Mathematische Logik II

Helmut Schwichtenberg

Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 1995

Vorwort

Das vorliegende Skriptum gibt den Inhalt einer vierstündigen Vorlesung "Mathematische Logik II" wieder, die ich im Sommersemester 1995 am Mathematischen Institut der Universität München gehalten habe. An vielen Stellen habe ich mich auf die Bücher von Kunen [8] und Shoenfield [18] sowie auf Vorlesungen von meinen Kollegen Wilfried Buchholz und Horst Osswald gestützt.

Für seine Unterstützung bei der Vorbereitung dieser Vorlesung bedanke ich mich bei Herrn Dr. Anton Setzer.

München, im Oktober 1995

Helmut Schwichtenberg

Inhalt

Teil IV: Mengenlehre
4.1 Einführung, kumulative Typenstruktur 1
4.2 Axiomatische Mengenlehre 3
4.3 Rekursion, Induktion, Ordinalzahlen 8
4.3.1 Rekursion über transitiv fundierte Relationen 8
4.3.2 Natürliche Zahlen 11
4.3.3 Transitive Hülle 18
4.3.4 Rekursion über fundierte Relationen 19
4.3.5 Wohlordnungen 20
4.3.6 Ordinale Klassen und Ordinalzahlen 22
4.3.7 Regularitätsaxiom, von Neumannsche Stufen, Rang 29
4.4 Kardinalzahlen 34
4.4.1 Größenvergleiche zwischen Mengen 34
4.4.2 Kardinalzahlen, Alephfunktion 35
4.4.3 Produkte von Kardinalzahlen 38
4.5 Auswahlaxiom 40
4.5.1 Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz und Zornsches Lemma 40
4.5.2 Kardinalität 41
4.5.3 Reguläre und singuläre Kardinalzahlen 43
4.5.4 Kardinalzahlpotenzen, Kontinuumshypothese 45
4.5.5 Der Vollständigkeitssatz für überabzählbare Sprachen 47
4.6 Ordinalzahlarithmetik 53
4.7 Normalfunktionen 62

Teil V: Beweistheorie
5.1 Gödelisierung von Ordinalzahlen 68
5.2 Beweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion 70
5.3 Normalisierung für die Minimallogik 75
5.3.1 Gegenbeispiele 76
5.3.2 Normalisierung 78
5.3.3 Folgerungen aus der Normalisierung 82
5.3.4 Eta–Expansion 84
5.4 Normalisierung für die Arithmetik mit der Omega–Regel 88
5.5 Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion 93
Anhang Der Satz von Tychonov 99
Literatur 102
Index 104

Teil IV: Mengenlehre

4.1 Einführung, kumulative Typenstruktur

Die Mengenlehre kann man als einen Rahmen auffassen, innerhalb dessen man Mathematik begründen und betreiben kann. Wir wollen die Mengenlehre hier als eine formale Theorie der mathematischen Logik entwickeln. Zunächst ist es jedoch notwendig, sich eine inhaltliche Vorstellung des durch die Axiome zu beschreibenden Mengenbegriffs zu verschaffen. Cantor gab 1895 die folgende Definition:

> Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Man kann versuchen, diese Definition wie folgt zu präzisieren. Sei V die Gesamtheit aller Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens. Mit $A(x)$ bezeichnen wir Eigenschaften von Objekten x aus V. Dann kann man $\{\, x \mid A(x) \,\}$ bilden, die Menge aller Objekte x aus V mit der Eigenschaft $A(x)$. Aufgrund von Cantors Definiton ist $\{\, x \mid A(x) \,\}$ wieder ein Objekt aus V.

Beispiele für Eigenschaften: (1) x ist natürliche Zahl. (2) x ist Menge. (3) x ist Punkt, y ist Gerade und x liegt auf y. (4) y ist Menge und x ist Element von y, kurz: $\mathrm{Mg}(y) \wedge x \in y$.

Cantors Definiton ist jedoch in ihrer ursprünglichen Form nicht haltbar, da sie zu Widersprüchen führt. Am bekanntesten ist die sogenannte *Russellsche Antinomie*: Sei $x_0 := \{\, x \mid \mathrm{Mg}(x) \wedge x \notin x \,\}$. Dann gilt

$$x_0 \in x_0 \leftrightarrow \mathrm{Mg}(x_0) \wedge x_0 \notin x_0 \leftrightarrow x_0 \notin x_0,$$

denn x_0 ist Menge.

Der Grund für diesen Widerspruch liegt darin, daß man von der Vorstellung einer fertigen Gesamtheit aller Mengen ausgeht. Dies ist aber weder notwendig noch entspricht es dem Vorgehen in der Mathematik. Es reicht vollkommen aus, wenn man eine Menge nur dann bildet, wenn ihre Elemente bereits "zur Verfügung stehen". Dies führt auf eine Vorstellung einer stufenweisen Konstruktion von Mengen oder genauer auf die *kumulative Typenstruktur*: Man beginnt mit vorgegebenen Urelementen, die die Mengen der Stufe 0 bilden. Auf einer beliebigen Stufe kann man dann alle Mengen bilden, deren Elemente früheren Stufen angehören.

Wählt man zum Beispiel als Urelemente die natürlichen Zahlen, so gehört $\{27, \{5\}\}$ zur Stufe 2.

Es stellen sich die folgenden natürlichen Fragen: (1) Welche Urelemente soll man wählen? (2) Wie weit reichen die Stufen?

Zu (1). Für die Zwecke der Mathematik ist es ausreichend, überhaupt keine Urelemente vorauszusetzen; man spricht dann von *reinen Mengen*. Dies wollen wir im folgenden tun.

Stufe 0: —
Stufe 1: $\emptyset$
Stufe 2: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$
Stufe 3: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
und so weiter.

Zu (2). Shoenfield hat in [18] das folgende Prinzip formuliert.

Shoenfield–Prinzip. *Man betrachte eine Gesamtheit $\mathcal{S}$ von Stufen. Kann man sich eine Situation vorstellen, in der alle Stufen aus $\mathcal{S}$ konstruiert sind, so soll es eine Stufe geben, die nach allen Stufen aus $\mathcal{S}$ kommt.*

Aus diesem vagen Prinzip lassen sich exakte Folgerungen ziehen, die wir als Axiome fixieren werden.

Unter einer *Menge* wollen wir also inhaltlich ein Objekt verstehen, das zu einer Stufe der kumulative Typenstruktur gehört. Unter einer *Klasse* verstehen wir eine beliebige Gesamtheit von Mengen.

Jede Menge ist also eine Klasse. Ferner gibt es Klassen, die keine Mengen sind, z.B. die Klasse V aller Mengen.

4.2 Axiomatische Mengenlehre

Wie in jeder axiomatischen Theorie müssen wir auch in der Mengenlehre sämtliche benötigten Eigenschaften, auch die anscheinend selbstverständlichen, explizit durch Axiome angeben.

Die Sprache der Mengenlehre enthält als einziges nichtlogisches Symbol die Elementbeziehung $\in$. Atomare Formeln sind also nur $x \in y$ (x ist Element von y). Die Gleichheit $x = y$ wird definiert durch

$$x = y := \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Um die Verträglichkeit der $\in$–Relation mit der Gleichheit sicherzustellen benötigen wir ein erstes Axiom.

Extensionalitätsaxiom.

$$\forall x, y, z\,(x = y \wedge x \in z \rightarrow y \in z). \tag{Ext}$$

Bemerkung. Will man die Gleichheit als Grundsymbol der Sprache verwenden, so muß man neben den Gleichheitsaxiomen fordern

$$\forall x, y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y].$$

Als Klassen lassen wir in unserer axiomatischen Theorie nur *definierbare* Gesamtheiten von Mengen zu. Unter "definierbar" verstehen wir definierbar durch eine Formel der Sprache der Mengenlehre.

Definition. *Ist $A(x)$ eine Formel, in der die hervorgehobene Mengenvariable x und eventuell weitere Mengenvariablen (sog. Parameter) vorkommen können, so heißt $\{\, x \mid A(x) \,\}$ die Klasse aller Mengen x mit der Eigenschaft $A(x)$.*

Statt mit Klassen könnten wir also auch mit Eigenschaften oder genauer mit Formeln arbeiten. Mit Klassen lassen sich aber viele Aussagen einfacher und suggestiver formulieren.

Beispiele. Ist $A(x)$ die Formel $x = x$, so heißt $\{\, x \mid A(x) \,\}$ die *Allklasse*. Ist $A(x)$ die Formel $x \notin x$, so heißt $\{\, x \mid A(x) \,\}$ die *Russellklasse*.

Wir geben jetzt einige im folgenden ständig verwendete Definitionen. Eine Menge b ist genau dann Element der Klasse $\{\, x \mid A(x) \,\}$, wenn $A(b)$ gilt:

$$b \in \{\, x \mid A(x) \,\} := A(b).$$

Zwei Klassen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ heißen *gleich*, wenn sie dieselben Elemente enthalten:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} := \forall x(x \in \mathcal{A} \leftrightarrow x \in \mathcal{B}).$$

Ist $\mathcal{A}$ eine Klasse und b eine Menge, so heißen $\mathcal{A}$ und b gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten:

$$\mathcal{A} = b := \forall x(x \in \mathcal{A} \leftrightarrow x \in b).$$

Wir identifizieren dann die Klasse $\mathcal{A}$ mit dieser Menge b. Eine Klasse $\mathcal{B}$ ist Element einer Menge a (bzw. einer Klasse $\mathcal{A}$), wenn $\mathcal{B}$ gleich einem Element x von a (bzw. von $\mathcal{A}$) ist:

$$\mathcal{B} \in a := \exists x\,(x \in a \wedge \mathcal{B} = x),$$
$$\mathcal{B} \in \mathcal{A} := \exists x\,(x \in \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = x).$$

Eine Klasse A heißt *echte Klasse*, wenn $\mathcal{A}$ keine Menge ist:

$$\mathcal{A} \text{ echte Klasse} := \forall x(x \neq \mathcal{A}).$$

Bemerkung. Jede Menge b ist eine Klasse, denn

$$b = \{\, x \mid x \in b \,\}.$$

Die Russellklasse ist eine echte Klasse. Beweis. Annahme: $\{\, x \mid x \notin x \,\} = x_0$. Dann:

$$x_0 \in x_0 \leftrightarrow x_0 \notin x_0.$$

Definitionen. *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Klassen (also echte Klassen oder Mengen) und $a, b, a_1, \ldots, a_n$ Mengen*

1. $\{a_1, \ldots, a_n\} := \{\, x \mid x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n \,\}$.
2. $\emptyset := \{\, x \mid x \neq x \,\}$ *leere Klasse.*
3. $V := \{\, x \mid x = x \,\}$ *Allklasse.*
4. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} := \forall x(x \in \mathcal{A} \to x \in \mathcal{B})$. *$\mathcal{A}$ ist Teilklasse von $\mathcal{B}$.*
5. $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B} := \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. *$\mathcal{A}$ ist echte Teilklasse von $\mathcal{B}$.*
6. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} := \{\, x \mid x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B} \,\}$.
7. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} := \{\, x \mid x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B} \,\}$.
8. $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} := \{\, x \mid x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B} \,\}$.
9. $\bigcup \mathcal{A} := \{\, x \mid \exists y\,(y \in \mathcal{A} \wedge x \in y) \,\}$. *Also* $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$.

10. $\bigcap \mathcal{A} := \{\, x \mid \forall y\,(y \in \mathcal{A} \to x \in y)\,\}$. *Also* $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$. $\bigcap \emptyset$ *ist die Allklasse.*

11. $\mathcal{P}(\mathcal{A}) := \{\, x \mid x \subseteq \mathcal{A}\,\}$ *Potenzklasse von* $\mathcal{A}$. $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ *ist die Klasse aller Teilklassen von* $\mathcal{A}$*, die Mengen sind.*

12. $(a, b) := \{\, x \mid x = \{a\} \vee x = \{\, a, b\,\}\,\}$ *(geordnetes) Paar. (Kuratowski–Paar)*

Um sicherzustellen, daß (a, b) nicht die leere Klasse ist, müssen wir axiomatisch fordern, daß $\{a\}$ und $\{a, b\}$ Mengen sind. Also

Paarmengenaxiom.

$$\forall x, y\,(\{\, x, y\,\} \textit{ ist Menge}). \tag{Pa}$$

Bemerkungen. 1. In der kumulativen Typenstruktur ist (Pa) offenbar gültig, da es zu je zwei Stufen S_1 und S_2 nach dem Shoenfield–Prinzip eine Stufe S geben muß, die nach S_1 und S_2 kommt. 2. Insbesondere folgt aus (Pa): Für jede Menge x ist $\{x\}$ Menge. 3. Ausgeschrieben lautet (Pa): $\forall x \forall y \exists z \forall u\,(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$. 4. Wegen Definition 1 und (Pa) ist $(a, b) = \{\, \{a\}, \{a, b\}\,\}$ Menge.

Definitionen. *(Fortsetzung)*

13. *Abkürzung:* $\{\, (x, y) \mid A(x, y)\,\} := \{\, z \mid \exists x, y\,(A(x, y) \wedge z = (x, y))\,\}$.

14. $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{\, (x, y) \mid x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}\,\}$ *kartesisches Produkt von* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$.

15. $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) := \{\, x \mid \exists y\,((x, y) \in \mathcal{A})\,\}$ *Definitionsbereich von* $\mathcal{A}$.

16. $\mathrm{rng}(\mathcal{A}) := \{\, y \mid \exists x\,((x, y) \in \mathcal{A})\,\}$ *Wertebereich von* $\mathcal{A}$.

17. $\mathcal{A}\restriction\mathcal{B} := \{\, (x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\,\}$ *Einschränkung von* $\mathcal{A}$ *auf* $\mathcal{B}$.

18. $\mathcal{A}[\mathcal{B}] := \{\, y \mid \exists x\,(x \in \mathcal{B} \wedge (x, y) \in \mathcal{A})\,\}$ *Bild von* $\mathcal{B}$ *unter* $\mathcal{A}$.

19. $\mathcal{A}^{-1} := \{\, (y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{A}\,\}$.

20. $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} := \{\, (x, z) \mid \exists y\,((x, y) \in \mathcal{B} \wedge (y, z) \in \mathcal{A})\,\}$.

Jetzt kann man ohne Mühe die üblichen Begriffe betreffend Relationen und Funktionen einführen.

Definitionen. *Seien* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *und* $\mathcal{C}$ *Klassen.*

1. $\mathcal{A}$ *ist Relation genau dann, wenn* $\mathcal{A} \subseteq V \times V$*. Eine Relation ist also eine Klasse von Paaren. Statt* $(a, b) \in \mathcal{A}$ *schreiben wir auch* $a\mathcal{A}b$.

2. $\mathcal{A}$ *ist Relation auf* $\mathcal{B}$ *genau dann, wenn* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

3. $\mathcal{A}$ *ist Funktion genau dann, wenn* $\mathcal{A}$ *Relation ist und*

$$\forall x, y, z\,((x, y) \in \mathcal{A} \wedge (x, z) \in \mathcal{A} \to y = z).$$

Eine Funktion ist also eine rechtseindeutige Relation.

4. $\mathcal{A}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *genau dann, wenn* $\mathcal{A}$ *Funktion ist und* $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ *und* $\mathcal{A}[\mathcal{B}] \subseteq \mathcal{C}$. $\mathcal{A}$ *heißt dann Funktion von* $\mathcal{B}$ *nach* $\mathcal{C}$.

5. $\mathcal{A}\colon \mathcal{B} \to_{\mathrm{auf}} \mathcal{C}$ *genau dann, wenn* $\mathcal{A}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *und* $\mathcal{A}[\mathcal{B}] = \mathcal{C}$. $\mathcal{A}$ *heißt dann surjektive Funktion von* $\mathcal{B}$ *auf* $\mathcal{C}$.

6. $\mathcal{A}$ *ist injektiv genau dann, wenn* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{A}^{-1}$ *Funktionen sind.*

7. $\mathcal{A}\colon \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$ *genau dann, wenn* $\mathcal{A}\colon \mathcal{B} \to_{\mathrm{auf}} \mathcal{C}$ *und* $\mathcal{A}$ *injektiv ist.* $\mathcal{A}$ *heißt dann bijektive Funktion von* $\mathcal{B}$ *auf* $\mathcal{C}$.

Für den weiteren Aufbau der Mengenlehre sind die folgenden Axiome notwendig.

Vereinigungsmengenaxiom.

$$\forall x\,(\bigcup x \text{ ist Menge}). \tag{Ve}$$

Das Vereinigungsmengenaxiom ist gültig in der kumulativen Typenstruktur. Um dies zu sehen, betrachte man eine Stufe S, in der x gebildet ist. Ein beliebiges Element $v \in x$ steht dann bereits in einer früheren Stufe S_v zur Verfügung. Ebenso ist jedes Element $u \in v$ in einer vor S_v liegenden Stufe $S_{v,u}$ vorhanden. Alle diese u bilden aber $\bigcup x$. Damit kann auch $\bigcup x$ auf der Stufe S gebildet werden.

Definition. *(Fortsetzung)*

8. $\mathcal{A}(x) := \bigcup\{\, y \mid (x,y) \in \mathcal{A}\,\}$.

Ist $\mathcal{A}$ eine Funktion und $(x,y) \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A}(x) = \bigcup\{y\} = y$ und wir schreiben $\mathcal{A}\colon x \mapsto y$.

Aussonderungsschema. *Für jede Klasse* $\mathcal{A}$ *gilt*

$$\exists x\,(\mathcal{A} \subseteq x) \to \exists y\,(\mathcal{A} = y). \tag{AuS}$$

Das Aussonderungsschema sagt also aus, daß jede Teilklasse $\mathcal{A}$ einer Menge x selbst eine Menge ist. Es ist gültig in der kumulativen Typenstruktur, denn auf derselben Stufe, auf der die Menge x gebildet ist, kann man auch die Menge y bilden, deren Elemente gerade die Elemente der Klasse $\mathcal{A}$ sind. — Man beachte, daß das Aussonderungsschema aus unendlich vielen Axiomen besteht.

Potenzmengenaxiom.

$$\forall x\,(\mathcal{P}(x) \text{ ist Menge}). \tag{Po}$$

Das Potenzmengenaxiom ist gültig in der kumulativen Typenstruktur. Um dies zu sehen, betrachte man eine Stufe S, auf der x gebildet ist. Dann ist auch jede Teilmenge $y \subseteq x$ auf der Stufe S gebildet. Auf der (nach dem Shoenfield–Prinzip existierenden) nächsten Stufe S' kann man also $\mathcal{P}(x)$ bilden.

Lemma 2.1. $\forall a, b\,(a \times b$ *ist Menge*$)$.

Beweis. Wir zeigen $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$. Seien also $x \in a$ und $y \in b$.

$$\begin{aligned} \{x\}, \{x, y\} &\subseteq a \cup b \\ \{x\}, \{x, y\} &\in \mathcal{P}(a \cup b) \\ \{\, \{x\}, \{x, y\} \,\} &\subseteq \mathcal{P}(a \cup b) \\ (x, y) = \{\, \{x\}, \{x, y\} \,\} &\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit (Ve), (Pa), (Po), (AuS). □

Ersetzungsschema. *Für jede Klasse* $\mathcal{A}$ *gilt*

$$\mathcal{A} \textit{ ist Funktion } \rightarrow \forall x\,(\mathcal{A}[x] \textit{ ist Menge}) \qquad \text{(ErS)}$$

Auch das Ersetzungsschema ist gültig in der kumulativen Typenstruktur; dies ist allerdings nur mit etwas mehr Mühe einzusehen. Man betrachte alle Elemente u der Menge $x \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$. Für jedes solche u ist $\mathcal{A}(u)$ eine Menge und deshalb auf einer Stufe S_u der kumulativen Typenstruktur gebildet. Da $x \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ eine Menge ist, kann man sich eine Situation vorstellen, in der alle S_u für $u \in x \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ konstruiert sind. Nach dem Shoenfield–Prinzip gibt es also auch eine Stufe S nach allen S_u. In S kann $\mathcal{A}[x]$ gebildet werden.

Lemma 2.2. *(ErS)* $\rightarrow$ *(AuS)*

Beweis. Sei $\mathcal{A} \subseteq x$ und $\mathcal{B} := \{\, (u, v) \mid u = v \wedge u \in \mathcal{A} \,\}$. Dann ist $\mathcal{B}$ Funktion und es gilt $\mathcal{B}[x] = \mathcal{A}$. □

Damit sind die Axiome der Mengenlehre noch nicht vollständig angegeben: wir werden später noch das Unendlichkeitsaxiom, das Regularitätsaxiom und das Auswahlaxiom fordern.

4.3 Rekursion, Induktion, Ordinalzahlen

Wir beginnen damit, einen möglichst allgemeinen Rahmen für rekursive Definitionen und induktive Beweise abzustecken. Es wird sich zeigen, daß beides über sog. fundierten Relationen möglich ist. Um dies zu zeigen, führen wir als Hilfsbegriff den einer transitiv fundierten Relation ein; er wird sich später als äquivalent zu dem einer fundierten Relation erweisen. Wir definieren dann die natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre, wobei wir Induktion und Rekursion als Spezialfälle der entsprechenden allgemeinen Sätze für transitiv fundierte Relationen erhalten. Mit Hilfe der Rekursion über natürliche Zahlen können wir dann die transitive Hülle einer Menge einführen, und mit Hilfe dieses Begriffs zeigen wir, daß die fundierten Relationen mit den transitiv fundierten Relationen übereinstimmen. Anschließend untersuchen wir spezielle fundierte Relationen. Zunächst zeigen wir, daß beliebige Klassen mit der $\in$–Relation bis auf Isomorphie die einzigen fundierten extensionalen Relationen sind (Isomorphiesatz von Mostowski). Dann betrachten wir lineare fundierte Ordnungen, kurz Wohlordnungen. Da sie stets extensional sind, sind sie alle zu gewissen Klassen mit der $\in$–Relation isomorph, die wir ordinale Klassen nennen. Ordinalzahlen sind dann die ordinalen Mengen.

4.3.1 Rekursion über transitiv fundierte Relationen

Mit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ bezeichnen wir immer Klassen.

Definitionen. *Sei $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\mathcal{A}$.*

1. $\hat{x}^{\mathcal{R}} = \{\, y \mid y\mathcal{R}x \,\}$ *heißt die Klasse der $\mathcal{R}$–Vorgänger von x. Im folgenden schreiben wir $\hat{x}$ statt $\hat{x}^{\mathcal{R}}$, wenn $\mathcal{R}$ aus dem Zusammenhang klar ist.*

2. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *heißt $\mathcal{R}$–transitiv, wenn*

$$\forall x(x \in \mathcal{B} \to \hat{x} \subseteq \mathcal{B}).$$

   $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist also $\mathcal{R}$–transitiv genau dann, wenn aus $y\mathcal{R}x$ und $x \in \mathcal{B}$ stets folgt $y \in \mathcal{B}$.

3. *Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. $x \in \mathcal{B}$ heißt $\mathcal{R}$–minimales Element von $\mathcal{B}$, wenn $\hat{x} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.*

4. *$\mathcal{R}$ heißt transitiv fundierte Relation auf $\mathcal{A}$, wenn gilt*

   a. *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathcal{A}$ besitzt ein $\mathcal{R}$–minimales Element, d.h.*

$$\forall a\,(a \subseteq \mathcal{A} \wedge a \neq \emptyset \to \exists x\,(x \in a \wedge \hat{x} \cap a = \emptyset)).$$

   b. *Zu jedem $x \in \mathcal{A}$ gibt es eine $\mathcal{R}$–transitive Menge $b \subseteq \mathcal{A}$ mit $\hat{x} \subseteq b$.*

Bei allen diesen Begriffen wird im folgenden $\mathcal{R}$ weggelassen, wie bereits oben für $\hat{x}$ geschehen.

Bemerkung. Sei $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\mathcal{A}$. $\mathcal{R}$ heißt *transitive Relation auf* $\mathcal{A}$, wenn gilt

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A}\,(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z).$$

Zum Begriff der $\mathcal{R}$–Transitivität von Klassen besteht folgender Zusammenhang. Sei $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathcal{R} \text{ ist transitive Relation auf } \mathcal{A} \leftrightarrow \forall y \in \mathcal{A}(\,\hat{y} \text{ ist } \mathcal{R}\text{–transitiv}).$$

Beweis: $\to$. Sei $\mathcal{R}$ transitive Relation auf $\mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}$ und $x \in \hat{y}$, also $x\mathcal{R}y$. Zu zeigen ist $\hat{x} \subseteq \hat{y}$. Sei also $z\mathcal{R}x$. Zu zeigen ist $z\mathcal{R}y$. Dies folgt aber aus der Transitivität von $\mathcal{R}$. $\leftarrow$. Seien $x, y, z \in \mathcal{A}$, $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$. Zu zeigen ist $x\mathcal{R}z$. Es gilt also $x\mathcal{R}y$ und $y \in \hat{z}$. Da $\hat{z}$ $\mathcal{R}$–transitiv ist, folgt $x \in \hat{z}$, also $x\mathcal{R}z$.

Lemma 3.1. *Sei $\mathcal{R}$ transitiv fundierte Relation auf $\mathcal{A}$. Dann gilt*

a. *Jede nichtleere Teilklasse $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ hat ein $\mathcal{R}$–minimales Element.*

b. *$\forall x(x \in \mathcal{A} \to \hat{x}$ ist Menge$)$.*

Beweis. a. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ und $z \in \mathcal{B}$. OBdA ist z nicht $\mathcal{B}$–minimal, d.h. $\hat{z} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Nach 4b existiert eine $\mathcal{R}$–transitive Obermenge $b \subseteq \mathcal{A}$ von $\hat{z}$. Wegen $\hat{z} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ ist $b \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Nach 4a existiert ein $\mathcal{R}$–minimales $x \in b \cap \mathcal{B}$, d.h. $\hat{x} \cap b \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Da b $\mathcal{R}$–transitiv ist, folgt aus $x \in b$ sofort $\hat{x} \subseteq b$. Also ist $\hat{x} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ und damit x $\mathcal{R}$–minimales Element von $\mathcal{B}$.

b. Dies folgt wegen 4b aus dem Aussonderungsschema. □

Wir schreiben $\forall x \in \mathcal{A}\,(\ldots)$ für $\forall x\,(x \in \mathcal{A} \to \ldots)$ und entsprechend $\exists x \in \mathcal{A}\,(\ldots)$ für $\exists x\,(x \in \mathcal{A} \wedge \ldots)$.

Induktionssatz 3.2. *Sei $\mathcal{R}$ eine transitiv fundierte Relation auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine beliebige Klasse. Gilt dann*

$$\forall x \in \mathcal{A}\,(\hat{x} \subseteq \mathcal{B} \to x \in \mathcal{B}),$$

so folgt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Beweis. Annahme: $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \neq \emptyset$. Sei x minimales Element von $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Genügt: $\hat{x} \subseteq \mathcal{B}$ (denn daraus $x \in \mathcal{B}$: Widerspruch!). Sei $z \in \hat{x}$. Nach Wahl von x folgt $z \notin \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, also $z \in \mathcal{B}$ (denn $z \in \mathcal{A}$ gilt, da $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\mathcal{A}$ ist). □

Rekursionssatz 3.3. *Sei $\mathcal{R}$ eine transitiv fundierte Relation auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{G}\colon V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to V$ mit*

$$\forall x \in \mathcal{A}\,(\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F}{\restriction}\hat{x})).$$

Beweis. Man beachte zunächst, daß für $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to V$ gilt $\mathcal{F}\restriction\hat{x} \subseteq \hat{x} \times \mathcal{F}[\hat{x}]$ und damit $\mathcal{F}\restriction\hat{x}$ eine Menge ist.

Eindeutigkeit. Gegeben $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$. Betrachte

$$\{\, x \mid x \in \mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x) \,\} =: \mathcal{B}.$$

Genügt: $\forall x \in \mathcal{A}\,(\hat{x} \subseteq \mathcal{B} \to x \in \mathcal{B})$, nach Induktionssatz. Sei also $x \in \mathcal{A}$ und $\hat{x} \subseteq \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1\restriction\hat{x} = \mathcal{F}_2\restriction\hat{x}\\
&\mathcal{G}\,(\mathcal{F}_1\restriction\hat{x}) = \mathcal{G}\,(\mathcal{F}_2\restriction\hat{x})\\
&\mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x)\\
&x \in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Existenz. Sei

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} := \{\, f \mid\ & f \text{ ist Funktion und}\\
& \operatorname{dom}(f) \text{ ist } \mathcal{R}\text{–transitive Teilmenge von } \mathcal{A} \text{ und}\\
& \forall x \in \operatorname{dom}(f)(f(x) = \mathcal{G}(f\restriction\hat{x}))\,\}
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{F} := \bigcup \mathcal{B}.$$

Wir beweisen zunächst, daß

$$f, g \in \mathcal{B} \wedge x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \to f(x) = g(x). \tag{1}$$

Seien also $f, g \in \mathcal{B}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über x, d.h. durch Anwendung des Induktionssatzes auf

$$\{\, x \mid x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \to f(x) = g(x) \,\}.$$

Sei also $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\hat{x} \subseteq \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g), \quad \text{da } \operatorname{dom}(f), \operatorname{dom}(g)\ \mathcal{R}\text{–transitiv}\\
&f\restriction\hat{x} = g\restriction\hat{x} \quad \text{nach IH}\\
&\mathcal{G}\,(f\restriction\hat{x}) = \mathcal{G}\,(g\restriction\hat{x})\\
&f(x) = g(x).
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{F}$ eine Funktion ist.

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$f \in \mathcal{B} \wedge x \in \operatorname{dom}(f) \to \mathcal{F}(x) = f(x). \tag{2}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F}\restriction\hat{x})$ für alle $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$.

Wir beweisen jetzt

$$\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}. \tag{3}$$

$\subseteq$ ist klar. $\supseteq$. Wir verwenden den Induktionssatz. Sei also $\hat{y} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{F})$. Zu zeigen ist $y \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$. Sei b $\mathcal{R}$–transitiv mit $\hat{y} \subseteq b \subseteq \mathcal{A}$. Setze

$$g := \mathcal{F}\restriction b \cup \{\, (y, \mathcal{G}(\mathcal{F}\restriction\hat{y})) \,\}$$

Genügt: $g \in \mathcal{B}$, denn daraus folgt $y \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ (wegen $y \in \mathrm{dom}(g)$).

g Funktion: Klar, da $y \notin \mathrm{dom}(\mathcal{F})$.

$\mathrm{dom}(g)$ $\mathcal{R}$–transitiv: Es ist $\mathrm{dom}(g) = (b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F})) \cup \{y\}$. Man beachte zunächst, daß $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ als Vereinigung $\mathcal{R}$–transitiver Mengen selbst $\mathcal{R}$–transitiv ist. Da ferner b $\mathcal{R}$–transitiv ist, ist auch $b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ $\mathcal{R}$–transitiv. Sei nun $z\mathcal{R}x$ und $x \in \mathrm{dom}(g)$. Zu zeigen: $z \in \mathrm{dom}(g)$. Im Fall $x \in b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ ist auch $z \in b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ (da wie eben bemerkt $b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ $\mathcal{R}$–transitiv ist), also $z \in \mathrm{dom}(g)$. Im Fall $x = y$ ist $z \in \hat{y}$, also $z \in b$ und $z \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ nach Wahl von y, also wieder $z \in \mathrm{dom}(g)$.

$\forall x \in \mathrm{dom}(g)(g(x) = \mathcal{G}(g\restriction\hat{x}))$: Im Fall $x \in b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{F}(x) \\ &= \mathcal{G}(\mathcal{F}\restriction\hat{x}) \quad \text{nach (2)} \\ &= \mathcal{G}(g\restriction\hat{x}) \quad \text{da } \hat{x} \subseteq b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F}), \text{ denn } b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F}) \text{ ist } \mathcal{R}\text{–transitiv.} \end{aligned}$$

Im Fall $x = y$ ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{G}(\mathcal{F}\restriction\hat{x}) \\ &= \mathcal{G}(g\restriction\hat{x}) \quad \text{da } \hat{x} = \hat{y} \subseteq b \cap \mathrm{dom}(\mathcal{F}) \text{ nach Wahl von } y. \end{aligned}$$

□

4.3.2 Natürliche Zahlen

Zermelo hat die natürlichen Zahlen wie folgt in der Mengenlehre definiert: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ und so weiter. Ein gravierender Nachteil dieser Definition ist, daß man sie nicht auf Ordinalzahlen verallgemeinern kann. Deshalb hat J. von Neumann vorgeschlagen, die Zahl n darzustellen durch eine Menge aus genau n Elementen, und zwar durch

$$n := \{\, 0, 1, \ldots, n-1 \,\}.$$

Also

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ n+1 &= \{\, 0, 1, \ldots, n \,\} \\ &= \{\, 0, 1, \ldots, n-1 \,\} \cup \{n\} \end{aligned}$$

Wir setzen deshalb

Definition. $0 := \emptyset$, $x + 1 := x \cup \{x\}$.

Bemerkung. Speziell setzen wir $1 := 0 + 1$, $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$.

Die Klasse aller so konstruierten natürlichen Zahlen soll eine Menge sein. Dazu brauchen wir ein weiteres Axiom.

Unendlichkeitsaxiom.

$$\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)). \tag{Un}$$

Definition. *$\mathcal{A}$ heißt induktiv, wenn*

$$\emptyset \in \mathcal{A} \wedge \forall y\,(y \in \mathcal{A} \to y \cup \{y\} \in \mathcal{A}).$$

(Un) sagt also aus: Es gibt eine induktive Menge.

Definition. $\omega := \bigcap\{\, x \mid x \text{ ist induktiv} \,\}$. *$\omega$ heißt die Menge der natürlichen Zahlen.*

Bemerkungen. (1) ω ist eine Menge. (2) $0 \in \omega$. (3) $y \in \omega \to y + 1 \in \omega$.

Mit n, m bezeichnen wir im folgenden natürliche Zahlen. Insbesondere steht $\forall n\, A(n)$ für $\forall x\,(x \in \omega \to A(x))$, ebenso $\exists n\, A(n)$ für $\exists x\,(x \in \omega \wedge A(x))$ und $\{\, n \mid A(n) \,\}$ für $\{\, x \mid x \in \omega \wedge A(x) \,\}$.

Satz 3.4. *(Induktion über ω).*

a. $x \subseteq \omega \wedge 0 \in x \wedge \forall n\,(n \in x \to n + 1 \in x) \to x = \omega$.

b. *Für jede Formel $A(x)$ gilt*

$$A(0) \wedge \forall n\,(A(n) \to A(n + 1)) \to \forall n A(n).$$

Beweis. a. x ist induktiv, also $\omega \subseteq x$. b. Sei $\mathcal{A} := \{\, n \mid A(n) \,\}$. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \omega$ (also $\mathcal{A}$ ist Menge),

$$0 \in \mathcal{A},$$
$$n \in \mathcal{A} \to n + 1 \in \mathcal{A}.$$

Nach (a) folgt $\mathcal{A} = \omega$. □

Wir zeigen jetzt, daß für natürliche Zahlen die Relation $\in$ die Eigenschaften von $<$ und die Relation $\subseteq$ die Eigenschaften von $\leq$ hat.

Definition. *Eine Klasse $\mathcal{A}$ heißt transitiv, wenn $\mathcal{A}$ bezüglich der speziellen Relation $\mathcal{E} := \{\, (x, y) \mid x \in y \,\}$ auf V $\mathcal{E}$–transitiv ist, d.h. wenn gilt $\forall x\,(x \in \mathcal{A} \to x \subseteq \mathcal{A})$.*

$\mathcal{A}$ ist also transitiv genau dann, wenn

$$\forall x, y\,(y \in x \in \mathcal{A} \to y \in \mathcal{A})$$

Lemma 3.5. *a. n ist transitiv.*

b. ω ist transitiv.

Beweis. a. Induktion nach n. 0 ist transitiv. $n \to n+1$. Nach IH ist n transitiv. Zu zeigen: $n+1$ ist transitiv. Sei

$$\begin{aligned} &y \in x \in n+1 \\ &y \in x \in n \cup \{n\} \\ &y \in x \in n \vee y \in x = n \\ &y \in n \vee y \in n \\ &y \in n \cup \{n\} = n+1. \end{aligned}$$

b. Gezeigt wird $\forall x\,(x \in n \to x \in \omega)$ durch Induktion nach n. 0: Klar. $n \to n+1$. Nach IH gilt $\forall x\,(x \in n \to x \in \omega)$. Sei

$$\begin{aligned} &x \in n+1 \\ &x \in n \vee x = n \\ &x \in \omega. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.6. $n \notin n$.

Beweis. Induktion nach n. 0. Klar. $n \to n+1$: Nach IH ist $n \notin n$. Annahme:

$$\begin{aligned} &n+1 \in n+1 \\ &n+1 \in n \vee n+1 = n \\ &n \in n+1 \in n \vee n \in n+1 = n \\ &n \in n \quad \text{nach Lemma 3.5.a.} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur IH. □

Lemma 3.7. *a.* $n \subseteq m+1 \leftrightarrow n \subseteq m \vee n = m+1$.

b. $n \subseteq m \leftrightarrow n \in m \vee n = m$.

c. $n \subseteq m \vee m \subseteq n$.

d. $n \in m \vee n = m \vee m \in n$.

Beweis. a. $\leftarrow$ folgt aus $m \subseteq m+1$. $\rightarrow$. *Fall* $m \in n$. Wir zeigen $n = m+1$. $\subseteq$ gilt nach Voraussetzung. $\supseteq$.

$$\begin{aligned} &p \in m+1 \\ &p \in m \vee p = m \\ &p \in n. \end{aligned}$$

Fall $m \notin n$. Wir zeigen $n \subseteq m$.

$$\begin{aligned} &p \in n \\ &p \in m + 1 \\ &p \in m \vee p = m. \end{aligned}$$

b. $\leftarrow$ folgt aus der Transitivität von m. $\rightarrow$. Induktion nach m. 0. Klar. $m \rightarrow m + 1$.

$$\begin{aligned} &n \subseteq m + 1 \\ &n \subseteq m \vee n = m + 1 \quad \text{nach (a)} \\ &n \in m \vee n = m \vee n = m + 1 \quad \text{nach IH} \\ &n \in m + 1 \vee n = m + 1. \end{aligned}$$

c. Induktion nach n. 0. Klar. $n \rightarrow n + 1$: *Fall* $m \subseteq n$. Klar. *Fall* $n \subseteq m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &n \in m \vee n = m \quad \text{nach (b)} \\ &n, \{n\} \subseteq m \vee m \subseteq n + 1 \\ &n + 1 \subseteq m \vee m \subseteq n + 1 \end{aligned}$$

d. Folgt aus (c) und (b). □

Satz 3.8. *(Peano–Axiome).*

a. $n + 1 \neq \emptyset$.

b. $n + 1 = m + 1 \rightarrow n = m$.

c. $x \subseteq \omega \wedge 0 \in x \wedge \forall n\,(n \in x \rightarrow n + 1 \in x) \rightarrow x = \omega$.

Beweis. a. Klar. c. Dies wurde eben als Satz 3.4.a bewiesen. b.

$$\begin{aligned} &n + 1 = m + 1 \\ &n \in m + 1 \wedge m \in n + 1 \\ &(n \in m \wedge m \in n) \vee n = m \\ &n \in n \vee n = m \\ &n = m. \end{aligned}$$

□

Wir behandeln jetzt noch verschiedene Formen der Induktion.

