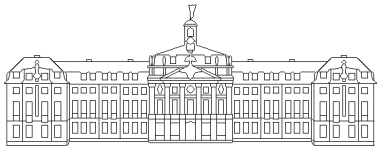
Colin W. Cryer

Numerik Partieller Differentialgleichungen I

Wintersemester[1] 1997/98



Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

[1]Letzte Änderung am 8. April 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1

1.2 Partielle Differentialgleichungen 3

2 Einige einfache Lösungsmethoden **7**

2.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen 7

2.2 Die Methode von Lagrange 9

3 Die Kontinuumsmechanik **15**

3.1 Gravitation 15

3.2 Elektromagnetische Felder 18

3.3 Erhaltungssätze (einfache Form) 20

3.4 Die Advektionsgleichung 21

3.5 Die Wärmeleitungsgleichung 21

3.6 Gleichungen, die mit der Wärmeleitungsgleichung verwandt sind 23

3.6.1 Die Diffusionsgleichung 23

3.6.2 Konvektion-Diffusion 24

3.6.3 Reaktion-Diffusion 24

3.6.4 Gasströmung in Porösen Medien 25

3.6.5 Sickerströmung 26

4 Die Kontinuumsmechanik: die Kinematik **29**

4.1 Die Bewegung eines Körpers 29

4.2 Die Ansätze von Euler und Lagrange 29

4.3 Die Bilanzgleichungen 31

4.3.1 Erhaltung der Masse 31

4.3.2 Erhaltung des linearen Impulses 31

4.3.3 Erhaltung des Drehimpulses 32

4.3.4 Erhaltung der Energie 34

4.4 Die Deutung des Tensors t und Vektors b 34

4.5 Wellen im elastischen Material 36

5 Die Kontinuumsmechanik: die Strömungsmechanik **39**
5.1 Einleitung . . . 39
5.2 Die Eulerschen Gleichungen . . . 39
5.3 Die Navier-Stokes-Gleichung . . . 40
5.4 Die Theorie von Biot für den wasserdurchtränkten Erdboden . . . 43
5.5 Die Wettervorhersage . . . 44

6 Die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$ **49**
6.1 Einführung . . . 49
6.2 Die allgemeine Lösung . . . 50
6.3 Charakteristiken . . . 51
6.4 Anfangswert- und Anfangswert-Randwertprobleme . . . 52
6.4.1 Das Anfangswertproblem . . . 52
6.4.2 Das Anfangs-Randwertproblem . . . 53
6.4.3 Sachgemäß gestellte Probleme . . . 54
6.5 Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereiche . . . 56
6.6 Anwendungen in der Biologie . . . 57

7 Einfache Differenzenverfahren für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$ **59**
7.1 Einführung . . . 59
7.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen . . . 60
7.3 Ein einfaches Differenzenverfahren . . . 62
7.4 Ein zweites einfaches Differenzenverfahren . . . 64
7.5 Die Courant-Friedrich-Lewy-Bedingung . . . 64
7.6 Beweis der Konvergenz bezüglich $||\cdot||_\infty$ . . . 67
7.7 Zusammenfassung einfacher Methoden . . . 69
7.7.1 Zeitvorwärts und Raumvorwärts . . . 69
7.7.2 Zeitvorwärts und Raumrückwärts . . . 69
7.7.3 Zeitvorwärts und räumlich zentriert . . . 70
7.7.4 Lax-Friedrichs . . . 70
7.7.5 Leap-frog oder Bockspringen . . . 70
7.8 Beweis der Konvergenz bzgl. $||\cdot||_2$ (Energie-Methode) . . . 70
7.8.1 Notation . . . 71
7.8.2 Die Energienorm . . . 71
7.8.3 Der Existenz- und Konvergenzbeweis . . . 72
7.9 Das Lax-Wendroff-Verfahren . . . 75
7.10 Abschließende Bemerkung zur Stabilität . . . 77

8 Die Wärmeleitungsgleichung **81**
8.1 Einführung . . . 81
8.2 Analytische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung . . . 82

8.2.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen 82
8.2.2 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung 87
8.3 Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung 89
8.3.1 Der Abhängigkeitsbereich 89
8.3.2 Das Maximumprinzip 90
8.4 Existenz und Eindeutigkeit 94

9 Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Differenzenverfahren 97
9.1 Einführung 97
9.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen 99
9.3 Das klassische explizite Differenzenverfahren 99
9.4 Stabilität und Konvergenz für das klassische explizite Differenzenverfahren 101
9.5 Implizite Differenzenverfahren - Einführung 103
9.6 Ordnung und Stabilität 108
9.7 Mehrdimensionale Probleme 109
9.7.1 Mehrgittermethoden 110
9.7.2 Die ADI Methode 111
9.8 Ein numerisches Beispiel 112

10 Die eindimensionale Wellengleichung 121
10.1 Einführung 121
10.2 Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung 124
10.3 Weitere Eigenschaften 126
10.4 Das Huygensche Prinzip 130

11 Charakteristiken und die Klassifkation von Gleichungen und Systemen von Gleichungen 135
11.1 Einleitung 135
11.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung 136
11.2.1 Notation 136
11.3 Klassifikation von Gleichungen 140
11.3.1 Elliptische Gleichungen 140
11.3.2 Parabolische Gleichungen 142
11.3.3 Hyperbolische Gleichungen zweiter Ordnung 143
11.3.4 Gleichungssysteme: Elliptizität nach Agmon, Douglis und Nirenberg 144
11.4 Existenz und Eindeutigkeit für das Cauchy Problem: Die Sätze von Holmgren und Cauchy-Kowalewskia 148
11.5 Hyperbolische Systeme erster Ordnung 149
11.5.1 Anfangs-Randwertaufgaben 150

12 Schwache Lösungen 159

13 Die Burger-Gleichung **167**

14 Systeme von Differentialgleichungen in Erhaltungsform **177**
14.1 Einführung 177
14.2 Beispiele: 177
14.2.1 Die Burgersche Gleichung [Smoller, S. 241] 177
14.2.2 Die Eulersche Gleichung für Strömungen [Smoller, S. 240, 347, 322] 178
14.2.3 Das p-System [Smoller, S. 306] 178
14.3 Einige Grundbegriffe 179
14.4 Das Lax-Wendroff-Verfahren 180
14.5 Das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren 181
14.6 Stabilität des Lax-Wendroff-Verfahrens 182
14.7 Neue Methoden 183

15 Der Äquivalenzsatz von Lax für Anfangswertaufgaben **187**
15.1 Einleitung 187
15.2 Banachräume 187
15.3 Das abstrakte Cauchy-Problem 193
15.4 Differenzenverfahren 196

16 Fourierreihen, Fouriertransformationen und die Stabilitätsanalyse **201**
16.1 Einführung 201
16.2 Die Anwendung von Fouriertransformationen für Stabilitätsanalyse 208
16.3 Stabilität für Mehrschrittverfahren und Systeme von Gleichungen 211
16.3.1 Systeme von Gleichungen 211
16.3.2 Mehrschrittverfahren 212
16.4 Eine Anwendung von Fourier Transformatoren: Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung 215

A Die Punktmechanik **221**
A.1 Einleitung 221
A.2 Die Newtonschen Axiome 221
A.3 Das n-Körperproblem 223
A.4 Arbeit und Energie 224
A.5 Erhaltungssätze 229

B Die Laplace-Transformation **233**
B.1 Einleitung 233
B.2 Die Laplace-Transformation 234
B.3 Die komplexe Umkehrformel für die Laplacesche Transformation 241
B.4 Andere Integraltransformationen 247

Kapitel 1

Einführung

Gegenstand dieser Vorlesung ist die numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Keine vorherigen Kenntnisse über partielle Differentialgleichungen oder deren Anwendungen werden vorausgesetzt. Wir hoffen, dem Leser einen Überblick über dieses große Gebiet zu geben, indem eine beschränkte Auswahl von beispielhaften Methoden und Problemen detailliert behandelt wird.

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Das einfachste Beispiel einer partiellen Differentialgleichung ist eine Gleichung mit nur einer Veränderlichen. In diesem Fall sprechen wir von einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Eine allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung wird in Gleichung (1.1) dargestellt:

$$\left.\begin{array}{lcl} F(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), t) & = & 0\ ,\ t \in G \subset \mathbb{R}^1 \\ \mathbf{u} & : & G \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ F & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G \longrightarrow \mathbb{R}^n\ . \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

In Gleichung (1.1) ist F eine vorgeschriebene Funktion, eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G \longrightarrow \mathbb{R}^n$. G ist ein Teilgebiet von $\mathbb{R}^1$. Eine Lösung $\mathbf{u}$ von Gleichung (1.1) ordnet jedem $t \in G$ einen Vektor $\mathbf{u}(t)$ zu.

Die Gleichung (1.1) ist sehr allgemein. Eine spezielle Form von (1.1) wird in Gleichung (1.2) gegeben.

$$\left.\begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{u}}(t) & = & f(\mathbf{u}(t), t)\ ,\ t \in (a, b) \\ \mathbf{u} & \in & C^1[(a, b); \mathbb{R}^n]\ . \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Gleichung (1.2) unterscheidet sich von Gleichung (1.1) in folgender Weise:

1. Es ist angenommen worden, daß die Gleichung (1.1) für $\dot{\mathbf{u}}(t)$ gelöst werden kann, damit die Gleichung $F = 0$ nach der Form $\dot{\mathbf{u}} = f$ aufgelöst werden kann, wo f bekannt ist.

2. Statt eines allgemeinen offenen Gebiets G aus $\mathbb{R}^1$ wird ein offenes Intervall (a, b) betrachtet.

3. Zuletzt sind einige Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit von $\mathbf{u}$ gemacht worden, und zwar, daß $\mathbf{u}$ stetig differenzierbar ist.

Die Gleichung (1.2) hat im allgemeinen mehrere Lösungen. Betrachten wir z.B. die lineare Gleichung mit $n = 2$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{u}_1(t) & = & u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) & = & u_1(t) \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Aus Gleichung (1.3) läßt sich leicht erkennen, daß die erste Komponente $u_1(t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt:

$$\ddot{u}_1(t) = u_1(t) \tag{1.4}$$

Hieraus folgt, daß die allgemeine Lösung von Gleichung (1.3) von zwei Parametern α und β abhängt, wie in Gleichung (1.5) dargestellt.

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1(t) & = & \alpha e^t + \beta e^{-t} \\ u_2(t) & = & \alpha e^t - \beta e^{-t} \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Durch geeignete Wahl von α und β in Gleichung (1.5) läßt sich jede Lösung von Gleichung (1.3) bestimmen. Es gibt zwei Möglichkeiten, die häufig vorkommen.

1. Man kann die Werte von $\mathbf{u}$, d.h. von den zwei Komponenten u_1 und u_2, an der Stelle $t = a$ festlegen:

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1(a) & = & \eta_1 \ , \\ u_2(a) & = & \eta_2 \ , \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

   wobei η_1 und η_2 vorgeschriebene Konstanten sind. Dies heißt eine *Anfangswertaufgabe* oder ein *Anfangswertproblem* für Gleichung (1.3).

2. Man kann den Wert von u_1 an der Stelle $t = a$ und u_2 an der Stelle $t = b$ festlegen:

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1(a) & = & \eta_1 \ , \\ u_2(b) & = & \eta_2 \ , \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

wobei η_1 und η_2 wieder zwei vorgeschriebene Konstanten sind. Dies heißt ein *Randwertproblem* oder eine *Randwertaufgabe* für Gleichung (1.3).

Walter [1976] ist eine Einführung in die klassische Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Neuere Gesichtspunkte werden in Wiggins [1990] und in den dort zitierten Büchern beschrieben.

1.2 Partielle Differentialgleichungen

Jetzt werden wir die vorherigen Überlegungen für gewöhnliche Differentialgleichungen auf den Fall von partiellen Differentialgleichungen übertragen. Es sei G ein Gebiet des $\mathbb{R}^m$. Ein Punkt aus G wird mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ bezeichnet. Auf G sei ein Vektor $\mathbf{u}$ mit n-Komponenten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definiert. Die Komponenten von $\mathbf{u}$ seien p-mal stetig differenzierbar. F sei eine Abbildung von $\mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^n$, wobei

$$\ell = m + n\left[1 + \frac{m}{1!} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}\right] \ . \tag{1.8}$$

Gesucht wird $\mathbf{u}$, so daß $\mathbf{u}$ die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, D\mathbf{u}, \ldots, D^p\mathbf{u}) = 0 \ , \ \mathbf{x} \in G \ , \tag{1.9}$$

wobei $D\mathbf{u}, \ldots, D^p\mathbf{u}$ die partiellen Ableitungen von $\mathbf{u}$ darstellen. Die partielle Differentialgleichung (1.9) ist der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.1) formal ähnlich. Dennoch sind partielle Differentialgleichungen theoretisch und numerisch wesentlich schwieriger zu behandeln als gewöhnliche Differentialgleichungen.

1. Der numerische Aufwand steigt mit der Anzahl der Dimensionen sehr rasch. Dies läßt sich leicht einsehen. Wenn wir z.B. eine gewöhnliche Differentialgleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ lösen wollen, können wir 1.000 Stützpunkte im Intervall nehmen und die Lösung auf diesen Stützpunkten mit einer modernen Rechenanlage schnell berechnen. Wenn wir eine partielle Differentialgleichung auf einem Einheitswürfel in d-Dimensionen betrachten und in jeder Richtung 1.000 Stützpunkte nehmen, dann gibt es insgesamt 10^{3d} Stützpunkte. Aus diesem Grunde wurde es erst in den letzten Jahren möglich, Probleme in 3 oder mehr Dimensionen mit annehmbarer Genauigkeit numerisch zu lösen, und die numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen ist ein Grund für die Entwicklung von sog. Super-Computern mit sehr großer Leistungskapazität.

2. Das allgemeine Gebiet in einer Dimension ist ein Intervall und dies hat sehr einfache topologische Eigenschaften. Bei Problemen in höheren Dimensionen ist es nötig, viel kompliziertere Gebiete zu betrachten. Man braucht nur daran zu denken, wenn man die Wärmeverteilung in einem Dieselmotor berechnen will. Die topologischen Komplikationen eines Dieselmotors mit seinen verschiedenen Brennkammern lassen sich leicht vorstellen. Man kann deshalb einsehen, daß die Betrachtung von relativ komplizierten Rändern immer sehr große Schwierigkeiten für partielle Differentialgleichungen mit sich bringt.

3. Die Theorie von partiellen Differentialgleichungen ist viel komplizierter als die von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Fragen über Existenz, Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung sind oft nicht leicht zu beantworten. Diese Schwierigkeiten spiegeln sich wider in der Theorie für numerische Methoden, weil es natürlich einen engen Zusammenhang gibt zwischen numerischen Methoden einerseits und der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie andererseits. Viele Existenzsätze stützen sich sogar auf einfache numerische Methoden.

4. Die mathematische Theorie von und die numerischen Methoden für partielle Differentialgleichungen verlangen eine enge Verknüpfung mit den jeweiligen Anwendungen, so daß auch diese Bestandteil der Vorlesung sind.

Literaturverzeichnis

[1] Bardi, Crandall, Evans, Soner, Souganidis: Viscosity Solutions and Applications. Springer, 1997

[2] Courant, R.; Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics. Volume II. Partial Differential Equations. Interscience, 1962.

[3] Debnath, L.: Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhäuser, 1997.

[4] Evans, L.C.: Partial Differential Equations, AMS, 1998.

[5] Ferziger, Joel H.; Peric, Milovan: Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, 1996.

[6] Großmann, Ch.; Roos, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner, 1992.

[7] Gustafsson, B.; Kreiss, H.-O.; Oliger, J.: Time Dependent Problems and Difference Methods. Wiley Interscience, 1995.

[8] Hoffmann, K.A.; Chiang, S.T.: Computational Fluid Mechanics for Engineers. 2 Volumes. Engineering Education System, Wichita, Kansas, 1993.

[9] Hoffmann, K.A.; Chiang, S.T,; Shamoun Siddiqui; M. Papadakis: Fundamental Equations of Fluid Dynamics. Engineering Education System, Wichita, Kansas, 1996.

[10] Hormander, L.: Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations. Springer, 1997.

[11] Kreiss, H.-O.; Lorenz J.: Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations. Academic Press, 1989.

[12] Krishnamurti, T.N.; Bounoua L.: An Introduction to Numerical Weather Prediction Techniques. CRC, 1996.

[13] Kröner, D.: Numerical Schemes for Conservation Laws. Wiley/ Teubner, 1997.

[14] LeVeque, R.J.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser, 1990.

[15] Lions, Pierre-Louis: Mathematical Topics in Fluid Mechanics - Vol. 1. Oxford Science Publications, 1996.

[16] Meis, T.; Marcowitz, U: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen. Springer, 1978.

[17] Morton, K.W.: Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems, Chapman and Hill, 1996.

[18] Quarteroni, A. ; Valli, A.: Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer, 1994.

[19] Rauch, J.: Partial Differential Equations. Springer, 1991

[20] Renardy, M. ; Rogers, R.C.: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 1992.

[21] Smith, G.D.: Numerical Solution of Partial Differential Equations. 3rd edition, Oxford, 1985.

[22] Strikwerda, J.C.: Finite Difference Methods and Partial Differential Equations. Wadsworth and Brooks/ Cole, 1989.

[23] Taylor, M.E.: Partial Differential Equations. 3 Volumes. Springer, 1996

[24] Thomas, J.W.: Numerical Partial Differential Equations. Finite Difference Methods. Springer, 1995 (nicht empfehlenswert).

[25] Tychonoff, A.N.; Samarskii, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

[26] Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Auflage. Springer, 1976.

[27] Wiggins, S.: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, 1990.

[28] van Khan, J.J.I.M.; Segal, A.: Numerik partieller Differentialgleichungen für Ingenieure. Teubner, 1995.

Kapitel 2

Einige einfache Lösungsmethoden

2.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen

Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$F(\underline{x}, u, Du, D^2u, \ldots, D^pu) = 0 \quad \text{mit } \underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

Man macht den Ansatz, daß die Lösung $u(x, y)$ als ein Produkt von zwei Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ darstellbar ist, wobei X und Y nur von x bzw. y abhängig sind:

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y) \tag{2.2}$$

Man setzt 2.2 in die Gleichung 2.1 ein und versucht, z. B. durch das Produkt $X(x)Y(y)$ zu dividieren, die Gleichung auf die Gestalt

$$\phi(x, X, \dot{X}, \ddot{X}, \ldots, X^{(p)}) = \psi(y, Y, \dot{Y}, \ddot{Y} \ldots, Y^{(p)}) \tag{2.3}$$

zu bringen, mit

$$X^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} X(x),$$
$$Y^{(k)} = \frac{d^k}{dy^k} Y(y).$$

Es folgt aus 2.3, daß es eine Konstante α gibt, mit

$$\phi(x, X, \dot{X}, \ddot{X}, \ldots, X^{(p)}) = \alpha, \tag{2.4}$$

$$\psi(y, Y, \dot{Y}, \ddot{Y} \ldots, Y^{(p)}) = \alpha. \tag{2.5}$$

Die Gleichungen 2.4 und 2.5 sind gewöhnliche Differentialgleichungen zur Bestimmung von X und Y.

Läßt sich z. B. die Gleichung 2.4 in die Gestalt einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten,

$$p(D)X = 0, \tag{2.6}$$

$$p(D) := \sum_{k=0}^{p} a_k D^k, \tag{2.7}$$

schreiben, so ist

$$X(x) = e^{\lambda x} \tag{2.8}$$

eine Lösung wenn λ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(\lambda) = 0 \tag{2.9}$$

ist.

Beispiel:

Man betrachtet die Wellengleichung

$$u_{xx} = u_{yy}.$$

Der Ansatz

$$u = XY$$

führt zu der Gleichung

$$\ddot{X}Y = X\ddot{Y}.$$

Durch die Division durch XY erhält man

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\ddot{Y}}{Y} = \alpha.$$

Die Gleichung

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \alpha$$

läßt sich als

$$\ddot{X} - \alpha X = 0$$

schreiben, so daß

$$X(x) = e^{\lambda x}$$

eine Lösung ist, falls λ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(\lambda) := \lambda^2 - \alpha$$

ist.

Es folgt, daß

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x) \cdot Y(y) \\ &= [a_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + a_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}] \cdot [a_3 e^{\sqrt{\alpha}y} + a_4 e^{-\sqrt{\alpha}y}] \end{aligned}$$

eine Lösung von

$$u_{xx} = u_{yy}$$

ist, wobei a_1, a_2, a_3, a_4 und α beliebige Konstanten sind.

2.2 Die Methode von Lagrange

Sei

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{2.10}$$

eine quasilineare Gleichung in den zwei unabhängigen Veränderlichen x, y.

Man betrachtet die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)} \tag{2.11}$$

und versucht zwei unabhängige Lösungen dieser Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \phi(x,y,u) &= c_1 = \text{ Konstante} \\ \psi(x,y,u) &= c_2 = \text{ Konstante} \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

zu finden.

Seien $F(\phi,\psi)$, $f(\phi)$ und $g(\psi)$ beliebige Funktionen. Wird $u = u(x,y)$ durch eine der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F(\phi,\psi) = 0, \\ \psi = f(\phi), \\ \phi = g(\psi) \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

definiert, dann ist u eine Lösung der Gleichung 2.10.

Beispiel

Man betrachtet die Differentialgleichung

$$(y+u)u_x + yu_y = x - y.$$

Die entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dx}{y+u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x-y}$$

Es folgt aus der ersten und dritten Gleichung:

$$\frac{d(x+u)}{x+u} = \frac{dy}{y},$$

so daß

$$ln(x+u) = ln\ y + \text{Konstante},$$

oder

$$x + u = \text{Konstante} \cdot y$$

oder

$$\frac{x+u}{y} = \text{Konstante}.$$

Man setzt:

$$\phi(x,y,u) := \frac{x+u}{y}.$$

Es gilt auch aus der ersten und zweiten Gleichung:

$$\frac{d(x-y)}{u} = \frac{du}{x-y},$$

so daß

$$\begin{array}{lcl} (x-y)\ d(x-y) & = & u\ du, \\ \dfrac{(x-y)^2}{2} & = & \dfrac{u^2}{2} + \text{Konstante}, \\ (x-y)^2 - u^2 & = & \text{Konstante} \end{array}$$

Man setzt:

$$\psi(x,y,u) := (x-y)^2 - u^2.$$

Eine Lösung u der Gleichung 2.5 wird durch

$$\psi(x,y,u) = f(\phi),$$

d. h.

$$(x-y)^2 - u^2 = f(\frac{x+u}{y})$$

für jede beliebige Funktion f definiert.

Probe

Aus der vorhergehenden Gleichung folgt:

$$2(x-y) - 2uu_x = f' \cdot \frac{1+u_x}{y}$$

oder

$$u_x = \frac{2y(x-y) - f'}{2uy + f'}$$

und

$$-2(x-y) - 2uu_y = f' \cdot \frac{yu_y - (x+u)}{y^2}$$

oder

$$u_y = \frac{-2y^2(x-y) + (x+u)f'}{2uy^2 + yf'}$$

Es folgt:

$$(y+u)u_x + yu_y = (y+u) \cdot \frac{2y(x-y) - f'}{2uy + f'} + \frac{-2y^2(x-y) + (x+u)f'}{2uy + f'}.$$

usw.

Begründung der Methode

Sei ϕ wie in 2.12 definiert. Dann gilt

$$\phi_x(x,y,u)dx + \phi_y(x,y,u)dy + \phi_u(x,y,u)du = 0 \tag{2.14}$$

wo dx, dy, du die Gleichung 2.11 erfüllen. Es folgt[1]:

$$a(x,y,u)\phi_x + b(x,y,u)\phi_y + c(x,y,u)\phi_u = 0. \tag{2.15}$$

Ebenfalls gilt:

$$a(x,y,u)\psi_x + b(x,y,u)\psi_y + c(x,y,u)\psi_u = 0. \tag{2.16}$$

Aus den Gleichungen 2.15 und 2.16 folgt:

$$\frac{a(x,y,u)}{\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_u \\ \psi_y & \psi_u \end{vmatrix}} = \frac{b(x,y,u)}{\begin{vmatrix} \phi_u & \phi_x \\ \psi_u & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{c(x,y,u)}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}. \tag{2.17}$$

Aus der Identität 2.13, $F(\phi,\psi) = 0$, folgt:

$$F_\phi[\phi_x + \phi_u u_x] + F_\psi[\psi_x + \psi_u u_x] = 0$$

$$F_\phi[\phi_y + \phi_u u_y] + F_\psi[\psi_y + \psi_u u_y] = 0,$$

so daß

$$\begin{vmatrix} \phi_x + \phi_u u_x & \psi_x + \psi_u u_x \\ \phi_y + \phi_u u_y & \psi_y + \psi_u u_y \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_y & \psi_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_y & \psi_y \end{vmatrix} u_x + \begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_u & \psi_u \end{vmatrix} u_y = 0,$$

so daß

$$\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_u \\ \psi_y & \psi_u \end{vmatrix} u_x + \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_x \\ \psi_u & \psi_x \end{vmatrix} u_y = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

[1] Siehe **Bemerkung**

Aus den Gleichungen 2.17 und 2.18 folgt:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u). \qquad \square \tag{2.19}$$

Bemerkung

Die Herleitung und Erklärung der Gleichungen 2.14 und 2.15 ist nicht einwandfrei.

Kapitel 3

Die Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik ist eine Erweiterung der Punktmechanik. In der Punktmechanik werden Eigenschaften, wie Masse, idealisierten Massenpunkten zugeordnet. In der Kontinuumsmechanik dagegen wird so postuliert, daß solche Eigenschaften räumlich verteilt sind und durch Dichtefunktionen beschrieben werden können, so daß z.B. die Masse eines Volumenelements V durch

$$\int_V \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{3.1}$$

gegeben wird, wobei $\rho(\mathbf{x})$ die Dichte im Punkt $\mathbf{x}$ ist.

Literatur:

Becker, E. und **Bürger**, W.: Kontinuumsmechanik. Stuttgart: Teubner, 1975.

Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Basel: Birkhäuser, 1961.

Truesdell, C.: The Elements of Rational Continuum Mechanics. Berlin: Springer, 1965.

Truesdell, C. und **Toupin**, R.A.: The Classical Field Theories. Handbuch der Physik, Bd. III/1. Berlin: Springer, 1960.

3.1 Gravitation

Gemäßdem Newtonschen Anziehungsgesetz übt ein Massenpunkt M mit Masse m im Punkt ξ eine Anziehungskraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= +\gamma \frac{m}{|\xi - \mathbf{x}|^2} \cdot \frac{\xi - \mathbf{x}}{|\xi - \mathbf{x}|} \\ &= +\gamma \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \frac{m}{|\mathbf{x} - \xi|} \end{aligned} \tag{3.2}$$

auf einen Einheitsmassenpunkt im Punkt $\mathbf{x}$ aus, wobei γ eine Konstante ist.

$$u(\mathbf{x}; M) := \frac{m}{|\mathbf{x} - \xi|} \tag{3.3}$$

heißt die Potentialfunktion des Massenpunktes $M(\xi)$. (N.B.: $u(\mathbf{x}; M)$ ist die Potentialfunktion aus dem letzten Kapitel mit umgekehrten Vorzeichen.)

Sei nun $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit der stetigen Dichteverteilung $\rho(\xi)$. Um das Potential u von V in einem Punkt $\mathbf{x}$ außerhalb V zu bestimmen, zerlegt man V in hinreichend kleine Teilgebiete ΔV und summiert die entsprechenden Potentiale. Es folgt:

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}; V) := \int_V \frac{\rho(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|}\, d\xi \qquad (\mathbf{x} \notin V) \tag{3.4}$$

$$= \int_V \rho(\xi)\, \varphi(\mathbf{x}; \xi) d\xi \tag{3.5}$$

mit

$$\varphi(\mathbf{x}; \xi) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|}\ . \tag{3.6}$$

Für $\mathbf{x} \notin V$ ist $\varphi(\mathbf{x}; \xi)$ eine glatte Funktion von $\mathbf{x}$, die die Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \tag{3.7}$$

erfüllt. Es folgt, daß $u(\mathbf{x}; V)$ ebenfalls eine (glatte) harmonische Funktion ist:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{3.8}$$

(Dies wurde 1782/85 durch Laplace zuerst bewiesen.)

Der Körper V übt eine Anziehungskraft

$$\mathbf{F} = +\gamma\ \operatorname{grad}\ u(\mathbf{x}; V) \tag{3.9}$$

auf einen Einheitsmassenpunkt im Punkt $\mathbf{x}$ aus.

Die o.a. Formeln setzen voraus, daß $\mathbf{x} \notin V$. Aber die Schwerkraft ist auch innerhalb eines Körpers, z.B. der Erde, vorhanden. Es ergibt sich dann die Frage, ob diese Formeln auch für $\mathbf{x} \in V$ gültig sind.

Definition 3.1 *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $\alpha \in (0,1]$. f *heißt Hölderstetig mit Exponent* α *auf* D*, wenn*

$$\sup_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{y}\in D \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\alpha} < \infty \, .$$

Hölderstetige Funktionen sind stetig.

Satz 3.1 (Poisson, 1813) *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet,* $n \geq 3$. *Sei* $\rho : D \to \mathbb{R}$ *Hölderstetig mit Exponent* α *auf* D. *Sei*

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_D \frac{\rho(\xi)}{|\mathbf{x}-\xi|^{n-2}} \, d\xi$$

und

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \, ,$$

[die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel].

Dann ist $u(\mathbf{x})$ *stetig für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *und zweimal stetig differenzierbar für* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \partial D$*, und*

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & , \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{D} \\ -(n-2)\omega_n \rho(\mathbf{x}) & , \ \mathbf{x} \in D \end{cases}$$

Insbesondere für $n = 3$ *gilt:*

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & , \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D} \\ -4\pi\rho(\mathbf{x}) & , \ \mathbf{x} \in D \end{cases}$$

Beweis:

Siehe Gilbarg und Trudinger [1977, Lemma 4.2], Günter [1957, S. 87], Kellogg [1953, S. 156], Forster [1984, S. 163]. Der Beweis von Forster setzt voraus, daß $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Günter gibt eine nur stetige Funktion ρ an, für die eine der zweiten Ableitungen von u nicht definiert ist. Dies zeigt, daß man i.A. auf die Hölderstetigkeit von ρ nicht verzichten kann. Der Beweis von Kellogg erlaubt bestimmte Unstetigkeiten von ρ, fordert aber, daß

V "regulär" sei.

Literatur:

Forster, O.: Analysis 3. Braunschweig: Vieweg, 1984.

Gilbarg, D. und **Trudinger**, N.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer, 1977.

Günter, N.M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Leipzig: Teubner, 1957. [Übersetzung aus der französischen Ausgabe von 1934.] [In der Institutsbibliothek.]

Kellogg, O.D.: Foundations of Potential Theory. New York: Dover, 1953. [Neudruck der Ausgabe von 1929.]

3.2 Elektromagnetische Felder

Im Jahre 1785 wurden folgende Gesetze von Coulomb gefunden:

1. Coulombsches Gesetz (elektrostatisches Gesetz).

   Seien Q_1 und Q_2 zwei punktförmige elektrische Ladungen mit Koordinaten $\mathbf{r}_1$ bzw. $\mathbf{r}_2$. Die Ladung Q_2 übt die Kraft

   $$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q_1Q_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$$

   auf Q_1, wobei

   $$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \text{elektrische Feldkonstante (Influenzkonstante)}\\ \epsilon_r &= \text{relative Dielektrizitätskonstante}\end{aligned}$$

2. Coulombsches Gesetz (magnetisches Gesetz)

   Seien p_1 und p_2 zwei punktförmige Magnetpole mit Koordinaten $\mathbf{r}_1$ bzw. $\mathbf{r}_2$. Der Pol p_2 übt die Kraft

   $$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\mu_0\mu_1}\cdot\frac{p_1p_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$$

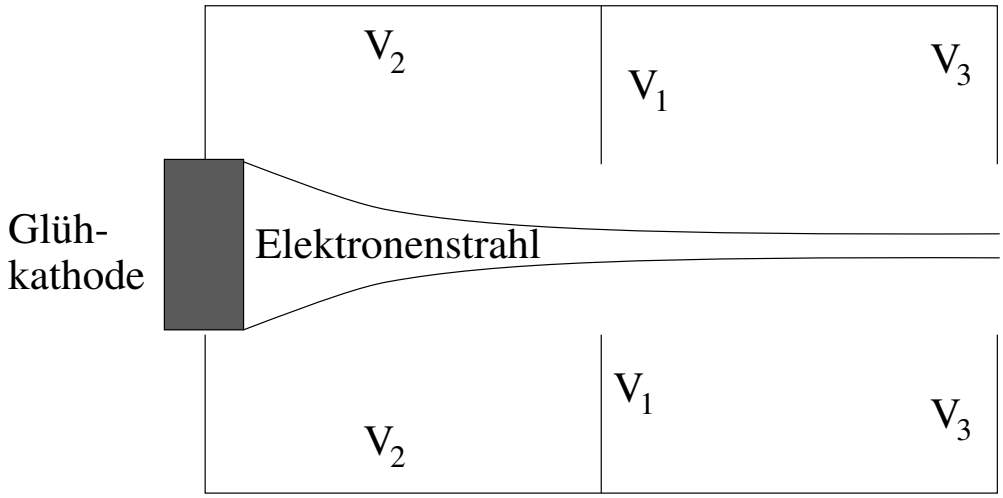


Abbildung 3.1: Eine Elektronenkanone

auf p_1, wobei

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \text{magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante)} \\ \mu_r &= \text{relative Permeabilität} \end{aligned}$$

Es folgt aus den Coulombschen Gesetzen, daß die Theorie der Gravitationspotentiale sofort auf die Theorie der elektrischen und magnetischen Kraftfelder übertragen werden kann. (Elektrisches Potential, Magnetisches Potential.) Es gibt sehr viele wichtige praktische Anwendungen, z.B. Elektronenmikroskope, Elektronenröhren, Elektronenkanonen (siehe Abbildung 3.1, wobei V eine harmonische Funktion mit den angegebenen Randwerten ist).
Noch allgemeiner sind die Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{rot} \quad \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} \\ \text{rot} \quad \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div} \quad \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div} \quad \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} \\ \mathbf{j} &= \sigma\mathbf{E} \end{aligned}$$

mit

$\mathbf{E}$ = elektrische Feldstärke
$\mathbf{H}$ = magnetische Feldstärke
$\mathbf{j}$ = Stromdichte
ρ = Ladungsdichte
c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
μ = magnetische Permeabilität
σ = Leitfähigkeit
ϵ = Dielektrizitätskonstante

3.3 Erhaltungssätze (einfache Form)

Satz 3.2 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $\mathbf{n} : \partial V \to \mathbb{R}^n$ der äußere Einheitsnormalenvektor und $U \supset V$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_V div\ \mathbf{F}\ d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS\ .$$

Beweis: Forster, Analysis 3, S. 155.

Wir betrachten jetzt eine Materialeigenschaft E, für die ein Erhaltungsgesetz gelte.
Sei

$\Psi :=$ Menge E pro Volumeneinheit, d.h. in einem Volumenelement ΔV ist $\Delta V \Psi$ von E vorhanden.

$e :=$ Menge E, die pro Volumeneinheit und Zeiteinheit erzeugt (oder benutzt) wird, d.h. in einem Volumenelement ΔV wird in Zeit Δt die Menge $\Delta V \Delta t e$ von E erzeugt (oder benutzt).

$\mathbf{q} :=$ Stromdichte, d.h. durch ein Flächenelement ΔS mit Normalen $\mathbf{n}$ fließt in Zeit Δt die Menge $\Delta S \Delta t \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ von E.

Sei nun $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und äußerem Normalenvektor $\mathbf{n}$. Da E erhalten wird, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Psi(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = \int_V e\ d\mathbf{x} - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\ dS$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt:

$$\int_V \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} - e + \text{div } \mathbf{q} \right) d\mathbf{x} = 0 \ .$$

Da V eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ war, gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - e + \text{div } \mathbf{q} = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in V \ .$$

Einige Anwendungen folgen.

3.4 Die Advektionsgleichung

Eine Flüssigkeit (z.B. Luft oder Wasser) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Die Flüssigkeit trägt einen Schadstoff mit sich, dessen Dichte pro Volumeneinheit u sei.

In bezug auf die Gleichungen in Absatz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned} \Psi &= u \\ e &= 0 \\ \mathbf{q} &= u\mathbf{v} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} u = 0 \ .$$

3.5 Die Wärmeleitungsgleichung

Sei Ω eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Wir betrachten die Wärmeverteilung in Ω für Zeit t in einem endlichen oder unendlichen Intervall I. Sei $G := \Omega \times I$, $u(\mathbf{x}, t)$ die Temperatur an einem Punkt $(\mathbf{x}, t) \in G$ (siehe Abbildung 3.2).
Der Wärmeinhalt an einem Punkt aus G wird mit $H(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet. H ist die Wärme [Energie], die benötigt wird, um ein Einheitsvolumen des Materials von Null Grad Kelvin bis zum jetzigen Zustand zu bringen $[0°K = -273°C]$.

Wärme wird durch chemische Reaktionen, radioaktiven Verfall, Erhitzung mittels Mikrowellen o.ä. erzeugt, und zwar in einer Höhe von $e(x, t, u, H)$ Wärmeeinheiten pro Einheitsvolumen und Einheitszeit.

Ist die Temperatur nicht konstant, so entsteht ein Wärmestrom. Sei $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ die *Wärmestromdichte*:

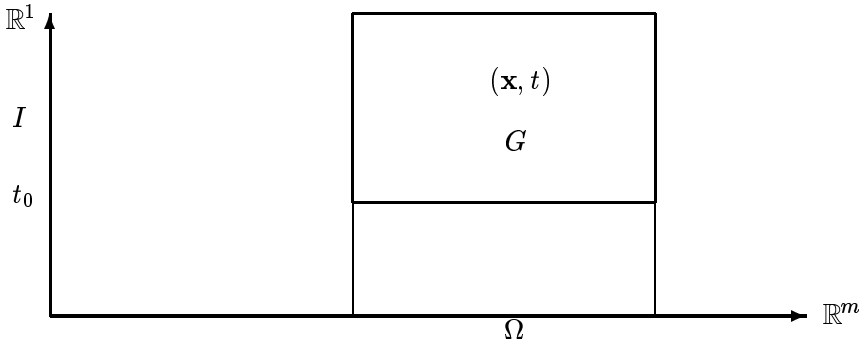


Abbildung 3.2:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = (q_1(\mathbf{x}, t), \ldots, q_n(\mathbf{x}, t))^T \ .$$

D.h. durch das Flächenelement im Punkt $\mathbf{x}$ mit Oberflächeninhalt ΔS und Normalen $\mathbf{n}$ fließt während des Zeitintervalls $(t, t + \Delta t)$ die Wärmemenge ΔH

$$\Delta H = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t \ .$$

In bezug auf die Gleichungen in Absatz 3.3 gilt $\Psi = H$. Es folgt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - e + \text{div}\mathbf{q} = 0 \ .$$

Es bleibt, die Beziehung zwischen dem Wärmeinhalt H, der Wärmestromdichte $\mathbf{q}$ und der Temperatur u anzugeben. Diese Beziehungen (constitutive equations) sind natürlich vom Material abhängig. Obwohl ihre Gestalt auf Grund theoretischer Überlegungen oft etwas eingeschränkt werden kann, basieren sie letztendlich auf experimentellen Ergebnissen und sind deshalb teilweise sehr umstritten. In unserem Fall werden wir annehmen, daß der Wärmestrom nach dem *Fourierschen Gesetz* (Fourier 1822) gegeben ist:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t)) \ \text{grad}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) \ , \tag{3.10}$$

wobei K eine $n \times n$-Matrix ist mit Komponenten, die von $\mathbf{x}, t$ und u abhängig sind. Diese Gleichung (3.10) ist sehr allgemein und wird nur erwähnt, damit die möglichen Verallgemeinerungen zur Kenntnis genommen werden. Es wird oft angenommen, daß K von u unabhängig ist. Ist das Material homogen, dann ist K von $\mathbf{x}$ unabhängig. Ist das Material isotropisch, dann ist K ein Vielfaches der Einheitsmatrix und Gleichung (3.10) nimmt die einfache Gestalt an:

$$\mathbf{q} = -k \ \text{grad} u \ , \qquad [\text{grad} := \text{grad}_{\mathbf{x}}] \ , \tag{3.11}$$

wobei k die *Wärmeleitfähigkeit* des Materials ist.

Wir werden uns in Zukunft fast ausschließlich mit Gleichung (3.11) beschäftigen. Es sollte aber bemerkt werden, daß die Komplikationen, die in Gleichung (3.10) dargestellt werden, oft in der Praxis vorkommen können. Es gibt nämlich in der Natur und auch in der modernen Industrie viele Werkstoffe, die weder isotropisch noch homogen sind und für die die Wärmeleitfähigkeitsmatrix K von der Temperatur u abhängig ist.

Der Wärmeinhalt H kann auch oft eine komplizierte Funktion der Temperatur u sein. Ein besonders interessanter Fall ist, wenn u_0 die Schmelztemperatur des Stoffes ist, weil dann H um die latente Wärme (Umwandlungsenthalpie) einen Sprung macht, so daß H nicht eine eindeutige Funktion von u ist. Diesen Fall (eine *freie Randwertaufgabe*) werden wir evtl. später näher besprechen. Im jetzigen Absatz wird allerdings angenommen, daß H wie folgt definiert ist:

$$H = \rho c u \ , \tag{3.12}$$

wobei c die *spezifische Wärmekapazität* und ρ die *Dichte* bezeichnen; c und ρ seien Konstanten.

Durch Ersetzen von H und $\mathbf{q}$ durch Gleichungen (3.11) und (3.12) erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + \frac{e}{\rho c} \ , \quad \text{für} \quad (\mathbf{x}, t) \in G \ . \tag{3.13}$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \ , \tag{3.14}$$

die *Wärmeleitungsgleichung*, erhält man, falls $e \equiv 0$ und $\rho = c = k = 1$.

Literatur:

Carslaw, H.S., **Jaeger**, J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959.

Grigull, U., **Sondner**, H.: Wärmeleitung. Berlin: Springer, 1979. (In der Inst. Bibl.)

3.6 Gleichungen, die mit der Wärmeleitungsgleichung verwandt sind

3.6.1 Die Diffusionsgleichung

Ist die Konzentration $u(\mathbf{x})$ eines gelösten Stoffes nicht überall gleich, so erfolgt Diffusion von Stellen höherer Konzentration zu Stellen niedriger Konzentration. Die *Diffusions-*

gleichung beschreibt diesen Vorgang:

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(D\ \text{grad}u)\ , \tag{3.15}$$

wobei

$$\begin{aligned} c &= \text{Porösitätskoeffizient} \\ D &= \text{Diffusionskoeffizient} \end{aligned}$$

Die Herleitung der Diffusionsgleichung ist fast identisch mit der Herleitung der Wärmeleitungsgleichung. Statt des Fourierschen Gesetzes gilt das Ficksche Gesetz (Fick, 1855):

$$\mathbf{q} = -D\ \text{grad}u$$

Ein Unterschied zwischen der Wärmeleitungsgleichung und der Diffusionsgleichung ist, daß der Diffusionskoeffizient D oft eine nichtlineare Funktion der Konzentration u ist.

Literatur:
Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1975.

Jacobs, M.H.: Diffusion Processes. Berlin: Springer, 1967.

3.6.2 Konvektion-Diffusion

Die Konvektion-Diffusions-Gleichung (englisch: convection-diffusion or advection-diffusion)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \Delta u + \mathbf{v} \cdot \text{grad}u \tag{3.16}$$

beschreibt die zeitlichen und örtlichen Änderungen der Konzentration $u(\mathbf{x}, t)$ eines Stoffes, der gleichzeitig diffundiert und durch einen Strom mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ getragen wird. Hierbei sei ϵ eine Konstante.

Diese Gleichung ist z.B. für die Berechnung der Luft- und Wasserverschmutzung wichtig.

Die numerische Lösung beinhaltet mehrere Schwierigkeiten, wenn ϵ klein oder $\mathbf{v}$ groß ist.

3.6.3 Reaktion-Diffusion

Die Hodgkin-Huxley-Gleichungen

$$\begin{aligned} cu_t &= R^{-1}u_{xx} + g(u,v,w,z) \\ v_t &= \epsilon_1 v_{xx} + g_1(u)(h_1(u) - v) \\ w_t &= \epsilon_2 w_{xx} + g_2(u)(h_2(u) - w) \\ z_t &= \epsilon_3 z_{xx} + g_3(u)(h_3(u) - z) \ , \end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei c und R positive, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ nichtnegative Konstanten sind, beschreiben die Übertragung von Information in Nervenbahnen.

Ähnliche Gleichungen treten auf bei der Modellierung einiger chemischer Reaktionen, z.B. (Aris [1975, S. 3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - \phi^2 R(u,v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v + \beta\ \phi^2 R(u,v) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} u &= \text{Konzentration des Stoffes} \\ v &= \text{Temperatur} \\ R &= \text{Reaktionsgeschwindigkeit (bekannt)} \\ \phi &= \text{Thiele-Modulus (Konstante)} \\ \beta &= \text{Praterzahl (Konstante)} \ . \end{aligned}$$

Literatur:

Aris, R.: The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts. Vol. 2. Oxford, 1975.

Buckmaster, J.D. und **Ludford**, G.S.S.: Theory of Laminar Flames. Cambridge, 1982.

Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer, 1983.

3.6.4 Gasströmung in Porösen Medien

Für ein Gas in einem porösen Medium gilt:

$$\mathbf{q} = -k\ \text{grad}p \ ,$$

wobei k eine Konstante und p der Druck ist. Wegen der Erhaltung der Masse ergibt sich:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ ,$$

wobei ρ die Dichte ist. Wenn

$$p = c\rho^{\gamma} \tag{3.18}$$

ist, dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u^m \quad (m > 1) \\ &= (u^m)_{xx} + (u^m)_{yy} + (u^m)_{zz} \end{aligned} \tag{3.19}$$

mit

$$\begin{aligned} m &:= 1 + \gamma \\ u &:= \alpha \rho \end{aligned}$$

(Siehe Friedman [1982, Seite 589].)

Literatur:
Friedman, A.: Variational Principles and Free Boundary Problems. New York: Wiley, 1982.

3.6.5 Sickerströmung

Das Strömungspotential $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi((x, y, z), t)$ einer Sickerströmung genügt der Differentialgleichung (Bear [1972, S. 199]):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{K} \cdot \operatorname{grad}\varphi) &= 0 \\ \varphi &:= z + p/\gamma \\ \mathbf{q} &= \mathbf{K} \cdot \operatorname{grad}\varphi \end{aligned} \tag{3.20}$$

$\mathbf{q}$ bezeichnet dann die Geschwindigkeit der Sickerströmung.

Die Gleichung

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \operatorname{grad}\varphi$$

heißt das verallgemeinerte Darcysche Gesetz (Darcy, 1856). Wegen der geologischen Geschichte des Bodens ist $\mathbf{K}$ oft anisotropisch und inhomogen.

Bei der Förderung von Erdöl entstehen folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{div} \cdot [\lambda_o K(\mathbf{x})(\text{grad} P_o - \rho_o g)] &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial(\Phi \rho_o S_o)}{\partial t} + q_o \\ \text{div} \cdot [\lambda_w K(\mathbf{x})(\text{grad} P_w - \rho_w g)] &= \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\Phi \rho_w S_w)}{\partial t} + q_w \end{aligned}$$

$$t > 0 \ , \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$$

$$S_o + S_w = 1 \ ,$$

$$P_{cow} = P_o - P_w = f(S_w)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P_l(x, y, z, 0) = P_l^o(x, y, z) \ \text{ für } \ l = o, w \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

und den Randbedingungen

$$\frac{\partial P_l}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad l = o, w \ \text{ für } \ \mathbf{x} \in \partial\Omega \ , \quad t > 0$$

Die Indizes o und w entsprechen Öl bzw. Wasser.

Literatur:

Bear, J.: Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier, 1972.

Freeze, J. und **Cherry**, J.A.: Groundwater. Prentice Hall, 1979.

Hornung, U. und **Messing**, W.: Poröse Medien-Methoden und Simulation. Beiträge zur Hydrologie, 1984.

Kinzelbach, W.: Groundwater Modelling. Amsterdam: Elsevier, 1986.

Knabner, J.:Mathematische Modelle fuer Transport und Sorption gelöster Stoffe in porösen Medien. Peter Lang, 1991.

Zhu, J.: Using a hypercube to solve inverse problems in reservoir simulations. SIAM News 25, No. 2, March 1992, S. 1.

Kapitel 4

Die Kontinuumsmechanik: die Kinematik

4.1 Die Bewegung eines Körpers

In der Punktmechanik sind Punktmassen behandelt worden. In der Kontinuumsmechanik betrachten wir materielle Körper, d.h. zusammenhängende Menge von Materiepunkten.

Sei $\mathcal{B}$ ein Körper, dessen Bewegung betrachtet wird. Die Materiepunkte von $\mathcal{B}$ werden mit $\mathbf{X}$ bezeichnet, wobei $\mathbf{X}$ die räumlichen Koordinaten des Materiepunktes zu einem festen Zeitpunkt darstellt. Die Koordinaten $\mathbf{X}$ heißen materielle Koordinaten. Zu jedem Zeitpunkt t hat der Materiepunkt $\mathbf{X}$ räumliche Koordinaten $\mathbf{x} := \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Es wird vorausgesetzt, daß die Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t)$$

ein Diffeomorphismus ist, so daß insbesondere für jedes feste t die inverse Abbildung $\chi^{-1}(\cdot, t)$ mit

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

existiert. (Siehe Abbildung 4.1.)

4.2 Die Ansätze von Euler und Lagrange

In der Punktmechanik wird die Bewegung einzelner Massenpunkte analysiert. In der Kontinuumsmechanik kann man ebenfalls der Bewegung eines Materiepunktes folgen, z.B. die Geschwindigkeit $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ des Materiepunktes $\mathbf{X}$ ist

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\chi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \ .$$

Diese Betrachtungsweise heißt auch der Lagrangesche Ansatz.

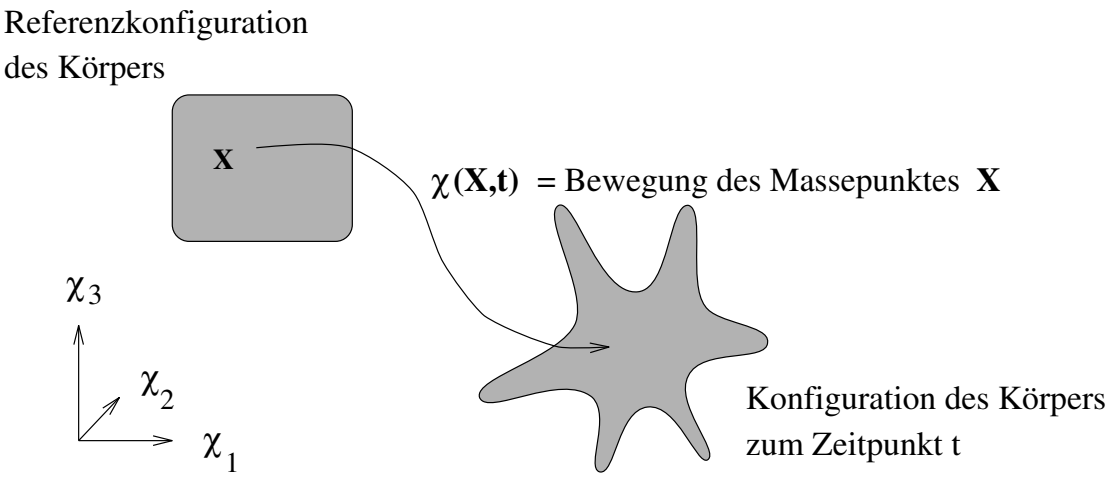


Abbildung 4.1: Deformation eines Körpers

In mehreren Anwendungen benutzt man den Eulerschen Ansatz, indem die Eigenschaften der Bewegung in einem festen Punkt $\mathbf{x}$ betrachtet werden. Dann ist z.B.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{V}(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),t)$$

die Geschwindigkeit des Materiepunktes $\mathbf{X}$, der sich zur Zeit t an der Position $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$ befindet.

Sei nun f eine skalare Funktion, die von der Bewegung abhängig ist. Die materielle oder substantielle Ableitung $\frac{Df}{Dt}$ ist definiert als

$$\frac{Df}{Dt} = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\mathbf{x}\text{ konstant}} .$$

Ist $f = f(\mathbf{X},t)$, dann folgt

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X},t) ,$$

d.h. Df/Dt ist einfach die partielle Ableitung von f in t- Richtung.

Ist $f = f(\mathbf{x},t)$, dann folgt aus $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$ und $f(\mathbf{x},t) = f(\chi(\mathbf{X},t),t)$, daß

$$\begin{aligned}
\frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)\frac{\partial \chi_i}{\partial t}(\mathbf{X},t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x},t) \cdot V_i(\mathbf{X},t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{x},t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \mathrm{grad}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x},t) .
\end{aligned}$$

Falls f eine vektorwertige Funktion ist, ist die Definition von Df/Dt komponentenweise zu verstehen.

4.3 Die Bilanzgleichungen

Satz 4.1 (Reynoldsches Transporttheorem) *Sei $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(t)} f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathcal{B}(t)} \left(\frac{Df}{Dt}(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t)\cdot \mathit{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right) d\mathbf{x}\ .$$

Beweis:

Das Integral über $\mathcal{B}(t)$ wird mittels der Transformationsformel für mehrfache Integrale auf ein Integral über die Referenzkonfiguration $\mathcal{B}(0)$ zurückgeführt:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(t)} f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(0)} f(\chi(\mathbf{X},t))|\det J(\mathbf{X},t)|d\mathbf{X}\ .$$

Dabei ist $J(\mathbf{X},t)$ die Jacobimatrix von χ bezüglich $\mathbf{X}$. Da $\chi(\mathbf{X},0)=\mathbf{X}$, χ stetig in $\mathbf{X}$ und t und $\chi(\cdot,t)$ invertierbar für alle t, ist $\det J$ immer positiv, und die Betragstriche können weggelassen werden. $\frac{d}{dt}$ und $\int\limits_{\mathcal{B}(0)}$ können jetzt vertauscht werden, und man erhält das Ergebnis durch Ableiten des Integranden.

4.3.1 Erhaltung der Masse

Sei $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. Es gelte für $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0\ .$$

Mit Hilfe des Reynoldschen Transporttheorems folgt:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$$

oder

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0\ .$$

4.3.2 Erhaltung des linearen Impulses

Das Lex secunda von Newton gibt

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \ . \tag{4.1}$$

Sei $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. In Anlehnung an diese Gleichung setzen wir voraus, daß der lineare Impuls erhalten wird. Konkret heißt es

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\mathcal{B}(t)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\ ds + \int\limits_{\mathcal{B}(t)} \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \ .$$

Die Deutung von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{b}$ wird später erläutert. Hier genügt es zu sagen, daß $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ ein Vektor ist und $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ ein Tensor zweiter Stufe, der als 3×3- Matrix dargestellt werden kann.

