Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Hans-Jürgen Reinhardt[1)]

Vorlesungsskriptum
im SS 1997

Fachbereich Mathematik
Universität – GH Siegen

[1)]Email: hjreinhardt@numerik.math.uni-siegen.de

Vorwort

Das vorliegende Skriptum ist aus einer Vorlesung entstanden, die der Autor dreimal — zuletzt im SS 1997 — an der Univ.–GH Siegen gehalten hat. Zu der Vorlesung wurden theoretische und praktische Übungen gestellt. Die Übungsaufgaben finden sich im Anhang B; Musterlösungen der praktischen Aufgaben sind im Anhang C zusammengestellt.

Dieses Skriptum wurde von Frau M. Beier mit LaTeX erstellt. Herr Dipl.-Math. R. Ansorge hat die Übungsaufgaben zusammengestellt und betreut. Herr cand. math. M. Charton war bei der Aufarbeitung der praktischen Aufgaben behilflich. Ihnen und meinen Studenten sei für Ihren Einsatz und Ihre Mitarbeit gedankt.

Siegen, im August 1997 H.–J. Reinhardt

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiele und Anwendungen **1**

1.1 Anfangswertprobleme 1

1.2 Randwertprobleme 5

2 Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme **9**

2.1 Definition des Verfahrens 9

2.2 Konsistenz 13

2.2.1 Konsistenzbedingungen 13

2.2.2 Konsistenz spezieller Verfahren 15

2.3 Runge–Kutta Formeln 18

2.4 Die Methode der Taylor–Entwicklung 24

2.5 Konvergenz 26

2.6 Stabilität 28

3 Mehrschrittverfahren für Anfangswertaufgaben **31**

3.1 Definition des Verfahrens 31

3.2 Konsistenz von Mehrschrittverfahren 41

3.3 Stabilität und Konvergenz 49

3.4 Die Wurzelbedingung 53

4 Differenzenverfahren für Randwertprobleme **61**

4.1 Singulär gestörte (gewöhnliche) Differentialgleichungen 61

4.2 Differenzenappr. für lin. gewöhnl. Diff. gln. 2. Ordnung 64

4.3 Stabilität und Konvergenz mit Maximumprinzipien 67
4.4 Kompaktheitsmethoden 71
4.5 nichtlineare Randwertprobleme 77

5 Variationsmethoden 83

5.1 Variationelle Formulierung, 1-dim. Modellproblem 83
5.2 Die einfachste FEM für das Modellproblem 88
5.3 Erste Fehlerabschätzungen 91
5.4 Galerkin–Verfahren für nichtlineare Probleme 97

6 Adaptive Gitter 101

6.1 Differenzenapproximationen auf nichtäquidistanten Gittern 101
6.2 Interpolationsfehlerindikatoren 102
6.3 Residuen-Schätzer 104
6.4 Gitterverteilungsfunktionen 105

A Theorie gewöhnlicher Dgl. 111

A.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von AWPs 112
A.2 Lineare Differentialgleichungen 113
A.3 Systeme mit konstanten Koeffizienten 117
A.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung 119
A.5 Lineare Dgl n-ter Ordnung (konstante Koeff.) 123
A.6 Lineare Randwertaufgaben 2. Ordnung 126

B Theoretische Übungsaufgaben 133

C Praktische Übungsaufgaben mit Musterlösungen 141

Literaturverzeichnis 169

Index 173

Abbildungsverzeichnis

1.1 Erweitertes Wachstumsmodell 2
1.2 Räuber-Beute-Modell 3
1.3 Beute- und Raubtiere 3
1.4 Schwingungsproblem 4
1.5 Stab (1-dim. Modell) 5
1.6 Balkenbiegung 6
1.7 Balken mit freien Enden 7
1.8 Balken links eingespannt, rechts frei 8
1.9 Balken mit eingespannten Enden 8

2.1 Gesamtfehler = Rundungs- und Diskretisierungsfehler 30

3.1 Stützstellen des Extrapolationsverfahrens von Adams 34
3.2 Stützstellen des Interpolationsverfahrens von Adams 35
3.3 Stützstellen des Verfahrens von Nyström 38
3.4 Stützstellen des Verfahrens von Milne 39

4.1 Grenzschichtproblem (1 Grenzschicht) 62
4.2 Grenzschichtproblem (2 Grenzschichten) 64

5.1 Elastischer Stab 84
5.2 Beispiel einer Funktion $v \in V_h$ 88
5.3 Die Basisfunktionen φ_j 89

6.1 Beispiel einer Indikatorfunktion w 106

6.2 Beispiel einer Gitterverteilungsfunktion 107

6.3 Nichtäquidistantes Gitter mit $w = u_x$ 109

C.1 Umlaufbahnen des verbesserten Polygonzugverfahrens und des verbesserten Verfahrens von Euler-Cauchy für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klass. Runge-Kutta-Verf. 145

C.2 Umlaufbahnen des „optimalen“ Verfahrens und des optimalen Verfahrens von Kuntzmann für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 146

C.3 Umlaufbahnen der vier Verfahren für $h = 10^{-4}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 148

C.4 Extrapolationsverfahren von Adams ($s = 4$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 150

C.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 155

C.6 Interpolationsverfahren von Adams ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 155

C.7 Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Milne ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 156

C.8 Aufgabe A)1) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung . 158

C.9 Aufgabe A)2) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung . 159

C.10 Aufgabe B)1) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung . 160

C.11 Aufgabe B)2) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung . 161

C.12 Aufgabe C)1) ($\varepsilon = 1$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg. . . . 162

C.13 Aufgabe C)1) ($\varepsilon = 10^{-2}$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg. . 163

C.14 Aufgabe C)2) ($\varepsilon = 1$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg. . . . 164

C.15 Aufgabe C)2) ($\varepsilon = 10^{-2}$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg. . 165

C.16 Aufgabe C)3) ($\varepsilon = 1$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg. . . . 166

C.17 Aufgabe C)3) ($\varepsilon = 10^{-2}$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg. . 167

Kapitel 1

Beispiele und Anwendungen

In diesem einleitenden Kapitel werden einige typische Beispiele aus der Mechanik, Biologie und Thermodynamik vorgestellt, bei denen die Modellierung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen führt. Letztere haben die Form von Anfangswertproblemen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen oder liegen als Randwertprobleme vor. Bei Randwertproblemen unterscheidet man verschiedene Typen, Dirichlet–, Neumann– oder Robin–Randbedingungen, je nachdem ob die Lösung selbst, deren Ableitung oder eine Beziehung zwischen beiden (in gemischter Form) am Rand vorgegeben ist. Die Theorie zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen ist in Kurzform in Anhang A zusammengestellt.

1.1 Anfangswertprobleme

Beispiel 1.1 Populationsmodell

Ein *einfaches Modell* zur Beschreibung des Wachstums einer Population $p(t)$ bei bekannter Anfangspopulation $p_0 = p(t_0)$ ist gegeben durch

$$\frac{dp}{dt}(t) = ap(t) \,, \qquad t > t_0 \,; \qquad p(t_0) = p_0 \,, \tag{1.1}$$

($a > 0$ beschreibt die *Wachstumsrate).* Die Lösung ist bekanntlich

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)} \,, \qquad t \geq t_0 \,. \tag{1.2}$$

Das Zeitintervall $\widetilde{\Delta}t$, in dem sich die Population verdoppelt, erhält man durch die Beziehung

$$p(t + \widetilde{\Delta}t) = 2p(t) \,, \quad \text{also} \quad \widetilde{\Delta}t = \frac{1}{a} \ln 2 \,.$$

Die Lösung (1.2) beschreibt das wirkliche Wachstum i. a. für die fernere Zukunft nur schlecht. Ein *erweitertes Modell* führt einen Rivalitätsterm (nach Verhulst, 1837) ein,

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \,, \quad t > t_0 \,; \qquad p(t_0) = p_0 \,. \tag{1.3}$$

Für diese nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung kann man (ausnahmsweise) die Lösung explizit angeben,

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)\exp(-a(t - t_0))}$$

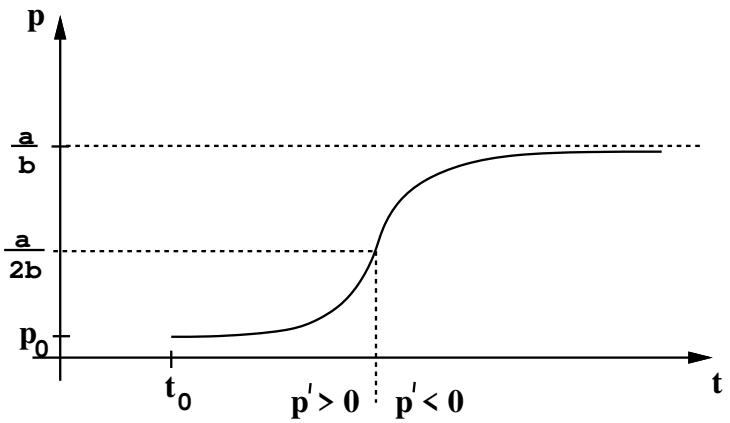


Abbildung 1.1: Erweitertes Wachstumsmodell

□

Beispiel 1.2 Räuber–Beute–Modell

(Lit.: Hadeler [Had74])

Sucht man zwei Populationen, die Beutetiere $x(t)$ und die Raubtiere $y(t)$, so läßt sich ein entsprechendes Modell in Form eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen formulieren,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \alpha\Big(x(t) - x(t)y(t)\Big) \quad , \; t > t_0 \,; \quad x(t_0) = x_0 \,, \\ \frac{dy}{dt}(t) &= x(t)y(t) - y(t) \qquad , \; t > t_0 \,; \quad y(t_0) = y_0 \,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dies ist ein Anfangswertproblem für ein System von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Deren Lösungsvektor $(x(t), y(t))^\top$ läßt sich entweder in der x/y–Ebene (s. Abb. 1.2) oder komponentenweise über der t–Achse darstellen (s. Abb. 1.3).

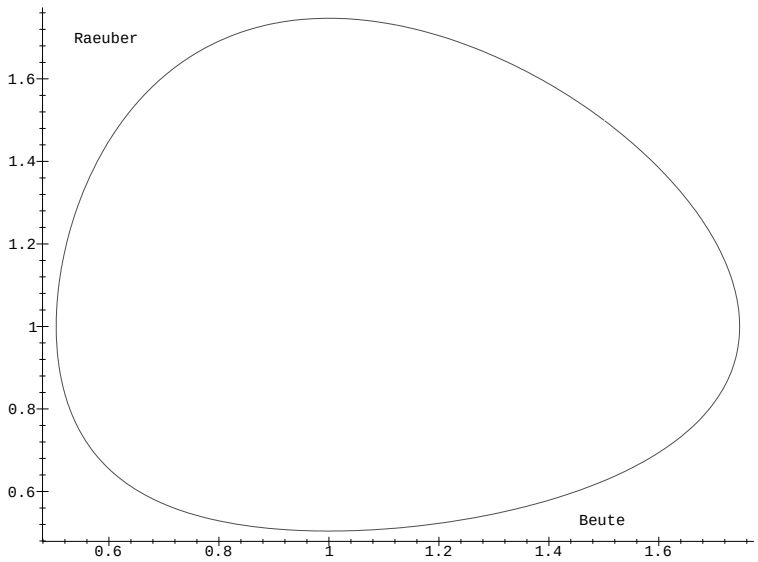


Abbildung 1.2: Räuber-Beute-Modell

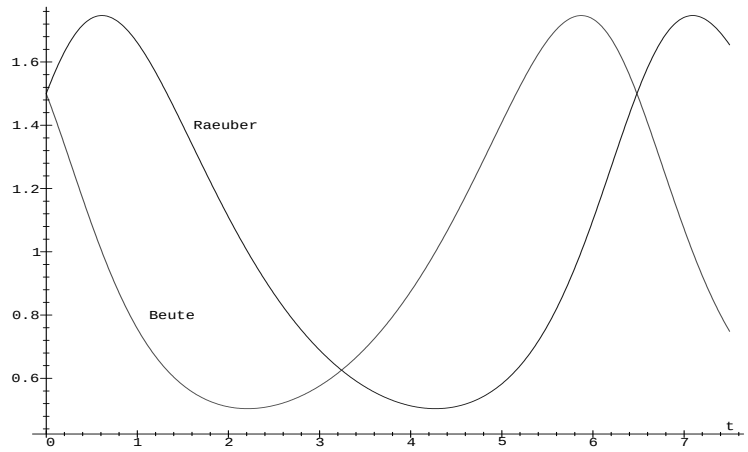
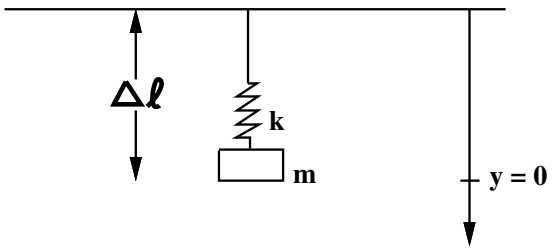


Abbildung 1.3: Beute- und Raubtiere

Weitere Beispiele in diesem Bereich beschreiben die Ausbreitung von Seuchen, die Entwicklung von Industrien oder Innovationen, den Zerfall von Radioaktivität u. v. m. □

Beispiel 1.3 Schwingungsprobleme

Nach dem *Newtonschen Gesetz* setzt sich die an der Masse m angreifende Gesamtkraft aus vier Anteilen zusammen,



ℓ = *Federlänge*

k = *Federkonstante*

m = *Masse*

g = *Erdbeschleunigung*$(= 9.81 m/s^2)$

Abbildung 1.4: Schwingungsproblem

mg	Gewicht (g = Erdbeschleunigung)
$-k(\Delta\ell + y)$	Rückstellkraft (k = Federkonstante)
$-c\dfrac{dy}{dt}$	Dämpfung
F	äußere Kraft;

hierbei beschreibt $y = y(t)$ die gesuchte Auslenkung, und $\Delta\ell$ ist Federlänge in der *Gleichgewichtsposition*, $k\Delta\ell = mg$. Man erhält also die Beziehung

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= mg - k(\Delta\ell + y) - c\frac{dy}{dt} + F \\ &= -ky - c\frac{dy}{dt} + F(t)\ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Bei der „Dämpfung“ bzw. Kraft unterscheidet man noch verschiedene Fälle,

— freie ungedämpfte Schwingung: $c = 0\ ,\ F = 0\ ;$

— freie gedämpfte Schwingung: $c \neq 0\ ,\ F = 0\ ;$

— erzwungene gedämpfte Schwingung: $c \neq 0\ ,\ F \neq 0\ ;$

— erzwungene ungedämpfte Schwingung: $c = 0\ ,\ F \neq 0\ .$

Auch nichtlineare Rückstellkräfte der Form $-ky^2$ sind möglich.

Das Schwingungsproblem erfordert noch zwei Anfangsbedingungen, für die Anfangsauslenkung $y(t_0) = y_0$ und für die Anfangsgeschwindigkeit $y'(t_0) = y'_0$.

Wie in Anhang A.4 ausgeführt, läßt sich jede Differentialgleichung n-ter Ordnung als System von n Gleichungen erster Ordnung umschreiben. Deren Lösungen — im Fall konstanter Koeffizienten — ergeben sich dann mit Hilfe der Wurzeln des zugehörigen charakteristischen Polynoms. Für verschiedene Dämpfungsfälle sind die Lösungen des obigen Schwingungsproblems in Beispiel A.15 des Anhangs A angegeben bzw. ausgeführt.

□

1.2 Randwertprobleme

Beispiel 1.4 Temperaturverteilung in einem Stab

Abbildung 1.5: Stab (1-dim. Modell)

Bezeichnet man mit

- ρ Dichte
- c spez. Wärmekapazität
- λ Wärmeleitfähigkeit
- F Quellterm (Wärmequelle)

dann erfüllt die Temperaturverteilung $u = u(x,t)$, x = Ortsvariable, t = Zeitvariable, in einem Stab oder Draht folgende Differentialgleichung,

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + F\ , \qquad 0 \le x \le L\ ,\ t > 0\ . \tag{1.6}$$

Die Größen ρ, c, λ können im allgemeinen von x, t und auch von der Temperatur selbst abhängen. Im einfachsten Fall konstanter Koeffizienten erhält die (zeitabhängige) Wärmeleitungsgleichung die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\ , \qquad 0 \le x \le L\ ,\ t > 0\ , \tag{1.7}$$

mit $\alpha^2 = \lambda/\rho c$ (= Temperaturleitfähigkeit), $f = F/\rho c$. Die vorliegende Gleichung ist eine *partielle Differentialgleichung;* zur Angabe einer Lösung werden noch eine *Anfangstemperatur* bei $t = 0$ und *Randbedingungen* bei $x = 0$ und $x = L$ benötigt. Für den durch (1.7) beschriebenen einfachen Fall läßt sich die Lösung explizit angeben (vgl. [Bra83], 5.6, [Wid75]).

Im *stationären Fall,* d. h. wenn sich die Temperatur zeitlich nicht mehr ändert, führt (1.7) auf die folgende gewöhnliche Differentialgleichung (mit $\gamma = 1/\alpha^2$),

$$-y''(x) = \gamma f(x)\ , \qquad 0 \le x \le L\ . \tag{1.8}$$

Randbedingungen können z. B. in folgender Form vorliegen:

— Temperatur bei $x = 0$ und $x = L$ gegeben, $y(0) = y_0$, $y(L) = y_L$;

— Temperatur bei $x = 0$ gegeben, Isolierung bei $x = L$,

$$y(0) = y_0 \ , \qquad y'(L) = 0 \ ;$$

— Temperatur bei $x = 0$, Wärmeübergang bei $x = L$,

$$y(0) = y_0 \ , \qquad y'(L) = \alpha_L(y(L) - y_\infty) \ .$$

Der Quellterm f kann entweder konstant sein, linear von y abhängen ($f = f_0 + \beta y$), auch einem „Exponentialgesetz“ $f = f_0 + \exp(y)$ genügen u. v. m. □

Beispiel 1.5 Balkenbiegung

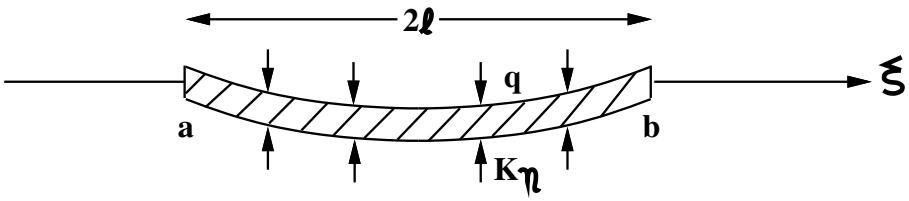


Abbildung 1.6: Balkenbiegung

Die Auslenkung/Verbiegung $\eta = \eta(\xi)$ eines Balkens der Länge $2\ell (= b - a)$, verursacht durch eine Kraft- bzw. Gewichtsverteilung q, wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben,

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(S(\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right) + K\eta = q(\xi) \ , \qquad a \le \xi \le b \ . \tag{1.9}$$

Hierbei beschreibt S die Steifigkeit des Balkens und K ist eine Elastizitätskonstante des umgebenden Materials. Diese gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung erfordert insgesamt vier Randbedingungen bei $\xi = a$ und $\xi = b$, die z. B. wie folgt vorliegen können:

— Position der Balkenauflage bei $\xi = a$ oder $\xi = b$ bekannt, $\quad \eta(a) = \eta_a$ oder $\eta(b) = \eta_b$;

— Balken bei $\xi = a$ oder $\xi = b$ fest eingespannt, $\quad \eta'(a) = 0$ oder $\eta'(b) = 0$;

— Biegemoment $d^2\eta/d\xi^2$ verschwindet bei $\xi = a$ oder $\xi = b$, $\quad \eta''(a) = 0$ oder $\eta''(b) = 0$;

— Scherkräfte $d^3\eta/d\xi^3$ sind bei $\xi = a$ oder $\xi = b$ Null, $\quad \eta'''(a) = 0$ oder $\eta'''(b) = 0$.

Schreibt man die Gleichung (1.9) in *dimensionslose Form* um durch

$$x = \frac{\xi - \frac{a+b}{2}}{\ell} , \qquad y = \frac{S_0}{q_0 \ell^4} \eta , \qquad k = \frac{\ell^4}{S_0} K ,$$

und wählt speziell eine „parabolische Verteilung“ für S und q,

$$S = S_0(2 - x^2) , \qquad q = q_0(2 - x^2) ,$$

dann erhalten wir die folgende spezielle Form von (1.9),

$$((2 - x^2)y'' + 40y = 2 - x^2 , \qquad -1 \le x \le 1 . \tag{1.10}$$

Mögliche Randbedingungen sind

$$y''(\pm 1) = y'''(\pm 1) = 0 . \tag{1.11}$$

Setzt man $v = (2 - x^2)y''$, so kann man (1.10) umschreiben als System von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Ist das Biegemoment $m = y''$ — und damit auch v — bekannt, so läßt sich die Verbiegung y aus der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung bestimmen,

$$y''(x) = (2 - x^2)^{-1} m(x) , \qquad -1 \le x \le 1 ; \tag{1.12}$$

benötigt werden jeweils noch eine Randbedingung bei $x = -1$ und $x = 1$, z. B. $y(-1) = \alpha$, $y'(1) = 0$.

Bei anderen Problemstellungen — d. h. der Modellierung durch andere Funktionen für q und S — erhält man z. B. die folgende nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung,

$$y''(x) = \left(1 + y'(x)^2\right)^{2/3} m(x) , \qquad -1 \le x \le 1 . \tag{1.13}$$

Randbedingungen für (1.12) oder (1.13) sind in verschiedener Form möglich:

— Enden frei aufliegend, $y(-1) = y(1) = 0$;

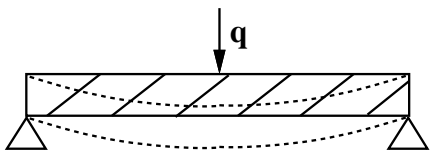


Abbildung 1.7: Balken mit freien Enden

— Balken links eingespannt, rechts frei aufliegend, $y'(-1) = y(1) = 0$,

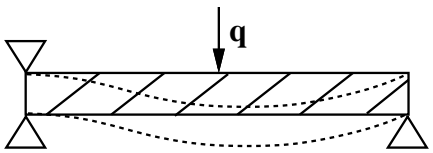


Abbildung 1.8: Balken links eingespannt, rechts frei

— Balken links und rechts eingespannt, $y'(-1) = y'(1) = 0$,

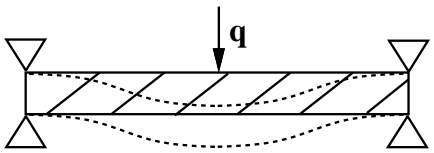


Abbildung 1.9: Balken mit eingespannten Enden

□

Kapitel 2

Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme

In diesem Kapitel geben wir meist nur Definitionen, Bezeichnungen, Sätze (ohne Beweise), Beispiele und Bemerkungen an und verweisen im übrigen auf die ausführliche Darstellung in [SH82], § 11, und [Gri72].

2.1 Definition des Verfahrens

Bezeichnung: *Anfangswertproblem*

(A) *Gegeben sei ein beschränktes abgeschlossenes Intervall* $I = [a,b]$ *der reellen Zahlengeraden* $\mathbb{R}$*, eine Funktion* f *zweier Veränderlicher* $(x,y) \in I \times \mathbb{K}$ *und eine Zahl* $\alpha \in \mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*). Gesucht ist eine stetig differenzierbare Lösung* u *der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$u'(x) = f(x, u(x)) , \quad x \in [a,b] ,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(a) = \alpha .$$

Anschließend machen wir stets die Voraussetzung, daß die Anfangswertaufgabe (A) eine eindeutig bestimmte Lösung u besitzt. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen werden dafür geeignete Voraussetzungen angegeben.

Beispiel 2.1 Exponentielles Wachstum

$$u'(t) = cu(t) \,, \quad 0 \le t \le T \,; \quad u(0) = \alpha \,.$$

Lösung:

$$u(t) = \alpha \exp(ct) \,.$$

Hier ist $f(t,y) = cy \,,\ a = 0 \,,\ b = T \,,\ x = t.$ □

Beispiel 2.2 Van der Poolsche Differentialgleichung („Kippschwingung“)

$$u'' - \varepsilon(1-u^2)u' + u = 0 \,, \quad t > 0 \,;$$
$$u(0) = 0 \,, \quad u'(0) = 1 \,.$$

Als System ($u_1 = u \,,\ u_2 = u'$):

$$u_1' = f_1(t, u_1(t), u_2(t)) \,, \quad u_1(0) = 0 \,,$$
$$u_2' = f_2(t, u_1(t), u_2(t)) \,, \quad u_2(0) = 1 \,,$$

mit

$$f_1(t, y_1, y_2) = y_2 \,, \quad f_2(t, y_1, y_2) = -y_1 + \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 \,.$$

□

Bezeichnung: *Punktgitter*

Für eine Folge von Schrittweiten $h > 0$ wird im Intervall $I = [a,b]$ ein zugehöriges Punktgitter erklärt durch die Vorschrift

$$I_h = [a,b]_h = \left\{ x \in [a,b] \,|\ x = a + jh \,, \quad j = 0, \ldots, N_h \right\} \tag{2.1}$$

mit der eindeutig bestimmten ganzen Zahl N_h aus dem Intervall

$$\frac{b-a}{h} - 1 < N_h \le \frac{b-a}{h} \,, \quad 0 < h \le b - a \,. \tag{2.2}$$

Die Punkte $x \in [a,b]_h$ nennt man Gitterpunkte und schreibt auch

$$x_j = a + jh\ , \quad j = 0, \ldots, N_h\ . \tag{2.3}$$

Für jede stetig differenzierbare Funktion $u \in C^1[a,b]$ kann man an den Gitterpunkten aus der Menge

$$I_h' = [a,b]_h' = \Big\{ x \in [a,b]_h \mid\ x = a + jh\ ,\ j = 0, \ldots, N_h - 1 \Big\} \tag{2.4}$$

die vorwärtsgenommenen Differenzquotienten bilden, die eine Approximation der Differentialquotienten $u'(x)$ für $x \in [a,b]_h'$ ergeben.

Das einfachste *Einschrittverfahren* erhält man durch das

Polygonzug–Verfahren (auch „Verfahren von Euler–Cauchy“)

$$u_h(a) = \alpha\ , \quad \frac{1}{h}\Big(u_h(x+h) - u_h(x)\Big) = f\Big(x, u_h(x)\Big)\ , \quad x \in I_h'\ . \tag{2.5}$$

Grundlegend für die Konstruktion weiterer Verfahren ist die folgende Beziehung für die Lösung von (A), die man durch Integration von x bis $x+h$ erhält,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t, u(t))dt\ , \quad x \in I_h'\ , \\ u(a) &= \alpha\ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Approximation des Integrals auf der rechten Seite durch geeignete Quadraturformeln führt auf eine Reihe weiterer Verfahren:

Verbessertes Polygonzugverfahren (auch „verbessertes Verfahren von Euler“)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) &= f\left(x + \frac{h}{2}\,,\ u_h(x) + \frac{h}{2} f(x, u_h(x))\right)\ , \quad x \in I_h'\ ; \\ u_h(a) &= \alpha \end{aligned}$$

durch Tangententrapezformel

$$\int_x^{x+h} f(s, u(s))ds \approx hf\left(x + \frac{h}{2}\,,\ u\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)$$

und Taylor–Approximation

$$\begin{aligned} u\left(x + \frac{h}{2}\right) &= u(x) + \frac{h}{2}u'(x) + R_1(x) \\ &= u(x) + \frac{h}{2} f(x, u(x)) + R_1(x)\ . \end{aligned}$$

Verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) &= \frac{1}{2}\Big\{ f(x, u_h(x)) + f(x+h, \tilde{u}_h(x+h)) \Big\}\ , \quad x \in I_h'\ , \\ u_h(a) &= \alpha\ , \end{aligned}$$

mit $\tilde{u}_h(x+h) = u_h(x) + hf(x, u_h(x))$; durch Sehnentrapezformel

$$\int_x^{x+h} f(s,u(s))\,ds \approx \frac{h}{2}\Big(f(x,u(x)) + f(x+h,u(x+h))\Big)$$

und Taylor–Approximation

$$u(x+h) = u(x) + hf(x,u(x)) + \tilde{R}_1(x)\ .$$

Im allgemeinen definiert man in Analogie zur Anfangswertaufgabe (A) als Einschrittverfahren eine Folge (A_h) diskreter Anfangswertaufgaben, wobei die Schrittweiten h eine geeignet gewählte Nullfolge durchlaufen sollen.

(A_h) *Gegeben sei eine Folge von Funktionen f_h zweier Veränderlicher $(x,y) \in I_h' \times \mathbb{K}$ und eine Folge von Anfangswerten $\alpha_h \in \mathbb{K}$. Gesucht sind Lösungen $u_h(x)$, $x \in I_h$, des Gleichungssystems*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) &= f_h(x,u_h(x))\,, \quad x \in I_h'\ , \\ u_h(a) &= \alpha_h\ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

In diesen Gleichungen haben wir übrigens die gesuchten Lösungen als Funktionen geschrieben, die für jede Schrittweite h allerdings nur auf dem diskreten Punktgitter I_h definiert sind. Dieses Gleichungssystem ist stets eindeutig rekursiv lösbar.

Das Restglied

$$T_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t,u(t))\,dt - f_h(x,u(x))\,, \quad x \in I_h'\ , \tag{2.8}$$

ist der sogenannte *Abschneidefehler,* der für $h \to 0$ in geeigneter Weise gegen Null strebt.

Beispiele:

Polygonzug–Verf. $\quad f_h(x,y) = f(x,y)$;

verbessertes Polygonzug–Verf. $\quad f_h(x,y) = f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$;

verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy

$$f_h(x,y) = \frac{1}{2}\Big\{f(x,y) + f(x+h, y+hf(x,y))\Big\}\ .$$

□

Weiter gelten die angegebenen Einschrittverfahren in analoger Form auch für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen der Gestalt

$$u_j(a) = \alpha_j\ , \quad \frac{du_j}{dx}(x) = f_j(x,u_1(x),\ldots,u_n(x))\,, \quad x \in I\ ,\ j = 1,\ldots,n\ .$$

Für diesen Fall sind die eingeführten Begriffe und Verfahren in der üblichen Weise auf vektorwertige Funktionen $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x)) \in \mathbb{K}^n$, $x \in I$, zu verallgemeinern, was wir der Einfachheit halber hier jedoch nicht ausführen.

Beispiel 2.3 Verbessertes Polygonzug–Verfahren für die Van der Poolsche Differentialgleichung

$$u_h^1(0) = 0\,, \quad u_h^2(0) = 1\,,$$
$$f_1(t, y_1, y_2) = y_2\,, \quad f_2(t, y_1, y_2) = -y_1 + \varepsilon(1 - y_1^2)y_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(u_h^1(t+h) - u_h^1(t)\right) &= u_h^2(t) + \frac{h}{2}\left(-u_h^1(t) + \varepsilon(1 - (u_h^1(t))^2 u_h^2(t)\right) \\
\frac{1}{h}\left(u_h^2(t+h) - u_h^2(t)\right) &= -\left(u_h^1(t) + \frac{h}{2}u_h^2(t)\right) + \varepsilon\left(1 - (u_h^1(t) + \frac{h}{2}u_h^2(t))^2\right) \times \\
&\quad \times \left\{ u_h^2(t) + \frac{h}{2}\left(-u_h^1(t) + \varepsilon\left(1 - (u_h^1(t))^2\right) u_h^2(t)\right)\right\}
\end{aligned}$$

□

2.2 Konsistenz

2.2.1 Konsistenzbedingungen

Die Anfangswertaufgabe (A) mit der Lösung u bzw. das zugehörige Gleichungssystem

$$u(a) = \alpha\,, \quad \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t, u(t))\,dt\,, \quad x \in I_h'\,, \tag{2.9}$$

wird bei den Einschrittverfahren (A_h) durch eine Folge diskreter Anfangswertaufgaben der Gestalt

$$u_h(a) = \alpha_h\,, \quad \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) = f_h(x, u_h(x))\,, \quad x \in I_h'\,, \tag{2.10}$$

approximiert. Dabei erhält man die Funktionen f_h durch geeignete Näherungen für das Integral (2.9) in der Gestalt

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t, u(t))\,dt = f_h(x, u(x)) + T_h(x)\,, \quad x \in I_h'\,, \tag{2.11}$$

mit dem *Restglied* oder *Abschneidefehler* T_h. Aus den Gleichungen (2.9) und (2.11) gewinnt man mit der Lösung u von (A) die Darstellung

$$\frac{1}{h}(u(x+h)-u(x))-f_h(x,u(x))=T_h(x)\;,\quad x\in I_h'\;. \tag{2.12}$$

Also läßt sich der Abschneidefehler T_h charakterisieren als der Defekt, welcher beim Einsetzen der Lösung u der Anfangswertaufgabe (A) in das System der Näherungsgleichungen des Einschrittverfahrens (2.10) entsteht.

Definition 2.4 *Die Differenzengleichungen in (2.10) heißen dann eine konsistente Approximation der Integralgleichung in (2.9) bzw. der Differentialgleichung $u'=f(x,u)$, wenn der Abschneidefehler T_h für $h\to 0$ gleichmäßig gegen Null strebt, also wenn die Konsistenzbedingung gilt*

$$\max_{x\in I_h'}|T_h(x)|\longrightarrow 0\quad(h\longrightarrow 0)\;. \tag{2.13}$$

Definition 2.5 *Das Einschrittverfahren (A_h) heißt konsistent mit der Anfangswertaufgabe (A), wenn neben dem Abschneidefehler T_h auch die Anfangsbedingungen in (2.10) konvergieren und somit die Konsistenzbedingung besteht*

$$|\alpha_h-\alpha|+\max_{x\in I_h'}|T_h(x)|\longrightarrow 0\quad(h\longrightarrow 0)\;. \tag{2.14}$$

Für die Anwendungen benötigt man das folgende notwendige und hinreichende Konsistenzkriterium.

Satz 2.6 *Die Konsistenzbedingung (2.13) ist genau dann erfüllt, wenn die Funktionen f, f_h mit der Lösung u von (A) der Beziehung genügen*

$$\max_{x\in I_h'}|f_h(x,u(x))-f(x,u(x))|\longrightarrow 0\quad(h\longrightarrow 0)\;. \tag{2.15}$$

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.(7).*

Definition 2.7 *Eine Zahl $p>0$ heißt Konsistenzordnung des Einschrittverfahrens (A_h), wenn es eine positive Zahl $K>0$ gibt mit der Eigenschaft*

$$|\alpha_h-\alpha|+\max_{x\in I_h'}|T_h(x)|\le Kh^p\quad(h\longrightarrow 0)\;. \tag{2.16}$$

2.2.2 Konsistenz spezieller Verfahren

Für die Herleitung von Einschrittverfahren (A_h) mit einer Konsistenzordnung $p \geq 1$ benötigt man im allgemeinen, daß die Lösung u der Anfangswertaufgabe (A) stetige Ableitungen höherer Ordnung auf $I = [a, b]$ besitzt. Hinreichend dafür ist, daß die rechte Seite f der Differentialgleichung stetig ist und stetige partielle Ableitungen nach beiden Argumenten x, y in einer geeigneten Umgebung $G \subseteq I \times \mathbb{K}$ der Lösung u von (A) besitzt. Für das folgende definieren wir diese Menge G als „Streifen“ um die Lösung u der Gestalt $G = I \times \mathbb{K}$ oder

$$G = \Big\{(x, y) \in I \times \mathbb{K} \;\Big|\; |y - u(x)| \leq \rho,\, a \leq x \leq b\Big\} \tag{2.17}$$

mit einer beliebigen, passend gewählten positiven Zahl ρ. Ist zum Beispiel f m–mal stetig differenzierbar nach beiden Argumenten, also $f \in C^m(G)$, so folgt aus der Darstellung von u bzw. u' durch die Differentialgleichung

$$u'(x) = f(x, u(x))\,, \quad x \in I = [a, b]\,,$$

daß u' dann m–mal stetig differenzierbar wird oder $u \in C^{m+1}(I)$ ist. Für die höheren Ableitungen von u erhält man dabei aus der Differentialgleichung die Darstellung

$$u''(x) = \frac{d}{dx} f(x, u(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, u(x))\,, \quad x \in I\,,$$

und mit der Abkürzung

$$(Df)(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)\,, \quad (x, y) \in G\,,$$

gilt allgemeiner

$$\frac{d^{k+1}u}{dx^{k+1}}(x) = (D^k f)(x, u(x))\,, \quad x \in I\,,\ k = 1, \ldots, m\,. \tag{2.18}$$

Für $m \geq 2$ lautet die Darstellung für u''' zum Beispiel

$$u'''(x) = (D^2 f)(x, u(x)) = \Big(f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f(f_y)^2 + f^2 f_{yy}\Big)(x, u(x))\,.$$

Beispiel 2.8 Polygonzug–Verfahren

Konsistenzordnung $p = 1$, falls $f \in C^1(G)$

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.2.(12).*

□

Beispiel 2.9 Verbessertes Polygonzugverfahren

Konsistenzordnung $p = 2$, falls $f \in C^2(G)$

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.2.(15).*

□

Beispiel 2.10 Verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy

Konsistenzordnung $p = 2$, falls $f \in C^2(G)$

□

Beispiel 2.11 Weitere „optimale" Verfahren der Ordnung $p \geq 2$ *Gesucht sind Zahlen* $\gamma_1, \gamma_2, \nu, \mu \in \mathbb{R}$, $\nu, \mu > 0$, *so daß Einschrittverfahren der Form*

$$\begin{aligned} u_h(x+h) &= u_h(x) + h\Big\{\gamma_1 f(x, u_h(x)) + \gamma_2 f(x+\nu h, u_h(x) + \mu h f(x, u_h(x)))\Big\} \\ u_h(a) &= \alpha_h \end{aligned} \tag{2.19}$$

einen möglichst „optimalen" Abschneidefehler besitzen — aber mindestens Konsistenzordnung $p = 2$ *haben.*

Setze $y_1 = u(x) + \mu h f(x, u(x)) = u(x) + \mu h u'(x)$ (für u = Lsg. von (A)), $\overline{x} = x + \nu h$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \text{Taylor} \qquad u(\overline{x}) &= u(x) + \nu h u'(x) + \frac{1}{2}\nu^2 h^2 u''(x) + \mathrm{O}(h^3) \\ &= \underbrace{u(x) + \mu h u'(x)}_{y_1} + (\nu - \mu) h u'(x) + \frac{\nu^2}{2} h^2 u''(x) + \mathrm{O}(h^3) \\ \Longrightarrow \quad f(\overline{x}, y_1) - u'(\overline{x}) &= f(\overline{x}, y_1) - f(\overline{x}, u(\overline{x})) \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \tilde{y})}_{\tilde{f}_y} (y_1 - u(\overline{x})) \\ &= -(\nu - \mu) h u'(x) \tilde{f}_y - \frac{\nu^2}{2} h^2 u''(x) \tilde{f}_y + \mathrm{O}(h^3) \end{aligned}$$

Es ist noch

$$
\begin{aligned}
u'(\overline{x}) &= u'(x) + \nu h u''(x) + \frac{1}{2}\nu^2 h^2 u'''(x) + \mathrm{O}(h^3) \\
u(x+h) &= u(x) + h u'(x) + \frac{1}{2}h^2 u''(x) + \frac{1}{6}h^3 u'''(x) + \mathrm{O}(h^4)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Abschneidefehler

$$
\begin{aligned}
T_h(x) &= \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)) - [\gamma_1 u'(x) + \gamma_2 f(\overline{x}, y_1)] \\
&= u'(x) + \frac{1}{2}h u''(x) + \frac{1}{6}h^2 u'''(x) + \mathrm{O}(h^3) \\
&\quad - \gamma_1 u'(x) - \gamma_2 \Big(\underbrace{u'(\overline{x})}_{} - (\nu - \mu) h u'(x) \tilde{f}_y - \frac{\nu^2}{2} h^2 u''(x) \tilde{f}_y + \mathrm{O}(h^3) \Big) \\
&\qquad\qquad \Big[u'(x) + \nu h u''(x) + \frac{1}{2}\nu^2 h^2 u'''(x) + \mathrm{O}(h^3) \Big] \\
&= (1 - \gamma_1 - \gamma_2) u'(x) + \gamma_2 (\nu - \mu) h \tilde{f}_y u'(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} h (1 - 2\gamma_2 \nu) u''(x) \\
&\quad + \frac{1}{6} h^2 \Big((1 - 3\gamma_2 \nu^2) u'''(x) - 3\gamma_2 \nu^2 \tilde{f}_y u''(x) \Big) + \mathrm{O}(h^3) \, ;
\end{aligned}
$$

also

$$
T_h(x) = \mathrm{O}(h^2) \text{ , wenn } \quad
\begin{cases}
1 - \gamma_1 - \gamma_2 = 0 & \\
\nu = \mu & \Longleftrightarrow \\
1 - 2\gamma_2 \nu = 0 &
\end{cases}
\quad
\begin{aligned}
& 1 = \gamma_1 + \gamma_2 \\
& \nu = \mu \\
& \nu = \frac{1}{2\gamma_2}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen

1. I. a. nicht besser!
2. γ_2 = Parameter (wählbar)
3. $\nu = \mu$ sichert, daß $f(\overline{x}, y_1) = u'(\overline{x}) + \mathrm{O}(h^2)$

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
& \nu = \mu = \frac{1}{2} \, , \ \gamma_1 = 0 \, , \ \gamma_2 = 1 && \text{verb. Polygonzugverf. } \left(\nu = \frac{1}{2\gamma_2} = \frac{1}{2} \right) \\
& \nu = \mu = 1 \, , \ \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2} && \text{verb. Verf. Euler–Cauchy } \left(\nu = \frac{1}{2\gamma_2} = 1 \right) \\
& \gamma_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{1}{4} \, , \ \nu = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} && \text{„optimales“ Verfahren}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Beträge der Koeffizienten der h^2–Terme als Summe/Diff. von f, f_x, f_y usw. sind beim „optimalen“ Verfahren minimal. □

2.3 Runge–Kutta Formeln

Von größter Bedeutung für die Praxis ist das klassische Runge–Kutta–Verfahren, das für eine viermal stetig differenzierbare rechte Seite f der Differentialgleichung von der Ordnung $p = 4$ ist. Dieses Verfahren definiert einen erstaunlich einfachen Algorithmus zur Bestimmung von Näherungslösungen mit hoher Genauigkeit. Man erhält das Runge–Kutta–Verfahren aus der Darstellung (2.5) durch Approximation des Integrals von x bis $x + h$ nach der Simpson–Formel, durch Approximation der auftretenden Funktionswerte von u an den Stellen $x + h/2$ und $x + h$ nach Taylor und durch Elimination der Ableitungen von u.

Das *klassische Runge–Kutta–Verfahren* ist ein Einschrittverfahren

$$u_h(a) = \alpha_h \ , \qquad \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) = f_h(x, u_h(x)) \ , \quad x \in I_h' \ ,$$

mit einer Funktion f_h der Gestalt

$$f_h(x,y) = \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)(x,y) \ , \qquad (x,y) \in I_h' \times \mathbb{K} \ , \tag{2.20}$$

und den Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} k_0(x,y) &= f(x,y) \ , \\ k_1(x,y) &= f\left(x + \frac{h}{2} \ , \ y + \frac{h}{2} k_0(x,y)\right) \ , \\ k_2(x,y) &= f\left(x + \frac{h}{2} \ , \ y + \frac{h}{2} k_1(x,y)\right) \ , \\ k_3(x,y) &= f(x+h \ , \ y + h k_2(x,y)) \ . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Zunächst soll die Wirkungsweise dieses Einschrittverfahrens an zwei einfachen Beispielen erläutert werden.

Beispiel 2.12 Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe $u' = u$, $u(a) = \alpha$, mit der Lösung $u(x) = \alpha e^{x-a}$, $a \le x \le b$. Dann wird $f(x,y) = y$ und

$$\begin{aligned} k_0(x,y) &= y \ , \\ k_1(x,y) &= y\left(1 + \frac{h}{2}\right) \ , \\ k_2(x,y) &= y\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) \ , \\ k_3(x,y) &= y\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_h(x,y) &= y\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\frac{h^3}{4!}\right) , \\ u_h(x+h) &= u_h(x)\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\frac{h^4}{4!}\right) , \qquad x \in I_h' . \end{aligned}$$

Somit hat man hier als Faktor die ersten fünf Terme der Entwicklung von e^h, während die exakte Lösung u der Beziehung $u(x+h) = u(x)e^h$, $a \le x \le b-h$, genügt. □

Beispiel 2.13 Das zweite Beispiel betrifft die Differentialgleichung $u' = F$ mit einer stetigen Funktion F auf $I = [a,b]$. Hier wird $f(x,y) = F(x)$ unabhängig von y, und die Lösung u der Differentialgleichung besteht in der Quadratur von F und ergibt

$$u(x+h) = u(x) + \int_x^{x+h} F(t)\,dt .$$

Das Runge–Kutta–Verfahren liefert

$$k_0(x,y) = F(x) , \quad k_1(x,y) = k_2(x,y) = F\left(x+\frac{h}{2}\right) , \quad k_3(x,y) = F(x+h)$$

und damit die Näherung

$$u_h(x+h) = u_h(x) + \frac{h}{6}\left(F(x) + 4F\left(x+\frac{h}{2}\right) + F(x+h)\right) , \qquad x \in I_h' .$$

Dies ist nichts anderes als die Auswertung des obigen Integrals nach der Simpson–Formel mit einem Fehler $O(h^5)$. □

Allgemeine Runge–Kutta Formeln erhält man mit Funktionen f_h der Gestalt

$$f_h(x,y) = (\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \cdots + \gamma_m k_m)(x,y) , \tag{2.22}$$

wobei

$$\begin{aligned} k_1(x,y) &= f(x,y) , \\ k_2(x,y) &= f(x+\alpha_2 h, y+h\beta_{21}k_1(x,y)) , \\ &\vdots \\ k_m(x,y) &= f(x+\alpha_m h, y+h[\beta_{m1}k_1 + \cdots + \beta_{m,m-1}k_{m-1}](x,y)) . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_{i,j}, \gamma_i$ ordnet man üblicherweise in einem Schema an:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \\
\alpha_m & \beta_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{m,m-1} & \\
\hline
 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_{m-1} & \gamma_m
\end{array}
$$

Beispiele

Verbessertes Polygonzug–Verfahren: $m = 2$,

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

Verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy: $m = 2$,

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Optimales Verfahren (für $m = 2$) :

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

Allgemeines Verfahren 2. Ordnung:

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
\nu & \mu & \\
\hline
 & \gamma_1 & \gamma_2
\end{array}
$$

Zur Konsistenz der allgemeinen Runge–Kutta–Formeln dient das folgende Ergebnis.

Lemma 2.14 *Unter der Voraussetzung*

$$\beta_{k1} + \beta_{k2} + \cdots + \beta_{k,k-1} = \alpha_k \ , \qquad k = 2, \ldots, m \ , \tag{2.23}$$

gilt für die Lösung u von (A)

$$k_\nu(x, u(x)) = u'(x + \alpha_\nu h) + \mathrm{O}(h^2) \ , \qquad \nu = 2, \ldots, m \ . \tag{2.24}$$

Beweis: Es ist $k_\nu(x,u(x)) = f(x_\nu\,,\ \underbrace{u(x)+h[\beta_{\nu 1}k_1+\cdots+\beta_{\nu,\nu-1}k_{\nu-1}](x,u(x))}_{y_\nu})$.

Setze $u_\nu = u(x_\nu)\,,\ x_\nu = x+\alpha_\nu h$.

$$\Longrightarrow \qquad k_\nu(x,u(x)) - u'(x_\nu) = f(x_\nu,y_\nu) - f(x_\nu,u_\nu) = (y_\nu-u_\nu)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_\nu,\tilde{y}_\nu))}_{\tilde{f}_y}$$

$$\begin{aligned}
\nu=2: \quad u_2 &= u(x_2) = u(x+\alpha_2 h) \;=\; u(x)+\alpha_2 h u'(x)+\mathrm{O}(h^2)\\
&= \underbrace{u(x)+\beta_{21}hu'(x)}_{y_2} + (\alpha_2-\beta_{21})hu'(x)+\mathrm{O}(h^2)\\
\Longrightarrow \qquad k_2(x,u(x)) - u_2' &\underset{(s.o.)}{=} (y_2-u_2)\tilde{f}_y = \underbrace{(\beta_{21}-\alpha_2)}_{=0} h\tilde{f}_y u'(x)+\mathrm{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Ang. richtig für $\nu = 2,\ldots,k-1(<m)$. Dann

$$\begin{aligned}
y_k - u_k &= u(x)+h[\beta_{k,1}k_1+\cdots+\beta_{k,k-1}k_{k-1}](x,u(x)) - u_k\\
&= u(x)+h[\beta_{k,1}u'(x)+\beta_{k,2}u'(x_2)+\cdots+\beta_{k,k-1}u'(x_{k-1})] - u_k+\mathrm{O}(h^2)\\
&= u(x)+h[\beta_{k,1}+\beta_{k,2}+\cdots+\beta_{k,k-1}]u'(x)\\
&\quad -(u(x)+\alpha_k h u'(x))+\mathrm{O}(h^2)\\
&= h\underbrace{(\beta_{k,1}+\beta_{k,2}+\cdots+\beta_{k,k-1}-\alpha_k)}_{=0\,(\text{wg. }(2.23))}u'(x)++\mathrm{O}(h^2)
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
u(x_k) &= u(x)+\alpha_k h u'(x)+\mathrm{O}(h^2)\\
u'(x_\nu) &= u'(x)+\alpha_\nu h u''(\tilde{x}_\nu) \;=\; u'(x)+\mathrm{O}(h)\,, \qquad \nu=2,\ldots,k-2\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 2.15 *Ein Einschrittverfahren der Form (2.22) mit der Eigenschaft (2.23) ist konsistent mit dem AWP (A), wenn*

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_m = 1\,. \tag{2.25}$$

Diese Bedingung ist auch notwendig für die Konsistenz, falls $u'(x_0)\neq 0$ für ein $x_0\in I$.

Beweis:

$$T_h(x) \quad = \quad \frac{1}{h}(u(x+h)-u(x)) - \sum_{j=1}^{m}\gamma_j k_j(x,u(x))$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{(2.23)}{=} && \frac{1}{h}(u(x+h)-u(x)) - \sum_{j=1}^{m}\gamma_j \underbrace{u'(x_j)}_{u'(x)+\alpha_j h u''(x)+\mathrm{O}(h^2)} + \mathrm{O}(h^2)\\
&= && u'(x) + \frac{1}{2}hu''(x) + \mathrm{O}(h^2)\\
&&& - \sum_{j=1}^{m}\gamma_j u'(x) - \sum_{j=2}^{m}\gamma_j\alpha_j h u''(x) + \mathrm{O}(h^2)\\
&= && \left(1-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\right)u'(x) + h\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\gamma_j\right)u''(x) + \mathrm{O}(h^2)\\
&= && \left(1-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\right)u'(x) + \mathrm{O}(h)\,.
\end{aligned}
$$

Falls $1 = \sum_j \gamma_j \Longrightarrow T_h(x) = \mathrm{O}(h) \longrightarrow 0\,(h \to 0)$.

Falls $u'(x_0) \neq 0$ für ein x_0 und $|T_h(x_0)| \longrightarrow 0\,(h \to 0)$

$\Longrightarrow \quad (1 - \sum_j \gamma_j) = T_h(x_0)/u'(x_0) + \mathrm{O}(h) \longrightarrow 0\,(h \to 0)$

$\Longrightarrow \quad (1 - \sum_j \gamma_j) = 0$. □

Bemerkung: Um die Konsistenzordnung $p = 2$ zu erhalten, ist neben (2.23) und (2.25) noch (s. Beweis von Satz 2.15)

$$\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\gamma_j = \frac{1}{2}$$

zu erfüllen. Ist noch $m = 2$, dann hat man drei Gleichungen (für 4 Unbekannte) zu erfüllen

$$
\begin{aligned}
1 &= \gamma_1 + \gamma_2\\
\beta_{21} &= \alpha_2\\
\alpha_2 &= 1/2\gamma_2\ ;
\end{aligned}
$$

diese Gleichungen wurden schon am Ende von Abschnitt 2.2 aufgestellt.

Bemerkung: Entwickelt man den Abschneidefehler bis $u^{(4)}$, dann ergeben sich im Fall $m = 3$ — neben den zwei Gleichungen aus (2.23) — noch die folgenden 4 Gleichungen, um eine Konsistenzordnung von $p \geq 3$ sicherzustellen.,

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{j=1}^{3}\gamma_j\\
\frac{1}{2} &= \sum_{j=2}^{3}\alpha_j\gamma_j \;=\; \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{3} = \sum_{j=2}^{3} \alpha_j^2 \gamma_j = \alpha_2^2\gamma_2 + \alpha_3^2\gamma_3$$
$$\frac{1}{6} = \gamma_3\alpha_2\beta_{32} .$$

Man hat also insgesamt 6 Gleichungen für 8 Unbekannte.

Bemerkung: Man kann einerseits bei vorgegebener Konsistenzordnung p nach der Anzahl der (neben (2.23)) zu erfüllenden Gleichungen für die Koeffizienten $\alpha_j, \beta_{i,j}, \gamma_j$ fragen,

p	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	1	2	4	8	17	37	85	200

.

Andererseits kann man fragen, welche maximale Konsistenzordnung $p^*(m)$ bei vorgegebenem m möglich ist,

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$m \geq 9$
$p^*(m)$	1	2	3	4	4	5	6	6	7	$\leq m-2$

.

Beispiele $(m = 4\,,\ p^*(m) = 4)$

Klassisches Runge–Kutta–Verfahren:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3/8–Regel

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Optimale Formel von Kuntzmann:

0				
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$			
$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{4}$		
1	$\frac{19}{44}$	$-\frac{15}{44}$	$\frac{40}{44}$	
	$\frac{55}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{55}{360}$

Alle drei Verfahren erfüllen (2.23) und (2.25) und sind damit konsistent mit dem AWP. Ihre Konsistenzordnung ist maximal, d. h. $p = 4$.

2.4 Die Methode der Taylor–Entwicklung

Mit der Methode der Taylor–Entwicklung erhält man für m-mal stetig differenzierbare rechte Seiten f der Differentialgleichung Näherungsverfahren m-ter Ordnung. Für die Anwendung dieses Verfahrens ist jedoch zu bedenken, daß es im allgemeinen nicht leicht oder praktisch gar nicht möglich sein wird, analytische Ausdrücke für die totalen Ableitungen $D^k f$ zu erhalten, und daß diese Ausdrücke auch bei einfachen Funktionen f von sehr komplexer Gestalt sein können.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= f(x,u(x))\Big(=: D^0 f(x,u(x))\Big) \\
u''(x) &= \frac{d}{dx} f(x,u(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} u' = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} (=: D^1 f) \\
u'''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (=: D^2 f)
\end{aligned}
$$

Definition 2.16 *$f \in C^m(G)$, $G \subset I \times \mathbb{K}$, wenn f m-mal stetig differenzierbar nach beiden Argumenten ist und die partiellen Ableitungen beschränkt sind.*

Folgerung Für die Lösung u des AWP (A) gilt

$$f \in C^m(G) \Longrightarrow u \in C^{m+1}(I)\,,$$

wobei

$$G = G_\rho = \Big\{(x,y) \in I \times \mathbb{K} \;\Big|\; |y - u(x)| \le \rho\,, \qquad a \le x \le b\Big\}\,.$$

Bemerkungen

1. Die obige Definition gilt entsprechend im Fall höherer Dimensionen: $G \subset I \times \mathbb{K}^M$.
2. Ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, dann

$$(Df)_k = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial f_k}{\partial y_j} , \qquad k = 1, \ldots, n .$$

Die rechte Seite f der Differentialgleichung der Anfangswertaufgabe (A) sei also aus $C^m(G)$ im Streifen G um die Lösung u von (A) (s. (2.17)). Dann ist die Lösung u aus $C^{m+1}(I)$ und gestattet mit Hilfe der Taylor–Formel die Darstellung

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!} u^{(m)}(x) + R_m(x;h) \\ &= u(x) + h\left(f + \cdots + \frac{h^{m-1}}{m!} D^{m-1} f \right)(x, u(x)) + R_m(x;h) , \\ & \qquad\qquad a \le x \le b - h . \end{aligned}$$

Hier haben wir die Differentialquotienten von u mit Hilfe der Differentialgleichung $u' = f(x,u)$ durch f und die partiellen Ableitungen von f nach der Formel (2.18) ausgedrückt. Auf diese Weise erhält man als Einschrittverfahren die Methode der Taylor–Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) &= f(x, u_h(x)) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{m!}(D^{m-1} f)(x, u_h(x)) , \; x \in I'_h , \\ u_h(a) &= \alpha_h . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Funktion f_h ist damit gegeben durch die Vorschrift

$$f_h(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2!}(Df)(x,y) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{m!}(D^{m-1} f)(x,y)$$

für $(x,y) \in (I'_h \times \mathbb{K}) \cap G$.

Satz 2.17 *Die Methode der Taylor–Entwicklung (A_h) ist für $f \in C^m(G)$ mit $m \ge 1$ und Anfangswerten $|\alpha_h - \alpha| = \mathrm{O}(h^m)$ konsistent mit der Anfangswertaufgabe (A) in der Konsistenzordnung $p = m$.*

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.2.(19).*

Beispiel 2.18 Ein einfaches Beispiel liefert wieder die Anfangswertaufgabe

$$u(a) = \alpha, \quad u'(x) = u(x) , \qquad x \in I ,$$

mit der Lösung $u(x) = \alpha e^{x-a}$. Hier ist $f(x,y) = y$, und es wird

$$Df = f\ , \quad D^2 f = Df = f, \ldots, D^j f = f\ , \qquad j = 1, \ldots, m\ .$$

Das Einschrittverfahren (2.26) ergibt also mit $\alpha_h = \alpha$

$$u_h(a) = \alpha\ , \quad u_h(x+h) = u_h(x)\left(1 + \frac{h}{1!} + \cdots + \frac{h^m}{m!}\right)\ , \qquad x \in I'_h\ .$$

Dies sind gerade die ersten $m+1$ Glieder der Taylor–Entwicklung von $u(x+h) = u(x)e^h$. □

2.5 Konvergenz

Jetzt zeigen wir die Konvergenz von Einschrittverfahren (A_h) gegen die Anfangswertaufgabe (A), also die Konvergenz der Folge von Lösungen u_h von (A_h) gegen die Lösung u von (A). Die Konsistenz von (A_h) mit (A) allein ist dafür allerdings nicht hinreichend. Analog zur Voraussetzung beim Existenzsatz von Picard–Lindelöf für die Lösung der Anfangswertaufgabe (A) setzen wir daher noch eine Lipschitz–Bedingung für das Einschrittverfahren (A_h) voraus.

