Problem betrachtet.

$$\min\{F(x) \,|\, Ax = b,\ x \geq 0\}. \tag{4.14}$$

Dabei ist F konvex und stetig differenzierbar. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b,\ x \geq 0\}$ nichtleer und beschränkt ist.

Definition 4.7 *Sei $x \in M$. Dann heißt $s \in \mathbb{R}^n$* zulässige Richtung *in x, wenn*

$$\max\{\lambda \,|\, x + \lambda s \in M\} > 0 \quad \textit{und} \quad s^\top \operatorname{grad} F(x) < 0.$$

Satz 4.19 *$x \in M$ ist genau dann Lösung von (4.14), wenn es in x keine zulässigen Richtungen gibt.*

Beweis: (1) Es gebe in x keine zulässigen Richtungen. Dann gilt für beliebiges $y \in M, y \neq x$ und $s = y - x$: $\max\{\lambda | x + \lambda s \in M\} \geq 1$ und $s^\top \operatorname{grad} F(x) \geq 0$. Nach Satz 4.2 ist dann

$$F(y) - F(x) \geq s^\top \operatorname{grad} F(x) \geq 0,$$

also $F(y) \geq F(x)$. Da $y \in M$ beliebig war, ist x Minimalpunkt.
(2) Sei x Minimallösung und s zulässige Richtung in x. Dann ist die Funktion $\varphi(\lambda) = F(x + \lambda s)$ für ein Intervall $[0, \delta]$ definiert und ihre Ableitung in 0 ist nach der Kettenregel $\varphi'(0) = s^\top \operatorname{grad} F(x) < 0$. Für kleine $\lambda > 0$ ist also $x + \lambda s$ zulässig mit $F(x + \lambda s) < F(x)$, d.h. x ist kein Minimalpunkt. □

Das Verfahren verläuft so:
Man sucht einen (zulässigen) Startpunkt $x^0 \in M$ und eine zulässige Richtung s^0 in x^0. Gibt es kein solches s^0, so ist x^0 nach Satz 4.19 Minimalpunkt von (4.14). Andernfalls bestimmt man λ_0 aus $\min\{F(x^0 + \lambda s^0) \,|\, \lambda \geq 0, x^0 + \lambda s^0 \in M\}$. Mit $x^1 = x^0 + \lambda_0 s^0$ hat man den ersten Iterationspunkt usw.
Allgemein bestimmt man λ_k mit $F(x^k + \lambda_k s^k) = \min\{F(x^k + \lambda s^k) \,|\, \lambda \geq 0, x^k + \lambda s^k \in M\}$ und erhält $x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k$.
D.h. man bestimmt eine Folge von Näherungslösungen von (4.14), indem man eine Folge von Minimierungsaufgaben in einer Variablen löst. Aus dem Beweis von Satz 4.19 folgt, daß die Folge der Zielfunktionswerte streng monoton fällt. Weil F stetig und M kompakt ist, konvergiert das Verfahren, jedoch nicht unbedingt gegen den Minimalwert von (4.14), sofern man die zulässigen Richtungen nicht einschränkt.

Beispiel 4.3 Minimiere $F(x) = x_1 + x_2$ unter $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0$. Sei $x^1 = (2, 0)^\top$ und $s^k = (-1 - 1/k, 1 + 1/(k+1))^\top$, für k ungerade und $s^k = (1 + 1/(k+1), -1 - 1/k)^\top$, für k gerade. Dann ist $x^k = (1 + 1/k, 0)^\top$, für k ungerade und $x^k = (0, 1 + 1/k)^\top$, für k gerade. Mit grad $F = (1, 1)^\top$ ist $s^{k\top} \operatorname{grad} F(x^k) = 1/(k+1) - 1/k < 0$, also sind alle s^k zulässig. Trotzdem konvergiert $F(x^k) = 1 + 1/k$ gegen 1, obwohl $F_{\min} = 0$.

Daher müssen die zulässigen Richtungen eingeschränkt werden. Eine (von vielen) Vorschriften ist gegeben durch

Lemma 4.7 *Es sei y^k Lösung des linearen Programms* $\min\{x^\top \operatorname{grad} F(x^k) \mid Ax = b, x \geq 0\}$. *Dann gilt*

(a) Ist $(y^k - x^k)^\top \operatorname{grad} F(x^k) = 0$, so ist x^k Lösung von (4.14).

(b) Andernfalls ist $s^k = y^k - x^k$ zulässige Richtung.

Beweis: (a) Nach Definition von y^k gilt $(y^k - x)^\top \operatorname{grad} F(x^k) \leq 0$, für alle $x \in M$. Also gilt nach Satz 4.2 für alle $x \in M$

$$F(x) - F(x^k) \geq (x - x^k)^\top \operatorname{grad} F(x^k) \geq (y^k - x^k)^\top \operatorname{grad} F(x^k) = 0.$$

Darum ist x^k Minimalpunkt.
(b) Da $x^k \in M$, folgt nach Definition von y^k, daß $(y^k - x^k)^\top \operatorname{grad} F(x^k) < 0$. Wegen $x^k, y^k \in M$ ist $s^k = y^k - x^k$ dann also zulässige Richtung. □

Satz 4.20 *Werden die zulässigen Richtungen wie in Lemma 4.7 bestimmt, so konvergiert die Folge $\{F(x^k)\}$ gegen den Minimalwert von (4.14) und jede konvergente Teilfolge von $\{x^k\}$ konvergiert gegen eine Lösung.*

Beweis: Bricht das Verfahren nach endlichen vielen Schritten ab, so folgt die Behauptung aus Lemma 4.7. Ist das Verfahren nicht endlich, so ist $F(x^k)$ eine streng monoton fallende Folge, die nach Voraussetzung beschränkt ist. Also konvergiert sie gegen einen Wert γ. Sei α der Minimalwert von (4.14), dann gilt $\alpha \leq \gamma$.
Angenommen $\alpha < \gamma$. Die in Lemma 4.7 ermittelten y^k sind als Lösungen eines linearen Programms Ecken von M. Da M nur endlich viele Ecken hat, gibt es eine Ecke y^*, so daß $y^{k_j} = y^*$, für eine Teilfolge gilt. Da M kompakt ist, hat x^{k_j} eine konvergente Teilfolge, o.E. sei $x^* = \lim x^{k_j} \in M$ (mit $F(x^*) = \gamma$, da F stetig). Es sei $\overline{x}$ eine Lösung von (4.14), also $F(\overline{x}) = \alpha$. Es gilt nach Definition von y^k: $(y^{k_j} - \overline{x})^\top \operatorname{grad} F(x^{k_j}) \leq 0$. Durch Grenzübergang $(j \to \infty)$ und wegen der Stetigkeit von $\operatorname{grad} F$ folgt $(y^* - \overline{x})^\top \operatorname{grad} F(x^*) \leq 0$, also mit Satz 4.2:

$$\beta := (y^* - x^*)^\top \operatorname{grad} F(x^*) \leq (\overline{x} - x^*)^\top \operatorname{grad} F(x^*) \leq F(\overline{x}) - F(x^*) = \alpha - \gamma < 0.$$

Also existiert ein ϵ mit $0 < \epsilon < 1/2\|x^* - y^*\|$ und $(y^* - x)^\top \operatorname{grad} F(x) \leq \beta/2$, für alle $x \in U_1 = \{x \mid x \in M, \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$. Sei $U_2 = \{x \mid x \in M, \|x - x^*\| \leq \epsilon/2\}$. Wegen $x^{k_j} \to x^*$ sind alle bis auf endlich viele der x^{k_j} in U_2 enthalten. Für $x^{k_j} \in U_2$ und $y^{k_j} = y^*$ sei z^{k_j} der Punkt auf der Verbindungsstrecke von x^{k_j} und y^*, der auf dem Rand von U_1 liegt. Dann gilt $z^{k_j} - x^{k_j} = \lambda(y^* - z^{k_j})$ mit $\lambda = \frac{\|z^{k_j} - x^{k_j}\|}{\|y^* - z^{k_j}\|} \geq \frac{\epsilon/2}{\|y^* - x^*\| + \epsilon} =: \mu$. Nach Definition von x^{k_j+1} und Satz 4.2 gilt (beachte $\beta < 0$)

$$\begin{aligned} F(x^{k_j+1}) &\leq F(z^{k_j}) \leq F(x^{k_j}) + (z^{k_j} - x^{k_j})^\top \operatorname{grad} F(z^{k_j}) \\ &= F(x^{k_j}) + \lambda(y^* - z^{k_j})^\top \operatorname{grad} F(z^{k_j}) \\ &\leq F(x^{k_j}) + \mu\beta/2. \end{aligned}$$