Satz 3.9. *(Induktion über ω mit Rückgriff auf sämtliche Vorgänger).*

a. $x \subseteq \omega \wedge \forall n\,[\forall m\,(m \in n \rightarrow m \in x) \rightarrow n \in x] \rightarrow x = \omega$.

b. $\forall n\,[\forall m\,(m \in n \to A(m)) \to A(n)] \to \forall n A(n)$.

Beweis. b. Gelte $\forall n\,[\forall m\,(m \in n \to A(m)) \to A(n)]$; man sagt in diesem Fall, daß $A(n)$ *progressiv* ist. Gezeigt wird $\forall m\,(m \in n \to A(m))$ durch Induktion nach n. 0. Klar. $n \to n{+}1$. Nach IH gilt $\forall m\,(m \in n \to A(m))$. Sei also $m \in n{+}1$. Dann gilt $m \in n \vee m = n$. Im Fall $m \in n$ folgt $A(m)$ nach IH, und im Fall $m = n$ folgt $A(n)$ aus der Progressivität von A mit der IH.

a. Aus (b) mit $A(y) := y \in x$. □

Satz 3.10. *(Prinzip vom kleinsten Element für ω).*

a. $\emptyset \neq x \subseteq \omega \to \exists n\,(n \in x \wedge n \cap x = \emptyset)$.

b. $\exists n A(n) \to \exists n\,[A(n) \wedge \neg\exists m\,(m \in n \wedge A(m))]$.

Beweis. b. Es gilt nach Satz 3.9.b

$$\forall n\,[\forall m\,(m \in n \to \neg A(m)) \to \neg A(n)] \to \forall n \neg A(n).$$

Kontraposition ergibt

$$\exists n A(n) \to \exists n\,[A(n) \wedge \forall m\,(m \in n \to \neg A(m))]$$
$$\exists n A(n) \to \exists n\,[A(n) \wedge \neg\exists m\,(m \in n \wedge A(m))].$$

a. Aus (b) mit $A(y) := y \in x$. □

Wir kommen jetzt zur Rekursion über den natürlichen Zahlen, die wir als Spezialfall des Rekursionssatzes 3.3 behandeln können. Wir identifizieren dazu $\in$ mit der Relation $\mathcal{E} = \{\,(x, y) \mid x \in y\,\}$ und zeigen folgendes Lemma.

Lemma 3.11. *$\in \cap(\omega \times \omega)$ ist eine transitiv fundierte Relation auf ω.*

Beweis. a. Sei $\emptyset \neq a \subseteq \omega$. Zu zeigen $\exists n\,(n \in a \wedge n \cap a = \emptyset)$. Das ist obiges Prinzip vom kleinsten Element. b. Klar, da n transitiv ist. □

Satz 3.12. *(Rekursion über ω mit Rückgriff auf sämtliche Vorgänger). Sei $\mathcal{G}\colon V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $f\colon \omega \to V$ mit*

$$\forall n\,(f(n) = \mathcal{G}(f\restriction n)).$$

Beweis. Nach dem Rekursionssatz 3.3 gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mathcal{F}\colon \omega \to V$ mit $\forall n\,(\mathcal{F}(n) = \mathcal{G}(\mathcal{F}\restriction n))$. Nach dem Ersetzungsschema (ErS) ist $\mathrm{rng}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}[\omega]$ eine Menge. Nach Lemma 2.1 und dem Aussonderungsschema (AuS) ist damit auch $\mathcal{F} \subseteq \omega \times \mathcal{F}[\omega]$ eine Menge. □

Folgerung 3.13. *(Rekursion über ω). Sei $\mathcal{G}: V \to V$ und a eine Menge. Dann gibt es genau eine Funktion $f: \omega \to V$ mit*

$$\begin{aligned} &f(0) = a, \\ &\forall n\,(f(n+1) = \mathcal{G}(f(n))). \end{aligned}$$

Beweis. Man beachte zunächst, daß $\bigcup(n+1) = n$ ist wegen

$$\begin{aligned} x \in \bigcup(n+1) &\leftrightarrow \exists y\,(x \in y \in n+1) \\ &\leftrightarrow \exists m\,(x \in m \in n+1) \\ &\leftrightarrow \exists m\,(x \in m \subseteq n) \\ &\leftrightarrow x \in n. \end{aligned}$$

Ansatz: Zu dem gegebenen $\mathcal{G}$ finde man ein $\mathcal{G}'$ mit $\mathcal{G}'(f\restriction n+1) = \mathcal{G}(f(n))$. Wir definieren eine Funktion $\mathcal{G}': V \to V$ mit

$$\mathcal{G}'(x) = \begin{cases} \mathcal{G}(x(\bigcup \mathrm{dom}(x))), & \text{falls } x \neq \emptyset; \\ a, & \text{falls } x = \emptyset, \end{cases}$$

und zwar durch

$$\mathcal{G}' = \{\,(x,y) \mid (x \neq \emptyset \to y = \mathcal{G}(x\bigcup \mathrm{dom}(x))) \wedge (x = \emptyset \to y = a)\,\}.$$

Dann gibt es genau eine Funktion $f: \omega \to V$ mit

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \mathcal{G}'(f\restriction n+1) \\ &= \mathcal{G}((f\restriction n+1)(\underbrace{\bigcup(n+1)}_{n})) \\ &= \mathcal{G}(f(n)), \\ f(0) &= \mathcal{G}'(\underbrace{f\restriction 0}_{\emptyset}) \\ &= a. \end{aligned}$$

□

Definition. $s_m(0) = m$, $s_m(n+1) = s_m(n) + 1$.

Bemerkung. Nach Folgerung 3.13 existiert für jedes m eine solche Funktion, und sie ist eindeutig bestimmt.

Definition. $m + n := s_m(n)$.

Bemerkung. Wegen $s_m(1) = s_m(0+1) = s_m(0) + 1 = m + 1$ verträgt sich diese Definition für $n = 1$ mit der bisherigen Terminologie. Ferner gilt $m + 0 = m$ und $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Lemma 3.14. a. $m + n \in \omega$.

b. $(m + n) + p = m + (n + p)$.

c. $m + n = n + m$.

Beweis. a. Induktion nach n. 0. Klar. $n \to n + 1$. $m + (n + 1) = (m + n) + 1$, und nach IH ist $m + n \in \omega$.

b. Induktion nach p. 0. Klar. $p \to p + 1$.

$$\begin{aligned}(m + n) + (p + 1) &= [(m + n) + p] + 1 && \text{nach Definition}\\ &= [m + (n + p)] + 1 && \text{nach IH}\\ &= m + [(n + p) + 1]\\ &= m + [n + (p + 1)].\end{aligned}$$

c. Zunächst zeigen wir zwei Hilfsaussagen.

(i) $0 + n = n$. Beweis durch Induktion nach n. 0. Klar. $n \to n + 1$. $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$.

(ii) $(m + 1) + n = (m + n) + 1$. Beweis durch Induktion nach n. 0. Klar. $n \to n + 1$.

$$\begin{aligned}(m + 1) + (n + 1) &= [(m + 1) + n] + 1\\ &= [(m + n) + 1] + 1 && \text{nach IH}\\ &= [m + (n + 1)] + 1.\end{aligned}$$

Jetzt ergibt sich die Behauptung $m + n = n + m$ durch Induktion nach m. 0. Nach (i). $m \to m + 1$.

$$\begin{aligned}(m + 1) + n &= (m + n) + 1 && \text{nach (ii)}\\ &= (n + m) + 1 && \text{nach IH}\\ &= n + (m + 1).\end{aligned}$$

□

Definition. $p_m(0) = 0$, $p_m(n + 1) = p_m(n) + m$.

Bemerkung. Nach Folgerung 3.13 existiert wieder für jedes m eine eindeutig bestimmte solche Funktion. Gebraucht wird hier

$$\mathcal{G}\colon V \to V,$$
$$\mathcal{G}(x) = \begin{cases} x + m, & \text{falls } x \in \omega;\\ \emptyset, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Definition. $m \cdot n := p_m(n)$.

Bemerkung. $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Lemma 3.15. *a.* $m \cdot n \in \omega$.

b. $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

c. $(n + p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m$.

d. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

e. $0 \cdot n = 0$, $1 \cdot n = n$, $m \cdot n = n \cdot m$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung. n^m, $m - n$ lassen sich ähnlich behandeln; später allgemeiner, in der Ordinalzahlarithmetik. — Man kann jetzt leicht ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen definieren.

4.3.3 Transitive Hülle

Wir definieren die $\mathcal{R}$–transitive Hülle einer Menge a, und zwar bezüglich einer Relation $\mathcal{R}$ mit der Eigenschaft, daß die $\mathcal{R}$–Vorgänger eines beliebigen Elements ihres Bereichs eine Menge bilden.

Definition und Satz 3.16. *Sei $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\mathcal{A}$ derart daß $\hat{x}^{\mathcal{R}}$ $(:= \{ y \mid y\mathcal{R}x \})$ für jedes $x \in \mathcal{A}$ eine Menge ist. Dann gibt es zu jeder Teilmenge $a \subseteq \mathcal{A}$ eine eindeutig bestimmte Menge b mit*

a. $a \subseteq b \subseteq \mathcal{A}$.

b. *b ist $\mathcal{R}$–transitiv.*

c. $\forall c(a \subseteq c \subseteq \mathcal{A} \wedge c$ *$\mathcal{R}$–transitiv* $\rightarrow b \subseteq c)$.

b heißt die $\mathcal{R}$–transitive Hülle von a.

Beweis. Eindeutigkeit. Klar nach c.

Existenz. Wir wollen ein $f\colon \omega \to V$ durch Rekursion über ω so definieren, daß gilt

$$f(0) = a,$$
$$f(n+1) = \{ y \mid \exists x \in f(n)(y\mathcal{R}x) \}.$$

Um den Rekursionssatz für ω anwenden zu können, müssen wir $f(n+1)$ definieren in der Form $\mathcal{G}(f(n))$. Dazu wählen wir $\mathcal{G}\colon V \to V$, $z \mapsto \bigcup \mathrm{rng}(\bigwedge \restriction z)$ mit $\bigwedge\colon V \to V$, $x \mapsto \hat{x}$; nach Annahme ist $\bigwedge$ eine Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{G}(f(n)) &\leftrightarrow y \in \bigcup \mathrm{rng}(\bigwedge \restriction f(n)) \\ &\leftrightarrow \exists z(z \in \mathrm{rng}(\bigwedge \restriction f(n)) \wedge y \in z) \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \exists z, x(x \in f(n) \wedge z = \hat{x} \wedge y \in z)$$
$$\leftrightarrow \exists x(x \in f(n) \wedge y\mathcal{R}x).$$

Durch Induktion über n sieht man leicht, daß $f(n)$ eine Menge ist. Für 0 ist dies klar, und im Schritt $n \to n+1$ folgt dies wegen $f(n+1) = \bigcup\{\, \hat{x} \mid x \in f(n)\,\}$ aus der IH, dem Ersetzungsschema (ErS) und dem Vereinigungsmengenaxiom (Ve). — Wir setzen jetzt $b := \bigcup \mathrm{rng}(f) = \bigcup\{\, f(n) \mid n \in \omega\,\}$. Dann erhält man folgendes.

a. $a = f(0) \subseteq b \subseteq \mathcal{A}$.

b.

$$y\mathcal{R}x \in b$$
$$y\mathcal{R}x \in f(n)$$
$$y \in f(n+1)$$
$$y \in b.$$

c. Sei $a \subseteq c \subseteq \mathcal{A}$ und c $\mathcal{R}$–transitiv. Wir zeigen $f(n) \subseteq c$ durch Induktion über n. 0. $a \subseteq c$. $n \to n+1$.

$$y \in f(n+1)$$
$$y\mathcal{R}x \in f(n)$$
$$y\mathcal{R}x \in c$$
$$y \in c.$$ □

Bemerkung. Im Spezialfall der Relation $\in$ auf V ist die Bedingung $\forall x(\hat{x} = \{\, y \mid y \in x\,\}$ ist Menge) offenbar erfüllt. Also gibt es zu jeder Menge a eine eindeutig bestimmte $\in$–transitive Hülle von a. Sie heißt die *transitive Hülle* von a.

4.3.4 Rekursion über fundierte Relationen

Mit Hilfe des Begriffs der $\mathcal{R}$–transitiven Hülle können wir jetzt zeigen, daß die transitiv fundierten Relationen auf $\mathcal{A}$ mit den fundierten Relationen auf $\mathcal{A}$ übereinstimmen.

Definition. *Sei $\mathcal{R}$ eine Relation auf $\mathcal{A}$. $\mathcal{R}$ heißt fundierte Relation auf $\mathcal{A}$, wenn gilt*

a. *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathcal{A}$ besitzt ein $\mathcal{R}$–minimales Element, d.h.*

$$\forall a(a \subseteq \mathcal{A} \wedge a \neq \emptyset \to \exists x \in a(\hat{x} \cap a = \emptyset)).$$

b. *Für jedes $x \in \mathcal{A}$ ist $\hat{x}$ eine Menge.*

Satz 3.17. *Die transitiv fundierten Relationen auf $\mathcal{A}$ stimmen mit den fundierten Relationen auf $\mathcal{A}$ überein.*

Beweis. Jede transitiv fundierte Relation auf $\mathcal{A}$ ist fundiert nach Lemma 3.1.a. Umgekehrt ist jede fundierte Relation auf $\mathcal{A}$ transitiv fundiert, denn zu jedem $x \in \mathcal{A}$ ist die $\mathcal{R}$–transitive Hülle von $\hat{x}$ ein $\mathcal{R}$–transitives $b \subseteq \mathcal{A}$ mit $\hat{x} \subseteq b$. □

Der Induktionssatz 3.2 und der Rekursionssatz 3.3 gelten für also fundierte Relationen. Ebenso gilt nach Lemma 3.1.a, daß jede nichtleere Teil*klasse* einer fundierten Relation $\mathcal{R}$ ein $\mathcal{R}$–minimales Element hat.

Später werden wir ein sogenanntes Regularitätsaxiom fordern, welches aussagt, daß die Relation $\in$ auf V fundiert ist, d.h. daß gilt

$$\forall a(a \neq \emptyset \to (\exists x \in a)(x \cap a = \emptyset)).$$

Damit werden wir dann ein wichtiges Beispiel einer fundierten Relation zur Verfügung haben.

4.3.5 Wohlordnungen

Wir betrachten jetzt extensionale fundierte Relationen. Aus dem Regularitätsaxiom wird später folgen, daß die $\in$–Relation auf einer beliebigen Klasse $\mathcal{A}$ eine fundierte extensionale Relation ist. Hier zeigen wir noch ohne das Regularitätsaxiom die Unkehrung, daß nämlich jede fundierte extensionale Relation zu der $\in$–Relation auf einer transitiven Klasse isomorph ist. Dies ist der Isomorphiesatz von Mostowski. Dann betrachten wir lineare fundierte Ordnungen, kurz Wohlordnungen. Sie sind stets extensional und deshalb zur $\in$–Relation auf gewissen Klassen isomorph, die wir ordinale Klassen nennen. Ordinalzahlen sind dann die ordinalen Mengen.

Definition. *Eine Relation $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{A}$ heißt extensional, wenn für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\forall z \in \mathcal{A}(z\mathcal{R}x \leftrightarrow z\mathcal{R}y) \to x = y.$$

Beispiele. 1. $\in$ auf V. 2. Sei $\mathcal{A}$ transitiv. Dann ist $\in \cap(\mathcal{A} \times \mathcal{A})$ extensionale Relation auf $\mathcal{A}$. Dies sieht man wie folgt. Seien $x, y \in \mathcal{A}$. Für $\mathcal{R} := \in \cap(\mathcal{A} \times \mathcal{A})$ gilt $z\mathcal{R}x \leftrightarrow z \in x$, da $\mathcal{A}$ transitiv ist. Man erhält

$$\begin{aligned} &\forall z \in \mathcal{A}(z\mathcal{R}x \leftrightarrow z\mathcal{R}y) \\ &\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \\ &x = y \end{aligned}$$

Aus dem Regularitätsaxiom wird folgen, daß die Relationen aus Beispiel 2 fundiert sind. Auch ohne das Regularitätsaxiom kann man zeigen, daß sie bis auf Isomorphie die einzigen fundierten extensionalen Relationen sind.

Satz 3.18. *(Isomorphiesatz von Mostowski). Sei $\mathcal{R}$ eine fundierte extensionale Relation auf $\mathcal{A}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$ auf eine transitive Klasse $\mathcal{B}$, d.h.*

$$\exists^{=1}\mathcal{F}(\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \leftrightarrow \mathrm{rng}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{rng}(\mathcal{F}) \textit{ transitiv } \wedge \forall x, y \in \mathcal{A}(y\mathcal{R}x \leftrightarrow \mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(x))).$$

Beweis. Existenz. Wir definieren nach dem Rekursionssatz

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to V,\\ &\mathcal{F}(x) = \mathrm{rng}(\mathcal{F}\restriction\hat{x}) \quad (= \{\, \mathcal{F}(y) \mid y\mathcal{R}x \,\}).\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ injektiv. Wir zeigen $\forall x, y \in \mathcal{A}(\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y) \to x = y)$ durch $\mathcal{R}$–Induktion über x. Seien also $x, y \in \mathcal{A}$ gegeben mit $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$. Nach IH gilt

$$\forall z \in \mathcal{A}[z\mathcal{R}x \to \forall u \in \mathcal{A}(\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(u) \to z = u)].$$

Es genügt zu zeigen, daß für alle $z \in \mathcal{A}$ gilt $z\mathcal{R}x \leftrightarrow z\mathcal{R}y$. $\to$.

$$\begin{aligned}&z\mathcal{R}x\\ &\mathcal{F}(z) \in \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y) = \{\, \mathcal{F}(u) \mid u\mathcal{R}y \,\}\\ &\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(u) \text{ für ein } u\mathcal{R}y\\ &z = u \text{ nach IH, da } z\mathcal{R}x\\ &z\mathcal{R}y\end{aligned}$$

$\leftarrow$.

$$\begin{aligned}&z\mathcal{R}y\\ &\mathcal{F}(z) \in \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x) = \{\mathcal{F}(u) \mid u\mathcal{R}x\}\\ &\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(u) \text{ für ein } u\mathcal{R}x\\ &z = u \text{ nach IH, da } u\mathcal{R}x\\ &z\mathcal{R}x.\end{aligned}$$

$\mathrm{rng}(\mathcal{F})$ ist transitiv. Gelte $u \in v \in \mathrm{rng}(\mathcal{F})$. Dann ist $v = \mathcal{F}(x)$, also $u = \mathcal{F}(y)$ für ein $y\mathcal{R}x$.

$y\mathcal{R}x \leftrightarrow \mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(x)$. $\to$. Gelte $y\mathcal{R}x$. Dann ist $\mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(x)$ nach Definition von $\mathcal{F}$. $\leftarrow$.

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(x) = \{\mathcal{F}(z) \mid z\mathcal{R}x\}\\ &\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(z) \text{ für ein } z\mathcal{R}x\\ &y = z \text{ da } \mathcal{F} \text{ injektiv ist}\\ &y\mathcal{R}x.\end{aligned}$$

Eindeutigkeit. Gegeben seien $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$. Wir zeigen $\forall x \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x))$ durch $\mathcal{R}$–Induktion über x. Aus Symmetriegründen genügt $u \in \mathcal{F}_1(x) \to u \in \mathcal{F}_2(x)$.

$u \in \mathcal{F}_1(x)$
$u = \mathcal{F}_1(y)$ für ein $y \in \mathcal{A}$, da $\mathrm{rng}(\mathcal{F}_1)$ transitiv
$y\mathcal{R}x$ nach der Isomorphiebedingung für $\mathcal{F}_1$
$u = \mathcal{F}_2(y)$ nach IH
$\mathcal{F}_2(y) \in \mathcal{F}_2(x)$ nach der Isomorphiebedingung für $\mathcal{F}_2$
$u \in \mathcal{F}_2(x)$. □

Definition. *Eine Relation $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{A}$ heißt lineare Ordnung, wenn für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ gilt*

$\neg x\mathcal{R}x$, *Irreflexivität*
$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z$, *Transitivität*
$x\mathcal{R}y \vee x = y \vee y\mathcal{R}x$. *Trichotomie (oder Vergleichbarkeit)*

$\mathcal{R}$ heißt Wohlordnung, wenn $\mathcal{R}$ eine fundierte lineare Ordnung ist.

Bemerkung. Jede Wohlordnung $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{A}$ ist extensional. Gilt nämlich

$$(\forall z \in \mathcal{A})(z\mathcal{R}x \leftrightarrow z\mathcal{R}y),$$

so folgt $x = y$ aus der Trichotomie, denn aus $x\mathcal{R}y$ folgt nach Annahme $x\mathcal{R}x$ im Widerspruch zur Irreflexivität, und ebenso erhält man aus $y\mathcal{R}x$ einen Widerspruch.

Folgerung 3.19. *Zu jeder Wohlordnung $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{A}$ gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\mathcal{F}$ von $\mathcal{A}$ auf eine transitive Klasse $\mathcal{B}$.* □

4.3.6 Ordinale Klassen und Ordinalzahlen

Wir wollen jetzt die transitiven Klassen, die als Bilder von Wohlordnungen auftreten, genauer untersuchen.

Definition. *$\mathcal{A}$ heißt ordinale Klasse, wenn $\mathcal{A}$ transitiv ist und $\in \cap(\mathcal{A} \times \mathcal{A})$ eine Wohlordnung auf $\mathcal{A}$ ist. Ordinale Klassen, die Mengen sind, heißen Ordinalzahlen. Wir setzen*

$$\mathrm{On} := \{\, x \mid x \text{ ist Ordinalzahl} \,\}.$$

Zunächst geben wir eine bequeme Charakterisierung ordinaler Klassen an.

Definition. *$\mathcal{A}$ heißt konnex, wenn für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt*

$$x \in y \vee x = y \vee y \in x.$$

Zum Beispiel ist ω konnex nach Lemma 3.7.d. Auch jedes n ist konnex, da ω nach Lemma 3.5.b transitiv ist.

Definition. *$\mathcal{A}$ heißt fundiert, wenn $\in \cap(\mathcal{A} \times \mathcal{A})$ eine fundierte Relation auf $\mathcal{A}$ ist, d.h. wenn gilt*

$$\forall a[a \subseteq \mathcal{A} \wedge a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a(x \cap a = \emptyset)].$$

Wir zeigen jetzt, daß es in fundierten Klassen keine endlichen $\in$–Zykel geben kann.

Lemma 3.20. *Sei $\mathcal{A}$ fundiert. Dann kann für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}$ niemals gelten*

$$x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1.$$

Beweis. Annahme: $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1$. Betrachte $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Da $\mathcal{A}$ fundiert ist, gilt oBdA $x_1 \cap \{x_1, \ldots, x_n\} = \emptyset$. Dies widerspricht aber $x_n \in x_1$. □

Folgerung 3.21. *$\mathcal{A}$ ist ordinale Klasse genau dann, wenn $\mathcal{A}$ transitiv, konnex und fundiert ist.*

Beweis. $\rightarrow$ ist klar; die Konnexität von $\mathcal{A}$ folgt aus der Trichotomieeigenschaft. $\leftarrow$. Zu zeigen ist für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$

$$x \notin x,$$
$$x \in y \wedge y \in z \rightarrow x \in z.$$

Da $\mathcal{A}$ konnex ist, folgen beide Aussagen aus Lemma 3.20. □

Beispiele. 1. ω ist transitiv nach Lemma 3.5.b, konnex wie oben bemerkt und fundiert nach dem Prinzip vom kleinsten Element (Satz 3.10). Also ist ω eine ordinale Klasse. Da ω nach (Un) eine Menge ist, ist ω sogar eine Ordinalzahl.

2. n ist transitiv nach Lemma 3.5.a, konnex wie oben bemerkt und fundiert; letzteres folgt mit der Transitivität von ω aus dem Prinzip vom kleinsten Element (Satz 3.10).

$\mathrm{Ord}(\mathcal{A})$ steht für $\mathcal{A}$ ist ordinale Klasse. Wir zeigen jetzt, daß ordinale Klassen ähnliche Eigenschaften haben wie die natürlichen Zahlen: auch für ordinale Klassen hat die Relation $\in$ die Eigenschaften von $<$ und die Relation $\subseteq$ die Eigenschaften von $\leq$.

Lemma 3.22. *a.* $\mathrm{Ord}(\mathcal{A}) \wedge \mathrm{Ord}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathrm{Ord}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

b. $\mathrm{Ord}(\mathcal{A}) \wedge x \in \mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Ord}(x)$.

c. $\mathrm{Ord}(\mathcal{A}) \wedge \mathrm{Ord}(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{B} \vee \mathcal{A} = \mathcal{B})$.

d. $\mathrm{Ord}(\mathcal{A}) \wedge \mathrm{Ord}(\mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \in \mathcal{B} \vee \mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{B} \in \mathcal{A})$.

Beweis. a. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ transitiv. Man erhält

$$\begin{aligned} &x \in y \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \\ &x \in y \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad x \in y \in \mathcal{B} \\ &x \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad x \in \mathcal{B} \\ &x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ konnex, fundiert. Klar.

b. x transitiv. Man erhält

$$\begin{aligned} &u \in v \in x \in \mathcal{A} \\ &u \in v \in \mathcal{A} \\ &u \in \mathcal{A} \\ &u \in x \vee u = x \vee x \in u. \end{aligned}$$

Aus $u = x$ folgt $u \in v \in u$ und damit ein Widerspruch zu Lemma 3.20, und aus $x \in u$ folgt $u \in v \in x \in u$ und damit ebenfalls ein Widerspruch zu Lemma 3.20.

x konnex, fundiert. Klar, da $x \subseteq \mathcal{A}$.

c. $\leftarrow$. Klar, da $\mathcal{B}$ transitiv ist. $\rightarrow$. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. OBdA $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$. Wähle $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, $x \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \emptyset$ (da $\mathcal{B}$ fundiert). Es genügt zu zeigen, daß $x = \mathcal{A}$.

$x \subseteq \mathcal{A}$. Gelte $y \in x$, also $y \in x \in \mathcal{B}$. Dann folgt $y \in \mathcal{A}$, denn $x \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \emptyset$.

$\mathcal{A} \subseteq x$. Gelte $y \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $y \in \mathcal{B}$. Es folgt $x \in y \vee x = y \vee y \in x$. Die ersten beiden Fälle sind aber unmöglich, denn jedesmal erhält man $x \in \mathcal{A}$.

d. Gelte $\mathrm{Ord}(\mathcal{A})$ und $\mathrm{Ord}(\mathcal{B})$. Dann folgt $\mathrm{Ord}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ nach a. Aus c ergibt sich

$$[(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{A}) \vee (\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A})] \wedge [(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B})].$$

Ausdistribuieren liefert

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \in \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \in \mathcal{A}) \vee (\mathcal{A} = \mathcal{B}).$$

Der erste Fall $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ist aber unmöglich nach Lemma 3.20. □

Lemma 3.23. *a.* $\mathrm{Ord}(\mathrm{On})$.

b. On *ist keine Menge.*

c. On *ist die einzige echte ordinale Klasse.*

Beweis. a. On ist transitiv nach Lemma 3.22.b und konnex nach Lemma 3.22.d. On ist auch fundiert. Sei nämlich $a \subseteq \mathrm{On}$, $a \neq \emptyset$. Wähle $x \in a$. OBdA ist $x \cap a \neq \emptyset$. Da x

fundiert ist, gibt es ein $y \in x \cap a$ mit $y \cap x \cap a = \emptyset$. Es folgt $y \in a$ und $y \cap a = \emptyset$; letzteres da $y \subseteq x$ wegen $y \in x$, x transitiv.

b. Annahme: On ist Menge. Dann folgt On $\in$ On und damit ein Widerspruch zu Lemma 3.20.

c. Sei Ord($\mathcal{A}$), $\mathcal{A}$ keine Menge. Nach Lemma 3.22.d folgt

$$\mathcal{A} \in \text{On} \vee \mathcal{A} = On \vee \text{On} \in \mathcal{A}.$$

Der erste und der dritte Fall scheiden aber aus, da dann $\mathcal{A}$ bzw. On eine Menge wäre. □

Lemma 3.24. *a.* On *ist induktiv,*

b. $n, \omega \in$ On.

Beweis. a. $0 \in$ On ist klar. Sei nun $x \in$ On. Zu zeigen ist $x + 1 \in$ On, also $x \cup \{x\} \in$ On.

$x \cup \{x\}$ transitiv. Gelte $u \in v \in x \cup \{x\}$, also $u \in v \in x$ oder $u \in v = x$. In beiden Fällen folgt $u \in x$.

$x \cup \{x\}$ konnex. Gelte $u, v \in x \cup \{x\}$. Dann folgt

$$u, v \in x \vee (u \in x \wedge v = x) \vee (u = x \wedge v \in x) \vee (u = v = x)$$
$$u \in v \vee u = v \vee v \in u.$$

$x \cup \{x\}$ fundiert. Sei $a \subseteq x \cup \{x\}$, $a \neq \emptyset$. Zu zeigen ist $(\exists y \in a)(y \cap a = \emptyset)$. *Fall* $a \cap x \neq \emptyset$. Dann folgt die Behauptung aus der Fundiertheit von x. *Fall* $a \cap x = \emptyset$. Dann ist $a = \{x\}$, und wir haben $x \cap \{x\} = \emptyset$.

b. Dies wurde schon in einem Beispiel oben gezeigt. □

Lemma 3.25. $x, y \in \text{On} \wedge x + 1 = y + 1 \to x = y$.

Beweis. Dies zeigt man wie das zweite Peano–Axiom in Lemma 3.8.b.

$$x + 1 = y + 1$$
$$x \in y + 1 \wedge y \in x + 1$$
$$(x \in y \wedge y \in x) \vee x = y.$$

Da der erste Fall nach Lemma 3.22 unmöglich ist, folgt $x = y$. □

Lemma 3.26. $\mathcal{A} \subseteq \text{On} \to \bigcup \mathcal{A} \in \text{On} \vee \bigcup \mathcal{A} = \text{On}$.

Beweis. Genügt: Ord $\bigcup \mathcal{A}$. $\bigcup \mathcal{A}$ transitiv. Sei $x \in y \in \bigcup \mathcal{A}$, also $x \in y \in z \in \mathcal{A}$ für ein z. Dann folgt $x \in z \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A} \subseteq$ On. Also ist $x \in \bigcup \mathcal{A}$.

$\bigcup \mathcal{A}$ konnex und fundiert. Genügt: $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \mathrm{On}$. Sei also $x \in \bigcup \mathcal{A}$, also $x \in y \in \mathcal{A}$ für ein y. Dann ist $x \in y$ und $y \in \mathrm{On}$, also $x \in \mathrm{On}$. □

Bemerkung. Gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{On}$, so ist $\bigcup \mathcal{A}$ die kleinste obere Schranke von $\mathcal{A}$ bzgl. der Wohlordnung $\in \cap(\mathrm{On} \times \mathrm{On})$ von On, denn nach Definition von $\bigcup \mathcal{A}$ gilt

$$x \in \mathcal{A} \to x \subseteq \bigcup \mathcal{A},$$
$$(\forall x \in \mathcal{A})(x \subseteq y) \to \bigcup \mathcal{A} \subseteq y.$$

Wir schreiben deshalb auch $\sup \mathcal{A}$ für $\bigcup \mathcal{A}$.

Beispiele für Ordinalzahlen.

0
$1 = 0 + 1$
$2 = 1 + 1$
$\vdots$
ω Menge nach dem Unendlichkeitsaxiom
$\omega + 1$
$\omega + 2$
$\vdots$
$\omega \cdot 2 := \bigcup\{\, \omega + n \mid n \in \omega \,\}$ Definition mit Rekursion über ω; Menge nach (ErS)
$\omega \cdot 2 + 1$
$\omega \cdot 2 + 2$
$\vdots$
$\omega \cdot 3 := \bigcup\{\, \omega \cdot 2 + n \mid n \in \omega \,\}$
$\vdots$
$\omega \cdot 4$
$\vdots$
$\omega \cdot \omega := \omega^2 := \bigcup\{\, \omega \cdot n \mid n \in \omega \,\}$
$\omega^2 + 1$
$\omega^2 + 2$
$\vdots$
$\omega^2 + \omega$
$\omega^2 + \omega + 1$
$\omega^2 + \omega + 2$

$\vdots$

$\omega^2 + \omega \cdot 2$

$\vdots$

$\omega^2 + \omega \cdot 3$

$\vdots$

ω^3

$\vdots$

ω^4

$\vdots$

ω^ω

$\omega^\omega + 1$

$\vdots$

und so weiter.

α, β, γ stehen im folgenden für Ordinalzahlen.

α heißt eine *Nachfolgerzahl*, wenn $\exists\beta(\alpha = \beta + 1)$. α heißt *Limeszahl*, wenn α weder 0 noch Nachfolgerzahl ist. Wir schreiben

$$\mathrm{Lim}(\alpha) :\leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \neg\exists\beta(\alpha = \beta + 1).$$

Offenbar gilt für beliebige α entweder $\alpha = 0$ oder α ist Nachfolgerzahl oder α ist Limeszahl.

Lemma 3.27. *a.* $\mathrm{Lim}(\alpha) \leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \forall\beta(\beta \in \alpha \rightarrow \beta + 1 \in \alpha)$.

b. $\mathrm{Lim}(\omega)$.

c. $\mathrm{Lim}(\alpha) \rightarrow \omega \subseteq \alpha$.

Beweis. a. $\rightarrow$: Sei $\beta \in \alpha$. Dann gilt $\beta + 1 \in \alpha \vee \beta + 1 = \alpha \vee \alpha \in \beta + 1$. Der zweite Fall $\beta + 1 = \alpha$ ist ausgeschlossen nach Annahme. Im dritten Fall folgt $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$; beides ist aber wegen $\beta \in \alpha$ unmöglich nach Lemma 3.20. $\leftarrow$. Sei $\alpha \neq 0$ und es gelte $\forall\beta(\beta \in \alpha \rightarrow \beta + 1 \in \alpha)$. Ist dann α keine Limeszahl, so muß $\alpha = \beta + 1$ sein. Dann folgt $\beta \in \alpha$, also nach Annahme auch $\beta + 1 \in \alpha$ und damit $\alpha \in \alpha$, was nicht sein kann.

b. Folgt aus a, da ω induktiv ist.

c. Gelte $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Wir zeigen $n \in \alpha$ durch Induktion über n. 0. Es gilt $0 \in \alpha \vee 0 = \alpha \vee \alpha \in 0$, wobei die Fälle zwei und drei offenbar unmöglich sind. $n + 1$. Es ist $n \in \alpha$ nach IH, also $n + 1 \in \alpha$ nach a. □

Lemma 3.28. *a.* $\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha}(\beta + 1)$.

b. Für Limeszahlen α gilt $\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \beta$.

Beweis. a. $\subseteq$. Sei $\beta \in \alpha$. Die Behauptung folgt aus $\beta \in \beta + 1$. $\supseteq$:. Sei $\beta \in \alpha$. Dann ist $\beta + 1 \subseteq \alpha$.

b. $\subseteq$. Sei $\gamma \in \alpha$. Dann folgt $\gamma \in \gamma + 1 \in \alpha$. $\supseteq$. Sei $\gamma \in \beta \in \alpha$. Es folgt $\gamma \in \alpha$. □

Satz 3.29. *(Transfinite Induktion über* On *mit Rückgriff auf sämtliche Vorgänger; Klassenform.)*

$$\forall\alpha(\alpha \subseteq \mathcal{B} \to \alpha \in \mathcal{B}) \to \mathrm{On} \subseteq \mathcal{B}.$$

Beweis: Dies ist ein Spezialfall des Induktionssatzes 3.2. □

Folgerung 3.30. *(Verschiedene Formen der transfiniten Induktion über* On*). Erste Form:*

$$A(0) \wedge \forall\alpha(A(\alpha) \to A(\alpha+1)) \wedge \forall\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta \in \alpha \to A(\beta)) \to A(\alpha)) \to \forall\alpha A(\alpha).$$

Zweite Form: (Transfinite Induktion über On *mit Rückgriff auf sämtliche Vorgänger).*

$$\forall\alpha[\forall\beta(\beta \in \alpha \to A(\beta)) \to A(\alpha)] \to \forall\alpha A(\alpha).$$

Dritte Form: (Prinzip vom kleinsten Element für On).

$$\exists\alpha A(\alpha) \to \exists\alpha[A(\alpha) \wedge \neg\exists\beta(\beta \in \alpha \wedge A(\beta))].$$

Beweis. Die dritte Form ergibt sich aus der zweiten Form durch Kontraposition. Ferner ergibt sich die erste Form ebenfalls leicht aus der zweiten Form. Die zweite Form erhält man aus Satz 3.29 mit $\mathcal{B} := \{\alpha \mid A(\alpha)\}$. □

Satz 3.31. *(Transfinite Rekursion über* On *mit Rückgriff auf sämtliche Vorgänger). Sei $\mathcal{G}: V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $\mathcal{F}: \mathrm{On} \to V$ so daß für alle α gilt*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}(\mathcal{F}\restriction\alpha)$$

Beweis: Dies ist ein Spezialfall des Rekursionssatzes 3.3. □

Folgerung 3.32. *(Transfinite Rekursion über* On*). Sei $\mathcal{G}: V \to V$, $\mathcal{H}: V \to V$ und a eine Menge. Dann gibt es genau eine Funktion $\mathcal{F}: \mathrm{On} \to V$ mit*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(0) = a,\\
&\mathcal{F}(\alpha+1) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\alpha)),\\
&\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{H}(\mathcal{F}\restriction\alpha) \quad \textit{für } \alpha \textit{ Limeszahl.}
\end{aligned}$$

Beweis. Man beachte zunächst, daß $\bigcup(\alpha+1) = \alpha$ ist wegen

$$\begin{aligned}\gamma \in \bigcup(\alpha+1) &\leftrightarrow \exists\beta\,(\gamma \in \beta \in \alpha+1)\\ &\leftrightarrow \exists\beta\,(\gamma \in \beta \subseteq \alpha)\\ &\leftrightarrow \gamma \in \alpha.\end{aligned}$$

Ansatz: Zu dem gegebenen a, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ finde man ein $\mathcal{G}'$ mit

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}'(0) = a,\\ &\mathcal{G}'(\mathcal{F}\restriction\alpha+1) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\alpha)),\\ &\mathcal{G}'(\mathcal{F}\restriction\alpha) = \mathcal{H}(\mathcal{F}\restriction\alpha) \quad \text{für } \alpha \text{ Limeszahl.}\end{aligned}$$

Wir definieren eine Funktion $\mathcal{G}'\colon V \to V$ durch

$$\mathcal{G}'(x) = \begin{cases} a, & \text{sonst;}\\ \mathcal{G}(x(\bigcup \mathrm{dom}(x))), & \text{falls } \exists\beta(\mathrm{dom}(x) = \beta+1);\\ \mathcal{H}(x), & \text{falls } \mathrm{Lim}(\mathrm{dom}(x)).\end{cases}$$

Nach dem Rekursionssatz 3.30 existiert genau ein $\mathcal{F}\colon \mathrm{On} \to V$ so daß für alle α gilt

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}'(\mathcal{F}\restriction\alpha).$$

Offenbar ist diese Eigenschaft von $\mathcal{F}$ zu den obigen Gleichungen äquivalent. □

4.3.7 Regularitätsaxiom, von Neumannsche Stufen, Rang

Wir erinnern uns zunächst an die kumulative Typenstruktur.

