Theoretische Stammvorlesung

Logische Systeme der Informatik

Helmut Thiele

Universität Dortmund
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl I

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Prädikatenlogik der ersten Stufe **3**

1.1 Die Syntax mehrsortiger Prädikatenkalküle der ersten Stufe (Syntax I) 3

1.1.1 Vorbemerkungen 3

1.1.2 Signaturen 4

1.1.3 Individuenvariablen und Terme 8

1.1.4 Ausdrücke 12

1.2 Interpretation der Terme und Ausdrücke (Semantik I) 20

1.2.1 Algebraische Systeme 20

1.2.2 Zustände (Belegungen) der Individuenvariablen, Interpretation der Terme 23

1.2.3 Interpretation der Ausdrücke; die Erfüllungsdefinition 25

1.2.4 Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von Ausdrücken 27

1.2.5 Die semantische Äquivalenz von Termen und Ausdrücken 28

1.2.6 Pränexe Normalformen 38

1.2.7 Das Verhalten von Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit gegenüber Bildung von Teilstrukturen sowie bei homomorphen bzw. isomorphen Abbildungen von Interpretationen 49

1.3 Der Modellbegriff. Semantisches Folgern. Modell-basiertes Schließen (Semantik II) 65

1.3.1 Der Modellbegriff 65

1.3.2 Das semantische Folgern 75

1.3.3 Zwei allgemeine Charakterisierungssätze für logische Operatoren 85

1.3.4 Semantisches Folgern durch alleinige Verwendung minimaler Modelle . . . 89

1.4 Formales Ableiten und Beweisen. Regelbasiertes Schließen (Syntax II) 99

1.4.1 Motivationen. Vorbemerkungen 99

1.4.2 Das verwendete logische Axiomensystem 100

1.4.3 Der auf dem Modus Ponens allein beruhende Ableitungsbegriff 102

1.4.4 Ein prädikatenlogischer Ableitungsbegriff 110

1.4.5 Der Beweisbarkeitsbegriff 115

1.5 Eine syntaktische Charakterisierung des semantischen Folgerns. Der Hauptsatz der Prädikatenlogik der ersten Stufe. Folgerungen aus dem Hauptsatz 118

1.5.1 Eine syntaktische Charakterisierung des semantischen Folgerns 118

1.5.2 Vorbereitungen für den Beweis der semantischen Vollständigkeit 124

1.5.3 Beendigung des Vollständigkeitsbeweises in den Fällen ohne bzw. mit Identität 137

1.5.4 Folgerungen aus dem Hauptsatz 148

1.6 Das Entscheidungsproblem. Lösbare Fälle. Das Unentscheidbarkeitstheorem von Church 151

1.6.1 Vorbemerkungen, Überblick 151

1.6.2 Lösbare Fälle 155

1.6.3 Das Unentscheidbarkeitstheorem von Church 158

Literaturverzeichnis **165**

Kapitel 1

Einführung in die Prädikatenlogik der ersten Stufe

1.1 Die Syntax mehrsortiger Prädikatenkalküle der ersten Stufe (Syntax I)

1.1.1 Vorbemerkungen

In den Anwendungen der Mathematischen Logik, insbesondere in der Informatik, hat sich herausgestellt, daß der übliche „einsortige“ Aufbau der Prädikatenlogik (d. h. bei der Interpretation wird allein *ein* Bereich von Grundobjekten gewählt) häufig in dem Sinne zu „schwach“ ist, daß bestimmte Sachverhalte nur sehr umständlich oder gar nicht ausgedrückt (beschrieben) werden können.

Wählt man z. B. bei einem einsortigen Aufbau als Grundbereich (d. h. Bereich von Grundobjekten) die Menge der reellen Zahlen, so kann man (bei Vorliegen einer formalisierten Sprache mit beschränkten Ausdrucksmitteln) nicht ohne weiteres über natürliche Zahlen sprechen. Man könnte sich nun durch die Einführung von *Sortenprädikaten* (hier wäre es das Prädikat „x ist eine natürliche Zahl“) helfen; doch dies hätte den Nachteil, daß in allen Formulierungen über natürliche Zahlen das Sortenprädikat „x ist eine natürliche Zahl“ mitgeschleppt werden muß. Außerdem können Sortenprädikate ihre Aufgabe, nämlich einen Teilbereich (hier die Menge der natürlichen Zahlen) des Grundbereichs auszuzeichnen, nur dann erfüllen, wenn die prädikatenlogischen Quantoren „für jedes“ ($\forall$) und „es gibt ein“ ($\exists$) allgemein zur Verfügung stehen. Dies ist aber in vielen Anwendungen, z. B. in der Informatik, nicht der Fall, z. B. in der algebraischen Spezifikationstheorie und in der logischen Programmierung. In diesen Fällen handelt es sich nämlich um sogenannte universale Theorien, bei denen jedes Axiom einer pränexen Normalform äquivalent ist, deren Präfix nur aus $\forall$-Quantoren besteht (also $\exists$ nicht verwendet wird).

Wir erläutern „Einsortigkeit“ und „Mehrsortigkeit“ durch das folgende Beispiel.

Beispiel 1.1.1.1 CAUCHYsches Konvergenzkriterium
Ein Folge f reeller Zahlen ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.

Mehrsortige Formulierung

Variable für reelle Zahlen: ε
Variable für natürliche Zahlen: l, m, n

$$\forall\varepsilon[\varepsilon > 0 \to \exists l \forall m \forall n(l \leq m \wedge l \leq n \to |f(m) - f(n)| \leq \varepsilon)]$$

Einsortige Formulierung

Variable für reelle Zahlen: ε, x, y, z
Sortenprädikat $nat(x)$: x ist eine natürliche Zahl

$$\forall\varepsilon[\varepsilon > 0 \rightarrow \exists x(nat(x) \wedge \forall y \forall z(nat(y) \wedge nat(z) \wedge x \leq y \wedge x \leq z \rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon))]$$

In „klassischen“ Lehrbüchern der Mathematischen Logik wurde bis zur Gegenwart im allgemeinen der einsortige Aufbau zugrunde gelegt. Man kann dafür die folgenden Gründe unterstellen:

- Formulierung und Beweis der grundlegenden Sätze der Prädikatenlogik der ersten Stufe (z. B. zur Unentscheidbarkeit, zur Vollständigkeit) hängen nur unwesentlich vom einsortigen oder mehrsortigen Aufbau ab.
- Der mehrsortige Aufbau wurde als technisch zu kompliziert empfunden, insbesondere unter Beachtung der Tatsache, daß (bei uneingeschränkter Verwendung der Quantoren $\forall$ und $\exists$) der mehrsortige Ansatz auf den einsortigen Ansatz reduziert werden kann.
  Man vergleiche dazu die Arbeiten [18, 19] von Arnold Schmidt.
- Die Anwendungen in der Informatik hatten noch nicht einen solchen Stand erreicht, daß es notwendig erschien, sie zu berücksichtigen.

In bestimmter Weise unabhängig von der „klassischen“ Mathematischen Logik entwickelten sich seit den späten sechziger Jahren

- die mathematische Semantik von Programmiersprachen und
- die Theorie der Spezifikation von abstrakten Datentypen.

Während man die Dynamische Logik (als Erweiterung der klassischen Prädikatenlogik) auffassen kann als ein Instrument, mit dem der zuerst genannte Themenkomplex in die Mathematische Logik eingeordnet werden kann, hat sich der zweite Themenkomplex (manchmal auch algebraische Spezifikationstheorie genannt) weitgehend unabhängig von der Mathematischen Logik, stark jedoch unter dem Einfluß der (universellen) Algebra entwickelt. Für unsere Vorlesung ist jedoch interessant und wichtig, daß die algebraische Spezifikationstheorie von vornherein mehrsortig aufgebaut wurde, offenbar auf Grund ihrer Entstehung durch angewandte Fragen (z. B. der Software-Entwicklung).

Umfassende Informationen zu diesem zweiten Themenkreis bietet z. B. das Buch [7] von Hartmut Ehrig und Bernd Mahr.

Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß eine Einordnung der algebraischen Spezifikationstheorie in die Mathematische Logik, genauer gesagt, eine detaillierte Untersuchung von Beziehungen zwischen der „klassischen“ Modelltheorie (siehe Abschnitt 1.3) und der algebraischen Spezifikationstheorie, noch ausstehen.

1.1.2 Signaturen

Das Wort „Syntax“ soll das Verfahren des Aufbaus einer formalen Sprache (zunächst ohne Interpretation) andeuten. Signaturen legen die „außerlogischen“ Bestandteile dieser Sprache fest, das sind die verwendeten

- Sorten SO,
- Funktionssymbole FS und
- Prädikatensymbole PS.

Außerdem wird durch eine Signatur festgelegt, auf welche Sorten sich die „Leerstellen" eines Funktionssymbols $f \in FS$ bzw. eines Prädikatensymbols $P \in PS$ beziehen sowie in welcher Sorte die Werte einer Funktion φ, durch die das Funktionssymbol f interpretiert wird, liegen.

Definition 1.1.2.1 (Signaturen)
Ein Quadrupel der Form $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ heiße ***Signatur*** *genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *SO, FS, PS sind paarweise disjunkte, sonst beliebige Mengen;*
2. *α ist eine eindeutige Abbildung von $FS \cup PS$ in SO^* mit $\alpha(f) \neq e$, falls $f \in FS$.*

Bemerkungen:

1. In theoretischen Untersuchungen werden Sorten, Funktionssymbole bzw. Prädikatensymbole durch s, f bzw. P bezeichnet (eventuell mit Unterscheidungsindizes). α heiße *Aritätsfunktion* der Signatur Σ. In Anwendungen verwendet man beliebige Zeichenfolgen bzw. Symbole, z. B. *real*, *nat*, *string* als Sorten, $+$, $*$ als Funktionssymbole, $<$, $\leq$, $\not\leq$ als Prädikatensymbole. Auch werden in Anwendungen anstelle von Σ Zeichenfolgen oder spezielle Symbole verwendet, z. B. NAT, $REAL$, $STACK$.

2. $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ heiße *leer* bzw. *endlich*, falls die Mengen SO, FS und PS sämtlich leer bzw. endlich sind. In Anwendungen werden meistens endliche Signaturen verwendet.

3. $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ heiße *relationale* Signatur oder auch *prädikative* Signatur, falls FS leer ist.

4. Gilt für ein Funktionssymbol $f \in FS$ die Gleichung $\alpha(f) = ws$, wobei wegen $\alpha(f) \in SO^+$ die Beziehungen $w \in SO^*$ und $s \in SO$ gelten, so heiße w die *Inputarität* und s die *Outputsorte* von f. Ist $w = e$, d. h. $\alpha(f) \in SO$, etwa $\alpha(f) = s$, so heiße f *nullstelliges* Funktionssymbol oder auch *Individuenkonstante* oder *Individuenname* der Sorte s. Dieser Benennung liegt die Tatsache zugrunde, daß nullstellige Funktionen Elemente der Menge, in die abgebildet wird, repräsentieren.

5. $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ heiße *operationale* oder *funktionale* Signatur, falls PS leer ist. Offenbar kann man eine beliebige Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ in eine „äquivalente" (das wäre noch zu definieren) operationale Signatur überführen, indem man eine neue Sorte $\underline{bool}$ (falls noch nicht vorhanden) hinzufügt und für jedes Prädikatensymbol $P \in PS$ mit

$$\alpha(P) = w, \qquad (w \in SO^*)$$

ein neues Funktionssymbol f_P mit

$$\alpha(f_P) = w\underline{bool}$$

zu FS hinzufügt.

6. In Anwendungen wird für $f \in FS$ die Gleichung

$$\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$$

auch häufig durch

$$f : s_1 \ldots s_n \to s$$

oder

$$f : s_1, \ldots, s_n \to s$$

beschrieben. Analog schreibt man im Falle $P \in PS$ für

$$\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$$

auch

$$P : s_1 \ldots s_n$$

oder

$$P : s_1, \ldots, s_n$$

oder nach Einführung der Sorte $\underline{bool}$

$$P : s_1 \ldots s_n \to \underline{bool}$$

oder

$$P : s_1, \ldots, s_n \to \underline{bool}.$$

Beispiel 1.1.2.1 Einsortige Signatur für die reellen Zahlen mit Null, Eins, Addition, Multiplikation, Kleiner-Gleich-Beziehung, wobei wir anstelle der allgemeinen Bezeichnungen Σ, SO, FS und PS in der angegebenen Reihenfolge die speziellen Bezeichnungen $REAL$, $SORTS$, OPS und PRS wählen und die „Struktur“ der Signatur $REAL$, insbesondere die Aritätsfunktion α, durch das nachfolgende Schema, das häufig in der entsprechenden Informatik-Literatur verwendet wird (siehe z. B. [7]), beschreiben:

$$\begin{array}{l} REAL \\ \quad SORTS : real \\ \quad OPS : 0 : \to real \\ \qquad\quad 1 : \to real \\ \qquad\quad + : real, real \to real \\ \qquad\quad * : real, real \to real \\ \quad PRS : \leq : real, real \end{array}$$

Bei Verwendung einer Sorte $\underline{bool}$ kann man die letzte Festlegung auch in der Form

$$\leq : \ real, real \to \underline{bool}$$

schreiben.

Beispiel 1.1.2.2 Zweisortige Signatur für gerichtete Graphen:

$$\begin{array}{l} GRAPH \\ \quad SORTS : bog, knot \\ \quad OPS : start : bog \to knot \\ \qquad\quad ziel \ : bog \to knot \end{array}$$

Interpretation der Signatur *GRAPH*: (der Interpretationsbegriff wird später in Abschnitt 1.2 korrekt definiert)

***bog*:** Menge der Bogen (gerichtete Kanten) eines Graphen

***knot*:** Menge der Knoten eines (gerichteten) Graphen

***start*:** Anfangsknoten (Startknoten) eines Bogens

***ziel*:** Endknoten (Zielknoten) eines Bogens

Overloading: Wird ein Funktionssymbol $f \in FS$ oder ein Prädikatensymbol $P \in PS$ mit mehreren Aritäten belegt, spricht man von *Overloading* („Überladung“) dieses Symbols. Dies wird mathematisch dadurch realisiert, daß man in Definition 1.1.2.1 die Abbildung α mit

$$\alpha : FS \cup PS \to SO^*$$

(wobei $\alpha(f) \neq e$, falls $f \in FS$) durch eine Abbildung

$$\beta : FS \cup PS \to \mathfrak{P}SO^*$$

($\mathfrak{P}SO^*$ ist die Potenzmenge von SO^*) ersetzt.

Man kann dann *card* $\beta(S)$ als *Gewicht der „Beladung“* von $S \in FS \cup PS$ mit Aritäten bezeichnen, und man nennt

- S überladen, falls *card* $\beta(S) \geq 2$
- S normal beladen, falls *card* $\beta(S) = 1$
- S unbeladen, falls *card* $\beta(S) = 0$

Während in theoretischen Untersuchungen Überladungen von Symbolen häufig nicht zugelassen sind (man vergl. dazu [7], Seite 14 – 15), wird in Anwendungen sehr oft davon Gebrauch gemacht. So trägt z. B. das zweistellige Funktionssymbol + (Addition) meistens 5 verschiedene Aritäten, nämlich:

$$\begin{aligned} + &: nat, nat &&\to nat \\ + &: int, int &&\to int \\ + &: rat, rat &&\to rat \\ + &: real, real &&\to real \\ + &: comp, comp &&\to comp \end{aligned}$$

nämlich die Addition für natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen, manchmal wird auch noch

$$+ : set, set \to set$$

zugelassen, d. h. + bezeichnet die zweistellige Operation der Vereinigung von Mengen.

Das obige Beispiel gibt Anlaß zu den folgenden drei Bemerkungen:

1. Folgt für ein Symbol $S \in FS \cup PS$ aus $w \in \beta(S)$ und $w' \in \beta(S)$ stets $|w| = |w'|$, so bedeutet dies, daß alle Aritäten von S dieselbe Länge haben, wie in unserem Beipiel in allen 6 Fällen die Länge 3.

2. Wählt man die durch die Symbolfolgen *nat*, *int*, *rat*, *real*, *comp* intendierte „Standardinterpretation“ (siehe Unterabschnitt 1.2.1) als Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen, so ergibt sich entsprechend der mengentheoretischen Inklusionen dieser Mengen für die Sorten *nat*, *int*, *rat*, *real* und *comp* die Kette

$$nat \leq int \leq rat \leq real \leq comp.$$

Allgemein spricht man von einer *Order Sorted Signatur*, falls für SO eine Halbordnungsrelation für die Sorten gegeben ist (die später als Teilmengenbeziehung für die interpretierenden Bereiche gedeutet wird) und diese Halbordnungsrelation mit den zugeordneten Aritäten „verträglich“ ist, wie in unserem Beispiel in den Fällen 1 bis 5. Nehmen wir außerdem die Sorte *set* auf, so ist sie mit keiner der ersten fünf betrachteten Sorten vergleichbar.

3. Wir hatten in Definition 1.1.2.1 gefordert, daß die Mengen FS und PS disjunkt sind, also $FS \cap PS = \emptyset$ gilt. In den Anwendungen verzichtet man manchmal auf diese Voraussetzung, d. h. es darf $FS \cap PS \neq \emptyset$ sein. Dies bedeutet, daß es Symbole S der betreffenden Signatur geben kann, die sowohl als Funktionssymbol wie auch als Prädikatensymbol Verwendung finden und die demgemäß entsprechende Aritäten tragen. Als Beispiel betrachten wir dazu eine Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha],$$

in deren Sortenmenge SO außer der Sorte $\underline{bool}$ noch mindestens eine weitere Sorte s vorkommen möge. Außerdem komme in *FS und PS* ein Symbol $\doteq_s$ vor, für das entsprechend $\doteq_s \in FS$

$$\doteq_s : s, s \rightarrow \underline{bool}$$

und entsprechend $\doteq_s \in PS$

$$\doteq_s : s, s$$

gilt.

1.1.3 Individuenvariablen und Terme

Wir gehen nun dazu über, Individuenvariablen und Terme zu definieren. Dazu sei eine beliebige Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ fest gegeben.

Definition 1.1.3.1 (Individuenvariablen und Terme)

1. *Zu jeder Sorte $s \in SO$ fixieren wir eine Menge V_s von* ***Individuenvariablen*** *der Sorte s. Für $s, s' \in SO$ mit $s \neq s'$ setzen wir $V_s \cap V_{s'} = \emptyset$ voraus, d. h. eine Individuenvariable bezieht sich stets nur auf eine Sorte, „Overloadings“ werden also vermieden. Die Menge V* ***aller*** *verwendeten Individuenvariablen wird durch $V = \bigcup_{s \in SO} V_s$ definiert. Beliebige Individuenvariablen aus V werden durch v, w, x, y, z bezeichnet, eventuell mit Unterscheidungsindizes versehen. Wollen wir betonen, daß es sich um Individuenvariablen der Sorte s, also aus V_s handelt, schreiben wir v^s, w^s, x^s, y^s, z^s.*

2. *Jede Individuenvariable der Sorte s und jede Individuenkonstante der Sorte s ist ein* ***Term der Sorte*** *s.*

3. *Gilt $f \in FS$, $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ mit $n \geq 1$ und $s_1, \ldots, s_n, s \in SO$ und ist T_ν für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ ein* ***Term der Sorte*** *s_ν, dann ist $f(T_1, \ldots, T_n)$ ein* ***Term der Sorte*** *s.*

Bemerkungen zu Definition 1.1.3.1:

1. In den Anwendungen und für viele theoretische Fragen genügt es, wenn jedes V_s ($s \in SO$) *abzählbar unendlich* gewählt wird. Ist ein V_s überabzählbar unendlich, entstehen beim Beweis bestimmter Sätze, z. B. beim Vollständigkeitssatz, gewisse zusätzliche Probleme. Für endliche V_s (evtl. V_s sogar leer) wird die Ausdrucksfähigkeit der entsprechenden Sprache im allgemeinen sehr stark eingeschränkt.

2. Die in Definition 1.1.3.1 formulierten Bedingungen 2 und 3 sind nichts anderes als eine „Kurzbeschreibung" einer *induktiven Definition* des Termbegriffs unter Verwendung einer *(„Kompliziertheits-")Stufe* k ($k \geq 0$, k natürliche Zahl). Dabei wird allen Individuenvariablen und allen Individuenkonstanten die Stufe 0 zugewiesen. Ein Term der Form $f(T_1, \ldots, T_n)$ erhält die Stufe $k+1$, falls die Terme $T_1, \ldots, T_n$ sämtlich Stufen kleiner oder gleich k haben.

   Da im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung z. B. die Begriffe „Ausdruck" und „Ableitbarkeit" in ähnlicher Weise induktiv definiert werden, wollen wir — gleichsam als Muster — die induktive Definition des Termbegriffs in allen Einzelheiten aufschreiben. Grundlage ist die Relation

   $$T \text{ ist ein Term der Sorte } s \text{ mit der Stufe } k$$

   Hintergrund dieser Relation ist die Vorstellung, daß k Konstruktionsschritte im Sinne von Bedingung 3 der Definition 1.1.3.1 ausreichen, um den Term T zu erzeugen.

   AS. Anfangsschritt, d. h. $k = 0$

   T ist ein Term der Sorte s mit der Stufe 0
   $=_{def}$ T ist eine Individuenvariable der Sorte s, d. h. es gilt $T \in V_s$

   oder

   T ist ein nullstelliges Funktionssymbol mit der Outputsorte s, d. h. $T \in FS$ und $\alpha(T) = s$.

   IS. Induktionsschritt

   T ist ein Term der Sorte s mit der Stufe $k+1$
   $=_{def}$ T ist ein Term der Sorte s mit der Stufe k

   oder

   es gibt ein Funktionssymbol $f \in FS$, eine natürliche Zahl $n \geqq 1$, Sorten $s_1, \ldots, s_n \in SO$ und Terme $T_1, \ldots, T_n$, so daß gilt: $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$, für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ ist T_ν ein Term der Sorte s_ν mit der Stufe k und $T = f(T_1, \ldots, T_n)$.

   AD. Abschließende Definition

   T ist ein Term der Sorte s
   $=_{def}$ Es gibt eine natürliche Zahl $k \geqq 0$, so daß T ein Term der Sorte s mit der Stufe k ist.

   In dieser Definition sichert die im Induktionsschritt vorhandene Bedingung „T ist ein Term der Sorte s mit der Stufe k", daß die Stufe eines Termes beliebig vergrößert werden kann. Auf diese Weise ist es möglich, in der zweiten Bedingung des Induktionsschrittes generell zu fordern, daß die $T_1, \ldots, T_n$ sämtlich **dieselbe** Stufe k haben. Es sei noch angemerkt, daß dieser Ansatz völlig in Einklang steht mit der Vorstellung, daß k Konstruktionsschritte ausreichen, um die Terme $T_1, \ldots, T_n$ zu erzeugen.

3. Die Gesamtheit aller Terme der Sorte s, die in der angegebenen Weise konstruiert werden können, wird durch $TERM_s(\Sigma, V)$ bezeichnet. Schließlich definieren wir:

$$TERM(\Sigma, V) =_{def} \bigcup_{s \in SO} TERM_s(\Sigma, V).$$

4. Terme der Sorte s, in denen keine Individuenvariablen vorkommen, heißen *Grundterme*, manchmal auch *konstante Terme* oder *Terme ohne Individuenvariablen*. Die Gesamtheit aller Grundterme der Sorte s wir durch $GTERM_s(\Sigma)$ bezeichnet. Da diese Menge von V unabhängig ist, können wir auf die Angabe der Menge der gewählten Individuenvariablen verzichten. Schließlich definieren wir in Analogie zu Bemerkung 3

$$GTERM(\Sigma) =_{def} \bigcup_{s \in SO} GTERM_s(\Sigma).$$

5. Schon an dieser Stelle sei auf die wichtige Tatsache hingewiesen, daß in vielen Anwendungen für jedes (oder schwächer: für gewisse) $s \in SO$ die Menge $GTERM_s(\Sigma)$ der Grundterme der Sorte s nicht leer sein darf. Man nennt dann die Signatur Σ in der Sorte s *bewohnt* (englisch: inhabited) bzw. (schlechthin) bewohnt, falls dies für jede Sorte gilt.

6. Beim Aufschreiben von Termen der Form $f(T_1, \ldots, T_n)$, wobei $n \geq 1$, könnte anstelle der obigen *Präfixnotation* auch die *Suffixnotation* verwendet werden, also $(T_1, \ldots, T_n)f$ geschrieben werden. Dies hätte bei der Angabe der Verkettung von Funktionen gewisse Vorteile.

   Ist $n = 2$, liegt also ein Funktionssymbol f mit zweistelliger Inputarität vor, benutzt man gern die *Infixnotation*, d. h. man schreibt anstelle von $f(T_1, T_2)$ dann $(T_1\ f\ T_2)$ bzw. $(T_1 \circ T_2)$ oder $(T_1 * T_2)$. Dabei muß man beachten, daß nach Interpretation die Terme $(T_1 \circ T_2) \circ T_3$ und $T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$ bzw. $T_1 \circ T_2$ und $T_2 \circ T_1$ verschiedene Elemente bedeuten können, weil die betreffende zweistellige Operation nicht notwendig assoziativ bzw. kommutativ sein muß.

Übungsaufgabe 1.1.3.1
Dafür, daß eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ bewohnt ist, ist hinreichend, daß es in FS für jede Sorte $s \in SO$ ein Funktionssymbol f mit $\alpha(f) = s$ gibt. Diese Bedingung ist aber offenbar nicht notwendig. Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß Σ bewohnt ist. Dabei darf natürlich nicht der Begriff des Grundterms benutzt werden (die Bedingungen wären sonst trivial), sondern es ist allein F und α zu verwenden.

Beispiel 1.1.3.1 Konstruktion von Termen auf Grund der obigen induktiven Definition:

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ mit

$$\begin{aligned}
SO &=_{def} \{real, nat\} \\
FS &=_{def} \{f, g, e, o\} \\
PS &=_{def} \left\{P, \underset{real}{=}\right\} \\
\alpha(f) &=_{def} real, nat, real, real \\
\alpha(g) &=_{def} real, nat, nat \\
\alpha(e) &=_{def} real \\
\alpha(o) &=_{def} nat
\end{aligned}$$

Entsprechend unseren Vereinbarungen können wir die Aritätsfunktion α auch wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} f &: real, nat, real \rightarrow real \\ g &: real, nat \rightarrow nat \\ e &: \rightarrow real \\ o &: \rightarrow nat \end{aligned}$$

Wir definieren die zugelassenen Mengen von Individuenvariablen:

$$\begin{aligned} V_{real} &=_{def} \{x, y, z\} \\ V_{nat} &=_{def} \{m, n\} \\ V &=_{def} V_{real} \cup V_{nat} \end{aligned}$$

Dann sind Terme der Sorte *real*:

$$\begin{aligned} &x,\ y,\ z,\ e \\ &f(x, m, y),\ f(z, o, e),\ f(e, o, e) \\ &f(x, g(x, o), z),\ f(e, g(e, o), e) \\ &f(f(z, o, z),\ g(f(e, n, x), m), x) \end{aligned}$$

Terme der Sorte *nat*:

$$\begin{aligned} &m,\ n,\ o \\ &g(y, o),\ g(e, o) \\ &g(f(x, n, y), m),\ g(f(e, o, e), o) \end{aligned}$$

Keine Terme sind:

$g(g(x, m), n)$	:	Sortenbedingung verletzt
$f(n, g(m, x), z)$	:	Sortenbedingung dreimal verletzt
$g(f(xn, y), o)$	:	Komma fehlt
$g(f(x, n, y, o)$	:	eine schließende Klammer fehlt

Wir setzen als bekannt voraus, wie CHOMSKY-Grammatiken definiert sind und wie mit ihnen formale Sprachen generiert werden.

Im folgenden betrachten wir die Menge $TERM(\Sigma, V)$ des eben diskutierten Beispiels 1.1.3.1 als formale Sprache und geben dazu eine generierende kontextfreie CHOMSKY-Grammatik an, wobei wir uns der BACKUS-NAUR-Notation [BACKUS, BAUMANN] bedienen.

Terminale Symbole:

$$|f|g|x|y|z|m|n|e|o|,|(|)|$$

Nichtterminale Symbole (in Backus-Naur-Notation):

$\langle T \rangle$	:	Term
$\langle TR \rangle$	:	Term der Sorte *real*
$\langle TN \rangle$	:	Term der Sorte *nat*
$\langle IVR \rangle$	:	Individuenvariable der Sorte *real*
$\langle IVN \rangle$	:	Individuenvariable der Sorte *nat*

Produktionen (ebenfalls in Backus-Naur-Notation):

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &::= \langle TR \rangle \,|\, \langle TN \rangle \\ \langle TR \rangle &::= x|y|z|e|f(\langle TR \rangle, \langle TN \rangle, \langle TR \rangle) \\ \langle TN \rangle &::= m|n|o|g(\langle TR \rangle, \langle TN \rangle) \end{aligned}$$

Startsymbol: $\langle T \rangle$

1.1.4 Ausdrücke

Wir gehen nun zur Definition der *Ausdrücke* über, die durch eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ und eine Menge V von Individuenvariablen festgelegt sind. Dazu müssen wir zwei Fakten beachten:

1. Es kann zutreffen, daß die Menge PS der Prädikatensymbole von Σ für gewisse (eventuell alle) Sorten $s \in SO$ ein spezielles Prädikatensymbol der Form $=_s$ mit $\alpha(=_s) = ss$ enthält. Bei der späteren Interpretation wird ein solches Symbol durch die Identitätsrelation über dem Bereich interpretiert, der der Sorte s zugeordnet ist.

   Gibt es ein solches $=_s$ in PS, spricht man von einer *Signatur mit Identität* bzw. später von einem *Prädikatenkalkül mit Identität*, anderenfalls verwenden wir die Bezeichnungen *Signatur ohne Identität* bzw. *Prädikatenkalkül ohne Identität*. Diese Unterscheidung ist wichtig, weil sich die beiden Arten von Kalkülen in wesentlichen Eigenschaften unterscheiden, wie wir später sehen werden.

2. Ausdrücke werden, von *atomaren* Ausdrücken (d. h. prädikativen Ausdrücken und Gleichungen) ausgehend, durch *logische Verknüpfungsoperatoren* (auch *Junktoren*, *Funktoren* oder *Konnektive* genannt) induktiv aufgebaut.

   Um die im folgenden betrachteten Systeme von Axiomen und von Schlußregeln möglichst einfach und klein zu halten, wählen wir nur wenige dieser Operatoren, jedoch so, daß die übrigen (üblicherweise) verwendeten Operatoren (einfach) definierbar sind. Wir wählen:

   $\neg$: als Formalisierung von „*nicht*“
   $\rightarrow$: als Formalisierung von „*wenn ... , so ...*“
   $\forall$: als Formalisierung von „*für jedes*“

Definition 1.1.4.1 (Ausdrücke)

1. *Wenn $P \in PS$ und $\alpha(P) = e$, so ist P ein Ausdruck.*
2. *Gilt $P \in PS$ und $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$ mit $n \geq 1$ und $s_1, \ldots, s_n \in SO$, ist ferner T_ν für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ ein Term der Sorte s_ν, so ist $PT_1 \ldots T_n$ ein Ausdruck.*
3. *Sind $s \in SO$ und $=_s \in PS$, sind ferner T_1 und T_2 Terme der Sorte s, so ist $T_1 =_s T_2$ ein Ausdruck.*
4. *Sind A und B Ausdrücke, so sind auch $\neg A$ und $(A \rightarrow B)$ Ausdrücke.*
5. *Ist $v \in V$ und ist A ein Ausdruck, so ist auch $\forall v A$ ein Ausdruck.*

Bemerkungen zu Definition 1.1.4.1:

1. Die Gesamtheit der auf der Grundlage einer gegebenen Signatur Σ, einer fixierten Variablenmenge V und den gewählten Junktoren $\neg$, $\rightarrow$ und $\forall$ definierten Ausdrücke wird durch $AUSD(\Sigma, V)$ bezeichnet. Manchmal werden Ausdrücke auch *Formeln* genannt; in diesem Fall würde man anstelle von $AUSD(\Sigma, V)$ die Bezeichnung $FORM(\Sigma, V)$ verwenden.

2. Die in Definition 1.1.4.1 formulierten Bedingungen 1 bis 5 beschreiben wieder in Kurzform, analog zur Definition der Terme, eine *induktive Definition* des Begriffs *Ausdruck* unter Einführung und Verwendung des Begriffs „Stufe eines Ausdrucks“.

Übungsaufgabe 1.1.4.1
Unter der Bemerkung 2 zur Definition 1.1.3.1 hatten wir eine vollständig ausgeführte induktive Definition als Begriff „T ist ein Term der Sorte s“ aufgeschrieben.

Man verwende nun die Relation

„A ist ein Ausdruck der Stufe k“

und definiere durch Induktion über k den Begriff „Ausdruck“ nach dem Muster der induktiven Termdefinition.

3. Ausdrücke der Form P und $PT_1 \dots T_n$ ($n \geqq 1$) heißen *prädikative* Ausdrücke. Die Schreibweise $PT_1 \dots T_n$ entspricht der von J. Lukasiewicz eingeführten klammerfreien Präfixnotation (siehe [2], §2, S. 21, dort zitiert aus [17]). Ausdrücke der Form $T_1 \underset{s}{=} T_2$ heißen *Gleichungen* (der Sorte s).

4. Die restlichen üblicherweise verwendeten Junktoren

$$\begin{array}{rcl} \vee & : & \text{nicht ausschließendes Oder} \\ \wedge & : & \text{und} \\ \leftrightarrow & : & \text{genau dann, wenn} \\ \exists & : & \text{es gibt ein} \end{array}$$

definieren wir mit $\neg$, $\rightarrow$ und $\forall$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B) & =_{def} & ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \\ (A \wedge B) & =_{def} & \neg(A \rightarrow \neg B) \\ (A \leftrightarrow B) & =_{def} & ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\ \exists v A & =_{def} & \neg \forall v \neg A \end{array}$$

Eliminiert man in der Definition von $\leftrightarrow$ das benutzte, bereits definierte Symbol $\wedge$, so erhält man eine Definition von $\leftrightarrow$ allein mit $\neg$ und $\rightarrow$ in der Form

$$(A \leftrightarrow B) =_{def} \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A)).$$

5. Beim Aufschreiben spezieller Ausdrücke machen wir von den folgenden Modifikationen bzw. Vereinfachungen Gebrauch.

   5.1. Die in Łukasiewiczscher klammerfreier Präfixnotation geschriebenen prädikativen Ausdrücke der Form $PT_1 \dots T_n$, $n \geq 1$, sind manchmal etwas unübersichtlich. Deshalb schreiben wir gelegentlich $P(T_1, \dots, T_n)$, wobei wir beachten müssen, daß damit die Konfusion mit Termen der Form $f(T_1, \dots, T_n)$ entsteht.

   5.2. In Gleichungen der Form $T_1 \underset{s}{=} T_2$ darf der Index s weggelassen werden. Dadurch entsteht eventuell eine Überladung des Symbols $=$; Konfusionen sind aber nicht zu befürchten.

   5.3. In einem „fertigen“ Ausdruck darf (falls vorhanden) das am weitesten außen stehende Klammernpaar weggelassen werden; also anstelle von $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ darf $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ geschrieben werden.

5.4. Im *Inneren* eines Ausdruck dürfen Klammerpaare entsprechend den folgenden *Präferenzregeln* weggelassen werden:
$\leftrightarrow$ trennt stärker als $\rightarrow$, $\vee$ und $\wedge$
$\rightarrow$ trennt stärker als $\vee$ und $\wedge$
$\vee$ trennt stärker als $\wedge$.

Beispiel 1.1.4.1 $(((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \leftrightarrow (A \vee (B \wedge C)))$
Dieser Ausdruck kann entsprechend 5.3 und 5.4 vereinfacht werden zu

$$A \vee B \rightarrow A \wedge B \leftrightarrow A \vee B \wedge C$$

5.5. Eine weitere Klammereinsparung kommt schließlich dadurch zustande, daß man neben den bisherigen Junktoren noch Junktoren verwendet, die beiderseits mit einer gewissen Anzahl von Punkten versehen sind, also z. B. $.\wedge.$, $:\!\rightarrow\!:$, $.\vee.$, und dabei vereinbart, daß ein Junktor mit k Punkten stärker trennt als jeder Junktor mit weniger Punkten, während für zwei verschiedene Junktoren mit der gleichen Anzahl von Punkten die Verabredungen 5.3 und 5.4 gelten sollen. Dann kann man z. B. statt

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$$

kürzer

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \,.\!\rightarrow\!.\, p \wedge q \rightarrow r$$

oder ganz ohne Klammern

$$p \,.\!\rightarrow\!.\, q \rightarrow r \;:\!\rightarrow\!:\, p \wedge q \rightarrow r$$

schreiben.

5.6. Mehrfache Alternativen und mehrfache Konjunktionen werden eindeutig wie folgt angegeben ($n \geq 1$):

$$\bigvee_{\nu=1}^{n} A_\nu \quad =_{def} \quad (\ldots(A_1 \vee A_2) \vee \ldots \vee A_n)$$
$$\bigwedge_{\nu=1}^{n} A_\nu \quad =_{def} \quad (\ldots(A_1 \wedge A_2) \wedge \ldots \wedge A_n)$$

Man spricht in diesen Fällen von einer nach *rechts laufenden kanonischen Klammerung*. Werden die Klammern anders gesetzt, entsteht „rein syntaktisch“ ein Ausdruck, der von dem gegebenen verschieden ist. Daß jedoch der „neue“ Ausdruck mit dem „alten“ *logisch äquivalent* ist, bedarf einer Definition (logische Äquivalenz von Ausdrücken) und eines Beweises (siehe Abschnitt 1.2).

Anstelle von

$$\bigvee_{\nu=1}^{n} A_\nu \quad \text{bzw.} \quad \bigwedge_{\nu=1}^{n} A_\nu$$

schreibt man auch manchmal

$$A_1 \vee \ldots \vee A_n \quad \text{bzw.} \quad A_1 \wedge \ldots \wedge A_n.$$

Um den Fall $n = 0$ durch $\bigvee_{\nu=1}^{n} A_\nu$ bzw. $\bigwedge_{\nu=1}^{n} A_\nu$ zu erfassen, fixieren wir einen beliebigen Ausdruck B und definieren dann:

$$\bigvee_{\nu=1}^{0} A_\nu \quad =_{def} \quad \neg(B \to B)$$

$$\text{bzw.} \quad \bigwedge_{\nu=1}^{0} A_\nu \quad =_{def} \quad (B \to B)$$

Im weiteren Verlauf des Aufbaus der Prädikatenlogik werden „rein syntaktische“ Definitionen und Eigenschaften, die sich auf Ausdrücke beziehen, benötigt. „Rein syntaktisch“ bedeutet in diesem Zusammenhang, daß noch keine Interpretation vorliegt.

Es sei vorausgesetzt, daß ein Grundalphabet $ALPH$ fixiert ist und Terme sowie Ausdrücke Elemente aus $(ALPH)^*$, also endliche Folgen von Buchstaben (auch *Wörter* genannt) aus $ALPH$ sind. Im folgenden bezeichnen W, X, Y, Z beliebige Elemente (also endliche Zeichenfolgen) aus $(ALPH)^*$. Das Resultat der Hintereinandersetzung von beliebigen Zeichenfolgen (Wörtern) X und Y in der angegebenen Reihenfolge wird durch XY bezeichnet.

Definition 1.1.4.2

1. *Z ist ein **Teil** von W (Z kommt in W vor)*
   $=_{def}$ Es gibt $X, Y \in (ALPH)^*$, so daß $XZY = W$.

2. *Liegt die Gleichung $XZY = W$ vor, so sagt man, daß Z in W im **Kontext** $[X, Y]$ vorkomme.*

Übungsaufgabe 1.1.4.2

Man zeige, daß die „Teil“-Relation auf der Menge $(ALPH)^*$ eine Halbordnung ist, d. h. daß für beliebige $X, Y, Z \in ALPH^*$ gilt

1. Reflexivität: X ist ein Teil von X
2. Transitivität: Ist X ein Teil von Y und Y ein Teil von Z, so ist X ein Teil von Z
3. Antisymmetrie: Ist X ein Teil von Y und Y ein Teil von X, so $X = Y$

Definition 1.1.4.3

Die Individuenvariable v kommt in dem Ausdruck A im Kontext $[X, Y]$ quantifiziert vor
$=_{def}$
1. *$A = XvY$*
2. *Es gibt ein X' aus $(ALPH)^*$, so daß $X = X'\forall$.*

Bemerkungen zu Definition 1.1.4.3:

1. Offenbar besagt die Gleichung $A = XvY$, daß in A die Individuenvariable im Kontext $[X, Y]$ vorkommt.

2. Aus der Gleichung $X = X'\forall$ folgt, daß der Ausdruck A die Gleichung $A = X'\forall vY$ erfüllt, also $\forall v$ in A im Kontext $[X, Y]$ vorkommt.