Darum wird im Laufe des Verfahrens der Zielfunktionswert unendlich oft um $|\mu\beta/2|$ verringert. Widerspruch zu F beschränkt.
Also gilt $\lim F(x^k) = \gamma = \alpha$. Konvergiert eine Teilfolge der x^k gegen ein $\overline{x}$, so folgt mit der Stetigkeit von F, daß $F(\overline{x}) = \gamma = \alpha$. □

Algorithmus 4.2
Procedure Zulässige Richtungen ;
begin
opt = 'Nein';
Man bestimme ein zulässiges x^0;
$k = 0$;
repeat
Bestimme Lösung y^k von $\min\{x^\top \operatorname{grad} F(x^k) \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$ mit dem Simplexalgorithmus;
$s^k = y^k - x^k$;
if ${s^k}^\top \operatorname{grad} F(x^k) = 0$ **then** opt = 'Ja', STOP **else**
begin
Bestimme λ_k mit $F(x^k + \lambda_k s^k) = \min\{F(x^k + \lambda s^k) \,|\, \lambda \geq 0, x^k + \lambda s^k \in M\}$;
Setze $x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k$;
$k = k + 1$;
end;
until opt = 'Ja' **or** x^k ist hinreichend gut;
end.

Beispiel 4.4 Minimiere $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$ unter $x_1 + 2x_2 \leq 8,\ x_1 + x_2 \leq 5,\ x_1, x_2 \geq 0$. Die Ecken sind $w^1 = (0,0)^\top, w^2 = (5,0)^\top, w^3 = (2,3)^\top, w^4 = (0,4)^\top$. Weiter ist $\operatorname{grad} F(x) = (2x_1 - 4, 2x_2 - 2)^\top$. Da F streng konvex ist, existiert eine eindeutige Lösung und die ist $\overline{x} = (2,1) \in M$ und $\operatorname{grad} F(\overline{x}) = (0,0)^\top$. Also $F_{\min} = F(\overline{x}) = -5$.

(1) Start in $x^0 = w^1 = (0,0)^\top$. Dann ist $F(x^0) = 0$ und $\operatorname{grad} F(x^0) = (-4,-2)^\top$. Durch Vergleich der Werte in den Ecken erhält man mit Lemma (4.7) $y^0 = w^2 = (5,0)^\top$. Mit $x(\lambda) = \lambda x^0 + (1-\lambda)y^0 = (5(1-\lambda), 0)^\top$ und $\varphi(\lambda) = F(x(\lambda)) = 25(1-\lambda)^2 - 20(1-\lambda)$ wird das Minimum von $\varphi(\lambda)$ gesucht, $0 \leq \lambda \leq 1$. $\varphi'(\lambda) = 0$ liefert $\lambda_0 = 3/5$.

(2) Also $x^1 = x(\lambda_0) = (2,0)^\top$ und $F(x^1) = -4$ und $\operatorname{grad} F(x^1) = (0,-2)^\top$. Durch Vergleich der Werte in den Ecken erhält man mit Lemma (4.7) $y^1 = w^4 = (0,4)^\top$. Mit $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1-\lambda)y^1 = (2\lambda, 4(1-\lambda))^\top$ und $\varphi(\lambda) = F(x(\lambda)) = 20\lambda^2 - 32\lambda + 8$ wird das Minimum von $\varphi(\lambda)$ gesucht, $0 \leq \lambda \leq 1$. $\varphi'(\lambda) = 0$ liefert $\lambda_1 = 4/5$.

(3) Also $x^2 = x(\lambda_1) = (8/5, 4/5)^\top$ und $F(x^2) = -4.8$ und $\operatorname{grad} F(x^2) = (-4/5, -2/5)^\top$. Durch Vergleich der Werte in den Ecken erhält man mit Lemma (4.7) $y^2 = w^2 = (5,0)^\top$. Mit $x(\lambda) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 = (5 - 17/5\lambda, 4/5\lambda)^\top$ und $\varphi(\lambda) = F(x(\lambda)) = 5 - 22\lambda + 61/5\lambda^2$ wird das Minimum von $\varphi(\lambda)$ gesucht, $0 \leq \lambda \leq 1$. $\varphi'(\lambda) = 0$ liefert $\lambda_2 = 55/61$.

(4) Also $x^3 = x(\lambda_2) = (118/61, 44/61)^\top$ und $F(x^3) = -4.92\ldots$ usw.

4.9 Ein Schnittebenenverfahren

Sind $F, f_1, \ldots, f_m$ konvexe Funktionen, so betrachten wir das Problem

$$\min\{F(x) \,|\, f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}. \tag{4.15}$$

Zusätzlich setzen wir voraus

(1) Die Menge der zulässigen Punkte $M = \{x \,|\, f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ seien in einem Polytop $S^0 = \{x \,|\, Ax \leq b\}$ enthalten (S^0 und damit auch M sind also beschränkt).

(2) Auf S^0 seien die F und die f_i konvex und differenzierbar und $\| \operatorname{grad} f_i(x) \| \leq K,\ i = 1, \ldots, m$.

Man darf annehmen, daß die Zielfunktion linear ist, denn ansonsten füge man die zusätzliche Restriktion $f_{m+1}(x) = F(x) - x_{n+1} \leq 0$ ein und minimiere x_{n+1}.
Weiter sei $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ für $x \in S^0$. f ist konvex und stetig aber nicht überall differenzierbar. In Punkten, wo das Maximum mehrfach angenommen wird, kann man einen der betreffenden Gradienten auswählen, so daß $\operatorname{grad} f$ (in einem gewissen Sinne) definiert und beschränkt ist.
Wegen $f(x) \leq 0$ genau dann, wenn alle $f_i(x) \leq 0$, ist das Problem (4.15) also äquivalent zu

$$\min\{c^\top x \,|\, f(x) \leq 0\}. \tag{4.16}$$

Das Verfahren (von Kelley, 1960) besteht nun aus einer (im allgemeinen unendlichen) Folge von linearen Programmen. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ sei x^k Minimallösung von $\min\{c^\top x \,|\, x \in S^k\}$ und

$$S^{k+1} = S^k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x^k) + (x - x^k)^\top \operatorname{grad} f(x^k) \leq 0\}. \tag{4.17}$$

Bemerkungen: (1) S^{k+1} entsteht also aus S^k durch Abschneiden mit der Hyperebenen $f(x^k) + (x - x^k)^\top \operatorname{grad} f(x^k) = 0$. Daher nennt man die Methode Schnittebenenverfahren. Diese Schnitthyperebene ist der Schnitt der Tangentialebene (bzw. Stützebene) von f in x^k (im $\mathbb{R}^{n+1}$) mit dem n–dimensionalen Raum $y = x_{n+1} = 0$.
(2) Da S^0 Polytop ist, gilt dies auch für alle S^k.

Lemma 4.8 *(a) $M \subset S^k$, für alle k.*

(b) Entweder ist x^k Minimallösung von (4.16) oder $x^k \notin M$ und $x^k \in S^k \backslash S^{k+1}$.

Beweis: (a) Mit vollständiger Induktion. Nach Voraussetzung ist $M \subset S^0$. Sei $M \subset S^{k-1}$. Für alle zulässigen $x \in M$ gilt mit Satz 4.2

$$0 \geq f(x) \geq f(x^k) + (x - x^k)^\top \operatorname{grad} f(x^k),$$

d.h. x wird nicht abgeschnitten. Da $x \in M$ beliebig, folgt $M \subset S^k$.
(b) Sei x^k Minimalpunkt bzgl. S^k. Gilt $x^k \in M$, so ist x^k wegen $M \subset S^k$ erst recht Minimalpunkt bzgl. M. Ist aber $x^k \notin M$, so ist $f(x^k) > 0$ und die Ungleichung $f(x^k) + (x - x^k)^\top \operatorname{grad} f(x^k) \leq 0$ ist für $x = x^k$ nicht erfüllt. Also $x^k \notin S^{k+1}$ aber $x^k \in S^k$. □

Im Laufe des Verfahrens sind drei Fälle möglich.

(1) Ein $S^k = \emptyset$. Nach Lemma 4.8 ist dann auch $M = \emptyset$ und (4.16) hat keine Lösung.

(2) Ein $x^k \in M$. Nach Lemma 4.8 ist dann x^k Minimallösung.