Definition 2.19 (L) *Das Einschrittverfahren (A_h) heißt Lipschitz–stetig in einer Umgebung der Lösung u von (A), wenn es eine Lipschitz–Konstante $L \geq 0$, eine positive Zahl h_1 und eine Umgebung G_1 von u gibt, so daß die Lipschitz–Bedingung gilt*

$$|f_h(x,y) - f_h(x,y')| \leq L|y - y'|\ , \qquad (x,y),(x,y') \in G_1 \cap (I'_h \times \mathbb{K})\ , \tag{2.27}$$

gleichmäßig für jedes $0 < h \leq h_1$ mit

$$G_1 = \left\{(x,y) \in I \times \mathbb{K} \;\middle|\; |y - u(x)| \leq \rho_1, a \leq x \leq b\right\}\ .$$

Für den Konvergenzbeweis des Einschrittverfahrens betrachtet man den Fehler $r_h(x) = u_h(x) - u(x)$, $x \in I_h$. Dieser Fehler genügt dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(r_h(x+h) - r_h(x)) &= f_h(x, u_h(x)) - f_h(x, u(x)) - T_h(x)\ , \qquad x \in I'_h\ , \\ r_h(a) &= \alpha_h - \alpha\ . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Für Einschrittverfahren mit dieser Eigenschaft gilt ein allgemeiner Konvergenzsatz für die Näherungslösungen u_h und ihre Differenzenquotienten. Zur Abkürzung wollen wir dabei den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten einer Funktion v schreiben in der Form

$$D_h v(x) = \frac{1}{h}(v(x+h) - v(x))$$

für $a \le x \le b - h$ oder $x \in I_h'$, $0 < h \le b - a$.

Satz 2.20 *Das Einschrittverfahren (A_h) sei Lipschitz–stetig in einer Umgebung der Lösung u der Anfangswertaufgabe (A). Dann ist die Konsistenz von (A_h) mit (A) notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Folge von Lösungen u_h von (A_h) gegen die Lösung u von (A) und ihrer Differenzenquotienten $D_h u_h$ gegen die Ableitung u' gemäß*

$$\max_{x \in I_h} |u_h(x) - u(x)| \longrightarrow 0 \ , \quad \max_{x \in I_h'} |D_h u_h(x) - u'(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0) \ . \tag{2.29}$$

Für konsistente Verfahren exisitert eine positive Zahl h_0, so daß der Fehler $u_h - u$ der a–priori–Ungleichung genügt

$$|u_h(x) - u(x)| \le \{|\alpha_h - \alpha| + (x-a) \max_{x' \in I_h'} |T_h(x')|\} e^{L(x-a)} \ , \qquad x \in I_h \ , \tag{2.30}$$

für jedes $0 < h \le h_0$. Wenn das Einschrittverfahren (A_h) eine Konsistenzordnung $p > 0$ im Sinne von (2.16) besitzt, dann gilt darüber hinaus die a–priori–Fehlerabschätzung

$$|u_h(x) - u(x)| \le K h^p (1 + (x-a)) e^{L(x-a)} \ , \qquad x \in I_h \ , \ 0 < h \le h_0 \ . \tag{2.31}$$

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.3.(5).*

Bemerkung: *Konvergenz spezieller Verfahren*

Die rechte Seite f in der Differentialgleichung der Anfangswertaufgabe sei aus $C(G)$ und genüge einer Lipschitz–Bedingung der Gestalt

$$|f(x,y) - f(x,y')| \le L_0 |y - y'| \ , \qquad (x,y), (x,y') \in G \ . \tag{2.32}$$

Dann wird das Polygonzugverfahren ($p = 1$), das verbesserte Polygonzugverfahren ($p = 2$), das verbesserte Euler–Cauchy–Verfahren ($p = 2$), das klassische Verfahren von Runge–Kutta ($p = 4$) und die Methode der Taylor–Entwicklung ($p = m$) Lipschitz–stetig in einer Umgebung der Lösung u von (A). Damit konvergieren diese Einschrittverfahren (A_h) für $\alpha_h \to \alpha \, (h \to 0)$ gegen die Anfangswertaufgabe (A) mit der a–priori–Fehlerabschätzung (2.30). Mit der Konsistenzordnung p des Verfahrens (A_h), für eine rechte Seite $f \in C^p(G)$ und für Anfangswerte $|\alpha_h - \alpha| = \mathrm{O}(h^p)$ konvergieren diese Verfahren mit der Fehlerabschätzung (2.31).

Bemerkung: *Extrapolationsmethoden*

Wir nehmen an, daß ein Verfahren (A_h) der Ordnung $p > 0$ gegeben ist, und daß sich die Lösungen u_h von (A_h) mit einer von h unabhängigen Funktion $\rho : I \to \mathbb{R}$ in der Form

$$u_h(x) = u(x) + h^p \rho(x) + \mathrm{O}(h^{p+1}) , \qquad x \in I_h ,$$

darstellen lassen. Eine derartige asymptotische Formel läßt sich in vielen Fällen beweisen. Sind dann für ein $x \in I$ zwei Näherungen mit den Schrittweiten h und qh, $0 < q < 1$, berechnet worden, so gilt auch

$$u_{qh}(x) = u(x) + (qh)^p \rho(x) + \mathrm{O}(h^{p+1}) .$$

Damit erhält man aus diesen Gleichungen

$$u(x) = \frac{u_{qh}(x) - q^p u_h(x)}{1 - q^p} + \mathrm{O}(h^{p+1}) ,$$

womit die Konvergenzordnung auf $p + 1$ erhöht worden ist.

2.6 Stabilität

Bei der numerischen Berechnung von Näherungslösungen treten unvermeidlich Rundungsfehler auf. Damit stellt sich die Frage, welchen Einfluß diese Fehler in der Anfangsbedingung und in der Auswertung der rechten Seite der Näherungsgleichungen auf die Näherungslösungen haben. Insbesondere ist man in der Praxis auf Verfahren angewiesen, die für hinreichend kleine Fehler in der Anfangsbedingung und in der sukzessiven Berechnung der Näherungslösung an Gitterpunkten auch nur kleine Abweichungen der berechneten Näherungslösungen von der gesuchten exakten Lösung des Näherungsverfahrens haben können, und zwar gleichmäßig in der Schrittweite h. Dieser Sachverhalt wird anschließend mit dem Begriff der Stabilität des Näherungsverfahrens präzisiert, der die stetige Abhängigkeit der Näherungslösungen eines Einschrittverfahrens (A_h) von den Anfangsbedingungen und der rechten Seite der Näherungsgleichungen garantiert, gleichmäßig in der Schrittweite h.

Definition 2.21 *Das Einschrittverfahren (A_h) heißt stabil, wenn eine Zahl $h_0 > 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl δ existiert, so daß für jedes gestörte Einschrittverfahren der Gestalt*

$$v_h(a) = \alpha_h + \sigma_h , \quad \frac{1}{h}(v_h(x+h) - v_h(x)) = f_h(x, v_h(x)) + S_h(x) , \quad x \in I_h' , \qquad (2.33)$$

die zugehörigen Lösungen v_h der Bedingung genügen

$$|\sigma_h| + \max_{x \in I_h'} |S_h(x)| < \delta \Longrightarrow \max_{x \in I_h} |v_h(x) - u_h(x)| + \max_{x \in I_h'} |D_h v_h(x) - D_h u_h(x)| < \varepsilon \qquad (2.34)$$

gleichmäßig für jedes h in $0 < h \leq h_0$.

Hierfür beweisen wir nun den folgenden, allgemeinen Stabilitätssatz für Einschrittverfahren (A_h), der insbesondere die Stabilität der Euler–Cauchy–Verfahren, des Runge–Kutta–Verfahrens und der Methode der Taylor–Entwicklung verbürgt.

Satz 2.22 *Das Einschrittverfahren (A_h) sei konsistent mit der Anfangswertaufgabe (A) und Lipschitz–stetig in einer Umgebung der Lösung u von (A). Dann ist das Einschrittverfahren (A_h) stabil. Darüber hinaus gibt es positive Zahlen h_0, δ_0, so daß für jedes h in $0 < h \le h_0$ und jede Störung σ_h, S_h mit*

$$|\sigma_h| + \max_{x \in I_h'} |S_h(x)| \le \delta_0$$

die Abschätzungen gelten

$$\begin{aligned} &|v_h(x) - u_h(x)| \le \{|\sigma_h| + (x-a) \max_{x' \in I_h'} |S_h(x')|\} e^{L(x-a)} , \qquad x \in I_h , \\ &|D_h v_h(x) - D_h u_h(x)| \le L|v_h(x) - u_h(x)| + |S_h(x)| , \qquad x \in I_h' . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.4.(4).*

In diesem Zusammenhang ist noch interessant, daß Stabilität und Konsistenz bereits die Konvergenz des Einschrittverfahrens (A_h) ergeben.

Satz 2.23 *Wenn das Einschrittverfahren (A_h) stabil und mit der Anfangswertaufgabe (A) konsistent ist, dann ist (A_h) konvergent gegen (A).*

Beweis: *s. [SH82], Satz 11.4.(6).*

Beispiel 2.24 Abschneidefehler Mit $v_h = u =$ Lösung von (A) erhält man im gestörten Einschrittverfahren (2.33) gerade die Abschneidefehler,

$$\sigma_h = \alpha - \alpha_h , \quad S_h(x) = T_h(x)$$

□

Beispiel 2.25 Rundungsfehler Bei der Berechnung der Näherungslösung u_h aus (A_h) wird man an jeder Stelle $x \in I_h$ im allgemeinen unvermeidliche Rundungsfehler machen. Anstelle der Lösung u_h bestimmt man daher in Wirklichkeit eine andere Funktion v_h mit

$$v_h(a) = \alpha_h + \rho_h , \quad v_h(x+h) = v_h(x) + h f_h(x, v_h(x)) + R_h(x) , \qquad x \in I_h' ,$$

wobei ρ_h bzw $R_h(x)$ die Rundungsfehler bei der Berechnung von $v_h(a)$ bzw. $v_h(x+h)$ für $x \in I_h'$ angibt. Dies ist aber gerade die Aufgabe (2.33) mit $\sigma_h = \rho_h$, $S_h(x) = R_h(x)/h$. Nach Satz 2.22 gibt es daher für jedes konvergente, Lipschitz–stetige Einschrittverfahren positive Zahlen h_0, δ_0, so daß die Abschätzung gilt

$$|v_h(x) - u_h(x)| \leq C \left(|\rho_h| + \frac{1}{h} \max_{x' \in I_h'} |R_h(x')| \right) , \qquad x \in I_h' , \tag{2.36}$$

für jedes h in $0 < h \leq h_0$ und

$$|\rho_h| + \frac{1}{h} \max_{x \in I_h'} |R_h(x)| < \delta_0 ,$$

also falls die Rundungsfehler im Vergleich zur Schrittweite h nicht zu groß sind.

Der Gesamtfehler $|v_h - u|$, also die Abweichung der numerisch bestimmten Näherungen v_h von der gesuchten Lösung u von (A), läßt sich dann abschätzen mit Hilfe der Ungleichung für den Diskretisierungsfehler $|u_h - u|$ aus Satz 2.20 und der obigen Ungleichung (2.36) für die Rundungsfehler $|v_h - u_h|$ durch

$$|v_h(x) - u(x)| \leq C \left(|\alpha_h - \alpha| + |\rho_h| + \max_{x' \in I_h'} |T_h(x')| + \frac{1}{h} \max_{x' \in I_h'} |R_h(x')| \right) , \; x \in I_h , \tag{2.37}$$

für $0 < h \leq h_0$. Den qualitativen Verlauf der verschiedenen Fehleranteile zeigt Abb. 2.1.

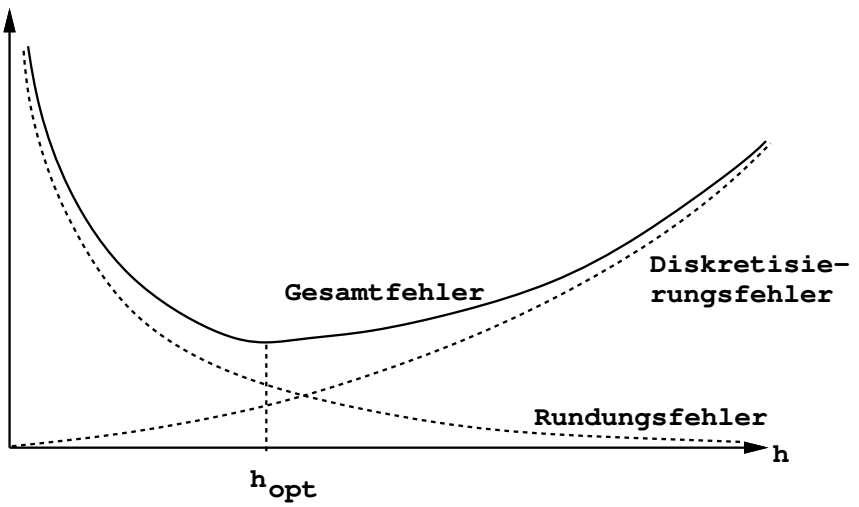


Abbildung 2.1: Gesamtfehler = Rundungs- und Diskretisierungsfehler

□

Kapitel 3

Mehrschrittverfahren für Anfangswertaufgaben

Mit den Mehrschrittverfahren in diesem Abschnitt erhalten wir eine sehr allgemeine Klasse von Verfahren zur numerischen Integration von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen. Im Unterschied zu den Einschrittverfahren verwendet man hier zur Berechnung eines Näherungswertes für die gesuchte Lösung an einem Gitterpunkt nicht nur die bereits berechnete Näherung im vorangehenden Punkt sondern die Näherungen in mehreren vorangehenden Punkten. Die Darstellung in diesem Kapitel lehnt sich wieder eng an [SH82], § 12, an; für weitergehende Aussagen wird das Buch [Gri77] herangezogen.

3.1 Definition des Verfahrens

Für die Definition von Mehrschrittverfahren zur näherungsweisen Integration von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen untersuchen wir wieder die in Abschnitt 2.1 definierte Anfangswertaufgabe

$$(A) \quad u(a) = \alpha \ , \quad u'(x) = f(x, u(x)) \ , \quad x \in I = [a, b] \ .$$

Dabei machen wir die Voraussetzung, daß die Funktion f von zwei Veränderlichen auf $I \times \mathbb{K}$ definiert ist und daß diese Aufgabe (A) eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Lösung u besitzt. Mit Hilfe von Mehrschrittverfahren sucht man ganz entsprechend wie mit den Einschrittverfahren für eine geeignete Nullfolge von Schrittweiten h eine zugehörige Folge von Näherungen $u_h(x)$ für die Funktionswerte $u(x)$ der Lösung u von (A) auf dem Punktgitter

$$I_h = [a, b]_h = \left\{ x \in [a, b] \mid \ x = a + jh \ , \quad j = 0, \ldots, N_h \right\} \tag{3.1}$$

mit der eindeutig bestimmten ganzen Zahl N_h aus

$$\frac{b-a}{h} - 1 < N_h \leq \frac{b-a}{h} .$$

Bevor wir die allgemeine Definition von Mehrschrittverfahren angeben, soll die typische Gestalt dieser Verfahren durch ein charakteristisches Beispiel, nämlich das Verfahren von Adams erläutert werden. Zunächst wählt man eine natürliche Zahl s als Schrittzahl des Verfahrens. Für die Herleitung der Näherungsgleichungen geht man davon aus, daß bereits Näherungen für die gesuchte Lösung u an den s Gitterpunkten $x, x+h, \ldots, x+(s-1)h$ aus I_h bekannt sind. Dann bestimmt das Verfahren von Adams eine Gleichung für $u(x+sh)$ durch Integration von $x+(s-1)h$ bis $x+sh$ auf beiden Seiten der Differentialgleichung mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{h}\{u(x+sh) - u(x+(s-1)h)\} = \frac{1}{h}\int_{x+(s-1)h}^{x+sh} f(t,u(t))dt . \tag{3.2}$$

Durch Approximation des Integranden $f(t,u(t))$ durch das zugehörige Interpolationspolynom zu den Stellen $x, \ldots, x+sh$ bzw. $x, \ldots, x+(s-1)h$ wird das Integral auf der rechten Seite dargestellt durch einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{h}\int_{x+(s-1)h}^{x+sh} f(t,u(t))dt = \sum_{j=0}^{s} \gamma_j f(x+jh, u(x+jh)) + T_h(x) . \tag{3.3}$$

Dabei ist der Abschneidefehler T_h bis auf den Faktor $1/h$ das Restglied der damit definierten Quadraturformel. Vernachlässigt man dieses Restglied, so erhält man aus (3.3) die Näherungsgleichung

$$\frac{1}{h}(u_h(x+sh) - u_h(x+(s-1)h) = \sum_{j=0}^{s} \gamma_j f(x+jh, u_h(x+jh)) . \tag{3.4}$$

Mit den bereits berechneten Näherungen $u_h(x), \ldots, u_h(x+(s-1)h)$ hat man daher für $\gamma_s = 0$ eine explizite bzw. für $\gamma_s \neq 0$ eine implizite Bestimmungsgleichung der Näherung $u_h(x+sh)$ für den Wert von u an der Stelle $x+sh$. Typisch für Mehrschrittverfahren ist nun, daß die Berechnung der Näherungswerte $u_h(a), \ldots, u_h(a+(s-1)h)$ nicht mit den obigen Gleichungen geschehen kann. Mit Hilfe der Anfangsbedingung und einer sogenannten Anlaufrechnung müssen daher bei Mehrschrittverfahren zunächst Näherungen $\alpha_h(x)$ für die gesuchten Funktionswerte $u(x)$ an den s ersten Gitterpunkten bereitgestellt werden,

$$u_h(x) = \alpha_h(x) , \quad x = a+jh , \qquad j = 0, \ldots, s-1 . \tag{3.5}$$

Es bezeichne noch

$$I'_h := \left\{ x \in [a,b]_h \mid x = (x_j :=) a + jh \,, \quad j = 0, \ldots, N_h - s \right\},$$
$$I^0_h := \left\{ x \in [a,b]_h \mid x = a + jh \,, \quad j = s, \ldots, N_h \right\}.$$

Beispiel 3.1 Verfahren von Adams Ähnlich wie auch bei anderen Mehrschrittverfahren unterscheidet man bei den Verfahren von Adams drei verschiedene Fälle. Nämlich einmal die sogenannten Extrapolationsmethoden oder Verfahren von Adams–Bashforth, die explizite Mehrschrittverfahren ergeben. Weiter hat man die Interpolationsverfahren oder Verfahren von Adams–Moulton als implizite Mehrschrittverfahren. Schließlich erhält man durch Kombination dieser beiden Methoden Extrapolations–Interpolationsverfahren oder Prädikator–Korrektor–Verfahren.

Für die Herleitung dieser Verfahren geht man von der Differentialgleichung $u' = f(x,u)$ aus. Mit einer Schrittzahl s und für einen beliebigen Gitterpunkt $x \in I'_h$ integriert man beide Seiten der Differentialgleichung von $x_{s-1} = x + (s-1)h$ bis $x_s = x + sh$ und erhält die Beziehung

$$D_h u(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{s-1}}^{x_s} u'(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f(t, u(t))\, dt \tag{3.6}$$

mit dem Differenzenquotienten

$$D_h u(x) = \frac{1}{h}(u(x + sh) - u(x + (s-1)h)) \,, \qquad x \in I'_h \,. \tag{3.7}$$

(i) **Extrapolationsverfahren** Grundlage dieser Mehrschrittverfahren sind geeignete Quadraturformeln für die Approximation des Integrals in (3.6). Zur Abkürzung bezeichnen wir im folgenden den Integranden mit v. Dann wird die Funktion v mit Hilfe des eindeutig bestimmten Interpolationspolynoms $p_{0,\ldots,s-1}$ durch die Punkte $(x_0, v(x_0)), \ldots, (x_{s-1}, v(x_{s-1}))$ approximiert. Damit erhält man durch Extrapolation in das Intervall $[x_{s-1}, x_s]$ eine Approximation von v in diesem Intervall. Durch Integration von x_{s-1} bis x_s ergibt dies eine Approximation des Integrals mit einer Quadraturformel zu den Stützstellen $x_0 = x, \ldots, x_{s-1} = x + (s-1)h$ (Abb. 3.1)

Das Interpolationspolynom wählt man hier zweckmäßigerweise in der Newtonschen Darstellung. In diesem Falle sind nämlich die Koeffizienten der Quadraturformel unabhängig von der Schrittzahl s, so daß damit leicht die allgemeine Formel für beliebiges s angegeben werden kann. Mit absteigenden Differenzen hat das Interpolationspolynom die (Newtonsche) Darstellung (s. [SH82], 3.2(22))

$$p_{0,\ldots,s-1}(t) = \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j \binom{-z}{j} \nabla^j v(x_{s-1}) \,, \quad z = \frac{t - x_{s-1}}{h} \,, \tag{3.8}$$

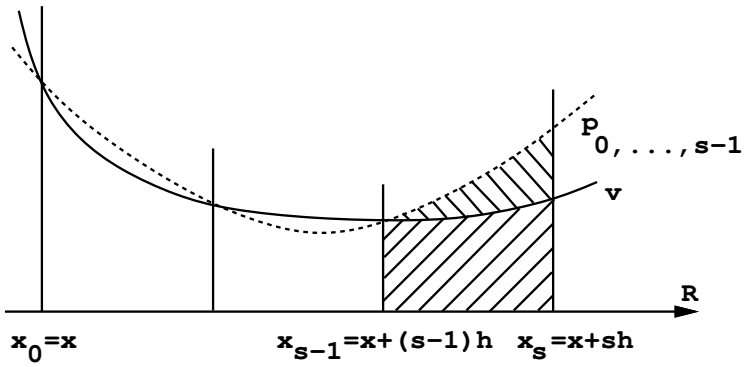


Abbildung 3.1: Stützstellen des Extrapolationsverfahrens von Adams

mit den rückwärtsgenommenen Differenzen

$$\begin{aligned}\nabla^0 v(x_m) &= v(x_m)(=: v_m)\\ \nabla^j v(x_m) &= \nabla^{j-1} v(x_m) - \nabla^{j-1} v(x_{m-1})\ .\end{aligned}$$

Damit erhält man für das Integral von x_{s-1} bis x_s die Darstellung

$$\frac{1}{h}\int_{x_{s-1}}^{x_s} p_{0,\ldots,s-1}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_j \nabla^j v(x_{s-1})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\gamma_j \;=\; \frac{(-1)^j}{h}\int_{x_{s-1}}^{x_s}\binom{-z}{j}\,dt \;&=\; (-1)^j\int_0^1\binom{-z}{j}\,dz\\ &=\; \frac{1}{j!}\int_0^1 z(z+1)\ldots(z+j-1)\,dz\end{aligned}$$

für $j = 0, 1, 2, \ldots$ Diese Koeffizienten kann man also leicht berechnen mit dem Ergebnis

$$\gamma_0 = 1\ ,\quad \gamma_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad \gamma_2 = \frac{5}{12}\ ,\quad \gamma_3 = \frac{3}{8}\ ,\quad \gamma_4 = \frac{251}{720}\ ,\ldots\ . \tag{3.9}$$

Bezeichnen wir mit S das Restglied bei der Approximation von v durch das Interpolationspolynom, dann wird

$$\frac{1}{h}\int_{x_{s-1}}^{x_s} v(t)\,dt = \sum_{j=0}^{s-1}\gamma_j\nabla^j v(x_{s-1}) + E(v) \tag{3.10}$$

mit dem Restglied dieser Quadraturformel

$$E(v) = \frac{1}{h}\int_{x_{s-1}}^{x_s} S(t)\,dt\,.$$

Das *Extrapolationsverfahren von Adams* hat also die Gestalt

$$\frac{1}{h}\Big(u_h(x+sh) - u_h(x+(s-1)h)\Big) = \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_j \nabla^j f(x_{s-1}, u_h(x_{s-1})) \tag{3.11}$$

Speziell für (Bez.: $f_j =: f(x_j, u_h(x_j))$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{s=3}: \quad u_h(x_3) &= u_h(x_2) + h\left(f_2 + \frac{1}{2}(f_2 - f_1) + \frac{5}{12}(f_2 - 2f_1 + f_0)\right)\\
&= u_h(x_2) + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0)\,;\\
\mathbf{s=4}: \quad u_h(x_4) &= u_h(x_3) + h\left(f_3 + \frac{1}{2}\nabla f_3 + \frac{5}{12}\nabla^2 f_3 + \frac{3}{8}\nabla^3 f_3\right)\\
&= u_h(x_3) + h\Big\{f_3 + \frac{1}{2}(f_3 - f_2) + \frac{5}{12}(f_3 - 2f_2 + f_1)\\
&\quad + \frac{3}{8}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)\Big\}\\
&= u_h(x_3) + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)\,.
\end{aligned}$$

(ii) **Interpolationsverfahren** Mit den obigen Bezeichnungen wird jetzt der Integrand v mit Hilfe des eindeutig bestimmten Interpolationspolynoms $p_{0,\ldots,s}$ durch die Punkte $(x_0, v(x_0)), \ldots, (x_s, v(x_s))$ approximiert. Damit erhält man im Intervall $[x_{s-1}, x_s]$ eine Näherung für v durch Interpolation. Integration von x_{s-1} bis x_s ergibt eine Quadraturformel zu den Stützstellen $x_0 = x, \ldots, x_s = x + sh$ als Näherung für das Integral (Abb. 3.2).

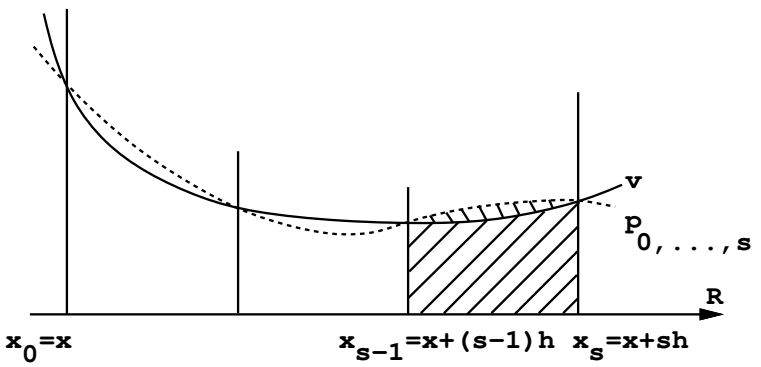


Abbildung 3.2: Stützstellen des Interpolationsverfahrens von Adams

In der Newtonschen Darstellung lautet dieses Polynom

$$p_{0,\ldots,s}(t) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{-z}{j} \nabla^j v(x_s) \,, \quad z = \frac{t - x_s}{h} \,, \tag{3.12}$$

und das zugehörige Integral hat die Gestalt

$$\frac{1}{h} \int_{x_{s-1}}^{x_s} p_{0,\ldots,s}(t)\, dt = \sum_{j=0}^{s} \gamma_j' \nabla^j v(x_s)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \gamma_j' &= \frac{(-1)^j}{h} \int_{x_{s-1}}^{x_s} \binom{-z}{j} dt &&= (-1)^j \int_{-1}^{0} \binom{-z}{j} dz \\ &&&= \frac{1}{j!} \int_{-1}^{0} z(z+1)\ldots(z+j-1)\, dz \end{aligned}$$

für $j = 0, 1, 2, \ldots$ Speziell wird damit

$$\gamma_0' = 1 \,, \quad \gamma_1' = -\frac{1}{2} \,, \quad \gamma_2' = -\frac{1}{12} \,, \quad \gamma_3' = -\frac{1}{24} \,, \quad \gamma_4' = -\frac{19}{720} \,, \ldots \,. \tag{3.13}$$

Die auf diesem Wege definierte Quadraturformel lautet

$$\frac{1}{h} \int_{x_{s-1}}^{x_s} v(t)\, dt = \sum_{j=0}^{s} \gamma_j' \nabla^j v(x_s) + E'(v) \,. \tag{3.14}$$

Das *Interpolationsverfahren von Adams* hat also die Gestalt

$$\frac{1}{h}(u_h(x + sh) - u_h(x + (s-1)h)) = \sum_{j=0}^{s} \gamma_j' \nabla^j f(x_s, u_h(x_s)) \,. \tag{3.15}$$

Speziell für

$$\begin{aligned} \mathbf{s = 3:} \quad u_h(x_3) &= u_h(x_2) + h\Big\{ f_3 - \frac{1}{2}(f_3 - f_2) - \frac{1}{12}(f_3 - 2f_2 + f_1) \\ &\quad - \frac{1}{24}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0) \Big\} \\ &= u_h(x_2) + \frac{h}{24}(9f_3 + 19f_2 - 5f_1 + f_0) \,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Da der gesuchte Funktionswert $u_h(x_3)$ auch auf der rechten Seite (in $f_3 = f(x_3, u_h(x_3))$) vorkommt — in (3.15) allgemein $u_h(x_s)$ — muß dieser iterativ bestimmt werden. Dies geschieht z. B. durch das Gesamtschrittverfahren zur Bestimmung des Fixpunktes $z = g(z)$ (vgl. [SH82], 8.3.1), hier mit $z = u_h(x_3)$ und

$$g(z) = u_h(x_2) + \frac{h}{24}(9f(x_3, z) + 19f_2 - 5f_1 + f_0) \ .$$

Benutzt man als Startiteration die Lösung des Adamschen Extrapolationsverfahrens, so erhält das Gesamtschrittverfahren zur Bestimmung von $u_h(x_3)$ die Form

$$\begin{aligned} z^{(0)} &= u_h(x_2) + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0) \ , \\ z^{(n+1)} &= g(z^{(n)}) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ ; \end{aligned}$$

setze $u_h(x_3) = z^{(\overline{n})}$ für einen (letzten) Iterationsindex $\overline{n} \in \mathbb{N}$.

(iii) Beim **Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams**bestimmt man zunächst mit dem Extrapolationsverfahren als *Prädiktor* eine Näherung $\tilde{u}_h(x + sh)$ und führt dann nur einen Schritt des obigen iterativen Lösungsverfahrens als *Korrektor* aus . Für $s = 3$ bestimmt man also mit den Funktionswerten $f_j = f(x_j, u_h(x_j))$, $x_j = x + jh$, $j = 0, 1, 2, 3$, zunächst durch Extrapolation die Näherung

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(x_3) &= u_h(x_2) + h\left\{ f_2 + \frac{1}{2}\nabla f_2 + \frac{5}{12}\nabla^2 f_2 \right\} \\ &= u_h(x_2) + \frac{h}{12}\{23f_2 - 16f_1 + 5f_0\} \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Anschließend berechnet man interpolatorisch die neue Näherung

$$\begin{aligned} u_h(x_3) &= u_h(x_2) + h\left\{ \tilde{f}_3 - \frac{1}{2}\nabla\tilde{f}_3 - \frac{1}{12}\tilde{f}_3 - \frac{1}{24}\nabla^3\tilde{f}_3 \right\} \\ &= u_h(x_2) + \frac{h}{24}\left\{ 9\tilde{f}_3 + 19f_2 - 5f_1 + f_0 \right\} \ , \quad \tilde{f}_3 = f(x_3, \tilde{u}_h(x_3)) \ . \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.2 Verfahren von Nyström und Milne Zur Herleitung dieser Mehrschrittverfahren wählt man (3.7) nicht den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten, sondern integriert die Differentialgleichung von $x + (s-2)h$ bis $x + sh$, also über ein Intervall der Länge $2h$, und approximiert das Integral über die rechte Seite durch Interpolation wie beim Verfahren von Adams. Die zugehörigen Extrapolationsverfahren oder Verfahren von Nyström und Interpolationsverfahren oder Verfahren von Milne lassen sich dann wieder zum Prädiktor–Korrektor–Verfahren vereinigen. Die Überlegungen hierzu sind ganz analog wie beim Verfahren von Adams, so daß wir dies hier nicht mehr in allen Einzelheiten ausführen wollen.

Für eine Schrittzahl s und einen beliebigen Gitterpunkt $x \in I_h'$ erhält man durch Integration der Differentialgleichung von $x_{s-2} = x + (s-2)h$ bis $x_s = x + sh$ die Gleichung

$$D_h u(x) = \frac{1}{2h}\int_{x_{s-2}}^{x_s} u'(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int_{x_{s-2}}^{x_s} f(t, u(t))\,dt \tag{3.18}$$

mit dem zentralen Differenzenquotienten an der Stelle x_{s-1},

$$D_h u(x) = \frac{1}{2h}(u(x+sh) - u(x+(s-2)h)) , \qquad x \in I_h' .$$

(i) **Extrapolationsverfahren**

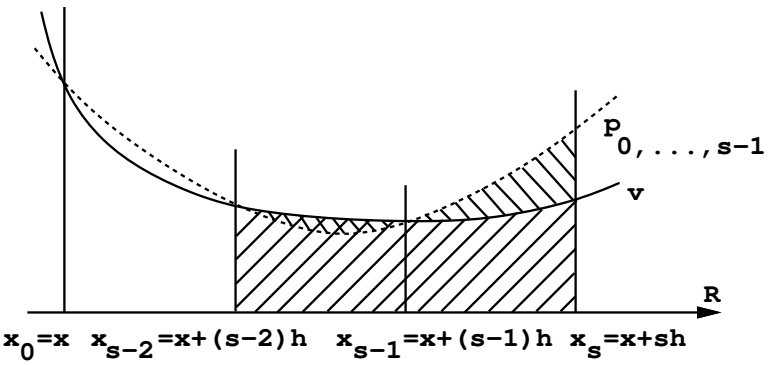


Abbildung 3.3: Stützstellen des Verfahrens von Nyström

Mit dem Interpolationspolynom $p_{0,\ldots,s-1}$ in (3.8) und der Abkürzung $v = u' = f(t,u)$ gilt hier die Beziehung

$$\frac{1}{2h}\int_{x_{s-2}}^{x_s} p_{0,\ldots,s-1}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{s-1} \mu_j \nabla^j v(x_{s-1})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{(-1)^j}{2h}\int_{x_{s-2}}^{x_s} \binom{-z}{j} dt \;=\; \frac{(-1)^j}{2}\int_{-1}^{+1} \binom{-z}{j} dz \\ &= \frac{1}{2\cdot j!}\int_{-1}^{+1} z(z+1)\ldots(z+j-1)\,dz \end{aligned}$$

für $z = (t - x_{s-1})/h$ und $j = 0, 1, 2, \ldots$, also

$$\mu_0 = 1 , \quad \mu_1 = 0 , \quad \mu_2 = \frac{1}{6} , \quad \mu_3 = \frac{1}{6} , \quad \mu_4 = \frac{29}{180} , \ldots .$$

Für die Approximation des Integrals in (3.18) hat man so die Quadraturformel

$$\frac{1}{2h}\int_{x_{s-2}}^{x_s} v(t)\,dt = \sum_{j=0}^{s-1} \mu_j \nabla^j v(x_{s-1}) + E(v) .$$

Diese Quadraturformel besitzt mindestens den Genauigkeitsgrad $s-1$. Dementsprechend gestattet das Restglied die Abschätzung

$$|E(v)| \le \frac{h^s}{2 \cdot s!} \int_{-1}^{+1} |z(z+1)\dots(z+s-1)|\, dz \max_{x \in I} |v^{(s)}(x)| \; .$$

Das *Verfahren von Nyström* oder Extrapolationsverfahren mit zentralen Differenzen hat also die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}(u_h(x_s) - u_h(x_{s-2})) \;\; = \;\; & \Big(f + \frac{1}{6}\nabla^2 f + \frac{1}{6}\nabla^3 f + \cdots \\ & + \mu_{s-1}\nabla^{s-1} f)(x_{s-1}, u_h(x_{s-1}))\Big) \; . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Mit der Schrittzahl $s = 3$ lauten die expliziten Differenzengleichungen von Nyström mit den Abkürzungen $x_j = x + jh$, $f_j = f(x_j, u_h(x_j))$ für $j = 0, \dots, 3$ auch

$$\frac{1}{2h}(u_h(x_3) - u_h(x_1)) = \frac{1}{6}(7f_2 - 2f_1 + f_0) \; .$$

(ii) **Interpolationsverfahren**

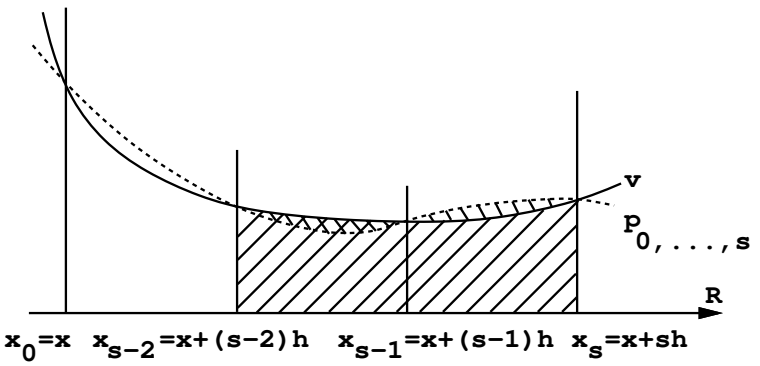


Abbildung 3.4: Stützstellen des Verfahrens von Milne

Mit dem Interpolationspolynom in (3.14) wird

$$\frac{1}{2h} \int_{x_{s-2}}^{x_s} p_{0,\dots,s}(t)\, dt = \sum_{j=0}^{s} \mu'_j \nabla^j v(x_s) \; .$$

Die Koeffizienten haben jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned} \mu'_j \;\; &= \;\; \frac{(-1)^j}{2h} \int_{x_{s-2}}^{x_s} \binom{-z}{j} dt \;\; = \;\; \frac{(-1)^j}{2} \int_{-2}^{0} \binom{-z}{j} dz \\ &= \;\; \frac{1}{2j!} \int_{-2}^{0} z(z+1)\dots(z+j-1)\, dz \end{aligned}$$

für $z = (t - x_s)/h$ und $j = 0, 1, 2, \dots$, oder

$$\mu'_0 = 1\ , \quad \mu'_1 = -1\ , \quad \mu'_2 = \frac{1}{6}\ , \quad \mu'_3 = 0\ , \quad \mu'_4 = \frac{1}{180}\ , \ldots\ .$$

Die zugehörige Quadraturformel

$$\frac{1}{2h}\int_{x_s-2}^{x_s} v(t)\,dt = \sum_{j=0}^{s} \mu'_j \nabla^j v(x_s) + E'(v)$$

hat mindestens den Genauigkeitsgrad s. Das Restglied genügt somit der Ungleichung

$$|E'(v)| \le \frac{h^{s+1}}{2(s+1)!}\int_{-2}^{0} |z(z+1)\ldots(z+s)|\,dz \max_{x\in I} |v^{(s+1)}(x)|\ .$$

Das *Interpolationsverfahren mit zentralen Differenzen* oder *Verfahren von Milne* wird dann durch die Differenzengleichung definiert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}(u_h(x_s) - u_h(x_{s-2})) \quad &= \quad (f - \nabla f + \frac{1}{6}\nabla^2 f - \frac{1}{180}\nabla^4 f + \cdots \\ &\qquad + \mu'_s \nabla^s f)(x_s, u_h(x_s))\ . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Für die Schrittzahl $s = 3$ (s. Abb. 3.4) erhält man hier das *Verfahren von Milne–Simpson*. Die Differenzengleichungen (3.20) kann man für $s = 3$ auch in der Form schreiben

$$\frac{1}{2h}(u_h(x_3) - u_h(x_1)) = \frac{1}{6}(f_3 + 4f_2 + f_1)\ .$$

Dieses ist also eine implizite Gleichung zur Bestimmung der neuen Näherung $u_h(x_3)$. Die Formel entsteht durch Anwendung der Quadraturformel von Simpson auf die rechte Seite in Gleichung (3.18).

Als Prädiktor–Korrektor–Verfahren mit der Schrittzahl $s = 3$ bestimmt man dementsprechend aus dem Extrapolationsverfahren zunächst die Näherungen

$$\tilde{u}_h(x_3) = u_h(x_1) + \frac{h}{3}(7f_2 - 2f_1 + f_0)\ , \quad \tilde{f}_3 = f(x_3, \tilde{u}_h(x_3))\ ,$$

und dann mit dem Interpolationsverfahren den Näherungswert $u_h(x_3)$ nach der Vorschrift

$$u_h(x_3) = u_h(x_1) + \frac{h}{3}(\tilde{f}_3 + 4f_2 + f_1)\ .$$

□

3.2 Konsistenz von Mehrschrittverfahren

Die Konsistenz von Mehrschrittverfahren (A_h) wird bestimmt durch die Konsistenz der Differenzengleichungen des Näherungsverfahrens mit der Differentialgleichung der Anfangswertaufgabe (A) sowie durch die Konsistenz der Näherungswerte auf dem Anfangsstück mit der gesuchten Lösung u von (A). Der Abschneidefehler ergibt sich auch hier wieder als Defekt beim Einsetzen der Lösung u von (A) in die Differenzengleichungen des Näherungsverfahrens (A_h). Für die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zeigen wir die Konsistenz und Konsistenzordnung der Verfahren von Adams sowie von Nyström und Milne. Dabei sind bei gleicher Schrittzahl s jeweils die zugehörigen Interpolationsverfahren mit der Ordnung $p = s+1$ um eine Ordnung besser als die Konsistenzordnung $p = s$ des Extrapolationsverfahrens. Die Lösung der impliziten Gleichungen bei Interpolationsverfahren kann man durch ein zugehöriges Prädiktor–Korrektor–Verfahren vermeiden, das die gleiche Konsistenzordnung $p = s + 1$ besitzt, wie das Interpolationsverfahren.

Nach Voraussetzung besitze die Anfangswertaufgabe

$$(A) \quad u(a) = \alpha \,, \quad u'(x) = f(x, u(x)) \,, \qquad x \in I = [a, b] \,,$$

eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Lösung u auf I. Weiter setzen wir voraus, daß das Mehrschrittverfahren (Abk.: MSV) der Form (s = Schrittzahl)

$$(A_h) \quad \begin{aligned} D_h(x) &= f_h(x, u_h(x - sh), \ldots, u_h(x)) \,, \qquad x \in I_h^0 \,, \\ u_h(x) &= \alpha_h(x) \,, \quad x = a + jh \,, \qquad j = 0, \ldots, s-1 \,, \end{aligned}$$

für jede Schrittweite h aus der betrachteten Nullfolge eine eindeutig bestimmte Lösung u_h auf dem Gitter I_h definiert. Wir betrachten hierbei Mehrschrittverfahren einer allgemeinen Form, wobei (bei konstanter Schrittweite $h > 0$)

$$D_h u_h(x_j) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{s} a_k u_h(x_{j-s+k}) \,, \qquad x_j \in I_h^0 \,, \tag{3.21}$$

eine Approximation der Ableitung u' darstellen soll.

Definition 3.3 *Ein Mehrschrittverfahren* (A_h) *heißt* linear, *wenn*

$$f_h(x_j, y_0, \ldots, y_s) = \sum_{k=0}^{s} b_k f(x_{j-s+k}, y_k) \,, \qquad x_j \in I_h' \,. \tag{3.22}$$

Beispiele:

1. Adams–Extrapolationsverfahren

$$a_s = 1\,, \quad a_{s-1} = -1\,, \quad a_k = 0 \quad \text{sonst},$$
$$b_s = 0\,, \quad b_k \text{ siehe Beispiel 3.1.(i)}, \; k = 0, \ldots, s-1\,;$$

2. Adams–Interpolationsverfahren

$$a_s = 1\,, \quad a_{s-1} = -1\,, \quad a_k = 0 \quad \text{sonst},$$
$$b_k \text{ siehe Beispiel 3.1(ii)}, \; k = 0, \ldots, s\,;$$

3. Nyström–Verfahren

$$a_s = \tfrac{1}{2}\,, \quad a_{s-2} = -\tfrac{1}{2}\,, \quad a_k = 0 \quad \text{sonst},$$
$$b_s = 0\,, \quad b_k \text{ siehe Beispiel 3.2.(i)}, \; k = 0, \ldots, s-1\,;$$

4. Milne–Verfahren

$$a_s = \tfrac{1}{2}\,, \quad a_{s-2} = -\tfrac{1}{2}\,, \quad a_k = 0 \quad \text{sonst}\,,$$
$$b_k \text{ siehe Beispiel 3.2.(ii)}\,, \; k = 0, \ldots, s\,.$$

□

Definition 3.4 (Abschneidefehler)

$$\begin{aligned} T_h(x_j) &= u(x_j) - \alpha_h(x_j)\,, \qquad j = 0, \ldots, s-1\,, \\ T_h(x_j) &= \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{s} a_k u(x_{j-s+k}) - f_h(x_j, u(x_{j-s}), \ldots, u(x_j))\,, \qquad x_j \in I_h^0\,. \end{aligned}$$

Definition 3.5 *Die Differenzengleichungen des Mehrschrittverfahrens wollen wir im folgenden eine* konsistente Approximation *der Differentialgleichung $u' = f(x,u)$ nennen, wenn gilt*

$$h \sum_{x \in I_h^0} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \tag{3.23}$$

Allgemeiner heißt das Mehrschrittverfahren (A_h) konsistent *mit der Anfangswertaufgabe, wenn neben dem Abschneidefehler T_h auch die Werte $\alpha_h(x)$ auf dem Anfangsstück der ersten s Gitterpunkte gegen $u(x)$ konvergieren und somit die* Konsistenzbedingung *erfüllt ist*

$$\max_{\substack{x = a + jh \\ j = 0, \ldots, s-1}} |\alpha_h(x) - u(x)| + h \sum_{x \in I_h^0} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)\,. \tag{3.24}$$

Hinreichend für (3.24) ist, daß der Abschneidefehler T_h gleichmäßig auf dem Gitter gegen Null strebt, also

$$\max_{x\in I_h} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)\,. \tag{3.25}$$

Bezeichnungen: (siehe (3.21) bzw. (3.22)) *Polynome*

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \sum_{k=0}^{s} a_k z^k\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,, \\ \sigma(z) &= \sum_{k=0}^{s} b_k z^k\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

Ein erstes einfaches Ergebnis zur Konsistenz lautet wie folgt.

Satz 3.6 *Wenn die Differenzenquotienten $D_h u$ mit der Lösung u von (A) gegen u' konvergieren gemäß*

$$\max_{x\in I_h^0} |D_h u(x) - u'(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)\,,$$

dann sind die beiden Konsistenzbedingungen äquivalent

$$\max_{x\in I_h^0} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \max_{x\in I_h^0} |f_h(x, u(x-sh), \ldots, u(x)) - f(x, u(x))| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)\,.$$

Beweis: Die Darstellung für den Abschneidefehler ergibt mit Hilfe der Differentialgleichung $u' = f(x,u)$ offenbar die Beziehung

$$T_h(x) = D_h u(x) - u'(x) + f(x, u(x)) - f_h(x, u(x-sh), \ldots, u(x))\,, \qquad x \in I_h^0\,,$$

aus der unmittelbar die oben behauptete Äquivalenz folgt. □

In den folgenden Sätzen zur Konsistenz werden wesentlich die Polynome ρ bzw. σ benutzt, die den allgemeinen Differenzenquotienten D_h bzw. ein lineares MSV charakterisieren.

Satz 3.7 *Sei u die Lösung von (A). Ein MSV (A_h) ist konsistent mit der Anfangswertaufgabe (A) und es gilt die Bedingung*

$$\limsup_{h\to 0} h \sum_{x\in I_h^0} |f_h(x, u(x-sh), \ldots, u(x))| < \infty \tag{3.26}$$

d. u. n. d. wenn

(a) $\rho(1)u = 0$,

(b) $\alpha_h(x_j) \longrightarrow \alpha \quad (h \to 0)$, $\qquad j = 0, \ldots, s-1$,

(c) $h \sum_{x \in I_h^0} |f_h(x, u(x-sh), \ldots, u(x)) - \rho'(1) f(x, u(x))| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$.

Beweis: s. [Gri77], 1.1.(21)

Zunächst ist

$$\alpha_h^{(j)} \longrightarrow \alpha \Longleftrightarrow T_h(x_j) \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) , \qquad j = 0, \ldots, s-1 .$$

Taylor–Entw. liefert:

$$u(x_{j-s+k}) = u(x_{j-s}) + khu'(x_{j-s}) + kh \underbrace{\left(u'(\tilde{x}_{j-s}) - u'(x_{j-s})\right)}_{\longrightarrow 0 \ (h \to 0)} , \ \tilde{x}_{j-s} \in [x_{j-s}, x_{j-s+k}]$$

$$\Longrightarrow \qquad T_h(x_j) = \frac{1}{h} \underbrace{\sum_{k=0}^{s} a_k}_{\rho(1)} u(x_{j-s}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{s} k a_k}_{\rho'(1)} u'(x_{j-s}) + \underbrace{\mathbf{o}(1)}_{\longrightarrow 0} - f_h(x_j, u(x_{j-s}), \ldots, u(x_j)) , \ j = s, \ldots, N_h \qquad \Big\} \ (*)$$

Also (wegen $u' = f(., u)$)

(a) + (b) +(c) $\Longrightarrow$ Konsistenz.

Die lim sup–Bed. (3.26) folgt auch aus (c). Umgekehrt gelte Konsistenz und (3.26). Dann folgt aus $(*)$

$$\sum_{x_j \in I_h^0} \left| \rho(1)u(x_{j-s}) + h\Big[\rho'(1)u'(x_{j-s}) - f_h(x_j, u(x_{j-s}), \ldots, u(x_j))\Big] \right| \longrightarrow 0 \ (h \to 0) .$$

Wegen (3.26) muß dann $\sum_{x_j \in I_h^0} |\rho(1)u(x_{j-s})| \le C$, $0 < h \le H$, sein. Damit ist $\rho(1)u = 0$, denn andernfalls

$$\exists \overline{x} \in [a, b], \tau > 0, c_0 > 0 \ : \ |\rho(1)u(x)| \ge c_0 \ \forall x \in [\overline{x} - \tau, \overline{x} + \tau]$$

$$\Longrightarrow \quad \exists h_n \longrightarrow 0 \, , \ m_n \longrightarrow \infty \ (n \to \infty) \, , \ x_{\nu-s}^{(n)} \in [\overline{x} - \tau, \overline{x} + \tau] \, , \ \nu = 1, \ldots, m_n \ :$$

$$\sum_{x \in I_h^0} |\rho(1)u(x - sh)| \ge \sum_{\nu=1}^{m_n} |\rho(1)u(x_{\nu-s}^{(n)})| \ge m_n c_0 \longrightarrow \infty \ (n \to \infty)$$

Widerspruch !

Damit gilt (a) und über (∗) auch (c). □

Satz 3.8 (Konsistenz linearer MSV) *Ein lineares MSV ist konsistent mit dem AWP, wenn* $\alpha_h(x_j) \longrightarrow \alpha \ (h \to 0)$, $j = 0, \ldots, s-1$, *und*

$$\rho(1) = 0 \ , \quad \rho'(1) = \sigma(1) \ . \tag{3.27}$$

Ist $f(., u) \neq 0$, *so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis: s. [Gri77], 1.1.(27)

Wegen der Stetigkeit von f und u folgt für lineare MSV, daß

$$\max_{x \in I_h^0} \Big| f_h(x, u(x-sh), \ldots, u(x)) - \underbrace{\sum_{k=0}^{s} b_k \, f(x, u(x))}_{\sigma(1)} \Big| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

Aus (3.27) folgt dann (vgl. (*)) $\max_{x \in I_h^0} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$.

Zur Umkehrung: Für lineare MSV ist (3.26) trivialerweise erfüllt, so daß aus der Konsistenz $\rho(1)u = 0$ — und $\alpha_h^{(j)} \longrightarrow \alpha$ — folgt. Der Abschneidefehler hat die Darstellung

$$\begin{aligned} T_h(x_j) &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{s} a_k u(x_{j-s+k}) - \sum_{k=0}^{s} b_k u'(x_{j-s+k}) \\ &= \frac{1}{h} \underbrace{\rho(1)u}_{\substack{=0 \\ \text{s.o.}}}(x_{j-s}) + (\rho'(1) - \sigma(1)) u'(x_{j-s}) + \mathbf{o}(1) \ , \quad x_j \in I_h^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} h \sum_{x_j \in I_h^0} |T_h(x_j)| &= \int_I |\rho'(1) - \sigma(1)| \, |f(x, u(x))| \, dx \\ &= |\rho'(1) - \sigma(1)| \int_I |f(x, u(x))| \, dx = 0 \\ \Longrightarrow \quad (\text{wg } f(x., u) \neq 0) \quad & \rho'(1) = \sigma(1) \ . \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus $u' = f(., u) \neq 0$, daß $u \neq 0$, und daß $\rho(1) = 0$. □

Definition 3.9 (Konsistenzordnung) *Man nennt eine Zahl* $p > 0$ Konsistenzordnung *des Mehrschrittverfahrens* (A_h), *wenn mit einer positiven Zahl* $K > 0$ *und einem* $h_0 > 0$ *eine Abschätzung der folgenden Gestalt gilt,*

$$\max_{\substack{x = a + jh \\ j = 0, \ldots, s-1}} |\alpha_h(x) - u(x)| + h \sum_{x \in I_h^0} |T_h(x)| \leq K h^p \ , \qquad 0 < h \leq h_0 \ . \tag{3.28}$$

Hinreichend für (3.28) ist

$$\max_{j=0,\ldots,N_h} |T_h(x_j)| \le Kh^p\ , \qquad 0 < h \le h_0\ .$$

Satz 3.10 (Konsistenzordnung linearer MSV) *Unter der Voraussetzung*

$$T_h(x_j) = \mathrm{O}(h^p)\ , \qquad j = 0, \ldots, s-1\ ,$$

besitzt das MSV für jede Funktion $f \in C^p(G)$ die Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$, d. u. n. d. wenn eine — und damit jede — der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\sum_{k=0}^{s}(k^\ell a_k - \ell k^{\ell-1} b_k) = 0\ , \qquad \ell = 0, 1, \ldots, p\ .$

(b) $z = 0$ *ist eine Nullstelle der Vielfachheit* $\ge p+1$
der Funktion $\varphi(z) = \rho(e^z) - z\sigma(e^z)\ ,\ z \in \mathbb{C}\ .$

(c) *Die Konsistenzordnung für das AWP* $u' = u\ ,\ u(a) = 1$ *beträgt* $p\ .$

Bemerkung: *Für $\ell = 0$ bzw. $\ell = 1$ bedeutet (a) gerade $\rho(1) = 0$ bzw. $\rho'(1) = \sigma(1)$, was schon in (3.27) gefordert wurde.*

Beweis: s. [Gri77], 1.1.(30)

Ist $f \in C^p(G)$, dann $u \in C^{p+1}(I)$. Taylor–Entw. bis zur $(p+1)$-ten Ableitung liefert (vgl. oben)

$$\begin{aligned}
u(x+kh) &= u(x) + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{k^\ell h^\ell}{\ell!} u^{(\ell)}(x) + \mathrm{O}(h^{p+1}) \\
u'(x+kh) &= u'(x) + \sum_{\ell'=1}^{p-1} \frac{k^{\ell'} h^{\ell'}}{\ell'!} u^{(\ell'+1)}(x) + \mathrm{O}(h^p) \\
\Longrightarrow \quad hT_h(x+sh) &= \sum_{k=0}^{s} a_k u(x+kh) - h \sum_{k=0}^{s} b_k u'(x+kh) \\
&\underset{\ell'=\ell-1}{=} \sum_{k=0}^{s} \left[a_k u(x) + \sum_{\ell=1}^{p} \left(\frac{a_k}{\ell!} k^\ell - \frac{b_k}{(\ell-1)!} k^{\ell-1} \right) h^\ell u^{(\ell)} \right] + \mathrm{O}(h^{p+1})
\end{aligned}$$

Es gelten nun die folgenden Implikationen:

- $(a) \Longrightarrow$ Konsistenz mit Ordnung p
- Konsistenz $\Longrightarrow$ $(f : u = 1\ ,\ u = x, \ldots, u = x^p)$ (a)

- Konsistenz $\Longrightarrow$ (c) (trivial!)
- $(c) \Longrightarrow$ $(u = e^{t-a}\,,\ u^{(\ell)} = e^{t-a} \quad \forall \ell)$

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(h^p) &= \sum_{j=0}^{N_h - s} h T_h(x_j + sh) \\ &= \sum_j \left(\sum_{k=0}^{s} \left[a_k + \sum_\ell \frac{1}{\ell!}(a_k k^\ell - \ell b_k k^{\ell-1}) h^\ell \right] e^{x_j - a} \right) + \mathrm{O}(h^p) \\ &= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{p} \overbrace{\frac{1}{\ell!} \sum_{k=0}^{s} \left(a_k k^\ell - \ell b_k k^{\ell-1} \right)}^{c_\ell} h^{\ell-1} \quad \overbrace{\sum_j h e^{x_j - a}}^{\longrightarrow \int_I e^{x-a} dx = e^{b-a} - 1}}_{\Longrightarrow\ = \mathrm{O}(h^p)} + \mathrm{O}(h^p) \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow (h \to 0) \quad c_\ell = 0\,, \quad \ell = 0, \ldots, p\,.$

- $(a) \Longleftrightarrow (b)$ (durch Entw. von φ bei $z = 0$)

□

Bemerkung: Ein lineares MSV hat $2\,(s+1)$ Parameter. Durch (3.27) hat man 2 Gleichungen; ein explizites Verfahren hat wegen $b_s = 0$ einen (freien) Parameter weniger. Die Anzahl der freien Parameter bestimmt die

maximale Konsistenzordnung: $\begin{cases} 2s & \text{implizites MSV} \\ 2s-1 & \text{explizites MSV} \end{cases}$

Beispiele:

1. **Adams–Extrapol.**

$$\rho(1) = a_s + a_{s-1} = 1 - 1 = 0\,, \quad \rho'(1) = \sum_{k=0}^{s} k a_k = s - (s-1) = 1\,,$$

$$\sigma(1) = \sum_{k=0}^{s} b_k \underset{s=3}{=} \frac{1}{12}(23 - 16 + 5) = 1 \quad (\Longleftrightarrow \text{ Bed. } (a) \text{ für } \ell = 1)\,;$$

$$\text{Bed. } (a),\ \ell = 2: \quad \sum_{k=0}^{3} (k^2 a_k - 2k b_k) = 3^2 - 2^2 - 2\left(2\frac{23}{12} - \frac{16}{12}\right) = 5 - \frac{1}{6}(46 - 16) = 0\,;$$

$$\text{Bed. } (a),\ \ell = 3: \quad \sum_{k=0}^{3} (k^3 a_k - 3k^2 b_k) = 3^3 - 2^3 - 3\left(4\frac{23}{12} - \frac{16}{12}\right) = 19 - \frac{1}{4}(\underbrace{92 - 16}_{76}) = 0$$

$\Longrightarrow$ Konsistenzordnung $p = 3\,(= s)$.