Das folgende Lemma ist die Grundlage für die Definition des wichtigen Begriffs „Wirkungsbereich einer quantifizierten Individuenvariablen im Kontext eines gegebenen Ausdrucks“.

Lemma 1.1.4.1
Kommt in dem Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ die Individuenvariable v im Kontext $[X, Y]$ quantifiziert vor, so gibt es genau eine Zerlegung von Y in der Form $Y = BY'$ so daß B ein Ausdruck aus $AUSD(\Sigma, V)$ ist und $Y' \in (ALPH)^*$ gilt.

Definition 1.1.4.4
Der Ausdruck B heißt der (eindeutig bestimmte) Wirkungsbereich der quantifizierten Variablen v im Kontext $[X, Y]$ von A.

Übungsaufgabe 1.1.4.3
Man beweise Lemma 1.1.4.1.

Anleitung. Man gehe davon aus, daß man die eindeutige Zerlegbarkeit des Ausdrucks A in der Form

$$A = X'\forall vBY'$$

wobei $X = X'\forall$, $Y = BY'$ gilt und B ein Ausdruck ist, beweisen muß.

Dieser Beweis wird induktiv über die Stufe des Ausdrucks A geführt.

Im Anfangsschritt bedeutet dies, daß man die Behauptung für prädikative Ausdrücke der Form P und $PT_1 \ldots T_n$ $(n \geqq 1)$ sowie für Gleichungen der Form $T_1 \doteq_s T_2$, falls $\doteq_s \in PS$, zeigen muß.

Das ist aber trivial, da in diesen Ausdrücken keine Quantoren vorkommen.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, daß das Lemma bereits für Ausdrücke A und B (n-ter Stufe) bewiesen sei. Wir haben dann seine Gültigkeit für

- $\neg A$,
- $(A \to B)$ und
- $\forall vA$

zu beweisen. Dies ist aber ebenfalls leicht einzusehen, wenn man die Gültigkeit der Induktionsvoraussetzung für A und B exakt aufschreibt und dann Definition 1.1.4.2 verwendet.

Beispiel 1.1.4.2 Gegeben sei eine Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

mit $SO = \{s\}$, $FS = \{f, g, h\}$, $PS = \{P, Q\}$ und

$$\begin{array}{ll} f : s \ \to s & P : ss \\ g : ss \to s & Q : ss \\ h : \ \to s & \end{array}$$

Wir betrachten den Ausdruck A mit

$$A =_{def} Pzf(x) \vee \underset{1}{\uparrow}\neg\forall x(Qxg(h, f(z)) \vee \underset{2}{\uparrow}\forall x\underset{3}{\uparrow}\forall yQxy),$$

wobei wir durch numerierte Pfeile 3 quantifizierte Individuenvariablen (einschließlich der zugehörigen Kontexte) gekennzeichnet haben. Als dazugehörige Wirkungsbereiche finden wir in A für

$$\begin{array}{ll} \overset{\uparrow}{\underset{1}{\forall x}} \text{ den Wirkungsbereich } Qxg(h,f(z)) \vee \forall x \forall y Qxy \\ \overset{\uparrow}{\underset{2}{\forall x}} \text{ den Wirkungsbereich} & \forall y Qxy \\ \overset{\uparrow}{\underset{3}{\forall y}} \text{ den Wirkungsbereich} & Qxy \end{array}$$

In Definition 1.1.4.3 haben wir präzisiert, daß in einem Ausdruck A im Kontext $[X,Y]$ eine Individuenvariable v quantifiziert vorkommt. Die folgende Definition beschreibt drei weitere wichtige Charakterisierungen einer Individuenvariablen v in einem Kontext $[X,Y]$ von A bzw. in A ohne Angabe eines Kontextes.

Definition 1.1.4.5

1. *Die Individuenvariable v kommt in dem Ausdruck A im Kontext $[X,Y]$* ***gebunden*** *vor*
   $=_{def}$ *1.1. Die Variable v kommt in A im Kontext $[X,Y]$ vor, sie ist dort jedoch nicht quantifiziert.*
   1.2. Es gibt Wörter X', X'', Y', Y'' aus $(ALPH)^*$, so daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= X'\forall v X'' \\ Y &= Y'Y'' \\ A &= X'\forall v X'' v Y' Y'' \end{aligned}$$

   gelten und $X''vY'$ ein Ausdruck aus $AUSD(\Sigma,V)$ ist.

2. *Die Individuenvariable v kommt in dem Ausdruck A im Kontext $[X,Y]$* ***frei*** *vor*
   $=_{def}$ *Die Variable v kommt in A im Kontext $[X,Y]$ vor, sie ist dort jedoch weder quantifiziert noch gebunden.*

3. *Die Individuenvariable v kommt in A* ***gebunden*** *(bzw.* ***frei****) vor*
   $=_{def}$ *Es gibt einen Kontext $[X,Y]$, so daß v in A im Kontext $[X,Y]$ gebunden (bzw. frei) vorkommt.*

4. *Die Individuenvariable v kommt in A* ***vollfrei*** *vor*
   $=_{def}$ *4.1. Die Individuenvariable v kommt in A vor, d. h. v ist ein Teil von A.*
   4.2. Die Zeichenreihe $\forall v$ kommt in A ***nicht*** *vor, d. h. $\forall v$ ist kein Teil von A.*

Bemerkungen zu den Definitionen 1.1.4.3 und 1.1.4.5:

1. Die Eigenschaften „quantifiziert“, „gebunden“ und „frei“ sind lokaler Natur, sofern sie sich auf eine Individuenvariable v in einem Ausdruck A und auf einen fixierten Kontext $[X,Y]$ beziehen. Sie bilden in diesem Falle ein „vollständiges“ System und schließen sich gegenseitig aus. (Man vergl. dazu Übungsaufgabe 1.1.4.4). Kommt v in A in einem anderen Kontext $[X',Y']$ vor, so kann sich das Zutreffen oder Nichtzutreffen der Eigenschaften grundlegend ändern.

2. Ist bei der Eigenschaft „frei“ kein Bezug auf einen fixierten Kontext angegeben, so ist sie „globaler“ Natur, d. h. sie bezieht sich auf den gesamten Ausdruck A. In demselben Sinne ist die Eigenschaft „vollfrei“ von „globaler“ Natur, weil sie sich ebenfalls auf den ganzen Ausdruck A und nicht auf einen fixierten Kontext bezieht.

3. Die durch die Definition 1.1.4.3 und 1.1.4.5 eingeführten „syntaktischen“ Begriffsbildungen werden wesentlich bei der semantischen Interpretation (siehe Abschnitt 1.2, speziell Unterabschnitt 1.2.6) und bei der Formulierung von Schlußregeln (siehe Unterabschnitt 1.4.4) verwendet.

Beispiel 1.1.4.3 Zur Veranschaulichung der Definition 1.1.4.5 betrachten wir nochmals den in Beispiel 1.1.4.2 diskutierten Ausdruck A, wobei wir durch die numerierten Pfeile bestimmte andere Individuenvariablen (einschließlich der dazugehörigen Kontexte) gekennzeichnet haben:

$$A =_{def} \underset{\uparrow_1}{P}z\underset{\uparrow_1}{f}(x) \vee \neg\forall x(\underset{\uparrow_2}{Q}x\underset{\uparrow_3}{g}(h, f(z)) \vee \forall x\forall y\underset{\uparrow_4\ \uparrow_5\ \uparrow_6\ \uparrow_7}{Q}xy).$$

Im Kontext $\overset{\uparrow}{1}$ kommt die Individuenvariable x frei vor. Im Kontext $\overset{\uparrow}{3}$ ist x gebunden, sie steht dort im Wirkungsbereich $Qxg(h, f(z)) \vee \forall x\forall yQxy$ der im Kontext $\overset{\uparrow}{2}$ quantifizierten Individuenvariablen x. Im Kontext $\overset{\uparrow}{6}$ ist x gebunden, sie steht dort im Wirkungsbereich $\forall yQxy$ der im Kontext $\overset{\uparrow}{4}$ quantifizierten Individuenvariablen x. Als Besonderheit merken wir an, daß die Individuenvariable x im Kontext $\overset{\uparrow}{6}$ außerdem im Wirkungsbereich der im Kontext $\overset{\uparrow}{2}$ quantifizierten Individuenvariablen steht. Diese „zweite“ Bindung von x im Kontext $\overset{\uparrow}{6}$ hat jedoch auf die spätere semantische Interpretation der Ausdrücke keinen Einfluß. Im Kontext $\overset{\uparrow}{7}$ ist y gebunden, weil y dort im Wirkungsbereich Qxy der im Kontext $\overset{\uparrow}{5}$ quantifizierten Variablen y steht. In A kommt schließlich z vollfrei vor, weil z in A vorkommt, jedoch $\forall z$ in A nicht vorkommt.

Übungsaufgabe 1.1.4.4
Man beweise:

In einem Ausdruck A komme die Individuenvariable v im Kontext $[X, Y]$ vor. Dann gilt für v in diesem Kontext **genau** einer der folgenden drei Fälle:

1. v kommt quantifiziert vor oder
2. v kommt gebunden vor oder
3. v kommt frei vor.

Anleitung. Induktion über die Stufe des Ausdrucks A.

In manchen Publikationen wird die Möglichkeit zur Konstruktion von Ausdrücken bei der Verwendung des Quantors $\forall$ auf die folgende Regel eingeschränkt (siehe [3], § 2, S. 15)

> *Wenn A ein Ausdruck ist und die Individuenvariable v kommt vollfrei in A vor, so ist $\forall vA$ ein Ausdruck.*

Diese Einschränkung hat Vorteile und Nachteile. Vorteil ist, daß „exotisch“ aussehende Ausdrücke, wie z. B. $\forall vQhh$ (wobei h eine Individuenkonstante und **keine** Individuenvariable ist), nicht gebildet werden können. Auf diese Weise wird die Interpretation einfacher und verständlicher (siehe Abschnitt 1.2). Großer Nachteil ist aber, daß die so eingeschränkte Ausdrucksmenge wesentlich komplizierter ist, z. B. bei ihrer maschinellen Verarbeitung oder wenn man eine sie generierende Grammatik angeben will.

Übungsaufgabe 1.1.4.5
Für den Spezialfall der in Beispiel 1.1.4.2 verwendeten Signatur Σ und Variablenmenge V gebe man ein CHOMSKY-Grammatik an, welche die eingeschränkte Sprache erzeugt.

Anleitung. Man führe zum Nichtterminal ⟨*Ausdruck*⟩ weitere nichtterminale Symbole, z. B.

⟨*Ausdruck*(v)⟩ : Ausdruck, in dem die Individuenvariable v vollfrei vorkommt
⟨*Ausdruck*$(\not{v})$⟩ : Ausdruck, in dem die Individuenvariable v **nicht** vorkommt

(analog für mehrere der zugelassenen Individuenvariablen) ein.

Schreibvarianten der Kalkülzeichen

Bezeichnung	andere Bezeichnungen	hier	Russell, Peano	Hilbert	Łukasiewicz	Hermes
Negation	Verneinung	$\neg$	$\sim$	$\bar{}$	N	$\neg$
Konjunktion	logisches Produkt	$\wedge$	.	&	K	$\wedge$
Implikation	wenn ..., so	$\rightarrow$	$\supset$	$\rightarrow$	C	$\rightarrow$
Alternative	Disjunktion, log. Summe	$\vee$	$\vee$	$\vee$	A	$\vee$
Äquivalenz	genau dann, wenn	$\leftrightarrow$	$\equiv$	$\sim$	E	$\leftrightarrow$
All-Quantor	Generalisator	$\forall x$	(x)	(x)	$\Pi\, x$	$\bigwedge_x$, $\bigwedge x$
Existenz-Quantor	Partikularisator	$\exists x$	$(\exists x)$	$(E\, x)$	$\Sigma\, x$	$\bigvee_x$, $\bigvee x$

1.2 Interpretation der Terme und Ausdrücke (Semantik I)

1.2.1 Algebraische Systeme

Gegeben sei eine Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha].$$

Sie ist insofern ein rein „syntaktisches“ Gebilde, als die Elemente der Mengen SO, FS, PS keine „semantische Bedeutung“ haben, also den Sorten $s \in SO$ keine Individuenbereiche, den Funktionssymbolen $f \in FS$ keine Funktionen und den Prädikatensymbolen $P \in PS$ keine Prädikate zugeordnet sind. Lediglich die Aritätsfunktion α ordnet den Symbolen $S \in FS \cup PS$ eine gewisse „syntaktische“ Bedeutung zu, insofern

$$\alpha(S) = s_1 \ldots s_n,$$

wobei $n \geq 0$, $s_1, \ldots, s_n \in SO$, eine Information darüber liefert, in welchen Sorten die Argumente und Werte der Funktionen bzw. Prädikate, die zur Interpretation von S verwendet werden dürfen, liegen müssen.

Wir definieren nun den Begriff *Algebraisches System*, der eine korrekte Definition dessen liefert, was man unter der *Interpretation* einer Signatur in Einklang mit den vorangegangenen verbalen Ausführungen intuitiv versteht.

Definition 1.2.1.1
Ein Quadrupel der Form

$$\Im = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

heiße ***Algebraisches System*** *genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. Σ *ist eine Signatur, etwa* $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$.
2. Δ *ist eine eindeutige Abbildung, die jeder Sorte* $s \in SO$ *einen* ***nichtleeren Individuenbereich*** Δ_s *von Individuen der Sorte* s *zuordnet.*
3. Φ *ist eine eindeutige Abbildung, die jedem Funktionssysmbol* $f \in FS$ *mit* $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ *und* $n \geq 1$ *eine* ***totale*** *Funktion* Φ_f *von* $\Delta_{s_1} \times \cdots \times \Delta_{s_n}$ *in* Δ_s *zuordnet; ist* $\alpha(f) = s$, *so gilt:* $\Phi_f \in \Delta_s$.
4. Π *ist eine eindeutige Abbildung, die jedem Prädikatensymbol* $P \in PS$ *mit* $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$ *und* $n \geq 1$ *eine* ***Teilmenge*** $\Pi_P \subseteq \Delta_{s_1} \times \cdots \times \Delta_{s_n}$ *zuordnet; ist* $\alpha(P) = e$, *so gilt* $\Pi_P \subseteq \{\emptyset\}$.

Bemerkungen zur Definition 1.2.1.1:

1. Soll die Signatur (also die erste „Komponente“) eines algebraischen Systems $\Im = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ besonders hervorgehoben werden, wollen wir von einem Σ-*algebraischen System* oder von einem *algebraischen System über* Σ oder von einer *Interpretation* der Signatur Σ sprechen. Die Gesamtheit aller algebraischen Systeme über einer fest gegebenen Signatur Σ bezeichnen wir durch $ALG(\Sigma)$.
2. Die Abbildung Δ *interpretiert* die Sorten $s \in SO$, d. h. Δ_s ist die *Bedeutung* von s. In Anwendungen werden als Sorten s häufig Buchstabenfolgen gewählt, die auf die spätere Interpretation hinweisen, z. B. *nat*, *real*, *string*. Gilt nun *tatsächlich* für Δ, daß

$$\begin{aligned} \Delta_{nat} &= \mathbb{N} \\ \Delta_{real} &= \mathbb{R} \\ \Delta_{string} &= (ALPH)^* \end{aligned}$$

wobei $ALPH$ ein (endliches) Alphabet von Buchstaben ist, so sagt man, daß Δ in diesen Fällen eine *Standardinterpretation* liefert. Gilt jedoch, was bei der Allgemeinheit des Interpretationsbegriffs durchaus möglich ist, daß

$$\Delta_{nat} = \mathbb{Z}$$

d. h. die Sorte *nat* wird entgegen der Standardinterpretation nicht als Menge der natürlichen Zahlen, sondern als Menge der ganzen Zahlen interpretiert, so sagt man, daß für die Sorte *nat* eine *Nicht-Standardinterpretation* vorliege.

Nicht-Standardinterpretationen spielen in der Mathematischen Logik und in deren Anwendungen (z. B. in der Informatik) eine wichtige Rolle, z. B. bei Unabhängigkeitsbeweisen für Axiomensysteme und in Nichtableitbarkeitsbeweisen.

Allerdings muß ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Termini „Standardinterpretation“ und auch „Nicht-Standardinterpretation“ durch die obigen Bemerkungen wie auch durch Formulierungen weiter unten nicht exakt definiert werden. Vielmehr sind sie allein im „intuitiven“ (d. h. umgangssprachlichen) Sinne zu verstehen.

3. Individuen der Sorte s, d. h. genauer bei gegebener interpretierender Abbildung Δ, werden Elemente aus dem Individuenbereich Δ_s durch ξ^s, γ^s, ζ^s (evtl. mit zusätzlichen Unterscheidungsindizes) bezeichnet. (Also sind ξ^s, γ^s, ζ^s Individuenvariablen der Metasprache.)

4. Die Abbildung Φ *interpretiert* die Funktionssymbole $f \in FS$, d. h. Φ_f ist die *Bedeutung* von f.

   Alle in Bemerkung 2 getroffenen Feststellungen gelten auch hier in analoger Weise. Haben wir z. B. in SO eine Sorte *nat* und gibt es in FS ein Symbol + mit

   $$+ : nat, nat \to nat,$$

   so wird unterstellt, daß bei der Standardinterpretation von *nat* als

   $$\Delta_{nat} = \mathbb{N}$$

   auch das Funktionssymbol „standard“ interpretiert wird, nämlich, daß Φ_+ die *Addition* im Bereich $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist.

   Es muß jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß der Interpretationsbegriff so allgemein („elastisch“) ist, daß selbst bei Standardinterpretation von *nat*, d. h. bei

   $$\Delta_{nat} = \mathbb{N}$$

   das Funktionssymbol + mit

   $$+ : nat, nat \to nat$$

   nicht notwendig als Addition in $\mathbb{N}$ zu interpretieren ist; jede andere Interpretation, die die Aritätsbedingung

   $$+ : nat, nat \to nat$$

   erfüllt, ist zulässig, z. B.

   $$\Phi_+(m,n) =_{def} m \cdot n$$

   bzw. $(m, n \in \mathbb{N})$

   $$\Phi_+(m,n) =_{def} m^n,$$

d. h. + wird durch Φ als Multiplikation bzw. als Potenzierung in der Menge $\mathbb{N}$ interpretiert. Allerdings würde man hier wieder von *Nicht-Standardinterpretation* (diesmal des Symbols +) sprechen, was z. B. zur Folge hat, daß bestimmte Axiome, die für + bei Standardinterpretation gelten, für + bei einer geeignet gewählten Nicht-Standardinterpretation nicht mehr gültig sind. So ist z. B. für +

$$\forall x \forall y \; x + y = y + x$$

bei Standardinterpretation gültig, dasselbe gilt auch bei der ersten Nicht-Standardinterpretation, während bei der zweiten der angegebenen Nicht-Standardinterpretationen

$$\forall x \forall y \; x + y = y + x$$

nicht mehr gültig ist, weil für $m, n \in \mathbb{N}$

$$m^n = n^m$$

allgemein *nicht* richtig ist.

Die Festlegung $\Phi_f \in \Delta_s$ im Falle eines „nullstelligen" Funktionssymbols f, d. h. $\alpha(f) = s$, ist dadurch motiviert, daß nullstellige *totale* Funktionen über Δ_s *Einermengen* $\{\xi^s\}$ mit $\xi^s \in \Delta_s$ sind, die offensichtlich durch das Element $\xi^s \in \Delta_s$ eindeutig festgelegt sind. Aus demselben Grund ist die Bezeichnung „Individuenkonstante" (der Sorte s) für ein (nullstelliges) Funktionssymbol f mit $\alpha(f) = s$ motiviert, weil solche Symbole bei einer gegebenen Interpretation Φ bestimmte Individuen aus Δ_s „bedeuten", entsprechend der Festlegung $\Phi_f \in \Delta_s$.

5. Die Abbildung Π *interpretiert* die Prädikatensymbole $P \in PS$, d. h. Π_P ist die *Bedeutung* von P, vermittelt durch die interpretierende Abbildung Π.

   Für $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$ mit $n \geq 1$ wird Π_P als Teilmenge des n-fachen Kartesischen Produkts der Individuenbereiche $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_n}$, also

   $$\Pi_P \subseteq \Delta_{s_1} \times \cdots \times \Delta_{s_n},$$

   festgelegt. Ist $\alpha(P) = e$, so haben wir

   $$\Pi_P \subseteq \{\emptyset\}$$

   festgelegt. In diesem Fall gibt es offenbar zwei Möglichkeiten, nämlich Π_P ist das leere Mengensystem bzw. Π_P ist das Mengensystem $\{\emptyset\}$, das genau die leere Menge als Element enthält. In Analogie zur Theorie der formalen Sprachen, wo für eine natürliche Zahl $n \geq 0$ das n-fache Produkt L^n einer formalen Sprache im Fall $n = 0$ als

   $$L^0 =_{def} \{e\}$$

   (e ist das leere Wort) definiert wird, setzen wir für eine beliebige Menge M das 0-fache Kartesische Produkt M^0 als

   $$M^0 =_{def} \{\emptyset\}$$

   fest. Eine 0-stellige Relation über M ist dann eine Teilmenge von M^0, also gibt es genau zwei solche Relationen, nämlich das leere Teilsystem (entspricht dem Wahrheitswert F bzw. 0) und die „volle" Menge $\{\emptyset\}$ (entspricht dem Wahrheitswert W bzw. 1).

6. Die durch **Definition 1.2.1.1** charakterisierten Interpretationen $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ sind eng verwandt mit mathematischen Strukturen, die in der Algebra (speziell in der universellen Algebra) als „algebraische Systeme“ oder „universelle Algebren“ studiert werden. Siehe z. B. COHN [6]. In der Algebra wird der „relationale Anteil“, d. h. die Menge PS der Prädikatensymbole, häufig als leere Menge gewählt bzw. im mehrsortigen Fall wird mit Hilfe der Sorte *bool* zu einer „operationalen“ Algebra übergegangen. Ist der „funktionale Anteil“, d. h. FS, leer oder — etwas allgemeiner — enthält FS nur Individuenkonstanten, so spricht man häufig von einem „Relativ“ (s. HERMES [13, Anhang 2]).

7. Wir hatten grundsätzlich vorausgesetzt, daß für jede Sorte $s \in SO$ der Individuenbereich Δ_s nichtleer ist, und ferner daß für jedes Funktionssymbol $f \in FS$ die Funktion Φ_f total ist. Lassen wir eine oder beide dieser Voraussetzungen fallen, so entstehen für die so definierten „partiellen“ Prädikatenkalküle grundsätzlich neue Probleme, die wir hier aus Platzgründen nicht diskutieren können. Siehe dazu [THIELE/EBBINGHAUS]. Wir betonen jedoch, daß solche Verallgemeinerungen in vielen Anwendungen der Prädikatenlogik, insbesondere in der Informatik, eine wichtige Rolle spielen.

   Aus denselben Anwendungsgründen ist in den letzten 20 Jahren im Rahmen der (universellen) Algebra eine umfangreiche Theorie **partieller** universeller Algebren entwickelt worden, in der zur partiellen Prädikatenlogik analoge Verallgemeinerungen (also leere Grundbereiche und/oder partielle Operationen) zugelassen sind. Siehe [BURMEISTER/REIDEL].

1.2.2 Zustände (Belegungen) der Individuenvariablen, Interpretation der Terme

Gegeben sei ein (in diesem Abschnitt fest gewähltes) algebraisches System

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi],$$

wobei

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

gelte. Außerdem sei zu jeder Sorte $s \in SO$ eine Menge V_s von Individuenvariablen v^s gegeben; ferner setzen wir

$$V =_{def} \bigcup_{s \in SO} V_s.$$

Während die Sorten, die Funktionssymbole und die Prädikatensymbole von Σ fest durch das gegebene algebraische System $\mathfrak{I}$ interpretiert sind, ist für die Individuenvariablen aus V das „Interpretationsproblem“ noch offen. Entsprechend der intuitiven Bedeutung des Wortes „Variable“ und entsprechend der Definition von Ausdrücken, wo durch „Quantifizieren“ von Variablen (z. B. mit $\forall$ — für alle — oder mit $\exists$ — es gibt ein) aus gegebenen Ausdrücken neue gebildet werden können, wird für Variablen *keine* feste Interpretation (wie durch $\mathfrak{I}$ für die Elemente aus SO, FS, PS realisiert) gewählt, sondern man faßt *alle* Möglichkeiten der (eindeutigen) Zuordnung von Individuen zu den gegeben Individuenvariablen ins Auge (wobei diese Zuordnungen selbstverständlich die „Sortenverträglichkeitsbedingung“ erfüllen müssen). Zur Bezeichnung solcher Zuordnungen wurde bisher in der („reinen“) Mathematischen Logik meistens das Wort „Belegung“ (der Individuenvariablen) verwendet, in den modernen Anwendungen (insbesondere in der Informatik, speziell in der dynamischen Logik und in der Theorie der Programmiersprachen) setzt sich zunehmend die Bezeichnung „Zustand“ (der Individuenvariablen) durch.

Definition 1.2.2.1 (Zustände der Individuenvariablen, Interpretation der Terme)

1. *σ heiße $\mathfrak{I}$-Zustand (oder $\mathfrak{I}$-Belegung) der Individuenvariablen aus V genau dann, wenn*

$$\sigma : \bigcup_{s \in SO} V_s \to \bigcup_{s \in SO} \Delta_s$$

mit $\sigma(v^s) \in \Delta_s$ für jedes $s \in SO$ und jedes $v \in V_s$.

2. *$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$*
   $=_{def}$ Dasjenige Element (Individuum) aus $\bigcup_{s \in SO} \Delta_s$, das dem Term T durch $\mathfrak{I}$ im $\mathfrak{I}$-Zustand σ zugeordnet ist.

   2.1. *$EL(v, \mathfrak{I}, \sigma) =_{def} \sigma(v)$, falls $v \in V$*

   2.2. *$EL(f, \mathfrak{I}, \sigma) =_{def} \Phi_f$, falls $f \in FS$ und $\alpha(f) \in SO$*

   2.3. *$EL(f(T_1, \ldots, T_n), \mathfrak{I}, \sigma) =_{def} \Phi_f(EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma))$, falls $f \in FS$ und $n \geq 1$.*

Bemerkungen zu Definition 1.2.2.1:

1. Bei der Definition des Begriffs „$\mathfrak{I}$-Zustand“ wird klar, warum wir bei der Definition der Individuenvariablen Overloading verboten haben. Gelte z. B. $v \in V_s \cap V_{s'}$ mit $s \neq s'$, so könnte man ein Δ mit $\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \emptyset$ wählen. In diesem Fall müßte nach Definition der $\mathfrak{I}$-Zustände gelten

$$\sigma(v) \in \Delta_s \text{ und } \sigma(v) \in \Delta_{s'},$$

   also

$$\sigma(v) \in \Delta_s \cap \Delta_{s'},$$

   was wegen

$$\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \emptyset$$

   nicht möglich ist.

   Diese Schwierigkeit kann sehr einfach behoben werden, indem man $\mathfrak{I}$-Zustände als eine *Menge* von Abbildungen der Form

$$\sigma = \{\sigma_s | s \in SO \text{ und } \sigma_s : V_s \to \Delta_s\}$$

   wählt. Jedoch müssen dann die Bedingungen 2.1, 2.2, 2.3 in Definition 1.2.2.1 entsprechend modifiziert werden, was möglich ist, jedoch einen größeren „Definitionsaufwand“ erfordert.

2. *EL* ist eine Abbildung, die von den drei Argumenten T, $\mathfrak{I}$ und σ abhängt, wobei in der Definition von $EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$ die Argumente $\mathfrak{I}$ und σ festgehalten werden und allein T variert. Die Bedingungen 2.1, 2.2 und 2.3 besagen dann offenbar, daß $EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$ durch Induktion über den „Kompliziertheitsgrad“ von T (siehe dazu Bemerkung 2 zu Definition 1.1.3.1) definiert wird.

3. Unmittelbar einsichtig ist die Beziehung: Ist T ein Term der Sorte s, so gilt

$$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma) \in \Delta_s.$$

Beispiel 1.2.2.1 Gegeben sei eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ mit $nat \in SO$, $+$ und $\cdot$ aus FS mit

$$\begin{aligned} + &: nat, nat \rightarrow nat \\ \cdot &: nat, nat \rightarrow nat. \end{aligned}$$

Gegeben sei ferner ein algebraisches System

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_{nat} &= \mathbb{N} \\ \Phi_{+} &= \text{Addition in } \mathbb{N} \\ \Phi_{\cdot} &= \text{Multiplikation in } \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d. h. durch $\mathfrak{I}$ ist eine *Standard-Interpretation* für die Symbole nat, $+$, $\cdot$ gegeben.

Es sei ferner festgelegt

$$V_{nat} = \{x, y, z\}.$$

Wir wählen nun einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ mit

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 2 \\ \sigma(y) &= 3 \\ \sigma(z) &= 6 \end{aligned}$$

und betrachten (in Infix-Notation) den Term

$$T =_{def} (x + y) \cdot z.$$

Dann kann man $EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$ „induktiv“ wie folgt ausrechnen, wobei $\oplus$ und $\odot$ die Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{N}$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} & EL((x + y) \cdot z, \mathfrak{I}, \sigma) \\ &= EL(x + y, \mathfrak{I}, \sigma) \odot EL(z, \mathfrak{I}, \sigma) \\ &= (EL(x, \mathfrak{I}, \sigma) \oplus EL(y, \mathfrak{I}, \sigma)) \odot EL(z, \mathfrak{I}, \sigma) \\ &= (2 \oplus 3) \odot 6 \\ &= 30 \end{aligned}$$

1.2.3 Interpretation der Ausdrücke; die Erfüllungsdefinition

Gegeben sei ein algebraisches System der Form

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi].$$

Ferner sei σ ein $\mathfrak{I}$-Zustand von V, d. h. eine eindeutige Abbildung

$$\sigma : V \rightarrow \bigcup_{s \in SO} \Delta_s$$

mit

$$\sigma(v^s) \in \Delta_s$$

für jedes $s \in SO$ und jedes $v^s \in V_s$. Die für viele folgende Betrachtungen grundlegende Definition können wir verbal zunächst wie folgt angeben:

$\sigma, \mathfrak{I} \models A$
$=_{def}$ Der $\mathfrak{I}$-Zustand σ und das algebraische System $\mathfrak{I}$ erfüllen (satisfy) den Ausdruck A.

Durch diese Definition soll erfaßt werden, daß der Ausdruck A bei der Interpretation $\mathfrak{I}$ (nämlich der Sorten $s \in SO$ durch Δ_s, der Funktionssymbole $f \in FS$ durch Φ_f und der Prädikatensymbole $P \in PS$ durch Π_P) sowie bei der Belegung der Individuenvariablen $v^s \in V_s$ durch $\sigma(v^s) \in \Delta_s$ *wahr* wird, d. h. daß A bei dieser Interpretation und Belegung den *Wahrheitswert* W (manchmal auch durch 1 bezeichnet) annimmt.

Wir definieren

$$\sigma, \mathfrak{I} \models A$$

durch Induktion über A. Dazu seien P ein Prädikatensymbol aus PS mit $\alpha(P) = e$, $QT_1 \ldots T_n$ sei ein prädikativer Ausdruck mit $Q \in PS$ und $n \geq 1$, und $T_1 \underset{s}{=} T_2$ sei eine Gleichung unserer Sprache $AUSD(\Sigma, V)$. Schließlich seien Ausdrücke der Form $\neg A$, $(A \to B)$ und $\forall v^s A$ mit $v^s \in V_s$ und $s \in SO$ gegeben. Durch $ID(\Delta_s)$ bezeichnen wir die Identitätsrelation über Δ_s, d. h.

$$ID(\Delta_s) =_{def} \{[\xi^s, \xi^s] | \xi^s \in \Delta_s\}$$

Für einen gegebenen $\mathfrak{I}$-Zustand σ und fixierte $v^s \in V_s$ und $\xi^s \in \Delta_s$ wird durch

$$\sigma \langle v^s := \xi^s \rangle$$

derjenige $\mathfrak{I}$-Zustand σ' bezeichnet, der wie folgt definiert ist für $v \in V$:

$$\sigma'(v) =_{def} \begin{cases} \sigma(v) & \text{, falls } v \neq v^s \\ \xi^s & \text{, falls } v = v^s \end{cases} .$$

Definition 1.2.3.1 (Erfüllungsdefinition)

1. $\sigma, \mathfrak{I} \models P \quad =_{def} \quad \Pi_P = \{\emptyset\}$
2. $\sigma, \mathfrak{I} \models QT_1 \ldots T_n \quad =_{def} \quad [EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma)] \in \Pi_Q$
3. $\sigma, \mathfrak{I} \models T_1 \underset{s}{=} T_2 \quad =_{def} \quad [EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma), EL(T_2, \mathfrak{I}, \sigma)] \in ID(\Delta_s)$
4. $\sigma, \mathfrak{I} \models \neg A \quad =_{def} \quad$ *Es gilt nicht, daß* $\sigma, \mathfrak{I} \models A$
5. $\sigma, \mathfrak{I} \models (A \to B) \quad =_{def} \quad$ *Wenn* $\sigma, \mathfrak{I} \models A$, *so* $\sigma, \mathfrak{I} \models B$
6. $\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v^s A \quad =_{def} \quad$ *Für jedes* $\xi^s \in \Delta_s$ *gilt:* $\sigma \langle v^s := \xi^s \rangle, \mathfrak{I} \models A$

Bemerkung zu Definition 1.2.3.1:
Im Unterschied zu Definition 1.2.2.1, wo bei der induktiven Definition „über T“ die „Parameter“ $\mathfrak{I}$ und σ festgehalten werden, wird bei der Induktion „über A“ in Definition 1.2.3.1 durch Bedingung 6 der gegebene $\mathfrak{I}$-Zustand σ zu dem $\mathfrak{I}$-Zustand $\sigma \langle v^s := \xi^s \rangle$ modifiziert.

1.2.4 Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von Ausdrücken

Auf der Grundlage der entwickelten Interpretation der Ausdrücke definieren wir nun für einen gegebenen Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ seine

- Allgemeingültigkeit in einem gegebenen algebraischen System der Form $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$
- Allgemeingültigkeit „schlechthin“, d. h. in jedem algebraischen System der Form $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$

sowie dual dazu seine

- Erfüllbarkeit in einem gegebenen algebraischen System der Form $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$
- Erfüllbarkeit „schlechthin“, d. h. es existiert ein algebraisches System der Form $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$, in welchem A erfüllbar ist.

Es sei ausdrücklich davor gewarnt, „*Erfüllen*“ im Sinne der Definition 1.2.3.1 mit der nachfolgend definierten „*Erfüllbarkeit*“ zu verwechseln.

Definition 1.2.4.1

1. *In $\mathfrak{I}$ ist A* ***allgemeingültig*** *(kurz: $\mathfrak{I} \models A$ oder $\mathfrak{I}\, ag\, A$)*
   $=_{def}$ *Für jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ gilt: $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.*
2. *In $\mathfrak{I}$ ist A* ***erfüllbar*** *(kurz: $\mathfrak{I}\, ef\, A$)*
   $=_{def}$ *es gibt einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ mit $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.*
3. *A ist* ***(schlechthin) allgemeingültig*** *(kurz: $\models A$ oder agA)*
   $=_{def}$ *Für jedes algebraische System $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{I} \models A$.*
4. *A ist* ***(schlechthin) erfüllbar*** *(kurz: efA)*
   $=_{def}$ *es gibt ein algebraisches System $\mathfrak{I}$, so daß $\mathfrak{I}\, ef\, A$.*

Die nachstehende Folgerung ergibt sich unmittelbar aus Definition 1.2.4.1, sie ist aber für Umformungen, die die Beziehung zwischen Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit betreffen, sehr wichtig. Sie wird auch manchmal „Dualitätstheorem“ für die Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit genannt.

Folgerung 1.2.4.1

1. *A ist allgemeingültig in $\mathfrak{I}$ genau dann, wenn $\neg A$ in $\mathfrak{I}$* nicht *erfüllbar ist.*
2. *A ist erfüllbar in $\mathfrak{I}$ genau dann, wenn $\neg A$ in $\mathfrak{I}$* nicht *allgemeingültig ist.*
3. *A ist allgemeingültig genau dann, wenn $\neg A$* nicht *erfüllbar ist.*
4. *A ist erfüllbar genau dann, wenn $\neg A$* nicht *allgemeingültig ist.*

Die nachstehende zweite Folgerung ist ebenfalls trivial, weil sie sich unmittelbar aus der Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A$ (siehe Definition 1.2.3.1) sowie der Definition des Existenzquantors $\exists$ ergibt; sie ist aber für viele folgende Betrachtungen und Beweise grundlegend wichtig, weil sie das Einfügen oder Weglassen von Allquantoren bzw. Existenzquantoren am Anfang eines Ausdrucks „erlaubt“.

Folgerung 1.2.4.2

1. *A ist allgemeingültig in $\mathfrak{I}$ genau dann, wenn $\forall v A$ in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig ist.*
2. *A ist erfüllbar in $\mathfrak{I}$ genau dann, wenn $\exists v A$ in $\mathfrak{I}$ erfüllbar ist.*

1.2.5 Die semantische Äquivalenz von Termen und Ausdrücken

Mit Hilfe der Allgemeingültigkeit definieren wir für Terme T_1 und T_2 (gleicher Sorte) und für beliebige Ausdrücke A_1 und A_2 verschiedene binäre Relationen, die sämtlich unter der Bezeichnung „semantische Äquivalenz“ zusammengefaßt werden und sowohl in der Theorie als auch in den Anwendungen eine wichtige Rolle spielen.

Definition 1.2.5.1

1. *T_1 ist mit T_2* ***semantisch äquivalent in*** *$\Im$ (kurz $T_1 \equiv_\Im T_2$ oder auch $T_1\, aeqsem_\Im\, T_2$)*
   $=_{def}$ Die Gleichung $T_1 = T_2$ ist in $\Im$ allgemeingültig, d. h. $\Im \models T_1 = T_2$.
2. *A_1 ist mit A_2* ***semantisch äquivalent in*** *$\Im$ ($A_1 \equiv_\Im A_2$ oder auch $A_1\, aeqsem_\Im\, A_2$)*
   $=_{def}$ Der Ausdruck $(A_1 \leftrightarrow A_2)$ ist in $\Im$ allgemeingültig, d. h. $\Im \models (A_1 \leftrightarrow A_2)$.
3. *T_1 ist mit T_2* ***(schlechthin) semantisch äquivalent*** *(kurz $T_1 \equiv T_2$ oder auch $T_1\, aeqsem\, T_2$)*
   $=_{def}$ Die Gleichung $T_1 = T_2$ ist (schlechthin) allgemeingültig, d. h. $\models T_1 = T_2$.
4. *A_1 ist mit A_2* ***(schlechthin) semantisch äquivalent*** *(kurz $A_1 \equiv A_2$ oder auch $A_1 aeqsem\, A_2$)*
   $=_{def}$ Der Ausdruck $(A_1 \leftrightarrow A_2)$ ist (schlechthin) allgemeingültig, d. h. $\models (A_1 \leftrightarrow A_2)$.