Nach Anwendung des Reynoldschen Transporttheorems folgt:

$$\int\limits_{\mathcal{B}(t)} \left(\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} - \mathrm{div}\ \mathbf{t} - \rho\mathbf{b}\right) d\mathbf{x} = 0$$

mit

$$\mathrm{div}\ \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial t_{1i}}{\partial x_i}\ ,\ \frac{\partial t_{2i}}{\partial x_i}\ ,\ \frac{\partial t_{3i}}{\partial x_i}\right)^T \ .$$

Da $\mathcal{B}(0)$ und χ, damit auch $\mathcal{B}(t)$ beliebig sind, folgt

$$\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} - \mathrm{div}\ \mathbf{t} - \rho\mathbf{b} = 0 \ .$$

Unter Benutzung der Gleichung für die Erhaltung von Masse folgt:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathrm{div}\ \mathbf{t} - \rho\mathbf{b} = 0 \ .$$

(Das erste Gesetz von Cauchy.)

4.3.3 Erhaltung des Drehimpulses

Für ein diskretes System von Massepunkten folgt aus den Newtonschen Axiomen, daß der Drehimpuls erhalten wird:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{x}_i \times (m_i\mathbf{v}_i) = 0 \ .$$

Sei nun $\mathcal{B}(t)$ ein materieller Körper. Hier setzen wir die Erhaltung des Drehimpulses voraus:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(t)} \mathbf{x}\times\rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\mathcal{B}(t)} \mathbf{x}\times\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\ ds + \int\limits_{\mathcal{B}(t)} \mathbf{x}\times\rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

woraus mit Hilfe des Reynoldschen Transporttheorems folgt, daß

$$\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{x}\times\mathbf{v})+\rho(\mathbf{x}\times\mathbf{v})\ \text{div}\ \mathbf{v}-\text{div}\ (\mathbf{x}\times\mathbf{t})-\rho\mathbf{x}\times\mathbf{b}=0\ ,$$

oder

$$\rho\frac{D}{Dt}(\mathbf{x}\times\mathbf{v})-\text{div}\ (\mathbf{x}\times\mathbf{t})-\rho\mathbf{x}\times\mathbf{b}=\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\ \text{div}\ \mathbf{v}\right)\mathbf{x}\times\mathbf{v}=0\ .$$

Weitere Manipulationen liefern

$$\rho\mathbf{x}\times\frac{D\mathbf{v}}{Dt}-\mathbf{x}\times(\text{div}\ \mathbf{t})-(\text{grad}\ \mathbf{x})\times\mathbf{t}-\rho\mathbf{x}\times\mathbf{b}=0\ ,$$

(da $\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$) und

$$\mathbf{x}\times\left(\rho\frac{D\mathbf{v}}{\partial t}-\text{div}\ \mathbf{t}-\rho\mathbf{b}\right)-(\text{grad}\ \mathbf{x})\times\mathbf{t}=0\ .$$

In dieser Gleichung verschwindet der erste Term (erstes Gesetz von Cauchy), so daß schließlich

$$(\text{grad}\ \mathbf{x})\times\mathbf{t}=0\ .$$

Es gilt aber

$$\text{grad}\ \mathbf{x}=1$$

und, mit Hilfe der Levi-Civita Symbole ϵ_{ijk},

$$(\text{grad}\ \mathbf{x}\times\mathbf{t})_i=\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}t_{jk}\ ,$$

so daß

$$\text{grad}\ \mathbf{x}\times\mathbf{t}=\begin{pmatrix}t_{23}-t_{32}\\ t_{31}-t_{13}\\ t_{12}-t_{21}\end{pmatrix}=0\ ,$$

d.h., der Tensor $\mathbf{t}$ ist symmetrisch.

Dabei sind die ϵ_{ijk} definiert als

$$\begin{cases}\ \ 1 & , \text{ falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist}\\ -1 & , \text{ falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist}\\ \ \ 0 & , \text{ falls } (i,j,k) \text{ keine Permutation von } (1,2,3) \text{ ist}\end{cases}$$

4.3.4 Erhaltung der Energie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{B}(t)}(E+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int\limits_{\partial\mathcal{B}(t)}(\mathbf{q}+\mathbf{t}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\;ds \\ &+ \int\limits_{\mathcal{B}(t)}\rho(\mathbf{x})(h+\mathbf{b}(x)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}E &= \text{spezifische innere Energie}\\ \mathbf{q} &= \text{Wärmefluß}\\ \mathbf{t} &= \text{Spannungstensor}\\ h &= \text{Wärmequelle}\\ \mathbf{b} &= \text{Volumenkraftdichte}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\rho\frac{DE}{dt} - \text{div}\,\mathbf{q} - \mathbf{t} : \text{grad}\,\mathbf{v} - \rho h = 0$$

mit

$$\mathbf{t} : \text{grad}\,\mathbf{v} := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\;.$$

Die Bilanzgleichungen sind also:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\text{div}\,\mathbf{v} &= 0 \quad \text{(Masse)}\\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \text{div}\,\mathbf{t} - \rho\mathbf{b} &= 0 \quad \text{(linearer Impuls)}\\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}^T \quad \text{(Drehimpuls)}\\ \rho\frac{DE}{Dt} - \text{div}\,\mathbf{q} - \mathbf{t} : \text{grad}\,\mathbf{v} - \rho h &= 0 \quad \text{(Energie)}\end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen jetzt durch Materialgesetze (engl. constitutive laws) ergänzt werden.

4.4 Die Deutung des Tensors t und Vektors b

Der Vektor $\mathbf{b}$ ist eine Volumenkraftdichte, z.B. Schwerkraft. Der Cauchysche Spannungstensor $\mathbf{t}$ (Cauchy 1827?) beschreibt die Spannungen innerhalb des materiellen Körpers. Oft schreibt man:

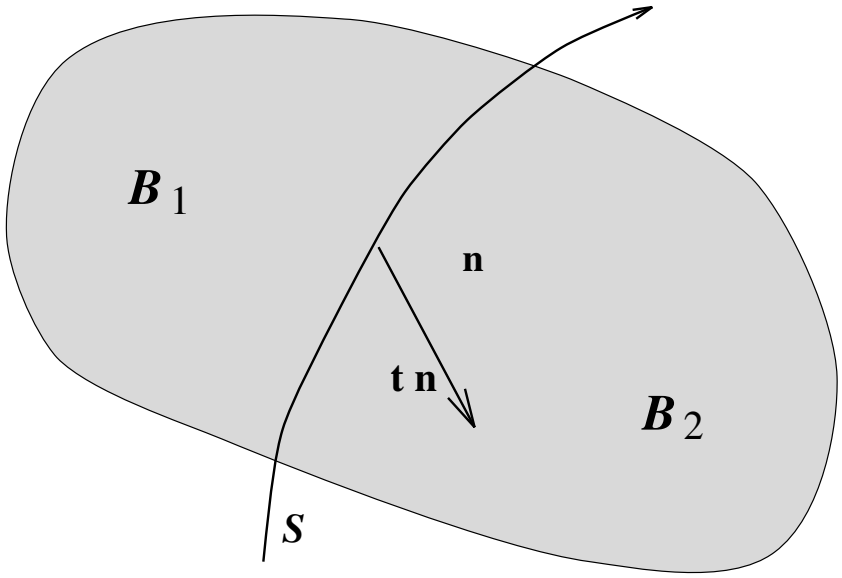


Abbildung 4.2: Kräfteverhältnis innerhalb eines Körpers

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

oder

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Die Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ heißen Normalspannungen und die Größen

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} &= \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{aligned}$$

die Tangential- oder Schubspannungen.

Sei S eine Oberfläche mit äußeren Einheitsnormalen $\mathbf{n}$ (bzgl. $\mathcal{B}_1$) innerhalb eines materiellen Körpers.
$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ ist die Kraft (pro Einheitsoberfläche), die das Teilgebiet $\mathcal{B}_2$ auf das Teilgebiet $\mathcal{B}_1$ ausübt (siehe Abbildung 4.2).

Es genügt, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3$ zu kennen, wobei $\mathbf{e}_i$ der Einheitsvektor in Richtung x_i ist (siehe Abbildung 4.3).

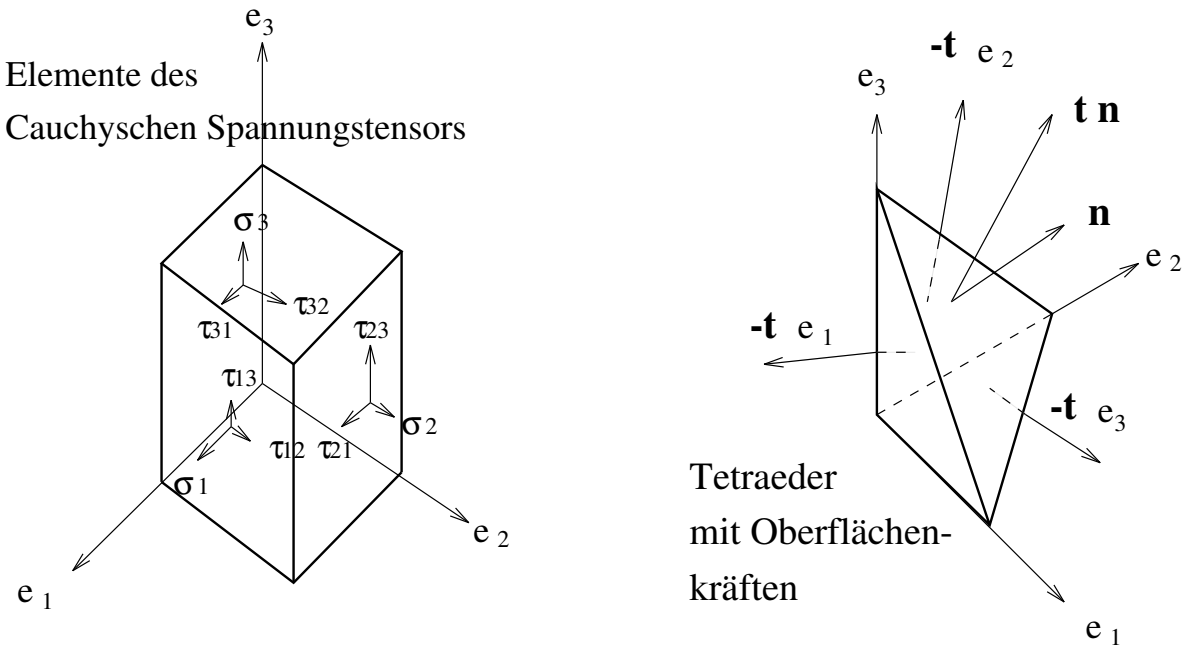


Abbildung 4.3: Der Spannungstensor $\mathbf{t}$

4.5 Wellen im elastischen Material

Als Beispiel einer Anwendung der Bilanzgleichung betrachten wir Wellen in einem elastischen Material (siehe Allen, Herrera und Pinder [1988, S. 35]).

Es wird vorausgesetzt, daß keine Volumenkräfte vorhanden sind, so daß

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \text{div } \mathbf{t} = 0 \ .$$

Sei

$$\mathbf{U} := \mathbf{x} - \mathbf{X} \ .$$

$\mathbf{U}$ heißt Verschiebungsvektor.

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{U} \approx \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$$

falls $\mathbf{v}$ und grad $\mathbf{U}$ klein sind.

Ebenfalls gilt

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \ ,$$

so daß

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \text{div } \mathbf{t} = 0 \ .$$

Sei

$$\mathbf{e} := \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{U} + (\text{grad } \mathbf{U})^T) \ .$$

$\mathbf{e}$ heißt Verzerrungstensor.

Dem Hookschen Gesetz (Hooke 1678) zufolge gilt:

$$\mathbf{t} = 2\mu\mathbf{e} + \lambda \, \text{spur}(\mathbf{e})\mathbf{1} \ ,$$

wobei λ und μ positive Konstanten sind.
Damit liegt ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für die drei Komponenten von $\mathbf{U}$ vor.

Gilt $U_2 = U_3 = 0$, d.h.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}$$

mit $k = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, d.h. U_1 erfüllt die eindimensionale Wellengleichung.

Literatur:

Allen, M.B., **Herrera**, I. und **Pinder**, G.F.: Numerical Modeling in Science and Engineering. Wiley, 1988.

Becker, E. und **Bürger**, W.: Kontinuumsmechanik. Teubner, 1975.

Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics. Academic Press, 1977.

Kapitel 5

Die Kontinuumsmechanik: die Strömungsmechanik

5.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden Anwendungen der Bilanzgleichungen in der Strömungsmechanik behandelt.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad \text{(Masse)} \tag{5.1}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho \mathbf{b} = 0 \qquad \text{(linearer Impuls)} \tag{5.2}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^T \qquad \text{(Drehimpuls)} \tag{5.3}$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \mathbf{t} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \rho h = 0 \qquad \text{(Energie)} \tag{5.4}$$

5.2 Die Eulerschen Gleichungen

In einer *reibungslosen Flüssigkeit* gilt:

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

wobei $p = p(\mathbf{x}, t)$ den Druck bezeichnet. Die Bilanzgleichung (5.1) ändert sich nicht. Die Drehimpulsgleichung (5.3) wird automatisch erfüllt. Gleichung (5.2) vereinfacht sich:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{b} \ . \tag{5.6}$$

Diese Vektorgleichung nennt man die Eulersche Gleichung.

Unter den Voraussetzungen $\mathbf{q} = 0$ und $h = 0$ nimmt die Energiegleichung (5.4) die Gestalt

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{5.7}$$

an.

Die Massenbilanz- oder Kontinuitätsgleichung (5.1), die Eulersche Gleichung (5.6) und die Energieerhaltungsgleichung (5.7) bilden ein System von fünf Gleichungen für die sechs Unbekannten $\mathbf{v}, \rho, p, E$. Es fehlt noch eine Materialgleichung. Zwei Materialgleichungen, die oft benutzt werden, sind die *allgemeine Gasgleichung*

$$p = RT\rho \tag{5.8}$$

mit Konstanten R und T und

$$p = \alpha\rho^{\gamma} \tag{5.9}$$

mit Konstanten α und γ.

Die Eulerschen Gleichungen werden oft bei der Modellierung von Luftbewegungen eingesetzt.

5.3 Die Navier-Stokes-Gleichung

(5.5) gilt für reibungslose Flüssigkeiten. Für *zähe Flüssigkeiten* sind Schubspannungen vorhanden. In Abbildung 5.1 wird die Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei Platten gezeigt. Die untere Platte ist fest, die obere Platte hat die horizontale Geschwindigkeit U.
Wäre die Flüssigkeit reibungslos, bliebe sie in Ruhelage. Ist sie hingegen zäh, dann haftet sie an den Plattenwänden, so daß die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = U\ y/a \tag{5.10}$$

nach geraumer Zeit angenommen wird. Die Kraft, die erforderlich ist, um die Bewegung der oberen Platten aufrecht zu erhalten, ist - nach Newton -

$$\tau = \mu\frac{U}{a} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.11}$$

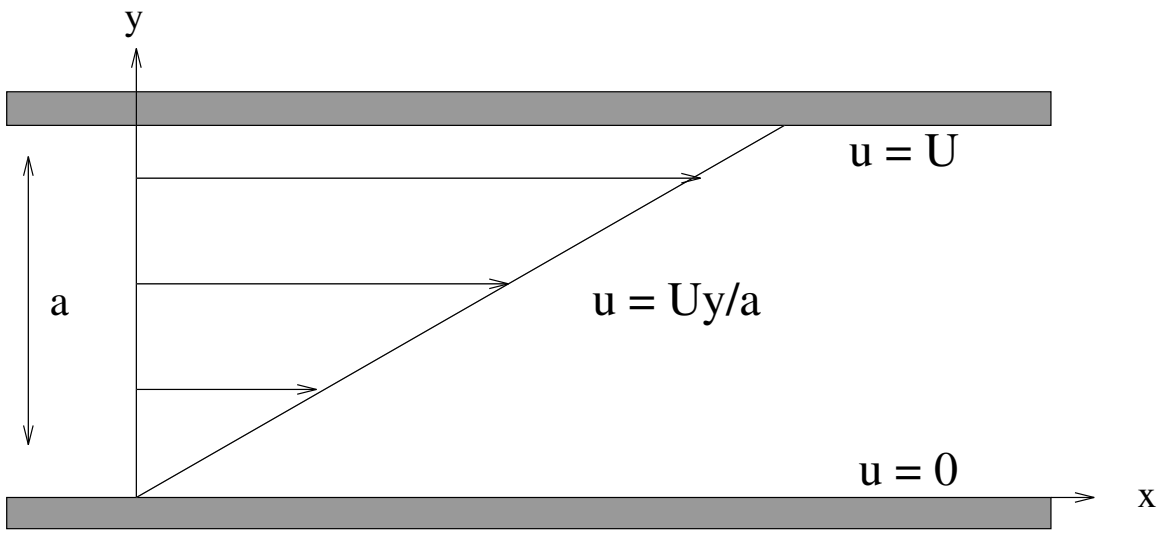


Abbildung 5.1: Strömung zwischen zwei Platten

wobei die Konstante μ die *Zähigkeit* beschreibt. Also ist die Schubspannung τ ist eine lineare Funktion der Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Es kann gezeigt werden, daß die allgemeinste lineare Beziehung zwischen $\mathbf{t}$ und dem *Deformationsgeschwindigkeitstensor*

$$\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad } \mathbf{v}^T) \tag{5.12}$$

folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{1} + \lambda \,\text{sp}(\mathbf{D})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \tag{5.13}$$

mit Konstanten λ und μ. Flüssigkeiten, die dieses Materialgesetz erfüllen, heißen *Newtonsche Flüssigkeiten*. (Diese Gleichungen sind der Hookeschen Gleichung sehr ähnlich.)

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, d.h.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \ , \tag{5.14}$$

folgt aus der Massenbilanzgleichung

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \ , \tag{5.15}$$

so daß

$$\text{sp}(\mathbf{D}) = \text{div } \mathbf{v} = 0 \ . \tag{5.16}$$

Die Materialgleichung für $\mathbf{t}$ wird dann

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \tag{5.17}$$

Sei nun

$$\mathbf{b} = 0 \ , \ \mathbf{q} = 0 \ , \ h = 0 \ . \tag{5.18}$$

Die Bilanzgleichung für den linearen Impuls (5.2) wird

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \text{div}(-p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}) = 0 \ . \tag{5.19}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \mathbf{v} \\ 2 \text{ div } \mathbf{D} &= \text{div}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) \\ &= \nabla^2\mathbf{v} \ , \end{aligned}$$

so daß

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \mathbf{v} = -\text{div } p + \mu\nabla^2\mathbf{v} \ . \tag{5.20}$$

Diese Gleichung heißt die *Navier-Stokes-Gleichung*. Komponentweise geschrieben:

$$\begin{aligned} \rho u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -p_x + \mu\Delta u \\ \rho v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -p_y + \mu\Delta v \\ \rho w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -p_z + \mu\Delta w \end{aligned} \tag{5.21}$$

Hierzu kommt noch die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \mathbf{v} = u_x + v_y + w_z = 0 \ . \tag{5.22}$$

5.4 Die Theorie von Biot für den wasserdurchtränkten Erdboden

Die Theorie von Biot ist ein Versuch, das Verhalten von wasserdurchtränktem Erdboden zu modellieren. Insbesondere soll die Senkung des Bodens wegen erhöhten Oberflächendruckes erklärt werden (engl.: consolidation).

Es wird vorausgesetzt, daß der Boden ein elastisches Skelett ist, das mit Wasser durchtränkt ist. Das Volumenverhältnis Wasser : Boden wird mit f bezeichnet.

Die Verschiebungsvektoren des Skeletts bzw. Wassers werden mit $\mathbf{u}$ bzw. $\mathbf{U}$ bezeichnet. $\mathbf{e}$ und $\mathbf{E}$ bezeichnen die entsprechenden Verzerrungstensoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{U} + (\text{grad } \mathbf{U})^T) \end{aligned}$$

Der Spannungstensor $\mathbf{t}$ besteht nun aus zwei Teilen:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_x + \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y + \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z + \sigma \end{pmatrix} ,$$

wo $\sigma_x, \sigma_{xy}, \ldots, \sigma_z$ die Spannungen in dem Skelett sind und σ der Wasserdruck ist.

Das Hookesche Gesetz wird verallgemeinert:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} - \sigma\mathbf{1} &= 2\mu\mathbf{e} + \lambda e\mathbf{1} + Q\epsilon\mathbf{1} \\ \sigma &= Qe + R\epsilon \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} e &= \text{sp}(\mathbf{e}) , \\ \epsilon &= \text{sp}(\mathbf{E}) . \end{aligned}$$

Die folgenden sechs Gleichungen können dann hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu + Q)\text{grad } e + (Q + R)\text{grad } \epsilon &= 0 \\ \text{grad}(Qe + R\epsilon) &= b\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{U} - \mathbf{u}) . \end{aligned}$$

Literatur:

Biot, M.A.: Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid.
J. Applied Physics, **26**, S. 182-185(1955).

Fernandez, C.M.: Simulation of fully saturated soil consolidation problem.
Rapports Techniques No. 135, INRIA 1992.

5.5 Die Wettervorhersage

Die Wettervorhersage ist ein Beispiel für eine Anwendung komplexer numerischer Methoden. Es gibt mehrere Modelle, die sich bezüglich Komplexität, Vorhersagezeitraum und dem geografischen Anwendungsgebiet unterscheiden. Stellvertretend für Wettervorhersagemodelle nehmen wir das Vorhersagemodell des Europäischen Zentrums für Mittelfristige Wettervorhersage (EZMW) (siehe Tiedtke [1984]):

1) Einleitung

Das Vorhersagemodell des Europäischen Zentrums ist ein rein deterministisches Modell, bei dem die hydro-thermodynamischen Gleichungen numerisch integriert werden. Hinsichtlich seiner Struktur unterscheidet es sich deshalb nur wenig von Modellen, mit denen man Kurzfristvorhersagen (Vorhersagezeit von 2-3 Tagen) erstellt. Unterschiede bestehen jedoch bezüglich der Komplexität der Modellphysik und der Größe des Integrationsgebietes. Zur Modellphysik ist zu vermerken, daß kurzfristige Änderungen der atmosphärischen Strömung im wesentlichen durch die Umverteilung von kinetischer und potentieller Energie im Zusammenhang mit dem Auftreten von barokliner und barotroper Instabilität bestimmt werden. Der Erfolg von Kurzfristmodellen hängt deshalb in erster Linie davon ab. diese Umwandlungsprozesse möglichst genau zu simulieren. Über längere Zeitintervalle gewinnen jedoch irreversible Prozesse (Produktion und Dissipation von Energie) zunehmend an Bedeutung, so daß die Modellphysik in Modellen zur Mittelfristvorhersage zwangsläufig umfangreicher, aber damit auch rechenintensiver wird. Das Vorhersagemodell des EZMW ist in dieser Hinsicht eher einem Zirkulationsmodell vergleichbar als einem Kurzfristmodell. Bezüglich des Integrationsgebietes ist zu bedenken, daß der Einflußbereich für das an einem bestimmten Ort auftretende Wetter mit Vergrößerung des Vorhersagezeitraumes schnell anwächst. Während die Wetterentwicklung in Mitteleuropa bis zu zwei Tagen in den meisten Fällen nur durch Vorgänge im Europäisch-Atlantischen Raum bestimmt wird, kann sich der Einflußder Südhemisphäre in Europa bereits innerhalb einer Woche bemerkbar machen. Das Modell des EZMW erfaßt aus diesem Grund den gesamten Globus.

2) Modellgleichungen

Im folgenden wollen wir die wichtigsten physikalischen Eigenschaften des Modells an Hand der Modellgleichungen illustrieren. Die Modellgleichungen (1) bis (6) basieren auf den Bilanzgleichungen für Impuls, Wärme, Wasserdampf, der Zustandsgleichung für ideale Gase und der statischen Grundgleichung. Hierbei sind bereits die zwei grundsätzlichen Annahmen gemacht worden, daß Luft sich wie ein ideales Gas verhält und daß alle Zustandsänderungen im hydrostatischen Gleichgewicht verlaufen, was für großräumige Bewegungen mit sehr guter Näherung zutrifft. Die letzte Annahme erlaubt es uns auch, die Gleichungen im p-System, d.h. mit dem Druck p als Vertikalkoordinate zu formulieren. Die Gleichungen verknüpfen die zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen Wind, Druck, Temperatur, Dichte und Feuchte mit den reversiblen Prozessen wie Advektion und Energieumformungen (gegeben durch die Terme auf der linken Seite der Gleichungen und den irreversiblen Prozessen in Verbindungen mit Strahlungstransfer, Phasenumwandlungen und subskaligen Transporten (Terme auf der rechten Seite der Gleichungen). Die Existenz der subskaligen Terme beruht, wie in Promet 1'72 ausgeführt wurde, auf der für die numerische Integration notwendigen Diskretisierung der Gleichungen, wobei die abhängenden Veränderlichen entweder in einem räumlichen Gitternetz oder mit Hilfe endlicher Reihenentwicklungen nach orthogonalen Funktionen (z.B. Kugelflächenfunktionen) dargestellt werden. Die Gleichungen (1) bis (6) stellen das Grundgerüst dar, von dem wir im folgenden ausgehen, wenn wir die wichtigsten Annahmen zur Simulation der reversiblen und irreversiblen Prozesse diskutieren.

Hydrodynamische Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_H + \nabla_H \phi + f\, \mathbf{k} \times \mathbf{v}_H = -g \frac{\partial}{\partial p} \vec{\tau} + \mathbf{F}_M \qquad (1)$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \alpha \omega = Q + L(C - E) - g \frac{\partial}{\partial p} H + c_p F_T \qquad (2)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\nabla_H \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \qquad (3)$$

Wasserdampf-Bilanzgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = -(C - E) - g \frac{\partial}{\partial p} W + F_q \qquad (4)$$

Zustandsgleichung idealer Gase

$$p - R \rho T_v = 0 \qquad (5)$$

Statische Grundgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho} = 0 \qquad (6)$$

Die verwendeten Symbole haben folgende Bedeutung:

T, p, ρ	*Temperatur, Druck, Dichte*
$\mathbf{v}$	*3 dim. Geschwindigkeitsvektor*
ω	$= \frac{dp}{dt}$
$\mathbf{v}_H$	*horizont. Geschwindigkeitsvektor*
q	*Wasserdampfgehalt (spez. Feuchte)*
T_v	$= T(1 + 0.6077q)$ *virtuelle Temperatur*
α	$= \frac{1}{\rho}$
f	$= 2\Omega \sin \varphi$ *(Coriolisparameter)*
Φ	$= gz$ *(Gravitationspotential)*
g	*Gravitation*
$\mathbf{k}$	*vertikaler Einheitsvektor*
R	*Gaskonstante trockener Luft*
L	*Kondensationswärme*
c_p	*spez. Wärme trockener Luft bei konstantem Druck*
t	*Zeit*
$\vec{\tau}$	*vertikaler Impulsfluß durch subskalige Bewegungen*
H	*vertikaler Fluß fühlbarer Wärme durch subskalige Bewegungen*
W	*vertikaler Fluß von Wasserdampf durch subskalige Bewegungen*
Q	*Strahlungsbedingte Wärmequelle*
$\mathbf{F}_M$, F_T, F_q	*Änderungen der Geschwindigkeit, Temperatur, Feuchte durch subskalige Transporte in horizontaler Richtung*
C, E	*Kondensations-, Verdunstungsrate*

Literatur:

Allen, M.B., **Herrera**, I. und **Pinder**, G.F.: Numerical Modeling in Science and Engineering. Wiley, 1988.

Haltiner, G.J., **Williams**, R.T.: Numerical Weather Forecasting, 1980.

Kreiss, H.-O., **Lorenz**, J.: Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations, Academic Press, 1989.

Krishnamurti, T.N., **Bounoua**, L.: An Introduction to Numerical Weather Prediction Techniques. CRC Press, 1996.

Lions, P.-L.: Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models. Oxford, 1996.

Terlau, W.: Herleitung und Analyse von Gleichungssystemen in der numerischen Wettervorhersage. Diplomarbeit, Münster 1994.

Tiedtke, M.: Das Vorhersagemodell. Promet **14**, 16-23 (1984).

Wieghardt, K.: Theoretische Strömungslehre. Teubner, 1974.

Kapitel 6

Die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$

6.1 Einführung

Wir betrachten die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0 \tag{6.1}$$

Ohne Einschränkung kann $c \geq 0$ angenommen werden: Ist $c < 0$, betrachtet man $v(x,t) := u(-x,t); v$ erfüllt dann die DGL. $v_t - cv_x = 0$.

Diese Gleichung wurde schon in Absatz 3.4 hergeleitet, und zwar in der allgemeineren Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = 0 \ .$$

Für den Fall $n = 1$ geben wir eine einfache Herleitung:

Eine Flüssigkeit (Luft oder Wasser) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c in der Richtung der positiven x-Achse. Die Flüssigkeit trägt einen Schadstoff mit sich. Die Dichte (Masse pro Längeneinheit) des Schadstoffes sei $u(x,t)$. Der *Fluß* des Schadstoffes (die Masse, die in einer Zeiteinheit an dem Punkt x vorbeifließt) sei $q(x,t)$.

Da die Masse erhalten bleibt, folgt für alle Intervalle $V = (x_1, x_2)$, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V u(x,t)dx = q(x_1,t) - q(x_2,t) \ , \tag{6.2}$$

so daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx \right] + \left[\frac{q(x_2,t) - q(x_1,t)}{x_2 - x_1} \right] = 0 \ . \tag{$*$}$$

so daß

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)dx + \frac{q(x_2,t) - q(x_1,t)}{x_2 - x_1} = 0.$$

Falls u stetig differenzierbar ist, folgt bei Anwendung des Mittelwertsatzes, daß für $x_2 \longrightarrow x_1 = x$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 \ . \tag{6.3}$$

Bemerkung 6.1 Wendet man den Mittelwertsatz auf (*) an,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\xi,t) + \frac{q(x_2,t) - q(x_1,t)}{x_2 - x_1} = 0$$

so kommt man nicht weiter, da ξ von t abhängt.

Es gilt weiter

$$q(x,t) = c\ u(x,t) \ . \tag{6.4}$$

Aus (6.3) und (6.4) folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ . \tag{6.5}$$

6.2 Die allgemeine Lösung

Zur Lösung von (6.1) wird eine neue Variable ξ eingeführt:

$$\begin{aligned} \xi &:= x - ct \\ x &= \xi + ct \ . \end{aligned} \tag{6.6}$$

Wir betrachten deshalb die Hilfsfunktion

$$v(\xi,t) := u(\xi + ct, t) \ . \tag{6.7}$$

Aus (6.1) und (6.7) folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\xi + ct)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\ c + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \ , \tag{6.8}$$

d.h. $v(\xi, t)$ ist von t unabhängig. Sei

$$\varphi(\xi) := v(\xi, t) \ . \tag{6.9}$$

Es folgt aus (6.7) und (6.9), daß

$$u(x,t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - ct) \ . \tag{6.10}$$

Umgekehrt sei $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}), u(x,t) = \varphi(x - ct)$. Dann gilt :

$$u_t + cu_x = -c\varphi'(x - ct) + c\varphi'(x - ct) = 0 \ .$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Lemma 6.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes zusammenhängendes Gebiet. $u(x,t) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ist genau dann eine Lösung der Gleichung*

$$u_t + cu_x = 0$$

in Ω, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ gibt mit

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) \ , \ (x,t) \in \Omega \ . \qquad \square$$

Bemerkung 6.2 *Die Lösung $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ kann man auch mit der Methode von Lagrange herleiten (siehe Anhang A).*

6.3 Charakteristiken

Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Es folgt aus (6.10) oder Lemma 1, daß jede Lösung $u(x,t)$ der Gleichung (6.1) auf der Kurve C_ξ :

$$C_\xi : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - ct = \xi \tag{6.11}$$

konstant ist:

$$u(x - ct) = \varphi(\xi) \ , \ (x,t) \in C_\xi \ . \tag{6.12}$$

Diese Tatsache kann graphisch dargestellt werden (Abbildung 6.1). Die Kurven C_ξ heißen *Charakteristiken* der Gleichung (6.1). Diese Definition ist im Einklang mit einer anderen umfassenderen Definition von Charakteristiken, die später gegeben wird.

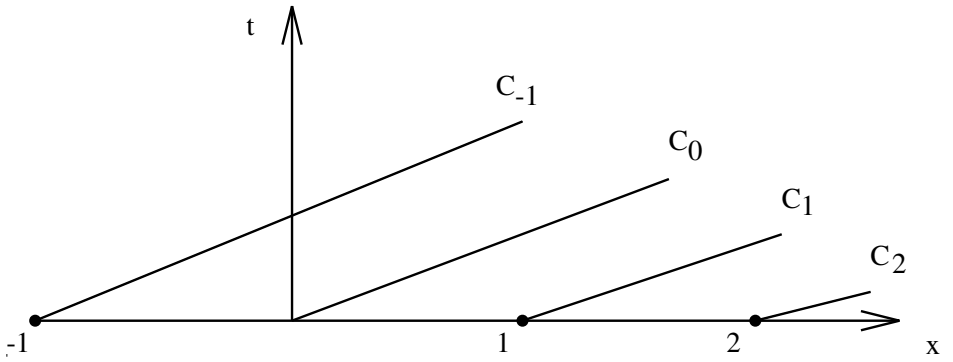


Abbildung 6.1: Charakteristiken der Gleichung $u_t + cu_x = 0$

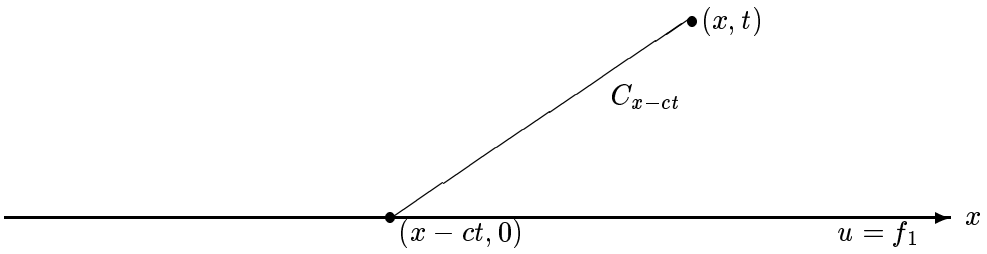


Abbildung 6.2: Das Anfangswertproblem

6.4 Anfangswert- und Anfangswert-Randwertprobleme

In Anwendungen wird meistens nach einer Lösung gesucht, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Aus Abb. 6.1 sieht man, daß für die Gleichung (6.1) zwei sinnvolle Möglichkeiten existieren:

6.4.1 Das Anfangswertproblem

$$(AW): u(x,0) = f_1(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\ . \tag{6.13}$$

Da $u(x,t)$ auf jeder Charakteristik C_ξ konstant ist, folgt (siehe Abbildung 6.2):

$$u(x,t) = u(x-ct,0) = f_1(x-ct)\ .$$

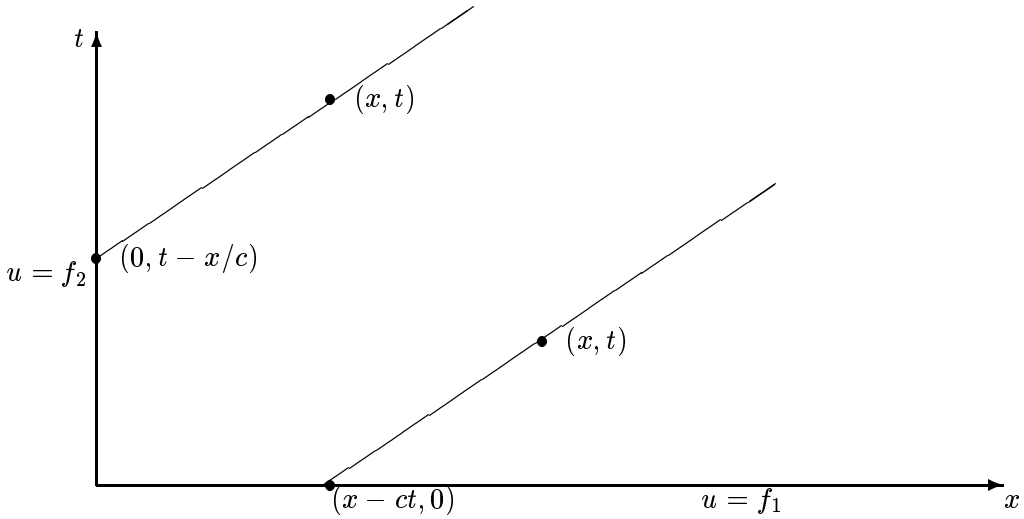


Abbildung 6.3: Das Anfangswert-Randwertproblem

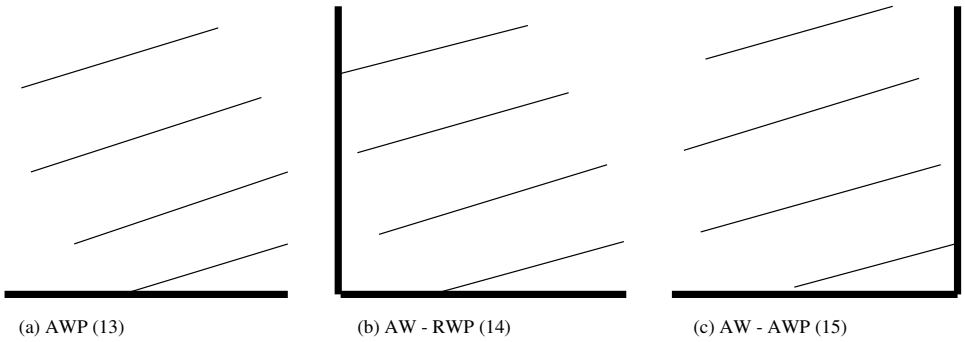


Abbildung 6.4: Mögliche Anfangswert-Randwertprobleme

6.4.2 Das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} (AW) : u(x,0) &= f_1(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}_+\ , \\ (RW) : u(0,t) &= f_2(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}_+\ . \end{aligned} \tag{6.14}$$

Die Lösung ist (siehe Abbildung 6.3):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x-ct,0) = f_1(x-ct)\ , \quad \text{für} \quad x \geq ct \\ u(x,t) &= u(0,t-x/c) = f_2(t-x/c)\ , \quad \text{für} \quad x \leq ct\ . \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen Anfangswert bzw. Randwert stehen in Zusammenhang mit der Identifikation von x und t als Ortsveränderliche bzw. Zeitveränderliche.

Die Probleme werden nochmals in Abbildung 6.4 dargestellt, wobei die Kurven, auf denen die Lösung u vorgeschrieben ist, fettgedruckt sind.
Das dritte Problem in Abbildung 6.4, nämlich

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}_- \\ u(0,t) &= f_2(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{6.15}$$

ist möglicherweise widersprüchlich, da die Bedingung

$$f_2(t) = u(0,t) = u(-ct,0) = f_1(-ct)$$

erfüllt werden muß. f_2 kann hier also nicht frei gewählt werden.

Aus diesem Beispiel geht hervor, daß nur bestimmte Anfangswert- und Randwertprobleme sinnvoll sind, und daß die sinnvollen Bedingungen von der partiellen Differentialgleichung abhängig sind. Z.B. für $c < 0$ wären die Kombinationen (a) und (c) in Abbildung 6.4 sinnvoll und die Kombination (b) möglicherweise widersprüchlich.

6.4.3 Sachgemäß gestellte Probleme

Definition 6.1 *Ein Anfangswert- oder Anfangs-Randwertproblem heißt sachgemäß gestellt (engl. properly posed), wenn es folgende Forderungen erfüllt:*

1. **Existenz***: Es existiert mindestens eine Lösung.*
2. **Eindeutigkeit***: Es gibt höchstens eine Lösung.*
3. **Stetige Abhängigkeit***: Die Lösung u ist von den Daten (z.B. f_1 und f_2 bei dem AW-RWP) stetig abhängig.*

Bemerkung 6.3 *Diese Definition ist gewissermaßen unvollständig, da folgendes nicht präzise festgelegt wird:*

a) der Raum (oder die Menge), in dem (in der) Lösungen liegen müssen,

b) der Begriff stetig abhängig.

Die Definition muß deshalb problembedingt ergänzt werden.

Bemerkung 6.4 *Der Begriff sachgemäß gestellt wurde von Hadamard zuerst eingeführt und wird deshalb manchmal als "sachgemäß gestellt im Sinne von Hadamard" bezeichnet.*

Bezüglich der Gleichung (6.1) gilt:

1. Das Anfangswertproblem (6.13) ist sachgemäß gestellt.
2. Das Anfangswert-Randwertproblem (6.14) ist sachgemäß gestellt.
3. Das Anfangswert-Randwertproblem (6.15) ist nicht sachgemäß gestellt.
4. Das Anfangswert-Randwertproblem in Abbildung 6.5 ist sachgemäß gestellt.

Beispiel 6.1 *Als Beispiel eines schlecht gestellten Problems gilt die Rückwärtswärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur $u(x,t)$ in einem unendlich langen Stab am Punkt $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit t ist:*

$$u_t = u_{xx} \tag{6.16}$$

Das übliche sachgemäß gestellte Problem besteht daraus, die Temperatur $u(x,t)$ zur Zeit $t > 0$ zu bestimmen, wenn die Temperatur zur Zeit $t = 0$ vorgeschrieben ist. D. h. man betrachtet das AWP:

$$\left.\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t & = & u_{xx} \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+ . \end{array}\right\} \tag{6.17}$$

Man kann sich aber fragen, welche Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$ die Temperaturverteilung $u(x,1) := f(x)$ verursachen würde. D. h. finde $u(x,0) = g(x)$, so daß

$$\left.\begin{array}{rcl} u(x,1) & = & f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t & = & u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \end{array}\right\} \tag{6.18}$$

Dieses Problem kann transformiert werden. Sei

$$\left.\begin{array}{rcl} s & := & -t + 1 \\ v(x,s) & := & u(x, 1-s) \end{array}\right\} \tag{6.19}$$

Das Problem lautet dann: Finde $v(x,1)$, so daß :

$$\left.\begin{array}{rcl} v(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ v_s & = & -v_{xx}\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \end{array}\right\} \tag{6.20}$$

Dieses ist ein AWP für die Rückwärtswärmeleitungsgleichung

$$v_s = -v_{xx}. \tag{6.21}$$

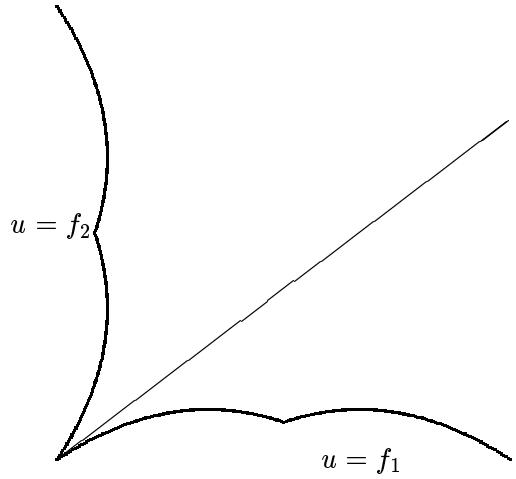


Abbildung 6.5: Ein AW-RWP für $u_t + u_x = 0$

Daß das Problem 6.20 schlecht gestellt ist, erkennt man aus der Lösung

$$\tilde{v}(x,s) = \epsilon\, e^{n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} ||f(x)||_\infty &= ||u(x,1)||_\infty \\ &= ||\tilde{v}(x,0)||_\infty \\ &= \max_x |\tilde{v}(x,0)| = \epsilon\,, \\ &= \epsilon\,, \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned} ||g(x)||_\infty &= ||u(x,0)||_\infty \\ &= ||\tilde{v}(x,1)||_\infty \\ &= \max_x |\epsilon\, e^{n^2\pi^2} \sin n\pi x| \\ &= \epsilon\, e^{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$ □

6.5 Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereiche

Aus Abbildung 6.6 sind zwei Folgerungen für das AWP (6.13) ersichtlich:

1. Die Lösung u hängt im Punkt (x,t) nur vom Wert $u(x-ct,0)$ ab, d.h. der *Abhängigkeitsbereich* (engl.: domain of dependence) des Punktes (x,t) ist der Punkt $(x-ct,0)$.

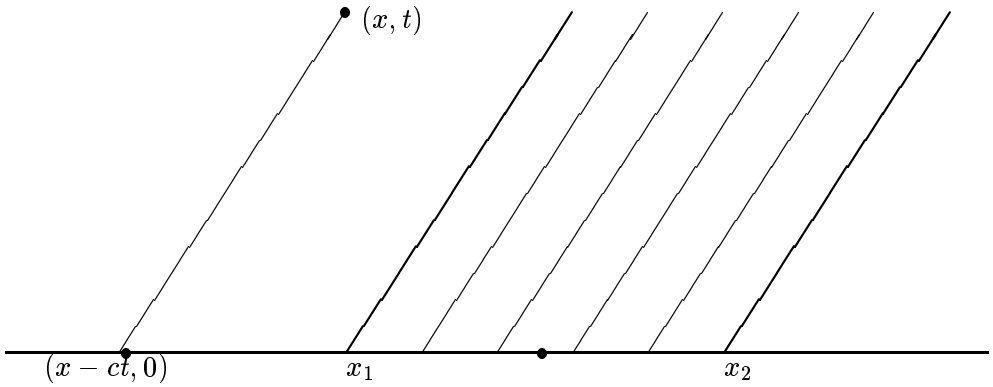


Abbildung 6.6: Abhängigkeits- und Bestimmtheitsbereiche

2. Die Werte von $u(x,0)$,

$$x_1 \leq x \leq x_2 \ ,$$

bestimmen die Lösung im Streifen

$$\Omega = \{(x,t) : x_1 - ct \leq x - ct \leq x_2 - ct\} \ ,$$

d.h. Ω ist der *Bestimmtheitsbereich* (engl.: domain of influence) der Strecke

$$I = \{(x,t) : t = 0 \ , \ x_1 \leq x \leq x_2\} \ .$$

6.6 Anwendungen in der Biologie

Advektion wird nur selten allein betrachtet. Die Advektions-Diffusionsgleichung

$$u_t = cu_x + D\, u_{xx},$$

die sowohl Advektion als auch Diffusion berücksichtigt, hat viele Anwendungen, die wir später erwähnen (siehe Kapitel 8). Eine mögliche Anwendung der Advektionsgleichung wäre der Transport von Hormonen durch das Kreislaufsystem.

Hormone sind chemische Nachrichtenträger, die in spezialisierten Zellen (*inkretorischen Drüsenzellen*) produziert und von diesen in die Blutbahn sezerniert werden. Auf

dem Blutwege gelangen die Hormone an die Zielorgane und üben dort eine spezifische Wirkung aus. Nur die Zellen der Zielorgane besitzen *Rezeptoren* für das entsprechende Hormon. Sie können deshalb die chemisch codierte Nachricht des Hormons lesen. (siehe R. F. Schmidt und G. Thews [Hrsg.], Physiologie des Menschen, 25. Aufl., Springer, 1993, Seite 390).

Der Transport der Hormone in einem Blutgefäß könnte durch die Advektionsgleichung modelliert werden,

$$u_t + cu_x = 0.$$

Die Geschwindigkeit c des Blutes ist ortsabhängig und variiert um einen Faktor von etwa 1000:

Aorta:	$33\ cm/s$	$=$	$3,3\ 10^{-1}\ m/s$
Kapillaren:	$0,3\ mm/s$	$=$	$3\ 10^{-4}\ m/s$

Der normale Mensch hat etwa 5 l Blut, das im Durchschnitt einmal pro Minute durch das ganze Kreislaufsystem fließt. Wird der Ausstoß eines Hormons zur Zeit $t = 0$ erhöht, kann die Wirkung erst nach einer Zeit

$$t = \frac{x}{c}$$

erfolgen, wo x die Länge des Blutkreislaufs zwischen der Drüse und dem Empfangsorgan ist.

Kapitel 7

Einfache Differenzenverfahren für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$

7.1 Einführung

Die ersten numerischen Methoden, die allgemein zur Lösung von Anfangs- und Randwertaufgaben eingesetzt wurden, waren die Differenzenverfahren. Schon um die Jahrhundertwende wurden einige analytische und numerische Ergebnisse erreicht (Runge [1908], Richardson [1911], Liebmann [1918]). Die theoretischen Grundlagen wurden u.a. in der berühmten Arbeit von Courant, Friedrichs und Lewy [1928] geschaffen.

Zwischen etwa 1930 und 1950 wurden Differenzenverfahren eingesetzt, um mehrere wichtige praktische Probleme zu lösen (Southwell [1940, 1946, 1956]). Ab 1950 nahm die Anzahl der Anwendungen mit der zunehmenden Verfügbarkeit von Computern rasch zu. Die Bücher von Collatz [1955] und Forsythe und Wasow [1960] beinhalten zahlreiche Hinweise auf all diese frühen Entwicklungen.

Die Grundidee des Differenzenverfahrens ist, die Lösung $u(\mathbf{x}, t)$ einer partiellen Differentialgleichung in einer Menge von Gitterpunkten $(\mathbf{x}_i, t_j)$ zu approximieren, indem die partiellen Ableitungen durch Differenzen ersetzt werden. Um die Methode zu beschreiben, betrachten wir zuerst das Anfangsrandwertproblem für die Advektionsgleichung:
Problem 1: Das Anfangsrandwertproblem:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0\,, \quad a \le x \le b\,, \quad 0 \le t \le T \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad a \le x \le b \\ u(a,t) &= \phi(t)\,, \quad 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{7.1}$$

Die Lösung von (7.1) wird in Abbildung 7.1 dargestellt (siehe Kapitel 6).
Zur numerischen Lösung des Problems 1 mit einem Differenzenverfahren wird ein gleichmäßiges $(N+1) \times (M+1)$ Gitter auf $G := (a,b) \times (0,T)$ gelegt:

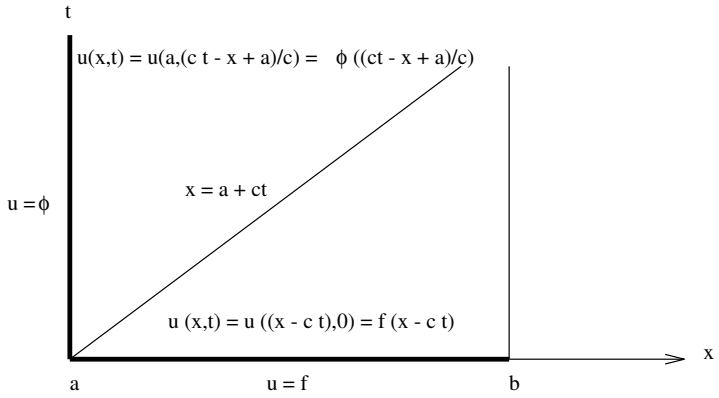


Abbildung 7.1: Das ARWP für $u_t + cu_x = 0$

$$
\begin{aligned}
h &= \Delta x := \frac{b-a}{N} \ , \\
k &= \Delta t := \frac{T}{M} \ , \\
x_i &= a + ih \ , \quad 0 \le i \le N \ , \\
t_j &= jk \ , \quad 0 \le j \le M \ .
\end{aligned}
$$

Die Menge der Gitterpunkte wird mit $G_{h,k}$ bezeichnet und in Abbildung 7.2 dargestellt. Die exakte Lösung $u(x,t)$ des Problems wird auf den Gitterpunkten durch eine Näherung $u^{h,k}$ approximiert:

$$u(x_i, t_j) \doteq u^{h,k}(x_i, t_j) =: u_{i,j}^{h,k}$$

Die Werte

$$
\begin{aligned}
u_{i,0}^{h,k} &:= u(x_i, 0) = f(x_i) \ , \quad 0 \le i \le N \\
u_{0,j}^{h,k} &:= u(0, t_j) = \phi(t_j) \ , \quad 0 \le j \le M
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

liegen vor. Ein Differenzenverfahren besteht aus einer Formel, die es ermöglicht, die übrigen Werte von $u_{i,j}^{h,k}$ zu berechnen. In den nächsten Abschnitten werden mehrere Differenzenverfahren vorgestellt.