2. **Adams–Interpol.** $\rho(1) = 0$, $\rho'(1) = 1$ (wie Extrapol.);

$$\sigma(1) \underset{s=3}{=} \frac{1}{24}(9 + 19 - 5 + 1) = 1 \quad (\Longrightarrow (3.27))$$

$$\text{Bed. } (a),\quad \ell = 2: \quad \sum_{k=0}^{3}(k^2 a_k - 2k b_k) \;=\; \underbrace{3^2 - 2^2}_{5} - \underbrace{2\left(3\frac{9}{24} + 2\frac{19}{24} - \frac{5}{24}\right)}_{\frac{1}{12}(27+38-5)} = 0\ ;$$

$$\ell = 3: \quad \text{analog;}$$

$$\ell = 4: \quad \sum_{k=0}^{3}(k^4 a_k - 4k^3 b_k) \;=\; \underbrace{3^4 - 2^4}_{65} - \frac{4}{24}(\underbrace{27 \cdot 9 + 8 \cdot 19 - 5}_{390}) = 0\ .$$

$\Longrightarrow$ Konsistenzordnung $p = 4\,(= s + 1)$.

3. **Nyströmsches Extrapolationsverfahren:**

(wie Adams, aber mit $D_h u(x) = \dfrac{u(x + sh) - u(x + (s-2)h)}{2h}$)

$$a_s = 1\ , \quad a_{s-1} = 0\ , \quad a_{s-2} = -1\ , \quad a_k = 0 \ \text{ sonst}\ ,$$
$$b_s = 0\ , \quad b_2 = \frac{7}{3}\ , \qquad b_1 = -\frac{2}{3}\ , \qquad b_0 = \frac{1}{3} \quad (s = 3)\ ,$$

$$\rho(1) = a_s + a_{s-2} = 0\ , \quad \rho'(1) = s - (s-2) = 2\ ,$$
$$\sigma(1) \underset{s=3}{=} \frac{1}{3}(7 - 2 + 1) = 2 \quad (\Longrightarrow (3.27) \text{ erfüllt })\ .$$

Konsistenzordnung $= s$:

$$\text{Bed. } (a),\qquad \underset{(s\,=\,3)}{\ell = 3}: \qquad \sum_{k=0}^{3}(k^3 a_k - 3k^2 b_k) = \underbrace{3^3 - 1}_{26} - \frac{3}{3}(4 \cdot 7 - 2) = 0\ .$$

4. **Milnesches Interpolationsverfahren:**

(wie Adams–Interpol. mit obigem D_h)

$$a_s = 1 = -a_{s-2}\ , \quad a_k = 0 \ \text{ sonst} \quad (\Longrightarrow \rho(1) = 0\ ,\ \rho'(1) = 2)\ ,$$
$$(s = 3) \quad b_3 = \frac{1}{3}\ , \quad b_2 = \frac{4}{3}\ , \quad b_1 = \frac{1}{3}\ , \quad b_0 = 0\ ,$$
$$\sigma(1) = \frac{1}{3}(1 + 4 + 1) = 2 \quad (\Longrightarrow (3.27) \text{ erfüllt })\ .$$

Konsistenzordnung $= s+1$:

$$\text{Bed. } (a), \quad \underset{(s=3)}{\ell = 4}: \quad \sum_{k=0}^{3}(k^4 a_k - 4k^3 b_k) = \underbrace{81-1}_{80} - \frac{4}{3}(\underbrace{27+8\cdot 4+1}_{60}) = 0 \ .$$

□

3.3 Stabilität und Konvergenz

Man kann ein MSV schreiben als (kurz: MSV (A_h))

$$(A_h u_h)(x_j) = 0 \ , \qquad j = 0, \ldots, N_h \ ,$$

wobei

$$(A_h v_h)(x_j) = \begin{cases} v_j - \alpha_h^{(j)} \ , & j = 0, \ldots, s-1 \\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{k=0}^{s} a_k v_{j-s+k} - f_h(x_j, v_{j-s}, \ldots, v_j) \ , & j = s, \ldots, N_h \end{cases}$$

und $v_\nu = v_h(t_\nu)$.

Bezeichnung:

Norm: $[v_h] := \sum_{j=0}^{s-1} |v_h(x_j)| + h \sum_{x \in I_h^0} |v_h(x)|$

Definition 3.11 *MSV (A_h) heißt Lipschitz–stabil bei (v_h), wenn* $\exists H, \delta, \eta > 0 \quad \forall h : 0 < h \le H \quad \forall w_h : [A_h v_h - A_h w_h] \le \delta$

$$\Longrightarrow |v_h(x) - w_h(x)| \le \eta [A_h v_h - A_h w_h] \ , \qquad x \in I_h \ . \tag{3.29}$$

Bezeichnung: $\eta =$ „Stabilitätsschranke“, $\delta =$ „Stabilitätsschwelle“

Ähnlich wie bei Einschrittverfahren setzen wir die folgende Bedingung voraus:

Definition 3.12 (Lipschitzbedingung (L)) $\exists$ *Umgebung* $G = K_{\rho_0}$ *von* $(x, u(x))$, $\exists H > 0$, $L \ge 0 \quad \forall 0 < h \le H \quad \forall z_k, \tilde{z}_k : (x, z_k)$, $(x, \tilde{z}_k) \in G$, $k = 0, \ldots, s$

$$\Longrightarrow |f_h(x, z_0, \ldots, z_s) - f_h(x, \tilde{z}_0, \ldots, \tilde{z}_s)| \le L \sum_{k=0}^{s} |z_k - \tilde{z}_k| \tag{3.30}$$

Satz 3.13 (Konvergenzsatz) *Ist (L) erfüllt, (A_h) Lipschitz–stabil bei $(r^h u) = (u^h)$ und das MSV (A_h) konsistent mit dem AWP, dann gibt es $H_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, so daß für alle $0 < h \le H_1$, $y_h : [y_h] \le \delta_1$ die Gleichung*

$$A_h v_h = y_h$$

eindeutig lösbar ist mit $v_h \in G$, und die a–priori–Abschätzung gilt

$$|v_h(t) - u(t)| \le \eta[T_h - y_h] , \qquad t \in I_h ,$$

wobei T_h = Abschneidefehler, η = Stabilitätsschranke.

Beweis: Es gelte (L) zunächst global. Gesucht ist ein Fixpunkt $z = v_h(x_j)$ von

$$g(z) = \frac{1}{a_s}\left(\sum_{k=0}^{s-1} a_k v_{j-s+k} - h f_h(x_j, v_{j-s}, \ldots, v_{j-1}, z) + h y_h(x_j)\right)$$

für $j = s, \ldots, N_h$, wobei $v_\nu = v_h(x_\nu)$, $\nu = 0, \ldots, j-1$. Wegen (L) gilt

$$|g(z) - g(\tilde{z})| \le \frac{h}{|a_s|} L |z - \tilde{z}| \quad \forall (x_j, z), (x_j, \tilde{z}) .$$

Es ist $q < 1$, wenn $q := hL/|a_s| < 1$; nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert dann ein eindeutiger Fixpunkt $z = g(z)$, d. h. $z = v_h(x_j)$, $j = s, \ldots, N_h$, zusammen mit $v_h(x_j) = \alpha_h^{(j)} + y_h(x_j)$, $j = 0, \ldots, s-1$, löst $A_h v_h = y_h \quad \forall h : 0 < h < a_s/L$.

Gilt (L) lokal in $G = K_{\rho_0}$, dann existiert eine Fortsetzung $\hat{f}_h$ von f_h, so daß $\hat{f}_h = f_h$ in G und $\hat{f}_h$ erfüllt (L) global (vgl. [Gri72], S. 79/80). Sei $\delta_1 : 2\eta\delta_1 \le \rho$ und $\delta_1 \le \delta/2$ mit $\delta =$ Stabilitätsschwelle, und $H_1 < \frac{a_s}{L} : [T_h] \le \delta_1$, $\forall 0 < h \le H_1$. Für $y_h : [y_h] \le \delta_1$ sei $\hat{v}_h$ die eindeutige Lösung (siehe oben) von $A_h \hat{v}_h = y_h$, $0 < h \le H_1$, für das fortgesetzte $\hat{f}_h$.

$$\Longrightarrow \quad [\underbrace{A_h u}_{T_h} - A_h \hat{v}_h] = [T_h - y_h] \le 2\delta_1 \le \delta , \; 0 < h \le H_1$$

$$\Longrightarrow \quad \text{(Lip.–Stab.)} \qquad |(u - \hat{v}_h)(x)| \le \eta[T_h - y_h] \le 2\eta\delta_1 \le \rho , \quad 0 < h \le H_1$$

$$\Longrightarrow \quad (\hat{f}_h = f_h \text{ in } G) \qquad \hat{v}_h = v_h \quad \text{eind. Lösung in } G , \text{ und es gilt Fehlerabschätzung.}$$

□

Für $y_h = 0$ erhält man das folgende Korollar zum Konvergenzsatz.

Satz 3.14 *Gilt (L), Lip.–Stabilität bei $(r^h u)$ und Konsistenz, dann existieren für alle hinreichend kleinen h Lösungen u_h von (A_h) mit $(x, u_h(x)) \in G$, $x \in I$, und es konvergiert*

$$\max_{x\in I_h} |u_h(x) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) .$$

Die Konvergenzordnung ist gleich der Konsistenzordnung.

Der folgende Satz zeigt noch die Notwendigkeit der Konsistenz und impliziert die Konvergenz von $\frac{1}{h\rho'(1)} \sum_k a_k u_h(x_{j-s+k})$ gegen die Ableitung $u'(x_j)$.

Satz 3.15 *Es gelte Konvergenz*

$$\max_{x\in I_h} |u_h(x) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

und die Lipschitzbedingung (L). Dann ist die Konsistenzbedingung

$$[T_h] \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

notwendig und hinreichend für die Konvergenz von

$$\sum_{j=s}^{N_h} \Big| \sum_{k=0}^{s} a_k (u_h - u)(x_{j-s+k}) \Big| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) . \tag{3.31}$$

Gilt sogar

$$\max_{x\in I_h} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) ,$$

dann konvergiert auch

$$\max_{j=s,\ldots,N_h} \left| \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{s} a_k (u_h - u)(x_{j-s+k}) \right| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) . \tag{3.32}$$

Beweis: Es gilt die Beziehung (vgl. Def. des Abschneidefehlers)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_k a_k (u_h - u)(x_{j+k-s}) \;&=\; f_h(x_j, u_h(x_{j-s}), \ldots, u_h(x_j)) \\ &\quad - f_h(x_j, u(x_{j-s}), \ldots, u(x_j)) + T_h(x_j) , \\ &\quad\qquad j = s, \ldots, N_h . \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ (Summation über j und Multiplikation mit h auf beiden Seiten)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=s}^{N_h} \Big| \sum_k a_k (u_h - u)(x_{j+k-s}) \Big| \underset{(L)}{\leq} L \sum_{j=s}^{N_h} h \sum_{k=0}^{s} |u_h(x_{j-s+k}) - u(x_{j-s+k})| + h \sum_{j=s}^{N_h} |T_h(x_j)| \\ &\quad \leq (s+1) L (b-a) \max_{x\in I_h} |u_h(x) - u(x)| + [T_h] \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) . \end{aligned}$$

Für das Max. erhält man die Konvergenz (3.32) wie folgt

$$\begin{aligned}
&\max_{j=s,\dots,N_h} \left| \frac{1}{h} \sum_k a_k (u_h - u)(x_{j-s+k}) \right| \\
&\quad \le L \max_j \sum_{k=0}^{s} |u_h(x_{j-s+k}) - u(x_{j-s+k})| + \max_j |T_h(x_j)| \\
&\quad \le (s+1) L \max_{x \in I_h} |u_h(x) - u(x)| + \max |T_h(x_j)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \, .
\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus der ersten Konvergenz (3.31) in Verbindung mit der Konv. der Lösungen und (L), daß

$$\begin{aligned}
[T_h] \quad \le \quad & \sum_{j=0}^{s-1} |u_h(x_j) - u(x_j)| + \sum_{j=s}^{N_h} \left| \sum_{k=0}^{s} a_k (u_h - u)(x_{j-s+k}) \right| \\
& + L \sum_{j=s}^{N_h} h \sum_{k=0}^{s} |u_h(x_{j-s+k}) - u(x_{j-s+k})| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \, .
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen

1. Durch Taylor–Entwicklung hat man (vgl. Abschnitt 3.2)

$$\sum_{k=0}^{s} a_k u(x_{j+k-s}) = \rho(1) u(x_{j-s}) + h \rho'(1) u'(x_{j-s}) + \mathbf{o}(h) (h \to 0) \, .$$

Liegt Konsistenz vor, dann muß notwendig $\rho(1)u = 0$ sein (siehe Satz zur Konsistenz in 3.2), und man erhält

$$\max_{j=s,\dots,N_h} \left| \frac{1}{h\rho'(1)} \sum_{k=0}^{s} a_k u(x_{j+k-s}) - u'(x_{j-s}) \right| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \, .$$

Unter (3.32) folgt dann

$$\max_{j=0,\dots,N_h-s} \left| \frac{1}{h\rho'(1)} \sum_{k=0}^{s} a_k u_h(x_{j+k}) - u'(x_j) \right| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \, .$$

2. Gilt

$$|f(x,z) - f(x,\tilde{z})| \le L_0 |z - \tilde{z}| \, , \quad (t,z), (t,\tilde{z}) \in G \, , \tag{3.33}$$

dann gilt für die betrachteten linearen MSV auch (3.30) mit $L = \max |b_k| L_0$.

3.4 Charakterisierung der Lipschitz–Stabilität, die Wurzelbedingung

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine algebraische Charakterisierung der in Abschnitt 3.3 eingeführten Lipschitz–Stabilität herzuleiten. Dies kann in Form der Wurzelbedingung geschehen, die es in einfacher Weise erlaubt, anhand der Koeffizienten a_k des MSV die Stabilität zu überprüfen.

Die Beweise in diesem Abschnitt werden teilweise nur skizziert; für Details sei auf [Gri77], Abschnitt 2.2, verwiesen.

Satz 3.16 *Unter der Lipschitzbedingung (s. (3.30)) ist (A_h) Lipschitz–stabil bei $(r_h u)$ d. u. n. d. wenn das Verfahren mit $f_h = 0$ Lipschitz–stabil ist.*

Beweis: (s. [Gri77], S. 115/116, 2.1.(9))

(L) gelte global. Es sei immer (in (L) u. Lipschitz–Stab.) $v_h = r_h u$.

i) **Z. z.:** Wenn (3.29) gilt für (w_h), dann gilt für $z_h := r_h u - w_h$

$$|z_h(x)| \le \eta\Big(h \sum_{\substack{t \in I_h^0 \\ t \le x}} \big|(A_h r_h u - A_h w_h)(t)\big| + \sum_{\substack{j=0 \\ x_j \le x}}^{s-1} |z_h(x_j)|\Big) , \qquad x \in I_h . \tag{3.34}$$

Sei $x \in I_h$ und $\tilde{v}_h$ Lösung von

$$A_h \tilde{v}_h(t) = A_h w_h(t) , \; t \le x , \quad A_h \tilde{v}_h(t) = A_h r_h u(t) , \; t > x ,$$

(die Lösung ex. und ist eindeutig, falls $h < |a_s|/L$). Dann folgt aus (3.29) — mit $\tilde{v}_h$ anstelle von w_h — sofort die behauptete Abschätzung, da $(A_h \tilde{v}_h - A_h r_h u)(t) = 0 , \; t > x$.

ii) Sei (w_h) wie in i) und $g_h(x_j, y_0, \ldots, y_s)$ erfülle auch die Lipschitzbedingung (L) (mit L_g). Sei $\tilde{A}_h$ der zu $g_h + f_h$ gehörige Differenzenoperator, d. h.

$$\tilde{A}_h v_h(x_j) = \frac{1}{h} \sum a_k v_{j-s+k} - (f_h(x_j, \ldots, v_j) + g_h(x_j, \ldots, v_j)) .$$

Für jede Gitterfunktion v_h ist dann

$$(A_h v_h - \tilde{A}_h v_h)(x_j) = \begin{cases} g_h(x_j, v_{j-s}, \ldots, v_j) & , \; j \ge s , \\ 0 & , \; j < s . \end{cases}$$

Die Dreiecksungleichung, Bedingung (L) und (3.34) liefern dann

$$\begin{aligned}
|z_h(x_\ell)| &\le \eta\Big[h \sum_{\substack{t\in I_h^0\\ t\le x_\ell}} \Big|\big(A_h r_h u - \tilde{A}_h r_h u + \tilde{A}_h r_h u - \tilde{A}_h w_h \\
&\qquad + \tilde{A}_h w_h - A_h w_h\big)(t)\Big| + \sum_{\substack{j=0\\ j\le \ell}}^{s-1} |z_h(x_j)|\Big] \\
&\le \eta\Big[h \sum_{\substack{t\in I_h^0\\ t\le x_\ell}} \Big|\big(\tilde{A}_h r_h u - \tilde{A}_h w_h\big)(t)\Big| + h \sum_{s\le j\le \ell} |g_h(x_j, u_{j-s}, \dots, u_j) \\
&\qquad - g_h(x_j, w_{j-s}, \dots, w_j)| + \sum_{\substack{j=0\\ j\le \ell}}^{s-1} |z_h(x_j)|\Big] \\
&\le \eta\Big[\underbrace{h \sum_{x\in I_h^0} \big|(\tilde{A}_h r_h u - \tilde{A}_h w_h)(x)\big| + \sum_{j=0}^{s-1} |z_h(x_j)|}_{=:\sigma} \\
&\qquad + L_g h \sum_{j=s}^{\ell} \sum_{k=0}^{s} |z_h(x_{j-k})|\Big]\ , \quad \ell = 1, \dots, N_h\ .
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der letzten Ungleichung tritt (bei impliziten Verfahren) $z_h(x_\ell)$ einmal (im Fall $j = \ell\,,\ k = 0$) auf. Für $h < h_{\max}$ und $\eta L_g h_{\max} < 1$ folgt deshalb $(z_\nu := z_h(x_\nu))$

$$|z_h(x_\ell)| \le \frac{\eta}{1 - \eta L_g h_{\max}} \left(\sigma + L_g h(s+1) \sum_{\nu=0}^{\ell-1} |z_\nu|\right)\ , \quad \ell = 1, \dots, N_h\ .$$

Trivialerweise ist noch $|z_h(x_0)| \le \sigma$, so daß nach dem Lemma von Gronwell (s. Lemma 3.18)

$$|z_h(x)| \le \eta' \sigma \exp\left[\eta' L_g (s+1)(x-a)\right]\ , \qquad x \in I_h\ ,$$

mit $\eta' = \eta/(1 - \eta L_g h_{\max})$ im Fall eines impliziten Verf. bzw. $\eta' = \eta$ bei expl. Verf.

iii) Sei (A_h) Lipschitz–stabil für $f_h = 0$, dann gilt (3.35) für bel. (w_h) — und damit auch (3.29) (s. Lemma 3.17). Setzt man in ii) $g_h = f_h$ — und $\tilde{A}_h$ anstelle von A_h gebildet mit einem beliebigen f_h, das (L) erfüllt — dann folgt

$$|(r_h u - w_h)(x)| \le \eta' \exp\Big(\eta_0 L (s+1)(b-a)\Big)\, [A_h r_h u - A_h w_h]\ , \qquad x \in I_h\ ,$$

$$\text{mit } \eta' = \left\{ \begin{array}{ll} \eta^0/(1-\eta_0 L h_{\max}) & , \text{ für implizite Verf.} \\ \eta^0 & , \text{ für explizite Verf.} \end{array} \right\}$$

Damit ist die Lipschitz–Stabilität (global) gezeigt. Ist umgekehrt (A_h) Lipschitz–stabil mit f_h, das (L) erfüllt, dann liefert ii) auch die Lipschitz–Stabilität für Verfahren mit $f_h = 0$, wenn man $g_h = -f_h$ setzt.

□

Bemerkung: Gilt (L) nur lokal, dann wird f_h wie im Beweis von Satz 3.13 fortgesetzt und die Stabilitätsschwelle muß im Beweis von Satz 3.16 als $\delta = \rho/\eta$ gewählt werden — damit

$$|r_h u(x) - w_h(x)| \le \eta[A_h r_h u - A_h w_h] \le \rho \ .$$

Der Beweis von Satz 3.16 benutzt die folgenden zwei Ergebnisse.

Lemma 3.17 *Für lineare Abbildungen A_h ist die Lipschitz–Stabilität äquivalent zu*

$$|w_h(x)| \le \eta_0[A_h w_h] \ , \quad \forall w_h \ , \ x \in I_h \ , \quad 0 < h \le H \ . \tag{3.35}$$

Beweis: Aus (3.35) folgt trivialerweise die Lipschitz–Stabilität mit $\eta = \eta_0$, δ beliebig und für jedes (v_h). Gilt umgekehrt die Lipschitz–Stabilität für lineare $A_h, 0 < h \le H$, dann setzt man für bel. (z_h) und $\delta > 0$ aus der Lipschitz–Stab. $w_h := v_h - \frac{\delta}{\hat{\delta}} z_h$, wobei $\hat{\delta} > 0$ und $[A_h z_h] \le \hat{\delta}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} & v_h - w_h = \frac{\delta}{\hat{\delta}} z_h \quad \text{und} \quad [A_h v_h - A_h w_h] = \frac{\delta}{\hat{\delta}}[A_h z_h] \le \delta \ , \qquad 0 < h \le H \ . \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\delta}{\hat{\delta}}|z_h(x)| = |v_h(x) - w_h(x)| \le \eta[A_h v_h - A_h w_h] = \frac{\eta\delta}{\hat{\delta}}[A_h z_h] \ , \qquad 0 < h \le H \ , \\ \Longrightarrow \quad & \text{Beh.} \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

1. Die Stabilität gilt dann global.
2. A_h ist dann injektiv $\forall 0 < h \le H$.

3. Zu einem linearen MSV gehören nicht notwendig lineare Differenzenoperatoren A_h, da $f(.,.)$ noch vorkommt, was nichtlinear bzgl. des 2. Arguments sein kann. Im Falle $f_h = 0$ hat man allerdings lineare Differenzenoperatoren, und die Stabilitätsbedingung (3.35) von Lemma 3.17 hat in diesem Fall die Form

$$|w_h(x)| \le \eta_0 \left(\sum_{j=s}^{N_h} \left| \sum_{k=0}^{s} a_k w_{j-s+k} \right| + \sum_{j=0}^{s} |w_j| \right) , \qquad x \in I_h . \tag{3.36}$$

Lemma 3.18 *(Diskrete Version eines* **Lemmas von Gronwell***)*

Wenn eine Gitterfunktion v_h mit zwei Zahlen $\delta \ge 0$, $\eta \ge 0$ die folgende Ungleichung erfüllt

$$|v_0| \le \eta , \; |v_{j+1}| \le \delta h \sum_{k=0}^{j} |v_k| + \eta , \qquad j = 0, \ldots, N_h - 1 ,$$

dann gilt

$$|v_j| \le \eta e^{\delta (x_j - a)} , \quad j = 0, \ldots, N_h .$$

Beweis: *s. [Gri72], S. 80/81.*

Korollar 3.19 *(zum Stabilitätssatz). Gilt (3.30), ist $G = K_\rho = \{(z,x) : |z - u(x)| \le \rho$, $\eta_0 =$ Stab.–Schranke für $f_h = 0$ und $h < 1/(\eta_0 L)$. Dann ist*

$$\eta = \eta_0' \exp(\eta_0' L (s+1)(b-a))$$

die Stab.–Schranke für (A_h), wobei

$$\eta_0' = \begin{cases} \eta_0 & \text{für explizites } A_h \\ \frac{\eta_0}{1 - h\eta_0 L} & \text{für implizites } A_h \end{cases}$$

und $\delta = \rho/\eta$ die Stab.–Schwelle sind.

Es genügt also im folgenden, die Stabilität des Verfahrens mit $f_h = 0$ zu charakterisieren — wenn die Lipschitzbedingung (3.30) vorliegt.

Definition 3.20 (Wurzelbedingung) *Die Wurzeln ζ_j , $j = 1, \ldots, s$, des „charakteristischen Polynoms“ $\rho(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k z^k$ erfüllen die Bedingung*

$$|\zeta_j| \le 1 ,$$

und die Wurzeln vom Betrage Eins sind einfach.

Beispiele: Siehe Übung 12

Satz 3.21 *Unter der Lipschitzbedingung (3.30) ist die Wurzelbedingung notwendig und hinreichend für die Lipschitz–Stabilität von* (A_h) *bei* $(r_h u)$.

Beweisskizze:

(i) Ist $|\zeta_j| < r$, $j = 1, \ldots, s$, dann erfüllt

$$S(j) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{z^{j-1}}{\rho(z)}\, dz \ , \quad j \in \mathbb{Z} \ , \quad (i^2 = -1) \ ,$$

die folgenden Gleichungen: $S(j) = 0$, $j < s$ (s. Übung 14), und

$$\sum_{k=0}^{s} a_k S(j+k) = \delta_{j0} \ , \quad j \in \mathbb{Z} \ ,$$

(wg. Cauchyschem Integralsatz bzw. Residuensatz der Funktionentheorie gilt

$$2\pi i \sum_k a_k S(j+k) = \int_{|z|=r} \frac{\sum a_k z^{j+k-1}}{\rho(z)}\, dz = \int_{|z|=r} z^{j-1}\, dz = \begin{cases} 2\pi i \ , & j = 0 \\ 0 & \text{sonst.)} \end{cases}$$

Bemerkung: Damit stellen die Gitterfunktionen $v_h^{(\ell)}(x_j) = S(\ell + j)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$, „Fundamentallösungen“ von

$$\sum_{k=0}^{s} a_k v_{j-s+k} = w_j \ , \quad j = 0, \ldots, N \ ,$$

dar. Zusätzlich sollen noch gegebene Anfangsbedingungen erfüllt werden.

(ii) Die Funktionen

$$P^{(\ell)}(j) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{z^j}{\rho(z)} \sum_{k=0}^{s-\ell-1} a_{k+\ell+1} z^k\, dz \ , \quad j \in \mathbb{Z} \ ,$$

genügen den Beziehungen

$$P^{(\ell)}(j) = \delta_{\ell j} \ , \quad j, \ell = 0, \ldots, s-1 \ , \qquad \text{und}$$
$$\sum_{k=0}^{s} a_k P^{(\ell)}(j+k) = 0 \ , \qquad j \geq 0 \ ,$$

(wird ähnlich wie in (i) gezeigt).

(iii) Es ist v_j , $j = 0, \ldots, N_h$, d. u. n. d. Lösung von

$$\sum_{k=0}^{s} a_k v_{j-s+k} = w_j \ , \quad j = s, \ldots, N \ , \quad v_j = \alpha^{(j)} \ , \ j = 0, \ldots, s-1 \ ,$$

wenn

$$v_j = \sum_{\nu=s}^{N} w_k S(j+s-\nu) + \sum_{\ell=0}^{s-1} \alpha^{(\ell)} P^{(\ell)}(j)$$

(durch Einsetzen von v_j sowie (i) und (ii)).

(iv) Gilt die Wurzelbedingung, ist $r_0 \geq |\zeta_j|$, $j = 1, \ldots, s$, und $r_0 > |\zeta_j|$, falls $|\zeta_j| < 1$ (ζ_j = Wurzeln von ρ), dann gelten die Abschätzungen

$$|S(j)| \leq K r_0^j \ , \quad |P^{(\ell)}(j)| \leq K r_0^j \ , \qquad j \in \mathbb{Z} \ , \ \ell = 0, \ldots, s-1 \ .$$

Es genügt $j \geq s$ anzunehmen. Seien ζ_k , $k = 1, \ldots, m$, die paarweise verschiedenen Wurzeln von ρ und ν_k die zugehörigen Vielfachheiten. Sei weiter ρ_k definiert durch $\rho = (z - \zeta_k)^{\nu_k} \rho_k$, $k = 1, \ldots, m$. In einer Umgebung von ζ_k lassen sich $1/\rho_k$ und z^j in die Taylorreihen

$$\frac{1}{\rho_k(z)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_\ell (z - \zeta_k)^\ell \ , \qquad z^j = \sum_{\ell=0}^{j} \beta_\ell (z - \zeta_k)^\ell$$

entwickeln, wobei $\alpha_0 \neq 0$ und $\ell! \beta_\ell = j(j-1)\ldots(j-\ell+1) z_k^{j-1}$, $\ell = 0, \ldots, j$, gilt. Das Integral in der Def. von $S(j)$ ist gleich der Summe der Residuen des Integranden, die geben sind durch

$$\text{Res} \left(\frac{z_j}{\rho(z)} \right)_{z=\zeta_k} = \sum_{\ell=0}^{\nu_k - 1} \beta_\ell \alpha_{\nu_k - \ell - 1} \ .$$

Für die rechte Seite hat man die Abschätzung

$$j^{\nu_k - 1} |\zeta_k|^{j-\nu_k} \sum_{\ell=0}^{\nu_k - 1} \frac{1}{\ell!} |\alpha_{\nu_k - \ell - 1}| \ . \tag{3.37}$$

Für $|\zeta_k| = 1$ ist $\nu_k = 1$ und es bleibt nur $|\alpha_0|$ stehen. Ist $|\zeta_k| < 1$, so läßt sich (3.37) bekanntlich durch $K r_0^j$ abschätzen, womit alles bewiesen ist.

Da $P^{(\ell)}$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt (1) ist, gilt auch die Abschätzung für $P^{(\ell)}$.

(v) Es gelte die Wurzelbedingung; zu zeigen ist ($f_h = 0$ o. B. d. A.)

$$|v_h(x)| \le \eta_0 [A_h v_h]_{f_h=0} = \eta_0 \left(\sum_{j=s}^{N} \left| \sum_{k=0}^{s} a_k v_{j-s+k} \right| + \sum_{j=0}^{s-1} |v_j| \right) \quad \forall x \in I_h \ .$$

Zu bel. v_h sei $w_h(x_j) \underset{f_h=0}{=} (A_h v_h)(x_j)$, $j \ge s$, $w_h(x_j) = v_h(x_j) - \alpha^{(j)}$, $j = 0, \ldots, s-1$. Dann gilt die Bez. in (iii) und wg. der Abschätzungen in (iv) — zusammen mit $r_0 \le 1$ — folgt die behauptete Ungleichung (mit $\eta = K$). Die Umkehrung zeigt man durch Widerspruch (vgl. [Gri77], S. 120/121).

□

Beispiele:

1. Adams–Extrapol. (Konsistenzordnung: $p = s$)
   Adams–Interpol. (Konsistenzordnung: $p = s + 1$)

   (P): $\rho(z) = z^s - z^{s-1} = z^{s-1}(z-1)$
   $\Longrightarrow z = 0$ $(s-1)$-fache Nullstelle, $z = 1$ einfache Nullstelle ,
   also Wurzelbed. erfüllt.

2. Nyström–Extrapol. (Konsistenzordnung: $p = s$)
   Milne–Interpol. (Konsistenzordnung: $p = s + 1$)

   (P): $\rho(z) = z^s - z^{s-2} = z^{s-2}(z^2-1)$
   $\Longrightarrow z = 0$ $(s-2)$-fache Nullstelle, $z = \pm 1$ jeweils einfache Nullstelle ,
   also Wurzelbed. erfüllt.

Kapitel 4

Differenzenverfahren für Randwertprobleme

Beispiele für Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen haben wir schon im einleitenden Kapitel vorgestellt (s. Beispiel 1.4 „Temperaturverteilung“ und Beispiel 1.5 „Balkenbiegung“). Einleitend werden wir in diesem Kapitel mit den singulär gestörten Differentialgleichungen eine weitere Klasse von Beispielen etwas ausführlicher darstellen. Anschließend werden wir Differenzenapproximationen für lineare und nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung analysieren. Hierbei kann man Stabilitätsabschätzungen entweder über Maximumprinzipien oder mit Hilfe von Kompaktheitsargumenten gewinnen. Konvergenz einschließlich Fehlerabschätzungen lassen sich auch bei Randwertproblemen wieder dadurch nachweisen, daß man die Fehlergleichung aufstellt und den Fehler in die Stabilitätsabschätzung einsetzt, wobei in der Schranke auf der rechten Seite im wesentlichen die Abschneidefehler auftauchen.

(Lit.: Insbes. Keller [Kel68]; Reinhardt [Rei85], Ch. 1.2, 8.1, 8.2)

4.1 Singulär gestörte (gewöhnliche) Differentialgleichungen

Bei der Differentialgleichung

$$-\varepsilon u'' + 2u' + u = b\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \tag{4.1}$$

beobachtet man bei kleiner werdendem Parameter $\varepsilon > 0$, daß sich die Lösung in einem kleinen Gebiet bei $x = 1$ immer rascher ändert. Dieses Gebiet bezeichnet man als *Grenzschicht*. Ist z. B. $b = 0$ und $u(0) = \alpha\,,\ u(1) = \beta$, dann hat die Lösung die Gestalt

$$u_\varepsilon(x) = \frac{(\alpha \exp(s_2) - \beta)\exp(s_1 x) + (\beta - \alpha \exp(s_1))\exp(s_2 x)}{\exp(s_2) - \exp(s_1)}\,. \tag{4.2}$$

Ein Fundamentalsystem der zu (4.1) gehörigen homogenen Differentialgleichung erhält man nämlich durch $\{\exp(s_1 x)\,,\ \exp(s_2 x)\}$, wobei $s_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+\varepsilon})/\varepsilon$ die Wurzeln von

$$-\varepsilon s^2 + 2s + 1 = 0$$

sind. In der Darstellung $u_\varepsilon = c_1 \exp(s_1 x) + c_2 \exp(s_2 x)$ bestimmen sich die Koeffizienten c_1, c_2 durch die Randbedingungen,

$$c_1 = \frac{\alpha \exp(s_2) - \beta}{\exp(s_2) - \exp(s_1)}\,, \qquad c_2 = \frac{\beta - \alpha \exp(s_1)}{\exp(s_2) - \exp(s_1)}\,,$$

was die obige Darstellung (4.2) ergibt.

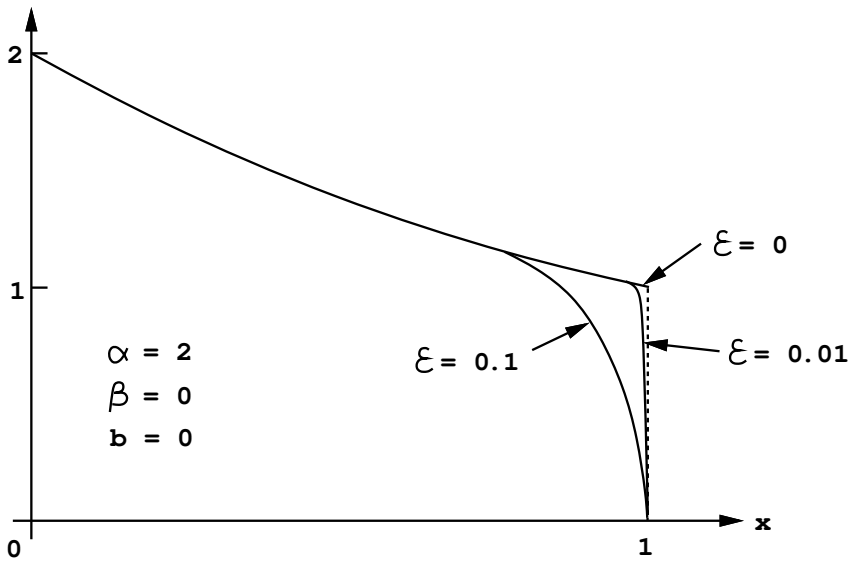


Abbildung 4.1: Grenzschichtproblem (1 Grenzschicht)

Differentialgleichungen dieser Art beschreiben z. B. stationäre Diffusionsprozesse, bei denen der Diffusionskoeffizient sehr klein ist (vgl. Goering [Goe83], O'Malley [O'M74]). Die sogenannte *Peclet–Zahl* $1/\varepsilon$ ist dann sehr groß. Für solche Probleme werden Randbedingungen vorgeschrieben. Durch (4.1) wird außerdem eine Schwingung mit sehr kleiner Masse und großer Dämpfung beschrieben. Der kleine Parameter ε ergibt sich als Quotient der Masse und dem Quadrat des Dämpfungskoeffizienten (vgl. Cole [Col68]). Die vielen in der Physik, aber auch in der Biologie und Chemie, auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Lösungen ein Grenzschichtverhalten zeigen, sind im allgemeinen nichtlinear.

Durch Entwicklung von $s_{1,2}$ nach Potenzen von ε in der obigen Darstellung (4.2) der Lösung läßt sie sich auch in der folgenden asymptotischen Weise schreiben

$$u_\varepsilon(x) = \alpha \exp(-x/2) + (\beta - \alpha/\sqrt{e}) \exp\left(-2\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon)\ . \tag{4.3}$$

Diese Darstellung mit Hilfe des bekannten Landauschen Symbols besagt, daß die Lösung bzgl. der Maximumnorm durch die angegebene Funktion bis auf Terme der Größenordnung ε approximiert wird.

Der erste Summand $\alpha \exp(-x/2)$ in (4.3) ist die Lösung des sogenannten *reduzierten Problems* (d. h. (4.1) mit $\varepsilon = 0$)

$$2u' + u = 0\ , \tag{4.4}$$

welche die linke Randbedingung $u(0) = \alpha$ erfüllt. Lösungen des reduzierten Problems können im allgemeinen nicht alle für (4.1) geforderten Anfangs– oder Randbedingungen erfüllen. Differentialgleichungen mit kleinem Parameter, deren Ordnungen sich beim Übergang zum zugehörigen reduzierten Problem verringern, heißen *singulär gestörte Differentialgleichungen.* Dieser Begriff ist dadurch motiviert, daß die gegebene Gleichung (mit kleinem Parameter ε) als Störung des reduzierten Problems (mit $\varepsilon = 0$) aufgefaßt wird.

Enthält die Differentialgleichung keine Ableitung erster Ordnung, z. B.

$$-\varepsilon u'' + u = b\ , \qquad 0 \le x \le 1\ , \tag{4.5}$$

dann zeigt die Lösung ein verändertes Verhalten. Speziell für $b = 1$ und $u(0) = u(1) = 0$ hat man die Darstellung

$$u_\varepsilon(x) = 1 - \frac{\exp(-x/\sqrt{\varepsilon}) + \exp(-(1-x)/\sqrt{\varepsilon})}{1 + \exp(-1/\sqrt{\varepsilon})} \tag{4.6}$$

Hier hat man nämlich ein Fundamentalsystem $\{\exp(-x/\sqrt{\varepsilon})\ ,\ \exp(-(1-x)/\sqrt{\varepsilon})\}$für die zu (4.5) gehörige homogene Differentialgleichung; die Methode der Variation der Konstanten liefert die Lösung (4.6) für die obige halbhomogene Randwertaufgabe.

In diesem Beispiel tritt sowohl bei $x = 0$ als auch bei $x = 1$ eine Grenzschicht auf. Die Lösung des zugehörigen reduzierten Problems ist hier einfach durch $u_0 = b$ gegeben.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch bemerkt, daß das Auftreten von Grenzschichten neben dem betrachteten Typ der Differentialgleichung auch von den vorgeschriebenen Rand- und Anfangswerten und von der inhomogenen rechten Seite b abhängt. Sind z. B. in (4.1) für $b = 0$ die Randwerte $u(0) = 1$ und $u(1) = 1\sqrt{e}$ vorgeschrieben, dann hat die Lösung die asymptotische Darstellung $u_\varepsilon(x) = \exp(-x/2) + \mathrm{O}(\varepsilon)$, und keine Grenzschicht tritt auf. Die Lösung des reduzierten Problems erfüllt hier (zufällig) beide Randbedingungen der Differentialgleichung (4.1).

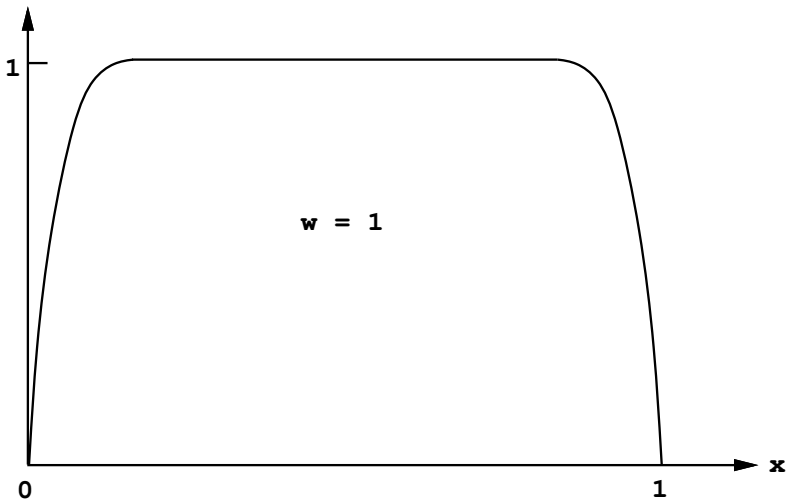


Abbildung 4.2: Grenzschichtproblem (2 Grenzschichten)

4.2 Differenzenapproximationen für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

Sei $C^r(a,b)$, $b > a$, der Raum aller stetigen reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit stetigen Ableitungen bis zur Ordnung r in (a,b).

Definition 4.1 (Randwertproblem (RWP) für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben seien $p, q, f \in C[a,b]$, und Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{K}$ mit

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0 \,, \qquad |\beta_0| + |\beta_1| > 0 \,; \tag{4.7}$$

gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(a,b)$ als Lösung von

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \,, \qquad x \in I \,, \tag{4.8}$$

$$\alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = \gamma_0 \,, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1 \,. \tag{4.9}$$

Wir bezeichnen den auftretenden Differentialoperator bzw. die durch die Randbedingungen gegebenen linearen Funktionale durch

$$\begin{aligned} (Lv)(x) &:= v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) \,, \\ \text{bzw.} \qquad \ell_0(v) &:= \alpha_0 v(a) - \alpha_1 v'(a) \,, \\ \ell_1(v) &:= \beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) \,. \end{aligned}$$

Bedingungen zur eindeutigen Lösbarkeit von (4.8), (4.9) sind im Anhang A.6 angegeben, wobei dort die selbstadjungierte Form des Differentialoperators zugrundegelegt wurde.

Zur Approximation betrachten wir in diesem Kapitel Differenzenmethoden. Für eine Folge von *Maschenweiten* $h > 0$ bezeichne

$$\begin{aligned} I_h &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x = x_j := a + jh\ , \quad j = 0, \ldots, N_h\} \\ I_h' &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x = x_j\ , \quad j = 1, \ldots, N_h - 1\} \end{aligned}$$

zugehörige *Gitter,* wobei $N_h \in \mathbb{N}$, $hN_h = b - a$. Zur Approximation der Ableitungen in (4.8) verwenden wir zunächst zentrale Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} (D_h v_h)(x) &= \frac{1}{2h}(v_h(x+h) - v_h(x-h))\ , \qquad x \in I_h'\ , \\ (D_h^2 v_h)(x) &= \frac{1}{h^2}(v_h(x+h) - 2v_h(x) + v_h(x-h))\ , \qquad x \in I_h'\ , \end{aligned}$$

welche Approximationen der ersten und zweiten Ableitung darstellen, und zwar bei Anwendung auf genügend glatte Funktionen u mit einem Fehler der Ordnung $\mathrm{O}(h^2)$.

Eine mögliche Differenzenapproximation von (4.8) erhält man dann durch

$$\Big((L_h u_h)(x) := \Big) D_h^2 u_h(x) + p_h(x) D_h u_h(x) + q_h(x) u_h(x) = f_h(x)\ , \quad x \in I_h'\ , \tag{4.10}$$

wobei p_h, q_h, f_h Näherungen von p, q, f auf dem Gitter I_h' bezeichnen. Im einfachsten Fall sind sie durch Restriktionen der gegebenen Funktionen auf das Gitter erklärt. Die Randbedingungen (4.9) werden approximiert durch

$$\begin{aligned} (\ell_{0,h}(u_h) :=)\ & \alpha_{0,h} u_h(a) - \alpha_{1,h} D_h^+ u_h(a) = \gamma_{0,h} \\ (\ell_{1,h}(u_h) :=)\ & \beta_{0,h} u_h(b) + \beta_{1,h} D_h^- u_h(b) = \gamma_{1,h} \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei $\alpha_{0,h}, \beta_{0,h}, \alpha_{1,h}, \beta_{1,h}, \gamma_{0,h}, \gamma_{1,h}$ Näherungen von $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ und

$$\begin{aligned} D_h^+ v_h(x) &= \frac{1}{h}(v_h(x+h) - v_h(x)) \\ D_h^- v_h(x) &= \frac{1}{h}(v_h(x) - v_h(x-h)) \end{aligned}$$

die vorwärts- bzw. rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten 1. Ordnung bezeichnen.

Die Differenzenoperatoren lassen sich auch wie folgt schreiben,

$$(L_h u_h)(x) = a_{-1,h}(x) u_h(x-h) + a_{0,h}(x) u_h(x) + a_{1,h} u_h(x+h)\ , \quad x \in I_h'\ , \tag{4.12}$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{-1,h}(x) &= \frac{1}{h^2}\left[1-\frac{1}{2}hp_h(x)\right] , \\ a_{0,h}(x) &= -\frac{1}{h^2}\left[2-h^2q_h(x)\right] , \\ a_{1,h}(x) &= \frac{1}{h^2}\left[1+\frac{1}{2}hp_h(x)\right] , \quad x\in I_h' . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die Approximationen in (4.10), (4.11) führen auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems für $u_h \in C(I_h)$,

$$L_h u_h(x) = f_h(x) , \quad x\in I_h' , \qquad \ell_{0,h}(u_h) = \gamma_{0,h} , \quad \ell_{1,h}(u_h) = \gamma_{1,h} .$$

Im Fall von Dirichletschen Randbedingungen (i. e. Randbedingungen 1. Art), $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_{1,h} = \beta_{1,h} = 0$, $\alpha_0 = \alpha_{0,h} \neq 0$, $\beta_0 = \beta_{0,h} \neq 0$, kann sofort ein Lösbarkeitskriterium angeben. Ist nämlich

$$|a_{-1,h}| + |a_{1,h}| \leq |a_{0,h}| \quad \text{und} \quad |a_{1,h}| < |a_{0,h}| \text{ in } I_h' , \tag{4.14}$$

dann erfüllt die zugehörige $(N_h-1)\times(N_h-1)$–Matrix das schwache Zeilensummenkriterium (s. [SH82], 8.2.2), ist also regulär und das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Für die durch (4.13) gegebenen Koeffizienten ist (4.14) offenbar erfüllt, falls p_h gleichmäßig beschränkt, h hinreichend klein und $q_h \leq 0$ ist.

Die Genauigkeit der Approximation der Randwertaufgabe durch die Differenzengleichungen wird gemessen durch den sog. *Abschneidefehler* T_h. Dies ist der Fehler, der auftritt, wenn die Lösung u der Randwertaufgabe in die Differenzengleichungen eingesetzt wird, die ja i. a. von u nicht exakt erfüllt werden. Der *Abschneidefehler der Differenzengleichung* ist demnach gegeben durch

$$T_h(x) = (L_h u)(x) - Lu(x) ; \qquad x\in I_h' , \tag{4.15}$$

der *Abschneidefehler in den Randbedingungen* durch

$$\ell_{0,h}(u) = \ell_0(u) + T_h(a) , \quad \ell_{1,h}(u) = \ell_1(u) + T_h(b) . \tag{4.16}$$

Die Tatsache, daß es sich bei (4.10), (4.11) überhaupt um eine Approximation der Randwertaufgabe (4.8), (4.9) handelt, wird durch die *Konsistenzbedingung*

$$T_h \longrightarrow 0 \quad (h\to 0)$$

ausgedrückt, wobei die Konvergenz des Abschneidefehlers gegen Null von der Wahl der zugrundegelegten Räume und Normen abhängt.

Für den Fall $p_h = p|I_h'$, $q_h = q|I_h'$ liefert Taylor–Entwicklung

$$\max_{x\in I_h'} |T_h(x)| = \mathrm{O}(h^2) \quad (h \to 0) ,$$

falls die Lösung des RWP $u \in C^4(a,b)$ erfüllt. Für die Randapproximationen hat man im Falls $\alpha_{i,h} = \alpha_i$, $\beta_{i,h} = \beta_i$, $i = 0, 1$,

$$|T_h(x)| + |T_h(b)| = \mathrm{O}(h) \quad (h \to 0) .$$

Betrachtet man den Differentialoperator in selbstadjungierter Form

$$Lv = (p'v)' + qv$$

mit $p \in C^1(a,b)$, dann läßt sich die Differentialgleichung (4.8) in der Form

$$pu'' + p'u' + qu = f \quad \text{in } (a,b)$$

schreiben. Nimmt man noch $p \neq 0$ an und dividiert durch p, dann erhält man durch die Differenzenapproximation (4.10) ein tridiagonales Gleichungssystem

$$\left(1 - \frac{h}{2}\tilde{p}_j\right) v_{j-1} - (2 - h^2\tilde{q}_j)v_j + \left(1 + \frac{h}{2}\tilde{p}_j\right) v_{j+1} = h^2\tilde{f}_j , \quad j = 1, \ldots, N_h - 1 ,$$

zur Bestimmung von $v_j = u_h(x_j)$, wobei

$$\tilde{p}_j = p'(x_j)/p(x_j) , \quad \tilde{q}_j = q(x_j)/p(x_j) ; \quad \tilde{f}_j = f(x_j)/p(x_j) , \quad j = 1, \ldots, N_h - 1 .$$

4.3 Stabilität und Konvergenz mit Maximumprinzipien

Die Stabilität von Differenzenoperatoren der Form (4.12) wird üblicherweise mit Hilfe eines Maximumprinzips gezeigt. In Ciarlet[1)] werden Differenzenoperatoren von „verallgemeinertem nichtnegativen Typ“ untersucht und ein Maximumprinzip mit entsprechenden Abschätzungen gezeigt. Diese Untersuchungen gelten allgemein für Differenzenapproximationen elliptischer Differentialoperatoren, also z. B. auch für die Laplace–Gleichung.

Wir beschränken uns im folgenden auf Dirichletsche Randbedingungen und setzen deshalb

$$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_{0,h} = \beta_{0,h} = 1 \quad \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_{1,h} = \beta_{1,h} = 0 .$$

Ein Differenzenoperator L_h der Form (4.12) heißt von *positivem Typ,* wenn (vgl. [Rei85], 8.1)

[1)] Ciarlet, P. G.: Discrete maximum principle for finite–difference operators. *Aequationes Math.* 4 (1970), 338–352.

$$a_{-1,h} > 0\,, \quad a_{1,h} > 0\,, \quad a_{-1,h} + a_{0,h} + a_{1,h} \leq 0 \text{ in } I_h'\,. \tag{4.17}$$

Unter dieser Voraussetzung ist offenbar das schwache Zeilensummenkriterium für das zu (4.10) gehörige tridiagonale Gleichungssystem erfüllt, so daß (4.10) eindeutig lösbar ist (vgl. [SH82], 8.2.2). Differenzenapproximationen von positivem Typ und die Eigenschaft einer M–Matrix für das zugehörige Gleichungssystem sind eng verwandt, worauf wir hier jedoch nicht eingehen. Für die Klasse der Differenzenoperatoren von positivem Typ gilt das folgende Maximumprinzip.

Satz 4.2 *Der Differenzenoperator L_h sei von positivem Typ und $v_h \in C(I_h')$ erfülle $L_h v_h(x) \geq 0$, $x \in I_h'$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\max_{x \in I_h} v_h(x) \leq \max(0, v_h(a), v_h(b))\,. \tag{4.18}$$

Nimmt v_h in einem Punkt aus I_h' ein nichtnegatives Maximum an, dann ist v_h konstant auf I_h.

Beweis: Im Widerspruch zur zweiten Behauptung nehmen wir an, daß ein $x \in I_h$ existiert mit

$$v_h(x-h) \leq v_h(x)\,, \quad v_h(x+h) \leq v_h(x)\,, \quad v_h(x) \geq 0\,,$$

wobei mindestens eine der beiden ersten Ungleichungen echt gilt. Dann gilt zusammen mit (4.17)

$$\begin{aligned} 0 \leq L_h v_h(x) &= a_{-1,h}(x) v_h(x-h) + a_{0,h}(x) v_h(x) + a_{1,h}(x) v_h(x+h) \\ &< (a_{-1,h}(x) + a_{0,h}(x) + a_{1,h}(x))\, v_h(x) \leq 0\,, \end{aligned}$$

womit ein Widerspruch erbracht ist. Aus der gezeigten Behauptung folgt sofort auch (4.18), denn für ein nichtnegatives Maximum bei $x \in I_h'$ muß $0 \leq v_h(x) = v_h(a)$ oder $0 \leq v_h(x) = v_h(b)$ sein. Für ein negatives Maximum ist trivialerweise $v_h(x) \leq 0$. □

Aus Satz 4.2 ergeben sich sofort einige Folgerungen. Die einzige Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$L_h u_h = 0\,, \quad u_h(a) = u_h(b) = 0\,,$$

ist die triviale Lösung $u_h = 0$. Zunächst folgt nämlich, daß $u_h(x) \leq 0$, $x \in I_h$, für jede Lösung; Anwendung von Satz 4.2 auf $-u_h$ liefert schließlich $u_h(x) \geq 0$, $x \in I_h$. Ist zusätzlich $a_{-1,h} + a_{0,h} + a_{1,h} = 0$, dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4.2, daß

$$\max_{x \in I_h} v_h(x) \leq \max(v_h(a), v_h(b))\,.$$

Man kann dann nämlich zum Widerspruch in Beweis von Satz 4.2 kommen, ohne $v_h(x) \geq 0$ (für ein nichtnegatives Maximum) zu benutzen.

Als Folgerung der ersten Aussage von Satz 4.2 erhält man noch die folgende *Monotonie–Eigenschaft:*

$$\begin{aligned} &L_h v_h(x) \leq L_h u_h(x)\,,\ x \in I_h'\,,\ v_h(a) \geq u_h(a)\,,\ v_h(b) \geq u_h(b) \\ &\Longrightarrow v_h(x) \geq u_h(x)\,, \quad x \in I_h\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Die Koeffizienten (s. (4.13)) der Differenzenapproximation (4.10),

$$a_{\pm 1,h}(x) = h^{-2}\left(1 \pm \frac{h}{2} p_h(x)\right)\,, \quad a_{0,h}(x) = -h^{-2}\left(2 - h^2 q_h(x)\right)\,,$$

erfüllen offenbar die Positivitätsbedingung (4.17), wenn

$$q_h(x) \leq 0\,, \quad |p_h(x)| \leq c_1\,, \quad x \in I_h'\,, \tag{4.20}$$

mit $c_1 \geq 0$, und falls die Maschenweite h hinreichend klein ist, d. h. $0 < h \leq h_0$ mit $h_0 < 2/c_1$.

Unter den genannten Voraussetzungen ist eine Stabilitätsungleichung für L_h bzgl. der diskreten Maximumnorm erfüllt, wobei zum Beweis wesentlich die Monotonie–Eigenschaft (4.19) benutzt wird.

Satz 4.3 (Stabilitätssatz) *Es gelte (4.20) und $h_0 < 2/c_1$. Dann gibt es Zahlen $\beta > 0$, $h_1 \in (0, h_0]$, so daß die durch (4.10) definierten Differenzenoperatoren L_h die folgende Ungleichung erfüllen,*

$$\beta \max_{x \in I_h} |v_h(x)| \leq |v_h(a)| + |v_h(b)| + \max_{x \in I_h'} |L_h v_h(x)| \quad \forall v_h \in C(I_h)\,,\ h \in (0, h_1]\,. \tag{4.21}$$

Beweis: *s. [Rei85], Thm. 8.2.*

Bemerkungen

1. Fordert man in (4.20) etwas stärker, daß q_h gleichmäßig von Null weg beschränkt bleibt (vgl. [Kel68]), dann kann man (4.21) ohne Benutzung des Maximumprinzips bzw. der Monotonie–Eigenschaft zeigen.

2. Maximumprinzipien gelten auch für Differenzenapproximationen beim Vorliegen von Randbedingungen 3. Art. In diesem Fall muß man neben (4.20) noch gewisse Bedingungen an die Koeffizienten $\alpha_{i,h}, \beta_{i,h}$ stellen, um eine Abschätzung der Form (4.21) zu erhalten, wobei dann die Funktionale $\ell_0(u), \ell_1(u)$ auf der rechten Seite auftauchen.