(3) Man erhält eine unendliche Folge $\{x^k\}$ und zugehörige $\{S^k\}$ mit $S^{k+1} \subset S^k$.

In Fall (3) gilt

Satz 4.21 *Jeder Häufungspunkt $\overline{x}$ von $\{x^k\}$ ist Minimalpunkt von (4.16).*

Beweis: Es sei x^{k_j} eine Teilfolge, die gegen $\overline{x}$ konvergiert. Dann gilt für alle $x \in M$, daß $f(x) \geq f(x^{k_j})$. Wegen der Stetigkeit von f gilt also $f(\overline{x}) \leq f(x)$, für alle $x \in M$. Damit reicht es zu zeigen, daß $\overline{x} \in M$.
Angenommen, $\overline{x} \notin M$. Dann gilt $f(\overline{x}) = \eta > 0$. Da $\overline{x}$ Häufungspunkt ist und f stetig, existiert ein k mit $\|x^k - \overline{x}\| < \eta/(2K)$ und $f(x^k) > \eta/2$ (dabei ist K mit $\|\operatorname{grad} f(x)\| \leq K$, für alle $x \in S^0$). Damit wird

$$f(x^k) + (\overline{x} - x^k)^\top \operatorname{grad} f(x^k) > \eta/2 - (\eta/(2K))K = 0.$$

Also ist $\overline{x} \notin S^{k+1}$. Da S^{k+1} abgeschlossen ist, gilt sogar für eine ganze Umgebung $B = B(\overline{x}, \epsilon)$, daß $B \cap S^{k+1} = \emptyset$. Wegen $x^l \in S^{k+1}$, für $l \geq k+1$, ist dies ein Widerspruch. □

Bemerkung: Im 1–dimensionalen Fall stimmt die Methode mit dem klassischen Newton–Verfahren überein.

Algorithmus 4.3
Procedure Kelley ;
begin
leer = 'Nein'; opt = 'Nein';
Man bestimme ein Polytop S^0 mit $M \subset S^0$;
$k = 0$;
repeat
Bestimme Lösung x^k von $\min\{c^\top x \mid x \in S^k\}$ mit dem Simplexalgorithmus;
if $S^k = \emptyset$ **then** leer = 'Ja', STOP **else**
if $x^k \in M$ **then** opt = 'Ja', STOP **else**
begin
$S^{k+1} = S^k \cap \{x \mid f(x^k) + (x - x^k)^\top \operatorname{grad} f(x^k) \leq 0\}$;
$k = k + 1$;
end;
until (leer = 'Ja') **or** (opt = 'Ja') **or** (x^k ist 'hinreichend zulässig');
end.

Beispiel 4.5 Minimiere $F(x) = x_1 - x_2$ unter $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0$. M ist Ellipse und $x^\star = (0,1)^\top$ ist Minimalpunkt mit $F_{\min} = -1$. Ferner $\operatorname{grad} f(x) = (6x_1 - 2x_2, -2x_1 + 2x_2)^\top$. Man wähle $S^0 = \{x \mid |x_1|, |x_2| \leq 2\}$.

(1) Das Minimmum von F bzgl. S^0 liegt in $x^0 = (-2,2)^\top$ mit $F(x^0) = -4$. Es ist $f(x^0) = 23 > 0$, also $x^0 \notin M$. Wegen $\operatorname{grad} f(x^0) = (-16,8)^\top$ ist die Schnittebene $-16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$. Also $S^1 = \{x \mid |x_1|, |x_2| \leq 2,\ -16x_1 + 8x_2 \leq 25\}$.

(2) Das Minimmum von F bzgl. S^1 liegt in $x^1 = (-9/16, 2)^\top$ mit $F(x^1) = -41/16$. Wegen $f(x^1) > 0$ ist $x^1 \notin M$. $\operatorname{grad} f(x^1) = 1/8(-59, 41)^\top$. Also ist die Schnittebene $-59/8x_1 + 41/8x_2 - 2099/256 \leq 0$.

Also $S^2 = \{x \,|\, |x_1|, |x_2| \leq 2,\ -16x_1 + 8x_2 \leq 25,\ -59/8x_1 + 41/8x_2 \leq 8.2\}$.
Und so weiter. Man erhält eine Folge von Schnittebenen, die sich der Tangente an M in $x^\star$ annähern.

Die Nachteile des Verfahrens sind

- Im allgemeinen unendlich viele Schritte.
- Langsame Konvergenz.
- Keines der x^k gehört zu M.
- Wachsende Anzahl von Restriktionen.
- Im Grenzfall schleifende Schnitte.

Daher ist das Verfahren selbst inzwischen überholt. Es dient aber als Ausgangspunkt für diverse Varianten.

4.10 Ganzzahlige konvexe Optimierung

Natürlich kann auch bei konvexer Optimierung die Ganzzahligkeit der Lösungen notwendig sein. Seien also konvexe Funktionen $F, f_1, \ldots, f_m$ gegeben. Dann betrachten wir das Problem

$$\min\{F(x) \,|\, f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n\}. \tag{4.18}$$

Man kann wieder o.E. annehmen, daß $F(x) = c^\top x$ linear ist. Zur Lösbarkeit des Problems ist notwendig:

(1) Die Menge der zulässigen Punkte der Relaxation $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ x \geq 0\}$ liegt in einem Polytop $S^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.

(2) Die f_i seien auf S^0 konvex und differenzierbar und und ihre partiellen Ableitungen seien auf S^0 beschränkt.

Man löst das Problem wie beim Schnittebenenverfahren, nur daß nun statt des Simplexalgorithmus das Gomory–Verfahren angewandt wird.

Algorithmus 4.4
Procedure Ganzzahlige Konvexe Optimierung ;
begin
leer = 'Nein'; opt = 'Nein';
Man bestimme ein Polytop S^0 mit $M \subset S^0$;
$k = 0$;

repeat
Bestimme Lösung x^k von $\min\{c^\top x \,|\, x \in S^k, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit dem GDA;
if $S^k \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ **then** leer = 'Ja', STOP **else**
if $x^k \in M \cap \mathbb{Z}^n$ **then** opt = 'Ja', STOP **else**
begin
Bestimme p mit $f_p(x^k) = \max\{f_i(x^k) \,|\, i = 1, \ldots, m\}$;
$S^{k+1} = S^k \cap \{x \,|\, f_p(x^k) + (x - x^k)^\top \operatorname{grad} f_p(x^k) \leq 0\}$;
$k = k + 1$;
end;
until (leer = 'Ja') **or** (opt = 'Ja');
end.

Satz 4.22 *Der Algorithmus 4.4 liefert nach endlich vielen Schritten eine Lösung von (4.18) oder meldet, daß das Problem keine zulässigen Punkte hat.*

Beweis: Es gibt nur endlich viele ganzzahlige Lösungen. In jeder Iteration ist das ganzzahlige Optimum entweder zulässig oder es wird durch den Kelley–Schnitt eliminiert. Also muß nach endlich vielen Schritten das Optimum erreicht sein oder das Verfahren bricht mit der Meldung ab, daß es keine ganzzahlige zulässige Lösung gibt. □

Beispiel 4.6 Minimiere $F(x) = x_1 - x_2$ unter $f(x) = 4x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 8 \leq 0,\ x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^2$. M ist eine Ellipse und liegt in $S^0 = \{x \,|\, 0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 5\}$. Es gilt $\operatorname{grad} f(x) = (8x_1 - 3x_2, -3x_1 + 2x_2)^\top$.

(1) Das Minimum von F in S^0 ist in $x^0 = (0,5)^\top$ mit $F_{\min} = -5$. Wegen $f(x^0) = 17 > 0$ ist x^0 nicht zulässig. Wegen $\operatorname{grad} f(x^0) = (-15, 10)^\top$ ist der Kelley–Schnitt dann $-15x_1 + 10x_2 - 33 \leq 0$.

(2) Ein Minimum von F in $S^1 \cap \mathbb{Z}^2$ liegt in $x^1 = (2,5)^\top$ (Gomory) mit $F(x^1) = -3$. Wegen $f(x^1) = 3 > 0$ ist x^1 nicht zulässig. Wegen $\operatorname{grad} f(x^1) = (1,4)^\top$ ist der Kelley–Schnitt $x_1 + 4x_2 - 19 \leq 0$.

(3) Ein Minimum von F in $S^2 \cap \mathbb{Z}^2$ liegt in $x^2 = (0,3)^\top$ (Gomory) mit $F(x^2) = -3$. Wegen $f(x^2) = 1 > 0$ ist x^2 nicht zulässig. Wegen $\operatorname{grad} f(x^1) = (-9,6)^\top$ ist der Kelley–Schnitt $-9x_1 + 6x_2 - 17 \leq 0$.