7.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen

Sei $u \in C^2(G)$. Aus der Taylorreihenentwicklung

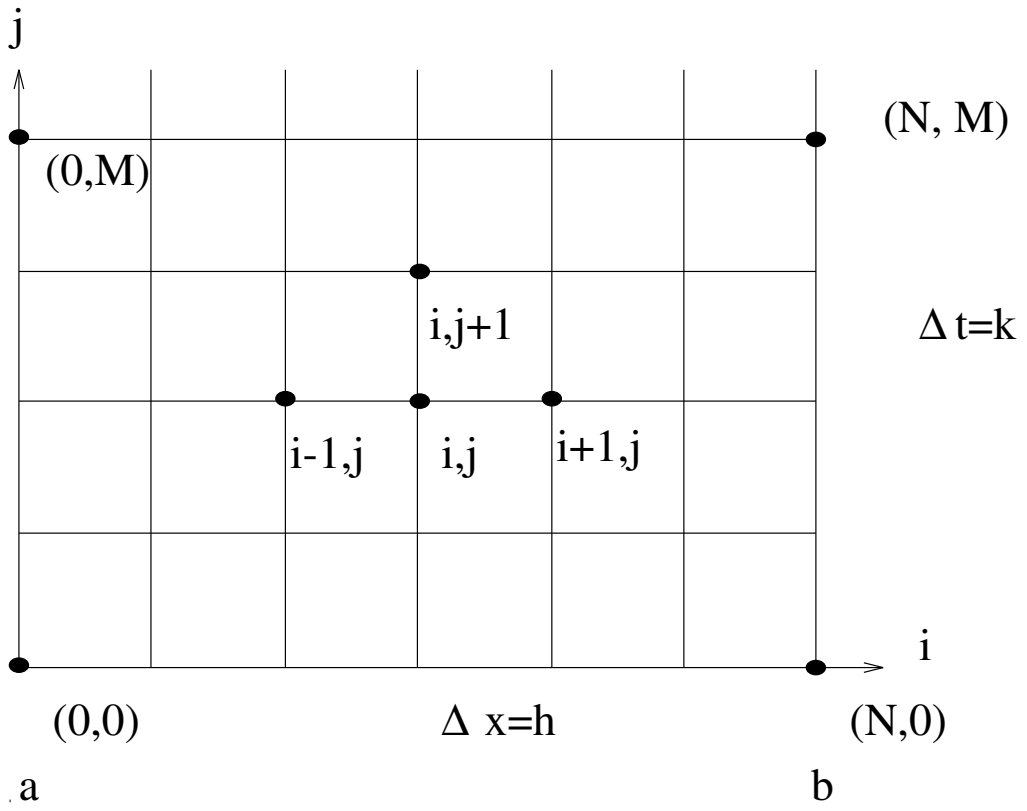


Abbildung 7.2: Das Gitter $G_{h,k}$

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\,\frac{\partial u}{\partial x}\,(x,t) + \frac{h^2}{2!}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(x,t) + \ldots \tag{7.3}$$

folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(x,t) = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + O(h) = D_{+x}(h)u(x,t) + O(h) \tag{7.4}$$

mit

$$h\,D_{+x}(h)u(x,t) := u(x+h,t) - u(x,t)\ . \tag{7.5}$$

Ebenfalls gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(x,t) = D_{-x}(h)u(x,t) + O(h) \tag{7.6}$$

mit

$$D_{-x}(h) := \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} \tag{7.7}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = D_{0x}(h)u(x,t) + O(h^2) \tag{7.8}$$

mit

$$D_{0x}(h) := \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} \tag{7.9}$$

Wenn keine Verwirrung möglich ist, schreibt man D_0 statt $D_{0x}(h)$ usw.
Selbstverständlich gelten ähnliche Formeln für partielle Ableitungen nach t, z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D_{+t}(k)(x,t) + O(k) \tag{7.10}$$

mit

$$D_{+t}(k)u(x,t) := \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} \tag{7.11}$$

7.3 Ein einfaches Differenzenverfahren

Sei $u \in C^2(G)$ eine Lösung der Gleichung

$$u_t + cu_x = 0\ . \tag{7.1}$$

Es folgt aus (7.4), (7.5), (7.10), (7.11), daß

$$D_{+t}(k)u(x_i,t_j) + c\ D_{+x}(h)u(x_i,t_j) = O(h) + O(k) \quad \text{für} \quad 0 \le i < N\ ,\ 0 \le j \le M-1. \tag{7.12}$$

Als Approximation zu $u(x_i,t_j)$ wird $u_{i,j}^{h,k}$ genommen, wobei $u^{h,k}$ die Lösung der Gleichung (7.12) mit rechter Seite gleich Null ist:

$$D_{+t}u^{h,k}(x_i,t_j) + c\ D_{+x}u^{h,k}(x_i,t_j) = 0 \tag{7.13}$$

oder

Abbildung 7.3: Das Molekül

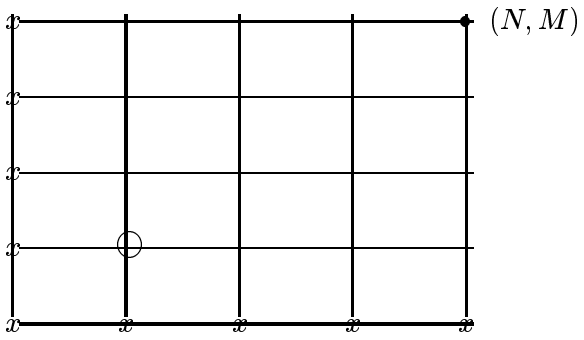


Abbildung 7.4: Die Anfangs- und Randwerte

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} + c\,\frac{u_{i+1,j}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{h} = 0\ . \tag{7.14}$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß der Quotient k/h konstant bleibt:

$$\lambda := \frac{k}{h} \in \mathbb{R}\ . \tag{7.15}$$

Statt $u^{h,k}$ genügt es, u^h zu schreiben, da $k = \lambda h$. Die Gleichung (7.14) wird in die folgende Gleichung überführt:

$$u_{i,j+1}^h - (1 + c\lambda)u_{i,j}^h + c\lambda u_{i+1,j}^h = 0\ . \tag{7.16}$$

Die Gleichung (7.16) kann als "Molekül" grafisch dargestellt werden (Abbildung 7.3): Nun betrachten wir das Problem 1. Einige Anfangs- und Randwerte von $u(x,t)$ sind vorgeschrieben, und die entsprechenden Werte von $u_{i,j}^h$ sind in (7.2) angegeben worden.

$$u_{1,1}^h - (1 + c\lambda)u_{1,0}^h + c\lambda u_{2,0}^h = 0\ .$$

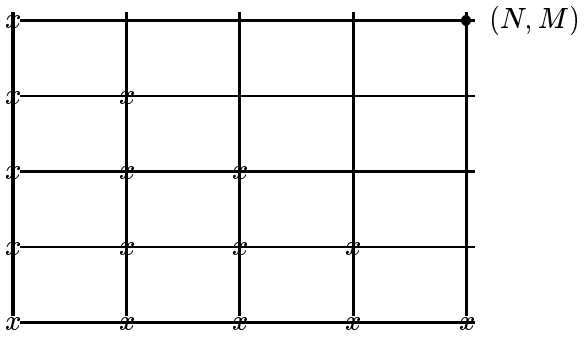


Abbildung 7.5: Punkte, wo u^h aus ... berechenbar ist

Da die Werte $u^h_{1,0}$ und $u^h_{2,0}$ schon bekannt sind, kann $u^h_{1,1}$ berechnet werden. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (7.16) kann u^h in allen Gitterpunkten berechnet werden, die in Abbildung 7.5 mit einem Kreuz markiert sind.
In den übrigen Gitterpunkten (i, j) kann (7.16) nicht angewandt werden, da $u^h_{i+1,j-1}$ nicht bekannt ist.

7.4 Ein zweites einfaches Differenzenverfahren

Im vorherigen Absatz wurde die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

durch die Differenzengleichung

$$D_{+t}u^h + c\, D_{+x}u^h = 0$$

approximiert. Wird die Ableitung u_x durch D_{-x} statt D_{+x} approximiert, dann erhalten wir folgende Gleichung:

$$u^h_{i,j+1} - (1 - c\lambda)u^h_{i,j} - c\lambda\, u^h_{i-1,j} = 0 \tag{7.17}$$

deren Molekül in Abbildung 7.6 gezeigt wird:
Ein wesentlicher Unterschied zu (7.16) besteht darin, daß die Approximation u^h sich mittels (7.17) in allen Gitterpunkten berechnen läßt, was darauf hindeutet, daß (7.17) möglicherweise eine bessere Approximation als (7.16) ist. Dieser Verdacht wird im nächsten Abschnitt bestätigt.

7.5 Die Courant-Friedrich-Lewy-Bedingung

In diesem Absatz beschreiben wir eine sehr wichtige **notwendige** Stabilitätsbedingung für Differenzenverfahren. Diese Bedingung heißt **Courant-Friedrich-Lewy-Bedingung**

Abbildung 7.6: Das Molekül II

oder auch **CFL-Bedingung** in abgekürzter Schreibweise. Diese Bedingung wurde zum ersten Mal in der berühmten klassischen Arbeit von Courant, Friedrichs und Lewy [1928] veröffentlicht. Diese Bedingung ist oft die einzige bekannte Bedingung für Stabilität.

Der Grundgedanke der CFL-Bedingung ist folgender: Es läßt sich in manchen Fällen feststellen, daß die Lösung einer partiellen Differentialgleichung an der Stelle (x,t) von einigen Anfangs- und Randwerten abhängig ist. In Kapitel 6 ist der Abhängigkeitsbereich für das Anfangswertproblem für die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

untersucht worden. Es wurde festgestellt, daß der Abhängigkeitsbereich der Lösung u im Punkt (x,t) der Punkt $(x-ct,0)$ ist:

$$AB(u;(x,t)) = (x-ct,0)\ . \tag{7.18}$$

Für eine Differenzengleichung ist es auch möglich, einen Abhängigkeitsbereich zu finden. Als erstes Beispiel betrachten wir die Differenzengleichung (7.16)

$$u^h_{i,j+1} - (1+c\lambda)u^h_{i,j} + c\lambda\, u^h_{i+1,j} = 0\ .$$

Die numerische Lösung $u^h_{i,j+1}$ im Punkt $(i,j+1)$ ist von den Werten der numerischen Lösung in zwei Gitterpunkten im vorherigen Zeitintervall abhängig: $(i+1,j)$ und (i,j). Durch Wiederholung wird sofort gesehen, daß der Abhängigkeitsbereich für u^h im Punkt (x_i,t_j) das Intervall (x_i,x_{i+j}) auf der x-Achse ist:

$$AB(u^h;(x_i,t_j)) = \{(x,0) : x_i \le x \le x_{i+j}\}\ .$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_i &= a + i\,h \\ t_j &= j\,k \\ \lambda &= k/h \end{aligned}$$

folgt

$$AB(u^h;(x,t)) = \{(\bar{x},0) : x \leq \bar{x} \leq x + t/\lambda\} \quad \text{für } (x,t) \in G_h \tag{7.19}$$

Für die Gleichung (7.17) ergibt sich ähnlicherweise:

$$AB(u^h;(x,t)) = \{(\bar{x},0) : x - t/\lambda \leq \bar{x} \leq x\} \quad \text{für } (x,t) \in G_h \tag{7.20}$$

Satz 7.1 (CFL-Bedingung) *Für die Konvergenz eines Differenzenverfahrens ist es notwendig, daß der Abhängigkeitsbereich der Differentialgleichung im Abschluß des Abhängigkeitsbereiches der Differenzengleichung beim Grenzübergang von h gegen 0 enthalten ist.*

Für alle $(x,t) \in G$ gilt dann genauer:

Ist $(x_h,t_h) \in G_h$ eine Folge von Gitterpunkten mit $(x_h,t_h) \to (x,t)$ und $\xi \in AB(u;(x,t))$, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$B_\epsilon(\xi) \cap AB(u^h;(x_h,t_h)) \neq \phi$$

für $0 < h < \delta$, wo $B_\epsilon(\xi)$ den Kreis mit dem Radius ϵ und dem Mittelpunkt ξ bezeichnet.

Beweis:
Sei die CFL-Bedingung nicht erfüllt. Dann gibt es $(x,t) \in G$, $\xi \in AB(u;(x,t))$, eine Folge $\{(x_h,\ t_h)\}$, $(x_h,t_h) \to (x,t)$ und ein $\epsilon > 0$, so daß

$$B_\epsilon(\xi) \cap AB(u^h;(x_h,t_h)) = \phi$$

für alle $h > 0$, d.h. Änderungen der Anfangs- oder Randdaten in $B_\epsilon(\xi)$ ändern die Lösung u in (x,t), aber nicht die Approximationen u^h in den Gitterpunkten (x_h,t_h).
Es ist deshalb möglich, die Anfangs- oder Randwertdaten so zu wählen, daß der Limes

$$\lim_{h \to 0}\ u^h(x_h,t_h)$$

entweder nicht existiert oder nicht gegen $u(x,t)$ konvergiert.

Beispiel 7.1 Es folgt aus (7.17) und (7.19), daß die Approximation (7.16) die CFL-Bedingung für das Problem

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0\ , \quad c > 0\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x)\ , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{7.21}$$

nicht erfüllt.

Beispiel 7.2 Es folgt aus (7.18) und (7.20), daß die Approximation (7.17) die CFL-Bedingung für das Problem erfüllt, genau dann, wenn

$$x - ct \in [x - t/\lambda\ ,\ x]$$

d.h. genau dann, wenn

$$c\lambda \leq 1\ . \tag{7.22}$$

Diese Bedingung heißt *die CFL-Bedingung für das Differenzenverfahren (7.17) bzgl. des Problems (7.21).*

Die CFL-Bedingung (7.22) ist nur eine notwendige Bedingung für Konvergenz. Daß diese Bedingung *in diesem Fall* auch hinreichend ist, wird in den nächsten beiden Abschnitten bewiesen.

7.6 Beweis der Konvergenz bezüglich $||\cdot||_\infty$

Sei $u^h(x,y)$ die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems (7.1), die mit der Differenzenapproximation (7.17) berechnet worden ist. Wie oben gezeigt worden ist, ist die CFL-Bedingung

$$c\lambda \leq 1$$

eine notwendige Bedingung für Konvergenz. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die CFL-Bedingung in diesem einfachen Fall auch hinreichend ist.

Zuerst werden einige Notationen eingeführt:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &:= u(x_i, t_j) \qquad \text{(die exakte Lösung)} \\ e_{i,j} &\equiv e^h_{i,j} := u_{i,j} - u^h_{i,j} \qquad \text{(der Fehler)} \end{aligned}$$

Satz 7.2 *Sei $u \in C^2(\overline{G})$ eine Lösung von (7.1), u^h eine mit Hilfe von (7.17) berechnete Approximation und $\lambda c \leq 1$. Dann gilt:*

$$|u^h_{i,j} - u_{i,j}| \leq (j\Delta t) M_2 (c+\lambda)\Delta x/2 \ ,$$

wobei

$$M_2 := \sup_{\bar{G}} \max_{p+q=2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^p \partial t^q} \right| \ .$$

Beweis:
Durch Taylor-Entwicklung folgt mit (7.1):

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + c\, \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} = f_{i,j} \ , \quad 1 \leq i \leq N \ , \quad 1 \leq j \leq M-1$$

mit

$$f_{i,j} := \frac{\partial^2 u(x_i, \tau)}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} - c\, \frac{\partial^2 u(\xi, t_j)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

wobei

$$\tau \in (t_j, t_{j+1}) \ , \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i) \ ,$$

so daß

$$|f_{ij}| \leq F := M_2 \cdot (\lambda + c) \cdot \frac{\Delta x}{2} \ .$$

Die Approximation u^h erfüllt die Differenzengleichung (7.17)

$$\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{\Delta t} + c\, \frac{u^h_{i,j} - u^h_{i-1,j}}{\Delta x} = 0 \ .$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß der Fehler $e^h_{i,j} = e_{i,j} := u(x_i, t_j) - u^h_{i,j}$ ebenfalls eine Differenzengleichung erfüllt:

$$\frac{e_{i,j+1} - e_{i,j}}{\Delta t} + c\, \frac{e_{i,j} - e_{i-1,j}}{\Delta x} = f_{i,j} \ .$$

Diese Gleichung wird nun umgestaltet:

$$e_{i,j+1} = (1 - c\lambda) e_{i,j} + c\lambda e_{i-1,j} + f_{i,j}\Delta t \ , \quad 1 \leq i \leq N \ , \ 1 \leq j \leq M-1 \ . \qquad (*)$$

Zusätzlich gilt:

$$e_{i,0} = u_{i,0} - u^h_{i,0} = 0 \ , \quad 1 \leq i \leq N$$

und

$$e_{0,j} = u_{0,j} - u^h_{0,j} = 0 \ , \quad 1 \leq j \leq M \ .$$

Sei

$$E_j := \max_{0 \le i \le N} |e_{i,j}| \ .$$

Es folgt aus (*),

$$|\varepsilon_{i,j+1}| \le |1 - c\lambda| \cdot E_j + |c\lambda| \cdot E_j + F\,\Delta t = E_j + F\,\Delta t \ ,$$

da $0 < c\lambda \le 1$, so daß

$$E_{j+1} = \max_{0 \le i \le N} |\varepsilon_{i,j+1}| \le E_j + F\Delta t$$

Es folgt sofort durch Induktion unter Berücksichtigung der Gleichung $E_0 = 0$, daß

$$E_j \le j\ F\,\Delta t \ .$$

Bemerkung 7.1 Diese Methodik wird oft in der Theorie numerischer Verfahren angewandt, und wir werden später weitere Beispiele in Zusammenhang mit elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen kennenlernen.

Es muß allerdings hier erwähnt werden, daß diese Methodik für hyperbolische Differentialgleichungen wenig Anwendung findet. Der Grund ist, daß die Maximumnorm für hyperbolische Differentialgleichungen ungeeignet ist.

7.7 Zusammenfassung einfacher Methoden

7.7.1 Zeitvorwärts und Raumvorwärts

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} = 0$$

oder

$$u_{i,j+1} = (1 + c\lambda)u_{i,j} - c\lambda u_{i+1,j}$$

7.7.2 Zeitvorwärts und Raumrückwärts

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0$$

oder

$$u_{i,j+1} = (1 - c\lambda)u_{i,j} + c\lambda u_{i-1,j}$$

7.7.3 Zeitvorwärts und räumlich zentriert

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$$

oder

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{c\lambda}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$$

7.7.4 Lax-Friedrichs

$$\frac{u_{i,j+1} - \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})}{k} + c\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$$

7.7.5 Leap-frog oder Bockspringen

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + c\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$$

7.8 Beweis der Konvergenz bzgl. $||\cdot||_2$ (Energie-Methode)

Dieser Abschnitt könnte noch verbessert werden. Es wäre vielleicht besser, periodische Anfangswerte zu betrachten.
Wir betrachten:

Problem 2:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0\,, \quad t > 0\,, \quad x > 0 \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

mit $f \in C^2(-\infty, +\infty)$ und

$$f^{(r)} \in L_2(-\infty, \infty) \text{ für } 0 \le r \le 2\,.$$

Wir möchten beweisen, daß die Approximationen u^h, die mit dem Differenzenverfahren (7.17) berechnet werden, gegen eine Lösung u konvergieren. Die Existenz von u wird nicht vorausgesetzt, so daß wir einen konstruktiven Existenzbeweis erhalten. (Allerdings wird u als Limes einer nicht genau angegebenen Teilfolge u^{h_i} definiert.)

Diese Beweismethode wurde zuerst durch Courant, Friedrichs und Lewy [1928] angewandt. Siehe auch Ladyzhenskaya [1985] und Epstein [1962].

7.8.1 Notation

In diesem Abschnitt benutzen wir die folgende Notation:

$$\begin{aligned}
X &:= \ell_2 \\
f_h &:= \{f(ih)\} : i \in \mathbb{Z}\} \in X \\
u_j^h &:= \{u_{i,j}^h : i \in \mathbb{Z}\} \\
\Delta_x u_j^h &= \left\{ \left(\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\} \\
\Delta_x^2 u_j^h &= \left\{ \left(\frac{u_{i+2,j}^h - 2u_{i+1,j}^h + u_{i,j}^h}{h^2} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\} \\
\Delta_t u_j^h &= \left\{ \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}^h}{k} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

ℓ_2 sei der Vektorraum aller reellen Folgen

$$y = \{y_i\} = \{y_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$$

mit

$$\|y\|_2 := \left[\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2 \right]^{1/2} < \infty \ .$$

$L_2(0, \infty)$ sei der Vektorraum aller reellen Funktionen $f(x)$, $x \geq 0$, mit

$$\|f\|_2 := \left[\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < 0 \ .$$

7.8.2 Die Energienorm

Sei $u(\cdot, t) \in C_0^2(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty)$ für $t \geq 0$ eine Lösung des Problems 2

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} 2uu_t dx \\
&= -2c \int_{-\infty}^{\infty} uu_x dx \\
&= \text{Limes}_{A \to \infty} \left[-c(u(x,t))^2 \right]_{-A}^{+A} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\|u(\cdot,t)\|_2^2 = \|u(\cdot,0)\|_2^2 \ .$$

D.h. die Norm $\|u(\cdot,t)\|_2$ ist konstant.

Bemerkung 7.2 *Gilt für die Anfangsdaten*

$$u(\cdot,0) \in C_0^2(\mathbb{R}),$$

dann folgt mit Hilfe der Beschränktheit des Abhängigkeitsbereiches, daß $u(\cdot,t) \in C_0^2(\mathbb{R})$. Dieses Ergebnis führt dazu, daß man versucht zu zeigen, daß die diskrete Energienorm

$$\|u^h\|_2$$

ebenfalls erhalten bleibt.

7.8.3 Der Existenz- und Konvergenzbeweis

Satz 7.3 *Sei* $f \in L_2(-\infty, +\infty), f_h \in X, \quad c > 0$, *und* u^h *durch (7.17) definiert. Seien* M_0, M_1, M_2 *Konstanten, wofür*

$$\begin{aligned} h\|f_h\|_2^2 &\leq M_0 \\ h\|\Delta_x f_h\|_2^2 &\leq M_1 \\ h\|\Delta_x^2 f_h\|_2^2 &\leq M_2 \ . \end{aligned}$$

Dann existiert eine Folge $\{h_n\}$, $h_0 > h_1 > h_2, \ldots$ *und eine Funktion* u, *so daß*

$$u^{h_n} \longrightarrow u$$

und u *eine Lösung des Problems 2 ist.*

Beweis: (Skizze)

Die Grundidee ist, die sequentielle Kompaktheit der Folgen u^h , $\Delta_x u^h$ usw. zu zeigen. Ist diese vorhanden, dann existieren konvergente Teilfolgen u^{h_i} , $\Delta_x u^{h_i}$ und Funktionen u, u_x usw. mit

$$\begin{aligned} u_{h_i}^{h_i} &\longrightarrow u \ , \\ \Delta_x u^{h_i} &\longrightarrow u_x \ . \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u$$

usw.

Der Beweis, daß die Folgen sequentiell kompakt sind, wird mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli und der unten angegebenen Hilfssätze durchgeführt.

Der Satz von Arzela-Ascoli, der unten angegeben wird, ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß:

Satz 7.4 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Siehe Forster, Analysis I, S. 31.

Definition 7.1 *Sei A eine Teilmenge eines topologischen Vektorraumes X. A heißt* **sequentiell kompakt**, *falls jede Folge aus A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X enthält. (Siehe Dunford und Schwartz, I, S. 21.)*

Definition 7.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Familie F stetiger Funktionen auf Ω heißt* **gleichgradig stetig**, *wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jedes ϕ in F und für je zwei Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ aus Ω stets*

$$\|\phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2)\| < \epsilon$$

gilt.

Satz 7.5 ((Arzela-Ascoli)) *Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $A \subset C(\overline{\Omega})$ ist genau dann sequentiell kompakt, falls:*

1. *Es existiert $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|\phi\|_\infty \leq M \ , \quad \textit{für alle } \phi \in A \ .$$

2. *A ist gleichgradig stetig.*

(Siehe Adams, S. 10.)

Hilfssatz 1:

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.3. Dann gibt es Konstanten M_0, M_1 und M_2, so daß

$$\begin{array}{lll} a) & h\|u_j^h\|_2^2 & \leq M_0, \\ b) & h\|\Delta_x u_j^h\|_2^2 & \leq M_1, \\ c) & h\|\Delta_x^2 u_j^h\|_2^2 & \leq M_2, \\ d) & h\|\Delta_t u_j^h\|_2^2 & \leq M_3 \end{array}$$

Beweis von a):

Für $v = \{v_i\} \in X$ sei T der Verschiebungsoperator, $Tv := \{v_{i+1}\}$.

Nach Voraussetzung ist $f_h \in X$, so daß $u_0^h = f_h \in X$. Aus der Gleichung

$$u_{j+1}^h = (1 - c\lambda)u_j^h + c\lambda T^{-1}u_j^h$$

folgt sofort, daß $u_j^h \in X$ für alle j und

$$\|u_{j+1}^h\|_2 \leq (1 - c\lambda)\|u_j^h\|_2 + c\lambda\|T^{-1}u_j^h\|_2 = \|u_j^h\|_2 \ .$$

Zusammenfassend gilt:

$$h\|u_j^h\|_2^2 \leq h\|f_h\|_2^2 \ \leq \ M_0 \quad \text{für alle} \ \ j \ .$$

Beweis von b):

Sei nun

$$\begin{array}{rcl} v_j^h & := & \Delta_x u_j^h \ , \\ & = & \left\{ \left(\dfrac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h} \right) \right\} \ . \end{array}$$

Dann gilt:

$$v_0^h = \Delta_x f_h$$

und

$$v_{j+1}^h = (1 - c\lambda)v_j^h + c\lambda v_{j-1}^h \ .$$

Wie in a) kann bewiesen werden, daß

$$h\|v_j^h\|_2 \leq h\|\Delta_x f_h\|_2^2 \leq M_1 \ .$$

Beweis von c): Wie a) und b).

Beweis von d):

Das Differenzenverfahren lautet:

$$\Delta_t u_{i,j}^h = -c\Delta_x u_{i,j}^h$$

und somit:

$$h\|\Delta_t u_j^h\|_2^2 = hc^2\|\Delta_x u_j^h\|_2^2 \leq c^2 M_1 \ .$$

Hilfssatz 2:

Sei w^h Gitterfunktionen, $w^h \in X$ mit $h\|\Delta_x w^h\|_2^2 \leq M$.

Sei $\tilde{w}^h$ die Erweiterung von w^h durch lineare Interpolation.

Dann gibt es eine Funktion $w \in X$ und eine Teilfolge h_r, so daß

$$\tilde{w}^{h_r} \longrightarrow w \ \text{ für } \ r \longrightarrow \infty \ .$$

Beweis:

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, so daß x und y Gitterpunkte sind für genügend klein h. Sei

$$x = rh \ , \ \ y = sh \ , \ \ s > r \ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |w^h(y) - w^h(x)| &= \left|\sum_{j=r}^{s-1} h[\Delta_x w^h(jh)]\right| \\ &\leq h\left[\sum_{j=r}^{s-1} |\Delta_x w^h(jh)|^2\right]^{1/2} (s-r)^{1/2} \\ &\leq [h\|\Delta_x w^h\|_2^2]^{1/2}(hs-hr)^{1/2} \\ &\leq M|y-x|^{1/2} \ . \end{aligned}$$

D.h. die Funktionen $\tilde{w}^h$ sind gleichgradig stetig. Man kann dann den Satz von Arzela-Ascoli anwenden.

7.9 Das Lax-Wendroff-Verfahren

In diesem Abschnitt beschreiben wir das Lax-Wendroff-Verfahren, das später in verallgemeinerter Form diskutiert wird.

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n && (7.23)\\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n && (7.24)\\ G &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ && (7.25) \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von u am Punkt (x_i, t_j) ist:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{i,j} + O(\Delta t^3)\,. \qquad (*)$$

Es folgt aus der Differentialgleichung, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c\,\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\\ &= -c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ &= -c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ &= c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \end{aligned}$$

Wenn die Terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ in der Taylorentwicklung $(*)$ durch $-c\,\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ersetzt werden, ergibt sich:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \Delta t\; c\;\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\; c^2\;\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + O(\Delta t^3)\,.$$

Zuletzt werden die partiellen Ableitungen nach x approximiert:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)\\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) +\\ &+ \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\,(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})\\ &+ O(\Delta t^3 + \Delta t\;\Delta x^2 + \Delta t^2\;\Delta x^2) \end{aligned}$$

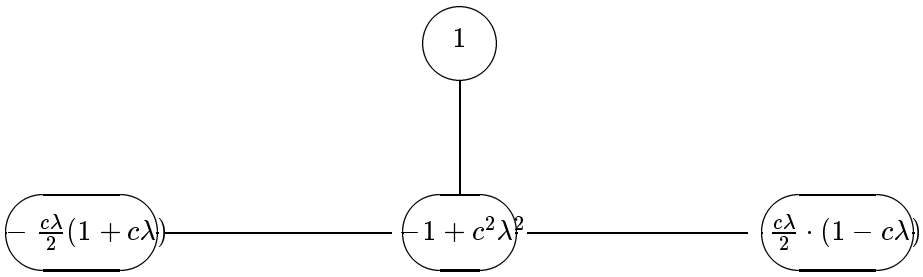


Abbildung 7.7: Das Molekül des Lax-Wendroff-Verfahrens

Das Lax-Wendroff-Verfahren entsteht, wenn der Term $O(\Delta x^3 + \Delta t\ \Delta x^2)$ vernachlässigt wird:

$$u^h_{i,j+1} = \frac{c\lambda}{2} \cdot (1 + c\lambda) \cdot u^h_{i-1,j} + (1 - c^2\lambda^2) \cdot u^h_{i,j} - \frac{c\lambda}{2}\,(1 - c\lambda) \cdot u^h_{i+1,j}$$

Das Molekül wird in Abbildung 7.7 dargestellt:

Bemerkung 7.3 *1. Das Lax-Wendroff-Verfahren ist für $|c\lambda| \leq 1$ konvergent, d.h. die CFL-Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. (Diese Behauptung wird später bewiesen.)*

2. Das Lax-Wendroff-Verfahren hat die Ordnung 2:

$$e^h = O(h^2 + k^2)\ .$$

3. Wenn die Lösung innerhalb des Streifens $a \leq x \leq b$ gesucht wird, muß $u(b,t)$ auch vorgeschrieben werden, obwohl dies für das analytische Problem nicht nötig ist.

7.10 Abschließende Bemerkung zur Stabilität

Bei dem Begriff Stabilität spielt die Wahl der Norm eine Rolle. Es ist durchaus möglich, daß eine Methode bzgl. einer Norm stabil ist und bzgl. einer zweiten Norm nicht stabil ist. Trotzdem sind die Aussagen mit nur kleinen Abweichungen größtenteils gleich.

Literaturverzeichnis

[1] Adams, R. A.: Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.

[2] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Auflage. Springer 1955.

[3] Courant, R., Friedrichs, K. O. und Lewy, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann., **100**, 32-74, 1928.

[4] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. Interscience, 1966.

[5] Epstein, B.: Partial Differential Equations. McGraw-Hill, 1962.

[6] Forsythe, G.E., Wasow, W.R.: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. New York: John Wiley, 1960.

[7] Großmann, Ch., Roos, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner, 1992.

[8] Gustafsson, B., Kreiss, H.-O., Oliger, J.: Time Dependent Problems and Difference Methods. Wiley, 1995.

[9] Kreiss, K.O., Widlund, O.: Difference approximations for initial value problems for partial differential equations. Report No. 7, Dept. of Computer Sciences, Uppsala Univ. Sept. 1967.

[10] Kröner, D. Numerical Schemes für Conservation Laws. Wiley + Teubner, 1997.

[11] Ladyzhenskaya, O.L.: The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer, 1985.

[12] Leveque, Randall J.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser, 1992.

[13] Liebmann, H.: Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. 1918, S. 385-416.

[14] Quarteroni, A., Valli, A.: Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer, 1974.

[15] Richardson, L.F.: The Approximate Arithmetical Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. A Bd. 210 (1911) S. 308-357.

[16] Richtmyer, R. D., Morton, K. W.: Difference Methods for Initial-value Problems. Wiley, Interscience, 1967.

[17] Runge, C.: Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ Constans numerisch zu integrieren. Z. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908) S. 225-232.

[18] Southwell, R.V.: Relaxation Methods in Engineering Science. Oxford, 1940.

[19] Southwell, R.V.: Relaxation Methods in Theoretical Physics. Bd. I, II. Oxford, 1946 und 1956.

[20] Smith, G.D.: Numerical Solution of Partial Differential Equations. Finite Difference Methods. Third Edition. Oxford University Press.

[21] Strikwerda, J. C.: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. Wadsworth and Brooks / Cole, 1989.

Kapitel 8

Die Wärmeleitungsgleichung

8.1 Einführung

Die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{8.1}$$

heißt *Wärmeleitungsgleichung*.

Diese Gleichung wurde in Absatz 3.5 hergeleitet. In Absatz 3.6 wurden die vielen verwandten Gleichungen kurz erwähnt.

Wir betrachten einige einfache analytische Lösungsverfahren und Eigenschaften. Differenzenverfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung werden später behandelt.

Literatur:

Cannon, J.R.: The One-Dimensional Heat Equation. Addison Wesley, 1984.

Carslaw, H.S., **Jaeger**, J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959.

Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, 2.ed. Oxford: Clarendon Press, 1975.

Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, 1964.

Grigull,, U.:, **Sondner**, H.: Wärmeleitung. Berlin: Springer, 1979. (in der Inst.Bibl.)

Jacobs, M.H.: Diffusion Processes. Berlin: Springer, 1967.

Widder, D.V.: The Heat Equation. Academic Press, 1975.

8.2 Analytische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einige Lösungsmethoden für die Wärmeleitungsgleichung. Unser Ziel ist, analytische Lösungen für Modellprobleme zu finden, mit denen wir später numerische Ergebnisse vergleichen und ein "Gefühl" für die Wärmeleitungsgleichung entwickeln können.

8.2.1 Die Methode der Trennung der Veränderlichen

Man macht den Ansatz, daß die Lösung der eindimensionellen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \tag{8.2}$$

als ein Produkt von zwei Funktionen $X(x)$ und $T(t)$ darstellbar ist, wobei X eine nur von x und T eine nur von t abhängige Funktion ist:

$$u(x,t) = X(x)T(t)\ . \tag{8.3}$$

Setzen wir (8.3) in die Gleichung (8.2) ein und dividieren durch X und T, dann erhalten wir:

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = \frac{\frac{dT}{dt}}{T} = \lambda\ , \tag{8.4}$$

wobei λ weder von x noch von t abhängig ist und deshalb eine Konstante ist.

Zur Bestimmung von X und T liegen deshalb zwei gewöhnliche Differentialgleichungen vor:

$$\begin{aligned} X'' &- \lambda X = 0 \\ T' &- \lambda T = 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

mit allgemeinen Lösungen

$$X = a\ \exp(\sqrt{\lambda}x) + b\ \exp(-\sqrt{\lambda}x)\ , \tag{8.6}$$

$$T = c\ \exp(\lambda t)\ , \tag{8.7}$$

wobei a, b und c beliebige Konstanten sind. Es sollte beachtet werden, daß λ, a, b und c negative oder sogar komplexe Zahlen sein dürfen. Da hier das Produkt aus X und T betrachtet wird, kann o.E. $c = 1$ angenommen werden.

Für jede Konstante λ erhalten wir eine Lösung (8.3), wobei X und T durch (8.6) und (8.7) gegeben sind. Da die Wärmeleitungsgleichung linear ist, ist eine Summe dieser speziellen Lösungen auch eine Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Zwei Anwendungen werden jetzt gegeben.

Beispiel 8.1 Gesucht wird die Lösung des folgenden Anfangs-Randwertproblems:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \ , \quad 0 \le x \le \pi \ , \quad 0 \le t < \infty && (8.8) \\ u(x,0) &= \varphi(x) \ , \quad 0 \le x \le \pi && (8.9) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \ , \quad t > 0 \ . && (8.10) \end{aligned}$$

Diese Aufgabe entspricht dem folgenden physikalischen Problem:

Ein Stab der Länge π mit konstantem Querschnitt hat zur Zeit $t_0 = 0$ die Temperaturverteilung $\varphi(x)$. Der Stab ist isoliert, so daß der Wärmestrom nur in der x-Richtung stattfindet. Die Endpunkte des Stabes werden für Zeit $t \ge 0$ auf Temperatur 0 gehalten.

Die Lösung wird mit folgendem Reihenansatz gesucht:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) \ , \tag{8.11}$$

wobei C_n Konstanten sind und X_n und T_n für $\lambda = \lambda_n$ durch die Gleichungen (8.7) und (8.8) bestimmt werden. Die Werte von λ_n werden so gewählt, daß die Gleichung (8.10) erfüllt wird, d.h.

$$X_n(0) = X_n(\pi) = 0 \ . \tag{8.12}$$

Das erfordert:

$$\lambda_n = -n^2 \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{8.13}$$

so daß

$$\begin{cases} X_n(x) &= \sin(nx) \\ T_n(t) &= \exp(-n^2 t) \end{cases} \tag{8.14}$$

Setzen wir (8.14) in (8.11) ein, so erhalten wir:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) \cdot \exp(-n^2 t) \ . \tag{8.15}$$

Die Funktion $u(x,t)$, die durch Gleichung (8.15) definiert ist, erfüllt die Wärmeleitungsgleichung (8.8) und die Randwertbedingungen (8.10) für jede Wahl der Koeffizienten C_n. Damit die Anfangswertbedingung (8.9) erfüllt wird, ist nötig, daß

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \varphi(x) \ , \tag{8.16}$$

d.h. die Koeffizienten C_n sind die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe. Aus der Theorie der Fourier-Reihen erhalten wir:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ . \tag{8.17}$$

□

Beispiel 8.2 Man sucht eine zeitperiodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Aus Gleichung (8.7) erkennt man, daß solch eine Lösung erfordert, daß λ imaginär sein muß, d.h. $\lambda = i\omega$, wobei $i = \sqrt{-1}$ und ω eine reelle Konstante ist. Unter Berücksichtigung der Identität $\sqrt{i} = (1+i)\sqrt{2}$ erhalten wir aus den Gleichungen (8.6) und (8.7)

$$u(x,t) = a \ \exp\left[x \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2}} + i(x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \omega t)\right] + b \ \exp\left[-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + i(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \omega t)\right] \ . \tag{8.18}$$

Wenn gefordert wird, daß $\omega > 0$ und daß u für positive x beschränkt sein sollte, gilt $a = 0$. Die Funktion u in Gleichung (8.18) ist eine komplexwertige Funktion. Da die partielle Differentialgleichung eine reelle Gleichung ist, sind beide, die reellen und komplexen Teile von u, Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Wenn wir nur den reellen Teil von u nehmen, dann erhalten wir folgende periodische Lösung:

$$u(x,t) = b \ \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \cos\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}} + \omega t\right) \ . \tag{8.19}$$

Diese Lösung kann benutzt werden, um die Temperaturschwankungen in der Erde infolge der täglichen und jährlichen Temperaturschwankungen an der Erdoberfläche zu analysieren: □

Tiefe $x(m)$	Amplitude $A(x)(^\circ C.)$
0	19.5
1	11.5
2	6.8
3	4.2
4	2.6

Tabelle 8.1:

Beispiel 8.3 (Tychonoff, Samarskii, S. 236) Im folgenden soll als Anwendung der Wärmeleitungsgleichung die Ausbreitung von Temperaturwellen im Erdboden betrachtet werden. Die Temperatur der Erdoberfläche ändert sich mit einer täglichen und einer jährlichen Periode. Diese Temperaturschwankungen breiten sich von der Erdoberfläche ins Erdinnere aus. Setzt man den Erdboden als homogen voraus, so ist ein einfaches Modell durch folgendes Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung gegeben:
Gesucht ist eine beschränkte Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, , \quad 0 \leq x < \infty \, , \; -\infty < t \, , \tag{8.20}$$

mit der Randbedingung (an der Erdoberfläche)

$$u(0,t) = A \, \cos \, \omega t \, . \tag{8.21}$$

Hierbei beschreibt ω die Periode der Temperaturschwankungen und a^2 ist eine Konstante für die Temperaturleitfähigkeit des Bodens. Die Einheit für x sei ein Meter und für t ein Tag.
Man leitet mit Hilfe eines Separationsansatzes folgende Darstellung der Lösung her (siehe (8.19)):

$$u(x,t) = A \, \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \, x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \, x\right) \, . \tag{8.22}$$

Die Amplitude der Temperaturschwankungen wird also durch die Funktion

$$A(x) := A \, \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \, x\right) \tag{8.23}$$

beschrieben. In einer Beobachtungsstation in der ehemaligen UdSSR wurden die jährlichen Temperaturschwankungen gemessen. Die Amplitude betrug an der Erdoberfläche $19,5^\circ C$. Weiter wurden folgende Werte gemessen (siehe Tabelle 8.1):
Auf Grund dieser Werte kann man die Temperaturleitfähigkeit des Erdbodens bestimmen:

$$\ell n \, \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \, x \tag{8.24}$$

Sei

$$\alpha = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \, .$$

Da die Periode einem Jahr entspricht, gilt

$$\omega = 2\pi/365 \, .$$

Der Koeffizient α kann aus den Daten in der Tabelle mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden Als Ergebnis erhält man:

$$\alpha = 4,0 \times 10^{-3}$$

Da

$$a^2 = \frac{\omega}{2\alpha^2} \tag{8.25}$$

folgt

$$a^2 = 4.1 \times 10^{-3} cm^3/sec. \tag{8.26}$$

Aus der Identität

$$\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x = \omega \left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2\omega}} \right)$$

folgt, daß in der Tiefe x die Jahresschwankungen um $\frac{x}{\sqrt{2a^2\omega}}$ verspätet sind.

Z.B. wird die Maximaltemperatur in 4 m Tiefe etw 4 Monate später als auf der Erdoberfläche erreicht. □

Die Methode der Trennung der Veränderlichen und insbesondere die Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Fourier-Reihen ist historisch von großer Bedeutung. Es sollte aber bemerkt werden, daß die Methode der LAPLACEschen Transformation, die wir später besprechen, heute viel öfter in der Praxis benutzt wird, weil es analytische Lösungen zu gleichen Problemen mit viel weniger Aufwand als die Fourier-Methode geben kann.

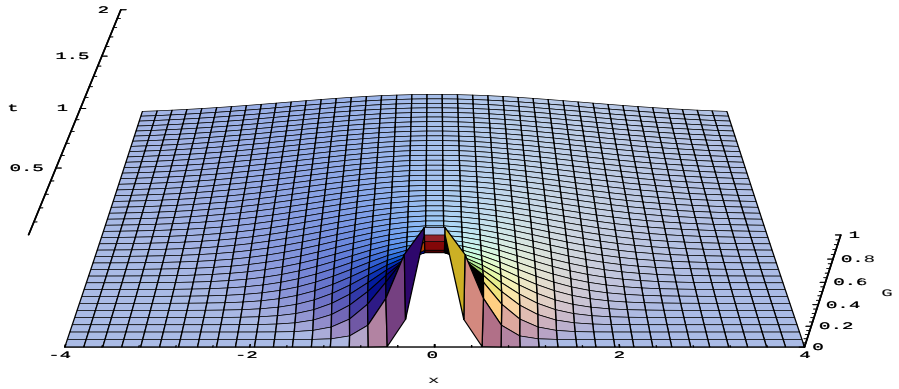


Abbildung 8.1: $G(x,0,t)$ für $-4 \leq x \leq 4,\ 0.01 \leq t \leq 2$

8.2.2 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem

$$u_t = u_{xx} \tag{8.27}$$

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8.28}$$

Die Funktion

$$G(x,\xi,t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\ \exp[-(x-\xi)^2/4t] \tag{8.29}$$

wird die *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung genannt. Sie ist auch als die *Greensche Funktion der unendlichen Geraden* bekannt. Die folgenden Eigenschaften von G lassen sich leicht beweisen:

$$\frac{\partial G}{\partial t}\,(x,\xi,t) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,(x,\xi,t) \tag{8.30}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2)ds = 1 \tag{8.31}$$

Die Funktion G wird in Abbildung 8.1 grafisch dargestellt. Später werden wir G mit Hilfe der Fourier-Transformation herleiten.
Unter Berücksichtigung von Gleichung (8.31) läßt sich erkennen, daß $G(x,\xi,t)$ das folgende physikalische Problem löst: Ein unendlich langer Stab befindet sich am Zeitpunkt $t = 0$ in folgendem Zustand: An der Stelle $x = \xi$ ist die Temperatur unendlich. Bei allen übrigen Punkten $x \neq \xi$ ist die Temperatur 0. Alle Wärme ist an der Stelle $x = \xi$ konzentriert, und zwar in der Höhe von einer Einheit.

Bemerkung 8.1 Die Funktion $G(x, \xi, t)$ erfüllt die Randbedingung

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi) \ ,$$

wo $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion, eine Distribution, ist. Eine Distribution ist eine verallgemeinerte Funktion. Mehr darüber z.B. in: Schwarz, L.: Theorie des Distributions. Paris: Hermann, 1973.

Die eben beschriebenen Anfangswertprobleme für G sind natürlich physikalisch unrealistisch. Sie lassen sich dadurch approximieren, daß sich zur Anfangszeit $t = 0$ eine Einheit von Wärme in einer kleinen Umgebung von $x = \xi$ befindet.

Satz 8.1 *Sei* $f \in C(-\infty, +\infty)$ *mit*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty \ .$$

Dann existiert das Integral

$$u(x, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi \tag{8.32}$$

und stellt eine Lösung $u(x, t)$ *des Anfangswertproblems (8.27), (8.28) dar.*

Beweis (Skizze):
Der Beweis beruht auf folgenden Bemerkungen:

1. Die Tatsache, daß G ein negatives Exponential enthält, bedeutet, daß das Integral in (8.32) gleichmäßig konvergiert und deshalb der Tausch von Differentiation und Integration gerechtfertigt ist.

2. Das Verhalten von G für kleine t, das in Abbildung 8.1 gezeigt wird, nämlich daß G nur in der unmittelbaren Umgebung von $x = \xi$ großist, impliziert, daß $u(x, t)$ gegen $f(x)$ strebt für t gegen 0.

Durch Benutzung dieser beiden Bemerkungen läßt es sich streng beweisen, daß $u(x, t)$, wie in Gleichung (8.32) angegeben, das Anfangswertproblem (8.27) und (8.28) löst.

Bemerkung 8.2 Es folgt aus Gleichung (8.32), daß die Anfangsdaten geglättet werden. Diese Eigenschaft wird bei Mehrgitterverfahren (Gauß-Seidel- Verfahren) und bei der Bildverarbeitung benutzt.

Literatur:

Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw Hill, 1983.

8.3 Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung

8.3.1 Der Abhängigkeitsbereich

Die Lösung (8.32) läßt eine interessante Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung beweisen. Wir betrachten den speziellen Fall, wo der Träger von f beschränkt ist, z.B.

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| > 1 \; .$$

Zur Anfangszeit $t = 0$ ist die Wärme auf dem Intervall $(-1, +1)$ konzentriert. Aber es folgt aus Gleichung (8.32), daß die Lösung $u(x,t)$ für jeden positiven Wert von t überall positiv ist. Das bedeutet, daß sich die Wärme mit unendlicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Dies ist natürlich physikalisch unmöglich. Es bedeutet, daß mindestens in dieser Hinsicht die Wärmeleitungsgleichung der physikalischen Wahrheit nicht entspricht.

Bemerkung 8.3 Es ist z.B. experimentell beobachtet worden (Bertman + Sandifuco, Scientific American [1970]), daß in gefrorenem Helium Wärmewellen entstehen können. Eine Beschreibung durch eine Wellengleichung wäre hier also angemessener. In den meisten Fällen ist die Wärmeleitungsgleichung aber ein gutes Modell für Wärmeverteilungsprobleme.

Für das Anfangswertproblem (8.27), (8.28) ist der Abhängigkeitsbereich der Lösung u im Punkt (x,t) die ganz reelle Achse $\mathbb{R}$;

$$AB(u;(x,t)) = \mathbb{R} \; .$$

Diese Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung hat sofort Konsequenzen für Differenzenverfahren. Wird nämlich die Gleichung (8.27) durch die klassische explizite Differenzengleichung

$$D_{t+}u^h(x_i,t_j) = D_{x-}D_{x+}u^h(x_i,t_j) \; ,$$

d.h.

$$(*) \qquad \frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{\Delta t} = \frac{u^h_{i+1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

approximiert, dann folgt sofort aus der CFL-Bedingung, daß die Approximationen u^h nicht gegen u konvergieren können, falls

$$\Delta t = \lambda \Delta x$$

gilt.

Für die Differenzengleichung $(*)$ wird deshalb immer vorausgesetzt, daß

$$\Delta t = \lambda (\Delta x)^2$$

gilt.

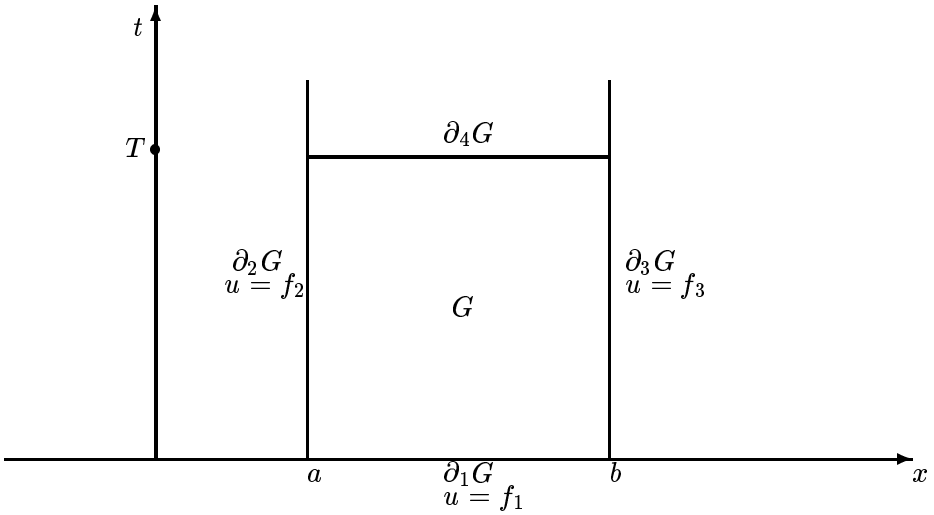


Abbildung 8.2: Das Anfangswert-Randwertproblem in einem Streifen

Bemerkung 8.4 Für die Wärmeleitungsgleichung laufen - wenn man will - die "Charakteristiken" parallel zur x-Achse.

8.3.2 Das Maximumprinzip

Satz 8.2 *Sei*

$$\begin{aligned} G &:= (a,b) \times [0,T] \\ \partial_1 G &:= (a,b) \times \{0\} \\ \partial_2 G &:= \{a\} \times [0,T] \\ \partial_3 G &:= \{b\} \times [0,T] \\ \partial_4 G &:= (a,b) \times \{T\} \ . \end{aligned}$$

(Siehe Abbildung 8.2)
Eine in $\bar{G}$ definierte und stetige Funktion $u(x,t)$, die in $G \cup \partial_4 G$ zweimal stetig differenzierbar ist und die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

erfüllt, nimmt ihr Maximum auf dem "parabolischen Rand" $R := \partial_1 G \cup \partial_2 G \cup \partial_3 G$ an.

Beweis:
Die Funktion u ist in $\bar{G}$ stetig. Sei

$$M := \max_{\bar{G}} \ u(x,t) \ .$$

Wir nehmen jetzt an, daß für ein $\epsilon > 0$

$$(*) \qquad \max_R \; u(x,t) \leq M - \epsilon \; ,$$

und zeigen, daß ein Widerspruch entsteht.

Gilt $(*)$, dann folgt, daß es einen Punkt (x_0, y_0) gibt mit

$$u(x_0, t_0) = M \; , \quad (x_0, t_0) \in G \cup \partial_4 G \; .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_t(x_0,t_0) &\geq 0 \\ u_x(x_0,t_0) &= 0 \\ u_{xx}(x_0,t_0) &\leq 0 \; . \end{aligned}$$

Sei nun v die Hilfsfunktion

$$v(x,t) := u(x,t) + k(t_0 - t) \; ,$$

wobei k eine positive Konstante ist. Offenbar ist dann

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M$$

und

$$k(t_0 - t) \leq kT \; .$$

Wir wählen $k > 0$ nun so, daß $kT < \epsilon/2$. Dann gilt

$$\max_R \; v \leq M - \epsilon/2 \; .$$

Da v eine stetige Funktion ist, gibt es einen Punkt (x_1, t_1), in dem sie ihr Maximum annimmt. Sicher gilt dann

$$v(x_1,t_1) \geq v(x_0,t_0) = M \; ,$$

so daß

$$(x_1,t_1) \in G \cup \partial_4 G \; .$$

Es gilt auch:

$$\begin{aligned} v_t(x_1,t_1) &= u_t(x_1,t_1) - k \geq 0 \\ v_{xx}(x_1,t_1) &= u_{xx}(x_1,t_1) \leq 0 \; . \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird deshalb im Punkt (x_1, t_1) nicht erfüllt. Damit ist der gewünschte Widerspruch gefunden.

Bemerkung 8.5 Das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung ist im Einklang mit unseren alltäglichen Erfahrungen mit Wärmetransport.

Bemerkung 8.6 Es folgt sofort aus dem Maximumprinzip, daß das in Abbildung 8.2 geschilderte Anfangsrandwert-Problem höchstens eine Lösung u besitzt mit

$$u \in C(\overline{G}) \cap C^{(2)}(G \cup \partial_4 G) \ .$$

Bemerkung 8.7 Das Maximumprinzip läßt sich in mehrerer Hinsicht verallgemeinern. Siehe z.B. Protter, M., Weinberger, H.F.: Maximum Principles in Differential Equations. Prentice-Hall, 1967.

Satz 8.3 (Maximumprinzip für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung) *u sei eine Lösung des folgenden Problems:*

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \ , \quad a \le x \le b \ , \quad 0 \le t \le T \ , \tag{8.33}$$

wobei $u \in C^2((a,b) \times (0,T)) \cap C([a,b] \times [0,T])$. . Dann gilt:

$$u(x,t) \le m + et \ , \quad \textit{für} \quad a \le x \le b \ , \quad 0 \le t \le T \ , \tag{8.34}$$

wobei

$$\begin{aligned} e &:= \max_{\overline{G}} \ |f(x,t)| \\ m &:= \max \left\{ \max_{a \le x \le b} \ u(x,0) \ , \ \max_{0 \le t \le T} \ u(a,t) \ , \ \max_{0 \le t \le T} \ u(b,t) \right\} \\ G &:= (a,b) \times (0,T) \ . \end{aligned}$$

Beweis:
Falls (8.34) nicht gilt, dann gibt es $(x_0, t_0) \in \bar{G}$ mit

$$u(x_0,t_0) = M + et_0 \ , \quad M > m \ . \tag{8.35}$$

Wir beweisen, daß dies zu einem Widerspruch führt.

v sei die Hilfsfunktion

$$v(x,t) := u(x,t) - et + \frac{M-m}{4(b-a)^2} \ (x - x_0)^2 \ . \tag{8.36}$$

Da v stetig ist und aus (8.35) und (8.36) $v(x_0,t_0) = M$, gibt es $(x_1,t_1) \in \bar{G}$ mit

$$v(x_1, t_1) = \max_{\bar{G}} v(x,t) \geq M \ . \tag{8.37}$$

Aber

$$v(a,t) = u(a,t) - et + \frac{M-m}{4(b-a)^2}(a-x_0)^2 \leq m(1-\Theta) + M\Theta - et \ ,$$

wobei

$$\Theta = \frac{(a-x_0)^2}{4(b-a)^2} \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \ ,$$

also

$$v(a,t) < M - et < M \ , \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \ . \tag{8.38}$$

Auf gleiche Weise folgt:

$$v(b,t) < M \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \ , \tag{8.39}$$

$$v(x,0) < M \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b \ . \tag{8.40}$$

Aus (8.37) - (8.40) folgt, daß

$$(x_1, t_1) \in (a,b) \times (0,T] \ .$$

Da v in (x_1, t_1) das Maximum annimmt, gilt

$$\begin{aligned} v_t(x_1,t_1) &= 0 \quad , \quad \text{falls} \quad t_1 < T \ , \\ v_t(x_1,t_1) &\geq 0 \quad , \quad \text{falls} \quad t_1 = T \ , \\ v_{xx}(x_1,t_1) &\leq 0 \quad , \end{aligned}$$

so daß

$$[v_t - v_{xx}](x_1, t_1) \geq 0 \ . \tag{8.41}$$

Aber, aus (8.36),

$$\begin{aligned} v_t(x_1,t_1) &= u_t(x_1,t_1) - e \ , \\ v_{xx}(x_1,t_1) &= u_{xx}(x_1,t_1) + \frac{M-m}{2(b-a)^2} \ , \end{aligned}$$

so daß , mit Hilfe von (8.33),

$$\begin{aligned}
[v_t - v_{xx}](x_1, t_1) &= [u_t - u_{xx}](x_1, t_1) - e - \frac{M-m}{2(b-a)^2} \,, \\
&= f(x_1, t_1) - e - \frac{M-m}{2(b-a)^2} \,, \\
&\leq -\frac{M-m}{2(b-a)^2} \\
&< 0 \,.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Die Gleichungen (8.41) und (8.42) enthalten den gewünschten Widerspruch. Daraus folgt, daß (8.34) gilt.