Stufe 0: —
Stufe 1: $\emptyset$
Stufe 2: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$
Stufe 3: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
und so weiter.

Unter Verwendung von Ordinalzahlen können wir jetzt auch transfinite Stufen betrachten. Die Stufe ω besteht dann aus allen Mengen, deren Elemente auf endlichen Stufen gebildet waren, und die Stufe $\omega+1$ aus allen Mengen, deren Elemente auf endlichen Stufen oder der Stufe ω gebildet waren, und so weiter. Allgemein definieren wir die *von Neumannschen Stufen* V_α wie folgt durch transfinite Rekursion über On.

Definition. *(Von Neumannsche Stufen).*

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset, \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha), \\ V_\alpha &= \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta \quad \textit{für } \alpha \textit{ Limeszahl.} \end{aligned}$$

Bemerkung. Genauer ist $V_\alpha := \mathcal{F}(\alpha)$, wobei $\mathcal{F}\colon \mathrm{On} \to V$ wie folgt definiert wird durch transfinite Rekursion über On.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0) &= \emptyset, \\ \mathcal{F}(\alpha+1) &= \mathcal{P}(\mathcal{F}(\alpha)), \\ \mathcal{F}(\alpha) &= \bigcup \mathrm{rng}(\mathcal{F}\restriction\alpha) \quad \text{für } \alpha \text{ Limeszahl.} \end{aligned}$$

Lemma 3.33. *a. V_α ist transitiv.*

b. $\alpha \in \beta \to V_\alpha \in V_\beta$.

c. $\alpha \subseteq \beta \to V_\alpha \subseteq V_\beta$.

d. $V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$.

Beweis. a. (Transfinite) Induktion nach α. 0. $\emptyset$ ist transitiv. $\alpha+1$.

$$\begin{aligned} & x \in y \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \\ & x \in y \subseteq V_\alpha \\ & x \in V_\alpha \\ & x \subseteq V_\alpha \qquad \text{nach IH} \\ & x \in V_{\alpha+1} \end{aligned}$$

α Limeszahl.

$$\begin{aligned} & x \in y \in V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta \\ & x \in y \in V_\beta \quad \text{für ein } \beta \in \alpha \\ & x \in V_\beta \quad \text{nach IH} \\ & x \in V_\alpha. \end{aligned}$$

b. Induktion nach β. 0. Klar. $\beta+1$.

$$\begin{aligned} & \alpha \in \beta + 1 \\ & \alpha \in \beta \text{ oder } \alpha = \beta \\ & V_\alpha \in V_\beta \text{ oder } V_\alpha = V_\beta \quad \text{nach IH} \\ & V_\alpha \subseteq V_\beta \quad \text{nach a} \\ & V_\alpha \in V_{\beta+1}. \end{aligned}$$

β Limeszahl.

$$\begin{aligned}&\alpha \in \beta\\ &\alpha+1 \in \beta\\ &V_\alpha \in V_{\alpha+1} \subseteq \bigcup_{\gamma\in\beta} V_\gamma = V_\beta.\end{aligned}$$

c. Mit $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ folgt die Behauptung aus a und b.

d. Induktion nach α. 0. Klar. $\alpha+1$.

$$\begin{aligned}\beta \in V_{\alpha+1} &\leftrightarrow \beta \subseteq V_\alpha\\ &\leftrightarrow \beta \subseteq V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha \text{ nach IH}\\ &\leftrightarrow \beta \in \alpha+1.\end{aligned}$$

α Limeszahl.

$$\begin{aligned}V_\alpha \cap \mathrm{On} &= (\bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta) \cap \mathrm{On}\\ &= \bigcup_{\beta\in\alpha} (V_\beta \cap \mathrm{On})\\ &= \bigcup_{\beta\in\alpha} \beta \qquad \text{nach IH}\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

□

Wir wollen jetzt zeigen, daß die von Neumannschen Stufen das Universum ausschöpfen, also daß gilt $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$. Dazu brauchen wir das bereits in Abschnitt 4.3.4 erwähnte *Regularitätsaxiom*, welches aussagt, daß die Relation $\in$ auf V fundiert ist, d.h. daß gilt

$$\forall a(a \neq \emptyset \to (\exists x \in a)(x \cap a = \emptyset)). \tag{Re}$$

Wir können dann jeder Menge x eine Ordinalzahl α als ihren Rang zuordnen, und zwar als kleinstes α mit $x \subseteq V_\alpha$. Dazu brauchen wir den Begriff des *Rangs* $\mathrm{rn}(x)$ einer Menge x, den wir rekursiv definieren durch

$$\mathrm{rn}(x) := \bigcup\{\, \mathrm{rn}(y)+1 \mid y \in x \,\}.$$

Genauer setzen wir $\mathrm{rn}(x) := \mathcal{F}(x)$, wobei $\mathcal{F}\colon V \to V$ wie folgt definiert wird (mittels des Rekursionssatzes 3.3 für fundierte Relationen).

$$\mathcal{F}(x) := \bigcup \mathrm{rng}(\mathcal{H}(\mathcal{F}\restriction x))$$

mit

$$\mathcal{H}(z) := \{\, (u, v+1) \mid (u,v) \in z \,\}.$$

Zunächst zeigen wir, daß $\mathrm{rn}(x)$ die oben formulierte Eigenschaft hat.

Lemma 3.34. a. $\mathrm{rn}(x) \in \mathrm{On}$.

b. $x \subseteq V_{\mathrm{rn}(x)}$.

c. $x \subseteq V_\alpha \to \mathrm{rn}(x) \subseteq \alpha$.

Beweis. a. $\in$–Induktion nach x. Es ist $\mathrm{rn}(x) = \bigcup\{\, \mathrm{rn}(y) + 1 \mid y \in x \,\} \in \mathrm{On}$, da nach IH $\mathrm{rn}(y) \in \mathrm{On}$ für jedes $y \in x$.

b. $\in$–Induktion nach x. Sei $y \in x$. Dann gilt $y \subseteq V_{\mathrm{rn}(y)}$ nach IH, also $y \in \mathcal{P}(V_{\mathrm{rn}(y)}) = V_{\mathrm{rn}(y)+1} \subseteq V_{\mathrm{rn}(x)}$ wegen $\mathrm{rn}(y) + 1 \subseteq \mathrm{rn}(x)$.

c. Induktion nach α. Sei $x \subseteq V_\alpha$. Zu zeigen $\mathrm{rn}(x) = \bigcup\{\, \mathrm{rn}(y) + 1 \mid y \in x \,\} \subseteq \alpha$. Sei also $y \in x$. Zu zeigen ist dann $\mathrm{rn}(y) + 1 \subseteq \alpha$. Wegen $x \subseteq V_\alpha$ ist $y \in V_\alpha$. Daraus folgt $y \subseteq V_\beta$ für ein $\beta \in \alpha$, denn im Fall $\alpha = \alpha' + 1$ hat man $y \in V_{\alpha'+1} = \mathcal{P}(V_{\alpha'})$ und damit $y \subseteq V_{\alpha'}$, und im Fall α Limeszahl hat man $y \in V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, also $y \in V_\beta$ und damit $y \subseteq V_\beta$ für ein $\beta \in \alpha$. — Nach IH folgt jetzt $\mathrm{rn}(y) \subseteq \beta$ und damit $\mathrm{rn}(y) \in \alpha$ nach Lemma 3.22.c. □

Jetzt folgt leicht die oben als Ziel formulierte Aussage.

Folgerung 3.35. $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$.

Beweis. $\supseteq$ ist klar. $\subseteq$. Für jedes x gilt $x \subseteq V_{\mathrm{rn}(x)}$ nach Lemma 3.34.b, also $x \in V_{\mathrm{rn}(x)+1}$. □

V_α läßt sich jetzt charakterisieren als die Menge aller Mengen vom Rang kleiner als α.

Lemma 3.36. $V_\alpha = \{\, x \mid \mathrm{rn}(x) \in \alpha \,\}$.

Beweis. $\supseteq$. Sei $\mathrm{rn}(x) \in \alpha$. Wegen $x \subseteq V_{\mathrm{rn}(x)}$ folgt $x \in V_{\mathrm{rn}(x)+1} \subseteq V_\alpha$.

$\subseteq$. Induktion nach α. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\alpha+1$. Sei $x \in V_{\alpha+1}$. Dann ist $x \in \mathcal{P}(V_\alpha)$, also $x \subseteq V_\alpha$. Für jedes $y \in x$ gilt also $y \in V_\alpha$ und damit $\mathrm{rn}(y) \in \alpha$ nach IH, also $\mathrm{rn}(y) + 1 \subseteq \alpha$. Daher gilt $\mathrm{rn}(x) = \bigcup\{\, \mathrm{rn}(y) + 1 \mid y \in x \,\} \subseteq \alpha$. *Fall* α Limeszahl. Sei $x \in V_\alpha$. Dann ist $x \in V_\beta$ für ein $\beta \in \alpha$, also $\mathrm{rn}(x) \in \beta$ nach IH, also $\mathrm{rn}(x) \in \alpha$. □

Aus $x \in y$ bzw. $x \subseteq y$ kann man auf die entsprechenden Beziehungen zwischen den Rängen schließen; die Umkehrung gilt offenbar auch.

Lemma 3.37. a. $x \in y \to \mathrm{rn}(x) \in \mathrm{rn}(y)$.

b. $x \subseteq y \to \mathrm{rn}(x) \subseteq \mathrm{rn}(y)$.

Beweis. a. Wegen $\mathrm{rn}(y) = \bigcup\{\, \mathrm{rn}(x) + 1 \mid x \in y \,\}$ ist dies klar. b. Für jedes $z \in x$ gilt $\mathrm{rn}(z) \in \mathrm{rn}(y)$ nach a, also $\mathrm{rn}(x) = \bigcup\{\, \mathrm{rn}(z) + 1 \mid z \in x \,\} \subseteq \mathrm{rn}(y)$. □

Weiter läßt sich zeigen, daß die Mengen α und V_α beide den Rang α haben.

Lemma 3.38 a. $\mathrm{rn}(\alpha) = \alpha$.

b. $\mathrm{rn}(V_\alpha) = \alpha$.

Beweis. a. Induktion über α. Es gilt $\mathrm{rn}(\alpha) = \bigcup\{\, \mathrm{rn}(\beta) + 1 \mid \beta \in \alpha \,\}$, also nach IH $\mathrm{rn}(\alpha) = \bigcup\{\, \beta + 1 \mid \beta \in \alpha \,\} = \alpha$ nach Lemma 3.28.a.

b. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{rn}(V_\alpha) &= \bigcup\{\, \mathrm{rn}(x) + 1 \mid x \in V_\alpha \,\} \\ &= \bigcup\{\, \mathrm{rn}(x) + 1 \mid \mathrm{rn}(x) \in \alpha \,\} \quad \text{nach Lemma 3.36} \\ &\subseteq \alpha. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $\beta \in \alpha$. Nach a ist $\mathrm{rn}(\beta) = \beta \in \alpha$, also

$$\beta = \mathrm{rn}(\beta) \in \bigcup\{\, \mathrm{rn}(x) + 1 \mid \mathrm{rn}(x) \in \alpha \,\} = \mathrm{rn}(V_\alpha). \qquad \square$$

Schließlich zeigen wir noch, daß eine Klasse $\mathcal{A}$ genau dann eine Menge ist, wenn die Ränge ihrer Elemente durch eine Ordinalzahl beschränkt werden können.

Lemma 3.39. *$\mathcal{A}$ ist Menge genau dann, wenn es ein α gibt mit $(\forall y \in \mathcal{A})(\mathrm{rn}(y) \in \alpha)$.*

Beweis. $\rightarrow$. Sei $\mathcal{A} = x$. Aus Lemma 3.37.a folgt dann, daß $\mathrm{rn}(x)$ ist das gesuchte α ist.

$\leftarrow$. Gelte $\mathrm{rn}(x) \in \alpha$ für alle $y \in \mathcal{A}$. Dann folgt $\mathcal{A} \subseteq \{\, y \mid \mathrm{rn}(y) \in \alpha \,\} = V_\alpha$. $\square$

4.4 Kardinalzahlen

Wir behandeln jetzt die wichtigsten Eigenschaften von Kardinalzahlen. Sie werden in der Mathematik häufig benutzt.

4.4.1 Größenvergleiche zwischen Mengen

Definition.

$$
\begin{aligned}
&|a| \leq |b| :\leftrightarrow \exists f(f\colon a \to b \text{ und } f \text{ injektiv}),\\
&|a| = |b| \leftrightarrow \exists f(f\colon a \leftrightarrow b),\\
&|a| < |b| :\leftrightarrow |a| \leq |b| \wedge |a| \neq |b|,\\
&{}^b a := \{\, f \mid f\colon b \to a \,\}.
\end{aligned}
$$

Zwei Mengen a und b heißen gleichmächtig, wenn $|a| = |b|$ gilt.

Lemma 4.1. a. $|a \times b| = |b \times a|$.

b. $|{}^a({}^b c)| = |{}^{a\times b} c|$.

c. $|\mathcal{P}(a)| = |{}^a\{0,1\}|$.

d. *(Cantor).* $|a| <| \mathcal{P}(a)|$.

Beweis. $a - c$ sind klar. d. $f\colon a \to \mathcal{P}(a)$, $x \mapsto \{x\}$ ist injektiv. Angenommen, wir hätten ein $g\colon a \leftrightarrow \mathcal{P}(a)$. Betrachte

$$b := \{\, x \mid x \in a \wedge x \notin g(x) \,\}.$$

Dann ist $b \subseteq a$, also $b = g(x_0)$ für ein $x_0 \in a$. Es folgt $x_0 \in g(x_0) \leftrightarrow x_0 \notin g(x_0)$ und damit ein Widerspruch. □

Satz 4.2. *(Cantor, Schröder, Bernstein). Ist $a \subseteq b \subseteq c$ und $|a| = |c|$, so folgt $|b| = |c|$.*

Beweis. Sei $f\colon c \to a$ bijektiv und $r := c \setminus b$. Wir definieren rekursiv $g\colon \omega \to V$ durch

$$
\begin{aligned}
&g(0) = r,\\
&g(n+1) = f[g(n)].
\end{aligned}
$$

Ferner setzen wir

$$\overline{r} := \bigcup_n g(n)$$

und definieren $i: c \to b$ durch

$$i(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \overline{r}, \\ x, & \text{falls } x \notin \overline{r}. \end{cases}$$

Es genügt zu zeigen, daß (1) $\mathrm{rng}(i) = b$ und (2) i injektiv ist. Zu (1). Sei $x \in b$. Zu zeigen ist $x \in \mathrm{rng}(i)$. OBdA sei $x \in \overline{r}$. Wegen $x \in b$ ist dann $x \notin g(0)$. Also gibt es ein n mit $x \in g(n+1) = f[g(n)]$, also $x = f(y) = i(y)$ für ein $y \in \overline{r}$. Zu (2). Sei $x \neq y$. OBdA ist $x \in \overline{r}$, $y \notin \overline{r}$. Dann hat man aber $i(x) \in \overline{r}$, $i(y) \notin \overline{r}$, also $i(x) \neq i(y)$. □

Bemerkung. Der Satz von Cantor, Schröder und Bernstein läßt sich offenbar auch als Anwendung des Fixpunktsatzes von Knaster–Tarski auffassen; siehe dazu Gunter [7].

Folgerung 4.3. $|a| \leq |b| \wedge |b| \leq |a| \to |a| = |b|$.

Beweis. Seien $f: a \to b$ und $g: b \to a$ injektiv. Dann gilt $(g \circ f)[a] \subseteq g[b] \subseteq a$ und $|(g \circ f)[a]| = |a|$. Nach dem Satz von Cantor, Schröder und Bernstein folgt $|b| = |g[b]| = |a|$. □

4.4.2 Kardinalzahlen, Alephfunktion

Unter einer Kardinalzahl verstehen wir eine Ordinalzahl, die zu keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig ist.

Definition. *α heißt Kardinalzahl, wenn gilt* $(\forall \beta < \alpha)(|\beta| \neq |\alpha|)$.

Hier und im folgenden schreiben wir aufgrund von Lemma 3.22 $\alpha < \beta$ für $\alpha \in \beta$ und $\alpha \leq \beta$ für $\alpha \subseteq \beta$.

Lemma 4.4. $|n| = |m| \to n = m$.

Beweis. Induktion über n. 0. Klar. $n+1$. Sei $f: n+1 \leftrightarrow m+1$. OBdA können wir $f(n) = m$ annehmen. Also gilt $f \restriction n: n \leftrightarrow m$ und damit $n = m$ nach IH, also auch $n+1 = m+1$. □

Folgerung 4.5. *n ist Kardinalzahl.* □

Lemma 4.6. $|n| \neq |\omega|$.

Beweis. Annahme: $|n| = |\omega|$. Es ist $n \subseteq n+1 \subseteq \omega$, also nach dem Satz von Cantor, Schröder und Bernstein $|n| = |n+1|$, was nicht sein kann. □

Folgerung 4.7. *ω ist Kardinalzahl.* □

Lemma 4.8. $\omega \leq \alpha \to |\alpha + 1| = |\alpha|$.

Beweis. Definiere $f\colon \alpha \to \alpha + 1$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } x = 0; \\ n, & \text{falls } x = n + 1; \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f\colon \alpha \leftrightarrow \alpha + 1$. □

Folgerung 4.9. *Ist $\omega \leq \alpha$ und α eine Kardinalzahl, so ist α eine Limeszahl.*

Beweis. Annahme: $\alpha = \beta + 1$. Dann ist $\omega \leq \beta < \alpha$, also $|\beta| = |\beta + 1|$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß α eine Kardinalzahl ist. □

Lemma 4.10. *Ist a eine Menge von Kardinalzahlen, so ist $\sup(a)$ $(:= \bigcup a)$ eine Kardinalzahl.*

Beweis. Andernfalls gäbe es ein $\alpha < \sup(a)$ mit $|\alpha| = |\sup(a)|$. Also $\alpha \in \bigcup a$ und damit $\alpha \in \beta \in a$ für eine Kardinalzahl β. Nach dem Satz von Cantor, Schröder und Bernstein folgt aber aus $\alpha \subseteq \beta \subseteq \bigcup a$ und $|\alpha| = |\bigcup a|$, daß $|\alpha| = |\beta|$. Wegen $\alpha \in \beta$ und β Kardinalzahl ist dies aber nicht möglich. □

Wir wollen jetzt zeigen, daß es zu jeder Ordinalzahl eine größere Kardinalzahl gibt. Es gilt sogar allgemeiner folgendes.

Satz 4.11. $\forall a \exists! \alpha[(\forall \beta < \alpha)(|\beta| \leq |a|) \wedge |\alpha| \not\leq |a|]$. *$\alpha$ heißt Hartoggzahl von a; sie wird mit $\mathcal{H}(a)$ bezeichnet.*

Beweis. Eindeutigkeit. Klar. Existenz. Sei $w := \{\, (b, r) \mid b \subset a \wedge r$ Wohlordnung auf $b \,\}$ und $\gamma_{(b,r)}$ die eindeutig bestimmte Ordinalzahl isomorph zu (b, r). Dann ist $\{\, \gamma_{(b,r)} \mid (b, r) \in w \,\}$ eine transitive Teilmenge von On, also eine Ordinalzahl α. Zu zeigen ist

a. $\beta < \alpha \to |\beta| \leq |a|$,

b. $|\alpha| \not\leq |a|$.

a. Sei $\beta < \alpha$. Dann ist β isomorph einem $\gamma_{(b,r)}$ mit $(b, r) \in w$, also existiert $f\colon \beta \leftrightarrow b$.

b. Annahme: $f\colon \alpha \to a$ injektiv. Dann ist $\alpha = \gamma_{(b,r)}$ für ein $b \subseteq a$ $(b := \mathrm{rng}(f))$, also $\alpha \in \alpha$, was nicht sein kann. □

Bemerkungen. 1. Die Hartoggzahl von a ist eine Kardinalzahl. Denn sei α Hartoggzahl von a, $\beta < \alpha$. Wäre $|\beta| = |\alpha|$, so hätte man $|\alpha| = |\beta| \leq |a|$, was nicht sein kann.

2. Die Hartoggzahl von β ist die kleinste Kardinalzahl α mit $\alpha > \beta$.

Definition. $\aleph\colon \mathrm{On} \to V$ *wird rekursiv definiert durch*

$$\begin{aligned} &\aleph_0 := \omega, \\ &\aleph_{\alpha+1} := \mathcal{H}(\aleph_\alpha), \\ &\aleph_\alpha := \sup\{\, \aleph_\beta \mid \beta < \alpha \,\} \text{ für } \alpha \text{ Limeszahl.} \end{aligned}$$

Lemma 4.12. *(Eigenschaften von $\aleph$).* a. $\aleph_\alpha$ *ist Kardinalzahl.*

b. $\alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

c. $\forall\beta(\beta$ *Kardinalzahl* $\wedge\, \omega \leq \beta \to \exists\alpha(\beta = \aleph_\alpha))$.

Beweis. a. Induktion über α; klar. b. Induktion über β. 0. Klar. $\beta + 1$.

$$\begin{aligned}
&\alpha < \beta + 1\\
&\alpha < \beta \vee \alpha = \beta\\
&\aleph_\alpha < \aleph_\beta \vee \aleph_\alpha = \aleph_\beta\\
&\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}.
\end{aligned}$$

β Limeszahl.

$$\begin{aligned}
&\alpha < \beta\\
&\alpha < \gamma \text{ für ein } \gamma < \beta\\
&\aleph_\alpha < \aleph_\gamma \leq \aleph_\beta.
\end{aligned}$$

c. Sei α minimal mit $\beta \leq \aleph_\alpha$. Ein solches α existiert, da sonst $\aleph\colon \mathrm{On} \to \beta$ injektiv wäre. Wir zeigen $\aleph_\alpha \leq \beta$ durch Fallunterscheidung nach α. 0. Klar. $\alpha = \alpha' + 1$. Nach Wahl von α ist $\aleph_{\alpha'} < \beta$, also $\aleph_\alpha \leq \beta$. α Limeszahl. Nach Wahl von α ist $\aleph_\gamma < \beta$ für alle $\gamma < \alpha$, also $\aleph_\alpha = \sup\{\, \aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha \,\} \leq \beta$. □

Wir zeigen noch, daß jede unendliche Ordinalzahl zu einer Kardinalzahl gleichmächtig ist.

Lemma 4.13. $(\forall\beta \geq \omega)\exists\alpha(|\beta| = |\aleph_\alpha|)$.

Beweis. Betrachte $\delta := \min\{\, \gamma \mid \gamma < \beta \wedge |\gamma| = |\beta| \,\}$. δ ist offenbar Kardinalzahl. Ferner ist $\delta \geq \omega$, denn andernfalls hätte man

$$\begin{aligned}
&\delta = n\\
&|n| = |\beta|\\
&n \subseteq n + 1 \subseteq \beta\\
&|n| = |n + 1|,
\end{aligned}$$

was nicht sein kann. Also ist $\delta = \aleph_\alpha$ für ein α, und wir haben $|\delta| = |\beta| = |\aleph_\alpha|$. □

4.4.3 Produkte von Kardinalzahlen

Wir zeigen jetzt, daß stets gilt $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = |\aleph_\alpha|$.

Definition. *Auf* $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ *definieren wir eine Relation* $\prec$ *durch*

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) \prec (\gamma,\delta) :\leftrightarrow\ & \max\{\alpha,\beta\} < \max\{\gamma,\delta\} \vee \\ & (\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\delta\} \wedge \alpha < \gamma) \vee \\ & (\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\delta\} \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta).\end{aligned}$$

Lemma 4.14. $\prec$ *ist eine Wohlordnung auf* $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$.

Beweis: $\prec$ ist offenbar eine lineare Ordnung. Zum Beweis der Fundiertheit von $\prec$ betrachten wir ein $a \subseteq \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ mit $a \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\emptyset \neq \mathcal{A} := \{\, \alpha \mid \exists \rho, \mu((\rho,\mu) \in a \wedge \max\{\rho,\mu\} = \alpha) \,\} \subseteq \mathrm{On}.$$

Sei $\alpha_0 := \min(\mathcal{A})$. Dann gilt

$$\emptyset \neq \mathcal{A}_1 := \{\, \rho \mid \exists \mu((\rho,\mu) \in a \wedge \max\{\rho,\mu\} = \alpha_0) \,\} \subseteq \mathrm{On}.$$

Sei $\rho_0 := \min(\mathcal{A}_1)$. Dann gilt

$$\emptyset \neq \mathcal{A}_2 := \{\, \mu \mid (\rho_0,\mu) \in a \wedge \max\{\rho_0,\mu\} = \alpha_0) \,\} \subseteq \mathrm{On}.$$

Sei $\mu_0 := \min(\mathcal{A}_2)$. Dann gilt offenbar $(\rho_0,\mu_0) = \min_\prec(a)$. Schließlich ist stets $\widehat{(\alpha,\beta)}$ eine Menge, denn es ist $\widehat{(\alpha,\beta)} \subseteq \gamma \times \gamma$ mit $\gamma := \max\{\alpha,\beta\} + 1$. □

Folgerung 4.15. $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ *ist isomorph zu* On *(bzgl.* $\prec$ *und* $\in \restriction \mathrm{On}$*).*

Beweis. Nach Lemma 4.14 ist $\prec$ eine Wohlordnung auf $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$. Also gibt es nach Folgerung 3.19 einen Isomorphismus auf eine transitive und damit auch ordinale Klasse. Diese Klasse kann aber keine Menge sein, da sonst $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ eine Menge wäre. Nach Lemma 3.23.c ist aber On die einzige echte ordinale Klasse. □

Satz 4.16. $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ *ist isomorph zu* $\aleph_\alpha$*. (bzgl.* $\prec \restriction \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ *und* $\in \restriction \aleph_\alpha$*).*

Beweis. Annahme: $\exists\alpha(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ nicht isomorph zu $\aleph_\alpha)$. Sei

$$\alpha_0 := \min\{\, \alpha \mid \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \text{ nicht isomorph zu } \aleph_\alpha \,\}.$$

Offenbar ist $\alpha_0 \neq 0$. Da $\aleph_{\alpha_0} \times \aleph_{\alpha_0}$ und $\aleph_{\alpha_0}$ wohlgeordnete Mengen sind, muß eine von ihnen isomorph zu einem echten Anfangsstück der anderen sein. Wir unterscheiden deshalb zwei Fälle.

Fall 1. $\aleph_{\alpha_0}$ isomorph zu $\widehat{(\beta,\gamma)}$ mit $\beta,\gamma < \aleph_{\alpha_0}$. Wähle $\delta < \aleph_{\alpha_0}$ mit $\beta,\gamma < \delta$. Dann ist $\widehat{(\beta,\gamma)} \subseteq \delta \times \delta$. Man erhält

$$\begin{aligned} |\aleph_{\alpha_0}| = |\widehat{(\beta,\gamma)}| \leq |\delta \times \delta| &= |\aleph_\tau \times \aleph_\tau| \text{ für ein } \tau < \alpha_0 \\ &= |\aleph_\tau| \text{ nach Wahl von } \alpha_0 \end{aligned}$$

und damit einen Widerspruch zu Lemma 4.12.b.

Fall 2. $\aleph_{\alpha_0} \times \aleph_{\alpha_0}$ ist isomorph zu $\beta < \aleph_{\alpha_0}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} &|\aleph_{\alpha_0}| \leq |\aleph_{\alpha_0} \times \aleph_{\alpha_0}| = |\beta| \leq |\aleph_{\alpha_0}| \\ &|\aleph_{\alpha_0}| = |\beta| \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch zu $\aleph_{\alpha_0}$ Kardinalzahl, $\beta < \aleph_{\alpha_0}$. □

Folgerung 4.17. *a.* $|\aleph_\alpha \times \aleph_\beta| = |\max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}|$.

b. $n \neq 0 \to |{}^n\aleph_\alpha| = |\aleph_\alpha|$.

Beweis. a. OBdA sei $\alpha \leq \beta$. Dann gilt

$$|\aleph_\beta| \leq |\aleph_\alpha \times \aleph_\beta| \leq |\aleph_\beta \times \aleph_\beta| = |\aleph_\beta|.$$

b folgt durch Induktion nach n leicht aus Satz 4.16. □

4.5 Auswahlaxiom

Anwendung: Königs Lemma, Satz von Tychonoff, allgemeiner Vollständigkeitssatz.

4.5.1 Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz und Zornsches Lemma

Definition. *Eine Relation $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{A}$ heißt partielle Ordnung, wenn für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\begin{aligned} &\neg x\mathcal{R}x, && \textit{Irreflexivität} \\ &x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z, && \textit{Transitivität.} \end{aligned}$$

Ein $x \in \mathcal{A}$ heißt maximales Element, wenn es kein $y \in \mathcal{A}$ gibt mit $x\mathcal{R}y$. Sei noch $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Ein $x \in \mathcal{A}$ heißt obere Schranke von $\mathcal{B}$, wenn gilt

$$(\forall y \in \mathcal{B})(y\mathcal{R}x \vee y = x).$$

Satz 5.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

a. *Das Auswahlaxiom:*

$$\forall x[\emptyset \notin x \to \exists f(f\colon x \to \bigcup x \wedge (\forall y \in x)(f(y) \in y))]. \qquad (AC)$$

b. *Der Wohlordnungssatz:*

$$\forall a \exists r(r \textit{ ist Wohlordnung auf } a). \qquad (WO)$$

c. *Das Zornsche Lemma: Für jede nichtleere partielle Ordnung $(P, <)$ mit der Eigenschaft, daß jedes durch $<$ linear geordnete $L \subseteq P$ eine obere Schranke in P hat, gilt: P hat ein maximales Element.*

Beweis: $(ZL) \to (WO)$. Gegeben sei ein a. Sei

$$P := \{\, f \mid \exists \alpha(f\colon \alpha \to a \text{ injektiv}) \,\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}(a) \times a).$$

P wird durch $\subsetneq$ partiell geordnet. Sei $L \subseteq P$ linear geordnet. Dann gilt $\bigcup L \in P$. Also ist $\bigcup L$ obere Schranke von L. Mit dem Zornschen Lemma erhält man ein maximales Element $f_0 \in P$. Offenbar ist dann f_0 eine Bijektion einer Ordinalzahl α_0 auf a. f_0 induziert eine Wohlordnung auf a.

$(WO) \to (AC)$. Sei $\emptyset \notin x$. Nach (WO) existiert eine Wohlordnung $<$ auf $\bigcup x$. Für jedes $y \in x$ induziert $<$ eine Wohlordnung auf y. Definiere

$$f{:}x \to \bigcup x,$$
$$y \mapsto \min{}_<(y) \in y.$$

$(AC) \to (ZL)$. Sei $<$ partielle Ordnung auf $P \neq \emptyset$. Es gelte: $\forall L(L \subseteq P \wedge L$ linear geordnet $\to L$ hat eine obere Schranke in $P)$. Nach (AC) existiert eine Auswahlfunktion f auf $\mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$. Sei $z \notin P$ beliebig. Definiere

$$\mathcal{F}{:}\,\mathrm{On} \to V$$
$$\mathcal{F}(\alpha) = \begin{cases} f(\{\, y \mid y \in P \wedge y \text{ obere Schranke von } \mathcal{F}[\alpha] \wedge y \notin \mathcal{F}[\alpha]\,\}), & \text{falls } \{\ldots\} \neq \emptyset; \\ z, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: $\exists\rho(\mathcal{F}(\rho) = z)$. Beweis: Sonst $\mathcal{F}{:}\,\mathrm{On} \to P$ injektiv, Widerspruch zu P Menge. Setze $\rho_0 := \min\{\rho \mid \mathcal{F}(\rho) = z\}$. $\mathcal{F}[\rho_0]$ ist linear geordnet, $\mathcal{F}[\rho_0] \subseteq P$. Nach Voraussetzung existiert eine obere Schranke $y_0 \in P$ von $\mathcal{F}[\rho_0]$. Wir zeigen jetzt, daß y_0 maximales Element in p ist. Annahme: $y_0 < y$ für ein $y \in P$. Dann ist y obere Schranke von $\mathcal{F}[\rho_0]$ und $y \notin \mathcal{F}[\rho_0]$. Dies widerspricht aber der Definition von ρ_0. □

Ab jetzt wird das Auswahlaxiom immer vorausgesetzt. Wir markieren jedoch jeden Satz und jede Definition mit (AC), wenn darin das Auswahlaxiom verwendet wird.

(AC) ist offenbar äquivalent zu dem Spezialfall, in dem je zwei $y_1, y_2 \in x$ disjunkt sind. Wir notieren noch die folgende äquivalente Fassung des Auswahlaxioms.

Lemma 5.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

a. *Das Auswahlaxiom (AC).*

b. *Zu jedem surjektiven $g{:}\,a \to b$ gibt es ein injektives $f{:}\,b \to a$ mit $(\forall x \in b)(g(fx) = x)$.*

Beweis. a→b. Sei $g{:}\,b \to a$ surjektiv. Nach (AC) existiert eine Wohlordnung $<$ von b. Definiere $f{:}\,a \to b$ durch $f(x) := \min_<\{\, y \mid y \in b \wedge g(y) = x\,\}$.

b→a. OBdA sei $x \neq \emptyset$ und $(\forall y_1, y_2 \in x)(y_1 \cap y_2 = \emptyset)$.Wir definieren $g{:}\bigcup x \to x$ durch $g(z) :=$ dasjenige $y \in x$ mit $z \in y$. Dann ist g surjektiv. Nach b existiert also ein injektives $f{:}\,x \to \bigcup x$ so daß für alle $y \in x$ gilt $g(fy) = y$, also $f(y) \in y$. □

4.5.2 Kardinalität

Definition. *α heißt Kardinalität (oder Mächtigkeit von a, wenn α Kardinalzahl ist und es eine Bijektion $f{:}\,a \to \alpha$ gibt.*

Satz 5.3. *(AC). Jede Menge hat genau eine Kardinalität.*

Beweis: Eindeutigkeit. Klar. Existenz. Sei $<$ eine Wohlordnung auf a. Dann existiert γ mit a isomorph zu γ. Also ist $\{\,\tau \mid |\tau| = |a|\,\} \neq \emptyset$ und damit $\min\{\,\tau \mid |\tau| = |a|\,\}$ Kardinalzahl. □

Offenbar ist $|a| = |b|$ genau dann, wenn die Kardinalität von a gleich der Kardinalität von b ist, und $|a| \leq |b|$ genau dann, wenn die Kardinalität von a kleiner oder gleich der Kardinalität von b ist. Deshalb können wir $|a|$ als Bezeichnung der Kardinalität von a wählen.

Definition. *a heißt endlich, wenn sich a bijektiv auf eine natürliche Zahl abbilden läßt, und unendlich sonst.*

Mit (AC) folgt dann, daß a genau dann endlich ist, wenn $|a| < \omega$ gilt.

Lemma 5.4. *(AC). Sind $a, b \neq \emptyset$ und ist a oder b unendlich, so ist*

$$|a \times b| = \max\{|a|, |b|\}.$$

Beweis: Sei etwa $|a| = \max\{|a|, |b|\}$. Dann gilt

$$|a| \leq |a \times b| = ||a| \times |b|| \leq ||a| \times |a|| = |a|.$$ □

Satz 5.5. *(AC). Sei I unendlich oder $\sup_{i\in I} |A_i|$ unendlich. Dann gilt*

a. $|\bigcup_{i\in I} A_i| \leq \max\{|I|, \sup_{i\in I} |A_i|\}$.

b. *Hat man zusätzlich $(\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset)$ und $(\forall i, j \in I)(i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset)$, so gilt $=$.*

Beweis. a. OBdA $\kappa := \sup_{i\in I} |A_i| \neq 0$. Wir wählen uns eine Wohlordnung $<$ von I und definieren mit Bezug auf diese Wohlordnung

$$f\colon \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i),$$
$$f(x) = (\min\{\, i \in I \mid x \in A_i \,\}, x).$$

f ist offenbar injektiv. Also

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i\in I} A_i| &\leq |\bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i)| \\ &\leq |\bigcup_{i\in I} (\{i\} \times \kappa)| \\ &= |I \times \kappa| \\ &= \max\{|I|, \kappa\}. \end{aligned}$$

b. Wegen a genügt es zu zeigen, daß $|I|, |A_i| \leq |\bigcup_{i\in I} A_i|$. Die zweite Abschätzung ist klar. Zum Beweis der ersten wählen wir uns eine Wohlordnung $<$ von $\bigcup_{i\in I} A_i$ und definieren $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ durch $f(i) := \min_<\{\, x \mid x \in A_i \,\}$. Aufgrund der Voraussetzungen ist f injektiv. □

Definition. *a heißt Dedekind–endlich, wenn sich a nicht bijektiv auf eine echte Teilmenge b von a abbilden läßt, und andernfalls Dedekind–unendlich.*

Satz 5.6. *(AC). a ist Dedekind–unendlich genau dann, wenn a unendlich ist.*

Beweis. $\rightarrow$. Sei $b \subsetneq a$ und $f: a \leftrightarrow b$. Annahme: $|a| < \omega$, etwa $|a| = n$. Dann existiert $c \subsetneq n$ und ein $g: n \leftrightarrow c$. Wir zeigen durch Induktion über n, daß dies nicht möglich ist, also daß gilt

$$\forall n \neg(\exists c \subsetneq n)\exists g(g: n \leftrightarrow c).$$

0. Klar. $n+1$. Sei $g: n+1 \leftrightarrow c$ und $c \subsetneq n+1$. OBdA ist $n \notin \mathrm{rng}(g \restriction n)$. Es folgt $g \restriction n: n \leftrightarrow c \setminus \{n\} \subsetneq n$ und damit ein Widerspruch zur IH.

$\leftarrow$. Sei $g: \omega \rightarrow a$ injektiv und $h: g[\omega] \leftrightarrow g[\omega \setminus 1]$ definiert durch

$$h = \{\, (g(n), g(n+1)) \mid n \in \omega \,\}.$$

Ein $f: a \leftrightarrow (a \setminus \{g(0)\})$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in a \setminus g[\omega]; \\ h(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$ □

4.5.3 Reguläre und singuläre Kardinalzahlen

κ, λ bezeichnen im folgenden Kardinalzahlen $\geq \omega$. Das Auswahlaxiom (AC) werden wir in diesem Abschnitt stets voraussetzen.