(4) Das Minimum von F in $S^3 \cap \mathbb{Z}^2$ liegt in $x^3 = (1,4)^\top$ (Gomory) mit $F(x^3) = -3$. Wegen $f(x^3) = 0$ ist x^3 zulässig und damit ganzzahlige optimale Lösung.

5 Komplexität und das Ellipsoid–Verfahren

5.1 Zeitschranken

Für die praktische Anwendung von Optimierungsverfahren ist der Aufwand, den sie zur Lösung eines Problems benötigen, entscheidend. Ein erstes Kriterium ist die Endlichkeit oder Nicht–Endlichkeit eines Verfahrens. Bei letzterem ist die Frage, nach wievielen Schritten eine brauchbare Näherung erreicht ist. Das führt zu Approximationsproblemen, auf die hier nicht eingegangen wird. Bei endlichen Verfahren spielt der reale Aufwand die entscheidende Rolle. Dieser Aufwand wird in der Regel als die Zeit betrachtet, die ein Algorithmus zur Lösung eines Problems benötigt (der Speicheraufwand spielt heute nur noch eine untergeordnete Rolle). Das Zeitmaß hängt natürlich vom jeweiligen Computer ab, ist aber bei ein und demselben Computer proportional zu der Anzahl der ausgeführten elementaren Operationen bzw. Schritte. Technischer Fortschritt verbessert die Konstanten sehr schnell, so daß im wesentlichen nur die Größenordnung interessiert. Dazu werden die klassischen Landau–Symbole benutzt.

Definition 5.1 *Für $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreibt man*

(1) $f(n) = O(g(n))$, falls $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit $f(n) \leq cg(n)$, für $n > n_0$.

(2) $f(n) = \Omega(g(n))$, falls $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit $f(n) \geq cg(n)$, für $n > n_0$.

(3) $f(n) = \Theta(g(n))$, falls (1) und (2) gelten.

Eine andere Schreibweise für $f(n) = \Theta(g(n))$ ist $f(n) \asymp g(n)$. $\asymp$ stellt offensichtlich eine Äquivalenzrelation dar. Die Äquivalenzklasse von $f(n)$ heißt Wachstumsrate *von $f(n)$.*

Wir gehen davon aus, daß der Zeitaufwand für jede elementare Instruktion (arithmetische Instruktionen, Vergleiche) proportional zur Länge der Darstellung der Zahlen in einem Zahlensystem ist. Zur Behandlung eines Problems mit dem Computer wird der Input in einem endlichen Alphabet beschrieben (z. B. $\{0, 1, \ldots 9\}$ oder $\{0, 1\}$). Die Größe eines Beispiels ist die Anzahl der Zeichen in dieser Beschreibung.

Beispiel 5.1 *Der Input sei eine natürliche Zahl n. In einem Zahlensystem mit Basis B ist die Zahl der Zeichen für die Darstellung $\lceil \log_B(n+1) \rceil$. Damit ist Größe der Darstellung $\Theta(\log n)$ wegen $\log_B n = (\log n)/\log B$. Für negative Zahlen wird ein weiteres Zeichen für das Vorzeichen benötigt. Die Größe einer rationalen Zahl $r = p/q$ ist die Summe der Größen von p und q.*

Beispiel 5.2 *Größe eines LP : Die Elemente von A, b, c seien ganze Zahlen. Zur Trennung von Zahlen dienen gewisse Symbole. Die Größe eines LP ist $\Theta(mn + \log|Z|)$, wobei Z das Produkt aller von Null verschiedenen Koeffizienten ist.*

Die Zahl der ausgeführten Schritte hängt auch vom Typ der eingegebenen Daten ab. Ist z. B. beim Simplexverfahren $\min\{c^\top x \,|\, Ax \leq b, x \geq 0\}$ zu lösen und ist $c \geq 0$, so ist der Startpunkt $x = 0$ schon die Lösung. Daher fragt man bei vorgegebener Zahl eingegebener Daten nach dem ungünstigsten Fall (worst case) für den Algorithmus. Hat der Input die Länge

n, so ist diese größtmögliche Anzahl eine Funktion von n, die die *Komplexität* des Verfahrens genannt wird (z. B. $2n^3$, $3n^2 + 4\log n$, $3^n + 6n^4$ etc.).
Im folgenden werden meist die Kosten einer Operation unabhängig von der Größe der Zahl angenommen. Damit wird die Zeitkomplexität eines Algorithmus einfach die Anzahl der benötigten elementaren Operationen. Dabei wird implizit benutzt, daß die Zahlen, die während des Algorithmus auftauchen, nicht wesentlich größer als die des Input sind.
Es kann jedoch der wesentlich kompliziertere Fall auftreten, daß die Zahl der arithmetischen Operationen von der Größe des Input abhängt.

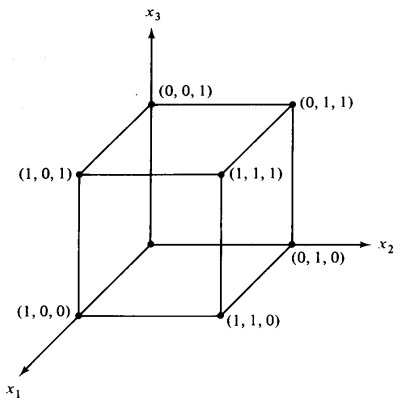
Beispiel 5.3 *Der Simplexalgorithmus besteht aus einer Initialisierungsphase für die Aufstellung des Starttableaus und einer Anzahl von Iterationen. Für eine $m \times n$–Matrix A erfordert die Initialsierung $O(mn)$ arithmetischer Operationen. Ein Iterationsschritt erfordert ebenfalls $O(mn)$ Operationen. Bei Zykelvermeidung könnte der Simplexalgorithmus im schlimmsten Fall alle $\binom{n}{m}$ Basen durchlaufen. Der Simplexalgorithmus erfordert also höchstens $O(mn\binom{n}{m})$ Operationen. In der Tat kann er sehr viele Operationen erfordern.*

Definition 5.2 *Ein Algorithmus heißt* polynomial, *wenn es ein Polynom in der Größe des Input gibt, daß den Aufwand des Algorithmus abschätzt. Die übrigen Algorithmen heißen* exponentiell.

Beispiel 5.4 *Der Gaußsche Algorithmus zur Auflösung eines Gleichungssystems $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$, ist polynomial.*

5.2 Der Simplexalgorithmus ist nicht polynomial

Um zu zeigen, daß der Simplexalgorithmus nicht polynomial ist, genügt es, eine Serie von Beispielen zu geben, bei der der Input quadratisch wächst, die Zahl der Pivotschritte sich aber bei vorgeschriebener Spaltenwahl verdoppelt.
Beim Simplexalgorithmus wird in jedem Schritt eine neue Ecke des zugehörigen Polytops bestimmt, die mit der vorigen durch eine Kante verbunden ist.
Gesucht ist eine Serie von Polytopen, bei der die Eckenzahl exponentiell mit der Seitenzahl wächst. Eine solche Serie besteht aus den d–dimensionalen Würfeln im $\mathbb{R}^d$ $W_d = \{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, 0 \leq x_j \leq 1\}$. Der d–dimensionale Würfel hat 2^d Ecken: j Koordinaten Null und die übrigen Eins.