8.4 Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten hier nur ein einziges typisches Problem:

$$u_t = u_{xx} \,, \quad (x,t) \in G := (a,b) \times (0,T) \,. \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= f_1(x) \,, \quad x \in (a,b) \,, \\
u(a,t) &= f_2(t) \,, \quad t \in (0,T) \,, \\
u(b,t) &= f_3(t) \,, \quad t \in (0,T) \,.
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Satz 8.4 (Cannon, Satz 6.3.1, S. 62) *Seien f_k , $1 \leq k \leq 3$, stetige Funktionen auf $[a,b]$ bzw. $[0,T]$. Die Verträglichkeitsbedingungen*

$$\begin{aligned}
f_1(a) &= f_2(0) \,, \\
f_1(b) &= f_3(0) \,,
\end{aligned}$$

seien erfüllt.

Dann gibt es genau eine Funktion $u(x,t)$ mit:

a) $u \in C(\bar{G})$.

b) $u_t \in C(G \cup \partial_4 G)$.

c) $u_{xx} \in C(G \cup \partial_4 G)$.

d) Die Anfangs-Randwertbedingung (8.44) wird erfüllt.

Bemerkung 8.8 Cannon formuliert und beweist den Satz für Funktionen f_k, die nur stückweise stetig sind und die Verträglichkeitsbedingung deshalb möglicherweise nicht erfüllen.

Bemerkung 8.9 Ladyzenskaja, Solonnikov und Uralceva (Satz 5.1, S. 320) beweisen einen ähnlichen Satz für Lösungen aus Sobolewschen Räumen $H^\ell(G)$ unter der Voraussetzung, daß entsprechende Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Satz 8.5 *Seien u und v Lösungen des Anfangswert-Randwertproblems (8.43), (8.44) mit Daten f_1, f_2, f_3 bzw. g_1, g_2, g_3.*
Dann gilt:

$$\|u - v\|_{\infty,\bar{G}} \leq \max_{1\leq k\leq 3} \|f_k - g_k\|_{\infty,\overline{\partial_k G}} \,.$$

Beweis: Maximumprinzip.

Satz 8.6 *Das Problem (8.43), (8.44) ist sachgemäßgestellt.*

Bemerkung 8.10 Das Rückwärtsproblem:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}\,, \quad a < x < b\,, \quad 0 > t > -T \\ u(x,0) &= f_1(a)\,, \quad a \leq x \leq b \\ u(a,t) &= f_2(t)\,, \quad t \in (-T, 0) \\ u(b,t) &= f_3(t)\,, \quad t \in (-T, o) \end{aligned}$$

ist *nicht* sachgemäßgestellt.

Literatur:

Cannon, J.R.: The One-Dimensional Heat Equation. Addison-Wesley, 1984.

Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, 1964.

Ladyženskaja, O.A, **Solonnikov**, V.A. und **Uralćeva**, N.N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society, 1968.

Kapitel 9

Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Differenzenverfahren

9.1 Einführung

Um die Grundideen ohne unnötige Komplikationen zu erklären, betrachten wir das folgende Problem:

Problem 1

$$u_t = cu_{xx} \quad , \quad a < x < b \ , \ 0 < t < T \tag{9.1}$$

$$u(a,t) = u(b,t) = 0 \ , \ t > 0 \tag{9.2}$$

$$u(x,0) = 1 - |1 - 2x| \ , \ a \leq x \leq b \tag{9.3}$$

mit Lösung (Carslaw, Jaeger, S. 97, Gleichung (14)):

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi \left(x - \frac{b-a}{2}\right)}{2 \cdot (b-a)} \cdot \exp[-c(b-a)^{-2}(2n+1)^2\pi^2 t/4] \ .$$

Dieses Problem wird oft als Modellproblem benutzt, d.h., um die Effizienz von verschiedenen numerischen Methoden zu vergleichen, werden sie zur Lösung des Problems herangezogen.

Zur numerischen Lösung des Problems 1 wird, wie schon in Kapitel 7 für die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

geschildert, ein regelmäßiges $(N+2) \times (M+1)$ Gitter auf

$$G := (a,b) \times (0,T)$$

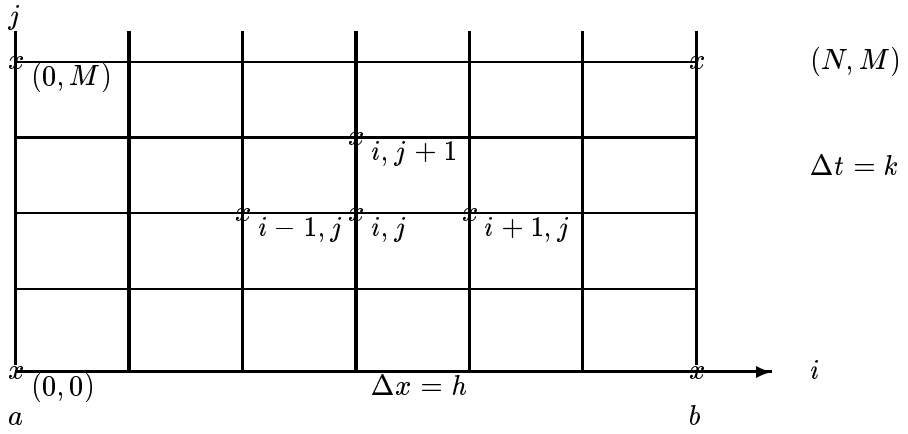


Abbildung 9.1: Das Gitter $G^{h,k}$

in üblicher Weise gelegt:

$$\begin{aligned} h &= \Delta x := \frac{b-a}{(N+1)} , \\ k &= \Delta t := \frac{T}{M} , \\ x_i &= a + ih , \quad 0 \le i \le N+1 , \\ t_j &= jk , \quad 0 \le j \le M . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Das Gitter wird in Abbildung 9.1 dargestellt.
Die exakte Lösung $u(x,t)$ des Problems wird auf den Gitterpunkten durch eine Approximation $u^{h,k}$ angenähert:

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j) \doteq u^{h,k}(x_i, t_j) =: u^{h,k}_{i,j} \tag{9.5}$$

Die Werte

$$\begin{aligned} u^{h,k}_{i,0} &:= u(x_i, 0) = 0 , \quad 0 \le i \le N+1 \\ u^{h,k}_{0,j} &:= u(a, t_j) = 0 , \quad 0 \le j \le M \\ u^{h,k}_{N+1,j} &= u(b, t_j) = 0 , \quad 0 \le j \le M \end{aligned} \tag{9.6}$$

liegen vor. Ein Differenzenverfahren besteht aus einer Formel, die es ermöglicht, die übrigen Werte von $u^{h,k}_{i,j}$ zu berechnen. $u^{h,k}$ wird als Lösung eines linearen Gleichungssystems gewonnen. Es gibt keine allgemeinen Vorschriften für die Konstruktion dieses Gleichungssystems. Wir werden verschiedene Beispiele betrachten. Es gibt aber einige Faustregeln:

1. Es sollte so viele Gleichungen wie Unbekannte geben, d.h. so viele Gleichungen wie Gitterpunkte. Es ist üblich, jede Gleichung einem Gitterpunkt zuzuordnen, und diese Gleichung sollte entweder die Differentialgleichung oder - wenn zutreffend - die Anfangswertbedingung oder Randwertbedingung am Gitterpunkt approximieren. Wir sprechen von der Gleichung an einem Gitterpunkt.

2. Die Differenzengleichung an einem Gitterpunkt sollte nur die Werte von u^h am Gitterpunkt selbst und naheliegende Gitterpunkte verwenden. Dies entspricht der Tatsache, daß eine partielle Differentialgleichung die partielle Ableitung an einer Stelle enthält. Dies ist eine lokale und nicht globale Bedingung. Um festzustellen, ob eine Funktion u eine partielle Differentialgleichung an einer Stelle erfüllt, genügt es, die Werte von u in einer Nachbarschaft dieser Stelle zu kennen. Es ist deshalb sinnvoll, daß sich diese Eigenschaft in den Differenzengleichungen widerzuspiegelt. Eine sehr wichtige Konsequenz ist, daß die Matrix der Differenzengleichungen schwach besetzt ist.

3. Die exakte Lösung u sollte die Differenzengleichungen bis auf einen kleinen Fehler, den sog. lokalen Fehler, erfüllen, d.h. die Differenzengleichungen sollen *konsistent* sein. Um die Konsistenz einer Differenzengleichung an einem Gitterpunkt zu prüfen, ist es möglich, die Lösung u in eine Taylor-Reihe um den Gitterpunkt zu entwickeln, da - wie in 2) vorgeschrieben - die Differenzengleichung nur die Werte von u in den Nachbarpunkten des Gitterpunktes enthält.

9.2 Approximation von Ableitungen durch Differenzen

Sei $v \in C^4(G)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x)}{\partial x} &= \frac{v(x+h)-v(x)}{h} + \frac{h}{2}\,\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + 0(h^2)\,, \\
&= D_{+x}v(x) + 0(h)\,. && (9.7)\\
\frac{\partial v(x)}{\partial x} &= \frac{v(x+h)-v(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6}\,\frac{\partial^3 v(x)}{\partial x^3} + 0(h^4) \\
&= D_{0x}v(x) + 0(h^2)\,. && (9.8)\\
\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} &= \frac{v(x+h)-2v(x)+v(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}\,\frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + 0(h^4) \\
&= D_{+x}D_{-x}v(x) + 0(h^2)\,. && (9.9)
\end{aligned}$$

9.3 Das klassische explizite Differenzenverfahren

Für das Modellproblem (Problem 1) sind die Werte von u an den unteren und seitlichen Rändern des Gebiets durch die Gleichungen (9.2) und (9.3) vorgeschrieben. Für die betroffenen Gitterpunkte erhalten wir sofort die Differenzengleichungen (9.6):

$$\begin{aligned}
u_{0,j}^{h,k} &= 0\,, \quad 0 < j \le M \\
u_{N+1,j}^{h,k} &= 0\,, \quad 0 < j \le M && (9.10)
\end{aligned}$$

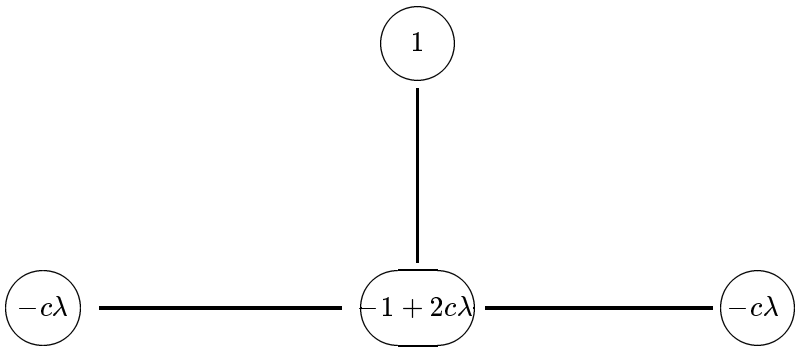


Abbildung 9.2: Das klassische Differenzenverfahren

$$u_{i,0}^{h,k} = \frac{\frac{b-a}{2} - \left|\frac{a+b}{2} - x_i\right|}{\frac{b-a}{2}} , \quad 0 \le i \le N+1 . \tag{9.11}$$

Für die übrigen Gitterpunkt, die "inneren" Gitterpunkte, brauchen wir Differenzengleichungen, welche die partielle Differentialgleichung (9.1) approximieren. Der Punkt (i,j) sei "innerer" Gitterpunkt - siehe Abbildung 9.1.

Beispiel 9.1 (Das klassische Differenzenverfahren) Wir approximieren die partielle Differentialgleichung (9.1) durch

$$D_{+t}u^{h,k}(x_i,t_j) = cD_{+x}D_{-x}u^{h,k}(x_i,t_j) , \tag{9.12}$$

d.h.

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} = c \cdot \frac{u_{i+1,j}^{h,k} - 2u_{i,j}^{h,k} + u_{i-1,j}^{h,k}}{h^2} , \quad 0 < i \le N , \quad 0 < j < M . \tag{9.13}$$

Die Differenzengleichung (9.13) läßt sich folgendermaßen umschreiben:

$$u_{i,j+1}^{h,k} = u_{i,j}^{h,k} + \frac{ck}{h^2}\left(u_{i+1,j}^{h,k} - 2u_{i,j}^{h,k} + u_{i,j-1}^{h,k}\right) , \ 0 < i \le N , \ 0 < j \le M . \tag{9.14}$$

Das System von Differenzengleichungen besteht aus den Gleichungen (9.10), (9.11) und (9.14), wobei jedem Gitterpunkt eine Differenzengleichung zugeordnet ist. Es ist sofort erkennbar, daß alle Werte von $u_{i,j}^{h,k}$ rekursiv berechnet werden können. Das Molekül wird in Abbildung 9.2 dargestellt, wo vorausgesetzt ist, daß

$$k = \lambda h^2 . \tag{9.15}$$

Die Gleichung (9.15) kann mit Hilfe der CFL-Bedingung begründet werden. Es folgt nämlich aus Absatz 8.4.1, daß der Abhängigkeitsbereich der Lösung u durch

$$AB(u;(x,t)) = (a,b)$$

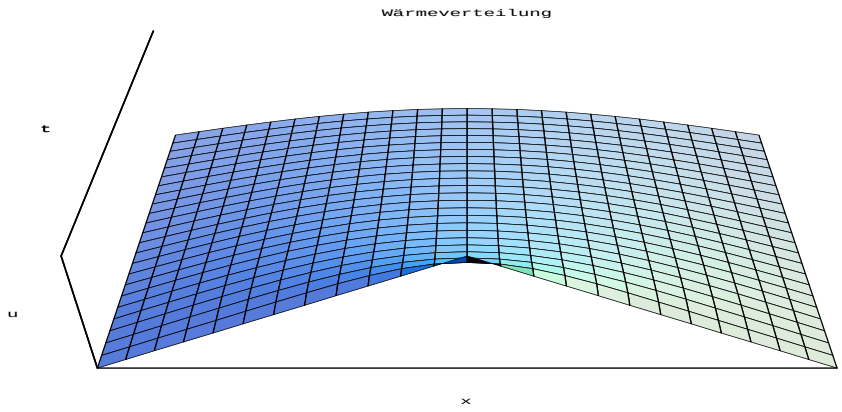


Abbildung 9.3: Numerische Lösung für $\lambda = \frac{5}{11}$

gegeben wird. Genau wie in Absatz 7.5 folgt, daß der Abhängigkeitsbereich der Approximation $u^{h,k}$ durch

$$AB(u^{h,k};(x,t)) = (a,b) \cap (x - \frac{th}{k}, x + \frac{th}{k})$$

gegeben wird. Damit die CFL-Bedingung erfüllt wird, ist es deshalb erforderlich, daß

$$\lim_{h,k \to 0} \frac{h}{k} = \infty \ . \tag{9.16}$$

9.4 Stabilität und Konvergenz für das klassische explizite Differenzenverfahren

Die Lösung des Problems 1 mit $a = 0$, $b = \pi$, $c = 1$ und

$$\lambda = \frac{k}{h^2} = \frac{5}{11} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{5}{9}$$

wird in den Abbildungen 9.3 und 9.4 dargestellt. Es ist sofort erkennbar, daß die Ergebnisse für $\lambda = \frac{5}{11}$ befriedigend, die für $\lambda = \frac{5}{9}$ recht unbefriedigend sind.
Die numerischen Ergebnisse des klassischen expliziten Differenzenverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung, die in Abbildung 9.4 dargestellt sind, zeigen, daß die numerische Stabilität von Differenzenverfahren betrachtet werden muß. Es ist oft schwierig, die Stabilität eines Differenzenverfahrens zu untersuchen. Im jetzigen Fall ist es ausnahmsweise einfach, einen Beweis von Stabilität und Konvergenz anzugeben.

Satz 9.1 *u sei die Lösung des Modellproblems*

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} \quad &, \quad -1 < x < 1 \ , \ 0 < t \leq T \ , \\ u(-1,t) \ &= \ u(+1,t) = 0 \ , \ 0 < t \leq T \ , \\ u(x,0) \ &= \ \varphi(x) \end{aligned}$$

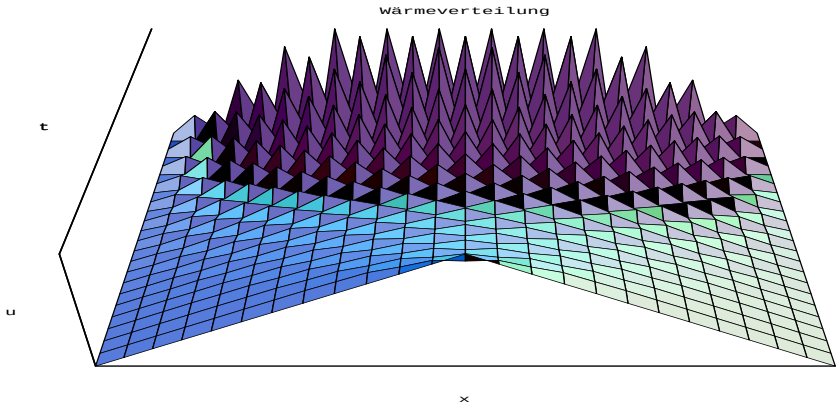


Abbildung 9.4: Numerische Lösung für $\lambda = \frac{5}{9}$

mit $u \in C^4([-1,+1] \times [0,T])$ *.* $u_{i,j}^h$ *sei die Lösung des klassischen expliziten Differenzenverfahrens mit* $\Delta t = \lambda(\Delta x)^2$ *und* $\lambda \leq \frac{1}{2}$ *. Dann gilt:*

$$\left|u_{i,j}^h - u_{i,j}\right| \leq T\left[\frac{\Delta t}{2} M_2 + \frac{(\Delta x)^2}{12} M_4\right] \ , \ 0 \leq i \leq N \ , \ 0 \leq j \leq M \ ,$$

wobei

$$M_p := \max_{r+s=p} \max_{(x,t)\in\overline{G}} \left|\frac{\partial^p u(x,t)}{\partial x^r \partial t^s}\right| \ .$$

Beweis:

Der globale Fehler wird mit $e_{i,j}$ bezeichnet:

$$e_{i,j} := u_{i,j} - u_{i,j}^h \ , \quad 0 \leq i \leq N \ , \quad 0 \leq j \leq M \ .$$

Aus den Gleichungen (9.7) - (9.15) folgt:

$$\frac{e_{i,j+1} - e_{i,j}}{k} - \left[\frac{e_{i+1,j} - 2e_{i,j} + e_{i-1,j}}{h^2}\right] = \tau_{i,j}^h \ , \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq N \quad , \quad 0 < j \leq M \ , \tag{9.17}$$

wobei

$$|\tau_{i,j}^h| \leq K := \frac{\Delta t}{2} M_2 + \frac{(\Delta x)^2}{12} M_4 \tag{9.18}$$

und

$$\begin{aligned} e_{0,j} &= 0 \ , \quad 0 < j \leq M \\ e_{N+1,j} &= 0 \ , \quad 0 < j \leq M \end{aligned} \tag{9.19}$$

$$e_{i,0} = 0 \ , \quad 0 \leq i \leq N+1 \ . \tag{9.20}$$

Sei

$$E_j := \max_{0 \le i \le N} |e_{i,j}| \ . \tag{9.21}$$

Unter Berücksichtigung von (9.19) und (9.20) gilt:

$$E_j = \max_{0 < i < N} |e_{i,j}| \ , \tag{9.22}$$

$$E_0 = 0 \ . \tag{9.23}$$

Aus (9.17), (9.18) folgt:

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| &= |e_{i,j} + \lambda e_{i+1,j} - 2\lambda e_{i,j} + \lambda e_{i-1,j} + k\tau_{i,j}^h| \ , \\ &\le |1 - 2\lambda| \ |e_{i,j}| + \lambda |e_{i+1,j}| + \lambda |e_{i-1,j}| + K\Delta t \ , \\ &\le [|1 - 2\lambda| + 2\lambda] E_j + K\Delta t \ . \end{aligned} \tag{9.24}$$

Da $\lambda \le \frac{1}{2}$, folgt

$$|1 - 2\lambda| = 1 - 2\lambda \tag{9.25}$$

und deshalb, aus (9.22) und (9.23),

$$E_{j+1} = \max_{1 < i < N} |e_{i,j+1}| \le E_j + K\Delta t \ . \tag{9.26}$$

Durch Induktion und mit Hilfe von (9.23):

$$E_j \le jK\Delta t \le KT \ , \quad 0 \le j \le M \ . \tag{9.27}$$

Der kritische Schritt im Beweis von Satz 9.1 ist in den Gleichungen (9.25) und (9.26) enthalten. Es ist oft der Fall, daß die Eigenschaften von partiellen Differentialgleichungen sich in den Eigenschaften von Differenzen-Approximationen oder Finiten-Elementen-Approximationen widerspiegeln. Im jetzigen Fall ist es das Maximumprinzip für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkung 9.1 Satz 9.1 zeigt, daß das klassische explizite Differenzenverfahren stabil ist, falls $\lambda \le 1/2$. Daß diese Bedingung auch notwendig ist, wird erst später bewiesen.

9.5 Implizite Differenzenverfahren - Einführung

In den vorherigen Absätzen ist bewiesen worden, daß das klassische explizite Differenzenverfahren für die Wärmeleitungsgleichung nur dann konvergieren kann, wenn

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \infty \ , \quad \text{für} \quad \Delta x \longrightarrow 0 \ .$$

In der Tat ist das klassische Differenzenverfahren nur dann konvergent, wenn

$$\Delta t = \lambda(\Delta x)^2 \ , \quad \lambda \leq \frac{1}{2} \ . \tag{9.28}$$

Diese Konvergenzbedingung ist ziemlich einschränkend. Sie bedeutet, daß wir für kleines Δx, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen, den Zeitschritt Δt sehr klein wählen müssen. Infolgedessen braucht man in diesem Fall einen sehr hohen Rechenaufwand, und weil man so viele Zeitschritte benutzen muß, treten zusätzlich viel mehr Rundungsfehler auf. Es lohnt sich deshalb, nach numerischen Methoden zu suchen, bei denen die Konvergenzbedingungen nicht so einschränkend wie (9.28) sind.

Ähnliche Probleme treten bei der numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen auf. Wir betrachten diesen Fall zuerst. Als Modellproblem nehmen wir die skalare lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\alpha u(t) \ , \quad t > 0 \\ u(0) &= 1 \ , \end{aligned} \tag{9.29}$$

wobei α eine positive Konstante ist. Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist

$$u(t) = \exp(-\alpha t) \ . \tag{9.30}$$

Um das Anfangswertproblem (9.29) zu lösen, benutzen wir eine Schrittweite $h = \Delta t$ und setzen $t_j = j\Delta t$. Drei bekannte numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen sind das *Eulersche Verfahren*, das *Volle Implizite Verfahren* und die *Trapezregel*. Sie werden in den Gleichungen (9.31) - (9.33) aufgezeigt.

$$\frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} = -\alpha u_j^h \ , \qquad \text{(Euler)} \tag{9.31}$$

$$\frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} = -\alpha u_{j+1}^h \ , \qquad \text{(Volle Implizite)} \tag{9.32}$$

$$\frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{2}\left[u_{j+1}^h + u_j^h\right] \ , \quad \text{(Trapezregel)} \tag{9.33}$$

Das Eulersche Verfahren ist ein explizites Verfahren. Das Volle Implizite Verfahren und die Trapezregel sind implizite Verfahren. Da aber die Differentialgleichung (9.29) linear ist, ist es in diesem speziellen Fall möglich, die numerischen Lösungen explizit zu berechnen. Die numerischen Lösungen für alle drei Verfahren werden in den Gleichungen (9.34) - (9.36) gegeben.

Methode	Positive numerische Lösungen	Beschränkte numerische Lösungen
Euler	$\Delta t \leq 1/\alpha$	$\Delta t \leq 2/\alpha$
Volle Implizite	alle Δt	alle Δt
Trapezregel	$\Delta t \leq 2/\alpha$	alle Δt

Tabelle 9.1: Stabilitätsbedingungen für $u'(t) = -\alpha u(t)$

$$u_j^h = (1 - \alpha\Delta t)^j \qquad \text{(Euler)} \tag{9.34}$$

$$u_j^h = \left(\frac{1}{1+\alpha\Delta t}\right)^j \qquad \text{(Volle Implizite)} \tag{9.35}$$

$$u_j^h = \left(\frac{1-\frac{1}{2}\alpha\Delta t}{1+\frac{1}{2}\alpha\Delta t}\right)^j \qquad \text{(Trapezregel)} \tag{9.36}$$

Die exakte Lösung von (9.29) ist positiv und monoton fallend, weil α positiv ist (siehe Gleichung (9.30)).
Aus den Gleichungen (9.34) - (9.36) ist leicht festzustellen, für welche Werte von Δt die numerischen Lösungen positiv bzw. beschränkt sind. Die Ergebnisse werden in Tabelle 9.1 aufgeführt.

Die Ergebnisse in Tabelle 9.1 unterstützen eine bekannte Faustregel, nämlich: je impliziter ein numerisches Verfahren für Anfangswertaufgaben ist, umso stabiler ist das Verfahren.

Wir werden die vorherigen Überlegungen jetzt auf die numerischen Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung übertragen.

Es gibt eine deutliche Ähnlichkeit zwischen dem Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung (9.29) und einer Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= c u_{xx} \\ u(x,0) &= f(x)\,. \end{aligned} \tag{9.37}$$

In Gleichung (9.29) steht eine Funktion von u auf der rechten Seite der Gleichung. In Gleichung (9.37) dagegen steht ein Differentialoperator auf der rechten Seite der Gleichung. Dieser Differentialoperator muß deshalb ausgewertet werden und dies geschieht durch Differenzen in der Ortsvariablen x. Durch diese Überlegungen wird der Zusammenhang zwischen den drei numerischen Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

in den Gleichungen (9.31) - (9.33) und den folgenden drei Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung klar.

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} = c\left(\frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{(\Delta x)^2}\right) \quad \text{(Klassische Explizite)} \tag{9.38}$$

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} = c\left(\frac{u_{i+1,j+1}^h - 2u_{i,j+1}^h + u_{i-1,j+1}^h}{(\Delta x)^2}\right) \quad \text{Volle Implizite)} \tag{9.39}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{\Delta t} &= \frac{1}{2}c\left(\frac{u_{i+1,j+1}^h - 2u_{i,j+1}^h + u_{i-1,j+1}^h}{(\Delta x)^2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}c\left(\frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{(\Delta x)^2}\right) \quad \text{(Crank- Nicolson)} \end{aligned} \tag{9.40}$$

Das volle Implizite Verfahren (9.39) und das Crank-Nicolson-Verfahren (9.40) sind implizite Verfahren. Die Werte der numerischen Lösung am Zeitpunkt $(j+1)\Delta t$ können nicht einzeln berechnet werden. Stattdessen müssen alle Werte gleichzeitig berechnet werden, indem ein lineares Gleichungssystem gelöst wird. Wie das geschieht und welcher Rechenaufwand nötig ist, werden wir in Kürze besprechen.

Weil das Volle Implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren implizit sind, ist der Abhängigkeitsbereich von $u_{i,j}^h$ die ganze Achse. Das bedeutet, daß die CFL-Bedingung erfüllt ist und daß man hoffen darf, daß die beiden Verfahren für alle Werte von Δt und Δx stabil sind. Genauere Berechnungen, die wir später durchführen werden, zeigen, daß diese Hoffnung berechtigt ist. In diesem Zusammenhang siehe auch Tabelle 9.1.

Wir beschreiben jetzt, wie das Volle Implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren für das Modellproblem Problem 1 numerisch implementiert werden.

Die Differenzengleichungen haben folgende Gestalt: Die numerische Lösung für innere Gitterpunkte am Zeitpunkt j bildet einen N-Vektor $\mathbf{u}_j^h$:

$$\mathbf{u}_j^h := (u_{1,j}^h, \ldots, u_{N,j}^h)^T \in \mathbb{R}^N \ . \tag{9.41}$$

A sei die $N \times N$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & O \\ & & \ddots & & \\ & O & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N} \tag{9.42}$$

Das Volle Implizite Verfahren läßt sich dann folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1}^h &= \mathbf{u}_j^h - c\lambda A\mathbf{u}_{j+1}^h + \mathbf{b}_{j+1} \\ \mathbf{b}_j &:= \lambda(u_{0,j}^h, 0, 0, \ldots, 0, u_{N+1,j}^h) \in \mathbb{R}^N \qquad \text{(Volle Implizite)} \end{aligned} \tag{9.43}$$

Um die Lösung am Zeitpunkt $(j+1)\Delta t$ zu berechnen, muß folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$(I + c\lambda A)\mathbf{u}_{j+1}^h = \mathbf{u}_j^h + \mathbf{b}_{j+1} \qquad \text{(Volle Implizite)} \tag{9.44}$$

Für das Crank-Nicolson-Verfahren entstehen ähnliche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1}^h &= \mathbf{u}_j^h - \frac{c\lambda}{2} A\mathbf{u}_{j+1}^h \\ &- \frac{c\lambda}{2} A\mathbf{u}_j^h + (\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})/2 \quad \text{(Crank-Nicolson)} \end{aligned} \tag{9.45}$$

$$(I + \frac{c\lambda}{2}A)\mathbf{u}_{j+1}^h = (I - \frac{c\lambda}{2}A)\mathbf{u}_j^h + (\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})/2 \tag{9.46}$$

Die Lösung der Gleichungen (9.44) bzw. (9.46) erfordert die Lösung eines Systems von N linearen Gleichungen. Dies ist aber sehr leicht, weil die zugehörigen Matrizen $(I + c\lambda A)$ bzw. $(I + \frac{c\lambda}{2} A)$ tridiagonale Matrizen sind. Sie sind auch irreduzibel diagonal dominant, d.h. in jeder Zeile ist der absolute Betrag des Diagonalelements nicht kleiner als die Summe der absoluten Beträge der nicht-diagonalen Elemente, und für mindestens eine Zeile ist diese Ungleichung streng. Es folgt hieraus, daß die betroffenen Matrizen nicht singulär und sogar positiv definit sind, so daß die Gleichungen durch das LR-Verfahren ohne Pivotsuche gelöst werden können.

Zur Vollständigkeit geben wir die bekannten Algorithmen für die Lösung eines N-Tridiagonalsystems $Tx = b$ an mit der Bemerkung, daß dieses Verfahren nur $\mathcal{O}(N)$ numerische Berechnungen erfordert. Dies bedeutet, daß das Volle Implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren ohne großen numerischen Aufwand durchführbar sind.

$$T\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{9.47}$$

$$T := \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & & & \\ d_2 & e_2 & f_2 & & O \\ & & \ddots & & \\ O & & & e_{N-1} & f_{N-1} \\ & & & d_N & e_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &:= (b_1, \ldots, b_N)^T \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{x} &:= (x_1, \ldots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

$$u_1 := e_1$$

$$\left.\begin{aligned} m_i &:= d_i/u_{i-1} \\ u_i &:= e_i - m_i f_{i-1} \end{aligned}\right\} i = 2, \ldots, N \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned} x_1 &:= b_1 \\ x_i &:= b_i - m_i x_{i-1} \quad i = 2, \ldots, N \\ x_N &:= b_N/u_N \\ x_i &:= (x_i - f_i x_{i+1})/u_i\ , \quad i = N-1, \ldots, 1\ . \end{aligned}$$

9.6 Ordnung und Stabilität

Der lokale Fehler des Crank-Nicolson-Verfahrens läßt sich folgermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}^h &= D_{0t}^{k/2} u(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{c}{2} D_{+x}D_{-x}u(x_i, t_j - \frac{c}{2} D_{+x}D_{-x}u(x_i, t_{j+1}) \\ &= u_t\left(x_i, t_j + \frac{k}{2}\right) + O(k^2) - \frac{c}{2}u_{xx}(x_i, t_j) - \frac{c}{2}u_{xx}(x_i, t_j + k) \\ &+ O(h^2) \\ &= u_t\left(x_i, t_j + \frac{k}{2}\right) - cu_{xx}\left(x_i, t_j + \frac{k}{2}\right) + O(k^2) + O(h^2) \end{aligned} \tag{9.49}$$

wobei alle partiellen Ableitungen am Punkt $(x_i, t_{j+1/2})$ ausgewertet werden.
Es folgt aus (9.49), daß das Crank-Nicolson-Verfahren die Ordnung 2 hat, was ein großer Vorteil gegenüber dem vollen impliziten bzw. expliziten Verfahren ist, die jeweils nur die Ordnung 1 haben.

Die Ordnung und Stabilitätsgrenzen für die drei besprochenen Methoden werden in Tabelle 9.2 aufgelistet. Die Berechnung der Stabilitätsgrenzen erfolgt später.

Bezeichnung	Fehler	Stabilitätsbedingung
Klassische Explizite	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	$\lambda c \leq \frac{1}{2}$
Volle Implizite	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	—-
Crank-Nicolson	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	—-

Tabelle 9.2: Vergleich der drei Methoden

9.7 Mehrdimensionale Probleme

In mehreren Dimensionen lassen sich die finiten Differenzenapproximation leicht aufstellen. In zwei Dimensionen, z.B. ist das Crank-Nicolson Verfahren für die Gleichung

$$u_t = cu_{xx} + du_{yy} \tag{9.50}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \Bigg\{ & c \cdot \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k}{(\Delta x)^2} \\ & + d \cdot \frac{u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k}{(\Delta y)^2} \Bigg\} + \\ & + \frac{1}{2} \Bigg\{ c \cdot \frac{u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ & + d \cdot \frac{u_{i,j+1}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \Bigg\} \end{aligned} \tag{9.51}$$

Ist das Verfahren explizit, so ist die Berechnung von u^{k+1} aus den Daten für u^k problemlos. Bei impliziten Verfahren gibt es allerdings größere Schwierigkeiten.
Sei

$$Au^{k+1} = b \tag{9.52}$$

das entsprechende Gleichungssystem. In einer Dimension ist A eine tridiagonale Matrix, und die Lösung der Gleichung ist sehr einfach. In mehreren Dimensionen ist A immer noch dünn besetzt, aber die Lösung der Gleichung (3) ist nicht ganz so einfach. In zwei Dimensionen z.B. für das Modellproblem:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy},\ (x,y) \in G, 0 < t < T$$

mit $G = (0,1) \times (0,1)$ und Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0,\ (x,y) \in \partial G, 0 < t < T \\ u &= f,\ (x,y) \in G, t = 0 \end{aligned}$$

hat die Matrix A die Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} B & -I & & & & \\ -I & B & -I & & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & O & & -I & B & -I \\ & & & & -I & B \end{pmatrix} \in Mat(N^2 \times N^2)$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & O & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in Mat(N \times N)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & O & \\ & & \ddots & & & \\ & O & & 1 & & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix} \in Mat(N \times N)$$

mit

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N+1}$$

Die effiziente Lösung der Gleichung (3) ist natürlich sehr wichtig, da sie in jedem Zeitschritt durchgeführt werden muß. Es gibt mehrere Möglichkeiten. Hier erwähnen wir nur zwei.

9.7.1 Mehrgittermethoden

Die Gleichung (3) hat die gleiche Gestalt wie die Differenzenapproximation zu der elliptischen Gleichung

$$cv_{xx} + dv_{yy} = g$$

und man kann deshalb die Methoden für elliptische Gleichungen anwenden. Die werden wir im Teil II dieser Vorlesung behandeln.

9.7.2 Die ADI Methode

Die ADI Methode (Alternating Direction Implicit) ist eine wichtige Methode zur Lösung von Problemen, insbesondere auf rechteckigem Gebiet. Wie oben betrachten wir die Gleichung

$$u_t = cu_{xx} + du_{yy} \tag{9.53}$$

auf einem Rechteck

$$G = (0,1) \times (0,1).$$

Die Gleichung (4) schreiben wir in der Form

$$u_t = A_1 u + A_2 u$$

mit

$$A_1 = c\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ A_2 = d\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

und benutzen, a la Crank-Nicolson,

$$\begin{aligned}\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t} &= \frac{1}{2}(A_1 u^k + A_2 u^k)\\ &+ \frac{1}{2}(A_1 u^{k+1} + A_2 u^{k+1})\\ &+ 0(\Delta t^2)\end{aligned}$$

oder

$$(I - \frac{\Delta t}{2}A_1 - \frac{\Delta t}{2}A_2)u^{k+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}A_1 + \frac{\Delta t}{2}A_2)u^k + 0(\Delta t^3)$$

die jetzt in der Form

$$\begin{aligned}&(I - \frac{\Delta t}{2}A_1 - \frac{\Delta t}{2}A_2 + \frac{(\Delta t)^2}{4}A_1A_2)u^{k+1}\\ &= (I + \frac{\Delta t}{2}A_1 + \frac{\Delta t}{2}A_2 + \frac{(\Delta t)^2}{4}A_1A_2)u^k\\ &+\frac{(\Delta t)^2}{4}A_1A_2(u^{k+1}-u^k) + 0(\Delta t^3).\end{aligned}$$

Da $u^{k+1} - u^k = 0(\Delta t)$, folgt

$$(I - \frac{\Delta t}{2}A_1)(I - \frac{\Delta t}{2}A_2)u^{k+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}A_1)(I + \frac{\Delta t}{2}A_2)u^k + 0(\Delta t^3).$$

Seien jetzt A_{1h} und A_{2h} Approximation zu A_1 bzw. A_2 mit Fehler $0(\Delta x^2)$:

$$\begin{aligned}&(I - \frac{\Delta t}{2}A_{1h})(I - \frac{\Delta t}{2}A_{2h})u^{k+1}\\ &= (I + \frac{\Delta t}{2}A_{1h})(I + \frac{\Delta t}{2}A_{2h})u^k\\ &+0(\Delta t^3) + 0(\Delta t \Delta x^2).\end{aligned}$$

Wir approximieren u^k durch v^k mit:

$$(I - \frac{\Delta t}{2} A_{1h})(I - \frac{\Delta t}{2} A_{2h}) v^{k+1} = (I + \frac{\Delta t}{2} A_{1h})(I + \frac{\Delta t}{2} A_{2h}) v^k .$$

Dieses System können wir, Peaceman und Rachford folgend, wie folgt lösen:

$$(I - \frac{\Delta t}{2} A_{1h}) v^{k+1/2} = (I + \frac{\Delta t}{2} A_{2h}) v^k$$
$$(I - \frac{\Delta t}{2} A_{2h}) v^{k+1} = (I + \frac{\Delta t}{2} A_{1h}) v^{k+1/2}$$

woraus die Bezeichnung "ADI" sich erklärt. Die Matrizen $I - \frac{\Delta t}{2} A_{1h}$ und $I - \frac{\Delta t}{2} A_{2h}$ sind tridiagonale Matrizen, so daß $v^{k+1/2}$ und v^{k+1} leicht berechnet werden können.

9.8 Ein numerisches Beispiel

Als Beispiel betrachten wir ein Problem, das schon in der ursprünglichen Arbeit über die Crank-Nicolson Methode (Crank und Nicolson [1947]) benutzt wurde.

Das mathematische Problem ist wie folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q \frac{\partial v}{\partial t} \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \tag{9.54}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\kappa v e^{-a/u} \tag{9.55}$$

mit Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = f_1(x) \ , \quad 0 \le x \le 1 \tag{9.56}$$
$$v(x,t) = f_2(x) \ , \quad 0 \le x \le 1 \tag{9.57}$$

und Randbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = H(u(0,t)) \ , \quad t \ge 0 \tag{9.58}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \ , \quad t \ge 0 \tag{9.59}$$

a, k und q sind bekannte Konstanten und f_1, f_2 und H sind bekannte Funktionen.

Diese Gleichungen modellieren das Brennen einer Holzplatte, die auf beiden Seiten Flammen unterworfen ist (siehe Abbildung 9.5).

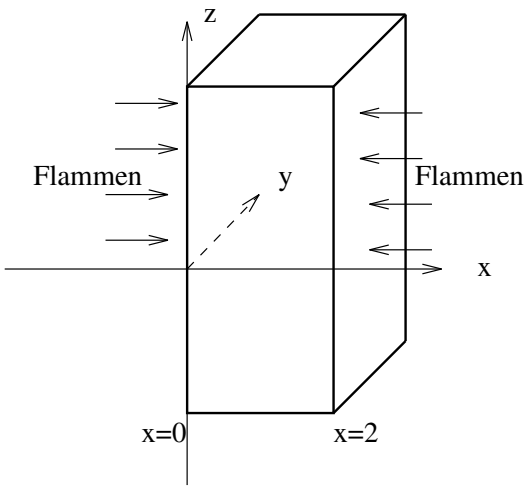


Abbildung 9.5: Eine brennende Holzplatte

	Problem I	**Problem II**
a	22.500	16.580
q	532	261
κ	7.23×10^{17}	1.62×10^{11}
$H_1(u)$	$0.90(u_0 - 1400)$	$1.1(u_0 - 1400) + 0.253\{(u_0/100)^4 - 1920\}$

Tabelle 9.3: Parameter für die zwei Probleme

Die Maße der Platte in y- und z-Richtung sind so groß, daß das Problem als eindimensional betrachtet werden kann.

In den Gleichungen (9.54) - (9.59) bezeichnet $u(x,t)$ die Temperatur des Holzes und $v(x,t)$ das prozentuale Gewicht der flüchtigen Chemikalien im Holz. Die Gleichung (9.54) ist die Wärmeleitungsgleichung mit einem Term $-q\frac{\partial v}{\partial t}$, der die Wärme angibt, die durch das Brennen der freigesetzten Chemikalien erzeugt wird. Nach Vollendung des Prozesses ist $v = 0$, und das Holz ist verkohlt.

Zwei Sätze von Parametern wurden benutzt (siehe Tabelle 9.3).
In den Gleichungen (9.54) und (9.55) bezeichnet t nicht die reelle Zeit, da eine Transformation durchgeführt worden ist mit dem Ziel, die Koeffizienten des Termes u_{xx} gleich 1 zu setzen. Der Zusammenhang zwischen der reellen Zeit t_R und t ist (Bamford et al. [1946], S. 179):

$$t_R = \frac{\ell^2 c\rho}{K} t$$

mit

$$
\begin{aligned}
2\ell &= \text{Stärke des Brettes (cm)} \\
K &= 2.9 \times 10^{-4} \\
c &= 0.55 \\
\rho &= 0.60 \ ,
\end{aligned}
$$

so daß

$$t_R = \frac{11}{9} 10^3 t \tag{9.60}$$

Um das Problem zu diskritisieren, betrachten wir zuerst das Problem

$$
\begin{aligned}
u_t &= c u_{xx} + g(u) \ , \quad 0 \le x \le 1 \ , \quad 0 < t < T && (9.61) \\
u(x,0) &= f(x) && (9.62) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \alpha && (9.63) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= \beta && (9.64)
\end{aligned}
$$

Das übliche Gitter wird eingeführt mit $k = \Delta t$ und $h = \Delta x$. Das Crank-Nicolson Verfahren basiert auf

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} &\doteq \frac{1}{2} c u_{xx}(x_i, t_{j+1}) \\
&+ \frac{1}{2} c u_{xx}(x_i, t_j) + g(x_i, t_{j+1/2}, u)
\end{aligned} \tag{9.65}
$$

Für $1 \le i \le N$ werden $u_{xx}(x_i, t_j)$ und $u_{xx}(x_i, t_{j+1})$ durch die üblichen Differenzen approximiert:

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2} + O(h^2) \ , \ 1 \le i < N \ . \tag{9.66}$$

Für $i = 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u(x_0,t) + h u_x(x_0,t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_0,t) + O(h^3) \\
&= u(x_0,t) + h\ \alpha + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_0,t) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

so daß

$$u_{xx}(x_0,t) = \frac{2u(x_1,t) - 2u(x_0,t)}{h^2} - \frac{2\alpha}{h} + O(h) \tag{9.67}$$

Ebenfalls gilt:

$$u_{xx}(x_N,t) = \frac{2u(x_{N-1},t) - 2u(x_N,t)}{h^2} + \frac{2\beta}{h} + O(h) \tag{9.68}$$

Sei nun A die $(N+1) \times (N+1)$ Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & O \\ & & \ddots & & \\ & O & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{9.69}$$

Dann ist die Crank-Nicolson Approximation zu den Gleichungen (9.61) - (9.64):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1}^h &= \mathbf{u}_j^h - \frac{c\lambda}{2} A\mathbf{u}_{j+1}^h - \frac{c\lambda}{2} A\mathbf{u}_j^h + \\ &+ k\mathbf{g}_{j+1/2} + ch\lambda(\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1}) \end{aligned} \tag{9.70}$$

mit

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbf{u}_j^h & = & (u_{0,j}^h, \ldots, u_{N,j}^h)^T \\ \lambda & = & k/h^2 \\ \mathbf{g}_{j+1/2} & = & (g_{0,j+1/2}, \ldots, g_{N,j+1/2})^T \\ \mathbf{b}_j & = & (-\alpha_j, 0, \ldots, 0, \beta_j)^T \end{array}\right\} \tag{9.71}$$

oder

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{c\lambda}{2}A\right)\mathbf{u}_{j+1}^h &= \left(I - \frac{c\lambda}{2}A\right)\mathbf{u}_j^h \\ &+ kt\ \mathbf{g}_{j+1/2} + ch\lambda(\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1}) \end{aligned} \tag{9.72}$$

Seien α, β und g von u unabhängig, dann ist (9.70) ein lineares Gleichungssystem für $\mathbf{u}_{j+1}^h$. Im vorhandenen Fall aber gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= H(u(x_0,t_j)) \\ \beta_j &= 0 \\ g_{i,j+1/2} &= -q\frac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \end{aligned} \tag{9.73}$$

Die Approximation von g wird später ausführlich erklärt.

Dies bedeutet, daß sowohl $\mathbf{g}_{j+1/2}$ als auch $(\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1})$ von $\mathbf{u}_{j+1}$ abhängen. Wir schreiben deshalb die Gleichungen (9.72) in folgender Gestalt:

$$\left(I + \frac{c\lambda}{2}A\right)\mathbf{u}_{j+1}^h = \mathbf{d}_j + \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^h, \mathbf{u}_j^h) \tag{9.74}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, \mathbf{u}_j^h) &: \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^h, \mathbf{u}_j^h) &:= k\ \mathbf{g}_{j+1/2} + c\lambda h\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1}) \\ \mathbf{d}_j &:= \left(I - \frac{c\lambda}{2}A\right)\mathbf{u}_j^h \end{aligned} \tag{9.75}$$

Die Gleichung (9.74) ist eine nichtlineare Gleichung für $\mathbf{u}_{j+1}^h$, die iterativ gelöst werden muß, D.h. es wird eine Folge $\{\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}\}$ berechnet mit

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{u}_{j+1}^{h,s} = \mathbf{u}_{j+1}^h \tag{9.76}$$

Zwei Möglichkeiten bieten sich an:

a) Einfache Iteration:

$$\mathbf{u}_{j+1}^{h,0} = \mathbf{u}_j^h$$

$$\left(I + \frac{c\lambda}{2}A\right)\mathbf{u}_j^{h,s+1} = \mathbf{d}_j + \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h) \tag{9.77}$$

b) Das Newtonsche Verfahren:

$$\mathbf{u}_{j+1}^{h,0} = \mathbf{u}_j^h$$

$$F'(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s})(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s+1} - \mathbf{u}_{j+1}^{h,s}) = -F(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}) \tag{9.78}$$

mit

$$F(\mathbf{u}) := \left(I + \frac{c\lambda}{2}A\right)\mathbf{u} - \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j^h) - \mathbf{d}_j \tag{9.79}$$

und

$$F^{'}(\mathbf{u}) = \left(I + \frac{c\lambda}{2}A\right) - \varphi^{'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j^h) \tag{9.80}$$

(wobei die Jacobimatrix $\varphi^{'}$ bezüglich des ersten Arguments gebildet wird)

oder

$$\begin{aligned}\left[I + \frac{c\lambda}{2}A - \varphi^{'}(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h)\right]\mathbf{u}_{j+1}^{h,s+1} &= \mathbf{d}_j + \varphi(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h) \\ &+ \left[I + \frac{c\lambda}{2}A - \varphi^{'}(\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}, \mathbf{u}_j^h)\right]\mathbf{u}_{j+1}^{h,s}\end{aligned}$$

Falls, wie in diesem Fall,

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\phi_0(u_0, \mathbf{z}), \ldots, \phi_N(u_N, \mathbf{z}))^T \tag{9.81}$$

ist $\varphi^{'}(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ eine Diagonalmatrix

$$\varphi^{'}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\phi_0^{'}(u_0, \mathbf{z}), \ldots, \phi_N^{'}(u_N, \mathbf{z}))^T \tag{9.82}$$

d.h. $F^{'}(\mathbf{u})$ ist eine tridiagonale Matrix, und die Berechnung von $\mathbf{u}_{j+1}^h$ erfolgt sehr schnell.

Es bleibt noch, die Auswertung von $\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}$ und $\mathbf{g}_{j+1/2}$ zu besprechen.

Es gilt:

$$\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{j+1} = (-\alpha_j - \alpha_{j+1}, 0, 0, \ldots, 0)^T \tag{9.83}$$

mit

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} = H(\mathbf{u}_j^h) + H(\mathbf{u}_{j+1}^h) \tag{9.84}$$

In der Arbeit von Crank und Nicolson wird dies durch

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} = 2H\left(\frac{\mathbf{u}_j^h + \mathbf{u}_{j+1}^h}{2}\right) \tag{9.85}$$

ersetzt, was wir ebenfalls machen werden. Die Differenz zwischen diesen beiden Ausdrücken ist kleiner als der Abbruchfehler in der Differenzengleichung (9.72).

Zur Berechnung von $\mathbf{g}_{j+1/2}$ benutzt man die Approximation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \doteq \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{k} \tag{9.86}$$

Die Koeffizienten κ und a können in der Praxis sehr großsein. Deshalb wird $v_{i,j+1}$ folgendermaßen approximiert:

Aus

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\kappa v e^{-a/u} \tag{9.87}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\ v = -\kappa e^{-a/u} \tag{9.88}$$

und

$$\begin{aligned} \ln \frac{v_{i,j+1}}{v_{i,j}} &= -\kappa \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-a/u} dt \\ &\doteq -\kappa k\ \exp\left(\frac{-2a}{u_{i,j} + u_{i,j+1}}\right) \\ &=: -\kappa k\ E_{i,j+1} \end{aligned} \tag{9.89}$$

und letztendlich die Approximation

$$v_{i,j+1} = v_{i,j} \exp(-k\kappa E_{i,j+1})\ . \tag{9.90}$$

Die Approximation (9.90) hat den Vorteil gegenüber anderen Approximationen zur Gleichung (9.87), z.B. der Trapezregel

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{k} = -\frac{\kappa}{2}\left[v_{i,j}e^{-a/u_{i,j}} + v_{i,j+1}e^{-a/u_{i,j+1}}\right] ,$$

daß selbst dann, wenn κ sehr großist, $v_{i,j+1}$ noch immer positiv ist.

Literatur:

Bamford, C.H., **Crank**, J., **Malan**, D.H.: The combustion of wood. Part I.
Proc. Cambridge Philosophical Society **42** (1946), 166-182.

Crank, J., **Nicolson**, P.: A practical method for numerical evaluation of the solutions of partial differential equations of the heat-conduction type.
Proc. Cambridge Philosophical Society **43** (1947), 50-67.

Kapitel 10

Die eindimensionale Wellengleichung

10.1 Einführung

Die eindimensionale Wellengleichung ist:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \quad t > 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}^1 \ . \tag{10.1}$$

Es gibt viele physikalische Anwendungen, z.B.: Schwingungen einer Saite oder Membran, Akustik, elektromagnetische Wellen. Eine Anwendung der Wellengleichung wurde schon in Absatz 4.5 besprochen. Hier geben wir noch ein klassisches Beispiel.

Beispiel 10.1 [Schwingungen einer Saite]
(Siehe Tychonoff, Samarskii, S. 27.)

Eine Saite der Länge L wird zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(L,0)$ aufgespannt (Abbildung 10.1).
Die Saite wird aus dem Ruhezustand ausgelenkt und losgelassen, so daß Schwingungen auftreten. Um diesen Prozeßmathematisch zu beschreiben, werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Verschiebung der Saite erfolge in einer Ebene, die (x,u) Ebene. Die Verschiebung ist immer senkrecht zur x-Achse. Dann läßt sich der Schwingungsprozeß durch eine Funktion $u(x,t)$ beschreiben, welche die vertikale Auslenkung der Saite charakterisiert.

2. Die Saite sei ein biegsam-elastischer Faden, d.h., die Spannungen in dem Faden wirken stets in der Richtung der Tangente. Gegenüber Biegungen leistet die Saite keinen Widerstand.

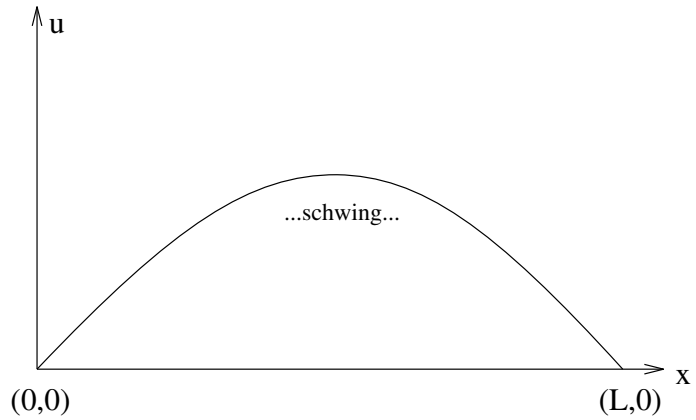


Abbildung 10.1: Eine schwingende Saite

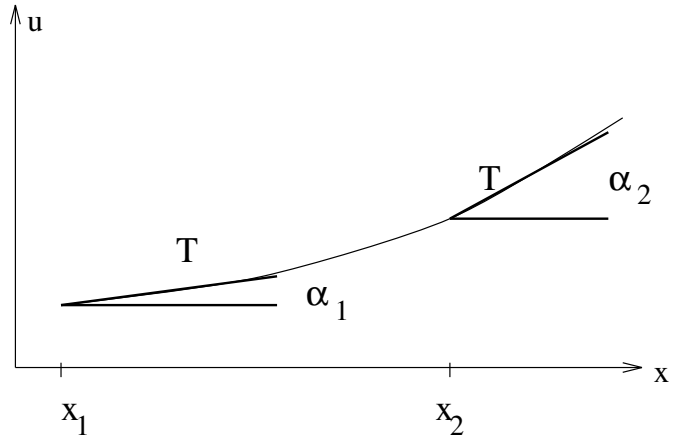


Abbildung 10.2: Die Kräfte, die auf ein Saitenelement wirken

3. Die Größe der Spannung $T(x)$, welche in der Saite infolge der Elastizität entsteht, kann nach dem Hookeschen Gesetz berechnet werden:

$$T(x) = E \cdot [L(t) - L_0] \,,$$

wobei $L(t)$ bzw. L_0 die Länge der Saite zur Zeit t bzw. die Länge der unausgedehnten Saite darstellt und E eine Konstante ist (Young's Modulus).