Die Konvergenz $u_h \longrightarrow u$ $(h \to 0)$ bzgl. der diskreten Maximumnorm erhält man nun sofort, wenn man den Fehler $u_h - u|I_h$ in die Stabilitätsabschätzung einsetzt,

$$\begin{aligned} \max_{x\in I_h} |(u_h - u)(x)| \quad \leq \quad & \frac{1}{\beta}\Big(|\gamma_{0,h} - \gamma_0| + |\gamma_{1,h} - \gamma_1| \\ & + \max_{x\in I_h'} |(f_h - f)(x) + T_h(x)| \Big) \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Liegt also Konsistenz vor, d. h.

$$\begin{aligned} & |T_h(a)| = |\gamma_{0,h} - \gamma_0| \longrightarrow 0 \ , \qquad |T_h(b)| = |\gamma_{1,h} - \gamma_1| \longrightarrow 0 \\ & \max_{x\in I_h'} |T_h(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \ , \end{aligned}$$

und stellen f_h Approximationen von f dar,

$$\max_{x\in I_h'} |(f_h - f)(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \ ,$$

dann folgt Konvergenz,

$$\max_{x\in I_h} |(u_h - u)(x)| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0) \ .$$

Ist wie bei der vorliegenden Differenzenapproximation ($p_h = p|I_h'$, $q_h = q|I_h'$) $\max_{x\in I_h'} |T_h(x)| = \mathrm{O}(h^2)$ und

$$|T_h(a)| = \mathrm{O}(h^2) \ , \quad |T_h(b)| = \mathrm{O}(h^2) \ , \quad \max_{x\in I_h'} |(f_h - f)(x)| = \mathrm{O}(h^2) \quad (h \to 0) \ ,$$

so hat man auch eine Konvergenzordnung von $\mathrm{O}(h^2)$. Die zusätzlichen Forderungen an die Randapproximationen und die rechten Seiten sind z. B. erfüllt, falls $\gamma_{i,h} = \gamma_i$, $i = 1, 2$, und $f_h = f|I_h'$.

Eine andere Differenzenapproximation erhält man durch das sog. *Upwind–Schema.* Hierbei wird die 1. Ableitung durch den vorwärts- oder rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten 1. Ordnung approximiert, je nachdem, ob p_h positiv oder negativ ist. D. h. man approximiert pu' durch

$$\begin{aligned} & p(x) D_h^+ u_h(x) \quad , \ \text{falls } p(x) \geq 0 \ , \\ & p(x) D_h^- u_h(x) \quad , \ \text{falls } p(x) < 0 \ , \qquad x \in I_h' \ . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Das Upwind–Schema läßt sich dann wie folgt schreiben,

$$D_h^2 u_h(x) + p_h^+(x) D_h^+ u_h(x) + p_h^-(x) D_h^- u_h(x) + q_h(x) u_h(x) = f_h(x) \quad x \in I_h' \,, \tag{4.24}$$

wobei

$$p_h^+(x) := \max(0, p(x)) \,, \quad p_h^-(x) := \min(0, p(x)) \,, \quad x \in I_h' \,;$$

zur Vereinfachung sei $q_h = q|I_h'$, $f_h = f|I_h'$. In der Form (4.12) des Differenzenoperators sind die Koeffizienten nun wie folgt gegeben,

$$\begin{aligned} a_{-1,h}(x) &= h^{-2}(1 - h p_h^-(x)) \,, \quad a_{1,h}(x) = h^{-2}(1 + h p_h^+(x)) \,, \\ a_{0,h}(x) &= -h^2(2 - h^2 q_h(x) + h|p_h(x)|) \,, \quad x \in I_h' \,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dieses Verfahren ist im Gegensatz zu (4.13) ohne Einschränkung der Maschenweite h (vgl. Satz 4.3) von positivem Typ. Dies ist insbesondere für Probleme von Interesse, bei denen $|p_h(x)|$ sehr groß wird — z. B. bei Grenzschichtproblemen, bei denen $p = \mathrm{O}(1/\varepsilon)$. Der Nachteil (gegenüber (4.13)) liegt im Verhalten der Abschneidefehler, die hier i. a. nur wie $\mathrm{O}(h)$ gegen Null streben.

4.4 Stabilität und Konvergenz mit Hilfe von Kompaktheitsmethoden

In diesem Abschnitt wird das gleiche Problem mit derselben Approximationsmethode wie im letzten Abschnitt betrachtet. Anstelle von Maximumprinzipien werden hier Kompaktheitsmethoden zum Nachweis von Stabilität benutzt, insbesondere der Satz von Arzela–Ascoli. Interessant ist, daß man auf diesem Weg mit den gleichen Voraussetzungen stärkere Aussagen erhält, bei denen auch noch die Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung abgeschätzt werden.

Wir betrachten also wieder Randwertprobleme

$$Lu = f \;\text{ in } I = [a, b] \,, \quad u(a) = u(b) = 0 \,,$$

mit linearen Differentialoperatoren $Lu = u'' + pu' + qu$, $p, q \in C(I)$, und zugehörige Differenzenapproximationen der Form (4.10),

$$L_h u_h = f_h \;\text{ in } I_h' \,, \quad u_h(a) = u_h(b) = 0 \,,$$

mit $L_h u_h = D_h^2 u_h + p_h D_h u_h + q_h u_h$. O. B. d. A. kann man homogene Randbedingungen annehmen. Zur Vereinfachung sei noch $p_h = p|I_h$, $q_h = q|I_h$, dann strebt der Abschneidefehler gegen Null (wie $\mathrm{O}(h^2)$)

$$\max_{x\in I_h'} \left| \left(L_h u^h - Lu\right)(x)\right| = \mathrm{O}(h^2) \quad (h \to 0)\,, \tag{4.26}$$

wobei $u^h = u|I_h$ mit der Lösung u des Randwertproblems.

Wir integrieren die homogenen Randbedingungen in die zugrundeliegenden Vektorräume, in dem wir setzen

$$\begin{aligned} E &= \{v \in C^2(I) \mid v(a) = v(b) = 0\}\,, \qquad F = C(I) \\ E_h &= \{v_h \in C(I_h) \mid v_h(a) = v_h(b) = 0\}\,, \quad F_h = C(I_h')\,. \end{aligned}$$

Der Differentialoperator bzw. die Differenzenapproximationen definieren dann lineare Abbildungen $L : E \to F$, $L_h : E_h \to F_h$, $h \in \Lambda$; die obigen Randwertaufgaben lassen sich schreiben als

$$u \in E : Lu = f \quad \text{bzw.} \quad u_h \in E_h : L_h u_h = f_h\,, \quad h \in \Lambda\,.$$

Wesentliches Hilfsmittel für das Folgende ist der Satz von Arzela–Ascoli.

Satz 4.4 (Arzela–Ascoli) *Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C(I)$ ist kompakt genau wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

(a) (v_n) ist gleichmäßig beschränkt, d. h.

$$\exists C \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I : |v_n(x)| \leq C\,;$$

(b) (v_n) ist gleichgradig stetig, d. h.

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x, y \in I : |x - y| \leq \delta \\ &\Longrightarrow \quad |v_n(x) - v_n(y)| \leq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Definition 4.5 *Eine Folge (v_n) heißt* kompakt *(in $C(I)$), wenn folgendes gilt:*

$$\forall N' \subset \mathbb{N}\ \exists\, \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'\ \exists v \in C(I) : \max_{x\in I} |v_n(x) - v(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty\,,\ n \in \mathbb{N}'')\,.$$

Die gleichmäßige Konvergenz – d. h. die Konvergenz bzgl. der Maximumnorm — ist für Folgen stetiger Funktionen offenbar hinreichend für deren punktweise Konvergenz; die Umkehrung gilt, wenn die Folge gleichgradig stetig ist.

Satz 4.6 *Sei (v_n) aus $C(I)$ gleichgradig stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Wenn* $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in J$, J *dicht in* I, *konvergiert, dann existiert ein* $v \in C(I)$ *und* $v_n \longrightarrow v$ $(n \to \infty)$ *konvergiert punktweise in* I.

(b) *Falls* $v_n \longrightarrow v$ $(n \to \infty)$ *punktweise (in* I*) mit* $v \in C(I)$, *dann gilt auch*

$$\max_{x\in I} |v_n(x) - v(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) .$$

Beweis: s. z. B. [Rei91], Satz 1.9 und Satz 1.10, oder [Heu93], Satz 104.2.

Für das nächste Ergebnis reicht es aus, die Funktionen g_n nur als integrierbar anzunehmen.

Satz 4.7 *Sei* (g_n) *eine gleichmäßig konvergente Folge von Treppenfunktionen mit Limes* g,

$$\max_{x\in I} |(g_n - g)(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) .$$

Dann ist g *integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(s)\, ds = \int_a^b g(s)\, ds .$$

Beweis: s. z. B. [Heu93], Satz 104.4.

Im folgenden denken wir uns Gitterfunktionen $v_h \in C(I_h)$ auf ganz I stetig, stückweise linear fortgesetzt und bezeichnen die entsprechenden Funktionen aus $C(I)$ ohne Unterschied wieder mit v_h.

Außerdem kennzeichnen wir (abzählbare) Nullfolgen von Maschenweiten h mit $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ usw.

Definition 4.8 *Normen in* $C(I_h)$

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{0,\infty} &= \max_{x\in I_h} |v_h(x)| , \\ \|v_h\|_{2,\infty} &= \max_{x\in I_h} |v_h(x)| + \max_{x\in I_h^0} |D_h^+ v_h(x)| + \max_{x\in I_h'} |D_h^2 v_h(x)| , \end{aligned}$$

wobei $I_h^0 := \{x = x_j = a + jh \mid j = 0, 1, \ldots, N_h - 1\}$. *Die Maximum–Norm in* $C(I)$ *bezeichnen wir auch mit* $\|.\|_{0,\infty}$ *und*

$$\|v\|_{2,\infty} = \max_{x\in I} |v(x)| + \max_{x\in I} |v'(x)| + \max_{x\in I} |v''(x)| , \quad v \in C^2(I) .$$

Bemerkung: Für den zentralen und vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung gilt die Beziehung

$$\max_{x\in I_h'} |D_h v_h(x)| \le \max_{x\in I_h^0} |D_h^+ v_h(x)| \,, \tag{4.27}$$

denn man hat die Darstellung

$$D_h v_h(x) = \frac{1}{2}\Big(D_h^+ v_h(x) + D_h^- v_h(x)\Big) \,, \qquad x \in I_h' \,.$$

Mit der Norm $\|.\|_{2,\infty}$ und wegen der Wahl $p_h = p|I_h'$, $q_h = q|I_h'$ hat man trivialerweise die folgende gleichmäßige Abschätzung für die Folge der Differenzenoperatoren,

$$\|L_h v_h\|_{0,\infty} \le \max(1, \|p\|_{0,\infty}, \|q\|_{0,\infty})\|v_h\|_{2,\infty} \,, \qquad h \in \Lambda \,. \tag{4.28}$$

Lemma 4.9 *Sei $(L_h v_h)_{h\in\Lambda}$ kompakt und $(\|v_h\|_{2,\infty})_{h\in\Lambda}$ beschränkt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $(v_h)_{h\in\Lambda}$, $(D_h^{\pm} v_h)_{h\in\Lambda}$, $(D_h^2 v_h)_{h\in\Lambda}$ *sind kompakt in* $C(I)$.

(b) $\forall \Lambda' \subset \Lambda \; \exists \Lambda'' \subset \Lambda \; \exists v \in C^2(I)$ *mit*

$$\|v_h - v\|_{2,\infty} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0 \,,\; h \in \Lambda'') \,.$$

Beweis: i) Sei o. B. d. A. $\|v_h\|_{2,\infty} \le 1$, $h \in \Lambda$. Da v_h stückweise differenzierbar und $|v_h'(x)| \le \max |D_h^+ v_h(x)| \le 1$ folgt

$$|v_h(x) - v_h(y)| \le |x - y| \max_{S\in I_h^0} |D_h^+ v_h(s)| \,, \qquad x, y \in [a,b] \,,\; h \in \Lambda \,.$$

Damit ist $(v_h)_{h\in\Lambda}$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt, also nach dem Satz von Arzela–Ascoli kompakt. Für $z_h := D_h^+ v_h$ liefert die gleiche Argumentation (beachte: $D_h^+ z_h(x) = D_h^2 v_h(x+h)$)

$$|z_h(x) - z_h(y)| \le |x - y| \max |D_h^+ z_h(s)| \le |x - y| \,, \qquad x, y \in [a,b] \,,\; h \in \Lambda \,;$$

also ist auch (z_h) kompakt. Analog zeigt man, daß $(D_h^- v_h)$ und $(D_h v_h)$ kompakt sind. Wegen

$$D_h^2 v_h = L_h v_h - p(D_h v_h) - q v_h$$

und der vorausgesetzten Kompaktheit von $(L_h v_h)$ ist auch $(D_h^2 v_h)$ kompakt. Damit ist (a) gezeigt.

ii) Nach (a) gilt folgendes:

$$\forall \Lambda' \subset \Lambda \; \exists \Lambda'' \subset \Lambda \; \exists v, w, z \in C(I) \;\text{ mit}$$
$$\|v_h - v\|_{0,\infty} \longrightarrow 0 \;, \quad \|D_h^+ v_h - w\|_{0,\infty} \longrightarrow 0 \;, \quad \|D_h^2 v_h - z\|_{0,\infty} \longrightarrow 0$$
$$(h \to 0 \;,\; h \in \Lambda'') \;.$$

Wegen

$$v_h(x) = v_h(a) + \int_a^x v_h'(s)\, ds = v_h(a) + h \sum_{\substack{a \le y < x \\ y \in I_h^0}} D_h^+ v_h(y)$$

gilt mit $h \to 0$ (vgl. Lemma 4.9)

$$v(x) = v(a) + \int_a^x w(s)\, ds \;.$$

Damit ist $v'(x) = w(x)$. Analog zeigt man, daß $w' = z$, so daß auch (b) gezeigt ist.

□

Satz 4.10 (Stabilitätssatz) *Die homogene Randwertaufgabe habe nur die triviale Lösung (in E). Dann erfüllt die Folge der Differenzenapproximationen L_h, $h \in \Lambda$, mit Zahlen $\gamma \ge 0$, $0 < h_0 \in \Lambda$, die folgende Abschätzung,*

$$\|v_h\|_{2,\infty} \le \gamma \|L_h v_h\|_{0,\infty} \quad \forall v_h \in E_h \;, \qquad h \in \Lambda_0 \;, \tag{4.29}$$

wobei $\Lambda_0 := \{h \in \Lambda \mid 0 < h \le h_0\}$.

Beweis: (indirekt) Angenommen, die Behauptung ist falsch, dann

$$\forall \gamma \ge 0 \quad \forall h \in \Lambda \; \exists h' \in \Lambda : h' \le h \;, \; \exists v_{h'} \in E_{h'} \quad \text{mit}$$
$$\|v_{h'}\|_{2,\infty} > \gamma \|L_{h'} v_{h'}\|_{0,\infty} \;.$$

Setze $\gamma = \eta$, $h = h_1, h_2$, usw., dann existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $h^{(n)} \in \Lambda$, $h^{(n)} \le h_{n-1}$, und ein $v_h^{(n)} \in E_h$, $h = h^{(n)}$, mit

$$\|v_h^{(n)}\|_{2,\infty} > n \|L_h v_h^{(n)}\|_{0,\infty} \;, \quad h = h^{(n)} \;.$$

Für die Teilfolge $\Lambda' = \{h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, \} \subset \Lambda$ setze $z_h := v_h / \|v_h\|_{2,\infty}$, $h \in \Lambda'$, dann gilt

$$\|z_h\|_{2,\infty} = 1 \quad \text{und} \quad \|L_h z_h\|_{0,\infty} < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (h = h^{(n)} \to 0) \;.$$

Wegen $L_h z_h \longrightarrow 0$ $(h \in \Lambda', h \to 0)$ ist $(L_h z_h)_{h \in \Lambda'}$ insbesondere kompakt. Nach Lemma 4.9 existieren $\Lambda'' \subset \Lambda'$ und $z \in C^2(I)$ mit

$$\|z_h - z\|_{0,\infty} + \|D_h^+ z_h - z'\|_{0,\infty} + \|D_h^2 z_h - z''\|_{0,\infty} \longrightarrow 0 \quad (h \in \Lambda'',\ h \to 0)\ .$$

Weiter gilt (wegen (4.28))

$$\begin{aligned} \|L_h z_h - Lz\|_{0,\infty} &\le \|L_h(z_h - z)\|_{0,\infty} + \|L_h z - Lz\|_{0,\infty} \\ &\le C\|z_h - z\|_{2,\infty} + \|L_h z - Lz\|_{0,\infty}\ , \quad h \in \Lambda''\ . \end{aligned}$$

Da $z \in C^2(I)$ strebt $\|L_h z - Lz\|_{0,\infty} \longrightarrow 0$ $(h \to 0\ ,\ h \in \Lambda'')$ — vgl. Abschneidefehler — und insgesamt

$$\|L_h z_h - Lz\|_{0,\infty} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0\ ,\ h \in \Lambda'')\ .$$

Da schon $L_h z_h \longrightarrow 0$ $(h \to 0\ ,\ h \in \Lambda'')$ konvergiert, muß $Lz = 0$ sein. Damit ist $z \in E$ Lösung der homogenen Randwertaufgabe, also nach Voraussetzung $z = 0$. Dies führt aber zum Widerspruch

$$1 = \|z_h\|_{2,\infty} \longrightarrow \|z\|_{2,\infty} = 0 \quad (h \to 0\ ,\ h \in \Lambda'')\ .$$

□

Bemerkungen

1. Die Voraussetzung der Injektivität von $L : E \to F$, d. h. die triviale Lösbarkeit der homogenen Randwertaufgabe, folgt z. B. aus der Vorzeichenbedingung $q \le 0$. Diese Bedingung war schon im vorigen Abschnitt wesentlich (vgl. Bed. (4.20)), um dort die Positivität bzw. die Monotonie–Eigenschaft der Differenzenapproximation zu zeigen.

2. Die Konstante γ in der Stabilitätsungleichung (4.29) wurde im Gegensatz zu der durch Maximumprinzipien gewonnenen Abschätzung (4.21) nicht konstruktiv gewonnen. Wie in (4.21) hat man auch in (4.29) eine Einschränkung der Maschenweiten zu fordern, wobei man h_0 in (4.29) allerdings nicht kennt. Hervorzuheben ist, daß in (4.29) eine stärkere Norm — nämlich noch die Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung — durch die gleiche Schranke $\|L_h v_h\|_{0,\infty}$ auf der rechten Seite wie in (4.21) abgeschätzt wird.

Satz 4.11 (Konvergenzsatz) *Die homogene Randwertaufgabe besitze nur die triviale Lösung. Dann besitzen die inhomogene Randwertaufgabe bzw. die Differenzenapproximationen für bel. $f \in C(I)$ bzw. $f_h \in C(I_h)$, $h \in \Lambda_0 = \{h \in \Lambda \mid 0 < h \le h_0\}$, eindeutige Lösungen u bzw. u_h, es gilt die Beziehung*

$$\max_{x\in I_h'} |(f - f_h)(x)| \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|u_h - u^h\|_{2,\infty} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0\,,\ h \in \Lambda)$$

sowie die zweiseitige Fehlerabschätzung,

$$\gamma_0 \|T_h - (f_h - f^h)\|_{0,\infty} \le \|u_h - u^h\|_{2,\infty} \le \gamma_1 \|T_h - (f_h - f^h)\|_{0,\infty}\,, \quad h \in \Lambda_0\,. \tag{4.30}$$

Beweis: Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen weiß man, daß die Injektivität von $L : E \longrightarrow F$ die eindeutige Lösbarkeit von linearen inhomogenen Randwertproblemen zur Folge hat. Die Stabilitätsungleichung (4.29) impliziert die Injektivität von $L_h : E_h \longrightarrow F_h\,,\ h \in \Lambda_0$, und damit die eindeutige Lösbarkeit der Differenzengleichungen. Einsetzen des Fehlers $u_h - u^h$ in (4.29) und die Beziehung

$$L_h u_h - L_h u^h = f_h - f^h + f^h - L_h u^h = f_h - f^h - T_h$$

liefert die 2. Ungleichung in (4.30) (mit $\gamma_1 = \gamma$). Die erste Ungleichung folgt aus (4.28) (mit $1/\gamma_0 = \max(1, \|p\|_{0,\infty}, \|q\|_{0,\infty})$. Aus (4.30) folgt sofort die zweiseitige Konvergenzbeziehung wegen $\|T_h\|_{0,\infty} \longrightarrow 0$ $(h \to 0)$. □

4.5 Differenzenapproximationen für nichtlineare Randwertprobleme

In diesem Abschnitt betrachten wir nichtlineare 2–Punkt–Randwertprobleme der folgenden Form,

$$\begin{aligned} (pu')' + qu &= f(x, u(x))\,, \qquad x \in I := [0,1]\,, \\ u(0) = u(1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Wir setzen dabei zunächst voraus, daß $q \in C[0,1]\,,\ p \in C^1(0,1)\,,\ f \in C([0,1] \times \mathbb{R})$, und daß eine lokal eindeutige Lösung u existiert. Der lineare Teil der Differentialgleichung liegt in sog. selbstadjungierter Form vor; die Nichtlinearität tritt höchstens bei u — nicht bei u' oder u'' — auf. Man kann (4.31) umschreiben in die Form

$$\begin{aligned} pu'' + p'u' + qu - f(x, u(x)) &= 0\,, \qquad x \in I\,, \\ u(0) = u(1) &= 0\,, \end{aligned} \tag{4.32}$$

und erhält analog zu (4.10) eine Differenzenapproximation der folgenden Form

$$\begin{aligned} &p(x) D_h^2 u_h(x) + p'(x) D_h u_h(x) + q(x) u_h(x) - f(x, u_h(x)) = 0\,, \quad x \in I_h\,, \\ &u_h(0) = u_h(1) = 0\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Bezeichnet man die linearen Differential–bzw. Differenzenoperatoren mit

$$\begin{aligned} Lv(x) &= p(x)v''(x) + p'(x)v'(x) + q(x)v(x)\,, \qquad x \in I\,, \\ L_h v_h(x) &= p(x)D_h^2 v_h(x) + p'(x)D_h v_h(x) + q(x)v_h(x)\,, \qquad x \in I_h'\,, \end{aligned}$$

dann kann man die Randwertprobleme (4.31) bzw. (4.33) schreiben als

$$\begin{aligned} &(Au)(x) = 0 \qquad x \in I\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,, \\ \text{bzw.}\quad &(A_h u_h)(x) = 0\,, \quad x \in I_h'\,, \quad u_h(0) = u_h(1) = 0\,, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} (Av)(x) &= Lv(x) - f(x, v(x))\,, \qquad x \in I\,, \\ (A_h v_h)(x) &= L_h v_h(x) - f(x, v_h(x))\,, \qquad x \in I_h'. \end{aligned}$$

Eine andere Differenzenapproximation erhält man, wenn man die Form (4.31) zugrundelegt und beachtet, daß der vorwärts- bzw. rückwärtsgenommene Differenzenquotient 1. Ordnung eine Approximation von u' bei $x+\frac{h}{2}$ bzw. $x-\frac{h}{2}$ der Güte $\mathrm{O}(h^2)$ darstellt. Wir approximieren deshalb $pu'\left(x-\frac{h}{2}\right)$ durch $p\left(x-\frac{h}{2}\right)D_h^- u_h(x)$ und $(pu')'$ durch

$$\begin{aligned} &D_h^+\left(p\left(\cdot - \frac{h}{2}\right)D_h^- u_h\right)(x) \\ &\quad = \frac{1}{h}\left\{p\left(x+\frac{h}{2}\right)D_h^- u_h(x+h) - p\left(x-\frac{h}{2}\right)D_h^- u_h(x)\right\} \\ &\quad = \frac{1}{h^2}\left\{p\left(x+\frac{h}{2}\right)u_h(x+h) - \left(p\left(x-\frac{h}{2}\right) + p\left(x-\frac{h}{2}\right)\right)u_h(x)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + p\left(x-\frac{h}{2}\right)u_h(x-h)\right\}\,. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Die Approximationsgüte ist wieder $\mathrm{O}(h^2)$.

Man erhält also alternativ zu (4.33) folgende Differenzenapproximation für den linearen Anteil in (4.31),

$$\begin{aligned} (L_h v_h)(x_j) = \frac{1}{h^2}\Big\{ &\quad p_{j+1/2}v_{j+1} - \left(p_{j+1/2} + p_{j-1/2} - q_j h^2\right)v_j \\ &+ p_{j-1/2}v_{j-1}\Big\}\,, \qquad j = 1, \ldots, N_h - 1\,, \end{aligned} \tag{4.35}$$

wobei $v_\nu = v_h(x_\nu)$, $p_{j\pm1/2} = p(x_{j\pm1/2})$, $x_{j\pm1/2} = x_j \pm h/2$. Die Differenzenapproximation für das gegebene nichtlineare Randwertproblem ergibt sich dann wieder wie oben durch $A_h v_h = L_h v_h - f(., v_h)$.

Beide vorgestellten Differenzenapproximationen besitzen einen Abschneidefehler der Größenordnung $\mathrm{O}(h^2)$, d. h. mit einer hinreichend glatten Lösung u von (4.31) gilt

$$\max_{x\in I_h'} |(A_h u)(x)| = \mathrm{O}(h^2) \quad (h \to 0)\,. \tag{4.36}$$

Der Vollständigkeit halber schreiben wir das nichtlineare Gleichungssystem explizit hin, das im Falle der Approximation (4.35) zu lösen ist — nach Multiplikation mit $-h^2$,

$$\begin{aligned} -p_{j-1/2}u_{j-1} + \left(p_{j-1/2} + p_{j+1/2} - q_j h^2\right) u_j - p_{j+1/2}u_{j+1} & \\ + h^2 f(x_j, u_j) = 0\,, \qquad j = 1, \ldots, N_h - 1 & \\ u_0 = u_{N_h} = 0\,. & \end{aligned} \tag{4.37}$$

Mit Hilfe eines Ergebnisses von Ortega–Rheinboldt [OR70], § 15, geben wir nun Bedingungen an, wann (4.37) eindeutig lösbar ist. Dazu benötigen wir die Begriffe einer M–Matrix und einer isotonen, diagonalen Abbildung. Eine Matrix A heißt *M–Matrix*, falls A invertierbar, $a_{ij} \le 0$ für $i \ne j$ und $A^{-1} \ge 0$. Letzeres bedeutet $A^{-1}y \ge 0$ für $y \ge 0$, komponentenweise. Eine Abbildung $T : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *isoton,* wenn $Tx \le Ty$ für $x \le y\,,\ x, y \in D$. Eine Abbildung $\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *diagonal,* wenn $\Phi_j(u_1, \ldots, u_n) = \Phi_j(u_j)\,,\ j = 1, \ldots, n$. Das folgende Ergebnis aus Ortega–Rheinboldt [OR70], 2.4.8, gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für eine M–Matrix an.

Lemma 4.12 *Sei $\mathcal{A}$ eine Matrix mit $a_{ij} \le 0\,,\ i \ne j$. D. u. n. d. ist $\mathcal{A}$ eine M–Matrix, wenn $a_{jj} > 0\,,\ j = 1, \ldots, n$, und $\rho(\mathcal{B}) < 1$, wobei $\rho(\mathcal{B})$ den Spektralradius von $\mathcal{B} = I - D^{-1}\mathcal{A}$ und $D = \mathrm{diag}(a_{jj})$ bezeichnet.*

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun das folgende Ergebnis beweisen.

Satz 4.13 *Es seien $p(x) \ge \alpha_0 > 0\,,\ q(x) \le 0$ und f erfülle*

$$f(x, u) - f(x, v) \ge 0\,, \quad x \in [0, 1]\,, \quad u \ge v\,, \quad u, v \in \mathbb{R}\,. \tag{4.38}$$

Dann ist das Gleichungssystem (4.37) eindeutig lösbar.

Beweis: Wir schreiben (4.37) als $\mathcal{A}_h u + \Phi_h(u) = 0$, wobei $\mathcal{A}_h$ die durch $a_j = p_{j+1/2} + p_{j-1/2} - q_j h^2\,,\ j = 1, \ldots, n\,,\ b_j = -p_{j-1/2}\,,\ j = 2, \ldots, n\,,\ c_j = -p_{j+1/2}\,,\ j = 1, \ldots, n-1$, $n = N_h - 1$, in der Schreibweise von [SH82], § 6.3, definierte Tridiagonalmatrix ist. Nach Voraussetzung sind die Diagonalelemente positiv, die Nebendiagonalelemente negativ und $\mathcal{A}_h$ erfüllt das schwache Zeilensummenkriterium. Nach Satz 2.4.13 in Ortega–Rheinboldt [OR70] gilt für den Spektralradius von $\mathcal{B} = I - D^{-1}\mathcal{A}_h$, daß $\rho(\mathcal{B}) < 1$. Damit ist $\mathcal{A}_h$ eine M–Matrix (vgl. Lemma 4.12). Die durch $\Phi_h = (\Phi_{1h}, \ldots, \Phi_{nh})$,

$$\Phi_{jh}(u_1, \ldots, u_n) = h^2 f(x_j, u_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,,$$

definierte, diagonale Abbildung ist isoton. Man hat nämlich wegen (4.38)

$$f(x_j, u_j) - f(x_j, v_j) \geq 0 \ , \quad \text{falls } u_j \geq v_j \ ,$$

und deshalb

$$\Phi_{jh}(u) - \Phi_{jh}(v) = h^2(f(x_j, u_j) - f(x_j, v_j)) \geq 0 \ ,$$

falls $u_j \geq v_j$, d. h. $\Phi_{jh}(u) \geq \Phi_{jh}(v)$, $j = 1, \ldots, n$. Nach Satz 13.5.6 in [OR70] ist $\mathcal{A}_h + \Phi_h(.)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf sich, und daher ist (4.37) eindeutig lösbar. □

Besitzt f eine stetige, partielle Ableitung nach dem 2. Argument, dann ist (4.38) offenbar äquivalent zu

$$f_u(x, u) \geq 0 \ , \qquad x \in [0, 1] \, , \ u \in \mathbb{R} \ . \tag{4.39}$$

Das nichtlineare Gleichungssystem (4.37) muß iterativ gelöst werden. Eine geeignete Methode ist z. B. das *Einzelschrittverfahren*

$$\begin{aligned} u_j^{(t+1)} \quad = \quad & \left(p_{j+1/2} + p_{j-1/2} - q_j h^2\right)^{-1} \left\{p_{j-1/2} u_{j-1}^{(t+1)} + p_{j+1/2} u_{j+1}^{(t)} - h^2 f\left(x_j, u_j^{(t)}\right)\right\} \ , \\ & j = 1, \ldots, N_h - 1 \, , \ t = 0, 1, 2, \ldots , \end{aligned}$$

Für das *Newton–Verfahren* erhält man nach Berechnung der Funktionalmatrix

$$\begin{aligned} -p_{j+1/2} u_{j+1}^{(t+1)} + \left(p_{j+1/2} + p_{j-1/2} - q_j h^2\right) u_j^{(t+1)} - p_{j-1/2} u_{j-1}^{(t+1)} & \\ + h^2 f_u\left(x_j, u_j^{(t)}\right) u_j^{(t+1)} \quad = \quad -h^2 \left\{f\left(x_j, u_j^{(t)}\right) - f_u\left(x_j, u_j^{(t)}\right) u_j^{(t)}\right\} \ , & \\ j = 1, \ldots, N_h - 1 \, , \ t = 0, 1, 2, \ldots & \end{aligned}$$

Satz 13.3.8 in [OR70] liefert die Konvergenz des Newton–Verfahrens gegen die Lösung von (4.37), vorausgesetzt die im Beweis von Satz 4.13 definierte Abbildung Φ_h ist *konvex,* d. h.

$$f(x, u) - f(x, v) \leq f_u(x, u)(v - u) \ , \quad x \in [0, 1] \, , \ u, v \in \mathbb{R} \ . \tag{4.40}$$

Satz 4.14 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.13 und (4.40) konvergiert die durch das Newton–Verfahren definierte Folge $u^{(t)}$ für jeden Startvektor $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $n = N_h - 1$, gegen die eindeutige Lösung u von (4.37) und $u^{(t)} \geq u^{(t+1)} \geq u$, $t = 1, 2, \ldots$.*

Beweis: *Ortega–Rheinboldt [OR70], 13.3.8.*

Wir setzen im folgenden voraus, daß

$$\begin{aligned} & p, q \in C[0, 1] \, , \quad 0 < \alpha_0 \leq p(x) \leq \alpha_1 \ , \quad q(x) \leq 0 \ , \qquad x \in I \, ; \\ & f \text{ und } f_u \text{ stetig in } I \times \mathbb{R} \, ; \quad f_u(x, u) \geq 0 \ , \qquad x \in I \, , \ u \in \mathbb{R} \ . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Dann sind die oben definierten Abbildungen A, A_h (mit L_h aus (4.35)) differenzierbar mit den (Fréchet–)Ableitungen

$$\begin{aligned} A'(u)v &= Lv - f_u(.,u)v\,, \qquad u, v \in C^2(0,1)\,, \\ A_h'(u_h)v_h &= L_h v_h - f_u(.,u_h)v_h\,, \qquad u_h, v_h \in C(I_h)\,. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma zeigt, daß die linearen Differenzenoperatoren $A_h'(u_h^0)$ für jedes feste u_h^0 von positivem Typ sind, falls die Voraussetzungen von (4.41) gelten.

Lemma 4.15 *Unter den Voraussetzungen von (4.41) sind die linearen Differenzenoperatoren $A_h'(u_h^0)$ für jedes $u_h^0 \in C(I_h)$ und jedes $h > 0$ von positivem Typ.*

Beweis: Es gilt die Darstellung

$$A_h'(u_h^0)v_h(x) = b_{-1,h}(x)v_h(x-h) + b_{0,h}(x)v_h(x) + b_{1,h}(x)v_h(x+h)$$

mit

$$\begin{aligned} b_{-1,h}(x) &= \frac{1}{h^2}p\left(x - \frac{h}{2}\right)\,, \qquad b_{1,h}(x) = \frac{1}{h^2}p\left(x + \frac{h}{2}\right)\,, \\ b_{0,h}(x) &= -\frac{1}{h^2}\left(p\left(x - \frac{h}{2}\right) + p\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) + q(x) - f_u\left(x, u_h^0(x)\right)\,, \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen in (4.41) ist

$$\begin{aligned} b_{-1,h}(x) &\geq \frac{1}{h^2}\alpha_0 > 0\,, \qquad b_{1,h}(x) \geq \frac{1}{h^2}\alpha_0 \quad \text{und} \\ (b_{-1,h} + b_{0,h} + b_{1,h})(x) &= q(x) - f_u\left(x, u_h^0(x)\right) \leq 0\,, \qquad x \in I_h'\,. \end{aligned}$$

□

Wie im Stabilitätssatz 4.3 kann man zeigen, daß die linearen Differenzenoperatoren $A_h'(u_h^0)$ einer Ungleichung der folgenden Form genügen (mit $\beta > 0$),

$$\beta \max_{x\in I_h}|v_h(x)| \leq |v_h(0)| + |v_h(x)| + \max_{x\in I_h'}|A_h'(u_h^0)v_h(x)|\,, \qquad v_h \in C(I_h)\,. \tag{4.42}$$

Damit sind die linearisierten Differenzengleichungen

$$A_h'(u_h^0)v_h = g_h \text{ in } I_h'\,, \quad v_h(0) = \eta_0, \quad v_h(1) = \eta_1$$

für jede feste Folge (u_h^0) eindeutig lösbar und die Folge der Lösungen (v_h) ist gleichmäßig beschränkt (mit β in (4.42) unabhängig von h). Nimmt man nun $u_h^0 = u^h = u|I_h$ mit der Lösung u des gegebenen nichtlinearen Randwertproblems, dann weiß man mit Hilfe des Satzes von der Inversen Funktion (vgl. z. B. [Rei95], Satz 5.6), daß auch die nichtlinearen Differenzengleichungen in einer Umgebung von $(u|I_h)$ eindeutig lösbar sind, und daß der Fehler $u_h - u^h$ der Abschätzung genügt,

$$\|u_h - u^h\|_{0,\infty} \leq \frac{2}{\beta}\|T_h\|_{0,\infty} , \qquad h : 0 < h \leq h_0 ,$$

vorausgesetzt u_h liegt schon hinreichend nahe bei u. Asymptotisch hat man daher das Fehlerverhalten

$$\|u_h - u^h\|_{0,\infty} = \mathrm{O}(h^2) \quad (h \to 0) .$$

Abschließend sei bemerkt, daß man die Fehlerabschätzung bzw. das asymptotische Fehlerverhalten sogar bzgl. der Norm $\|.\|_{2,\infty}$ erhält, wenn man auf die linearisierten Gleichungen die Kompaktheitsmethoden des vorigen Abschnitts anwendet.

Kapitel 5

Differenzenapproximationen für Randwertprobleme durch Variationsmethoden

In diesem Kapitel werden wir nicht wie im vorigen Kapitel die vorliegende Differentialgleichung zur Herleitung von Differenzenapproximationen zugrundelegen, sondern wir werden ausnutzen, daß die Lösung von 2–Punkt–Randwertaufgaben gewisse Variationsgleichungen erfüllen. Letztere werden dann Ausgangspunkt der Methode der Finiten Elemente, die in einfachen Fällen auf Differenzenverfahren führt, die sich von denen der vorigen Kapitel unterscheiden, und für die über den variationellen Zugang in Verbindung mit Interpolationsabschätzungen Fehlerabschätzungen gezeigt werden können.

5.1 Variationelle Formulierung eines 1–dimensionalen Modellproblems

Die 2–Punkt–Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\,, \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{D}$$

stellt zu gegebener stetiger Funktion f ein Modellproblem für verschiedene Anwendungsbeispiele aus der Mechanik dar. Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen weiß man außerdem, daß das Problem (D) eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Beispiel 5.1 Elastischer Stab

Auf einen elastischen Stab, der an beiden Enden aufliegt, wirke eine tangentiale Kraft mit Intensität f. Es bezeichne $\sigma(x)$ bzw. $u(x)$ die Spannung bzw. tangentiale Auslenkung im Punkt x unter f. Nimmt man an, daß die Auslenkung klein bleibt und das elastische Material sich linear verhält, dann gelten die folgenden (physikalischen) Beziehungen,

$$\begin{aligned} \sigma &= Eu' && \text{(Hookesches Gesetz)} \\ -\sigma' &= f && \text{(Gleichgewichtszustand)} \\ u(0) &= u(1) = 0 && \text{(Randbedingungen)} , \end{aligned}$$

wobei E den Elastizitätsmodul beschreibt. Setzt man $E = 1$ und eliminiert σ, dann erhält man (D). □

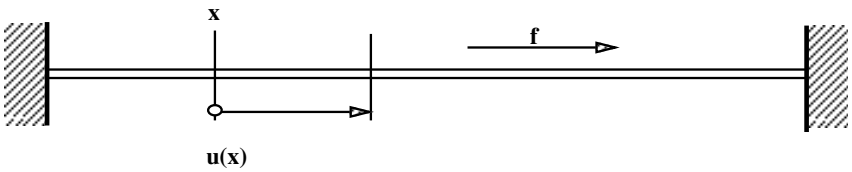


Abbildung 5.1: Elastischer Stab

Beispiel 5.2 Wärmeleitung

Es bezeichne u die Temperatur und q den Wärmefluß in einem leitenden Stab, verursacht durch eine Wärmequelle der Intensität f. Nimmt man an, daß die Temperatur an beiden Enden des Stabes Null ist, dann gelten im stationären Fall folgende Beziehungen,

$$\begin{aligned} -q &= ku' && \text{(Fouriersches Gesetz)} \\ q' &= f && \text{(Energieerhaltung)} \\ u(0) &= u(1) = 0 && \text{(Randbedingungen)} . \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet noch k die Wärmeleitfähigkeit, die auf 1 normiert, gerade wieder das Randwertproblem (D) ergibt. □

Als nächstes wird es unser Ziel sein zu zeigen, daß die Lösung des Randwertproblems auch die Lösung eines Minimierungsproblems (M) und eines Variationsproblems (V) ist. Dazu bezeichne

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx$$

das L^2–Skalarprodukt für reellwertige Funktionen, die wir als stückweise stetig mit höchstens endlich vielen Sprungstellen annehmen. Außerdem sei

$$V := \{v|\ v \text{ stetig in } [0,1]\,,\ v' \text{ stückweise stetig und beschränkt,} \\ v(0) = v(1) = 0\ \}$$

ein entsprechender linearer Raum von Funktionen und

$$F(v) := \frac{1}{2}(v', v') - (f, v)$$

definiere ein quadratisches Funktional. Wir zeigen nun, daß die oben erwähnten Probleme die folgende Gestalt haben,

$$\begin{array}{llllll} \textit{Gesucht} & u \in V & \textit{mit} & F(u) & \leq & F(v) \quad \forall v \in V\ . \qquad (M) \\ \textit{Gesucht} & u \in V & \textit{mit} & (u', v') & = & (f, v) \quad \forall v \in V\ . \qquad (V) \end{array}$$

Im obigen Beispiel 5.1 repräsentiert $F(v)$ die *gesamte potentielle Energie* des Systems bei gegebener Auslenkung v. Hierbei stellt $\frac{1}{2}(v', v')$ die *innere elastische Energie* und (f, v) die *aufgebrachte Energie* dar. Das *Minimierungsproblem* (M) entspricht daher dem physikalischen *Prinzip der minimalen potentiellen Energie*; das *Minimierungsproblem* (V) wird in der Physik als *Prinzip der virtuellen Arbeit* bezeichnet.

Behauptung 5.3 *Eine Lösung von (D) löst auch (V).*

Beweis: Durch Multiplikation der Differentialgleichung in (D) mit einer Testfunktion aus V und Integration erhält man

$$-(u'', v) = (f, v)\,, \qquad v \in V\ .$$

Partielle Integration und Einsetzen der Randbedingungen liefert

$$-(u'', v) = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + (u', v') = (u', v')\,,$$

woraus die Gleichung in (V) folgt. □

Behauptung 5.4 *Eine Lösung von (M) ist auch Lösung von (V) und umgekehrt.*

Beweis: (i) Mit einer Lösung u von (V) sei $w := v - u$ für beliebiges $v \in V$. Dann ist auch $w \in V$ und $v = u + w$, und man erhält

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u+w) = \frac{1}{2}(u'+w', u'+w') - (f, u+w) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(u',u') - (f,u)}_{=F(u)} + \underbrace{(u',w') - (f,w)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{(w',w')}_{\geq 0} \geq F(u) \ ; \end{aligned}$$

damit ist u auch Lösung von (M).

(ii) Für eine Lösung u von (M), ein beliebiges $v \in V$ und eine reelle Zahl ε hat man

$$F(u) \leq F(u + \varepsilon v) \ ,$$

da auch $u + \varepsilon v \in V$. Definiert man

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &:= F(u+\varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2}(u',u') + \varepsilon(u',v') + \frac{\varepsilon^2}{2}(v',v') - (f,u) - \varepsilon(f,v) \ , \end{aligned}$$

dann ist $g(.)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(\varepsilon) = (u',v') + \varepsilon(v',v') - (f,v)$$

und hat ein Minimum bei $\varepsilon = 0$. Notwendigerweise muß daher $g'(0) = 0$ sein, was auf die Gleichung

$$(u',v') - (f,v) = 0$$

führt. □

Behauptung 5.5 *Eine Lösung von (V) ist eindeutig bestimmt.*

Beweis: Für zwei Lösungen u_1, u_2 von (V) hat man

$$(u_1', v') = (f,v) \qquad \text{und} \qquad (u_2', v') = (f,v) \qquad \forall v \in V \ .$$

Durch Subtraktion und die Wahl $v := u_1 - u_2 \in V$ folgt

$$\int_0^1 (u_1' - u_2')^2 \, dx = 0 \ .$$

Damit stimmen u_1' und u_2' fast überall in $[0,1]$ überein. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für die stückweise differenzierbare Funktion $v = u_1 - u_2$, daß

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(s)\,ds\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für Integrale folgt daraus

$$|v(x) - v(0)| \le \left(\int_0^1 |v'(s)|^2\,ds\right)^{1/2}, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Wie oben gezeigt, verschwindet die rechte Seite dieser Ungleichung; wegen der Randbedingungen ist $v(0) = 0$, was $v(x) = 0$, $x \in [0,1]$, beweist. □

Die drei letzten Behauptungen lassen sich symbolisch wie folgt darstellen,

$$(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)\,.$$

Wir zeigen nun abschließend, daß die Lösungen von (V) unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen auch klassische Lösungen des Randwertproblems liefern.

Behauptung 5.6 *Eine Lösung u von (V) ist auch Lösung des Randwertproblems (D), falls u'' existiert und stetig ist, und falls f stetig ist.*

Beweis: Für $u \in V$ gelte

$$\int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0 \qquad \forall v \in V\,.$$

Durch partielle Integration und die in der Definition von V integrierten Randbedingungen $v(0) = v(1) = 0$ folgt

$$-\int_0^1 (u'' + f)v\,dx = 0 \qquad \forall v \in V\,.$$

Man überlegt sich leicht mit Hilfe eines indirekten Beweises, daß wegen der Stetigkeit von $u'' + f$ dann

$$(u'' + f)(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

gelten muß. Damit erfüllt u die Differentialgleichung in (D); die homogenen Randbedingungen sind erfüllt, da $u \in V$ angenommen wurde. □

5.2 Die einfachste Finite Elemente Methode für das Modellproblem

Zur Approximation des Modellproblems (D) aus Abschnitt 5.1 legen wir den endlich–dimensionalen Teilraum V_h von V aller stetigen, stückweise linearen Funktionen zugrunde. Dazu bezeichne

$$\Delta : 0 = x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

eine *Unterteilung* von $[0,1]$ in Teilintervalle $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ der Länge $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$; weiter sei $h = \max_{1 \le j \le n} h_j$. Der Parameter h gibt also an, wie fein das Intervall unterteilt ist. Wie angekündigt, sei

$$V_h := \{v \in C[0,1] |\, v|I_j = \text{ linear}, \quad v(0) = v(1) = 0\} \, .$$

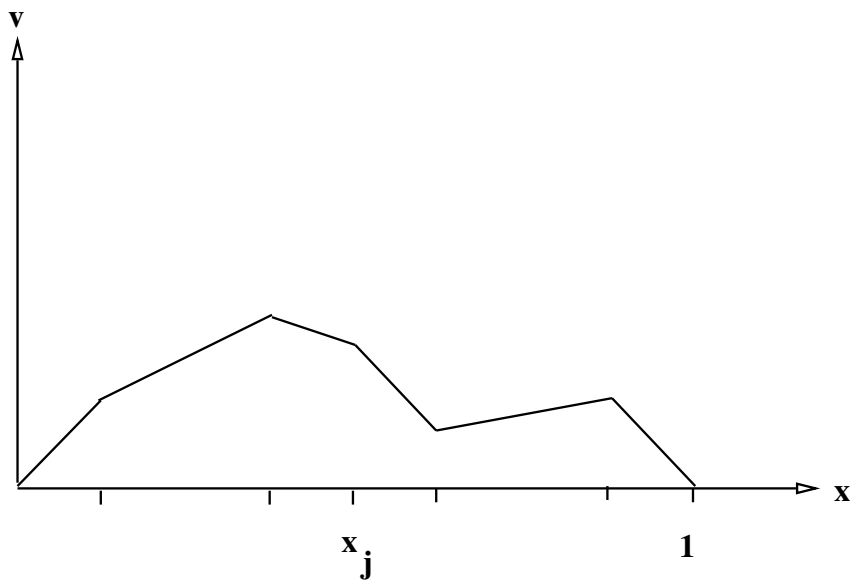


Abbildung 5.2: Beispiel einer Funktion $v \in V_h$

Man erhält so also einen Teilraum $V_h \subset V$ der Dimension $n-1$; Funktionen aus V_h sind eindeutig bestimmt durch deren Werte $\eta_j = v(x_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$, an den *Gitterpunkten* x_j. Basisfunktionen in V_h erhält man durch die sogenannten „Dachfunktionen“ (engl. ‘roof functions’), die durch die Eigenschaften

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \, , \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

charakterisiert sind. Diese ergeben sich als

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x \le x_{i-1} \ , \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} & , \quad x_{i-1} \le x \le x_i \ , \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & , \quad x_i \le x \le x_{i+1} \ , \\ 0 & , \quad x_{i+1} \le x \le 1 \ , \qquad i = 1, \ldots, n-1 \ . \end{cases}$$

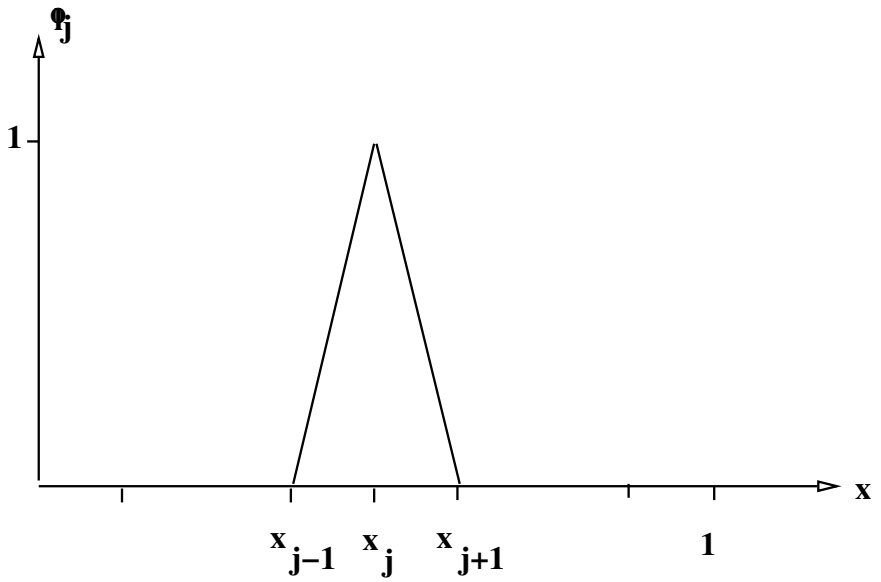


Abbildung 5.3: Die Basisfunktionen φ_j

Jede Funktion $v \in V_h$ läßt sich offenbar durch

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \varphi_i(x) \ , \qquad x \in [0,1] \ ,$$

darstellen mit $\eta_i = v(x_i)$.

Die *Methode der Finiten Elemente* für das Randwertproblem (D) und den ausgewählten endlichdimensionalen Raum V_h besteht nun darin, die folgende Aufgabe zu lösen:

$$\textit{Gesucht} \quad u_h \in V_h \quad \textit{mit} \quad F(u_h) \ \le \ F(v) \ \ \forall v \in V_h \ . \tag{M_h}$$

Wie in Abschnitt 5.1, Behauptung 5.4, macht man sich klar, daß diese Aufgabenstellung äquivalent dazu ist, das folgende *endlichdimensionale Variationsproblem* zu lösen:

$$\textit{Gesucht} \quad u_h \in V_h \quad \textit{mit} \quad (u_h', v') \;=\; (f, v) \quad \forall v \in V_h \; . \tag{V_h}$$

Das Problem (V_h) heißt üblicherweise auch *Galerkin Methode* ; das Minimierungsproblem wird auch *Ritz Methode* genannt. Setzt man

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x) \; , \qquad \xi_i = u_h(x_i) \; , \tag{5.1}$$

und in (V_h) nacheinander $v = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, dann ist die Galerkin Methode (V_h) äquivalent zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i (\varphi_i', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \; , \qquad j = 1, \ldots, n-1 \; , \tag{5.2}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten ξ_i in der Darstellung (5.1) der *Galerkin Approximation* u_h. Die zugehörige Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Koeffizienten $a_{ij} = (\varphi_i', \varphi_j')$ bezeichnet man auch als *(Gesamt-)Steifigkeitsmatrix*; der Vektor der rechten Seiten $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})^\top$, mit $b_j = (f, \varphi_j)$, heißt auch *Lastvektor*. Diese Bezeichnungen stammen aus der ursprünglichen Entwicklung und Anwendung der FEM in der Strukturmechanik.

Im vorliegenden Beispiel der Dachfunktionen können die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix A leicht berechnet werden. Zunächst beobachtet man, daß $(\varphi_i', \varphi_j') = 0$ ist, falls $|i-j| > 1$. Dies zeichnet eine *lokale Basis* aus, bei der im vorliegenden eindimensionalen Fall nur benachbarte Basisfunktionen einen gemeinsamen *Träger* [1] haben. Dadurch wird A tridiagonal, und man rechnet aus, daß

$$\begin{aligned}
(\varphi_j', \varphi_j') &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\, dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2}\, dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \; , \; j = 1, \ldots, n-1 \; , \\
(\varphi_j', \varphi_{j-1}') &= (\varphi_{j-1}', \varphi_j') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\, dx = -\frac{1}{h_j} \; , \qquad j = 2, \ldots, n-1 \, , \\
(\varphi_j', \varphi_{j+1}') &= (\varphi_{j+1}', \varphi_j') = -\frac{1}{h_{j+1}}, \quad j = 1, \ldots, n-2.
\end{aligned}$$

Offenbar ist A symmetrisch und auch positiv definit, denn für einen Vektor $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$ hat man mit $v = \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j \varphi_j(x)$, daß

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \eta_i (\varphi_i', \varphi_j') \eta_j = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \varphi_i', \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j \varphi_j' \right) = (v', v') \geq 0 \; .$$

[1] Bezeichnung und Definition: $\operatorname{supp} \varphi := \{x | \varphi(x) \neq 0\}$

In der letzten Ungleichung gilt Gleichheit nur, wenn $v' \equiv 0$ ist, was in Verbindung mit $v(0) = 0$ nur für $v \equiv 0$ — oder $\eta_j = 0\,,\ j = 1, \ldots, n-1$ — richtig ist.

Für eine positiv definite Matrix ist bekanntlich das zugehörige Gleichungssystem für jede rechte Seite eindeutig lösbar, und man kann hier das Gaußsche Eliminationsverfahren für tridiagonale Matrizen — ohne Zeilenvertauschung — als ein direktes Verfahren zur Berechnung der Lösung einsetzen (vgl. [SH82, §6]).

Im Spezialfall einer gleichförmigen Unterteilung, i. e. $h_j = h = \frac{1}{n}$, hat das Gleichungssystem (5.2) die Form

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}\,(\xi_{j-1} - 2\xi_j + \xi_{j+1}) &= \frac{1}{h}(f, \varphi_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, n-1\,, \\ \xi_0 &= \xi_n = 0\,. \end{aligned}$$

Dies ist auf der linken Seite offenbar genau die Approximation der zweiten Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung . Im Gegensatz zu einem entsprechenden Differenzenverfahren hat man bei der Galerkin Methode rechts eine Art Mittelung von f über das Interval (x_{j-1}, x_{j+1}) zu nehmen; eine Approximation z. B. durch die Simpson–Formel in I_j und I_{j+1} hat die Gestalt

$$\frac{1}{h}(f, \varphi_j) \approx \frac{1}{3}(f(x_{j-1/2}) + f(x_j) + f(x_{j+1/2}))\,,$$

wobei $x_{j\pm1/2} := \frac{1}{2}(x_j + x_{j\pm1})$.

5.3 Erste Fehlerabschätzungen

Wir betrachten zunächst wieder das Modellproblem (D) und die zugehörige Galerkin–Approximation (V_h). Fehlerabschätzungen für die Differenz der Lösung u von (D) bzw. u_h von (V_h) beruhen auf der folgenden *Fehlergleichung*

$$((u - u_h)', v') = 0 \qquad \forall v \in V_h\,, \tag{5.3}$$

die durch Subtraktion der Gleichung in (V) und (V_h) unter Beachtung von $V_h \subset V$ folgt.

Für die folgenden Abschätzungen benötigen wir die L^2–Norm

$$\|w\| = (\|w\|_0 =)(w, w)^{1/2} = \left(\int_0^1 w^2\,dx\right)^{1/2}\,,$$

für die bekanntlich die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|(v, w)| \le \|v\|\,\|w\| \tag{5.4}$$

gilt.

Der folgende Satz zeigt, daß u_h in gewissem Sinne die beste Approximation von u in Teilraum V_h darstellt; die zugrundeliegende Norm ist dabei

$$|v|_1 = \|v'\| , \qquad v \in V . \tag{5.5}$$

Wir werden später sehen, daß die so definierte Halbnorm in V — wegen der Nullrandbedingungen — sogar eine Norm darstellt.