Definition. *(AC).* a. *$x \subseteq \kappa$ heißt konfinal mit κ, wenn $\sup(x) = \kappa$.*

b. *$\mathrm{cf}(\kappa) := \min\{\, |x| \mid x \subseteq \kappa$ und x konfinal mit $\kappa \,\}$ heißt Konfinalität von κ.*

c. *κ heißt regulär, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.*

d. *κ heißt singulär, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.*

Satz 5.7. *(AC).* a. *$\omega = \aleph_0$ ist regulär.*

b. *$\aleph_{\alpha+1}$ ist regulär.*

c. *Ist β Limeszahl und gilt $\beta < \aleph_\beta$, so ist $\aleph_\beta$ singulär.*

Beweis. a. Angenommen, ω ist singulär, also $\mathrm{cf}(\omega) < \omega$. Dann gibt es ein $x \subseteq \omega$ mit $|x| = n$ und $\sup(x) = \omega$. Dies ist aber nicht möglich (Beweis durch Induktion über n).

b. Annahme: $\aleph_{\alpha+1}$ singulär. Dann ist $\mathrm{cf}(\aleph_{a+1}) \leq \aleph_a$. Es gibt also ein $x \subseteq \aleph_{\alpha+1}$ mit $|x| \leq \aleph_\alpha$ und $\sup(x) = \aleph_{\alpha+1}$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\aleph_{\alpha+1} &= |\bigcup x| \\ &\leq \max\{|x|, \sup\{\,|y| \mid y \in x\,\}\} \quad \text{nach Satz 5.5.a} \\ &\leq \aleph_\alpha,\end{aligned}$$

was nicht sein kann.

c. Sei β eine Limeszahl mit $\beta < \aleph_\beta$. Dann hat man $\aleph_\beta = \sup\{\,\aleph_\gamma \mid \gamma < \beta\,\}$ und es gilt $|\{\,\aleph_\gamma \mid \gamma < \beta\,\}| = |\beta| < \aleph_\beta$. Also ist $\aleph_\beta$ singulär. □

Nach Definition hat man zu jeder unendlichen Kardinalzahl eine Teilmenge $x \subseteq \kappa$, deren Kardinalität gleich $\mathrm{cf}(\kappa)$ ist, die sich also bijektiv auf $\mathrm{cf}(\kappa)$ abbilden läßt. Wir zeigen jetzt, daß man sogar annehmen kann, daß diese Bijektion ein Isomorphismus ist.

Lemma 5.8. *(AC). Sei κ unendliche Kardinalzahl. Dann gibt es eine zu κ konfinale Teilmenge $x \subseteq \kappa$, die isomorph zu $\mathrm{cf}(\kappa)$ ist.*

Beweis: Sei $y \subseteq \kappa$, $\sup(y) = \kappa$, $|y| = \mathrm{cf}(\kappa)$ und $g\colon \mathrm{cf}(\kappa) \leftrightarrow y$. Durch transfinite Rekursion definieren wir

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\colon \mathrm{On} \to V, \\ &\mathcal{F}(\alpha) := \sup(\mathcal{F}[\alpha] \cup g[\alpha]) + 1.\end{aligned}$$

Sei $f := \mathcal{F}\restriction \mathrm{cf}(\kappa)$. Man sieht leicht:

1. $\alpha < \beta < \mathrm{cf}(\kappa) \to f(\alpha) < f(\beta) \wedge g(\alpha) < f(\beta)$.
2. $\mathrm{rng}(f) \subseteq \kappa$
3. $\mathrm{rng}(f)$ ist konfinal mit κ.

$\mathrm{rng}(f)$ ist dann das gesuchte x. □

Folgerung 5.9. *(AC). Ist κ eine unendliche Kardinalzahl, so ist $\mathrm{cf}(\kappa)$ eine reguläre Kardinalzahl.*

Beweis. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa)) \leq \mathrm{cf}(\kappa)$ ist klar. Zu zeigen ist also $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa))$. Nach dem vorigen Lemma existieren x, f mit $x \subseteq \kappa$, $\sup(x) = \kappa$ und $f\colon \mathrm{cf}(\kappa) \leftrightarrow x$ Isomorphismus. Weiter existiert $y \subseteq \mathrm{cf}(\kappa)$ mit $\sup(y) = \mathrm{cf}(\kappa)$ und $|y| = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa))$. Man sieht leicht, daß $\{\,f(\alpha) \mid \alpha \in y\,\}$ konfinal mit κ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\kappa) &\leq |\{\,f(\alpha) \mid \alpha \in y\,\}| \\ &= |y| \\ &= \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa))\end{aligned}$$

□

Satz 5.10. *(König) (AC). Sei κ unendliche Kardinalzahl. Dann ist $\kappa < |^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa|$.*

Beweis. $\kappa = |^1\kappa| \leq |^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa|$ ist klar. Es genügt also, aus der Annahme der Existenz einer Bijektion $f\colon \kappa \leftrightarrow {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$ einen Widerspruch herzuleiten. Gemäß Lemma 5.8 gibt es $x \subseteq \kappa$ mit $\sup(x) = \kappa$ und einen Isomorphismus $g\colon \mathrm{cf}(\kappa) \leftrightarrow x$. Für jedes $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ ist also $g(\alpha) < \kappa$ und deshalb

$$|\{\, f(\gamma)(\alpha) \mid \gamma < g(\alpha)\,\}| \leq |g(\alpha)| < \kappa,$$

also $\{\, f(\gamma)(\alpha) \mid \gamma < g(\alpha)\,\} \subsetneq \kappa$. Setze

$$\begin{aligned} &h\colon \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa, \\ &h(\alpha) := \min(\kappa \setminus \{\, f(\gamma)(\alpha) \mid \gamma < g(\alpha)\,\}). \end{aligned}$$

Den gesuchten Widerspruch erhalten wir, indem wir zeigen, daß für alle $\gamma < \kappa$ gilt $f(\gamma) \neq h$. Sei also $\gamma < \kappa$. Wählt man jetzt ein $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ mit $\gamma < g(\alpha)$, so ist $h(\alpha) \neq f(\gamma)(\alpha)$ nach Konstruktion von h. □

4.5.4 Kardinalzahlpotenzen, Kontinuumshypothese

Auch in diesem Abschnitt wird (AC) stets vorausgesetzt.

Definition. $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} := |^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha|$.

Später werden wir auch eine Ordinalzahlpotenz einführen. Aus Kontext sollte jeweils klar sein, ob die Ordinalzahlpotenz oder die Kardinalzahlpotenz gemeint ist.

Satz 5.11. *(AC). a.* $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq |\mathcal{P}(\aleph_\alpha)|$

b. $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \to \aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq |\mathcal{P}(\aleph_\alpha)|$

c. $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta \to \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |\mathcal{P}(\aleph_\beta)|$.

Beweis. a.

$$\begin{aligned} \aleph_\alpha &\leq |^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha| \\ &\leq |^{\aleph_\beta}(^{\aleph_\alpha}\{0,1\})| \\ &= |^{\aleph_\beta \times \aleph_\alpha}\{0,1\}| \\ &= |^{\aleph_\alpha}\{0,1\}| \quad \text{da } \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \\ &= |\mathcal{P}(\aleph_\alpha)|. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \aleph_\alpha &< |^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}\aleph_\alpha| \quad \text{Satz von König} \\ &\leq |^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha| \\ &\leq |\mathcal{P}(\aleph_\alpha)| \quad \text{wie bei a.} \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}(\aleph_\beta)| &= |{}^{\aleph_\beta}\{0,1\}| \\ &\leq |{}^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha| \\ &\leq |{}^{\aleph_\beta\times\aleph_\alpha}\{0,1\}| \\ &= |{}^{\aleph_\beta}\{0,1\}| \\ &= |\mathcal{P}(\aleph_\beta)|.\end{aligned}$$ □

Wesentlich mehr kann man über Kardinalzahlpotenzen aussagen, wenn man die sogenannte *Kontinuumshypothese* annimmt; darunter versteht man die Aussage

$$|\mathcal{P}(\aleph_0)| = \aleph_1. \tag{KH}$$

Die naheliegende Erweiterung auf alle Kardinalzahlen ist die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese*:

$$|\mathcal{P}(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}. \tag{VKH}$$

Es ist ein offenes Problem, ob die Kontinuumshypothese in der kumulativen Tyenstruktur gilt (Nr. 1 in Hilberts Liste von mathematischen Problemen, die er in seinem Vortrag vor dem internationalen Mathematikerkongress in Paris 1900 aufgestellt hat). Bekannt ist jedoch, daß die Kontinuumshypothese von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist. Die Verwendung von (KH), (VKH) wird im folgenden immer angezeigt.

Satz 5.12. *(VKH). a.* $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

b. $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \to \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

c. $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta \to \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$.

Beweis. b und c folgen mit (VKH) aus dem vorigen Satz.

a. Sei $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Man beachte zunächst, daß gilt

$${}^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha = \bigcup\{\, {}^{\aleph_\beta}\gamma \mid \gamma < \aleph_\alpha \,\}.$$

Dies sieht man wie folgt. $\supseteq$ ist klar. $\subseteq$. Sei $f\colon \aleph_\beta \to \aleph_\alpha$. Wegen $|f[\aleph_\beta]| \leq \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ ist $\sup(f[\aleph_\beta]) < \gamma < \aleph_\alpha$ für ein γ, also $f\colon \aleph_\beta \to \gamma$.

Man erhält

$$\begin{aligned}\aleph_\alpha &\leq |{}^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha| \quad \text{voriger Satz} \\ &= |\bigcup\{\, {}^{\aleph_\beta}\gamma \mid \gamma < \aleph_\alpha \,\}| \quad \text{nach der Vorbemerkung} \\ &\leq \max\{|\aleph_\alpha|, \sup_{\gamma<\aleph_\alpha} |{}^{\aleph_\beta}\gamma|\,\} \quad \text{nach Satz 5.5.a.}\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß $|^{\aleph_\beta}\gamma| \leq \aleph_\alpha$ ist für $\gamma < \alpha$. Sei also $\gamma < \alpha$.

$$\begin{aligned}
|^{\aleph_\beta}\gamma| &\leq |^{\aleph_\beta \times \gamma}\{0,1\}| \\
&\leq |^{\aleph_\beta \times \aleph_\delta}\{0,1\}| \quad \text{für ein } \delta \text{ mit } |\gamma| \leq \aleph_\delta < \aleph_\alpha \\
&\leq \begin{cases} |\mathcal{P}(\aleph_\delta)| & \text{falls } \beta < \delta \\ |\mathcal{P}(\aleph_\beta)| & \text{falls } \delta \leq \beta \end{cases} \\
&= \begin{cases} \aleph_{\delta+1} & \text{falls } \beta < \delta \\ \aleph_{\beta+1} & \text{falls } \delta \leq \beta \end{cases} \\
&\leq \aleph_\alpha.
\end{aligned}$$

□

4.5.5 Der Vollständigkeitssatz für überabzählbare Sprachen

Wir wollen jetzt unseren mit der Suchbaummethode geführten Beweis des Vollständigkeitssatzes 1.7.3 auf überabzählbare Sprachen $\mathcal{L}$ erweitern; diese Erweiterung geht auf Ulrich Berger zurück. Eine Sprache $\mathcal{L}$ heißt überabzählbar, wenn in $\mathcal{L}$ überabzählbar viele Relations– und Funktionssymbole vorkommen. Den Beweis in Abschnitt 1.7 hatten wir bereits so angesetzt, daß er sich leicht auf diesen Fall übertragen läßt.

Die in Kapitel 1 eingeführten grundlegenden Begriffe für die Logik erster Stufe (etwa der einer $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$, einer Umgebung U in $|\mathcal{M}|$ oder der Relation $\mathcal{M} \models A[U]$) lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall einen überabzählbaren Sprache übertragen. Ebenso läßt sich der Korrektheitssatz 1.5.1 übertragen. Für eine Menge $S \cup \{A\}$ von $\mathcal{L}$–Formeln schreiben wir wieder $S \models A$ (gelesen: aus S *folgt* A), wenn für alle $\mathcal{L}$–Strukturen $\mathcal{M}$ und alle Umgebungen U in $|\mathcal{M}|$ aus $\mathcal{M} \models B[U]$ für alle $B \in S$ folgt $\mathcal{M} \models A[U]$.

Zunächst stellt man wieder fest, daß man sich auf das Fragment der Logik ohne $\wedge$ beschränken kann.

Im Beweis des Vollständigkeitssatzes für abzählbare Sprachen hatten wir das *Königsche Lemma* benutzt. Im überabzählbaren Fall verwenden wir stattdessen den Satz von Tychonov aus der Topologie, den man mit Hilfe des Auswahlaxioms beweisen kann. Ein Beweis wird im Anhang gegeben.

Vollständigkeitssatz 5.13. *Sei $S \cup \{A\}$ eine Menge von $\mathcal{L}$–Formeln. Dann gilt*

$$S \models A \implies S \vdash A.$$

Beweis. Wir benutzen zunächst die folgende Zusatzannahme $(+_\mathcal{L})$; später werden wir zeigen, daß sie entbehrlich ist.

$(+_\mathcal{L})$ Es gibt eine irreflexive und transitive Relation $\prec$ auf $\mathrm{AllFor}_\mathcal{L} \times \mathrm{Ter}_\mathcal{L}$ und eine Funktion neu von $\mathrm{AllFor}_\mathcal{L} \times \mathrm{Ter}_\mathcal{L}$ in eine Menge Var von Variablen, die weder in S noch in

A vorkommen, so daß $\mathrm{neu}(\forall x\, B, t)$ höchstens in $(\forall y\, C, s)$ mit $(\forall x\, B, t) \prec (\forall y\, C, s)$ vorkommt.

Wir betrachten

$$I := \mathrm{AtomFor}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{ImpFor}_{\mathcal{L}} \cup (\mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}})$$

als Indexmenge. Für jedes $F \in I$ und jedes $k \in \{0,1,2\}$ definieren wir eine endliche Formelmenge $\Delta_k(F)$ durch

$$\Delta_k(B) := \begin{cases} \{\neg B\}, & \text{falls } k = 0, \\ \{B\}, & \text{falls } k \in \{1,2\}, \end{cases} \qquad \text{für } B \text{ atomar},$$

$$\Delta_k(B \to C) := \begin{cases} \{\neg(B \to C), B, \neg C\}, & \text{falls } k = 0, \\ \{B \to C, \neg B\}, & \text{falls } k = 1, \\ \{B \to C, C\}, & \text{falls } k = 2, \end{cases}$$

$$\Delta_k(\forall x\, B, t) := \begin{cases} \{\neg\forall x\, B, \neg B[y/x]\}, & \text{falls } k = 0 \text{ und } y = \mathrm{neu}(\forall x\, B, t), \\ \{\forall x\, B, B[t/x]\}, & \text{falls } k \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Eine partielle Abbildung α von I in $\{0,1,2\}$ nennen wir einen *Suchpfad* oder kurz *Pfad*. Für jeden Suchpfad α definieren wir eine Formelmenge Γ_α durch

$$\Gamma_\alpha := \bigcup_{F \in \mathrm{dom}(\alpha)} \Delta_{\alpha(F)}(F).$$

α heißt *blockiert*, wenn

- $A \in \Gamma_\alpha$ oder $\neg B \in \Gamma_\alpha$ für ein $B \in S$, oder
- $B, \neg B \in \Gamma_\alpha$ für ein B, oder
- $\bot \in \Gamma_\alpha$.

Positiver Hauptfall. Es gibt ein $I_0 \subseteq_{\mathrm{fin}} I$ so daß alle Suchpfade α durch I_0 (d.h. mit $\mathrm{dom}(\alpha) = I_0$) blockiert sind.

Wir zeigen, daß in diesem Fall gilt $S \vdash A$. Mit J bezeichnen wir Teilmengen von I_0. Wir zeigen, daß für jedes J und alle α durch J gilt $\Gamma_\alpha \cup S \vdash A$, und zwar durch Induktion über die Anzahl der Elemente in $I_0 \setminus J$. Mit $J = \emptyset$ folgt dann die Behauptung $S \vdash A$.

Im Basisfall ist $J = I_0$. Nach Annahme ist dann α blockiert; deshalb gilt $\Gamma_\alpha \cup S \vdash A$. Im Schritt unterscheiden wir drei Fälle.

Fall $\{B\} \dot\cup J$ mit B atomar. Sei α Suchpfad durch $\{B\} \dot\cup J$. Nach IH gilt $\Gamma_{\alpha[k/B]} \cup S \vdash A$ für jedes $k \in \{0,1,2\}$, also

$$\{\neg B\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A \qquad \text{und} \qquad \{B\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A,$$

und damit

$$\Gamma_\alpha \cup S \vdash (B \to A) \wedge (\neg B \to A).$$

Mit $\vdash (B \to A) \wedge (\neg B \to A) \to A$ (nach dem Fallunterscheidungslemma 1.5.4) folgt $\Gamma_\alpha \cup S \vdash A$.

Fall $\{B \to C\} \dot\cup J$. Sei α Suchpfad durch $\{B \to C\} \dot\cup J$. Nach IH gilt $\Gamma_{\alpha[k/B\to C]} \cup S \vdash A$ für jedes $k \in \{0,1,2\}$, also

$$\{\neg(B \to C), B, \neg C\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A, \tag{0}$$
$$\{B \to C, \neg B\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A, \tag{1}$$
$$\{B \to C, C\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A. \tag{2}$$

Wegen $\vdash \neg(B \to C) \to B \wedge \neg C$ folgt aus (0)

$$\{\neg(B \to C)\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A. \tag{3}$$

Wegen $\vdash (\neg B \to A) \wedge (C \to A) \to ((B \to C) \to A)$ folgt aus (1) und (2)

$$\{B \to C\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich wie eben mit dem Fallunterscheidungslemma $\Gamma_\alpha \cup S \vdash A$.

Fall $\{(\forall x\, B, t)\} \dot\cup J$ mit $J \subseteq \mathrm{AllFor}_\mathcal{L} \times \mathrm{Ter}_\mathcal{L}$ und $(\forall x\, B, t) \not\prec (\forall y\, C, s)$ für alle $(\forall y\, C, s) \in J$, also $(\forall x\, B, t)$ maximal bzgl. $\prec$. Sei α Suchpfad durch $\{(\forall x\, B, t)\} \dot\cup J$. Nach IH gilt $\Gamma_{\alpha[k/(\forall x\, B, t)]} \cup S \vdash A$ für jedes $k \in \{0,1,2\}$, also

$$\{\neg\forall x\, B, \neg B[y/x]\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A,$$
$$\{\forall x\, B, B[t/x]\} \cup \Gamma_\alpha \cup S \vdash A,$$

wobei y nicht in $\forall x\, B$, Γ_α, S und A vorkommt. Mit

$$\vdash (\forall x\, B \to A) \to \forall y(\neg\forall x\, B \to \neg B[y/x] \to A) \to A$$

für y nicht in $\forall x\, B$, A ergibt sich wieder mit dem Fallunterscheidungslemma $\Gamma_\alpha \cup S \vdash A$.

Negativer Hauptfall. Für jedes $I_0 \subseteq_{\mathrm{fin}} I$ gibt es einen nicht blockierten Suchpfad α durch I_0.

Wir zeigen, daß es dann einen nicht blockierten Suchpfad α durch ganz I gibt. Aus α werden wir ein Gegenbeispiel zur Voraussetzung des Satzes erhalten.

$X := \{\, \alpha \mid \alpha\colon I \to \{0,1,2\} \,\}$, aufgefaßt als I–faches topologisches Produkt des diskreten Raums $\{0,1,2\}$, ist quasikompakt nach dem Satz von Tychonov. Für jedes $I_0 \subseteq_{\mathrm{fin}} I$ sei

$$\langle I_0 \rangle := \{\, \alpha \in X \mid \alpha{\restriction}I_0 \text{ nicht blockiert} \,\}.$$

Man beachte zunächst, daß $X \setminus \langle I_0 \rangle = \{\, \alpha \in X \mid \alpha{\restriction}I_0 \text{ blockiert} \,\}$ offen ist. Dies sieht man wie folgt. Sei $\alpha \in X \setminus \langle I_0 \rangle$, also $\alpha{\restriction}I_0$ blockiert. Es genügt zu zeigen, daß es ein offenes O mit $\alpha \in O \subseteq X \setminus \langle I_0 \rangle$ gibt.

Fall $A \in \Gamma_\alpha$, also $A \in \Delta_{\alpha(F)}(F)$ für ein $F \in I$. Dann haben auch alle anderen $\beta \in X$ mit $\beta(F) = \alpha(F)$ die Eigenschaft $A \in \Delta_{\beta(F)}(F)$, also $A \in \Gamma_\beta$ und damit β blockiert oder $\beta \in X \setminus \langle I_0 \rangle$. Also

$$\alpha \in \{\, \beta \in X \mid \beta(F) = \alpha(F) \,\} \subseteq X \setminus \langle I_0 \rangle.$$

$\{\, \beta \in X \mid \beta(F) = \alpha(F) \,\}$ ist aber eine Subbasismenge der Produkttopologie von X und damit offen.

Fall $\neg B \in \Gamma_\alpha$ für ein $B \in S$. Ähnlich.

Fall $B, \neg B \in \Gamma_\alpha$ für ein B. Dann sind $B \in \Delta_{\alpha(F)}(F)$ und $\neg B \in \Delta_{\alpha(G)}(G)$ für geeignete $F, G \in I$. Also haben auch alle anderen $\beta \in X$ mit $\beta(F) = \alpha(F)$ und $\beta(G) = \alpha(G)$ die Eigenschaft $B \in \Delta_{\beta(F)}(F)$ und $\neg B \in \Delta_{\beta(G)}(G)$, also $B, \neg B \in \Gamma_\beta$ und damit β blockiert oder $\beta \in X \setminus \langle I_0 \rangle$. Also

$$\alpha \in \{\, \beta \in X \mid \beta(F) = \alpha(F) \text{ und } \beta(G) = \alpha(G) \,\} \subseteq X \setminus \langle I_0 \rangle.$$

Wieder ist $\{\, \beta \in X \mid \beta(F) = \alpha(F) \text{ und } \beta(G) = \alpha(G) \,\}$ eine Subbasismenge der Produkttopologie von X und damit offen.

Fall $\bot \in \Gamma_\alpha$. Ähnlich.

Ferner hat das System $\mathcal{H} = \{\, \langle I_0 \rangle \mid I_0 \subseteq_{\text{fin}} I \,\}$ abgeschlossener Mengen die endliche Durchschnittseigenschaft, denn für $I_1, \ldots, I_n \subseteq_{\text{fin}} I$ gilt $\langle I_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle I_n \rangle \supseteq \langle I_1 \cup \cdots \cup I_n \rangle \neq \emptyset$ nach Annahme des negativen Hauptfalls. Aufgrund einer einfachen Charakterisierung der Quasikompaktheit (siehe Anhang) ist dann $\bigcap_{I_0 \subseteq_{\text{fin}} I} \langle I_0 \rangle \neq \emptyset$. Sei α ein Element dieses Durchschnitts. Offenbar ist dann α ein nicht blockierter Suchpfad durch ganz I.

Mit Hilfe des gefundenen (von S und A abhängigen) nicht blockierten Suchpfades α und der durch α bestimmten Formelmenge

$$\Gamma_\alpha = \bigcup_{F \in I} \Delta_{\alpha(F)}(F)$$

können wir jetzt das gesuchte Gegenbeispiel zur Voraussetzung des Vollständigkeitssatzes konstruieren. Zunächst notieren wir einige Eigenschaften von Γ_α, die sofort aus der Definition folgen.

(a) Für jede Formel B gilt entweder $B \in \Gamma_\alpha$ oder $\neg B \in \Gamma_\alpha$.

(b) $\bot \notin \Gamma_\alpha$.

(c) $A \notin \Gamma_\alpha$, und $S \subseteq \Gamma_\alpha$.

(d) Wenn $\neg(B \to C) \in \Gamma_\alpha$, so ist $B \in \Gamma_\alpha$ und $\neg C \in \Gamma_\alpha$.

(e) Wenn $B \to C \in \Gamma_\alpha$, so ist $\neg B \in \Gamma_\alpha$ oder $C \in \Gamma_\alpha$.

(f) Wenn $\neg \forall x\, B \in \Gamma_\alpha$, so ist $\neg B[y/x] \in \Gamma_\alpha$ für ein y.

(g) Wenn $\forall x\, B \in \Gamma_\alpha$, so ist $B[t/x] \in \Gamma_\alpha$ für alle Terme t.

Wir definieren jetzt eine $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$ durch

$$\mathcal{M} := (\mathrm{Ter}_\mathcal{L}, I_0, I_1),$$

wobei

$$I_0(f)(t_1, \ldots, t_n) := f(t_1, \ldots, t_n),$$
$$I_1(R) := \{\, (t_1, \ldots, t_n) \mid R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma_\alpha \,\}.$$

Man kann nun zeigen

$$\mathcal{M} \models B[\mathrm{id}] \iff B \in \Gamma_\alpha. \qquad (*)$$

Den Beweis führen wir durch Induktion über die Anzahl der logischen Zeichen $\to, \forall$ in B. Zu beachten ist, daß bei unserer kanonischen Definition von $I_0(f)$ gilt $\overline{\mathrm{id}}(t) = t$ für alle $\mathcal{L}$–Terme t. Wir schreiben $\mathcal{M} \models B$ für $\mathcal{M} \models B[\mathrm{id}]$.

Fall $R(\vec{t})$. $\mathcal{M} \models R(\vec{t})$ bedeutet nach Definition von $\mathcal{M}$, daß $R(\vec{t}) \in \Gamma_\alpha$.

Fall $\bot$. Nach (b) ist $\bot \notin \Gamma_\alpha$.

Fall $B \to C$. $\Longrightarrow$. Gelte $\mathcal{M} \models B \to C$. Zu zeigen ist $B \to C \in \Gamma_\alpha$. Nach (a) genügt $\neg(B \to C) \notin \Gamma_\alpha$. Nehmen wir also an, daß $\neg(B \to C) \in \Gamma_\alpha$. Nach (d) gilt dann $B \in \Gamma_\alpha$ und $\neg C \in \Gamma_\alpha$, also nach (a) $C \notin \Gamma_\alpha$. Nach IH folgt $\mathcal{M} \models B$ und $\mathcal{M} \not\models C$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathcal{M} \models B \to C$.

$\Longleftarrow$. Gelte $B \to C \in \Gamma_\alpha$. Zu zeigen ist $\mathcal{M} \models B \to C$. Sei also $\mathcal{M} \models B$. Zu zeigen ist $\mathcal{M} \models C$. Nach IH haben wir $B \in \Gamma_\alpha$, also nach (e) und (a) $C \in \Gamma_\alpha$, also nach IH $\mathcal{M} \models C$.

Fall $\forall x\, B$. $\Longrightarrow$. Gelte $\mathcal{M} \models \forall x\, B$. Zu zeigen ist $\forall x\, B \in \Gamma_\alpha$. Nach (a) genügt $\neg\forall x\, B \notin \Gamma_\alpha$. Nehmen wir also an, daß $\neg\forall x\, B \in \Gamma_\alpha$. Nach (f) ist dann $\neg B[y/x] \in \Gamma_\alpha$ für ein y, also nach (a) und der IH $\mathcal{M} \not\models B[y/x][\mathrm{id}]$, also nach dem Substitutionslemma 4.2 $\mathcal{M} \not\models B[\mathrm{id}^y_x]$ im Widerspruch zur Annahme $\mathcal{M} \models \forall x\, B[\mathrm{id}]$.

$\Longleftarrow$. Sei $\forall x\, B \in \Gamma_\alpha$. Zu zeigen ist $\mathcal{M} \models \forall x\, B[\mathrm{id}]$. Sei also $t \in \mathrm{Ter}_\mathcal{L}$ beliebig. Zu zeigen ist $\mathcal{M} \models B[\mathrm{id}^t_x]$, also $\mathcal{M} \models B[t/x][\mathrm{id}]$ nach dem Substitutionslemma 4.2. Aus (g) folgt aber $B[t/x] \in \Gamma_\alpha$, also nach der IH für $B[t/x]$ auch $\mathcal{M} \models B[t/x][\mathrm{id}]$.

Jetzt können wir den Beweis des Vollständigkeitssatzes abschließen. Wegen (c) ist $A \notin \Gamma_\alpha$ und $S \subseteq \Gamma_\alpha$, also $\mathcal{M} \not\models A[\mathrm{id}]$ und $\mathcal{M} \models B[\mathrm{id}]$ für alle $B \in S$, d.h. $\mathcal{M}$ und id bilden ein Gegenbeispiel zur Voraussetzung $S \models A$ des Vollständigkeitssatzes.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die obige Zusatzannahme $(+_\mathcal{L})$ entbehrlich ist. Für abzählbare Sprachen $\mathcal{L}$ ist das klar. Im allgemeinen Fall definieren wir Sprachen $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \cdots$ durch

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L},$$
$$\mathcal{L}_{n+1} := \mathcal{L}_n \cup \{\, y_{(\forall x\, B, t)} \mid (\forall x\, B, t) \in (\mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}_n} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}_n}) \setminus \bigcup_{i<n} (\mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}_i} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}_i}) \,\},$$

wobei die $y_{(\forall x\, B,t)}$ neue Variablen sind, und setzen $\mathcal{L}' := \bigcup_n \mathcal{L}_n$. Die Sprache $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ unterscheidet sich also von $\mathcal{L}$ nur dadurch, daß sie eventuell zusätzliche Variablen enthält. Für $(\forall x\, B, t), (\forall y\, C, s) \in \mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}'} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}'}$ definieren wir

$$\begin{aligned}&(\forall x\, B, t) \prec (\forall y\, C, s)\\ &:\leftrightarrow \exists n((\forall x\, B, t) \in (\mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}_n} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}_n}) \wedge (\forall y\, C, s) \notin (\mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}_n} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}_n})).\end{aligned}$$

Für $(\forall x\, B, t) \in \mathrm{AllFor}_{\mathcal{L}'} \times \mathrm{Ter}_{\mathcal{L}'}$ setzen wir dann $\mathrm{neu}(\forall x\, B, t) := y_{(\forall x\, B,t)}$. Offenbar erfüllt $\mathcal{L}'$ die Zusatzannahme $(+_{\mathcal{L}'})$. (Man vergleiche hiermit den Beweis etwa in Shoenfields Buch [18], daß jede Theorie eine konservative Erweiterung hat, die eine Henkin–Theorie ist).

Jetzt können wir den allgemeinen Vollständigkeitssatz beweisen. Gelte $S \models A$. Sei $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ eine Sprache mit $(+_{\mathcal{L}'})$. Wie eben bewiesen gilt $S \vdash A$ bezüglich $\mathcal{L}'$. Sei d eine $\mathcal{L}'$–Herleitung von A aus Annahmen $B_1, \ldots, B_n \in S$. In d seien etwa die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ aus $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ benutzt worden. Man ersetze diese Variablen durch Variablen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathcal{L}$, die nicht in d vorkommen; dies ist möglich, da $\mathcal{L}$ unendlich viele Variablen enthält. Es ergibt sich eine $\mathcal{L}$–Herleitung von A aus $B_1, \ldots, B_n$. □

4.6 Ordinalzahlarithmetik

Wir definieren Addition, Multiplikation und Exponentiation für Ordinalzahlen und beweisen ihre grundlegenden Eigenschaften. Ferner behandeln wir die Cantorsche Normalform.

Definition.

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 := \alpha,\\
&\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1,\\
&\alpha + \beta := \sup\{\, \alpha + \gamma \mid \gamma < \beta \,\} \quad \textit{falls } \beta \textit{ Limeszahl.}
\end{aligned}$$

Genauer definiert man $s_\alpha \colon \mathrm{On} \to V$ durch

$$\begin{aligned}
&s_\alpha(0) := \alpha,\\
&s_\alpha(\beta + 1) := s_\alpha(\beta) + 1,\\
&s_\alpha(\beta) := \bigcup \mathrm{rng}(s_\alpha \restriction \beta) \quad \text{falls } \beta \text{ Limeszahl}
\end{aligned}$$

und setzt dann $\alpha + \beta := s_\alpha(\beta)$.

Lemma 6.1. *(Eigenschaften der Ordinalzahladdition).*

a. $\alpha + \beta \in \mathrm{On}$.

b. $0 + \beta = \beta$.

c. $\exists \alpha, \beta (\alpha + \beta \neq \beta + \alpha)$.

d. $\beta < \gamma \to \alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

e. *Es gibt* α, β, γ *mit* $\alpha < \beta$, *aber* $\alpha + \gamma \not< \beta + \gamma$.

f. $\alpha \leq \beta \to \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

g. *Ist* $\alpha \leq \beta$, *so gibt es genau ein* γ *mit* $\alpha + \gamma = \beta$.

h. *Ist* β *Limeszahl, so auch* $\alpha + \beta$.

i. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Beweis. a. Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta+1$. Dann ist $\alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1 \in \mathrm{On}$, da nach IH $\alpha+\beta \in \mathrm{On}$. *Fall* β Limeszahl. Dann ist $\alpha+\beta = \sup\{\, \alpha+\gamma \mid \gamma < \beta \,\} \in \mathrm{On}$, da nach IH $\alpha + \gamma \in \mathrm{On}$ für alle $\gamma < \beta$.

b. Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta+1$. Dann ist $0+(\beta+1) = (0+\beta)+1 = \beta+1$, da nach IH $0 + \beta = \beta$. *Fall* β Limeszahl. Dann ist

$$0 + \beta = \sup\{\, 0 + \gamma \mid \gamma < \beta \,\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\{\,\gamma \mid \gamma < \beta\,\} \quad \text{nach IH} \\
&= \bigcup \beta \\
&= \beta, \quad \text{da } \beta \text{ Limeszahl.}
\end{aligned}
$$

c. $1 + \omega = \sup\{\,1 + n \mid n \in \omega\,\} = \omega \neq \omega + 1$.

d. Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\beta < \gamma + 1, \\
&\beta < \gamma \vee \beta = \gamma, \\
&\alpha + \beta < \alpha + \gamma \vee \alpha + \beta = \alpha + \gamma \quad \text{nach IH}, \\
&\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma < (\alpha + \gamma) + 1 = \alpha + (\gamma + 1).
\end{aligned}
$$

Fall γ Limeszahl. Sei $\beta < \gamma$, also $\beta < \delta$ für ein $\delta < \gamma$. Dann gilt $\alpha + \beta < \alpha + \delta$ nach IH, also $\alpha + \beta < \sup\{\,\alpha + \delta \mid \delta < \gamma\,\} = \alpha + \gamma$.

e. $0 < 1$, aber $0 + \omega = \omega = 1 + \omega$

f. Wir bemerken zunächst, daß es niemals ein β geben kann mit $\alpha < \beta < \alpha + 1$, denn andernfalls hätte man im Fall $\beta \in \alpha$ den Widerspruch $\beta \in \alpha \in \beta$ und im Fall $\beta = \alpha$ den Widerspruch $\alpha \in \alpha$. Als zweite Vorbemerkung notieren wir, daß stets gilt

$$\alpha \leq \beta \to \alpha + 1 \leq \beta + 1,$$

denn im Fall $\beta + 1 < \alpha + 1$ hätte man $\alpha < \beta + 1 < \alpha + 1$, was wie gerade bewiesen nicht sein kann. — Wir zeigen jetzt die Behauptung $\alpha \leq \beta \to \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ durch Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \text{nach IH}, \\
&(\alpha + \gamma) + 1 \leq (\beta + \gamma) + 1 \quad \text{nach der zweiten Vorbemerkung}, \\
&\alpha + (\gamma + 1) \leq \beta + (\gamma + 1) \quad \text{nach Definition}.
\end{aligned}
$$

Fall γ Limeszahl. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \delta \leq \beta + \delta \quad \text{für alle } \delta < \gamma, \text{ nach IH}, \\
&\alpha + \delta \leq \sup\{\,\beta + \delta \mid \delta < \gamma\,\} \\
&\sup\{\,\alpha + \delta \mid \delta < \gamma\,\} \leq \sup\{\,\beta + \delta \mid \delta < \gamma\,\} \\
&\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \text{nach Definition}.
\end{aligned}
$$

g. Die Eindeutigkeit von γ folgt aus d. Existenz: Sei $\alpha \leq \beta$. Nach b und f gilt $\beta = 0 + \beta \leq \alpha + \beta$. Sei γ die kleinste Ordinalzahl mit $\beta \leq \alpha + \gamma$. Wir zeigen jetzt $\beta = \alpha + \gamma$. *Fall* $\gamma = 0$. Dann ist $\beta \leq \alpha + \gamma = \alpha + 0 = \alpha \leq \beta$, also $\beta = \alpha + \gamma$. *Fall* $\gamma = \gamma' + 1$. Dann ist $\alpha + \gamma' < \beta$, also $(\alpha + \gamma') + 1 \leq \beta$ nach der ersten Vorbemerkung

zu f und damit $\alpha + \gamma = \beta$. *Fall* γ Limeszahl. Dann ist $\alpha + \delta < \beta$ für alle $\delta < \gamma$, also $\alpha + \gamma = \sup\{\, \alpha + \delta \mid \delta < \gamma \,\} \leq \beta$ und damit $\alpha + \gamma = \beta$.

h. Sei β Limeszahl. Wir verwenden die in Lemma 3.27.a gegebene Charakterisierung von Limeszahlen. $\alpha + \beta \neq 0$: Wegen $0 \leq \alpha$ ist $0 < \beta = 0 + \beta \leq \alpha + \beta$ nach f. $\gamma < \alpha + \beta \to \gamma + 1 < \alpha + \beta$: Sei $\gamma < \alpha + \beta = \sup\{\, \alpha + \delta \mid \delta < \beta \,\}$, also $\gamma < \alpha + \delta$ für ein $\delta < \beta$, also $\gamma + 1 < (\alpha + \delta) + 1$ (nach der ersten Vorbemerkung zu f) und damit $\gamma + 1 < \alpha + (\delta + 1)$ mit $\delta + 1 < \beta$, also $\gamma + 1 < \sup\{\, \alpha + \delta \mid \delta < \beta \,\}$.

i. Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + (\gamma + 1) &= [(\alpha + \beta) + \gamma] + 1 \\ &= [\alpha + (\beta + \gamma)] + 1 \quad \text{nach IH} \\ &= \alpha + [(\beta + \gamma) + 1] \\ &= \alpha + [\beta + (\gamma + 1)]\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Nach h ist dann auch $\beta + \gamma$ Limeszahl. Man erhält

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= \sup\{\, (\alpha + \beta) + \delta \mid \delta < \gamma \,\} \\ &= \sup\{\, \alpha + (\beta + \delta) \mid \delta < \gamma \,\} \quad \text{nach IH} \\ &= \sup\{\, \alpha + \varepsilon \mid \varepsilon < \beta + \gamma \,\} \quad \text{siehe unten} \\ &= \alpha + (\beta + \gamma).\end{aligned}$$

Die Gleichheit der beiden Suprema sieht man wie folgt. Ist $\varepsilon < \beta + \gamma$, so ist $\varepsilon < \beta + \delta$ für ein $\delta < \gamma$ (nach Definition von $\beta + \gamma$) und damit $\alpha + \varepsilon < \alpha + (\beta + \delta)$. Ist umgekehrt $\delta < \gamma$, so ist $\beta + \delta < \beta + \gamma$, also $\alpha + (\beta + \delta) = \alpha + \varepsilon$ für ein $\varepsilon < \beta + \gamma$. □

Definition.

$$\begin{aligned}&\alpha \cdot 0 := 0, \\ &\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha, \\ &\alpha \cdot \beta := \sup\{\, \alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta \,\} \quad \textit{falls } \beta \textit{ Limeszahl.}\end{aligned}$$

Wir schreiben $\alpha\beta$ für $\alpha \cdot \beta$.

Lemma 6.2. *(Eigenschaften der Ordinalzahlmultiplikation).*

a. $\alpha\beta \in \mathrm{On}$.

b. $0\beta = 0$, $1\beta = \beta$.

c. $\exists \alpha, \beta (\alpha\beta \neq \beta\alpha)$.

d. $0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \to \alpha\beta < \alpha\gamma$.

e. Es gibt α, β, γ mit $0 < \gamma$ und $\alpha < \beta$, aber $\alpha\gamma \not< \beta\gamma$.

f. $\alpha \leq \beta \to \alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

g. *Ist* $0 < \alpha$ *und* β *Limeszahl, so ist auch* $\alpha\beta$ *Limeszahl.*

h. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

i. *Es gibt* α, β, γ *mit* $(\alpha + \beta)\gamma \neq \alpha\gamma + \alpha\gamma$.

j. $\alpha\beta = 0 \to \alpha = 0 \vee \beta = 0$.

k. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

l. *Ist* $0 < \beta$, *so gibt es genau ein* γ, ρ *mit* $\alpha = \beta\gamma + \rho$ *und* $\rho < \beta$.