Da die Länge

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \approx (x_2 - x_1)(1 + 0(u_x^2))$$

wird vorausgesetzt, daß die Länge sich nur geringfügig ändert.

Zur Herleitung der Differentialgleichung betrachtet man ein Saitenelement zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ (Abbildung 10.2):
Für die Projektion der Spannung auf die u-Achse und die x-Achse (die wir mit T_u bwz. T_x bezeichnen) finden wir

$$T_u(x) = T_0 \ \sin \ \alpha \approx T_0 \tan \ \alpha = T_0 u_x \,,$$

wobei α der Winkel zwischen der Tangente an die Kurve $u(x,t)$ und der x-Achse ist.

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T(x)$$

Es wird vorausgesetzt, daß es keine Beschleunigung in der x-Richtung gebe, so daß

$$T(x_2) - T(x_1) = 0$$

oder

$$T(x) \equiv T_0.$$

Zur Herleitung der Gleichung einer transversal schwingenden Saite benutzen wir das zweite Newtonsche Gesetz. Der gesamte lineare Impuls eines Elementes (x_1, x_2) in Richtung der u-Achse ist zunächst gleich

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi,t)\varrho(\xi)d\xi \ ,$$

wobei ϱ die lineare Dichte der Saite bezeichnet. Wir setzen nun die Änderung der Bewegungsgröße während der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ gleich dem Impuls der wirkenden Kräfte, die von den Spannungen $T_0 u_x$ in den Punkten x_1 und x_2 sowie von den äußeren Kräften hervorgerufen werden. Letztere nehmen wir als stetig verteilt an und bezeichnen sie, bezogen auf die Längeneinheit, mit $f(x,t)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi,t_2) \ &- \ u_t(\xi,t_1)]\varrho(\xi)d\xi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2,\tau) - u_x(x_1,\tau)]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ , \quad (*)\end{aligned}$$

die Gleichung einer transversal schwingenden Saite in Integralform. Um von dieser Integralgleichung zu einer Differentialgleichung zu gelangen, setzen wir die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u(x,t)$ voraus. Die Gleichung $(*)$ geht dann nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes und dem Grenzübergang $x_2 \to x_1$, $t_2 \to t_1$ über in

$$T_0 u_{xx} = \varrho u_{tt} - f(x,t) \ .$$

Im Fall konstanter Dichte ϱ schreibt man diese Gleichung gewöhnlich in der Gestalt

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t) \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho}}\right) \ ,$$

wobei

$$F(x,t) := \frac{1}{\varrho}\, f(x,t)$$

die auf die Masseneinheit bezogene Kraftdichte ist. Wirken keine äußeren Kräfte, so erhalten wir die homogene Gleichung

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{oder} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (t = ay) \ ,$$

welche die freien Schwingungen einer Saite beschreibt. Diese Gleichung stellt das einfachste Beispiel einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

Für weitere Überlegungen notieren wir, daß die kinetische Energie T und die potentielle Energie U sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \ , \tag{10.2}$$

$$U(t) = \frac{1}{2} T \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \ . \tag{10.3}$$

10.2 Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

Die Charakteristiken sind

$$\begin{aligned} x - ct &= \text{const} \\ x + ct &= \text{const} \end{aligned}$$

Führen wir

$$\begin{aligned} \xi &:= x - ct \\ \eta &:= x + ct \end{aligned} \tag{10.4}$$

als neue Veränderliche und

$$v(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = u\left(\frac{\eta + \xi}{2} \ , \ \frac{\eta - \xi}{2c} \right) \tag{10.5}$$

als neue unbekannte Funktion ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta \ , \\ u_t &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c v_\xi + c v_\eta \ , \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2 v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \ , \\ u_{tt} &= c^2 \cdot (v_{\xi\xi} - 2 v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) \ . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \ , \tag{10.6}$$

d.h.

$$v_{\xi\eta} = 0 \ . \tag{10.7}$$

Es folgt aus (10.7), daß $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ für willkürliche Funktionen F und G, d.h.

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \ . \tag{10.8}$$

Umgekehrt stellt für beliebige differenzierbare Funktionen F und G die durch (10.8) definierte Funktion u eine Lösung der Gleichung (10.1) dar. Folglich liefert (10.8) die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.
Das Anfangswertproblem für (10.1) ist:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \ , \quad a \le x \le b \ , \\ u_t(x,0) &= g(x) \ , \quad a \le x \le b \ . \end{aligned} \tag{10.9}$$

[Z.B. wenn u die transversale Verschiebung einer Saite darstellt, ist f die Anfangsverschiebung und g die Anfangsgeschwindigkeit.]

Aus (10.8) und (10.9) folgt:

$$u(x,0) = f(x) = F(x) + G(x) \tag{10.10}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = -cF'(x) + cG'(x) \tag{10.11}$$

und

$$f'(x) = F'(x) + G'(x) \ , \tag{10.12}$$

so daß

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{+cf'(x) - g(x)}{2c} \\ G'(x) &= \frac{cf'(x) + g(x)}{2c} \end{aligned} \tag{10.13}$$

also

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k_1 \\ G(x) &= \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k_2 \end{aligned}$$

Aus (10.10) folgt, daß $k_1 + k_2 = 0$. Schließlich

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \ , \tag{10.14}$$

die *d'Alembertsche Formel*. Der Abhängigkeitsbereich von $u(x,t)$ ist das Intervall $(x - ct, x + ct)$.

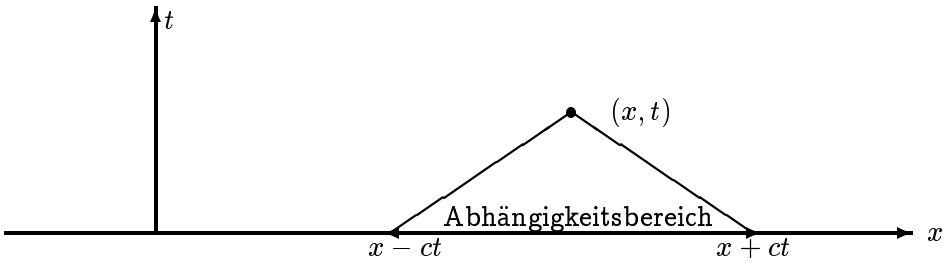


Abbildung 10.3: Der Abhängigkeitsbereich für die eindimensionale Wellengleichung

10.3 Weitere Eigenschaften

Die folgenden Sätze werden z.B. in Smoller, Kapitel 3, bewiesen.

Satz 10.1 (Smoller, S. 23) *Eine Funktion $u \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ist eine Lösung der Gleichung*

$$u_{tt} = u_{xx}$$

genau dann, wenn u die partielle Differenzengleichung

$$u(x - ck, t - h) + u(x + ck, t + h) = u(x + ch, t + k) + u(x - ch, t - k)$$

erfüllt für alle $h, k > 0$. D.h.

$$u(P_1) + u(P_3) = u(P_2) + u(P_4)$$

mit P_1, P_2, P_3, P_4 wie in Abbildung 10.4. Die vier Punkte P_1 bis P_4 bilden ein charakteristisches Rechteck, dessen Seiten Charakteristiken sind.

Beweis:

a) Sei u eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung. Es gilt:

$$u(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x} - ct) + G(\mathbf{x} + ct) \ ,$$

so daß u eine Lösung der partiellen Differenzengleichung ist.

b) Sei $u \in C^3(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der partiellen Differenzengleichung. Man setzt $h = 0$, addiert $-2u(\mathbf{x}, t)$ zur Differenzengleichung, dividiert durch k^2 und betrachtet den Grenzübergang $k \to 0$. □

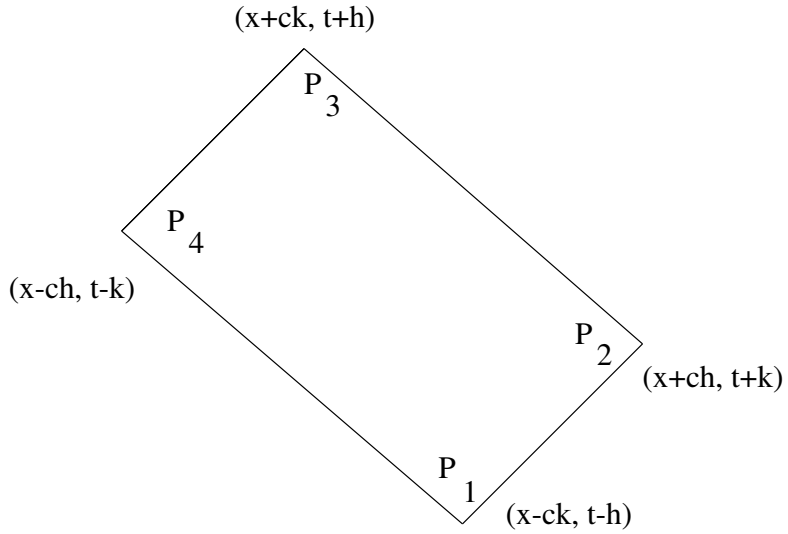


Abbildung 10.4: Ein charakteristisches Rechteck (mit $h > k$).

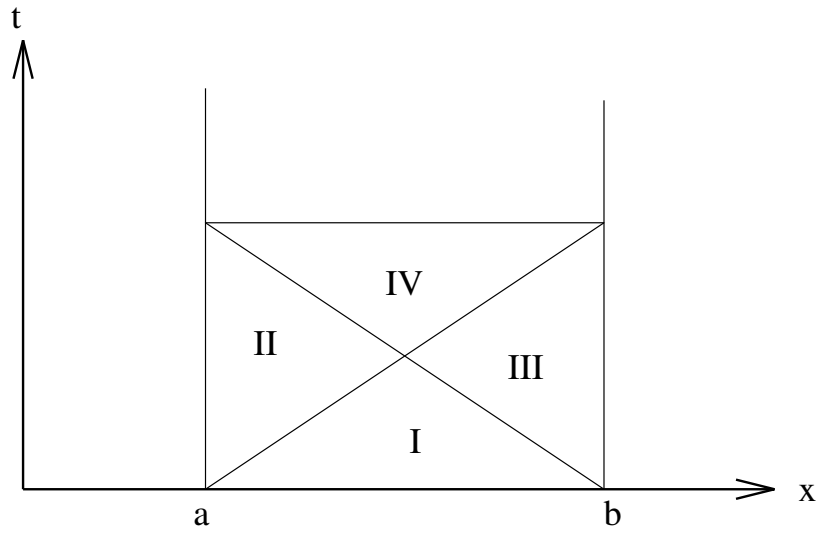


Abbildung 10.5: Lösungsschema für das Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung

Mit Hilfe von Satz 10.1 ist es möglich, das folgende Anfangswert- Randwertproblem zu lösen (siehe Abbildung 10.5).

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \,, \quad a < x < b \,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \,, \quad u_t(x,0) = g(x) \,, \quad a < x < b \\ u(a,t) &= f_1(t) \,, \quad t > 0 \\ u(b,t) &= f_2(t) \,, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Man berechnet die Lösung in den Gebieten I bis IV in dieser Reihenfolge.

Satz 10.2 (Smoller, S. 22) *Es gibt höchstens eine glatte Lösung für das Problem*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \,, \quad a < x < b \,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \,, \quad a < x < b \\ u_t(x,0) &= g(x) \,, \quad a < x < b \\ u(a,t) &= f_1(t) \vee u_x(a,t) = g_1(t) \,, \quad t > 0 \\ u(b,t) &= f_2(t) \vee u_x(b,t) = g_2(t) \,, \quad t > 0 \,. \end{aligned}$$

Beweis:
Sei u die Differenz zweier glatter Lösungen zu den Anfangs/Randdaten. Dann ist u selber Lösung mit Anfangs/Randdaten $= 0$.
Man benutzt das Energieintegral

$$I(t) := \frac{1}{2} \int_a^b (c^2 u_x^2 + u_t^2) dx \,.$$

und differenziert nach t.

Nach einfachen Manipulationen ergibt sich

$$\frac{dI}{dt} = c^2 \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t) dx = 0 \,,$$

woraus die Behauptung wegen $I(0) = 0$ leicht folgt. □

Satz 10.3 (Smoller, S. 20) *Sei $u \in C^2$ eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \phi(x,t) \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \,, \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= g(x) \,, \quad x \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx \\ &+ \frac{1}{2c} \int_G \int \phi \, dx \, dt \end{aligned}$$

wobei das Gebiet G in Abbildung 10.6 dargestellt ist.

Beweis:

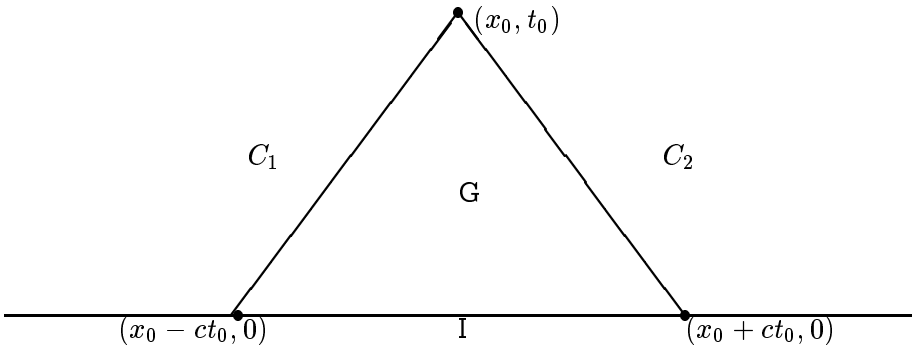


Abbildung 10.6: Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

Man benutzt den Gaußschen Integralsatz der Ebene

$$\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx\, dt = \int\limits_{\partial G} P dx + Q dt$$

(siehe z.B. Bronstein + Semendjajew, S. 401) und erhält:

$$\begin{aligned} \int\int\limits_G \phi\, dx\, dt = \int\int\limits_G (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx\, dt &= \int\int\limits_G \left(\frac{\partial}{\partial t} u_t - c^2 \frac{\partial}{\partial x} u_x \right) dx\, dt \\ &= \int\limits_{\partial G} (-c^2 u_x dt - u_t dx) \end{aligned} \tag{10.15}$$

Das Randintegral wird nun für jedes der Dreiecksseiten gesondert betrachtet.
Auf I gilt $dt = 0$, so daß

$$\begin{aligned} \int\limits_I -c^2 u_x dt - u_t dx &= -\int\limits_I u_t dx \\ &= -\int\limits_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(x) dx \end{aligned}$$

Auf C_2 gilt

$$dx = -c\, dt\ ,\ dt = -\frac{1}{c} dx\ ,$$

so daß

$$\begin{aligned}\int_{C_2} -c^2 u_x dt - u_t dx &= \int_{C_2} +cu_x dx + cu_t dt \\ &= \int_{C_2} +d(cu) \\ &= cu(x_0, t_0) - cu(x_0 + ct_0, 0)\end{aligned}$$

Ebenfalls gilt

$$\int_{C_1} -c^2 u_x dt - u_t dx = cu(x_0, t_0) - cu(x_0 - ct_0, 0)\ .$$

Einsetzen der drei Teilrandintegrale in (10.15) ergibt die Behauptung.

10.4 Das Huygensche Prinzip

Wir betrachten die Wellengleichung in drei räumlichen Koordinaten:

$$L[u] := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right) u(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \tag{10.16}$$

wo Δ der Laplace Operator ist,

$$\Delta u := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} \tag{10.17}$$

$$= div\ grad\ u. \tag{10.18}$$

Wir setzten

$$x = (x_1, x_2, x_3),$$

so daß

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Sei $h \in C^s(\mathbb{R}^3)$ und $I(x, r)$ der Durchschnitt von h am Ball mit Radius r und Mittelpunkt x:

$$I(x, r) := \frac{1}{4\pi} \iint_{||y||=1} h(x + ry) dS_y \tag{10.19}$$

wo dS_y das 2-dimensionale Flächenelement auf der Sphäre $\partial B(x, r)$ bezeichnet.

Es gilt:

$$I \in C^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+) \tag{10.20}$$

und

$$I(x,0) = h(x) \tag{10.21}$$

Weiter:

$$\iiint\limits_{||z||\leq R} h(x+z)dz = \int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)dr \tag{10.22}$$

wo $dz = dz_1, dz_2, dz_3$. Folglich, für $h \in C^2$, da der Operator Δ nur auf x einwirkt,

$$\Delta \int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)dr = \iiint\limits_{||z||\leq R} \Delta h(x+z)dz \tag{10.23}$$

$$= \iiint\limits_{||z||\leq R} div\, grad\, h(x+z)dz \tag{10.24}$$

$$= \iint\limits_{||z||=R} (grad\, h(x+z) \cdot n dS_z \qquad \text{(Gauß)} \tag{10.25}$$

$$= \iint\limits_{||z||=R} \sum_i h_{x_i}(x+z)\, \frac{z_i}{R}\, dS_z \tag{10.26}$$

$$= \iint\limits_{||y||=1} \sum_i h_{x_i}(x+Ry)\, y_i\, R^2\, dS_y \qquad \text{mit } (y := Rz) \tag{10.27}$$

$$= R^2 \iint\limits_{||y||=1} \frac{\partial}{\partial R} h(x+Ry)dS_y \tag{10.28}$$

$$= 4\pi R^2 \frac{\partial}{\partial R} I(x,R) \tag{10.29}$$

Differenzierung nach R ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial R}\, \Delta \int\limits_0^R r^2 I(x,r)dr = \frac{\partial}{\partial R} \int\limits_0^R r^2 \Delta I(x,r)dr \tag{10.30}$$

$$= R^2 \Delta I(x,R) \tag{10.31}$$

$$= \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} I(x,R) \tag{10.32}$$

$$= R \frac{\partial^2}{\partial R^2} RI(x,R), \tag{10.33}$$

so daß $I(x,r)$ die Differentialgleichung

$$\Delta r I(x,r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} r I(x,r) \tag{10.34}$$

erfüllt. Sei nun Ω_r als Operator definiert:

$$(\Omega_r h)(x) := rI(x,r) = \frac{r}{4\pi} \iint\limits_{||y||=1} h(x+ry)dSy \tag{10.35}$$

dann gilt:

$$\Delta(\Omega_r h) = \Omega_r(\Delta h) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Omega_r h). \tag{10.36}$$

Sei nun $u(x,t)$ eine Lösung der AWA für die dreidimensionale Wellengleichung:

$$u_(x,t) = f(x),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x) \ \text{ für } t = 0 \tag{10.37}$$

$$L[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right) u = 0, \qquad t > 0. \tag{10.38}$$

Für alle $r \geq 0$ und $t \geq 0$ erfüllt $\Omega_r u$ die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Omega_r u = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega_r u - c^2\Omega_r(\Delta u) \tag{10.39}$$

$$= \Omega_r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u\right) \tag{10.40}$$

$$= \Omega_r L[u] \tag{10.41}$$

$$= 0. \tag{10.42}$$

Mit Anfangsbedingungen

$$\Omega_r u = \Omega_r f,\ \frac{\partial}{\partial t}(\Omega_r u) = \Omega_r g \ \text{ für } r \geq 0, t = 0 \tag{10.43}$$

und die Randbedingungen

$$\Omega_r u = 0 \ \text{ für } r = 0, t \geq 0. \tag{10.44}$$

Nun ist die Lösung der eindimensionalen ARWA,

$$u = f(x),\ u_t = g(x) \ \text{ für } x \geq 0, t = 0 \tag{10.45}$$

$$u = h(t) \ \text{ für } x = 0, t \geq 0 \tag{10.46}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ , für } (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \tag{10.47}$$

analytisch bekannt:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \quad \text{für } x \geq ct \tag{10.48}$$

$$u(x,t) = h\left(t-\frac{x}{c}\right) + \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{x+ct} g(\xi)d\xi \quad \text{für } x \leq ct \tag{10.49}$$

Es folgt

$$(\Omega_r u)(x,t) = \frac{1}{2}[(\Omega_{ct+r}f)(x) - (\Omega_{ct-r}f)(x)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-r}^{ct+r}(\Omega_\xi g)(x)d\xi \quad \text{für } 0 \leq r \leq ct \tag{10.50}$$

Nun gilt:

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(\Omega_r u)(x,t) \tag{10.51}$$

,so daß

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(\Omega_r u)(x,t) \tag{10.52}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left[\frac{\Omega_{ct+r}f(x) - \Omega_{ct-r}f(x)}{2r}\right] + \lim_{r\to 0}\frac{1}{c}\frac{1}{2r}\int\limits_{ct-r}^{ct+r}(\Omega_\xi g)(x)d\xi \tag{10.53}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial r}(\Omega_r f(x))\right)_{r=ct} + \frac{1}{c}(\Omega_{ct}g)(x) \tag{10.54}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r} r \iint\limits_{||y||=1} f(x+ry)dS_y + \frac{1}{c}(\Omega_{ct}g)(x) \tag{10.55}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t} t \iint\limits_{||y||=1} f(x+cty)dS_y + \frac{1}{4\pi}t\iint\limits_{||y||=1} g(x+cty)dS_y \tag{10.56}$$

Aus dieser Formel folgt:

1. Der Abhängigkeitsbereich von $u(x,t)$ ist der Ball

$$B(x,ct) = \{(y,o) : y \in \mathbb{R}^2, ||y-x|| \leq ct\} \tag{10.57}$$

2. Die Lösung u im Punkt (x,t) wird nur von den Daten auf der Sphäre

$$S^2(x,ct) = \{y \in \mathbb{R}^3 : ||y-x||ct\} \tag{10.58}$$

beeinflußt.

Literatur

Bers, L., **John**, F., **Schechter**, M.: Partial Differential Equations. Interscience, 1964.

Bronstein + Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik.

Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, second edition, Springer 1994.

Williams, W.E.: Partial Differential Equations. Oxford, 1980.

Kapitel 11

Charakteristiken und die Klassifkation von Gleichungen und Systemen von Gleichungen

11.1 Einleitung

Für die Advektionsgleichung

$$u_t + c\, u_x = 0 \tag{11.1}$$

haben die Kurven

$$x - c\, t = \text{const} \tag{11.2}$$

eine spezielle Bedeutung. Für die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{11.3}$$

haben die Kurven

$$\left.\begin{array}{rcl} x - c\, t &=& \text{const} \\ x + c\, t &=& \text{const} \end{array}\right\} \tag{11.4}$$

auch eine spezielle Bedeutung. Sowohl 11.2 als auch 11.4 sind Beispiele von **Charakteristiken**, die wir jetzt näher untersuchen.

Charakteristiken sind Kurven bzw. Oberflächen, die für eine gegebene Differentialgleichung definiert sind. Sie finden Anwendungen auf bei:

- der Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen,

- der Untersuchung der Frage, welche Anfangs- oder Randwertaufgaben sinnvoll gestellt sind,
- der Konstruktion analytischer Lösungen,
- der Fortpflanzung von Unstetigkeiten der Lösungen und
- der Formulierung und dem Beweis von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen.

Als Beispiel betrachten wir zuerst die Advektionsgleichung

$$Lu := u_t + cu_x = 0 \tag{11.5}$$

mit $c > 0$, die wir in der Form $Lu := u_{x_0} + c\ u_{x_1}$ schreiben.

- **Klassifikation**
  Die Advektionsgleichung ist eine hyperbolische Gleichung, da es einen Vektor $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2$ gibt mit $\xi \neq 0$ und

  $$\sigma_x(L, \xi) := \xi_0 + c\ \xi_1 = 0.$$

- Die Anwendung der Charakteristiken

  $$x - c\ t = \text{ const}$$

  bei der Theorie der Advektionsgleichung ist schon ausführlich in Kapitel 6 dokumentiert worden.

11.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung

11.2.1 Notation

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$, $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$.
Man setzt:

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|, \\ \xi^\alpha &:= \prod_{i=0}^{n} \xi_i^{\alpha i}, \text{ für } \xi = (\xi_0, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D^\alpha u &:= D_{x0}^{\alpha 0} ... D_{xn}^{\alpha n} u = \left(\prod_{i=0}^{n} D_{x_i}^{\alpha i} \right) u \\ &= \frac{\partial^{\alpha 0}}{\partial x_0^{\alpha 0}} ... \frac{\partial^{\alpha n}}{\partial x_n^{\alpha n}} u = \left(\prod_{i=0}^{n} \frac{\partial^{\alpha i}}{\partial x_i^{\alpha i}} \right) u \\ \text{mit } \frac{\partial^0}{\partial x_R^0} &:= 1. \end{aligned}$$

Sind mehrere Koordinatensysteme vorhanden, kann man auch zur Verdeutlichung $D_x^\alpha u$, statt $D^\alpha u$ schreiben.
Sei nun

$$L := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}, u) D^\alpha \tag{11.6}$$

ein Differentialoperator der Ordnung k auf $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Koeffizienten a_α dürfen Funktionen von $\mathbf{x}, u$ und Ableitungen $D^\beta u$ sein, mit $|\beta| < k$.

Das *Hauptsymbol* im Punkt $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \Omega$ ist definiert als

$$\sigma_{\mathbf{x}}(L, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, u) \xi^\alpha \,, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{11.7}$$

Ein Vektor $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \xi \neq 0$, heißt *charakteristisch* für L in $\mathbf{x}$, falls

$$\sigma_{\mathbf{x}}(L, \xi) = 0. \tag{11.8}$$

Die Menge aller $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\sigma_{\mathbf{x}}(L, \xi) = 0$ bezeichnen wir mit $\text{char}_{\mathbf{x}} L$.

Eine Oberfläche $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, als Nullstellenmenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}, \tag{11.9}$$

heißt charakteristisch bezüglich L in $\mathbf{x}$, falls für den Normalvektor zu S im Punkt $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\text{grad} f}{||\text{grad} f||_2} \tag{11.10}$$

gilt:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \text{char}_x(L),$$

d. h.

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (\text{grad} f)^\alpha = 0. \tag{11.11}$$

Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Oberfläche. Scd ei $\mathbf{p} \in S$. Es ist möglich, neue Koordinaten $\xi_0(\mathbf{x}), \ldots, \xi_n(\mathbf{x})$ so einzuführen, daß in einer Umgebung von $\mathbf{p}$ die Oberfläche S durch

$\xi_0(\mathbf{x}) = 0$ gegeben wird. Die Oberfläche wird dadurch auf eine Oberfläche $\sum$ abgebildet, wo $\sum$ eine Teilmenge der Ebene $H_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}, \xi_0 = 0$, ist.

Die normalen Ableitungen von u im Punkt $\mathbf{x} \in S$ sind durch

$$\frac{\partial^r u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}^r} := \left(\sum_{i=0}^{n} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r u$$

definiert, wo der konstante Vektor $\nu = (\nu_0, ..., \nu_n) := \mathbf{n}(\mathbf{x})$ der Normalvektor im Punkt $\mathbf{x} \in S$ ist.

Seien nun die Cauchy Daten auf S,

$$\frac{\partial^r u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}^r} = f_r(\mathbf{x}),\ 0 \leq r \leq k-1, \mathbf{x} \in S$$

gegeben. Es kann gezeigt werden, daß hieraus die Cauchy Daten

$$\frac{\partial^r u(\xi)}{\partial \xi_0^r},\ 0 \leq r \leq k-1, \xi \in \sum$$

berechnet werden können. (Siehe z.B. Bers, John, Schechter, Partial Differential Equations, S. 40 - 43.)

Sei nun u und dessen Cauchy Daten $D^\beta u$ für $\beta = (\beta_0, 0, 0, ..., 0)$, $|\beta| \leq k-1$ auf $\sum$ gegeben (**Cauchy Daten**). Die Ableitungen $D_\xi^{\beta+\gamma} u$ mit $\gamma = (0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ können berechnet werden, da $\sum \subset H_0$.

Sei nun

$$\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n), \quad \text{mit } |\alpha| = k.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_r} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial x_r} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} \end{aligned}$$

so daß, auf $\sum$,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}}^{\alpha} u &= \frac{\partial^k u}{\partial x_0^{\alpha 0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &= \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} \cdot \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} \right)^{\alpha_0} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} + \text{bekannte Terme} \\ &= \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} (\text{grad } \xi_0)^\alpha + \text{bekannte Terme} \end{aligned}$$

wobei die bekannten Terme höchstens Ableitungen von u nach ξ_0 der Ordnung $k-1$ enthalten.

Wir betrachten nun die partielle DGL $Lu = 0$. Es gilt dann:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}, u) D^\alpha_{\mathbf{x}} u = 0$$

also

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, u)(\text{grad } \xi_0)^\alpha \cdot \frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} = \text{bekannte Terme}$$

oder

$$\frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, u)(\text{grad } f)^\alpha = \text{bekannte Terme} \qquad (*)$$

Die Bedingung $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \notin char_{\mathbf{x}}(\mathbf{L})$, d. h. S sei nicht charakteristisch (bzgl. $\mathbf{L}$), hat somit die Folge, daß die Ableitung

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \xi_0^k}\right|_{\xi \in \sum}$$

berechenbar ist. Durch Wiederholung können sämtliche Ableitungen $D^\alpha_\xi u$ auf $\sum$ berechnet werden.

Umgekehrt zeigt diese Herleitung, daß es ohne weiteres nicht sinnvoll ist, auf Charakteristiken Cauchy-Anfangswerte vorzugeben, da die Gleichung $(*)$ in diesem Fall keine neue Information liefert und statt dessen eine Verträglichkeitsbedingung zwischen den gegebenen Cauchy Daten beinhaltet.

Beispiel 11.1 *Für die eindimensionale Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

gilt, daß eine Oberfläche (Kurve) $f(x,t) = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$ *charakteristisch ist, genau dann, wenn*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \pm c \frac{\partial f}{\partial x}$$

d. h.

$$f = \phi(x + ct),$$

oder

$$f = \psi(x - ct)$$

mit beliebigen Funktionen ϕ, ψ.

Deshalb - für die eindimensionale Wellengleichung - sind die Charakteristiken (charakteristische Kurven oder Oberflächen):

$$\begin{aligned} x - c\,t &= \xi \\ x + c\,t &= \eta \end{aligned} \tag{11.12}$$

mit Konstanten ξ, η.

11.3 Klassifikation von Gleichungen

Das Hauptsymbol $\sigma_x(L, \xi)$ der Operator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}, u) D^\alpha, \quad x \in \Omega,$$

wird benutzt, um den Operator L zu klassifizieren.

11.3.1 Elliptische Gleichungen

Die einfachste Definition betrifft **elliptische** Gleichungen. Der Operator L ist elliptisch falls es keine reellen Charakteristiken gibt, d. h.

Definition 11.1 *Sei*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}, u) \partial^\alpha$$

ein Differentialoperator für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L *heißt elliptisch im Punkt* $\mathbf{x}$, *falls für alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ *gilt*

$$\sigma_x(L, \xi) := \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(\mathbf{x}) \xi^\alpha \neq 0 \ .$$

Bemerkung 11.1 *Da es keine bevorzugte Richtung gibt, ist es bei elliptischen Gleichungen üblich,* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ *zu setzen statt* $\mathbf{x} = (x_0, ..., x_n)$.

Beispiel 11.2 Die Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$ ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} , \\ \sigma_x(L,\xi) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 . \end{aligned}$$

Beispiel 11.3 Die biharmonische Gleichung in $\mathbb{R}^2$,

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} ,$$

ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} \sigma_x(L,\xi) &= \xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 \\ &= (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 . \end{aligned}$$

Beispiel 11.4 Die Minimal-Oberflächengleichung

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

ist elliptisch, da

$$\begin{aligned} \sigma_x(L,\xi) &= (1+u_y^2)\xi_1^2 - 2u_x u_y \xi_1\xi_2 + (1+u_x^2)\xi_2^2 , \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1 u_y - \xi_2 u_x)^2 \end{aligned}$$

Es ist manchmal wichtig, die Elliptizitätsbedingung genauer zu klassifizieren. Für Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ist die folgende Klassifikation nützlich:

Definition 11.2 *Sei*

$$L = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(\mathbf{x},u)\partial^\alpha$$

ein Differentialoperator zweiter Ordnung für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L heißt gleichmäßig elliptisch auf Ω (uniformly elliptic), falls eine Konstante $a > 0$ existiert mit

$$a \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(\mathbf{x},u)\xi^\alpha \le \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

für alle $\mathbf{x} \in \Omega$.

Beispiel 11.5 Die Gleichung

$$xu_{xx} + 2u_x = 0$$

ist nicht gleichmäßig elliptisch auf $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$

11.3.2 Parabolische Gleichungen

Normalerweise werden parabolische Gleichungen nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert.

Definition 11.3 *Sei*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$$

und

$$A = (a_\alpha(x) : |\alpha| = 2)$$

die Matrix der Koeffizienten $a_\alpha(x)$, $|\alpha| = 2$. *Dann heißt* L **parabolisch** *falls* A *singulär ist.* □

Beispiel 11.6 *Die Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

ist parabolisch, da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

singulär ist.

Die folgende erweiterte Definition ist in Gustafsson, Kreiss und Oliger, S. 2734 zu finden:

Definition 11.4 *Sei*

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=0}^{2r} P_j(x,t,2x)u + F$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$P_j(x,t,\partial x) := \sum_{|\nu|=j} A_\nu(\mathbf{x},t) \frac{\partial^j}{\partial x \nu},\ \nu \in \mathbb{N}_0^d$$

und $u(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^N$.

L heißt **parabolisch**, falls für alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ und alle $\mathbf{x}_0, t_0$ eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so daß die Eigenwerte λ_j von

$$P_{2r}(\mathbf{x}_0, t_0, \omega) = \sum_{|\nu|=2r} A_\nu(\mathbf{x}_0, t_0)\omega^\nu$$

die Ungleichung

$$\mathbb{R}e\lambda_j \geq \delta \sum_{i=1}^{d} |\omega_i|^{2r}$$

gilt.

11.3.3 Hyperbolische Gleichungen zweiter Ordnung

Die Definition von hyperbolischen Gleichungen ist etwas kompliziert, da es mehrere Spezialisierungen gibt. Für $k = 2$ ist die Definition am einfachsten:

Definition 11.5 *Sei*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(\mathbf{x}, u) D^\alpha, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und

$$A := (a_\alpha(x) : |\alpha| = 2) \in Mat(n+1, n+1, \mathbb{R})$$

die Matrix der Koeffizienten $a_\alpha(x)$, $|\alpha| = 2$. Dann heißt L **hyperbolisch** *falls alle Eigenwerte von A bis auf einen das gleiche Vorzeichen haben, und ein Eigenwert von A das andere Vorzeichen hat.* □

Beispiel 11.7 *Die Wellengleichung*

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ist hyperbolisch, da die Menge der Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gleich $\{1, -1, -1\}$ ist. □

Bemerkung 11.2 *Die Gleichung*

$$u_{tt} + u_{xx} - u_{yy} - u = 0$$

ist weder elliptisch noch parabolisch noch hyperbolisch und ist **ultrahyperbolisch.** *(Renardy and Rogers, Introd. to Partial Diff. Equs., S. 40)*

Für Gleichungen beliebiger Ordnung k gilt:

Definition 11.6 *Sei*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha$$

heißt **streng (strictly) hyperbolisch** *in der Richtung* **n** *falls*

1. $\sigma_x(L, \mathbf{n}) \neq 0$

2. Alle Wurzeln ω der Gleichung

$$\sigma_x(L, \xi + \omega \mathbf{n}) = 0$$

seien reell und unterschiedlich für jedes ξ, das nicht ein Vielfaches von $\mathbf{n}$ ist.

Bemerkung 11.3 *Die Bedingung, daß L streng hyperbolisch ist, ist eine notwendige Bedingung dafür, daß die Lösungen von $Lu = 0$ nur mäßig wachsen. (siehe Renardy and Rogers, S. 43).*

Um dies einzusehen, betrachte den Fall

$$Lu = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha u$$

mit konstanten Koeffizienten a_α,

$$\begin{aligned} \omega &= \mu + i\nu \in \mathbb{C},\ \nu \neq 0 \\ \xi &= (0, \xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{n} &= (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

mit

$$\sigma_x(L, \xi + \omega \mathbf{n}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (\xi + \omega \mathbf{n})^\alpha = 0.$$

Dann ist

$$v(\mathbf{x}) := e^{is(\xi + \omega \mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}},\ s = \pm 1,$$

eine Lösung der Gleichung $Lv = 0$. Man wähle s, so daß $\Im(s\omega) < 0$. Dann wächst v exponentiell mit zunehmendem ξ_0.

11.3.4 Gleichungssysteme: Elliptizität nach Agmon, Douglis und Nirenberg

Systeme von Differentialgleichungen treten oft auf. Sie werden allerdings nur selten in der Literatur behandelt. Insbesondere werden Systeme höherer Ordnung kaum in Lehrbüchern behandelt. Einige der wenigen Ausnahmen sind die Bücher von Miranda [1970, S. 275], Courant und Hilbert [1962, S. 577], Renardy und Rogers [1992, S. 44] und Hörmander [1963, S. 267]. Sei

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= (u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_N(\mathbf{x}))^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_N(\mathbf{x}))^T \end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{M}_{ij}$ ein Differentialoperator der Ordnung α_{ij}.

Sei

$$s_i \in \mathbb{Z} \ , \quad t_i \in \mathbb{Z} \ , \quad 1 \leq i \leq N$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &\leq s_i + t_j \ , \\ \mathcal{M}_{ij} &\equiv 0 \text{ falls } \quad s_i + t_j < 0 \ . \end{aligned}$$

Sei $M_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ das charakteristische Polynom von $\mathcal{M}_{ij}$ und

$$\hat{M}_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} M_{ij}(\mathbf{x}, \xi) & , \text{ falls } \quad \alpha_{ij} = s_i + t_j \\ 0 & , \text{ falls } \quad \alpha_{ij} < s_i + t_j \end{cases}$$

Das System

$$\sum_{j=1}^{N} \mathcal{M}_{ij}(\mathbf{x})\, u_j = f_i \ , \quad 1 \leq i \leq N$$

heißt *elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg*, falls es möglich ist, s_i und t_j so zu wählen, daß

$$\hat{a}(\mathbf{x}, \xi) := \det(\hat{M}_{ij}(\mathbf{x}, \xi)) \neq 0 \ , \quad \mathbf{x} \in \Omega \ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \ .$$

Sei

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}, \xi) &:= \det(M_{ij}(\mathbf{x}, \xi)) \ , \\ r &= \text{Grad } \ a \ , \\ R &= \text{Der maximale Grad der N! Terme von } \ a \\ &\quad \text{bei der Entwicklung mit der Leibniz-Regel} \end{aligned}$$

Es ist von Volevich bewiesen worden (Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 39]), daß die folgenden Bedingungen für die Elliptizität notwendig und hinreichend sind:

1. $r = R$,
2. $\tilde{a}(\mathbf{x}, \xi) \neq 0$ für alle $\xi \neq 0$, wo bei $\tilde{a}$ der Hauptteil von a, d.h. der Teil vom Grade r, ist.

Beispiel 11.8

$$\begin{aligned} u_x - v_{yy} &= f_1 \ , \\ u_{yy} + u_y + v_{xxx} + v_{xy} &= f_2 \end{aligned}$$

Man setze

$$s_1 = 0 \ , \quad s_2 = 1 \ , \quad t_1 = 1 \ , \quad t_2 = 2 \ .$$

Es folgt:

$$a = \tilde{a} = \hat{a} = \begin{vmatrix} \xi & -\eta^2 \\ \eta^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = \xi^4 + \eta^4 \ , \quad r = 4 \ , \quad R = 4 \ .$$

Beispiel 11.9 [Cauchy-Riemann-Gleichungen]

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= 0 \end{aligned}$$

Man setze $s_1 = s_2 = 1 \ , \ t_1 = t_2 = 0$. Es folgt:

$$\hat{a} = \begin{vmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = \xi^2 + \eta^2 \ .$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} = a &= \hat{a} \ , \\ r = R &= 2 \ . \end{aligned}$$

Beispiel 11.10

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ .$$

Setze

$$u_1 := u_x \ , \quad u_2 := u_y \ .$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \ , \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} - u_1 &= 0 \ , \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} - u_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Mit der Theorie von Agmon et al setze man

$$\begin{aligned} s_0 = 0 \ , \quad s_1 = s_2 &= -1 \ , \\ t_0 = 2 \ , \quad t_1 = t_2 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\hat{a}(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & -1 & 0 \\ \xi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} = a &= \hat{a} \,, \\ r = R &= 2 \,. \end{aligned}$$

In der Theorie von Agmon, Douglis und Nirenberg wird weiter vorausgesetzt:

Bedingung L: $\tilde{a}(\mathbf{x}, \xi)$ ist ein Polynom vom Grade 2m bezüglich ξ. Sei ξ , $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Das Polynom $q(\tau) := \tilde{a}(\mathbf{x}, \xi + \tau\hat{\xi})$ hat genau n Nullstellen τ mit positivem Imaginärteil.

Bemerkung 11.4 Sei das System elliptisch im Sinne von Douglis und Nirenberg und $n > 2$. Dann ist die Bedingung L erfüllt. (Siehe Agmon, Douglis, Nirenberg [1964, S. 39], Miranda [1970, S. 244].)

Bemerkung 11.5 Sei $n = 2$. Es gebe eine Funktion $\gamma(\mathbf{x})$ und ein $\alpha > 0$ mit

$$Re\{\gamma(\mathbf{x})\hat{a}(\mathbf{x}, \xi)\} \geq \alpha|\xi|^{2r} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \,,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,,\ \xi \neq 0 \,,$$

wobei $2r$ die Ordnung des Differentialoperators $\mathcal{M}_{ij}$ ist. Dann ist die Bedingung L erfüllt (siehe Miranda [1970, S. 245]).

Bemerkung 11.6 *Die etwas komplizierte Definition ist erforderlich, da man sonst unerwünschte Ergebnisse erhalten kann, wie das folgende Beispiel zeigt.*

Beispiel 11.11 *Für die Laplace-Gleichung*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

kann man das äquivalente System

$$\begin{aligned} u_x - v &= 0 \\ u_y - w &= 0 \\ v_x - w_y &= 0 \end{aligned}$$

aufstellen. Würden nur die höchsten Ableitungen betrachtet wäre

$$\det\ A = \det \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 \\ \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = 0. \qquad \square.$$

Literatur

Agmon, S., **Douglis**, A., **Nirenberg**, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math. 17, 35-92(1964).

Douglis, A., **Nirenberg**, L.: Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 8, 503-538(1955).

Gustaffson, B., **Kreiss**, H.-O., **Oliger**, J: Time Dependent Problems and Difference Methods. Wiley 1995.

Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin: Springer, 1963.

Jeffrey, A.: Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves. Pitman, 1976.

Miranda, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. New York: Springer, 1970.

Renardy, M. ; Rogers, R. C.: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 1993.

11.4 Existenz und Eindeutigkeit für das Cauchy Problem: Die Sätze von Holmgren und Cauchy-Kowalewskia

Die Grundidee der Definition von nicht charakteristischen Oberflächen, nämlich die Möglichkeit alle weiteren Ableitungen zu berechnen, führt zum berühmten Satz von Cauchy und Kowalewskia [1]:

Satz 11.1 *(***Cauchy-Kowalewskia:***)* *Seien A_α $N \times N$ Matrizen und B ein N-Vektor, deren Koeffizienten analytische Funktionen sind. Sei*

$$(Lu)(\mathbf{x}) := L = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(\mathbf{x}, u), D^\alpha u(\mathbf{x}),$$

wobei die Koeffizienten $A_\alpha(\mathbf{x}, u)$ auch von Ableitungen $D^\beta u$, $|\beta| < k$ abhängen dürfen.

Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine analytische nichtcharakteristische Oberfläche. Seien $f_\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $|\alpha| < k$, analytische Funktionen in einer Umgebung von S. Sei $\mathbf{x}^0 \in S$. Dann

[1] Sophie Kowalewskia, die erste Doktorandin in Deutschland

existiert eine Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$*, als analytische Lösung des Cauchy Problems in einer Umgebung* U *von* $\mathbf{x}^0$*, d. h.* u *ist analytisch in* U *und*

1. $Lu = Bx \in U$
2. $D^\alpha u = f_\alpha,\ \mathbf{x} \in S \cap U,\ |\alpha| < k$

Satz 11.2 *(***Holmgren***) Die Voraussetzungen seien wie in Satz 11.1, mit der Einschränkung, daß* $A_\alpha = A_\alpha(\mathbf{x})$*, die Matrizen* A_α *also nicht von* u *und dessen partiellen Ableitungen abhängen dürfen. Die DGL ist also linear.(Die Cauchy Daten* f_α *müssen auch nicht analytisch sein.) Dann gibt es höchstens eine Lösung* u *in* U *(*u *muß nicht analytisch sein).*

Siehe L. Bers, F. John und M. Schechter [1964, S. 38], Smoller [1983, S. 33]. (Renardy und Rogers haben auch eine sehr gute Beschreibung dieser zwei Sätze.)

11.5 Hyperbolische Systeme erster Ordnung

Wir betrachten das System

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{d} A_\nu(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + B(\mathbf{x}, t)u + F(\mathbf{x}, t) \tag{11.13}$$

wobei

$$u(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m$$
$$A_\nu, B \in Mat(m, m, \mathbb{R})$$

Als Quelle wird GKO (Gustaffson, Kreiss, Oliger, Time Dependent Problems and Difference Methods) oft benutzt.

Mit dem System (11.13) wird eine Matrix $\hat{P}(\omega)$ assoziert:

$$\hat{P}(\omega) := \sum_{\nu=1}^{d} A_\nu \omega_\nu,\ \omega \in \mathbb{R}^d \tag{11.14}$$

Definition 11.7 *Das System (11.13) ist streng (strictly), symmetrisch (symmetric), stark(strongly) oder schwach (weakly) hyperbolisch im Punkt* $\mathbf{x}_0, t_0$*, falls:*

1. (streng hyperbolisch)
   $\hat{P}(\omega)$ hat einen vollen Satz von reellen Eigenwerten und Eigenvektoren.
2. (symmetrisch hyperbolisch)
   Die Matrizen A_ν sind hermitisch.

3. (stark hyperbolisch)
   Es existiert eine Konstante $K > 0$ und für jedes ω eine Transformation $T(\omega)$ mit

$$\sup(||T(\omega)||_2 + ||T^{-1}(\omega)||_2) \leq K, \ ||\omega||_2 = 1$$
$$T^{-1}(\omega)\hat{P}(\omega)T(\omega) = \wedge(\omega),$$
$$\wedge(\omega) = diag(\lambda_j(\omega)),$$
$$\lambda_j(\omega) \in \mathbb{R}$$

4. (schwach hyperbolisch)
   Die Eigenwerte von $\hat{P}(\omega)$ sind reell. $\square$.

Es kann gezeigt werden, daß die folgenden Zusammenhänge gelten:

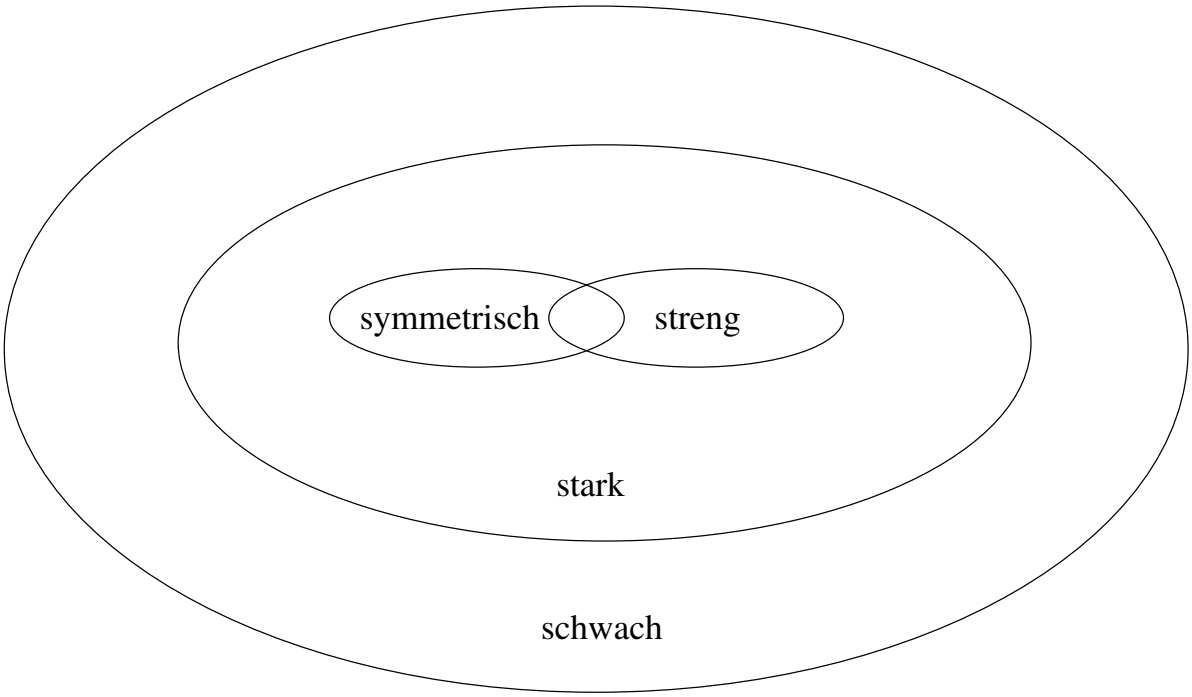


Abbildung 11.1: Die Definitionen von hyperbolischen Gleichungen

11.5.1 Anfangs-Randwertaufgaben

(Siehe GKO, S. 359)
Für die Advektionsgleichung

$$u_t = au_x \tag{11.15}$$

(d.h. $u_t + (-a)u_x = 0$) wissen wir, daß die richtige Wahl der Randwertdaten im Streifen $0 \leq x \leq 1$ vom Vorzeichen der Konstante a abhängt:

1. $a > 0$.

$$\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(1,t) & = & g^I(t), & t \ge 0 \end{array} \tag{11.16}$$

2. $a = 0$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{11.17}$$

3. $a < 0$

$$\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) & = & g^{II}(t), & t \ge 0. \end{array} \tag{11.18}$$

Wenn die Lösung u stetig sein soll, so muß (z.B. für $a > 0$),

$$f(1) = g^I(0) \tag{11.19}$$

Wird weiter verlangt, daß u stetig differenzierbar sei, so betrachtet man u_t und u_x. Ist $v := u_t$ z.B., so gilt:

$$\begin{array}{rcl} v_t & = & av_x \\ v(x,0) & = & u_t(x,0) \\ & = & au_x(x,0) \\ & = & af'(x) \\ v(1,t) & = & u_t(1,t) \\ & = & g^{I'}(t). \end{array}$$

Wenn $v = u_t$ im Punkt $(1,0)$ stetig ist, so gilt

$$af'(1) = g^{I'}(0) \tag{11.20}$$

Auf diese Weise kann man auch weitere notwendige Bedingungen für Stetigkeit herleiten.

Sei nun

$$u_t = Au_x,\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0 \tag{11.21}$$

wo A eine konstante Matrix ist,ein streng hyperbolisches System. Dann gibt es eine reguläre Matrix S, so daß

$$S^{-1}AS = \wedge = \begin{pmatrix} \wedge^I & & \\ & \wedge^{II} & \\ & & \wedge^{III} \end{pmatrix}$$

mit

$$\wedge^I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_r \end{pmatrix} > 0$$

$$\wedge^{II} = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{m-s} \end{pmatrix} < 0$$

$$\wedge^{III} = 0.$$

Man setzt

$$v(\mathbf{x}, t) = S^{-1} u(\mathbf{x}, t) \tag{11.22}$$

und stellt fest, daß

$$v_t = \wedge v_x . \tag{11.23}$$

Sei

$$v = \begin{pmatrix} v^I \\ v^{II} \\ v^{III} \end{pmatrix} \tag{11.24}$$

Dann sind geeignete Randdaten bestimmt:

$$v(x, 0) = f(x),\ 0 \leq x \leq 1 \tag{11.25}$$

$$v^I(1, t) = g^I(t),\ t > 0 \tag{11.26}$$

$$v^{II}(0, t) = g^{II}(t),\ t > 0 \tag{11.27}$$

Beispiel 11.12 *Man betrachte das AWRW Problem für die Wellengleichung:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1 \tag{11.28}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & f_0(x), & 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) & = & f_1(x), & 0 \le x \le 1 \end{array}\right\} \tag{11.29}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} u(0,t) & = & g_0(t), & t > 0, \\ u(1,t) & = & g_1(t), & t > 0. \end{array}\right\} \tag{11.30}$$

Sei

$$v(x,t) := \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)d\tau + \int_0^x f_1(\xi)ds. \tag{11.31}$$

Durch Differentiation folgt:

$$v_t = u_x. \tag{11.32}$$

Aus 11.28 und 11.32 folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$

so daß

$$u_t - v_x = G(x).$$

Aus 11.31 erhält man:

$$v_x(x,0) = f_1(x) = u_t(x,0),$$

so daß $G(x) \equiv 0$. Damit erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \tag{11.33}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.34}$$

und Anfangswertbedingungen,

$$\begin{array}{l} u(x,0) = f_0(x), \\ v(x,0) = \int_0^x f_1(\xi)d\,\xi. \end{array} \tag{11.35}$$

Sei

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1}, \tag{11.36}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{11.37}$$

Dann gilt

$$SAS^{-1} = \wedge := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.38}$$

Es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \wedge \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{v}_x \end{pmatrix} \tag{11.39}$$

Die Anfangsbedingung für $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ sind bekannt (siehe 11.35 und 11.37).
Die Randwertbedingungen liefern (siehe 11.37),

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{u}(0,t) + \tilde{v}(0,t) & = & \sqrt{2}\, u(0,t) & = & \sqrt{2}\, g_0(t) \\ \tilde{u}(1,t) + \tilde{v}(1,t) & = & \sqrt{2}\, u(1,t) & = & \sqrt{2}\, g_1(t) \end{array} \tag{11.40}$$

Die Charakteristiken für die Gleichung

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_x$$

haben die Steigung -1, so daß $\tilde{u}(0,t)$ aus den Anfangsdaten berechenbar ist, insbesondere,

$$\tilde{u}(0,x) = \tilde{u}(x,0) = f_0(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{11.41}$$

Ebenso

$$\tilde{v}(1,x) = \tilde{v}(1-x,0). \tag{11.42}$$

Aus (11.40), (11.41), (11.42):

$$\begin{array}{rcl} \tilde{v}(0,t) & = & \sqrt{2}\, g_0(t) - f_0(t),\ 0 \le t \le 1 \\ \tilde{u}(1,t) & = & \sqrt{2}\, g_1(t) - \tilde{v}(1-t,0),\ 0 \le t \le 1 \end{array} \tag{11.43}$$

mit $\tilde{v}(1-t,0)$ wie in 11.35. Damit sind die erforderlichen Randbedingungen für die Gleichung

$$\begin{array}{rcl} \tilde{u}_t & = & \tilde{u}_x \\ \tilde{v}_t & = & -\tilde{v}_x \end{array} \tag{11.44}$$

gegeben.