Satz 5.7 *Für die Lösungen u von (V) bzw. u_h von (V_h) und jedes $v \in V_h$ gilt die Ungleichung*

$$|u - u_h|_1 \leq |u - v|_1 . \tag{5.6}$$

Beweis: Für beliebiges $v \in V_h$ sei $w = u_h - v$. Damit ist $w \in V_h$ und mit w anstelle von v in der Fehlergleichung (5.3) erhält man

$$\begin{aligned} \|(u-u_h)'\|^2 &= ((u-u_h)', (u-u_h)') + ((u-u_h)', w') \\ &= ((u-u_h)', (u-u_h+w)') = ((u-u_h)', (u-v)') \\ &\leq \|(u-u_h)'\| \, \|(u-v)'\| . \end{aligned}$$

Division durch $\|(u-u_h)'\|$ liefert die behauptete Abschätzung. □

Als Konsequenz des letzten Satzes kann man eine Abschätzung des Fehlers $|u-u_h|_1$ dadurch erhalten, daß man z. B. den Interpolationsfehler $|u - \tilde{u}_h|_1$ abschätzt, wobei $\tilde{u}_h$ die stetige, stückweise lineare Interpolierende von u bezeichnet,

$$\tilde{u}_h \in V_h : \tilde{u}_h(x_j) = u(x_j) , \qquad j = 0, \ldots, n .$$

Nach bekannten Ergebnissen eines Grundkurses in Numerik erhält man durch Abschätzung des Interpolationsfehlers auf jedem Teilintervall

$$|u'(x) - \tilde{u}_h'(x)| \leq h \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)| , \tag{5.7}$$

$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{1}{2} h^2 \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)| . \tag{5.8}$$

Für die L^2–Norm der Ableitung folgt aus (5.6) in Verbindung mit (5.7) durch Integration

$$\|(u-u_h)'\| \leq h \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)| . \tag{5.9}$$

Für den maximalen Fehler der Galerkin–Approximation kann man mit Hilfe von (5.7) und der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung zeigen, daß

$$|(u-u_h)(x)| \le h \max_{0\le y\le 1} |u''(y)| \,, \qquad x \in [0,1] \,, \tag{5.10}$$

denn

$$\begin{aligned} |u(x)-u_h(x)| &\le \int_0^1 |(u-u_h)'(y)|\, dy \\ &\le \left(\int_0^1 |(u-u_h)'(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^1 1 dy\right)^{1/2} \\ &\le h \max_{0\le y\le 1} |u''(y)| \,, \qquad x \in [0,1] \,. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu (5.9) ist die letzte Abschätzung nicht optimal in dem Sinne, daß der kleinste Abstand von u zu einer Funktion in V_h bzgl. der Maximumnorm ja wegen (5.8) mindestens $O(h^2)$ — und nicht wie $O(h)$ in (5.10) — gegen Null strebt für $h \to 0$.

Die FEM mit einer zugehörigen ersten Fehlerabschätzung wird jetzt noch für eine allgemeinere Klasse von 2–Punkt–Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hergeleitet. Mit stetigen Funktionen p, q auf $[a,b]$, die den Voraussetzungen

$$0 < p_0 \le p(x) \,, \quad 0 \le q(x) \,, \quad a \le x \le b \,, \tag{5.11}$$

genügen, betrachten wir die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= f \quad in \quad [a,b] \\ u(a) = u(b) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{D}$$

Das zugehörige Variationsproblem hat dann die Form

$$u \in V : (pu', v') + (qu, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V \,, \tag{V}$$

mit demselben Raum V wie oben. Wir bezeichnen mit

$$a(v,w) := (pv', w') + (qv, w) \tag{5.12}$$

die zugehörige *Bilinearform* und wählen als zugrundeliegende Norm jetzt

$$\|v\|_1 = (\|v\|^2 + \|v'\|^2)^{1/2} \,, \qquad v \in V \,. \tag{5.13}$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung und der Hölderungleichung für Summen erhält man die folgende Beschränktheitsbedingung für die Bilinearform $a(.,.)$,

$$|a(v,w)| \le \alpha_1 \|v\|_1 \, \|w\|_1 \ , \qquad v,w \in V \ , \tag{5.14}$$

wobei $\alpha_1 = \max(p_1, q_1)$, $p_1 = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$, $q_1 = \max_{a \le x \le b} |q(x)|$. Weiter sieht man leicht, daß

$$\|v\| \le (b-a)|v|_1 \tag{5.15}$$

für alle $v \in C^1(a,b)$ mit $v(a) = 0$. Damit gilt (5.15) auch für alle $v \in V$. Aus (5.15) folgt unmittelbar

$$\|v\|_1 \le (1 + (b-a)^2)^{1/2} |v|_1 \ , \qquad v \in V \ , \tag{5.16}$$

was beweist, daß $|v|_1$ und $\|v\|_1$ äquivalente Normen auf V sind. Schließlich beweist man über die Voraussetzungen in (5.11) die folgende Abschätzung nach unten für die Bilinearform $a(.,.)$,

$$a(v,v) \ge \alpha_0 \|v\|_1^2 \ , \qquad v \in V \ , \tag{5.17}$$

mit $\alpha_0 = p_0 (1 + (b-a)^2)^{-1}$, denn wegen (5.11) und (5.16) gilt

$$\begin{aligned} a(v,v) &\ge p_0 |v|_1^2 + \underbrace{q_{\min}}_{\ge 0} \|v\|^2 \ge p_0 |v|_1^2 \\ &\ge p_0 (1 + (b-a)^2)^{-1} \|v\|_1^2 \ , \qquad v \in V \ . \end{aligned}$$

Die in (5.12) definierte Bilinearform ist symmetrisch, Bedingung (5.14) bedeutet die Beschränktheit von $a(.,.)$, und (5.17) liefert die Elliptizität (d. h. $|a(v,v)| \ge \alpha_0 \|v\|_1^2$) sowie die positive Definitheit (d. h. a symm. und $a(v,v) > 0$, $0 \ne v \in V$).

Als Konsequenz von (5.17) sei noch bemerkt, daß mit $a(v,w)$ auch ein Skalarprodukt erklärt wird, und die zugehörige Norm äquivalent zu $\|.\|_1$ — und damit auch zu $|.|_1$ — ist,

$$\alpha_0^{1/2} \|v\|_1 \le a(v,v)^{1/2} \le \alpha_1^{1/2} \|v\|_1 \ , \qquad v \in V \ .$$

Die Norm $\|v\|_a = a(v,v)^{1/2}$ heißt auch die zu (D) bzw. (V) gehörige *Energienorm*.

Die *Galerkin Methode* besteht nun darin, zu einem gegebenen endlichdimensionalen Teilraum $V_h \subset V$ eine Lösung $u_h \in V_h$ zu suchen von

$$a(u_h, v) = (f, v) \qquad \forall v \in V_h \ . \tag{5.18}$$

Diese Gleichung nennt man wie oben die zugehörige *Variationsgleichung*, die äquivalent dazu ist, ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten von $u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j$ zu lösen, wobei die zugehörige Matrix $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, wegen der obigen Voraussetzungen — insbesondere wegen (5.17) — wieder symmetrisch und positiv definit ist.

Der Fehler erfüllt nun die *Fehlergleichung*

$$a(u - u_h, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h \ , \tag{5.19}$$

woraus man durch einen analogen Schluß wie oben unter Benutzung von (5.14) und (5.17) zeigen kann, daß

$$\|u - u_h\|_1 \leq \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^{1/2} \|u - v\|_1 \qquad \forall v \in V_h \ . \tag{5.20}$$

Man hat nämlich

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &\overset{(5.19)}{=} a(u - u_h, u) \overset{(5.19)}{=} a(u - u_h, u - v) \\ &\leq a(u - u_h, u - u_h)^{1/2} a(u - v, u - v)^{1/2} \ , \quad v \in V_h \ , \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung für das durch $a(.,.)$ definierte Skalarprodukt darstellt. Division durch $a(u - u_h, u - u_h)^{1/2}$ und Anwendung von (5.14), (5.17) liefert

$$\begin{aligned} \alpha_0^{1/2} \|u - u_h\|_1 &\leq a(u - u_h, u - u_h)^{1/2} \\ &\leq a(u - v, u - v)^{1/2} \leq \alpha_1^{1/2} \|u - v\|_1 \qquad \forall v \in V_h \ . \end{aligned}$$

Man nennt die Abschätzung (5.20) „quasi–optimal“, da die Galerkin–Approximation bis auf einen Faktor gleich dem minimalen Abstand von u zu dem Teilraum V_h ist, wobei als Norm $\|.\|_1$ zugrundeliegt. Es sei bemerkt, daß außerdem eine „optimale“Abschätzung bzgl. der durch $a(.,.)$ induzierten Norm vorliegt, da dann der Faktor gerade Eins ist.

Einsetzen von $v = \tilde{u}_h$ (= lineare Interpolierende von u) in der quasi–optimalen Fehlerabschätzung (5.20) ermöglicht auch eine Abschätzung bzgl. $\|.\|_1$ mit Hilfe von h–Potenzen. Benutzt man (5.9) und integriert (5.8), dann folgt aus (5.20), daß

$$\|u - u_h\|_1 = \mathrm{O}(h) \ .$$

Bzgl. der Maximumnorm erhält man ebenfalls die Konvergenz mit $\mathrm{O}(h)$, da hier (s. Beweis im Anschluß an (5.10)) $|v(x)| \leq |v|_1 \ , \ v \in V$.

Am Ende dieses Abschnitts rechnen wir noch aus, wie die Koeffizienten des Gleichungssystems der Ritz–Galerkin–Methode (5.18) aussehen, wenn man wie in Abschnitt 5.2 Näherungslösungen im Raum der stetigen, stückweise linearen Funktionen sucht. Mit den Dachfunktionen $\varphi_j \ , \ j = 1, \ldots, n-1$, über einer Unterteilung

$$\Delta : 0 = x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

von $[0,1]$ sucht man wieder Näherungslösungen $u_h = \sum_{i=1}^{n-1} u_h(x_i)\varphi_i$ und erhält durch (5.18) ein Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Big[(p\varphi_k', \varphi_j') + (q\varphi_k, \varphi_j)\Big] u_h(x_k) = (f, \varphi_j) \;, \qquad j = 1, \ldots, n-1 \;. \tag{5.21}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten muß man die Skalarprodukte berechnen,

$$(p\varphi_k', \varphi_j') = \begin{cases} -p_{j,j-1} \\ p_{j,j} \\ -p_{j,j+1} \\ 0 \end{cases} \;, \quad (q\varphi_k, \varphi_j) = \begin{cases} q_{j,j-1} \;, & k = j-1 \;, \\ q_{j,j} \;, & k = j \;, \\ q_{j,j+1} \;, & k = j+1 \;, \\ 0 & |k-j| > 1 \;, \end{cases}$$

mit

$$p_{j,j-1} = \frac{1}{h_j^2} \int_{I_j} p \, dx \;, \qquad p_{j,j+1} = \frac{1}{h_{j+1}^2} \int_{I_{j+1}} p \, dx \;, \quad p_{j,j} = p_{j,j-1} + p_{j,j+1} \;,$$
$$q_{j,j-1} = \int_{I_j} q\varphi_j\varphi_{j-1} \, dx \;, \quad q_{j,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} q\varphi_j^2 \, dx \;, \qquad q_{j,j+1} = \int_{I_{j+1}} q\varphi_j\varphi_{j+1} \, dx \;.$$

Setzt man zur Abkürzung $v_j = u_h(x_j)$, dann hat (5.21) die Form eines Differenzenverfahrens mit einer tridiagonalen Matrix

$$\begin{aligned} (q_{j,j-1} - p_{j,j-1})v_{j-1} + (q_{j,j} + p_{j,j})v_j + (q_{j,j+1} - p_{j,j+1})v_{j+1} = (f, \varphi_j) \;, \\ j = 1, \ldots, n-1 \;. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Benutzt man die Simpson–Formel zur Approximation der obigen Skalarprodukte (jeweils in $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ und $I_{j+1} = (x_j, x_{j+1})$), dann erhält man (Abk.: $p_\nu = p(x_\nu)$, $q_\nu = q(x_\nu)$, $x_{\mu\pm1/2} = \frac{1}{2}(x_\mu + x_{\mu\pm1})$)

$$\begin{aligned} p_{j,j-1} &\approx \frac{1}{6h_j}(p_{j-1} + 4p_{j-1/2} + p_j) \;, \quad p_{j,j+1} \approx \frac{1}{6h_{j+1}}(p_j + 4p_{j+1/2} + p_{j+1}) \\ p_{j,j} &\approx \frac{1}{6h_j}(p_{j-1} + 4p_{j-1/2}) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}\right) p_j + \frac{1}{6h_{j+1}}(4p_{j+1/2} + p_{j+1}) \\ q_{j,j-1} &\approx \frac{h_j}{6} q_{j-1/2} \;, \quad q_{j,j+1} \approx \frac{h_{j+1}}{6} q_{j+1/2} \;, \\ q_{j,j} &\approx \frac{1}{6}(h_j q_{j-1/2} + (h_j + h_{j+1})q_j + h_{j+1} q_{j+1/2}) \;. \end{aligned}$$

Im Fall, daß p und q konstant sind, erhält man als Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p\left(\frac{v_j - v_{j-1}}{h_j} - \frac{v_{j+1} - v_j}{h_{j+1}}\right) &+ \frac{q}{6}(h_j v_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})v_j + h_{j+1} v_{j+1}) \\ &= (f, \varphi_j)_0 \;, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \;. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Benutzt man auch die Simpson–Formel zur Approximation der rechten Seite von (5.22) bzw. (5.23), dann ergibt sich

$$(f,\varphi_j)_0 \;=\; \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f\varphi_j\,dx = \frac{1}{6}\Big(2h_j f(x_{j-1/2}) + (h_j+h_{j+1})f(x_j) + 2h_{j+1}f(x_{j+1/2})\Big) + \mathrm{O}\left(h_j^5 + h_{j+1}^5\right)\ .$$

Ist schließlich das Gitter äquidistant und sind die Funktionen p, q konstant, dann erhält (5.23) die Form — nach Multiplikation mit h —

$$-\left(p-\frac{h^2}{6}q\right)(v_{j-1}+v_{j+1}) + 2\left(p+\frac{h^2}{3}q\right)v_j \;=\; \frac{h^2}{3}(f_{j-1/2}+f_j+f_{j+1/2})\ , \qquad j=1,\ldots,n-1\ . \tag{5.24}$$

Abschließend sei bemerkt, daß man auf (5.24) — und natürlich auch auf (5.22), (5.23) — das Maximumprinzip aus Abschnitt 4.3 anwenden kann. Nach Multiplikation mit -1 erfüllen die Koeffizienten in (5.24) die Eigenschaft „positiver Typ“, falls noch h hinreichend klein ist (genauer, falls $qh^2 < 6p$). Dann ist nämlich

$$a_{-1,h} = a_{1,h} = p - \frac{h^2}{6}q > 0 \quad \text{und}$$
$$a_{-1,h} + a_{0,h} + a_{1,h} = 2p - \frac{h^2}{3}q - 2\left(p+\frac{h^2}{3}q\right) = -h^2 q \le 0\ .$$

Damit liegt auch für (5.24) eine Stabilitätsabschätzung der Form (4.21) vor. Für Konvergenzaussagen ist allerdings der oben skizzierte Weg über die quasi–optimale Fehlerabschätzung für die betrachteten Galerkin–Verfahren der angemessene.

5.4 Galerkin–Verfahren für nichtlineare Probleme

Wir betrachten wieder nichtlineare Randwertprobleme der Form, die schon Abschnitt 4.5 untersucht worden sind und verwenden zu deren Approximation jetzt die Galerkin–Methode. Das Randwertproblem habe die Form

$$\begin{aligned} &-(pu')' + qu = f(x,u(x))\ , \qquad x \in I = [0,1]\ , \\ &u(0) = u(1) = 0\ . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Man beachte, daß (5.25) erst nach Multiplikation mit (-1) die Form von (4.31) erhält. Der lineare Anteil in (5.25) liegt in selbstadjungierter Form vor und erlaubt daher eine analoge Vorgehensweise wie in Abschnitt 5.1 und 5.2. Wir setzen voraus, daß

$$p \in C^2(0,1)\,,\ q \in C[0,1]\,, \quad 0 < p_0 \le p(x)\,, \quad 0 \le q(x)\,, \quad x \in I\,,$$

$$f, f_y \in C([0,1] \times \mathbb{R})\,, \quad \text{und}$$

$$f_y(x,y) \le \lambda < \Lambda := \inf_{0 \neq v \in V} \frac{a(v,v)}{\|v\|^2}\,, \qquad x \in [0,1]\,,\ y \in \mathbb{R}\,,$$

wobei $a(.,.)$ wie in (5.12) definiert ist und $\|.\|$ die L^2–Norm bezeichnet.

Das zu (5.25) gehörige nichtlineare *Variationsproblem* erhält man wie in Abschnitt 5.1

$$(pu', v') + (qu, v) = \int_0^1 f(x, u(x))v(x)\,dx\,, \qquad v \in V\,. \tag{5.26}$$

Man kann zeigen (s. [Rei85], Thm. 2.12), daß eine Lösung von (5.26) striktes Minimum des folgenden Funktionals ist,

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \int_0^1 \int_0^{v(x)} f(x,\eta)\,d\eta\,dx\,;$$

umgekehrt ist ein Minimum von $J(.)$ auch Lösung von (5.26).

Zur Approximation von (5.25) bzw. (5.26) wählen wir z. B. wieder den Raum V_h der Dachfunktionen $[\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]$ über einer Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ von $I = [0,1]$. Wir setzen zur Abkürzung $v_j = u_h(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$ und suchen als Näherung also eine Funktion $u_h \in V_h$, $u_h = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \varphi_j$, die folgendes nichtlineare Gleichungssystem erfüllt,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(\varphi_k, \varphi_j) v_k = \int_0^1 f(x, \sum_{k=1}^{n-1} v_k \varphi_k(x))\varphi_j(x)\,dx\,, \qquad j = 1, \ldots, n-1\,. \tag{5.27}$$

Die zugehörige Jacobi–Matrix wird wesentlich benötigt, um Näherungsmethoden zur Lösung von (5.27) zu konstruieren.

Satz 5.8 *Unter den obigen Voraussetzungen hat die zu (5.27) gehörige Jacobi–Matrix* $B = (b_{jk})$ *für jedes feste* $u_h^0 \in V_h$ *die Form*

$$b_{jk} = a(\varphi_k, \varphi_j) - \int_0^1 f_y(x, u_h^0(x))\varphi_k(x)\varphi_j(x)\,dx\,, \qquad 1 \le j\,,\ k \le n-1\,,$$

und sie ist positiv definit.

Beweis: *s. [Rei85], Theorem 2.18.*

Das *Newton–Verfahren* zur iterativen Lösung von (5.27) erfordert also in jedem Iterationsschritt die Lösung des folgenden (linearen) Gleichungssystems,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k^{(t+1)} \left\{ a(\varphi_k,\varphi_j) - \int_0^1 f_y\left(x, u_h^{(t)}(x)\right)\varphi_k(x)\varphi_j(x)\,dx \right\} \\ = \int_0^1 \left[f\left(x, u_h^{(t)}(x)\right) - \sum_{k=1}^{n-1} v_k^{(t)} f_y\left(x, u_h^{(t)}(x)\right)\varphi_k(x) \right] \varphi_j(x)\,dx \qquad (5.28)\\ j = 1,\ldots,n-1\,, \quad t = 0,1,\ldots\,,\end{aligned}$$

wobei $u_h^{(t)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k^{(t)}\varphi_k(x)$. Wegen der positiven Definitheit der Jacobi–Matrix ist das Gleichungssystem in (5.28) lösbar.

Eine einfachere Methode zur Lösung von (5.27) ist das *Gauß–Seidel–* oder *Einzelschrittverfahren.* Da $a(\varphi_j,\varphi_j) > 0$ (wegen der positiven Definitheit der Bilinearform $a(.,.)$), hat das Einzelschrittverfahren die Form

$$\begin{aligned} v_j^{(t+1)} &= \frac{1}{a(\varphi_j,\varphi_j)}\Big\{ \Phi_j\left(v_1^{(t+1)},\ldots,v_{j-1}^{(t+1)}, v_j^{(t)},\ldots,v_{n-1}^{(t)}\right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{j-1} a(\varphi_j,\varphi_k) v_k^{(t+1)} - \sum_{k=j}^{n-1} a(\varphi_j,\varphi_k) v_k^{(t)} \Big\}\,, \qquad (5.29)\\ &\qquad\qquad j = 1,\ldots,n-1\,,\end{aligned}$$

wobei

$$\Phi_j(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) = \int_0^1 f\left(x, \sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\varphi_k(x)\right)\varphi_j(x)\,dx\,.$$

In (5.28) und (5.29) müssen natürlich noch die Integrale durch Quadraturformeln approximiert werden, wobei im Falle der Dachfunktionen nur Beiträge in Intervall $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ auftreten. In diesem Fall ist in (5.28) in jedem Iterationsschritt ein tridiagonales Gleichungssystem zu lösen.

In [Rei85], 9.3, ist weiter ausgeführt, daß unter den oben genannten Voraussetzungen die Galerkin–Approximationen gegen die Lösung des gegebenen nichtlinearen Variationsproblems konvergieren; es gilt sogar wieder eine (lokal) quasi–optimale Fehlerabschätzung bzgl. der Norm $\|.\|_1$.

Kapitel 6

Adaptive Gitter für Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wie schon in Abschnitt 4.1 deutlich wurde, ist für gewisse Problemklassen eine äquidistante Unterteilung des Grundgebietes nicht angemessen, und man möchte ein geeignetes nichtäquidistantes Gitter verwenden, das Problemzonen — wie Grenzschichten — gut auflöst. Darüber hinaus ist es wünschenswert, Verfahren zu verwenden, die die Gitterverfeinerung selbständig, dem jeweiligen Problem angepaßt, vornehmen. Solche Verfahren nennt man „adaptiv“. In diesem Kapitel werden verschiedene Ideen vorgestellt, wie man solche adaptiven Verfahren für Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen konstruiert. (Lit.: [TWM85], [GR92], ...)

6.1 Differenzenapproximationen auf nichtäquidistanten Gittern

Wir betrachten wieder das Modellbeispiel einer Randwertaufgabe für gewöhnliche Differentialgleichungen,

$$-u''(x) = f(x)\,, \qquad u(0) = u(1) = 0\,. \tag{6.1}$$

Für eine beliebige Unterteilung von $I = (0,1)$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

wollen wir zunächst den Abschneidefehler der einfachsten Differenzenapproximation untersuchen. Dazu sei $h_i = x_i - x_{i-1}\,,\ i = 1,\ldots,n$; für $u_i = u(x_i)\,,\ i = 0,\ldots,n$, erhält man

durch Taylor–Entwicklung

$$\begin{aligned} u_i - u_{i+1} &= -h_{i+1}u_i' - \frac{1}{2}h_{i+1}^2 u_i'' - \frac{1}{6}h_{i+1}^3 u_i''' - \cdots \\ u_i - u_{i-1} &= h_i u_i' - \frac{1}{2}h_i^2 u_i'' + \frac{1}{6}h_i^3 u_i''' \mp \cdots , \end{aligned}$$

wobei $u_i' = u'(x_i)$, $u_i'' = u''(x_i)$ usw. Eine geeignete Diskretisierung für (6.1) erhält man daher durch ($v_k = u_h(x_k)$)

$$\begin{aligned} &\frac{2}{h_k + h_{k+1}}\left(\frac{v_k - v_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{v_k - v_{k-1}}{h_k}\right) = f_k , \qquad k = 1, \ldots, n-1 , \\ &v_0 = v_n = 0 . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Bezeichnen wir wieder $Lu = u''$ und die linke Seite von (6.2) mit $(L_h u_h)(x_k)$, dann ergibt sich für den Abschneidefehler $T_h(x_k) = (L_h u^h - f)(x_k)$, $u^h = r_h u$,

$$(L_h u^h)(x_n) = -u_k'' + \frac{1}{3}(h_{k+1} - h_k)u_k''' + \mathrm{O}(h^2) ,$$

falls die Lösung von (6.1) $u \in C^4[0,1]$ erfüllt. Wegen $-u_k'' = f_k$ sieht man sofort, daß $T_h(x_k) = \mathrm{O}(h_{\max})$. Für ein äquidistantes Gitter ist $h_{k+1} = h_k$, so daß sich in diesem Fall das bekannte Verhalten $\mathrm{O}(h^2)$ ergibt.

So wie für das Modellproblem (6.1), dessen Lösung man mit der zugehörigen Greenschen Funktion explizit angeben kann, so kennt man auch für die Differenzenapproximation (6.2) auf nicht notwendig äquidistantem Gitter eine explizite Darstellung der Lösung

$$v_k = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1} h_{\ell+1}[G(x_k, t_\ell)f_\ell - G(x_k, t_{\ell+1})f_{\ell+1}] , \tag{6.3}$$

mit

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-x)t & , \quad t \le x , \\ x(1-t) & , \quad x \le t , \end{cases}$$

(vgl. Übg. Nr. 15). Für den Fehler $u(x_k) - v_k$ selbst läßt sich mit Hilfe von (6.3) ein $\mathrm{O}(h^2)$–Verhalten nachweisen (vgl. [GR92], 1.3.3).

6.2 Interpolationsfehlerindikatoren

Wir betrachten wieder das einfache Modellbeispiel (6.1),

$$-u'' = f \quad \text{in} \quad I = (0,1)\,, \qquad u(0) = u(1) = 0\,.$$

Mit Hilfe der einfachsten Form der Methode der Finiten Elemente — bei stetigen, stückweise linearen Ansatzfunktionen — erhält man eine Differenzenapproximation der Form (vgl. Abschnitt 5.1 und 5.2)

$$\frac{v_k - v_{k-1}}{h_k} - \frac{v_{k+1} - v_k}{h_{k+1}} = \Phi_h(x_k)\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1\,, \tag{6.4}$$

wobei noch $v_0 = v_n = 0$ gesetzt wird, und die rechte Seite

$$\Phi_h(x_k) = (f, \varphi_k) \approx \frac{1}{6}\Big(2h_k f(x_{k-1/2}) + (h_k + h_{k+1}) f(x_k) + 2h_{k+1} f(x_{k+1/2})\Big)$$

durch die Simpson–Formel gewonnen wurde. Man erhält also dieselbe linke Seite wie in (6.2) mit einer modifizierten rechten Seite,

$$\frac{2}{h_k + h_{k+1}} \left(\frac{v_k - v_{k-1}}{h_k} - \frac{v_{k+1} - v_k}{h_{k+1}} \right) = \frac{2}{h_k + h_{k+1}} \Phi_h(x_k)\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1\,.$$

Man weiß nun, daß die stetige, stückweise lineare Funktion u_h mit $u_h(x_k) = v_k$, $k = 0, \ldots, n$, der optimalen Fehlerabschätzung genügt,

$$\|(u - u_h)'\|_0 = \inf_{v_h \in V_h} \|(u - v_h)'\|_0\,, \tag{6.5}$$

wobei $\|.\|_0$ die L_2–Norm und

$$V_h = \Big\{ v \in C[0,1] \;\Big|\; v|[x_k, x_{k-1}] = \text{ linear}, \quad v(0) = v(1) = 0 \Big\}$$

bezeichnet. Die rechte Seite von (6.5) kann man offenbar dadurch abschätzen, daß man für v_h die lineare Interpolierende $\tilde{u}_h \in V_h$ von u einsetzt $(\tilde{u}_h(x_k) = u(x_k)\,,\ k = 0, \ldots, n)$,

$$\inf_{v_h \in V_h} \|(u - v_h)'\|_0 \le \|(u - \tilde{u}_h)'\|_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \|(u - \tilde{u}_h)'\|^2_{0,I_k} \right)^{1/2}\,, \tag{6.6}$$

wobei $I_k = [x_{k-1}, x_k]\,,\ k = 1, \ldots, n$. Da auch $u - \tilde{u}_h$ an den Gitterpunkten verschwindet, kann man Interpolationsabschätzungen in jedem Teilintervall anwenden (vgl. (5.7), (5.8))

$$\begin{aligned}
|u(x) - \tilde{u}_h(x)| &\le \frac{1}{2} h_k^2 \max_{s \in I_k} |u''(s)|\,, \qquad x \in I_k\,, \\
|(u - \tilde{u}_h)'(x)| &\le h_k \max_{s \in I_k} |u''(s)|\,, \qquad x \in I_k\,, \\
\|(u - \tilde{u}_h)'\|^2_{0,I_k} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} |(u - \tilde{u}_h)'(s)|^2\, ds \;\le\; h_k^3 \max_{s \in I_k} |u''(s)|\,, \\
\|(u - \tilde{u}_h)'\|^2_{0,I_k} &\le h_k^2 \|u''\|^2_{0,I_k}\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,.
\end{aligned}$$

Für dieses einfache Beispiel weiß man, daß die Lösung $-u'' = f$ erfüllt, was man in die obigen Interpolationsabschätzungen einsetzen kann. Man erhält bei Verwendung der letzten Interpolationsabschätzung, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \|(u - \tilde{u}_h)'\|_{0,I_k}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} h_k^2 \|f\|_{0,I_k}^2 \ . \tag{6.7}$$

Ein mögliches Ziel einer adaptiven Gitterkonstruktion ist es nun, bei vorgegebener „Toleranz“ $\delta > 0$ die rechte Seite von (6.7) möglichst minimal oder kleiner (oder gleich) als die Toleranz werden zu lassen. Dazu sind geeignete Strategien notwendig. Eine solche Gitterkonstruktion kann „a–priori“, d. h. ohne Kenntnis der berechneten Lösung u_h, erfolgen.

Es sei noch bemerkt, daß die Finite–Elemente–Approximation u_h der Lösung u von (6.1) an den Gitterpunkten x_k sogar mit u übereinstimmt, $u_h(x_k) = u(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$. Dies ist dadurch begründet, daß die Greensche Funktion G für (6.1) selbst eine stückweise lineare Funktion ist und die Variationsprobleme

$$(G(x_i, .), \varphi) = \varphi(x_i) \ , \qquad \varphi \in V_h \ , \ i = 1, \ldots, n-1 \ ,$$

erfüllt sind (vgl. [Rei96], Übg. Nr. 8). Solch ein Verhalten nennt man „Superkonvergenz“.

6.3 Residuen-Schätzer

Eine ähnliche Idee wie oben liegt der von Zienkiewicz–Zhu[1)] zugrunde. Setzt man mit der Finiten–Elemente–Approximation $u_h \in V_h$,

$$(u_h')^* := u_h' + 2\alpha_k \frac{x - x_{k-1/2}}{h_k} \ , \qquad x \in I_k^0 := (x_{k-1}, x_k) \ , \tag{6.8}$$

$x_{k-1/2} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, dann ist $(u_h)^*$ eine „superkonvergente Approximation“ von u_h', falls

$$\alpha_k = \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} (Z_k')^2 \, dx \right\}^{-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} Z_k' r_h \, dx \ , \tag{6.9}$$

wobei $r_h := f - Lu_h$ das *Residuum* (oder den *Defekt*) bezeichnet und $Z_k(x) := 2(x - x_{k-1/2})/h_k$. Mit dieser Wahl von α_k kann man nämlich zeigen, daß

$$\left|(u_h')^*(x) - u_h'(x)\right| \leq C h_k^2 \ , \qquad x \in I_k^0 \ , \ k = 1, \ldots, n \ , \tag{6.10}$$

[1)] s. [ZZ90] in [GR92]

(vgl. [GR92], 4.8.2).

Die Grundidee von Zienkiewicz–Zhu besteht nun darin, in der Fehlerdarstellung (6.5) die exakte Lösung durch eine superkonvergente Approximation zu ersetzen,

$$\begin{aligned}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left((u_h')^* - u_h'\right)^2(x)\,dx &= 4\alpha_k^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{x - x_{k-1/2}}{h_k}\right)^2 dx \\ &= \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} Z_k(x)^2\,dx}{\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} Z_k'(x)^2\,dx\right)^2} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} Z_k'(x) r_h(x)\,dx\right)^2 .\end{aligned} \tag{6.11}$$

Dies kann man weiter durch die Schwarzsche Ungleichung abschätzen,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left((u_h')^* - u_h'\right)^2(x)\,dx \;\le\; \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} Z_k(x)^2\,dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} Z_k'(x)^2\,dx} \int_{x_{k-1}}^{x_k} r_h(x)^2\,dx \;;$$

den Quotienten kann man exakt ausrechnen und erhält $\frac{1}{12}h_k^2$. Insgesamt erhält man für die lokalen Fehleranteile $\|(u - u_h)'\|_{0,I_k}^2$ die „Residuen–Schätzer“

$$\varepsilon_k^2 := \frac{1}{12} h_k^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} r_h^2(x)\,dx\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,. \tag{6.12}$$

Man wird nun versuchen, die Gitterpunkte so zu plazieren, daß $\sum_k h_k^2 \eta_k$, möglichst klein wird, wobei $\eta_k := \frac{1}{12}\int_{x_{k-1}}^{x_k} r_h^2(x)\,dx$. Dies wird dann erreicht, wenn die ε_k alle (ungefähr) gleich groß sind — und evtl. noch kleiner einer vorgegebenen Toleranz bleiben. Zum Erreichen dieser Ziele muß eine geeignete Strategie gewählt werden, wobei hier die Gitterkonstruktion „a–posteriori“, d. h. erst nach Berechnung der Näherungslösung u_h, erfolgen kann.

Weitere a–posteriori Residuen–Schätzer auf der Grundlage der Methode der Finiten Elemente werden von I. Babuska und W. C. Rheinboldt oder auch von R. Verführt vorgeschlagen (vgl. [GR92], 4.8.1). Sie beruhen darauf, daß man lokale Fehleranteile, z. B. lokale L_2– oder H^1–Normen, durch realistische, a–posteriori berechenbare Schranken abschätzt. „Realistisch“ bedeutet hier, daß der Gesamtfehlerschätzer η — im obigen Beispiel, $\eta = \left(\sum \varepsilon_k^2\right)^{1/2}$ — für eine geeignete Norm $\|.\|$ *asymptotisch exakt* ist, d. h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta}{\|u - u_h\|} = 1\,.$$

6.4 Gitterverteilungsfunktionen

Hat man eine *Gewichts-* oder *Indikatorfunktion* $w \in C^2(I)$ und hat das Ziel, Gitterpunkte $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ so anzuordnen, daß

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x)\,dx = \text{const}\,., \qquad i = 1,\ldots,n\,, \tag{6.13}$$

wird, so nennt man ein solches Gitter „asymptotisch gleichverteilt bzgl. w“. In diskreter Form kann man (6.13) schreiben als

$$h_i w_i = \text{const}\,., \qquad i = 1,\ldots,n\,, \tag{6.14}$$

wobei $h_i = x_i - x_{i-1}$, $w_i = w(x_i)$ oder $w_i = w(x_{i-1/2})$. Hat man (6.13) oder (6.14) realisiert, so möchte man anstelle der nicht notwendig äquidistanten Punkte x_i, $i = 0,\ldots,n$, eine Transformation $x(\xi)$ finden, so daß $x_i = x(\xi_i)$ und die ξ_i äquidistant sind.

Eine Transformation $\lambda(z)$ nennt man *gittererzeugende Funktion,* wenn sie stetig, streng monoton wachsend ist und $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$ erfüllt; man setzt dann $x_i = \lambda(ih)$, $i = 0,\ldots,n$, mit festem (äquidistanten) h. Meist fordert man noch, daß $\lambda \in C^2(0,1)$ ist. Die Umkehrfunktion von λ nennt man *Gitterverteilungsfunktion,* $\eta = \lambda^{-1}$, wobei also dann

$$\eta(x_i) = ih\,, \qquad \eta^{-1}(ih) = x_i\,, \qquad i = 0,\ldots,n\,,$$

gelten muß.

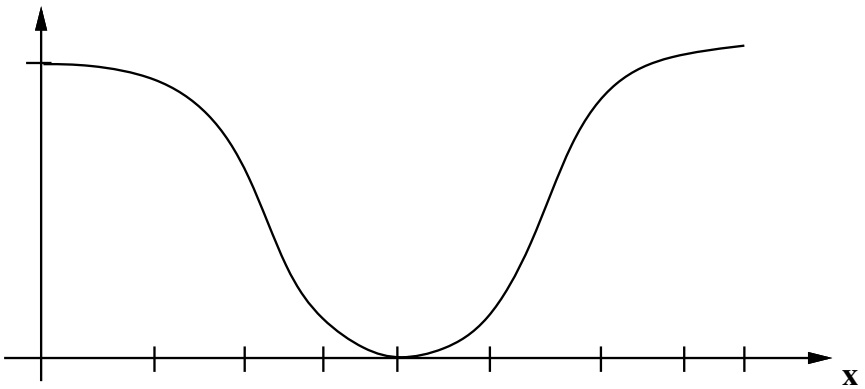


Abbildung 6.1: Beispiel einer Indikatorfunktion w

Will man oben $\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_{i-1} = 1$ haben für alle i, dann muß man einfach $x(\xi) = \eta^{-1}(\xi/n)$ bei gegebener Gitterverteilungsfunktion η (und $h = 1/n$) setzen. Man kann dann auch einfach $\xi_i = i$, $i = 0,\ldots,n$, setzen.

In (6.14) ist also eine Transformation $x(\xi)$ gesucht, so daß

$$\frac{x(\xi_i) - x(\xi_{i-1})}{\xi_i - \xi_{i-1}} w(x(\xi_i)) = \text{const}\,., \qquad i = 1,\ldots,n\,, \tag{6.15}$$

erfüllt ist. Man beachte, daß hier $\xi_i = i$ und $\xi_i - \xi_{i-1} = 1$ ist. (6.15) ist erfüllt, wenn

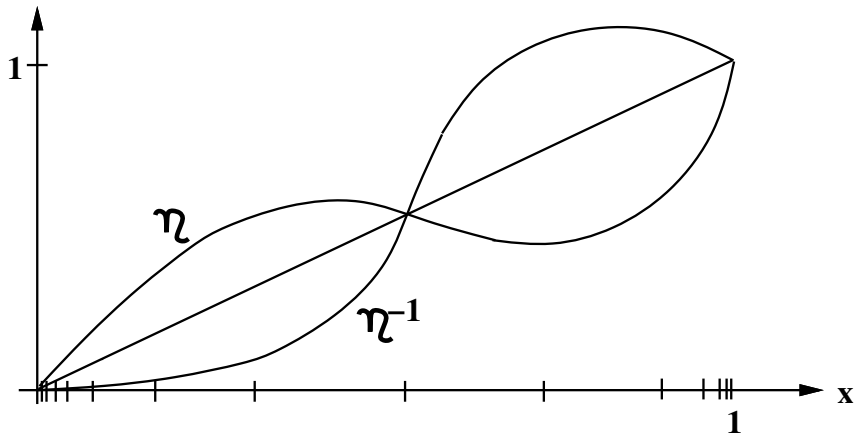


Abbildung 6.2: Beispiel einer Gitterverteilungsfunktion

$$\frac{dx}{d\xi}\omega = \text{const}\,.\,(=: C)\,, \tag{6.16}$$

wobei $\omega(\xi) := w(x(\xi))$ geschrieben wurde. Dies ist die sogenannte Euler–Lagrange–Gleichung der Minimierungsaufgabe:

Gesucht $x(= x(\xi))$ *, so daß*

$$I_1(x) := \int_0^n \omega(\xi) x_\xi^2 d\xi \tag{6.17}$$

minimal wird.

Nach Luenberger [Lue69], 7.5, liegt nämlich für $\int F(x, x_\xi, \xi)d\xi$ ein Minimum vor, wenn

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial F}{\partial x_\xi} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad (\text{„Euler–Lagrange–Gln.“})\,.$$

Hier ist

$$F(x, x_\xi, \xi) = \omega(\xi) x_\xi^2\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x_\xi} = 2\omega(\xi) x_\xi\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0\,,$$

und die Euler–Lagrange–Gleichung hat die Gestalt

$$2\frac{d}{d\xi}(\omega(\xi) x_\xi) = 0 \Longleftrightarrow \omega(\xi) x_\xi = \text{const}\,.$$

Die Minimierung des Funktionals (6.17) bedeutet hier in diskreter Form also die Minimierung der aufsummierten Teilintervallängen im Sinne des kleinsten Fehlerquadrats gewichtet mit $\omega(\xi)$. Dies ist genau das, was man bei (6.12) erreichen möchte, wobei hier $w_i = \eta_i$ mit den Residuen–Schätzern η_i zu setzen ist.

Die Konstante in (6.16) kann man bestimmen — und damit auch die Gitterpunkte $x_i = x(\xi_i)$. Integration von $x_\xi = C/\omega$ liefert nämlich

$$1 = x(n) - x(0) = \int_0^n x_\xi d\xi = \int_0^n \frac{C}{\omega(\xi)} d\xi \ ,$$

also

$$C = \left(\int_0^n \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \right)^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_\xi} = \omega(\xi) \int_0^n \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \ . \tag{6.18}$$

Die Transformation $\xi(x)$ erhält man dann aus $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x_\xi}$, also

$$\xi(x) = \underbrace{\xi(0)}_{=0} + \int_0^x \frac{d\xi(t)}{dx} dt = \left(\int_0^x w(t)\, dt \right) \left(\int_0^n \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \right)$$

und $1 = \Delta\xi = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x)\, dx \right) \left(\int_0^n \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \right)$.

Bei gegebener Gewichtsfunktion w sind also die Gitterpunkte gegeben durch (vgl. (6.14), (6.18))

$$(h_i =) x_i - x_{i-1} = \frac{C}{w_i} = \frac{1}{\omega(\xi_i) \int_0^n \frac{d\xi}{\omega(\xi)}} \ . \tag{6.19}$$

Dies ist nicht die einzige Möglichkeit, um (6.14) zu erfüllen. Eine alternative Wahl der x_i besteht durch

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\int_0^1 w(x)\, dx}{n w(x_i)} \tag{6.20}$$

(vgl. [TWM85], XI.1.).

Die einfachste Wahl der Gewichtsfunktion w ist der Gradient der gesuchten Lösung u der Randwertaufgabe,

$$w = u_x \ .$$

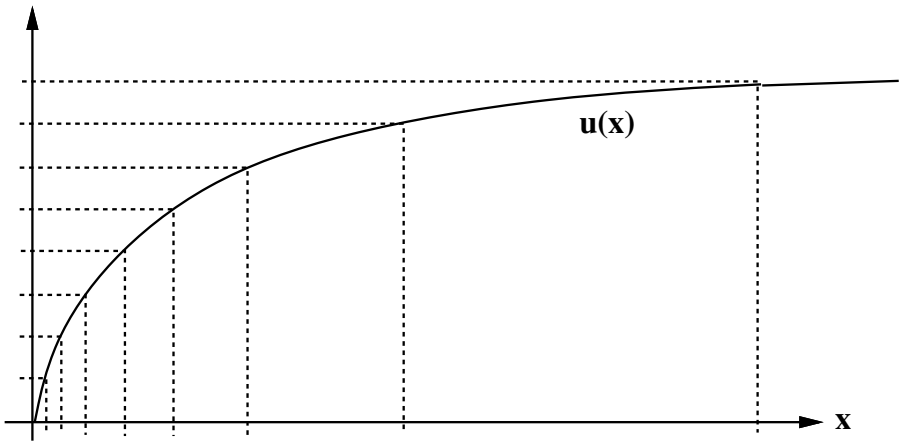


Abbildung 6.3: Nichtäquidistantes Gitter mit $w = u_x$

Damit werden die Gitterpunkte dort eng gewählt, wo der Gradient steil ist, was für Grenzschichtprobleme geeignet erscheint.

Der Nachteil dieser Gewichtsfunktion liegt in der Tatsache, daß die Maschenweite unendlich groß gewählt werden müßte, wo die Lösung flach ist (i. e. $u_x \approx 0$). Diesen Nachteil hat die Wahl

$$w = \sqrt{1 + u_x^2}$$

nicht. Damit erhält man ein gleichförmiges Gitter, wo die Lösung flach ist, und die Gitterpunkte sind in Bereichen konzentriert — aber nicht so stark, wo die Gradienten steil sind.

Kennt man den Verlauf von u_x nicht, dann kann man mit einer berechneten Näherungslösung u_h und der Gewichtsfunktion $w = u_h'$ das Gitter so verändern, daß (6.14) erfüllt ist. Dies kann man dadurch erreichen, daß man ein neues Gitter über (6.19) oder (6.20) bestimmt und dann gegebenenfalls die Näherungslösung auf dem neuen Gitter noch einmal berechnet. Führt man diese (adaptiven) Schritte einige Male durch, so kann man abbrechen, falls ein Toleranzkriterium erfüllt ist.

Anhang A

Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

Gegenstände dieses Abschnittes des Anhangs sind

- Existenz und Eindeutigkeit von Systemen von Anfangswertproblemen 1. Ordnung
- Lösungsmethoden für Systeme linearer Differentialgleichungen, auch lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung
- Lösungen von Randwertproblemen für Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Die Darstellung erfolgt nach [Wal76].

Wir betrachten Anfangswertprobleme (Abk.: AWPs) und Randwertprobleme (RWPs) der folgenden Form:

(AWP) *Gesucht eine stetig differenzierbare Funktion*

$$y : J := [\xi, \xi + a] \ni x \to \mathbb{K}^n, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \ \ bzw. \ \ \mathbb{K} = \mathbb{C},$$

mit

$$y(\xi) = \eta, \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in J, \tag{A.1}$$

wobei $\eta \in \mathbb{K}^n, \quad f : J \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

(RWP, 2. Ordnung) *Gesucht* $u \in C^2[a, b]$ *mit*

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \tag{A.2}$$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_1,$$

wobei $p, q, f \in C[a,b], \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$

Allgemeiner betrachten wir noch lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung oder Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung, bei denen dann n Randbedingungen gefordert werden.

A.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von AWPs

Wir betrachten folgendes AWP

$$y(\xi) = \eta, \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in J, \tag{A.3}$$

wobei die betrachteten Funktionen zunächst reellwertig seien.

Unter einer „Lipschitzbedingung“ $(L \geq 0)$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (x, y_1), (x, y_2) \in S \tag{A.4}$$

in einem „Streifen“ $S := \{(x,y) | \xi \leq x \leq \xi + a, -\infty < y < \infty\}$ gilt der

Satz A.1 (Satz von PICARD-LINDELÖF**)** *Die Funktion $f \in C(S)$ genüge der Lipschitzbedingung (A.4). Dann hat das AWP (A.3) genau eine Lösung y, die in ganz $J = [\xi, \xi + a]$ existiert.*

Der Beweis beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz, indem man zeigt, daß das AWP äquivalent ist zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$y = Ty \text{ mit } (Ty)(x) := \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\, dt, \quad x \in J,$$

und der Operator T bezüglich der Maximumnorm eine Kontraktion darstellt. Zusätzlich weiß man, daß die Methode der sukzessiven Approximation eine Folge

$$y_{k+1}(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y_k(t))\, dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

liefert, die gleichmäßig gegen die Lösung des AWPs konvergiert.

Der obige Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt analog auch für Systeme von Differentialgleichungen. Ist f auf einer Menge D des $J \times \mathbb{R}^n$ definiert, so fragt man beim AWP nach einer Lösung, die durch einen vorgegebenen Punkt $(\xi, \eta) \in D$ geht, d.h. die

$$y_\nu(\xi) = \eta_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n \text{ (oder kurz: } y(\xi) = \eta)$$

und das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

erfüllt. Gibt es eine Umgebung

$$U := \{(x, z) | \quad |x - \bar{x}| < \delta, |z - \bar{y}(x)| < \delta, \quad x \in J\}$$

mit $(\bar{x}, \bar{y}(x)) \in D \ \forall x \in J$, so daß dort eine Lipschitzbedingung der Form (A.4) — mit Normen anstelle von Beträgen — erfüllt ist, dann gilt der Satz von Picard-Lindelöf in analoger Weise.

Ohne die Voraussetzung der Lipschitzstetigkeit von f bzgl. y gilt der

Satz A.2 (Existenzsatz von PEANO**)** *Ist $f(x, z)$ in einem Gebiet $D \subset J \times \mathbb{R}^n$ stetig und $(\xi, \eta) \in D$, so besitzt das AWP (A.1) mindestens eine Lösung.*

A.2 Lineare Differentialgleichungen

Unter einem *linearen System von n Differentialgleichungen (erster Ordnung)* versteht man das folgende System:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t), \end{aligned} \tag{A.5}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$

wobei

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}, \quad b(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))^\top.$$

Die auftretenden Funktionen können reell- oder komplexwertig sein, die unabhängige Variable t ist immer reellwertig.

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf erhält man sofort die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines zu (A.5) gehörigen AWPs, und man hat darüber hinaus eine (Stabilitäts-) Abschätzung für die Lösung:

Satz A.3 (Existenz-, Eindeutigkeits- und Abschätzungssatz) *Die reell- bzw. komplexwertigen Funktionen $A(t), b(t)$ seien stetig in einem (beliebigen) Intervall J, und es sei $\tau \in J$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(\tau) = \eta$$

bei vorgegebenem $\eta \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ genau eine Lösung $y(t)$. Sie existiert in ganz J.

Ist j ein Teilintervall von J, $\tau \in j$ und

$$\|A(t)\| \leq L \text{ und } \|b(t)\| \leq \delta \text{ in } j, \quad \|\eta\| \leq \gamma,$$

so besteht die Abschätzung

$$\|y(t)\| \leq \gamma e^{L|t-\tau|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-\tau|} - 1\right) \text{ in } j.$$

Die Lösung $y(t)$ hängt in jedem kompakten Teilintervall $j \subset J$ stetig von $A(t), b(t), \eta$ ab, d.h. zu $\epsilon > 0$ existiert ein $\beta > 0$, so daß

$$\|z(t) - y(t)\| < \epsilon \text{ in } j$$

ist, wenn $z(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (B, c stetig)

$$z' = B(t)z + c(t), \quad z(\tau) = \zeta$$

und wenn dabei

$$\|B(t) - A(t)\| < \beta, \quad \|b(t) - c(t)\| < \beta \text{ in } j, \quad \|\eta - \zeta\| < \beta$$

ist.

Man nennt das System (A.5) *homogen*, wenn $b(t) \equiv 0$ ist, sonst *inhomogen*. Als Korrolar von Satz A.3 erhält man eine umkehrbar eindeutige, lineare Abbildung zwischen dem $\mathbb{K}^n$ und dem Raum der Lösungen eines homogenen Systems

$$y'(t) = A(t)y(t). \tag{A.6}$$

Satz A.4 *Ist $A(t)$ in J reellwertig (komplexwertig) und stetig, so bilden die reellen (komplexen) Lösungen $y(t)$ der homogenen Gleichung (A.6) einen n-dimensionalen reellen (komplexen) linearen Raum.*

Für festes $\tau \in J$ wird durch

$$\eta \to y(t;\tau,\eta)$$

ein Isomorphismus (umkehrbar eindeutige, lineare Abbildung „auf") zwischen $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ *und dem Raum der Lösungen definiert.*

Daraus ergeben sich eine Reihe von Folgerungen und Begriffen.

Korollar A.5 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Eine Linearkombination*

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_k y_k$$

von Lösungen y_ν *von (A.6) stellt wieder eine Lösung dar.*

2. *Ist* y *eine Lösung und* $y(t_0) = 0$ *für ein* $t_0 \in J$*, so ist* $y \equiv 0$ *in* J*.*

3. *Für* $k > n$ *sind* k *Lösungen linear abhängig.*

4. *Es gibt* n *linear unabhängige Lösungen* $y_1, \ldots, y_n$ *von (A.6). Jedes solche System heißt* Hauptsystem *oder* Fundamentalsystem *. Jede Lösung* y *von (A.6) läßt sich mit Hilfe eines Fundamentalsystems eindeutig darstellen als*

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n.$$

Die letzte Aussage 4 läßt sich kürzer auch in der Form

$$y = Yc, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

schreiben, wobei $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ die zu einem Fundamentalsystem $\{y_1, \ldots, y_n\}$ gehörige *Lösungsmatrix* darstellt. Die n Differentialgleichungen $y_i' = A(t)y_i$, $i = 1, \ldots, n$, lassen sich als Matrizen-Gleichung $Y' = A(t)Y$ schreiben. Die Lösung $Y(t)$ dieser Matrizengleichung ist nach Satz A.4 durch die Vorgabe einer Anfangsbedingung $Y(\tau) = C$ eindeutig bestimmt. Offenbar ist $Y(t)$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Matrix C regulär ist. Dann ist auch $Y(t)$ regulär für jedes $t \in J$.

Ein spezielles Fundamentalsystem erhält man aus

$$X(\tau) = E, \quad X' = A(t)X, \tag{A.7}$$

d.h.

$$x_i(\tau) = e_i, \quad x_i' = A(t)x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (e_i = i\text{-ter Einheitsvektor}).$$

Mit Hilfe von $X(t)$ kann man durch $y(t) = X(t)\eta$ die Lösung jedes AWP's

$$y(\tau) = \eta, \quad y' = A(t)y$$

erhalten.

Ist $Y(t)$ eine Lösungsmatrix, dann ist auch $Z(t) = Y(t)C$ eine Lösung für eine beliebige Matrix C, denn

$$Z' = Y'C = AYC = AZ.$$

Ist $Y(t)$ ein Fundamentalsystem und C regulär, so ist auch Z ein Fundamentalsystem und jedes Fundamentalsystem läßt sich in der Form $Y(t)C$ mit regulärem C darstellen. Insbesondere gilt mit obigem X und beliebiger Lösungsmatrix $Y(t)$, daß

$$Y(t) = X(t)Y(\tau), \tag{A.8}$$

denn die rechte Seite ist Lösung und der Anfangswert erfüllt $X(\tau)Y(\tau) = EY(\tau) = Y(\tau)$.

Für ein Lösungssystem $y_i,\ i = 1, \ldots, n$ des homogenen Systems (A.6) bezeichnet $\phi(t) := \det Y(t)$ die zugehörige *Wronski-Determinante*. Mit der *Spur* von A,

$$\operatorname{sp} A(t) := a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$$

gilt der folgende Satz:

Satz A.6 *Die Wronski-Determinante genügt der Differentialgleichung*

$$\phi'(t) = (\operatorname{sp} A(t))\phi(t) \text{ in } J;$$

daher ist

$$\phi(t) = \phi(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{sp}(A(s))\, ds\right), \quad \tau, t \in J.$$

Offenbar ist entweder $\phi(t) \equiv 0$ oder überall $\neq 0$. $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\phi(t) \neq 0$ ist.

Zwischen den Lösungen des inhomogenen Systems (A.5) und denen des homogenen Systems (A.6) besteht für $n = 1$ der folgende Zusammenhang:

Satz A.7 *Im Fall $n = 1$ ergeben sich sämtliche Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (s. (A.5)) als*

$$y(t) = \bar{y}(t) + x(t),$$

wobei $\bar{y}(t)$ eine feste Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und $x(t)$ alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung durchläuft.

Im allgemeinen n-dimensionalen Fall führt eine analoge Überlegung zum Ziel, die man „Methode der Variation der Konstanten“ nennt. Dabei sucht man, ausgehend von einem Fundamentalsystem $\{y_1, \ldots, y_n\}$ des homogenen Systems, Lösungen des inhomogenen Systems durch

$$z(t) = Y(t)v(t),$$

d.h. man variiert den konstanten Vektor v, um aus den Lösungen $Y(t)v$ des homogenen Systems die des inhomogenen Systems zu erhalten.

Satz A.8 *Seien $A(t), b(t)$ stetig in J und $\tau \in J$. Dann besitzt das AWP*

$$y(\tau) = \eta, \quad y' = A(t)y + b(t) \tag{A.9}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = X(t)\eta + X(t) \int_\tau^t X^{-1}(s)b(s)\, ds, \tag{A.10}$$

wobei $X(t)$ das Fundamentalsystem zu (A.6) mit $X(\tau) = E$ ist.

Ist $Y(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem, so gilt nach (A.8) $Y(t) = X(t)Y(\tau)$, also $Y^{-1}(t) = Y^{-1}(\tau)X^{-1}(t)$ und $X(t)X^{-1}(s) = Y(t)Y^{-1}(s)$. Mit Hilfe von $Y(t)$ lautet die Darstellung (A.10) also

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(\tau)\eta + Y(t) \int_\tau^t Y^{-1}(s)b(s)\, ds. \tag{A.11}$$

A.3 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Für das homogene lineare System

$$y' = Ay \tag{A.12}$$

mit konstanter komplexer Matrix $A = (a_{ij})$ erhält man Lösungen durch den Ansatz

$$y(t) = ce^{\lambda t} = (c_1 e^{\lambda t}, \ldots, c_n e^{\lambda t})^\top. \tag{A.13}$$

Einsetzen in (A.12) liefert

$$y' = \lambda c e^{\lambda t} = Ace^{\lambda t},$$

d.h. $y(t)$ in (A.13) ist genau dann eine Lösung von (A.12), wenn

$$Ac = \lambda c, \tag{A.14}$$

d.h. $c(\neq 0)$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix A. Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$. Jedes Polynom n-ten Grades besitzt n reelle oder komplexe Nullstellen der Vielfachheit nach gezählt.

Satz A.9 *(komplexer Fall) Seien λ, c, A komplex, $c \neq 0$. Die Funktion $y(t) = ce^{\lambda t}$ ist genau dann eine Lösung von (A.12), wenn λ Eigenwert und c ein zugehöriger Eigenvektor der Matrix A ist. Die Lösungen $y_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i$, $i = 1, \ldots, p$, sind genau dann linear unabhängig, wenn die (Eigen-)Vektoren c_i linear unabhängig sind; insbesondere sind sie linear unabhängig, wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ verschieden sind.*

Ist A eine reelle Matrix, dann kann diese durchaus komplexe Eigenwerte haben. Aus einem komplexen Eigenwert kann man über Real- und Imaginärteil zwei reelle Lösungen erhalten. Ist $\lambda = \mu + i\nu$ ein komplexer Eigenwert und $c = a + ib$ ein zugehöriger Eigenvektor der reellen Matrix A, so ergeben sich aus der komplexen Lösung $y = ce^{\lambda t}$ zwei reelle Lösungen

$$\begin{aligned} z(t) &= \operatorname{Re} y = e^{\mu t}(a \cos \nu t - b \sin \nu t), \\ z^*(t) &= \operatorname{Im} y = e^{\mu t}(a \sin \nu t + b \cos \nu t). \end{aligned}$$

Besitzt A n linear unabhängige Eigenvektoren, so kann man auf diese Weise ein reelles Fundamentalsystem konstruieren, wenn man noch beachtet, daß die Aufspaltung einer zugehörigen konjugiert-komplexen Lösung $\bar{y} = \bar{c}e^{\bar{\lambda} t}$ auf dieselben zwei reellen Lösungen führt.