Beweis. a. Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta+1$. Dann ist $\alpha(\beta+1) = (\alpha\beta)+\alpha \in \mathrm{On}$, da nach IH $\alpha\beta \in \mathrm{On}$. *Fall* β Limeszahl. Dann ist $\alpha\beta = \sup\{\, \alpha\gamma \mid \gamma < \beta \,\} \in \mathrm{On}$, da nach IH $\alpha\gamma \in \mathrm{On}$ für alle $\gamma < \beta$.

b. $0\beta = 0$: Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta+1$. Dann ist $0(\beta+1) = (0\beta)+0 = 0$ nach IH. *Fall* β Limeszahl. $0\beta = \sup\{\, 0\gamma \mid \gamma < \beta \,\} = 0$ nach IH. — $1\beta = \beta$: Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta + 1$. Dann ist $1(\beta + 1) = (1\beta) + 1 = \beta + 1$ nach IH. *Fall* β Limeszahl. $1\beta = \sup\{\, 1\gamma \mid \gamma < \beta \,\} = \sup\{\, \gamma \mid \gamma < \beta \,\} = \beta$ nach IH.

c. Man beachte zunächst, daß für alle $n \in \omega$ gilt $n\omega = \sup\{\, nm \mid m < \omega \,\} = \omega$. Damit folgt $2\omega = \omega$, aber $\omega 2 = \omega(1 + 1) = \omega 1 + \omega = \omega + \omega > \omega$.

d. Sei $0 < \alpha$. Wir zeigen $\beta < \gamma \to \alpha\beta < \alpha\gamma$ durch Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\beta < \gamma + 1,\\
&\beta < \gamma \vee \beta = \gamma,\\
&\alpha\beta < \alpha\gamma \vee \alpha\beta = \alpha\gamma \quad \text{nach IH},\\
&\alpha\beta \leq \alpha\gamma < (\alpha\gamma) + \alpha = \alpha(\gamma + 1).
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Sei $\beta < \gamma$, also $\beta < \delta$ für ein $\delta < \gamma$. Dann gilt $\alpha\beta < \alpha\delta$ nach IH, also $\alpha\beta < \sup\{\, \alpha\delta \mid \delta < \gamma \,\} = \alpha\gamma$.

e. Es ist $0 < \omega$ und $1 < 2$, aber $1\omega = \omega = 2\omega$.

f. Wir zeigen die Behauptung $\alpha \leq \beta \to \alpha\gamma \leq \beta\gamma$ durch Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma \leq \beta\gamma \quad \text{nach IH},\\
&(\alpha\gamma) + \alpha \leq (\beta\gamma) + \alpha \leq (\beta\gamma) + \beta \quad \text{nach Lemma 6.1.f und d},\\
&\alpha(\gamma + 1) \leq \beta(\gamma + 1) \quad \text{nach Definition}.
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\alpha\delta \leq \beta\delta \quad \text{für alle } \delta < \gamma, \text{ nach IH},\\
&\alpha\delta \leq \sup\{\, \beta\delta \mid \delta < \gamma \,\},\\
&\sup\{\, \alpha\delta \mid \delta < \gamma \,\} \leq \sup\{\, \beta\delta \mid \delta < \gamma \,\},\\
&\alpha\gamma \leq \beta\gamma \quad \text{nach Definition}.
\end{aligned}$$

g. Sei $0 < \alpha$ und β Limeszahl. Zum Beweis von $\alpha\beta$ Limeszahl verwenden wir wieder die in Lemma 3.27.a gegebene Charakterisierung von Limeszahlen. $\alpha\beta \neq 0$: Wegen $1 \leq \alpha$ und $\omega \leq \beta$ ist $0 < \omega = 1\omega \leq \alpha\beta$ nach f. $\gamma < \alpha\beta \to \gamma + 1 < \alpha\beta$: Sei $\gamma < \alpha\beta = \sup\{\, \alpha\delta \mid \delta < \beta \,\}$, also $\gamma < \alpha\delta$ für ein $\delta < \beta$, also $\gamma + 1 < \alpha\delta + 1 \leq \alpha\delta + \alpha = \alpha(\delta + 1)$ mit $\delta + 1 < \beta$, also $\gamma + 1 < \sup\{\, \alpha\delta \mid \delta < \beta \,\}$.

h. Zu zeigen ist $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. OBdA sei $0 < \alpha$. Wir verwenden Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha[\beta + (\gamma + 1)] &= \alpha[(\beta + \gamma) + 1] \\
&= \alpha(\beta + \gamma) + \alpha \\
&= (\alpha\beta + \alpha\gamma) + \alpha \quad \text{nach IH} \\
&= \alpha\beta + (\alpha\gamma + \alpha) \\
&= \alpha\beta + \alpha(\gamma + 1).
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Nach g ist dann auch $\alpha\gamma$ Limeszahl. Man erhält

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta + \gamma) &= \sup\{\, \alpha\delta \mid \delta < \beta + \gamma \,\} \\
&= \sup\{\, \alpha(\beta + \varepsilon) \mid \varepsilon < \gamma \,\} \\
&= \sup\{\, \alpha\beta + \alpha\varepsilon \mid \varepsilon < \gamma \,\} \quad \text{nach IH} \\
&= \sup\{\, \alpha\beta + \delta \mid \delta < \alpha\gamma \,\} \\
&= \alpha\beta + \alpha\gamma.
\end{aligned}$$

i. $(1 + 1)\omega = 2\omega = \omega$, aber $1\omega + 1\omega = \omega + \omega$.

j. Ist $0 < \alpha, \beta$, also $1 \leq \alpha, \beta$, so folgt $0 < 11 \leq \alpha\beta$

k. Induktion über γ. OBdA sei $\beta \neq 0$. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)(\gamma + 1) &= (\alpha\beta)\gamma + \alpha\beta \\
&= \alpha(\beta\gamma) + \alpha\beta \quad \text{nach IH} \\
&= \alpha(\beta\gamma + \beta) \quad \text{nach h} \\
&= \alpha[\beta(\gamma + 1)]
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Nach g ist dann auch $\beta\gamma$ Limeszahl. Man erhält

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\gamma &= \sup\{\, (\alpha\beta)\delta \mid \delta < \gamma \,\} \\
&= \sup\{\, \alpha(\beta\delta) \mid \delta < \gamma \,\} \quad \text{nach IH} \\
&= \sup\{\, \alpha\varepsilon \mid \varepsilon < \beta\gamma \,\} \\
&= \alpha(\beta\gamma).
\end{aligned}$$

l. Existenz: Sei $0 < \beta$, also $1 \leq \beta$ und deshalb $\alpha = 1\alpha \leq \beta\alpha$. Sei γ die kleinste Ordinalzahl mit $\alpha \leq \beta\gamma$. *Fall* $\alpha = \beta\gamma$. Setze $\rho = 0$. *Fall* $\alpha < \beta\gamma$. Ist dann $\gamma = \gamma' + 1$, so

ist $\beta\gamma' < \alpha$. Es gibt also ein ρ mit $\beta\gamma' + \rho = \alpha$. Ferner ist $\rho < \beta$, denn aus $\rho \geq \beta$ folgt $\alpha = \beta\gamma' + \rho \geq \beta\gamma' + \beta = \beta(\gamma' + 1) = \beta\gamma$ im Widerspruch zur Fallunterscheidungsannahme. Ist γ Limeszahl, so gilt $\alpha < \beta\gamma = \sup\{\, \beta\delta \mid \delta < \gamma \,\}$, also $\alpha < \beta\delta$ für ein $\delta < \gamma$, was nicht sein kann.

Eindeutigkeit: Gelte $\beta\gamma_1 + \rho_1 = \beta\gamma_2 + \rho_2$ mit $\rho_1, \rho_2 < \beta$. Ist etwa $\gamma_1 < \gamma_2$, so folgt

$$\begin{aligned} \beta\gamma_1 + \rho_1 &< \beta\gamma_1 + \beta \\ &= \beta(\gamma_1 + 1) \\ &\leq \beta\gamma_2 \\ &\leq \beta\gamma_2 + \rho_2 \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch. Also ist $\gamma_1 = \gamma_2$, und deshalb auch $\rho_1 = \rho_2$. □

Folgerung 6.3. *Jede Ordinalzahl α läßt sich eindeutig in der Form $\alpha = \omega\gamma + n$ darstellen. Hierbei ist $n = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ oder α Limeszahl ist.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß für jedes γ gilt $\omega\gamma = 0$ oder $\omega\gamma$ ist Limeszahl. Im Fall $\gamma = 0$ ist dies klar. Im Fall $\gamma + 1$ ist $\omega(\gamma + 1) = \omega\gamma + \omega$ Limeszahl nach Lemma 6.2.h. Im Fall γ Limeszahl ist nach Lemma 6.2.g auch $\omega\gamma$ Limeszahl. □

Definition.

$$\begin{aligned} \alpha^0 &:= \begin{cases} 0, & \textit{falls } \alpha = 0; \\ 1, & \textit{sonst,} \end{cases} \\ \alpha^{\beta+1} &:= \alpha^\beta \alpha, \\ \alpha^\beta &:= \sup\{\, \alpha^\gamma \mid \gamma < \beta \,\} \quad \textit{falls } \beta \textit{ Limeszahl.} \end{aligned}$$

Lemma 6.4. *(Eigenschaften der Ordinalzahlexponentiation).*

a. $\alpha^\beta \in \mathrm{On}$.

b. $0^\beta = 0$, $1^\beta = \beta$.

c. $1 < \alpha \wedge \beta < \gamma \to \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

d. *Es gibt α, β, γ mit $1 < \gamma$ und $1 < \alpha < \beta$, aber $\alpha^\gamma \not< \beta^\gamma$.*

e. $\alpha \leq \beta \to \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

f. *Ist $1 < \alpha$ und β Limeszahl, so ist auch α^β Limeszahl.*

g. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.

h. $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

i. $1 < \alpha \to \beta \leq \alpha^\beta$.

Beweis. a. Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta + 1$. Dann ist $\alpha^{\beta+1} = (\alpha^\beta)\alpha \in \mathrm{On}$, da nach IH $\alpha^\beta \in \mathrm{On}$. *Fall* β Limeszahl. Dann ist $\alpha^\beta = \sup\{\, \alpha^\gamma \mid \gamma < \beta \,\} \in \mathrm{On}$, da nach IH $\alpha^\gamma \in \mathrm{On}$ für alle $\gamma < \beta$.

b. $0^\beta = 0$: Induktion über β. *Fall* 0. $0^0 = 0$ gilt nach Definition. *Fall* $\beta + 1$. Dann ist $0^{\beta+1} = (0^\beta)0 = 0$ nach IH. *Fall* β Limeszahl. $0^\beta = \sup\{\, 0^\gamma \mid \gamma < \beta \,\} = 0$ nach IH. — $1^\beta = 1$: Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta + 1$. Dann ist $1^{\beta+1} = (1^\beta)1 = 1$ nach IH. *Fall* β Limeszahl. $1^\beta = \sup\{\, 1^\gamma \mid \gamma < \beta \,\} = \sup\{\, 1 \mid \gamma < \beta \,\} = 1$ nach IH.

c. Sei $1 < \alpha$. Wir zeigen $\beta < \gamma \to \alpha^\beta < \alpha^\gamma$ durch Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\beta < \gamma + 1,\\
&\beta < \gamma \vee \beta = \gamma,\\
&\alpha^\beta < \alpha^\gamma \vee \alpha^\beta = \alpha^\gamma \quad \text{nach IH},\\
&\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma < \alpha^\gamma + \alpha^\gamma \leq \alpha^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Sei $\beta < \gamma$, also $\beta < \delta$ für ein $\delta < \gamma$. Dann gilt $\alpha^\beta < \alpha^\delta$ nach IH, also $\alpha^\beta < \sup\{\, \alpha^\delta \mid \delta < \gamma \,\} = \alpha^\gamma$.

d. Für $1 < n$ gilt $n^\omega = \sup\{\, n^m \mid m < \omega \,\} = \omega$ und damit $2^\omega = \omega = 3^\omega$.

e. Wir zeigen die Behauptung $\alpha \leq \beta \to \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$ durch Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Sei also $\alpha \leq \beta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha^\gamma &\leq \beta^\gamma \quad \text{nach IH},\\
\alpha^{\gamma+1} &= \alpha^\gamma \alpha\\
&\leq \beta^\gamma \alpha\\
&\leq \beta^\gamma \beta\\
&= \beta^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Sei wieder $\alpha \leq \beta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\alpha^\delta \leq \beta^\delta \quad \text{für alle } \delta < \gamma, \text{ nach IH},\\
&\alpha^\delta \leq \sup\{\, \beta^\delta \mid \delta < \gamma \,\}\\
&\sup\{\, \alpha^\delta \mid \delta < \gamma \,\} \leq \sup\{\, \beta^\delta \mid \delta < \gamma \,\}\\
&\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma \quad \text{nach Definition}.
\end{aligned}$$

f. Sei $1 < \alpha$ und β Limeszahl. Zum Beweis von α^β Limeszahl verwenden wir wieder die in Lemma 3.27.a gegebene Charakterisierung von Limeszahlen. $\alpha^\beta \neq 0$: Wegen $1 \leq \alpha$ ist $1 = 1^\beta \leq \alpha^\beta$. $\gamma < \alpha^\beta \to \gamma + 1 < \alpha^\beta$: Sei $\gamma < \alpha^\beta = \sup\{\, \alpha^\delta \mid \delta < \beta \,\}$, also $\gamma < \alpha^\delta$ für ein $\delta < \beta$, also $\gamma + 1 < \alpha^\delta + 1 \leq \alpha^\delta 2 \leq \alpha^{\delta+1}$ mit $\delta + 1 < \beta$, also $\gamma + 1 < \sup\{\, \alpha^\delta \mid \delta < \beta \,\}$.

g. Zu zeigen ist $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$. OBdA sei $\alpha \neq 0, 1$. Wir verwenden Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha^{\beta+\gamma+1} &= \alpha^\beta \alpha^\gamma \alpha \quad \text{nach IH}\\
&= \alpha^\beta \alpha^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Man erhält

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+\gamma} &= \sup\{\,\alpha^\delta \mid \delta < \beta+\gamma\,\}\\ &= \sup\{\,\alpha^{\beta+\varepsilon} \mid \varepsilon < \gamma\,\}\\ &= \sup\{\,\alpha^\beta\alpha^\varepsilon \mid \varepsilon < \gamma\,\} \quad \text{nach IH}\\ &= \sup\{\,\alpha^\beta\delta \mid \delta < \alpha^\gamma\,\}\\ &= \alpha^\beta\alpha^\gamma.\end{aligned}$$

h. Zu zeigen ist $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$. OBdA sei $\alpha \neq 0,1$ und $\beta \neq 0$. Wir verwenden Induktion über γ. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\gamma+1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta(\gamma+1)} &= \alpha^{\beta\gamma}\alpha^\beta\\ &= (\alpha^\beta)^\gamma\alpha^\beta \quad \text{nach IH}\\ &= (\alpha^\beta)^{\gamma+1}.\end{aligned}$$

Fall γ Limeszahl. Wegen $\alpha \neq 0,1$ und $\beta \neq 0$ sind dann $\alpha^{\beta\gamma}$ und $(\alpha^\beta)^\gamma$ Limeszahlen und man erhält

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta\gamma} &= \sup\{\,\alpha^\delta \mid \delta < \beta\gamma\,\}\\ &= \sup\{\,\alpha^{\beta\varepsilon} \mid \varepsilon < \gamma\,\}\\ &= \sup\{\,(\alpha^\beta)^\varepsilon \mid \varepsilon < \gamma\,\} \quad \text{nach IH}\\ &= (\alpha^\beta)^\gamma.\end{aligned}$$

i. Sei $1 < \alpha$. Wir zeigen $\beta \leq \alpha^\beta$ durch Induktion über β. *Fall* 0. Klar. *Fall* $\beta+1$. Dann ist $\beta \leq \alpha^\beta$ nach IH, also

$$\begin{aligned}\beta+1 &\leq \alpha^\beta + 1\\ &\leq \alpha^\beta + \alpha^\beta\\ &\leq \alpha^{\beta+1}.\end{aligned}$$

Fall β Limeszahl. Man erhält

$$\begin{aligned}\beta &= \sup\{\,\gamma \mid \gamma < \beta\,\}\\ &\leq \sup\{\,\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\,\} \quad \text{nach IH}\\ &\alpha^\beta.\end{aligned}$$

□

Satz 6.5. *(Cantor–Normalform). Sei* $\gamma \geq 2$. *Jedes* α *läßt sich eindeutig darstellen in der Form*

$$\alpha = \gamma^{\alpha_1}\beta_1 + cdots + \gamma^{\alpha_n}\beta_n \quad \textit{mit } \alpha \geq \alpha_1 > \cdots > \alpha_n \textit{ und } 0 < \beta_i < \gamma.$$

Beweis. Existenz. Induktion über α. Sei δ minimal mit $\alpha \leq \gamma^\delta$; ein solches δ existiert, da $\alpha \leq \gamma^\alpha$. Im Fall $\alpha = \gamma^\delta$ sind wir fertig. Sei also $\alpha < \gamma^\delta$. Dann kann δ keine Limeszahl

sein, da sonst $\alpha < \gamma^\varepsilon$ für ein $\varepsilon < \delta$ wäre. Ist $\delta = 0$, so folgt $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ und die Behauptung ist trivial. Sei also $\delta = \alpha_1 + 1$, also

$$\gamma^{\alpha_1} < \alpha \leq \gamma^{\alpha_1+1}.$$

Division mit Rest ergibt

$$\alpha = \gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \rho \quad \text{mit } \rho < \gamma^{\alpha_1}.$$

Offenbar ist $0 < \beta_1 < \gamma$. Ist jetzt $\rho = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir

$$\rho = \gamma^{\alpha_2}\beta_2 + \cdots + \gamma^{\alpha_n}\beta_n \quad \text{nach IH.}$$

Zu zeigen bleibt $\alpha_1 > \alpha_2$. Dies gilt, da aus $\alpha_2 \geq \alpha_1$ folgt $\rho \geq \gamma^{\alpha_2} \geq \gamma^{\alpha_1}$, was nicht sein kann.

Eindeutigkeit. Sei

$$\gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_n}\beta_n = \gamma^{\alpha'_1}\beta'_1 + \cdots + \gamma^{\alpha'_m}\beta'_m$$

und nehmen wir an, daß beide Darstellungen verschieden sind. Da keine Darstellung Verlängerung der anderen sein kann, gibt es dann ein $i \leq n, m$ mit $(\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha'_i, \beta'_i)$. Nach Lemma 6.1.g können wir oBdA $i = 1$ annehmen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_{n-1}}\beta_{n-1} + \gamma^{\alpha_n}\beta_n &< \gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_{n-1}}\beta_{n-1} + \gamma^{\alpha_n+1} \quad \text{da } \beta_n < \gamma \\
&\leq \gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_{n-1}}(\beta_{n-1}+1) \quad \text{da } \alpha_n < \alpha_{n-1} \\
&\leq \gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_{n-1}+1} \\
&\cdots \\
&\leq \gamma^{\alpha_1}(\beta_1 + 1).
\end{aligned}$$

Wäre etwa $\alpha_1 < \alpha'_1$, so hätte man $\gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_n}\beta_n < \gamma^{\alpha_1}(\beta_1+1) \leq \gamma^{\alpha_1+1} \leq \gamma^{\alpha'_1}$, was nicht sein kann. Also ist $\alpha_1 = \alpha'_1$. Wäre nun etwa $\beta_1 < \beta'_1$, so hätte man $\gamma^{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \gamma^{\alpha_n}\beta_n < \gamma^{\alpha_1}(\beta_1+1) \leq \gamma^{\alpha_1}\beta'_1$, was wieder nicht sein kann. Also ist $\beta_1 = \beta'_1$. □

Folgerung 6.6. *(Cantor–Normalform zur Basis ω). Jedes α läßt sich eindeutig darstellen in der Form*

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n} \quad \textit{mit } \alpha \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n. \qquad \square$$

Eine Ordinalzahl α heißt *additive Hauptzahl*, wenn $\alpha \neq 0$ ist und aus $\beta, \gamma < \alpha$ stets folgt $\beta + \gamma < \alpha$.

Folgerung 6.7. *Additive Hauptzahlen sind genau die Ordinalzahlen der Form ω^ξ.*

Beweis. Dies ergibt sich leicht aus der Cantor–Normalform zur Basis ω. □

Folgerung 6.8. *(Cantor–Normalform zur Basis 2). Jedes α läßt sich eindeutig darstellen in der Form*

$$\alpha = 2^{\alpha_1} + \cdots + 2^{\alpha_n} \quad \textit{mit } \alpha \geq \alpha_1 > \cdots > \alpha_n. \qquad \square$$

4.7 Normalfunktionen

In [24] hat Veblen den Begriff einer stetig wachsenden Funktion auf einem Abschnitt der Ordinalzahlen untersucht und eine gewisse Hierarchie von Normalfunktionen eingeführt. Seine Absicht war dabei, die Cantorsche Theorie der ε–Zahlen aus [2] zu erweitern.

Sei Ω eine Limeszahl oder $\Omega = \mathrm{On}$. Ein wichtiges Beispiel ist $\Omega := \Omega_1 := \aleph_1$, also der Fall, daß Ω die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen ist. Mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \eta, \zeta$ bezeichnen wir Elemente von Ω. Eine Funktion $\varphi\colon \Omega \to \Omega$ heißt *wachsend*, wenn aus $\alpha < \beta$ stets folgt $\varphi\alpha < \varphi\beta$. φ heißt *stetig*, wenn gilt $\varphi\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \varphi\xi$ für jede Limeszahl α. φ heißt *normal*, wenn φ wachsend und stetig ist.

Lemma 7.1. *Für jede wachsende Funktion φ gilt $\alpha \leq \varphi\alpha$.*

Beweis durch Induktion über α. *Fall* 0. $0 \leq \varphi 0$. *Fall* $\alpha + 1$. $\alpha \leq \varphi\alpha < \varphi(\alpha + 1)$. *Fall* α Limeszahl. $\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \xi \leq \sup_{\xi<\alpha} \varphi\xi \leq \varphi\alpha$. □

Eine Klasse $\mathcal{B} \subseteq \Omega$ heißt *beschränkt*, wenn $\sup(\mathcal{B}) \in \Omega$. Eine Klasse $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ heißt *abgeschlossen*, wenn für jede beschränkte Teilklasse $\mathcal{B} \subseteq A$ gilt $\sup(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}$. Abgeschlossene unbeschränkte Klassen $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ heißen *normal*.

Bemerkung. Ist $\Omega = \Omega_1$, so ist jedes $\mathcal{B} \subseteq \Omega$ eine Menge, und $\mathcal{B}$ ist genau dann beschränkt, wenn $\mathcal{B}$ abzählbar ist. Ist $\Omega = \mathrm{On}$, so ist $\mathcal{B}$ genau dann beschränkt, wenn $\mathcal{B}$ eine Menge ist.

Nach Folgerung 3.19 (zum Isomorphiesatz von Mostowski) gibt es zu jedem $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{On}$ einen eindeutig bestimmten Isomorphismus einer ordinalen Klasse auf $\mathcal{A}$, also ein $f\colon \mathrm{On} \to \mathcal{A}$ bzw. $f\colon \alpha \to \mathcal{A}$. Diesen Isomorphismus nennt man die *Ordnungsfunktion* von $\mathcal{A}$.

Lemma 7.2. *Der Wertebereich einer Normalfunktion ist eine normale Klasse. Umgekehrt ist die Ordnungsfunktion einer normalen Klasse eine Normalfunktion.*

Beweis. Sei φ eine Normalfunktion. $\varphi[\Omega]$ ist unbeschränkt, da für jedes α gilt $\alpha \leq \varphi\alpha$. Wir zeigen jetzt, daß $\varphi[\Omega]$ abgeschlossen ist. Sei also $\mathcal{B} = \{\, \varphi\xi \mid \xi \in \mathcal{A} \,\}$ beschränkt, d.h. $\sup(\mathcal{B}) \in \Omega$. Wegen $\xi \leq \varphi\xi$ ist dann auch $\mathcal{A}$ beschränkt. Zu zeigen ist $\sup(\mathcal{B}) = \varphi\alpha$ für ein α. Hat $\mathcal{A}$ ein maximales Element, so sind wir fertig. Andernfalls sei $\alpha := \sup(\mathcal{A})$. Offenbar ist α eine Limeszahl. Dann gilt $\varphi\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \varphi\xi = \sup_{\xi\in\mathcal{A}} \varphi\xi = \sup(\mathcal{B})$.

Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ abgeschlossen und unbeschränkt. Wir definieren eine Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathcal{A}$ durch transfinite Rekursion, wie folgt.

$$\varphi\alpha := \min\{\, \gamma \in \mathcal{A} \mid \forall\xi(\xi < \alpha \to \varphi\xi < \gamma) \,\}.$$

φ ist wohldefiniert, da $\mathcal{A}$ unbeschränkt ist. Offenbar ist φ die Ordnungsfunktion von $\mathcal{A}$ und deshalb wachsend. Es bleibt zu zeigen, daß φ stetig ist. Sei also α eine Limeszahl. Da $\varphi[\alpha]$ beschränkt ist (dies folgt aus $\varphi\xi < \varphi\alpha$ für $\xi < \alpha$) und $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist, gilt $\sup_{\xi\in\alpha} \varphi\xi \in \mathcal{A}$, also nach Definition $\varphi\alpha = \sup_{\xi\in\alpha} \varphi\xi$. □

Lemma 7.3. *Die Fixpunkte einer Normalfunktion bilden eine normale Klasse.*

Beweis. (vgl. Cantor [2, p. 242]). Sei φ eine Normalfunktion. Für jede Ordinalzahl α erhalten wir einen Fixpunkt $\beta \geq \alpha$ von φ durch

$$\beta := \sup\{\, \varphi^n \alpha \mid n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Also ist die Klasse der Fixpunkte von φ unbeschränkt. Sie ist auch abgeschlossen, da für jede Klasse $\mathcal{B}$ von Fixpunkten von φ gilt $\varphi(\sup(\mathcal{B})) = \sup\{\, \varphi\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B} \,\} = \sup\{\, \alpha \mid \alpha \in \mathcal{B} \,\} = \sup(\mathcal{B})$, d.h. $\sup(\mathcal{B})$ ist ein Fixpunkt von φ. □

Die Ordnungsfunktion der Klasse der Fixpunkte einer Normalfunktion φ heißt nach Veblen die *erste Ableitung* φ' von φ. Zum Beispiel ist die erste Ableitung der Funktion ω^ξ die Funktion ε_ξ.

Lemma 7.4. *(Veblen [24, p. 284]). Sei $(\mathcal{A}_\gamma)_{\gamma<\beta}$ mit β Limeszahl eine fallende Folge normaler Klassen. Dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$ normal.*

Beweis. Unbeschränktheit. Sei α gegeben und $\delta_\gamma := \min\{\, \xi \in \mathcal{A}_\gamma \mid \xi > \alpha \,\}$. Dann ist $(\delta_\gamma)_{\gamma<\beta}$ schwach wachsend. Sei $\delta := \sup_{\gamma<\beta} \delta_\gamma$. Dann ist $\delta \in \mathcal{A}_\gamma$ für jedes $\gamma < \beta$, da die $\mathcal{A}_\gamma$ fallen. Also ist $\alpha < \delta \in \bigcap_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$.

Abgeschlossenheit. Sei $\mathcal{B} \subseteq \bigcap_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$, $\mathcal{B}$ beschränkt. Dann gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_\gamma$ für jedes $\gamma < \beta$ und deshalb $\sup(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}_\gamma$. Also ist $\sup(\mathcal{B}) \in \bigcap_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$. □

Wir definieren jetzt die *Veblen–Hierarchie von Normalfunktionen*. Sie geht aus von einer beliebigen gegebenen Normalfunktion $\varphi\colon \Omega \to \Omega$. Wir verwenden transfinite Rekursion, um für jedes $\beta \in \Omega$ eine Normalfunktion $\varphi_\beta\colon \Omega \to \Omega$ zu definieren:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 := \varphi,\\
&\varphi_{\beta+1} := (\varphi_\beta)',\\
&\text{für Limeszahlen } \beta \text{ sei } \varphi_\beta \text{ die Ordnungsfunktion für } \bigcap_{\gamma<\beta} \varphi_\gamma[\Omega].
\end{aligned}$$

Etwa für $\varphi\alpha := 1 + \alpha$ erhält man $\varphi_\beta\alpha = \omega^\beta + \alpha$. Beginnt man mit $\varphi\alpha := \omega^\alpha$, so ist $\varphi_1\alpha = \varepsilon_\alpha$ und φ_2 zählt die kritischen ε–Zahlen auf, d.h. die Ordinalzahlen α mit $\varepsilon_\alpha = \alpha$.

Lemma 7.5. *Sei $\beta > 0$. Dann ist φ_β die Ordnungsfunktion der Klasse aller gemeinsamen Fixpunkte aller φ_γ für $\gamma < \beta$.*

Beweis. Wir müssen zeigen $\varphi_\beta[\Omega] = \{\, \xi \mid \forall\gamma(\gamma < \beta \to \varphi_\gamma\xi = \xi) \,\}$.

$\subseteq$. Dies beweist man durch transfinite Induktion nach β. Im Fall $\beta+1$ ist jedes $\varphi_{\beta+1}\alpha$ ein Fixpunkt von φ_β und deshalb nach IH auch ein Fixpunkt aller φ_γ für $\gamma < \beta$. Ist β eine Limeszahl, so folgt die Behauptung aus $\varphi_\beta[\Omega] = \bigcap_{\gamma<\beta} \varphi_\gamma[\Omega]$.

$\supseteq$. Sei ξ mit $\forall\gamma(\gamma < \beta \to \varphi_\gamma\xi = \xi)$ gegeben. Ist β ein Nachfolger, so gilt $\xi \in \varphi_\beta[\Omega]$ nach Definition von φ_β. Ist β eine Limeszahl, so gilt $\xi \in \bigcap_{\gamma<\beta} \varphi_\gamma[\Omega] = \varphi_\beta[\Omega]$. □

Hieraus folgt, daß gilt $\varphi_\gamma(\varphi_\beta\xi) = \varphi_\beta\xi$ für jedes $\gamma < \beta$.

Eine weitere Normalfunktion erhält man wie folgt. Aus jeder der normalen Klassen $\varphi_\beta[\Omega]$ nehme man den kleinsten Fixpunkt heraus. Die auf diese Weise gebildete Klasse ist wieder normal, läßt sich also durch eine Normalfunktion aufzählen. Diese Normalfunktion ordnet also jedem β die Ordinalzahl $\varphi_\beta 0$ zu.

Lemma 7.6. *Ist φ eine Normalfunktion mit $0 < \varphi 0$, so ist auch $\lambda\beta\,\varphi_\beta 0$ eine Normalfunktion.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\beta < \gamma \to \varphi_\beta 0 < \varphi_\gamma 0,$$

und zwar durch Induktion über γ. Sei also $\beta < \gamma$. Man beachte, daß $0 < \varphi_\beta 0$ nach IH oder im Fall $\beta = 0$ nach Annahme. Also ist 0 kein Fixpunkt von φ_β und deshalb $0 < \varphi_\gamma 0$. Hieraus folgt aber $\varphi_\beta 0 < \varphi_\beta(\varphi_\gamma 0) = \varphi_\gamma 0$.

Wir zeigen jetzt, daß $\lambda\beta\varphi_\beta 0$ stetig ist. Sei $\delta := \sup_{\beta<\gamma} \varphi_\beta 0$ mit γ Limeszahl. Wir müssen zeigen $\delta = \varphi_\gamma 0$. Da $\varphi_\beta 0 \in \varphi_\alpha[\Omega]$ für alle $\alpha \le \beta < \gamma$ und da $\varphi_\alpha[\Omega]$ abgeschlossen ist, gilt $\delta \in \varphi_\alpha[\Omega]$, also $\delta \in \bigcap_{\alpha<\gamma} \varphi_\alpha[\Omega] = \varphi_\gamma[\Omega]$ und deshalb $\delta \ge \varphi_\gamma 0$. Andererseits ist $\varphi_\beta 0 < \varphi_\beta(\varphi_\gamma 0) = \varphi_\gamma 0$, also $\delta \le \varphi_\gamma 0$. □

Die Fixpunkte dieser Funktion, d.h. die Ordinalzahlen α mit $\varphi_\alpha 0 = \alpha$, heißen *stark kritische* Ordinalzahlen. Ihre Ordnungsfunktion wird meist mit Γ bezeichnet. Nach Definition ist also $\Gamma_0 := \Gamma 0$ die kleinste Ordinalzahl β mit $\varphi_\beta 0 = \beta$.

Wir wollen jetzt eine Verallgemeinerung der Cantorschen Normalform herleiten, die auf der Veblen–Hierarchie aufbaut (anstelle von ω^ξ).

Lemma 7.7.

$$\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1 \iff \begin{cases} \alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1, & \textit{falls } \beta_0 < \beta_1; \\ \alpha_0 < \alpha_1, & \textit{falls } \beta_0 = \beta_1; \\ \varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \alpha_1, & \textit{falls } \beta_0 > \beta_1, \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi_{\beta_0}\alpha_0 = \varphi_{\beta_1}\alpha_1 \iff \begin{cases} \alpha_0 = \varphi_{\beta_1}\alpha_1, & \textit{falls } \beta_0 < \beta_1; \\ \alpha_0 = \alpha_1, & \textit{falls } \beta_0 = \beta_1; \\ \varphi_{\beta_0}\alpha_0 = \alpha_1, & \textit{falls } \beta_0 > \beta_1. \end{cases} \tag{2}$$

Beweis. $\Longleftarrow$. (1). Ist $\beta_0 < \beta_1$ und $\alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1$, so gilt $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \varphi_{\beta_0}\varphi_{\beta_1}\alpha_1 = \varphi_{\beta_1}\alpha_1$. Ist $\beta_0 = \beta_1$ und $\alpha_0 < \alpha_1$, so folgt $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1$. Ist $\beta_0 > \beta_1$ und $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \alpha_1$, so gilt $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 = \varphi_{\beta_1}\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1$. Für (2) schließt man analog.

$\Longrightarrow$. Ist die rechte Seite von (1) falsch, so gilt

$$\begin{cases} \alpha_1 \le \varphi_{\beta_0}\alpha_0, & \text{falls } \beta_1 < \beta_0; \\ \alpha_1 \le \alpha_0, & \text{falls } \beta_1 = \beta_0; \\ \varphi_{\beta_1}\alpha_1 \le \alpha_0, & \text{falls } \beta_1 > \beta_0, \end{cases}$$

also nach $\Longleftarrow$ (mit 0 und 1 vertauscht) $\varphi_{\beta_1}\alpha_1 < \varphi_{\beta_0}\alpha_0$ bzw. $\varphi_{\beta_1}\alpha_1 = \varphi_{\beta_0}\alpha_0$, also $\neg(\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1)$. Ist die rechte Seite von (2) falsch, so gilt

$$\begin{cases} \alpha_0 \neq \varphi_{\beta_1}\alpha_1, & \text{falls } \beta_0 < \beta_1; \\ \alpha_0 \neq \alpha_1, & \text{falls } \beta_0 = \beta_1; \\ \varphi_{\beta_0}\alpha_0 \neq \alpha_1, & \text{falls } \beta_0 > \beta_1, \end{cases}$$

und damit nach $\Longleftarrow$ in (1) entweder $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1$ oder $\varphi_{\beta_1}\alpha_1 < \varphi_{\beta_0}\alpha_0$, also $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 \neq \varphi_{\beta_1}\alpha_1$. □

Folgerung 7.8. *Gilt $\beta_0 \leq \beta_1$, so ist $\varphi_{\beta_0}\alpha \leq \varphi_{\beta_1}\alpha$.*

Beweis. Gelte $\beta_0 < \beta_1$. Nach Lemma 7.7 (für $\leq$) genügt es zu zeigen $\alpha \leq \varphi_{\beta_1}\alpha$. Dies folgt aber aus Lemma 7.1. □

Folgerung 7.9. *Gilt $\varphi_{\beta_0}\alpha_0 = \varphi_{\beta_1}\alpha_1$, so ist $\alpha_0 = \alpha_1$ und $\beta_0 = \beta_1$, falls $\alpha_0 < \varphi_{\beta_0}\alpha_0$ und $\alpha_1 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1$.*

Beweis. Fall $\beta_0 = \beta_1$. Dann folgt $\alpha_0 = \alpha_1$ aus Lemma 7.7. *Fall $\beta_0 < \beta_1$.* Nach Lemma 7.7 gilt dann $\alpha_0 = \varphi_{\beta_1}\alpha_1 = \varphi_{\beta_0}\alpha_0$ im Widerspruch zu unserer Annahme. *Fall $\beta_1 < \beta_0$.* Ähnlich. □

Folgerung 7.10. *Ist φ eine Normalfunktion mit $0 < \varphi 0$, so kann jeder Fixpunkt α von $\varphi = \varphi_0$ eindeutig in der Form $\alpha = \varphi_\beta \alpha'$ mit $\alpha' < \alpha$ geschrieben werden.*

Beweis. Es gilt $\alpha + 1 \leq \varphi_{\alpha+1}0$ nach Lemma 7.6 und deshalb $\alpha < \varphi_{\alpha+1}\alpha$. Sei nun β minimal mit $\alpha < \varphi_\beta\alpha$. Nach Annahme ist $0 < \beta$. Da α Fixpunkt aller φ_γ mit $\gamma < \beta$ ist, gilt $\alpha = \varphi_\beta\alpha'$ für ein α'. Mit $\alpha < \varphi_\beta\alpha$ folgt $\alpha' < \alpha$.

Eindeutigkeit. Sei noch $\alpha = \varphi_{\beta_1}\alpha_1$ mit $\alpha_1 < \alpha$. Dann ist $\alpha_1 < \varphi_{\beta_1}\alpha_1$, also $\beta \leq \beta_1$ nach Wahl von β. Wäre nun $\beta < \beta_1$, so folgte $\varphi_\beta\alpha = \varphi_\beta\varphi_{\beta_1}\alpha_1 = \varphi_{\beta_1}\alpha_1 = \alpha$ im Widerspruch zur Wahl von β. Also ist $\beta = \beta_1$ und damit $\alpha_1 = \alpha$. □

Wir zeigen jetzt, daß sich jede Ordinalzahl eindeutig in einer gewissen φ–Normalform schreiben läßt. Hierbei nehmen wir an, daß unsere Ausgangs–Normalfunktion $\varphi_0 = \varphi$ die Exponentiation zur Basis ω ist.