Theorem 1.2.5.1
Die Relationen $\equiv_\Im$ und $\equiv$ sind Äquivalenzrelationen

1. *für jedes $s \in SO$ über der Menge $TERM_s(\Sigma, V)$ aller Terme der Sorte s,*
2. *über der Menge $AUSD(\Sigma, V)$ aller Ausdrücke.*

Beweis:

1. Wir beweisen nur, daß $\equiv_\Im$ für beliebiges $\Im$ eine Äquivalenzrelation über den angegebenen Mengen ist. Daraus folgt dann trivial, daß dasselbe auch für $\equiv$ gilt.
2. Daß $\equiv_\Im$ eine Äquivalenzrelation über $TERM_s(\Sigma, V)$ ist, folgt aus der Tatsache, daß für $\Im = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ die Identitätsrelation $ID(\Delta_s)$ über Δ_s eine Äquivalenzrelation ist.
3. Daß $\equiv_\Im$ eine Äquivalenzrelation über $AUSD(\Sigma, V)$ ist, folgt aus der Tatsache, daß der Funktor $\leftrightarrow$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist in folgendem Sinne, wobei σ ein beliebiger $\Im$-Zustand ist und A, B, C beliebige Ausdrücke aus $AUSD(\Sigma, V)$ sind:
   1. $\sigma, \Im \models A \leftrightarrow A$.
   2. Wenn $\sigma, \Im \models A \leftrightarrow B$, so $\sigma, \Im \models B \leftrightarrow A$.
   3. Wenn $\sigma, \Im \models A \leftrightarrow B$ und $\sigma, \Im \models B \leftrightarrow C$, so $\sigma, \Im \models A \leftrightarrow C$.

■

Ein zweites wichtiges Theorem ist das *semantische Ersetzbarkeitstheorem*, formuliert einerseits für Terme (gleicher Sorte) und andererseits für Ausdrücke.

Zur Formulierung dieses Theorems benötigen wir die folgende Definition:

Definition 1.2.5.2
$ERS(W_1, W_2, W_3, W_4)$

$=_{def}$ *Durch Ersetzung von W_2 durch W_3 simultan an vorher* ***fixierten***, ***disjunkten*** *Positionen in W_1 entsteht W_4.*

Exakt formuliert soll dies bedeuten:
$ERS(W_1, W_2, W_3, W_4)$
$=_{def}$ 1. $W_4 = W_1$ *oder*

2. *Es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sowie Wörter $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$, so daß $W_1 = X_1W_2X_2W_2 \ldots X_nW_2X_{n+1}$ und $W_4 = X_1W_3X_2W_3 \ldots X_nW_3X_{n+1}$*

Als erstes müssen wir uns davon überzeugen, daß bei den durch die Relation *ERS* beschriebenen Ersetzungsprozeduren „syntaktische Korrektheit“ in dem Sinne erhalten bleibt, daß Terme wieder in Terme und Ausdrücke wieder in Ausdrücke übergehen. Dies wird durch das folgende „Syntaktische Korrektheitslemma“ beschrieben.

Lemma 1.2.5.2 (Syntaktisches Korrektheitslemma)

1. *Wenn $ERS(T_1, T_2, T_3, T_4)$ und T_1 ein Term der Sorte s ist sowie T_2 und T_3 Terme der gleichen Sorte sind, dann ist T_4 ein Term der Sorte s.*

2. *Wenn $ERS(A_1, A_2, A_3, A_4)$ und A_1, A_2, A_3 beliebige Ausdrücke sind, so ist A_4 ein Ausdruck.*

3. *Wenn $ERS(A_1, T_2, T_3, A_4)$ und A_1 ein Ausdruck ist sowie T_2 und T_3 Terme der gleichen Sorte sind, dann ist A_4 ein Ausdruck.*

Beweis:
Wir diskutieren, gleichsam als „Muster“, nur die Aussage 1 des Lemmas.

Gegeben seien ein Term T_1 der Sorte s sowie Terme T_2 und T_3 gleicher Sorte. Schließlich sei $ERS(T_1, T_2, T_3, T_4)$.

Wir beweisen durch Induktion über T_1, daß T_4 ein Term der Sorte s ist.

Bevor wir mit dem Induktionsbeweis beginnen, diskutieren wir zwei Trivialfälle.

1. Es hat *keine* Ersetzung stattgefunden.

   Dann gilt $T_4 = T_1$, also gilt die Behauptung nach der Voraussetzung über T_1.

2. Es hat eine Ersetzung stattgefunden und es gilt $T_1 = T_2$.

   In diesem Fall wird das „ganze“ T_1 durch T_3 ersetzt, also gilt für das Resultat T_4, daß $T_4 = T_3$. Also ist T_4 ein Term, und weil die Terme T_1, T_2, T_3 und T_4 sämtlich die gleiche Sorte haben, hat T_4 die Sorte s, weil dies auf T_1 zutrifft.

Wir führen nun den Induktionsbeweis über T_1.

Im *Anfangsschritt* wird T_1 als Individuenvariable v oder als Individuenkonstante c vorausgesetzt. Weil weder in einer Individuenvariablen noch in einer Individuenkonstanten als *echtes* Teilstück ein anderer Term vorkommen kann (siehe Definition der Individuenvariablen und der Individuenkonstanten), fällt der Anfangschritt unter die oben diskutierten Fälle 1 und 2, ist damit also bewiesen.

Im *Induktionsschritt* wird angenommen, daß T_1 die Form

$$T_1 = f(T_1^1, \ldots, T_n^1)$$

mit $n \geq 1$, $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ habe, somit T_ν^1 ein Term der Sorte s_ν für $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Ferner gelte

$$ERS(T_1, T_2, T_3, T_4).$$

Die Fälle 1 und 2 betrachten wir für T_1 als erledigt, also müssen die Ersetzungen im „Inneren" von T_1 stattgefunden haben, d. h. es muß *Wörter* $T_1^4, \ldots, T_n^4$ geben mit

$$ERS(T_\nu^1, T_2, T_3, T_\nu^4)$$

für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Dann hat T_4 offensichtlich die Form

$$T_4 = f(T_1^4, \ldots, T_n^4).$$

Nach *Induktionsvoraussetzung* ist dann T_ν^4 für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ ein Term der Sorte s_ν, also ist

$$T_4 = f(T_1^4, \ldots, T_n^4)$$

ein Term der Sorte s. Damit ist die *Induktionsbehauptung* bewiesen. ■

Das nun zu formulierende und zu beweisende Ersetzbarkeitstheorem ist im Grunde genommen schon aus der Schule zur Umformung arithmetischer Formeln bekannt. Weiß man z. B., daß allgemein die Gleichung

$$u \cdot (x + y) = u \cdot x + u \cdot y$$

gilt, kann man den Term

$$T_1 = u \cdot (x + y) + v \cdot (x + y)$$

zu

$$T_4 = u \cdot x + u \cdot y + v \cdot (x + y)$$

„umformen", indem man in T_1 die linke Seite $u \cdot (x + y)$ der angegebenen Gleichung durch ihre rechte Seite $u \cdot x + u \cdot y$ ersetzt, wobei durch das Wort „umformen" unterstellt wird, daß die Gleichung

$$u \cdot (x + y) = u \cdot x + u \cdot y$$

und damit die Gleichung

$$u \cdot (x + y) + v \cdot (x + y) = u \cdot x + u \cdot y + v \cdot (x + y)$$

allgemein gilt.

Was in der Schule „naiv" gemacht wird, muß hier, wo wir die betrachtete formale Sprache eventuell auch maschinell verarbeiten wollen (z. B. beim automatischen oder maschinellen Beweisen), streng in allgemeine Regeln gefaßt werden, wobei sorgfältig zwischen Syntax und Semantik, Theorie und Metatheorie unterschieden werden muß.

Das semantische Ersetzbarkeitstheorem wird, entsprechend dem voranstehenden Korrektheitslemma, in drei Formen formuliert.

Theorem 1.2.5.3 (Semantisches Ersetzbarkeitstheorem)

1. *Wenn* $ERS(T_1, T_2, T_3, T_4)$, *sind* T_1, T_2, T_3 *Terme und haben* T_2, T_3 *dieselbe Sorte, gilt schließlich*

   $$T_2 \equiv_\mathfrak{I} T_3,$$

   so gilt auch

   $$T_1 \equiv_\mathfrak{I} T_4.$$

2. *Wenn* $ERS(A_1, A_2, A_3, A_4)$, *sind* A_1, A_2, A_3 *beliebige Ausdrücke, gilt schließlich*

$$A_2 \equiv_{\mathfrak{I}} A_3,$$

so gilt auch

$$A_1 \equiv_{\mathfrak{I}} A_4.$$

3. *Wenn* $ERS(A_1, T_2, T_3, A_4)$, *ist* A_1 *ein Ausdruck, sind* T_2, T_3 *Terme gleicher Sorte, gilt schließlich*

$$T_2 \equiv_{\mathfrak{I}} T_3,$$

so gilt auch

$$A_1 \equiv_{\mathfrak{I}} A_4.$$

4. *Alle unter 1 bis 3 formulierten Aussagen gelten entsprechend, wenn man darin* $\equiv_{\mathfrak{I}}$ *durch* $\equiv$ *ersetzt.*

Bevor wir den Beweis des semantischen Ersetzbarkeitstheorems darstellen, formulieren und beweisen wir das folgende Lemma, das unmittelbar bei diesem Beweis verwendet wird. Dazu seien Terme $T_1^1, T_1^4, \ldots, T_n^1, T_n^4$ gegeben, wobei jeweils T_ν^1 und T_ν^4 die Sorte s_ν haben mögen ($\nu \in \{1, \ldots, n\}$). Außerdem seien $f \in FS$ und $P \in PS$ mit $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ und $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$. Schließlich betrachten wir die beliebigen Ausdrücke A_1', A_1'', A_4' und A_4'' sowie eine beliebige Individuenvariable v.

Lemma 1.2.5.4

1. *Wenn* $T_1^1 \equiv_{\mathfrak{I}} T_1^4$ *und ... und* $T_n^1 \equiv_{\mathfrak{I}} T_n^4$, *so* $f(T_1^1, \ldots, T_n^1) \equiv_{\mathfrak{I}} f(T_1^4, \ldots, T_n^4)$.

2. *2.1. Wenn* $A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4'$, *so* $\neg A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} \neg A_4'$.

   2.2. Wenn $A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4'$ *und* $A_1'' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4''$, *so* $(A_1' \to A_1'') \equiv_{\mathfrak{I}} (A_4' \to A_4'')$.

   2.3. Wenn $A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4'$, *so* $\forall v A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} \forall v A_4'$.

3. *Wenn* $T_1^1 \equiv_{\mathfrak{I}} T_1^4$ *und ... und* $T_n^1 \equiv_{\mathfrak{I}} T_n^4$, *so* $PT_1^1 \ldots T_n^1 \equiv_{\mathfrak{I}} PT_1^4 \ldots T_n^4$.

4. *Alle unter 1 bis 3 formulierten Aussagen gelten entsprechend, wenn man darin* $\equiv_{\mathfrak{I}}$ *durch* $\equiv$ *ersetzt.*

Beweis von Lemma 1.2.5.4:

ad 1:
Gegeben sei ein beliebiger $\mathfrak{I}$-Zustand σ. Nach Voraussetzung gilt dann

$$EL(T_\nu^1, \mathfrak{I}, \sigma) = EL(T_\nu^4, \mathfrak{I}, \sigma)$$

für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Also folgt für die Funktion Φ_f, daß

$$\Phi_f(EL(T_1^1, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n^1, \mathfrak{I}, \sigma)) = \Phi_f(EL(T_1^4, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n^4, \mathfrak{I}, \sigma)),$$

also gilt

$$EL(f(T_1^1, \ldots, T_n^1), \mathfrak{I}, \sigma) = EL(f(T_1^4, \ldots, T_n^4), \mathfrak{I}, \sigma).$$

Da σ beliebig war, folgt daraus

$$f(T_1^1, \ldots, T_n^1) \equiv_{\mathfrak{I}} f(T_1^4, \ldots, T_n^4).$$

Analog für $\equiv$.

ad 2.1:
Gegeben sei ein beliebiger $\mathfrak{I}$-Zustand σ. Aus der Vorausetzung

$$A'_1 \equiv_{\mathfrak{I}} A'_4$$

folgt unmittelbar, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \models A'_1 \text{ genau dann, wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models A'_4,$$

also, mit Kontraposition und der Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models \neg A$, folgt, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \neg A'_1 \text{ genau dann, wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models \neg A'_4,$$

also gilt nach Definition von $\leftrightarrow$

$$\sigma, \mathfrak{I} \models (\neg A'_1 \leftrightarrow \neg A'_4).$$

Da σ ein beliebiger $\mathfrak{I}$-Zustand war, erhalten wir aus der letzten Feststellung, daß

$$\neg A'_1 \equiv_{\mathfrak{I}} \neg A'_4$$

Da $\mathfrak{I}$ ein beliebiges algebraisches System war, folgt die Aussage 2.1 analog für $\equiv$.

ad 2.2:
Es sei σ wieder ein beliebiger $\mathfrak{I}$-Zustand. Aus den Voraussetzungen

$$A'_1 \equiv_{\mathfrak{I}} A'_4$$

und

$$A''_1 \equiv_{\mathfrak{I}} A''_4$$

erhalten wir sowohl

$$\sigma, \mathfrak{I} \models A'_1 \text{ genau dann, wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models A'_4$$

als auch

$$\sigma, \mathfrak{I} \models A''_1 \text{ genau dann, wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models A''_4.$$

Mit der Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models A \rightarrow B$ folgt aus den obigen zwei Feststellungen, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \models (A'_1 \rightarrow A''_1) \text{ genau dann, wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models (A'_4 \rightarrow A''_4),$$

also

$$\sigma, \mathfrak{I} \models (A'_1 \rightarrow A''_1) \leftrightarrow (A'_4 \rightarrow A''_4),$$

also, weil σ beliebig war,

$$(A'_1 \rightarrow A''_1) \equiv_{\mathfrak{I}} (A'_4 \rightarrow A''_4).$$

Analog für $\equiv$.

ad 2.3:
Aus der Voraussetzung

$$A'_1 \equiv_{\mathfrak{I}} A'_4$$

folgt, daß für *jeden* $\mathfrak{I}$-Zustand σ' gilt:

(1) $$\sigma', \mathfrak{I} \models A'_1 \text{ genau dann, wenn } \sigma', \mathfrak{I} \models A'_4.$$

Es sei nun für einen beliebigen $\mathfrak{I}$-Zustand σ

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A'_1.$$

Daraus folgt für jedes $\xi \in \Delta_s$ (wobei s die Sorte von v ist), daß

$$\sigma \langle v := \xi \rangle, \mathfrak{I} \models A'_1.$$

Setzen wir in der obigen Folgerung (1)

$$\sigma' =_{def} \sigma \langle v := \xi \rangle,$$

erhalten wir, daß

$$\sigma\langle v := \xi\rangle, \mathfrak{I} \models A_4',$$

und zwar für jedes $\xi \in \Delta_s$, also gilt nach Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A$ dann

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A_4'.$$

Die Umkehrung, nämlich

$$\text{wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A_4', \text{ so } \sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A_1',$$

ergibt sich analog; also erhalten wir

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v A_1' \leftrightarrow \forall v A_4',$$

also gilt, weil σ beliebig war,

$$\forall v A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} \forall v A_4'.$$

Analog für $\equiv$.

ad 3:
Wie bei Aussage 1 dieses Lemmas schließen wir zunächst für einen beliebigen $\mathfrak{I}$-Zustand σ, daß

$$EL(T_\nu^1, \mathfrak{I}, \sigma) = EL(T_\nu^4, \mathfrak{I}, \sigma)$$

für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Für die n-stellige Relation Π_P folgt daraus, daß

$$[EL(T_1^1, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n^1, \mathfrak{I}, \sigma)] \in \Pi_P$$

gilt genau dann, wenn

$$[EL(T_1^4, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n^4, \mathfrak{I}, \sigma)] \in \Pi_P,$$

also, nach Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ für prädikative Ausdrücke A, folgt, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \models PT_1^1 \ldots T_n^1$$

genau dann gilt, wenn

$$\sigma, \mathfrak{I} \models PT_1^4 \ldots T_n^4,$$

also, weil σ beliebig war,

$$PT_1^1 \ldots T_n^1 \equiv_{\mathfrak{I}} PT_1^4 \ldots T_n^4.$$

Damit ist Lemma 1.2.5.4 bewiesen. ■

Beweis von Theorem 1.2.5.3:
Aussage 1 dieses Theorems wird durch Induktion über T_1 bewiesen. Im Induktionsschritt benutzen wir dazu Aussage 1 von Lemma 1.2.5.4.

Zum Beweis der Aussagen 2 und 3 von Theorem 1.2.5.3 schließt man induktiv über A_1, wobei im ersten Fall im Induktionsschritt die Aussagen 2.1, 2.2 und 2.3 von Lemma 1.2.5.4 und im zweiten Fall zusätzlich die Aussage 3 von Lemma 1.2.5.4 benutzt werden.

Wir beweisen hier, wieder gleichsam als Muster analog zu Lemma 1.2.5.2, nur Aussage 2.

Bevor wir mit dem Induktionsbeweis beginnen, diskutieren wir in Analogie zum Beweis von Lemma 1.2.5.2 zunächst zwei Trivialfälle.

1. Es hat keine Ersetzung stattgefunden, wobei $ERS(A_1, A_2, A_3, A_4)$ gilt.

   Dann folgt

   $$A_4 = A_1,$$

   d. h. A_4 und A_1 sind (syntaktisch) dieselben Wörter (über dem Grundalphabet). Also folgt die Behauptung

   $$A_4 \equiv_{\mathfrak{I}} A_1 \text{ (bzw. } A_4 \equiv A_1)$$

   aus Theorem 1.2.5.1, welches u. a. die Reflexivität der Relationen $\equiv_{\mathfrak{I}}$ und $\equiv$ feststellt.

2. Es gilt $ERS(A_1, A_2, A_3, A_4)$ und es hat tatsächlich eine Ersetzung stattgefunden und wir haben $A_1 = A_2$, d. h. A_1 und A_2 sind (syntaktisch) dieselben Wörter.

   Dann gilt auch
   $$A_4 = A_3,$$
   somit folgt die Behauptung
   $$A_4 \equiv_{\mathfrak{I}} A_1 \text{ (bzw. } A_4 \equiv A_1)$$
   trivial aus der Voraussetzung
   $$A_2 \equiv_{\mathfrak{I}} A_3 \text{ (bzw. } A_2 \equiv A_3).$$

Wir führen nun den Induktionsbeweis über A_1.

Im *Anfangsschritt* wird A_1 als prädikativer Ausdruck der Form
$$P \quad \text{mit } \alpha(P) = e$$
oder
$$PT_1 \ldots T_n \quad \text{mit } n \geq 1$$
oder als Gleichung der Form
$$T_1 = T_2$$
vorausgesetzt. Da ein derartiger Ausdruck keinen echten Teilausdruck enthalten kann, wird der Anfangsschritt durch die Fälle 1 und 2 überdeckt.

Im *Induktionsschritt* wird angenommen, daß A_1 eine der Formen

1. $A_1 = \neg A_1'$
2. $A_1 = (A_1' \rightarrow A_1'')$
3. $A_1 = \forall v A_1'$

hat. Außerdem können wir die Trivialfälle 1 und 2 für A_1 als erledigt betrachten, also müssen die Ersetzungen im „Innern“ von A_1, d. h. in den Fällen 1 und 3 in A_1' und im Falle 2 in A_1' und/oder A_1'' stattgefunden haben.

Fall 1:
Die Ersetzung in A_1' bedeutet, daß es ein A_4' gibt mit
$$ERS(A_1', A_2, A_3, A_4')$$
und
$$A_4 = \neg A_4'.$$
Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf A_1') erhalten wir dann
$$A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4' \text{ (bzw. } A_1' \equiv A_4'),$$
also folgt mit Aussage 2.1 von Lemma 1.2.5.4, daß
$$\neg A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} \neg A_4' \text{ (bzw. } \neg A_1' \equiv \neg A_4').$$
Das war aber zu zeigen.

Fall 2:
Die Ersetzung in A_1' und/oder in A_1'' bedeutet, daß es Ausdrücke A_4' und A_4'' gibt mit

$$ERS(A_1', A_2, A_3, A_4')$$

und

$$ERS(A_1'', A_2, A_3, A_4'')$$

und

$$A_4 = (A_4' \to A_4'').$$

Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf A_1' und A_1'') erhalten wir

$$A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4' \text{ (bzw. } A_1' \equiv A_4')$$

und

$$A_1'' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4'' \text{ (bzw. } A_1'' \equiv A_4'').$$

Mit Aussage 2.2 von Lemma 1.2.5.4 ergibt sich daraus, daß

$$(A_1' \to A_1'') \equiv_{\mathfrak{I}} (A_4' \to A_4'') \text{ (bzw. } (A_1' \to A_1'') \equiv (A_4' \to A_4'')).$$

Das war aber zu zeigen.

Fall 3:
Die Ersetzung in A_1' bedeutet (wie im Fall 1), daß es einen Ausdruck A_4' gibt mit

$$ERS(A_1', A_2, A_3, A_4')$$

und

$$A_4 = \forall v A_4'.$$

Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf A_1') erhalten wir

$$A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} A_4' \text{ (bzw. } A_1' \equiv A_4'),$$

also folgt mit Aussage 2.3 von Lemma 1.2.5.4

$$\forall v A_1' \equiv_{\mathfrak{I}} \forall v A_4' \text{ (bzw. } \forall v A_1' \equiv \forall v A_4').$$

Das war aber zu zeigen.

Damit ist Theorem 1.2.5.3 bewiesen. ■

Als nächstes werden wir darstellen, wie auf der Grundlage der Relationen $\equiv_{\mathfrak{I}}$ und $\equiv$ sehr enge Beziehungen zwischen Logik und Algebra hergestellt werden können, genauer, daß die Menge $AUSD(\Sigma, V)$ als Grundlage zur Konstruktion von Verbänden, distributiven Verbänden und BOOLEschen Algebren dienen kann.

Dazu beginnen wir mit dem folgenden

Lemma 1.2.5.5
Für beliebige Ausdrücke $A, B, C \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt

1.1 $A \vee B \equiv_{\mathfrak{I}} B \vee A$

1.2 $(A \vee B) \vee C \equiv_{\mathfrak{I}} A \vee (B \vee C)$

1.3 $A \vee (A \wedge B) \equiv_{\mathfrak{I}} A$

2.1 $A \wedge B \equiv_{\mathfrak{I}} B \wedge A$

2.2 $(A \wedge B) \wedge C \equiv_{\mathfrak{I}} A \wedge (B \wedge C)$

2.3 $A \wedge (A \vee B) \equiv_{\mathfrak{I}} A$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen von $\equiv_{\mathfrak{I}}$, $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ und $\vee, \wedge$.

Da dabei keinerlei Schwierigkeiten auftreten, überlassen wir die weitere Durchführung des Beweises dem Leser. ■

Da $\equiv_{\mathfrak{I}}$ eine Äquivalenzrelation über der Menge $AUSD(\Sigma, V)$ ist, können wir zur Menge $AUSD(\Sigma, V)/\equiv_{\mathfrak{I}}$ der Restklassen von $AUSD(\Sigma, V)$ nach $\equiv_{\mathfrak{I}}$ übergehen. Lemma 1.2.5.5 besagt dann, daß wir die Operationen $\vee$ und $\wedge$ „klasseninvariant“ auf die Restklassen übertragen können. Die übertragenen Operationen deuten wir durch $\sqcup$ und $\sqcap$ an.

Theorem 1.2.5.6
Die Menge $AUSD(\Sigma, V)/\equiv_{\mathfrak{I}}$ *bildet bezüglich der Operationen* $\sqcup$ *und* $\sqcap$ *einen Verband.*

Beweis
Unmittelbar aus Lemma 1.2.5.5 auf Grund der obigen Feststellungen. ■

In den folgenden zwei Lemmata und zwei Theoremen wird festgestellt, daß $AUSD(\Sigma, V)$ bezüglich der Konnektoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ weitere wichtige (und wohlbekannte) Eigenschaften erfüllt.

Lemma 1.2.5.7
Für beliebige Ausdrücke $A, B, C \in AUSD(\Sigma, V)$ *gilt*

1. $A \vee (B \wedge C) \equiv_{\mathfrak{I}} (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
2. $A \wedge (B \vee C) \equiv_{\mathfrak{I}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Beweis
Wie im Beweis von Lemma 1.2.5.5 durch Rückgang auf die Definitionen von $\equiv_{\mathfrak{I}}$, $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ und $\vee, \wedge$. ■

Theorem 1.2.5.8
Die Menge $AUSD(\Sigma, V)/\equiv_{\mathfrak{I}}$ *bildet bezüglich der Operationen* $\sqcup$ *und* $\sqcap$ *einen distributiven Verband.*

Beweis
Unmittelbare Folgerung aus Theorem 1.2.5.6 und Lemma 1.2.5.7. ■

Lemma 1.2.5.9
Für jedes $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$ *gilt:*

Wenn $\mathfrak{I} \models B$, *so*

1. $A \vee \neg B \equiv_{\mathfrak{I}} A$
2. $A \wedge B \equiv_{\mathfrak{I}} A$

3. $A \vee \neg A \equiv_{\mathfrak{I}} B$

4. $A \wedge \neg A \equiv_{\mathfrak{I}} \neg B$

Beweis
Rückgang auf die betreffenden Definitionen. ■

Wir definieren nun (für das fixierte $\mathfrak{I}$):

$$0_{\mathfrak{I}} =_{def} \{\neg B \,|\, B \in AUSD(\Sigma, V) \text{ und } \mathfrak{I} \models B\}$$
$$e_{\mathfrak{I}} =_{def} \{B \,|\, B \in AUSD(\Sigma, V) \text{ und } \mathfrak{I} \models B\}$$

Aus der Bedingung 1 bzw. 2 folgt, daß $0_{\mathfrak{I}}$ Nullelement bzw. $e_{\mathfrak{I}}$ Einselement des in Theorem 1.2.5.8 erwähnten Verbandes ist.

Schließlich können wir auf Grund von Lemma _____ feststellen, daß auch die Operation $\neg$ „klasseninvariant“ auf die Restklassen aus $AUSD(\Sigma, V)/\equiv_{\mathfrak{I}}$ übertragen werden kann. Die übertragene Operation wird durch $\complement$ (Komplement) bezeichnet.

Ist ein $\mathfrak{K} \in AUSD(\Sigma, V)/\equiv_{\mathfrak{I}}$ gegeben, so folgt mit den Bedingungen 3 und 4 von Lemma 1.2.5.9, daß

$$\mathfrak{K} \sqcup \complement\mathfrak{K} = e_{\mathfrak{I}}$$
$$\mathfrak{K} \sqcap \complement\mathfrak{K} = 0_{\mathfrak{I}}.$$

Somit das folgende

Theorem 1.2.5.10
Die Menge $AUSD(\Sigma, V)/\equiv_{\mathfrak{I}}$ bildet bezüglich der Operationen $\sqcup$, $\sqcap$ und $\complement$ eine Boolesche *Algebra mit dem Nullelement $0_{\mathfrak{I}}$ und dem Einselement $e_{\mathfrak{I}}$.*

In dem folgenden Theorem werden noch einige weitere Möglichkeiten zur äquivalenten Umformung von Ausdrücken zusammengestellt, die in Anwendungen häufig sehr nützlich sind. Gegeben seien beliebige $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$.

Theorem 1.2.5.11
1. *Idempotenz von $\vee$ und $\wedge$*

$$A \vee A \equiv_{\mathfrak{I}} A$$
$$A \wedge A \equiv_{\mathfrak{I}} A$$

2. *Wenn $\mathfrak{I} \models B$, so*

$$A \vee B \equiv_{\mathfrak{I}} B$$
$$A \wedge \neg B \equiv_{\mathfrak{I}} \neg B$$

3. De Morgansche *Regeln:*

$$\neg(A \vee B) \equiv_{\mathfrak{I}} \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv_{\mathfrak{I}} \neg A \vee \neg B$$

4. *Satz der doppelten Negation*

$$\neg\neg A \equiv_{\mathfrak{I}} A$$

5. *Kontrapositionssätze*

$$\neg A \to \neg B \equiv_{\mathfrak{I}} B \to A$$
$$\neg A \leftrightarrow \neg B \equiv_{\mathfrak{I}} A \leftrightarrow B$$

6. *Prämissenvertauschung*

$$A \to (B \to C) \equiv_{\mathfrak{I}} B \to (A \to C)$$

7. *Prämissenverbindung ($\Rightarrow$) und Prämissenzerlegung ($\Leftarrow$)*

$$A \to (B \to C) \equiv_{\mathfrak{I}} A \wedge B \to C$$

Beweis
Rückgang auf die betreffenden Definitionen. ■

Bemerkung:
Die Lemmata und Theoreme 1.2.5.5 bis 1.2.5.11 gelten entsprechend, wenn man darin die Relation $\equiv_{\mathfrak{I}}$ durch $\equiv$ (d. h. $\mathfrak{I} \models A \leftrightarrow B$ für jede Interpretation $\mathfrak{I}$) ersetzt. Entsprechend definiert man

$$0 =_{def} \{\neg B \,|\, B \in AUSD(\Sigma, V) \text{ und } \models B\}$$
$$e =_{def} \{B \,|\, B \in AUSD(\Sigma, V) \text{ und } \models B\}\,.$$

1.2.6 Pränexe Normalformen

Gleichsam zur *Rechtfertigung* von Formulierung und Beweis des semantischen Ersetzbarkeitstheorems diskutieren wir eine nicht-triviale Anwendung dieses Satzes, indem wir zeigen, daß jeder Ausdruck sich semantisch äquivalent in eine *pränexe* Normalform umformen läßt.

Pränexe Normalformen spielen in den folgenden Untersuchungen eine große Rolle, z. B. bilden sie beim Aufbau der logischen Programmierung den Ausgangspunkt für das Verfahren der SKOLEM*isierung* eines Ausdrucks, das zu einer speziellen pränexen Normalform (der *universalen* Normalform) führt.

Wir beginnen mit der Definition der pränexen Normalformen. Gegeben sei $A \in AUSD(\Sigma, V)$.

Definition 1.2.6.1

1. *A heiße* ***pränexe Normalform***
   $=_{def}$ *1.1. A ist quantorenfrei* ***oder***
   1.2. Es gibt eine natürliche Zahl $n \geqq 1$, Individuenvariablen $v_1, \ldots, v_n \in V$, Quantoren $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ sowie einen quantorenfreien Ausdruck B, so daß A die Form $Q_1 v_1 \ldots Q_n v_n B$ hat.

2. *Die Zeichenreihe $Q_1 v_1 \ldots Q_n v_n$ heißt* ***Präfix*** *der pränexen Normalform A.*

Die nachstehend definierten speziellen pränexen Normalformen spielen eine entscheidende Rolle in vielen folgenden Betrachtungen, insbesondere bei der logischen Fundierung der logischen Programmierung. Wir definieren sie schon an dieser Stelle, um die **Spezialisierung** gegenüber beliebigen pränexen Normalformen deutlich werden zu lassen und weil wir schon im nächsten Abschnitt 1.2.7 wichtige Eigenschaften dieser Normalformen feststellen werden.

Definition 1.2.6.2

1. *A heiße* ***universale Normalform***
   $=_{def}$ 1. *A ist pränexe Normalform*
   2. *Ist das Präfix von A nichtleer, so kommen darin nur Allquantoren vor.*

2. *A heiße* ***existentielle Normalform***
   $=_{def}$ 1. *A ist pränexe Normalform*
   2. *Ist das Präfix von A nichtleer, so kommen darin nur Existenzquantoren vor.*

Bemerkung:
Wir hatten den Existenzquantor $\exists$ definitorisch durch

$$\exists v C =_{def} \neg\forall\neg C$$

eingeführt. In der obigen Definition machen wir von dieser „Abkürzung“ Gebrauch. Man könnte die obige Definition natürlich auch ohne Verwendung von $\exists$ formulieren; in diesem Fall müßte man die Bedingung

$$Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$$

durch

$$Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \neg\forall\neg\}$$

ersetzen.

Bei der semantisch äquivalenten Umformung eines Ausdrucks in eine pränexe Normalform wird es gelegentlich notwendig sein, gewisse Individuenvariablen in einem Ausdruck in andere „umzubenennen“ bzw. für diese andere Individuenvariablen einzusetzen. Dabei sind gewisse Regeln zu verwenden und gewisse Einschränkungen („Vorsichtsmaßnahmen“) zu beachten, weil sonst bei der Umformung die semantische Äquivalenz verlorengehen kann.

Die folgende Definition soll diese Situation präzisieren. Gegeben seien ein beliebiger Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ sowie die Individuenvariablen $x, y \in V$.

Definition 1.2.6.3

1. *Umbenennung.*

   Wir setzen voraus, daß x und y dieselbe Sorte haben und y nicht in A vorkommt. Dann sei
   $A^{x}/_{y}$
   $=_{def}$ *Derjenige Ausdruck, der aus dem Ausdruck A dadurch entsteht, daß man die Individuenvariable x an jeder Position in A, wo sie* ***frei*** *vorkommt, durch die Individuenvariable y (simultan) ersetzt.*

2. *Gebundene Umbenennung.*

   Wir setzen für den gegebenen Ausdruck A voraus, daß in A an einer bestimmten Position der Ausdruck $\forall x B$ (als Teil von A) vorkommt. Ferner komme y in $\forall x B$ nicht vor. Wir bilden

nun den Ausdruck $\forall y B^{\,x}/_{y}$ *und ersetzen in* A *den Ausdruck* $\forall x B$ *an der betrachteten Position durch* $\forall y B^{\,x}/_{y}$. *Dadurch gehe* A *in* A' *über.*

Man sagt dann, daß durch eine ***gebundene Umbenennung*** *der Ausdruck* A' *aus* A *entstehe.*

Bemerkungen zu Definition 1.2.6.3:

1. Diese Umbenennungen sind im allgemeinen nur dann durchführbar, wenn man in der betreffenden Sorte „hinreichend viele" Individuenvariablen zur Verfügung hat, damit es eine Individuenvariable y gibt, die in A bzw. in $\forall x B$ nicht vorkommt. Dafür ist z. B. hinreichend, daß die Variablenmenge V_s der betreffenden Sorte s mindestens abzählbar unendlich viele Individuenvariablen enthält, weil in jedem Ausdruck, also in A und auch in $\forall x B$, nur höchstens endlich viele Individuenvariablen vorkommen können.

2. Bei der hier definierten freien Umbenennung ist gesichert, daß der „ursprüngliche Zustand" durch eine „Rückumbenennung" wieder hergestellt werden kann. Hat A etwa die Form $\forall z P x y z$, so kann durch die freie Umbenennung von x in u, wobei $u \notin \{x, y, z\}$, der gegebene Ausdruck in $\forall z P u y z$ überführt werden. Außerdem erhält man durch die „Rückumbenennung" von u in x den ursprünglich gegebenen Ausdruck zurück, falls man durch geeignete gebundene Umbenennungen sichert, daß x in dem Ausdruck, auf den Rückumbenennung angewendet werden soll, nicht vorkommt.

3. Nimmt man in $\forall z P x y z$ die „verallgemeinerte freie" Umbenennung von x in y vor (was nach Punkt 1 der obigen Definition nicht möglich ist), so erhält man $\forall z P y y z$. Unmittelbar ist klar, daß man aus $\forall z P y y z$ weder durch freie noch durch gebundene Umbenennung wieder den Ausgangsausdruck $\forall z P x y z$ zurückgewinnen kann. Aus diesem Grunde haben wir derartige Umbenennungen in unserer Definition der freien Umbenennungen ausgeschlossen. Wie wir später sehen werden (siehe Abschnitt 1.4.4), sind die beschriebenen „verallgemeinerten freien" Variablenumbenennungen ein Spezialfall der allgemeinen Termeinsetzung, wir nennen sie deshalb **Variableneinsetzung**.

4. Erwähnt sei schon hier (siehe Lemma _____), daß bei freien Umbenennungen die Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks in beiden Richtungen erhalten bleibt, während bei Variableneinsetzungen dies nur für die Richtung vom gegebenen Ausdruck zu dem durch die Variableneinsetzungen erhaltenen gilt.

5. Wir diskutieren nun eine Form von „verbotener" freier Umbenennung, die deshalb „verboten" ist, weil dadurch die Allgemeingültigkeit des betrachteten Ausdrucks verlorengehen kann, eine sowohl in Theorie als auch in den Anwendungen unangenehme und nicht akzeptierbare Erscheinung. Als Ursache ist **Variablenkonfusion** (1. Art) zu nennen, d. h., daß beim Umbenennen einer an einer bestimmten Stelle frei vorkommenden Variablen die „neue" Variable gebunden wird, weil sie in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät, obwohl die „alte" Variable an der betreffenden Stelle frei vorkam.

   Zur Veranschaulichung dieses Effekts betrachten wir den Ausdruck

$$A =_{def} \forall x x = y \rightarrow \forall z z = y,$$

   der offenbar schlechthin allgemeingültig ist. Daraus erhält man mit der Umbenennung y in x (die offenbar nach Definition der freien Umbenennung nicht möglich ist) den Ausdruck

$$A' =_{def} \forall x x = x \rightarrow \forall z z = x,$$

   der offenbar semantisch äquivalent ist mit

$$A'' =_{def} \forall z z = x.$$

Daraus folgt aber (trivial), daß A' nicht mehr schlechthin allgemeingültig ist. Als Ursache dafür ist klar erkennbar, daß beim Einsetzen von x für y in dem Teilausdruck

$$\forall x\, x = y$$

von A die Variable x (an der Stelle, wo y steht!) gebunden wird.

Dieser Effekt wird im folgenden bei der Formulierung und der Verwendung der Termeinsetzungsregel (innerhalb der Definition des regelbasierten Schließens, siehe Abschnitt 1.4.4) sehr sorgfältig beachtet werden müssen.

6. Wir diskutieren ferner eine zweite Art von Variablenkonfusion, die bei einer „uneingeschränkten“ gebundenen Umbenennung (d. h. die nicht die in Definition 1.2.6.3 formulierten Einschränkungen berücksichtigt) die Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks verletzen kann.

   In der Definition der gebundenen Umbenennung hatten wir beim Übergang von $\forall x B$ in $\forall y B\,{}^{x}/_{y}$ die Variable y so gewählt, daß sie in $\forall x B$ nicht vorkommt. Dadurch wird Variablenkonfusion im folgenden Sinne vermieden: Es kann nicht passieren, daß eine Variable, die in $\forall x B$ in einer bestimmten Position frei vorkommt, an dieser Position in $\forall y B\,{}^{x}/_{y}$ gebunden ist. Würde man Variablenkonfusion in diesem Sinne zulassen, könnte es ebenfalls passieren, daß die Allgemeingültigkeit in einer gegebenen Interpretation verloren geht. Dazu betrachten wir wiederum den Ausdruck

$$A =_{def} \forall x\, x = y \rightarrow \forall z z = y.$$

   Wir setzen

$$B =_{def} x = y$$

   und nehmen nun in dem Teilausdruck

$$\forall x B = \forall x\, x = y$$

   eine (uneingeschränkte) gebundene Umbenennung zu

$$\forall y B\,{}^{x}/_{y} = \forall y\, y = y$$

   vor. Auf diese Weise geht A in

$$A^* =_{def} \forall y\, y = y \rightarrow \forall z z = y$$

   über, und A^* ist nicht (schlechthin) allgemeingültig, obwohl dies für A zutrifft.

7. Ein Beispiel.

   Gegeben

$$A =_{def} \forall z(P x z \rightarrow Q x) \wedge S v \wedge \forall x(R x \rightarrow S u)$$

   7.1. Freie Umbenennung

$$A\,{}^{x}/_{y} =_{def} \forall z(P y z \rightarrow Q y) \wedge S v \wedge \forall x(R x \rightarrow S u)$$

   Die Variable y kommt in A nicht vor, also liegt eine freie Umbenennung im Sinne von Definition 1.2.6.3 vor.

7.2. Rückumbenennung von $A^{\,x}/_{y}$ in A.

Dies ist durch eine freie Umbenennung nicht unmittelbar möglich, weil x in $A^{\,x}/_{y}$ (gebunden) vorkommt. Wir führen deshalb zunächst $A^{\,x}/_{y}$ durch eine gebundene Umbenennung in

$$\left(A^{\,x}/_{y}\right)' = \forall z(Pyz \to Qy) \wedge Sv \wedge \forall w(Rw \to Su)$$

über, danach bilden wir

$$\left(A^{\,x}/_{y}\right)'^{\,y}/_{x} = \forall z(Pxz \to Qx) \wedge Sv \wedge \forall w(Rw \to Su),$$

schließlich erhalten wir durch eine weitere gebundene Umbenennung den ursprünglichen Ausdruck A zurück.

$$\left(\left(A^{\,x}/_{y}\right)'^{\,y}/_{x}\right)' = A = \forall z(Pxz \to Qx) \wedge Sv \wedge \forall x(Rx \to Su)$$

7.3. Variableneinsetzung. Termeinsetzung.

Übergang durch Variableneinsetzung von v für x zu

$$A_1 = \forall z(Pvz \to Qv) \wedge Sv \wedge \forall x(Rx \to Su)$$

Hier gibt es keine Möglichkeit, durch freie oder gebundene Umbenennung den Ausdruck A aus A_1 zurückzugewinnen.