Beispiel A.10 Exponentialfunktion

$$e^B := E + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \ldots$$

Betrachtet man $B = At$ und leitet nach t ab, so erhält man

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

Also erhält man ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ auch durch

$$X(t) = e^{At} \text{ mit } X(0) = E.$$

Als Folgerungen ergeben sich:

1. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
2. $e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At}$
3. $e^{A+\lambda E} = e^{\lambda} \cdot e^A$

Hat man ein Fundamentalsystem des homogenen Systems, so kann man durch die Methode der Variation der Konstanten die Lösungen von zugehörigen inhomogenen Systemen erhalten. Das Anfangswertproblem

$$y' = Ay + b(t), \quad y(\tau) = \eta \quad (A \text{ konstant}) \tag{A.15}$$

besitzt die Lösung

$$y(t) = e^{A(t-\tau)}\eta + \int_{\tau}^{t} e^{A(t-s)}b(s)\,ds. \tag{A.16}$$

Es ist nämlich $X(t) = e^{A(t-\tau)}$ das Fundamentalsystem mit $X(\tau) = E$ und wegen $X(t)^{-1} = e^{-A(t-\tau)}$ erhält man aus (A.10) die obige Lösungsdarstellung. □

A.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(Lu)(t) := u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)u(t) = b(t) \tag{A.17}$$

ist äquivalent zum System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -(a_0 y_1 + \ldots + a_{n-1} y_n) + b(t), \end{aligned} \tag{A.18}$$

oder kurz

$$y' = A(t)y + \underline{b}(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)^\top = (u, u', \dots, u^{(n-1)})^\top, \quad \underline{b} = (0, \dots, b)^\top.$$

Aus Satz A.3 erhält man sofort einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare, inhomogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung:

Satz A.11 *Sind die (reell- oder komplexwertigen) Koeffizienten $a_i(t), b(t)$, $i = 0, \dots, n$, $a_n \equiv 1$ in einem Intervall J stetig und ist $\tau \in J$, so hat das Anfangswertproblem*

$$Lu := \sum_{i=0}^{n} a_i(t) u^{(i)}(t) = b(t), \quad u^{(\nu)}(\tau) = \eta_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

genau eine Lösung. Sie existiert in ganz J und hängt in jedem kompakten Teilintervall von J stetig von den $a_i(t)$ und von $b(t)$ ab.

Für die zugehörigen homogenen Systeme

$$Lu = 0 \tag{A.19}$$

erhält man analoge Aussagen wie in Abschnitt A.2. Die Lösungen von (A.19) bilden also einen n-dimensionalen Vektorraum, und es existieren n linear unabhängige Lösungen $u_1, \dots, u_n$, die eineindeutig den Anfangswerten $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ zugeordnet sind:

$$U'(t) = A(t)U(t), \quad U(\tau) = C, \tag{A.20}$$

wobei $U(t) = (u, u', \dots, u^{(n-1)})^\top, C$ reguläre $n \times n$-Matrix; die $\{u_1, \dots, u_n\}$ bilden ein Haupt- oder Fundamentalsystem. Die zugehörige Wronski-Determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{A.21}$$

erfüllt nach Satz A.6 die Differentialgleichung

$$W' = -a_{n-1}(t)W (= \mathrm{sp}(A(t))W) \tag{A.22}$$

und hat also die Darstellung

$$W(t) = W(\tau)\exp\left(-\int_\tau^t a_{n-1}(s)\,ds\right).$$

Ein spezielles Fundamentalsystem erhält man durch $X' = A(t)X$, $X(\tau) = E$, was hier dem folgenden System entspricht:

$$Lx_i = 0, \quad x_i^{(j)}(\tau) = \begin{cases} 1, & j = i-1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad j = 0,\ldots,n-1,\ i = 1,\ldots,n \tag{A.23}$$

Die „Methode der Variation der Konstanten“ ermöglicht die Bestimmung von Lösungen eines gegebenen inhomogenen Systems n-ter Ordnung (vgl. (A.17)) aus einem Fundamentalsystem $u_1,\ldots,u_n$ (vgl. (A.20)) des zugehörigen homogenen Systems. D.h. man sucht Funktionen $c_1,\ldots,c_n$, so daß

$$W(t) = u_1(t)c_1(t) + \ldots + u_n(t)c_n(t)$$

Lösung von (A.17) wird. Mit

$$z = \begin{pmatrix} w \\ w' \\ \vdots \\ w^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

soll also $z' = A(t)z + \underline{b}(t)$ erfüllt sein. In der Lösungsdarstellung (A.11) benötigt man $\underline{a}(t) = Y^{-1}(t)\underline{b}(t)$, also die Lösung des linearen Gleichungssystems $Y\underline{a} = \underline{b}$. Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man die Komponenten von $\underline{a}$ hier besonders einfach:

$$a_i = \frac{V_i}{W}, \quad i = i,\ldots,n, \text{ wobei } W = \det Y, \tag{A.24}$$

$$V_i = \det\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_{i-1} & 0 & u_{i+1} & \ldots & u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \ldots & u_{i-1}^{(n-1)} & b(t) & u_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

also (Entwicklung nach der i-ten Spalte)

$$V_i(t) = (-1)^{n+i}b(t)W_i(t), \tag{A.25}$$

wobei W_i die Wronski-Determinante (von der Ordnung $n-1$) der Funktionen $u_1, \ldots, u_{i-1}$, $u_{i+1}, \ldots, u_n$ ist.

Setzt man speziell $z(\tau) = 0$, so erhält man nach (A.11) als Lösung:

$$z(t) = Y(t) \int_\tau^t \underline{a}(s)\, ds.$$

Eine Lösung w von (A.17) erhält man also — w ist die erste Komponente von z — durch

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)(-1)^{n+i} \int_\tau^t \frac{b(s)}{W(s)} W_i(s)\, ds \tag{A.26}$$

Beispiel A.12 (Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

$$u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = b(t) \tag{A.27}$$

Ist $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem, so ist eine Lösung von (A.27) — nämlich die mit $w(\tau) = w'(\tau) = 0$ — gegeben durch

$$w(t) = -u_1(t) \int_\tau^t \frac{b(s)u_2(s)}{W(s)}\, ds + u_2(t) \int_\tau^t \frac{b(s)u_1(s)}{W(s)}\, ds \tag{A.28}$$

□

Beispiel A.13

$$w'' - w' \cos t + w \sin t = \sin t, \quad t \geq 0$$

Ein Fundamentalsystem ist $\{\exp(\sin t)), \exp(\sin t)\Phi(t)\}$ mit $\Phi(t) := \int_0^t \exp(-\sin s)\, ds$ (vgl. [Wal76, § 19, IV]). Die zweite Lösung wurde nach dem sog. d'Alembertschen Reduktionsverfahren ermittelt, auf das hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Hier ist $a_{n-1}(s) = a_1(s) = -\cos s$,

$$\begin{aligned} W(t) &= W(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \cos s\, ds \right) \overset{\tau=0}{=} W(0) \exp(\sin t) \\ W(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (\text{da } \Phi(0) = 0). \end{aligned}$$

Nach (A.28) ist

$$w(t) = -\exp(\sin t) \int_0^t \sin r \int_0^r \exp(-\sin s)\, ds\, dr + \exp(\sin t)\Phi(t) \int_0^t \sin r\, dr$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin r \int_0^r \exp(-\sin s)\, ds\, dr &= \int_0^t \exp(-\sin s) \int_s^t \sin r\ dr\, ds \\ &= -\int_0^t \exp(-\sin s)(\cos t - \cos s)\, ds \\ &= -\Phi(t)\cos t - \exp(-\sin t) + 1,\end{aligned}$$

also

$$w(t) = \int_0^t \exp(\sin t - \sin s)\, ds + 1 - \exp(\sin t)$$

eine Lösung der vorgegebenen inhomogenen Differentialgleichung. □

A.5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es sei jetzt

$$Lu := \sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)}, \quad a_i = \text{konstant}, \quad a_n = 1 \tag{A.29}$$

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems des homogenen Systems $Lu = 0$ betrachtet man das *charakteristische Polynom*

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0) \tag{A.30}$$

Aus Satz A.9 und den Ausführungen in Abschnitt A.3 erhält man das folgende Ergebnis. Über den Ansatz $u = e^{\lambda t}$ kann man dies allerdings auch ganz elementar beweisen.

Satz A.14 *Ist λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so entsprechen ihr k Lösungen*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

von $Lu = 0$. Aus den n Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ (jede mit ihrer Vielfachheit gezählt) ergeben sich auf diese Weise n linear unabhängige Lösungen, also ein Hauptsystem.

Sind die a_i reell, so enthält dieses Hauptsystem, falls komplexe Nullstellen auftreten, komplexe Lösungen. Ein reelles Hauptsystem wird erhalten, indem man zu einer komplexen Nullstelle $\lambda = \mu + i\nu$ von k-ter Ordnung die k Lösungen in Real- und Imaginärteil aufspaltet,

$$t^q e^{\mu t}\cos\nu t, \quad t^q e^{\mu t}\sin\nu t, \quad q = 0, 1, \ldots, k-1$$

(und die k zu $\bar{\lambda}$ gehörenden Lösungen streicht).

Beispiel A.15 (Schwingungen)

Die Differentialgleichung

$$m\ddot{s} + \beta\dot{s} + ks = 0, \quad t > 0 \tag{A.31}$$

beschreibt die Auslenkung $s(t)$ (von der Ruhelage $s = 0$) einer Masse m im Falle einer *gedämpften Schwingung* . Hierbei ist noch $\beta > 0$ ein *Reibungskoeffizient*, $k > 0$ der Koeffizient der elastischen Rückstellkraft und $\dot{s}$ bedeutet $\frac{ds}{dt}$ (entspr. $\ddot{s}$). Es sind zwei Anfangsbedingungen erforderlich: $s(0), \dot{s}(0)$.

Wir setzen $u = s$, $a = \frac{\beta}{2m}$, $b = \frac{k}{m}$, d.h.

$$Lu = u'' + 2au' + bu.$$

Die charakteristische Gleichung

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda - b = 0$$

hat die beiden Wurzeln $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$.

Man unterscheidet verschiedene Fälle, für die wir gleich zugehörige Fundamentalsysteme angeben (nach Satz A.14):

1. „Überdämpfung“ : $a^2 > b$

   $$u_1 = \exp(-a + \sqrt{a^2 - b}\,t), \quad u_2 = \exp(-a - \sqrt{a^2 - b}\,t)$$

   In (A.31) bedeutet dieser Fall $\beta^2 > 4km$, und man spricht von *großer Dämpfung* bzw. *Reibung*. Für $a > 0$, $b > 0$ streben beide Lösungen exponentiell gegen 0 für $t \to \infty$.

2. „Kritische Dämpfung“ : $a^2 = b$ (d.h. $\beta^2 = 4km$)

$$u_1 = \exp(-at), \quad u_2 = t\exp(-at)$$

3. „Unterdämpfung“ : $a^2 < b$ (d.h. $\beta^2 < 4km$)

$$u_1 = \exp(-at)\cos\left(\sqrt{b-a^2}\,t\right), \quad u_2 = \exp(-at)\sin\left(\sqrt{b-a^2}\,t\right);$$

Frequenz der gedämpften Schwingung (periodischer Fall)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{b-a^2} = \frac{1}{4\pi m}\sqrt{4km-\beta^2}.$$

Betrachtet man die homogene Differentialgleichung (A.31) mit $\beta > 0$, dann spricht man auch von einer *gedämpften freien Schwingung* . Eine *ungedämpfte freie Schwingung* liegt vor, wenn in (A.31) $\beta = 0$ ist. Nach 3. hat man dann ein Fundamentalsystem $\{\cos\nu_0 t, \sin\nu_0 t\}$ mit $\nu_0 = \sqrt{k/m}$.

Die allgemeine Lösung einer ungedämpften freien Schwingung hat also die Gestalt

$$s(t) = \alpha\cos\nu_0 t + \beta\sin\nu_0 t, \quad t > 0,$$

was man auch in der Form

$$s(t) = R\cos(\nu_0 t - \delta)$$

mit $R = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \delta = \arctan(\beta/\alpha)$ schreiben kann.

Zum Abschluß betrachten wir noch *ungedämpfte erzwungene Schwingungen*, d.h. $\beta = 0$ in (A.31), und als inhomogenen Term hat man auf der rechten Seite $(F_0/m)\cos\omega t$, d.h. wir betrachten

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \quad t > 0 \tag{A.32}$$

mit $\omega_0^2 (= \nu_0^2) = k/m$.

Fall $\omega \neq \omega_0$: Eine spezielle Lösung von (A.32) erhält man durch (A.28), wobei

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ -\omega_0\sin\omega_0 t & \omega_0\cos\omega_0 t \end{vmatrix} = \omega_0(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t) = \omega_0.$$

Anwendung von Additionstheoremen liefert

$$w(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t,$$

und eine allgemeine Lösung von (A.32) hat die Gestalt

$$y(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega)} \cos \omega t.$$

Fall $\omega = \omega_0$: Als spezielle Lösung des inhomogenen Systems erhält man

$$w(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

denn

$$\begin{aligned} w(t) &= -u_1(t) \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_0} u_2(s) \cos \omega_0 s \, ds + u_2(t) \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_0} u_1(s) \cos \omega_0 s \, ds \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0} \left(-\cos \omega_0 t \int_0^t \sin \omega_0 s \cos \omega_0 s \, ds + \sin \omega_0 t \int_0^t (\cos \omega_0 s)^2 \, ds \right) \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0} \left(-\cos \omega_0 t \left[\frac{1}{2\omega_0} \sin^2 \omega_0 s \right]_0^t + \sin \omega_0 t \left[\frac{1}{2} s + \frac{1}{4\omega_0} \sin 2\omega_0 s \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0} \left(-\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \sin^2 \omega_0 + \left[t + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right] \sin \omega_0 t \right) \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

da $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma$. Jede Lösung einer ungedämpften erzwungenen Schwingung hat also im Fall $\omega = \omega_0$ die Form

$$y(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Der dritte Term stellt eine Oszillation mit wachsender Amplitude dar, was bei realen Schwingungsproblemen die Zerstörung entsprechender physikalischer Systeme bewirken kann.

□

A.6 Lineare Randwertaufgaben 2. Ordnung

In zahlreichen Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik treten Randwertprobleme für (reelle) lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf:

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = y(x), \quad a \le x \le b; \tag{A.33}$$

als mögliche Randbedingungen unterscheidet man:

erste Art:	$u(a) = \eta_1,$	$u(b) = \eta_2,$
zweite Art:	$u'(a) = \eta_1,$	$u'(b) = \eta_2,$
dritte Art:	$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta_0,$	$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \eta_1.$

Es gibt auch noch andere Arten von Randbedingungen, z.B. *periodische*:

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b).$$

Beispiel A.16 $u'' = 0$

FS: $\{1, x\}$; allgemeine Lösung: $u(x) = a_1 x + a_0$ (lineare Funktionen)

RWP erster Art: Immer eindeutig lösbar.

RWP zweiter Art: Keine Lösung für $\eta_0 \neq \eta_1$, unendlich viele Lösungen für $\eta_0 = \eta_1$. □

Anstelle von (A.33) betrachten wir RWPs der folgenden Form:

$$Lu := (p(x)u')' + q(x)u = g(x), \quad \text{in } J = [a, b] \tag{A.34}$$

mit Randbedingungen dritter Art:

$$\begin{aligned} R_0 u &:= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = \eta_0, \\ R_1 u &:= \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = \eta_1. \end{aligned} \tag{A.35}$$

Man nennt (A.34) auch die *selbstadjungierte Form* des Differentialoperators L; man kann (A.33) durch Multiplikation mit $p(x) := \exp\left(\int_0^x a_1(s)\, ds\right)$ immer in die selbstadjungierte Form (A.34) überführen. (A.34), (A.35) heißt „Sturmsche Randwertaufgabe“ (nach Ch. Sturm (1803-1855)). Wir setzen im folgenden voraus, daß

$$p \in C^1(J),\ q, g \in C(J),\ \text{(alles reellwertig)},\ p(x) > 0 \text{ in } J, \text{ und}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Für zwei beliebige Funktionen $u, v \in C^2(J)$ gilt die *Lagrange-Identität*

$$vLu - uLv = \{p(x)(u'v - v'u)\}'. \tag{A.36}$$

Daraus folgt (mit Hilfe partieller Integration)

$$\int_a^b (vLu - uLv)\,dx = 0, \tag{A.37}$$

falls $u, v \in C^2(J)$ den homogenen Randbedingungen $R_i u = R_i v = 0,\ i = 0, 1$, genügen.

Alle Lösungen von (A.34), (A.35) ergeben sich in der Form

$$v = v^* + u,$$

wobei v^* eine feste Lösung ist und u alle Lösungen des homogenen RWPs durchläuft.

Satz A.17 *Es gelten die obigen Voraussetzungen und $\{u_1, u_2\}$ sei ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$. Das inhomogene RWP (A.34), (A.35) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn*

$$\begin{vmatrix} R_0 u_1 & R_0 u_2 \\ R_1 u_1 & R_1 u_1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{A.38}$$

ist. Insbesondere hat das homogene RWP in diesem Fall nur die triviale Lösung.

Bemerkung: *Ist ein Fundamentalsystem der homogenen DGL bekannt, so hat man nach Beispiel A.12 auch eine Lösung v^* der inhomogenen Gleichung $Lu = g$, und die Lösung der RWP reduziert sich auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zur Bestimmung von c_1, c_2 in der Darstellung*

$$v = v^* + c_1 u_1 + c_2 u_2;$$

Letztere ergeben sich aus den zwei Randbedingungen; unter (A.38) existiert immer eine eindeutige Lösung.

Beispiel A.18

$$u'' + u = 1, \quad 0 \le x \le \pi,\ R_0 u := u(0) + u'(0) = \eta_0,\ R_1 u := u(\pi) = \eta_1$$

FS: $u_1 = \cos x, u_2 = \sin x$,

$$\begin{vmatrix} R_0(\cos x) & R_0(\sin x) \\ R_1(\cos x) & R_1(\sin x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 (\neq 0)$$

Allgemeine Lösung:

$$v(x) = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Fall: $\eta_0 = \eta_1 = 0$: $R_0 v = 1 + c_2 + c_1 = 0$, $R_1 v = 1 - c_2 = 0 \iff c_1 = -2$, $c_2 = 1$

Lösung: $v(x) = 1 + \cos x - 2\sin x$

Fall: $R_0 u := u(0) = \eta_0$, $R_1 u := u(1) = \eta_1$.

Die Determinante in (A.38) verschwindet; es gibt — neben der trivialen Lösung — unendlich viele Lösungen der Form $u = C \sin x$.

□

Definition A.19 *Eine Funktion $\gamma(x,\xi)$ wird* Grundlösung *der homogenen DGL $Lu = 0$ genannt, wenn folgendes gilt:*

1. *$\gamma(x,\xi)$ ist stetig in $Q := \{a \le x, \xi \le b\}$.*
2. *In jedem der beiden Dreiecke*

$$Q_1 = \{(x,\xi) | a \le \xi \le x \le b\}, \quad Q_2 = \{(x,\xi) | a \le x \le \xi \le b\}$$

existieren die stetigen partiellen Ableitungen γ_x, γ_{xx}.

3. *Bei festem $\xi \in J$ ist $\gamma(x,\xi)$ als Funktion von x eine Lösung von $L\gamma = 0$ für $x \neq \xi, x \in J$.*
4. *Auf der Diagonalen $x = \xi$ macht die erste Ableitung einen Sprung:*

$$\gamma_x(x+0,x) - \gamma_x(x-0,x) = \frac{1}{p(x)}, \quad a < x < b.$$

Eine Grundlösung ist nicht eindeutig bestimmt, da auch $\tilde{\gamma}(x,\xi) = \gamma(x,\xi) + \alpha(\xi)u(x)$ Grundlösung ist, falls α stetig und u Lösung von $Lu = 0$ ist.

Beispiel A.20

$$u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(x,\xi) = \frac{1}{2}|x - \xi|$$
$$u'' + \lambda^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(x,\xi) = \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda|x - \xi|$$

(Beweis durch Verifizieren; zur Konstruktion siehe unten.) □

Satz A.21 *Ist $\gamma(x,\xi)$ eine Grundlösung, so ist*

$$v(x) = \int_a^b \gamma(x,\xi) g(\xi)\, d\xi \tag{A.39}$$

aus $C^2(J)$ und stellt eine Lösung von $Lv = g(x)$ dar.

Beweisskizze: Aufspalten des Integrals von a bis x und von x bis b sowie 2-maliges Differenzieren in Verbindung mit Eigenschaft 4 einer Grundlösung ergibt

$$\begin{aligned} v'(x) &= \int_a^b \gamma_x(x,\xi) g(\xi)\, d\xi, \\ v''(x) &= \int_a^b \gamma_{xx}(x,\xi) g(\xi)\, d\xi + \frac{g(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Wegen Eigenschaft 3. folgt daraus die Behauptung. □

Definition: $\Gamma(x,\xi)$ *heißt* Greensche Funktion *für die homogene Randwertaufgabe $Lu = 0$, $R_0 u = R_1 u = 0$, wenn gilt:*

1. *$\Gamma(x,\xi)$ ist eine Grundlösung,*
2. *$R_0\Gamma = R_1\Gamma = 0 \quad \forall \xi \in J' := (a,b)$.*

Satz A.22 *Unter den obigen Voraussetzungen existiert genau eine Greensche Funktion für die homogene Sturmsche Randwertaufgabe, wenn diese nur die triviale Lösung besitzt, d.h. wenn (A.38) gilt. Sie ist symmetrisch, $\Gamma(x,\xi) = \Gamma(\xi,x)$. Die eindeutige Lösung der „halb-homogenen" Randwertaufgabe*

$$Lv = g(x), \quad R_0 v = R_1 v = 0$$

hat die Darstellung

$$v(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi) g(\xi)\, d\xi. \tag{A.40}$$

Beweisskizze: (teilw.) Die Funktion v in (A.40) ist nach Satz A.21 eine Lösung von $Lv = g$. Da man unter dem Integral (nach x) differenzieren darf, kann Integration und R_i vertauscht werden, und wegen Eigenschaft 2 einer Greenschen Funktion sind die homogenen Randbedingungen erfüllt. Der Beweis der Eindeutigkeit und Symmetrie benutzt wesentlich die Beziehung (A.37). □

Die Konstruktion der Greenschen Funktion aus einem Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ ist wie folgt möglich: Durch den Ansatz

$$\Gamma(x,\xi) = \sum_{i=1}^{2}(a_i(\xi) \pm b_i(\xi))u_i(x) \quad \begin{cases} \text{„}+\text{“ in } Q_1 \\ \text{„}-\text{“ in } Q_2 \end{cases}, \tag{A.41}$$

die Forderung der Stetigkeit und der Sprungrelation von Γ_x bei $x = \xi$ erhält man ein Gleichungssystem für b_1, b_2,

$$\sum_{i=1}^{2} b_i(\xi)u_i(\xi) = 0, \quad \sum_{i=1}^{2} b_i(\xi)u_i'(\xi) = \frac{1}{2p(\xi)}.$$

Dieses ist eindeutig nach b_1, b_2 auflösbar, da die Wronski-Determinante gerade die Determinante des zugehörigen Gleichungssystems ist. Die a_i, $i = 1,2$, bestimmt man dann aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} R_0\Gamma &= \sum_{i=1}^{2}(a_i(\xi) - b_i(\xi))R_0u_i = 0, \\ R_1\Gamma &= \sum_{i=1}^{2}(a_i(\xi) + b_i(\xi))R_1u_i = 0; \end{aligned}$$

dieses Gleichungssystem ist wegen (A.38) eindeutig lösbar.

Beispiel A.23 $u'' = 0, \quad u(0) = u(1) = 0,$

FS: $\{1, x\}$, $\begin{vmatrix} R_0u_1 & R_0u_2 \\ R_1u_1 & R_1u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \xi(x-1), & 0 \le \xi \le x \le 1, \\ x(\xi-1), & 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$

□

Will man das inhomogene Randwertproblem (A.34), (A.35) lösen, so sucht man zunächst eine Funktion $\phi \in C^2(J)$, die (nur) die Randbedingungen $R_i\phi = \eta_i$, $i = 0,1$, erfüllt. Macht man dann für die Lösung u der inhomogenen Randwertaufgabe den Ansatz $u = \phi + v$, so ergibt sich für v:

$$Lv = h := g - L\phi, \; R_0v = R_1v = 0.$$

Dieses ist nach Satz A.22 lösbar.

Bemerkung: *Die bisherige Theorie kann man ohne Schwierigkeiten auf lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung und auf Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnen. Die zugehörige Greensche Funktion ist dann eine Matrix (vgl. z.B. [Wal76, § 26, X ff]).*

Anhang B

Theoretische Übungsaufgaben zur Vorlesung „Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen“

1. Zeigen Sie, daß die Lösung des Populationsmodells mit Rivalitätsterm nach Verhulst (1837),

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= ap - bp^2 \,, \qquad t > t_0 \,, \\ p(t_0) &= p_0 \end{aligned}$$

die explizite Darstellung besitzt

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)\exp(-a(t - t_0))} \,.$$

2. Sei $D : C^1[a,b] \to \mathbb{K} \times C[a,b]$ die Abbildung

$$Du = \left(u(a),\, \frac{du}{dt}\right)$$

für alle $u \in C^1[a,b]$.

Man beweise:

(a) Diese Abbildung ist linear und bijektiv.

(b) D ist bistetig. Das heißt, es gibt positive Zahlen γ_0, γ_1 mit der Eigenschaft

$$\gamma_0 \|u\|_E \le \|Du\|_F \le \gamma_1 \|u\|_E \,, \qquad u \in C^1[a,b] \,,$$

mit den Normen

$$\|u\|_E = \max_{\substack{t\in[a,b]\\ m=0,1}} \left|\frac{d^m u}{dt^m}(t)\right| , \qquad u \in C^1[a,b] ,$$

$$\|w\|_F = \max\left(|w^0| , \max_{t\in[a,b]} |w^1(t)| \right) , \qquad w = (w^0, w^1) \in \mathbb{K}\times C[a,b] .$$

3. Zeigen Sie für eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = b(t) , \qquad t \in J = [\tau, \tau + a] ,$$

daß die Wronski–Determinante $W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ für zwei Lösungen u_1, u_2 der zugehörigen homogenen Differentialgleichung selbst die Differentialgleichung erster Ordnung

$$W'(t) = -p(t)W(t) , \qquad t \in J ,$$

erfüllt und damit die Darstellung hat,

$$W(t) = W(\tau)\exp\left(-\int_\tau^t p(s)ds\right) , \qquad t \in J .$$

4. Seien z_1, z_2 Lösungen der Differentialgleichung $z'' + pz' + qz = 0$, $x \in [a,b]$, mit

$$z_1(a) = 0 , \; z_1'(a) = 1 , \quad z_2(b) = 0 , \; z_2'(b) = 1 .$$

Sei

$$P(x) = \int_a^x p(s)ds , \text{ und } D_0 = z_1(a)\, z_2'(a) - z_2(a)z_1'(a) .$$

Man beweise: Wenn die homogene Randwertaufgabe $z''+pz'+qz = 0$, $z(a) = z(b) = 0$ nur die triviale Lösung hat, dann ist $z_1(b) \neq 0$, $z_2(a) \neq 0$ und für $w^1 \in C[a,b]$ ist die Funktion

$$u(x) = \frac{\alpha}{z_2(a)}z_2(x) + \frac{\beta}{z_1(b)}z_1(x) + \frac{z_2(x)}{D_0}\int_a^x z_1(s)w^1(s)e^{P(s)}ds +$$

$$+ \frac{z_1(x)}{D_0}\int_x^b z_2(s)w^1(s)e^{P(s)}ds$$

für $x \in [a,b]$, ist eindeutig bestimmte Lösung der Randwertaufgabe

$$u(a) = \alpha \ , \quad u(b) = \beta \ , \quad u'' + pu' + qu = w^1 \ .$$

5. Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u(a) = w^0 \ , \quad \frac{du}{dt}(x) = \mu u(x) \ , \quad x \in [a,b] \ .$$

Diese Aufgabe läßt sich durch das Polygonzugverfahren (i. e. Verfahren von Euler–Cauchy), das verbesserte Polygonzugverfahren und das verbesserte Verfahren von Euler–Cauchy approximieren in der Gestalt

$$u_h(a) = w_h^0 \ , \quad \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)\,) = f_h(x, u_h(x)\,) \ ,$$

bei äquidistanter Schrittweite für

$$x = a + kh \ , \quad k = 0, \ldots, N_h \ , \quad h = \frac{1}{N_h}(b-a) \ , \quad N_h \in \mathbb{N} \ .$$

Man bestimme zu jedem dieser drei Verfahren die explizite Lösung der Differenzenapproximation (*Hinweis:* Hier ist $f(x,y) = \mu y$).

6. Für die Folge d_j , $0 \le j \le N_h$, gelte mit Konstanten L und D die Abschätzung

$$|d_{j+1}| \le (1+hL)|d_j| + D \ , \qquad 0 \le j \le N_h - 1 \ .$$

Man beweise für $0 \le j \le N_h$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |d_j| &\le \frac{D}{hL}(\,(1+hL)^j - 1) + (1+hL)^j |d_0| \\ &\le \frac{D}{hL}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) + e^{L(b-a)}|d_0| \ . \end{aligned}$$

(*Hinweis:* $1 + x \le e^x$ für $x \ge 0$.)

7. Verifizieren Sie die Eigenschaften einer Fundamentallösung für

(a) $u'' = 0 \qquad : \ \gamma(x,\xi) = \frac{1}{2}|x - \xi|$

(b) $u'' + \lambda^2 u = 0 \ : \ \gamma(x,\xi) = \frac{1}{2\lambda}\sin(\lambda|x-\xi|)$

8. Sei $[a,b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Man bestimme die Lösung u der inhomogenen Randwertaufgabe

$$u(a) = u(b) = 0 \ , \qquad \frac{d^2u}{dx^2}(x) = w(x) \ , \quad x \in [a,b] \ ,$$

für $w \in C[a,b]$ mit der zugehörigen Greenschen Funktion K in der Gestalt

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)w(y)dy \ , \qquad x \in [a,b] \ .$$

Hinweis: Man erhält die gewünschte Darstellung z.B. durch die Konstruktionsvorschrift, die am Ende von Anhang A angegeben ist.

9. Für das AWP $u'(x) = 2x^{-1}u(x)$, $x \in [1,5]$, $u(1) = 1$, bestimme man die Lösung $u(x)$ und gebe eine einfache Formel für die nach Euler–Cauchy berechneten Näherungen $u_h(x_j)$, $0 \le j \le N_h$, mit $u_h(1) = 1$, $(h \to 0)$. Man bestimme weiter die kleinste Konstante K und die größte Konstante p mit

$$|u_h(x_j) - u(x_j)| \le Kh^p \ , \qquad 0 \le j \le N_h \ (h \to 0) \ ,$$

und diskutiere entsprechend die Differenz

$$\left| h^{-1}(u_h(x_{j+1}) - u_h(x_j)) - u'(x_j) \right| \ , \qquad 0 \le j \le N_h - 1 \ (h \to 0) \ .$$

10. Unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f gebe man für das implizite Runge–Kutta–Verfahren der Stufe 2,

$$\begin{aligned} k_1(x,y) &= f(x + \alpha_1 h, \, y + h(\beta_{11}k_1 + \beta_{12}k_2)(x,y)) \ , \\ k_2(x,y) &= f(x + \alpha_2 h, \, y + h(\beta_{21}k_1 + \beta_{22}k_2)(x,y)) \ , \\ u_h(x+h) &= u_h(x) + h(\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2)(x, u_h(x)) \ , \quad x \in [a,b]'_h \ , \end{aligned}$$

das die Konsistenz der Ordnung $p = 3$ charakterisierende System von 7 Gleichungen für die 8 Koeffizienten α_i, γ_i, β_{ij}, $i,j = 1,2$, an. (Es kann $n = 1$ angenommen werden.)

11. Kann für eine Lösung des in 10. erhaltenen Systems $\gamma_1 = 0$ oder $\gamma_2 = 0$ gelten? Man beweise, daß für jede Lösung des Systems gilt $\alpha_1 = \beta_{11} + \beta_{12}$; $\alpha_2 = \beta_{21} + \beta_{22}$.

12. Die sogenannte *Wurzelbedingung* für Polynome p in einer komplexen Veränderlichen lautet: Das Polynom p besitzt nur Wurzeln vom Betrage höchstens Eins und die Wurzeln mit dem Betrage Eins sind einfach. Man bestimme die Wurzeln der folgenden Polynome der Gestalt

$$p(z) = \beta_m z^m + \ldots + \beta_1 z + \beta_0 \,, \qquad z \in \mathbb{C} \,,$$

und untersuche, ob sie der Wurzelbedingung genügen oder nicht:

$$\begin{array}{lllll}
\text{(i)} & (\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_1, \beta_0) & = & (1, -1) \,, & m = 1 \,, \\
\text{(ii)} & & = & (-1, 4, -3) \,, & m = 2 \,, \\
\text{(iii)} & & = & (1, 0, -1) \,, & m = 2 \,, \\
\text{(iv)} & & = & (2, -9, 18, -11) \,, & m = 3 \,, \\
\text{(v)} & & = & (-1, 6, -3, -2) \,, & m = 3 \,, \\
\text{(vi)} & & = & (-1, 8, -8, 1) \,, & m = 3 \,.
\end{array}$$

13. Zeigen Sie die Äquivalenz der Konsistenzbedingungen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{s} \left(k^\ell a_k - \ell k^{\ell-1} b_k \right) = 0 \,, \quad \ell = 0, 1, \ldots, p \,;$

(b) $z = 0$ ist Nullstelle der Vielfachheit $\geq p + 1$ der Funktion $\varphi(z) := \rho(e^z) - z\sigma(e^z) \,, \quad z \in \mathbb{C} \,,$

wobei $\rho(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k z^k$, $\sigma(z) = \sum_{k=0}^{s} b_k z^k$.

Hinweis: Entwickeln Sie φ bei $z = 0$.

14. Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{z^{j-1}}{\rho(z)} \, dz = 0 \,, \qquad j = 0, \ldots, s-1 \,,$$

wobei $\rho(z)$ wie in Aufg. 13 erklärt ist, und für die m Nullstellen ζ_ν von ρ gelte $|\zeta_\nu| < r$, $\nu = 1, \ldots, m$.

Hinweis:

(a) Schätzen Sie den Integranden ab und lassen Sie $r \longrightarrow \infty$ streben; es ist $a_s \neq 0$.

(b) Nach dem Residuensatz ist dann auch

$$\sum_{\nu=1}^{m} \operatorname{Res} \left(\frac{z^{j-1}}{\rho(z)} \right)_{z=\zeta_\nu} = 0 \ .$$

15. Sei $[a,b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Analog Aufgabe 8 bestimme man die Lösung u_h der inhomogenen Randwertaufgabe der Differenzengleichungen

$$u_h(a) = u_h(b) = 0 \ , \quad \frac{1}{h^2}(u_h(x+h) - 2u_h(x) + u_h(x-h)) = w_h(x) \ , \quad x \in [a,b]'_h \ ,$$

mit der diskreten Greenschen Funktion K_h in der Gestalt

$$u_h(x) = h \sum_{y \in [a,b]'_h} K_h(x,y) w_h(y) \ , \qquad x \in [a,b]_h \ .$$

Dabei seien für die natürlichen Zahlen $N_h = 1, 2, \ldots$ die Schrittweite $h = (b-a)/N_h$ und Punktgitter $[a,b]_h$, $[a,b]^0_h$, $[a,b]'_h$ definiert durch

$$\begin{aligned} [a,b]_h &= \{x \in [a,b] \,|\, x = a + jh \ , \ j = 0, \ldots, N_h\} \ , \\ [a,b]^0_h &= \{x \in [a,b] \,|\, x = a + jh \ , \ j = 0, \ldots, N_h - 1\} \ , \\ [a,b]'_h &= \{x \in [a,b] \,|\, x = a + jh \ , \ j = 1, \ldots, N_h - 1\} \ . \end{aligned}$$

16. Im Anschluß an Aufgabe 15 sei die Abbildung $A : X \to Y$ definiert durch

$$Au = \frac{d^2u}{dx^2} \ , \ X = \{u \in C^2[a,b] \,|\, u(a) = u(b) = 0\} \ , \ Y = C[a,b] \ .$$

Weiter seien $D_h, A_h = D_h^2 : X_h \to Y_h$ Differenzenoperatoren der Gestalt

$$\begin{aligned} D_h u_h(x) &= \frac{1}{h}\left(u_h(x+h) - u_h(x)\right) \ , \quad x \in [a,b]^0_h \ , \\ A_h u_h(x) &= D_h^2 u_h(x) = \frac{1}{h^2}\left(u_h(x+h) - 2u_h(x) + u_h(x-h)\right) \ , \quad x \in [a,b]'_h \ , \end{aligned}$$

und für $G_h = [a,b]^0_h$ bzw. $G_h = [a,b]'_h$ sei

$$X_h = \{u_h \in C[a,b]_h \,|\, u_h(a) = u_h(b) = 0\} \ , \ Y_h = C(G_h) \ .$$

Man beweise: Für jede Funktion $u \in C^2[a,b]$ gelten für $h \to 0$ die Konsistenzbedingungen

$$\max_{x \in [a,b]_h^0} |D_h u(x) - \frac{du}{dx}(x)| \to 0 \ , \ \max_{x \in [a,b]_h'} |D_h^2 u(x) - \frac{d^2 u}{dx^2}(x)| \to 0 \ .$$

17. Man beweise im Anschluß an Aufgabe 16: Die Abbildungen $A_h : X_h \to Y_h$ sind linear und bijektiv für jedes $h = (b-a)/N_h$, $N_h = 2, 3, \ldots$ Es gibt eine Konstante K, so daß für jedes p in $1 \le p < \infty$ und jedes $h = (b-a)/N_h$ die inverse Stabilitätsungleichung gilt

$$\|u_h\|_{2,p} \le K \|A_h u_h\|_p \ , \qquad u_h \in X_h \ .$$

Dabei ist

$$\|u_h\|_{2,p} = \max\left(\|u_h\|_\infty \, , \, \|D_h u_h\|_\infty \, , \, \|D_h^2 u_h\|_p\right)$$

mit den Bezeichnungen

$$\|u_h\|_\infty = \max_{x \in [a,b]_h} |u_h(x)| \ , \ \|D_h u_h\|_\infty = \max_{x \in [a,b]_h^0} |D_h u_h(x)|$$

und

$$\|D_h^2 u_h\|_p = \left(h \sum_{x \in [a,b]_h'} |D_h^2 u_h(x)|^p \right)^{1/p} \ , \ 1 \le p < \infty \ .$$

18. Sei $[a,b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Für jedes $h > 0$ sei das Punktgitter $G_h = [a,b]_h$ erklärt wie in Aufgabe 13. Sei Λ eine Nullfolge von Schrittweiten h und sei $(u_h)_{h \in \Lambda}$ eine Folge von Funktionen $u_h \in C[a,b]_h$, $h \in \Lambda$. Dann heißt diese Folge *gleichmäßig gleichgradig stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes $h \in \Lambda$ mit $0 < h < \delta$ und jedes $x, x' \in [a,b]_h$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|u_h(x) - u_h(x')| < \varepsilon$. Man beweise: Die Folge $(u_h)_{h \in \Lambda}$ ist gleichgradig stetig, wenn mit einer Zahl $\gamma > 0$ und für ein p in $1 < p \le \infty$ die Abschätzung gilt

$$\|D_h^+ u_h\|_p \le \gamma \ , \qquad h \in \Lambda \ ,$$

mit dem vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten D_h^+ und den Abkürzungen

$$\|D_h^+ u_h\|_\infty = \max_{x\in[a,b]_h^0} |D_h^+ u_h(x)|,$$

$$\|D_h^+ u_h\|_p = \left(h \sum_{x\in[a,b]_h^0} |D_h^+ u_h(x)|^p \right)^{1/p} , \; 1 < p < \infty .$$

19. Sei Λ eine Nullfolge von Schrittweiten h und sei $(u_h)_{h\in\Lambda}$ eine beschränkte, gleichmäßig gleichgradig stetige Folge reeller Funktionen $u_h \in C[a,b]_h$, $h \in \Lambda$ (vgl. Aufg. 18). Man beweise: Ist $\hat{u}_h \in C[a,b]$ die aus u_h durch lineare Interpolation in jedem Teilintervall erhaltene stückweise lineare, stetige Funktion mit $\hat{u}_h(x) = u_h(x)$, $x \in [a,b]_h$, $h \in \Lambda$, dann ist die Folge $(\hat{u}_h)_{h\in\Lambda}$ beschränkt und gleichmäßig gleichgradig stetig auf $[a,b]$.

20. Sei $[a,b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden. Bekanntlich ist eine Folge $u_k \in C^1[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, gleichgradig stetig, falls die Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind. Zeigen Sie, daß die Folge (u_k) auch gleichgradig stetig ist, falls nur gilt

$$|u_k|_{1,2} := \left(\int_a^b |u_k'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \le C , \qquad k \in \mathbb{N} .$$

21. Sei $G_h = \{x_0, \ldots, x_N\}$ ein äquidistantes Gitter in $[a,b]$ mit der Schrittweite h und $x_0 = a, x_N = b$. Dann wird durch

$$(u_h, v_h) = \sum_{x\in G_h} u_h(x)\overline{v_h(x)}h \; , \; u_h, v_h \in C(G_h) ,$$

ein Skalarprodukt für $C(G_h)$ definiert; hierbei bezeichnet $C(G_h)$ den Raum aller Gitterfunktionen auf G_h. Man beweise für den vorwärtsgenommenen bzw. rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten erster Ordnung D_h^+ bzw. D_h^- sowie den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung D_h^2 die Beziehungen

(i) $(D_h^+ u_h, v_h) = (u_h, D_h^- v_h)$

(ii) $(D_h^- u_h, v_h) = (u_h, D_h^+ v_h)$

(iii) $(D_h^2 u_h, v_h) = -(D_h^+ u_h, D_h^+ v_h) = -(D_h^- u_h, D_h^- v_h) = (u_h, D_h^2 v_h)$

für alle Funktionen $u_h, v_h \in C(G_h)$ mit $u_h(a) = u_h(b) = 0$, $v_h(a) = v_h(b) = 0$.

Anhang C

Praktische Übungsaufgaben mit Musterlösungen

1. **Aufgabe:** Ein Satellit auf einer Umlaufbahn im Erde–Mond–System erfüllt mit seinen Koordinatenfunktionen in der Bewegungsebene das folgende System zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} u'' &= u + 2v' - (1-\mu)\frac{u+\mu}{[(u+\mu)^2+v^2]^{3/2}} - \mu\frac{u-(1-\mu)}{[(u-1+\mu)^2+v^2]^{3/2}} \ , \\ v'' &= v - 2u' - (1-\mu)\frac{v}{[(u+\mu)^2+v^2]^{3/2}} - \mu\frac{v}{[(u-1+\mu)^2+v^2]^{3/2}} \ ; \end{aligned}$$

dabei bedeutet $\mu = \dfrac{1}{82.45}$ die relative Mondmasse.

Bekanntlich läßt sich dieses durch die Setzung

$$u_1 = u \ , \quad u_2 = u' \ , \quad u_3 = v \ , \quad u_4 = v'$$

in ein System von vier Gleichungen erster Ordnung umschreiben.

Mit Hilfe von *Einschrittverfahren* sollen Näherungen $u_h = (u_h^1 \, , \, u_h^2 \, , \, u_h^3 \, , \, u_h^4)$ der Lösung $u = (u_1 \, , \, u_2 \, , \, u_3 \, , \, u_4)$ berechnet werden. Hierbei wird im folgenden die Näherungslösung des *klassischen Runge–Kutta–Verfahrens* (s. z. B. Stummel–Hainer: Praktische Mathematik, § 11.2.3) für das obige System mit $y_h = (y_h^1 \, , \, y_h^2 \, , \, y_h^3 \, , \, y_h^4)$ bezeichnet und für Fehleraussagen herangezogen. Alle Rechnungen sollen doppeltgenau ausgeführt werden.

Man nehme die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= u_h^1(0) = 1.2\,,\ u'(0) = u_h^2(0) = v(0) = u_h^3(0) = 0\,, \\ v'(0) &= u_h^4(0) = -1.049357509830350\,, \end{aligned}$$

und berechne für $t = 0.0(h)13.0$ mit $h = 10^{-3}$ und $h = 10^{-4}$ Näherungen u_h nach den folgenden Verfahren:

1) *Verbessertes Polygonzugverfahren*

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hf\left(t + \frac{h}{2},\ u_h(t) + \frac{h}{2} f(t,\, u_h(t))\right)\ .$$

2) *Verbessertes Euler–Cauchy–Verfahren*

$$u_h(t+h) = u_h(t) + \frac{h}{2}\left\{f(t,\, u_h(t)) + f(t+h,\, u_h(t) + hf(t,\, u_h(t)))\right\}\ .$$

3) *„Optimales" Verfahren* für $m = 2$

$$\begin{aligned} u_h(t+h) = u_h(t) &+ \\ &+ \frac{h}{4}\left\{f(t,\, u_h(t)) + 3f\left(t + \frac{2}{3}h,\, u_h(t) + \frac{2}{3}hf(t,\, u_h(t))\right)\right\}\ . \end{aligned}$$

4) *Optimale Formel von Kuntzmann* für $m = 4$

$$u_h(t+h) = u_h(t) + \frac{h}{360}(55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4)(t,\, u_h(t))$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(t,\, z) &= f(t,\, z)\,, \\ k_2(t,\, z) &= f\left(t + \frac{2}{5}h,\ z + \frac{2}{5}hk_1(t,\, z)\right) \\ k_3(t,\, z) &= f\left(t + \frac{3}{5}h,\ z - \frac{3}{20}hk_1(t,\, z) + \frac{3}{4}hk_2(t,\, z)\right) \\ k_4(t,\, z) &= f\left(t + h,\ z + \frac{19}{44}hk_1(t,\, z) - \frac{15}{44}hk_2(t,\, z) + \frac{40}{44}hk_3(t,\, z)\right)\ . \end{aligned}$$

Zum Vergleich berechnen Sie Näherungen noch mit dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren — um y_h zu erhalten.

Erstellen Sie für jedes der obigen 4 Verfahren und jede der 2 Schrittweiten eine Tabelle mit den Größen

$$t,\ u_h^1(t),\ y_h^1(t),\ u_h^1(t) - y_h^1(t),\ u_h^3(t),\ y_h^3(t),\ u_h^3(t) - y_h^3(t)\ ;$$

drucken Sie dies jedoch nur für t in Schritten von 0.5.

Als Programmiersprache verwenden Sie FORTRAN, (Turbo–)PASCAL, C oder schreiben Sie eine Prozedur für MAPLE. Geben Sie den Graphen y_h^1, y_h^3 (mit MAPLE oder GNUPLOT) aus. Für Ihre Programmierarbeiten steht Ihnen der CIP–Raum des Fachbereichs zur Verfügung; Benutzerzeiten werden in der Vorlesung angegeben.

Lösung:

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	-1.610e-07	-4.512e-01	-4.512e-01	-1.730e-07
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-3.388e-07	-5.537e-01	-5.537e-01	-2.215e-07
1.500e+00	-1.356e-01	-1.329e-01	-2.604e-03	-9.147e-02	-9.410e-02	2.633e-03
2.000e+00	-5.900e-01	-5.633e-01	-2.670e-02	-6.417e-01	-6.512e-01	9.499e-03
2.500e+00	-1.061e+00	-1.018e+00	-4.355e-02	-5.189e-01	-5.419e-01	2.299e-02
3.000e+00	-1.313e+00	-1.255e+00	-5.741e-02	-5.258e-02	-1.006e-01	4.801e-02
3.500e+00	-1.211e+00	-1.146e+00	-6.550e-02	4.875e-01	3.973e-01	9.023e-02
4.000e+00	-8.090e-01	-7.479e-01	-6.110e-02	8.241e-01	6.632e-01	1.609e-01
4.500e+00	-3.305e-01	-2.914e-01	-3.915e-02	7.492e-01	4.399e-01	3.094e-01
5.000e+00	7.096e-02	3.606e-01	-2.896e-01	-1.625e-02	4.399e-01	-4.561e-01
5.500e+00	7.639e-01	8.401e-01	-7.625e-02	3.556e-01	5.470e-01	-1.914e-01
6.000e+00	1.164e+00	1.167e+00	-2.639e-03	4.373e-02	1.971e-01	-1.534e-01
6.500e+00	1.156e+00	1.118e+00	3.785e-02	-4.974e-01	-3.033e-01	-1.941e-01
7.000e+00	7.882e-01	7.318e-01	5.640e-02	-8.865e-01	-5.711e-01	-3.154e-01
7.500e+00	2.877e-01	2.509e-01	3.683e-02	-8.935e-01	-3.009e-01	-5.926e-01
8.000e+00	1.682e-02	-3.878e-01	4.046e-01	-3.762e-01	-5.552e-01	1.790e-01
8.500e+00	-7.320e-01	-8.566e-01	1.245e-01	-2.771e-01	-6.374e-01	3.603e-01
9.000e+00	-1.322e+00	-1.202e+00	-1.203e-01	4.537e-02	-2.934e-01	3.387e-01
9.500e+00	-1.515e+00	-1.229e+00	-2.857e-01	7.997e-01	2.177e-01	5.820e-01
1.000e+01	-1.167e+00	-9.225e-01	-2.447e-01	1.645e+00	6.039e-01	1.041e+00
1.050e+01	-3.190e-01	-4.538e-01	1.348e-01	2.237e+00	5.996e-01	1.638e+00
1.100e+01	8.144e-01	1.781e-01	6.363e-01	2.316e+00	1.803e-01	2.135e+00
1.150e+01	1.909e+00	6.602e-01	1.248e+00	1.778e+00	5.777e-01	1.201e+00
1.200e+01	2.631e+00	1.076e+00	1.555e+00	7.162e-01	3.690e-01	3.471e-01
1.250e+01	2.744e+00	1.187e+00	1.557e+00	-6.127e-01	-1.190e-01	-4.937e-01
1.300e+01	2.180e+00	9.050e-01	1.275e+00	-1.858e+00	-5.132e-01	-1.345e+00

Tabelle C.1: Verbessertes Polygonzugverfahren für $h = 10^{-3}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	-1.116e-07	-4.512e-01	-4.512e-01	-3.046e-07
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-3.379e-07	-5.537e-01	-5.537e-01	-5.108e-07
1.500e+00	-1.358e-01	-1.329e-01	-2.872e-03	-9.145e-02	-9.410e-02	2.652e-03
2.000e+00	-5.988e-01	-5.633e-01	-3.547e-02	-6.445e-01	-6.512e-01	6.683e-03
2.500e+00	-1.085e+00	-1.018e+00	-6.718e-02	-5.195e-01	-5.419e-01	2.241e-02
3.000e+00	-1.354e+00	-1.255e+00	-9.900e-02	-3.801e-02	-1.006e-01	6.258e-02
3.500e+00	-1.266e+00	-1.146e+00	-1.202e-01	5.359e-01	3.973e-01	1.386e-01
4.000e+00	-8.602e-01	-7.479e-01	-1.123e-01	9.288e-01	6.632e-01	2.656e-01
4.500e+00	-3.465e-01	-2.914e-01	-5.510e-02	9.436e-01	4.399e-01	5.037e-01
5.000e+00	-5.495e-02	3.606e-01	-4.155e-01	4.847e-01	4.399e-01	4.480e-02
5.500e+00	5.803e-01	8.401e-01	-2.598e-01	1.915e-01	5.470e-01	-3.555e-01
6.000e+00	1.071e+00	1.167e+00	-9.608e-02	-4.518e-02	1.971e-01	-2.423e-01
6.500e+00	1.003e+00	1.118e+00	-1.149e-01	-5.814e-01	-3.033e-01	-2.781e-01
7.000e+00	5.708e-01	7.318e-01	-1.610e-01	-8.841e-01	-5.711e-01	-3.130e-01
7.500e+00	8.385e-02	2.509e-01	-1.670e-01	-7.054e-01	-3.009e-01	-4.045e-01
8.000e+00	-2.773e+00	-3.878e-01	-2.385e+00	1.547e+00	-5.552e-01	2.102e+00
8.500e+00	-8.068e+00	-8.566e-01	-7.212e+00	1.281e+01	-6.374e-01	1.345e+01
9.000e+00	-1.683e+00	-1.202e+00	-4.811e-01	2.705e+01	-2.934e-01	2.734e+01
9.500e+00	1.656e+01	-1.229e+00	1.779e+01	3.537e+01	2.177e-01	3.516e+01
1.000e+01	4.114e+01	-9.225e-01	4.206e+01	3.018e+01	6.039e-01	2.958e+01
1.050e+01	6.242e+01	-4.538e-01	6.288e+01	8.349e+00	5.996e-01	7.750e+00
1.100e+01	6.995e+01	1.781e-01	6.977e+01	-2.689e+01	1.803e-01	-2.707e+01
1.150e+01	5.623e+01	6.602e-01	5.557e+01	-6.625e+01	5.777e-01	-6.683e+01
1.200e+01	2.000e+01	1.076e+00	1.893e+01	-9.681e+01	3.690e-01	-9.718e+01
1.250e+01	-3.235e+01	1.187e+00	-3.354e+01	-1.060e+02	-1.190e-01	-1.059e+02
1.300e+01	-8.775e+01	9.050e-01	-8.866e+01	-8.587e+01	-5.132e-01	-8.536e+01

Tabelle C.2: Verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren für $h = 10^{-3}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	-1.445e-07	-4.512e-01	-4.512e-01	-2.169e-07
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-3.384e-07	-5.537e-01	-5.537e-01	-3.180e-07
1.500e+00	-1.356e-01	-1.329e-01	-2.632e-03	-9.147e-02	-9.410e-02	2.636e-03
2.000e+00	-5.910e-01	-5.633e-01	-2.767e-02	-6.420e-01	-6.512e-01	9.185e-03
2.500e+00	-1.064e+00	-1.018e+00	-4.617e-02	-5.190e-01	-5.419e-01	2.291e-02
3.000e+00	-1.317e+00	-1.255e+00	-6.205e-02	-5.099e-02	-1.006e-01	4.960e-02
3.500e+00	-1.217e+00	-1.146e+00	-7.167e-02	4.929e-01	3.973e-01	9.558e-02
4.000e+00	-8.150e-01	-7.479e-01	-6.706e-02	8.359e-01	6.632e-01	1.727e-01
4.500e+00	-3.330e-01	-2.914e-01	-4.158e-02	7.720e-01	4.399e-01	3.321e-01
5.000e+00	-5.926e-02	3.606e-01	-4.198e-01	-7.125e-03	4.399e-01	-4.470e-01
5.500e+00	7.491e-01	8.401e-01	-9.102e-02	3.399e-01	5.470e-01	-2.071e-01
6.000e+00	1.158e+00	1.167e+00	-8.789e-03	3.514e-02	1.971e-01	-1.619e-01
6.500e+00	1.153e+00	1.118e+00	3.492e-02	-5.077e-01	-3.033e-01	-2.044e-01
7.000e+00	7.852e-01	7.318e-01	5.344e-02	-9.021e-01	-5.711e-01	-3.310e-01
7.500e+00	2.804e-01	2.509e-01	2.957e-02	-9.176e-01	-3.009e-01	-6.167e-01
8.000e+00	-9.352e-04	-3.878e-01	3.869e-01	-4.268e-01	-5.552e-01	1.284e-01
8.500e+00	-7.279e-01	-8.566e-01	1.287e-01	-2.477e-01	-6.374e-01	3.897e-01
9.000e+00	-1.373e+00	-1.202e+00	-1.708e-01	9.982e-02	-2.934e-01	3.932e-01
9.500e+00	-1.590e+00	-1.229e+00	-3.605e-01	9.315e-01	2.177e-01	7.138e-01
1.000e+01	-1.200e+00	-9.225e-01	-2.774e-01	1.884e+00	6.039e-01	1.280e+00
1.050e+01	-2.213e-01	-4.538e-01	2.325e-01	2.565e+00	5.996e-01	1.966e+00
1.100e+01	1.119e+00	1.781e-01	9.409e-01	2.652e+00	1.803e-01	2.472e+00
1.150e+01	2.444e+00	6.602e-01	1.784e+00	1.991e+00	5.777e-01	1.414e+00
1.200e+01	3.339e+00	1.076e+00	2.262e+00	6.553e-01	3.690e-01	2.862e-01
1.250e+01	3.471e+00	1.187e+00	2.283e+00	-1.064e+00	-1.190e-01	-9.445e-01
1.300e+01	2.703e+00	9.050e-01	1.798e+00	-2.726e+00	-5.132e-01	-2.213e+00

Tabelle C.3: „Optimales“ Verfahren ($m = 2$) für $h = 10^{-3}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t)-y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t)-y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	2.476e-14	-4.512e-01	-4.512e-01	2.426e-14
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	3.131e-14	-5.537e-01	-5.537e-01	2.964e-14
1.500e+00	-1.329e-01	-1.329e-01	4.138e-06	-9.411e-02	-9.410e-02	-2.846e-06
2.000e+00	-5.633e-01	-5.633e-01	6.226e-05	-6.512e-01	-6.512e-01	-4.124e-07
2.500e+00	-1.018e+00	-1.018e+00	1.350e-04	-5.419e-01	-5.419e-01	-2.168e-05
3.000e+00	-1.255e+00	-1.255e+00	2.200e-04	-1.007e-01	-1.006e-01	-1.008e-04
3.500e+00	-1.145e+00	-1.146e+00	2.927e-04	3.970e-01	3.973e-01	-2.709e-04
4.000e+00	-7.476e-01	-7.479e-01	3.166e-04	6.626e-01	6.632e-01	-5.845e-04
4.500e+00	-2.911e-01	-2.914e-01	3.184e-04	4.386e-01	4.399e-01	-1.335e-03
5.000e+00	3.609e-01	3.606e-01	3.792e-04	4.411e-01	4.399e-01	1.183e-03
5.500e+00	8.402e-01	8.401e-01	1.124e-04	5.475e-01	5.470e-01	5.254e-04
6.000e+00	1.167e+00	1.167e+00	-2.069e-04	1.975e-01	1.971e-01	4.032e-04
6.500e+00	1.117e+00	1.118e+00	-5.674e-04	-3.026e-01	-3.033e-01	6.525e-04
7.000e+00	7.309e-01	7.318e-01	-8.686e-04	-5.696e-01	-5.711e-01	1.527e-03
7.500e+00	2.495e-01	2.509e-01	-1.383e-03	-2.969e-01	-3.009e-01	4.001e-03
8.000e+00	-3.886e-01	-3.878e-01	-8.175e-04	-5.576e-01	-5.552e-01	-2.354e-03
8.500e+00	-8.571e-01	-8.566e-01	-5.378e-04	-6.383e-01	-6.374e-01	-8.996e-04
9.000e+00	-1.202e+00	-1.202e+00	5.069e-05	-2.938e-01	-2.934e-01	-4.340e-04
9.500e+00	-1.228e+00	-1.229e+00	7.127e-04	2.170e-01	2.177e-01	-7.077e-04
1.000e+01	-9.213e-01	-9.225e-01	1.146e-03	6.021e-01	6.039e-01	-1.730e-03
1.050e+01	-4.527e-01	-4.538e-01	1.174e-03	5.957e-01	5.996e-01	-3.850e-03
1.100e+01	1.816e-01	1.781e-01	3.507e-03	1.885e-01	1.803e-01	8.206e-03
1.150e+01	6.615e-01	6.602e-01	1.357e-03	5.802e-01	5.777e-01	2.517e-03
1.200e+01	1.077e+00	1.076e+00	4.513e-04	3.702e-01	3.690e-01	1.149e-03
1.250e+01	1.187e+00	1.187e+00	-5.808e-04	-1.178e-01	-1.190e-01	1.170e-03
1.300e+01	9.035e-01	9.050e-01	-1.527e-03	-5.107e-01	-5.132e-01	2.492e-03

Tabelle C.4: Optimale Formel von Kuntzmann ($m = 4$) für $h = 10^{-3}$

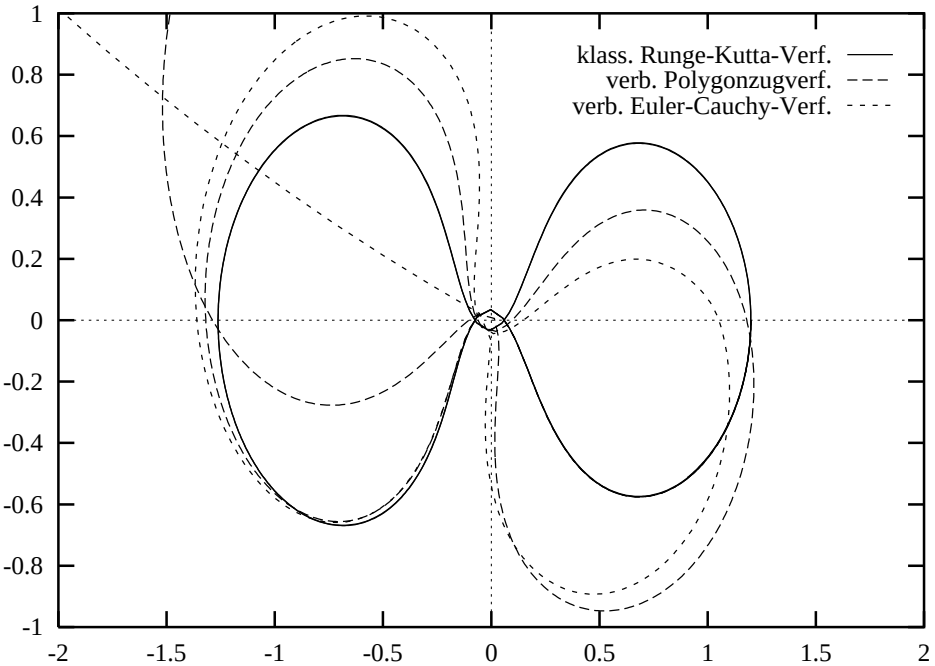


Abbildung C.1: Umlaufbahnen des verbesserten Polygonzugverfahrens und des verbesserten Verfahrens von Euler-Cauchy für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klass. Runge-Kutta-Verf.