Satz 7.11. *(φ–Normalform). Sei $\varphi_0\xi := \omega^\xi$. Dann läßt sich jede Ordinalzahl α eindeutig schreiben in der Form*

$$\alpha = \varphi_{\beta_1}\alpha_1 + \cdots + \varphi_{\beta_n}\alpha_n$$

mit $\varphi_{\beta_1}\alpha_1 \geq \cdots \geq \varphi_{\beta_n}\alpha_n$ und $\alpha_i < \varphi_{\beta_i}\alpha_i$ for $i = 1, \ldots, k$. Ist $\alpha < \Gamma_0$, so gilt zusätzlich $\beta_i < \varphi_{\beta_i}\alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Existenz. Zunächst schreibe man α in Cantor–Normalform $\alpha = \varphi_0\delta_1 + \cdots + \varphi_0\delta_n$ mit $\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_n$. Jeden Summanden mit $\delta_i < \varphi_0\delta_i$ lasse man unverändert. Jeder

andere Summand erfüllt $\delta_i = \varphi_0\delta_i$ und kann deshalb nach Folgerung 7.10 durch $\varphi_\beta\alpha'$ mit $\alpha' < \varphi_\beta\alpha'$ ersetzt werden.

Eindeutigkeit. Sei

$$\alpha = \varphi_{\beta_1}\alpha_1 + \cdots + \varphi_{\beta_n}\alpha_n = \varphi_{\beta'_1}\alpha'_1 + \cdots + \varphi_{\beta'_m}\alpha'_m$$

und nehmen wir an, daß beide Darstellungen verschieden sind. Da keine Darstellung Verlängerung der anderen sein kann, gibt es dann ein $i \leq n, m$ mit $(\beta_i, \alpha_i) \neq (\beta'_i, \alpha'_i)$. Nach Lemma 6.1.g können wir oBdA $i = 1$ annehmen. Wäre etwa $\varphi_{\beta_1}\alpha_1 < \varphi_{\beta'_1}\alpha'_1$, so hätte man (da $\varphi_{\beta'_1}\alpha'_1$ additive Hauptzahl ist und $\varphi_{\beta_1}\alpha_1 \geq \cdots \geq \varphi_{\beta_n}\alpha_n$ gilt)

$$\varphi_{\beta_1}\alpha_1 + \cdots + \varphi_{\beta_n}\alpha_n < \varphi_{\beta'_1}\alpha'_1 \leq \varphi_{\beta'_1}\alpha'_1 + \cdots + \varphi_{\beta'_m}\alpha'_m,$$

was nicht sein kann.

Zu zeigen bleibt, daß im Fall $\alpha < \Gamma_0$ gilt $\beta_i < \varphi_{\beta_i}\alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Nehmen wir also an, daß $\varphi_{\beta_i}\alpha_i \leq \beta_i$ für ein i. Dann erhält man

$$\varphi_{\beta_i}0 \leq \varphi_{\beta_i}\alpha_i \leq \beta_i \leq \varphi_{\beta_i}0,$$

also $\varphi_{\beta_i}0 = \beta_i$ und deshalb

$$\Gamma_0 \leq \beta_i = \varphi_{\beta_i}0 \leq \varphi_{\beta_i}\alpha_i \leq \alpha. \qquad \square$$

Aus den $\varphi_\beta(\alpha)$ erhält man also ein eindeutiges Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen unterhalb von $\Gamma_0 := \Gamma 0$. Man beachte jedoch, daß nach Definition von Γ_0 gilt $\Gamma_0 = \varphi_{\Gamma_0}0$.

Diese Hierarchie von Normalfunktionen wurde von Veblen [24] auf Funktionen mit mehr als einem Argument erweitert. Schütte hat in [13] diese Funktionen genauer untersucht und gezeigt, daß und wie sie für eine konstruktive Darstellung eines weit über Γ_0 hinausreichenden Abschnitts der Ordinalzahlen verwendet werden können. Dazu hat er sogenannte "Klammersymbole" zur Bezeichnung der mehrstelligen Veblen–Funktionen eingeführt.

Bachmann hat die Veblen–Hierarchie unter Verwendung der ersten überabzählbaren Ordinalzahl Ω erweitert. Sein Ansatz wurde später durch Hinzunahme von Symbolen für höhere Zahlenklassen erweitert, zuerst von Pfeiffer für endliche Zahlenklassen und dann von Isles für transfinite Zahlenklassen. Die entstehende Theorie war jedoch sehr kompliziert und es war schwierig, mit ihr zu arbeiten. Eine Idee von Feferman hat dann den Gegenstand sehr vereinfacht: Er führte Funktionen $\theta_\alpha\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ mit $\alpha \in \mathrm{On}$ ein, die wieder eine Hierarchie von Normalfunktionen bildeten und die Veblen–Hierarchie erweiterten; man schreibt meist $\theta\alpha\beta$ anstelle von $\theta_\alpha(\beta)$ und sieht θ als eine zweistellige Funktion an. Die Ordinalzahlen $\theta\alpha\beta$ werden wie folgt durch transfinite Rekursion über α definiert. Nehmen wir an, daß θ_ξ für jedes $\xi < \alpha$ schon definiert ist. Sei $C(\alpha, \beta)$ die Menge aller Ordinalzahlen, die sich aus Ordinalzahlen $< \beta$ und etwa den Konstanten $0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega$ mit Hilfe der Funktionen $+$ und $\theta{\restriction}\{\, \xi \mid \xi < \alpha \,\} \times \mathrm{On}$ erzeugen lassen. Eine Ordinalzahl β heiße

α–kritisch, wenn $\beta \notin C(\alpha, \beta)$. $\theta_\alpha\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ wird dann definiert als die Ordnungsfunktion der Klasse aller α–kritischen Ordinalzahlen.

Buchholz hat in [1] bemerkt, daß das zweite Argument β in $\theta\alpha\beta$ nicht wesentlich benutzt wird, und daß die Funktionen $\alpha \mapsto \theta\alpha\aleph_v$ mit $v = 0, 1, \ldots, \omega$ ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen von derselben Stärke erzeugen wie das System mit der zweistelligen θ–Funktion. Er hat deshalb direkt Funktionen ψ_v mit $v \leq \omega$ definiert, die $\alpha \mapsto \theta\alpha\aleph_v$ entsprechen. Genauer definiert er $\psi_v\alpha$ für $\alpha \in \mathrm{On}$ und $v \leq \omega$ durch transfinite Rekursion über α, und zwar simultan für alle v, wie folgt.

$$\psi_v\alpha := \min\{\, \gamma \mid \gamma \notin C_v(\alpha) \,\},$$

wobei $C_v(\alpha)$ die Menge aller Ordinalzahlen ist, die sich aus den Ordinalzahlen $< \aleph_v$ durch die Funktionen $+$ und alle $\psi_u \restriction \{\, \xi \mid \xi < \alpha \,\}$ mit $u \leq \omega$ erzeugen lassen.

Teil V: Beweistheorie

5.1 Gödelisierung von Ordinalzahlen

Um in arithmetischen Theorien über Ordinalzahlen sprechen zu können, verwenden wir eine Gödelisierung von Ordinalzahlen. Dies ist sicher nur für abzählbare Mengen von Ordinalzahlen möglich. Wir beschränken uns hier auf den durch ε_0 bestimmten Abschnitt der Ordinalzahlen. Unsere Gödelisierung können wir dann aus der Cantor–Normalform erhalten. Mit α, β, γ bezeichnen wir in diesem Kapitel stets Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$.

Wir müssen ferner wissen, daß gewissen Relationen und Funktionen über den Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ berechenbare Relationen und Funktionen entsprechen. Dazu stellen wir folgendes fest.

Lemma 1.1. *Seien $\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ und $\omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}$ Cantor–Normalformen (mit $m, n \geq -1$). Dann gilt*

$$\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0} < \omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}$$

genau dann, wenn es ein $i \geq 0$ gibt so daß $\alpha_{m-i} < \beta_{n-i}$, $\alpha_{m-i+1} = \beta_{n-i+1}, \ldots, \alpha_m = \beta_n$, oder $m < n$ und $\alpha_m = \beta_n, \ldots, \alpha_0 = \beta_{n-m}$.

Beweis. Übung. □

Wir verwenden die Bezeichnungen 1 für ω^0, a für $\omega^0 + \cdots + \omega^0$ mit a Exemplaren von ω^0 und $\omega^\alpha a$ für $\omega^\alpha + \cdots + \omega^\alpha$ wieder mit a Exemplaren von ω^α. □

Lemma 1.2. *Seien $\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ und $\omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}$ Cantor–Normalformen. Dann gilt*

$$\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0} + \omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0} = \omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_i} + \omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0},$$

wobei i minimal ist so daß $\alpha_i \geq \beta_n$; falls es kein solches i gibt, sei $i = m + 1$ (also $\omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}$).

Beweis. Übung. □

Man kann auch eine kommutative Version der Addition definieren. Dies ist die sogenannte *natürliche Summe* oder *Hessenberg–Summe* zweier Ordinalzahlen. Für Cantor–Normalformen $\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ und $\omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}$ wird sie definiert durch

$$(\omega^{\alpha_m} + \cdots + \omega^{\alpha_0}) \# (\omega^{\beta_n} + \cdots + \omega^{\beta_0}) := \omega^{\gamma_{m+n+1}} + \cdots + \omega^{\gamma_0},$$

wobei $\gamma_{m+n+1}, \ldots, \gamma_0$ eine fallende Permutation von $\alpha_m, \ldots, \alpha_0, \beta_n, \ldots, \beta_0$ ist.

Lemma 1.3. *# ist assoziativ, kommutativ und wachsend in beiden Argumenten.*

Beweis. Übung. □

Wir definieren jetzt eine Bijektion zwischen Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ und natürlichen Zahlen. Für diese Definition ist es nützlich, Ordinalzahlen darzustellen in der Form

$$\omega^{\alpha_m} a_m + \cdots + \omega^{\alpha_0} a_0 \quad \text{mit } \alpha_m > \cdots > \alpha_0 \text{ und } a_i \neq 0 \ (m \geq -1).$$

Definition. *Für jede Ordinalzahl α definieren wir ihre Gödelnummer $\ulcorner \alpha \urcorner$ induktiv durch*

$$\ulcorner \omega^{\alpha_m} a_m + \cdots + \omega^{\alpha_0} a_0 \urcorner := \left(\prod_{i \leq m} p_{\ulcorner \alpha_i \urcorner}^{a_i} \right) - 1,$$

wobei p_n die n–te Primzahl ist, beginnend mit $p_0 := 2$. Für jede natürliche Zahl x definieren wir ihre entsprechende Ordinalzahl $\mathrm{o}(x)$ induktiv durch

$$\mathrm{o}\left(\left(\prod_{i \leq m} p_i^{a_i} \right) - 1 \right) := \sum_{i \leq m} \omega^{\mathrm{o}(i)} a_i,$$

wobei die Summe als natürliche Summe zu verstehen ist.

Lemma 1.4. *a.* $\mathrm{o}(\ulcorner \alpha \urcorner) = \alpha$.

b. $\ulcorner \mathrm{o}(x) \urcorner = x$.

Beweis. Übung. □

Wir haben also eine einfache Bijektion zwischen den Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ und den natürlichen Zahlen. Es ist nützlich, für einige Relationen und Funktionen auf den Ordinalzahlen besondere Bezeichnungen für die entsprechenden Relationen und Funktionen auf den natürlichen Zahlen einzuführen. Wir schreiben

$x \prec y$	für	$\mathrm{o}(x) < \mathrm{o}(y)$,
ω^x	für	$\ulcorner \omega^{\mathrm{o}(x)} \urcorner$,
$x \oplus y$	für	$\ulcorner \mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(y) \urcorner$,
xa	für	$\ulcorner \mathrm{o}(x) a \urcorner$,
ω_k	für	$\ulcorner \omega_k \urcorner$,

wobei $\omega_0 := 1$, $\omega_{k+1} := \omega^{\omega_k}$.

5.2 Beweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion

Wir wollen jetzt Anfangsfälle der transfiniten Induktion in der Peano–Arithmetik herleiten, also

$$\forall x[(\forall y \prec x)A(y) \to A(x)] \to (\forall x \prec a)A(x)$$

für alle natürlichen Zahlen a und beliebige Formeln $A(x)$. Später werden wir sehen, daß unsere Resultate hier optimal sind in dem Sinn, daß für das volle System von Bezeichnungen für Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ das entsprechende Axiom der transfiniten Induktion bis ε_0, also

$$\forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to \forall x\, Px$$

mit einem Prädikatensymbol P in der Peano–Arithmetik unbeweisbar ist. Alle diese Resultate stammen von Gentzen [6].

Unter einem *arithmetischen System* $\mathbf{Z}$ verstehen wir eine auf der Minimallogik aufgebaute Theorie (einschließlich der Gleichheitsaxiome) mit den folgenden Eigenschaften. Die Sprache von $\mathbf{Z}$ besteht aus einem festen (möglicherweise abzählbar unendlichen) Vorrat von Relations– und Funktionssymbolen, von denen wir annehmen, daß sie feste Relationen und Funktionen über den natürlichen Zahlen bezeichnen, für die ein Berechnungsverfahren bekannt ist. Unter den Funktionssymbolen müssen Symbole suc für die Nachfolgerfunktion und 0 für (die 0–stellige Funktion) Null vorkommen. Unter den Relationssymbolen müssen Symbole $=$ für die Gleichheit und $\prec$ für die eben eingeführte Ordnung vom Typ ε_0 der natürlichen Zahlen vorkommen. Um das allgemeine Prinzip der transfiniten Induktion formulieren zu können, nehmen wir noch an, daß auch ein einstelliges Relationssymbol P vorhanden ist, das wie eine freie Mengenvariable verwendet wird.

Terme werden aus Objektvariablen x, y, z mittels $f(t_1, \ldots, t_m)$ aufgebaut, wobei f ein Funktionssymbol ist. Wir identifizieren einen geschlossenen Term mit seinem Wert; dies ist ein bequemer Weg, in unserem formalen System die Annahme auszudrücken, daß für jedes Funktionssymbol ein Berechnungsverfahren bekannt ist. Terme der Form $\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(\ldots \mathrm{suc}(0)\ldots))$ heißen *Ziffern*. Wir verwenden die Bezeichnung $\mathrm{suc}^n 0$ oder auch nur n für sie; gelegentlich schreiben wir auch $\underline{a}$, definiert durch $\underline{0} := 0$ und $\underline{n+1} := \mathrm{suc}(\underline{n})$. *Formeln* werden aus atomaren Formeln $R(t_1, \ldots, t_m)$ mit einem Relationssymbol R und aus $\bot$ mittels $A \to B$ und $\forall x A$ aufgebaut. Wie üblich kürzen wir $A \to \bot$ durch $\neg A$ ab.

Die *Axiome* von $\mathbf{Z}$ sollen immer die *Peano–Axiome* enthalten, also die Allabschlüsse von

$$\mathrm{suc}(x) = \mathrm{suc}(y) \to x = y, \tag{PA1}$$

$$\mathrm{suc}(x) = 0 \to A, \tag{PA2}$$

$$A(0) \to \forall x(A(x) \to A(\mathrm{suc}(x))) \to \forall x A(x), \tag{Ind(A,x)}$$

wobei $A(x)$ eine beliebige Formel ist. Um in unserem formalen System die Annahme auszudrücken, daß für jedes Relationssymbol ein Berechnungsverfahren bekannt ist, verwenden wir als Axiome $R\vec{n}$ falls $R\vec{n}$ wahr ist, und $\neg R\vec{n}$ falls $R\vec{n}$ falsch ist. Für $\prec$ fordern wir Irreflexivität und Transitivität als Axiome, und ferner — wie bei Schütte [14] — die Allabschlüsse von

$$x \prec 0 \to A, \tag{1}$$
$$z \prec y \oplus \omega^0 \to (z \prec y \to A) \to (z = y \to A) \to A, \tag{2}$$
$$x \oplus 0 = x, \tag{3}$$
$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z, \tag{4}$$
$$0 \oplus x = x, \tag{5}$$
$$\omega^x 0 = 0, \tag{6}$$
$$\omega^x(\mathrm{suc}(y)) = \omega^x y \oplus \omega^x, \tag{7}$$
$$z \prec y \oplus \omega^{\mathrm{suc}(x)} \to z \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)} m(x,y,z), \tag{8}$$
$$z \prec y \oplus \omega^{\mathrm{suc}(x)} \to e(x,y,z) \prec \mathrm{suc}(x), \tag{9}$$

wobei $\oplus$, $\omega^x y$, e und m die entsprechenden Funktionssymbole bezeichnen und A eine beliebige Formel ist. Wir erlauben auch eine beliebige Menge von wahren Formeln $\forall \vec{x}\, A$ mit A quantorenfrei und ohne P als Axiome. Solche Formeln heißen Π_1*–Formeln.*

Wir können ferner ein *ex–falso–quodlibet Axiom* oder sogar ein *Stabilitätsaxiom* for P hinzunehmen:

$$\forall x(\bot \to Px), \tag{Efq_P}$$
$$\forall x(\neg\neg Px \to Px). \tag{Stab_P}$$

Dies führt auf ein intuitionistisches arithmetisches System (wie die Heyting–Arithmetik HA) oder auf ein klassisches arithmetisches System (wie die Peano–Arithmetik PA). Man beachte, daß in Anwesenheit der Stabilitätsaxiome für alle Relationssymbole und für P sich (PA2), (1) und (2) durch ihre üblicheren klassischen Versionen ersetzen lassen, nämlich

$$\mathrm{suc}(x) \neq 0, \tag{$\mathrm{PA2}^c$}$$
$$x \not\prec 0, \tag{1^c}$$
$$z \prec y \oplus \omega^0 \to z \neq y \to z \prec y. \tag{2^c}$$

Wir werden auch *eingeschränkte* arithmetische Systeme $\mathbf{Z}_k$ betrachten. Sie sind wie $\mathbf{Z}$ definiert, aber mit dem Induktionsschema $\mathrm{Ind}(A,x)$ eingeschränkt auf Formeln A der Stufe $\mathrm{lev}(A) \leq k$. Die *Stufe* einer Formel A ist definiert durch

$$\mathrm{lev}(R\vec{t}) := \mathrm{lev}(\bot) := 0,$$
$$\mathrm{lev}(A \to B) := \max(\mathrm{lev}(A)+1, \mathrm{lev}(B)),$$
$$\mathrm{lev}(\forall x A) := \max(1, \mathrm{lev}(A)).$$

Der triviale Spezialfall $A(0) \to \forall x A(\mathrm{suc}(x)) \to \forall x A(x)$, welcher der Fallunterscheidung entspricht, ist jedoch für beliebige Formeln $A(x)$ erlaubt. Dies werden wir in Satz 2.2 verwenden.

Satz 2.1. *(Gentzen). Das Schema der transfiniten Induktion bis ω_n, also jede Formel*

$$\forall x[(\forall y \prec x)A(y) \to A(x)] \to (\forall x \prec \omega_n)A(x),$$

ist beweisbar in **Z**.

Beweis. Jeder Formel $A(x)$ ordnen wir eine Formel $A^+(x)$ zu (mit Bezug auf eine feste Variable x), und zwar durch

$$A^+(x) := \forall y[(\forall z \prec y)A(z) \to (\forall z \prec y \oplus \omega^x)A(z)].$$

Wir zeigen zunächst

$$A(x) \text{ ist progressiv } \implies A^+(x) \text{ ist progressiv,}$$

wobei "$B(x)$ ist *progressiv*" bedeutet $\forall x[(\forall y \prec x)B(y) \to B(x)]$. Sei also $A(x)$ progressiv und

$$(\forall y \prec x)A^+(y). \tag{10}$$

Wir haben zu zeigen, daß $A^+(x)$ richtig ist. Gelte also weiter

$$(\forall z \prec y)A(z) \tag{11}$$

und $z \prec y \oplus \omega^x$. Zu zeigen ist dann $A(z)$.

Fall $x = 0$. Dann $z \prec y \oplus \omega^0$. Nach (2) genügt es, $A(z)$ aus der Annahme $z \prec y$ und auch aus der Annahme $z = y$ herzuleiten. Gilt $z \prec y$, so folgt $A(z)$ aus (11), und im Fall $z = y$ folgt $A(z)$ aus (11) und der Progressivität of $A(x)$.

Fall $\mathrm{suc}(x)$. Aus $z \prec y \oplus \omega^{\mathrm{suc}(x)}$ erhalten wir $z \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)}m(x,y,z)$ nach (8) und $e(x,y,z) \prec \mathrm{suc}(x)$ nach (9). Aus (10) ergibt sich $A^+(e(x,y,z))$. Nach Definition von $A^+(x)$ erhalten wir

$$(\forall u \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)}v)A(u) \to (\forall u \prec (y \oplus \omega^{e(x,y,z)}v) \oplus \omega^{e(x,y,z)})A(u)$$

und also, unter Verwendung von (4) und (7)

$$(\forall u \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)}v)A(u) \to (\forall u \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)}\mathrm{suc}(v))A(u).$$

Ferner ergibt sich aus (11) und (6), (3)

$$(\forall u \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)}0)A(u).$$

Mit Hilfe einer geeigneten Instanz des Induktionsschemas erhalten wir

$$(\forall u \prec y \oplus \omega^{e(x,y,z)}m(x,y,z))A(u)$$

und deshalb $A(z)$.

Wir zeigen jetzt, durch Induktion über n, wie man für eine beliebige Formel $A(x)$ eine Herleitung von

$$\forall x[(\forall y \prec x)A(y) \to A(x)] \to (\forall x \prec \omega_n)A(x)$$

erhalten kann. Gelte also die linke Seite, d.h. $A(x)$ sei progressiv. *Fall* 0. Dann gilt $x \prec \omega^0$ und also $x \prec 0 \oplus \omega^0$ nach (5). Nach (2) genügt es, $A(x)$ aus $x \prec 0$ und auch aus $x = 0$ herzuleiten. Nun gilt $x \prec 0 \to A(x)$ nach (1), und $A(0)$ folgt dann aus der Progressivität von $A(x)$.

Fall $n+1$. Da $A(x)$ progressiv ist, ist nach der obigen Überlegung auch $A^+(x)$ progressiv. Eine Anwendung der IH auf $A^+(x)$ liefert $(\forall x \prec \omega_n)A^+(x)$, und also $A^+(\omega_n)$ aufgrund der Progressivität von $A^+(x)$. Nun ergibt sich aus der Definition von $A^+(x)$ (zusammen mit (1) und (5)) sofort $(\forall z \prec \omega^{\omega_n})A(z)$. □

Man beachte, daß wir im Induktionsschritt dieses Beweises die transfinite Induktion bis ω^{n+1} für $A(x)$ aus der transfiniten Induktion bis ω^n für die kompliziertere Formel $A^+(x)$ hergeleitet haben.

Wir wollen jetzt dieses Resultat verschärfen zu einem entsprechenden Satz für die Teilsysteme $\mathbf{Z}_k$ von $\mathbf{Z}$ (s. Parsons [11]). Für $i \geq 1$ sei $\omega_i[m]$ definiert durch $\omega_1[m] := m$, $\omega_{i+1}[m] := \omega^{\omega_i[m]}$.

Satz 2.2. *Sei $1 \leq \ell \leq k$. Dann läßt sich in $\mathbf{Z}_k$ für jede Formel $A(x)$ einer Stufe $\leq \ell$ die transfinite Induktion bis $\omega_{k-\ell+2}[m]$ für beliebiges m herleiten, also*

$$\forall x(\forall y \prec x A(y) \to A(x)) \to \forall x \prec \omega_{k-\ell+2}[m]A(x).$$

Beweis. Man beachte zunächst, daß für jede Formel $A(x)$ einer Stufe $\ell \geq 1$ die im Beweis von Satz 2.1 konstruierte Formel $A^+(x)$ die Stufe $\ell+1$ hat, und daß wir für den Beweis von

$$A(x) \text{ ist progressiv } \implies A^+(x) \text{ ist progressiv}$$

Induktion mit einer Induktionsformel der Stufe ℓ benutzt haben.

Sei jetzt (oBdA) $A(x)$ eine Formel der Stufe $\ell \geq 1$, und nehmen wir an, daß $A(x)$ progressiv ist. Sei $A^0 := A$, $A^{i+1} := (A^i)^+$. Dann ist $\mathrm{lev}(A^i) = \ell + i$, und folglich können wir in $\mathbf{Z}_k$ beweisen, daß $A^1, A^2, \ldots A^{k-\ell+1}$ sämtlich progressiv sind. Aus der Progressivität von $A^{k-\ell+1}(x)$ ergibt sich $A^{k-\ell+1}(0)$, $A^{k-\ell+1}(1)$, $A^{k-\ell+1}(2)$ und allgemein $A^{k-\ell+1}(m)$ für jedes m, also $A^{k-\ell+1}(\omega_1[m])$. Wegen

$$A^{k-\ell+1}(x) \equiv (A^{k-\ell})^+(x) \equiv \forall y((\forall z \prec y)A^{k-\ell}(z) \to (\forall z \prec y \oplus \omega^x)A^{k-\ell}(z))$$

erhalten wir zunächst (mit $y = 0$) $\forall z \prec \omega_2[m]A^{k-\ell}(z)$ und dann $A^{k-\ell}(\omega_2[m])$ aus der Progressivität von $A^{k-\ell}$. Durch Wiederholung dieses Arguments erhalten wir schließlich $\forall z \prec \omega_{k-\ell+2}[m]A^0(z)$. □

Unser nächstes Ziel ist ein Beweis, daß diese Schranken scharf sind. Genauer werden wir zeigen, daß man in $\mathbf{Z}$ (unabhängig davon, wieviele wahre Π_1–Formeln als Axiome verwendet werden) nicht die transfinite Induktion bis ε_0 beweisen kann, also die Formel

$$\forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to \forall x Px$$

mit einem Relationssymbol P, und daß man in $\mathbf{Z}_k$ nicht die transfinite Induktion bis ω_{k+1} beweisen kann, also die Formel

$$\forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to (\forall x \prec \omega_{k+1})Px.$$

Dies wird sich durch Anwendung der Methode der Normalisierung auf arithmetische Systeme ergeben. Wir wollen deshalb im nächsten Kapitel zunächst einen Normalisierungssatz für die Minimallogik beweisen, und diese Technik dann im nächsten Kapitel auf die Arithmetik übertragen. Dies wird jedoch nur möglich sein, wenn wir auch unendliche Beweise in der Arithmetik zulassen.

5.3 Normalisierung für die Minimallogik

Wir zeigen in diesem Kapitel, daß jeder Herleitungsterm d der Minimallogik durch geeignete Umformungsschritte (Konversionen) in eine Normalform gebracht werden kann. Diese Normalform zeichnet sich dadurch aus, daß eine Herleitung in Normalform keine "Umwege" enthält, genauer, daß es nicht mehr vorkommen kann, daß eine Beseitigungsregel unmittelbar auf eine Einführungsregel folgt. Herleitungen in Normalform haben besonders angenehme Eigenschaften, aus denen sich viel ablesen läßt. Weiter konstruieren wir die sogenannte lange β–Normalform durch einen zusätzlichen Umformungsschritt, die η–Expansion.

Für die Untersuchungen dieses Kapitels ist es bequem, folgendes zu vereinbaren.

- Unter Termen verstehen wir sowohl Herleitungsterme als auch gewöhnliche Terme. $M, N, K, \ldots$ stehen für Terme in diesem Sinn.
- $x, y, z \ldots$ stehen sowohl für Annahmenvariablen als auch für gewöhnliche Variablen.
- Terme, die sich nur durch die Benennung ihrer gebundenen Variablen unterscheiden, werden identifiziert.
- $\rho, \sigma, \tau \ldots$ stehen für Formeln und ι für atomare Formeln oder $\bot$. $\rho \times \sigma$ steht für eine Konjunktion, und $\rho \to \sigma$ sowohl für eine Implikation als auch für eine Allformel. $\to$ wird rechtsassoziativ verwendet, und $\times$ linksassoziativ. Ferner hat $\times$ eine höhere Präzedenz als $\to$.

Wir definieren jetzt eine Konversionsrelation $M \to_0 M'$ zwischen Termen. Da wir Paar– und Komponentenbildung zugelassen haben, betrachten wir hier zusätzlich zur β–Konversion auch die η–Konversion.

Definition. *$M \to_0 M'$ wird definiert durch*

$$(\lambda x\, M)N \to_0 M[N/x]. \qquad (\beta)$$

$$\lambda x.Mx \to_0 M, \text{ falls } x \notin \mathrm{FV}(M) \text{ bzw. } x \notin \mathrm{FA}(M). \qquad (\eta)$$

$$\pi_i\langle M_0, M_1\rangle \to_0 M_i \text{ für } i = 0, 1. \qquad (\beta_{\times,i})$$

$$\langle \pi_0(M), \pi_1(M)\rangle \to_0 M. \qquad (\eta_\times)$$

Ein Term M heißt β–konvertierbar (bzw. η–konvertierbar), wenn er die Form einer linken Seite von (β) oder $(\beta_{\times,i})$ (bzw. (η) oder $(\eta_\times)$) hat. Solche Terme nenne man auch β–Redex bzw. η–Redex (für reducible expression).

Aus $\to_0$ erhält man eine Reduktionsrelation $\to$ (auch Einschrittreduktion genannt und oft mit $\to_{\beta\eta}$ bezeichnet) durch die folgende Definition. $M \to M'$ besagt, daß M' aus M durch Konversion genau eines Teilterms entsteht.

Definition. *$M \to M'$ wird induktiv definiert durch*

$$
\begin{array}{lr}
M \to_0 M' \implies M \to M'. & \\
M \to M' \implies \lambda x\, M \to \lambda x\, M'. & (+) \\
M \to M' \implies MN \to M'N. & (-_0) \\
N \to N' \implies MN \to MN'. & (-_1) \\
M \to M' \implies \langle M, N\rangle \to \langle M', N\rangle. & (+_{\times,0}) \\
N \to N' \implies \langle M, N\rangle \to \langle M, N'\rangle. & (+_{\times,1}) \\
M \to M' \implies \pi_i(M) \to \pi_i(M') \text{ für } i = 0, 1. & (-_{\times,i})
\end{array}
$$

Definition. *Ein Term M heißt in $\beta\eta$–Normalform, wenn er keinen β– oder η–konvertierbaren Teilterm besitzt.*

Ein Term M ist also in $\beta\eta$–Normalform genau dann, wenn es keinen Term M' gibt mit $M \to M'$. Wir zeigen jetzt, daß $\to$ terminierend ist, d.h. daß jede Reduktionsfolge nach endlich vielen Schritten abbricht. Unter einer *Reduktionsfolge*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

verstehen wir eine (endliche oder unendliche) Folge von Termen, wobei M_{i+1} aus M_i durch eine β– oder η–Konversion eines Teilterms entsteht, also $M_i \to M_{i+1}$. Wir schreiben $M \to^* M'$ (bzw. $M \to^+ M'$), wenn M' Glied einer mit M beginnenden Reduktionsfolge (bzw. mindestens zweigliedrigen Reduktionsfolge) ist. $\to^*$ ist also der reflexive transitive Abschluß von $\to$.

5.3.1 Gegenbeispiele

Wir wollen zunächst anhand einiger Gegenbeispiele zeigen, daß es nicht selbstverständlich ist, daß gewisse naheliegende Vereinfachungsschritte an Herleitungen terminieren. Das folgende Beispiel stammt von Ekman [5]. Es entsteht aus dem naheliegenden Beweis von $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$, wenn das Falsum $\bot$ durch q ersetzt.

$$
\dfrac{\dfrac{p \to p \to q \qquad \dfrac{(p \to q) \to p \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \to q \quad p}{p \to q} \quad p}{q}}{p \to q\ (*)}}{p}}{p \to q\ (*)} \qquad \dfrac{(p \to q) \to p \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \to q \quad p}{p \to q} \quad p}{q}}{p \to q}}{p}}{q}
$$

Der zugehörige Herleitungsterm ist

$$u(v\, \lambda w.uww)(v\, \lambda w.uww).$$

In dieser Herleitung kann man offenbar folgenden Vereinfachungsschritt durchführen. Zwischen den beiden mit $(*)$ markierten Vorkommen von $p \to q$ liegt keine $\to^+$–Regel. Man kann also den dazwischen liegenden Teil herauskürzen und erhält die folgende Herleitung.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \to q \quad p}{p \to q} \quad p}{q}}{p \to q\ (*)} \qquad \dfrac{(p \to q) \to p \qquad \dfrac{\dfrac{p \to p \to q \quad p}{p \to q} \quad p}{q}}{p \to q}}{p}$$

Der zugehörige Herleitungsterm ist

$$(\lambda w.uww)(v\,\lambda w.uww).$$

In der jetzt entstandenen Herleitung ist offenbar eine β–Konversion möglich, da hier auf eine Einführungsregel $\to^+$ (für die mit $(*)$ markierte Formel $p \to q$) unmittelbar eine Beseitigungsregel folgt. Man kann also die rechte mit p endende Teilherleitung für die gebundenen Annahmen p links einsetzen und so auf die Regel $\to^+$ verzichten. Die entstehende Herleitung ist dann genau diejenige, mit der wir begonnen haben! Dies sieht man auch an dem Herleitungsterm, denn eine β–Konversion liefert

$$(\lambda w.uww)(v\,\lambda w.uww) \to_0 u(v\,\lambda w.uww)(v\,\lambda w.uww),$$

also den ursprünglichen Herleitungsterm.

Ein Gegenbeispiel für die klassische Logik wurde von Hirokawa angegeben. Er verwendet dabei einen Spezialfall der Peirce–Formel, nämlich

$$P\colon (\neg A \to A) \to A.$$

Die allgemeine Peirce–Formel ergibt sich daraus, wenn man das Falsum $\bot$ in $\neg A$ durch eine beliebige Formel B ersetzt. Für Herleitungen mit P ist die folgende Konversionsregel korrekt.

$$\dfrac{\neg A \qquad \dfrac{P\colon (\neg A \to A) \to A \quad \neg A \to A}{A}}{\bot} \quad \to_0 \quad \dfrac{\neg A \qquad \dfrac{\neg A \to A \quad \neg A}{A}}{\bot}$$

In Termschreibweise:

$$M(PN) \to_0 M(NM).$$

Um das Gegenbeispiel zu formulieren verwenden führen wir einige Abkürzungen ein. Sei $K := \lambda x \lambda y\, x$ nnd $N := \lambda z.zw$ mit einem freien Parameter w. Beachte daß eine korrekte Typisierung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &P\colon ((\bot \to \bot) \to \bot) \to \bot,\\ &K\colon \bot \to \bot \to \bot,\\ &N\colon (\bot \to \bot) \to \bot,\\ &w\colon \bot. \end{aligned}$$

Das Gegenbeispiel ist dann $K(PN)(PN)$, denn es gilt

$$\begin{aligned} K(PN)(PN) &\to K(PN)[NK(PN)] \\ &\to K(PN)[K(PN)w] \\ &\to K(PN)(PN) \end{aligned}$$

oder expliziter

$$\begin{aligned} (\lambda x, y.x)(P(\lambda z.zw))(P(\lambda z.zw)) &\to (\lambda x, y.x)(P(\lambda z.zw))[(\lambda z.zw)\{(\lambda x, y.x)(P(\lambda z.zw))\}] \\ &\to (\lambda x, y.x)(P(\lambda z.zw))[(\lambda x, y.x)(P(\lambda z.zw))w] \\ &\to (\lambda x, y.x)(P(\lambda z.zw))[P(\lambda z.zw)]. \end{aligned}$$

Man ist also wieder bei dem alten Term angekommen.

5.3.2 Normalisierung

Zum Beweis, daß $\to$ terminierend ist, verwenden wir eine auf W.W. Tait zurückgehende Methode, die auf der Einführung von sogenannten *starken Berechenbarkeitsprädikaten* beruht. Wir stellen den Beweis hier in einer Form dar, die anschauliche Argumente mit Reduktionsfolgen vermeidet und deshalb für eine Formalisierung in einer Theorie induktiver Definitionen besonders geeignet ist.

Wir beginnen mit einer Definition des Begriffs *stark normalisierbar* durch strikt positive Induktion.

> Falls M' stark normalisierbar ist für alle M' mit $M \to M'$, so ist auch M stark normalisierbar.

Offenbar ist M stark normalisierbar genau dann, wenn jede mit M beginnende Reduktionsfolge nach endlich vielen Schritten abbricht. Beweis: $\Longrightarrow$. Induktion über die Definition von stark normalisierbar. Man betrachte eine von M ausgehende Reduktionsfolge und darin das erste Redukt M'. Die IH für M' liefert die Behauptung. $\Longleftarrow$. Nach dem Lemma von König ist der Reduktionsbaum endlich. Der Beweis ergibt sich sofort durch Induktion nach der Höhe des Reduktionsbaums. Man kann die Verwendung des Lemmas von König auch vermeiden und wie folgt argumentieren. Annahme: M ist nicht stark normalisierbar. Sei $M_0 := M$, $M_{n+1} := min\{\, N \mid M_n \to N \wedge N$ nicht stark normalisierbar $\}$, wobei die Minimalität bzgl. der Gödelnummern der Terme gewählt wird (um das Auswahlaxion zu vermeiden). Durch Induktion folgt, daß M_n ist nicht stark normalisierbar ist, und ferner $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$, also ein Widerspruch.

Wir notieren einige im folgenden benutzte Eigenschaften des Begriffs stark normalisierbar. Für die folgenden Überlegungen ist es bequem, $M0$ für $\pi_0(M)$ und $M1$ für $\pi_1(M)$ zu schreiben.

(1) Sind $\vec{M}$ stark normalisierbar oder $0, 1$, so ist auch $x\vec{M}$ stark normalisierbar.

Beweis. Induktion nach der Definition von stark normalisierbar für $\vec{M}$. Sei $x\vec{M} \to N$ beliebig. Es genügt zu zeigen, daß N stark normalisierbar ist. Aus $x\vec{M} \to N$ folgt $N \equiv x\vec{M'}$, wobei $\vec{M'}$ entsteht durch Ersetzen eines M_i durch M_i' mit $M_i \to M_i'$. Zu zeigen ist, daß $x\vec{M'}$ stark normalisierbar ist. Dies folgt aber aus der IH für $\vec{M'}$.

(2) Ist Mx stark normalisierbar, so auch M.

Beweis. Induktion nach der Definition von stark normalisierbar für Mx. Sei $M \to M'$ beliebig. Es genügt zu zeigen, daß M' stark normalisierbar ist. Aus $M \to M'$ folgt $Mx \to M'x$. Aus der IH für Mx folgt dann, daß $M'x$ stark normalisierbar ist.

(3) Ist $M0$ oder $M1$ stark normalisierbar, so auch M.

Beweis. Wie eben.

Jetzt definieren wir die starken Berechenbarkeitsprädikate durch Induktion über den Typ ρ eines Terms M^ρ wie folgt.

- M^ι ist stark berechenbar, wenn M^ι stark normalisierbar ist.
- $M^{\rho\to\sigma}$ ist stark berechenbar, wenn für jedes stark berechenbare N^ρ auch $(MN)^\sigma$ stark berechenbar ist.
- $M^{\rho\times\sigma}$ ist stark berechenbar, wenn sowohl $\pi_0(M)^\rho$ als auch $\pi_1(M)^\sigma$ stark berechenbar sind.

Ein Term M heißt *stark berechenbar unter Substitution*, wenn für beliebige stark berechenbare Terme $\vec{N}$ auch $M[\vec{N}]$ stark berechenbar ist.

Wir notieren einige im folgenden benutzte Eigenschaften des Begriffs stark berechenbar.

(4) M ist stark berechenbar genau dann, wenn $M\vec{N}$ stark berechenbar ist für alle $\vec{N}$, die stark berechenbar oder $0, 1$ sind.