8. Die definierten Operatoren der freien und der gebundenen Umbenennung sowie die beiden betrachteten Arten von Variablenkonfusion sind eigentlich vom Rechnen mit Integralen, in deren Integranden Parameter vorkommen, bestens bekannt, wenn man das Differential dx zum Quantor $\forall x$ in Analogie setzt.

Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Gegeben sei eine (reelle, integrierbare) dreistellige Funktion $\varphi(s,t,x)$. Damit erhalten wir die zweistellige Funktion $F(s,t)$ durch

$$F(s,t) =_{def} \int_0^1 \varphi(s,t,x)dx.$$

8.1. Freie Umbenennung

Ist y eine Variable, die von s,t,x verschieden ist, können wir in dem Integralausdruck die freie Umbenennung s in y ausführen und erhalten

$$F(y,t) = \int_0^1 \varphi(y,t,x)dx,$$

erhalten also, bis auf die Benennung der Variablen, dieselbe Funktion. Außerdem können wir diese freie Umbenennung rückgängig machen durch die Umbenennung von y in s.

8.2. „Verallgemeinerte freie“ Umbenennung

Nehmen wir die Umbenennung s in t vor, so erhalten wir

$$G(t) =_{def} \int_0^1 \varphi(t,t,x)dx.$$

Hierbei ist zwar keine Variablenkonfusion eingetreten, aber diese Umbenennung kann nicht mehr „rückgängig“ gemacht werden. Dies wirkt sich im vorliegenden Beispiel

so aus, daß man zwar mit dem gegebenen $F(s,t)$ die Funktion $G(t)$ sehr einfach konstruieren kann, nämlich in der Form

$$G(t) =_{def} F(t,t),$$

daß aber die Umkehrung dieser Prozedur nicht möglich ist, weil man aus der gegebenen einstelligen Funktion $G(t)$ die gesuchte zweistellige Funktion $F(s,t)$ (im allgemeinen) nicht zurückgewinnen kann.

8.3. Variablenkonfusion 1. Art.
Nehmen wir die Umbenennung s in x vor, so erhält man

$$H(t) =_{def} \int_0^1 \varphi(x,t,x)dx,$$

also eine Funktion, die durch „simultane" Integration über das erste **und** dritte Argument von $\varphi(s,t,x)$ entsteht. Hier ist offenbar eine Variablenkonfusion 1. Art eingetreten, als bei der Umbenennung von s in x die Variable x durch dx „gebunden" wird.

8.4. Variablenkonfusion 2. Art.
Nehmen wir in

$$\int_0^1 \varphi(s,t,x)dx$$

die gebundene Umbenennung von x in t vor, erhalten wir

$$\int_0^1 \varphi(s,t,t)dt.$$

Hierbei wird die früher frei vorkommende Variable t durch die gebundene Umbenennung von x in t gebunden.

In dem nun folgenden Lemma wird die anschaulich-intuitiv sofort einsichtige Tatsache zusammengefaßt, daß $EL(T,\mathfrak{I},\sigma)$ bzw. $\sigma,\mathfrak{I} \models A$ höchstens von $\sigma(x)$ für Individuenvariablen abhängt, die in T vorkommen bzw. in A frei vorkommen.

Da diese Tatsache im folgenden in vielen Betrachtungen (Beweisen) eine entscheidende Rolle spielen wird, wollen wir das betreffende Lemma explizit formulieren und einen korrekten Beweis andeuten.

Gegeben seien beliebige $\mathfrak{I}$-Zustände σ_1 und σ_2. Ferner seien $T \in TERM(\Sigma,V)$ und $A \in AUSD(\Sigma,V)$.

Lemma 1.2.6.1

1. *Wenn für jede in T vorkommende Individuenvariable v gilt*

$$\sigma_1(v) = \sigma_2(v),$$

so folgt

$$EL(T,\mathfrak{I},\sigma_1) = EL(T,\mathfrak{I},\sigma_2).$$

2. *Wenn für jede in A frei vorkommende Individuenvariable v gilt*

$$\sigma_1(v) = \sigma_2(v),$$

so folgt

$$\sigma_1,\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \sigma_2,\mathfrak{I} \models A.$$

Beweis
Durch Induktion über die Stufe von T bzw. von A. ■

Im folgenden Lemma wird festgestellt, wie sich die Allgemeingültigkeit in einer Interpretation $\mathfrak{I}$ bei freien Umbenennungen, Variableneinsetzungen und gebundenen Umbenennungen verhält.

Gegeben sei ein beliebiger Ausdruck A. Dann sei $A\,^{x}/_{y}$ durch freie Umbenennung aus A entstanden, B gehe aus A durch eine Variableneinsetzung hervor und A' sei aus A durch eine gebundene Umbenennung gebildet. Dann gilt für eine beliebige Interpretation $\mathfrak{I}$ der gegebenen Signatur Σ.

Lemma 1.2.6.2

1. $\mathfrak{I} \models A$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{I} \models A\,^{x}/_{y}$
2. *Wenn* $\mathfrak{I} \models A$, *so* $\mathfrak{I} \models B$
3. $\mathfrak{I} \models A \leftrightarrow A'$, *d. h.* $A \equiv_{\mathfrak{I}} A'$.

Beweis
ad 2. Zur Vereinfachung des Beweises zeigen wir als erstes Behauptung 2.

Es sei $\mathfrak{I} \models A$. Wir haben zu zeigen, daß für jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ

$$\sigma, \mathfrak{I} \models B$$

gilt.

Dazu definieren wir einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ' wie folgt:

$$\sigma'(v) =_{def} \begin{cases} \sigma(v), & \text{falls } v \neq x \\ \sigma(y), & \text{falls } v = x \end{cases}$$

Dann gilt, wie man leicht durch Induktion über A zeigen kann, daß

$$\sigma', \mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models B.$$

Weil $\mathfrak{I} \models A$, folgt daraus sofort $\mathfrak{I} \models B$.

ad 3. Ebenfalls zur Vereinfachung des Beweises zeigen wir als nächstes Behauptung 3.

Auf Grund von Lemma 1.2.6.1 können wir feststellen:

Geht $\forall x B$ durch eine gebundene Umbenennung in $\forall y B\,^{x}/_{y}$ über, so gilt

$$\mathfrak{I} \models \forall x B \leftrightarrow \forall y B\,^{x}/_{y},$$

d. h.

$$\forall x B \equiv_{\mathfrak{I}} \forall y B\,^{x}/_{y}$$

Nun geht aber A durch eine gebundene Umbenennung in A' über, indem man in A den Ausdruck $\forall x B$ an einer fixierten Position durch $\forall y B\,^{x}/_{y}$ ersetzt, also sind nach dem semantischen Ersetzbarkeitstheorem (Theorem 1.2.5.3) die Ausdrücke A und A' semantisch äquivalent in $\mathfrak{I}$, d. h. es gilt $A \equiv_{\mathfrak{I}} A'$.

ad 1. Die Richtung ($\Rightarrow$) von Behauptung 1 folgt trivial aus Behauptung 2.

Um die Richtung ($\Leftarrow$) von Behauptung 1 zu zeigen, setzen wir

$$\mathfrak{I} \models A\,^{x}/_{y}$$

voraus. Dann folgt mit Behauptung 3, daß

$$\mathfrak{I} \models (A^{\,x}/_y)',$$

wobei dieser Ausdruck durch eine geeignete gebundene Umbenennung aus $A^{\,x}/_y$ entsteht, so daß x darin nicht mehr vorkommt. (Kommt in $A^{\,x}/_y$ die Variable x nicht mehr (gebunden) vor, kann dieser Schritt entfallen.) Mit Behauptung 2 folgt dann, daß

$$\mathfrak{I} \models (A^{\,x}/_y)'^{\,y}/_x,$$

also nach einer evtl. notwendigen gebundenen Umbenennung erhalten wir mit Behauptung 3, daß

$$\mathfrak{I} \models A.$$

■

Beim Beweis des Theorems, daß jeder Ausdruck semantisch äquivalent in eine pränexe Normalform umbeformt werden kann, benötigen wir das nachstehende Lemma, wobei A und B beliebig aus $AUSD(\Sigma, V)$ gewählt sind.

Lemma 1.2.6.3

1. $\neg\forall x A \equiv_{\mathfrak{I}} \exists x \neg A$
   $\neg\exists x A \equiv_{\mathfrak{I}} \forall x \neg A$
2. *Kommt x nicht frei in A vor, so*
   $$A \to \forall x B \equiv_{\mathfrak{I}} \forall x(A \to B)$$
   $$A \to \exists x B \equiv_{\mathfrak{I}} \exists x(A \to B)$$
3. *Kommt x nicht frei in B vor, so*
   $$\forall x A \to B \equiv_{\mathfrak{I}} \exists x(A \to B)$$
   $$\exists x A \to B \equiv_{\mathfrak{I}} \forall x(A \to B)$$

Beweis
Unmittelbar durch Rückgang auf die betreffenden Definitionen. Dabei wesentlich Anwendung von Lemma 1.2.6.1. ■

Theorem 1.2.6.4
Zu jedem Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ kann eine pränexe Normalform N konstruiert werden, so daß

$$A \equiv_{\mathfrak{I}} N.$$

Beweis
Induktion über A.

Anfangsschritt:
Es ist A ein prädikativer Ausdruck, habe also die Form

$$P \quad \text{mit } \alpha(P) = e$$

oder

$$PT_1 \ldots T_n \quad \text{mit } n \geq 1$$

oder A ist eine Gleichung, etwa der Form

$$T_1 = T_2.$$

Dann enthält A keine Quantoren, das Quantorenpräfix ist also leer, also ist A eine pränexe Normalform.

Induktionsschritt:

1. A hat die Form $A = \neg A'$.

   Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine pränexe Normalform N' mit

   $$A' \equiv_{\mathfrak{I}} N',$$

   wobei

   $$N' = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n C'$$

   und $n \geq 0$ (d. h. das Quantorenpräfix ist evtl. leer, falls $n = 0$), $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ und C' ist ein quantorenfreier Ausdruck.

   Wir definieren nun

   $$\hat{Q_\nu} =_{def} \begin{cases} \forall, \text{ falls } Q_\nu = \exists \\ \exists, \text{ falls } Q_\nu = \forall \end{cases}.$$

   Aus

   $$A' \equiv_{\mathfrak{I}} N'$$

   erhalten wir aus Lemma 1.2.5.4 (Aussage 2.1), daß

   $$\neg A' \equiv_{\mathfrak{I}} \neg N'.$$

   Ferner folgt aus Lemma 1.2.6.3 (Aussage 1), daß

   $$\neg N' \equiv_{\mathfrak{I}} \hat{Q}_1 x_1 \ldots \hat{Q}_n x_n \neg C',$$

   also mit Theorem 1.2.5.1

   $$\neg A' \equiv_{\mathfrak{I}} \hat{Q}_1 x_1 \ldots \hat{Q}_n x_n \neg C'.$$

   Der Ausdruck

   $$\hat{Q}_1 x_1 \ldots \hat{Q}_n x_n \neg C'$$

   ist aber offensichtlich eine pränexe Normalform, damit ist der Induktionsschritt im Fall 1 bewiesen.

2. A hat die Form $A = (A' \to A'')$.

   Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann pränexe Normalformen M', M'' mit

   $$A' \equiv_{\mathfrak{I}} M'$$

   und

   $$A'' \equiv_{\mathfrak{I}} M'',$$

   wobei

   $$\begin{aligned} M' &= Q'_1 x'_1 \ldots Q'_m x'_m C', \\ M'' &= Q''_1 x''_1 \ldots Q''_n x''_n C'' \end{aligned}$$

   und $m \geq 0$, $n \geq 0$, $Q'_1, \ldots, Q'_m, Q''_1, \ldots, Q''_n \in \{\forall, \exists\}$ und C', C'' quantorenfreie Ausdrücke sind.

   Mit Lemma 1.2.5.4 (Aussage 2.2) erhalten wir zunächst

   $$(A' \to A'') \equiv_{\mathfrak{I}} (M' \to M'').$$

Nun formen wir gemäß Lemma 1.2.6.2 (Aussage 3) durch gebundene Umbennung M' in N' und M'' in N'' mit

$$N' = Q'_1 y'_1 \ldots Q'_m y'_m D'$$

und

$$N'' = Q''_1 y''_1 \ldots Q''_n y''_n D''$$

derart (äquivalent) um, daß keine der Individuenvariablen $y'_1, \ldots, y'_m$ in N'' und keine der Individuenvariablen $y''_1, \ldots, y''_n$ in N' vorkommt. Nun wenden wir auf $(N' \to N'')$ die Aussagen 3 und 4 von Lemma 1.2.6.3 sukzessive an (die Reihenfolge ist dabei offensichtlich beliebig) und erhalten so

$$(N' \to N'') \equiv_{\mathfrak{I}} \hat{Q'_1} y'_1 \ldots \hat{Q'_m} y'_m Q''_1 y''_1 \ldots Q''_n y''_n (D' \to D''),$$

also folgt schließlich

$$(A' \to A'') \equiv_{\mathfrak{I}} \hat{Q'_1} y'_1 \ldots \hat{Q'_m} y'_m Q''_1 y''_1 \ldots Q''_n y''_n (D' \to D'').$$

Der zuletzt stehende Ausdruck ist offensichtlich eine pränexe Normalform, weil $(D' \to D'')$ quantorenfrei ist, also ist der Induktionsschritt im Fall 2 gezeigt.

3. A hat die Form $A = \forall v A'$.

   Dieser Fall ist sehr einfach. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine pränexe Normalform N' mit

   $$A' \equiv_{\mathfrak{I}} N'.$$

   Daraus folgt mit Aussage 2.3 von Lemma 1.2.5.4, daß

   $$\forall v A' \equiv_{\mathfrak{I}} \forall v N'.$$

   Da trivialerweise für eine pränexe Normalform N' auch $\forall v N'$ wieder eine pränexe Normalform ist, haben wir den Induktionsschritt auch im Fall 3 gezeigt.

Damit ist Theorem 1.2.6.4 bewiesen. ■

Bei der Formulierung und dem Beweis von Theorem 1.2.6.4 hatten wir vorausgesetzt, daß A nur die ursprünglich zugrunde gelegten Funktoren $\neg$, $\to$ und $\forall$ enthält, also keine der definierten $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$ darin vorkommen. Auf diese Weise konnte der Induktionsschritt auf die betrachteten drei Fälle beschränkt werden; sonst wären noch vier weitere Fälle hinzugekommen. Bei der Definition des Begriffs der pränexen Normalform hatten wir allerdings, zur Vereinfachung der Schreibweise, den (definierten) Funktor $\exists$ zugelassen.

Wollen wir nun einen Ausdruck A, der definierte Funktoren $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$ enthält, in eine pränexe Normalform umformen, jedoch die definierten Funktoren vorher **nicht** elimieren, benötigen wir in Analogie zu Lemma 1.2.6.3 weitere „Verschiebungssätze“ (sowie „Verteilungs-“ und „Vertauschungssätze“) für die Quantoren.

Theorem 1.2.6.5

1. *Verschiebungssätze:*
   Wir setzen voraus, daß x in B nicht (frei) vorkommt.

   1. $\forall x A \wedge B \equiv_{\mathfrak{I}} \forall x (A \wedge B)$
   2. $\exists x A \wedge B \equiv_{\mathfrak{I}} \exists x (A \wedge B)$
   3. $\forall x A \vee B \equiv_{\mathfrak{I}} \forall x (A \vee B)$

4. $\exists x A \vee B \equiv_{\mathfrak{J}} \exists x(A \vee B)$
5. $\forall x A \leftrightarrow B \equiv_{\mathfrak{J}} \exists x(A \rightarrow B) \wedge \forall x(B \rightarrow A)$
6. $\exists x A \leftrightarrow B \equiv_{\mathfrak{J}} \forall x(A \rightarrow B) \wedge \exists x(B \rightarrow A)$

2. *Verteilungssätze:*

1. $\forall x A \wedge \forall x B \equiv_{\mathfrak{J}} \forall x(A \wedge B)$
2. $\exists x A \vee \exists x B \equiv_{\mathfrak{J}} \exists x(A \vee B)$

3. *Vertauschungssätze:*

1. $\forall x \forall y A \equiv_{\mathfrak{J}} \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv_{\mathfrak{J}} \exists y \exists x A$

Beweis
Rückgang auf die betreffenden Definitionen. ■

Anmerkung
Die Beweise der Lemmata _____ durch Rückgang auf die betreffenden Definitionen sind trivial, aber „länglich“. Wesentlich kürzere Beweise sind möglich, wenn man einen formalen Ableitungsbegriff zur Verfügung hat und dessen semantische Korrektheit nachgewiesen ist. Wir verweisen dazu auf Abschnitt 1.4.

Beispiel: Umformung eines Ausdrucks in eine äquivalente pränexe Normalform.

$$\begin{aligned}
A &=_{def} \neg(\exists x Pxy \vee \forall z Qz) \wedge \exists y Pxy \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \neg(\exists x Pxy \vee \forall z Qz) \wedge \exists w Pxw \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w(\neg(\exists x Pxy \vee \forall z Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w(\neg\exists x(Pxy \vee \forall z Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w(\forall x\neg(Pxy \vee \forall z Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w(\forall u\neg(Puy \vee \forall z Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w \forall u(\neg(Puy \vee \forall z Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w \forall u(\neg\forall z(Puy \vee Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w \forall u(\exists z\neg(Puy \vee Qz) \wedge Pxw) \\
&\equiv_{\mathfrak{J}} \exists w \forall u \exists z(\neg(Puy \vee Qz) \wedge Pxw)
\end{aligned}$$

Ausgangspunkt dieses Beispiels ist ein Beispiel aus dem Buch von U. Schöning, Seite 61. In dem zitierten Beispiel finden sich aber Fehler! Man suche diese !

Übung:

1. Man zeige, daß für eine beliebige Interpretation $\mathfrak{J}$ gilt:

1.1. $\mathfrak{J} \models \forall x A \vee \forall x B \rightarrow \forall x(A \vee B)$
1.2. $\mathfrak{J} \models \exists x(A \wedge B) \rightarrow \exists x A \wedge \exists x B$
1.3. $\mathfrak{J} \models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

2. Man widerlege durch Angabe einer geeigneten Interpretation $\mathfrak{J}$, daß gilt:

2.1. $\mathfrak{I} \models \forall x(A \vee B) \rightarrow \forall x A \vee \forall x B$

2.2. $\mathfrak{I} \models \exists x A \wedge \exists x B \rightarrow \exists x(A \wedge B)$

2.3. $\mathfrak{I} \models \forall y \exists x A \rightarrow \exists x \forall y A$

3. Man konstruiere eine geeignete Interpretation $\mathfrak{I}$, so daß tatsächlich 2.1 bzw. 2.2 bzw. 2.3 gilt.

1.2.7 Das Verhalten von Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit gegenüber Bildung von Teilstrukturen sowie bei homomorphen bzw. isomorphen Abbildungen von Interpretationen

Im folgenden wollen wir einige Invarianzsätze für die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit ableiten, die später beim Beweisen einiger wichtiger Sätze gebraucht werden. „Invarianz“ bedeutet hier, daß sich die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit beliebiger (oder spezieller) Ausdrücke bei der Anwendung bestimmter Konstruktionen für Interpretationen „vererbt“.

Als erste Konstruktion betrachten wir die Konstruktion „Teilstruktur“ (bzw. „Unterstruktur“), aus der Algebra bekannt als „Untergruppe“, „Unterring“, „Unterkörper“ usw.

Gegeben seien die Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

sowie die Interpretationen

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

und

$$\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi'].$$

Definition 1.2.7.1

1. $\mathfrak{I}'$ *ist* ***Teilstruktur*** *von* $\mathfrak{I}$ *(kurz:* $\mathfrak{I}' \precapprox \mathfrak{I}$*)*
   $=_{def}$ 1. *Für jedes* $s \in SO$ *gilt:* $\Delta'_s \subseteqq \Delta_s$.
   2. *Für jedes* $F \in FS$ *gilt:* $\Phi'_f \subseteqq \Phi_f$.
   3. *Für jedes* $P \in PS$ *gilt:* $\Pi'_P \subseteqq \Pi_P$.

2. $\mathfrak{I}'$ *ist* ***echte*** *Teilstruktur von* $\mathfrak{I}$ *(kurz* $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$*)*
   $=_{def}$ 1. $\mathfrak{I}' \precapprox \mathfrak{I}$ *und*
   2. $\mathfrak{I}' \neq \mathfrak{I}$.

Bemerkungen:

1. Das in der Formulierung der Bedingungen 1.1, 1.2 und 1.3 verwendete Symbol $\subseteqq$ bedeutet die mengentheoretische Enthaltenseinsbeziehung, d. h. im Fall 1.1, daß Δ'_s Teilmenge von Δ_s ist, und im Fall 1.3, daß die Relation Π'_P als Menge eine Teilmenge der Relation Π_P ist. Auch im Fall 1.2 ist die Bedingung $\Phi'_f \subseteqq \Phi_f$ sinnvoll, weil die Funktionen Φ_f und Φ'_f spezielle Relationen, also letztendlich spezielle Mengen sind.

2. $\mathfrak{I}' \neq \mathfrak{I}$ bedeutet offenbar, daß in den Bedingungen 1.1, 1.2, 1.3 für $\mathfrak{I}' \precapprox \mathfrak{I}$ mindestens einmal eine *echte* Inklusion auftritt.

Beispiel 1.2.7.1
Konstruktion von Interpretationen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$, so daß $\mathfrak{I}'$ **echte** Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ ist.

Gegeben sei

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

mit

$$SO = \{s\} \qquad \text{(also einsortige Signatur)}$$
$$FS = \{f\}$$
$$PS = \phi$$
$$\alpha(f) = ss$$

Ferner seien gegeben

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

mit

$$\Delta_s = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\Phi_f(n) = n + 2,\ n \in \mathbb{N} = \Delta_s$$
$$\Pi : \text{leer}$$

sowie

$$\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$$

mit

$$\Delta'_s = \{0, 2, 4, \ldots\}$$
$$\Phi'_f(n) = n + 2, \text{ mit } n \in \Delta'_s$$
$$\Pi : \text{leer}$$

Dann gilt trivial

$$\Delta'_s \subseteqq \Delta_s$$

und

$$\Phi'_f \subseteqq \Phi_f,$$

also gilt

$$\mathfrak{I}' \precapprox \mathfrak{I}.$$

Ferner gilt sogar

$$\Delta'_s \neq \Delta_s$$

und ferner

$$\Phi'_f \neq \Phi_f,$$

also erst recht

$$\mathfrak{I}' \neq \mathfrak{I},$$

somit

$$\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I},$$

d. h. $\mathfrak{I}'$ ist eine *echte* Teilstruktur von $\mathfrak{I}$.

Beispiel 1.2.7.2
Konstruktion von Interpretationen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$, so daß $\mathfrak{I}'$ **nicht** Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ ist.

Wir ändern die in **Beispiel 1.2.7.1** konstruierte Interpretation $\mathfrak{I}$ allein an der Stelle f ab, indem wir setzen

$$\Phi_f(n) =_{def} n + 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Die Interpretation $\mathfrak{I}'$ bleibt unverändert. Dann gilt zwar noch

$$\Delta'_s \subseteqq \Delta_s,$$

jedoch nicht mehr

$$\Phi'_f \subseteqq \Phi_f,$$

weil z. B.

$$\Phi'_f(0) = 2, \text{ also } [0,2] \in \Phi'_f,$$

jedoch nicht

$$\Phi_f(0) = 2, \text{ weil } [0,2] \notin \Phi_f$$

gilt, somit gilt **nicht**

$$\mathfrak{I}' \lessapprox \mathfrak{I}.$$

Wir formulieren nun ein Lemma, das im Hinblick auf die Funktion

$$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$$

eine wichtige Invarianzeigenschaft beim Übergang zu Teilstrukturen feststellt.

Lemma 1.2.7.1
Gegeben seien die Interpretationen

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

und

$$\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$$

so, daß $\mathfrak{I}'$ Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ ist. Es sei σ' ein $\mathfrak{I}'$-Zustand. Dann gilt

$$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma') = EL(T, \mathfrak{I}', \sigma').$$

Beweis
Wegen $\Delta'_s \subseteqq \Delta_s$ ist ein $\mathfrak{I}'$-Zustand σ' auch $\mathfrak{I}$-Zustand, also ist

$$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma')$$

definiert. Die oben behauptete Gleichung wird nun durch Induktion über T bewiesen.

AS (Anfangsschritt).

Fall 1: T ist eine Individuenvariable, etwa $T = v$.

Dann gilt nach Definition von EL

$$EL(v, \mathfrak{I}, \sigma') = \sigma'(v)$$
$$EL(v, \mathfrak{I}', \sigma') = \sigma'(v),$$

also gilt die oben behauptete Gleichung

$$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma') = EL(T, \mathfrak{I}', \sigma'),$$

falls T eine Individuenvariable ist.

Fall 2: T ist eine Individuenkonstante, d. h. ein nullstelliges Funktionssymbol, etwa $T = f$ mit $\alpha(f) = s$.

Dann gilt nach Definition von EL

$$EL(f, \mathfrak{I}, \sigma') = \Phi_f$$
$$EL(f, \mathfrak{I}', \sigma') = \Phi'_f.$$

Nun gilt aber nach der Teilstrukturbedingung

$$\Phi'_f = \Phi_f,$$

also gilt auch in Fall 2 die behauptete Gleichung.

IS (Induktionsschritt). Es sei $T = f(T_1, \ldots, T_n)$ mit $n \geqq 1$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$EL(T_\nu, \mathfrak{I}, \sigma') = EL(T_\nu, \mathfrak{I}', \sigma')$$

für $\nu = 1, \ldots, n$. Ferner gilt nach Definition von EL

$$EL(f(T_1, \ldots, T_n), \mathfrak{I}', \sigma') = \Phi'_f(EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}', \sigma')),$$

also nach $\Phi'_f \subseteqq \Phi_f$

$$= \Phi_f(EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}', \sigma')),$$

also nach Induktionsvoraussetzung

$$= \Phi_f(EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma')),$$

also nach Definition von EL

$$= EL(f(T_1, \ldots, T_n), \mathfrak{I}, \sigma')$$

■

Das soeben bewiesene Lemma besagt, daß $EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$ invariant ist gegenüber Teilstrukturen $\mathfrak{I}' \precapprox \mathfrak{I}$, sofern σ als $\mathfrak{I}'$-Zustand gewählt wird.

Wir streben jetzt an, ein analoges Resultat für die Erfüllungsdefinition $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ herzuleiten (Lemma 1.2.7.2).

Dazu ist aber die folgende Verschärfung des Begriffs Teilstruktur erforderlich.

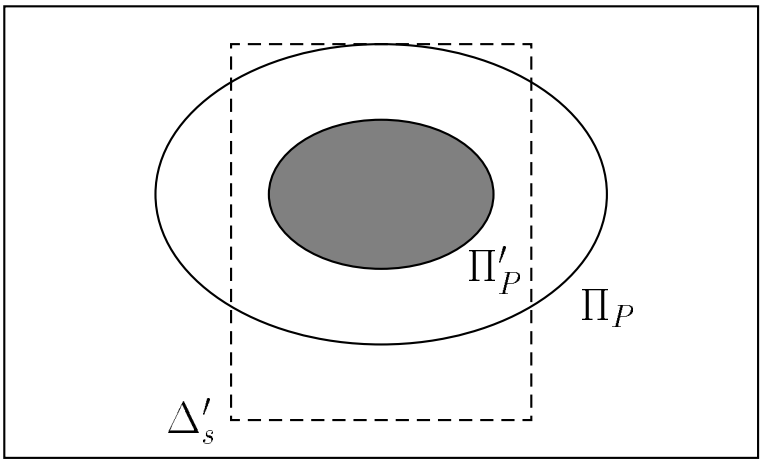
Definition 1.2.7.2
$\mathfrak{I}'$ *ist* ***Unterstruktur*** *von* $\mathfrak{I}$
$=_{def}$ 1. $\mathfrak{I}'$ *ist Teilstruktur von* $\mathfrak{I}$

2. *Für jedes* $P \in PS$ *mit* $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$, $n \geqq 1$ *und jedes* $\xi_1 \in \Delta_{s_1}, \ldots, \xi_n \in \Delta_{s_n}$ *gilt:*

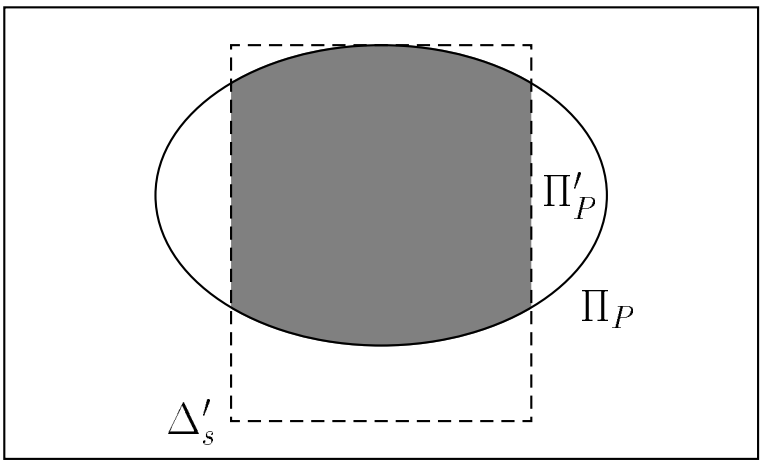
   Wenn $[\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \Pi_P$ *und* $\xi_1 \in \Delta'_{s_1}, \ldots, \xi_n \in \Delta'_{s_n}$, *so* $[\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \Pi'_P$.

3. *Falls* $\alpha(P) = e$, *so* $\Pi'_P = \Pi_P$.

Bemerkung zu Definition 1.2.7.2 Bedingung 2 bedeutet, daß $\Pi'_P \subseteqq \Pi_P$ hinsichtlich der Einbettung in $\Delta'_{s_1} \times \cdots \times \Delta'_{s_n}$ „maximal“ sein muß. Ohne diese Bedingung gilt das folgende Lemma, wie man sich durch Gegenbeispiele klarmachen kann, im allgemeinen nicht. Die Maximalitätsforderung läßt sich für einstellige Prädikatensymbole P wie folgt veranschaulichen.



$\Pi'_P \subsetneqq \Pi_P$ erfüllt hinsichtlich der Einbettung in Δ_s die Maximalitätsforderung *nicht*.



$\Pi'_P \subsetneqq \Pi_P$ *erfüllt* hinsichtlich der Einbettung in Δ_s die Maximalitätsforderung.

Beispiel 1.2.7.3 $\mathfrak{I}'$ ist Teilstruktur von $\mathfrak{I}$, aber nicht Unterstruktur.

Gegeben sei die einsortige Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

mit genau einem (und zwar zweistelligen) Prädikatensymbol, also $SO = \{s\}$, $FS = \phi$ und $PS = \{R\}$ mit $\alpha(R) = ss$. Gegeben seien ferner die Interpretationen

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi] \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_s = \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \Delta'_s &= \{0, 2, 4, \ldots\} \\ \Phi = \Phi' &= \phi \\ [m, n] \in \Pi_R &\leftrightarrow m \leqq n \text{ und } m, n \in \Delta_s \\ [m', n'] \in \Pi'_R &\leftrightarrow m' + 4 \leqq n' \text{ und } m', n' \in \Delta_s \end{aligned}$$

Dann folgt $\Delta'_s \leqq \Delta_s$ und wenn $[m', n'] \in \Pi'_R$, so $[m', n'] \in \Pi_R$, also ist $\mathfrak{I}'$ Teilstruktur von $\mathfrak{I}$. Offensichtlich ist $\mathfrak{I}'$ aber nicht Unterstruktur von $\mathfrak{I}$, denn dann müßte für jedes $m', n' \in \Delta'_s$ gelten:

$$\text{Wenn } [m, n] \in \Pi_R \text{ und } m, n \in \Delta'_s \text{, so } [m, n] \in \Pi'_R.$$

Dies ist aber z. B. für $m = 0$ und $n = 2$ verletzt.

Beispiel 1.2.7.4 $\mathfrak{I}''$ ist Unterstruktur von $\mathfrak{I}$.

Wir wählen Σ und $\mathfrak{I}$ wie im obigen Beispiel. Wir definieren nun $\mathfrak{I}''$ wie folgt:

$$\Delta_s'' =_{def} \Delta_s' = \{0, 2, 4, \ldots\}$$
$$\Phi'' = \phi$$
$$[m'', n''] \in \Pi_R'' \leftrightarrow m'' \leqq n'' \text{ und } m'', n'' \in \Delta_s''.$$

Dann ist $\mathfrak{I}''$ nicht nur Teilstruktur, sondern sogar Unterstruktur von $\mathfrak{I}$.

Lemma 1.2.7.2
Gegeben seien die Interpretationen

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

und

$$\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$$

so, daß $\mathfrak{I}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{I}$ ist. Es sei σ' ein $\mathfrak{I}'$-Zustand. Dann gilt für jeden ***quantorenfreien*** *Ausdruck B:*

$$\sigma', \mathfrak{I} \models B \text{ genau dann, wenn } \sigma', \mathfrak{I}' \models B.$$

Beweis
Wegen $\Delta_s' \subseteqq \Delta_s$ ist ein $\mathfrak{I}'$-Zustand σ' auch ein $\mathfrak{I}$-Zustand, also ist $\sigma', \mathfrak{I} \models B$ definiert.

Da $\mathfrak{I}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{I}$ ist, ist $\mathfrak{I}'$ auch Teilstruktur von $\mathfrak{I}$, also gilt nach **Lemma 1.2.7.1** für jeden Term $T \in TERM(\Sigma, V)$, daß

$$EL(T, \mathfrak{I}, \sigma') = EL(T, \mathfrak{I}', \sigma').$$

Die Behauptung des oben formulierten Lemmas beweisen wir durch Induktion über B.

AS (Anfangsschritt).

Fall 1: B ist ein nullstelliges Prädikatensymbol, hat also die Form $B = P$.

Nach Definition der Relation $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ haben wir im vorliegenden Fall zu zeigen, daß

$$\Pi_P = \{\phi\} \text{ genau dann, wenn } \Pi_P' = \{\phi\}.$$

Das folgt aber trivial aus Bedingung 3 von **Definition 1.2.7.2**, welche besagt, daß $\Pi_P = \Pi_P'$ gilt.

Fall 2: B ist ein prädikativer Ausdruck der Form $B = PT_1 \ldots T_n$ mit $n \geqq 1$.

Nun gilt

$$\sigma', \mathfrak{I} \models PT_1 \ldots T_n$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma')] \in \Pi_P$$

genau dann, wenn (nach **Lemma 1.2.7.1**)

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}', \sigma')] \in \Pi_P$$

genau dann, wenn (weil $\mathfrak{I}'$ *Unter*struktur von $\mathfrak{I}$ ist)

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}', \sigma')] \in \Pi_P'$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$\sigma', \mathfrak{I}' \models PT_1 \ldots T_n.$$

Fall 3: B ist eine Gleichung, d. h. B hat die Form $T_1 = T_2$.

Nun gilt

$$\sigma', \mathfrak{I} \models T_1 = T_2$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma') = EL(T_2, \mathfrak{I}, \sigma')$$

genau dann, wenn (nach **Lemma 1.2.7.1**)

$$EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma') = EL(T_2, \mathfrak{I}', \sigma')$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$\sigma', \mathfrak{I}' \models T_1 = T_2.$$

IS (Induktionsschritt). Weil B quantorenfrei ist, haben wir allein die Fälle zu beachten, daß B die Form $\neg C$ oder die Form $(C \rightarrow D)$ hat, wobei C und D quantorenfreie Ausdrücke sind.

Beide Fälle sind aber auf Grund der Induktionsvoraussetzungen für C und D und der Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ unmittelbar zu erledigen. ■

Das folgende Theorem besagt, daß sich für quantorenfreie Ausdrücke die Allgemeingültigkeit von einer gegebenen Interpretation auf beliebige ihrer Unterstrukturen „vererbt“ — eine Tatsache, die im folgenden beim Beweis einiger wichtiger Sätze eine Rolle spielt.

Theorem 1.2.7.3
Es sei $\mathfrak{I}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{I}$. Dann gilt für jeden quantorenfreien Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$:

Ist B allgemeingültig in $\mathfrak{I}$, so ist B auch allgemeingültig in $\mathfrak{I}'$.

Beweis
Nach Definition der Allgemeingültigkeit haben wir zu zeigen, daß für jeden $\mathfrak{I}'$-Zustand σ' gilt

$$\sigma', \mathfrak{I}' \models B.$$

Nach **Lemma 1.2.7.2** genügt es zu beweisen, daß

$$\sigma', \mathfrak{I} \models B$$

gilt. Da B in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig ist, gilt für jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \models B,$$

also folgt $\sigma', \mathfrak{I} \models B$, weil σ' auch $\mathfrak{I}$-Zustand ist. ■

Aus dem obigen Theorem ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 1.2.7.4
Es sei $\mathfrak{I}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{I}$.

Dann gilt für jede universale Normalform $A \in AUSD(\Sigma, V)$:

Ist A allgemeingültig in $\mathfrak{I}$, so ist A auch allgemeingültig in $\mathfrak{I}'$.

Beweis
Eine universale Normalform A ist nach **Definition 1.2.6.2** ein Ausdruck der Form

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n B,$$

wobei B ein quantorenfreier Ausdruck ist und $n \geqq 0$ gilt, d. h., das allein aus Allquantoren bestehende Präfix darf auch „leer“ sein.

Nun gilt aber wegen Folgerung 1.2.4.2 für beliebige Ausdrücke C die Beziehung

$$\mathfrak{I} \models \forall v C \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models C,$$

somit kann man das obige Korollar durch mehrfache Anwendung dieser Beziehung auf **Theorem 1.2.7.3** zurückführen. ■

Indem wir die Beziehung, daß ein beliebiger Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ in $\mathfrak{I}$ erfüllbar ist genau dann, wenn $\neg A$ nicht allgemeingültig ist (siehe Folgerung 1.2.4.1), anwenden, erhalten wir unmittelbar aus **Theorem 1.2.7.3** das folgende Korollar:

Korollar 1.2.7.5
Es sei $\mathfrak{I}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{I}$. Dann gilt für jeden quantorenfreien Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$:

Ist B in $\mathfrak{I}'$ erfüllbar, so ist B auch in $\mathfrak{I}$ erfüllbar.

Aus dem eben formulierten Korollar können wir unmittelbar ableiten:

Korollar 1.2.7.6
Es sei $\mathfrak{I}'$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{I}$. Dann gilt für jede existentielle Normalform $A \in AUSD(\Sigma, V)$:

Ist A in $\mathfrak{I}'$ erfüllbar, so ist A auch in $\mathfrak{I}$ erfüllbar.

Beweis
Eine existentielle Normalform A ist nach **Definition 1.2.6.2** ein Ausdruck der Form

$$\exists v_1 \ldots \exists v_n B,$$

wobei B ein quantorenfreier Ausdruck ist und $n \geqq 0$ gilt, d. h., das allein aus Existenzquantoren bestehende Präfix darf auch leer sein.

Nun gilt aber für beliebige Ausdrücke C nach Folgerung 1.2.4.2:

$$\exists v C \text{ ist in } \mathfrak{I} \text{ erfüllbar}$$

genau dann, wenn

$$C \text{ in } \mathfrak{I} \text{ erfüllbar ist.}$$

Durch mehrmalige Anwendung erhält man aus **Korollar 1.2.7.5** unmittelbar das obige Korollar. ■

Aus der Algebra entnehmen wir nun den im folgenden zu definierenden Begriff des *Homomorphismus* für Interpretationen.