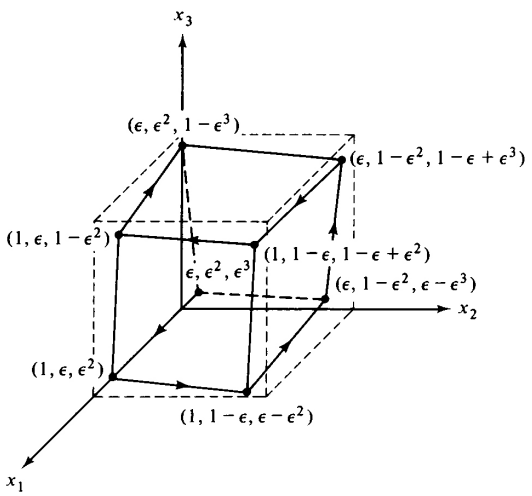


Für die Zielfunktion $\max x_d$ haben 2^{d-1} Ecken den Wert Null und die übrigen den Wert Eins. Folgende Änderung des Würfels ergibt das gesuchte Beispiel.
Das Polytop P sei für ein ϵ mit $0 < \epsilon < 1/2$ gegeben durch

$$1 \geq x_1 \geq \epsilon, \quad 1 - \epsilon x_{j-1} \geq x_j \geq \epsilon x_{j-1}, \quad j = 2, \ldots, d.$$

Die Überführung in Standardform geschieht durch d Schlupfvariablen s_j und d Überschußvariablen r_j. Also $m = 2d$ und $n = 3d$ und das vollständige LP ist:

$$\begin{aligned} \min\{-x_d \quad | \quad & x_1 - r_1 = \epsilon, \; x_1 + s_1 = 1 \\ & x_j - \epsilon x_{j-1} - r_j = 0, \; j = 2, \ldots, d, \\ & x_j + \epsilon x_{j-1} + s_j = 1, \; j = 2, \ldots, d, \\ & x_j, s_j, r_j \geq 0\} \end{aligned} \tag{5.1}$$



Lemma 5.1 *Die Menge der zulässigen Basen von (5.1) ist die Menge der Teilmengen von* $\{x_1, \ldots, x_d, r_1, \ldots, r_d, s_1, \ldots, s_d\}$, *die alle* x_j *und genau ein Element von* $\{r_j, s_j\}$, *für jedes* $j = 1, \ldots, d$ *enthalten. Alle Ecken sind nichtentartet.*

Beweis: Wegen $x_1 \geq \epsilon$ und $x_{j+1} \geq \epsilon x_j$ für $j = 1, \ldots, d-1$ ist in jeder zulässigen Lösung $x_j \geq \epsilon^j > 0$. Alle zulässigen Basen von (5.1) enthalten daher $x_1, \ldots, x_d$.
Angenommen, für ein j gelte $r_j = s_j = 0$. Für $j = 1$ ergibt sich der Widerspruch $\epsilon = x_1 = 1$. Für $j \geq 2$ ergibt die Subtraktion der beiden zugehörigen Restriktionen $2\epsilon x_{j-1} = 1$, also einen Widerspruch.
Da eine Basis außer $x_1, \ldots, x_d$ noch d weitere Elemente enthält, ist in jeder Ecke ist $r_j > 0$ oder $s_j > 0$, für $j = 1, \ldots, d$. Da $x_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, d$ gilt, sind alle Ecken nichtentartet.

□

Jede Ecke von (5.1) hat die Darstellung x^S, mit $S \subset \{1, \ldots, d\}$ und $j \in S \iff r_j > 0$. Der Wert von x_j in x^S wird mit x_j^S bezeichnet.

Lemma 5.2 *(a) Sei* $d \in S$ *aber* $d \notin S'$, *dann gilt* $x_d^S > x_d^{S'}$.
(b) Für $S' = S \setminus \{d\}$ *gilt* $x_d^{S'} = 1 - x_d^S$.

Beweis: Wegen $d \in S$ gilt $s_d = 0$ und die vierte Restriktion in (5.1) ergibt $x_d^S = 1 - \epsilon x_{d-1}^S$. Es ist aber $x_{d-1}^S \leq 1$ und $\epsilon < 1/2$ und damit $x_d^S > 1/2$. Andererseits gilt wegen $d \notin S'$, daß $r_d = 0$ und die dritte Restriktion in (5.1) ergibt $x_d^{S'} = \epsilon x_{d-1}^{S'} < 1/2$. Da sich beim Übergang von S zu S' nur x_d ändert ($x_1, \ldots, x_{d-1}$ sind durch die ersten $d-1$ Gleichungen schon bestimmt), gilt insbesondere $x_{d-1}^{S'} = x_{d-1}^S =: x_{d-1}$. Mit $x_d^{S'} - \epsilon x_{d-1} = 0$ und $x_d^S + \epsilon x_{d-1} = 1$ folgt $x_d^{S'} = 1 - x_d^S$.

□

Lemma 5.3 *Seien die Teilmengen von $\{1, \ldots, d\}$ so aufgezählt, daß $x_d^{S_i} \leq \ldots \leq x_d^{S_j}$ für $i < j$ gilt. Dann gilt überall Ungleichheit und die Ecke x^{S_j} und $x^{S_{j+1}}$ sind benachbart für $j = 1, \ldots, 2^d - 1$.*

Beweis: Induktion nach d. Für $d = 1$ gibt es die Ecken $(x_1, r_1, s_1) = (\epsilon, 0, 1-\epsilon)$ und $(1, 1-\epsilon, 0)$. Der Satz sei jetzt für den d–Würfel bewiesen und die entsprechende Aufzählung sei $S_1, \ldots, S_{2^d}$. Weiter sind $S_1, \ldots, S_{2^d}$ auch Teilmengen von $\{1, \ldots, d+1\}$ und es gilt $x_{d+1}^{S_j} = \epsilon x_d^{S_j} < 1/2$, da $r_{d+1}^{S_j} = 0$. Damit gilt nach der Induktionsvoraussetzung $x_{d+1}^{S_1} < \ldots < x_{d+1}^{S_{2^d}}$. Die übrigen 2^d Teilmengen von $\{1, \ldots, d+1\}$ ergeben sich durch $S_j' = S_j \cup \{d+1\}$, $j = 1, \ldots, 2^d$. Nach Lemma 5.2 gilt $x_{d+1}^{S_j'} = 1 - x_{d+1}^{S_j}$ und somit

$$x_{d+1}^{S_1} < \ldots < x_{d+1}^{S_{2^d}} < 1/2 < x_{d+1}^{S_{2^d}'} < \ldots < x_{d+1}^{S_1'}.$$

Nach Induktionsannahme sind x^{S_j} und $x^{S_{j+1}}$ benachbart und damit auch $x^{S_j'}$ und $x^{S_{j+1}'}$. Schließlich sind auch $x^{S_{2^d}}$ und $x^{S_{2^d}'}$ benachbart, da die letzte Basis aus der vorigen durch Hinzunahme von r_{d+1} und Weglassen von s_{d+1} entsteht.

□

Satz 5.1 (Klee–Minty) *Für jedes $d > 1$ gibt es ein LP mit $2d$ Gleichungen, $3d$ Variablen und ganzzahligen Koeffizienten, deren Absolutbetrag durch 4 beschränkt ist, so daß der Simplexalgorithmus $2^d - 1$ Iterationen brauchen kann, um das Optimum zu finden.*

Beweis: Man wähle $\epsilon = 1/4$ und multipliziere alle Gleichungen in (5.1) mit 4, so daß alle Koeffizienten ganze Zahlen sind. Damit hat die Kette benachbarter Ecken aus Lemma 5.3 abnehmende Kosten.

□

Bemerkung: Die Größe des Input in Satz 5.1 ist $\Theta(6d^2 + \log(4^{5(d-1)+6}))$, also $\Theta(d^2)$, und damit ist der Simplexalgorithmus i. a. nicht polynomial. Jedoch sind Beispiele wie das von Klee–Minty sehr 'selten'. Borgwardt zeigte 1982, daß der Simplexalgorithmus 'fast immer' polynomial ist. Daher sind in der Praxis in der Regel Varianten des Simplexverfahrens effizienter als Verfahren, die theoretisch besser sind, wie etwa das polynomiale Ellipsoidverfahren, das im folgenden behandelt wird.

5.3 Komplexität von LP, LI und LSI

Es wird gezeigt, daß zur Lösung der folgenden drei scheinbar ungleich schweren Probleme im wesentlichen der gleiche Rechenaufwand benötigt wird.

1. Lineares Programm (LP) in der Standardform:

   Für $A \in \mathbb{Z}^{m\times n},\ b \in \mathbb{Z}^m,\ c \in \mathbb{Z}^n$ finde man eine Lösung von

   $$\min\{c^\top x \mid Ax = b, x \geq 0\} \tag{5.2}$$

   oder zeige, daß es keine Lösung gibt oder das Problem unbeschränkt ist (o. E. sei $n \geq m$).

2. Lineare Ungleichungen (LI):

   Für $A \in \mathbb{Z}^{m\times n},\ b \in \mathbb{Z}^m$ finde man eine Lösung von $Ax \leq b$ oder zeige, daß es keine Lösung gibt.

3. Lineare strenge Ungleichungen (LSI):

   Für $A \in \mathbb{Z}^{m\times n},\ b \in \mathbb{Z}^m$ finde man eine Lösung von $Ax < b$ oder zeige, daß es keine Lösung gibt.