Beispiel 11.13 *Die* Euler Gleichungen *für die drei Geschwindigkeitskomponenten* u, v, w *einer Flüssigkeit mit Dichte* ρ *und Druck* p *sind:*

Momentum-Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} u_t & + & uu_x & + & vu_y & + & wu_z & + & \frac{1}{\rho}p_x & = & 0 \\ v_t & + & uv_x & + & vv_y & + & wv_z & + & \frac{1}{\rho}p_y & = & 0 \\ w_t & + & uw_x & + & vw_y & + & ww_z & + & \frac{1}{\rho}p_z & = & 0 \end{array} \tag{11.45}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y + (w\rho)_z = 0 \tag{11.46}$$

und die *Zustandsgleichung*

$$p = G(\rho), \tag{11.47}$$

$$a^2 := \frac{dG}{d\rho} = G'(\rho) > 0 \tag{11.48}$$

wo, wie es sich später herausstellen wird, a als Schallgeschwindigkeit bezeichnet werden kann.

Man betrachtet eine Lösung (U, V, W, R) der Euler-Gleichungen und eine kleine Änderung $\varepsilon(u, v, w, \rho)$ davon.

Die Momentum-Gleichungen sind dann:

$$\begin{array}{rcl} (U+\varepsilon u)_t & + & (U+\varepsilon u)(U+\varepsilon u)_x + \\ & + & (V+\varepsilon v)(U+\varepsilon u)_y + \\ & + & (W+\varepsilon w)(U+\varepsilon w)_z + \\ & + & \frac{1}{(R+\varepsilon\rho)}(G(R+\varepsilon\rho))_x = 0, \end{array} \tag{11.49}$$

mit zwei weiteren Gleichungen ähnlicher Form. Die Gleichung 11.49 wird jetzt nach ε entwickelt.

Der erste Term ist von ε unabhängig:

$$U_t + UU_x + VU_y + WU_z + \frac{1}{R}(G(R))_x$$

und dieser Term ist gleich Null, da nach Voraussetzung, (U, V, W, R) eine Lösungder Euler-Gleichung ist.

Der nächste Term ist linear in ε. Um dies zu berechnen geht man wie folgt vor. Es gilt

$$\frac{1}{R+\varepsilon\rho} = \frac{1}{R}\frac{1}{1+\varepsilon\rho/R} = \frac{1}{R}(1-\frac{\varepsilon\rho}{R}+0(\varepsilon^2))$$

$$\begin{array}{rcl} G(R+\varepsilon\rho) & = & G(R) + \varepsilon\rho\, G'(R) + 0(\varepsilon^2) \\ (G(R+\varepsilon\rho))_x & = & (G(R))_x + \varepsilon(\rho\, G'(R))_x + 0(\varepsilon^2) \\ & = & (G(R))_x + \varepsilon(\rho_x\, G'(R) + \rho(G'(R))_x) + 0(\varepsilon^2) \end{array}$$

so daß

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{R+\varepsilon\rho}(G(R+\varepsilon\rho))_x & = & \frac{1}{R}(G(R))_x + \\ & & + \ \varepsilon\left[\frac{1}{R}(\rho_x G'(R) + \rho(G'(R))_x) - \frac{\varepsilon\rho}{R^2}(G(R))_x + 0(\varepsilon^2)\right] \\ & = & \frac{1}{R}(G(R))_x + \frac{\varepsilon}{R}a^2\rho_x + \varepsilon F(R,\rho,R_x) + 0(\varepsilon^2). \end{array}$$

wo $F(R,\rho,R_x)$ nicht von der Ableitung von ρ abhängt.

Der nächste Term hat deshalb die Gestalt:

$$\varepsilon\left[u_t + Uu_x + Vu_y + Wu_z + \frac{a^2}{R}\rho_x + F(R,\rho,R_x,U,V,W)\right].$$

Es folgt, daß das linearisierte System für u, v, w und ρ folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & \frac{a^2}{R} \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 \\ R & 0 & 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix}_x + \\ + \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & \frac{a^2}{R} \\ 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & R & 0 & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix}_y + \\ + \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & a^2/R \\ 0 & 0 & R & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix}_z + \\ + C(U,V,W,R)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix} = 0,$$

wo $C(U,V,W,R)$ eine bekannt 4×4 Matrix ist.

Der Einfachheithalber betrachten wir jetzt den linearen Fall, wo die Lösung nur von x und t abhängt. D.h.,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & \frac{a^2}{R} \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 \\ R & 0 & 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \rho \end{pmatrix}_x = 0$$

oder

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}_t + A \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}_x &= 0 \\ v_t + U v_x &= 0 \\ w_t + U w_x &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} U & \frac{a^2}{R} \\ R & U \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ \frac{a\rho}{R} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}_t + \tilde{B} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}_x &= 0, \\ \tilde{B} &:= - \begin{pmatrix} U & a \\ a & U \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein <u>symmetrisches System!</u> Die Eigenwerte λ_+, λ_- von $\tilde{B}$ sind

$$-U \pm a, \ a > 0.$$

Die richtige Wahl der Randbedingungen ist deshalb von der Geschwindigkeit U abhängig.

1. <u>Überschallströmung</u> $(U > a)$
   Dann sind $\lambda_+, \lambda_- < 0$ und sowohl $\tilde{u}$ als auch $\tilde{\rho}$ sollte bei $x = 0$ festgeschrieben werden. Bei $x = 1$ sollten keine Randbedingungen gegeben werden.

2. <u>Unterschallströmung</u> $(U < a)$
   Dann ist $\lambda_+ > 0$ und $\lambda_- < 0$. Es sollte jeweils eine Randbedingung bei $x = 0$ und $x = 1$ gegeben werden.

Kapitel 12

Schwache Lösungen

Ist das Gebiet, auf dem eine Differentialgleichung (DGl) zu lösen ist, "hinreichend glatt" berandet, d.h. $\partial\Omega$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gelten bei elliptischen DGl Regularitätsaussagen der Art, daß bei Vorgabe glatter Daten (z.B. Randwerte) auch die Lösungen gewisse Glattheitseigenschaften erfüllen.

Bei hyperbolischen DGl ist eine solche Aussage i.allg. falsch. Als Beispiel hierfür betrachten wir den einfachen Fall der *Burgers Gleichung* in zwei Dimensionen:

Sei $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems.

$$\begin{aligned} uu_x + u_t &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Sei $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

(Siehe Abbildung 12.1.)
Um das Verhalten der Lösung zu studieren, müssen wir den Verlauf der *Charakteristiken* betrachten. Diese seien hier noch einmal definiert:

Definition 12.1 *1. Sei $L = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung k auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Das Hauptsymbol (Hauptteil) in $x \in \Omega$ ist definiert als*

$$\sigma_x(L,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

2. Ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ heißt charakteristisch für L in x, *falls*

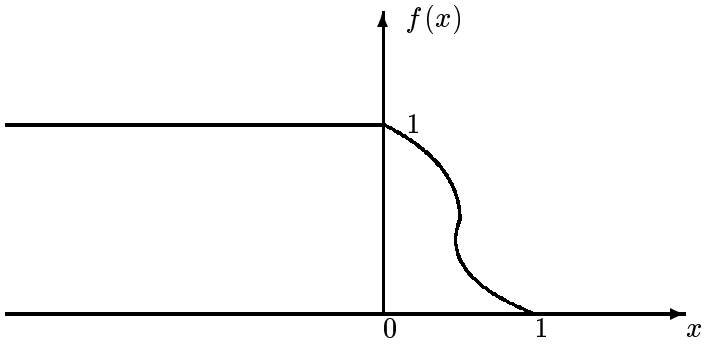


Abbildung 12.1:

$$\sigma_x(L,\xi) = 0$$

Die Menge aller $\xi \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\sigma_x(L,\xi) = 0$ *bezeichnen wir mit* $char_x(L)$.

Bemerkung 12.1 L heißt elliptisch zu x , falls $\text{char}_x(L) = \{0\}$.

Definition 12.2 *Eine Hyperebene* S *heißt* charakteristisch *bezüglich* L *in* x *, falls für den Normalenvektor* $n(x)$ *gilt:*

$$n(x) \in char_x(L) .$$

S *heißt* nichtcharakteristisch *, falls* S *an keinem Punkt* x *charakteristisch ist.*

Unsere Gleichung (12.1) ist eine eindimensionale partielle DGL der Form

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \partial_j u + bu = f \; , \tag{12.2}$$

wobei a_j, b und f $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen von x seien. Sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\text{char}_x(L) = \{\xi | \langle A(x), \xi \rangle = 0\} \; ,$$

d.h. $\text{char}_x(L)$ ist die zu A orthogonale Hyperebene. Eine Hyperebene S ist charakteristisch in x genau dann, wenn $A(x)$ tangential zu S in x ist.

Die Integralkurven des Vektorfeldes $A(x)$ heißen *charakteristische Kurven* der Gleichung (12.2). Sie sind Lösungskurven des folgenden Systems gewöhnlicher DGl:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) \Leftrightarrow \frac{dx_j}{dt} = a_j(x) \; , \; j = 1, \ldots, n \tag{12.3}$$

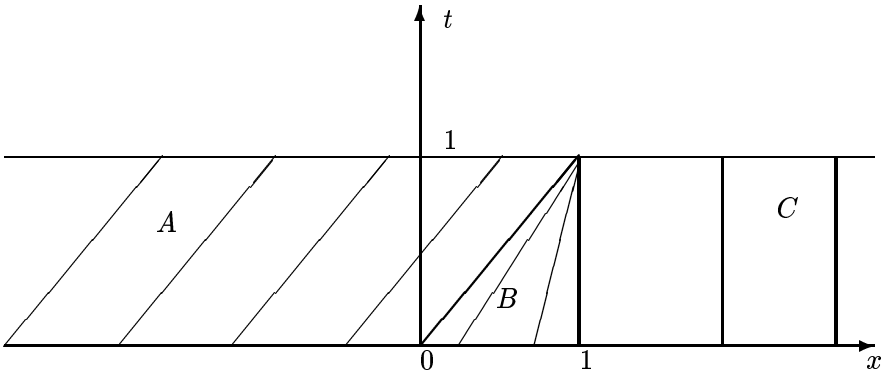


Abbildung 12.2:

Entlang dieser Kurven gilt für die Lösung von (12.2)

$$\frac{du}{dt} = \sum (\partial_j u)\, \frac{dx_j}{dt} = \sum\, a_j \partial_j u = f - bu\ . \tag{12.4}$$

Nehmen wir nun an, S sei nichtcharakteristisch. Dann geht durch jeden Punkt $x_0 \in S$ eine eindeutige Integralkurve von A , nämlich die Lösung von (12.3) mit dem Anfangswert $x(0) = x_0$. Entlang dieser Kurve ist die Lösung der partiellen DGl (12.2) einfach Lösung der gewöhnlichen DGl (12.4) mit dem Anfangswert $u(0) = f(x_0)$.
Somit ist unser Anfangswertproblem reduziert zu einem Anfangswertproblem für gewöhnliche DGl. Dieses Verfahren zur Lösung partieller DGl 1. Ordnung heißt auch *Charakteristikenverfahren.*

Sind die Koeffizienten a_j auch von u abhängig, so wird das Gleichungssystem (12.3) ergänzt:

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx_j}{dt} & = & a_j(x,u),\ 1 \le j \le n \\ \frac{du}{dt} & = & f(x,u) - bu. \end{array}$$

Wir bestimmen nun die Charakteristiken unseres Modellproblems. Es gilt:

$$\frac{dx}{ds} = u \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad \frac{du}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} \tag{12.5}$$

Die Anfangswerte "pflanzen" sich entlang der Charakteristiken fort. Wir haben also die Situation (siehe Abbildung 12.2):
Im Gebiet A haben die Charakteristiken die Steigung 1, also gilt in A: $u \equiv 1$.

In C haben die Charakteristiken die Steigung ∞ und es gilt: $u \equiv 0$ in C .
In dem Bereich B geht u vom Wert 1 über in den Wert 0, jedoch schrumpft das Intervall, indem der Übergang stattfinden kann, für $t \to 1$ auf 0 zusammen. In dem Punkt (1,1) ist

das Problem überbestimmt, es kann keine stetige Lösung existieren.

In dem Punkt (1.1) entsteht eine *Stoßwelle*. Da eine Lösung von (12.1) im klassischen Sinne nicht mehr existieren kann, ist es für weitere Untersuchungen erforderlich, den Lösungsbegriff zu modifizieren. Bei der folgenden Betrachtung der *schwachen Lösung* wenden wir uns einem einfachen linearen Modellproblem zu:

Sei - wie oben - $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die folgende DGl 1. Ordnung:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c \quad \text{für} \quad (x,y) \in \Omega \tag{12.6}$$

Mit der Bezeichnung aus Def. 11.1 läßt sich (12.6) auch schreiben als

$$Lu = c \quad \text{mit} \quad Lu = au_x + bu_y \tag{12.7}$$

Wir nehmen im folgenden an, daß u klassische Lösung von (12.7) ist, d.h. u ist stetig differenzierbar.
Für die Definition der schwachen Lösung benötigen wir sog. *Testfunktionen*. Als Testfunktionen wählen wir

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) | \text{ supp } \psi \text{ kompakt }, \text{ supp } \psi \subset\subset \Omega\} ,$$

wobei

$$\text{supp} \quad \psi = \{x \in \Omega | \psi(x) \neq 0\} .$$

Insbesondere gilt für $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\text{dist}(\text{supp } \varphi, \partial\Omega) > 0 ,$$

d.h. $\varphi \equiv 0$ in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$.
Aus der Gleichung (12.7) folgt nun:

$$\int_\Omega \varphi(Lu - c)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{12.8}$$

Wir führen nun den Begriff des *adjungierten* Differentialoperators ein.

Definition 12.3 *Sei L ein Differentialoperator der Ordnung k in der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator L^* der Ordnung k in Ω heißt* adjungiert zu L, *falls*

$$\int_\Omega (L^* f) \cdot g \, dx = \int_\Omega f(Lg)dx \quad \forall \ f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \forall \ g \in \mathcal{C}_0^k(\Omega) \tag{12.9}$$

Bemerkung 12.2 Für den linearen Differentialoperator aus Def. 11.1 gilt

$$L^*v = \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(c_\alpha(x)v) \ .$$

Als letztes Hilfsmittel benötigen wir den *Gaußschen Integralsatz*:

Satz 12.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $n : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset \Omega$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$:*

$$\int_\Omega \textit{div} \quad F(x)dx = \int_{\partial\Omega} < F(x), n(x) > d\ s \ .$$

Beweis: Siehe Infini III

Wir setzen nun

$$v := (au\varphi, bu\varphi) \ .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \text{div } v = (\varphi a)u_x + u(\varphi a)_x + (\varphi b)u_y + u(\varphi b)_y \\ \Rightarrow \quad & \text{div } v = \varphi Lu - uL^*\varphi \\ (12.7), (12.9) & \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \text{div } v \ dx &= \int_\Omega \varphi Lu - uL^*\varphi \ dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds = 0 \end{aligned} \tag{12.10}$$

da $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ gewählt war.
Aus (12.7) und (12.10) folgt nun:

$$\int_\Omega \varphi c \ dx = \int_\Omega uL^*\varphi \ dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{12.11}$$

Ist u klassische Lösung von (12.7), so gilt (12.11) für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Wir definieren nun:

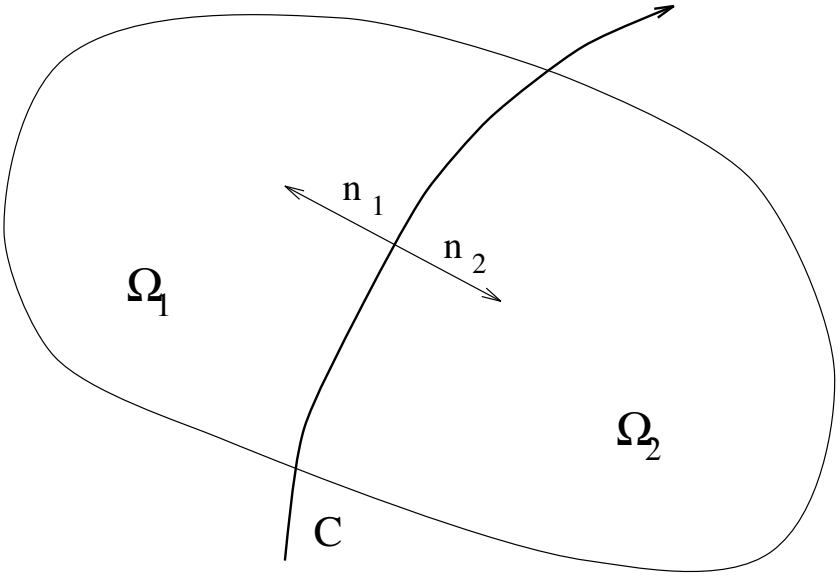


Abbildung 12.3: Das Gebiet Ω

Definition 12.4 u *heißt* schwache Lösung *von (12.7), falls* $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *gilt*

$$\int_\Omega uL^*\varphi \, dx = \int_\Omega \varphi c \, dx$$

Bemerkung 12.3

1. Aus der obigen Herleitung folgt, daß eine klassische Lösung auch schwache Lösung der DGl ist. Die Umkehrung ist natürlich nicht immer richtig.

2. Ist u schwache Lösung von (12.7) und $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dann ist u klassische Lösung.

Beweis von 2:
Aus (12.11) folgt in (12.10)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varphi(Lu - c)dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \\ &\Rightarrow \quad Lu = c \text{ , da } \quad \varphi \quad \text{beliebig} \end{aligned}$$ □

Wir betrachten nun das Problem (12.7) in dem Gebiet $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (siehe Abbildung 12.3) Die Kurve C zerlege Ω in die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2. Wir nehmen im folgenden an:

1. u ist schwache Lösung von (12.7) in Ω .

2. u sei klassische Lösung in $\Omega \backslash C$.

Unser Ziel besteht nun darin, Eigenschaften der Kurve C zu untersuchen.

Da u nach Voraussetzung schwache Lösung von (12.7) in Ω ist, gilt

$$\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (uL^*\varphi - \varphi c)dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{12.12}$$

Da u klassische Lösung in Ω_i , $i = 1, 2$, dürfen wir den Gaußschen Integralsatz anwenden:

$$\int\limits_{\Omega_i} uL^*\varphi - c\varphi\ dx = \int\limits_{\Omega_i} \varphi Lu - c\varphi\ dx - \int\limits_{\partial\Omega_i} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds \tag{12.13}$$

Es folgt mit (12.12):

$$0 = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi(Lu - c)dx - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega_i} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds \tag{12.14}$$

Nach Voraussetzung ist u klassische Lösung in Ω_i . Dann folgt aus (12.14):

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega_i} \varphi u \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, n \rangle ds = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{12.15}$$

Da $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ gewählt wird, ist in (12.15) nur die Integration über die Kurve C durchzuführen. Sei s der Kurvenparameter, d.h. Punkte der Kurve lassen sich schreiben als $(x(s), y(s))$. Dann gilt für die Normalen in Ω:

$$n_i = \pm \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}$$

In den Integralen über den Rand taucht die äußere Normale auf. In unserem Fall gilt:

$$n_1 = -n_2$$

Sei ψ eine auf Ω definierte Funktion und $(x(s), y(s)) \in C$. Der Sprung von ψ auf C wird erklärt durch:

$$\begin{aligned} [\psi](s) &:= \lim_{\substack{(x,y)\to(x(s),y(s)) \\ (x,y)\in\Omega_2}} \psi(x,y) - \lim_{\substack{(x,y)\to(x(s),y(s)) \\ (x,y)\in\Omega_1}} \psi(x,y) \\ &\equiv \psi_2 - \psi_1 \end{aligned} \tag{12.16}$$

Mit dieser Bezeichnung und den vorangegangenen Bemerkungen können wir (12.15) schreiben als

$$\int\limits_C \varphi \left([au]\frac{\partial y}{\partial s} - [bu]\frac{\partial x}{\partial s} \right) d\sigma = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{12.17}$$

Da $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ beliebig ist, folgt aus (12.17):

$$[au]\frac{\partial y}{\partial s} - [bu]\frac{\partial x}{\partial s} = 0 \tag{12.18}$$

Sind a, b stetige Funktionen auf Ω , so erhalten wir die Bedingung

$$[u]\left(a\,\frac{\partial y}{\partial s} - b\,\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0 \quad \text{auf} \quad C \tag{12.19}$$

Ist u unstetig, d.h. $[u] \neq 0$, so gilt

$$a\,\frac{\partial y}{\partial s} - b\,\frac{\partial x}{\partial s} = 0\ , \tag{12.20}$$

d.h. C ist eine Charakteristik.

Zum Schlußbetrachten wir noch ein Beispiel.

Sei

$$u(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x - y > 0 \\ 1 & \text{für} \quad x - y \leq 0 \end{cases}$$

u ist eine schwache Lösung der Gleichung

$$Lu = u_x + u_y = 0\ ,$$

denn

1. u ist klassische Lösung der DGl in Ω_1 und Ω_2
2. die einzige Unstetigkeit von u ist entlang der Charakteristik C

Kapitel 13

Die Burger-Gleichung

Wir hatten den Begriff der schwachen Lösung bei linearen hyperbolischen Differentialgleichungen (DGl) eingeführt. Die Theorie der schwachen Lösungen ist jedoch insbesondere bei der Betrachtung nichtlinearer DGl von Bedeutung. In der heutigen Vorlesung beschäftigen wir uns mit nichtlinearen DGl vom Typ

$$a_x + b_y = 0 \ , \tag{13.1}$$

wobei a und b zweimal stetig differenzierbare Funktionen von x, y und u sind.

Bemerkung 13.1 Die Gestalt von (13.1) wird als *Erhaltungsform* bezeichnet, da Integration bzgl. x von x_1 nach x_2

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_1}^{x_2} b \, dx = -a|_{x=x_2} + a|_{x=x_1} \tag{13.2}$$

liefert.

Betrachten wir y als die Zeitvariable, so bedeutet (13.2), daß die zeitliche Änderung der Größe b proportional zur Differenz des "Flusses" a in den Endpunkten x_1 und x_2 ist. Viele physikalische Erhaltungssätze lassen sich in dieser Form schreiben (z.B. Masseerhaltung bei einer strömenden Flüssigkeit).
Anhand eines einfachen (stetigen) Modells für den Verkehrsflußauf einer Einbahnstraße (ohne Abzweigungen) wollen wir Gleichungen vom Typ (13.1) näher betrachten:

Wir nehmen an, der Verkehr bewege sich in positiver x-Richtung. Sei $\rho(x,t)$ die Verkehrsdichte (Anzahl der Autos pro Einheitslänge) im Punkt x zum Zeitpunkt t, und sei $q(x,t)$ die Anzahl der Autos, die pro Einheitszeit den Punkt x passieren.

Die Gesamtzahl der Fahrzeuge im Intervall $[x_1, x_2]$ ist durch

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx$$

gegeben. Also wird die Zu- oder Abnahme der Autos zwischen den Kontrollpunkten x_1 und x_2 durch

$$\Delta A = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho_t \, dx \; .$$

beschrieben. Diese Größe muß der Differenz von q in x_1 und x_2 entsprechen, falls keine Autofabrik an der Straße liegt oder eine sonstige Quelle oder Senke im Dichtefeld vorhanden ist. Es gilt somit für jeden Zeitpunkt t:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_t \, dx = q(x_1, t) - q(x_2, t) = -\int_{x_1}^{x_2} q_x \, dx \; .$$

Da x_1, x_2 beliebig gewählt werden können, muß gelten:

$$\rho_t + q_x = 0 \tag{13.3}$$

Um die DGl (13.3) weiter behandeln zu können, benötigen wir eine zusätzliche Beziehung zwischen ρ und q.

Ein "vernünftiges" Modell für die Verkehrsgeschwindigkeit v ist durch

$$v(x,t) = c(1 - \rho/\rho_0) \; , \tag{13.4}$$

gegeben, wobei ρ_0 die maximale Dichte der Autos pro Einheitsintervall (d.h. Stoßstange an Stoßstange) beschreibt. Gleichung (13.4) besagt, daß die Geschwindigkeit v maximal wird, wenn die Straße leer ist $(\rho = 0)$ und der Verkehr zum Erliegen kommt, wenn $\rho = \rho_0$ ist. Die Konstante c ist die (von der kw-Zahl des Fahrzeugs abhängige) Maximalgeschwindigkeit.

Die Anzahl der Fahrzeuge, die den Punkt x pro Zeiteinheit passieren, ist dann gegeben durch

$$q = \rho \cdot v = \rho c(1 - \rho/\rho_0) \; . \tag{13.5}$$

Wir setzen

$$u := c(1 - 2\rho/\rho_0) \; .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{2c}{\rho_0} \, \rho_t \\ q_x &= c\rho_x(1 - 2\rho/\rho_0) = u\rho_x \; . \end{aligned} \tag{13.6}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \rho_t + q_x &= -u_t \frac{\rho_0}{2c} + u\rho_x \\ \Rightarrow \; \rho_t + q_x &= -\frac{\rho_0}{2c}(u_t + uu_x) \; . \end{aligned} \tag{13.7}$$

Aus (13.3) ergibt sich dann die DGl

$$u_t + uu_x = 0 \ . \tag{13.8}$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der Burger Gleichung

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

aus der Gasdynamik, wenn die Viskosität ν verschwindet.

Bemerkung 13.2 Die einzigen $\mathcal{C}^1$-Lösungen von Gleichung (13.8) sind Funktionen, die für alle $t > 0$ in x-Richtung monoton wachsend sind (bei festem t).

Beweis: Sei $u \in \mathcal{C}^1$ und sei (x_0, t_0) , $t_0 > 0$ beliebig. Wir betrachten die eindeutige Lösungskurve der DGl

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t) \qquad x(t_0) = x_0 \ . \tag{13.9}$$

Diese Kurve ist eine Charakteristik von (13.8), denn es gilt

$$\frac{du(x(t),t)}{dt} = u_x \, \frac{dx}{dt} + u_t = u_x u + u_t = 0 \ . \tag{13.10}$$

u ist entlang von Charakteristiken konstant, also hat wg. (13.10) jede Charakteristik eine konstante Steigung, d.h. die Charakteristiken sind Gerade mit der Geschwindigkeit (= reziproke Steigung) u.

Angenommen u wächst nicht monoton für $t \geq 0$. Es gibt also $x_1 < x_2$ mit

$$u(x_1, t) > u(x_2, t) \ .$$

Dann ist die Steigung der Charakteristiken in x_1 kleiner als die in x_2, die Geraden schneiden sich in einem Punkt für $t > 0$. Dies kann aber nicht sein, da nach Voraussetzung $u \in \mathcal{C}^1$ gewählt war.

Beispiel 13.1 (s. Kapitel 11 ("Schwache Lösungen"))

Physikalisch relevante Probleme erfüllen die Bedingung aus der Bemerkung nicht. Betrachten wir unser Verkehrsmodell: Falls $u(x_1, t) < u(x_2, t) \quad \forall t > 0$ gelten soll, so heißt das

$$\rho(x_1, t) > \rho(x_2, t) \quad \text{für} \quad x_1 < x_2 \ ,$$

d.h. die Dichte des Verkehrs nimmt für größer werdendes x ab, ein Verkehrsproblem wg. verstopfter Straßen entfällt.

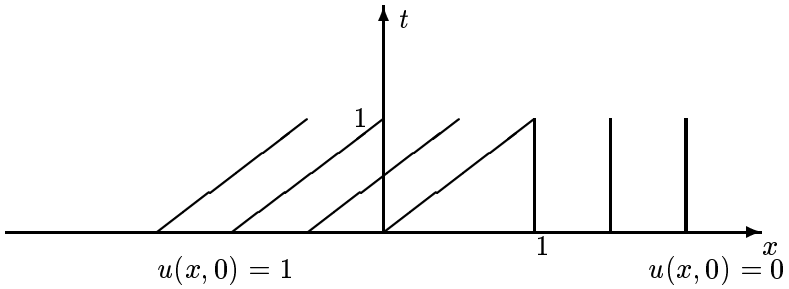


Abbildung 13.1:

Wenn wir die interessanten Probleme behandeln wollen, ist der klassische Lösungsbegriff sinnlos. Wir sind also gezwungen, den Lösungsbegriff zu verallgemeinern und die schwachen Lösungen zu betrachten.
Zur Bestimmung der schwachen Lösung von (13.8) betrachten wir die Gleichung in ihrer Erhaltungsform:

$$\left(\frac{1}{2}\,u^2\right)_x + u_t = 0\ . \tag{13.11}$$

Allgemeiner können wir die Erhaltungsform schreiben als

$$(f(u))_x + u_t = 0\ . \tag{13.12}$$

Wie in Kapitel 12 wird zur Bestimmung der schwachen Lösung (13.12) mit einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ multipliziert und integriert. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes erhalten wir:

$$\int\limits_{\Omega} f(u)\varphi_x + u\varphi_t d\mu = 0\ . \tag{13.13}$$

Wir nennen eine Funktion u, die (13.13) erfüllt, eine schwache Lösung von (13.12).
Wir nehmen nun an, u sei eine schwache Lösung von (13.12) und u sei stetig differenzierbar außerhalb einer Kurve C. In Analogie zu Kapitel 12 erhalten wir dann

$$\int\limits_{C} \varphi\left([f(u)]\frac{dt}{ds} - [u]\frac{dx}{ds}\right) ds = 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{13.14}$$

wobei wir mit $[\cdot]$ die Unstetigkeit über C bezeichnen wollen, z.B.

$$[u] = u_L - u_R\ ,$$

wobei u_L der Wert von u links von C sei und u_R der Wert von u rechts der Kurve C.
Auf der Kurve C muß also die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{dx}{ds}\,[u] = [f(u)]\frac{dt}{ds}\ . \tag{13.15}$$

Bemerkung 13.3 Bei linearen hyperbolischen DGl gilt, daß die schwache Lösung nur über Charakteristiken Unstetigkeiten aufweisen kann. (13.15) definiert keine Charakteristik, da die Argumente von $[\cdot]$ von u abhängig sind.
Wir bezeichnen die durch (13.15) bestimmte Kurve als *Stoßwelle*. Die Bedingung (13.15) heißt "Sprung-Bedingung" bzw. in der Gasdynamik die "Rankine-Hugoniot-Bedingung".

Bemerkung 13.4 Bei sehr schwachen Stoßwellen ($[u]$ klein) fallen Stoßwelle und Charakteristik fast zusammen, denn es gilt

$$\frac{dx}{ds} - f'(u)\frac{dt}{ds} \approx \frac{dx}{ds} - \frac{[f(u)]}{[u]}\,\frac{dt}{ds} = 0\ .$$

Die Größe $s := \frac{dx}{dt}$ bezeichnen wir als die Geschwindigkeit der Stoßwelle. Es gilt:

$$s = \frac{dx}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]}\ . \tag{13.16}$$

Durch die Gleichung (13.16) ist die Größe der Unstetigkeit und die Geschwindigkeit der Stoßwelle miteinander gekoppelt.

Beispiel 13.2 Betrachten wir die Burger Gleichung in der Erhaltungsform (13.11). Dann erhalten wir für die Geschwindigkeit der Stoßwelle

$$s = \frac{1}{2}\,\frac{u_L^2 - u_R^2}{u_L - u_R} = \frac{1}{2}(u_L + u_R)\ .$$

Die Erweiterung des Lösungsbegriffs auf schwache Lösungen ist nicht mathematischer Selbstzweck, sondern ist für die physikalische Modellbildung, z.B. in der Gasdynamik, äußerst nützlich. Mit Hilfe der schwachen Lösungen kann man Phänomene beschreiben, deren Lösung, abgesehen von einer schmalen Übergangsregion, in den zwei angrenzenden Gebieten auf einfache Weise zu erhalten ist und die dort auch beliebig glatt ist.

Im folgenden wollen wir anhand einiger Beispiele Eigenschaften von Stoßwellen untersuchen. O.E. setzen wir $C = 1$.

Beispiel 13.3 *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} uu_x + u_t &= 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für}\quad x \le 0 \\ 1-x & \textit{für}\quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{für}\quad x \ge 1 \end{cases}$$

Der Charakteristikenverlauf ist in den Abbildungen (13.2) und (13.3) dargestellt: Im Punkt (1,1) entsteht eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}$. □

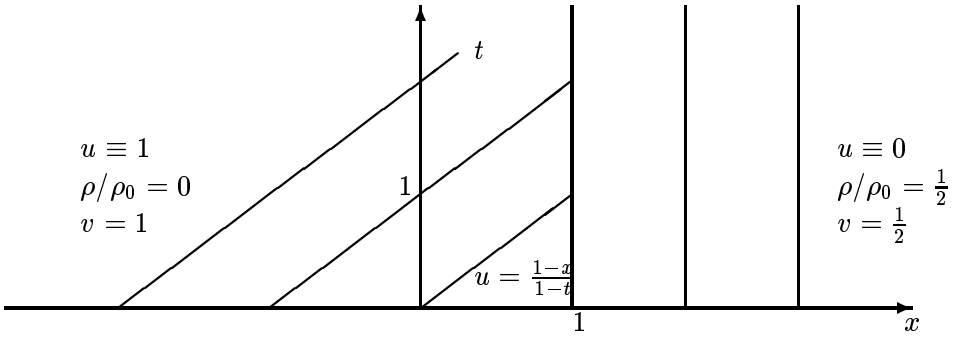


Abbildung 13.2:

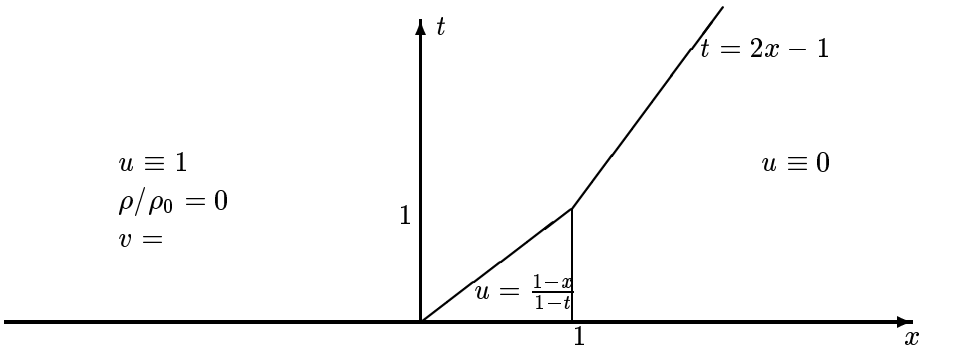


Abbildung 13.3:

Beispiel 13.4 *Als weiteres Beispiel betrachten wir unser Verkehrsmodell mit den Anfangsbedingungen*

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x \leq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Die Lösung wird in Abbildung (13.4) gezeigt:
Aus dem Verlauf der Charakteristiken ist ersichtlich, daß eine Unstetigkeit entstehen muß. Für die Kurve C muß gelten (siehe (13.16))

$$s = \frac{1}{2}\,. \qquad \square$$

In dem Verkehrsmodell ist eine Stoßwelle durch eine scharfe Unstetigkeit der Dichte ρ und folglich der Geschwindigkeit v der Autos gekennzeichnet. Die Stoßwelle entsteht, wenn der zunächst frei fahrende Verkehr auf das Ende eines Staus auftrifft. $\frac{dx}{dt}$ gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich das Ende der Schlange bewegt.

Wir haben bereits bemerkt, daß Stoßwellen für $t > 0$ nur dann entstehen können, wenn u eine monoton fallende Funktion ist, d.h. in unserem Beispiel, wenn die Verkehrsdichte ρ anwächst.
Die Erweiterung des Lösungsbegriffs auf schwache Lösungen hat den Nachteil, daß die Eindeutigkeit verloren geht. Dies sieht man allein daran, daß die Wahl der Erhaltungsform

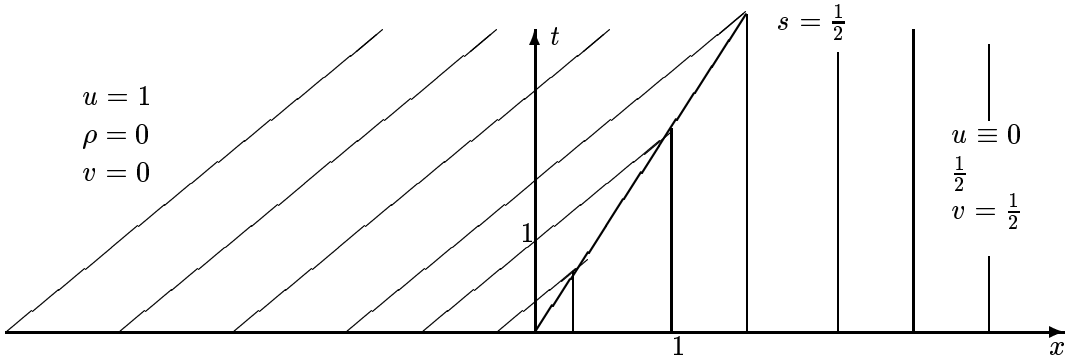


Abbildung 13.4:

der DGl nicht eindeutig ist. Eine weitere Erhaltungsform für die Burger Gleichung ist z.B. gegeben durch

$$\begin{aligned} v_t + (e^v)_x &= 0 \\ v &:= \log\, u \end{aligned} \tag{13.17}$$

Für die Geschwindigkeit der Stoßwelle gilt dann

$$s = \frac{dx}{dt} = \frac{u_L - u_R}{\log(u_L/u_R)}\ . \tag{13.18}$$

Der Vergleich mit (13.16) zeigt, daß aus verschiedenen Erhaltungsformen verschiedene Stoßwellen resultieren. Die Wahl der *richtigen* Erhaltungsform ist im Zusammenhang mit der Anwendung zu treffen. (Beispiel Physik: Energieerhaltung, Massenerhaltung etc.)

Es ist jedoch auch bei Wahl der richtigen Erhaltungsform möglich, daß zwei schwache Lösungen zulässig sind. Wir wählen die Erhaltungsform (13.11) und betrachten die Burger Gleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{13.19}$$

Wie im Beispiel (13.4) erhalten wir eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $s = \frac{1}{2}$, die in $(0,0)$ beginnt (siehe Abbildung 13.5).
Diese Lösung ist physikalisch wenig sinnvoll, da sie bedeutet, daß die Fahrzeuge sich links mit der Geschwindigkeit $v_L = \frac{1}{2}$ bewegen, obwohl rechts die Straße leer ist $(\rho_R = 0)$.

Eine weitere Lösung mit den Anfangswerten (13.19) ist in Abbildung (13.6) zu sehen.
Diese Lösung ist stetig, aber nicht stetig differenzierbar. Die Unstetigkeiten der Ableitung fallen mit zwei Charakteristiken zusammen, die man als "schwache Stoßwellen"

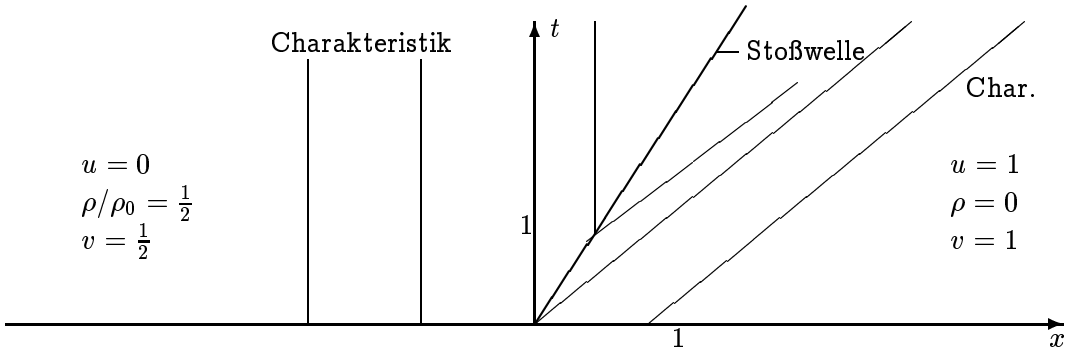


Abbildung 13.5:

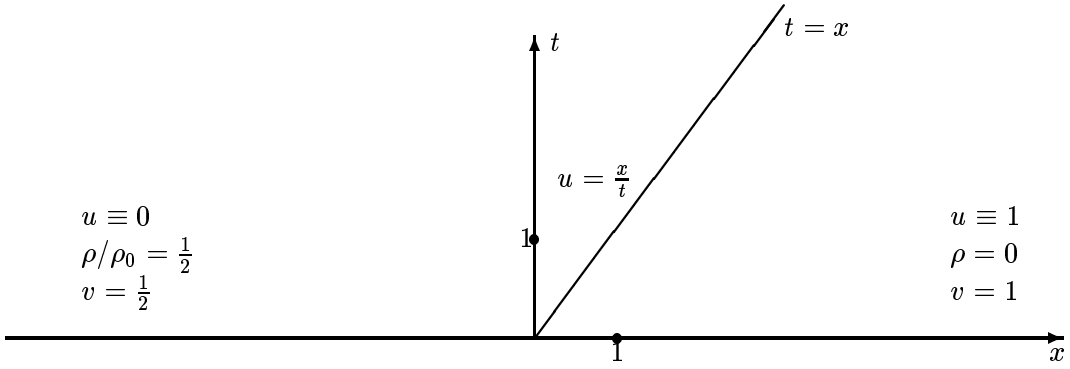


Abbildung 13.6:

bezeichnen könnte.

Um Eindeutigkeit der schwachen Lösung zu erreichen, ist also eine weitere Bedingung erforderlich. Für die Burger Gleichung lautet diese Nebenbedingung für die Stoßwelle:

$$u_L \geq \frac{dx}{dt} \geq u_R \ . \tag{13.20}$$

Diese Bedingung entstammt wieder der Anwendung. Für die Gasdynamik ist (13.20) damit äquivalent, daß die Entropie über eine Stoßwelle zunehmen muß. Deshalb nennt man (13.20) auch die *Entropiebedingung*.

Eine andere Begründung für eine Bedingung dieser Art ist, daß für $t > 0$ durch (13.20) gewährleistet ist, daß jeder Punkt der Stoßwelle durch die Anfangsbedingungen auf

beiden Seiten beeinflußt wird (d.h. die Charakteristiken laufen in die Stoßwelle hinein).

Literatur

Debnath, Lokenath: Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhäuser, 1997.

Renardy, M., **Rogers**, R.C.: An Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 1993.

Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer, 1994.

Williams, W.E.: Partial Differential Equations. Oxford University Press, 1980

Kapitel 14

Systeme von Differentialgleichungen in Erhaltungsform

14.1 Einführung

Wir untersuchen quasi-lineare Erhaltungssysteme:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x = 0 \ , \tag{14.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,t) \in \mathbb{R}^n \quad &, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{f} \in C^2(\Omega) \quad &, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \ . \end{aligned} \tag{14.2}$$

Die Erforschung solcher Systeme ist zur Zeit höchst aktuell.

14.2 Beispiele:

14.2.1 Die Burgersche Gleichung [Smoller, S. 241]

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{1}{2}\, u^2\right)_x &= 0 \\ \text{oder} & \\ u_t + u u_x &= 0 \end{aligned} \tag{14.3}$$

14.2.2 Die Eulersche Gleichung für Strömungen [Smoller, S. 240, 347, 322]

$$\begin{array}{lcll} \rho_t + (\rho u)_x & = & 0 & \text{(Erhaltung von Masse)} \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x & = & 0 & \text{(Erhaltung von Momentum)} \\ \left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + e\right)\right]_t + \left[\rho u\left(\frac{1}{2}\,u^2 + e\right) + pu\right]_x & = & 0 & \text{(Erhaltung von Energie)} \end{array} \tag{14.4}$$

wobei

$$\begin{array}{rcll} i & := & e + p/\rho & \text{(Enthalpie)} \\ e & := & e(v,s) & \text{(Gegebene Funktion)} \\ v & := & 1/\rho & \\ p & := & -e_v & \\ T & := & e_s & \end{array}$$

und

$$de = Tds - pdv\ .$$

Die Gleichungen (11.4) lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{rcl} \rho_t + (\rho u)_x & = & 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x & = & 0 \\ s_t + u s_x & = & 0 \end{array} \tag{14.5}$$

oder

$$U_t + A(U)U_x = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix} \quad A(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ p_\rho/\rho & u & p_s/\rho \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \tag{14.6}$$

14.2.3 Das p-System [Smoller, S. 306]

$$\begin{array}{rcl} v_t - u_x & = & 0 \\ u_t + (p(v))_x & = & 0 \\ t > 0 \quad , & & x \in \mathbb{R} \end{array} \tag{14.7}$$

wobei

$$p' < 0 \ , \ p'' > 0 \ .$$

Wenn $p(v) = kv^{-\gamma}$, erhalten wir die isentropischen gasdynamischen Gleichungen mit Lagrangeschen Koordinaten.

14.3 Einige Grundbegriffe

Definition: Die Gleichung (11.1) ist *hyperbolisch*, falls die Funktionalmatrix $df(u) := \frac{\partial f}{\partial u}$ n verschiedene reelle Eigenwerte besitzt:

$$\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_n(u) \ . \tag{14.8}$$

Die zugehörigen rechten und linken Eigenvektoren werden mit $r_i(u)$ bzw. $\ell_i(u)$ bezeichnet.

Beispiel:
Für das System (11.6) gilt

$$\det(\lambda I - A(U)) = (\lambda - u)[(\lambda - u)^2 - c^2]$$

mit Eigenwerten:

$$\lambda = u \ , \ u \pm c \tag{14.9}$$

wobei

$$\begin{aligned} c &= \text{Schallgewchwindigkeit} \\ &:= \sqrt{p_\rho} \ . \end{aligned}$$

D.h., Störungen werden entweder mit der Strömung getragen oder mit Schallgeschwindigkeit vorwärts und rückwärts fortgepflanzt.

Definition: Eine beschränkte meßbare Funktion u ist eine (schwache) Lösung (Gleichung (11.1)) mit Anfangsdaten $u = u_0$, falls

$$\iint\limits_{t \geq 0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx \ dt + \int\limits_{t=0} u_0 \phi dx = 0 \tag{14.10}$$

für alle Testfunktionen ϕ. (D.h. $\phi \in C^2(\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ und ϕ hat einen kompakten Träger.)

14.4 Das Lax-Wendroff-Verfahren

Für Gleichungen in Erhaltungsform ist das Lax-Wendroff-Verfahren im besonderen geeignet. Wie üblich wird ein Gitter (x_i, t_j) , $x_i = x_0 + i\Delta x$, $t_j = j\Delta t$ eingeführt. Die Herleitung dieses Verfahrens besteht aus mehreren Schritten.

1. Taylorentwicklung für $u_{i,j}$. Dabei werden die partiellen Ableitungen nach t in partielle Ableitungen nach x unter Berücksichtigung der partiellen Differentialgleichung umgewandelt.

2. Die partiellen Ableitungen werden approximiert. Man erhält dadurch das normale Lax-Wendroff-Verfahren.

3. Durch Umschreiben der partiellen Ableitungen erhält man das *Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren*, das für die Berechnungen einige Vorteile bietet.

Diese Schritte werden jetzt weiter erläutert:

Schritt 1

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x_i, t_{j+1}) &= \mathbf{u}_{i,j+1} = \mathbf{u}_{i,j} + \Delta t \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{i,j} + \left.\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\right|_{i,j} + O((\Delta t)^3) \\
&= \mathbf{u}_{i,j} - \Delta t(\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x|_{i,j} + \left.\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(A(x)\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{u}))\right|_{i,j} + O((\Delta t)^3)
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_t &= -(\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x|_{i,j} \,, \\
\mathbf{u}_{tt} &= -\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\,\mathbf{f}(\mathbf{u})\right|_{i,j} = -\frac{\partial}{\partial x}\left.\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right|_{i,j} \,, \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{f}(\mathbf{u})\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{f}(\mathbf{u})\right)
\end{aligned}$$

mit

$$A := \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \,.$$

Schritt 2

Approximieren wir nun die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x}\right|_{i,j} &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1,j}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})_{i-1,j})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \ , \\
&= \frac{\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}}{2\Delta x} \\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(A(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{f}(\mathbf{u})\right)\right|_{i,j} \\
&= \frac{1}{\Delta x}\left[A(\mathbf{u}(x_{i+1/2},t_j))\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{f}(\mathbf{u})\right)_{i+1/2,j}\right. \\
&\quad \left. - A(\mathbf{u}(x_{i-1/2},t_j))\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{f}(\mathbf{u})\right)_{i-1/2,j}\right]
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Lax-Wendroff-Verfahren.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i,j+1} \doteq\ & \mathbf{u}_{i,j} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}) + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} \\
& \left[A_{i+1/2}\,(\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}) - A_{i-1/2,j}\,(\mathbf{f}_{i,j} - \mathbf{f}_{i-1,j})\right]
\end{aligned} \tag{14.11}$$

wobei

$$A_{i+1/2,j} := \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2,j})}{\partial \mathbf{u}} \tag{14.12}$$

und

$$\mathbf{u}_{i+1/2,j} := \frac{1}{2}\,(\mathbf{u}_{i+1,j} + \mathbf{u}_{i,j}) = \mathbf{u}(x_{i+1/2},t_j) + O(\Delta x^2) \tag{14.13}$$

da

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i+1,j} &= \mathbf{u}_{i+1/2,j} + \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right|_{i+1/2,j} + O((\Delta x)^2) \ , \\
\mathbf{u}_{i,j} &= \mathbf{u}_{i+1/2,j} - \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right|_{i,j} + O((\Delta x)^2).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Das Lax-Wendroff-Verfahren hat einen lokalen Fehler der Ordnung $O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2)$.

14.5 Das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren

Sei

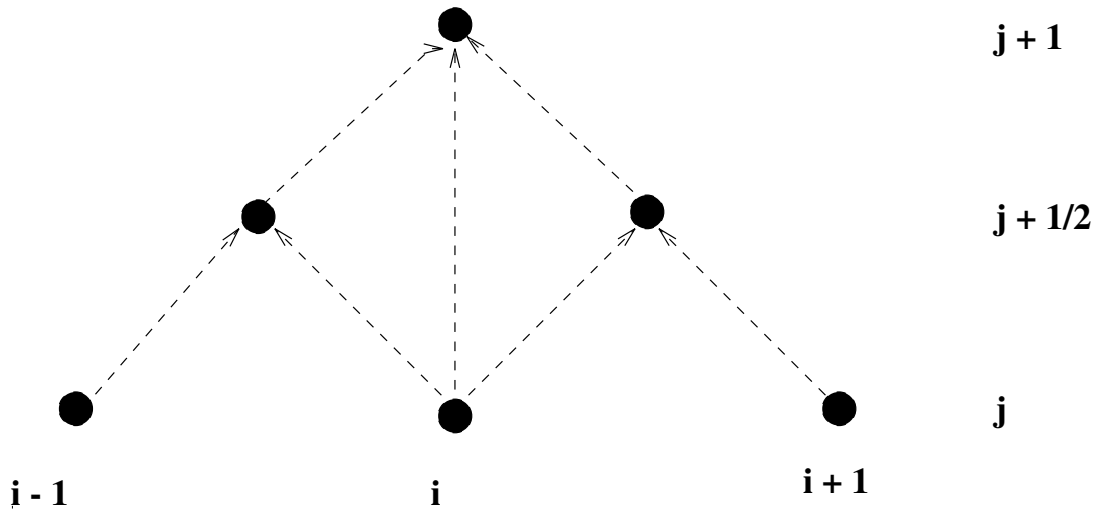


Abbildung 14.1: Das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren

$$\mathbf{u}_{i+1/2,j+1/2} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{i+1,j} + \mathbf{u}_{i,j}\right) - \frac{(\Delta t)}{2(\Delta x)}\left(\mathbf{f}_{i+1,j} - \mathbf{f}_{i,j}\right) \tag{14.14}$$

$$\mathbf{u}_{i-1/2,j+1/2} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{u}_{i,j}\right) - \frac{(\Delta t)}{2(\Delta x)}\left(\mathbf{f}_{i,j} - \mathbf{f}_{i-1,j}\right) \tag{14.15}$$

Damit erhält man

$$\mathbf{u}_{i,j+1} = \mathbf{u}_{i,j} - \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)}\left(\mathbf{f}_{i+1/2,j+1/2} - \mathbf{f}_{i-1/2,j+1/2}\right), \tag{14.16}$$

das Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren (siehe Abbildung 14.1).
Dieses Verfahren hat auch den Fehler $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$. Die Zwischenwerte $\mathbf{u}_{i-1/2,j+1/2}$ und $\mathbf{u}_{i+1/2,j-1/2}$ haben zwar einen Fehler der Ordnung $O(\Delta t)$, aber dieser Fehler wird gelöscht in dem Ausdruck für $\mathbf{u}_{i,j+1}$.

14.6 Stabilität des Lax-Wendroff-Verfahrens

Sowohl das Lax-Wendroff-Verfahren (11.11) als auch seine Zweischritt- Verwandte (11.16) haben die Gestalt

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{i,j+1} &= \mathbf{u}_{i,j} - \frac{1}{2} A \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i-1,j}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(A \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}\right),\end{aligned}$$

falls

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \ .$$

Die Verstärkungsmatrix G ist

$$G(\xi) = I - i \, \frac{\Delta t}{\Delta x} \, A \, \sin \, \alpha - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \, A \right)^2 \cdot (1 - \cos \, \alpha)$$

mit

$$\alpha := \xi \, \Delta x \ .$$

Sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist

$$\lambda_G = 1 - i\lambda \, \frac{\Delta t}{\Delta x} \, \sin \, \alpha - \left(\lambda \, \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1 - \cos \, \alpha)$$

ein Eigenwert von G. Es gilt

$$|\lambda_G| < 1$$

genau dann, wenn

$$\left| \lambda \, \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1 \ ,$$

und dies ist die notwendige Bedingung von Neumann für das Verfahren.
Es kann gezeigt werden, daß diese Bedingung für Konvergenz auch hinreichend ist.

14.7 Neue Methoden

Es gibt mehrere neue Methoden für hyperbolische Gleichungen in Erhaltungsform:

1. Die Methode von Roe
2. Die Methode von Godunov
3. Monoton Methoden
4. TVD Methoden
5. 'Flux Limited'Methoden

Wir verweisen auf die Literatur:

a) **Gustafsson, Kreiss und Oliger**: Time Dependent Problems and Difference Methods.Wiley 1995.

b) **Harten**, A.: On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes, SIAM J. Numer. Anal., 21, 1984, 1-23.

c) **Lax**, P.D.: Hyperbolic Systems of Conservtion Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, SIAM, Philadelphia, 1972.

d) **Leveque**: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser, 1990.

e) **Majda**, A.: Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables, Springer 1984.

f) **Kröner**: Numerical Schemes for Conservation Laws. Teubner, John Wiley & Sons, 1997.

g) **Smoller**, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer 1983. Kapitel 15.

h) **Sonar**: Mehrdimensionale ENO-Verfahren. Teubner, 1997.