Definition 1.2.7.3
Ein System $h = (h_s)_{s \in SO}$ von Abbildungen heiße ***Homomorphismus*** *von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}'$*

$=_{def}$ 1. *Für jedes* $s \in SO$ *ist* h_s *eine eindeutige Abbildung von* Δ_s *in* Δ'_s, *d. h. es gilt*

$$h_s : \Delta_s \to \Delta'_s$$

2. *Für jedes* $f \in FS$ *mit* $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ *und* $n \geqq 1$ *gilt:*

$$h_s\left(\Phi_f\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)\right) = \Phi'_f\left(h_{s_1}\left(\xi_1\right), \ldots, h_{s_n}\left(\xi_n\right)\right)$$

für jedes $\xi_1 \in \Delta_{s_1}, \ldots, \xi_n \in \Delta_{s_n}$.

3. *Für jedes* $P \in PS$ *mit* $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$ *und* $n \geqq 1$, *das kein Identitätssymbol ist, gilt:*

$$[\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \Pi_P \text{ genau dann, wenn } [h_{s_1}\left(\xi_1\right), \ldots, h_{s_n}\left(\xi_n\right)] \in \Pi'_P$$

für alle $\xi_1 \in \Delta_{s_1}, \ldots, \xi_n \in \Delta_{s_n}$.

4. *Die „nullstelligen" Fälle, d. h.* $\alpha(f) = s \in SO$ *und* $\alpha(P) = e$ *werden durch die Bedingungen*

$$h_s\left(\Phi_f\right) = \Phi'_f$$

und

$$\Pi_P = \Pi'_P$$

erfaßt.

Bemerkungen zu Definition 1.2.7.3:

1. Für ein Prädikatensymbol P, das Identitätssymbol ist, also die Form $\underset{s}{=}$ hat, wird unter Punkt 3 der obigen Definition nichts gefordert, und zwar aus folgenden Gründen:

   1.1. Die Richtung von links nach rechts, d. h.

   $$\text{wenn } [\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \Pi_{\underset{s}{=}}, \text{ so } [h_s\left(\xi_1\right), h_s\left(\xi_2\right)] \in \Pi'_{\underset{s}{=}}$$

   gilt stets, weil die Abbildung h_s eindeutig ist. Somit ist es überflüssig, diese betreffende Forderung zu stellen.

   1.2. Die Richtung von rechts nach links, d. h.

   $$\text{wenn } [h_s\left(\xi_1\right), h_s\left(\xi_2\right)] \in \Pi'_{\underset{s}{=}}, \text{ so } [\xi_1, \ldots, \xi_n] \in \Pi_{\underset{s}{=}}$$

   besagt, daß die Abbildung h_s eindeutig umkehrbar ist, also eine Injektion von Δ_s in Δ'_s ist.

2. In manchen Untersuchungen in der Logik und Algebra werden sogen. „schwache" Homomorphismen verwendet, die dadurch definiert werden, daß man in Bedingung 3 der Definition nur die Richtung von links nach rechts fordert.

   Bei dieser Definition treten die unter Punkt 1 (oben) beschrieben Probleme offenbar nicht auf. Wir verzichten trotzdem darauf, den schwachen Homomorphiebegriff zu verwenden, weil für diesen einige der im folgenden bewiesenen Sätze im allgemeinen nicht mehr gelten.

3. Für Signaturen, die (Gleichheitssymbole ausgenommen) keine weiteren Prädikatensymbole enthalten, fallen beide Homomorphiebegriffe offenbar zusammen.

4. In manchen Darstellungen werden Homomorphismen in unserem Sinne „starke" Homomorphismen und schwache Homomorphismen in unserem Sinne einfach „Homomorphismen" genannt.

Zur Formulierung des folgenden Lemmas definieren wir für einen beliebigen Homomorphismus $h = (h_s)_{s \in SO}$ und einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ:

$$(h \circ \sigma)(v) =_{def} h_s(\sigma(v)) \qquad \text{falls } v \in V_s$$

Lemma 1.2.7.7
Ist $h = (h_s)_{s \in SO}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}'$, so gilt für jeden Term $T \in TERM_s(\Sigma, V)$, wobei $s \in SO$:

$$h_s(EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)) = EL(T, \mathfrak{I}', h \circ \sigma)$$

Beweis
Induktion über die Stufe von T, dabei im Induktionsschritt die Anwendung der Homomorphie-Eigenschaften von h. ■

Beim Beweis stellt man fest, daß dieses Lemma sogar für schwache Homomorphismen gilt. Der Grund dafür ist, daß in einem Term kein Prädikatensymbol vorkommt.

Lemma 1.2.7.8
Ist Σ eine Signatur ohne Identität und ist $h = (h_s)_{s \in SO}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}'$, so gilt für jeden quantorenfreien Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$ und jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ:

$$\sigma, \mathfrak{I} \models B \text{ genau dann, wenn } h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \models B.$$

Beweis
Induktion über die Stufe von B.

AS (Anfangsschritt).

Fall 1. B ist ein nullstelliges Prädikatensymbol, etwa P, wobei $\alpha(P) = e$.

Nach Definition von $\models$ haben wir zu zeigen, daß gilt:

$$\Pi_P = \{\phi\} \text{ genau dann, wenn } \Pi'_P = \{\phi\}.$$

Dies folgt aber aus der Homomorphie-Bedingung

$$\Pi_P = \Pi'_P.$$

Fall 2. B hat die Form $PT_1 \ldots T_n$ mit $n \geqq 1$ und $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$.

Nun gilt:

$$\sigma, \mathfrak{I} \models PT_1 \ldots T_n$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma)] \in \Pi_P$$

genau dann, wenn (nach der Homomorphie-Definition)

$$[h_{s_1}(EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma)), \ldots, h_{s_n}(EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma))] \in \Pi'_P$$

genau dann, wenn (nach **Lemma 1.2.7.7**)

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}', h \circ \sigma), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}', h \circ \sigma)] \in \Pi'_P$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \models PT_1 \ldots T_n$$

IS (Induktionsschritt). Wir haben allein die Fälle zu betrachten, daß B die Form $\neg C$ bzw. $(C \rightarrow D)$ hat, wobei C, D quantorenfreie Ausdrücke aus $AUSD(\Sigma, V)$ sind. Da in diesen Fällen bei der Definition von $\models$ der betrachtete Zustand σ nicht verändert wird (im Gegensatz zur Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models \forall v C$) ist der Induktionsschritt auf der Grundlage der Induktionsvoraussetzung trivial. ■

Bemerkungen zu Lemma 1.2.7.8:

1. Dieses Lemma gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn man schwache Homomorphismen zuläßt, so kann z. B. schon für einen prädikativen Ausdruck $PT_1 \ldots T_n$ die Richtung von rechts nach links falsch sein.

2. Man könnte vermuten, daß die Abschwächung von Lemma 1.2.7.8, in der nur die Richtung von links nach rechts behauptet wird, für schwache Homomorphismen gilt. Dies trifft zwar noch für prädikative Ausdrücke $PT_1 \ldots T_n$ zu, aber für die Negation $\neg PT_1 \ldots T_n$ eines solchen Ausdrucks kann es schon falsch werden, weil dann nach Kontraposition das Lemma für $PT_1 \ldots T_n$ in der Richtung von rechts nach links gelten müßte, was auf Grund des schwachen Homomorphiebegriffs falsch sein kann.

Theorem 1.2.7.9
Ist Σ eine Signatur ohne Identität und gibt es einen Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}'$, so gilt für jeden quantorenfreien Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$

1. *Wenn B in $\mathfrak{I}'$ allgemeingültig, so ist B in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig.*

2. *Wenn B in $\mathfrak{I}$ erfüllbar, so ist B in $\mathfrak{I}'$ erfüllbar.*

Beweis
ad 1. Gegeben sei ein beliebiger $\mathfrak{I}$-Zustand σ. Wir haben zu zeigen, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \models B.$$

Nach **Lemma 1.2.7.8** genügt es zu zeigen, daß

$$h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \models B,$$

wobei h ein (beliebig gewählter) Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}'$ ist. (Die Existenz mindestens eines derartigen Homomorphismus ist durch die Voraussetzung von **Theorem 1.2.7.9** gesichert.) Nun ist aber B in $\mathfrak{I}'$ allgemeingültig, also gilt für *alle* $\mathfrak{I}'$-Zustände σ' die Beziehung

$$\sigma', \mathfrak{I}' \models B,$$

also gilt sie erst recht für alle $\mathfrak{I}'$-Zustände σ' der Form $\sigma' = h \circ \sigma$.

ad 2. Dies kann man analog zu Behauptung 1 direkt mit **Lemma 1.2.7.8** beweisen. Eine zweite Möglichkeit wäre, die Behauptung 1 und die Beziehung

$$B \text{ erfüllbar in } \mathfrak{I} \text{ genau dann, wenn } \neg B \text{ nicht allgemeingültig in } \mathfrak{I}$$

zu benutzen.

■

Wir werden jetzt die für $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ getroffenen Voraussetzungen verstärken, um zu Aussagen zu kommen, die gegenüber den oben bewiesenen Lemmata und Theoremen verschärft sind. Diesem Ziel dient die folgende Definition. Gegeben sei ein beliebiger Homomorphismus $h = (h_s)_{s \in SO}$ von $\mathfrak{I}$ *in* $\mathfrak{I}'$.

Definition 1.2.7.4

1. $h = (h_s)_{s \in SO}$ *ist ein Homomorphismus von* $\mathfrak{I}$ **auf** $\mathfrak{I}'$ *(surjektiver Homomorphismus)*
   $=_{def}$ *Für jedes* $s \in SO$ *ist* h_s *eine Abbildung von* Δ_s **auf** Δ'_s.

2. $h = (h_s)_{s \in SO}$ *ist ein Isomorphismus von* $\mathfrak{I}$ *in* $\mathfrak{I}'$ *(injektiver Homomorphismus)*
   $=_{def}$ *Für jedes* $s \in SO$ *ist* h_s *eindeutig umkehrbar.*

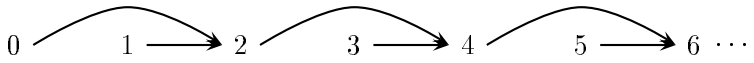
3. $h = (h_s)_{s \in SO}$ *ist ein Isomorphismus von* $\mathfrak{I}$ *auf* $\mathfrak{I}'$ *(bijektiver Homomorphismus)*
   $=_{def}$ *Für* h *gelten die Bedingungen 1 und 2.*

Beispiel 1.2.7.5 Homomorphe Strukturen, die nicht isomorph sind.

Die Signatur Σ sei wie in Beispiel 1.2.7.2 gewählt. Wir definieren $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ **neu** wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_s &=_{def} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \Phi_f(2\xi) &=_{def} 2\xi + 2 \qquad \xi \in \mathbb{N} \\ \Phi_f(2\xi + 1) &=_{def} 2\xi + 2 \end{aligned}$$

Veranschaulichung von Φ_f:



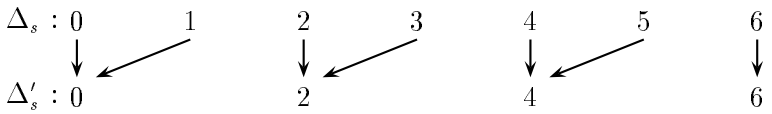
$\mathfrak{I}'$ sei wie in Beispiel 1.2.7.2 gewählt, d. h.

$$\begin{aligned} \Delta'_s &=_{def} \{0, 2, 4, \ldots\} \\ \Phi'_f(2\xi) &=_{def} 2\xi + 2 \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} h(2\xi) &=_{def} 2\xi \qquad \xi \in \mathbb{N} \\ h(2\xi + 1) &=_{def} 2\xi \end{aligned}$$

Veranschaulichung von h:



Dann gilt:

1. h ist eindeutige Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\{0, 2, 4, \ldots\}$
2. $h(\Phi_f(\xi)) = \Phi'_f(h(\xi))$ für jedes $\xi \in \mathbb{N}$
3. $\mathfrak{I}'$ ist **nicht** isomorphes Bild von $\mathfrak{I}$

Beispiel 1.2.7.6 Isomorphe Strukturen.

Wir wählen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ wie in Beispiel 1.2.7.2:

$$\begin{aligned} \Delta_s &=_{def} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \Phi_f(\xi) &=_{def} \xi + 1 \qquad \xi \in \mathbb{N} \\ \Delta'_s &=_{def} \{0, 2, 4, \ldots\} \\ \Phi'_f(\xi) &=_{def} \xi + 2 \qquad \xi \in \{0, 2, 4, \ldots\} \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$h(\xi) =_{def} 2 \cdot \xi \qquad \xi \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

1. $h : \Delta_s \twoheadrightarrow \Delta'_s$, d. h. ist eindeutige Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\{0, 2, 4, \ldots\}$
2. h ist eindeutig umkehrbar, d. h. $h(\xi) = h(\eta) \Longrightarrow \xi = \eta$
3. $h(\Phi_f(\xi)) = \Phi'_f(h(\xi))$ für alle $\xi \in \mathbb{N}$

Beweis von 3.

$$\begin{aligned} h(\Phi_f(\xi)) &= 2 \cdot \Phi_f(\xi) \\ &= 2(\xi + 1) \\ &= 2 \cdot \xi + 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \Phi'_f(h(\xi)) &= h(\xi) + 2 \\ &= 2 \cdot \xi + 2 \end{aligned}$$

■

Wir verschärfen nun **Lemma 1.2.7.8** folgendermaßen für *beliebige* Ausdrücke.

Lemma 1.2.7.10
Ist Σ eine Signatur ohne Identität und ist $h = (h_s)_{s \in SO}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ auf $\mathfrak{I}'$, so gilt für ***jeden*** *Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ und jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ:*

$$\sigma, \mathfrak{I} \vDash A \text{ genau dann, wenn } h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \vDash A.$$

Beweis
Indem wir **Lemma 1.2.7.8** anwenden, brauchen wir (im Induktionsschritt) nur noch zu zeigen:

$$\sigma, \mathfrak{I} \vDash \forall v B \text{ genau dann, wenn } h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \vDash \forall v B,$$

wobei wir als Induktionsvoraussetzung die obige Behauptung für B haben.

Dann gilt, falls $v \in V_s$,

$$\sigma, \mathfrak{I} \vDash \forall v B \tag{2}$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\vDash$)

$$\sigma \langle v := \xi \rangle, \mathfrak{I} \vDash B \text{ für alle } \xi \in \Delta_s \tag{3}$$

genau dann, wenn (nach Induktionsvoraussetzung)

$$h \circ (\sigma \langle v := \xi \rangle), \mathfrak{I}' \vDash B \text{ für alle } \xi \in \Delta_s. \tag{4}$$

Nun gilt aber nach Definition von $\sigma \langle v := \xi \rangle$ und $h \circ \sigma$

$$h \circ (\sigma \langle v := \xi \rangle) = (h \circ \sigma) \langle v := h_s(\xi) \rangle,$$

also gilt die obige Bedingung (4) genau dann, wenn

$$(h \circ \sigma) \langle v := h_s(\xi) \rangle, \mathfrak{I}' \vDash B \text{ für alle } \xi \in \Delta_s. \tag{5}$$

Weil h_s eine Abbildung von Δ_s *auf* Δ'_s ist, gilt

$$\Delta'_s = \{h_s(\xi) \mid \xi \in \Delta_s\},$$

also gilt (5) genau dann, wenn

(6) $$(h \circ \sigma)\langle v := \xi' \rangle, \mathfrak{I}' \vDash B \text{ für alle } \xi' \in \Delta'_s.$$

Nach Definition von $\vDash$ ist (6) aber äquivalent mit

(7) $$h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \vDash \forall v B.$$

■

Wir verschärfen jetzt **Theorem 1.2.7.9** folgendermaßen.

Theorem 1.2.7.11
Ist Σ eine Signatur ***ohne*** *Identität und gibt es einen Homomorphismus von $\mathfrak{I}$* ***auf*** *$\mathfrak{I}'$, so gilt für* ***jeden*** *Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$:*

1. *A ist in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig genau dann, wenn A in $\mathfrak{I}'$ allgemeingültig ist.*
2. *A ist in $\mathfrak{I}$ erfüllbar genau dann, wenn A in $\mathfrak{I}'$ erfüllbar ist.*

Beweis
ad 1.

I ($\Rightarrow$) Wir haben die Voraussetzung, daß

$$\sigma, \mathfrak{I} \vDash A$$

für jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ gilt. Es sei nun σ' ein beliebiger $\mathfrak{I}'$-Zustand. Wir müssen zeigen, daß dann

$$\sigma', \mathfrak{I}' \vDash A$$

gilt.
Nun gibt es nach Voraussetzung von **Theorem 1.2.7.11** einen Homomorphismus $h = (h_s)_{s \in SO}$ von $\mathfrak{I}$ *auf* $\mathfrak{I}'$, d. h. für jedes $s \in SO$ ist h_s eine eindeutige Abbildung von Δ_s *auf* Δ'_s. Somit gibt es einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ, so daß

$$h \circ \sigma = \sigma'$$

gilt. Um somit

$$h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \vDash A$$

zu zeigen, genügt es nach **Lemma 1.2.7.10**, die Bedingung

$$\sigma, \mathfrak{I} \vDash A$$

zu zeigen, welche aber nach Voraussetzung gilt.

II ($\Leftarrow$) Wir haben die Voraussetzung, daß für jeden $\mathfrak{I}'$-Zustand σ' die Beziehung

$$\sigma', \mathfrak{I}' \vDash A$$

gilt. Es sei nun σ ein beliebiger $\mathfrak{I}$-Zustand. Wir müssen zeigen, daß dann

$$\sigma, \mathfrak{I} \vDash A$$

gilt. Nach **Lemma 1.2.7.10** genügt es zu zeigen, daß

$$h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \vDash A$$

gilt. Das ist aber nach Voraussetzung trivial.

ad 2.
Analog zu Behauptung 1 mit **Lemma 1.2.7.10** oder Anwendung von

$$A \text{ ist in } \mathfrak{I} \text{ erfüllbar genau dann, wenn } \neg A \text{ nicht allgemeingültig ist}$$

auf Behauptung 1.

■

Abschließend betrachten wir den Fall, daß in der Signatur Σ (mindestens) ein Gleichheitssymbol vorkommt. Dabei wird es erforderlich sein, den Homomorphiebegriff zum Isomorphiebegriff zu verschärfen, wobei wir nur den Spezialfall von Isomorphismen „*auf*" betrachten.

Lemma 1.2.7.12
*Ist Σ eine beliebige Signatur (also evtl. mit Gleichheitssymbolen) und ist $h = (h_s)_{s \in SO}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{I}$ **auf** $\mathfrak{I}'$, so gilt für jeden Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ und jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ:*

$$\sigma, \mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \models A.$$

Beweis
Dieses Lemma wird wie **Lemma 1.2.7.10** bzw. **Lemma 1.2.7.8** bewiesen mit dem einzigen Zusatz, daß A eine Gleichung der Form $T_1 = T_2$ ist mit $\alpha(=) = ss$.

In diesem Fall haben wir zu beweisen

$$\sigma, \mathfrak{I} \models T_1 = T_2 \text{ genau dann, wenn } h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \models T_1 = T_2.$$

Wir können nun wie folgt schließen:

$$\sigma, \mathfrak{I} \models T_1 = T_2$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma) = EL(T_2, \mathfrak{I}, \sigma)$$

genau dann, wenn (weil h_s eindeutig umkehrbar ist)

$$h_s\,(EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma)) = h_s\,(EL(T_2, \mathfrak{I}, \sigma))$$

genau dann, wenn (nach **Lemma 1.2.7.7**)

$$EL(T_1, \mathfrak{I}', h \circ \sigma) = EL(T_2, \mathfrak{I}', h \circ \sigma)$$

genau dann, wenn (nach Definition von $\models$)

$$h \circ \sigma, \mathfrak{I}' \models T_1 = T_2.$$

■

Aus dem eben bewiesenen Lemma ergibt sich das folgende Theorem.

Theorem 1.2.7.13
*Ist Σ eine beliebige Signatur (also evtl. mit Gleichheitssymbolen) und ist $h = (h_s)_{s \in SO}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{I}$ **auf** $\mathfrak{I}'$, so gilt für jeden Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$:*

1. *A ist in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig genau dann, wenn A in $\mathfrak{I}'$ allgemeingültig ist.*

2. A ist in $\mathfrak{I}$ erfüllbar genau dann, wenn A in $\mathfrak{I}'$ erfüllbar ist.

Beweis
Analog zum Beweis von **Theorem 1.2.7.11**, hier jedoch Verwendung von **Lemma 1.2.7.12** anstelle von **Lemma 1.2.7.10**. ■

Aufgabe 1.2.7.1
Man diskutiere die oben untersuchte Problematik unter der Voraussetzung, daß $h = (h_s)_{s \in SO}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{I}$ *in* (nicht *auf*) $\mathfrak{I}'$ ist.

1.3 Der Modellbegriff. Semantisches Folgern. Modell-basiertes Schließen (Semantik II)

1.3.1 Der Modellbegriff

Der Modellbegriff hat eine fundamentale Bedeutung sowohl in der (theoretischen) Mathematischen Logik als auch in ihren Anwendungen, insbesondere in der Informatik.

So bildet er die begriffliche Grundlage für das semantische Folgern und das sogenannte modellbasierte Schließen. In der (theoretischen) Mathematischen Logik wurde in den letzten Jahrzehnten ein spezielles Teilgebiet, die *Modelltheorie*, entwickelt, wobei mit Methoden aus der *Allgemeinen Algebra* (auch *Universelle Algebra* genannt) sowie mit speziellen zu diesem Zweck entwickelten Methoden Eigenschaften von Modellen sowie die Struktur von Modellklassen untersucht werden.

Bei den Anwendungen der Mathematischen Logik in der Informatik wird der Modellbegriff umfangreich benutzt, wobei er in manchen Fällen, bedingt durch das bestehende Anwendungsproblem, geeignet eingeschränkt wird, z. B.

- beim Studium der *Semantik von Programmiersprachen* eingeschränkt auf HERBRAND*sche Modelle*, hier manchmal auch weniger eingeschränkt als *Semi*-HERBRAND*sche Modelle* oder auch als beliebige Modelle, d. h. ohne irgendeine Einschränkung,
- beim Studium der HERBRAND*schen Theorie*, der ROBINSON*schen Resolutionstheorie* und bei der Entwicklung *automatischer Beweisverfahren* eingeschränkt auf *kanonische* bzw. auf HERBRAND*sche Modelle*,
- bei der mathematisch-logischen Grundlegung der *Logischen Programmierung* eingeschränkt auf HERBRAND*sche Modelle* bzw. *minimale Modelle*,
- beim Studium bestimmter *nichtmonotoner Folgerungsoperatoren*, die u. a. in der künstlichen Intelligenz eine Rolle spielen, z. B. beim Studium des *Circumscription-Folgerungsoperators* eingeschränkt auf *minimale Modelle* und beim Studium des *Closed-World-Assumption-Folgerungsoperators* eingeschränkt auf *generische Modelle*.

Diese Aufzählung ließe sich noch fortsetzen; wir haben hier allein die Gebiete genannt, die in der Vorlesung auch angesprochen werden.

Da wir Probleme der *algebraischen Programmierung* und der *(algebraischen) Spezifikationstheorie* im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandeln werden, sollen *initiale* und *finale Modelle*, die in den genannten Gebieten wichtig sind, hier nicht diskutiert werden.

Der Modellbegriff ist im Prinzip schon aus dem vorangegangenen Unterabschnitt 1.2.4 als Allgemeingültigkeitsbegriff bekannt, er entsteht durch eine einfache Übertragung der für einzelne Ausdrücke definierten Allgemeingültigkeit auf Mengen von Ausdrücken.

Gegeben seien eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$, eine Σ-Interpretation $\Im = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$, eine Variablenmenge $V = \bigcup_{s \in SO} V_s$ sowie eine Menge X von Ausdrücken, die entsprechend den Definitionen 1.1.3.1 und 1.1.4.1 gebildet werden können, d. h. $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$.

Definition 1.3.1.1
$\Im$ *heiße* ***Modell*** *von* $X =_{def}$ *Für jedes* $A \in X$ *ist* A *in* $\Im$ *allgemeingültig, d. h. es gilt* $\Im \models A$.

Bemerkungen zu Definition 1.3.1.1:

1. Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell von X, schreibt man gelegentlich auch $\mathfrak{I}\ Mod\ X$ bzw. $\mathfrak{I} \models X$.
2. Die Klasse aller Σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$, die Modell von X sind, wird durch $MOD(X)$ bezeichnet.

Wir diskutieren nun zwei *Monotonieeigenschaften* des Modellbegriffs, von denen die erste (die „Abwärts"-Monotonie) trivial ist, dagegen die zweite (die „Aufwärts"-Monotonie) allgemein nicht gilt, jedoch in einem wichtigen Spezialfall (als „tiefliegender" Satz) bewiesen werden kann.

Folgerung 1.3.1.1 (Abwärts-Monotonie)
Ist $\mathfrak{I}$ Modell von Y und $X \subseteq Y$, so ist $\mathfrak{I}$ auch Modell von X.

Nach Definition des Modellbegriffs ist diese Folgerung offensichtlich völlig trivial. Wir weisen jedoch schon hier darauf hin, daß sich die Situation schlagartig und grundlegend ändert, wenn man in der obigen Folgerung beliebige Modelle (also ohne Einschränkungen) durch *minimale Modelle* ersetzt. Für minimale Modelle ist die obige Folgerung, wie wir weiter unten in diesem Abschnitt zeigen werden, im allgemeinen falsch. Dieser Fakt ist z. B. die Ursache dafür, daß der in der Künstlichen Intelligenz betrachtete *Circumscription*-Folgerungsoperator, der mit Hilfe minimaler Modelle definiert wird, im allgemeinen *nicht monoton* ist.

Man kann sich sehr leicht durch Gegenbeispiele klarmachen, daß für beliebige Modelle eine „Aufwärts"-Monotonie in dem folgenden Sinne allgemein *nicht* gilt:

Ist $\mathfrak{I}$ ein Modell von X und $X \subseteq Y$, so ist $\mathfrak{I}$ ein Modell von Y.

Dazu seien $c \in FS$ und $P \in PS$ mit $\alpha(c) = \alpha(P) \in SO$ gegeben. Man wähle dann ein $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models X$, wobei $X = \{Pc\}$. Dann ist $\mathfrak{I}$ kein Modell von $Y = \{Pc, \neg Pc\}$.

Es gilt jedoch die folgende „abgeschwächte" Aufwärts-Monotonie.

Theorem 1.3.1.2 (Endlichkeitssatz für Modelle)
Gibt es zu jeder ***endlichen*** *Teilmenge $X_{fin} \subseteq Y$ ein Modell $\mathfrak{I}$, d. h. mit $\mathfrak{I} \models X_{fin}$, dann gibt es auch für die gesamte Menge Y ein Modell, etwa $\mathfrak{I}'$, d. h. mit $\mathfrak{I}' \models Y$.*

Dieser Satz wurde erstmals im Jahre 1941 von dem russischen Logiker A. I. Malzew (siehe auch [3, S. 73]) bewiesen und in der Algebra zur Konstruktion von algebraischen Systemen (Strukturen) angewendet. Heute gehört dieser Satz zum „Handwerkszeug" und findet in vielen Teilen der Mathematik, Logik und Theoretischen Informatik Anwendung. Sein Beweis ist sehr schwierig und kompliziert; jeder Beweisversuch „ad hoc" (d. h. ohne zielgerichtete größere Vorbereitungen) ist aussichtslos.

Theorem 1.3.1.2 wird häufig auch „Kompaktheitstheorem" (für Modelle) genannt. Diese Bezeichnung wird deshalb gewählt, weil Theorem 1.3.1.2 „in topologischer Fassung" besagt, daß ein mit Hilfe von Modellen konstruierter topologischer Raum kompakt ist.

Im folgenden Rest des Unterabschnitts 1.3.1 wollen wir den Modellbegriff durch einige weitere Definitionen und durch Beispiele veranschaulichen und vertiefen.

Im Unterabschnitt 1.2.7 hatten wir für Σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ definiert:

- $\mathfrak{I}$ ist Teilstruktur von $\mathfrak{I}'$ (Definition 1.2.7.1)

- $\mathfrak{I}$ ist Unterstruktur von $\mathfrak{I}'$ (Definition 1.2.7.2)
- h ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ in (auf) $\mathfrak{I}'$ (Definition 1.2.7.3)
- h ist ein Isorphismus von $\mathfrak{I}$ in (auf) $\mathfrak{I}'$ (Definition 1.2.7.4)

Diese Definitionen werden unverändert übernommen, falls es sich bei $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ um Modelle derselben Menge $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ handelt; d. h. man sagt in diesem Fall, daß z. B. $\mathfrak{I}$ Teilmodell von $\mathfrak{I}'$ ist. (Analog für die übrigen Definitionen.)

An dieser Stelle sei auf eine sprachliche Unkorrektheit hingewiesen, die in manchen Publikationen zu finden ist, indem nämlich Interpretationen „Modelle" genannt werden, also das Wort „Modell" in doppelter Bedeutung verwendet wird.

Wir wollen hier streng wie folgt unterscheiden:

Gegeben sei eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$. Eine Σ-Interpretation (oder auch Σ-algebraisches System) $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ interpretiert die Bestandteile SO, FS, PS der Signatur Σ (unter Beachtung der Aritätsfunktion α). Fügt man noch eine Menge V von Individuenvariablen sowie einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ hinzu, interpretiert $\mathfrak{I}$ zusammen mit σ die Mengen $TERM(\Sigma, V)$ und $AUSD(\Sigma, V)$, indem man jetzt die interpretierende Abbildung EL, d. h. für $T \in TERM(\Sigma, V)$ den Wert $EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$ von T bei $\mathfrak{I}$ und σ sowie die interpretierende Relation $\models$, d. h. für $A \in AUSD(\Sigma, V)$ die Beziehung $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ definieren kann. Auf der Grundlage von $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ wird dann die Allgemeingültigkeit von A in $\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I} \models A$) definiert.

Eine grundsätzlich neue Situation liegt vor, wenn eine Menge $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ fixiert ist. Ist eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gegeben und ist jeder Ausdruck $A \in X$ allgemeingültig in $\mathfrak{I}$, dann sagen wir (und auch nur in diesem Fall), daß $\mathfrak{I}$ Modell von X sei.

Der im folgenden definierte Begriff eines minimalen Modells ist eine sowohl für die Theorie als auch für die Anwendungen sehr wichtige Spezialisierung des Begriffs eines (beliebigen) Modells.

Gegeben sei eine beliebige Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ sowie eine Menge $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$.

Definition 1.3.1.2
*$\mathfrak{I}$ heiße **minimales** Modell für X ($\mathfrak{I} \models_{min} X$)*
$=_{def}$ 1. *$\mathfrak{I}$ ist Modell für X.*
2. *Es gibt keine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}'$, so daß $\mathfrak{I}'$ echte Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ Modell von X ist.*

Man beachte, daß das Konzept eines minimalen Modells sehr stark von der gegebenen Menge X abhängt. Das wird durch die folgenden Beispiele vertieft. Für den Begriff der Σ-Interpretation hat dieses Minimalitätskonzept offenbar wenig Aussagekraft, da — von einigen Trivialfällen abgesehen — es zu jeder Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ eine echte Teilstruktur $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{I}$ gibt, die ebenfalls Σ-Interpretation ist. Ein Trivialfall liegt z. B. vor, wenn für jedes $s \in SO$ der Individuenbereich Δ_s aus genau einem Element besteht sowie für jedes $P \in PS$ die Relation Π_P leer ist.

Übungsaufgabe 1.3.1.1
Man stelle alle Trivialfälle zusammen, bei denen es zu der Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ keine echte Teilstruktur $\mathfrak{I}'$ gibt, die ebenfalls Σ-Interpretation ist.

Beispiel 1.3.1.1
Gegeben sei eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ mit $SO = \{s\}$, $FS = \emptyset$, $PS = \{P, \underset{s}{=}\}$, $\alpha(P) = ss$ und $\alpha(\underset{s}{=}) = ss$. Die Menge V der Individuenvariablen enthalte die paarweise verschiedenen

Individuenvariablen x, y, z. Wir betrachten nun die Menge $X = \{(1), (2), (3), (4)\}$, wobei

(1) $\forall x \exists y Pxy$

(2) $\exists y \forall x \neg Pxy$

(3) $\forall x \forall y \forall z (Pxy \wedge Pxz \rightarrow y = z)$

(4) $\forall x \forall y \forall z (Pyx \wedge Pzx \rightarrow y = z)$

Für die so konstruierte Menge X gelten nun die folgenden zwei Aussagen:

1. Es gibt eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$, so daß $\mathfrak{I}$ Modell von X ist
2. X hat kein minimales Modell.

Beweis von 1
Wir konstruieren eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}^* = [\Sigma, \Delta^*, \Phi^*, \Pi^*]$, indem wir setzen

$$\Delta^*_s =_{def} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\Phi^* \text{ ist die leere Abbildung, weil } FS \text{ leer ist}$$
$$\Pi^*_P =_{def} \{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Offenbar ist $\mathfrak{I}^*$ ein Modell von X, weil die Ausdrücke (1), (2), (3) und (4) sämtlich in $\mathfrak{I}^*$ allgemeingültig sind. ■

Beweis von 2
Um zu zeigen, daß X kein minimales Modell hat, genügt es, folgendes zu beweisen: Zu jeder Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$, die Modell von X ist, existiert eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}''$, die ebenfalls Modell von X und echte Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ ist.

Gegeben sei ein Modell $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ von X. Dann ist (2), d. h.

$$\exists y \forall x \neg Pxy$$

in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig. Somit können wir ein $\eta_0 \in \Delta_s$ wählen und fixieren, so daß für alle $\xi \in \Delta_s$

$$[\xi, \eta_0] \notin \Pi_P$$

gilt.

Weil die Ausdrücke (1), (3) und (4) in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig sind, ist Π_P eine totale eineindeutige Abbildung von Δ_s in Δ_s, die wir durch φ bezeichnen wollen.

Wir definieren nun

$$D' =_{def} \{\eta_0, \varphi(\eta_0), \varphi(\varphi(\eta_0)), \ldots\}$$

Schränken wir die Abbildung φ auf D' zu φ' ein, dann ist offenbar φ' eine eineindeutige Abbildung von D' auf D'.

Setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$succ(n) =_{def} n + 1,$$

dann sind offenbar die Strukturen

$$[\mathbb{N}, succ] \text{ und } [D', \varphi']$$

isomorph.

Wir definieren nun die Σ-Interpretation $\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\Delta'_s &= D'\\ \Pi' &=_{def} \text{Die leere Abbildung}\\ \Pi'_P &=_{def} \varphi' \text{ (weil } \varphi' \text{ offenbar eine binäre Relation ist)}\end{aligned}$$

Also gilt, daß die Σ-Interpretationen $\mathfrak{I}^*$ und $\mathfrak{I}'$ isomorph sind, somit folgt mit Theorem 1.2.7.13, weil $\mathfrak{I}^*$ Modell von X ist, daß $\mathfrak{I}'$ Modell von X ist.

Ist nun $D' \subset \Delta_s$, so folgt $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$, damit wäre die Aussage bewiesen. Da $D' \subset \Delta_s$ nicht gesichert ist, definieren wir

$$D'' =_{def} \{\varphi'(\eta_0), \varphi'(\varphi'(\eta_0)), \ldots\}.$$

Dann gilt stets

$$D'' \subset \Delta_s.$$

Wir schränken nun die Funktion φ' auf den Individuenbereich D'' ein, das Resultat sei φ''. Dann ist trivialerweise φ'' eine (totale) eineindeutige Abbildung von D'' auf D''. Daraus folgt, daß die Strukturen

$$[D', \varphi'] \text{ und } [D'', \varphi'']$$

isomorph sind.

Wir definieren nun eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}'' = [\Sigma, \Delta'', \Phi'', \Pi'']$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\Delta''_s &= D''\\ \Phi'' &=_{def} \text{Die leere Abbildung}\\ \Pi''_P &=_{def} \varphi'' \text{ (als binäre Relation aufgefaßt)}\end{aligned}$$

Für die Σ-Interpretation $\mathfrak{I}''$ gilt dann:

1. $\mathfrak{I}''$ isomorph mit $\mathfrak{I}'$, weil die Strukturen $[D', \varphi']$ und $[D'', \varphi'']$ isomorph sind, also gilt $\mathfrak{I}'' \models X$.
2. $\mathfrak{I}'' \prec \mathfrak{I}'$, weil $D'' \subset D'$.

Damit haben wir eine Interpretation $\mathfrak{I}''$ konstruiert, die Modell von X ist und für die wegen $\mathfrak{I}'' \prec \mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{I}' \precsim \mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I}'' \prec \mathfrak{I}$, die also eine echte Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ ist. ■

Beispiel 1.3.1.2
Gegeben sei eine Signatur

$$\Sigma_2 = [SO, FS_2, PS, \alpha_2],$$

die wir aus der im Beispiel 1.3.1.1 betrachteten dadurch erhalten, daß wir die leere Menge FS durch

$$FS_2 = \{zero\}$$

ersetzen und die Aritätsfunktion α ausdehnen, indem wir zusätzlich

$$\alpha_2(zero) =_{def} s$$

setzen. Für P wird die Arität aus Σ beibehalten, d. h. wir setzen

$$\begin{aligned}\alpha_2(P) &=_{def} \alpha(P) = ss\\ \alpha_2\left(\underset{s}{=}\right) &=_{def} \alpha\left(\underset{s}{=}\right) = ss\end{aligned}$$

Durch $(2')$ kennzeichnen wir den Ausdruck

$$\forall x \neg P x \, zero.$$

Wir betrachten dann die Menge

$$X_2 =_{def} \{(1), (2'), (3), (4)\}.$$

Für die Menge X_2 gelten dann die folgenden zwei Aussagen:

1. Es gibt eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$, so daß $\mathfrak{I}$ minimales Modell von X_2 ist.
2. Für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ gilt: Sind $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ minimale Modelle von X_2, so sind $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ isomorph.

Beweis von 1
Wir konstruieren

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

wie folgt, wobei wir uns an der Konstruktion $\mathfrak{I}^*$ im Beispiel 1.3.1.1 orientieren. Außerdem wird das neu eingeführte Funktionssymbol *zero* als die natürliche Zahl 0 interpretiert.

$$\begin{aligned} \Delta_s &=_{def} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \Phi_{zero} &=_{def} 0 \\ \Pi_P &=_{def} \{[n, n+1] \,|\, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Dann gilt zunächst trivial, daß die Ausdrücke (1), $(2')$, (3), (4) sämtlich allgemeingültig in $\mathfrak{I}$ sind, also $\mathfrak{I}$ ein Modell von X_2 ist.

Es sein nun eine echte Teilstruktur

$$\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$$

von $\mathfrak{I}$ gegeben. Es genügt dann zu zeigen, daß $\mathfrak{I}'$ **nicht** Modell von X_2 ist. Da stets $\Phi'_{zero} = \Phi_{zero}$ gelten muß (weil $\Phi'_{zero} \subset \Phi_{zero}$ bedeuten würde, daß Φ'_{zero} leer ist, was nicht zugelassen wird), ergeben sich aus $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$ nur die folgenden 2 Fälle

Fall 1. $\Delta'_s \subset \Delta_s$

Fall 2. $\Pi'_P \subset \Pi_P$.

ad 1.
Aus $\Delta'_s \subset \Delta_s$ folgt, daß es eine natürliche Zahl n_0 gibt mit $n_0 \notin \Delta'_s$. Die Gleichung $n_0 = 0$ kann nicht gelten, denn dann wäre die Bedingung $\Phi'_{zero} = \Phi_{zero}$ verletzt. Also muß $n_0 > 0$ gelten. Wir wählen nun das kleinste $n_0 > 0$, so daß $n_0 \notin \Delta'_s$. Dann gilt $n_0 - 1 \in \Delta'_s$, jedoch gibt es in Δ'_s kein Element m, so daß

$$(n_0 - 1) + 1 = m,$$

weil $(n_0 - 1) + 1 = n_0$ ist und $n_0 \notin \Delta'_s$ gilt. Also ist in $\mathfrak{I}'$ der Ausdruck

$$\forall x \exists y P x y \tag{1}$$

nicht allgemeingültig, also ist $\mathfrak{I}'$ kein Modell für X_2.

Übungsaufgabe 1.3.1.2
Man zeige analog zum Fall 1, daß auch im Fall 2 $\mathfrak{I}'$ kein Modell von X_2 sein kann.

■

Übungsaufgabe 1.3.1.3
Man beweise Aussage 2 von Beispiel 1.3.1.2, d. h. daß beliebige minimale Modelle von X_2 isomorph sind.