Beweis. Induktion nach der Länge von $\vec{N}$.

Lemma 3.2.1. *a. Jeder stark berechenbare Term M^ρ ist stark normalisierbar.*

b. Sind $\vec{M}$ stark normalisierbar oder 0 oder 1, so ist $(x\vec{M})^\rho$ stark berechenbar.

Beweis durch simultane Induktion über den Typ ρ. *Fall ι.* a. Nach Definition. b. Nach (1).

Fall $\rho \to \sigma$. a. Sei $M^{\rho\to\sigma}$ stark berechenbar. Nach IHb (mit $\vec{M}$ leer) und der Definition starken Berechenbarkeit ist $(Mx)^\sigma$ stark berechenbar. Nach IHa ist dann Mx

stark normalisierbar. Nach (2) ist dann auch M stark normalisierbar. b. Betrachte $(x\vec{M})^{\rho\to\sigma}$ mit $\vec{M}$ stark normalisierbar oder $0, 1$. Sei N^ρ stark berechenbar. Zu zeigen ist, daß $(x\vec{M}N)^\sigma$ stark berechenbar ist. Nach IHa ist aber N stark normalisierbar, also nach IHb $x\vec{M}N$ stark berechenbar.

Fall $\rho\times\sigma$. a. Sei $M^{\rho\times\sigma}$ stark berechenbar. Dann ist nach Definition z.B. $\pi_0(M)^\rho$ stark berechenbar und also nach IHa auch stark normalisierbar. Nach (3) ist dann auch M stark normalisierbar. b. Wie im Fall $\rho\to\sigma$. □

Gilt $M\to M'$ und ist M stark normalisierbar, so nach Definition der starken Normalisierbarkeit auch M'. Wir zeigen jetzt, daß die entsprechende Aussage auch für starke Berechenbarkeit richtig ist.

Lemma 3.2.2. *Gilt $M\to M'$ und ist M stark berechenbar, so auch M'.*

Beweis. Wir verwenden (4). Sei $\vec{N}$ eine Liste stark berechenbarer Terme oder 0 oder 1, so daß $M\vec{N}$ einen Grundtyp besitzt. Dann ist $M\vec{N}$ stark berechenbar nach (4), also auch stark normalisierbar. Ferner gilt $M\vec{N}\to M'\vec{N}$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit ist dann $M'\vec{N}$ stark normalisierbar. Also ist nach (4) M' stark berechenbar.□

Lemma 3.2.3. *Sei N stark normalisierbar. Ist dann $M[N]\vec{L}$ stark normalisierbar und von einem Grundtyp, so auch $(\lambda x\,M)N\vec{L}$.*

Beweis durch Induktion nach der Definition der starken Normalisierbarkeit für N und $M[N]\vec{L}$. Dazu betrachten wir alle Redukte K von $(\lambda x\,M)N\vec{L}$. Offenbar genügt es zu zeigen, daß jedes solche K stark normalisierbar ist.

Fall $K\equiv M[N]\vec{L}$, d.h. es liegt eine äußere β–Konversion oder η–Konversion vor. Im Fall einer η–Konversion hat man $\lambda x\,M\equiv\lambda x\,M'x\to_\eta M'$, also

$$(\lambda x\,M)N\vec{L}\equiv(\lambda x\,M'x)N\vec{L}\to M'N\vec{L}\equiv M[N]\vec{L}.$$

Dann ist K stark normalisierbar nach Voraussetzung.

Fall $K\equiv(\lambda x\,M')N\vec{L}$ mit $M\to M'$. Dann gilt $M[N]\vec{L}\to M'[N]\vec{L}$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit ist dann $M'[N]\vec{L}$ stark normalisierbar. Nach IH ist dann K stark normalisierbar.

Fall $K\equiv(\lambda x\,M)N'\vec{L}$ mit $N\to N'$. Dann gilt $M[N]\vec{L}\to^* M[N']\vec{L}$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit (evtl. mehrmals angewandt) sind dann $M[N']\vec{L}$ und N' stark normalisierbar. Nach IH ist dann K stark normalisierbar.

Fall $K\equiv(\lambda x\,M)N\vec{L}'$ mit $L_i\to L_i'$ für ein i und $L_j=L_j'$ für $j\neq i$. Dann gilt $M[N]\vec{L}\to M[N]\vec{L}'$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit ist dann $M[N]\vec{L}'$ stark normalisierbar. Nach IH ist dann K stark normalisierbar. □

Folgerung 3.2.4. *Ist $M[N]$ stark berechenbar für alle stark berechenbaren N, so ist auch $\lambda x\,M$ stark berechenbar.*

Beweis. Sei also $M[N]$ stark berechenbar für alle stark berechenbaren N. Zu zeigen ist, daß $\lambda x\, M$ stark berechenbar ist. Seien also N und $\vec{L}$ stark berechenbar (bzw. $0, 1$) und so, daß $(\lambda x\, M)N\vec{L}$ von einem Grundtyp ist. Zu zeigen ist, daß $(\lambda x\, M)N\vec{L}$ stark berechenbar ist. Da $M[N]$ nach Voraussetzung stark berechenbar ist, ist auch $M[N]\vec{L}$ stark berechenbar, also auch stark normalisierbar. Da nach Lemma 3.2.1.b N auch stark normalisierbar ist, folgt nach Lemma 3.2.3, daß $(\lambda x\, M)N\vec{L}$ stark normalisierbar und damit auch stark berechenbar ist. □

Lemma 3.2.5. *Sind $M_0\vec{L}_0$ und $M_1\vec{L}_1$ stark normalisierbar und von einem Grundtyp, so auch $\langle M_0, M_1\rangle i\vec{L}_i$.*

Beweis durch Induktion nach der Definition der starken Normalisierbarkeit für $M_0\vec{L}$ und $M_1\vec{L}$. Dazu betrachten wir alle Redukte K von $\langle M_0, M_1\rangle i\vec{L}_i$. Offenbar genügt es zu zeigen, daß jedes solche K stark normalisierbar ist.

Fall $K \equiv M_i\vec{L}_i$, d.h. es liegt eine äußere β– oder η–Konversion vor. (Im Fall einer $\eta_\times$–Konversion hat man $\langle M_0, M_1\rangle \equiv \langle M0, M1\rangle \to_{\eta_\times} M$, also $\langle M_0, M_1\rangle i\vec{L}_i \to_{\eta_\times} Mi\vec{L}_i \equiv M_i\vec{L}_i$). Dann ist K stark normalisierbar nach Voraussetzung.

Fall $K \equiv \langle M', M_1\rangle i\vec{L}_i$ mit $M \to M'$. Dann gilt $M_0\vec{L}_0 \to M'\vec{L}_0$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit ist dann $M'\vec{L}_0$ stark normalisierbar. Nach IH ist dann K stark normalisierbar.

Fall $K \equiv \langle M_0, M'\rangle i\vec{L}_1$ mit $M \to M'$. Dann gilt $M_1\vec{L}_1 \to M'\vec{L}_1$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit ist dann $M'\vec{L}_1$ stark normalisierbar. Nach IH ist dann K stark normalisierbar.

Fall $K \equiv \langle M_0, M_1\rangle i\vec{L}'_i$ mit $L_{ij} \to L'_{ij}$ für ein j und $L_{ik} = L'_{ik}$ für $k \neq j$. Dann gilt $M_i\vec{L}_i \to M_i\vec{L}'_i$. Aufgrund der Definition der starken Normalisierbarkeit ist dann $M_i\vec{L}'_i$ stark normalisierbar. Nach IH ist dann K stark normalisierbar. □

Folgerung 3.2.6. *Sind M_0, M_1 stark berechenbar, so auch $\langle M_0, M_1\rangle$.*

Beweis. Wie für Folgerung 3.2.4. □

Lamme 3.2.7. *Jeder Term M ist stark berechenbar unter Substitution.*

Beweis durch Induktion über M.

Fall x. Die Behauptung folgt aus Lemma 3.2.1.b.

Fall MN. Seien $\vec{K}$ stark berechenbar. Wir haben zu zeigen, daß $M[\vec{K}]N[\vec{K}]$ stark berechenbar ist. Dies ist aber offensichtlich richtig, denn nach IH sind sowohl $M[\vec{K}]$ als auch $N[\vec{K}]$ stark berechenbar.

Fall $\pi_0(M)$, $\pi_1(M)$. Ähnlich.

Fall $\lambda x\, M$. Seien $\vec{K}$ stark berechenbar. Wir haben zu zeigen, daß $\lambda x\, M[\vec{K}]$ stark berechenbar ist. Wir verwenden jetzt die Folgerung 3.2.4. Sei also N stark berechenbar. Nach IH für M ist dann auch $M[N, \vec{K}]$ stark berechenbar. Daraus ergibt sich nach Folgerung 3.2.4 die Behauptung.

Fall $\langle M, N\rangle$. Ähnlich, mit Folgerung 3.2.6. □

Aus Lemma 3.2.7 und Lemma 3.2.1 erhalten wir unmittelbar den

Satz 3.2.8. $\to$ *ist terminierend, d.h. jeder Term* M *ist stark normalisierbar.* □

Insbesondere terminiert dann auch jede nur mit den β–Konversionsregeln (β) und $(\beta_\times)$ gebildete Reduktionsfolge. Die dabei entstehende Normalform bezeichnet man als β–Normalform.

Dieser Beweis läßt sich übertragen auf Terme, die mit primitiven Rekursionsoperatoren (siehe dazu etwa Troelstra [22, 23] oder Schwichtenberg [15]), dem allgemeinen Rekursionsoperator oder Fixpunktoperator (siehe Plotkin [12]) oder dem beschränkten Fixpunktoperator (siehe Schwichtenberg/Wainer [17]) gebildet sind.

Man kann auch zeigen, daß die Normalform eindeutig bestimmt ist. Ein Beweis, der die auf W.W. Tait zurückgehende Technik der parallelen Reduktion verwendet und die zugehörigen Beweis noch einmal sehr vereinfacht, ist von Takahashi in [21] veröffentlicht worden.

5.3.3 Folgerungen aus der Normalisierung

Wir wollen jetzt einige Folgerungen aus der Tatsache ziehen, daß sich jede Herleitung in β–Normalform bringen läßt, und zu diesem Zweck die Form normaler Herleitungen genauer analysieren. Zunächst benötigen wir einige terminologische Vereinbarungen.

Mit $p, q \in \{0,1\}^*$ bezeichnen wir *Positionen* in einem Term M. [] sei die leere Liste, also die Wurzelposition, und $\mathrm{Pos}(M)$ sei die Menge der Positionen in M. Mit $p0$ und $p1$ bezeichnen wir die Verlängerung der Position p um 0 bzw. 1. Der Teilterm von M an der Position p wird mit M/p bezeichnet, und $M[N]_p$ entstehe aus M, indem man in M den Teilterm an der Position p durch N ersetzt. Wir schreiben $p \leq q$, wenn p Präfix oder Anfangsstück von q ist. p und q heißen *unabhängig*, geschrieben $p \parallel q$, wenn $p \not\leq q$ und $q \not\leq p$. Weiter sei

$$\mathrm{Leafpos}(M) := \{\, p \in \mathrm{Pos}(M) \mid M/p \text{ Variable oder Konstante} \,\},$$
$$\mathrm{Elimpos}(M) := \{\, p \in \mathrm{Pos}(M) \mid M/p \text{ durch Beseitigungsregel gebildet} \,\},$$
$$\mathrm{Intropos}(M) := \{\, p \in \mathrm{Pos}(M) \mid M/p \text{ durch Einführungsregel gebildet} \,\}.$$

Ferner definieren wir für jedes $p \in \mathrm{Elimpos}(M) \cup \mathrm{Leafpos}(M)$ die zugehörige Minimalposition durch

$$\mathrm{minpos}_M([]) := [].$$

$$\mathrm{minpos}_M(pi) := \begin{cases} \mathrm{minpos}_M(p), & \text{falls } i = 0 \text{ und } p \in \mathrm{Elimpos}(M); \\ pi, & \text{falls } i = 1 \text{ und } p \in \mathrm{Elimpos}(M), \text{ oder} \\ & p \in \mathrm{Intropos}(M). \end{cases}$$

Offenbar bildet minpos_M die Menge $\mathrm{Elimpos}(M) \cup \mathrm{Leafpos}(M)$ in sich ab. Wir setzen

$$\mathrm{Minpos}(M) := \{\, p \in \mathrm{Elimpos}(M) \cup \mathrm{Leafpos}(M) \mid \mathrm{minpos}_M(p) = p \,\}.$$

Schließlich definieren wir für jedes $p \in \mathrm{Pos}(M)$ die zugehörige Endposition durch

$$\mathrm{endpos}_M([]) := [].$$

$$\mathrm{endpos}_M(pi) := \begin{cases} \mathrm{endpos}_M(p), & \text{falls } p \in \mathrm{Intropos}(M), \text{ oder} \\ & i = 0 \text{ und } p \in \mathrm{Elimpos}(M); \\ pi, & \text{falls } i = 1 \text{ und } p \in \mathrm{Elimpos}(M). \end{cases}$$

Wir setzen

$$\mathrm{Endpos}(M) := \{\, p \in \mathrm{Pos}(M) \mid \mathrm{endpos}_M(p) = p \,\}.$$

Im Fall eines β–normalen Terms M entsprechen sich die Blattpositionen und die Minimalpositionen von M eineindeutig. Man beachte jedoch, daß zwei Minimalpositionen dieselbe Endposition liefern können, wie etwa in

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}.$$

Gegeben sei ein Term M und $p \in \mathrm{Leafpos}(M)$. Dann nennt man

$$\{\, q \in \mathrm{Pos}(M) \mid p \geq q \geq \mathrm{endpos}_M(p) \,\}$$

den durch die Blattposition p bestimmten *Zweig* in M. Insbesondere liegt $\mathrm{minpos}_M(p)$ auf dem durch p bestimmten Zweig. Im Fall $\mathrm{endpos}_M(p) = []$ spricht man von einem *Hauptzweig*. In einem β–normalen Term hat jeder Zweig $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ eine besonders übersichtliche Form: Alle Beseitigungsregeln müssen vor allen Einführungsregeln kommen.

Im Fall eines normalen Herleitungsterms wollen wir hieraus einige Schlußfolgerungen über die an den Positionen angehefteten Formeln ziehen. Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe.

Die Relation "A ist eine *Teilformel* von B" soll der reflexive transitive Abschluß der Relation "*unmittelbare Teilformel*" sein, die wie folgt definiert ist.

- A und B sind unmittelbare Teilformeln von $A \to B$,
- A und B sind unmittelbare Teilformeln von $A \wedge B$,
- $A[t/x]$ ist eine unmittelbare Teilformel von $\forall x A$.

Ferner benötigen wir den Begriff "A ist eine *strikt positive Teilformel* von B". Dies soll der reflexive transitive Abschluß der Relation "*unmittelbare strikt positive Teilformel*" sein, die wie folgt definiert ist.

- B ist eine unmittelbare strikt positive Teilformel von $A \to B$,
- A und B sind unmittelbare strikt positive Teilformeln von $A \wedge B$,
- $A[t/x]$ ist eine unmittelbare strikt positive Teilformel von $\forall x A$.

Sei jetzt d ein β–normaler Herleitungsterm, $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ ein Zweig in d, $p_m = \mathrm{minpos}_d(p_1)$ und A_i der Typ von d/p_i. Dann muß A_m eine strikt positive Teilformel aller A_i mit $i \neq m$ sein. Dieses A_m heißt die *Minimalformel* des Zweiges. Ferner ist jedes A_i mit $i \leq m$ eine strikt positive Teilformel von A_1, und jedes A_i mit $i \geq m$ ist eine strikt positive Teilformel von A_n.

Satz 3.3.1. *(Teilformel–Eigenschaft). Ist $d^B[u_1^{A_1}, \ldots, u_n^{A_n}]$ eine β–normale Herleitung und ist e^C eine Teilherleitung von d^B, so ist C eine Teilformel von B oder von einem A_i.*

Beweis durch Induktion über die Länge der Endposition eines Zweiges in d, wobei die eben erwähnten Eigenschaften von Zweigen in β–normalen Herleitung benötigt werden. □

Satz 3.3.2. *(Herbrand). Gilt $\forall \vec{x}_1 A_1, \ldots, \forall \vec{x}_m A_m \vdash B$ mit quantorenfreien $A_1, \ldots, A_m, B$, so findet man Terme $\vec{t}_{11}, \ldots, \vec{t}_{1n_1}, \ldots, \vec{t}_{m1}, \ldots, \vec{t}_{mn_m}$ mit*

$$A_1[\vec{t}_{11}], \ldots, A_1[\vec{t}_{1n_1}], \ldots, A_m[\vec{t}_{m1}], \ldots, A_m[\vec{t}_{mn_m}] \vdash B.$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise behandeln wir nur den Fall $\forall x A \vdash B$ mit quantorenfreien A, B. Aus der gegebenen Herleitung können wir eine normale Herleitung $d^B[u^{\forall x A}]$ konstruieren. Durch Induktion über die Länge der Endposition eines Zweiges zeigt man leicht, daß jeder Zweig mit einer Herleitung einer quantorenfreien Formel endet und beginnen muß mit der Regel $\forall^-$, d.h. mit $u^{\forall x A} t_i$, oder mit einer gebundenen Annahmevariablen v^C mit quantorenfreiem C. Man ersetzt im erstgenannten Fall die Teilherleitung $u^{\forall x A} t_i$ durch $v_i^{A[t_i]}$ mit einer neuen Annahmevariablen v_i. □

5.3.4 Eta–Expansion

Wir definieren jetzt eine η–Expansionsrelation $\to_{\eta-\exp}$ zwischen Termen. $M \to_{\eta-\exp} M'$ besagt, daß M' aus M durch η–Expansion eines Teilterms N entsteht, also durch Ersetzung von N durch $\lambda x.Nx$ bzw. durch $\langle \pi_0(N), \pi_1(N) \rangle$, wobei sichergestellt sein muß, daß dadurch kein neuer β–konvertibler Teilterm entsteht. Dies wird dadurch erreicht, daß solche η–Expansionen nur an Minimalpositionen erlaubt sind. Zum Beispiel läßt sich eine Variable F von einem Typ $(\rho \to \rho) \to \rho$ wie folgt η–expandieren:

$$F^{(\rho\to\rho)\to\rho} \to_{\eta-\exp} \lambda f^{\rho\to\rho}.Ff \to_{\eta-\exp} \lambda f.F(\lambda x.fx).$$

Definition. *$M \to_{\eta\text{–exp}} M'$ gilt genau dann, wenn es ein $p \in \mathrm{Minpos}(M)$ gibt, so daß mit $N = M/p$ der Typ von N zusammengesetzt ist und im Fall $\mathrm{typ}(N) = \rho \to \sigma$ gilt*

$$M' = M[\lambda x^{\rho}.Nx]_p$$

mit $x \notin \mathrm{FV}(N)$, sowie im Fall $\mathrm{typ}(N) = \rho \times \sigma$ gilt

$$M' = M[\langle \pi_0(N), \pi_1(N) \rangle]_p.$$

Man beachte, daß im Fall $M \to_{\eta\text{–exp}} M'$ der Term M' wieder in β–Normalform ist, falls M in β–Normalform ist.

Wir wollen jetzt für die η–Expansion einen Beweis der Terminierung angeben, der eine Abschätzung der maximalen Anzahl der Reduktionsschritte erlaubt. Für den Fall von Funktionstypen, also $N^{\rho\to\sigma} \mapsto \lambda x.Nx$, ist dies einfach. Im Fall eines Produkttyps, also $N^{\rho\times\sigma} \mapsto \langle \pi_0(N), \pi_1(N) \rangle$, findet jedoch eine Verdoppelung des Terms N statt, und man muß etwas sorgfältiger argumentieren. Dies wollen wir hier ausführen.

Für diesen Beweis der Terminierung von $\to_{\eta\text{–exp}}$ führen wir ein Maß $\mu(M)$ so ein, daß aus $M \to_{\eta\text{–exp}} M'$ folgt $\mu(M) > \mu(M')$. $\mu(M)$ wird definiert mit Hilfe einer Funktion $s_M(p)$, die jedem $p \in \mathrm{Elimpos}(M) \cup \mathrm{Leafpos}(M)$ die Summe der Längen der Typen aller Minimalpositionen zuordnet, die auf dem Weg von p zur Wurzel durchlaufen werden. Von dem Begriff der Länge $\lg(\rho)$ eines Typs ρ müssen wir nur wissen, daß gilt

$$\begin{aligned} \lg(\rho) + \lg(\sigma) &< \lg(\rho \to \sigma), \\ \lg(\rho), \lg(\sigma) &< \lg(\rho \times \sigma). \end{aligned}$$

Man kann also etwa $\lg(\rho)$ definieren als die Anzahl der Symbole $\to$ und $\times$ in ρ.

Definition. *Sei M in β–Normalform. Für jedes $p \in \mathrm{Elimpos}(M) \cup \mathrm{Leafpos}(M)$ definieren wir $s_M(p) \in \mathbb{N}$ durch*

$$s_M(p) := \begin{cases} \lg(\mathrm{typ}(M/\mathrm{minpos}_M(p))), & \text{falls } \mathrm{endpos}_M(p) = []; \\ s_M(q) + \lg(\mathrm{typ}(M/\mathrm{minpos}_M(p))), & \text{falls } \mathrm{endpos}_M(p) = qi. \end{cases}$$

Ferner sei

$$\mu(M) := \sum_{p \in \mathrm{Minpos}(M)} \omega^{s_M(p)},$$

wobei die Summe als natürliche Summe von Ordinalzahlen zu verstehen ist.

Bemerkung. Man kann an dieser Stelle die Verwendung von Ordinalzahlen vermeiden und stattdessen Multimengen verwenden, genauer die Fundiertheit von $(\mathcal{M}_\omega(N), \gg)$; siehe dazu [10]. Dann hat man statt $\mu(M)$ zu betrachten

$$\mu'(M) := \{\, s_M(p) \mid p \in \mathrm{Minpos}(M) \,\} \in \mathcal{M}_\omega(N).$$

Lemma 3.4.1. *Sei M in β–Normalform. Dann gilt*

$$M \to_{\eta\text{–exp}} M' \implies \mu(M) > \mu(M').$$

Beweis. Sei $M \to_{\eta\text{–exp}} M'$ bzgl. der Minimalposition p in M gebildet. Wir betrachten alle $q \in \mathrm{Minpos}(M')$ und unterscheiden mehrere Fälle. Gilt $q \not\geq p$, so ist auch $q \in \mathrm{Minpos}(M)$ und nach Definition gilt $s_{M'}(q) = s_M(q)$. Alle anderen $q \in \mathrm{Minpos}(M')$ haben p als Präfix.

Fall $\mathrm{typ}(M/p) = \rho \to \sigma$, also $M' = M[\lambda x^\rho.Nx]_p$. Dann sind die Minimalpositionen in M' mit p als Präfix gerade $p0$ (entspricht dem Teilterm Nx), $p01$ (entspricht x) und alle $p00qi$ mit $pqi \in \mathrm{Minpos}(M)$ (entsprechen den Minimalpositionen in N). Es gilt

$$\begin{aligned}
&s_{M'}(p0) < s_M(p), \text{ da } \lg(\sigma) < \lg(\rho \to \sigma),\\
&s_{M'}(p01) < s_M(p), \text{ da } \lg(\rho) + \lg(\sigma) < \lg(\rho \to \sigma),\\
&s_{M'}(p00qi) < s_M(pqi), \text{ da } \lg(\sigma) < \lg(\rho \to \sigma).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\mu(M') < \mu(M)$.

Fall $\mathrm{typ}(M/p) = \rho \times \sigma$, also $M' = M[\langle \pi_0(N), \pi_1(N)\rangle]_p$. Dann sind die Minimalpositionen in M' mit p als Präfix gerade $p0$ (entspricht dem Teilterm $\pi_0(N)$), $p1$ (entspricht dem Teilterm $\pi_1(N)$) und alle $p00qi$, $p10qi$ mit $pqi \in \mathrm{Minpos}(M)$ (entsprechen Minimalpositionen in N). Es gilt

$$\begin{aligned}
&s_{M'}(p0), s_{M'}(p1) < s_M(p), \text{ da } \lg(\rho), \lg(\sigma) < \lg(\rho \times \sigma),\\
&s_{M'}(p00qi), s_{M'}(p10qi) < s_M(pqi), \text{ da } \lg(\rho), \lg(\sigma) < \lg(\rho \times \sigma).
\end{aligned}$$

Daraus folgt wieder $\mu(M') < \mu(M)$. □

Bemerkung: Alternativ kann man auch ein Maß $\nu(M) < \omega^{\mathrm{rk}_{\mathrm{maxi}}(M)}$ mit einem nur von M abhängigen $\mathrm{rk}_{\mathrm{maxi}}(M) < \omega$ verwenden. Dazu definieren wir den Begriff des *Rangs* $\mathrm{rk}_M(p)$ einer Position $p \in \mathrm{Pos}(M)$ durch

$$\mathrm{rk}_M([]) := 0.$$

$$\mathrm{rk}_M(pi) := \begin{cases} \mathrm{rk}_M(p), & \text{falls } p \in \mathrm{Intropos}(M), \text{ oder} \\ & i = 0 \text{ und } p \in \mathrm{Elimpos}(M); \\ \mathrm{rk}_M(p) + 1, & \text{falls } i = 1 \text{ und } p \in \mathrm{Elimpos}(M). \end{cases}$$

$\mathrm{rk}_M(p)$ gibt also die Anzahl der Endpositionen an, die zwischen p und der Wurzel liegen. Offenbar bleibt bei jedem η–Expansionsschritt der maximale Rang $\mathrm{rk}_{\mathrm{maxi}}(M)$ aller Positionen in M gleich. Als Maßzahl $\nu(M)$ kann man deshalb wählen

$$\nu(M) := \sum_{p \in \mathrm{Minpos}(M)} \omega^{\mathrm{rk}_{\mathrm{maxi}}(M) - \mathrm{rk}_M(p)} \cdot \mathrm{lev}(\mathrm{typ}(M/p)).$$

Man sieht dann leicht, daß aus $M \to_{\eta\text{–exp}} M'$ folgt $\nu(M) > \nu(M')$. Man erhält also wieder, daß $\to_{\eta\text{–exp}}$ terminierend ist.

Definition. *Ein Term M heißt in langer Normalform, wenn er keinen β–konvertierbaren oder η–expandierbaren Teilterm besitzt.*

Eine lange Normalform eines Terms M kann man erhalten, indem man M zunächst β–normalisiert und anschließend η–expandiert. Man kann zeigen, daß die lange Normalform eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung. Man könnte auch β–Konversionen und η–Expansionen durcheinander anwenden wollen. Schreiben wir genauer $M \to_{\beta\eta-\mathrm{exp}} M'$, wenn M' aus M durch β–Konversion oder η–Expansion eines Teilterms entsteht. Auch $\to_{\beta\eta-\mathrm{exp}}$ ist terminierend. Ein Beweis (der auf Di Cosmo und Kesner [3, 4] basiert) ist in meinem Vorlesungsskript "Proof Theory" [16] ausgeführt.

5.4 Normalisierung für die Arithmetik mit der Omega–Regel

Wir werden in Kapitel 5.5 zeigen, daß für arithmetische Systeme **Z** kein Normalisierungssatz gilt, in dem Sinn daß es für jede Herleitung einer Formel A in **Z** eine andere Herleitung derselben Formel A in **Z** gibt, die nur Formeln einer Stufe kleiner oder gleich der Stufe von A verwendet. Der Grund dafür sind die Induktionsaxiome, die von beliebiger Stufe sein können.

Hier umgehen wir diese Schwierigkeit in einer etwas drastischen Art und Weise: Wir geben unsere bisherige Auffassung auf, daß alle Herleitungen endlich sein müssen, und ersetzen die Induktionsaxiome durch eine Regel mit unendlich vielen Prämissen, die sogenannte ω–Regel. Sie wurde zuerst von Hilbert vorgeschlagen und später von Lorenzen, Novikov und Schütte genauer studiert. Die ω–Regel erlaubt es, $\forall x A(x)$ aus $A(0), A(1), A(2), \cdots$ zu erschließen, also

$$\frac{\begin{array}{cccccc} \mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_0 & & \mathcal{D}_0 & \\ A(0) & A(1) & \cdots & A(i) & \cdots \end{array}}{\forall x A(x)}\ \omega.$$

Herleitung kann man dann als beschriftete unendliche (abzählbar verzweigte) Bäume auffassen. Wie im endlichen Fall besteht eine Beschriftung aus der hergeleiteten Formel und dem Namen der angewandten Regel. Da wir unendliche Herleitungen induktiv definieren, muß jede solche Herleitung fundiert sein, d.h. sie kann keinen unendlichen absteigenden Pfad enthalten.

Offenbar macht die ω–Regel auch die Regel $\forall$I der Alleinführung überflüssig. Wir können deshalb auf freie Objektvariablen verzichten.

Ferner ist klar, daß jede Herleitung in einem arithmetischen System **Z** in eine unendliche Herleitung mit der ω–Regel übersetzt werden kann; dies werden wir in Lemma 4.2 ausführen. Die entstehende unendliche Herleitung hat eine beachtenswerte Eigenschaft: in jeder Anwendung der ω–Regel sind die Schnittränge der unendlich vielen Teilherleitungen beschränkt, und auch die Mengen ihrer freien Annahmen sind durch eine endliche Menge beschränkt. Hierbei ist der *Schnittrang* einer Herleitung die kleinste Zahl $\geq$ der Stufe jeder Teilherleitung, die durch $\rightarrow$I als Hauptprämisse von $\rightarrow$E oder die durch die ω–Regel als Hauptprämisse von $\forall$E gebildet wurde. Unter der *Stufe* einer Herleitung verstehen wir die Stufe ihres Typs, d.h. der von ihr hergeleiteten Formel. Eine unendliche Herleitung nennen wir normal, wenn ihr Schnittrang 0 ist, und wir werden unten zeigen, daß jede (möglicherweise unendliche) Herleitung von endlichem Schnittrang in eine Herleitung mit Schnittrang 0 umgeformt werden kann. Die entstehende normale Herleitung wird immer noch i.a. unendlich sein; man könnte also meinen, daß dieses Resultat nutzlos ist. Es wird sich jedoch zeigen, daß wir die Tiefe der entstehenden Herleitung in einer informativen Art und Weise beschränken können, und dies wird uns in Kapitel 5.5 in die Lage versetzen,

das gewünschte Resultat über die Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion zu erhalten. Dieses Programm wollen wir jetzt durchführen.

Wir führen die Systeme $\mathbf{Z}^\infty$ der ω–Arithmetik wie folgt ein. $\mathbf{Z}^\infty$ hat dieselbe Sprache und — abgesehen von den Induktionsaxiomen — dieselben Axiome wie $\mathbf{Z}$. Herleitungen in $\mathbf{Z}^\infty$ sind unendliche Objekte. Es ist nützlich, für sie eine Termbezeichnung zu verwenden; d, e, f bezeichnen solche (unendlichen) Herleitungsterme. Für unsere Zwecke genügt es, nur solche Herleitungen zu betrachten, deren Tiefe unterhalb von ε_0 beschränkt ist.

Wir definieren den Begriff "d ist eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$" (geschrieben $|d| \leq \alpha$) induktiv wie folgt.

(A). Jede Annahmenvariable u^A mit A geschlossen und jedes Axiom Ax^A ist eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$, für jedes α.

($\to$I). Ist d^B eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha_0 < \alpha$, so ist $(\lambda u^A d^B)^{A\to B}$ eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$.

($\to$E). Sind $d^{A\to B}$ und e^A Herleitungen der Tiefen $\leq \alpha_i < \alpha$ (i=1,2), so ist $(d^{A\to B} e^A)^B$ eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$.

(ω). Sind $d_i^{A(i)}$ Herleitungen der Tiefen $\leq \alpha_i < \alpha$ $(i < \omega)$, so ist $\langle d_i^{A(i)}\rangle_{i<\omega}^{\forall x A(x)}$ eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$.

($\forall$E). Ist $d^{\forall x A(x)}$ eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha_0 < \alpha$, so ist $(d^{\forall x A(x)} i)^{A(i)}$ eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$.

Man beachte, daß es in $\forall$E genügt, Zahlen statt Terme in den Nebenprämissen zu verwenden. Der Grund dafür ist, daß wir nur geschlossene Terme betrachten müssen, und solche Terme können wir hier mit Zahlen identifizieren. Der Schnittrang $\mathrm{cr}(d)$ einer Herleitung d ist wie folgt definiert.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cr}(u^A) := \mathrm{cr}(\mathrm{Ax}^A) := 0,\\
&\mathrm{cr}(\lambda u d) := \mathrm{cr}(d),\\
&\mathrm{cr}(d^{A\to B} e^A)^B := \begin{cases} \max(\mathrm{lev}(A\to B), \mathrm{cr}(d), \mathrm{cr}(e)), & \text{falls } d = \lambda u d',\\ \max(\mathrm{cr}(d), \mathrm{cr}(e)), & \text{sonst,}\end{cases}\\
&\mathrm{cr}(\langle d_i\rangle_{i<\omega}) := \sup_{i<\omega} \mathrm{cr}(d_i),\\
&\mathrm{cr}(d^{\forall x A(x)} j) := \begin{cases} \max(\mathrm{lev}(\forall x A(x)), \mathrm{cr}(d)), & \text{falls } d = \langle d_i\rangle_{i<\omega},\\ \mathrm{cr}(d), & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Offenbar ist $\mathrm{cr}(d) \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ für alle d. Für unsere Zwecke genügt es, nur Herleitungen mit endlichem Schnittrang zu betrachten, d.h. mit $\mathrm{cr}(d) \in \mathbb{N}$. Es wird auch genügen, nur Herleitungen mit endlich vielen freien Variablen zu betrachten. Wir verwenden die Bezeichnung $d[u_1^{A_1}, \ldots, u_n^{A_n}]$ für Herleitungen mit freien Annahmevariablen unter $u_1^{A_1}, \ldots, u_n^{A_n}$. Mit $|d|$ bezeichnen wir das kleinste α so daß $|d| \leq \alpha$.

Lemma 4.1. *Ist $|d[u, \vec{u}]| \leq \alpha$ und $|e[\vec{u}]| \leq \beta$ mit $\mathrm{cr}(d) = k$ und $\mathrm{cr}(e) = \ell$, so ist $d[e]$ eine*

Herleitung mit freien Annahmevariablen unter $\vec{u}$, von der Tiefe $|d[e]| \leq \beta + \alpha$ und von einem Schnittrang $\mathrm{cr}(d[e]) \leq \max(\mathrm{lev}(e), k, \ell)$.

Beweis. Einfache Induktion über die Tiefe von d. □

Unter Verwendung dieses Lemmas können wir jetzt unsere Systeme $\mathbf{Z}_k$ (d.h. Arithmetik mit Induktionsaxiomen beschränkt auf Formeln der Stufe $\leq k$) und $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}^\infty$ einbetten. In dieser Einbettung beziehen wir uns auf die Anzahl $n_I(d)$ von geschachtelten Anwendungen des Induktionsschemas innerhalb einer $\mathbf{Z}_k$–Herleitung d. $n_I(d)$ ist durch Induktion über d wie folgt definiert.

$$
\begin{aligned}
&n_I(u) := n_I(\mathrm{Ax}) := 0,\\
&n_I(\mathrm{Ind}) := 1,\\
&n_I(\mathrm{Ind}\, de) := \max(n_I(d), n_I(e) + 1),\\
&n_I(de) := \max(n_I(d), n_I(e)), \quad \text{falls } d \text{ nicht von der Form } \mathrm{Ind}\, d_0 \text{ ist},\\
&n_I(\lambda u d) := n_I(\lambda x d) := n_I(di) := n_I(d).
\end{aligned}
$$

Lemma 4.2. *Sei eine $\mathbf{Z}_k$–Herleitung in langer Normalform gegeben mit $\leq m$ geschachtelten Anwendungen des Induktionsschemas, d.h. von*

$$A(0) \to \forall x[A(x) \to A(\mathrm{suc}(x))] \to \forall x A(x), \qquad \mathrm{Ind}(A, x)$$

alle mit $\mathrm{lev}(A) \leq k$. *Wir betrachten Teilherleitungen $d[\vec{u}]\colon B$ nicht von der Form* $\mathrm{Ind}(A, x)$ *oder* $\mathrm{Ind}(A, x)d_0$. *Für jede solche Teilherleitung konstruieren wir $d^\infty[\vec{u}]\colon B$ in $\mathbf{Z}^\infty$ mit $|d^\infty| < \omega^{m+1}$ und* $\mathrm{cr}(d^\infty) \leq k$, *und so daß d^∞ eine Abstraktion ist genau dann, wenn dies auch für d gilt.*

Beweis durch Rekursion über solche Teilherleitungen d.

Fall u oder Ax. Dann können wir wieder u oder Ax nehmen.

Fall $\mathrm{Ind}\, d(\lambda x, v\, e)$. Nach IH haben wir d^∞ und e^∞. (Man beachte, daß weder d noch e eine der verbotenen Formen Ind oder $\mathrm{Ind}\, d_0$ haben kann, da beide in langer Normalform sind). Sei

$$(\mathrm{Ind}\, d(\lambda x, v\, e))^\infty := \langle d^\infty, e^\infty[0, d^\infty], e^\infty[1, e^\infty[0, d^\infty]], \ldots \rangle.$$

Nach IH ist $|e^\infty| \leq \omega^{m-1} \cdot k$ für ein $k < \omega$ und $|d^\infty| \leq \omega^m \cdot \ell$ für ein $\ell < \omega$. Nach Lemma 4.2 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&|e^\infty[0, d^\infty]| \leq \omega^m \cdot \ell + \omega^{m-1} \cdot k,\\
&|e^\infty[1, e^\infty[0, d^\infty]]| \leq \omega^m \cdot \ell + \omega^{m-1} \cdot 2k
\end{aligned}
$$

und so weiter, schließlich also

$$|(\mathrm{Ind}\, d(\lambda x, v\, e))^\infty| \leq \omega^m \cdot (\ell + 1).$$

Für den Schnittrang ergibt sich nach IH $\mathrm{cr}(d^\infty), \mathrm{cr}(e^\infty) \leq k$ und deshalb

$$\mathrm{cr}(e^\infty[0, d^\infty]) \leq \max(\mathrm{lev}(A(0)), \mathrm{cr}(d^\infty), \mathrm{cr}(e^\infty)) \leq k,$$
$$\mathrm{cr}(e^\infty[1, e^\infty[0, d^\infty]]) \leq \max(\mathrm{lev}(A(1)), k, \mathrm{cr}(e^\infty)) = k$$

und so weiter, schließlich also

$$\mathrm{cr}((\mathrm{Ind}\, d(\lambda x, v\, e))^\infty) \leq k.$$

Fall de mit d nicht von der Form Ind oder $\mathrm{Ind}\, d_0$. Nach IH haben wir d^∞ und e^∞. Da de Teilherleitung einer normalen Herleitung ist, kann d und also auch d^∞ keine Abstraktion sein. Also ist $(de)^\infty := d^\infty e^\infty$ normal und $\mathrm{cr}(d^\infty e^\infty) = \max(\mathrm{cr}(d^\infty), \mathrm{cr}(e^\infty)) \leq k$. Ferner haben wir offenbar $|d^\infty e^\infty| < \omega^{m+1}$.