Satz 5.2 *Es gibt einen polynomialen Algorithmus für LP genau dann, wenn es einen polynomialen Algorithmus für LI gibt.*

Beweis: (i) Hat man einen polynomialen Algorithmus für LP, so kann man ein Beispiel von LI zunächst auf Standardform bringen (durch Einführung von Schlupfvariablen und Beseitigung der nichtrestringierten Variablen durch Substitution). Setze c beliebig und bestimme mit Hilfe des Verfahrens für LP eine Lösung oder stelle fest, daß keine existiert.
(ii) Es stehe nun ein polynomialer Algorithmus $\mathcal{A}$ für LI zur Verfügung. Zu lösen ist (5.2).
(1) Unser Algorithmus ruft $\mathcal{A}$ zunächst mit $Ax \leq b,\ -Ax \leq -b$ und $-Ix \leq 0$ auf, um festzustellen, ob es zulässig ist.
(2) Falls es zulässig ist, so ist x genau dann eine optimale Lösung, wenn es ein $y \in \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$Ax = b,\ x \geq 0,\ y^\top A \leq c^\top,\ c^\top x = y^\top b$$

(Dualitätssatz). Falls es kein solches Paar (x, y) gibt, dann ist das Problem unbeschränkt. Man rufe also $\mathcal{A}$ auf mit

$$Ax \leq b,\ -Ax \leq -b,\ -Ix \leq 0,\ A^\top y \leq c^\top,\ c^\top x - b^\top y \leq 0,\ -c^\top x + b^\top y \leq 0.$$

Ist (x, y) eine Lösung, dann ist x Lösung des LP. Gibt es keine Lösung, so ist das Problem unbeschränkt. Ist schließlich L die Größe des LP, so haben die obigen LI eine Größe von höchstens $O(L^2)$. Darum ist das Verfahren polynomial. □

Bemerkung: Der Satz besagt, daß das scheinbar viel schwierigere LP im wesentlichen die gleiche Komplexität hat wie LI, d. h. allein das Suchen einer Startecke (Phase I) hat im wesentlichen die gleiche Komplexität wie das ganze Problem.

Lemma 5.4 *Das LI $Ax \leq b$ hat genau dann eine Lösung, wenn das LSI $Ax < b + \epsilon(1, \ldots, 1)^\top$, mit $\epsilon = 2^{-2L}$ eine Lösung hat.*

Beweis: Hat das LI eine Lösung, so ist diese auch eine des LSI. Umgekehrt soll nun aus einer Lösung x^0 des LSI eine des LI konstruiert werden. Es sei I die Menge von Zeilenvektoren a_i von A mit $b_i \leq {a_i}^\top x^0 < b_i + \epsilon$. Es kann angenommen werden, daß sich die übrigen Zeilenvektoren linear durch die in I kombinieren lassen. Ansonsten, ist ein a_j linear unabhängig zu denen in I, so hat das LGS ${a_i}^\top z = 0$, für $i \in I$ und ${a_j}^\top z = 1$ eine Lösung z^0. Für hinreichend kleines $\lambda > 0$ ist dann $x^1 = x^0 + \lambda z^0$ eine Lösung des LSI mit einem Element mehr in I. Dies bricht aber spätestens nach $k = \text{rank}(A) \leq m$ Schritten ab. Darum gilt $a_j = \sum_{a_i \in I'} \beta_{ji} a_i$, für eine linear unabhängige Teilmenge I' von I. Nach der Cramerschen Regel (o. E. sei $\text{lin}(I') = \text{lin}(I) = \mathbb{R}^k$, sonst Drehung) sind alle β_{ji} Quotienten von Determinanten mit Betrag $\leq 2^L$: $\beta_{ji} = D_{ji}/D$. (Es gilt $k = |I'| = \text{rank}(A) \leq \min(n, m)$. Darum sind die Determinanten, als Summe von $k!$ Summanden $\leq |Z|$ höchstens $k!|Z| \leq 2^{k^2}|Z| \leq 2^{mn}|Z| = L$.) Es sei $\overline{x}$ die Lösung der linearen Gleichungen ${a_i}^\top x = b_i$, für $a_i \in I'$. O. E. sei $D > 0$. Es gilt für alle j:

$$\begin{aligned} D({a_j}^\top \overline{x} - b_j) &= \sum_{a_i \in I'} D_{ji} {a_i}^\top \overline{x} - D b_j = \sum_{a_i \in I'} D_{ji} b_i - D b_j \\ &= -\sum_{a_i \in I'} D_{ji}({a_i}^\top x^0 - b_i) + D({a_j}^\top x^0 - b_j) \\ &< \epsilon \left(\sum_{a_i \in I'} |D_{ji}| + D \right) < 2^{-2L}(m+1)2^L < 1 \end{aligned}$$

(mit der Definition von $\overline{x}$, Addieren und Subtrahieren von $D{a_j}^\top x^0$, $|{a_i}^\top x^0 - b_i| < \epsilon$, für $i \in I'$ und $|{a_j}^\top x^0 - b_j| < \epsilon$, für alle j). Also gilt für alle j, daß $D({a_j}^\top \overline{x} - b_j) < 1$. Ferner sind alle Nenner der Komponenten von $\overline{x}$ Teiler von D (Cramersche Regel, wie oben) und darum ist $D({a_j}^\top \overline{x} - b_j)$ eine ganze Zahl. Es folgt ${a_j}^\top \overline{x} - b_j \leq 0$, für alle j und damit ist $\overline{x}$ die gewünschte Lösung des LI. □

Satz 5.3 *Gibt es einen polynomialen Algorithmus für LSI, dann auch für LI.*

Beweis: Nach Lemma 5.4 ist das LI (mit Größe L) äquivalent zu dem LSI

$$2^{2L}{a_i}^\top x < 2^{2L} b_i + 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Sei Z' das Produkt aller Koeffizienten $\neq 0$ in dem LSI. Dann gilt $\log|Z'| \leq 6L \log|Z|$ und die Größe dieses Problems ist höchstens $O(L^2)$. Darum werden nur polynomial viele Schritte benötigt ($p(L^2)$ ist wieder ein Polynom). □

5.4 Ellipsoide

Definition 5.3 $E \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* Ellipsoid, *wenn es ein* $d \in \mathbb{R}^n$ *und eine symmetrische positiv definite* $(n \times n)$*–Matrix* Q *gibt mit*

$$E = E(Q, d) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - d)^\top Q^{-1}(x - d) \leq 1\}.$$

Man beachte, daß die Bedingung 'Q symmetrisch' keine Einschränkung darstellt. Mit Methoden der Linearen Algebra und Analysis erhält man:

Satz 5.4 *Es sei Q eine (symmetrische) positiv definite $(n \times n)$–Matrix, $d \in \mathbb{R}^n$ und $E = E(Q,d)$ das zugehörige Ellipsoid. Dann gilt*

(a) Q^{-1} *ist positiv definit.*

(b) Es gibt eine eindeutig definierte symmetrische positiv definite Matrix R mit $Q = R^\top R$.

(c) $E(Q,d) = RB^n + d$, *wobei B^n die (Einheits–) Kugel um 0 mit Radius 1 ist.*

(d) Das Volumen eines Ellipsoids ist $V(E) = \sqrt{\det Q} \cdot \kappa_n$, *wobei* $\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} = V(B^n)$.

(e) Der Quotient der Volumina zweier Ellipsoide ist invariant unter (bijektiven) affinen Abbildungen.

(f) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *die Eigenwerte von Q, so sind* $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ *die Halbachsen von* $E(Q,d)$.

Beweis: (a) Es sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann gibt es ein $y \neq 0$ mit $x = Qy$ und es folgt $x^\top Q^{-1} x = y^\top Q^\top Q^{-1} Q y = y^\top Q y > 0$.
(b) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von Q reell und positiv sind. Weiter gibt es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, d. h. Q ist diagonalisierbar. Also gibt es eine orthogonale Matrix T, so daß $T^\top Q T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: \Lambda$. Setze $R := T^\top \sqrt{\Lambda} T$. Dann ist R symmetrisch, positiv definit und es gilt $R^\top R = T^\top \sqrt{\Lambda} T T^\top \sqrt{\Lambda} T = Q$. Jede Matrix R mit den geforderten Eigenschaften hat die gleichen Eigenvektoren wie Q und die Eigenwerte $\sqrt{\lambda_i}$. Hierdurch ist R eindeutig bestimmt.
(c) Nach (b) gilt

$$E(Q,d) = d + \{y \mid y^\top R^{-1} R^{-1} y \leq 1\} = d + \{Rx \mid \|x\| \leq 1\} = d + RB^n.$$

(d) und (e) folgen aus (c) mit $V(A(X)) = \det A \cdot V(X)$, für affine Abbildungen A und meßbare Mengen X.
(f) E ist bis auf Translation und Drehung $\sqrt{\Lambda} \cdot B^n = \{x \mid (x_1/\sqrt{\lambda_1})^2 + \ldots + (x_n/\sqrt{\lambda_n})^2 \leq 1\}$.
□

In dem Ellipsoidverfahren werden Ellipsoide fortgesetzt halbiert.