Anleitung.
Der entscheidende Zwischenschritt bei diesem Beweis besteht darin, daß man die folgende Tatsache erkennt und zeigt:

Ist $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ ein minimales Modell von X_2, so gilt:

1. $\Delta_s = \{\xi_0, \varphi(\xi_0), \varphi(\varphi(\xi_0)), \ldots\}$, wobei φ die von Π_P definierte eindeutige Abbildung von Δ_s in Δ_s bezeichnet und $\xi_0 = \Phi_{zero}$ gilt.
2. Die Struktur $[\Delta_s, \varphi, \xi_0]$ ist isomorph zur Struktur

$$[\mathbb{N}, succ, 0],$$

wobei wie in Beispiel 1.3.1.1 $succ$ durch

$$succ(n) =_{def} n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

definiert ist.

Beispiel 1.3.1.3
Wir wählen dieselbe Signatur Σ wie im vorangegangenen Beispiel 1.3.1.2 und definieren:

$$\begin{aligned} A &=_{def} (1) \wedge (2') \wedge (3) \wedge (4) \\ B &=_{def} \forall x \forall y\ x = y\ \wedge \forall x P x x. \\ X_3 &=_{def} \{A \vee B\}. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 1.3.1.4
X_3 hat mindestens zwei minimale Modelle, die nicht isomorph sind.

Anleitung.
Auf Grund der Konstruktionen in Beispiel 1.3.1.2 hat A mindestens ein minimales Modell, etwa $\mathfrak{I}$, d. h. es gilt $\mathfrak{I} \models A$, also auch $\mathfrak{I} \models A \vee B$. Nun muß man zeigen, daß $\mathfrak{I}$ auch minimales Modell für $A \vee B$ ist. Dies wird indirekt gezeigt, indem die Annahme, daß es ein $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$ gibt mit $\mathfrak{I}' \models A \vee B$, zum Widerspruch geführt wird.

Weiterhin ist klar, daß B mindestens ein minimales Modell $\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$ hat, z. B.

$$\begin{aligned} \Delta'_s &= \{\xi_0\} \\ \Phi'_{zero} &=_{def} \xi_0 \\ \Pi'_P &= \{[\xi_0, \xi_0]\} \end{aligned}$$

Dieses Modell ist auch minimales Modell von $A \vee B$.

Zunächst ist klar, daß $\mathfrak{I}'$ auch Modell von $A \vee B$ ist. Die Annahme, daß es ein $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$ gibt mit $\mathfrak{I}' \models A \vee B$ wird dann wieder zum Widerspruch geführt.

Übungsaufgabe 1.3.1.5
X_3 hat bis auf Isomorphie genau zwei nichtisomorphe minimale Modelle.

Anleitung.
Wir wissen, daß A bis auf Isomorphie genau ein minimales Modell hat. Wir zeigen, daß dieselbe Aussage für B gilt. Es seien nun minimale Modelle $\mathfrak{I}_A$ für A bzw. $\mathfrak{I}_B$ für B fixiert. Auf Grund der gelösten Übungsaufgabe 1.3.1.4 genügt es, noch zu zeigen: Ist $\mathfrak{I}$ ein minimales Modell von $A \vee B$, so ist $\mathfrak{I}$ isomorph $\mathfrak{I}_A$ oder isomorph $\mathfrak{I}_B$. Der entscheidende Schritt in diesem Beweis ist, daß man zeigt:

> Ist $\mathfrak{I}$ minimales Modell von $A \vee B$, so ist $\mathfrak{I}$ minimales Modell von A oder minimales Modell von B.

Die Abwärtsmonotonie, die für (beliebige) Modelle trivial auf Grund der Modelldefinition gefolgert werden kann (siehe Folgerung 1.3.1.1), gilt für minimale Modelle im allgemeinen nicht mehr. Wir werden dies weiter unten durch Angabe eines Gegenbeispiels (siehe Beispiel 1.3.1.4) belegen.

Bei der Diskussion dieses Gegenbeispiels werden wir von einer gewissen schwachen Aufwärts-Monotonie für minimale Modelle Gebrauch machen, die auf Grund eines Zusammenspiels von minimalen und beliebigen Modellen wie folgt gilt.

Gegeben seien eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ sowie Ausdrucksmengen $X, Y \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$.

Lemma 1.3.1.3
Ist $\mathfrak{I}$ minimales Modell von X und ist $\mathfrak{I}$ Modell von Y, gilt ferner $X \subseteqq Y$, so ist $\mathfrak{I}$ auch minimales Modell von Y.

Beweis
Wir nehmen an, daß $\mathfrak{I}$ nicht minimales Modell von Y ist. Dann gibt es, weil $\mathfrak{I}$ Modell von Y ist, eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}'$, so daß $\mathfrak{I}'$ Modell von Y und $\mathfrak{I}'$ eine **echte** Teilstruktur von $\mathfrak{I}$ ist. Weil $\mathfrak{I}'$ Modell von Y ist und $X \subseteqq Y$ gilt, ist $\mathfrak{I}'$ auch Modell von X. Daraus folgt, daß $\mathfrak{I}$ nicht minimales Modell von X ist, also ein Widerspruch. ■

Beispiel 1.3.1.4
Wir verwenden die in Beispiel 1.3.1.2 verwendete Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$, wobei

$$SO = \{s\}$$
$$FS = \{zero\}$$
$$PS = \{P, \overline{\overline{=}}_s\}$$

und $\alpha(zero) = s$, $\alpha(P) = ss$, $\alpha(\overline{\overline{=}}_s) = ss$ gilt.

Wir setzen ferner

$$X = \{(1), (2), (3), (4)\}.$$
$$Y = \{(1), (2), (2'), (3), (4)\}.$$

Nun hat die Menge

$$\{(1), (2), (3), (4)\}$$

ein minimales Modell (siehe Beispiel 1.3.1.2), etwa $\mathfrak{I}$. Daraus folgt trivial, daß $\mathfrak{I}$ auch Modell von Y ist, also ist nach Lemma 1.3.1.3 die Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ auch minimales Modell von Y. Die Teilmenge X von Y hat jedoch kein minimales Modell (siehe Beispiel 1.3.1.1).

Somit gilt das folgende

Theorem 1.3.1.4
Für minimale Modelle gilt die Abwärtsmonotonie im allgemeinen nicht.

Wir weisen schon hier darauf hin, daß Theorem 1.3.1.4 dafür „verantwortlich" ist, daß der Circumscription-Folgerungsoperator *Cir* im allgemeinen die Monotonie verletzt (siehe Unterabschnitt 1.3.4).

Eine weitere „unangenehme" Eigenschaft minimaler Modelle besteht darin, daß für sie der Endlichkeitssatz (siehe Theorem 1.3.1.2) im allgemeinen **nicht** gilt. Dies wird durch das folgende (Gegen-)Beispiel widerlegt.

Beispiel 1.3.1.5
Wir wählen die (triviale) einsortige Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ mit $SO = \{s\}$, $FS = \phi$, $PS = \{\overline{=}_s\}$, jedoch sei die Menge V der Individuenvariablen (der einzigen Sorte s) unendlich. Gegeben sei eine (abzählbar unendliche) Folge

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

von paarweise verschiedenen Individuenvariablen aus V.

Wir definieren dann

$$\exists_2 =_{def} \exists x_1 \exists x_2 x_1 \neq x_2$$
$$\exists_3 =_{def} \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_3)$$
$$\vdots$$
$$\exists_n =_{def} \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i \neq x_j \right)$$
$$\vdots$$

Die definierten Aussagen $\exists_2, \ldots, \exists_n$ heißen Mindestzahlaussagen in dem Sinne, daß aus

$$\mathfrak{I} \models \exists_n$$

folgt, daß Δ_s mindestens n Elemente enthält, also

$$card\, \Delta_s \geqq n$$

ist. Schließlich definieren wir

$$X =_{def} \{\exists_2, \exists_3, \ldots, \exists_n, \ldots\}$$

Offenbar ist X eine unendliche Menge von Ausdrücken (sogar Aussagen). Wir beweisen nun

1. jede endliche Teilmenge $X_{\text{fin}} \subseteqq X$ hat ein minimales Modell
2. X hat **kein** minimales Modell.

ad 1.
Es sei eine endliche Teilmenge $X_{\text{fin}} \subseteqq X$ gegeben. Dann gibt es in X_{fin} ein $\exists_n$ mit maximalem Index, etwa n_{max}. Wir wählen nun eine (beliebige) Menge M mit

$$card\, M = n_{max}.$$

und definieren

$$\Delta_s =_{def} M.$$

Dann ist die so definierte Interpretation $\mathfrak{I}$

- trivialerweise ein Modell von X_{fin} und sogar
- ein minimales Modell von X_{fin},

weil in der Interpretation $\mathfrak{I}'$, die durch

$$\Delta'_s =_{def} N, \text{ wobei } N \subset M$$

definiert ist, der Ausdruck $\exists_{n_{max}}$ nicht allgemeingültig ist.

ad 2.
Offensichtlich hat X ein Modell. Dazu ist es nur erforderlich,

$$\Delta_s \text{ als unendliche Menge}$$

zu definieren.

Ist Δ_s unendlich, $\xi \in \Delta_s$, dann ist auch

$$\Delta'_s =_{def} \Delta_s \setminus \{\xi\}$$

unendlich, also ist die so definierte Interpretation wieder Modell für X. Somit hat X **kein** minimales Modell.

Steht in Σ ein Gleichheitszeichen nicht zur Verfügung, ist die Situation in dem Sinne komplizierter, als man nicht so einfach, wie oben demonstriert, ein Gegenbeispiel konstruieren kann. Um zu einer positiven Aussage zu kommen, kann man eine Eigenschaft heranziehen, die deshalb bemerkenswert ist, weil sie generell in der Mathematischen Logik und deren Anwendungen eine wichtige Rolle spielt, z. B. bei der modelltheoretischen Fundierung der logischen Programmierung.

Gegeben sei eine beliebige Signatur Σ sowie ein $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$.

Definition 1.3.1.3
*X erfüllt die **Fundierungseigenschaft für Modelle***
$=_{def}$ *Für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt:*

> *Ist $\mathfrak{I}$ Modell von X, so existiert eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}'$, so daß $\mathfrak{I}' \trianglelefteq \mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ minimales Modell für X ist.*

Theorem 1.3.1.5
Erfüllt X die Fundierungseigenschaft für Modelle, so gilt für X der Endlichkeitssatz für minimale Modelle

Übungsaufgabe 1.3.1.6
Man beweise Theorem 1.3.1.5

Da dieser Beweis sehr einfach ist, wird keine Anleitung gegeben.

1.3.2 Das semantische Folgern

Das semantische Folgern wurde

- im 19. Jahrhundert von dem Philosophen BERNHARD BOLZANO vorweggenommen und
- 1935/36 in seiner entscheidenden Bedeutung für die gesamte Logik von dem polnischen Logiker ALFRED TARSKI erkannt.

Fragt man einen Mathematiker, was ein (richtiger) Satz der Gruppentheorie sei, erhält man als Antwort: „Das ist ein Satz, der in *allen* Gruppen gilt".

Nun wäre zu fragen, was eine Gruppe sei? Antwort: Eine Gruppe ist ein Modell eines Axiomensystems der Gruppentheorie, also (da es mehrere „äquivalente" Axiomensysteme der Gruppentheorie gibt) ein Modell z. B. von

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \\ \exists x\ x \cdot y &= z \\ \exists y\ x \cdot y &= z \end{aligned}$$

Dieser Spezialfall wird nun wie folgt verallgemeinert. Gegeben seien eine beliebige Menge X von Ausdrücken sowie ein beliebiger Ausdruck A, also $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ und $A \in AUSD(\Sigma, V)$.

Definition 1.3.2.1

1. *Aus X folgt (semantisch) A (kurz $X \Vdash A$)*
   $=_{def}$ *Für jede Σ-Interpretation $\Im$ gilt: Wenn $\Im$ Modell von X, so $\Im$ Modell von A.*
2. $Cons(X) =_{def} \{A | A \in AUSD(\Sigma, V)$ *und* $X \Vdash A\}$.

Bemerkungen zu Definition 1.3.2.1:

1. In vielen Anwendungen wird anstelle von $X \Vdash A$ auch $X \models A$ geschrieben. Da das Symbol $\models$ schon zur Bezeichnung von $\Im \models A$ (A ist in $\Im$ allgemeingültig) und von $\sigma, \Im \models A$ (σ und $\Im$ erfüllen A) verbraucht ist, vermeiden wir eine dreifache „Beladung" und schreiben stets $X \Vdash A$.
2. Die Menge X wird (in der Mathematik und in der Mathematischen Logik) meistens *Axiomensystem* (einer Theorie) bzw. (in der Informatik) *Spezifikation* bezeichnet, wobei in der Informatik (in der *algebraischen Spezifikationstheorie*) X in der Regel aus endlich vielen *Gleichungen* (oder sogenannten „bedingten" Gleichungen) besteht.

Da in manchen Büchern und Einzelarbeiten der Begriff des semantischen Folgerns in einer modifizierten Form eingeführt und verwendet wird, wollen wir diese Modifikation hier darstellen und ihre Vorteile und Nachteile gegenüber der in Definition 1.3.2.1 eingeführten Version kurz diskutieren.

Grundsätzlich ist voranzuschieben: Während der in Definition 1.3.2.1 eingeführte Begriff des semantischen Folgerns auf dem Modellbegriff beruht, geht man bei der Modifikation vom Erfüllungsbegriff ($\sigma, \Im$ erfüllen A, kurz $\sigma, \Im \models A$, siehe Definition 1.2.3.1) aus.

In Analogie zum Modellbegriff, wo wir die Relation $\Im \models A$ auf $\Im \models X$ ausgedehnt haben, dehnen wir auch die Beziehung $\sigma, \Im \models A$ auf Mengen aus, indem wir definieren:

Definition 1.3.2.2
Der $\mathfrak{I}$-Zustand σ und das algebraische System $\mathfrak{I}$ erfüllen die Menge X von Ausdrücken aus $AUSD(\Sigma, V)$ (kurz: $\sigma, \mathfrak{I} \models X$)
$=_{def}$ *Für jedes $A \in X$ gilt: $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.*

Mit diesem Hilfsbegriff können wir die (sogenannte) *starke* semantische Folgerungsbeziehung wie folgt definieren.

Definition 1.3.2.3

1. *Aus X folgt stark (semantisch) A (kurz: $X \Vdash' A$)*
   $=_{def}$ *Für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ und jeden $\mathfrak{I}$-Zustand σ gilt:*

   $$\text{Wenn } \sigma, \mathfrak{I} \models X, \text{ so } \sigma, \mathfrak{I} \models A.$$

2. $Cons'(X) =_{def} \{A | A \in AUSD(\Sigma, V) \text{ und } X \Vdash' A\}$

Bemerkungen zu Definition 1.3.2.3:

1. Nennt man ein geordnetes Paar der Form $[\sigma, \mathfrak{I}]$ mit $\sigma, \mathfrak{I} \models X$ bzw. $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ schwaches Modell von X bzw. A, so läßt sich $X \Vdash' A$ auch in der Form definieren, daß jedes schwache Modell $[\sigma, \mathfrak{I}]$ von X auch schwaches Modell von A ist.

2. Wir haben die Folgerungsbeziehung $\Vdash'$ „stark“ genannt, weil aus $X \Vdash' A$ stets die Beziehung $X \Vdash A$ folgt. Die Umkehrung dieser Implikation gilt im allgemeinen nicht; sie gilt jedoch, wenn X allein aus Aussagen besteht. (Zur Erinnerung: Ein Ausdruck heißt Aussage genau dann, wenn in diesem Ausdruck keine freien Individuenvariablen vorkommen.) Aus den beschriebenen Beziehungen ergibt sich das folgende Lemma.

   Lemma 1.3.2.1
   1. $Cons'(X) \subseteqq Cons(X)$
   2. *Besteht X nur aus Aussagen, so $Cons'(X) = Cons(X)$.*

   Beweis
   ad 1:
   Es sei $\mathfrak{I} \models X$. Ferner sei ein $\mathfrak{I}$-Zustand σ beliebig gegeben. Um $\mathfrak{I} \models A$ zu zeigen, genügt es offensichtlich, $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ zu beweisen. Aus $\mathfrak{I} \models X$ folgt aber $\sigma, \mathfrak{I} \models X$, also, nach der Voraussetzung $X \Vdash' A$, gilt $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.

   ad 2:
   Weil Behauptung 1 bereits bewiesen ist, genügt es, die Inklusion $\supseteqq$ zu zeigen. Es sei $\sigma, \mathfrak{I} \models X$. Weil X allein aus Aussagen besteht, folgt daraus $\mathfrak{I} \models X$, also erhalten wir mit der Voraussetzung $X \Vdash A$ unmittelbar $\mathfrak{I} \models A$, somit gilt trivial $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.

   ■

   Übungsaufgabe 1.3.2.1
   Man konstruiere eine Menge X von Ausdrücken, so daß $Cons'(X) \subset Cons(X)$.

   Anleitung: Auf Grund von Lemma 1.3.2.1 muß in X mindestens ein Ausdruck vorkommen, der keine Aussage ist.

Das folgende Lemma zeigt einen großen Vorteil des Folgerungsbegriffs $\Vdash$ gegenüber $\Vdash'$, nämlich den, daß in einem Präfix Generalisatoren $\forall$ „von außen nach innen abgebaut“ werden können (natürlich nur solange, wie kein Partikularisator (Existenzquantor) angetroffen wird). Dies führt

in der Logischen Programmierung zu einer erheblichen Vereinfachung der Schreibweise, indem Logische Programme ohne Verwendung von Generalisatoren geschrieben werden können.

Verwendet man dagegen die Version $X \Vdash' A$, wie z. B. in dem Buch [15] von J. W. LLOYD, muß man beim Aufschreiben von Logischen Programmen die Generalisatoren stets „mitschleppen" oder die Notation wird inkorrekt.

Zur Formulierung des angestrebten Lemmas gehen wir davon aus, daß auf Grund der Folgerung 1.2.4.2 für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ und jeden Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \forall v A.$$

Iteriert man diese Beziehung, indem man in $\forall v A$ weitere generalisierte Variablen der Form $\forall x$ voranstellt, gelangt man schließlich zu einer **Aussage** B, für die für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models B.$$

Von dieser Beobachtung ausgehend, definieren wir die Generalisierte $Gen(A)$ eines beliebigen Ausdrucks $A \in AUSD(\Sigma, V)$ wie folgt:

Definition 1.3.2.4
Wir mustern A von links nach rechts durch und finden dabei in der angegebenen Reihenfolge die Individuenvariablen $x_1, \ldots, x_n$, wobei $n \geqq 0$. Dabei kann diese Folge leer sein ($n = 0$), nämlich dann, wenn in A keine Individuenvariable vorkommt. Wir setzen dann:

$$Gen(A) =_{def} \begin{cases} A, & \text{falls } n = 0 \\ \forall x_1 \ldots \forall x_n A, & \text{falls } n \geqq 1. \end{cases}$$

Für Mengen $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ setzen wir:

$$Gen(X) =_{def} \{Gen(A) \mid A \in X\}.$$

Bemerkungen zu Definition 1.3.2.4:

1. Da eine Individuenvariable in A an mehreren Stellen vorkommen kann, sind in der Folge $x_1, \ldots, x_n$ und somit in dem Präfix $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$ Wiederholungen möglich. Unsere Ausdrucksdefinition ist jedoch so allgemein, daß solche Wiederholungen nicht dazu führen, daß $Gen(A)$ kein Ausdruck mehr ist.

2. Bei den beschriebenen Durchmusterungsverfahren werden auch Variablen erfaßt, die (an einer fixierten Stelle) gebunden vorkommen, also werden sie bei Übergang von A zu $Gen(A)$ nochmals gebunden. Auch durch diese Erscheinung treten bezüglich der Ausdruckseigenschaft keine Schwierigkeiten auf.

3. Ist die Ausdrucksdefinition entsprechend den Ausführungen auf Seite 18 eingeschränkt, d. h. wird beim Übergang von A zu $\forall v A$ vorausgesetzt, daß die Individuenvariable v vollfrei in A vorkommt, ergeben sich offensichtlich bei der Definition einer Generalisierten zu A zusätzliche Schwierigkeiten: Ziel des Übergangs von A zu $Gen(A)$ ist offenbar, eine **Aussage** B ($= Gen(A)$) zu erhalten, für die für alle Σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$ die Beziehung

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models B$$

gilt.

Kommt nun eine Individuenvariable v in A zwar frei, aber nicht vollfrei vor, dann kann sie nicht durch den Übergang von A zu $\forall vA$ gebunden werden, da $\forall vA$ nach der eingeschränkten Ausdrucksdefinition kein Ausdruck ist.

Man kann diese Schwierigkeit natürlich dadurch umgehen, indem man A zuerst durch eine gebundene Umbenennung in A' überführt, so daß v in A' vollfrei vorkommt, dann zu $\forall vA'$ übergeht.

Da nun

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models A'$$

und

$$\mathfrak{I} \models A' \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \forall vA'$$

gelten, folgt

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \forall vA'.$$

Auf diesem Wege kommt man schließlich ebenfalls zu einer Aussage B', so daß

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models B'$$

gilt; jedoch ist dieses Resultat nur mit einem wesentlich höheren Aufwand zu erreichen als es mit unserer allgemeineren Ausdrucksdefinition möglich ist.

Diese Erscheinungen zeigen deutlich den Vorteil der hier verwendeten allgemeineren Ausdrucksdefinition, insbesondere unter den Gesichtspunkten einer algorithmischen und maschinellen Sprachverarbeitung.

Lemma 1.3.2.2

1. *$Gen(X) \Vdash Gen(A)$ genau dann, wenn $X \Vdash A$.*
2. *$Gen(X) \Vdash A$ genau dann, wenn $X \Vdash A$.*
3. *$X \Vdash Gen(A)$ genau dann, wenn $X \Vdash A$.*

Beweis
ad 1 ($\Rightarrow$):
Es sei $\mathfrak{I} \models X$. Nach Definition des Modellbegriffs und von $Gen(X)$ folgt aus der Annahme, daß $\mathfrak{I} \models Gen(X)$, also nach Voraussetzung $Gen(X) \Vdash Gen(A)$, da $\mathfrak{I} \models Gen(A)$, also wieder nach Definition des Modellbegriffs und von $Gen(A)$, daß $\mathfrak{I} \models A$, also gilt $X \Vdash A$.

ad 1 ($\Leftarrow$):
Analog in umgekehrter Reihenfolge.

Übungsaufgabe 1.3.2.2
Man beweise die Behauptungen 2 und 3 von Lemma 1.3.2.2.

■

Folgerung 1.3.2.3

$$Cons(X) = Cons'(Gen(X)).$$

Übungsaufgabe 1.3.2.3
Man beweise Folgerung 1.3.2.3.

Anleitung: Anwendung der Lemmata 1.3.2.1 und 1.3.2.2.

In den folgenden Abschnitten 1.4 und 1.5 werden wir das Hauptproblem von Kapitel 1 lösen, nämlich den Operator *Cons* syntaktisch zu charakterisieren, d. h. auf der Grundlage von Axiomen und Schlußregeln einen „Beweisbarkeitsoperator“

$$Be : \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V) \to \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V)$$

so zu definieren, daß für alle $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ die Gleichung

$$Cons(X) = Be(X)$$

gilt. Zur genaueren Begründung dieser Aufgabenstellung vergleiche man Unterabschnitt 1.4.1.

Die analoge Aufgabe kann man natürlich auch für den Operator *Cons'* stellen und lösen.

In den motivierenden Betrachtungen zu Lemma 1.3.2.2 hatten wir auf die Vorteile des Folgerungsbegriffs $\models$ gegenüber $\models'$ hingewiesen. Dasselbe gilt für die Operatoren *Cons* und *Cons'*, die mit Hilfe von $\models$ bzw. $\models'$ definiert sind. Aus diesem Grund verzichten wir darauf, eine syntaktische Charakterisierung für *Cons'* zu entwickeln. Eine solche findet man z. B. in [Schroeter, ?]. Wie man der Literatur entnehmen kann (z. B. [?, ?]), ist eine syntaktische Charakterisierung für *Cons'* wesentlich komplizierter. Die Ursache dafür besteht darin, daß die Ausdrucksfähigkeit von *Cons'* größer ist als die von *Cons*. Dies kann man z. B. daran erkennen, daß *Cons* durch *Cons'* (unter Verwendung von *Gen*) definierbar ist (siehe dazu Folgerung 1.3.2.3); während man *Cons'*(X) für beliebige $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ nicht durch *Cons*(X) ausdrücken kann.

Für ein tieferes Verständnis der oben geschilderten Probleme ist es nützlich, die betrachteten Operatoren *Cons* und auch *Cons'* in einen allgemeineren Kontext einzuordnen. Dazu definieren wir

Definition 1.3.2.5
Ψ heiße logischer Operator über $AUSD(\Sigma, V)$
$=_{def}$ $\Psi : \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V) \to \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V)$.

Ist ein $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gegeben, so nennen wir $\Psi(X)$ die mittels Ψ erzeugte Folgerungs- oder auch Ableitungsmenge von X. Dabei bleibt zunächst völlig offen, wie Ψ definiert ist, etwa

- modellbasiert wie die logischen Operatoren *Cons* und *Cons'*
- oder regelbasiert wie die logischen Operatoren Ab_{MP}, Ab und Be (siehe Abschnitt 1.4)
- oder mit irgendeiner dritten Methode, die hier nicht diskutiert werden soll.

In der nun folgenden Definition stellen wir einige **„funktionale“** Eigenschaften logischer Operatoren zusammen, die bei der Untersuchung solcher Operatoren sehr nützlich sind.

Definition 1.3.2.6
1. ***Reflexivität***, *auch* ***Einbettung***: $X \subseteq \Psi(X)$
2. ***Abgeschlossenheit***: $\Psi(\Psi(X)) \subseteq \Psi(X)$
3. ***Monotonie***: *Wenn* $X \subseteq Y$, *so* $\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$.
4. ***Kompaktheit***, *auch* ***Endlichkeitssatz***:

   Wenn $A \in \Psi(X)$, *so gibt es eine endliche Menge* $X_{fin} \subseteq X$, *so daß* $A \in \Psi(X_{fin})$.

5. ***Deduktionseigenschaft:*** *Wenn* $A \in \Psi(X \cup \{B\})$, *so* $B \to A \in \Psi(X)$.

6. ***Schwache Deduktionseigenschaft:***

$$\textit{Wenn } A \in \Psi(X \cup \{B\}) \textit{ und } B \textit{ ist eine Aussage, so } B \to A \in \Psi(X).$$

7. ***Ableitbarkeitseigenschaft:*** *Wenn* $B \to A \in \Psi(X)$, *so* $A \in \Psi(X \cup \{B\})$.

8. ***Generalisierungsinvarianz:*** $\Psi(Gen(X)) = \Psi(X)$

Bemerkungen zu Definition 1.3.2.6:

1. Die Definition ist in dem Sinne zu lesen, daß jeweils eine der definierten Eigenschaften auf Ψ zutrifft, falls die entsprechende definierende Bedingung für **alle** $X, Y \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ und für **alle** $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt.

2. Operatoren, die die Bedingungen 1, 2 und 3 erfüllen, heißen *Hüllenoperatoren* (*Closure Operators*). Dabei ist unwesentlich, daß sie über einer Ausdrucksmenge $AUSD(\Sigma, V)$ definiert sind. Man kann diese Trägermenge auch durch eine beliebige Menge M ersetzen, die Definition „Hüllenoperator“ bleibt sinnvoll. In dieser allgemeinen Fassung spielen Hüllenoperatoren in der Mathematik (Algebra, Analysis, Topologie, Geometrie, Mathematische Logik) und in der Theoretischen Informatik (BOOLEsche Funktionen, Funktionenalgebren, Schaltkreis- und Schaltwerktheorie, Folgern und Ableiten) eine wichtige Rolle.

3. Bei logischen Operatoren, die in der Künstlichen Intelligenz auftreten, ist häufig die Monotonie verletzt (z. B. bei der *Closed World Assumption*, beim *Circumscription* und beim *Default Reasoning*). Logische Operatoren, für die nur noch die Bedingungen 1 und 2 gelten, faßt man unter der Bezeichnung *Preclosure Operators* (eine deutsche Bezeichnung gibt es bisher verbindlich nicht) zusammen.

4. Für viele logische Operatoren ist es ein fundamentales und meistens nur sehr schwer lösbares Problem, ob ein betrachteter logischer Operator kompakt ist. Für den Operator *Cons* besteht, wie wir noch sehen werden, in dieser Hinsicht ein enger Zusammenhang mit dem Endlichkeitssatz für Modelle (Theorem 1.3.1.2).

5. Erfüllt ein logischer Operator die Bedingungen 1, 2 und 4, heißt er *Compact Preclosure Operator*; erfüllt er die Bedingungen 1, 2, 3 und 4, wird er *kompakter Hüllenoperator* (*Compact Closure Operator*) genannt.

6. Erfüllt Ψ die Bedingungen 1 und 2, so folgt $\Psi(\Psi(X)) = \Psi(X)$, d. h. ein Preclosure Operator ist *idempotent*.

Zur Einordnung der definierten semantischen Folgerungsoperatoren *Cons* (und auch *Cons'*) in dieses Begriffs- und Beschreibungssystem formulieren wir das folgende Theorem.

Theorem 1.3.2.4

1. *Cons ist ein kompakter Hüllenoperator, der die* ***schwache*** *Deduktionseigenschaft, die Ableitbarkeitseigenschaft und die Generalisierungsinvarianz erfüllt und für den die Normierungsbedingung*

$$Cons(\emptyset) = ag$$

gilt.

2. *Cons′ ist ein kompakter Hüllenoperator, der die Deduktionseigenschaft und die Ableitbarkeitseigenschaft erfüllt und für den die Normierungsbedingung*

$$Cons'(\emptyset) = ag$$

gilt.

Beweis
ad 1:

1. **Reflexivität**: $X \subseteq Cons(X)$.
   Es sei $\mathfrak{I} \models X$ und $A \in X$. Also folgt trivial $\mathfrak{I} \models A$ auf Grund der Definition von $\mathfrak{I} \models X$.
2. **Abgeschlossenheit**: $Cons(Cons(X)) \subseteq Cons(X)$.
   Der wesentliche Schritt in diesem Beweis ist die Feststellung, daß aus $\mathfrak{I}' \models X$ folgt $\mathfrak{I}' \models Cons(X)$. Diese Feststellung ergibt sich aber unmittelbar, wenn man die Definition von $Cons(X)$ auflöst.
   Zum Beweis der Abgeschlossenheit sei nun $A \in Cons(Cons(X))$ vorausgesetzt, d. h. es gelte

   (1) für jedes $\mathfrak{I}$: Wenn $\mathfrak{I} \models Cons(X)$, so $\mathfrak{I} \models A$.

   Um nun $A \in Cons(X)$ zu zeigen, müssen wir für eine beliebige Σ-Interpretation $\mathfrak{I}'$ unter der Voraussetzung

   (2) $$\mathfrak{I}' \models X$$

   die Behauptung $\mathfrak{I}' \models A$ beweisen. Aus (2) folgt aber mit unserer „Feststellung“ $\mathfrak{I}' \models Cons(X)$ und daraus mit (1) $\mathfrak{I}' \models A$.
3. **Monotonie**: Wenn $X \subseteq Y$, so $Cons(X) \subseteq Cons(Y)$.
   Wir nehmen $A \in Cons(X)$ an, d. h. es gelte

   (3) für jedes $\mathfrak{I}$: Wenn $\mathfrak{I} \models X$, so $\mathfrak{I} \models A$.

   Um nun $A \in Cons(Y)$ zu zeigen, müssen wir unter der Voraussetzung

   (4) $$\mathfrak{I}' \models Y$$

   die Behauptung $\mathfrak{I}' \models A$ beweisen. Aus (4) folgt aber wegen $X \subseteq Y$ trivial $\mathfrak{I}' \models X$, also gilt mit (3) $\mathfrak{I}' \models A$.
4. **Kompaktheit**
   Analog zum Endlichkeitssatz für Modelle (Theorem 1.3.1.2) kann die Kompaktheit für *Cons* ohne größere Vorbereitungen nicht bewiesen werden. Demgemäß werden wir diesen Beweis hier nicht führen, sondern werden die Kompaktheit in Unterabschnitt 1.5.4 wie folgt erschließen: Auf Grund des Hauptsatzes (Theorem 1.5.1.1), für dessen Beweis wir die Kompaktheit von *Cons* nicht benötigen, gilt für jedes $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$:

   $$Cons(X) = Be(X).$$

   Nun ist aber der Beweisbarkeitsoperator *Be* (siehe Definition 1.4.5.1 und Theorem 1.4.5.1) kompakt, also gilt dies trivialerweise auch für *Cons*.

5. **Schwache Deduktionseigenschaft**:

   Wenn $A \in Cons(X \cup \{B\})$ und B ist eine Aussage, so $B \to A \in Cons(X)$.

   Wir haben die Voraussetzungen

   (5) $A \in Cons(X \cup \{B\})$.

   (6) B ist eine Aussage.

   (7) $\mathfrak{I} \models X$.

   Zu zeigen ist

   (8) $\mathfrak{I} \models B \to A$, d. h. für alle $\mathfrak{I}$-Zustände σ gilt:
   Wenn $\sigma, \mathfrak{I} \models B$, so $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.

   Wir nehmen als weitere Voraussetzung

   (9) $\sigma, \mathfrak{I} \models B$

   hinzu.
   Da B eine Aussage ist, folgt aus (9), daß

   (10) $\mathfrak{I} \models B$,

   also folgt aus (7) und (10), daß

   (11) $\mathfrak{I} \models X \cup \{B\}$,

   also aus (5) und (11), daß

   $\mathfrak{I} \models A$,

   also gilt trivial $\sigma, \mathfrak{I} \models A$, und damit ist (8) bewiesen.

6. **Ableitbarkeitseigenschaft**: Wenn $B \to A \in Cons(X)$, so $A \in Cons(X \cup \{B\})$.
   Wir haben die Voraussetzungen

   (12) für jedes $\mathfrak{I}$: Wenn $\mathfrak{I} \models X$, so $\mathfrak{I} \models B \to A$

   und

   (13) $\mathfrak{I}' \models X \cup \{B\}$.

   Es ist zu zeigen

   (14) $\mathfrak{I}' \models A$.

   Aus (13) folgt trivial $\mathfrak{I}' \models X$, also mit (12) für $\mathfrak{I} =_{def} \mathfrak{I}'$, daß

   (15) $\mathfrak{I}' \models B \to A$.

   Nun haben wir aber

   (16) Wenn $\mathfrak{I}' \models B$ und $\mathfrak{I}' \models B \to A$, so $\mathfrak{I}' \models A$,

   also mit (15) und (16) folgt (14).

7. **Generalisierungsinvarianz**
   Um $Cons(Gen(X)) = Cons(X)$ zu beweisen, genügt es offensichtlich zu zeigen, daß gilt:

   $$Gen(X) \Vdash A \text{ genau dann, wenn } X \Vdash A.$$

   Dies ist aber Aussage 2 von Lemma 1.3.2.2.

8. **Normierungsbedingung**
   Wir haben zu zeigen, daß

   $$Cons(\emptyset) = ag.$$

   Da für jedes $\mathfrak{I}$ die Beziehung $\mathfrak{I} \models \emptyset$ gilt, d. h. jedes $\mathfrak{I}$ ist Modell der leeren Menge (dies ist nach der Modell-Definition trivial), also gilt für jedes $\mathfrak{I}$, daß $\mathfrak{I} \models A$, falls $A \in Cons(\emptyset)$, d. h. A ist allgemeingültig, also erhalten wir

   $$Cons(\emptyset) \subseteq ag.$$

   Analog zeigt man, daß umgekehrt auch

   $$ag \subseteq Cons(\emptyset)$$

   gilt.

Übungsaufgabe 1.3.2.4
Man zeige nach dem oben demonstrierten Beweismuster, daß $Cons'$ ein kompakter Hüllenoperator ist, der die Deduktionseigenschaft, die Ableitungseigenschaft und die Normierungsbedingung $Cons'(\phi) = ag$ erfüllt. (Behauptung 2 von Theorem 1.3.2.4)

■

Um das Verständnis des Endlichkeitssatzes für Modelle (Theorem 1.3.1.2) und der Kompaktheit von *Cons* zu vertiefen, zeigen wir jetzt, daß beide Sätze sehr einfach als äquivalent nachgewiesen werden werden können.

Theorem 1.3.2.5

1. *Gilt der Endlichkeitssatz für Modelle, so ist Cons kompakt.*
2. *Ist Cons kompakt, so gilt der Endlichkeitssatz für Modelle.*

Beweis
ad 1.
Wir beweisen diese Aussage indirekt, indem wir annehmen

(1) *Cons* ist nicht kompakt.

Nach Definition von *Cons* existiert dann ein $A \in AUSD(\Sigma, V)$ und ein $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$, so daß

(2) $$A \in Cons(X)$$

und

(3) für jede endliche Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ gilt $A \notin Cons(X_{fin})$.

Nach Definition von *Cons* folgt aus (3), daß

(4) zu jeder endlichen Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ gibt es ein $\mathfrak{I}$, so daß $\mathfrak{I} \models X_{fin}$ und nicht $\mathfrak{I} \models A$.

Nun gilt aber

$$\mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models Gen(A),$$

also mit Kontraposition:

$$\text{nicht } \mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn nicht } \mathfrak{I} \models Gen(A).$$

Weil $Gen(A)$ eine Aussage ist, gilt ferner

$$\text{nicht } \mathfrak{I} \models Gen(A) \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \neg Gen(A).$$

Somit erhalten wir:

(5) $$\text{nicht } \mathfrak{I} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \neg Gen(A).$$

Aus (4) und (5) ergibt sich:

(6) zu jeder endlichen Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ gibt es ein $\mathfrak{I}$, so daß $\mathfrak{I} \models X_{fin} \cup \{\neg Gen(A)\}$.

Daraus folgt

(7) zu jeder endlichen Teilmenge $Y_{fin} \subseteq X \cup \{\neg Gen(A)\}$ gibt es ein $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models Y_{fin}$.

Daraus folgt mit dem Endlichkeitssatz für Modelle (Theorem 1.3.1.2)

(8) $$\text{Es gibt ein } \mathfrak{I}' \text{ mit } \mathfrak{I}' \models X \cup \{\neg Gen(A)\}.$$

Für ein derartiges $\mathfrak{I}'$ folgt aber aus (8), daß

(9) $$\mathfrak{I}' \models X$$

und

(10) $$\mathfrak{I}' \models \neg Gen(A).$$

Nun ist aber (10) äquivalent mit

(11) $$\text{nicht } \mathfrak{I}' \models A.$$

Die Folgerungen (9) und (11) stehen aber im Widerspruch zu (2), also ist Behauptung 1 bewiesen.

ad 2.
Auch diese Behauptung beweisen wir indirekt, indem wir unter der Voraussetzung, daß *Cons* kompakt ist, annehmen, daß der Endlichkeitssatz für Modelle nicht gilt. Somit haben wir die folgenden Voraussetzungen:

(12) *Cons* ist kompakt.

(13) Zu jeder endlichen Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ gibt es ein $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models X_{fin}$.

(14) Es gibt kein $\mathfrak{I}'$ mit $\mathfrak{I}' \models X$.

Aus (14) folgt, daß

$$Cons(X) = AUSD(\Sigma, V),$$

also gilt für jeden Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$, daß

(15) $$\neg(B \rightarrow B) \in Cons(X),$$

somit folgt wegen (12)

(16) Es gibt eine endliche Teilmenge $X' \subseteq X$ mit $\neg(B \rightarrow B) \in Cons(X')$.

Wegen (13) existiert nun zu X' ein $\mathfrak{I}'$ mit

(17) $$\mathfrak{I}' \models X',$$

also folgt wegen (16)

(18) $$\mathfrak{I}' \models \neg(B \rightarrow B)$$

Das ist aber ein Widerspruch.

■

Auch zwischen der Kompaktheit von *Cons'* und dem Endlichkeitssatz für schwache Modelle besteht eine analoge Äquivalenz.

Zur Präzisierung dieser Beziehung formulieren wir als erstes den Endlichkeitssatz für schwache Modelle, und zwar wie folgt. Gegeben sei $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$

Theorem 1.3.2.6
Gibt es zu jeder endlichen Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ ein $\mathfrak{I}'$ und einem $\mathfrak{I}'$-Zustand σ', so daß $[\sigma', \mathfrak{I}'] \models X_{fin}$, so existiert ein $\mathfrak{I}$ und ein $\mathfrak{I}$-Zustand σ mit $[\sigma, \mathfrak{I}] \models X$.