Um auf den Geschmack solcher Ergebnisse zu kommen, zitieren wir einige Sätze aus dem Buch von Kröner:

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Sei $\{k_m\}$ und $\{h_m\}$ Folgen mit $k_m \to 0$, $h_m \to 0$ für $m \to \infty$. Man setzt
$\Delta t = k_m,\ \Delta x = h_m$

Als Startwerte für die numerische Approximation benutzen wir:

$$u_i^0 := \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x)dx$$

Die numerische Approximation u_i^n wird durch

$$u_i^{n+1} := u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)]$$

definiert. Hier ist g eine "Flußfunktion" mit $g(u, u) = f(u)$.

Beispiel 14.1 *(Das Engquist-Osher Schema)*

$$\begin{aligned} f^+(u) &:= f_{(0)} + \int_0^u \max(f'(s), 0)ds \\ f^-(u) &:= \int_0^u \min(f'(s), 0)ds \end{aligned}$$

so daß

a) $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$

b) f^+ *ist monoton steigend,* f^- *monoton fallend*

(Diese Zerlegung von f ist immer möglich, wenn f von beschränkter Variation ist - siehe I.P. Natanson, Theorie der Funktionen einer rellen Veränderlichen, Akademie Verlag, 1954, S. 205).

Dann wird folgenderweise definiert:

$$g(v, w) = f^+(v) + f^-(w). \qquad \square$$

Die Gitterfunktion u_i^n wird für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ definiert:

$$u_n(x, t) := u_i^n \text{ für } n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \text{ und } (i - \frac{1}{2})\Delta x < x \leq (i + \frac{1}{2})\Delta x.$$

Satz 14.1 *(Lax-Wendroff)*
Sei $g \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$. *Es existiere eine Konstante* K *mit*

$$\sup_m \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |u_m(x, t)| \leq K$$

und $u_m \to u$ *fast überall in* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *für* $m \to \infty$.

Dann ist u eine schwache Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad &\text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{aligned}$$

Beweis: Siehe Kröner, S. 54.

Definition: Für $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die *totale Variation* von v,

$$TV_{[a,b]}(v) := \sup_{a=x_0<x_1<x_2\ldots\leq x_n=b} \sum_{k=0}^{n} |(v(x_{R+1}) - v(x_R)|$$

$\square$

Satz 14.2 *Sei $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, mit $TV(u_0) < \infty$. Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, und $g(v,w)$ mononton steigend in v und monoton fallend in w (z.B. das Engquist-Osher Schema). Sei L eine Lipschitz Konstante für g. Sei*

$$2(1-0)\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot L \leq 1$$

Sei $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{k_m}{h_m} = \lambda$, eine Konstante.

Dann konvergiert u_m gegen $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_x \mathbb{R}^+)$. u ist eine schwache Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

und u erfüllt die Entropiebedingung.

Beweis: Siehe Kröner, S. 71.

Kapitel 15

Der Äquivalenzsatz von Lax für Anfangswertaufgaben

15.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird der berühmte Satz von Lax für Anfangswertaufgaben (Lax und Richtmyer [1956]) bewiesen, nämlich, daß unter bestimmten Voraussetzungen Stabilität $\Longleftrightarrow$ Konvergenz.

Bemerkung 15.1 Dieses Kapitel ist größtenteils aus dem Buch von Meis und Markowitz [1978] entnommen. Siehe auch Richtmyer und Morton [1967] und Strikwerda [1989].

15.2 Banachräume

Definition 15.1 *Es sei B ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ (resp. $\mathbf{K} = \mathbb{R}$). B heißt komplexer (resp. reeller) Banachraum, wenn folgendes gilt:*

1. *In B ist eine Abbildung $\|\cdot\| : B \to [0, \infty)$ (genannt Norm) mit folgenden Eigenschaften ausgezeichnet:*

   (a) $\|a\| = 0 \leftrightarrow a = 0 \qquad (a \in B)$

   (b) $\|\lambda a\| = |\lambda| \ \|a\| \qquad (\lambda \in \mathbf{K}\ ,\ a \in B)$

   (c) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \qquad (a, b \in B)$.

2. *Der Raum B ist bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Topologie vollständig; d.h. jede Cauchy-Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen von B konvergiert gegen ein Element a von B.*

   Dabei heißt $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, falls es zu jedem positiven ϵ eine natürliche Zahl n_0 gibt, so daß aus $n, m > n_0$ folgt $\|a_n - a_m\| < \epsilon$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen ein Element a von B, falls $\{\|a - a_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Jeder Banachraum besteht also aus einem Vektorraum und einer Definition für die Norm. Demnach sind zwei Banachräume, denen der gleiche Vektorraum zugrundeliegt, zu unterscheiden, falls die Normen verschieden sind. Insbesondere beachte man, daß ein unendlichdimensionaler Vektorraum, der bez. einer gegebenen Norm vollständig ist, diese Eigenschaft keineswegs bezüglich einer anderen Norm besitzen muß.

Beispiel 15.1 Der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ wird mit jeder der beiden Normen

$$\|x\| = \max_j |x_j| \,, \quad \|x\| = \left(\sum_j x_j \bar{x}_j \right)^{1/2}$$

zu einem Banachraum.

Beispiel 15.2 Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge. Der Vektorraum $C^0(K, \mathbb{C}^n)$ ist bezüglich der Norm

$$\|f\|_\infty = \max_j \max_{x \in K} |f_j(x)|$$

vollständig und folglich ein Banachraum. Dabei ergibt sich die Vollständigkeit des Raumes aus der Tatsache, daß jede Cauchy-Folge bei dieser Definition der Norm eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen darstellt. Eine solche Folge konvergiert bekanntlich gegen eine stetige Grenzfunktion, also gegen ein Element des Raumes.
Der Raum $C^0(K, \mathbb{C}^n)$ ist jedoch bez. der Norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_K \sum_{j=1}^n f_j(x) \overline{f_j(x)} dx \right)^{1/2}$$

nicht vollständig. Dies ergibt sich aus dem folgenden Gegenbeispiel: In $C^0([0,2], \mathbb{C})$ ist die Folge $\{f_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_\mu(x) = \begin{cases} x^\mu & \text{für} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{für} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge. Sie konvergiert aber gegen keine stetige Grenzfunktion.
Wenn im folgenden vom *Banachraum* $C^0(K, \mathbb{C}^n)$ die Rede ist, meinen wir immer den Vektorraum der stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{C}^n$ in Verbindung mit der Norm $\| \cdot \|_\infty$.

Beispiel 15.3 Es sei G ein Gebiet des $\mathbb{R}^m$ und $\Lambda = \{f : G \to \mathbb{C}^n \,|\, f$ quadratintegrierbar in $G\}$. Dabei heißt f quadratintegrierbar in G, falls das Integral

$$\int_G \sum_{j=1}^n (f_j(x) \overline{f_j(x)}) dx$$

im Sinne von Lebesgue existiert und endlich ist. Λ bildet mit der üblichen Definition der Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{C}$. Die durch

$$|||f||| = \left(\int_G \sum_j f_j(x)\overline{f_j(x)}dx \right)^{1/2}$$

definierte Abbildung $|||\cdot||| : \Lambda \to [0, \infty)$ hat alle Eigenschaften einer Norm mit Ausnahme von 1.(a), da $|||f||| = 0$ für alle $f \in N$ mit

$$N = \{f \in \Lambda | \{x \in G | f(x) \neq 0\} \text{ hat das MaßNull}\} .$$

Um diesen Mangel zu beheben, geht man zum Quotientenraum Λ/N über. Die Elemente von Λ/N sind Äquivalenzklassen von Abbildungen aus Λ, die sich nur auf einer Menge vom MaßNull unterscheiden. Λ/N wird in kanonischer Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$. Mit der Definition

$$\|\tilde{f}\| := |||f||| \quad (\tilde{f} \in \Lambda/N, f \in \tilde{f})$$

wird dieser Vektorraum zu einem Benachraum, den wir mit $L^2(G, \mathbb{C}^n)$ bezeichnen. Während sich die Vektorraum- und Normeigenschaften leicht zeigen lassen, gestaltet sich der Nachweis der Vollständigkeit wesentlich schwieriger (vgl. Yosida 1968, Kap. I.9).
Zur Vereinfachung der Schreib- und Sprechweise werden wir im folgenden nicht mehr zwischen den Äquivalenzklassen $\tilde{f} \in L^2$ und deren Repräsentanten $f \in \tilde{f}$ unterscheiden, da sich die jeweilige Bedeutung aus dem Zusammenhang ergibt.

Die folgende Definition führt den wichtigen Begriff einer dichten Menge ein.

Definition 15.2 *Es seien B ein Banachraum und D_1, D_2 Teilmengen von B mit $D_1 \subset D_2$. D_1 heißt dicht in D_2, wenn es zu jedem $a \in D_2$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $b \in D_1$ gibt mit $\|a - b\| < \epsilon$.*

Satz 15.1 (Approximationssatz von Weierstraß) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge. Dann gilt: Der Vektorraum der auf K definierten Polynome mit komplexen Koeffizienten liegt dicht im Banachraum $C^0(K, \mathbb{C})$.*

Satz 15.2 *1. Der Vektorraum*

$$V = \{f \in C^\infty([a, b], \mathbb{C}) | f^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(b) = 0 \ , \ \nu = 1(1)\infty\}$$

liegt dicht im Banachraum $C^0([a, b], \mathbb{C})$.

2. *Der Vektorraum der beschränkten Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt dicht im Banachraum der beschränkten Funktionen aus $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Satz 15.3 *Es sei G ein Gebiet des $\mathbb{R}^m$. Dann gilt:*

1. *Der Vektorraum $C_0^\infty(G,\mathbb{C})$ der auf G definierten unendlich-oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht im Raum $L^2(G,\mathbb{C})$.*

2. *Der Vektorraum der auf G definierten Polynome mit komplexen Koeffizienten liegt dicht im Raum $L^2(G,\mathbb{C})$, wenn G beschränkt ist.*

Definition 15.3 *Es seien B_1, B_2 Banachräume und D ein Untervektorraum von B_1. Eine Abbildung*

$$A : D \to B_2$$

heißt linearer Operator, falls für alle $a, b \in D$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ gilt:

$$A(\lambda a + \mu b) = \lambda A(a) + \mu A(b) \ .$$

Ein linearer Operator A heißt beschränkt, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt mit $\|A(a)\| \leq \alpha \|a\|$ für alle $a \in D$. Die Größe

$$\|A\| := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \ \|A(a)\| \leq \alpha \|a\| \quad \textit{für alle} \quad a \in D\}$$

heißt dann Norm des linearen und beschränkten Operators A. Wir bezeichnen

$$L(D, B_2) := \{A : D \to B_2 \mid A \quad \textit{linear und beschränkt}\} \ .$$

Bei der Definition beschränkter linearer Operatoren von B_1 nach B_2 genügt es, sie auf einem dichten Unterraum von B_1 zu definieren. Es gilt nämlich:

Satz 15.4 *Es seien B_1, B_2 Banachräume, D ein in B_1 dichter Untervektorraum von B_1 und $A \in L(D, B_2)$. Dann gibt es genau einen Operator $\hat{A} \in L(B_1, B_2)$, der auf D mit A übereinstimmt. Es gilt überdies $\|\hat{A}\| = \|A\|$. $\hat{A}$ heißt die Fortsetzung von A auf B_1.*

Beweis: Es sei $a \in B_1$. Dann gibt es, da D dicht in B_1 ist, eine gegen a konvergente Folge $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus D. Aus

$$\begin{aligned} \|A(a_j) - A(a_k)\| = \|A(a_j - a_k)\| &\leq \|A\| \ \|a_j - a_k\| \\ &\leq \|A\|(\|a - a_j\| + \|a - a_k\|) \end{aligned}$$

folgt, daß $\{A(a_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in B_2 ist. Da B_2 als Banachraum vollständig ist, existiert ein (eindeutig bestimmter) Grenzwert der Folge $\{A(a_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ in B_2, den wir mit c bezeichnen. Die Größe c hängt nur von a und nicht von der speziellen Auswahl der Folge $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ab. Denn sei $\{\tilde{a}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine andere gegen a konvergente Folge von Elementen von D. Dann läßt sich abschätzen:

$$\begin{aligned} \|c - A(\tilde{a}_j)\| &\leq \|c - A(a_j)\| + \|A(a_j) - A(\tilde{a}_j)\| \\ \|c - A(\tilde{a}_j)\| &\leq \|c - A(a_j)\| + \|A\|(\|a - a_j\| + \|a - \tilde{a}_j\|) \; . \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang, daß die Folge $\{A(\tilde{a}_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen c konvergiert.
Wir definieren die Abbildung $\hat{A} : B_1 \to B_2$ durch die Vorschrift:

$$\hat{A}(a) := c \; .$$

$\hat{A}$ ist wohldefiniert und stimmt auf D mit A überein.
Zum Nachweis der Linearität von $\hat{A}$ seien $a, b \in B_1$ und $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ zwei gegen a bzw. b konvergente Folgen von Elementen von D. Dann konvergiert die Folge $\{\lambda a_j + \mu b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ gegen das Element $\lambda a + \mu b$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\lambda a + \mu b) &= \lim_{j\to\infty} A(\lambda a_j + \mu b_j) \\ = \lambda \lim_{j\to\infty} A(a_j) &+ \mu \lim_{j\to\infty} A(b_j) = \lambda\hat{A}(a) + \mu\hat{A}(b) \; . \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Beschränktheit von $\hat{A}$ seien a und $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ wie oben gegeben. Es ist $\|A(a_j)\| \leq \|A\| \; \|a_j\|$ und wegen der Stetigkeit der Norm

$$\begin{aligned} \|\hat{A}(a)\| &= \|\lim_{j\to\infty} A(a_j)\| = \lim_{j\to\infty} \|A(a_j)\| \\ \leq \|A\| \lim_{j\to\infty} \|a_j\| &= \|A\| \; \|\lim_{j\to\infty} a_j\| = \|A\| \; \|a\| \; . \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|\hat{A}\| = \|A\|$.
Den Nachweis, daß $\hat{A}$ eindeutig bestimmt ist, führen wir indirekt:
Es sei $\tilde{A}$ ein beschränkter linearer Operator von B_1 in B_2, der auf D mit A übereinstimmt. Für ein $a \in B_1 - D$ gelte $\tilde{A}(a) \neq \hat{A}(a)$. Weiter sei $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge von Elementen von D. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}(a) - \hat{A}(a)\| &\leq \|\tilde{A}(a) - A(a_j)\| + \|\hat{A}(a) - A(a_j)\| \\ &= \|\tilde{A}(a) - \tilde{A}(a_j)\| + \|\hat{A}(a) - \hat{A}(a_j)\| \\ &\leq \|\tilde{A}\| \; \|a - a_j\| + \|\hat{A}\| \; \|a - a_j\| \; . \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang ein Widerspruch.

Nach Sätzen der Funktionalanalysis (Hahn-Banach) läßt sich ein beschränkter linearer Operator auch dann auf ganz B_1 normtreu fortsetzen, wenn der Definitionsbereich D nicht dicht in B_1 liegt. Die Erweiterung ist dann allerdings nicht eindeutig bestimmt.

Definition 15.4 *Es seien B_1, B_2 Banachräume und M eine Menge von beschränkten linearen Operatoren, die B_1 in B_2 abbilden. M heißt gleichmäßig beschränkt, wenn die Menge $\{\|A\| \mid A \in M\}$ beschränkt ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß es eine Konstante $\alpha > 0$ gibt mit $\|A(a)\| \leq \alpha\|a\|$ für alle $A \in M$ und alle $a \in B_1$.*

Satz 15.5 *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (engl. uniform boundedness).*

Es seien B_1, B_2 Banachräume und M eine Menge von beschränkten linearen Operatoren, die B_1 in B_2 abbilden. Es existiere eine Funktion $\beta : B_1 \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\|A(a)\| \leq \beta(a)$$

für alle $a \in B_1$ und alle $A \in M$. Dann ist die Menge M gleichmäßig beschränkt.

Bemerkung 15.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit wird z.B. bei dem Beweis des Satzes von Polya-Steklov angewandt.

Definition 15.5 *Es seien B ein Banachraum und $[T_1, T_2]$ ein reelles Intervall. Eine Abbildung*

$$u : [T_1, T_2] \to B$$

heißt Fréchet-differenzierbar im Punkte $t_0 \in [T_1, T_2]$, falls es ein Element $a \in B$ gibt mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t_0 + h \in [T_1, T_2]}} \frac{\|u(t_0 + h) - u(t_0) - h \cdot a\|}{|h|} = 0 \ .$$

Das Element a ist eindeutig bestimmt und heißt Ableitung von u im Punkte t_0. Es wird mit $u'(t_0)$ oder $\frac{du}{dt}\ (t_0)$ bezeichnet. Die Abbildung u heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt von $[T_1, T_2]$ differenzierbar ist. Die Abbildung u heißt gleichmäßig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und

$$\frac{1}{|h|} \|u(t + h) - u(1) - hu'(t)\|$$

mit $h \to 0$ gleichmäßig für $t \in [T_1, T_2]$ gegen Null konvergiert. Die Abbildung u heißt stetig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $u'(t)$ stetig in $[T_1, T_2]$ ist.

Aus der obigen Definition folgt sofort, daß eine im Punkte t_0 differenzierbare Abbildung auch stetig in t_0 ist. Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (vgl. Dieudonné 1960, Satz (8.6.2)) ergibt sich für stetig differenzierbare Funktionen u:

$$\frac{1}{|h|} \|u(t + h) - u(t) - hu'(t)\| \leq \sup_{0 < \nu < 1} \|u'(t + \nu h) - u'(t)\| \ .$$

Eine stetig differenzierbare Funktion ist somit auch gleichmäßig differenzierbar.

15.3 Das abstrakte Cauchy-Problem

Definition 15.6 *Es seien B ein Banachraum, D_A ein Untervektorraum von $B, T \in \mathbb{R}_+$ und*

$$A : D_A \to B$$

ein linearer Operator. Wir betrachten dann die folgende Anfangswertaufgabe zum Anfangswert $c \in D_A$: Gesucht ist eine differenzierbare Abbildung

$$u : [0,T] \to D_A \quad \textit{(genannt Lösung)}$$

mit

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(u(t)) \qquad (t \in [0,T]) \\ u(0) &= c\,. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Wir bezeichnen diese Aufgabe im folgenden mit $P(B,T,A)$.

Wegen der Linearität von A bildet die Menge aller Anfangswerte, für die die Aufgabe $P(B,T,A)$ lösbar ist, einen Untervektorraum von D_A. Falls die Aufgabe sogar eindeutig lösbar ist, können wir für festes $t_0 \in [0,T]$ durch die Zuordnung

$$c \to u_c(t_0)$$

einen linearen Operator definieren, wobei $u_c(t)$ die Lösung von $P(B,T,A)$ zum Anfangswert c bezeichnet . Diese linearen Operatoren werden zur Definition von sachgemäßgestellten Anfangswertaufgaben herangezogen.

Definition 15.7 *Die Anfangswertaufgabe $P(B,T,A)$ heißt sachgemäßgestellt, wenn es einen Untervektorraum D_E mit*

$$D_E \subset D_A \subset B$$

und eine Schar $M_0 = \{E_0(t) | t \in [0,T]\}$ von auf D_E definierten linearen Operatoren

$$E_0(t) : D_E \to D_A \qquad (t \in [0,T])$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. *D_E (und damit auch D_A) liegt dicht in B.*

2. *Für alle Anfangswerte $c \in D_E$ hat die Aufgabe $P(B,T,A)$ genau eine Lösung $u_c(t)$. Sie wird für alle $t \in [0,T]$ durch*

$$u_c(t) = E_0(t)(c)$$

dargestellt.

3. *Die Menge M_0 ist eine gleichmäßig beschränkte Menge von linearen Operatoren.*

Wir nennen die Operatoren $E_0(t)$ aus M_0 im folgenden Lösungsoperatoren.

Definition 15.8 *Es seien $E_0(t)$ die Lösungsoperatoren aus Definition 13.7. Dann bezeichne $E(t)$ die Fortsetzung von $E_0(t)$ auf B und es sei*

$$M = \{E(t) | t \in [0,T]\} \ .$$

Die für $c \in B$ gegebene Abbildung

$$E(\cdot)(c) : [0,T] \to B$$

heißt verallgemeinerte Lösung der Anfangswertaufgabe $P(B,T,A)$ zum Anfangswert c, die Operatoren $E(t)$ aus M heißen verallgemeinerte Lösungsoperatoren.

Die verallgemeinerten Lösungen sind keine Lösungen, wenn sie außerhalb von D_A verlaufen.
Wir notieren einige Eigenschaften der eingeführten Begriffe.

Satz 15.6 *Es sei $P(B,T,A)$ eine sachgemäßgestellte Anfangswertaufgabe.Die linearen Operatoren $E(t) \in C^0(B,B)$ erfüllen die Halbgruppeneigenschaft:*

$$E(r+s) = E(r) \circ E(s) \qquad (r,s,r+s \in [0,T]) \ .$$

Dann gilt:

1. *Die Menge $M = \{E(t) | t \in [0,T]\}$ ist gleichmäßig beschränkt mit derselben Schranke wie die Menge $M_0 = \{E_0(t) | t \in [0,T]\}$.*

2. *Jede verallgemeinerte Lösung $E(\cdot)(c)$ von $P(B,T,A)$ zum Anfangswert $c \in B$ läßt sich im Sinne der Norm von B gleichmäßig durch Lösungen von $P(B,T,A)$ approximieren. Dies bedeutet, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Element $\tilde{c} \in D_E$ gibt, so daß gilt:*

$$\|E(t)(c) - E_0(t)(\tilde{c})\| < \epsilon \qquad (t \in [0,T]) \ .$$

3. *Jede verallgemeinerte Lösung* $E(\cdot)(c)$ *von* $P(B,T,A)$ *zum Anfangswert* $c \in B$ *ist aus* $C^0([0,T],B)$.

4. *Für alle* $c \in D_E$ *gilt:*

$$E(t) \circ A(c) = A \circ E(t)(c) \ .$$

5. *Für alle* $c \in D_E$ *ist* $u(t) = E_0(t)(c)$ *stetig differenzierbar.*

Beweis:

zu (1): unmittelbar klar nach Satz 4.
zu (2): Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Mit L bezeichnen wir die nach (1) gegebene Schranke für die Norm der Operatoren $E(t)$. Da D_E dicht in B liegt, gibt es ein $\tilde{c} \in D_E$ mit

$$\|c - \tilde{c}\| < \frac{\epsilon}{L} \ .$$

Dann läßt sich wegen $E(t)(\tilde{c}) = E_0(t)(\tilde{c})$ abschätzen:

$$\|E(t)(c) - E_0(t)(\tilde{c})\| = \|E(t)(c) - E(t)(\tilde{c})\| \leq L\|c - \tilde{c}\| < \epsilon \ .$$

zu (3): Es seien $s \in [0,T]$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen nach (2) ein Element $\tilde{c} \in D_E$, so daß gilt:

$$\|E(t)(c) - E_0(t)(\tilde{c})\| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (t \in [0,T]) \ .$$

Da $E_0(\cdot)(\tilde{c})$ als differenzierbare Abbildung auch gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|E_0(s+h)(\tilde{c}) - E_0(s)(\tilde{c})\| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (|h| < \delta, s+h \in [0,T]) \ .$$

Zusammengefaßt ergibt sich für alle h mit $|h| < \delta$ und $s + h \in [0,T]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|E(s+h)(c) - E(s)(c)\| \leq \\ &\quad \|E(s+h)(c) - E_0(s+h)(\tilde{c})\| + \|E_0(s+h)(\tilde{c}) - E_0(s)(\tilde{c})\| \\ &\quad + \|E_0(s)(\tilde{c}) - E(s)(c)\| \\ &\quad < \epsilon \ . \end{aligned}$$

zu (4): Für $c \in D_E$ und $t \in [0,T]$ gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\|E(t) \circ A(c) - A \circ E(t)(c)\| \leq \\
&\quad \|E(t) \circ A(c) - \frac{1}{h}\, E(t)(E(h)(c) - c)\| \\
&\quad + \|\frac{1}{h}\, E(t)(E(h)(c) - c) - A \circ E(t)(c)\| \\
&\quad \leq \frac{1}{|h|}\, \|E(t)\|\|E(h)(c) - c - hA(c)\| \\
&\quad + \frac{1}{|h|}\, \|E(t+h)(c) - E(t)(c) - hA \circ E(t)(c)\| \; .
\end{aligned}$$

Weil $E(\cdot)(c) = E_0(\cdot)(c)$ im ganzen Intervall $[0,T]$ differenzierbar ist, folgt die Behauptung durch den Grenzübergang $h \to 0$.
zu (5): Wegen

$$u'(t) = A(u(t)) = A \circ E(t)(c) = E(t) \circ A(c) = E(t)(A(c))$$

folgt die Stetigkeit von $u'(\cdot)$ aus (3).

Bemerkung 15.3 Meis und Markowitz (S. 43) behaupten, daß die Halbgruppeneigenschaft aus den übrigen Annahmen folgt. Dies bezweifle ich:

1. In dem Buch von Richtmyer und Morton (S. 41) wird die Halbgruppeneigenschaft vorausgesetzt.

2. Der Satz von Hille-Yosida besagt, daß ein abgeschlossener Operator A eine Halbgruppe erzeugt genau dann, wenn ein $w > 0$ existiert mit

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - w} \; , \quad \lambda > w \; .$$

(Butzer und Berens, S. 36.)

15.4 Differenzenverfahren

Definition 15.9 *Es seien $P(B,T,A)$ eine sachgemäßgestellte Anfangswertaufgabe, $M = \{E(t) | t \in [0,T]\}$ die entsprechende Schar von zugehörigen verallgemeinerten Lösungsoperatoren und $h_0 \in (0,T]$.*

1. *Eine Schar* $M_D = \{C(h)|h \in (0, h_0]\}$ *von auf* B *definierten linearen und beschränkten Operatoren*

$$C(h) : B \to B \qquad (h \in (0, h_0])$$

heißt Differenzenverfahren zu $P(B, T, A)$*, falls die Funktion* $\|C(\cdot)\|$ *in jedem abgeschlossenen Teilintervall von* $(0, h_0]$ *beschränkt ist.*

2. *Das Differenzenverfahren* M_D *heißt konsistent, wenn es einen in* B *dichten Unterraum* D_C *gibt, so daß für alle* $c \in D_C$ *der Ausdruck*

$$\frac{1}{|h|} \|[C(h) - E(h)](E(t)(c))\|$$

mit $h \to 0$ *gleichmäßig für* $t \in [0, T]$ *gegen Null konvergiert.*

3. *Das Differenzenverfahren* M_D *heißt stabil, wenn die Menge der Operatoren*

$$\{(C(h))^n | h \in (0, h_0], n \in \mathbb{N}, nh \leq T\}$$

gleichmäßig beschränkt ist.

4. *Das Differenzenverfahren* M_D *heißt konvergent, falls der Ausdruck*

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c)\|$$

für alle $c \in B$*, alle* $t \in [0, T]$ *und alle Nullfolgen* $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen aus* $(0, h_0]$ *gegen Null konvergiert. Dabei ist* $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *eine zugehörige Folge natürlicher Zahlen, so daß* $\{n_j h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *gegen* t *konvergiert und* $n_j h_j \leq T$ *ist.*

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen den obigen Begriffen her.

Satz 15.7 (Lax-Richtmyer) *Es sei* M_D *ein konsistentes Differenzenverfahren zu der sachgemäß gestellten Anfangswertaufgabe* $P(B, T, A)$*, die die Halbgruppeneigenschaft erfüllt. Dann gilt: Das Differenzenverfahren* M_D *ist genau dann konvergent, wenn es stabil ist.*

Beweis:

a) Konvergenz impliziert Stabilität:

Wir nehmen zwecks indirekter Beweisführung an, daß M_D konvergent und nicht stabil ist. Dann gibt es eine Folge $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $(0, h_0]$ und eine Folge $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen, die durch die Bedingung

$$n_j h_j \in [0,T] \qquad (j \in \mathbb{N})$$

verknüpft sind, so daß die Folge

$$\{\|(C(h_j))^{n_j}\|\}_{j\in\mathbb{N}}$$

nicht beschränkt ist. Wegen der Kompaktheit von $[0,T]$ und $[0,h_o]$ können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Folgen $\{n_j \cdot h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ und $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $t \in [0,T]$ und $h \in [0,h_0]$ konvergieren. Angenommen, es sei $h > 0$. Dann ist n_j von irgendeinem Index an konstant. In dem Intervall $[h/2,h_0]$ ist $\|C(\cdot)\|$ nach Definition 13.9 (1) beschränkt. Folglich ist auch $\|C(h_j)^{n_j}\| \leq \|C(h_j)\|^{n_j}$ beschränkt. Widerspruch! Also ist $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Da M_D ein konvergentes Differenzenverfahren ist, ist auch die Folge

$$\{\|(C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c)\|\}_{j\in\mathbb{N}}$$

für jedes $c \in B$ eine Nullfolge. Somit gibt es ein $j_0(c) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j > j_0(c)$ gilt:

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c)\| < 1 \,,$$

und

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c)\| < 1 + \|E(t)(c)\| \,.$$

Wir setzen

$$K(c) := \max_{j\leq j_0(c)} \{1 + \|E(t)(c)\| \,,\ \|(C(h_j))^{n_j}(c)\|\} \,.$$

Für alle $c \in B$ folgt dann

$$\|(C(h_j))^{n_j}(c)\| \leq K(c) \qquad (j \in \mathbb{N}) \,.$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt sich, daß

$$\{(C(h_j))^{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$$

eine gleichmäßig beschränkte Menge von Operatoren ist. Widerspruch!

b) Stabilität impliziert Konvergenz:

Es seien $c \in D_C$, $t \in [0,T]$, $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen aus $(0,h_0]$ und $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine zugehörige Folge natürlicher Zahlen, so daß $\{n_j h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ gegen t konvergiert und $n_j h_j \leq T$ ist. Für

$$\psi_j(c) = (C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c) \qquad (j \in \mathbb{N})$$

gilt wegen der Halbgruppeneigenschaft:

$$\begin{aligned} \psi_j(c) &= \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(h_j))^k [C(h_j) - E(h_j)] \circ E((n_j - 1 - k)h_j)(c) \\ &+ E(\rho_j) \circ (E(n_j h_j - \rho_j) - E(t - \rho_j))(c) \qquad (j \in \mathbb{N}) \ . \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\rho_j = \min\{t, n_j h_j\} \qquad (j \in \mathbb{N}) \ .$$

Es sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir schätzen dann wie folgt ab:

a) Wegen der Stabilität von M_D gibt es eine Konstante K_C, so daß

$$\|(C(h_j))^k\| \leq K_C \qquad (j \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq n_j) \ .$$

b) Wegen der Konsistenz von M_D gibt es ein $j_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|[C(h_j) - E(h_j)] \circ E((n_j - 1 - k)h_j)(c)\| < \epsilon h_j \qquad (j > j_1) \ .$$

c) Wegen Satz 13.6 (1) gibt es eine Konstante K_E, so daß

$$\|E(\tau)\| \leq K_E \qquad (\tau \in [0,T]) \ .$$

d) Wegen Satz 13.6 (3) gibt es ein $j_2 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|(E(n_j h_j - \rho_j) - E(t - \rho_j))(c)\| < \epsilon \qquad (j > j_2) \ .$$

Insgesamt folgt:

$$\|\psi_j(c)\| < n_j K_C \, \epsilon \, h_j + K_E \, \epsilon \, \leq (K_C T + K_E)\epsilon \qquad (j > \max\{j_1, j_2\}) \ .$$

Damit ist bereits bewiesen, daß das Differenzenverfahren M_D für alle $c \in D_C$ konvergent ist. Für $\tilde{c} \in B$ und $c \in D_C$ können wir umformen:

$$\begin{aligned} \psi_j(\tilde{c}) &= (C(h_j))^{n_j}(\tilde{c}) - E(t)(\tilde{c}) \\ &= (C(h_j))^{n_j}(c) - E(t)(c) + (C(h_j))^{n_j}(\tilde{c}-c) - E(t)(\tilde{c}-c) \\ \|\psi_j(\tilde{c})\| &\leq \|\psi_j(c)\| + K_C\|\tilde{c}-c\| + K_E\|\tilde{c}-c\| \qquad (j \in \mathbb{N}) \ . \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\eta > 0$ wählen wir dann $c \in D_C$ so, daß die letzten beiden Summanden der rechten Seite der vorstehenden Ungleichung kleiner sind als $\frac{2}{3}\,\eta$. Insgesamt folgt aus den vorstehenden Überlegungen, daß es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\|\psi_j(\tilde{c})\| < \eta \qquad (j > j_0) \ .$$

Literatur

Ansorge, R.: Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben. Teubner, 1978.

Butzer, P.L. und **Berens**, H.: Semigroups of Operators and Approximation. Springer, 1967.

Hille, E. und **Phillips**, R.S.: Functional Analysis and Semigroups (revised edition). American Math. Soc. 1957.

Jerome, J.W.: Approximation of Nonlinear Evolution Systems. Academic Press, 1983.

Lax, P.D. und **Richtmyer**, R.D.: Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations. Communications Pure Applied Math. 9 (1956) 267-293.

Meis, Th. und **Marcowitz**, U.: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen. Springer, 1978.

Richtmyer, R.D. und **Morton**, K.W.: Difference Methods for Initial-Value Problems (second edition). Interscience 1967.

Strikwerda, J.C.: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. Wadsworth and Brooks/Cole, 1989.

Kapitel 16

Fourierreihen, Fouriertransformationen und die Stabilitätsanalyse

---

16.1 Einführung

Sei X ein (reeller bzw. komplexer) Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$. Sei T ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ und Wertebereich $\mathcal{R}(T)$,

$$T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow \mathcal{R}(T) \subset X \ .$$

Sei I der identische Operator auf X , λ eine komplexe Zahl,

$$T_\lambda := \lambda I - T \ .$$

Jede komplexe Zahl gehört genau einer der folgenden vier Punktmengen an:

1. $\rho(T)$, die *Resolventenmenge* des Operators T . $\lambda \in \rho(T)$, wenn T_λ^{-1} existiert und stetig ist.

   $$R(\lambda, T) := T_\lambda^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}$$

   heißt *Resolvente* des Operators T im Punkt λ.

2. $P_\sigma(T)$, das *Punktspektrum*. $\lambda \in P_\sigma(T)$, wenn T_λ^{-1} nicht existiert.

3. $C_\sigma(T)$, das *Stetigkeitsspektrum*. $\lambda \in C_\sigma(T)$, wenn T_λ^{-1} existiert, $\mathcal{R}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$ dicht in X ist, aber T_λ^{-1} nicht stetig ist.

4. $R_\sigma(T)$, das *Restspektrum*. $\lambda \in R_\sigma(T)$, wenn T_λ^{-1} existiert, aber $\mathcal{R}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T_\lambda^{-1})$ nicht dicht in X ist.

Beispiel 16.1 Im einfachen Fall $X = \mathbb{R}^n$, $T \in \text{Mat}(n \times n)$, T symmetrisch, hat T n Eigenwerte λ_i und entsprechende Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$. Die Eigenvektoren bilden eine Basis für X

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \mathbf{x}_k$$

mit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_k\|^2 &:= (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k \ . \end{aligned}$$

Es gilt

$$P_\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \ ,$$

da $(\lambda_k I - T)$ keine Inverse hat.

Wird z.B. die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\ddot{x} &= f \ , \qquad 0 \le t \le \pi \ , \\ x(0) &= x(\pi) = 0 \end{aligned}$$

durch die Differenzengleichung

$$-D_+ D_- x = f \ , \quad h = \frac{\pi}{n+1}$$

approximiert, ist

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ & & & & & O \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & O & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (4 \ \sin^2 k\frac{h}{2})/h^2 \ , \\ \mathbf{x}_k &= (\sin \ kh, \sin \ 2kh, \ldots, \sin \ nkh)^T \ . \end{aligned}$$

Beispiel 16.2

$$\begin{aligned} X &= L_2(0,\pi)\ , \\ T &= -\ddot{x}\ , \\ \mathcal{D}(T) &= \{x \in X \cap C^2(0,\pi) : x(0) = x(\pi) = 0\} \\ \mathcal{R}(T) &= C(0,\pi)\ . \end{aligned}$$

T ist symmetrisch, da

$$(x, Ty) = -\int_0^\pi x\ddot{y}\ dt = -\int_0^\pi \ddot{x}y\ dt \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathcal{D}(T)$$

Weiter gilt

$$Tx_k = \lambda_k x_k$$

mit

$$x_k(t) = \sin(kt)\ , \quad k \in \mathbb{N}_+\ .$$

Es gilt

$$P_\sigma(T) = \mathbb{N}_+\ .$$

Die Eigenfunktionen x_k bilden eine Basis für X,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \\ a_k &= \frac{(x, x_k)}{(x_k, x_k)} \\ &= \frac{\int_0^\pi x(t) \sin\ kt\ dt}{\int_0^\pi (\sin\ kt)^2 dt} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t) \sin\ kt\ dt \end{aligned}$$

Obwohl die Folge

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_k x_k$$

gegen $x \in X$ in der Norm von X konvergiert, ist die Konvergenz nicht immer gleichmäßig.

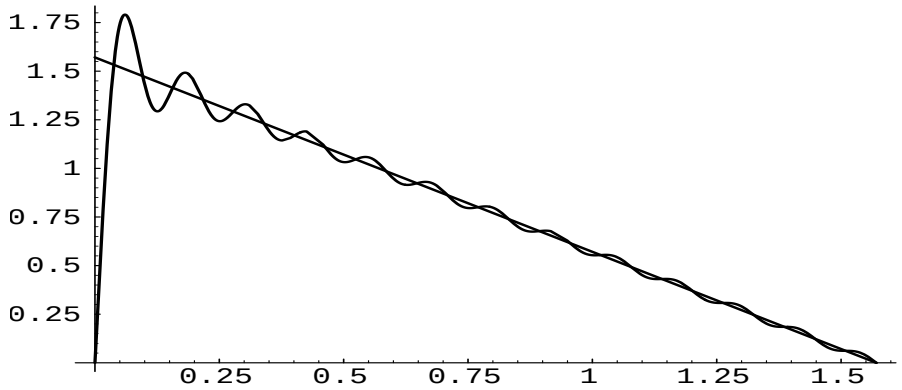


Abbildung 16.1: Das Gibbs Phänomen bei der Sinusentwicklung von $\frac{\pi}{2} - x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$, Abbruch nach 25 Summanden

Beispiel 16.3 [Gibbs Phänomen]

$$\begin{aligned} x(t) &= \pi - t\,, \qquad 0 \le t \le \pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \sin\ kt\ dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{k} \left[(\pi - t) \cos\ kt \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos\ kt}{k}\ dt \right\} \\ &= \frac{2}{k}\,. \end{aligned}$$

Sei

$$s_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{j} \sin\ jt\,.$$

Es gilt

$$\lim_{k \to 0}\ s_k(t) = \pi - t\,, \qquad t \in (0, \pi)$$

aber es gibt eine Konstante $\alpha > 0$ mit

$$\sup_{0<t<\pi}\ |s_k(t) - (\pi - t)| \ge \alpha\,, \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Beispiel 16.4

$$\begin{aligned} X &= L_2(0, \infty)\,, \\ Tx &= -\ddot{x}\,, \\ \mathcal{D}(T) &= \{x \in X \cap C^2(0, \infty) : Tx \in X\,,\ x(0) = 0\}\,. \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Funktionen

$$x_\lambda(t) = \sin(\lambda t)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}_+$$

nicht Eigenfunktionen, da $x_\lambda \notin X$. Es gilt aber:

Satz 16.1 („Sinustransformation“) *Sei $f \in L_2(0,\infty)$. Der Limes*

$$(\mathcal{S}f)(\mu) = \lim_{A\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A (\sin\ \mu t) f(t) dt$$

existiert in der Norm von $L_2(0,\infty)$.

$\mathcal{S}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $L_2(0,\infty)$ nach $L_2(0,\infty)$,

$$\mathcal{S}^2 = I\ , \quad \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}\ .$$

Sei

$$\int_0^\infty |f''(t)|^2 dt < \infty$$

und weiter $f(0) = 0$. Dann gilt:

$$\mu^2(\mathcal{S}f)(\mu) = -(\mathcal{S}f'')(\mu)\ .$$

Beweis: Siehe z.B. Dunford + Schwartz, II, S. 1388

Wird die ganze x-Achse betrachtet, dann gilt ebenfalls

Satz 16.2 („Fourier-Transformation“)

$$X = \{f_1 + i f_2 : f_1, f_2 \in L_2(-\infty,+\infty)\}\ ,$$

mit der Norm

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt\ .$$

Sei $f \in X$. Der Limes

$$(\mathcal{F}f)(k) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} e^{-ikx} f(x) dx \tag{16.1}$$

existiert in der Norm von X .
$\mathcal{F}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von X nach X mit Inverse $\mathcal{F}^{-1}$,

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} e^{+ikx} \hat{f}(k) dk\ . \tag{16.2}$$

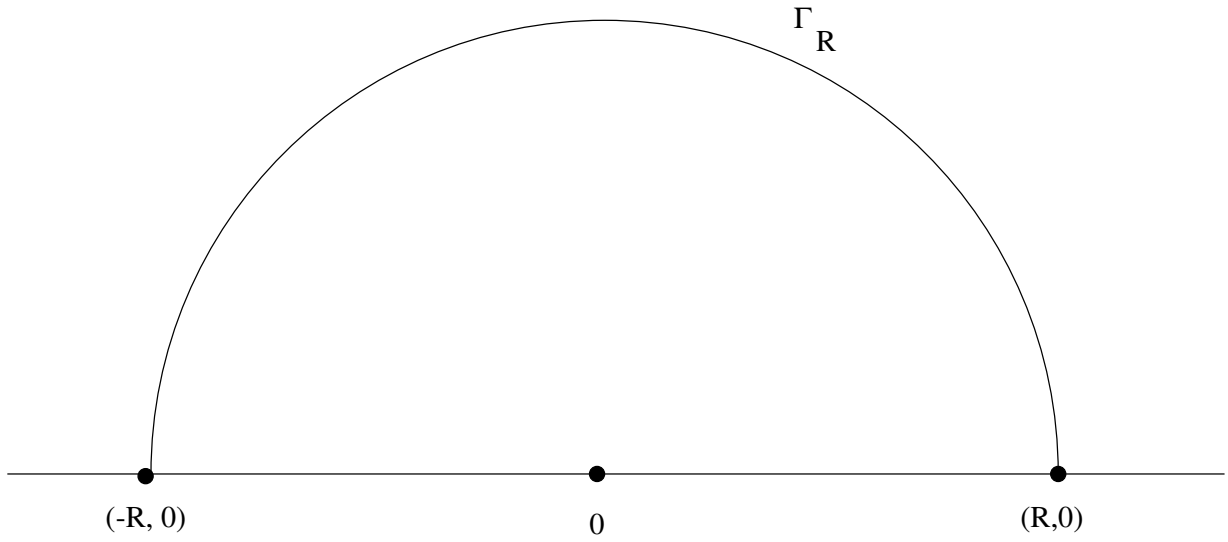


Abbildung 16.2: Der Halbkreis $B_R(0)$

Beweis: Yosida, S. 153, Dunford/Schwartz S. 1382 ff.

Bemerkung 16.1 Manchmal werden $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ umgekehrt definiert. Auch abweichende Vorfaktoren kommen in der Literatur vor.

Die Berechnung von Fourier Transformationen erfolgt manchmal mit Hilfe der Funktionstheorie:

Beispiel 16.5 *Sei* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *Man berechne* $\mathcal{F}f$.

Als erster Schritt wird das Integral als Linienintegral in der komplexen Ebene betrachtet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \frac{1}{1+z^2} dz$$

Sei nun $k < 0$. Die Pole von $\frac{1}{1+2^2}$ sind $\pm i$. Das Residuum von $\frac{1}{1+2^2}$ in $+i$ ist (Remmert, S. 304, Regel1):

$$\lim_{z \to i} \frac{(z-i)}{1+z^2} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}$$

Sei γ_R die Peripherie des Halbkreises $B_R(0)$ und Γ_R dessen Bogenteil (siehe Abb. 16.2) so daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \pi \cdot e^{+k} - \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz$$

Auf Γ_R gilt allerdings für $k < 0$,

$$\begin{aligned} |e^{-ikz}| &= |e^{-ik(x+iy)}| \\ &= |e^{-ikx}e^{ky}| \\ &= |e^{ky}| \\ &< 1. \end{aligned}$$

Es folgt,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = 0$$

Es folgt,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi e^k \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^k, \quad \text{für } k < 0. \end{aligned}$$

Ist $k = 0$, so ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} arc\tan x \Big]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Ist $k > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos kx + i \sin kx)}{1+x^2} dx \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2} dx \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((-k)x)}{1+x^2} dx \\ &\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend,

$$(\mathcal{F}f)(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|},\ k \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Residuensatz (Remmert, S. 306) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-ikz}}{(1+z^2)} dz &= \sum_{\subset \in Int\gamma_R} res_c \\ &= \frac{1}{2i} \cdot e^{+k} \end{aligned}$$

16.2 Die Anwendung von Fouriertransformationen für Stabilitätsanalyse

Die Methode wird für das Lax-Wendroff-Verfahren erläutert. Zuerst wird ein Lemma zitiert:

Lemma 16.1 *Sei* $u \in L_2(-\infty, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Sei*

$$v(t) := u(t+\alpha) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Dann ist $v \in L_2(-\infty, +\infty)$ *und*

$$\hat{v} := \mathcal{F}v = e^{+i\alpha k} \mathcal{F}u = e^{+i\alpha k} \hat{u} .$$

Beweis: Einfache Berechnungen.

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0 , \quad t > 0 , \\ u(x,0) &= f(x) , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wird mit Hilfe des Lax-Wendroff-Verfahrens approximiert. In der Praxis wird so ein Verfahren nur auf Gitterpunkte angewandt, aber es kann auf alle Punkten angewendet werden:

$$\begin{aligned} u^h(x,(j+1)\Delta t) &= \frac{c\lambda}{2}(1+c\lambda)u^h(x-h,j\Delta t) + (1-c^2\lambda^2)u^h(x,j\Delta t) - \\ &- \frac{c\lambda}{2}(1-c\lambda)u^h(x+h,j\Delta t) \qquad x \in \mathbb{R} ,\ j \in \mathbb{N} . \end{aligned} \tag{16.3}$$

Sei $X = L_2(-\infty, +\infty)$ und $f \in X$. Sei

$$v_j(x) = u_j^h(x, j\Delta t) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ . \tag{16.4}$$

Dann gilt $v_j \in X$,

$$v_{j+1}(x) = \frac{c\lambda}{2}\,(1+c\lambda)v_j(x-h) + (1-c^2\lambda^2)v_j(x) - \frac{c\lambda}{2}\,(1-c\lambda)v_{j+1}(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{16.5}$$

Mit Hilfe von Lemma 14.1 folgt aus (16.3), daß

$$\hat{v}_{j+1}(k) = g(k,h,\lambda)\,\hat{v}_j(k) \tag{16.6}$$

mit

$$g(k,h,\lambda) := \left[\frac{c\lambda}{2}\,(1+c\lambda)e^{-ikh} + (1-c^2\lambda^2) - \frac{c\lambda}{2}\,(1-c\lambda)e^{+ikh}\right] \tag{16.7}$$

$G = g(k,h,\lambda)$ heißt *Verstärkungsfaktor.*

Definition 16.1 *Sei $u^h(x,t)$ eine Approximation zur analytischen Lösung $u(x,t)$ eines Anfangswert-Randwertproblems, die mit Hilfe eines numerischen Verfahrens $\mathcal{V}$ erzeugt wird. Seien f_1 , f_2 die Anfangswert- bzw. Randwertdaten.*
Das Verfahren $\mathcal{V}$ heißt stabil genau dann, wenn es eine Konstante $K = K(T)$ gibt, so daß

$$\|u^h(\cdot,t)\| \le K(T)\{\|f_1\| + \|f_2\|\} \ , \quad \textit{für alle} \quad t \in [0,T] \ . \tag{16.8}$$

Sei nun $u^h(x,t_j)$ mit Hilfe der Gleichung (16.3) definiert. Es gilt

$$|\hat{v}_j(k)| \le \sup_{k\in\mathbb{R}} |g(k,h,\lambda)|^j |\hat{v}_0(k)| = |\hat{f}(k)| \tag{16.9}$$

Das folgende Lemma ist nützlich:

Lemma 16.2 *Sei $X = L_2(-\infty,+\infty,\mathbf{C})$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbf{C}$ stetig. Sei $G : X \to X$ mit*

$$(Gw)(k) = g(k)w(k) \ .$$

Dann ist

$$\|G\| := \sup_{w \in X} \frac{\|Gw\|}{\|w\|} = \sup_{k \in \mathbb{R}} |g(k)| \ . \tag{16.10}$$

Es folgt aus (16.6), (16.7), daß die Bedingung (16.8) genau dann erfüllt wird, wenn

$$\|\hat{v}_j\| = \|G^j \hat{f}\| \leq K \cdot \|\hat{f}\| \ , \quad 0 \leq j\Delta t \leq T \tag{16.11}$$

mit

$$(Gw)(k) := g(k,h,\lambda) \cdot w(k) \ . \tag{16.12}$$

Es folgt weiter aus dem Lemma, daß das Differenzenverfahren (16.3), (16.11), (16.12) genau dann stabil ist, wenn es eine Konstante $\alpha > 0$ gibt, mit

$$\sup_k |g(k,h,\lambda)| \leq 1 + \alpha\Delta t \ . \tag{16.13}$$

Diese Bedingung heißt die von Neumann Bedingung.

Wir überprüfen jetzt die von Neumann Bedingung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|g|^2 &= \left| \frac{c\lambda}{2} \left(e^{-ikh} - e^{+ikh}\right) + \frac{c^2\lambda^2}{2} \left(e^{-ikh} + e^{+ikh}\right) + (1 - c^2\lambda^2) \right|^2 \\
&= \left| \frac{c\lambda}{2} \left(-2i \ \sin \ kh\right) + \frac{c^2\lambda^2}{2} \cdot 2 \cos \ kh + (1 - c^2\lambda^2) \right|^2 \\
&= c^2\lambda^2 (\sin \ kh)^2 + c^4\lambda^4 (\cos \ kh)^2 + (1 - c^2\lambda^2)^2 + 2c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \cos \ kh \\
&= 4c^2\lambda^2 \cdot s^2(1 - s^2) + c^4\lambda^4(1 - 2s^2)^2 + (1 - c^2\lambda^2)^2 + 2c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \cdot (1 - 2s^2)
\end{aligned}$$

mit $s := \sin \left(\frac{kh}{2}\right)$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
|g|^2 &= [c^4\lambda^4 + (1 - c^2\lambda^2)^2 + 2c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2)] + s^4[-4c^2\lambda^2 + 4c^4\lambda^4 - 4c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2)] \\
&= 1 - s^4 \cdot 4 \cdot c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2)
\end{aligned}$$

Die von Neumann Bedingung wird genau dann erfüllt, wenn

$$1 - 4c^2\lambda^2(1 - c^2\lambda^2) \leq 1 \ ,$$

d.h.

$$|c\lambda| \leq 1 \ .$$

16.3 Stabilität für Mehrschrittverfahren und Systeme von Gleichungen

Bisher haben wir nur skalare Differenzengleichungen betrachtet. Es gibt zwei Fälle, wo vektorielle Differenzengleichungen erforderlich sind.

16.3.1 Systeme von Gleichungen

In vielen Andwendungen werden mehrere Unbekannte gesucht.
Beispiel: Für den Blutfluß durch die Aorta gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = f$$

$$S\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + v\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z} + v\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) + \psi = 0$$

mit
$v =$ Blutgeschwindigkeit
$p =$ Blutdruck
$z =$ Abstand in der Aorta von der Herzklappe
$S = S(p, z)$ gegeben.

In vielen Anwendungen treten Differentialgleichungen höherer Ordnung auf, die, wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen, durch Systeme von Gleichungen erster Ordnung ersetzt werden können.

Beispiel: Die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x,0) &= f_0 \\ u_t(x,0) &= f_1 \\ u(0,t) &= g_0 \\ u(1,t) &= g_1 \end{aligned}$$

kann als ein System von Gleichungen erster Ordnung formuliert werden. (siehe z. B. Gustafsson, Kreiss und Oliger S. 364): Sei

$$v(x,t) := \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)d\tau + \int_0^x f_1(\xi)d\xi$$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$u(x,0) = f_0(x)$$
$$v(x,0) = \int_0^x f_1(\xi)d\xi$$
$$u(0,t) = g_0(t)$$
$$u(1,t) = g_1(t).$$

16.3.2 Mehrschrittverfahren

Beispiel: Das Leapfrog Schema für die Gleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

ist

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} = 0$$

Hier setzt man

$$v_i^j := u_i^{j-1}$$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} u_i^{j+1} \\ v_i^{j+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i^j \\ v_i^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i-1}^j \\ v_{i-1}^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +c\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i+1}^j \\ v_{i+1}^j \end{pmatrix} = 0$$

Wie für lineare skalare Gleichungen kann Fourier Transformation angewandt werden. Es folgt:

$$\hat{\mathbf{v}}^{j+1} = G\hat{\mathbf{v}}^j$$

wo $\mathbf{v}^j(k) \in \mathbb{C}^m$ und G eine lineare Abbildung ist. Allerdings entspricht G jetzt Multiplikation durch eine $m \times m$ Matrix $\mathbf{g}$:

$$(G\mathbf{w})(\mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t)\mathbf{w}(\mathbf{k})$$

mit

$$g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{-ik\Delta x}\begin{pmatrix} -c\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{+ik\Delta x}\begin{pmatrix} c\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c\lambda i \sin k\Delta x & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz: Sei $g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t)$ die Verstärkungsmatrix für das lineare Differenzenschema mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{\beta \in \mathcal{N}_1} B_1^\beta T^\beta \mathbf{u}^{n+1} - \sum_{\beta \in \mathcal{N}_0} B_0^\beta T^\beta \mathbf{u}^n = 0$$

mit

$$T^\beta \mathbf{u}(\mathbf{z}) := \mathbf{u}(x_1 + \beta_1 \Delta x_1, ..., x_d + \beta_d \Delta x_d)$$

für

$$\beta \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p, B_0^\beta, B_1^\beta \in Mat(p \times p)$$

$$\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{Z}^d,$$

so daß:

$$g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t) = \left[\sum_{\beta \in \mathcal{N}_1} B_1^\beta e^{i \sum_{s=1}^{d} \Delta x_s \beta_s k_s} \right]^{-1} \left[\sum_{\beta \in \mathcal{N}_0} B_0^\beta e^{i \sum_{s=1}^{d} \Delta x_s \beta_s k_s} \right], \mathbf{k} \in \mathbb{C}^d$$

Sei

$$(Gw)(\mathbf{k}) := g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t) w(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbb{C}^d,$$

$$G : (L_2(-\infty, +\infty) + iL_2(-\infty, +\infty))^d.$$

Dann ist das Verfahren stabil g.d.W. es Konstanten K, τ existiert mit

$$||G^n|| = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{C}^d} ||g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t)^n|| \leq K$$

für alle n mit $n\Delta t \leq T$, alle Δt mit $0 < \Delta t \leq \tau$, und $||\Delta\mathbf{x}|| \to 0$. □

Ist $p = 1$, so erhält man die von Neumann Bedingung: Das Verfahren ist stabil g.d.W. ein $\alpha \geq 0$ existiert mit

$$\sup_{\mathbf{k} \in C^d} |g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t)| \leq 1 + \alpha \Delta t.$$

Ist $p > 1$, so ist es viel schwieriger, allgemeine Stabilitätsbedingungen herzuleiten.
Beispiel: (GKO S. 175)

$$\mathbf{u}_t = 0, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

wird durch

$$\mathbf{v}^{n+1} = \left(I - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta x^2 D_0^2 \right) \mathbf{v}^{(n)}$$

approximiert. D.h.

$$\begin{aligned} v_i^{n+1,1} &= v_i^{n,1} - \left(v_{i-1}^{n,2} + v_{i+1}^{n,2} - 2v_i^{n,2}\right) \\ v_i^{n+1,2} &= v_i^{n+1,2} \end{aligned}$$

$$g(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t) = \begin{pmatrix} 1 & 4sin^2(\frac{\xi}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\xi = k\Delta x$.