Definition 5.4 *Sei $E(Q,d)$ ein Ellipsoid und $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann sei*

$$\mathrm{HE}(\mathrm{Q}, \mathrm{d}, \mathrm{a}) = \mathrm{E}(\mathrm{Q}, \mathrm{d}) \cap \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{a}^\top \mathrm{x} \leq \mathrm{a}^\top \mathrm{d}\},$$

also eine Hälfte des Ellipsoids, das durch den Zentralschnitt geteilt wird.

Satz 5.5 *Sei $E = E(Q,d)$ Ellipsoid, $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und*

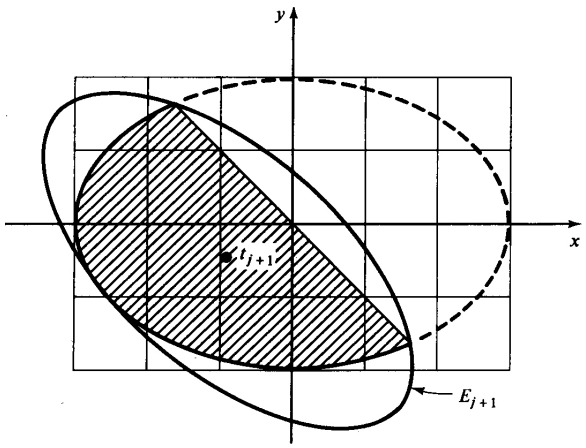
$$d' = d - \frac{1}{n+1} \frac{Qa}{\sqrt{a^\top Q a}} \quad \text{und} \quad Q' = \frac{n^2}{n^2-1} \left(Q - \frac{2}{n+1} \frac{(Qa)(Qa)^\top}{a^\top Q a} \right). \tag{5.3}$$

Dann gilt

(a) $E' = E(Q', d')$ *ist ein Ellipsoid.*

(b) $\mathrm{HE}\,(\mathrm{Q},\mathrm{d},\mathrm{a}) \subset \mathrm{E}'$.

(c) $V(E')/V(E) < e^{-1/(2(n+1))} < 1$.



Beweis: (i) Sei zunächst $Q = I,\ d = 0$ und $a = e^1$. Dann ist $d' = -e^1/(n+1)$ und

$$Q' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(I - \frac{2}{n+1}\,\mathrm{diag}\,(1,0,\ldots,0)\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}, \frac{n^2}{n^2-1}, \ldots, \frac{n^2}{n^2-1}\right) =: W^2.$$

Offensichtlich ist Q' positiv definit, also ist E' ein Ellipsoid. Sei $x \in \mathrm{HE}\,(\mathrm{I},0,\mathrm{e}^1)$, d. h. $\|x\| \le 1$ und $x_1 \le 0$. Es ist zu zeigen, daß $(x-d')^\top Q^{-1}(x-d') \le 1$, d. h. $q := \|W^{-1}(x+e^1/(n+1))\|^2 \le 1$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} q &= \left\| \left(\frac{(n+1)x_1+1}{n}, x_2\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}, \ldots, x_n\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \right) \right\|^2 \\ &= \frac{n^2-1}{n^2}(x_2^2+\ldots+x_n^2) + \frac{(n+1)^2}{n^2}x_1^2 + \frac{2(n+1)x_1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2-1}{n^2}\|x\|^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2(n+1)(x_1^2+x_1)}{n^2} \le 1, \end{aligned}$$

wegen $-1 \le x_1 \le 0$. Das Volumen von E ist κ_n, das von E' ist $\kappa_n\sqrt{\det Q'} = \kappa_n \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{(n-1)/2}$. Also

$$\frac{V(E')}{V(E)} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{(n-1)/2}.$$

Mit $1 - x \le e^{-x}$ und $1 + x \le e^x$, für $x \ge 0$, ist der Quotient also nicht größer als $e^{-1/(n+1)}e^{1/(n^2-1)\cdot(n-1)/2} = e^{-1/(2(n+1))}$.

(ii) Nun wird der allgemeine Fall auf (i) zurückgeführt. O. E. sei $\|Ra\| = 1$. Es gibt eine Drehung T mit $Te^1 = Ra$. Man definiere die affine Abbildung U durch $U(x) = d + RTx$, dann gilt

(α) $E(Q,d) = U(E(I,0)) = U(B^n)$.

(β) $E(Q', d') = U(E(W^2, -e^1/(n+1)))$.

(γ) $\mathrm{HE}\,(\mathrm{Q}, \mathrm{d}, \mathrm{a}) = \mathrm{U}(\,\mathrm{HE}\,(\mathrm{I}, 0, \mathrm{e}^1))$.

(α) folgt aus $E(Q,d) = d + RB^n = d + RTB^n = U(B^n)$.
(β) Sei $Q = RR = RTT^\top R$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
Q' &= \frac{n^2}{n^2-1}\left(Q - \frac{2}{n+1}Qaa^\top Q\right) \\
&= \frac{n^2}{n^2-1}\left(RTT^\top R - \frac{2}{n+1}RTT^\top Raa^\top RTT^\top R\right) \\
&= \frac{n^2}{n^2-1}\left(RTT^\top R - \frac{2}{n+1}RT\,\mathrm{diag}\,(1,0,\ldots,0)T^\top R\right) \\
&= RT\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(I - \frac{2}{n+1}\,\mathrm{diag}\,(1,0,\ldots,0)\right)T^\top R\right) \\
&= RTW^2T^\top R = (RTW)(RTW)^\top.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
U(E(W^2, -e^1/(n+1))) &= d + RT(-e^1/(n+1)) + RTWB^n = d - \frac{Qa}{n+1} + RTWB^n \\
&= d' + RTWB^n = E(Q', d').
\end{aligned}$$

(γ) Durch Substitution $x = d + RTz$ erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{HE}\,(\mathrm{Q}, \mathrm{d}, \mathrm{a}) &= \{x \,|\, x \in d + RB^n,\ a^\top x \le a^\top d\} \\
&= \{d + RTz \,|\, d + RTz \in d + RB^n,\ z^\top T^\top Ra \le 0\} \\
&= d + RT\{z \,|\, z \in B^n,\ z^\top e^1 \le 0\} = U(E(I, 0, e^1)).
\end{aligned}$$

Also ist $Q' = RTW(RTW)^\top$ positiv definit und $E(Q', d')$ ein Ellipsoid. Mit (i) folgt

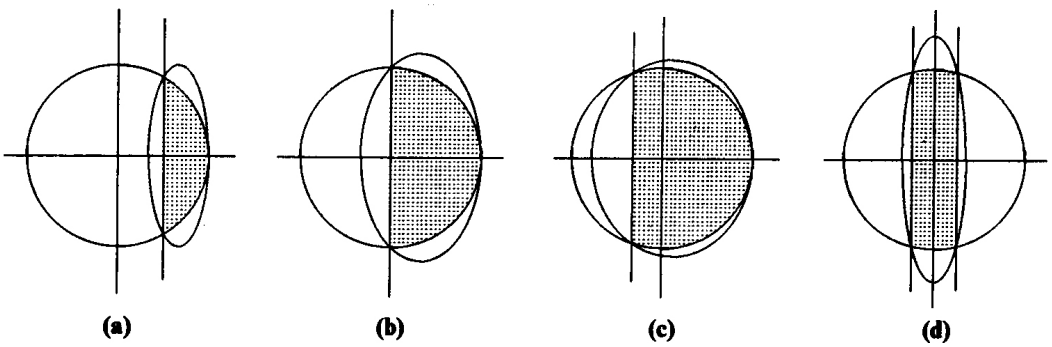
$$\mathrm{HE}\,(\mathrm{Q}, \mathrm{d}, \mathrm{a}) = \mathrm{U}(\,\mathrm{HE}\,(\mathrm{I}, 0, \mathrm{e}^1)) \subset \mathrm{U}(\mathrm{E}(\mathrm{W}^2, -\mathrm{e}^1/(\mathrm{n}+1)) = \mathrm{E}(\mathrm{Q}', \mathrm{d}')$$

und mit Satz 5.4 (e) gilt schließlich

$$\frac{V(E')}{V(E)} = \frac{V(U(E(W^2, -e^1/(n+1))))}{V(U(B^n))} < e^{-1/(2(n+1))}.$$

□

Bemerkungen: (1) Das Ellipsoid in Satz 5.5 ist das sogenannte Löwner–John–Ellipsoid zu der Ellipsoidhälfte. Der Satz von Löwner–John besagt, daß es zu einer konvexen kompakten Menge K ein eindeutig bestimmtes (Löwner–John–) Ellipsoid E gibt, das K enthält und minimales Volumen hat. Ferner ist $1/nE$ in K enthalten und für zentralsymmetrisches K (d. h. $K = -K$) kann $1/n$ durch $1/\sqrt{n}$ ersetzt werden.
(2) Es gibt Varianten des Ellipsoid–Verfahrens, die mit 'flachen' oder 'tiefen' Schnitten arbeiten.