Analog zu einem Beweis des Endlichkeitssatzes für Modelle (Theorem 1.3.1.2) muß zu dem formulierten Endlichkeitssatz für **schwache** Modelle festgestellt werden, daß auch für diesen Satz ein Beweisversuch ohne größere Vorbereitungen und Hilfsbetrachtungen aussichtslos ist.

Eine Möglichkeit wäre, den folgenden Äquivalenzsatz anzuwenden und dann auf der Grundlage einer syntaktischen (d. h. regelbasierten) Charakterisierung von *Cons'* die Kompaktheit dieses logischen Operators nachzuweisen (siehe [?]).

Die angekündigte Äquivalenz läßt sich nun wie folgt beschreiben:

Theorem 1.3.2.7

1. *Gilt der Endlichkeitssatz für schwache Modelle, so ist Cons' kompakt.*
2. *Ist Cons' kompakt, so gilt der Endlichkeitssatz für schwache Modelle.*

Übungsaufgabe 1.3.2.5
Man beweise (analog zum Beweis von Theorem 1.3.2.5) das Theorem 1.3.2.7.

Übungsaufgabe 1.3.2.6
Man zeige, daß aus dem Endlichkeitssatz für schwache Modelle (Theorem 1.3.2.6) der Endlichkeitssatz für Modelle (Theorem 1.3.1.2) folgt.

1.3.3 Zwei allgemeine Charakterisierungssätze für logische Operatoren

Die Bedeutung der in Definition 1.3.2.6 formulierten Eigenschaften von logischen Operatoren ergibt sich aus dem folgenden Theorem, welches besagt, daß für beliebige logische Operatoren Ψ_1 und Ψ_2 und für eine beliebige Menge $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ die „Werte“ $\Psi_1(X)$ und $\Psi_2(X)$ schon dann übereinstimmen, d. h. daß $\Psi_1(X) = \Psi_2(X)$ gilt, falls nur $\Psi_1(\emptyset) = \Psi_2(\emptyset)$ ($\emptyset$ die leere Menge von Ausdrücken) gilt und beide Operatoren Bedingungen aus Definition 1.3.2.6 in der angegebenen Form erfüllen.

Theorem 1.3.3.1
Sind Ψ_1 und Ψ_2 kompakte Hüllenoperatoren, die die schwache Deduktionseigenschaft, die Ableitbarkeitseigenschaft, die Generalisierungsinvarianz und die Normierungsbedingung $\Psi_1(\emptyset) = \Psi_2(\emptyset)$ erfüllen, so gilt für jedes $X \subseteq\!\!\!= AUSD(\Sigma, V)$ die Gleichung $\Psi_1(X) = \Psi_2(X)$.

Beweis
Von der Behauptung

$$\Psi_1(X) = \Psi_2(X)$$

beweisen wir nur

$$\Psi_1(X) \subseteq\!\!\!= \Psi_2(X).$$

Die Inklusion

$$\Psi_2(X) \subseteq\!\!\!= \Psi_1(X)$$

wird analog gezeigt.

Wir nehmen an, daß

$$A \in \Psi_1(X).$$

Nun erfüllt Ψ_1 die Generalisierungsinvarianz, also gilt

$$A \in \Psi_1(Gen(X)).$$

Nach der Kompaktheit für Ψ_1 existiert eine endliche Teilmenge $X_{\text{fin}} \subseteq\!\!\!= Gen(X)$, so daß

$$A \in \Psi_1(X_{fin}).$$

Nun sei

$$X_{fin} = \{B_1, \ldots, B_n\},$$

wobei wir wegen der Monotonie von Ψ_1 annehmen dürfen, daß $n \geqq 1$. Da wegen $X_{\text{fin}} \subseteq\!\!\!= Gen(X)$ alle Ausdrücke aus X_{fin} Aussagen sind, folgt durch n-malige Anwendung der schwachen Deduktionseigenschaft, daß

$$(B_n \to (\ldots \to (B_1 \to A)\ldots)) \in \Psi_1(\phi),$$

also wegen der Normierungsbedingung $\Psi_1(\phi) = \Psi_2(\phi)$

$$(B_n \to (\ldots \to (B_1 \to A)\ldots)) \in \Psi_2(\phi),$$

also mit der Ableitbarkeitseigenschaft für Ψ_2

$$A \in \Psi_2(X_{fin}),$$

also mit der Monotonie für Ψ_2

$$A \in \Psi_2(Gen(X)),$$

also mit der Generalisierungsinvarianz für Ψ_2

$$A \in \Psi_2(X),$$

also gilt

$$\Psi_1(X) \subseteq\!\!\!= \Psi_2(X).$$

■

Bemerkungen:

1. Bei einer sorgfältigen Durchsicht dieses Beweises stellt man fest, daß man für keinen der Operatoren Ψ_1 und Ψ_2 die Eigenschaft 1 (Reflexivität) sowie die Eigenschaft 2 (Abgeschlossenheit) benötigt. Eine entsprechende Verschärfung des Theorems bringt aber für die Anwendungen wenig, da in allen bekannten Anwendungsfällen die Bedingungen 1 und 2 stets erfüllt sind.

2. Zu einer möglichen Anwendung von Theorem 1.3.3.1, z. B. zur Charakterisierung von *Cons*, sei auf den letzten Absatz im Unterabschnitt 1.4.5 verwiesen.

Theorem 1.3.3.2
Sind Ψ_1 und Ψ_2 kompakte Hüllenoperatoren, die die Deduktionseigenschaft, die Ableitbarkeitseigenschaft und die Normierungsbedingung $\Psi_1(\emptyset) = \Psi_2(\emptyset)$ erfüllen, so gilt für jedes $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ die Gleichung $\Psi_1(X) = \Psi_2(X)$.

Übungsaufgabe 1.3.3.1
Man beweise Theorem 1.3.3.2 (analog zum Beweis von Theorem 1.3.3.1).

Wir schließen Unterabschnitt 1.3.3 mit einem wichtigen Resultat, daß den Gebrauch der Implikation (in Analogie zur Deduktions- und Ableitbarkeitseigenschaft) betrifft. Man weiß aus der Erfahrung, daß in vielen Untersuchungen der Logik der sogenannte *Modus Ponens* (häufig auch *Abtrennungsregel* genannt) eine zentrale Rolle spielt (siehe dazu die Abschnitte 1.4 und 1.5).

Gegeben sei ein beliebiger logischer Operator

$$\Psi : \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V) \to \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V).$$

Wir definieren nun allgemein:

Definition 1.3.3.1
*Ψ erfüllt den **Modus Ponens** (oder auch: Ψ erfüllt die **Abtrennungsregel**)*
$=_{def}$ Für alle $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$ und jedes $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$\text{Wenn } B \in \Psi(X) \text{ und } B \to A \in \Psi(X), \text{ so } A \in \Psi(X).$$

Bemerkung:
Die Bezeichnung „Abtrennungsregel“ kann man in Bezug auf einen gegebenen logischen Operator Ψ wie folgt interpretieren: Gegeben seien eine „gültige“ Implikation, ausgedrückt durch

$$B \to A \in \Psi(X).$$

Ferner sei eine „gültige“ Prämisse gegeben, ausgedrückt durch

$$B \in \Psi(X).$$

Nun kann man in der gültigen Implikation $B \to A$ die „gültige“ Prämisse B „abtrennen“ und erhält die „gültige“ Konklusion A, ausgedrückt durch

$$A \in \Psi(X).$$

Lemma 1.3.3.3
Die logischen Operatoren Cons und Cons' erfüllen den Modus Ponens.

Beweis
ad 1. *Cons* erfüllt den Modus Ponens.

Nach Definition von *Cons* genügt es zu zeigen, daß für eine beliebige Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt:

(1) Wenn $\mathfrak{I} \models B$ und $\mathfrak{I} \models B \to A$, so $\mathfrak{I} \models A$.

Um (1) zu zeigen, genügt es auf Grund der Allgemeingültigkeitsdefinition zu zeigen, daß für einen beliebigen $\mathfrak{I}$-Zustand σ gilt:

(2) Wenn $\sigma, \mathfrak{I} \models B$ und $\sigma, \mathfrak{I} \models B \to A$, so $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.

Dies ist aber trivial auf Grund der Definition von $\sigma, \mathfrak{I} \models B \to A$.

ad 2. *Cons'* erfüllt den Modus Ponens.

Nach Definition von *Cons'* folgt für diesen Operator die Behauptung unmittelbar aus (2).

Bemerkung:
Bedingung (1) kann man sich auch in der Form veranschaulichen, daß die Allgemeingültigkeit in der Interpretation $\mathfrak{I}$ bei Anwendung des Modus Ponens „vererbt" wird. Derartige Vererbungseigenschaften spielen bei Beweisen der semantischen Korrektheit von syntaktischen (d. h. regelbasiert) definierten logischen Operatoren eine fundamentale Rolle. Man vergl. dazu den Operator *Be* (Definition 1.4.5.1) und den Beweis seiner semantischen Korrektheit (Theorem 1.5.1.2) mit Hilfe von Lemma 1.5.1.3.

■

Lemma 1.3.3.4
Ist ein logischer Operator Ψ reflexiv und monoton, erfüllt er außerdem den Modus Ponens, so erfüllt er die Ableitbarkeitseigenschaft.

Beweis
Um für Ψ die Ableitbarkeitseigenschaft zu zeigen, nehmen wir an

(1) $$B \to A \in \Psi(X).$$

Wir haben zu zeigen

(2) $$A \in \Psi(X \cup \{B\})$$

Aus (1) folgt mit Monotonie für Ψ, daß

(3) $$B \to A \in \Psi(X \cup \{B\}).$$

Ferner gilt auf Grund der Reflexivität von Ψ, daß

(4) $$B \in \Psi(X \cup \{B\}),$$

also folgt aus (3) und (4), weil Ψ den Modus Ponens erfüllt, die Bedingung (2). ■

Lemma 1.3.3.5
Ist Ψ ein Hüllenoperator, der die Ableitbarkeitseigenschaft erfüllt, so erfüllt Ψ den Modus Ponens.

Beweis
Um zu zeigen, daß Ψ den Modus Ponens erfüllt, nehmen wir an, daß

(1) $$B \in \Psi(X)$$

und

(2) $$B \to A \in \Psi(X)$$

gilt. Wir haben dann

(3) $$A \in \Psi(X)$$

zu zeigen.

Mit der Reflexivität von Ψ und (1) erhalten wir

$$X \cup \{B\} \subseteq \Psi(X),$$

also mit Monotonie von Ψ

$$\Psi(X \cup \{B\}) \subseteq \Psi(\Psi(X)),$$

also mit der Abgeschlossenheit von Ψ

(4) $$\Psi(X \cup \{B\}) \subseteqq \Psi(X).$$

Aus (2) folgt mit der Ableitbarkeitseigenschaft für Ψ, daß

$$A \in \Psi(X \cup \{B\}),$$

also erhalten wir daraus mit (4), daß

$$A \in \Psi(X),$$

d. h. es gilt (3). ■

Theorem 1.3.3.6
Ist der logische Operator Ψ ein Hüllenoperator, so erfüllt Ψ den Modus Ponens genau dann, wenn Ψ die Ableitbarkeitseigenschaft erfüllt.

Beweis
Anwendung der Lemmata 1.3.3.4 und 1.3.3.5. ■

1.3.4 Semantisches Folgern durch alleinige Verwendung minimaler Modelle

In den Anwendungen der Mathematischen Logik auf Probleme der Informatik und der Künstlichen Intelligenz werden häufig modellbasierte Folgerungsbegriffe definiert und verwendet, die sich wesentlich von *Cons* und *Cons'* unterscheiden. Grundgedanke dabei ist, daß für die Menge X, aus der gefolgert werden soll, der Modellbegriff abgeändert (in der Regel eingeschränkt) wird.

Eine der wichtigsten Einschränkungen ist die Spezialisierung des allgemeinen Modellbegriffs zu dem eines minimalen Modells, wie wir ihn im Unterabschnitt 1.3.1 definiert und an Hand von Beispielen illustriert haben.

Auf JOHN MCCARTHY geht die Idee zurück [MCCARTHY], einen modellbasierten Folgerungsbegriff zu definieren und anzuwenden, der allein auf der Verwendung minimaler Modelle beruht. Er nennt diesen Folgerungsoperator „Circumscription“ und definiert ihn (in der einfachsten Fassung, inzwischen gibt es zahlreiche Varianten dieser Definition) wie folgt:

Definition 1.3.4.1

1. *Aus X folgt durch Circumscriptionschließen der Ausdruck A (kurz $X \models\!\!\!\sim_{min} A$)*
   $=_{def}$ *Für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{I}$ minimales Modell von X ist, so ist $\mathfrak{I}$ Modell von A.*

2. $Cir(X) =_{def} \{A \mid A \in AUSD(\Sigma, V)$ *und* $X \models\!\!\!\sim_{min} A\}$

Im folgenden werden wir einige wesentliche Eigenschaften des Operators *Cir* zusammenstellen, gleichsam als „Kontrastprogramm" zum Operator *Cons*, insbesondere, um zu demonstrieren, daß die für *Cons* geltenden „angenehmen" Eigenschaften (man vergleiche dazu die Theoreme 1.3.2.4 und 1.3.3.1) keinesfalls auch für andere (modellbasierte) Operatoren gelten müssen.

Wir beginnen unsere Diskussion mit den folgenden 4 Bemerkungen zur Definition 1.3.4.1.

1. Die obige Definition läßt sich wie folgt motivieren: Beim logischen Schließen werden häufig Aussagen verwendet, die nicht „exakt" richtig, sondern nur „im wesentlichen" richtig sind. So ist z. B. die Aussage

   „Alle Vögel können fliegen"

   nicht exakt richtig, weil es „Ausnahmen" gibt, d. h. weil es Vögel (Pinguine, Strauße usw.) gibt, die nicht fliegen können.

   Nun wird aber zur Motivation der Definition des Circumscription-Schließens vereinbart, daß bei sprachlichen Mitteilungen Ausnahmen *benannt* werden müssen. Werden sie nicht benannt, so wird angenommen, daß keine Ausnahme vorliegt (wobei natürlich „ehrliches" oder „korrektes" oder „faires" Verhalten des Mitteilenden vorausgesetzt wird, indem von ihm verlangt wird, daß er eine Ausnahme auch tatsächlich benennt, wenn sie vorliegt).

   Diese Vereinbarung sei durch das folgende Beispiel aus dem täglichen Leben illustriert:

   Ein Student S wohnt in einem Ein-Zimmer-Appartment (etwa in einem Studentenwohnheim). Er hat einen Freundeskreis K. Jeder Person aus K ist das Angebot der Vogelhandlung H (das noch nie Strauße oder Pinguine umfaßt hat) bekannt.

   Eines Tages verkündet S seinem Freundeskreis K:

   > „Ich habe mir gestern in der Vogelhandlung H einen Vogel gekauft."

   Dann wird jede Person P aus K „normalerweise" schließen, daß V fliegen kann, insbesondere, daß V weder ein Pinguin noch ein Strauß ist. Warum ? „Normalerweise" soll hier bedeuten, daß P voraussetzt, daß S sich „korrekt" verhält. Dies bedeutet aber, daß S eine Ausnahme, falls sie vorliegt, auch hätte benennen müssen.

   Somit folgt für das korrekte Verhalten von S in der beschriebenen Situation: Hätte er sich in H einen Pinguin gekauft, hätte seine Mitteilung lauten müssen:

   > „Ich habe mir gestern in der Vogelhandlung H einen Vogel V gekauft, und zwar einen Pinguin."

   Daran hätten sich weitere Aussagen von S über die interessante Angebotserweiterung in der Vogelhandlung H und über die Probleme, wie S in seinem Ein-Zimmerappartment einen Pinguin halten kann, anschließen können.

2. Will man die eben beschriebenen „logischen Prozeduren“ exakt erfassen, muß man offensichtlich präzisieren, was es heißt, daß keine Ausnahme vorliegt. Hier kommt nun die entscheidende Idee von McCarthy zum Tragen, die etwa wie folgt (grob) beschrieben werden kann: Die Menge X sei eine Spezifikation von „Vogelwelt“, wobei wir eine Signatur mit der Sorte s („Vogel“) voraussetzen. Ist nun $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$ ein Modell von X, so können in dem Individuenbereich Δ_s durchaus Vögel vorkommen, die nicht fliegen können, d. h. der Ausdruck

$$\forall x(\mathit{Vogel}(x) \rightarrow \mathit{Kann\text{-}Fliegen}(x))$$

ist in $\mathfrak{I}$ nicht allgemeingültig. McCarthy folgend, muß nun die Spezifikation X so gewählt werden, daß gilt:

> Ist $\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$ ein minimales Modell von X, so enthält Δ'_s nur Vögel, die fliegen können, d. h. durch die Minimalitätsforderung werden die Ausnahmen ausgeschlossen.

Dies bedeutet mit anderen Worten, daß in dem minimalen Modell der Ausdruck

$$\forall x(\mathit{Vogel}(x) \rightarrow \mathit{Kann\text{-}Fliegen}(x))$$

allgemeingültig ist, d. h. die im Punkt 1 beschriebenen Schlußweisen werden auf diese Weise präzisiert.

Wir müssen allerdings besonders darauf hinweisen, daß die Existenz einer Spezifikation X mit den beschriebenen Eigenschaften nicht selbstverständlich ist, sondern in jedem konkreten Fall einer gesonderten Untersuchung bedarf.

3. In Punkt 1 der Definition 1.3.4.1 fällt auf, daß in der Konklusion nur gefordert wird, daß $\mathfrak{I}$ ein Modell von A ist (und nicht, daß $\mathfrak{I}$ ein minimales Modell von A ist). Dies wird durch die folgende Forderung begründet: Man möchte *Cir* so definieren, daß für jedes $X \subseteq\!\!\!= AUSD(\Sigma, V)$

$$\mathit{Cons}(X) \subseteq\!\!\!= \mathit{Cir}(X)$$

gilt, d. h. wenn ein Ausdruck A aus X im gewöhnlichen Sinne gefolgert werden kann, dann kann er aus X durch Circumscription-Folgern erhalten werden.

Dies wird aber offensichtlich durch die Definition 1.3.4.1 erreicht; während in dem Fall, daß man in der Konklusion stärker „$\mathfrak{I}$ ist minimales Modell von A“ fordert, die obige Bedingung im allgemeinen nicht mehr gilt, d. h. daß die Folgerungsmengen $\mathit{Cons}(X)$ und $\mathit{Cir}(X)$ bezüglich der mengentheoretischen Inklusion $\subseteq\!\!\!=$ im allgemeinen unvergleichbar sind.

4. Auf Grund der im Unterabschnitt 1.3.1 festgestellten Eigenschaften minimaler Modelle kann man vermuten, daß *Cir* nicht derart „angenehme“ funktionale Eigenschaften hat wie *Cons*, d. h. genauer, daß einige der für *Cons* in Theorem 1.3.2.4 festgestellten Eigenschaften für *Cir* nicht mehr gelten.

Das folgende Theorem bringt zum Ausdruck, in welcher Beziehung *Cons* und *Cir* zueinander stehen und welche der in Definition 1.3.2.6 zusammengestellten fundamentalen funktionalen Eigenschaften eines logischen Operators generell für *Cir* erhalten bleiben.

Theorem 1.3.4.1
Für beliebiges $X \subseteq\!\!\!= AUSD(\Sigma, V)$ und beliebige $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

1. $\mathit{Cons}(X) \subseteq\!\!\!= \mathit{Cir}(X)$

2. ***Einbettungseigenschaft:*** $X \subseteq Cir(X)$

3. ***Abgeschlossenheit:*** $Cir(Cir(X)) \subseteq Cir(X)$

4. ***Schwache Deduktionseigenschaft:***

$$\textit{Wenn } A \in Cir(X \cup \{B\}) \textit{ und } B \textit{ eine Aussage ist, so } B \to A \in Cir(X)$$

5. ***Generalisierungsinvarianz:*** $Cir(Gen(X)) = Cir(X)$.

6. ***Modus Ponens:*** *Wenn* $A \in Cir(X)$ *und* $A \to B \in Cir(X)$, *so* $B \in Cir(X)$.

Beweis
ad 1. Trivial, weil jedes minimale Modell von X auch Modell von X ist.

ad 2. Analog zum Beweis von Behauptung 2.

ad 3.
Um die Abgeschlossenheit von Cir, also

$$Cir(Cir(X)) \subseteq Cir(X)$$

zu zeigen, genügt es nach Definition von Cir aus den Voraussetzungen (1) und (2) mit

(1) $$\text{für jede } \Sigma\text{-Interpretation } \mathfrak{I} \text{ gilt: Wenn } \mathfrak{I} \models\!\!\!\models_{\min} Cir(X), \text{ so } \mathfrak{I} \models A$$

und

(2) $$\mathfrak{I}' \models\!\!\!\models_{\min} X \text{ (wobei } \mathfrak{I}' \text{ eine beliebige } \Sigma\text{-Interpretation ist)}$$

auf die Behauptung

(3) $$\mathfrak{I}' \models A$$

zu schließen.
Nach Definition von Cir folgt aus (2) trivial, daß

(4) $$\mathfrak{I}' \models Cir(X).$$

Nun gilt aber

(5) $$X \subseteq Cir(X),$$

also folgt mit Lemma 1.3.1.3

(6) $$\mathfrak{I}' \models\!\!\!\models_{\min} Cir(X),$$

also folgt mit Voraussetzung (1) für $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$ unmittelbar die Behauptung (3).

ad 4.
Um die schwache Deduktionseigenschaft zu beweisen, genügt es nach Definition von Cir aus den Voraussetzungen (1), (2) und (3) mit

(1) $$\text{Für jede } \Sigma\text{-Interpretation } \mathfrak{I} \text{ gilt: Wenn } \mathfrak{I} \models\!\!\!\models_{\min} X \cup \{B\}, \text{ so } \mathfrak{I} \models A$$

(2) $$\mathfrak{I}' \models\!\!\!\models_{\min} X \text{ (wobei } \mathfrak{I}' \text{ eine beliebige } \Sigma\text{-Interpretation ist)}$$

(3) $$B \text{ ist eine Aussage}$$

auf die Behauptung

(4) $$\mathfrak{I}' \models B \to A$$

zu schließen. Weil B eine Aussage ist, genügt es, um (4) zu beweisen, unter der zusätzlichen Voraussetzung

(5) $$\mathfrak{I}' \models B$$

auf

(6) $$\mathfrak{I}' \models A$$

zu schließen.

Aus (2) folgt trivial

(7) $$\mathfrak{I}' \models X,$$

also aus (7) und (5)

(8) $$\mathfrak{I}' \models X \cup \{B\},$$

also aus (8) und (2) mit Lemma 1.3.1.3

(9) $$\mathfrak{I}' \models\!\!\!=_{\min} X \cup \{B\},$$

also aus (1) für $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$ folgt (6).

ad 5.
Nach Folgerung **??** wissen wir, daß für beliebige Σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\mathfrak{I} \models X \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models Gen(X).$$

Daraus folgt trivial

$$\mathfrak{I} \models\!\!\!=_{\min} X \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models\!\!\!=_{\min} Gen(X),$$

also gilt die Generalisierungsinvarianz für Cir.

ad 6.
Wir haben die Voraussetzungen

(1) $A \in Cir(X)$

(2) $A \to B \in Cir(X)$

(3) $\mathfrak{I}$ ist minimales Modell von X

Es ist zu zeigen, daß

(4) $$\mathfrak{I} \models B.$$

Aus (1) folgt mit (3), daß

(5) $$\mathfrak{I} \models A.$$

Aus (2) folgt mit (3), daß

(6) $$\mathfrak{I} \models A \to B,$$

also aus (5) und (6) folgt (4).

■

Das folgende Lemma ist sehr einfach zu beweisen; es ist jedoch für die sich daran anschließender Betrachtungen ziemlich wichtig. Es seien eine beliebige Menge $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ gegeben. Dann gilt

Lemma 1.3.4.2
X hat kein minimales Modell genau dann, wenn die Gleichung $Cir(X) = AUSD(\Sigma, V)$ gilt.

Übungsaufgabe 1.3.4.1
Man beweise Lemma 1.3.4.2.

Anleitung. Man gehe auf die Definitionen des minimalen Modells und des Operators *Cir* zurück.

Für den Operator *Cir* gelten nun die folgenden Negativaussagen.

Theorem 1.3.4.3
1. *Cir ist im allgemeinen nicht monoton.*
2. *Cir erfüllt im allgemeinen nicht die Ableitungseigenschaft.*

Beweis
ad 1.
Wir greifen, um die Monotonie für *Cir* zu widerlegen, auf die Beispiele 1.3.1.1 und 1.3.1.4 zurück.
Im Beispiel 1.3.1.4 hatten wir für die Menge

$$Y = \{(1), (2), (2'), (3), (4)\}.$$

festgestellt, daß sie ein minimales Modell hat, also gilt nach Lemma 1.3.4.2

$$Cir(Y) \subset AUSD(\Sigma, V).$$

Beispiel 1.3.1.1 zeigte, daß die Menge

$$X =_{def} \{(1), (2), (3), (4)\}.$$

kein minimales Modell hat, also gilt nach Lemma 1.3.4.2 die Gleichung

$$Cir(X) = AUSD(\Sigma, V).$$

Somit folgt

$$Cir(X) \not\subseteqq Cir(Y),$$

obwohl wir

$$X \subseteqq Y$$

haben.

ad 2.
Um die Gültigkeit der Ableitbarkeitseigenschaft für *Cir* zu widerlegen, setzen wir

$$X =_{def} \{(1), (2), (3), (4)\}.$$

und

$$B =_{def} (2').$$

Auf Grund der Betrachtungen in Beispiel 1.3.1.4 hat

$$X \cup \{B\}$$

ein minimales Modell, also existiert wegen Lemma 1.3.4.2 ein Ausruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ mit

$$A \notin Cir(X \cup \{B\}).$$

Aus Beispiel 1.3.1.1 wissen wir, daß X kein minimales Modell hat, somit folgt aus Lemma 1.3.4.2 die Gleichung

$$Cir(X) = AUSD(\Sigma, V),$$

also gilt trivial

$$B \rightarrow A \in Cir(X),$$

also ist die Ableitbarkeitseigenschaft für Cir nicht erfüllt.

■

Übungsaufgabe 1.3.4.2
Beim Beweis von Theorem 1.3.4.3 wurde bei der Konstruktion von Gegenbeispielen in beiden Fällen wesentlich benutzt, daß die Menge X kein minimales Modell besitzt, also die Gleichung

$$Cir(X) = AUSD(\Sigma, V)$$

gilt. Man untersuche, ob man auf diese Eigenschaft der Menge X bei der Konstruktion von Gegenbeispielen verzichten kann.

Beim Studium logischer Operatoren Ψ hatte die Frage, was die Anwendung von Ψ auf die leere Menge ϕ ergibt, eine wesentliche Rolle gespielt.

Bei den Charakterisierungssätzen für logische Operatoren Ψ_1 und Ψ_2 (siehe Theorem 1.3.3.1 und 1.3.3.2) war diese Frage als „Normierungsbedingung“

$$\Psi_1(\phi) = \Psi_2(\phi)$$

beantwortet worden.

Beim Studium der Operatoren $Cons$ und $Cons'$ hatten wir

$$Cons(\phi) = Cons'(\phi) = ag$$

festgestellt, d. h. aus der leeren Menge ϕ können mit $Cons$ und auch mit $Cons'$ genau diejenigen Ausdrücke (modellbasiert) gefolgert werden, die in jeder Σ-Interpretation allgemeingültig sind.

Diese Resultate legen es nahe, auch $Cir(\phi)$ zu untersuchen. Nach Definition von Cir gilt offenbar:

$A \in Cir(\phi)$ genau dann, wenn A in jedem minimalen Modell $\mathfrak{I}$ von ϕ allgemeingültig ist.

Da nun jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ Modell der leeren Menge ist, gilt offenbar:

$\mathfrak{I}$ ist minimales Modell von ϕ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ minimale Σ-Interpretation ist.

Somit erhalten wir für $A \in AUSD(\Sigma, V)$.

Theorem 1.3.4.4
$A \in Cir(\phi)$ genau dann, wenn für jede Σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt: Ist $\mathfrak{I}$ eine minimale Interpretation, so ist A in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig.

In der Übungsaufgabe 1.3.1.1 war gefordert worden, zu einer gegebenen Signatur Σ alle minimalen Σ-Interpretationen zu bestimmen.

Hat man diese Aufgabe gelöst, so ist es zur Prüfung von $A \in Cir(\phi)$ offenbar notwendig und hinreichend, für jede der genannten Interpretationen $\mathfrak{I}$ festzustellen, ob A in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig ist, wobei man sich wegen Theorem 1.2.7.13 auf die Teilklasse der paarweise nicht-isomorphen Interpretationen beschränken kann.

Definiert eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ eine „reine" Gleichungssprache, d. h. ist FS leer und enthält PS nur Gleichheitssymbole, d. h. gilt $PS = \{\overline{=}_s \mid s \in SO\}$, so gilt für jede minimale Σ-Interpretation $\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$, daß

$$card\ \Delta_s = 1$$

für jedes $s \in SO$, d. h. jeder Individuenbereich Δ_s besteht jeweils nur aus einem einzigen Individuum. Ferner gilt trivial, daß sämtliche minimalen Interpretationen der betrachteten Signatur Σ untereinander isomorph sind, woraus sich sofort die Entscheidbarkeit (siehe Abschnitt 1.6) der Menge $Cir(\phi)$ im betreffenden Spezialfall der Signatur Σ ergibt.

Übungsaufgabe 1.3.4.3
Man untersuche die Frage, ob für eine gegebene Signatur Σ alle minimalen Σ-Interpretationen untereinander isomorph sind. Lautet die Antwort „Nein", dann gebe man notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für Σ dafür an, daß die obige Isomorphieaussage richtig ist.

In den modernen Anwendungen der Mathematischen Logik spielen bei der Untersuchung von Problemen der Künstlichen Intelligenz **kumulative** logische Operatoren eine wachsende Rolle.

Kumulative logische Operatoren sind reflexiv und abgeschlossen, außerdem erfüllen sie die kumulative Monotonie, die eine Abschwächung der Monotonie ist, in dem folgenden Sinne.

Gegeben sei ein logischer Operator Ψ mit

$$\Psi : \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V) \to \mathfrak{P}AUSD(\Sigma, V)$$

Definition 1.3.4.2
Ψ *heiße* ***kumulativ-monoton***
$=_{def}$ *Für jedes* $X, Y \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ *gilt: Wenn* $X \subseteqq Y \subseteqq \Psi(X)$, *so* $\Psi(X) \subseteqq \Psi(Y)$.

Bemerkungen zu Definition 1.3.4.2:

1. Offenbar unterscheidet sich die kumulative Monotonie von der üblichen Monotonie dadurch, daß bei der ersteren in der Prämisse der definierenden Bedingung die Voraussetzung

   $$Y \subseteqq \Psi(X)$$

   hinzugefügt worden ist, wodurch die übliche Monotonie abgeschwächt wird.

2. Geht man von der Prämisse

   $$X \subseteqq Y \subseteqq \Psi(X)$$

   aus, so bedeutet dies, daß die Erweiterung von X zu Y durch Ausdrücke A, die aus X gefolgert werden können, die Monotonie nicht verletzt, also

   $$\Psi(X) \subseteqq \Psi(Y)$$

   gilt.

Die Eigenschaften kumulativer Operatoren werden durch das folgende Theorem weiter verdeutlicht.

Theorem 1.3.4.5
Ist Ψ abgeschlossen und kumulativ-monoton, so gilt für jedes $X, Y \subseteq\!\!\!= AUSD(\Sigma, V)$:

$$\textit{Wenn } X \subseteq\!\!\!= Y \subseteq\!\!\!= \Psi(X), \textit{ so } \Psi(X) = \Psi(Y).$$

Bemerkungen zu Theorem 1.3.4.5:

1. Die in diesem Theorem ausgedrückte Eigenschaft von Ψ bedeutet, daß sich die Ableitungsmenge $\Psi(X)$ eines abgeschlossenen, kumulativ monotonen Operators Ψ nicht verändert, wenn man zu X Ausdrücke aus $\Psi(X)$ hinzufügt.

2. Theorem 1.3.4.5 gilt selbstverständlich für Hüllenoperatoren Ψ, da aus der Monotonie die kumulative Monotonie folgt.

Übungsaufgabe 1.3.4.4
Man beweise Theorem 1.3.4.5.

Anleitung. Auf Grund der kumulativen Monotonie von Ψ erhalten wir

$$Y \subseteq\!\!\!= \Psi(X) \subseteq\!\!\!= \Psi(Y).$$

Wendet man auf diese Situation nochmal die kumulative Monotonie und danach die Abgeschlossenheit von Ψ an, erhält man

$$\Psi(Y) \subseteq\!\!\!= \Psi(X)$$

und somit

$$\Psi(X) = \Psi(Y).$$

Wir schließen Unterabschnitt 1.3.4 mit einem Theorem ab, das die große Bedeutung der durch Definition 1.3.1.3 eingeführten Fundierungseigenschaft für Modelle von Mengen $X \subseteq\!\!\!= AUSD(\Sigma, V)$ unterstreicht.

Theorem 1.3.4.6
Für jedes $X, Y \subseteq\!\!\!= AUSD(\Sigma, V)$ gilt: Erfüllt X die Fundierungseigenschaft für Modelle und gilt

$$X \subseteq\!\!\!= Y \subseteq\!\!\!= Cir(X),$$

so folgt

$$Cir(X) \subseteq\!\!\!= Cir(Y).$$

Beweis
Wir haben die Voraussetzungen

(1) $X \subseteq\!\!\!= Y$
(2) $Y \subseteq\!\!\!= Cir(X)$
(3) $A \in Cir(X)$
(4) $\mathfrak{I} \models\!\!\!=\!\!\!=_{\min} Y.$

Unter diesen Voraussetzungen haben wir

(5) $\mathfrak{I} \models A$

zu zeigen. Nach (3) genügt es zu zeigen, daß

(6) $\mathfrak{I} \models\!\!\!\models_{\min} X.$

Nun folgt aus (4) zunächst

(7) $\mathfrak{I} \models Y,$

also gilt wegen (1) auch

(8) $\mathfrak{I} \models X.$

Fall 1. $\mathfrak{I}$ ist minimales Modell von X.

In diesem Fall gilt (6) und wir sind fertig.

Fall 2. $\mathfrak{I}$ ist nicht minimal.

Nach der Fundierungseigenschaft für X und (8) gibt es dann eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}'$ mit

(9) $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$ und

(10) $\mathfrak{I}' \models\!\!\!\models_{\min} X.$

Aus (10) folgt zunächst

(11) $\mathfrak{I}' \models Cir(X),$

also mit (2), daß

(12) $\mathfrak{I}' \models Y.$

Das ist aber ein Widerspruch, weil nach Voraussetzung (4) $\mathfrak{I} \models\!\!\!\models_{\min} Y$ und nach (9) $\mathfrak{I}' \prec \mathfrak{I}$ gilt. Damit kann Fall 2 nicht eintreten, also gilt generell $\mathfrak{I} \models\!\!\!\models_{\min} X$ und das Theorem ist damit bewiesen.

■

Bemerkung zu Theorem 1.3.4.6:
Dieses Theorem besagt offenbar nicht, daß für *Cir* generell die kumulative Monotonie gilt, sondern lediglich, daß für gewisse spezielle Mengen X (die nämlich die Fundierungseigenschaft für Modelle haben) der Operator *Cir* kumulativ-monoton ist.

Damit entsteht naturgemäß die Frage nach hinreichenden (und auch notwendigen) Bedingungen dafür, daß X die Fundierungseigenschaft für Modelle hat.

Eine wichtige Antwort auf diese Frage wird in Kapitel **??** im Rahmen der modell-theoretischen Begründung der Logischen Programmierung gegeben. Es wird dort nämlich gezeigt, daß sehr einfache syntaktisch-strukturelle Bedingungen (z. B. alle Ausdrücke aus X sind universale Normalformen bzw. HORNsche Formeln) ausreichen, um die Gültigkeit der Fundierungseigenschaft für Modelle der Menge X zu sichern.

Mengen universaler Normalformen sind aber genau diejenigen, aus denen (nach Übersetzung in die Klausellogik) im Rahmen der ROBINSONschen Resolutionstheorie, die eine „Vorstufe“ der Logischen Programmierung ist, abgeleitet wird.

Mengen von HORN-Formeln (wiederum nach Übersetzung in die Klausellogik) treten aber in der Logischen Programmierung als „Programme“ auf (wobei wir zur Vereinfachung der Sprechweise „Zielklauseln“ einbezogen haben).

1.4 Formales Ableiten und Beweisen. Regelbasiertes Schließen (Syntax II)

1.4.1 Motivationen. Vorbemerkungen

Die semantische Folgerungsrelation $\Vdash$, d. h. die Frage, ob für $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ und $A \in AUSD(\Sigma, V)$ die Beziehung $X \Vdash A$ gilt (oder nicht), ist von fundamentaler Bedeutung. Für die Informatik und für den „Einstieg“ in die logische Programmierung ist dabei wesentlich, daß der Ausdruck A als das Resultat einer „logischen Rechnung“ (bzw. als Ergebnis der Abarbeitung eines „logischen Programms“) gedeutet werden kann.

Zur Veranschaulichung dieser allgemeinen These (bis zur Formulierung der Logischen Programmierung in einer „handhabbaren“ Form müssen noch verschiedene Umformungen und Umformulierungen vorgenommen werden!) betrachten wir das folgende

Beispiel:
Gegeben sei eine einsortige Signatur Σ, die das nullstellige Funktionssymbol Ze („Null“), das einstellige Funktionssymbol $Succ$ („Nachfolger“) und das zweistellige Funktionssymbol Add („Addition“) enthalten möge. Ferner verwenden wir die Individuenvariablen x und y. Schließlich setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} 1 &=_{def} Succ(Ze) \\ 2 &=_{def} Succ(Succ(Ze)) \\ 3 &=_{def} Succ(Succ(Succ(Ze))) \end{aligned}$$

und wählen als Menge X

$$X =_{def} \{Add(x, Ze) = x, Add(x, Succ(y)) = Succ(Add(x, y))\}.$$

Dann gilt $X \Vdash Add(1,2) = 3$, was so gedeutet werden kann, daß „Modell-basiert“ aus der Menge X die Gleichung $Add(1,2) = 3$ erschlossen wurde. Dieses Ergebnis läßt sich auch in der Form interpretieren, daß man die „Summe“ der „natürlichen“ Zahlen 1 und 2 modell-basiert als „natürliche“ Zahl 3 errechnet hat.

Nun müssen wir auf einen großen Nachteil dieses Verfahrens hinweisen: Die Relation $\Vdash$ ist im allgemeinen für einen Menschen (und auch für einen Computer) kaum praktikabel, erfordert doch die Feststellung, ob $X \Vdash A$ gilt, zu prüfen, ob für ein beliebiges Modell $\mathfrak{I}$ von X auch $\mathfrak{I} \models A$, eine — vordergründig betrachtet — schier unlösbare Aufgabe.

Doch die Situation ist nicht derart dramatisch negativ. Die Mathematische Logik hat in den vergangenen fast 100 Jahren eine Fülle von Resultaten zur Lösung dieses Problems bereitgestellt.

Wir diskutieren dazu die drei folgenden Wege:

1. Man kann fragen, ob es ein allgemeines Verfahren gibt, mit dem für einen beliebigen Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ entschieden werden kann, ob $X \Vdash A$ gilt oder nicht. Verwendet man die Definitionen der *Berechnungstheorie* (siehe z. B. Grundvorlesung GTI), so kann man fragen, ob für ein gegebenes $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ die Menge $Cons(X)$ *rekursiv* (bezüglich der Menge $AUSD(\Sigma, V)$) ist.

   Die Erfahrungen zeigen, daß die Existenz eines solchen „Entscheidungsverfahrens“ sehr stark von der gewählten Signatur Σ abhängt und — grob gesprochen — eine Ausnahme ist. Eine solche Ausnahme liegt z. B. vor, wenn X ein Axiomensystem der Theorie der

Abelschen Gruppen ist [SMIELEW]; ist aber X ein Axiomensystem der Theorie beliebiger Gruppen, dann ist $Cons(X)$ nicht rekursiv [TARSKI]. Dabei muß natürlich die Signatur entsprechend gewählt werden.