Die Eigenwerte von g sind gleich 1, aber G^n ist nicht beschränkt.

Satz: Eine notwendige Bedingung für die Stabilität eines Differenzenverfahrens mit Verstärkungsmatrix g, ist daß

$$\rho(g) := max|\lambda_i| \leq 1 + \alpha\Delta t,$$

wo λ_i die Eigenwerte von g sind.

Beweis: Für jede Matrixnorm

$$||\cdot||$$

gilt:

$$\rho(g) \leq ||g||. \qquad \square$$

Die Bedingung

$$\rho(g) \leq 1 + \alpha\Delta t$$

heißt *von* Neumann Bedingung.

Satz: (GKO S. 175)
Es gebe eine Matrix

$$T(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t)$$

und eine Konstante K mit

a) $||T||, ||T^{-1}|| \leq K$, für alle $\mathbf{k}, \Delta\mathbf{x}, \Delta t$

b) $T^{-1}gT$ sein eine Diagonalmatrix.

Dann ist die von Neumann Bedingung notwendig und hinreichend für Stabilität.

Definition: Ein Matrix $A \in Mat(p, p, \mathbb{C})$ heißt *normal* falls

$$A^H A = AA^H$$

mit

$$A^H = \bar{A}^T.$$

Satz:(Golub und v. Loan, S. 313)
(Schur Zerlegung)
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$. Dann existiert eine unitäre Matrix $Q \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ mit

$$Q^H A Q = R.$$

wo R eine recht Dreiecksmatrix ist.

Satz: (Golub und van Loan, S. 314)
$A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ ist normal g.d.W. eine unitäre Matrix $Q \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ existiert mit

$$Q^H A Q = \Lambda$$

wo Λ eine Diagonalmatrix ist. □

Satz: Die Verstärkungsmatrix g sei normal. Dann ist die von Neumann Bedingung notwendig und hinreichend für Stabilität.

16.4 Eine Anwendung von Fourier Transformatoren: Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Wie schon vorher erwähnt, kann die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation hergeleitet werden.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t = u_{xx} \tag{16.14}$$
$$u(x, 0) = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{16.15}$$

Lemma 16.3 *Sei $u \in L_2(-\infty, +\infty, \mathbb{C}) \cap L_1(-\infty, +\infty, \mathbb{C})$. Die Ableitung $u_x = u'$ existiere für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $u' \in L_1$. Dann gilt:*

$$\widehat{u_x}(k) = +ik\hat{u}(k)\,, \quad k \in \mathbb{R}\,. \tag{16.16}$$

Beweis:
Es gilt für alle $A \in \mathbb{R}$ (Rudin, Satz 8.21, S. 179).

$$\begin{aligned} u(A)\cdot e^{-ikA} &= u(-A)\cdot e^{+ikA} + \int_{-A}^{+A} [u(x)e^{-ikx}]' dx \\ &= u(-A)\cdot e^{+ikA} + \int_{-A}^{+A} [u'(x)e^{-ikx} - iku(x)e^{-ikx}] dx \qquad (*) \end{aligned}$$

Da $u \in L_1$, gilt $\hat{u} \in C_0$ (Rudin, Satz 9.6, S. 184):

$$\lim_{A\to\infty} |u(A)| = \lim_{A\to-\infty} |u(A)| = 0 \ .$$

Weiter gilt (da $u, u_x \in L_1$), daß

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} u(x)e^{-ikx}dx \ , \quad \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} u_x(x)e^{-ikx}dx$$

existieren.
Das Lemma folgt aus (*).

Bemerkung 16.2 Es ist durchaus möglich, daß die Schlußfolgerung unter schwächeren Bedingungen beweisbar ist.

Satz 16.3 (Faltungssatz (Yosida, S. 148)) *Das Faltungsprodukt $f * g$ zweier Funktionen ist:*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \qquad (16.17)$$

Sei f, g und $f*g \in L_2$. Dann ist die Fouriertransformierte des Faltungsprodukts $f*g$ bis auf $\sqrt{2\pi}$ gleich dem Produkt der Fouriertransformierten der einzelnen Faktoren:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)\cdot(\mathcal{F}g) \qquad (16.18)$$

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f\cdot g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) \ . \qquad (16.19)$$

Beweis: (von (s.o.))

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(f*g))(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} \cdot e^{-iky} f(y)g(x-y)dx\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky} f(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} g(x-y)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky} f(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iku} g(u)du \\
&= \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \ .
\end{aligned}$$

Bemerkung 16.3 Sei $f, g \in L_1$. Dann ist $f * g \in L_1$ (Rudin, Satz 7.14, S. 146 und Satz 9.2, S. 181)

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g} \ .$$

Satz 16.4 (von CWC gebastelt!) *Sei* $X = L_2(-\infty, +\infty, \mathbb{R}) \cap L_1(-\infty, +\infty, \mathbb{R})$. *Sei weiter*

1. $f \in X$
2. $u(x,t)$ *eine Lösung von (6.46), (6.47) mit:*
   - *(a)* $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.
   - *(b)* $u(\cdot,t), u_x(\cdot,t), u_{xx}(\cdot,t) \in X$.

Dann gilt:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot f(\xi)d\xi \qquad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ t \in \mathbb{R}_+ \tag{16.20}$$

Beweis:
Es gilt nach Lemma 14.3, daß

$$\widehat{u_{xx}}(k,t) = -k^2 \hat{u}(k,t) \ , \quad k \in \mathbb{R}\ ,\ t \geq 0 \ ,$$

so daß , aus der Differentialgleichung (16.14),

$$\frac{d}{dt}\, \hat{u}(k,t) = -k^2 \hat{u}(k,t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Es folgt sofort, daß

$$\hat{u}(k,t) = e^{-k^2 t} \cdot \hat{f}(k) \ .$$

Nach Anwendung von Satz (Faltungssatz) folgt:

$$u(\cdot,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ f * g$$

mit

$$\begin{aligned} g(x,t) &:= (\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\cdot,t)))(x) \ , \\ \hat{g}(k,t) &:= e^{-k^2 t} \ . \end{aligned}$$

D.h.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi \ . \qquad (*)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} e^{+ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} (\cos\ kx + i \sin\ kx) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} \cos\ kx\ sk \qquad \text{(Da } \sin\ kx \text{ eine ungerade Funktion ist)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} \cdot k^{2n} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{t^{n+1/2}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s} \cdot s^{n-1/2} ds \left(k^2 t = s \ , \ 2dk = \frac{ds}{\sqrt{st}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{t} \right)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{t} \right)^n \cdot \frac{\Gamma(n+1/2) \cdot \sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1/2) \cdot 2^{2n+1/2}} \end{aligned}$$

da

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{2z-1/2} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z+1/2)$$

Es folgt

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{-x^2/4t} \qquad (**)$$

Die Gleichung (16.20) folgt sofort aus $(*)$ und $(**)$.

Bemerkung 16.4 Die Herleitung der Gleichung (16.20) war das Hauptziel der o.a. Überlegungen. Es wäre evtl. sinnvoll gewesen, hinreichende Glattheit von u und f anzunehmen, um damit die Beweise zu vereinfachen.

Die Funktion

$$G(x,\xi,t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, \exp[-(x-\xi)^2/4t] \qquad (16.21)$$

wird die *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung genannt.

Literatur:

Dunford, N., **Schwartz**, J.T.: Linear Operators I, II, III. Interscience.

Yosida, K.: Functional Analysis, second edition. Springer, 1968

Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw Hill, 1966.

Anhang A

Die Punktmechanik

A.1 Einleitung

Die Theorie partieller Differentialgleichungen wird sehr stark durch die Anwendungen beeinflußt, da dadurch interessante und wichtige Aufgaben erkannt werden können.
Viele partielle Differentialgleichungen entstehen in der Kontinuumsmechanik, die eine Erweiterung der Newtonschen Mechanik ist. Die Newtonsche Mechanik wird deshalb in diesem Kapitel kurz beschrieben.

A.2 Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome (Newton: 1643 - 1727) lauten:

Lex prima: Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Lex secunda: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Lex tertia: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Lex quarta: Zusatz zu den Bewegungsgesetzen: Regel vom Parallelogramm der Kräfte, d.h. Kräfte addieren sich wie Vektoren. Damit wird das Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen festgelegt (das Prinzip der ungestörten Überlagerung).

Sei nun M ein Massenpunkt mit:

$$
\begin{aligned}
m &= m(t): \quad \text{Masse zur Zeit} \quad t \\
\mathbf{x} &= \mathbf{x}(t): \quad \text{Koordinaten zur Zeit} \quad t \\
\mathbf{v} &= \mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}: \quad \text{Geschwindigkeit zur Zeit} \quad t \\
\mathbf{a} &= \mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}: \quad \text{Beschleunigung zur Zeit} \quad t
\end{aligned}
$$

Die Newtonschen Axiome lauten dann:

Axiom A.1 (Das Trägheitsgesetz) *Der Massenpunkt verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, bis dieser Zustand durch das Einwirken von Kräften beendet wird. D.h.*

$$\mathbf{F} = 0 \Longrightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \ . \tag{A.1}$$

Axiom A.2 (Das dynamische Grundgesetz) *Die erste zeitliche Ableitung des linearen Impulses des Massenpunktes ist gleich der auf ihn einwirkenden Kraft* $\mathbf{F}$*. D.h.*

$$\frac{d}{dt}\,(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \ . \tag{A.2}$$

Ist die Masse m *konstant, dann gilt:*

$$m\mathbf{a} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \ . \tag{A.3}$$

(Kraft = Masse mal Beschleunigung.)

Die Beziehung

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\,(m\mathbf{v}) \tag{A.4}$$

ist zum einen Definition der Kraft, zum anderen Gesetz.

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte $\mathbf{F}_i$ *auf den Massenpunkt, so gilt*

$$\frac{d}{dt}\,(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} := \Sigma_i \mathbf{F}_i \ . \tag{A.5}$$

Axiom A.3 (Das Reaktionsprinzip, Wechselwirkungsgesetz) *Übt der Massenpunkt M_1 auf einen Massenpunkt M_2 die Kraft $\mathbf{F}_{12}$ aus, so übt der Massenpunkt M_2 auf den Massenpunkt M_1 eine Kraft $\mathbf{F}_{21}$ aus, deren Betrag gleich dem von $\mathbf{F}_{12}$ und deren Richtung entgegengesetzt ist, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. (Kraft = Gegenkraft, zu jeder "actio" gehört eine "reactio".)*

A.3 Das n-Körperproblem

Das berühmteste Beispiel der Anwendung der Newtonschen Axiome ist das n-Körperproblem.

Seien M_1 bis M_n $(n > 1)$ n Punktmassen im $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten

$$\mathbf{r}_k(t) = (x_k(t), y_k(t), z_k(t))$$

und Massen m_k. Nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz übt die Masse M_ℓ $(\ell \neq k)$ eine Anziehungskraft

$$\mathbf{F}_{k\ell} = \gamma \, \frac{m_k m_\ell}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_k|} \tag{A.6}$$

auf M_k, wobei γ die Gravitationskonstante ist.

Die Bewegungsgleichungen der n Körper sind:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,(m_k \mathbf{r}_k(t)) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \mathbf{F}_{k\ell}\ ,\ 1 \leq k \leq n\ . \tag{A.7}$$

D.h. es gilt

$$m_k \ddot{x}_k = \gamma m_k \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{m_\ell \cdot (x_\ell - x_k)}{[|x_k - x_\ell|^2 + |y_k - y_\ell|^2 + |z_k - z_\ell|^2]^{3/2}} \tag{A.8}$$

mit entsprechenden Gleichungen für y_k und z_k. Dies ist ein System von $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die $3n$ Unbekannten $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$.

Das n-Körperproblem besteht in der Beschreibung des Gesamtverlaufes aller Lösungen der Bewegungsgleichungen für beliebig vorgegebene Anfangswerte. Trotz der Bemühungen hervorragender Mathematiker seit 250 Jahren ist dieses Problem für $n > 3$ bis heute ungelöst geblieben.

Die Geschichte des n-Körperproblems wird wie folgt in dem Buch von Siegel [1956, S. 21] beschrieben:

Im Jahre 1858 äußerte DIRICHLET zu seinem Freunde KRONECKER, er habe eine allgemeine Methode zur Behandlung der Probleme der Mechanik gefunden, und zwar gehe diese Methode nicht auf die direkte Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus, sondern bestehe in einer stufenweisen Annäherung an die Lösung des Problems. In einem anderen Gespräch sagte er noch, daß ihm der Beweis für die Stabilität des Planetensystems gelungen sei. Da DIRICHLET bald darauf starb und keine schriftlichen Aufzeichnungen über diese Entdeckungen hinterließ, so wissen wir nichts weiteres über seine Methode. WEIERSTRASZ vermutete, es handele sich dabei um Entwicklungen in Potenzreihen, und er bemühte sich dann, eine entsprechende Lösung des n-Körperproblems zu finden; auch wies er seine Schüler S. KOVALEVSKI und G. MITTAG-LEFFLER auf diesen Ansatz hin. Auf Anregung von MITTAG-LEFFLER stiftete der damalige König von Schweden und Norwegen sogar einen Preis für die Lösung der Aufgabe, eine für alle Zeiten gültige Reihenentwicklung der Koordinaten der n Körper zu finden. Der Preis wurde 1889 POINCARÉ zuerkannt, obwohl er die gestellte Aufgabe auch nicht gelöst hatte; doch enthält seine Preisschrift eine Fülle von originellen Ideen, die für die weitere Entwicklung der Mechanik von großer Bedeutung waren und auch andere Teile der Mathematik befruchteten. Schließlich wurde 20 Jahre später die Preisaufgabe im Falle $n = 3$ durch SUNDMAN gelöst. Die hauptsächliche Schwierigkeit des Problems rührt davon her, daß es bisher nicht gelang, etwaige Zusammenstöße von zwei Körpern durch geeignete Ungleichheitsbedingungen für die Anfangswerte von vornherein dauernd auszuschließen. SUNDMAN umging diese Schwierigkeit, indem er an Stelle der Zeit t eine neue unabhängige Variable ω derart einführte, daß t und die sämtlichen Koordinaten q als Funktionen von ω auch bei einem Zusammenstoßzweier Körper noch regulär bleiben, und so gewann er Reihenentwicklungen von q und t nach Potenzen von ω, welche den gesamten Bewegungsvorgang darstellen.

Das n-Körperproblem bleibt noch ungelöst. Neuere Ergebnisse werden in Siegel und Moser [1971], Abraham und Marsden [1978] beschrieben.

A.4 Arbeit und Energie

Sei M ein Massenpunkt, der einer Kraft $\mathbf{F}$ unterworfen ist und sich entlang einer Kurve C von P_1 nach P_2 bewegt.
Die geleistete Arbeit ist:

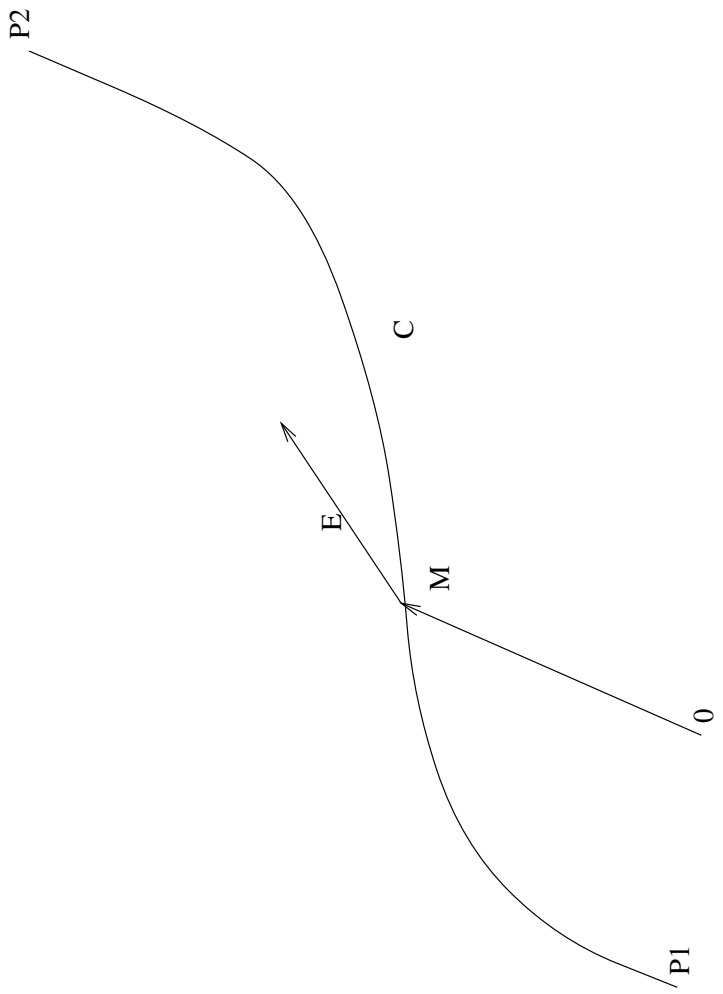


Abbildung A.1: Bewegung eines Massenpunktes

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}(t)$$

Um einen Massenpunkt M zu beschleunigen und ihn auf eine bestimmte Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ zu bringen, mußArbeit geleistet werden. Diese steckt dann in Form von kinetischer Energie T im Massenpunkt. D.h.

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (m\frac{d\mathbf{v}}{dt}) \cdot \mathbf{v}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m\, \frac{d}{dt}\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt \\ &= \frac{1}{2}\, m\, (|\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2) \\ &= T_2 - T_1 \end{aligned}$$

wobei

$$T := \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$$

die kinetische Energie eines Massenpunktes M mit Masse m und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ist.

Sei $\mathbf{F}$ eine Kraft, die auf einen Massenpunkt M mit Koordinaten $\mathbf{r}$ einwirkt. Sei $V(\mathbf{r})$ eine reelle Funktion mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\text{grad}\, V(\mathbf{r}) \\ &= -\nabla V(\mathbf{r}) \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Man spricht dann von einem konservativen Kräftefeld.

Wenn sich ein Massenpunkt unter Einwirkung einer konservativen Kraft $\mathbf{F}$ von P_1 nach P_2 entlang einer Kurve C bewegt, ist die geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_{P_1}^{P_2} \text{grad}\, V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= V(P_1) - V(P_2) \, . \end{aligned}$$

Diese Arbeit ist in diesem Fall somit wegunabhängig.

Gilt

$$\mathbf{F}^{(1)} = -\text{grad}\, V(\mathbf{r}) \,,$$

dann heißt die skalare Größe $V(\mathbf{r})$ potentielle Energie, skalares Potential oder kurz Potential.

Beispiel A.1 *Bei dem n-Körperproblem ist die Gravitationskraft, die auf den Massenpunkt M_k einwirkt, gleich*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \mathbf{F}_{k\ell} \\ &= \gamma m_k \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{m_\ell \cdot (\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|^3} \\ &= -grad_{\mathbf{r}_k}\, V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \end{aligned}$$

mit

$$V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = -\gamma \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{m_j m_\ell}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_\ell|} \,,$$

so daß bei dem n-Körperproblem die Gravitationsskräfte konservativ sind.

Beweis:

Sei

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{a}) &:= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \\ &= \frac{1}{[(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-1/2}{[(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2]^{3/2}} \cdot 2(x-a_1) = -\frac{x-a_1}{|r-a|^3}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{r}}\, \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \,. \end{aligned}$$

Für V gilt:

$$V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = -\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell-1} \gamma m_j m_\ell \varphi(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_\ell) \ ,$$

so daß

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{r}_k} V &= \text{- grad}_{\mathbf{r}_k} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \gamma m_k m_\ell \varphi(\mathbf{r}_k; \mathbf{r}_\ell) \\ &= -\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \gamma m_k m_\ell \ \text{grad}_{\mathbf{r}_k} \varphi(\mathbf{r}_k; \mathbf{r}_\ell) \\ &= +\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \gamma m_k m_\ell \ \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell|^3} \\ &= -\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{k} \mathbf{F}_{k\ell} = -\mathbf{F}_k \end{aligned}$$

Bemerkung A.1

$$\textit{div grad}\, \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{a}) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \ ,$$

so daß φ und V die Laplace-Gleichung erfüllen.

Beweis:

Sei ohne Einschränkung $a = 0$.

$$\varphi_x = -\frac{x}{|r|^2} \cdot \varphi \ ,$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= -\frac{\varphi}{|r|^2} + \frac{x}{|r|^4} \cdot 2x \cdot \varphi - \frac{x}{|r|^2} \cdot \varphi_x \\ &= -\frac{\varphi}{|r|^2} + \frac{2 \cdot x^2 \varphi}{|r|^4} + \frac{x^2 \varphi}{|r|^4} \\ &= -\frac{\varphi}{|r|^2} + 3\varphi \frac{x^2}{|r|^4} \end{aligned}$$

Die Tatsache, daß φ eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, folgt durch Summation von φ_{xx} , φ_{yy} und φ_{zz}.

Diese Eigenschaft von φ und V wird später verallgemeinert.

A.5 Erhaltungssätze

Seien $M_1, \ldots, M_n$ ein System von Punktmassen. Der Vektor

$$\mathbf{p} := \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k$$

heißt linearer Impuls des Systems.

Behauptung A.1 (Erhaltung des linearen Impulses) *Solange keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist der lineare Impuls konstant.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} (m_k \mathbf{v}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \qquad \text{(Lex secunda)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \mathbf{F}_{k\ell} \\
&= 0 \ ,
\end{aligned}$$

da $\mathbf{F}_{k\ell} = -\mathbf{F}_{\ell k}$ (Lex tertia).

Der Vektor

$$\mathbf{L} := \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$$

heißt Drehimpuls des Systems. Der Vektor

$$\mathbf{D} := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$$

heißt Drehmoment.

Behauptung A.2 (Erhaltung des Drehimpulses) *Solange keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist der Drehimpuls konstant.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{v}}_k + \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \times \mathbf{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{k\ell} \qquad (\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell<k}^{n} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell) \times \mathbf{F}_{k\ell} \\
&= 0
\end{aligned}$$

da $\mathbf{F}_{k\ell}$ ein Vielfaches von $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell)$ ist.

Behauptung A.3 (Erhaltung der Energie) *Solange keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist die Gesamtenergie $E := T + V$ konstant.*

Beweis: Es gelte:

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k = -\mathrm{grad}_{\mathbf{r}_k} V$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k |\mathbf{v}_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \mathbf{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{F}_k \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{r}_k} V \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{grad}_{\mathbf{r}_k} V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\
&= -\frac{dV}{dt}\,.
\end{aligned}$$

Als erstes Integral für eine C^1-Kurve $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet man eine C^1-Funktion $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{dt} H(\xi(t)) \equiv 0$, d.h. H ist konstant längs der Kurve $\xi(t)$.

Für das n-Körperproblem ergeben sich also folgende erste Integrale für $(x_1, \ldots, \dot{z}_n) \in \mathbb{R}^{6n}$:

a) 3 erste Integrale, die die Erhaltung des linearen Impulses beschreiben, z.B.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k = \text{const}$$

b) 3 erste Integrale, die die Erhaltung des Drehimpulses beschreiben, z.B.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \text{const}$$

c) 1 erstes Integral, das die Erhaltung der Gesamtenergie beschreibt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k |\mathbf{v}_k|^2 + V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \text{const}$$

d) 3 weitere erste Integrale, z.B.:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - t\dot{x}_k) = \text{const}$$

Es wurde von Bruns gezeigt, daß jedes weitere algebraische erste Integral für das n-Körperproblem eine Linearkombination dieser zehn ist.

Literatur

Abraham, R.; **Marsden**, J.E.: Foundations of Mechanics. Reading, Mass.: Benjamin Cummings, 1978.

Siegel, C.L.: Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956.

Siegel, C.L.; **Moser**, J.K.: Lectures on Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.

Anhang B

Die Laplace-Transformation

B.1 Einleitung

Sei f eine Funktion, die für $t \geq 0$ definiert ist. Aus dieser Funktion f bildet die Laplace-Transformation eine Funktion $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ auf folgende Weise:

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \ . \tag{B.1}$$

Z.B. ist $f(t) = e^{-t}$, dann ist

$$\hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} dt = \frac{1}{1+s} \ .$$

Die Laplace-Transformation findet mehrere Anwendungen bei der Wärmeleitungsgleichung.
Ist $u(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, dann definieren wir $\hat{u}(x,s)$:

$$\hat{u}(x,s) := \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt \ .$$

Es läßt sich dann leicht feststellen, daß $\hat{u}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt:

$$s\hat{u}(x,s) - u(x,0) = \hat{u}_{xx}(x,s) \ .$$

Ist diese gewöhnliche Differentialgleichung analytisch lösbar, dann wird $u(x,s)$ gewonnen durch die inverse Laplace-Transformation, auf $\hat{u}(x,s)$ anzuwenden.

Sehr viele der bekannten analytischen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind mit Hilfe der Laplace-Transformation herleitbar.

B.2 Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation (B.1) läßt sich auch im Sinne des Lebesgueschen Integrals definieren (siehe Dunford-Schwartz), aber wir beschränken uns auf (eigentliche und uneigentliche) Riemann Integration.

Definition B.1 *Eine Funktion $f(t)$ heißt J-Funktion, falls:*

1. *$f(t)$ ist im Intervall $[0, +\infty]$ definiert bis auf isoliert liegende Ausnahmestellen.*
2. *$f(t)$ ist in jedem endlichen Teilintervall $[T_1, t_2]$ eigentlich integrabel bis auf höchstens endlich viele Stellen, wo sie absolut uneigentlich integrabel ist, d.h.*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0} |f(t)|dt + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{x_0}^{x_{0+\epsilon}} |f(t)|dt$$

existiert.

Definition B.2 *Sei f eine J-Funktion. Gibt es $s_0 \in \mathbf{C}$ derart, daß der Grenzwert*

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^{\omega} e^{-s_0 t} f(t)dt$$

existiert, so heißt $f(t)$ L-Funktion. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\Omega = \Omega(\epsilon)$ so wählen kann, daß

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(t) e^{-s_0 t} dt \right| < \epsilon$$

für jedes Wertepaar ω_1, ω_2 mit $\Omega \leq \omega_1 \leq \omega_2$.

Der Wert

$$\hat{f}(s_0) := \int_0^{\infty} e^{-s_0 t} \, f(t)dt = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^{\omega} e^{-s_0 t} f(t)dt$$

heißt das Laplace-Integral von $f(t)$ für den Parameterwert s_0 .

Ein besonderer Fall ist der, daß das Laplace-Integral absolut konvergiert, d.h. daß

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^{\omega} |e^{-s_0 t} f(t)|dt$$

existiert. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\Omega = \Omega(\epsilon)$ so bestimmen kann, daß

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\mathbb{R}\, s_0 \cdot t} |f(t)| dt < \epsilon$$

für $\Omega \leq \omega_1 \leq \omega_2$. $f(t)$ *heißt dann eine* L_a*-Funktion .*

Satz B.1 (Doetsch I, S. 33) *Ist*

$$|f(t)| \leq C \quad \textit{für} \quad t \geq T \, ,$$

so ist das Laplace-Integral für jeden Parameterwert s_0 *mit* $\mathbb{R}s_0 > 0$ *absolut konvergent.*

Satz B.2 (Doetsch I, S. 33) *Ist ein Laplace-Integral in einem Punkt* s_0 *absolut konvergent, so ist es in der abgeschlossenen Halbebene* $\mathbb{R}s \geq \mathbb{R}s_0$ *absolut konvergent.*

Satz B.3 (Doetsch I, S. 34) *Das genaue Gebiet absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals ist eine offene oder abgeschlossene Halbebene* $\mathbb{R}s > \alpha$ *bzw.* $\mathbb{R}s \geq \alpha$*, wobei* α *reell ist und* $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$*. Der Rand* $\mathbb{R}s = \alpha$ *kann nur entweder ganz (wie bei der Funktion* $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\alpha = 0$*) oder gar nicht (wie bei der Funktion* $f(t) = 1$, $\alpha = 0$*) zum Gebiet absoluter Konvergenz gehören.* α *heißt Abszisse absoluter Konvergenz, das Gebiet* $\mathbb{R} > \alpha$ *bzw.* $\mathbb{R}s \geq \alpha$ *heißt Halbebene absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals.*

Satz B.4 (Fundamentalsatz (Doetsch I, S. 35)) *Konvergiert ein Laplace-Integral für* s_0*:*

$$\hat{f}(s_0) = \int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt$$

so konvergiert es in jedem Winkelraum $W(s_0, \psi < \pi/2)$ *gleichmäßig. Insbesondere konvergiert es also für jedes* s *der offenen Halbebene* $\mathbb{R}s > \mathbb{R}s_0$*. Sei*

$$\Phi(t) := \int_0^{t} e^{-s_0 \tau} f(\tau) d\tau \quad \textit{für} \quad t \geq 0 \, . \tag{B.2}$$

Dann gilt:

1.

$$\hat{f}(s) = (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) dt \quad \textit{für} \quad \mathbb{R}s > \mathbb{R}s_0 \tag{B.3}$$

2.

$$\hat{f}(s) = \hat{f}(s_0) + \int_0^\infty (s - s_0) e^{-(s-s_0)t} [\Phi(t) - \hat{f}(s_0)] dt$$
$$\textit{für} \quad \mathbb{R}s > \mathbb{R}s_0 \quad \textit{und} \quad s = s_0 \ . \tag{B.4}$$

Die in (B.3) und (B.4) vorkommenden Integrale konvergieren für $\mathbb{R}s > \mathbb{R}s_0$ absolut, das in (B.4) konvergiert gleichmäßig in jedem $W(s_0, \psi < \pi/2)$.

Beweis:
Durch partielle Integration folgt für beliebiges komplexes s:

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega e^{-st} f(t) dt &= \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t) dt \\
&= e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) \Big|_0^\omega + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) dt \\
&= e^{-(s-s_0)\omega} \Phi(\omega) + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) dt \ .
\end{aligned}$$

Addiert man hierzu die Gleichung

$$0 = \hat{f}(s_0)(1 - e^{-(s-s_0)\omega}) - (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} \hat{f}(s_0) dt \ ,$$

so ergibt sich:

$$\int_0^\omega e^{-st} f(t) dt = \hat{f}(s_0) + e^{-(s-s_0)\omega} [\Phi(\omega) - \hat{f}(s_0)] + \int_0^\omega (s - s_0) e^{-(s-s_0)t} [\Phi(t) - \hat{f}(s_0)] dt \ . \quad (*)$$

Wegen $\Phi(\omega) \to \hat{f}(s_0)$ für $\omega \to \infty$ konvergiert der zweite Summand auf der rechten Seite von $(*)$ für $\omega \to \infty$ in der Halbebene $\mathbb{R}s \geq \mathbb{R}s_0$ gleichmäßig und zwar gegen 0 .

Wegen $\Phi(\omega) \to \hat{f}(s_0)$ für $\omega \to \infty$ ist $|\Phi(\omega) - \hat{f}(s_0)|$ beschränkt. Der dritte Summand in $(*)$ konvergiert gleichmäßig im Winkelraum W. Die linke Seite konvergiert also auch gleichmäßig in W und es gilt:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \hat{f}(s_0) + \int_0^\infty (s - s_0) e^{-(s-s_0)t} [\Phi(t) - \hat{f}(s_0)] dt \ .$$

Das ist der Ausdruck (B.4), der für $s = s_0$ und für jedes s mit $\mathbb{R}s > \mathbb{R}s_0$ gilt, da man jedes solche s in einen Winkelraum W einfassen kann.

Läßt man den Punkt s_0 weg und betrachtet nur $\mathbb{R}s > \mathbb{R}s_0$, so ist

$$(s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \hat{f}(s_0) dt$$

konvergent und gleich $\hat{f}(s_0)$, so daß sich (B.4) auf (B.3) reduziert.

Die Funktionen $\Phi(t)$ und $\Phi(t) - \hat{f}(s_0)$ sind für $t \geq 0$ stetig und haben Grenzwerte für $t \to \infty$, sind also beschränkt, so daß die Integrale (B.3) und (B.4) nach Satz B.1 für $\mathbb{R}(s - s_0) > 0$ absolut konvergieren.

Der folgende Satz beschreibt die Konvergenzeigenschaften für (einfache) Konvergenz.

Satz B.5 (Doetsch I, S. 37) *Das genaue Gebiet der (einfachen) Konvergenz des Laplace-Integrals ist eine Halbebene $\mathbb{R}s > \beta$, deren Rand $\mathbb{R}s = \beta$ ganz, teilweise oder gar nicht zum Konvergenzgebiet gehören kann, wobei $-\infty \leq \beta \leq +\infty$.*

β heißt Konvergenzabszisse, das Gebiet $\mathbb{R}s > \beta$ mit Einschlußder eventuellen Konvergenzpunkte auf $\mathbb{R}s = \beta$ die Konvergenzhalbebene, die Gerade $\mathbb{R}s = \beta$ die Konvergenzgerade des Laplace-Integrals.

Bemerkung B.1 $-\infty \leq \beta \leq \alpha \leq +\infty$, wobei alle überhaupt denkbaren Fälle vorkommen können.

Beispiel B.1

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$	Konvergenzgebiet
1	$\frac{1}{s}$	$\mathbb{R}s > 0$
$\left.\begin{array}{ll} 0 & , \ 0 \leq t \leq a \\ 1 & , \ t > a \end{array}\right\}$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$\mathbb{R}s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathbb{R}s > \mathbb{R}a$
$\log\ t$	$\frac{\Gamma'(1)}{s_s} - \frac{\log\ s}{s}$	$\mathbb{R}s > 0$
$\cosh\ at$	$\frac{}{s^2 - a^2}$	$\mathbb{R}s > \lvert\mathbb{R}a\rvert$
$\sinh\ at$	$\frac{}{s^2 - a^2}$	$\mathbb{R}s > \lvert\mathbb{R}a\rvert$
$\cos\ at$	$\frac{}{s^2 + a^2}$	$\mathbb{R}s > \lvert Ia\rvert$
$\sin\ at$	$\frac{}{s^2 + a^2}$	$\lvert\mathbb{R}s\rvert > \lvert Ia\rvert$
$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$	$\mathbb{R}s > 0$

Weitere Eigenschaften:
Ist $\mathcal{L}(f)$ bekannt und $f_1(t) := f(at + b)$, dann läßt sich $\mathcal{L}(f_1)$ leicht berechnen, z.B.:

Satz B.6 (Doetsch I, S. 85) *Ist f eine L-Funktion*

$$f_1(t) = f(at) \ , \quad a > 0 \ , \tag{B.5}$$

so ist f_1 eine L-Funktion und

$$\hat{f}_1(s) = \frac{1}{a} \, \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \tag{B.6}$$

$\mathcal{L}(f_1)$ ist konvergent für $\mathbb{R}s > a\beta$, wenn $\mathcal{L}(f)$ für $\mathbb{R}s > \beta$ konvergiert.

Satz B.7 *Ist $f(t)$ eine L-Funktion, so ist auch $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ eine solche. Wenn $\mathcal{L}(f)$ für ein reelles $s_0 \geq 0$ (einfach) konvergiert, so konvergiert $\mathcal{L}(\varphi)$ im Falle $s_0 = 0$ für $\mathbb{R}s > 0$, im Falle $s_0 > 0$ für $s = s_0$ und $\mathbb{R}s > s_0$ und es ist*

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{L}(\varphi(t)) & = & \frac{1}{s}\,\mathcal{L}(f(t)) & \left\{ \begin{array}{llllll} \textit{für} & \mathbb{R}s > 0 & \textit{im Falle} & s_0 = 0 \ , \\ \textit{für} & s = s_0 & \textit{und} \quad \mathbb{R}s > s_0 & \textit{im Falle} & s_0 > 0 \ . \end{array} \right. \\ \textit{d.h.} \hat{\varphi}(s) & = & \frac{1}{s}\,\hat{f}(s) & \end{array} \tag{B.7}$$

Außerdem ist

$$\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0(1) & , & \textit{wenn} \quad s_0 = 0 \ , \\ 0(e^{s_0 t}) \quad \textit{für} \quad t \to \infty & , & \textit{wenn} \quad s_0 > 0 \ , \end{array} \right. \tag{B.8}$$

so daß $\mathcal{L}(\varphi)$ für $\mathbb{R}s > s_0$ sogar absolut konvergiert.

Beweis:
Im Falle $s_0 = 0$ folgt die Gleichung $\hat{f}(s) = s\hat{\varphi}(s)$ für $\mathbb{R}s > 0$ aus Satz 15.4, Gleichung (B.3). Daßdie stetige Funktion $\varphi(t)$ beschränkt ist, ergibt sich daraus, daß $\mathcal{L}(f)$ für $s = 0$, d.h. $\int_0^\infty f(t)dt$ existiert, also $\varphi(t)$ für $t \to \infty$ einen Grenzwert hat.

Im Falle $s_0 > 0$ setzen wir

$$\psi(x) := \int_0^x e^{-s_0 t}\varphi(t)dt \qquad (x > 0)$$

und

$$g(x) = e^{s_0 x}\psi(x) \ , \quad h(x) = e^{s_0 x} \ .$$

Dann ist $g'(x)$ und $h'(x)$ für $x > 0$ vorhanden [wegen der Stetigkeit von $\varphi(t)$], $h'(x) \neq 0$, $h(x)$ reell, $h(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ (hierfür wird $s_0 > 0$ gebraucht) und

$$\begin{aligned}
\frac{g'(x)}{h'(x)} &= \frac{e^{s_0 x}(s_0\psi + \psi')}{s_0 e^{s_0 x}} = \frac{1}{s_0}\,(s_0\psi + \psi') \\
&= \frac{1}{s_0}\left[s_0 \int_0^x e^{-s_0 t}\varphi(t)dt + e^{-s_0 x}\varphi(x)\right] \\
&= \frac{1}{s_0}\left[-e^{-s_0 t}\varphi(t)\Big|_0^x + \int_0^x e^{-s_0 t} f(t)dt + e^{-s_0 x}\varphi(x)\right] \\
&= \frac{1}{s_0}\int_0^x e^{-s_0 t} f(t)dt\ .
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}(f)$ für s_0 konvergiert, hat $g'(x)|h'(x)$ für $x \to \infty$ den Grenzwert $\hat{f}(s_0)/s_0$, folglich hat nach der de l'Hospitalschen Regel $g(x)/h(x)$ denselben Grenzwert:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \psi(x) = \int_0^x e^{-s_0 t}\varphi(t)dt \to \frac{1}{s_0}\, f(s_0)\ ,$$

das heißt

$$\hat{\varphi}(s_0) = \frac{1}{s_0}\,\hat{f}(s_0)\ .$$

Die Gleichung

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty}\ \frac{g'(x)}{h'(x)}\ ,$$

das heißt

$$\lim_{x\to\infty}\ \psi(x) = \lim_{x\to\infty}\ \frac{1}{s_0}\,[s_0\psi(x) + \psi'(x)]$$

zeigt weiterhin, daß

$$\lim_{x\to\infty}\ \psi'(x) = \lim_{x\to\infty}\ e^{-s_0 x}\varphi(x) = 0\ ,$$

also

$$\varphi(x) = 0(e^{s_0 x})$$

ist.

Für jedes reelle $s > s_0$ trifft die Voraussetzung erst recht zu, so daß die Gleichung $\varphi(s) = f(s)/s$ auch für diese s gilt. Da, wie gezeigt werden kann, $f(s)$ und $\varphi(s)$ analytische Funktionen sind, dehnt sie sich auf $\mathbb{R}s > s_0$ aus.

Satz B.8 (Doetsch I, S. 99) *Sei $f(t)$ für $t > 0$ differenzierbar und $f'(t)$ eine L-Funktion.*
Dann gilt:

1. *f ist eine L-Funktion.*

2. *Der Grenzwert*
$$f_0 := \lim_{t \to +0} f(t)$$
existiert.

3. *Wenn $\mathcal{L}(f')$ für ein reelles $s_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert $\mathcal{L}(f)$ auch für s_0, und es ist*
$$\widehat{f'}(s) = s\,\hat{f}(s) - f(0) \tag{B.9}$$
für $s = s_0$ und $\mathbb{R}s > s_0$.

4. *$\mathcal{L}(f)$ ist für $\mathbb{R}s > s_0$ absolut konvergent.*

Beweis:
In Satz B.7 ersetzt man f durch f'. Es folgt aus Gleichung (B.7), mit
$$\varphi(t) = f(t) - f(0),$$
$$\begin{aligned} \hat{f}(s) - \frac{1}{s}\, f(0) &= \hat{\varphi}(s) \\ &= \frac{1}{s}\, \widehat{f'}(s)\ . \end{aligned}$$

Satz B.9 (Doetsch I, S. 100) *Sei $f(t)$ für $t > 0$ n-mal differenzierbar und $f^n(t)$ eine L-Funktion.*

Dann:

1. *$f(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ sind L-Funktionen.*

2. *Die Grenzwerte*
$$f^{(k)}(0) := \lim_{t \to 0} f^{(k)}(t)\ , \quad 0 \le k \le n-1$$
existieren.

3. *Wenn $\mathcal{L}(f)$ für ein reelles $s_0 > 0$ konvergiert, so konvergiert $\mathcal{L}(f)$ auch für s_0 und es ist*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) \cdot s^{n-k} \quad \textit{für} \quad s = s_0 \quad \textit{und} \quad \mathbb{R}s > s_0 \ . \tag{B.10}$$

Beispiel B.2 Man löse die Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \sin\ t \\ y(0) &= y_0\ , \quad y'(0) = y_0' \ . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{y} &= s^2\hat{y} - sy_0 - y_0' \\ \mathcal{L}(\sin\ t) &= \frac{1}{1+s^2} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{y_0}{s} + \frac{y_0'}{s^2} + \frac{1}{s^2(1+s^2)} \\ &= \frac{y_0}{s} + \frac{y_0'}{s^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} \qquad \text{und} \\ y(t) &= y_0 + y_0' \cdot t + 1 - \sin\ t \end{aligned}$$

Bemerkung B.2 Da $\frac{1}{s^2}$ nicht meromorph ist, kann für diese Funktion der Residuensatz nicht benutzt werden.

B.3 Die komplexe Umkehrformel für die Laplacesche Transformation

Für die Fourier-Transformation gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iu\xi} du \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} \hat{f}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \ . \end{aligned}$$

Sei nun

$$f_1(t) := e^{-\gamma t} f(t) H(t)$$

für geeignete $\gamma > 0$, wo $H(t)$ die Heaviside Funktion ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) e^{-iu\xi} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\xi} d\xi \int_{0}^{\infty} f(u) e^{-\gamma u} e^{-iu\xi} du \ . \end{aligned}$$

Setze $s := \gamma + i\xi$,

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \ .$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\xi} d\xi \int_{0}^{\infty} f(u) e^{-su} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \hat{f}(s) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds \ . \end{aligned}$$

Hiermit haben wir die komplexe Umkehrformel heuristisch hergeleitet.
Es gibt mehrere Sätze über die Umkehrformel. Der folgende Satz genügt für viele Zwecke:

Satz B.10 (Doetsch I, S. 263) *$\hat{f}(s)$ sei in der Halbebene $\mathbb{R}s > x_1 \geq 0$ holomorph und in der Gestalt*

$$\hat{f}(s) = \frac{c}{s^\alpha} + \frac{g(s)}{s^{1+\epsilon}} \ , \quad (0 < \alpha \leq 1 \ , \ \epsilon > 0)$$

darstellbar, wo $g(s)$ in jeder Halbebene $\mathbb{R}s \geq x_1 + \delta > x_1$ beschränkt ist. Dann ist $\hat{f}(s)$ die Laplace- Transformierte der Funktion

$$f(t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} e^{ts} \hat{f}(s) ds \ , \quad (x > x_1) \ . \tag{B.11}$$

Das Integral (B.11) ist als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen. Es existiert für jedes $t > 0$ und ist von x unabhängig.

Beispiel B.3

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{s}{s^2-a^2}\ ,\ a \quad \text{reell}\\ \hat{f}(s) &= \frac{1}{s}+\frac{a^2}{s(s^2-a^2)}\\ &= \frac{1}{s}+\frac{g(s)}{s^3}\\ g(s) &:= \frac{a^2s^2}{s^2-a^2}\ .\end{aligned}$$

Satz B.10 ist daher anwendbar mit $c=1\ ,\ \alpha=1\ ,\ \epsilon=2\ ,\ x_1=2a\ .$

$$f(t)=V.P.\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}f(s)ds\ .$$

Für die Berechnung von $f(t)$ ist es oft nützlich, den Integrationsweg zu deformieren.

Satz B.11 (Doetsch, S. 224) *Es sei eine Schar von Halbkreisen H_n um $s=0$ links von der imaginären Achse mit den Radien ρ_n gegeben, wobei $\rho_0<\rho_1,\ldots,\rho_n\longrightarrow\infty$.*

Eine Funktion $f(s)$ sei auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ definiert, stetig, und genüge auf H_n der Abschätzung

$$|f(s)|\le\delta_n\ ,\quad \textit{wo}\quad \delta_n\longrightarrow 0\quad \textit{für}\quad n\longrightarrow\infty\ .$$

Dann ist

$$\int\limits_{H_n} e^{ts}f(s)ds\longrightarrow 0\quad \textit{bei}\quad t>0\quad \textit{für}\quad n\longrightarrow\infty\ .$$

Beweis:
Für $s:=\rho e^{i\theta}$ gilt

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{H_n} e^{ts}f(s)ds\Big| &\le \delta_n\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t\rho_n\cos\theta}\rho_n d\theta\\ &= \delta_n\int\limits_{0}^{\pi} e^{-t\rho_n\cos\theta}\rho_n d\theta\\ &= 2\delta_n\rho_n\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-t\rho_n\sin\theta}d\theta\ .\end{aligned}$$

Für $0\le\theta\le\pi/2$ gilt:

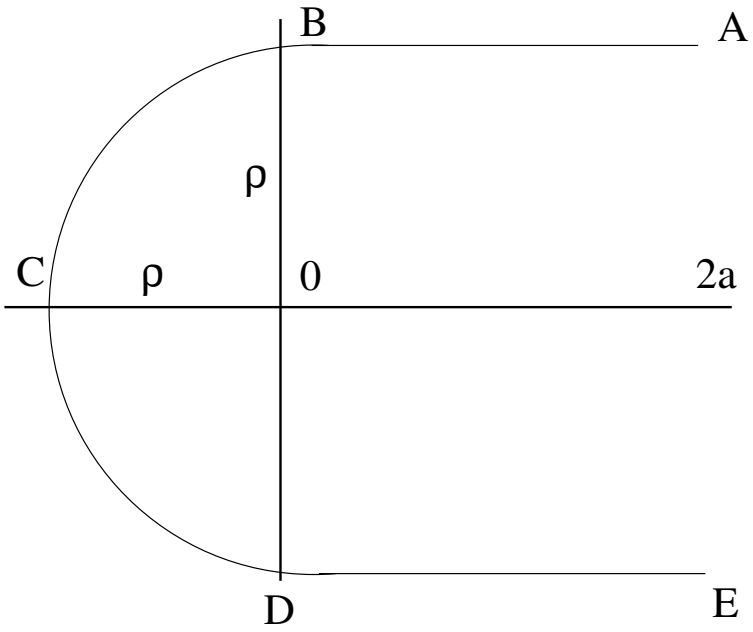


Abbildung B.1: Der deformierte Weg für Beispiel B.2

$$\sin\ \theta \geq \frac{2}{\pi}\,\theta$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_{H_n} e^{ts} f(s)ds\right| &\leq 2\delta_n\rho_n \int\limits_0^{\pi/2} e^{-t\rho_n 2\theta/\pi} d\theta \\ &= 2\delta_n \frac{1-e^{-t\rho_n}}{(2/\pi)t} \longrightarrow 0 \quad \text{bei} \quad t>0 \quad \text{für} \quad n\longrightarrow\infty\ . \end{aligned}$$

Beispiel 17.2 Fortsetzung
Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2a-i\rho}^{2a+i\rho} e^{st}\,\frac{s}{s^2-a^2}\,ds = r_+(t) + r_-(t) - I(\rho)\ ,$$

wobei r_+ bzw. r_- das Residuum in dem Pol $+a$ bzw. $-a$ bezeichnen und I das Integral um den Weg ABCDE bezeichnet (siehe Abbildung B.1).
Nachdem (siehe Hilfssatz 2)

$$\begin{aligned} I(\rho) &\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \rho\longrightarrow\infty \\ r_+ &= \frac{1}{2}\,e^{+at} \\ r_- &= \frac{1}{2}\,e^{-at} \end{aligned}$$

folgt, daß $f(s)$ die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \frac{1}{2}\,(e^{at} + e^{-at}) = \cosh\ at$$

ist.

Beispiel B.4 [Carslaw + Jaeger, S. 327]

Wir betrachten die Wärmeleitung in einem unendlich langen Zylinder vom Radius a mit der Anfangstemperatur Null und der äußeren Temperatur V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\kappa}\,\frac{\partial v}{\partial t} &= 0\ , \quad (0 \le r < a\ ,\ t > 0) \\ v(r,0) &= 0\ ,\ 0 \le r \le a \\ v(a,t) &= V\ ,\ t > 0\ . \end{aligned}$$

Für $\hat{v} = Lv$ gilt:

$$\frac{d^2\hat{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\hat{v}}{r} - q^2\hat{v} = 0\ ,\ 0 \le r < a\ , \tag{B.12}$$

wobei $q^2 = s/\kappa$, weil

$$L\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = s\hat{v} - 1 \cdot v(r,0) = s\hat{v}\ .$$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \hat{v} \quad \text{beschränkt bei} \quad r &= 0 \\ \hat{v}(a,s) = L(V) &= V/s\ . \end{aligned} \tag{B.13}$$

Die Besselsche Gleichung für $J_0(x)$ ist:

$$\ddot{y} + \frac{1}{x}\,\dot{y} + y = 0\ .$$

$$z := I_0(qx) := J_0(iqx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}qx\right)^{2r}}{r!r!}$$

erfüllt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= iq\ \left.\frac{dJ_0}{dx}\right|_{iqx} \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= (iq)^2\ \left.\frac{d^2J_0}{dx^2}\right|_{iqx} \end{aligned}$$

Nachdem

$$\frac{d^2 J_0}{dx^2}\,(iqx) + \frac{1}{iqx}\,\frac{dJ_0}{dx}\,(iqx) + J_0(iqx) = 0$$

folgt

$$\frac{1}{(iq)^2}\,\ddot{z} + \frac{1}{iqx}\cdot\frac{1}{iq}\,\dot{z} + z = 0$$

oder

$$\ddot{z} + \frac{1}{x}\,\dot{z} - q^2 z = 0\ .$$

Es folgt, daß die Lösung (B.12), (B.13) ist:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{V}{s}\,\frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}\ , \\ q^2 &= s/\kappa\ . \end{aligned} \tag{B.14}$$

Zur Berechnung von $v = L^{-1}(\hat{v})$ wird die Umkehrformel angewandt:

$$v(r,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\frac{V}{s}\,\frac{I_0(\sqrt{s/\kappa}\,r)}{I_0(\sqrt{s/\kappa}\,a)}\,ds\ . \tag{B.15}$$

Die Nullstellen von $J_0(x)$ seien $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \longrightarrow \infty$.
Die Nullstellen von

$$I_0(qa) = J_0(iqa)$$

sind deshalb bei

$$iq_n a := \alpha_n$$

oder

$$s_n := \kappa q_n^2 := -\frac{\kappa}{a^2}\,\alpha_n^2\ .$$

Es folgt aus (B.15) durch Residuumberechnung, daß

$$v(r,t) = V + \sum_{n=0}^{\infty}\ e^{s_n t}\frac{V}{s_n}\,\frac{I_0(q_n r)}{\frac{d}{ds}\,I_0(qa)\Big|_{s=s_n}}$$

Zur Berechnung von $\frac{d}{ds}\,I_0(qa)$ ist die Beziehung

$$\frac{\nu}{x}\,J_\nu(x) - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)$$

nützlich. Für $\nu = 0$ folgt:

$$J'_0(x) = J_1(x)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\, I_0(qa) &= \frac{d}{ds}\, J_0(iqa) \\ &= \frac{ia}{2q\kappa} \cdot J_0'(iqa) \\ &= -\frac{ia}{2q\kappa}\, J_1(iqa)\ .\end{aligned}$$

Es folgt $(iq = \alpha_n/a)$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\, I_0(qa)\right|_{s=s_n} &= \frac{-ia \cdot a \cdot i}{2\kappa\, \alpha_n}\, J_1(\alpha_n) \\ &= +\frac{a^2}{2\kappa\alpha_n}\, J_1(\alpha_n)\end{aligned}$$

und

$$v(r,t) = V - 2V \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\kappa(\alpha_n^2/a^2)t} \frac{J_0(\alpha_n r/a)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

B.4 Andere Integraltransformationen

Andere bekannte Transformationen sind:

1. Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt\ .$$

2. Fouriersche Sinustransformation

$$\mathcal{F}_s f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\xi t) dt\ .$$

3. Fouriersche Cosinustransformation

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\xi t) dt\ .$$

4. Mellin-Transformation

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx\ .$$

5. Hankel-Transformation

$$H_\nu f(\xi) = \int_0^{\infty} x f(x) J_\nu(\xi x) dx\ .$$

Literatur:

Carslaw, H.S. und **Jaeger**, J.C.: Conduction of Heat in Solids, 2. Ausgabe, Oxford 1959.

Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, 2. Ausgabe, Oxford 1975.

Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I, II, III. Birkhäuser, 1956.

Doetsch, G.: Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer 1970.

Dunford, N., **Schwartz**, J.T.: Linear Operators I, II, III. Interscience.

Sneddon, I.N.: The Use of Integral Transforms. McGraw-Hill, 1972.