5.5 Das Ellipsoidverfahren

Gegeben sei das LSI: Finde eine Lösung von $Ax < b$ oder stelle fest, daß es keine Lösung gibt. Dabei sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ und o. E. sei $m \geq n$. Die Größe des LSI ist $L = mn + \log(|Z|)$, wobei Z das Produkt aller Einträge $\neq 0$ ist. Die Menge der Lösungen eines LSI ist ein Polyeder P.
Die Idee des Ellipsoidverfahrens ist sehr einfach. Man konstruiert eine Folge von immer kleiner werdenden Ellipsoiden E_j, für die garantiert ist, daß sie eine Lösung enthalten (falls überhaupt eine existiert). Ist nach einer (nicht zu großen) Anzahl von Schritten der Mittelpunkt nicht in P enthalten, so wird garantiert, daß es keine Lösung gibt.
Zunächst wird eine große Kugel mit Radius $n2^L$ als Startellipsoid gewählt. Im folgenden wird $P' = P \cap (n2^L)B^n$ statt P betrachtet. Dieses P' ist, falls P nicht leer, nicht zu klein.

Lemma 5.5 *Ist $P \neq \emptyset$, so ist das Volumen von P' mindestens $2^{-(n+2)L}$.*

Beweis: Hat das LSI $Ax < b$ eine Lösung, so gibt es eine Ecke x^0 von $\{x \mid Ax \leq b\}$. Diese erfüllt mindestens $n \leq m$ der Ungleichungen mit Gleichheit. Sei $\tilde{A}$ die $(n \times n)$–Matrix aus den zugehörigen Zeilen und $\tilde{A}_i$ die Matrix $\tilde{A}$, in der die i–te Spalte durch b ausgetauscht wurde. Nach der Cramerschen Regel gilt $x_i^0 = \det \tilde{A}_i / \det \tilde{A}$ und weil die Determinanten ganzzahlig sind, folgt $|x_i| \leq \det \tilde{A}_i \leq n!|Z| < 2^{n^2}|Z| \leq 2^L$. Somit hat das Polytop $\tilde{P} = \{x \mid Ax \leq b, |x_i| \leq 2^L,\ i = 1, \ldots, n\}$ einen inneren Punkt und es gilt $\mathrm{aff}\tilde{P} = \mathrm{aff}\{x \mid x \text{ Ecke von } \tilde{P}\} = \mathbb{R}^n$. Es gibt daher $n+1$ affin unabhängige Ecken $v^0, \ldots, v^n$ von $\tilde{P}$. Sei S die konvexe Hülle dieser $n+1$ Ecken (ein Simplex), dann gilt $S \subset (n2^L)B^n$ und

$$V(P') \geq V(S) = \frac{1}{n!}\left|\det\begin{pmatrix} | & & | \\ v^1 - v^0 & \ldots & v^n - v^0 \\ | & & | \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{n!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ v^0 & v^1 & \ldots & v^n \end{pmatrix}\right| \neq 0$$

(Scherung in $\{x \mid x_1 = 1\}$). Die v^i sind Lösungen eines Linearen Gleichungssystems mit einer Matrix bestehend aus Zeilen von A und Einheitsvektoren. Wie oben gilt dann $v^i = u^i/D_i$, mit u^i ganzzahlig und D_i ganz und $\leq 2^L$. Also

$$V(S) \geq \frac{1}{n!}\frac{1}{D_0 \cdot \ldots \cdot D_n} \geq \frac{1}{n!}(2^L)^{-(n+1)} > (2^L)^{-(n+2)},$$

da $n! < 2^{n^2} \leq 2^L$. □

Falls in einem Schritt $d_j \in P'$ gilt, so ist d_j eine Lösung. Andernfalls gibt es eine Ungleichung ${a_k}^\top x < b_k$, die von d_j verletzt wird. Dann ist P in dem Halbellipsoid $\mathrm{HE}(\mathrm{Q_j}, \mathrm{d_j}, \mathrm{a^k})$ und damit nach Satz 5.5 in $E_{j+1} := E({Q_j}', {d_j}')$ enthalten. Also $P' \subset E_{j+1} \subset E_j$. Andererseits fällt das Volumen der Ellipsoide nach Satz 5.3 schnell genug.

Lemma 5.6 *Ist $E_0 = E(Q_0, d_0)$ mit $Q_0 = n^2 2^{2L} \cdot I$ und $d_0 = 0$ das Startellipsoid und wird der Zentralschnitt $N = 10n(n+1)L$ mal angewandt, so gilt $V(E_N) < 2^{-(n+2)L}$.*

Beweis: Es ist $V(E_0) = \kappa_n (n2^L)^n \leq (2n)^n 2^{Ln}$, da B^n in dem Würfel mit Kantenlänge 2 enthalten ist. Nach Satz 5.5 (c) gilt

$$\frac{V(E_N)}{V(E_0)} < \left(e^{-\frac{1}{2(n+1)}}\right)^{10n(n+1)L} = e^{-5nL} < 2^{-5nL}.$$

Also $V(E_N) < (2n)^n 2^{-4nL} < 2^{-3nL} \leq 2^{-(n+2)L}$. □

Algorithmus 5.1 (Ellipsoidverfahren für LSI)

Input: Ein $(m \times n)$–LSI der Größe L.
Output: eine Lösung des LSI oder die Antwort 'Nein'.

begin
  $j := 0$;
  $d_0 := 0$;
  $Q_0 := n^2 2^{2L} \cdot I$;
  $N := 10n(n+1)L$;
  while $j \leq N$ **and** d_j ist keine Lösung von $Ax < b$ **do**
  begin
    bestimme eine Ungleichung aus $Ax < b$, die von d_j verletzt wird, etwa ${a_k}^\top d_j \geq b_k$;
    $a := a_k$;
    $d_{j+1} := d_j - \frac{1}{n+1} \frac{Q_j a}{\sqrt{a^\top Q_j a}}$;
    $Q_{j+1} := \frac{n^2}{n^2-1} \left(Q_j - \frac{2}{n+1} \frac{(Q_j a)(Q_j a)^\top}{a^\top Q_j a}\right)$;
    $j := j + 1$;
  end;
  if $j < N$ **then** d_j ist Lösung **else** 'Keine Lösung'.
end.

Satz 5.6 *Das Ellipsoidverfahren entscheidet korrekt, ob ein LSI eine Lösung besitzt.*

Beweis: Erfüllt im Laufe des Verfahrens ein d_j das LSI $Ax < b$, so hat man eine Lösung gefunden. Es breche das Verfahren mit $j = N$ ab. Dann gilt nach obigen Betrachtungen $P' \subset E_j$, für $j = 0, \ldots, n$, insbesondere $P' \subset E_N$. Wäre $P \neq \emptyset$, so würde nach Lemma 5.5 und Lemma 5.6 gelten $V(E_N) < V(P')$, Widerspruch. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung. □

Der Start benötigt $O(mn)$ Schritte. Das gleiche trifft für alle Schritte in einer Iteration zu, von denen es höchstens $O(n^2 L)$ viele gibt. Insgesamt hat man die polynomiale Schranke $O(mn^3 L)$.

Es gibt aber Probleme bei der Implementierung, da in jedem Schritt eine Wurzel bestimmt werden muß. Diese ist i. a. nicht rational, es muß also gerundet werden. Es ist jedoch möglich, dies numerisch in den Griff zu bekommen, ohne daß die Polynomialität verletzt wird. Zusammen mit den Sätzen 5.2 und 5.3 erhalten wir also abschließend.

Korollar 5.1 *Es gibt einen polynomialen Algorithmus für LP.*