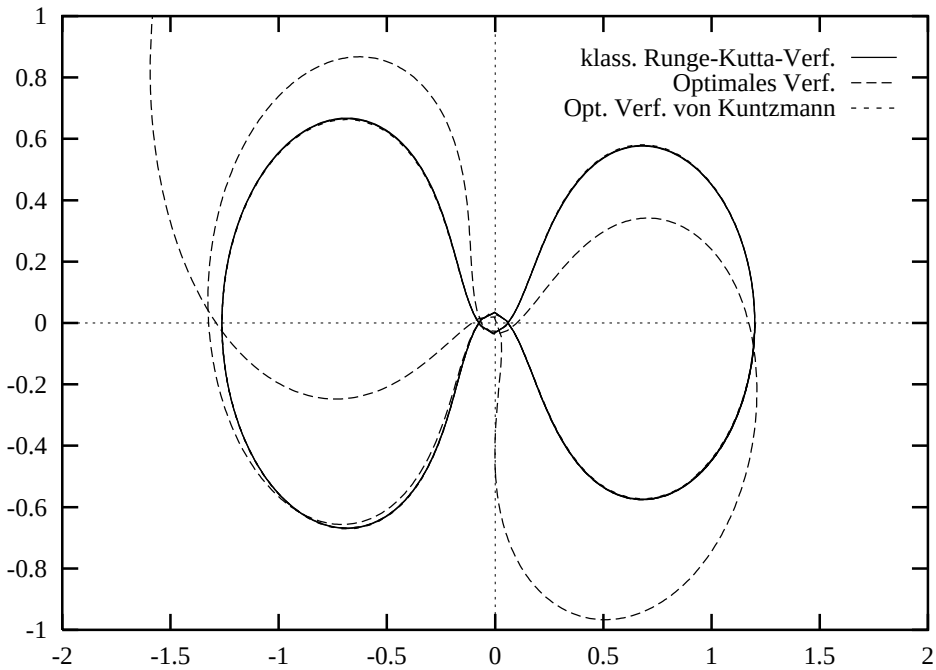


Abbildung C.2: Umlaufbahnen des „optimalen“ Verfahrens und des optimalen Verfahrens von Kuntzmann für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	-1.611e-09	-4.512e-01	-4.512e-01	-1.728e-09
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-3.387e-09	-5.537e-01	-5.537e-01	-2.211e-09
1.500e+00	-1.330e-01	-1.330e-01	-2.418e-05	-9.407e-02	-9.410e-02	2.751e-05
2.000e+00	-5.636e-01	-5.634e-01	-1.715e-04	-6.511e-01	-6.512e-01	1.299e-04
2.500e+00	-1.018e+00	-1.018e+00	-1.665e-04	-5.416e-01	-5.419e-01	2.431e-04
3.000e+00	-1.256e+00	-1.256e+00	-8.726e-05	-1.002e-01	-1.005e-01	3.212e-04
3.500e+00	-1.146e+00	-1.146e+00	7.903e-06	3.979e-01	3.976e-01	3.436e-04
4.000e+00	-7.482e-01	-7.482e-01	6.180e-05	6.642e-01	6.638e-01	3.406e-04
4.500e+00	-2.917e-01	-2.917e-01	7.920e-06	4.417e-01	4.412e-01	4.515e-04
5.000e+00	3.603e-01	3.602e-01	9.863e-05	4.381e-01	4.387e-01	-5.268e-04
5.500e+00	8.402e-01	8.400e-01	2.293e-04	5.459e-01	5.465e-01	-5.640e-04
6.000e+00	1.167e+00	1.167e+00	1.471e-04	1.960e-01	1.967e-01	-7.065e-04
6.500e+00	1.118e+00	1.118e+00	-6.501e-05	-3.047e-01	-3.040e-01	-7.320e-04
7.000e+00	7.326e-01	7.327e-01	-1.290e-04	-5.734e-01	-5.726e-01	-7.255e-04
7.500e+00	2.524e-01	2.523e-01	1.048e-04	-3.059e-01	-3.049e-01	-1.018e-03
8.000e+00	-3.871e-01	-3.870e-01	-1.700e-04	-5.521e-01	-5.528e-01	7.240e-04
8.500e+00	-8.563e-01	-8.560e-01	-3.031e-04	-6.357e-01	-6.365e-01	7.503e-04
9.000e+00	-1.202e+00	-1.202e+00	-1.882e-04	-2.920e-01	-2.929e-01	9.090e-04
9.500e+00	-1.230e+00	-1.230e+00	5.160e-05	2.194e-01	2.184e-01	9.884e-04
1.000e+01	-9.234e-01	-9.236e-01	2.648e-04	6.066e-01	6.056e-01	9.545e-04
1.050e+01	-4.548e-01	-4.550e-01	2.807e-04	6.045e-01	6.035e-01	9.640e-04
1.100e+01	1.739e-01	1.743e-01	-4.559e-04	1.702e-01	1.717e-01	-1.473e-03
1.150e+01	6.591e-01	6.588e-01	3.120e-04	5.741e-01	5.751e-01	-9.947e-04
1.200e+01	1.076e+00	1.076e+00	2.938e-04	3.666e-01	3.679e-01	-1.214e-03
1.250e+01	1.188e+00	1.188e+00	-1.153e-04	-1.216e-01	-1.202e-01	-1.392e-03
1.300e+01	9.061e-01	9.066e-01	-4.216e-04	-5.170e-01	-5.157e-01	-1.246e-03

Tabelle C.5: Verbessertes Polygonzugverfahren für $h = 10^{-4}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	-1.114e-09	-4.512e-01	-4.512e-01	-3.045e-09
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-3.374e-09	-5.537e-01	-5.537e-01	-5.108e-09
1.500e+00	-1.330e-01	-1.330e-01	-2.450e-05	-9.407e-02	-9.410e-02	2.761e-05
2.000e+00	-5.636e-01	-5.634e-01	-1.817e-04	-6.511e-01	-6.512e-01	1.267e-04
2.500e+00	-1.018e+00	-1.018e+00	-1.938e-04	-5.416e-01	-5.419e-01	2.418e-04
3.000e+00	-1.256e+00	-1.256e+00	-1.367e-04	-1.002e-01	-1.005e-01	3.364e-04
3.500e+00	-1.146e+00	-1.146e+00	-6.117e-05	3.980e-01	3.976e-01	3.982e-04
4.000e+00	-7.483e-01	-7.482e-01	-1.431e-05	6.643e-01	6.638e-01	4.690e-04
4.500e+00	-2.918e-01	-2.917e-01	-6.668e-05	4.420e-01	4.412e-01	7.529e-04
5.000e+00	3.602e-01	3.602e-01	5.635e-06	4.379e-01	4.387e-01	-7.927e-04
5.500e+00	8.402e-01	8.400e-01	1.960e-04	5.458e-01	5.465e-01	-6.732e-04
6.000e+00	1.167e+00	1.167e+00	1.910e-04	1.959e-01	1.967e-01	-7.828e-04
6.500e+00	1.118e+00	1.118e+00	6.890e-05	-3.048e-01	-3.040e-01	-8.659e-04
7.000e+00	7.328e-01	7.327e-01	7.658e-05	-5.737e-01	-5.726e-01	-1.064e-03
7.500e+00	2.527e-01	2.523e-01	4.178e-04	-3.069e-01	-3.049e-01	-1.921e-03
8.000e+00	-3.869e-01	-3.870e-01	2.823e-05	-5.515e-01	-5.528e-01	1.263e-03
8.500e+00	-8.562e-01	-8.560e-01	-1.686e-04	-6.355e-01	-6.365e-01	9.442e-04
9.000e+00	-1.202e+00	-1.202e+00	-1.958e-04	-2.919e-01	-2.929e-01	9.891e-04
9.500e+00	-1.230e+00	-1.230e+00	-1.186e-04	2.195e-01	2.184e-01	1.131e-03
1.000e+01	-9.237e-01	-9.236e-01	-1.298e-05	6.070e-01	6.056e-01	1.340e-03
1.050e+01	-4.550e-01	-4.550e-01	-1.247e-06	6.054e-01	6.035e-01	1.850e-03
1.100e+01	1.730e-01	1.743e-01	-1.345e-03	1.683e-01	1.717e-01	-3.456e-03
1.150e+01	6.588e-01	6.588e-01	-2.585e-05	5.735e-01	5.751e-01	-1.577e-03
1.200e+01	1.076e+00	1.076e+00	1.741e-04	3.664e-01	3.679e-01	-1.460e-03
1.250e+01	1.188e+00	1.188e+00	2.162e-05	-1.219e-01	-1.202e-01	-1.637e-03
1.300e+01	9.065e-01	9.066e-01	-5.380e-05	-5.175e-01	-5.157e-01	-1.807e-03

Tabelle C.6: Verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren für $h = 10^{-4}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	-1.445e-09	-4.512e-01	-4.512e-01	-2.167e-09
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-3.382e-09	-5.537e-01	-5.537e-01	-3.177e-09
1.500e+00	-1.330e-01	-1.330e-01	-2.421e-05	-9.407e-02	-9.410e-02	2.753e-05
2.000e+00	-5.636e-01	-5.634e-01	-1.727e-04	-6.511e-01	-6.512e-01	1.296e-04
2.500e+00	-1.018e+00	-1.018e+00	-1.695e-04	-5.416e-01	-5.419e-01	2.430e-04
3.000e+00	-1.256e+00	-1.256e+00	-9.275e-05	-1.002e-01	-1.005e-01	3.229e-04
3.500e+00	-1.146e+00	-1.146e+00	2.283e-07	3.979e-01	3.976e-01	3.497e-04
4.000e+00	-7.482e-01	-7.482e-01	5.334e-05	6.642e-01	6.638e-01	3.549e-04
4.500e+00	-2.917e-01	-2.917e-01	-3.716e-07	4.417e-01	4.412e-01	4.850e-04
5.000e+00	3.603e-01	3.602e-01	8.830e-05	4.381e-01	4.387e-01	-5.564e-04
5.500e+00	8.402e-01	8.400e-01	2.256e-04	5.459e-01	5.465e-01	-5.761e-04
6.000e+00	1.167e+00	1.167e+00	1.520e-04	1.959e-01	1.967e-01	-7.150e-04
6.500e+00	1.118e+00	1.118e+00	-5.012e-05	-3.047e-01	-3.040e-01	-7.469e-04
7.000e+00	7.326e-01	7.327e-01	-1.062e-04	-5.734e-01	-5.726e-01	-7.631e-04
7.500e+00	2.524e-01	2.523e-01	1.397e-04	-3.060e-01	-3.049e-01	-1.118e-03
8.000e+00	-3.871e-01	-3.870e-01	-1.480e-04	-5.520e-01	-5.528e-01	7.839e-04
8.500e+00	-8.563e-01	-8.560e-01	-2.881e-04	-6.357e-01	-6.365e-01	7.718e-04
9.000e+00	-1.202e+00	-1.202e+00	-1.891e-04	-2.920e-01	-2.929e-01	9.179e-04
9.500e+00	-1.230e+00	-1.230e+00	3.270e-05	2.194e-01	2.184e-01	1.004e-03
1.000e+01	-9.234e-01	-9.236e-01	2.339e-04	6.066e-01	6.056e-01	9.974e-04
1.050e+01	-4.548e-01	-4.550e-01	2.494e-04	6.046e-01	6.035e-01	1.062e-03
1.100e+01	1.738e-01	1.743e-01	-5.542e-04	1.700e-01	1.717e-01	-1.693e-03
1.150e+01	6.591e-01	6.588e-01	2.745e-04	5.740e-01	5.751e-01	-1.059e-03
1.200e+01	1.076e+00	1.076e+00	2.805e-04	3.666e-01	3.679e-01	-1.241e-03
1.250e+01	1.188e+00	1.188e+00	-1.001e-04	-1.217e-01	-1.202e-01	-1.419e-03
1.300e+01	9.062e-01	9.066e-01	-3.807e-04	-5.170e-01	-5.157e-01	-1.308e-03

Tabelle C.7: „Optimales“ Verfahren ($m = 2$) für $h = 10^{-4}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000e+00	1.200e+00	1.200e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-01	9.980e-01	9.980e-01	0.000e+00	-4.512e-01	-4.512e-01	0.000e+00
1.000e+00	5.453e-01	5.453e-01	-2.220e-16	-5.537e-01	-5.537e-01	0.000e+00
1.500e+00	-1.330e-01	-1.330e-01	3.105e-10	-9.410e-02	-9.410e-02	-3.142e-10
2.000e+00	-5.634e-01	-5.634e-01	2.398e-09	-6.512e-01	-6.512e-01	-1.465e-09
2.500e+00	-1.018e+00	-1.018e+00	2.876e-09	-5.419e-01	-5.419e-01	-2.903e-09
3.000e+00	-1.256e+00	-1.256e+00	2.607e-09	-1.005e-01	-1.005e-01	-4.368e-09
3.500e+00	-1.146e+00	-1.146e+00	2.067e-09	3.976e-01	3.976e-01	-5.874e-09
4.000e+00	-7.482e-01	-7.482e-01	1.632e-09	6.638e-01	6.638e-01	-8.148e-09
4.500e+00	-2.917e-01	-2.917e-01	2.242e-09	4.412e-01	4.412e-01	-1.491e-08
5.000e+00	3.602e-01	3.602e-01	1.697e-09	4.387e-01	4.387e-01	1.468e-08
5.500e+00	8.400e-01	8.400e-01	-1.750e-09	5.465e-01	5.465e-01	1.024e-08
6.000e+00	1.167e+00	1.167e+00	-3.171e-09	1.967e-01	1.967e-01	1.095e-08
6.500e+00	1.118e+00	1.118e+00	-3.419e-09	-3.040e-01	-3.040e-01	1.306e-08
7.000e+00	7.327e-01	7.327e-01	-4.895e-09	-5.726e-01	-5.726e-01	1.940e-08
7.500e+00	2.523e-01	2.523e-01	-1.114e-08	-3.049e-01	-3.049e-01	4.068e-08
8.000e+00	-3.870e-01	-3.870e-01	-4.136e-09	-5.528e-01	-5.528e-01	-2.561e-08
8.500e+00	-8.560e-01	-8.560e-01	-5.397e-10	-6.365e-01	-6.365e-01	-1.513e-08
9.000e+00	-1.202e+00	-1.202e+00	2.517e-09	-2.929e-01	-2.929e-01	-1.349e-08
9.500e+00	-1.230e+00	-1.230e+00	4.703e-09	2.184e-01	2.184e-01	-1.642e-08
1.000e+01	-9.236e-01	-9.236e-01	5.493e-09	6.056e-01	6.056e-01	-2.361e-08
1.050e+01	-4.550e-01	-4.550e-01	5.451e-09	6.035e-01	6.035e-01	-3.935e-08
1.100e+01	1.743e-01	1.743e-01	3.287e-08	1.717e-01	1.717e-01	7.938e-08
1.150e+01	6.588e-01	6.588e-01	6.728e-09	5.751e-01	5.751e-01	3.015e-08
1.200e+01	1.076e+00	1.076e+00	1.489e-10	3.679e-01	3.679e-01	2.233e-08
1.250e+01	1.188e+00	1.188e+00	-2.924e-09	-1.202e-01	-1.202e-01	2.447e-08
1.300e+01	9.066e-01	9.066e-01	-6.453e-09	-5.157e-01	-5.157e-01	3.259e-08

Tabelle C.8: Optimale Formel von Kuntzmann ($m = 4$) für $h = 10^{-4}$

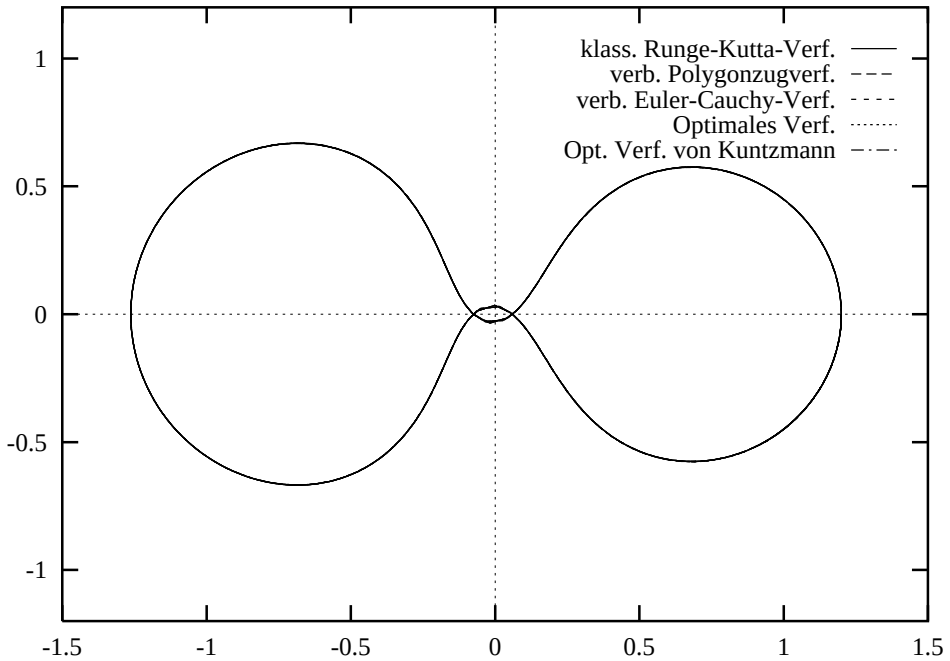


Abbildung C.3: Umlaufbahnen der vier Verfahren für $h = 10^{-4}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

2. **Aufgabe:** Das Differentialgleichungssystem für die Satellitenbahn soll mit Hilfe von **Mehrschritt-Differenzenverfahren** numerisch integriert werden. Die zugehörige Anfangswertaufgabe ist als System erster Ordnung mit der Lösung $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ und den Anfangsbedingungen wie auf dem praktischen Übungsblatt (1) gestellt. Die Lösung des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens für diese Aufgabe wird im folgenden mit $y_h = (y_h^1, y_h^2, y_h^3, y_h^4)$ bezeichnet und für Fehleraussagen herangezogen.

   Gesucht sind Näherungen $u_h(x) = (u_h^1(t), u_h^2(t), u_h^3(t), u_h^4(t))$ der Lösung $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Als Startwerte für die folgenden Verfahren setze man

$$u_h(t) = y_h(t) \quad \text{für} \quad \begin{cases} t = 0, h, 2h, 3h & \text{Verfahren 1)} \\ z = 0, h, 2h & \text{Verfahren 2), 3), 4).} \end{cases}$$

   Man berechne und drucke für t von 0 bis 13 und die Schrittweite $h = 10^{-3}$

$$t, \quad u_h^1(t), \quad u_h^1(t) - y_h^1(t), \quad u_h^3(t), \quad u_h^3(t) - y_h^3(t)\,,$$

   mit den folgenden Näherungsverfahren und den Bezeichnungen

$$t_j = t + jh\,, \quad f_j = f(t_j, u_h(t_j))\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N\,;$$

   drucken Sie dies jedoch nur in Schritten von 0.25.

   1) **Extrapolationsverfahren von Adams** (s=4)

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\{55f_{j-1} - 59f_{j-2} + 37f_{j-3} - 9f_{j-4}\}\,, \quad j = 4, 5, \ldots\,.$$

   2) **Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams** (s= 3)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{12}\{23f_{j-1} - 16f_{j-2} + 5f_{j-3}\}\,, \\ u_h(t_j) &= u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\{9\tilde{f}_j + 19f_{j-1} - 5f_{j-2} + f_{j-3}\}\,, \quad j = 3, 4, \ldots\,, \end{aligned}$$

   mit $\tilde{f}_j = f(t_j, \tilde{u}_h(t_j))$.

   3) **Interpolationsverfahren von Adams** (s=3)

$$u_h(t_j) = u_h(t_{j-1}) + \frac{h}{24}\{9f_j + 19f_{j-1} - 5f_{j-2} + f_{j-3}\}\,, \quad j = 3, 4, \ldots\,.$$

   Diese nichtlineare Gleichung $z = g(z)$ für $z = u_h(t_j)$ löse man näherungsweise, indem man vier Iterationsschritte ausführt gemäß

$$z^{(0)} = \tilde{u}_h(t_j)\,, \quad z^{(n+1)} = g(z^{(n)})\,, \quad n = 0, 1, 2, 3\,.$$

Dabei ist $\tilde{u}_h(t_j)$ in Verfahren 2) definiert und $u_h(t_j)$ wird dann gleich $z^{(4)}$ gesetzt.

4) **Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Milne** (s=3)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(t_j) &= u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\{7f_{j-1} - 2f_{j-2} + f_{j-3}\}\,, \\ u_h(t_j) &= u_h(t_{j-2}) + \frac{h}{3}\{\tilde{f}_j + 4f_{j-1} + f_{j-2}\}\,, \quad j = 3, 4, \ldots\,, \end{aligned}$$

mit $\tilde{f}_j = f(t_j, \tilde{u}_h(t_j))$.

Als Programmiersprache verwenden Sie FORTRAN, (Turbo–)PASCAL, C oder schreiben Sie eine Prozedur für MAPLE. Geben Sie die Graphen für (u_h^1, u_h^3) (mit MAPLE oder GNUPLOT) aus. Für Ihre Programmierarbeiten steht Ihnen der CIP–Raum des Fachbereichs zur Verfügung; Benutzerzeiten werden in der Vorlesung angegeben.

Lösung:

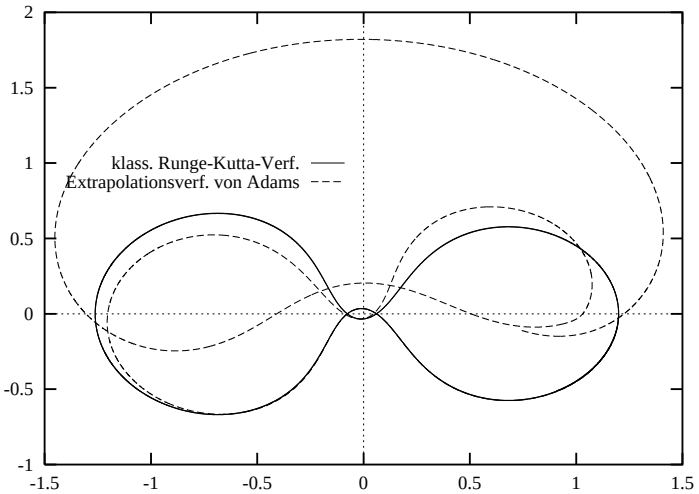


Abbildung C.4: Extrapolationsverfahren von Adams ($s = 4$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.0000e+00	1.2000e+00	1.2000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
2.5000e-01	1.1451e+00	1.1451e+00	1.2260e-11	-2.5175e-01	-2.5175e-01	-2.0065e-11
5.0000e-01	9.9804e-01	9.9804e-01	-3.5296e-12	-4.5121e-01	-4.5121e-01	-4.3438e-11
7.5000e-01	7.8718e-01	7.8718e-01	-2.4479e-11	-5.6278e-01	-5.6278e-01	-5.8981e-11
1.0000e+00	5.4531e-01	5.4531e-01	-4.5155e-11	-5.5371e-01	-5.5371e-01	-7.2302e-11
1.2500e+00	3.0624e-01	3.0624e-01	3.5553e-11	-3.7955e-01	-3.7955e-01	-2.0748e-10
1.5000e+00	-1.3229e-01	-1.3295e-01	6.5499e-04	-9.4421e-02	-9.4102e-02	-3.1912e-04
1.7500e+00	-3.3191e-01	-3.3805e-01	6.1419e-03	-5.0214e-01	-5.0284e-01	6.9419e-04
2.0000e+00	-5.5065e-01	-5.6333e-01	1.2674e-02	-6.4940e-01	-6.5118e-01	1.7807e-03
2.2500e+00	-7.8191e-01	-8.0270e-01	2.0796e-02	-6.5180e-01	-6.5318e-01	1.3763e-03
2.5000e+00	-9.8721e-01	-1.0177e+00	3.0491e-02	-5.4348e-01	-5.4189e-01	-1.5904e-03
2.7500e+00	-1.1347e+00	-1.1761e+00	4.1395e-02	-3.5484e-01	-3.4667e-01	-8.1747e-03
3.0000e+00	-1.2026e+00	-1.2555e+00	5.2853e-02	-1.2004e-01	-1.0059e-01	-1.9451e-02
3.2500e+00	-1.1809e+00	-1.2448e+00	6.3971e-02	1.2334e-01	1.5990e-01	-3.6556e-02
3.5000e+00	-1.0720e+00	-1.1457e+00	7.3707e-02	3.3645e-01	3.9730e-01	-6.0849e-02
3.7500e+00	-8.9070e-01	-9.7178e-01	8.1078e-02	4.8138e-01	5.7578e-01	-9.4401e-02
4.0000e+00	-6.6214e-01	-7.4793e-01	8.5782e-02	5.2165e-01	6.6322e-01	-1.4157e-01
4.2500e+00	-4.1682e-01	-5.0827e-01	9.1456e-02	4.1492e-01	6.3058e-01	-2.1566e-01
4.5000e+00	-1.2083e-01	-2.9138e-01	1.7055e-01	3.2235e-02	4.3989e-01	-4.0765e-01
4.7500e+00	2.1844e-01	8.2097e-02	1.3634e-01	4.5323e-01	2.3354e-02	4.2987e-01
5.0000e+00	4.0589e-01	3.6056e-01	4.5331e-02	6.5879e-01	4.3988e-01	2.1891e-01
5.2500e+00	6.2409e-01	6.0238e-01	2.1708e-02	7.0913e-01	5.6916e-01	1.3997e-01
5.5000e+00	8.3047e-01	8.4011e-01	-9.6400e-03	6.4227e-01	5.4702e-01	9.5246e-02
5.7500e+00	9.8818e-01	1.0388e+00	-5.0594e-02	4.8715e-01	4.1211e-01	7.5043e-02
6.0000e+00	1.0691e+00	1.1668e+00	-9.7698e-02	2.7607e-01	1.9708e-01	7.8995e-02
6.2500e+00	1.0500e+00	1.1966e+00	-1.4653e-01	4.1445e-02	-6.0051e-02	1.0150e-01
6.5000e+00	8.3987e-01	1.1177e+00	-2.7785e-01	-8.7095e-02	-3.0329e-01	2.1620e-01
6.7500e+00	5.8336e-01	9.5307e-01	-3.6971e-01	-3.7606e-02	-4.8500e-01	4.4739e-01
7.0000e+00	2.2788e-01	7.3181e-01	-5.0393e-01	1.5171e-01	-5.7109e-01	7.2280e-01
7.2500e+00	-3.4100e-01	4.8778e-01	-8.2878e-01	5.6347e-02	-5.2811e-01	5.8446e-01
7.5000e+00	-6.2914e-01	2.5087e-01	-8.8001e-01	-1.7058e-01	-3.0088e-01	1.3029e-01
7.7500e+00	-8.6386e-01	-1.9105e-01	-6.7281e-01	-2.4572e-01	-2.3957e-01	-6.1461e-03
8.0000e+00	-1.0798e+00	-3.8779e-01	-6.9205e-01	-2.0026e-01	-5.5520e-01	3.5494e-01
8.2500e+00	-1.2624e+00	-6.1970e-01	-6.4269e-01	-5.6337e-02	-6.6470e-01	6.0837e-01
8.5000e+00	-1.3914e+00	-8.5657e-01	-5.3486e-01	1.6515e-01	-6.3739e-01	8.0254e-01
8.7500e+00	-1.4497e+00	-1.0608e+00	-3.8886e-01	4.4096e-01	-5.0361e-01	9.4457e-01
9.0000e+00	-1.4256e+00	-1.2022e+00	-2.2335e-01	7.4541e-01	-2.9336e-01	1.0388e+00
9.2500e+00	-1.3148e+00	-1.2610e+00	-5.3846e-02	1.0515e+00	-4.0625e-02	1.0921e+00
9.5000e+00	-1.1206e+00	-1.2290e+00	1.0839e-01	1.3328e+00	2.1768e-01	1.1152e+00
9.7500e+00	-8.5343e-01	-1.1107e+00	2.5727e-01	1.5655e+00	4.4422e-01	1.1213e+00
1.0000e+01	-5.2996e-01	-9.2247e-01	3.9251e-01	1.7299e+00	6.0386e-01	1.1260e+00
1.0250e+01	-1.7176e-01	-6.9159e-01	5.1983e-01	1.8123e+00	6.6541e-01	1.1469e+00
1.0500e+01	1.9669e-01	-4.5385e-01	6.5054e-01	1.8062e+00	5.9957e-01	1.2066e+00
1.0750e+01	5.5009e-01	-2.4617e-01	7.9626e-01	1.7123e+00	3.5894e-01	1.3534e+00
1.1000e+01	8.6448e-01	1.7806e-01	6.8642e-01	1.5389e+00	1.8029e-01	1.3586e+00
1.1250e+01	1.1192e+00	4.1670e-01	7.0254e-01	1.3008e+00	4.8943e-01	8.1142e-01
1.1500e+01	1.2989e+00	6.6019e-01	6.3868e-01	1.0187e+00	5.7771e-01	4.4097e-01
1.1750e+01	1.3942e+00	8.9169e-01	5.0252e-01	7.1676e-01	5.2585e-01	1.9091e-01
1.2000e+01	1.4031e+00	1.0763e+00	3.2683e-01	4.2148e-01	3.6905e-01	5.2431e-02
1.2250e+01	1.3299e+00	1.1836e+00	1.4632e-01	1.5952e-01	1.4027e-01	1.9251e-02
1.2500e+01	1.1828e+00	1.1873e+00	-4.4336e-03	-4.2521e-02	-1.1902e-01	7.6498e-02
1.2750e+01	9.7020e-01	1.0858e+00	-1.1555e-01	-1.4549e-01	-3.5116e-01	2.0567e-01
1.3000e+01	7.3688e-01	9.0501e-01	-1.6813e-01	-1.0725e-01	-5.1316e-01	4.0591e-01

Tabelle C.9: Extrapolationsverfahren von Adams ($s = 4$) für $h = 10^{-3}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000000	1.200000	1.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	1.145132	1.145132	0.000000	-0.251746	-0.251746	0.000000
0.500000	0.998043	0.998043	0.000000	-0.451207	-0.451207	0.000000
0.750000	0.787181	0.787181	0.000000	-0.562779	-0.562779	-0.000000
1.000000	0.545314	0.545314	0.000000	-0.553714	-0.553714	-0.000000
1.250000	0.306244	0.306244	0.000000	-0.379545	-0.379545	-0.000000
1.500000	-0.132735	-0.132948	0.000214	-0.094203	-0.094102	-0.000101
1.750000	-0.336015	-0.338050	0.002035	-0.502586	-0.502837	0.000251
2.000000	-0.559104	-0.563329	0.004225	-0.650560	-0.651182	0.000622
2.250000	-0.795752	-0.802705	0.006953	-0.652698	-0.653181	0.000483
2.500000	-1.007500	-1.017701	0.010202	-0.542413	-0.541885	-0.000528
2.750000	-1.162264	-1.176099	0.013835	-0.349429	-0.346667	-0.002762
3.000000	-1.237838	-1.255451	0.017614	-0.107166	-0.100593	-0.006573
3.250000	-1.223631	-1.244841	0.021210	0.147576	0.159895	-0.012319
3.500000	-1.121484	-1.145716	0.024232	0.376889	0.397297	-0.020408
3.750000	-0.945507	-0.971775	0.026268	0.544355	0.575780	-0.031425
4.000000	-0.720919	-0.747926	0.027007	0.616698	0.663223	-0.046525
4.250000	-0.481528	-0.508273	0.026745	0.561678	0.630583	-0.068905
4.500000	-0.260248	-0.291384	0.031136	0.326715	0.439887	-0.113172
4.750000	0.173690	0.082097	0.091593	0.216248	0.023354	0.192894
5.000000	0.385672	0.360559	0.025112	0.526192	0.439880	0.086312
5.250000	0.618219	0.602381	0.015838	0.623962	0.569159	0.054803
5.500000	0.845759	0.840114	0.005645	0.584386	0.547020	0.037365
5.750000	1.031563	1.038777	-0.007215	0.440928	0.412106	0.028821
6.000000	1.145207	1.166827	-0.021620	0.225619	0.197077	0.028541
6.250000	1.160360	1.196561	-0.036200	-0.025074	-0.060051	0.034977
6.500000	1.061370	1.117722	-0.056352	-0.251864	-0.303290	0.051426
6.750000	0.878076	0.953073	-0.074997	-0.399759	-0.485000	0.085241
7.000000	0.643029	0.731809	-0.088780	-0.434040	-0.571091	0.137051
7.250000	0.381030	0.487780	-0.106750	-0.307964	-0.528112	0.220148
7.500000	-0.116776	0.250868	-0.367644	-0.077762	-0.300879	0.223117
7.750000	-0.260192	-0.191052	-0.069141	-0.529374	-0.239570	-0.289804
8.000000	-0.451396	-0.387785	-0.063611	-0.716225	-0.555202	-0.161023
8.250000	-0.679873	-0.619701	-0.060172	-0.761569	-0.664705	-0.096864
8.500000	-0.903786	-0.856571	-0.047215	-0.692768	-0.637391	-0.055377
8.750000	-1.087330	-1.060789	-0.026541	-0.533438	-0.503611	-0.029827
9.000000	-1.203375	-1.202213	-0.001162	-0.312058	-0.293364	-0.018694
9.250000	-1.235300	-1.260977	0.025677	-0.062204	-0.040625	-0.021579
9.500000	-1.178190	-1.229019	0.050829	0.179421	0.217684	-0.038263
9.750000	-1.039165	-1.110701	0.071536	0.375514	0.444216	-0.068702
10.000000	-0.836599	-0.922469	0.085869	0.490075	0.603862	-0.113788
10.250000	-0.597596	-0.691593	0.093997	0.487370	0.665413	-0.178043
10.500000	-0.347862	-0.453847	0.105985	0.317132	0.599572	-0.282439
10.750000	0.126089	-0.246169	0.372258	0.146504	0.358938	-0.212434
11.000000	0.295741	0.178062	0.117680	0.533835	0.180294	0.353540
11.250000	0.505524	0.416703	0.088821	0.685483	0.489425	0.196058
11.500000	0.734761	0.660187	0.074575	0.696736	0.577714	0.119022
11.750000	0.943475	0.891693	0.051782	0.597294	0.525845	0.071448
12.000000	1.097787	1.076268	0.021519	0.414447	0.369046	0.045401
12.250000	1.171675	1.183578	-0.011903	0.179538	0.140268	0.039270
12.500000	1.142563	1.187254	-0.044691	-0.069258	-0.119020	0.049761
12.750000	1.004550	1.085750	-0.081200	-0.268938	-0.351162	0.082223
13.000000	0.794940	0.905013	-0.110073	-0.370966	-0.513158	0.142192

Tabelle C.10: Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000000	1.200000	1.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	1.145132	1.145132	-0.000000	-0.251746	-0.251746	0.000000
0.500000	0.998043	0.998043	0.000000	-0.451207	-0.451207	0.000000
0.750000	0.787181	0.787181	0.000000	-0.562779	-0.562779	0.000000
1.000000	0.545314	0.545314	0.000000	-0.553714	-0.553714	0.000000
1.250000	0.306244	0.306244	-0.000000	-0.379545	-0.379545	0.000000
1.500000	-0.132997	-0.132948	-0.000048	-0.094069	-0.094102	0.000034
1.750000	-0.338426	-0.338050	-0.000376	-0.502812	-0.502837	0.000025
2.000000	-0.564036	-0.563329	-0.000708	-0.651164	-0.651182	0.000017
2.250000	-0.803790	-0.802705	-0.001085	-0.653097	-0.653181	0.000083
2.500000	-1.019214	-1.017701	-0.001513	-0.541620	-0.541885	0.000266
2.750000	-1.178075	-1.176099	-0.001976	-0.346060	-0.346667	0.000607
3.000000	-1.257898	-1.255451	-0.002447	-0.099441	-0.100593	0.001151
3.250000	-1.247725	-1.244841	-0.002884	0.161840	0.159895	0.001944
3.500000	-1.148955	-1.145716	-0.003239	0.400336	0.397297	0.003039
3.750000	-0.975231	-0.971775	-0.003456	0.580292	0.575780	0.004512
4.000000	-0.751412	-0.747926	-0.003486	0.669730	0.663223	0.006507
4.250000	-0.511608	-0.508273	-0.003335	0.639986	0.630583	0.009403
4.500000	-0.294822	-0.291384	-0.003439	0.454616	0.439887	0.014729
4.750000	0.047732	0.082097	-0.034365	-0.012025	0.023354	-0.035379
5.000000	0.356084	0.360559	-0.004476	0.426549	0.439880	-0.013331
5.250000	0.599380	0.602381	-0.003001	0.560692	0.569159	-0.008467
5.500000	0.838397	0.840114	-0.001717	0.541168	0.547020	-0.005852
5.750000	1.038607	1.038777	-0.000171	0.407617	0.412106	-0.004489
6.000000	1.168345	1.166827	0.001519	0.192852	0.197077	-0.004225
6.250000	1.199672	1.196561	0.003111	-0.064883	-0.060051	-0.004831
6.500000	1.122760	1.117722	0.005038	-0.309732	-0.303290	-0.006442
6.750000	0.959850	0.953073	0.006777	-0.494660	-0.485000	-0.009660
7.000000	0.739732	0.731809	0.007923	-0.585684	-0.571091	-0.014593
7.250000	0.496476	0.487780	0.008697	-0.550188	-0.528112	-0.022077
7.500000	0.263047	0.250868	0.012179	-0.338161	-0.300879	-0.037282
7.750000	-0.176505	-0.191052	0.014547	-0.192145	-0.239570	0.047425
8.000000	-0.379654	-0.387785	0.008131	-0.532038	-0.555202	0.023164
8.250000	-0.612525	-0.619701	0.007176	-0.650406	-0.664705	0.014299
8.500000	-0.851005	-0.856571	0.005567	-0.628409	-0.637391	0.008982
8.750000	-1.057594	-1.060789	0.003195	-0.497846	-0.503611	0.005765
9.000000	-1.201892	-1.202213	0.000321	-0.289055	-0.293364	0.004308
9.250000	-1.263696	-1.260977	-0.002719	-0.036105	-0.040625	0.004520
9.500000	-1.234592	-1.229019	-0.005572	0.224052	0.217684	0.006368
9.750000	-1.118601	-1.110701	-0.007900	0.454065	0.444216	0.009849
10.000000	-0.931875	-0.922469	-0.009407	0.618904	0.603862	0.015042
10.250000	-0.701488	-0.691593	-0.009895	0.687713	0.665413	0.022299
10.500000	-0.463331	-0.453847	-0.009484	0.632549	0.599572	0.032978
10.750000	-0.256926	-0.246169	-0.010757	0.413057	0.358938	0.054119
11.000000	0.139728	0.178062	-0.038334	0.101873	0.180294	-0.078421
11.250000	0.400597	0.416703	-0.016106	0.453032	0.489425	-0.036393
11.500000	0.647519	0.660187	-0.012668	0.555155	0.577714	-0.022559
11.750000	0.882525	0.891693	-0.009168	0.511229	0.525845	-0.014616
12.000000	1.071376	1.076268	-0.004892	0.358819	0.369046	-0.010227
12.250000	1.183213	1.183578	-0.000365	0.131312	0.140268	-0.008956
12.500000	1.190900	1.187254	0.003646	-0.129055	-0.119020	-0.010036
12.750000	1.093524	1.085750	0.007774	-0.364725	-0.351162	-0.013563
13.000000	0.916040	0.905013	0.011028	-0.533350	-0.513158	-0.020192

Tabelle C.11: Interpolationsverfahren von Adams ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$

t	$u_h^1(t)$	$y_h^1(t)$	$u_h^1(t) - y_h^1(t)$	$u_h^3(t)$	$y_h^3(t)$	$u_h^3(t) - y_h^3(t)$
0.000000	1.200000	1.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	1.145132	1.145132	0.000000	-0.251746	-0.251746	0.000000
0.500000	0.998043	0.998043	0.000000	-0.451207	-0.451207	-0.000000
0.750000	0.787181	0.787181	0.000000	-0.562779	-0.562779	-0.000000
1.000000	0.545314	0.545314	0.000000	-0.553714	-0.553714	-0.000000
1.250000	0.306244	0.306244	0.000000	-0.379545	-0.379545	-0.000000
1.500000	-0.132858	-0.132948	0.000090	-0.094150	-0.094102	-0.000048
1.750000	-0.337234	-0.338050	0.000816	-0.502770	-0.502837	0.000067
2.000000	-0.561670	-0.563329	0.001659	-0.650994	-0.651182	0.000188
2.250000	-0.800011	-0.802705	0.002694	-0.653067	-0.653181	0.000113
2.500000	-1.013786	-1.017701	0.003915	-0.542176	-0.541885	-0.000291
2.750000	-1.170827	-1.176099	0.005272	-0.347822	-0.346667	-0.001155
3.000000	-1.248776	-1.255451	0.006675	-0.103202	-0.100593	-0.002610
3.250000	-1.236840	-1.244841	0.008001	0.155108	0.159895	-0.004788
3.500000	-1.136617	-1.145716	0.009099	0.389458	0.397297	-0.007839
3.750000	-0.961966	-0.971775	0.009810	0.563806	0.575780	-0.011974
4.000000	-0.737928	-0.747926	0.009998	0.645620	0.663223	-0.017603
4.250000	-0.498561	-0.508273	0.009712	0.604753	0.630583	-0.025830
4.500000	-0.280890	-0.291384	0.010494	0.398515	0.439887	-0.041372
4.750000	0.132496	0.082097	0.050399	0.107850	0.023354	0.084497
5.000000	0.371468	0.360559	0.010908	0.474498	0.439880	0.034618
5.250000	0.609412	0.602381	0.007031	0.591066	0.569159	0.021906
5.500000	0.843271	0.840114	0.003157	0.562004	0.547020	0.014984
5.750000	1.037146	1.038777	-0.001631	0.423644	0.412106	0.011538
6.000000	1.159895	1.166827	-0.006931	0.208334	0.197077	0.011256
6.250000	1.184378	1.196561	-0.012182	-0.046517	-0.060051	0.013534
6.500000	1.098797	1.117722	-0.018924	-0.284014	-0.303290	0.019275
6.750000	0.928024	0.953073	-0.025049	-0.454326	-0.485000	0.030673
7.000000	0.702558	0.731809	-0.029250	-0.523035	-0.571091	0.048056
7.250000	0.454823	0.487780	-0.032957	-0.453252	-0.528112	0.074859
7.500000	0.194873	0.250868	-0.055995	-0.164471	-0.300879	0.136407
7.750000	-0.223433	-0.191052	-0.032382	-0.367228	-0.239570	-0.127657
8.000000	-0.412116	-0.387785	-0.024331	-0.622784	-0.555202	-0.067583
8.250000	-0.641897	-0.619701	-0.022196	-0.705881	-0.664705	-0.041176
8.500000	-0.873560	-0.856571	-0.016988	-0.662047	-0.637391	-0.024656
8.750000	-1.069749	-1.060789	-0.008960	-0.518192	-0.503611	-0.014581
9.000000	-1.201339	-1.202213	0.000874	-0.303556	-0.293364	-0.010192
9.250000	-1.249651	-1.260977	0.011325	-0.051957	-0.040625	-0.011332
9.500000	-1.207838	-1.229019	0.021181	0.199709	0.217684	-0.017975
9.750000	-1.081391	-1.110701	0.029310	0.414039	0.444216	-0.030177
10.000000	-0.887680	-0.922469	0.034789	0.555545	0.603862	-0.048317
10.250000	-0.654381	-0.691593	0.037212	0.591463	0.665413	-0.073950
10.500000	-0.415695	-0.453847	0.038152	0.486269	0.599572	-0.113303
10.750000	-0.182675	-0.246169	0.063494	0.149856	0.358938	-0.209082
11.000000	0.244145	0.178062	0.066083	0.372591	0.180294	0.192296
11.250000	0.456835	0.416703	0.040132	0.596134	0.489425	0.106709
11.500000	0.691112	0.660187	0.030925	0.648678	0.577714	0.070964
11.750000	0.910464	0.891693	0.018771	0.576041	0.525845	0.050195
12.000000	1.079502	1.076268	0.003234	0.408427	0.369046	0.039381
12.250000	1.169731	1.183578	-0.013848	0.177761	0.140268	0.037493
12.500000	1.156806	1.187254	-0.030449	-0.076515	-0.119020	0.042504
12.750000	1.036664	1.085750	-0.049086	-0.295219	-0.351162	0.055943
13.000000	0.839709	0.905013	-0.065304	-0.432571	-0.513158	0.080587

Tabelle C.12: Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Milne ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$

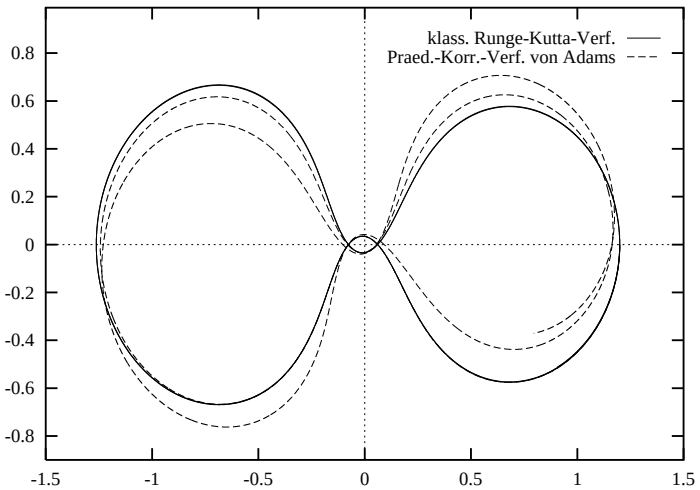


Abbildung C.5: Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Adams ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

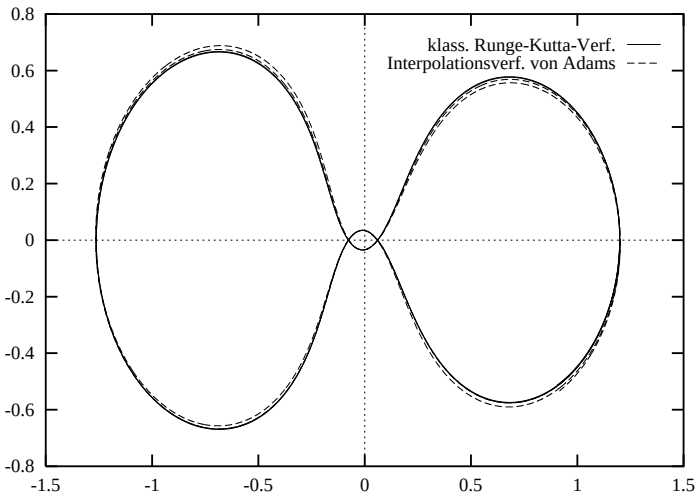


Abbildung C.6: Interpolationsverfahren von Adams ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

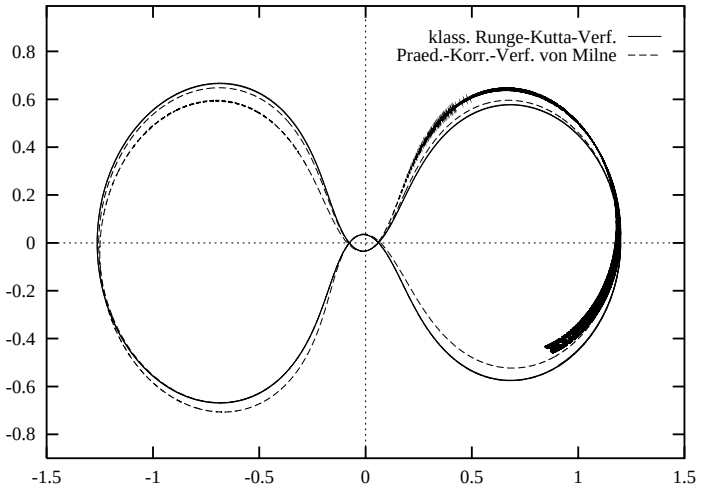


Abbildung C.7: Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Milne ($s = 3$) für $h = 10^{-3}$ im Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

3. **Aufgabe:** Mit dem Differenzenverfahren (zentrale Diff. quotienten, s. (A1)) und dem Ritz–Verfahren (stetige, stückweise lineare Ansatzfunktionen, s. (A3)) berechne man die Lösungen von je einer der Randwertaufgaben aus A), B) und C) — die Aufgaben in C) beinhalten jeweils 2 verschiedene Parameter ε; verwenden Sie für Aufgabe 3) in C) das Upwind–Schema (A2) anstelle von (A3).

   Zum Vergleich drucken Sie auch den Fehler zur exakten Lösung des Randwertproblems bzw. zu einer (analytischen) Näherungslösung. Erstellen Sie also insgesamt 8 Tabellen der Form

   $$x \quad u_h(x) \quad u_h(x) - u(x) \quad \log_{10}|u_h(x) - u(x)|$$

   Als Maschenweite verwenden Sie $h = (b-a)/40$, in C)1) jedoch $h = (b-a)/500$; drucken Sie aber nur jeden zweiten Wert.

   Im Fall von inhomogenen Dirichlet–Randbedingungen verwenden Sie auch für das Ritzsche Verfahren einfach die vorgegebenen Randwerte. Für die Berechnung der rechten Seite beim Ritz–Verfahren wurde die Simpson–Formel zugrunde gelegt.

   Aufgaben

   A) **lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

   1) $-u'' + u = 1$ in $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$
   2) $-u'' = \pi^2 \sin(\pi x)$ in $0 < x < 1$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

   (Exakte Lösungen: zu 1) $u(x) = \frac{1-e^{-1}}{e^{-1}-e} e^x + \frac{e-1}{e^{-1}-e} e^{-x} + 1$

   zu 2) $u(x) = \sin(\pi x) + x$)

B) **lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten**

1) $-u'' + xu = 1$ in $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$
(Näherungslösung $u(x) \approx cx - \frac{1}{2}x^2 + \frac{c}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5$, $c = \frac{63}{130}$)

2) „Biegung eines Stabes“
$u'' + (1 + x^2)u = -1$ in $-1 < x < 1$, $u(-1) = u(1) = 0$
(Näherungslösung mit der Methode der sukzessiven Approximation $u \approx v$, wobei (vgl. Collatz [Col66], S. 195)
$v(x) = \frac{1}{32}\left\{\frac{75\,379}{2520} - 31x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{31}{30}x^6 - \frac{1}{56}x^8 - \frac{1}{90}x^{10}\right\}$.)

C) **lineare Grenzschichtprobleme**

1) $u'' + 100u = 0$ in $0 < x < 2\pi + \varepsilon$,
$u(0) = u(2\pi + \varepsilon) = 1$
mit $\varepsilon = 1,\ 10^{-2}$ (Lösung: $u(x) = \cos(10x) + \frac{1-\cos(10(2\pi+\varepsilon))}{\sin(10(2\pi+\varepsilon))} \cdot \sin(10x)$)

2) $u'' + (1 + \varepsilon x^2)u = -1$ in $-1 < x < 1$, $u(-1) = u(1) = 0$
für $\varepsilon = 0.5 * 10^{-1},\ 0.5 * 10^{-2}$
(Näherungslösung $u \approx u_0 + \varepsilon u_1$, wobei
$u_0(x) = \dfrac{\cos(x)}{\cos(1)} - 1$,
$u_1(x) = x^2 - 2 + \dfrac{1}{12\cos(1)}\left[(3x - 2x^3)\sin(x) - 3x^2\cos(x) + A\cos(x)\right]$
und $A = \dfrac{1}{12\cos^2(1)}\left[15\cos(1) - \sin(1)\right]$.)

3) $\varepsilon u'' + u' = 0$ in $0 < x < 1$,
$u(0) = 1,\ u(1) = 0$
mit $\varepsilon = 0.5 * 10^{-2},\ 0.5 * 10^{-3}$ (Lösung: $u(x) = \frac{\exp(-x/\varepsilon) - \exp(-1/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)}$)

Verfahren (für $u'' + pu' + qu = f$ in $[a, b]$, $u(a) = \gamma_0$, $u(b) = \gamma_1$)

Zentrale Differenzenquotienten

$$\left(1 - \frac{h}{2}p_j\right)u_{j-1} - (2 - h^2 q_j)u_j + \left(1 + \frac{h}{2}p_j\right)u_{j+1} = h^2 f_j\ , \qquad j = 1, \ldots, N-1\ , \tag{A1}$$

wobei $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $f_j = f(x_j)$;

Upwind Schema

$$(1 - hp_j^-)u_{j-1} - (2 - h^2 q_j + h|p_j|)u_j + (1 + hp_j^+)u_{j+1} = h^2 f_j\ , \qquad j = 1, \ldots, N-1\ , \tag{A2}$$

wobei $p_j^- = \min(0, p_j)$, $p_j^+ = \max(0, p_j)$;

Ritz–Verfahren (für $u'' + qu = f$ in $[a,b]$, $u(a) = \gamma_0$, $u(b) = \gamma_1$)

$$\left(1 + \frac{h^2}{6} q_{j-1/2}\right) v_{j-1} - \left(2 - \frac{h^2}{6}\left(q_{j-1/2} + 2q_j + q_{j+1/2}\right)\right) v_j + \left(1 + \frac{h^2}{6} q_{j+1/2}\right) v_{j+1} = \frac{h^2}{3}\left(f_{j-1/2} + f_j + f_{j+1/2}\right), \quad j = 1, \ldots, N-1, \tag{A3}$$

wobei $q_{j\pm1/2} = q(x_{j\pm1/2})$, $x_{j\pm1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j\pm1})$; analog für f.