Die *Fälle* $\lambda x\, d$ und di lassen sich ähnlich behandeln. □

Eine Herleitung heißt *konvertierbar*, wenn sie von der Form $(\lambda u\, d)e$ oder $\langle d_i\rangle_{i<\omega} j$ ist. Sie kann dann konvertiert werden in $d[e]$ bzw. d_j. Hierbei entsteht $d[e]$ aus d durch Substituieren von e für alle freien Vorkommen von u in d. Eine Herleitung heißt *normal*, wenn sie keine konvertible Teilherleitung enthält. Man beachte, daß eine Herleitung genau dann normal ist, wenn sie den Schnittrang 0 hat.

Eine Herleitung heißt *einfache Anwendung*, wenn sie von der Form $d_0 d_1 \ldots d_m$ mit d_0 eine Annahmevariable oder ein Axiom ist.

Wir wollen jetzt eine Operation definieren, die durch wiederholte Konversionen eine gegebene Herleitung in eine normale Herleitung umformt, wobei die Endformel erhalten bleibt und keine zusätzlichen freien Annahmevariablen eingeführt werden. Die übliche Methode zum Erreichen dieses Ziels muß hier an unsere spezielle Situation unendlicher Herleitungen angepaßt werden. Wir verwenden ein besonders einfaches Argument, das auf Tait [20] zurückgeht.

Lemma 4.3. *Zu jeder Herleitung $d[\vec{u}]^A$ einer Tiefe $\leq \alpha$ und vom Schnittrang $k+1$ findet man eine Herleitung $d^k[\vec{u}]^A$ einer Tiefe $\leq 2^\alpha$ und vom Schnittrang $\leq k$.*

Beweis durch Induktion über α. Wir beschränken uns auf den Fall einer Herleitung der Form de mit $|d| \leq \alpha_1 < \alpha$ und $|e| \leq \alpha_2 < \alpha$, die keine einfache Anwendung ist. Zunächst betrachten wir den Unterfall, in dem $d^k = \lambda u\, d_1$ und $\mathrm{lev}(d) = k+1$. Dann gilt $\mathrm{lev}(e) \leq k$ nach Definition der Stufen (die Stufe einer Herleitung war definiert als die Stufe der hergeleiteten Formel). Folglich hat $d_1[e^k]$ einen Schnittrang $\leq k$ nach Lemma 4.1. Ferner hat ebenfalls nach Lemma 4.1 $d_1[e^k]$ eine Tiefe $\leq 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_1} \leq 2^{\max(\alpha_2, \alpha_1)+1} \leq 2^\alpha$. Also können wir $(de)^k$ als $(d_1)[e^k]$ definieren. Sind wir nicht in dem obigen Unterfall, so können wir einfach $(de)^k := d^k e^k$ setzen. Diese Herleitung hat offenbar eine Tiefe $\leq 2^\alpha$. Sie hat auch einen Schnittrang $\leq k$, was man wie folgt einsieht. Im Fall $\mathrm{lev}(d) \leq k+1$ sind wir fertig. Aber $\mathrm{lev}(d) \geq k+2$ ist unmöglich, da wir angenommen haben, daß de keine einfache Anwendung ist. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 4.4. *(Normalisierung für $\mathbf{Z}^\infty$). Für jede Herleitung $d[\vec{u}]^A$ einer Tiefe $\leq \alpha$ und vom Schnittrang $\leq k$ findet man eine normale Herleitung $d^*[\vec{u}]^A$ einer Tiefe $\leq 2_k^\alpha$, wobei $2_0^\alpha := \alpha$, $2_{m+1}^\alpha = 2^{2_m^\alpha}$.* □

5.5 Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion

Wir verwenden jetzt die Technik der Normalisierung für die Arithmetik mit der ω–Regel zu einem Beweis, daß das Axiom der transfiniten Induktion bis ε_0 in $\mathbf{Z}$ unbeweisbar ist, also

$$\mathbf{Z} \nvdash \forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to \forall x\, Px$$

mit einem Relationssymbol P, und daß die transfinite Induktion bis ω_{k+1} unbeweisbar ist in $\mathbf{Z}_k$, also

$$\mathbf{Z}_k \nvdash \forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to (\forall x \prec \omega_{k+1})Px.$$

Offenbar genügt es, die Unbeweisbarkeit für auf der klassischen Logik basierende arithmetische Systeme zu zeigen. Wir können also annehmen, daß wir die klassischen Versionen (PA2^c), (1^c) und (2^c) der Axiome aus Kapitel 5.2 verwendet haben.

Unser Beweis basiert auf einer Idee von Schütte, nämlich eine sogenannte *Progressionsregel* zu dem unendlichen System hinzuzunehmen. Diese Regel erlaubt es, Pj (wobei j eine beliebige Zahl ist) aus allen Pi für $i \prec j$ zu erschließen.

Eine Herleitung in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ einer Tiefe $\leq \alpha$ und vom Schnittrang $\leq k$ wird erzeugt durch die induktiven Klauseln von Kapitel 5.4 und die zusätzliche Klausel

(Prog). Sind für alle $i \prec j$ Herleitungen d_i^{Pi} der Tiefe $\leq \alpha_i < \alpha$ bereits konstruiert, so ist $\langle d_i^{Pi}\rangle_{i\prec j}^{Pj}$ eine Herleitung der Tiefe $\leq \alpha$.

Den Schnittrang dieser Herleitung definieren wir durch $\mathrm{cr}(\langle d_i\rangle_{i\prec j}) := \sup_{i\prec j} \mathrm{cr}(d_i)$.

Da die Progressionsregel nur Herleitungen atomarer Formeln betrifft, verändert sie nicht die Schnittränge von Herleitungen. Folglich überträgt sich der Normalisierungsbeweis für $\mathbf{Z}^\infty$ unverändert auf $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$. Insbesondere haben wir

Lemma 5.1. *Für jede Herleitung $d[\vec{u}]^A$ in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ einer Tiefe $\leq \alpha$ und vom Schnittrang $\leq k+1$ findet man eine Herleitung $d^k[\vec{u}]^A$ in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ einer Tiefe $\leq 2^\alpha$ und vom Schnittrang $\leq k$.* □

Wir zeigen jetzt, daß man aus der Progressionsregel für P leicht die Progressivität von P herleiten kann.

Lemma 5.2. *Es gibt eine normale Herleitung von $\forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px]$ in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ der Tiefe 5.*

Beweis.

$$\dfrac{\dfrac{\dots \quad \dfrac{\dfrac{(\forall y \prec j)Py}{i \prec j \to Pi}\,\forall\mathrm{E} \quad i \prec j}{Pi}\,{\to}\mathrm{E} \quad \dots \quad (\text{alle } i \prec j)}{\dfrac{Pj}{(\forall y \prec j)Py \to Pj}\,{\to}\mathrm{I}}\,\mathrm{Prog} \quad \dots \quad (\text{alle } j)}{\forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px]}\,\omega \qquad \square$$

Die wesentliche Beobachtung ist jetzt, daß eine normale Herleitung von $P\ulcorner\beta\urcorner$ im wesentlichen eine Tiefe mindestens β erfordert. Um jedoch eine scharfe Abschätzung für die Teilsysteme $\mathbf{Z}_k$ zu erhalten, können wir Lemma 5.1 nicht bis herunter zum Schnittrang 0 (also bis zur Normalform) anwenden, sondern wir müssen bereits beim Schnittrang 1 aufhören. Derartige Herleitungen, also solche vom Schnittrang ≤ 1, nennen wir *quasinormal*; sie lassen sich ebenfalls leicht analysieren.

Wir beginnen mit einem Beweis, daß jede quasinormale Herleitung einer quantorenfreien Formel sich stets ohne Erhöhung ihres Schnittrangs oder ihrer Tiefe in eine quasinormale Herleitung derselben Formel umformen läßt, die

1. die ω–Regel nicht benutzt, und
2. die Regel $\forall$E höchstens in Anfangsteilen von mit einem Axiom beginnenden Zweigen enthält.

Man beachte hierbei, daß alle unsere Axiome von der Form $\forall\vec{x}A$ sind mit A quantorenfrei.

Ferner benötigen wir den Begriff einer *Quasiteilformel*, der induktiv durch die folgenden Klauseln definiert ist.

- A, B sind Quasiteilformeln von $A \to B$;
- $A(i)$ ist eine Quasiteilformel von $\forall xA(x)$, für jede Zahl i;
- Ist A eine Quasiteilformel von B und C eine atomare Formel, so sind $C \to A$ und $\forall xA$ Quasiteilformeln von B;
- Die Relation "... ist eine Quasiteilformel von ..." ist reflexiv und transitiv.

Zum Beispiel ist $Q \to \forall x(Px \to A)$ ist eine Quasiteilformel von $A \to B$.

Wir übertragen jetzt die Teilformeleigenschaft für normale Herleitungen und beweisen entsprechend eine Quasiteilformeleigenschaft für quasinormale Herleitungen.

Satz 5.3. *(Quasiteilformeleigenschaft). Ist $d^B[u_1^{A_1}, \dots, u_n^{A_n}]$ eine quasinormale Herleitung in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ und ist e^C eine Teilherleitung von d^B, so ist C eine Quasiteilformel von B oder von einem A_i.*

Beweis durch Induktion über die Länge der Endposition eines Zweiges in d. $\square$

Folgerung 5.4. *Sei d eine quasinormale Herleitung in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ einer Formel $\forall \vec{x} A$ aus quantorenfreien Annahmen, mit A quantorenfrei. Dann endet in d jeder Zweig einer Ordnung > 0 mit einer quantorenfreien Formel.*

Beweis. Andernfalls würde die Hauptprämisse der $\to$E–Regel, deren Nebenprämisse die Endformel dieses Zweiges ist, einen Quantor auf der linken Seite von $\to$ enthalten. Dies widerspricht dem Satz. □

Unser nächstes Ziel ist es, die ω–Regel zu eliminieren. Hierfür benötigen wir den Begriff einer *Instanz* einer Formel. Er ist induktiv wie folgt definiert.

- Ist B' Instanz von B und A quantorenfrei, so ist $A \to B'$ Instanz von $A \to B$.
- $A(i)$ ist Instanz von $\forall x A(x)$, für jede Zahl i.
- Die Relation "... ist eine Instanz von ..." ist reflexiv und transitiv.

Lemma 5.5. *Sei d eine quasinormale Herleitung in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ einer Formel A aus quantorenfreien Annahmen, wobei A kein $\forall$ auf der linken Seite eines $\to$ enthält. Dann findet man für jede quantorenfreie Instanz A' von A eine quasinormale Herleitung d' von A' aus denselben Annahmen und quantorenfreien Instanzen der Axiome so daß*

- *d' die ω–Regel nicht verwendet,*
- *d' die Regel $\forall$E höchstens in Anfangsteilen von mit einem Axiom beginnenden Zweigen enthält, und*
- *$|d'| \leq |d|$.*

Beweis durch Induktion über d. Wir unterscheiden Fälle entsprechend der letzten Regel in d.

Fall $\to$E.

$$\frac{A \to B \quad A}{B} \to\mathrm{E}$$

Nach Folgerung 5.4 muß A quantorenfrei sein. Sei B' eine quantorenfreie Instanz von B. Dann ist $A \to B'$ nach Definition eine quantorenfreie Instanz von $A \to B$. Die Behauptung folgt jetzt aus der IH.

Fall $\to$I.

$$\frac{B}{A \to B} \to\mathrm{I}$$

Jede Instanz von $A \to B$ hat die Form $A \to B'$ mit einer quantorenfreien Instanz B' von B. Also folgt die Behauptung aus der IH.

Fall $\forall$E.

$$\frac{\forall x A(x) \quad i}{A(i)} \forall\mathrm{E}$$

Wieder ist jede quantorenfreie Instanz von $A(i)$ auch eine quantorenfreie Instanz von $\forall x A(x)$, und die Behauptung folgt aus der IH. □

Eine Herleitung d in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ heißt $P\vec{\alpha}, \neg P\vec{\beta}$*–Widerlegung*, wenn $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ disjunkt sind und d eine Formel $\vec{A} \to B := A_1 \to \cdots \to A_k \to B$ herleitet, wobei $\vec{A}$ und die freien Annahmen in d wahre quantorenfreie Formeln ohne P sind oder unter $P^\ulcorner\alpha_1{}^\urcorner, \ldots, P^\ulcorner\alpha_m{}^\urcorner, \neg P^\ulcorner\beta_1{}^\urcorner, \ldots, \neg P^\ulcorner\beta_n{}^\urcorner$ vorkommen, und B eine falsche quantorenfreie Formel ohne P ist oder unter $P^\ulcorner\beta_1{}^\urcorner, \ldots, P^\ulcorner\beta_n{}^\urcorner$ vorkommt.

Lemma 5.6. *Sei d eine quasinormale $P\vec{\alpha}, \neg P\vec{\beta}$–Widerlegung. Dann ist*

$$\min(\vec{\beta}) \le |d| + \mathrm{lh}(\vec{\alpha}),$$

wobei $\mathrm{lh}(\vec{\alpha})$ *die Länge der Liste* $\vec{\alpha}$ *bezeichnet.*

Beweis durch Induktion über $|d|$. Nach Lemma 5.5 können wir annehmen, daß d die ω–Regel nicht enthält, und die Regel $\forall$E höchstens in Anfangsteilen von mit einem Axiom beginnenden Zweigen enthält. Wir unterscheiden Fälle entsprechend der letzten Regel in d.

Fall $\to$I. Nach unserer Definition von Widerlegungen folgt die Behauptung unmittelbar aus der IH.

Fall $\to$E. Dann ist $d = f^{C\to\vec{A}\to B} e^C$. Ist C eine wahre quantorenfreie Formeln ohne P oder unter $P^\ulcorner\alpha_1{}^\urcorner, \ldots, P^\ulcorner\alpha_m{}^\urcorner, \neg P^\ulcorner\beta_1{}^\urcorner, \ldots, \neg P^\ulcorner\beta_n{}^\urcorner$, so folgt die Behauptung aus der IH für f. Ist C eine falsche quantorenfreie Formeln ohne P oder unter $P^\ulcorner\beta_1{}^\urcorner, \ldots, P^\ulcorner\beta_n{}^\urcorner$, so folgt die Behauptung aus der IH für e. Ist $C \equiv P^\ulcorner\gamma^\urcorner$ mit γ nicht aus $\vec{\beta}$, so ist f eine quasinormale $P\gamma, P\vec{\alpha}, \neg P\vec{\beta}$–Widerlegung und die IH für f liefert

$$\min(\vec{\beta}) \le |f| + \mathrm{lh}(\vec{\alpha}) + 1 \le |d| + \mathrm{lh}(\vec{\alpha}).$$

Zu behandeln bleibt der Fall, daß C eine quantorenfreie Implikation ist, die P enthält. Dann ist $\mathrm{lev}(C) \ge 1$, also $\mathrm{lev}(C \to \vec{A} \to B) \ge 2$. Wegen $\mathrm{cr}(d) \le 1$ muß dann d eine mit einem Axiom beginnende einfache Anwendung sein. Unsere einzigen Axiome, die P enthalten können, sind $\mathrm{Eq}_P\colon \forall x, y(x = y \to Px \to Py)$ und $\mathrm{Stab}_P\colon \forall x(\neg\neg Px \to Px)$, und von diesen hat nur Stab_P die richtige Form. Also $f = \mathrm{Stab}_P{}^\ulcorner\gamma^\urcorner$ und deshalb $e\colon \neg\neg P^\ulcorner\gamma^\urcorner$. Aus $\mathrm{lev}(\neg\neg P^\ulcorner\gamma^\urcorner) = 2$, der Annahme $\mathrm{cr}(e) \le 1$ und wieder der Form unserer P enthaltenden Axiome folgt, daß e mit $\to$I endet, also $e = \lambda u^{\neg P^\ulcorner\gamma^\urcorner} e_0^\bot$ und damit insgesamt

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg P^\ulcorner\gamma^\urcorner \to P^\ulcorner\gamma^\urcorner \quad | f}{P^\ulcorner\gamma^\urcorner} \qquad \dfrac{\dfrac{[u\colon \neg P^\ulcorner\gamma^\urcorner]}{\bot \;|\, e_0}}{\neg\neg P^\ulcorner\gamma^\urcorner}}{P^\ulcorner\gamma^\urcorner}$$

Die Behauptung folgt jetzt aus der IH für e_0.

Fall ∀E. Nach Annahme befinden wir uns dann im Anfangsteil eines mit einem Axiom beginnenden Zweiges. Da d eine $P\vec{\alpha}, \neg P\vec{\beta}$–Widerlegung ist, muß das Axiom P enthalten. Das Gleichheitsaxiom $\mathrm{Eq}_P\colon \forall x, y(x = y \to Px \to Py)$ kann es nicht sein, da $\ulcorner\gamma\urcorner = \ulcorner\delta\urcorner \to P\ulcorner\gamma\urcorner \to P\ulcorner\delta\urcorner$ in keinem Fall ($\gamma = \delta$ oder $\gamma \neq \delta$) Endformel einer $P\vec{\alpha}, \neg P\vec{\beta}$–Widerlegung ist. Aus demselben Grund kommt auch das Stabilitätsaxiom $\mathrm{Stab}_P\colon \forall x(\neg\neg Px \to Px)$ nicht in Frage. Der Fall ∀E kann also nicht eintreten.

Fall $\mathrm{Prog}(P)$. Dann ist $d = \langle d_\delta^{P\ulcorner\delta\urcorner}\rangle_{\delta<\gamma}^{P\ulcorner\gamma\urcorner}$. Nach Annahme über d ist γ in $\vec{\beta}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\gamma = \beta_i := \min(\vec{\beta})$, denn andernfalls wäre die Prämissenherleitung $d_{\beta_i}\colon P\ulcorner\beta_i\urcorner$ eine quasinormale $P\vec{\alpha}, \neg P\vec{\beta}$–Widerlegung, auf die man die IH anwenden könnte. Sei $\varepsilon \leq \gamma$ minimal mit

$$\forall\delta(\varepsilon \leq \delta < \gamma \to \delta \in \vec{\alpha}).$$

Da $\vec{\alpha}$ endlich ist, kann es nur endlich viele solche δ geben, etwa $\varepsilon, \varepsilon+1, \ldots, \varepsilon+k-1$ mit $k \geq 0$. Sei $\vec{\eta}$ der Rest von $\vec{\alpha}$, also $\mathrm{lh}(\vec{\eta}) = \mathrm{lh}(\vec{\alpha}) - k$. Es genügt, $\varepsilon \leq |d| + \mathrm{lh}(\vec{\eta})$ zu zeigen, denn daraus folgt $\gamma = \varepsilon + k \leq |d| + \mathrm{lh}(\vec{\eta}) + k = |d| + \mathrm{lh}(\vec{\alpha})$. Ist nun ε eine Limeszahl, so ist für jedes δ mit $\max(\vec{\eta}) < \delta < \varepsilon$ die Teilherleitung $d_\delta\colon P\ulcorner\delta\urcorner$ eine $P\vec{\eta}, \neg P\vec{\beta}, \neg P\delta$–Widerlegung. Die IH liefert

$$\delta \leq |d_\delta| + \mathrm{lh}(\vec{\eta}) < |d| + \mathrm{lh}(\vec{\eta}),$$

also

$$\varepsilon \leq |d| + \mathrm{lh}(\vec{\eta}).$$

Ist ε eine Nachfolgerzahl, so ist $d_{\varepsilon-1}\colon P\ulcorner\varepsilon - 1\urcorner$ eine $P\vec{\eta}, \neg P\vec{\beta}, \neg P(\varepsilon-1)$–Widerlegung. Die IH liefert

$$\varepsilon - 1 < |d| + \mathrm{lh}(\vec{\eta}),$$

also

$$\varepsilon \leq |d| + \mathrm{lh}(\vec{\eta}). \qquad \square$$

Jetzt können wir das folgende Resultat beweisen (s. Mints [9] und Parsons [11]).

Satz 5.7. *Das Axiom der transfiniten Induktion bis ε_0 ist unbeweisbar in* $\mathbf{Z}$*, also*

$$\mathbf{Z} \nvdash \forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to \forall x\, Px$$

mit einem Prädikatensymbol P, und die transfinite Induktion bis ω_{k+1} ist unbeweisbar in $\mathbf{Z}_k$*, also*

$$\mathbf{Z}_k \nvdash \forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to (\forall x \prec \omega_{k+1})Px.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den zweiten Teil. Nehmen wir also an, die transfinite Induktion bis ω_{k+1} ist herleitbar in $\mathbf{Z}_k$. Aufgrund der Einbettung von $\mathbf{Z}_k$ in $\mathbf{Z}^\infty$

(Lemma 4.2) und der normalen Herleitbarkeit der Progressivität von P in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ mit endlicher Tiefe (Lemma 5.2) können wir schließen, daß $(\forall x \prec \omega_{k+1})Px$ herleitbar ist in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ mit einer Tiefe $< \omega^{m+1}$ und Schnittrang $\leq k$. Nun liefern $k-1$ Anwendungen von Lemma 5.1 eine Herleitung derselben Formel $(\forall x \prec \omega_{k+1})Px$ in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ mit einer Tiefe $\gamma < 2_{k-1}^{\omega^{m+1}} < \omega_{k+1}$ und Schnittrang ≤ 1, also auch eine Herleitung von $P^\ulcorner\gamma + 2^\urcorner$ in $\mathbf{Z}^\infty + \mathrm{Prog}(P)$ mit der Tiefe $\gamma + 1$ und Schnittrang ≤ 1. Dies widerspricht aber Lemma 5.6. □

Wir wollen uns schließlich noch überlegen, daß man als Folgerung hieraus die Unmöglichkeit der Normalisierung für die Arithmetik erhalten kann. Der Normalisierungssatz für die Logik erster Stufe ist nicht besonders nützlich, wenn man ihn auf eines unserer arithmetischen Systeme $\mathbf{Z}$ anwendet. Der Grund liegt darin, daß in einer Herleitung Induktionsaxiome beliebiger Komplexität vorkommen können. Es liegt deshalb nahe zu versuchen, die Induktionsaxiome durch eine Induktionsregel zu ersetzen, welche den Schluß auf $\forall x A(x)$ aus einer Herleitung von $A(0)$ und einer Herleitung von $A(\mathrm{suc}(x))$ mit der zusätzlichen Annahme $A(x)$ gestattet, die an dieser Stelle zu streichen ist; man beachte, daß diese Induktionsregel äquivalent zum Induktionsschema ist. Dann kann man versuchen, die entstehende Herleitung in dem neuen System $\mathbf{Z}$ mit der Induktionsregel zu normalisieren. Wir zeigen jetzt, daß sogar eine sehr schwache Form eines solchen Normalisierungssatzes in $\mathbf{Z}$ mit der Induktionsregel nicht gelten kann.

Satz 5.8. *Die folgende Form eines Normalisierungssatzes in* $\mathbf{Z}$ *mit der Induktionsregel ist falsch. Für jede Herleitung* $d[\vec{u}^{\vec{A}}]\colon B$ *mit* $\vec{A}, B$ *Formeln der Stufe* $\leq \ell$ *gibt es eine Herleitung* $d^*[\vec{u}^{\vec{A}}]\colon B$*, die nur Formeln einer Stufe* $\leq k$ *enthält, wobei* k *nur von* ℓ *abhängt.*

Beweis. Nehmen wir an, ein solcher Normalisierungssatz würde gelten. Man betrachte die Formel

$$\forall x[(\forall y \prec x)Py \to Px] \to (\forall x \prec \omega_{n+1})Px,$$

die die transfinite Induktion bis ω_{n+1} ausdrückt und von der Stufe 3 ist. Nach Satz 5.7 ist sie herleitbar in $\mathbf{Z}$. Aus unserer Annahme folgt nun, daß es eine Herleitung dieser Formel gibt, die nur Formeln einer Stufe $\leq k$ enthält, für ein von n unabhängiges k. Also beweist $\mathbf{Z}_k$ die transfinite Induktion bis ω_{n+1} für jedes n. Dies widerspricht aber Satz 5.7. □

Anhang Der Satz von Tychonov

Wir erinnern zunächst an einige Grundbegriffe aus der Topologie. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{X})$ mit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so daß folgendes gilt.

a. $\forall \mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}(\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{X})$; insbesondere (mit $\mathcal{M} = \emptyset$) ist also $\emptyset \in \mathcal{X}$.

b. Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ endlich und nicht leer, so ist $\bigcap \mathcal{M} \in X$. Ferner ist $X \in \mathcal{X}$.

$\mathcal{X}$ ist dann eine *Topologie* auf X und die Elemente von $\mathcal{X}$ heißen *offene* Mengen von X.

Eine *Basis* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{X})$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{X}$ mit

$$(\forall A \in \mathcal{X})(\exists \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B})(A = \bigcup \mathcal{M}).$$

Eine *Subbasis* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{X})$ ist ein $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ so daß

$$\{\, X \cap \bigcap \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich} \,\}$$

Basis von $\mathcal{X}$ ist. Man sieht leicht, daß jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ Subbasis genau eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{X})$ ist. Dann heißt $\mathcal{X}$ *von* $\mathcal{S}$ *erzeugt*.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{X})$ heißt *quasi–kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{M}$ von X (d.h. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$, $\bigcup \mathcal{M} = X$) eine endliche Teilüberdeckung von X gibt (d.h. es existiert $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ endlich mit $\bigcup \mathcal{N} = X$).

Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ topologische Räume $(i \in I)$ und

$$X := \{\, f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I . f(i) \in X_i \,\}.$$

Sei $p_i : X \to X_i$, $f \mapsto f(i)$ die i–te Projektion, $\mathcal{S} := \{\, p_i^{-1}[O] \mid i \in I \wedge O \in \mathcal{X}_i \,\}$ und $\mathcal{X}$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie. Dann heißt $(X, \mathcal{X})$ das *Produkt der topologischen Räume* $(X_i, \mathcal{X}_i)$ und

$$\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{X}_i) := (X, \mathcal{X}).$$

Wir schreiben $(x_i)_{i \in I}$ für das f mit $f(i) = x_i$.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{X})$ ist *Hausdorffsch*, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U, V gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{X})$ heißt *kompakt*, wenn $(X, \mathcal{X})$ Hausdorffsch und quasi–kompakt ist.

$(X, \mathcal{X})$ sei ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$. $\mathcal{A}$ heißt inadäquat ('ia') genau dann, wenn $\mathcal{A}$ keine Überdeckung von X ist. $\mathcal{A}$ heißt endlich inadäquat ('eia') genau dann, wenn $\mathcal{A}$ keine endliche Überdeckung von X enthält. $(X, \mathcal{X})$ ist offenbar genau dann quasi–kompakt, wenn jedes eia–System ein ia–System ist.

Lemma. *Zu jedem eia-System $\mathcal{B}$ von $(X, \mathcal{X})$ existiert ein (bzgl. $\subseteq$) maximales eia–System oberhalb von $\mathcal{B}$.*

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma genügt es zu zeigen, daß

$$\Omega := \{\, \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \text{ ist ein eia–System von } (X, \mathcal{X}) \text{ und } \mathcal{V} \supseteq \mathcal{B} \,\}$$

induktiv geordnet ist. Sei also $\Delta \subseteq \Omega$ vollständig geordnet. Zu zeigen ist die Existenz eines $\mathcal{H} \in \Omega$ mit $\mathcal{H} = \sup \Delta$. Es sei $\mathcal{H} = \bigcup_{\mathcal{A} \in \Delta} \mathcal{A}$. Man zeigt leicht $\mathcal{H} = \sup \Delta$. Angenommen, $\mathcal{H} \notin \Omega$. Dann gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{H}$ mit

$$X = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu.$$

Für jedes U_i gibt es ein $\mathcal{A}_i \in \Delta$ mit $U_i \in \mathcal{A}_i$. Da Δ vollständig geordnet ist, gibt es ein $\mathcal{A}_\ell$ mit $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{A}_\ell$ also $\mathcal{A}_\ell \notin \Omega$. Dies ist ein Widerspruch. □

Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ maximales eia–System. Sind dann $O_1, \ldots O_n \in \mathcal{X}$ und $O_1 \cap \cdots \cap O_n \subseteq A \in \mathcal{A}$ für ein A, so gibt es darunter ein $O_\ell \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Angenommen, $O_i \notin \mathcal{A}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\mathcal{A} \cup \{O_i\} \supsetneq \mathcal{A}$. Wegen der Maximalität von $\mathcal{A}$ ist also $\mathcal{A} \cup \{O_i\}$ nicht eia, d.h. es gibt $A_{i1}, \ldots A_{im_i} \in \mathcal{A}$ mit

$$X = O_i \cup A_{i1} \cup \ldots \cup A_{im_i},$$

also

$$X = (O_1 \cap \ldots \cap O_n) \cup A_{11} \cup \ldots \cup A_{nm_n}.$$

(Beweis. Ist $X \in X$ aus keinem $A \ldots$, so muß x aus jedem O_i sein). Wegen $\mathcal{A} \in \Omega$ kann für kein $A \in \mathcal{A}$ gelten $O_1 \cap \ldots \cap O_n \subseteq A$, da sonst $\mathcal{A}$ nicht eia wäre. □

Lemma. *$(X, \mathcal{X})$ sei ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ sei eine Subbasis von $(X, \mathcal{X})$. Ist dann $\mathcal{A}$ ein maximales eia–System, so gilt $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{S})$.*

Beweis. Sei $x \in \bigcup \mathcal{A}$, also $x \in A$ für ein $A \in \mathcal{A}$. A ist offen, da $\mathcal{A}$ eia–System ist, d.h. A ist Vereinigung endlicher Durchschnitte von Subbasiselementen. Es gibt also $S_1, \ldots S_n \in \mathcal{S}$ mit

$$x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq A \in \mathcal{A}.$$

Vorhin wurde bewiesen, daß es dann ein S_ℓ darunter gibt mit $S_\ell \in \mathcal{A}$, also

$$x \in S_\ell \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

Daraus folgt aber $x \in \bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{S})$. □

Satz. *$(X, \mathcal{X})$ sei ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ sei eine Subbasis von $(X, \mathcal{X})$. Wenn jede Überdeckung $\mathcal{A}$ von X mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ eine endliche Überdeckung enthält, so ist $(X, \mathcal{X})$ quasi–kompakt.*

Beweis. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ sei eia. Ziel: $\mathcal{B}$ ist ia. Nach dem Lemma gibt es ein maximales eia–System $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Man betrachte $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Wegen $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ ist mit $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ eia. Wegen $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ folgt aus $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ eia nach Voraussetzung $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ia, also $\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}) \subsetneq X$. Wegen $\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{S}) \supseteq \bigcup \mathcal{A} \supseteq \bigcup \mathcal{B}$ ist dann auch $\bigcup \mathcal{B} \subsetneq X$, d.h. $\mathcal{B}$ ist ia. □

Satz von Tychonov. *I sei eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $(M_i, \mathcal{M}_i)$ ein quasi–kompakter topologischer Raum. Dann ist auch*

$$(\prod_{i \in I} M_i, \mathcal{P})$$

($\mathcal{P}$ Produkttopologie) quasi–kompakt.

Beweis. $\mathcal{S} = \{\, p_i^{-1}[O_i] \mid O_i \in \mathcal{M}_i, i \in I \,\}$ ist Subbasis von $\mathcal{P}$. Nach dem Satz oben genügt es zu zeigen, daß jedes $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, das keine endliche Überdeckung von $\prod M_i$ enthält, keine Überdeckung ist. Es sei also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ enthalte keine endliche Überdeckung von $\prod_{i \in I} M_i$. Man betrachte

$$\mathcal{B}_i := \{\, O_i \mid O_i \in \mathcal{M}_i,\ p_i^{-1}[O_i] \in \mathcal{A} \,\}.$$

Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{B}_i$ keine endliche Überdeckung von M_i enthält, und zwar für jedes $i \in I$. Angenommen für ein $i \in I$ enthielte $\mathcal{B}_i$ die endliche Überdeckung $\{O_i^{(1)}, \ldots O_i^{(n)}\}$ also

$$M_i = \bigcup_{\nu=1}^{n} O_i^{(\nu)}$$

also

$$\prod_{i \in I} M_i = p_i^{-1}[M_i] = \bigcup_{\nu=1}^{n} p_i^{-1}[O_i^{(\nu)}].$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\mathcal{A}$ keine endliche Überdeckung von $\prod M_i$ enthält.

Da alle $(M_i, \mathcal{M}_i)$ quasi–kompakt sind, ist kein $\mathcal{B}_i$ eine Überdeckung von M_i, d.h. es gibt ein x_i mit $x_i \notin \bigcup_{O_i \in \mathcal{B}_i} O_i$; hier verwenden wir (AC).

Wir zeigen jetzt, daß $x := (x_i)_{i \in I}$ nicht von $\mathcal{A}$ überdeckt wird. Angenommen, es gilt $x \in p_i^{-1}[O_i]$ für ein $i \in I$, also

$$x_i = p_i(x) \in p_i[p_i^{-1}[O_i]] = O_i \in \mathcal{B}_i.$$

Dies widerspricht $x_i \notin \bigcup_{O_i \in \mathcal{B}_i} O_i$ für alle i. $\mathcal{A}$ ist also keine Überdeckung von $\prod M_i$. □

Literatur

[1] Wilfried Buchholz. A new system of proof–theoretic ordinal functions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 32(3):195–207, 1986.

[2] Georg Cantor. Beträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 49, 1897.

[3] Roberto Di Cosmo and Delia Kesner. A confluent reduction for the extensional typed λ–calculus with pairs, sums, recursion and terminal object. In *ICALP 93*, number 700 in Lecture Notes in Computer Science, pages 645–656. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[4] Roberto Di Cosmo and Delia Kesner. Simulating expansions without expansions. Rapport de recherche 1911, INRIA, Roquencourst, May 1993.

[5] Jan Ekman. *Normal Proofs in Set Theory.* PhD thesis, Department of Computer Science, University of Göteborg, 1994. http://www.cs.chalmers.se.

[6] Gerhard Gentzen. Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 119:140–161, 1943.

[7] Carl A. Gunter. *Semantics of Programming Languages: Structures and Techniques.* Foundations of Computing. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1992.

[8] K. Kunen. *Set Theory.* North–Holland, Amsterdam, 1980.

[9] Grigorii E. Mints. Exact estimates of the provability of transfinite induction in the initial segments of arithmetic. *Journal of Soviet Math*, 1:85–91, 1973. Translated from Zapiski Nauch. Sem. Leningrad *20*, 134–144 (1971).

[10] Tobias Nipkow. A summary of equational reasoning. Seminarskript, November 1993.

[11] Charles Parsons. Transfinite induction in subsystems of number theory (abstract). *The Journal of Symbolic Logic*, 38(3):544–545, 1973.

[12] Gordon D. Plotkin. LCF considered as a programming language. *Theoretical Computer Science*, 5:223–255, 1977.

[13] Kurt Schütte. Kennzeichnung von Ordinalzahlen durch rekursiv definierte Funktionen. *Mathematische Annalen*, 127:16–32, 1954.

[14] Kurt Schütte. *Proof Theory.* Springer, Berlin, 1977.

[15] Helmut Schwichtenberg. Primitive recursion on the partial continuous functionals. In M. Broy, editor, *Informatik und Mathematik*, pages 251–269. Springer, Berlin, 1991.

[16] Helmut Schwichtenberg. Proof theory. Vorlesungsmanuskript, Universität München, 1994.

[17] Helmut Schwichtenberg and Stanley S. Wainer. Ordinal bounds for programs. In P. Clote and J. Remmel, editors, *Feasible Mathematics II*, pages 387–406. Birkhäuser, Boston, 1995.

[18] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic.* Addison–Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts, 1967.

[19] Rolf Socher-Ambrosius. *Deduktionssysteme.* BI–Wissenschafts–Verlag, Mannheim, 1994.

[20] William W. Tait. Infinitely long terms of transfinite type. In J. Crossley and M. Dummett, editors, *Formal Systems and Recursive Functions*, pages 176–185, Amsterdam, 1965. North–Holland.

[21] Masako Takahashi. Parallel reductions in λ–calculus. *Information and Computation*, 118:120–127, 1995.

[22] Anne S. Troelstra, editor. *Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, volume 344 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1973.

[23] Anne S. Troelstra and Dirk van Dalen. *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, volume 121, 123 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North–Holland, Amsterdam, 1988.

[24] Oswald Veblen. Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals. *Transactions AMS*, 9:280–292, 1908.

Index

Π_1–Formel, 71

Ableitung, 63
Allklasse, 3
Anwendung
    einfache, 91
arithmetisches System
    eingeschränktes, 71
    intuitionistisches, 71
    klassisches, 71
Auswahlaxiom, 40

Bild, 5
blockiert, 48

Dedekind–endlich, 43
Dedekind–unendlich, 43
Definitionsbereich, 5

Einschränkung, 5
Element
    maximales, 40
endlich, 42
ex–falso–quodlibet Axiom, 71
Extensionalitätsaxiom, 3

Folgerungsbeziehung, 47
Formel, 70
Funktion, 5

bijektive, 6
injektive, 6
stetige, 62
surjektive, 6
wachsende, 62

gleichmächtig, 34

Hartoggzahl, 36
Hauptzahl
additive, 61
Herleitung
konvertierbare, 91
normale, 91
quasinormale, 94
Hessenberg–Summe, 68
Heyting–Arithmetik, 71

Instanz, 95

Königsches Lemma, 47
Kardinalität, 41
Kardinalzahl, 35
reguläre, 43
kartesisches Produkt, 5
Klammersymbol, 66
Klasse, 2, 3
abgeschlossene, 62
beschränkte, 62
echte, 4
induktive, 12
normale, 62

transitive, 12
Klassen
gleiche, 4
konfinal, 43
Konfinalität, 43
konnex, 23
Kontinuumshypothese, 46
verallgemeinerte, 46
kritische ε–Zahl, 63
kumulative Typenstruktur, 1

Limeszahl, 27

Menge, 2
reine, 2
Mächtigkeit, 41

Nachfolgerzahl, 27
natürliche Summe, 68
Normalform
lange, 87
Normalfunktion, 62

ordinale Klasse, 22
Ordinalzahl, 22
stark kritische, 64
Ordnung
lineare, 22
partielle, 40
Ordnungsfunktion, 62

Peano–Arithmetik, 71

Peano–Axiome, 14, 70
Peirce–Formel, 77
Pfad, 48
Position, 82
Prinzip vom kleinsten Element, 15
Progressionsregel, 93
progressiv, 15, 72

Quasiteilformel, 94

Rang, 31
Regularitätsaxiom, 31
Relation, 5
    extensionale, 20
    fundierte, 19
    transitiv fundierte, 8
rrithmetisches System, 70
Russellklasse, 3
Russellsche Antinomie, 1

Schnittrang, 88, 89
Schranke
    obere, 40
Shoenfield–Prinzip, 2
singulär, 43
Stabilitätsaxiom, 71
Stufe, 71
    einer Herleitung, 88
Suchpfad, 48

Term, 70
    stark berechenbarer unter Substitution, 79

stark normalisierbarer, 78
transitive Hülle, 19
transitive Hülle, 18
transitive Relation, 9

unendlich, 42
Unendlichkeitsaxiom, 12

Veblen–Hierarchie, 63
Vereinigungsmengenaxiom, 6
von Neumannsche Stufen, 29

Wertebereich, 5
Widerlegung, 96
Wohlordnung, 22
Wohlordnungssatz, 40

Ziffer, 70
Zornsches Lemma, 40