Lösung:

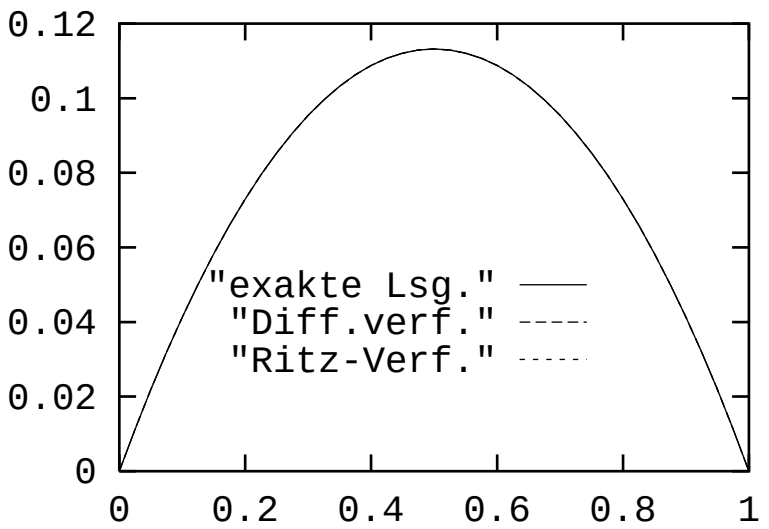


Abbildung C.8: Aufgabe A)1) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.186418e-02	-1.049476e-06	-5.979027e+00
1.000000e-01	4.128263e-02	-1.974173e-06	-5.704615e+00
1.500000e-01	5.830392e-02	-2.778932e-06	-5.556122e+00
2.000000e-01	7.297060e-02	-3.467982e-06	-5.459923e+00
2.500000e-01	8.531934e-02	-4.044956e-06	-5.393086e+00
3.000000e-01	9.538103e-02	-4.512906e-06	-5.345544e+00
3.500000e-01	1.031808e-01	-4.874313e-06	-5.312087e+00
4.000000e-01	1.087382e-01	-5.131096e-06	-5.289790e+00
4.500000e-01	1.120671e-01	-5.284620e-06	-5.276986e+00
5.000000e-01	1.131758e-01	-5.335704e-06	-5.272808e+00
5.500000e-01	1.120671e-01	-5.284620e-06	-5.276986e+00
6.000000e-01	1.087382e-01	-5.131096e-06	-5.289790e+00
6.500000e-01	1.031808e-01	-4.874313e-06	-5.312087e+00
7.000000e-01	9.538103e-02	-4.512906e-06	-5.345544e+00
7.500000e-01	8.531934e-02	-4.044956e-06	-5.393086e+00
8.000000e-01	7.297060e-02	-3.467982e-06	-5.459923e+00
8.500000e-01	5.830392e-02	-2.778932e-06	-5.556122e+00
9.000000e-01	4.128263e-02	-1.974173e-06	-5.704615e+00
9.500000e-01	2.186418e-02	-1.049476e-06	-5.979027e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.186628e-02	1.049643e-06	-5.978958e+00
1.000000e-01	4.128658e-02	1.974486e-06	-5.704546e+00
1.500000e-01	5.830948e-02	2.779371e-06	-5.556054e+00
2.000000e-01	7.297753e-02	3.468528e-06	-5.459855e+00
2.500000e-01	8.532743e-02	4.045593e-06	-5.393018e+00
3.000000e-01	9.539005e-02	4.513616e-06	-5.345475e+00
3.500000e-01	1.031906e-01	4.875078e-06	-5.312018e+00
4.000000e-01	1.087485e-01	5.131901e-06	-5.289722e+00
4.500000e-01	1.120776e-01	5.285449e-06	-5.276918e+00
5.000000e-01	1.131865e-01	5.336541e-06	-5.272740e+00
5.500000e-01	1.120776e-01	5.285449e-06	-5.276918e+00
6.000000e-01	1.087485e-01	5.131901e-06	-5.289722e+00
6.500000e-01	1.031906e-01	4.875078e-06	-5.312018e+00
7.000000e-01	9.539005e-02	4.513616e-06	-5.345475e+00
7.500000e-01	8.532743e-02	4.045593e-06	-5.393018e+00
8.000000e-01	7.297753e-02	3.468528e-06	-5.459855e+00
8.500000e-01	5.830948e-02	2.779371e-06	-5.556054e+00
9.000000e-01	4.128658e-02	1.974486e-06	-5.704546e+00
9.500000e-01	2.186628e-02	1.049643e-06	-5.978958e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.13: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verfahren zu Aufgabe A)1)

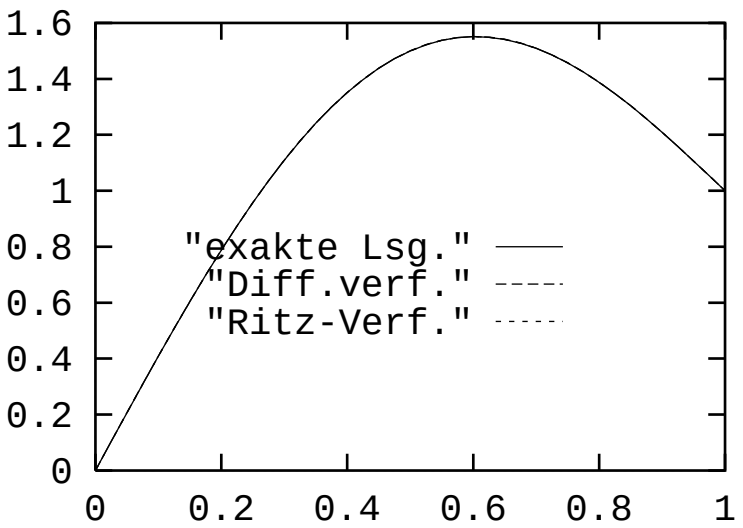


Abbildung C.9: Aufgabe A)2) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.065149e-01	8.043868e-05	-4.094535e+00
1.000000e-01	4.091759e-01	1.588967e-04	-3.798885e+00
1.500000e-01	6.042239e-01	2.334421e-04	-3.631821e+00
2.000000e-01	7.880875e-01	3.022395e-04	-3.519649e+00
2.500000e-01	9.574704e-01	3.635946e-04	-3.439383e+00
3.000000e-01	1.109433e+00	4.159969e-04	-3.380910e+00
3.500000e-01	1.241465e+00	4.581560e-04	-3.338987e+00
4.000000e-01	1.351546e+00	4.890337e-04	-3.310661e+00
4.500000e-01	1.438196e+00	5.078698e-04	-3.294248e+00
5.000000e-01	1.500514e+00	5.142005e-04	-3.288868e+00
5.500000e-01	1.538196e+00	5.078698e-04	-3.294248e+00
6.000000e-01	1.551546e+00	4.890337e-04	-3.310661e+00
6.500000e-01	1.541465e+00	4.581560e-04	-3.338987e+00
7.000000e-01	1.509433e+00	4.159969e-04	-3.380910e+00
7.500000e-01	1.457470e+00	3.635946e-04	-3.439383e+00
8.000000e-01	1.388087e+00	3.022395e-04	-3.519649e+00
8.500000e-01	1.304224e+00	2.334421e-04	-3.631821e+00
9.000000e-01	1.209176e+00	1.588967e-04	-3.798885e+00
9.500000e-01	1.106515e+00	8.043868e-05	-4.094535e+00
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.064345e-01	-6.202313e-09	-8.207446e+00
1.000000e-01	4.090170e-01	-1.225190e-08	-7.911796e+00
1.500000e-01	6.039905e-01	-1.799881e-08	-7.744732e+00
2.000000e-01	7.877852e-01	-2.330451e-08	-7.632560e+00
2.500000e-01	9.571068e-01	-2.803537e-08	-7.552294e+00
3.000000e-01	1.109017e+00	-3.207590e-08	-7.493821e+00
3.500000e-01	1.241006e+00	-3.532662e-08	-7.451898e+00
4.000000e-01	1.351056e+00	-3.770749e-08	-7.423572e+00
4.500000e-01	1.437688e+00	-3.915987e-08	-7.407159e+00
5.000000e-01	1.500000e+00	-3.964800e-08	-7.401779e+00
5.500000e-01	1.537688e+00	-3.915987e-08	-7.407159e+00
6.000000e-01	1.551056e+00	-3.770749e-08	-7.423572e+00
6.500000e-01	1.541006e+00	-3.532663e-08	-7.451898e+00
7.000000e-01	1.509017e+00	-3.207591e-08	-7.493821e+00
7.500000e-01	1.457107e+00	-2.803537e-08	-7.552294e+00
8.000000e-01	1.387785e+00	-2.330451e-08	-7.632560e+00
8.500000e-01	1.303990e+00	-1.799881e-08	-7.744732e+00
9.000000e-01	1.209017e+00	-1.225191e-08	-7.911796e+00
9.500000e-01	1.106434e+00	-6.202314e-09	-8.207446e+00
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.14: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verfahren zu Aufgabe A)2)

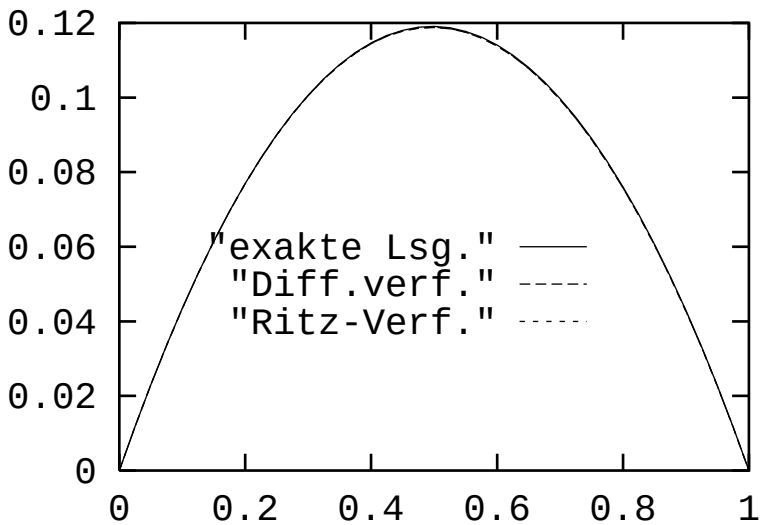


Abbildung C.10: Aufgabe B)1) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.295694e-02	-2.407825e-05	-4.618375e+00
1.000000e-01	4.341706e-02	-4.826649e-05	-4.316354e+00
1.500000e-01	6.138830e-02	-7.255308e-05	-4.139344e+00
2.000000e-01	7.688277e-02	-9.692698e-05	-4.013555e+00
2.500000e-01	8.991582e-02	-1.213674e-04	-3.915898e+00
3.000000e-01	1.005052e-01	-1.458255e-04	-3.836166e+00
3.500000e-01	1.086699e-01	-1.701965e-04	-3.769049e+00
4.000000e-01	1.144297e-01	-1.942816e-04	-3.711568e+00
4.500000e-01	1.178039e-01	-2.177408e-04	-3.662060e+00
5.000000e-01	1.188104e-01	-2.400349e-04	-3.619726e+00
5.500000e-01	1.174653e-01	-2.603605e-04	-3.584425e+00
6.000000e-01	1.137815e-01	-2.775785e-04	-3.556614e+00
6.500000e-01	1.077680e-01	-2.901397e-04	-3.537393e+00
7.000000e-01	9.942936e-02	-2.960089e-04	-3.528695e+00
7.500000e-01	8.876427e-02	-2.925945e-04	-3.533734e+00
8.000000e-01	7.576516e-02	-2.766851e-04	-3.558014e+00
8.500000e-01	6.041707e-02	-2.443997e-04	-3.611899e+00
9.000000e-01	4.269678e-02	-1.911582e-04	-3.718607e+00
9.500000e-01	2.257194e-02	-1.116774e-04	-3.952035e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.296492e-02	-1.609009e-05	-4.793442e+00
1.000000e-01	4.343302e-02	-3.231017e-05	-4.490661e+00
1.500000e-01	6.141196e-02	-4.889774e-05	-4.310711e+00
2.000000e-01	7.691363e-02	-6.606285e-05	-4.180043e+00
2.500000e-01	8.995321e-02	-8.397800e-05	-4.075834e+00
3.000000e-01	1.005482e-01	-1.027602e-04	-3.988175e+00
3.500000e-01	1.087177e-01	-1.224435e-04	-3.912064e+00
4.000000e-01	1.144811e-01	-1.429423e-04	-3.844839e+00
4.500000e-01	1.178576e-01	-1.640035e-04	-3.785147e+00
5.000000e-01	1.188653e-01	-1.851504e-04	-3.732475e+00
5.500000e-01	1.175201e-01	-2.056182e-04	-3.686938e+00
6.000000e-01	1.138348e-01	-2.242832e-04	-3.649203e+00
6.500000e-01	1.078186e-01	-2.395889e-04	-3.620533e+00
7.000000e-01	9.947589e-02	-2.494717e-04	-3.602979e+00
7.500000e-01	8.880558e-02	-2.512900e-04	-3.599825e+00
8.000000e-01	7.580008e-02	-2.417622e-04	-3.616612e+00
8.500000e-01	6.044455e-02	-2.169174e-04	-3.663706e+00
9.000000e-01	4.271588e-02	-1.720659e-04	-3.764305e+00
9.500000e-01	2.258182e-02	-1.017953e-04	-3.992272e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.15: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verfahren zu Aufgabe B)1)

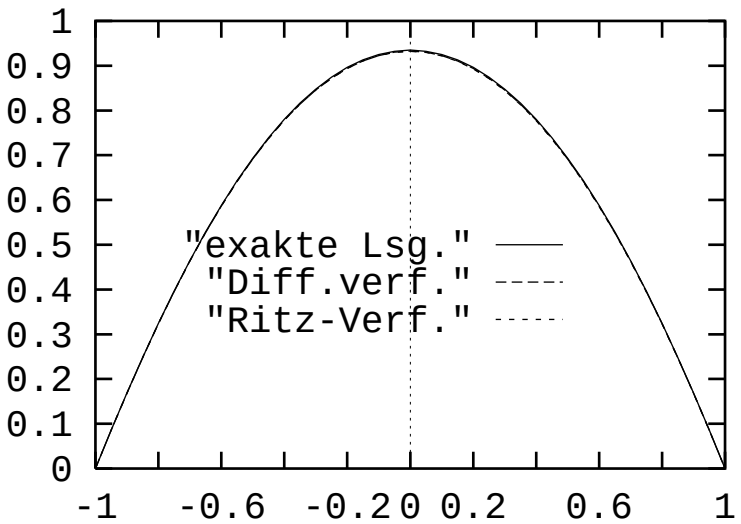


Abbildung C.11: Aufgabe B)2) — Näherungslösungen im Vergleich mit der exakten Lösung

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
-1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
-9.000000e-01	1.682013e-01	-3.790958e-04	-3.421251e+00
-8.000000e-01	3.234072e-01	-7.530567e-04	-3.123172e+00
-7.000000e-01	4.633505e-01	-1.103799e-03	-2.957110e+00
-6.000000e-01	5.864229e-01	-1.419170e-03	-2.847966e+00
-5.000000e-01	6.915450e-01	-1.691693e-03	-2.771678e+00
-4.000000e-01	7.780408e-01	-1.917156e-03	-2.717343e+00
-3.000000e-01	8.455231e-01	-2.093424e-03	-2.679143e+00
-2.000000e-01	8.937961e-01	-2.219571e-03	-2.653731e+00
-1.000000e-01	9.227769e-01	-2.295291e-03	-2.639162e+00
0.000000e+00	9.324389e-01	-2.320530e-03	-2.634413e+00
1.000000e-01	9.227769e-01	-2.295291e-03	-2.639162e+00
2.000000e-01	8.937961e-01	-2.219571e-03	-2.653731e+00
3.000000e-01	8.455231e-01	-2.093424e-03	-2.679143e+00
4.000000e-01	7.780408e-01	-1.917156e-03	-2.717343e+00
5.000000e-01	6.915450e-01	-1.691693e-03	-2.771678e+00
6.000000e-01	5.864229e-01	-1.419170e-03	-2.847966e+00
7.000000e-01	4.633505e-01	-1.103799e-03	-2.957110e+00
8.000000e-01	3.234072e-01	-7.530567e-04	-3.123172e+00
9.000000e-01	1.682013e-01	-3.790958e-04	-3.421251e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
-1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
-9.000000e-01	1.682808e-01	-2.995827e-04	-3.523483e+00
-8.000000e-01	3.235730e-01	-5.873021e-04	-3.231138e+00
-7.000000e-01	4.635841e-01	-8.701693e-04	-3.060396e+00
-6.000000e-01	5.866882e-01	-1.153869e-03	-2.937844e+00
-5.000000e-01	6.917952e-01	-1.441549e-03	-2.841171e+00
-4.000000e-01	7.782251e-01	-1.732873e-03	-2.761233e+00
-3.000000e-01	8.455929e-01	-2.023578e-03	-2.693880e+00
-2.000000e-01	8.937102e-01	-2.305494e-03	-2.637236e+00
-1.000000e-01	9.225053e-01	-2.566932e-03	-2.590586e+00
0.000000e+00	9.319661e-01	-2.793318e-03	-2.553880e+00
1.000000e-01	9.221042e-01	-2.968002e-03	-2.527536e+00
2.000000e-01	8.929424e-01	-3.073212e-03	-2.512408e+00
3.000000e-01	8.445254e-01	-3.091154e-03	-2.509879e+00
4.000000e-01	7.769527e-01	-3.005298e-03	-2.522112e+00
5.000000e-01	6.904348e-01	-2.801908e-03	-2.552546e+00
6.000000e-01	5.853702e-01	-2.471884e-03	-2.606972e+00
7.000000e-01	4.624413e-01	-2.012991e-03	-2.696158e+00
8.000000e-01	3.227278e-01	-1.432481e-03	-2.843911e+00
9.000000e-01	1.678304e-01	-7.499533e-04	-3.124966e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.16: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verfahren zu Aufgabe B)2)

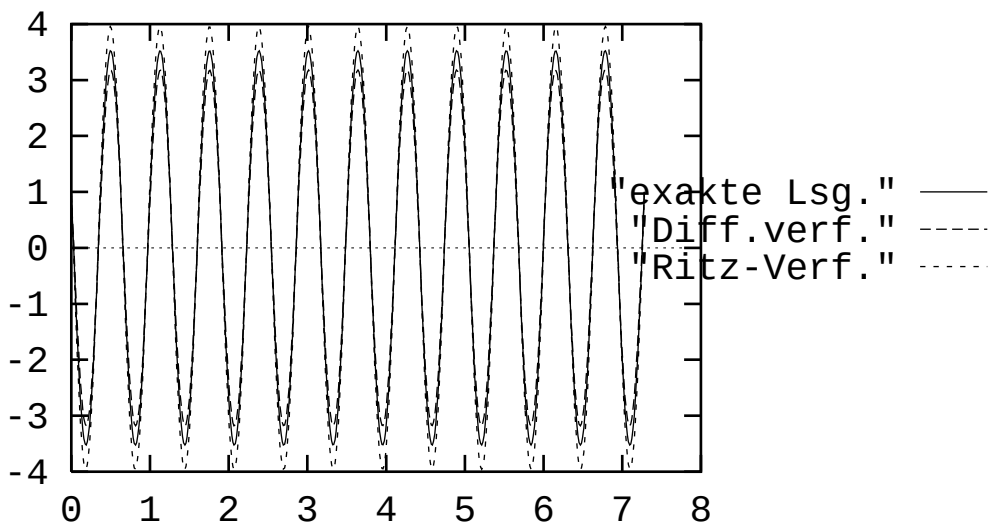


Abbildung C.12: Aufgabe C)1) ($\varepsilon = 1$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg.

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
3.641593e-01	5.797932e-01	-1.633294e-01	-7.869355e-01
7.283185e-01	-2.015833e+00	2.884695e-01	-5.399001e-01
1.092478e+00	2.952071e+00	-3.492384e-01	-4.568781e-01
1.456637e+00	-3.156377e+00	3.336632e-01	-4.766916e-01
1.820796e+00	2.578096e+00	-2.461916e-01	-6.087268e-01
2.184956e+00	-1.360606e+00	1.064448e-01	-9.728757e-01
2.549115e+00	-1.942305e-01	5.514079e-02	-1.258527e+00
2.913274e+00	1.700910e+00	-2.038288e-01	-6.907346e-01
3.277433e+00	-2.785868e+00	3.078911e-01	-5.116029e-01
3.641593e+00	3.180103e+00	-3.452169e-01	-4.619079e-01
4.005752e+00	-2.785868e+00	3.078911e-01	-5.116029e-01
4.369911e+00	1.700910e+00	-2.038288e-01	-6.907345e-01
4.734070e+00	-1.942305e-01	5.514080e-02	-1.258527e+00
5.098230e+00	-1.360606e+00	1.064447e-01	-9.728758e-01
5.462389e+00	2.578096e+00	-2.461916e-01	-6.087268e-01
5.826548e+00	-3.156377e+00	3.336632e-01	-4.766916e-01
6.190708e+00	2.952071e+00	-3.492384e-01	-4.568781e-01
6.554867e+00	-2.015833e+00	2.884695e-01	-5.399001e-01
6.919026e+00	5.797932e-01	-1.633294e-01	-7.869355e-01
7.283185e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
3.641593e-01	9.455446e-01	2.024219e-01	-6.937425e-01
7.283185e-01	-2.662490e+00	-3.581872e-01	-4.458899e-01
1.092478e+00	3.735741e+00	4.344312e-01	-3.620790e-01
1.456637e+00	-3.905823e+00	-4.157821e-01	-3.811342e-01
1.820796e+00	3.131616e+00	3.073282e-01	-5.123976e-01
2.184956e+00	-1.600296e+00	-1.332454e-01	-8.753476e-01
2.549115e+00	-3.179179e-01	-6.854660e-02	-1.164014e+00
2.913274e+00	2.159271e+00	2.545322e-01	-5.942572e-01
3.277433e+00	-3.478589e+00	-3.848297e-01	-4.147314e-01
3.641593e+00	3.956909e+00	4.315887e-01	-3.649299e-01
4.005752e+00	-3.478589e+00	-3.848297e-01	-4.147314e-01
4.369911e+00	2.159271e+00	2.545322e-01	-5.942572e-01
4.734070e+00	-3.179179e-01	-6.854659e-02	-1.164014e+00
5.098230e+00	-1.600296e+00	-1.332455e-01	-8.753476e-01
5.462389e+00	3.131616e+00	3.073282e-01	-5.123976e-01
5.826548e+00	-3.905823e+00	-4.157821e-01	-3.811342e-01
6.190708e+00	3.735741e+00	4.344312e-01	-3.620790e-01
6.554867e+00	-2.662490e+00	-3.581872e-01	-4.458899e-01
6.919026e+00	9.455446e-01	2.024219e-01	-6.937425e-01
7.283185e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.17: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verfahren zu Aufgabe C)1) ($\varepsilon = 1$)

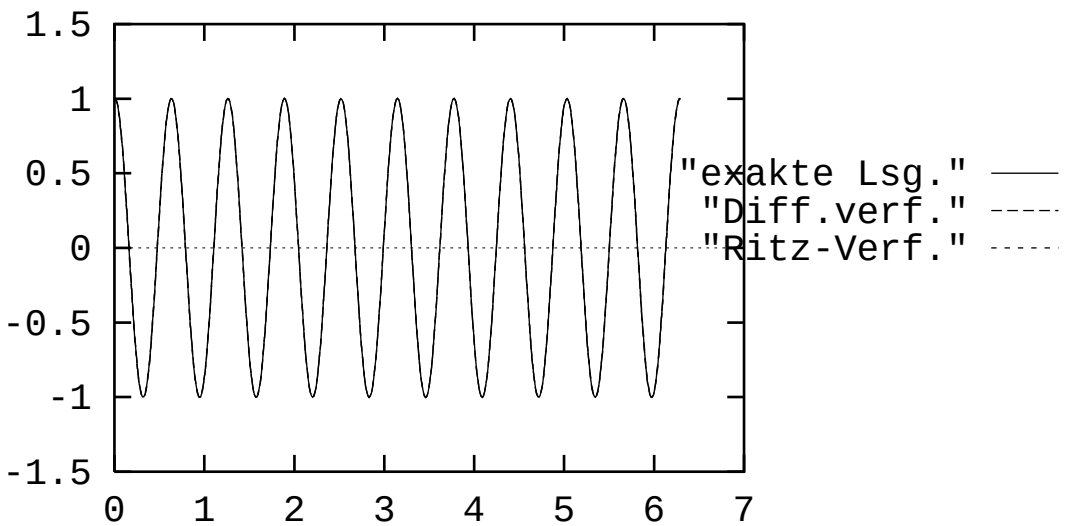


Abbildung C.13: Aufgabe C)1) ($\varepsilon = 10^{-2}$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg.

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
3.146593e-01	-1.000477e+00	-2.394203e-04	-3.620839e+00
6.293185e-01	1.000904e+00	4.536868e-04	-3.343244e+00
9.439778e-01	-1.001281e+00	-6.427833e-04	-3.191935e+00
1.258637e+00	1.001607e+00	8.066956e-04	-3.093290e+00
1.573296e+00	-1.001884e+00	-9.454115e-04	-3.024379e+00
1.887956e+00	1.002110e+00	1.058921e-03	-2.975137e+00
2.202615e+00	-1.002286e+00	-1.147214e-03	-2.940355e+00
2.517274e+00	1.002412e+00	1.210286e-03	-2.917112e+00
2.831933e+00	-1.002487e+00	-1.248131e-03	-2.903740e+00
3.146593e+00	1.002512e+00	1.260746e-03	-2.899372e+00
3.461252e+00	-1.002487e+00	-1.248131e-03	-2.903740e+00
3.775911e+00	1.002412e+00	1.210286e-03	-2.917112e+00
4.090570e+00	-1.002286e+00	-1.147214e-03	-2.940356e+00
4.405230e+00	1.002110e+00	1.058921e-03	-2.975137e+00
4.719889e+00	-1.001884e+00	-9.454115e-04	-3.024379e+00
5.034548e+00	1.001607e+00	8.066956e-04	-3.093290e+00
5.349208e+00	-1.001281e+00	-6.427832e-04	-3.191935e+00
5.663867e+00	1.000904e+00	4.536867e-04	-3.343244e+00
5.978526e+00	-1.000477e+00	-2.394202e-04	-3.620839e+00
6.293185e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
3.146593e-01	-1.000081e+00	1.563089e-04	-3.806016e+00
6.293185e-01	1.000154e+00	-2.961783e-04	-3.528447e+00
9.439778e-01	-1.000218e+00	4.196035e-04	-3.377161e+00
1.258637e+00	1.000274e+00	-5.265804e-04	-3.278535e+00
1.573296e+00	-1.000321e+00	6.171054e-04	-3.209641e+00
1.887956e+00	1.000360e+00	-6.911754e-04	-3.160412e+00
2.202615e+00	-1.000390e+00	7.487880e-04	-3.125641e+00
2.517274e+00	1.000411e+00	-7.899413e-04	-3.102405e+00
2.831933e+00	-1.000424e+00	8.146338e-04	-3.089038e+00
3.146593e+00	1.000428e+00	-8.228647e-04	-3.084672e+00
3.461252e+00	-1.000424e+00	8.146338e-04	-3.089038e+00
3.775911e+00	1.000411e+00	-7.899413e-04	-3.102405e+00
4.090570e+00	-1.000390e+00	7.487881e-04	-3.125641e+00
4.405230e+00	1.000360e+00	-6.911755e-04	-3.160412e+00
4.719889e+00	-1.000321e+00	6.171054e-04	-3.209641e+00
5.034548e+00	1.000274e+00	-5.265804e-04	-3.278535e+00
5.349208e+00	-1.000218e+00	4.196036e-04	-3.377161e+00
5.663867e+00	1.000154e+00	-2.961783e-04	-3.528447e+00
5.978526e+00	-1.000081e+00	1.563090e-04	-3.806016e+00
6.293185e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.18: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verf. zu Aufgabe C)1) ($\varepsilon = 10^{-2}$)

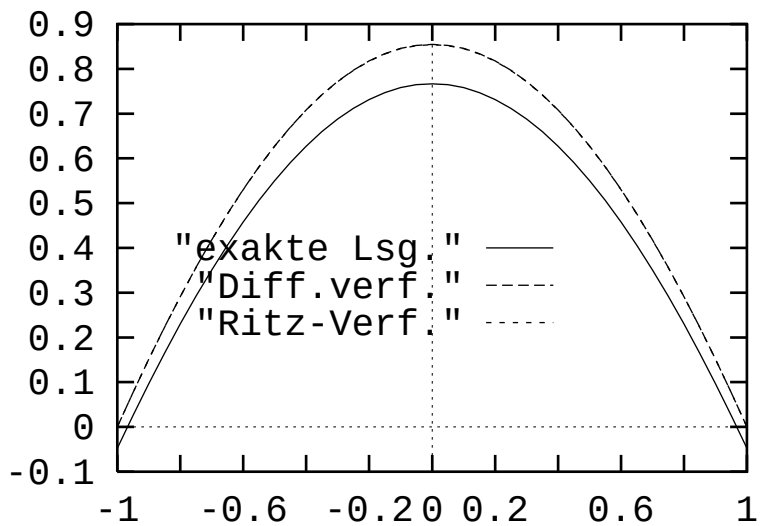


Abbildung C.14: Aufgabe C)2) ($\varepsilon = 1$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg.

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
-1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
-9.000000e-01	1.513358e-01	5.455748e-02	-1.263146e+00
-8.000000e-01	2.911061e-01	6.119449e-02	-1.213288e+00
-7.000000e-01	4.178816e-01	6.721637e-02	-1.172525e+00
-6.000000e-01	5.303859e-01	7.256280e-02	-1.139286e+00
-5.000000e-01	6.275011e-01	7.718027e-02	-1.112494e+00
-4.000000e-01	7.082734e-01	8.102269e-02	-1.091393e+00
-3.000000e-01	7.719170e-01	8.405169e-02	-1.075454e+00
-2.000000e-01	8.178176e-01	8.623709e-02	-1.064306e+00
-1.000000e-01	8.455346e-01	8.755710e-02	-1.057709e+00
0.000000e+00	8.548031e-01	8.799857e-02	-1.055524e+00
1.000000e-01	8.455346e-01	8.755710e-02	-1.057709e+00
2.000000e-01	8.178176e-01	8.623709e-02	-1.064306e+00
3.000000e-01	7.719170e-01	8.405169e-02	-1.075454e+00
4.000000e-01	7.082734e-01	8.102269e-02	-1.091393e+00
5.000000e-01	6.275011e-01	7.718027e-02	-1.112494e+00
6.000000e-01	5.303859e-01	7.256280e-02	-1.139286e+00
7.000000e-01	4.178816e-01	6.721637e-02	-1.172525e+00
8.000000e-01	2.911061e-01	6.119449e-02	-1.213288e+00
9.000000e-01	1.513358e-01	5.455748e-02	-1.263146e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
-1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
-9.000000e-01	1.512422e-01	5.446381e-02	-1.263892e+00
-8.000000e-01	2.909246e-01	6.101307e-02	-1.214577e+00
-7.000000e-01	4.176187e-01	6.695349e-02	-1.174227e+00
-6.000000e-01	5.300484e-01	7.222527e-02	-1.141311e+00
-5.000000e-01	6.270965e-01	7.677566e-02	-1.114776e+00
-4.000000e-01	7.078101e-01	8.055937e-02	-1.093884e+00
-3.000000e-01	7.714044e-01	8.353901e-02	-1.078111e+00
-2.000000e-01	8.172659e-01	8.568536e-02	-1.067093e+00
-1.000000e-01	8.449552e-01	8.697764e-02	-1.060592e+00
0.000000e+00	8.542082e-01	8.740365e-02	-1.058470e+00
1.000000e-01	8.449374e-01	8.695986e-02	-1.060681e+00
2.000000e-01	8.172319e-01	8.565136e-02	-1.067266e+00
3.000000e-01	7.713572e-01	8.349182e-02	-1.078356e+00
4.000000e-01	7.077540e-01	8.050327e-02	-1.094186e+00
5.000000e-01	6.270367e-01	7.671585e-02	-1.115115e+00
6.000000e-01	5.299906e-01	7.216751e-02	-1.141658e+00
7.000000e-01	4.175688e-01	6.690356e-02	-1.174551e+00
8.000000e-01	2.908878e-01	6.097624e-02	-1.214839e+00
9.000000e-01	1.512226e-01	5.444423e-02	-1.264048e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.19: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verfahren zu Aufgabe C)2) ($\varepsilon = 1$)

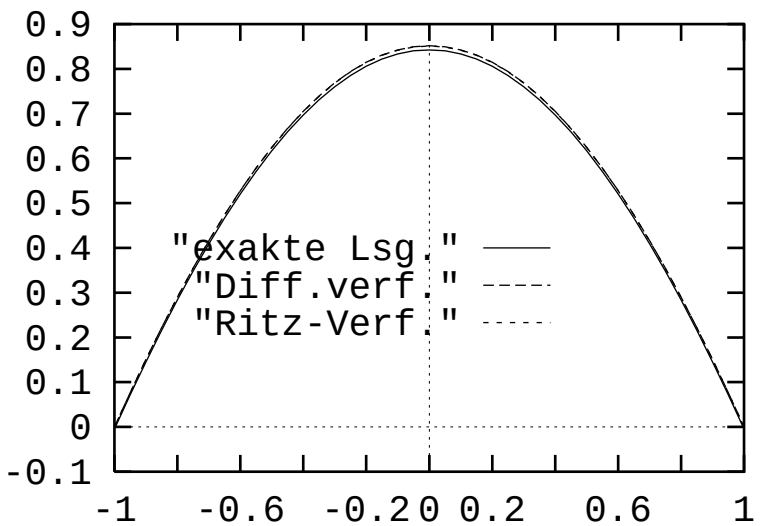


Abbildung C.15: Aufgabe C)2) ($\varepsilon = 10^{-2}$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg.

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
-1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
-9.000000e-01	1.506158e-01	5.501064e-03	-2.259553e+00
-8.000000e-01	2.897268e-01	6.207502e-03	-2.207083e+00
-7.000000e-01	4.159394e-01	6.849177e-03	-2.164362e+00
-6.000000e-01	5.279915e-01	7.419428e-03	-2.129630e+00
-5.000000e-01	6.247637e-01	7.912336e-03	-2.101695e+00
-4.000000e-01	7.052906e-01	8.322788e-03	-2.079731e+00
-3.000000e-01	7.687697e-01	8.646527e-03	-2.063158e+00
-2.000000e-01	8.145686e-01	8.880197e-03	-2.051577e+00
-1.000000e-01	8.422315e-01	9.021375e-03	-2.044727e+00
0.000000e+00	8.514832e-01	9.068598e-03	-2.042460e+00
1.000000e-01	8.422315e-01	9.021375e-03	-2.044727e+00
2.000000e-01	8.145686e-01	8.880197e-03	-2.051577e+00
3.000000e-01	7.687697e-01	8.646527e-03	-2.063158e+00
4.000000e-01	7.052906e-01	8.322788e-03	-2.079731e+00
5.000000e-01	6.247637e-01	7.912336e-03	-2.101695e+00
6.000000e-01	5.279915e-01	7.419428e-03	-2.129630e+00
7.000000e-01	4.159394e-01	6.849177e-03	-2.164362e+00
8.000000e-01	2.897268e-01	6.207502e-03	-2.207083e+00
9.000000e-01	1.506158e-01	5.501064e-03	-2.259553e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Ritz-Verfahren:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
-1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
-9.000000e-01	1.505152e-01	5.400387e-03	-2.267575e+00
-8.000000e-01	2.895313e-01	6.011960e-03	-2.220984e+00
-7.000000e-01	4.156563e-01	6.565997e-03	-2.182699e+00
-6.000000e-01	5.276292e-01	7.057162e-03	-2.151370e+00
-5.000000e-01	6.243321e-01	7.480741e-03	-2.126055e+00
-4.000000e-01	7.048005e-01	7.832694e-03	-2.106089e+00
-3.000000e-01	7.682328e-01	8.109684e-03	-2.090996e+00
-2.000000e-01	8.139975e-01	8.309110e-03	-2.080446e+00
-1.000000e-01	8.416393e-01	8.429121e-03	-2.074218e+00
0.000000e+00	8.508832e-01	8.468638e-03	-2.072186e+00
1.000000e-01	8.416375e-01	8.427353e-03	-2.074309e+00
2.000000e-01	8.139941e-01	8.305728e-03	-2.080622e+00
3.000000e-01	7.682281e-01	8.104991e-03	-2.091247e+00
4.000000e-01	7.047949e-01	7.827115e-03	-2.106398e+00
5.000000e-01	6.243261e-01	7.474795e-03	-2.126401e+00
6.000000e-01	5.276234e-01	7.051420e-03	-2.151723e+00
7.000000e-01	4.156513e-01	6.561035e-03	-2.183028e+00
8.000000e-01	2.895276e-01	6.008300e-03	-2.221248e+00
9.000000e-01	1.505132e-01	5.398441e-03	-2.267732e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.20: Zentrale Differenzenquotienten und Ritz-Verf. zu Aufgabe C)2) ($\varepsilon = 10^{-2}$)

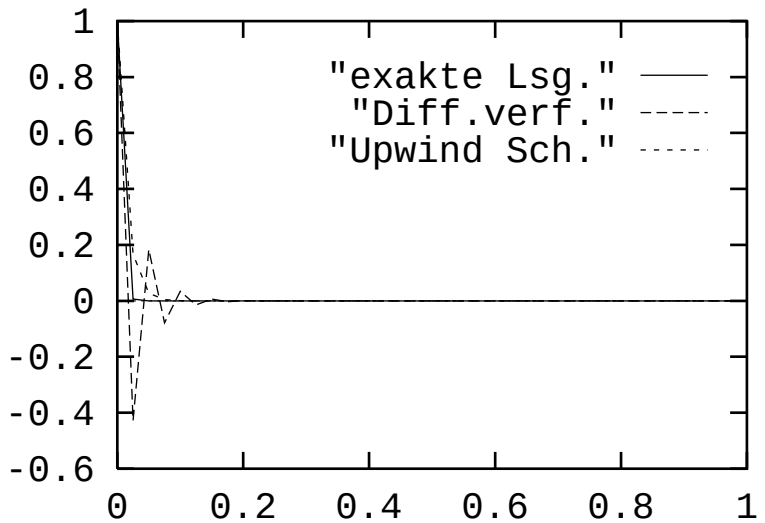


Abbildung C.16: Aufgabe C)3) ($\varepsilon = 1$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg.

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	1.836735e-01	1.836281e-01	-7.360609e-01
1.000000e-01	3.373594e-02	3.373594e-02	-1.471907e+00
1.500000e-01	6.196398e-03	6.196398e-03	-2.207861e+00
2.000000e-01	1.138114e-03	1.138114e-03	-2.943814e+00
2.500000e-01	2.090413e-04	2.090413e-04	-3.679768e+00
3.000000e-01	3.839535e-05	3.839535e-05	-4.415721e+00
3.500000e-01	7.052206e-06	7.052206e-06	-5.151675e+00
4.000000e-01	1.295303e-06	1.295303e-06	-5.887629e+00
4.500000e-01	2.379128e-07	2.379128e-07	-6.623582e+00
5.000000e-01	4.369827e-08	4.369827e-08	-7.359536e+00
5.500000e-01	8.026212e-09	8.026212e-09	-8.095489e+00
6.000000e-01	1.474201e-09	1.474201e-09	-8.831443e+00
6.500000e-01	2.707700e-10	2.707700e-10	-9.567399e+00
7.000000e-01	4.973170e-11	4.973170e-11	-1.030337e+01
7.500000e-01	9.132836e-12	9.132836e-12	-1.103939e+01
8.000000e-01	1.675901e-12	1.675901e-12	-1.177575e+01
8.500000e-01	3.062597e-13	3.062597e-13	-1.251391e+01
9.000000e-01	5.469298e-14	5.469298e-14	-1.326207e+01
9.500000e-01	8.486841e-15	8.486841e-15	-1.407125e+01
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Upwind-Schema:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	2.777778e-02	2.773238e-02	-1.557013e+00
1.000000e-01	7.716049e-04	7.716029e-04	-3.112606e+00
1.500000e-01	2.143347e-05	2.143347e-05	-4.668908e+00
2.000000e-01	5.953742e-07	5.953742e-07	-6.225210e+00
2.500000e-01	1.653817e-08	1.653817e-08	-7.781513e+00
3.000000e-01	4.593937e-10	4.593937e-10	-9.337815e+00
3.500000e-01	1.276093e-11	1.276093e-11	-1.089412e+01
4.000000e-01	3.544704e-13	3.544704e-13	-1.245042e+01
4.500000e-01	9.846400e-15	9.846400e-15	-1.400672e+01
5.000000e-01	2.735111e-16	2.735111e-16	-1.556303e+01
5.500000e-01	7.597531e-18	7.597531e-18	-1.711933e+01
6.000000e-01	2.110425e-19	2.110425e-19	-1.867563e+01
6.500000e-01	5.862293e-21	5.862293e-21	-2.023193e+01
7.000000e-01	1.628415e-22	1.628415e-22	-2.178824e+01
7.500000e-01	4.523374e-24	4.523374e-24	-2.334454e+01
8.000000e-01	1.256492e-25	1.256492e-25	-2.490084e+01
8.500000e-01	3.490183e-27	3.490183e-27	-2.645715e+01
9.000000e-01	9.687679e-29	9.687679e-29	-2.801378e+01
9.500000e-01	2.618292e-30	2.618292e-30	-2.958198e+01
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.21: Zentrale Differenzenquotienten und Upwind Schema zu Aufgabe C)3) ($\varepsilon = 1$)

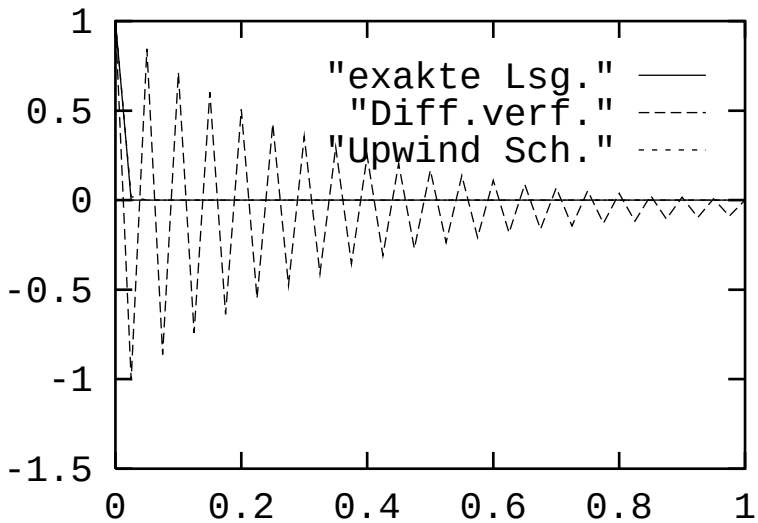


Abbildung C.17: Aufgabe C)3) ($\varepsilon = 10^{-2}$) — Näherungslsgn. im Vgl. mit der exakten Lsg.

Zentrale Differenzenquotienten:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	8.457960e-01	8.457960e-01	-7.273435e-02
1.000000e-01	7.144033e-01	7.144033e-01	-1.460565e-01
1.500000e-01	6.024474e-01	6.024474e-01	-2.200809e-01
2.000000e-01	5.070530e-01	5.070530e-01	-2.949467e-01
2.500000e-01	4.257702e-01	4.257702e-01	-3.708248e-01
3.000000e-01	3.565115e-01	3.565115e-01	-4.479265e-01
3.500000e-01	2.974981e-01	2.974981e-01	-5.265158e-01
4.000000e-01	2.472146e-01	2.472146e-01	-6.069260e-01
4.500000e-01	2.043694e-01	2.043694e-01	-6.895841e-01
5.000000e-01	1.678623e-01	1.678623e-01	-7.750469e-01
5.500000e-01	1.367556e-01	1.367556e-01	-8.640549e-01
6.000000e-01	1.102505e-01	1.102505e-01	-9.576193e-01
6.500000e-01	8.766631e-02	8.766631e-02	-1.057167e+00
7.000000e-01	6.842296e-02	6.842296e-02	-1.164798e+00
7.500000e-01	5.202625e-02	5.202625e-02	-1.283777e+00
8.000000e-01	3.805510e-02	3.805510e-02	-1.419587e+00
8.500000e-01	2.615068e-02	2.615068e-02	-1.582517e+00
9.000000e-01	1.600727e-02	1.600727e-02	-1.795683e+00
9.500000e-01	7.364368e-03	7.364368e-03	-2.132865e+00
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Upwind-Schema:

x	uh(x)	uh(x)-u(x)	log|uh(x)-u(x)|
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity
5.000000e-02	3.844675e-04	3.844675e-04	-3.415140e+00
1.000000e-01	1.478153e-07	1.478153e-07	-6.830281e+00
1.500000e-01	5.683017e-11	5.683017e-11	-1.024542e+01
2.000000e-01	2.184935e-14	2.184935e-14	-1.366056e+01
2.500000e-01	8.400367e-18	8.400367e-18	-1.707570e+01
3.000000e-01	3.229668e-21	3.229668e-21	-2.049084e+01
3.500000e-01	1.241702e-24	1.241702e-24	-2.390598e+01
4.000000e-01	4.773942e-28	4.773942e-28	-2.732112e+01
4.500000e-01	1.835426e-31	1.835426e-31	-3.073626e+01
5.000000e-01	7.056616e-35	7.056616e-35	-3.415140e+01
5.500000e-01	2.713040e-38	2.713040e-38	-3.756654e+01
6.000000e-01	1.043076e-41	1.043076e-41	-4.098168e+01
6.500000e-01	4.010287e-45	4.010287e-45	-4.439682e+01
7.000000e-01	1.541825e-48	1.541825e-48	-4.781196e+01
7.500000e-01	5.927816e-52	5.927816e-52	-5.122711e+01
8.000000e-01	2.279053e-55	2.279053e-55	-5.464225e+01
8.500000e-01	8.762217e-59	8.762217e-59	-5.805739e+01
9.000000e-01	3.368787e-62	3.368787e-62	-6.147253e+01
9.500000e-01	1.294692e-65	1.294692e-65	-6.488783e+01
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-Infinity

Tabelle C.22: Zentrale Differenzenquotienten und Upwind Schema zu Aufgabe C)3) ($\varepsilon = 10^{-2}$)

Literaturverzeichnis

[Arn80] V. I. Arnold. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 1980.

[BHW85] K. Burg, H. Haf, und F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure. Band 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen.* Teubner, Stuttgart, 1985.

[Bö85] G. Böhme. *Analysis. Teil 2: Integralrechnung, Reihen, Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 1985.

[Boh81] E. Bohl. *Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben.* Teubner, Stuttgart, 1981.

[BR89] G. Birkhoff und G.-C. Rotha. *Ordinary differential equations.* Wiley, Chichester, 1989.

[Bra83] M. Braun. *Differential equations and their applications.* Springer, New York, 1983.

[CL55] E. A. Coddington und N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* Mc Graw–Hill, New York, 1955.

[Col66] L. Collatz. *The numerical treatment of differential equations.* Springer, Berlin, 1966.

[Col68] J. D. Cole. *Perturbation methods in applied mathematics.* Blaisdell, Waltham, Mass., 1968.

[CP91] G. F. Carrier und C. E. Pearson. *Ordinary differential equations.* SIAM, Philadelphia, 1991.

[Fai78] G. Fairweather. *Finite Element Galerkin methods for differential equations.* Dekker, New York, 1978.

[Fox62] L. Fox. *Numerical solutions of ordinary and partial differential equations.* Pergamon Press/Addison–Wesley Publ. C., Oxford, 1962.

[Fri67] K. O. Friedrich. *Advanced ordinary differential equations.* Nelson, 1967.

[Goe77] H. Goering. *Asymptotische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen.* Vieweg, Braunschweig, 1977.

[Goe83] H. Goering. *Singularly perturbed differential equations.* Akad.–Verl., Berlin, 1983.

[GR92] Ch. Großmann und H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1992.

[Gri72] R. D. Grigorieff. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Band 1: Einschrittverfahren.* Teubner, Stuttgart, 1972.

[Gri77] R. D. Grigorieff. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Band 2: Mehrschrittverfahren.* Teubner, Stuttgart, 1977.

[Had74] K. P. Hadeler. *Mathematik für Biologen.* Springer, Berlin, 1974.

[Har82] P. Hartmann. *Ordinary differential equations.* Wiley, New York, 1982.

[Hen62] P. Henrici. *Discrete variable methods in ordinary differential equations.* Wiley, New York, 1962.

[Heu93] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil I.* Teubner, Stuttgart, 1993.

[Hil69] E. Hille. *Lectures on ordinary differential equations.* Addison–Wesley, Reading, 1969.

[HNW87] E. Hairer, S. P. Norsett, und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.* Springer, Berlin, 1987.

[Jai79] M. K. Jain. *Numerical solution of differential equations.* Wiley, New Delhi, 1979.

[JS77] D. W. Jordan und P. Smith. *Nonlinear ordinary differential equations.* Clarendon Press, Oxford, 1977.

[Kel68] H. B. Keller. *Numerical methods for two–point boundary–value problems.* Blaisdell, Waltham, Mass., 1968.

[Kel76] H. B. Keller. *Numerical solution of two point boundary value problems.* SIAM, Philadelphia, 1976.

[Lam91] J. D. Lambert. *Numerical methods for ordinary differential equations – The initial value problem.* Wiley, Chichester, 1991.

[Lue69] D. G. Luenberger. *Optimization by vector space methods.* Wiley, New York, 1969.

[Mar75] G. I. Marchuk. *Methods of numerical mathematics.* Springer, New York, 1975.

[MS69] S. G. Michlin und Ch. L. Smolizki. *Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen.* Teubner, Leipzig, 1969.

[O'M74] O'Malley Jr., R. E. *Introduction to singular perturbations.* Academic Press, New York, 1974.

[OP81] J. M. Ortega und W. G. Poole. *An introduction to numerical methods for differential equations.* Pitman, London, 1981.

[OR70] J. M. Ortega und W. C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* Academic Press, New York, 1970.

[PW67] M. H. Protter und H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[Rei85] H.-J. Reinhardt. *Analysis of approximation methods for differential and integral equations.* Springer, New York, 1985.

[Rei91] H.-J. Reinhardt. Funktionalanalytische Grundlagen der Numerischen Mathematik. Skriptum WS 1990/91, FB Mathem., Univ.-GH Siegen, 1991.

[Rei95] H.-J. Reinhardt. Einführung in die Funktionalanalysis. Skriptum SS 1995, FB Mathem., Univ.-GH Siegen, 1995.

[Rei96] H.-J. Reinhardt. Die Methode der Finiten Elemente. Skriptum WS 1995/96, FB Mathem., Univ.-GH Siegen, 1996.

[Ros89] S. L. Ross. *Introduction to ordinary differential equations.* Wiley, Chichester, 1989.

[RS94] H.-J. Reinhardt und F. Seiffarth. Arbeitsmaterialien zur Vorlesung Analysis I + II. Skriptum, FB Mathem., Univ.-GH Siegen, 1994.

[SB78] J. Stoer und R. Bulirsch. *Einführung in die Numerische Mathematik II.* Springer, Berlin, 1978.

[Sch86] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik.* Teubner, Stuttgart, 1986.

[Sew88] G. Sewell. *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations.* Academic Press, New York, 1988.

[SG75] L. F. Shampine und M. K. Gordon. *Computer solution of ordinary differential equations.* Freeman, San Francisco, 1975.

[SH82] F. Stummel und K. Hainer. *Praktische Mathematik.* Teubner, Stuttgart, 1982.

[SS73] F. W. Schäfke und D. Schmidt. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Heidelberger Taschenbücher. Springer, Berlin, 1973.

[Ste73] H. J. Stetter. *Analysis of discretization methods for ordinary differential equations.* Springer, Berlin, 1973.

[Tö79] W. Törnig. *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Band 1 u. 2.* Springer, Berlin, 1979.

[TWM85] J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, und C. W. Mastin. *Numerical grid generation.* North-Holland, New York, 1985.

[WA86] H. Werner und H. Arndt. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung in Theorie und Praxis.* Springer, Berlin, 1986.

[Wal76] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung.* Springer, Berlin, 1976.

[Wid75] D. Widder. *The Heat Equation.* Academic Press, New York, 1975.

Index

3/8–Regel, 23

Abbildung
    diagonale, 79
    isotone, 79
    konvexe, 80
Abschätzung
    quasi–optimale, 95
Abschneidefehler, 12, 14, 29, 42, 66
    der Differenzengleichung, 66
    in den Randbedingungen, 66
Anfangswertproblem, 9, 110
Approximation
    konsistente, 14, 42

Balkenbiegung, 6
Bilinearform, 93
    symmetrische, 94

d'Alembertsches Reduktionsverfahren, 121
Dachfunktionen, 88
Differentialgleichung
    singulär gestörte, 61, 63
    Van der Poolsche, 10, 13
Differentialgleichung n-ter Ordnung, 118
Differentialgleichung zweiter Ordnung, 121
Differentialoperator
    selbstadjungierte Form, 126
Differenzenapproximation, 65, 77, 78
Differenzenoperator
    von positivem Typ, 67, 81
Differenzenquotient
    zentraler
        zweiter Ordnung, 91

Einschrittverfahren, 12
    stabiles, 28
Einzelschrittverfahren, 80, 99
Elastischer Stab, 84
Elastizitätsmodul, 84
Elliptizität, 94
Energie
    aufgebrachte, 85
    innere elastische, 85
    potentielle, 85
Energieerhaltung, 84
Energienorm, 94
Euler–Lagrange–Gleichung, 107
Existenzsatz von Peano, 112
Extrapolationsmethoden, 27
Extrapolationsverfahren von Adams, 35, 47

Fehlerabschätzung, 93
    zweiseitige, 77
Fehlergleichung, 91, 94
Folge
    gleichgradig stetige, 72
    gleichmäßig beschränkte, 72
    kompakte, 72
Fouriersches Gesetz, 84
Fréchet–Ableitungen, 81
Fundamentalsystem, 114
Funktion
    gittererzeugende, 106

Galerkin Approximation, 90
Galerkin Methode, 90, 94
Gesamtfehlerschätzer
    asymptotisch exakter, 105
Gewichtsfunktion, 105, 108
Gitter, 65
    asymptotisch gleichverteiltes, 106
Gitterpunkt, 88
Gitterverteilungsfunktion, 106
Gleichgewichtszustand, 84
Greensche Funktion, 129
    Konstruktion, 129
Grenzschicht, 61, 63
Grundlösung, 128

Hauptsystem, 114
Hookesches Gesetz, 84

Interpolationsabschätzungen, 103
Interpolationsfehler
    Abschätzung, 92
Interpolationspolynom, 33
Interpolationsverfahren von Adams, 36, 48

Jacobi–Matrix, 98

Kippschwingung, 10
Konsistenz, 20, 21
    linearer MSV, 45
Konsistenzbedingung, 14, 66
Konsistenzkriterium, 14
Konsistenzordnung, 14, 45
    linearer MSV, 46
    maximale, 47
Konvergenz, 27, 70
Konvergenzordnung, 51, 70
Konvergenzsatz, 50, 76
Kritische Dämpfung, 124

Lagrange-Identität, 126
Lastvektor, 90
Lemma von Gronwell
    diskrete Version, 56
lineare Interpolierende, 92
Lipschitz–stabil, 49, 53
Lipschitz–Stabilität, 55
Lipschitz–stetig, 26
Lipschitzbedingung, 49, 111
lokale Basis, 90

M–Matrix, 79
Maximumprinzip, 68
Mehrschrittverfahren, 32
    konsistentes, 42
    lineares, 41
Methode der Finiten Elemente, 89
Methode der Taylor–Entwicklung, 25
Methode der Variation der Konstanten, 116, 120
Minimierungsproblem, 84, 85
Monotonie–Eigenschaft, 69

Newton–Verfahren, 80, 99
Normen
    in $C(I_h)$, 73

Optimale Formel von Kuntzmann, 24
optimale Verfahren, 16

partielle Integration, 85
Peclet–Zahl, 62
Polygonzug–Verfahren, 11, 15
Polygonzugverfahren
    verbessertes, 11, 16
Polynom
    charakteristisches, 122
Populationsmodell, 1
positive Definitheit, 94
positiver Typ, 97
Prädiktor–Korrektor–Verfahren von Adams, 37
Prinzip der minimalen potentiellen Energie, 85
Prinzip der virtuellen Arbeit, 85

Räuber–Beute–Modell, 2
Randwertaufgabe
    2–Punkt, 83, 93
    Sturmsche, 126
    zweiter Ordnung, 125
Randwertproblem, 64, 84, 110
    klassische Lösungen, 87
Randwertprobleme
    nichtlineare, 97
Residuen–Schätzer, 105
Residuum, 104
Restglied, 14
Ritz Methode, 90
Ritz–Galerkin–Methode, 95
Rundungsfehler, 29
Runge–Kutta Formeln
    allgemeine, 19
Runge–Kutta–Verfahren
    klassisches, 18, 23

Satz von Arzela–Ascoli, 72
Satz von der Inversen Funktion, 81
Satz von Picard-Lindelöf, 111
Schwingung, 123
    erzwungene gedämpfte, 4
    erzwungene ungedämpfte, 4
    freie gedämpfte, 4
    gedämpfte, 123
    gedämpfte freie, 124
    ungedämpfte, 4
    ungedämpfte erzwungene, 124
    ungedämpfte freie, 124
Schwingungsprobleme, 3
Simpson–Formel, 91
Spektralradius, 79

Spur, 115
Stabilitätssatz, 29, 69, 75
Stabilitätsschranke, 49
Stabilitätsschwelle, 49
Steifigkeitsmatrix, 90
Superkonvergenz, 104
System
    homogenes, 113
System von n Differentialgleichungen, 112

Temperaturverteilung, 5
Träger, 90

Überdämpfung, 123
Ungleichung
    Cauchy–Schwarzsche, 91
Unterdämpfung, 124
Unterteilung, 88
Upwind–Schema, 70

Variationsgleichung, 94
Variationsproblem, 84, 85
    endlichdimensionales, 90
Verfahren
    adaptive, 101
Verfahren von Euler
    verbessertes, 11
Verfahren von Euler–Cauchy, 11
    verbessertes, 11, 16
Verfahren von Milne, 40, 48
Verfahren von Milne–Simpson, 40
Verfahren von Nyström, 39, 48

Wärmeleitfähigkeit, 84
Wärmeleitung, 84
Wärmeleitungsgleichung, 5
Wronski-Determinante, 115
Wurzelbedingung, 56, 57

Zeilensummenkriterium
    schwaches, 68