2. In Abschwächung der oben unter Punkt 1 diskutierten Frage kann man untersuchen, ob vielleicht (wie mit den Termini der Theorie der Turing-Maschinen formuliert) die Menge $Cons(X)$ rekursiv *aufzählbar* ist. Dies kann — wie wir im nächsten Abschnitt 1.5 zeigen werden — positiv beantwortet werden, falls X selbst rekursiv aufzählbar ist. Dabei ist die rekursive Aufzählbarkeit von X eine selbstverständliche Voraussetzung, denn eine Menge X, die nicht rekursiv aufzählbar ist (also nicht dieses „minimale Maß an konstruktiver Beherrschbarkeit" aufweist), wird man insbesondere aus der Sicht der Anwendungen kaum als Axiomensystem (oder als Spezifikation) bezeichnen können.

   Wir wollen schon hier darauf hinweisen, daß wir im nächsten Abschnitt 1.5 keine Turing-Maschine zum Beweis der rekursiven Aufzählbarkeit von $Cons(X)$ konstruieren werden, vielmehr werden wir zeigen, daß genau die Ausdrücke aus $Cons(X)$, mit den Elementen von X beginnend, mit Hilfe eines Systems von Axiomen sowie eines endlichen Systems von Regeln (im folgenden „elementare Schlußregeln" genannt) konstruiert werden können, wobei jede dieser Schlußregeln effektiv ausführbar (d. h. rekursiv) ist.

3. Schließlich kann man fragen, ob man die Relation $X \models A$ vielleicht dadurch „handhabbarer" machen kann, daß es möglich ist, sich zur Feststellung von $X \models A$ auf einen Teilbereich von Modellen der Menge X zu beschränken. Dies ist für spezielle X tatsächlich der Fall. Stichworte wie „universale Theorien", „Herbrandscher Satz", „Herbrand-Modelle" und „Termmodelle" bezeichnen dementsprechende Untersuchungen, die in Kapitel **??** zu finden sind.

1.4.2 Das verwendete logische Axiomensystem

Wir fixieren eine Signatur Σ und die Menge V der verwendeten Individuenvariablen. Außerdem hatten wir als logische Konnektoren $\neg$, $\rightarrow$ und $\forall$ zu Grunde gelegt, die übrigen, nämlich $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$, hatten wir definiert.

Durch diese Ausgangsposition war für jede Sorte $s \in SO$ von Σ die Menge $TERM_s(\Sigma, V)$ der Terme der Sorte s sowie die Menge $AUSD(\Sigma, V)$ aller Ausdrücke festgelegt.

Bei den im folgenden zu definierenden Ableitungsprozessen werden wir bestimmte Ausdrücke, die in *allen* Σ-algebraischen Systemen $\mathfrak{I}$ allgemeingültig sind, als Hilfsmittel stets benutzen und sie demgemäß als *logische Axiome* an die Spitze stellen.

Die im folgenden zu formulierenden logischen Axiome sind in Gruppen gegliedert, und zwar

$\boldsymbol{ax_{\rightarrow}}$ zur Charakterisierung des Junktors $\rightarrow$,

$\boldsymbol{ax_{\neg}}$ zur Charakterisierung des Junktors $\neg$,

$\boldsymbol{ax_{=_s}}$ zur Charakterisierung des Gleichheitssymbols $=_s$ der Sorte $s \in SO$,

$\boldsymbol{ax_f}$ zur Charakterisierung der Ersetzbarkeit von Individuenvariablen in den Leerstellen von f, falls $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ und $n \geq 1$, $f \in FS$,

$\boldsymbol{ax_P}$ zur Charakterisierung der Ersetzbarkeit von Individuenvariablen in den Leerstellen von P, falls $P \in PS$, $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$ mit $n \geq 1$.

Gegeben seien beliebige Ausdrücke $A, B, C \in AUSD(\Sigma, V)$ sowie die paarweise verschiedenen, fest gewählten Individuenvariablen $x, y, z, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, wobei x, y, z stets die gleiche Sorte, etwa s, ferner x_ν und y_ν ebenfalls die gleiche Sorte, etwa s_ν ($\nu \in \{1, \ldots, n\}$), haben sollen. Ferner sei $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ und $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$. Wir definieren dann:

$ax_\rightarrow$ $=_{def}$ Menge aller Ausdrücke einer der folgenden drei Formen:

1. **Prämissenbelastung**
$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

2. **Kettenschluß**
$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

3. **Schluß von Peirce**
$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$ax_\neg$ $=_{def}$ Menge aller Ausdrücke der folgenden drei Formen:

4. **Kontraposition**
$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

5. **Abschwächung** doppelte Negation
$$A \rightarrow \neg\neg A$$

6. **Verschärfung** doppelte Negation
$$\neg\neg A \rightarrow A$$

$ax_{\overset{=}{s}}$:

7. **Reflexivität**
$$x \overset{=}{s} x$$

8. **Symmetrie**
$$x \overset{=}{s} y \rightarrow y \overset{=}{s} x$$

9. **Transitivität**
$$x \overset{=}{s} y \rightarrow (y \overset{=}{s} z \rightarrow x \overset{=}{s} z)$$

ax_f: **Ersetzbarkeit bezüglich f**

$$\begin{array}{c} x_1 \overset{=}{s_1} y_1 \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \overset{=}{s} f(y_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n \overset{=}{s_n} y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \overset{=}{s} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n) \end{array}$$

ax_P: **Ersetzbarkeit bezüglich P**

$$\begin{array}{c} x_1 \overset{=}{s_1} y_1 \rightarrow (Px_1 \ldots x_n \leftrightarrow Py_1 x_2 \ldots x_n) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n \overset{=}{s_n} y_n \rightarrow (Px_1 \ldots x_n \leftrightarrow Px_1 \ldots x_{n-1} y_n) \end{array}$$

Schließlich definieren wir „das zur Signatur Σ und der Variablenmenge V gehörende“ logische Axiomensystem $ax_{\Sigma,V}$ wie folgt:

Definition 1.4.2.1

$$ax_{\Sigma,V} =_{def} ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg} \cup \bigcup_{\overline{=}_s \in PS} ax_{\overline{=}_s} \cup \bigcup_{\substack{f \in FS, \\ |\alpha(f)| \geq 2}} ax_f \cup \bigcup_{\substack{P \in PS, |\alpha(P)| \geq 1, \\ P \text{ kein Gleichheitssymbol}}} ax_P.$$

Der folgende Satz besagt, daß das Axiomensystem „semantisch korrekt" ist. Dies ist eine wichtige Voraussetzung dafür, daß mit den noch zu definierenden „semantisch korrekten" Schlußregeln allein „semantisch korrekte" Ausdrücke hergeleitet werden können. (Siehe dazu Abschnitt 1.4.3 und 1.4.4).

Theorem 1.4.2.1
Für jedes Σ-algebraische System $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{I}$ ist ein Modell für $ax_{\Sigma,V}$.

Beweis
Unmittelbar klar durch Auflösen der Modell-Definition. ■

Bemerkung:
Aus Theorem 1.4.2.1 folgt offensichtlich, daß alle Ausdrücke aus $ax_{\Sigma,V}$ allgemeingültig sind. Daraus erklärt sich die Bezeichnung „logische Axiome" für die Ausdrücke aus $ax_{\Sigma,V}$.

1.4.3 Der auf dem Modus Ponens allein beruhende Ableitungsbegriff

In diesem und im nächsten Abschnitt streben wir an — in Ausführung des in Abschnitt 1.4.1 im Punkt 2 skizzierten Programms — den folgenden Hauptsatz zu beweisen:

Aus X folgt semantisch A ($X \models A$) genau dann, wenn aus X unter Verwendung von Axiomen aus $ax_{\Sigma,V}$ mit bestimmten Schlußregeln der Ausdruck A „hergeleitet" werden kann.

Schlußregeln werden häufig in der Form

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B} \qquad (n \geq 0)$$

notiert, wobei diese Notation bedeuten soll: Wenn die „Prämissen" $A_1, \ldots, A_n$ der obigen Schlußregel hergeleitet sind, dann ist auch ihre „Konklusion" B herleitbar, wobei darauf hingewiesen werden muß, daß die Menge der Prämissen auch leer sein darf, also $n = 0$ zugelassen ist.

Die Schlußregel „*Modus Ponens*" (häufig auch „*Abtrennungsregel*" genannt) hat die Form

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B},$$

wobei A, B beliebige Ausdrücke aus $AUSD(\Sigma, V)$ sind. Sie besagt offensichtlich, daß in einer abgeleiteten Implikation $A \rightarrow B$ die Prämisse A „abgetrennt" werden darf, falls die Prämisse A ebenfalls ableitbar ist (daher die Bezeichnung „Abtrennungsregel").

Der Modus Ponens spielt in der gesamten Logik eine herausragende Rolle. So können z. B. mit ihm allein alle im Sinne der Aussagenlogik gültigen Ausdrücke aus dem Axiomensystem $ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}$ hergeleitet werden. (Man vergleiche dazu Theorem 1.4.3.4.) Im nächsten Abschnitt 1.5 wird der auf dem Modus Ponens allein beruhende Ableitungsbegriff eine wichtige Hilfsfunktion beim Vollständigkeitsbeweis erfüllen. Schließlich sei — über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgehend — erwähnt, daß in nicht-klassischen, insbesondere in mehrwertigen Logiken, der Modus Ponens umfangreiche Untersuchungen und Verallgemeinerungen erfahren hat. In der Fuzzy-Logik, die eine bestimmte unendlich-wertige Logik ist, wird der Modus Ponens zum „Generalized Modus Ponens" verallgemeinert und als „Compositional Rule of Inference" interpretiert.

Wir definieren nun den auf dem Modus Ponens beruhenden Ableitbarkeitsbegriff: „Aus X ist mit dem Modus Ponens der Ausdruck A ableitbar“ (kurz: $X\ Abl_{MP}\ A$).

Gleichsam als „Muster“ für andere Ableitbarkeitsbegriffe werden wir $X\ Abl_{MP}\ A$ durch Induktion über eine „Ableitbarkeitsstufe k“ definieren, d. h. wir definieren: „Aus X ist mit dem Modus Ponens der Ausdruck A *k-stufig* ableitbar“ (kurz: $X\ Abl^k_{MP}\ A$), wobei k inhaltlich bedeuten soll, daß k „Schritte“ für die Ableitung von A aus X ausreichen und ein Schritt die einmalige Anwendung des Modus Ponens bedeutet.

Definition 1.4.3.1

1. ***Anfangsschritt:***
   $X\ Abl^0_{MP}\ A =_{def} A \in X$

2. ***Induktionsschritt:***
   $X\ Abl^{k+1}_{MP}\ B$
   $=_{def}$ *$X\ Abl^k_{MP}\ B$ oder es gibt einen Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$, so daß $X\ Abl^k_{MP}\ A$ und $X\ Abl^k_{MP}\ A \to B$.*

3. $X\ Abl_{MP}\ A$
   $=_{def}$ *Es gibt eine natürliche Zahl $k \geq 0$, so daß $X\ Abl^k_{MP}\ A$.*

4. $Ab_{MP}(X) =_{def} \{A | A \in AUSD(\Sigma, V)$ *und* $X\ Abl_{MP}\ A\}$.

Bemerkungen zu Definition 1.4.3.1:

1. Die Punkte 1 und 2 sind die induktive Definition der Relation $X\ Abl^k_{MP}\ A$. Gleichzeitig wird durch Punkt 2 präzisiert, daß $(k+1)$ Schritte ausreichen, um B aus X abzuleiten.

2. Punkt 3 besagt, daß endlich-viele Schritte (nämlich k) ausreichen, um A aus X abzuleiten.

3. Mit Punkt 4 wird ein logischer Operator, also eine eindeutige Abbildung

$$Ab_{MP} : \mathfrak{P}(AUSD(\Sigma, V)) \to \mathfrak{P}(AUSD(\Sigma, V))$$

   definiert.

Theorem 1.4.3.1

1. *Ab_{MP} ist ein Hüllenoperator.*

2. *Ab_{MP} ist kompakt.*

3. *Ab_{MP} erfüllt die Ableitbarkeitseigenschaft.*

4. *Wenn $ax_{\to} \subseteq X$, so erfüllt Ab_{MP} für X die Deduktionseigenschaft.*

5. *$Ab_{MP}(\phi) = \phi$.*

Beweis
ad 1: Ab_{MP} ist ein Hüllenoperator.

1. **Einbettung**: $X \subseteq Ab_{MP}(X)$
   Es sei $A \in X$. Wir haben zu zeigen, daß $X\ Abl_{MP}\ A$. Nach Definition 1.4.3.1, Punkt 3, genügt es zu zeigen, daß $X\ Abl^0_{MP}\ A$. Das Letztere folgt mit der Voraussetzung $A \in X$ auf Grund von Punkt 1 der Definition.

2. **Abgeschlossenheit**: $Ab_{MP}(Ab_{MP}(X)) \subseteq Ab_{MP}(X)$
   Wir beweisen diese Behauptung, indem wir durch Induktion über k zeigen:

   (1) Wenn $Ab_{MP}(X)\ Abl^k_{MP}\ A$, so $X\ Abl_{MP}\ A$.

   Anfangsschritt: $k = 0$
   In diesem Fall gilt (1) auf Grund von Punkt 1 der Definition 1.4.3.1.

   Induktionsschritt: Es sei $Ab_{MP}(X)\ Abl^{k+1}_{MP}\ A$.

   Fall 1: $Ab_{MP}(X)\ Abl^k_{MP}\ A$.
   In diesem Fall können wir (1), als Induktionsvoraussetzung gedeutet, direkt anwenden.

   Fall 2: Es gibt ein $B \in AUSD(\Sigma, V)$ mit

   $$Ab_{MP}(X)\ Abl^k_{MP}\ B$$

   und

   $$Ab_{MP}(X)\ Abl^k_{MP}\ B \rightarrow A.$$

   Dann folgt mit (1) als Induktionsvoraussetzung, daß

   $$X\ Abl_{MP}\ B$$

   und

   $$X\ Abl_{MP}\ B \rightarrow A,$$

   also nach Definition 1.4.3.1, daß

   $$X\ Abl_{MP}\ A.$$

   Bemerkung: In der obigen Behauptung haben wir für die Ableitbarkeit von A aus X keine Stufe, etwa k, angegeben. Dies ist offensichtlich nicht erforderlich, aber im allgemeinen auch gar nicht möglich, wie schon der Spezialfall $k = 0$ in (1) zeigt. Analoges gilt für die folgenden Induktionsbeweise im Rahmen des Beweises von Theorem 1.4.3.1.

3. **Monotonie**: Wenn $X \subseteq Y$, so $Ab_{MP}(X) \subseteq Ab_{MP}(Y)$.
   Wir beweisen diese Behauptung analog zur Abgeschlossenheit, indem wir durch Induktion über k zeigen:

   (2) Wenn $X \subseteq Y$ und $X\ Abl^k_{MP}\ A$, so $Y\ Abl_{MP}\ A$.

   Anfangsschritt: $k = 0$
   In diesem Fall gilt (2) wegen $A \in X$ (Punkt 1 von Definition 1.4.3.1) und $X \subseteq Y$.

   Induktionsschritt: Es sei $X\ Abl^{k+1}_{MP}\ A$.

   Fall 1: $X\ Abl^k_{MP}\ A$.
   In diesem Fall können wir (2), wieder als Induktionsvoraussetzung gedeutet, direkt anwenden.

   Fall 2: Es gibt ein $B \in AUSD(\Sigma, V)$ mit

   $$X\ Abl^k_{MP}\ B$$

   und

   $$X\ Abl^k_{MP}\ B \rightarrow A.$$

Dann folgt mit (2) als Induktionsvoraussetzung, daß

$$Y \; Abl_{MP} \; B$$

und

$$Y \; Abl_{MP} \; B \rightarrow A,$$

also nach Definition 1.4.3.1, daß

$$Y \; Abl_{MP} \; A.$$

ad 2: Ab_{MP} ist kompakt.

Analog zur oben bewiesenen Abgeschlossenheit und Monotonie von Ab_{MP} zeigen wir durch Induktion über k:

(3) Wenn $X \; Abl^k_{MP} \; A$, so gibt es eine endlich Menge $X_{fin} \subseteq X$, so daß $X_{fin} \; Abl_{MP} \; A$.

Anfangsschritt: $k = 0$

Aus $X \; Abl^0_{MP} \; A$ folgt nach Punkt 1 von Definition 1.4.3.1, daß $A \in X$. Wir definieren X_{fin} in diesem Fall als

$$X_{fin} =_{def} \{A\}.$$

Daraus folgt mit Punkt 1 von Definition 1.4.3.1 unmittelbar, daß

$$X_{fin} \; Abl_{MP} \; A.$$

Induktionsschritt: Es sei $X \; Abl^{k+1}_{MP} \; A$.

Fall 1: $X \; Abl^k_{MP} \; A$.

Anwendung von (3), wieder als Induktionsvoraussetzung aufgefaßt.

Fall 2: Es gibt ein $B \in AUSD(\Sigma, V)$, so daß

$$X \; Abl^k_{MP} \; B$$

und

$$X \; Abl^k_{MP} \; B \rightarrow A.$$

Daraus folgt mit (3) als Induktionsvoraussetzung, daß es endliche Mengen $X'_{fin}, X''_{fin} \subseteq X$ gibt, so daß

$$X'_{fin} \; Abl_{MP} \; B$$

und

$$X''_{fin} \; Abl_{MP} \; B \rightarrow A.$$

Wir definieren nun die (offensichtlich!) endliche Menge

$$X_{fin} =_{def} X'_{fin} \cup X''_{fin},$$

also folgt auf Grund der Monotonie von Ab_{MP}, daß

$$X_{fin} \; Abl_{MP} \; B$$

und

$$X_{fin} \; Abl_{MP} \; B \rightarrow A,$$

also

$$X_{fin} \; Abl_{MP} \; A.$$

ad 3: Ab_{MP} erfüllt die Ableitbarkeitseigenschaft, d. h. es gilt für beliebige $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ und beliebige $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$:

$$\text{Wenn } X \; Abl_{MP} \; A \to B, \text{ so } X \cup \{A\} \; Abl_{MP} \; B.$$

Offensichtlich erfüllt Ab_{MP} den Modus Ponens (das ist trivial nach Definition 1.4.3.1 für Ab_{MP}). Außerdem haben wir bewiesen, daß Ab_{MP} ein Hüllenoperator ist, somit erfüllt Ab_{MP} auf Grund von Lemma 1.3.3.6 (allein die Richtung $\Rightarrow$ wird benötigt) die Ableitbarkeitseigenschaft.

ad 4: Ab_{MP} erfüllt für X mit $ax_{\to} \subseteq X$ die Deduktionseigenschaft, d. h. für beliebige $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$\text{Wenn } X \cup \{A\} \; Abl_{MP} \; B, \text{ so } X \; Abl_{MP} \; A \to B.$$

Zum Beweis dieser Behauptung benutzen wir aus der Aussagenlogik (siehe z. B. Asser [2, Seite 77 – 85]) das folgende

Lemma 1.4.3.2
Wenn $ax_{\to} \subseteq X$, so gilt

1. $X \; Abl_{MP} \; A \to A$ *und*
2. $X \; Abl_{MP} \; (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

Dieses Lemma besagt, daß unter der Voraussetzung $ax_{\to} \subseteq X$ aus X mit dem Modus Ponens erstens die sogenannte *Selbstimplikation* und zweitens der Frege*sche Kettenschluß* (benannt nach dem bedeutenden Logiker G. Frege, 1848 – 1925) herleitbar sind.

Wir zeigen nun analog zu den oben geführten Induktionsbeweisen durch Induktion über k, daß gilt:

(4) $$\text{Wenn } ax_{\to} \subseteq X \text{ und } X \cup \{A\} \; Abl^k_{MP} \; B, \text{ so } X \; Abl_{MP} \; A \to B.$$

Anfangsschritt: $k = 0$

Aus $X \cup \{A\} \; Abl^0_{MP} \; B$ folgt, daß $B \in X \cup \{A\}$.

Fall 1: $B \in X$.

Dann gilt

$$X \; Abl_{MP} \; B.$$

Weil $ax_{\to} \subseteq X$, haben wir ferner

$$X \; Abl_{MP} \; B \to (A \to B),$$

(d. h. das Schema der Prämissenbelastung ist herleitbar), also gilt nach Definition von Abl_{MP}

$$X \; Abl_{MP} \; A \to B.$$

Fall 2: $B = A$.

Somit haben wir zu zeigen, daß

$$X \; Abl_{MP} \; A \to A.$$

Das folgt aber aus Lemma 1.4.3.2.

Induktionsschritt: Es sei $X \cup \{A\} \; Abl^{k+1}_{MP} \; B$.

Fall 1: $X \cup \{A\}\ Abl^k_{MP}\ B$.

In diesem Fall folgt die Behauptung $X\ Abl_{MP}\ A \to B$ unmittelbar aus (4), aufgefaßt als Induktionsvoraussetzung.

Fall 2: Es gibt ein $C \in AUSD(\Sigma, V)$, so daß

$$X \cup \{A\}\ Abl^k_{MP}\ C$$

und

$$X \cup \{A\}\ Abl^k_{MP}\ C \to B.$$

Daraus folgt mit (4) als Induktionsvoraussetzung, daß

(5) $$X\ Abl_{MP}\ A \to C$$

und

(6) $$X\ Abl_{MP}\ A \to (C \to B)$$

Nun gilt aber wegen Lemma 1.4.3.2 (FREGEscher Kettenschluß)

(7) $$X\ Abl_{MP}\ (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)),$$

also folgt mit (6) und (7), daß

(8) $$X\ Abl_{MP}\ (A \to C) \to (A \to B),$$

und daraus mit (5), daß

(9) $$X\ Abl_{MP}\ A \to B.$$

ad 5: $Ab_{MP}(\phi) = \phi$.

Diese Gleichung gilt offenbar trivial.

■

Das folgende Theorem beinhaltet für eine beliebig gegebene Ausdrucksmenge $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ eine Charakterisierung der Ableitungsmenge $Ab_{MP}(X)$, die sowohl in theoretischen Untersuchungen als auch in den Anwendungen sehr nützlich ist.

Zur bequemen Formulierung dieses Theorems definieren wir für beliebige Mengen $Y \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$.

Definition 1.4.3.2
Y ist gegenüber der Abtrennungsoperation abgeschlossen
$=_{def}$ *Für jeden Ausdruck A und B aus $AUSD(\Sigma, V)$ gilt:*

$$\textit{Wenn } A \in Y \textit{ und } (A \to B) \in Y \textit{, so } B \in Y.$$

Theorem 1.4.3.3

$$Ab_{MP}(X) = \bigcup \{Y \mid X \subseteqq Y \textit{ und } Y \text{ ist gegenüber der Abtrennungsoperation abgeschlossen}\}$$

Beweis

I. $\subseteq$ Auf Grund der Eigenschaften der mengentheoretischen Durchschnittsoperation genügt es zu zeigen:

(10) Wenn $X \subseteq Y$ und Y ist gegenüber der Abtrennungsoperation abgeschlossen, so
$$Ab_{MP}(X) \subseteq Y.$$

Nun sei

(11) $$X \subseteq Y,$$

also folgt mit Monotonie für Ab_{MP}, daß

(12) $$Ab_{MP}(X) \subseteq Ab_{MP}(Y).$$

Um also (10) zu zeigen, genügt es wegen (12) zu zeigen

(13) Ist Y gegenüber der Abtrennungsoperation abgeschlossen, so
$$Ab_{MP}(Y) \subseteq Y.$$

Um aber (13) zu zeigen, genügt es (durch Induktion über k) zu beweisen

(14) Ist Y gegenüber der Abtrennungsoperation abgeschlossen und gilt $Y\ Abl^k_{MP}\ A$, so $A \in Y$.

Anfangsschritt: $k = 0$

$Y\ Abl^0_{MP}\ A$ bedeutet nach Definition $A \in Y$, danmit gilt die Behauptung trivial.

Induktionsschritt:

Es sei $Y\ Abl^{k+1}_{MP}\ A$.

Fall 1. $Y\ Abl^k_{MP}\ A$.

Trivial nach Induktionsvoraussetzung.

Fall 2. Es gibt ein $B \in AUSD(\Sigma, V)$, so daß

$$Y\ Abl^k_{MP}\ B$$

und

$$Y\ Abl^k_{MP}\ B \to A.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir daraus, daß

$$B \in Y$$

und

$$B \to A \in Y,$$

also folgt, weil Y gegenüber der Abtrennungsoperation abgeschlossen ist,

$$A \in Y.$$

II. $\supseteq$ Wiederum auf Grund der Eigenschaften der mengentheoretischen Durchschnittsoperation genügt es zu zeigen, daß

(15) $$X \subseteq Ab_{MP}(X)$$

und

(16) Wenn $A \in Ab_{MP}(X)$ und $A \to B \in Ab_{MP}(X)$, so $B \in Ab_{MP}(X)$.

Bedingung (15) gilt, weil Ab_{MP} reflexiv ist.

Um Bedingung (16) zu beweisen, nehmen wir an, daß gilt

$$A \in Ab_{MP}(X)$$

und

$$A \to B \in Ab_{MP}(X).$$

Daraus folgt, daß natürliche Zahlen k und l existieren, so daß

(17) $$X\ Abl^k_{MP}\ A$$

und

(18) $$X\ Abl^l_{MP}\ A \to B.$$

Wir nehmen nun o. B. d. A. an, daß $k \leqq l$ gilt. Dann folgt aus (17), daß

(19) $$X\ Abl^l_{MP}\ A,$$

also aus (18) und (19), daß

(20) $$X\ Abl^{l+1}_{MP}\ B,$$

also

(21) $$X\ Abl_{MP}\ B.$$

■

Wie oben angekündigt, zeigen wir durch das folgende Theorem die Bedeutung des allein auf dem Modus Ponens beruhenden Ableitungsbegriffs Abl_{MP} für die Aussagenlogik. Zur Formulierung dieses Theorems nennen wir einen Ausdruck A „identitätsfrei“, falls in A (für keine Sorte) ein Gleichheitszeichen vorkommt.

Theorem 1.4.3.4
(Axiomatisierungstheorem für die quantorenfreien, identitätsfreien, allgemeingültigen Ausdrücke)

Ist $A \in AUSD(\Sigma, V)$ und ist A sowohl quantorenfrei als auch identitätsfrei, so gilt

$$ag A \text{ genau dann, wenn } ax_{\to} \cup ax_{\neg}\ Abl_{MP}\ A.$$

Beweis
ad ($\Leftarrow$): Semantische Korrektheit

Um die semantische Korrektheit zu beweisen, zeigen wir durch Induktion über k:

(1) Wenn $ax_{\to} \cup ax_{\neg}\ Abl^k_{MP}\ A$, so $ag\ A$.

Anfangsschritt: $k = 0$.

Aus $ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl^0_{MP}\ A$ folgt

$$A \in ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg},$$

also ist auf Grund von Theorem 1.4.2.1 der Ausdruck A allgemeingültig.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, daß

$$ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl^{k+1}_{MP}\ A$$

gilt.

Fall 1: $ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl^k_{MP}\ A$

In diesem Fall folgt die Behauptung agA unmittelbar aus (1), als Induktionsvoraussetzung aufgefaßt.

Fall 2: Es gibt ein $B \in AUSD(\Sigma, V)$, so daß

$$ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl^k_{MP}\ B$$

und

$$ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl^k_{MP}\ B \rightarrow A,$$

also mit der Induktionsvoraussetzung (1), daß

$$agB$$

und

$$agB \rightarrow A.$$

Daraus ergibt sich aber unmittelbar mit Lemma 1.3.3.3 (wegen $Cons(\emptyset) = ag$) die Behauptung

$$agA.$$

ad ($\Rightarrow$): Semantische Vollständigkeit

Hier haben wir, wie in ähnlichen Situationen bei semantischen Vollständigkeitsbeweisen, keine Möglichkeit, unmittelbar induktiv (etwa über die Ableitbarkeitsstufe) zu schließen.

Es gibt in der Aussagenlogik verschiedene Methoden (z. B. mit kanonischen Normalformen oder mit Hilfe der Deduktionseigenschaft), die semantische Vollständigkeit zu beweisen.

Wir werden hier aus Platz- und Zeitgründen keinen dieser Beweise darstellen, verweisen aber auf den nächsten Abschnitt, wo sich aus dem dort dargestellten Beweis für das allgemeine syntaktische Charakterisierungstheorem (*Hauptsatz*) ein Beweis für Theorem 1.4.3.4 gewinnen läßt.

■

1.4.4 Ein prädikatenlogischer Ableitungsbegriff

Der im vorangegangenen Abschnitt 1.4.3 definierte und studierte Ableitungsbegriff, der *allein* den Modus Ponens als Schlußregel verwendet, konnte z. B. angewendet werden, um genau die allgemeingültigen, quantoren- und identitätsfreien Ausdrücke aus $ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}$ abzuleiten. Außerdem wird er im Abschnitt 1.5.2 ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweis der semantischen Vollständigkeit sein.

Wir konstruieren jetzt einen (*prädikatenlogischen*) Ableitungsbegriff, der unmittelbar zur „syntaktischen Charakterisierung“ des semantischen Folgerns, also der Relation $X \models A$ und des

Operators *Cons*, verwendet wird. Er wird sich selbstverständlich auf den Modus Ponens als Schlußregel stützen, außerdem kommen vier weitere (prädikatenlogische) Schlußregeln hinzu, die auf die „prädikatenlogische“ Struktur der Mengen $TERM(\Sigma, V)$ und $AUSD(\Sigma, V)$ Bezug nehmen.

Bevor wir diesen Ableitungsbegriff induktiv definieren, geben wir die neuen vier Schlußregeln nach dem Muster des für den Modus Ponens verwendeten Schemas an. Dazu seien $A, B \in AUSD(\Sigma, V)$ beliebig gegeben, ferner seien $v \in V$ und $T \in TERM(\Sigma, V)$ mit *gleicher* Sorte $s \in SO$.

Vordere Generalisierung:

$$\frac{A \to B}{\forall v A \to B}$$

(Eingeschränkte) hintere Generalisierung:

$$\frac{A \to B \text{ und } v \text{ kommt nicht frei in } A \text{ vor}}{A \to \forall v B}$$

Gebundene Umbenennung:

$$\frac{A \quad \text{und } B \text{ ist das Resultat einer gebundenen Umbennung von Individuenvariablen in } A \text{ (unter Vermeidung von Variablenkonfusion!)}}{B}$$

Termeinsetzung:

$$\frac{A \quad \text{und } A\,{}^{v}\!/_{T} \text{ ist das Ergebnis der simultanen Einsetzung von } T \text{ für } v \text{ an jeder Position, wo } v \text{ in } A \text{ frei vorkommt, wobei Variablenkonfusion vermieden wird}}{A\,{}^{v}\!/_{T}}$$

Zur Abkürzung nennen wir eine gebundene Umbennung bzw. eine Termeinsetzung *zulässig*, falls Variablenkonfusion im beschriebenen Sinne vermieden wird.

Unter Einbeziehung des Modus Ponens definieren wir nun:

Aus X ist (prädikatenlogisch) der Ausdruck A ableitbar (kurz: $X\ Abl\ A$).

Die Relation $X\ Abl\ A$ wird wieder wie $X\ Abl_{MP}\ A$ induktiv über eine Ableitbarkeitsstufe k eingeführt. Wir werden diese induktive Definition der Kürze wegen nicht voll ausformulieren; wir überlassen es dem Leser, dies nach dem Muster von Definition 1.4.3.1 selbst zu tun.

Definition 1.4.4.1

1. ***Anfangsschritt***
   Wenn $A \in X$, so $X\ Abl\ A$.
2. ***Induktionsschritt***
   1. *Wenn $X\ Abl\ A$ und $X\ Abl\ A \to B$, so $X\ Abl\ B$.*
   2. *Wenn $X\ Abl\ A \to B$, so $X\ Abl \forall v A \to B$.*
   3. *Wenn $X\ Abl\ A \to B$ und v kommt nicht frei in A vor, so $X\ Abl\ A \to \forall v B$.*

4. *Wenn X Abl A und A geht durch eine zulässige gebundene Umbenennung in B über, so X Abl B.*
5. *Wenn X Abl A und $A^{v}/_{T}$ ist zulässig, so X Abl $A^{v}/_{T}$.*

3. $Ab(X) =_{def} \{A | A \in AUSD(\Sigma, V)$ *und* X *Abl* $A\}$.

Aus Punkt 3 der obigen Definition ergibt sich, daß Ab eine Abbildung

$$Ab : \mathfrak{P}(AUSD(\Sigma, V)) \to \mathfrak{P}(AUSD(\Sigma, V)),$$

also ein logischer Operator ist. Für Ab gilt das folgende Theorem.

Theorem 1.4.4.1

1. *Ab ist ein Hüllenoperator.*
2. *Ab ist kompakt.*
3. *Für jedes $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt: $Ab_{MP}(Ab(X)) \subseteq Ab(X)$.*
4. *Ab erfüllt die Ableitbarkeitseigenschaft.*
5. *Wenn $ax_{\to} \subseteq X$, so erfüllt Ab für X die schwache Deduktionseigenschaft.*
6. *Wenn $ax_{\to} \subseteq X$, so gilt: $Ab(Gen(X)) \subseteq Ab(X)$.*
7. *$Ab(\emptyset) = \emptyset$.*

Beweis

ad 1:

Diese Behauptung wird nach dem Muster von Theorem 1.4.3.1, Punkt 1 bewiesen. Wir führen den analogen Beweis für Ab deshalb nicht vor.

ad 2:

Ebenfalls analog zu Beweis von Behauptung 2 von Theorem 1.4.3.1.

ad 3:

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem Fakt, daß der Modus Ponens eine Schlußregel von Ab ist.

ad 4:

Diese Behauptung gilt, weil Ab ein Hüllenoperator ist, der den Modus Ponens erfüllt (Lemma 1.3.3.6, Richtung $\Rightarrow$).

Beim Beweis der beiden folgenden Behauptungen 5 und 6 verwenden wir außer Lemma 1.4.3.2 noch das folgende Lemma, für dessen Beweis wir auf Asser I, Seite 77 – 85, und Asser II verweisen.

Lemma 1.4.4.2
Wenn $ax_{\to} \subseteq X$, so gilt:

1. X *Abl* $\forall v A \to A$.
2. X *Abl*$_{MP}$ $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.
3. *Wenn X Abl A, so X Abl $\forall v A$.*

4. *Wenn* $X\ Abl\ A \to (B \to C)$ *und weder in* A *noch in* B *kommt* v *(frei) vor, so* $X\ Abl\ A \to (B \to \forall v C)$.

ad 5:

Um diese Behauptung zu zeigen, beweisen wir durch Induktion über die Ableitungsstufe k des (prädikatenlogischen!) Ableitungsbegriffs *Abl*:

(1) Wenn $ax_{\to} \subseteq X$ und $X \cup \{A\}\ Abl^k\ B$, so $X\ Abl\ Gen(A) \to B$.

Anfangsschritt: $k = 0$.

Aus $X \cup \{A\}\ Abl^0\ B$ folgt $B \in X \cup \{A\}$.

Fall 1: $B \in X$.

Dann gilt nach Einbettung, daß

$$X\ Abl\ B,$$

ferner haben wir wegen $ax_{\to} \subseteq X$

$$X\ Abl\ B \to (Gen(A) \to B),$$

also

$$X\ Abl\ Gen(A) \to B.$$

Fall 2: $B = A$

Somit haben wir zu zeigen

$$X\ Abl\ Gen(A) \to A.$$

Das folgt aber mit Lemma 1.4.4.2, Aussage 1.

Induktionsschritt: Es sei $X \cup \{A\}\ Abl^{k+1}\ B$.

Fall 1: $X \cup \{A\}\ Abl^k\ B$.

In diesem Fall folgt die Behauptung

$$X\ Abl\ Gen(A) \to B$$

unmittelbar aus (1), aufgefaßt als Induktionsvoraussetzung.

Fall 2: Es gibt ein $C \in AUSD(\Sigma, V)$, so daß

(2) $$X \cup \{A\}\ Abl^k\ C$$

und

(3) $$X \cup \{A\}\ Abl^k\ C \to B.$$

Aus (2) und (3) folgt mit (1) als Induktionsvoraussetzung, daß

(4) $$X\ Abl\ Gen(A) \to C$$

und

(5) $$X\ Abl\ Gen(A) \to (C \to B).$$

Wenden wir auf (5) den FREGEschen Kettenschluß (Lemma 1.4.3.2) an, erhalten wir mit (4) die Behauptung

$$X\ Abl\ Gen(A) \to B.$$

Fall 3: B hat die Form $B = \forall vC \to D$ und es gilt

(6) $$X \cup \{A\}\ Abl^k\ C \to D.$$

Daraus folgt mit (1) als Induktionsvoraussetzung, daß

(7) $$X\ Abl\ Gen(A) \to (C \to D),$$

also folgt aus (7) mit Lemma 1.4.4.2, Aussage 2 (Prämissenvertauschung), daß

(8) $$X\ Abl\ C \to (Gen(A) \to D),$$

also mit der Schlußregel der vorderen Generalisierung und nachfolgend mit Prämissenvertauschung

$$X\ Abl\ Gen(A) \to (\forall vC \to D).$$

Fall 4: B hat die Form $B = C \to \forall vD$ und v kommt nicht (frei) in C vor und es gilt

(9) $$X \cup \{A\}\ Abl^k\ C \to D.$$

Daraus folgt mit (1) als Induktionsvoraussetzung, daß

(10) $$X\ Abl\ Gen(A) \to (C \to D).$$

Weil v in C nicht frei vorkommt und in $Gen(A)$ alle Variablen gebunden sind (also v nicht frei in $Gen(A)$ vorkommt), erhalten wir aus (10) mit Lemma 1.4.4.2 (Aussage 4), daß

$$X\ Abl\ Gen(A) \to (C \to \forall vD).$$

Fall 5: Es gibt ein C, so daß B durch eine zulässige gebundene Umbenennung aus C entsteht und es gilt

(11) $$X \cup \{A\}\ Abl^k\ C.$$

Aus (11) folgt dann mit (1) als Induktionsvoraussetzung, daß

(12) $$X\ Abl\ Gen(A) \to C.$$

Nun kann aber $Gen(A) \to C$ durch diejenige zulässige gebundene Umbenennung, die C in B überführte, in $Gen(A) \to B$ umgeformt werden, also folgt aus (12) mit der Regel der gebundenen Umbenennung, daß

(13) $$X\ Abl\ Gen(A) \to B.$$

Fall 6: B hat die Form $B = C\ {}^{v}/_{T}$, die durch $C\ {}^{v}/_{T}$ in C beschriebene Termeinsetzung ist zulässig und es gilt

(14) $$X \cup \{A\}\ Abl^k\ C.$$

Aus (14) folgt mit (1) als Induktionsvoraussetzung, daß

(15) $$X\ Abl\ Gen(A) \to C.$$

Nun wenden wir auf $Gen(A) \to C$ die Termeinsetzung ${}^{v}/_{T}$ an. Da in $Gen(A)$ *alle* Individuenvariablen gebunden sind, also in $Gen(A)$ die Variable v nicht frei vorkommt, ist

(16) die Termeinsetzung $(Gen(A) \to C)\ {}^{v}/_{T}$ zulässig

und es gilt

$$(17) \qquad (Gen(A) \to C)^{v}/_{T} = Gen(A) \to C^{v}/_{T}.$$

Somit folgt aus (15) wegen (16)

$$(18) \qquad X \; Abl \; (Gen(A) \to C)^{v}/_{T},$$

also mit (17) haben wir schließlich

$$X \; Abl \; Gen(A) \to C^{v}/_{T}.$$

Damit ist die Behauptung 5 von Theorem 1.4.4.1 bewiesen.

ad 6:

Wir haben zu zeigen, daß

$$Ab(Gen(X)) \subseteqq Ab(X).$$

Gegeben sei $A \in X$. Dann folgt mit der Reflexivität von Ab, daß

$$X \; Abl \; A,$$

also mit Lemma 1.4.4.2, daß

$$X \; Abl \; Gen(A),$$

also folgt

$$Gen(X) \subseteq Ab(X),$$

also, mit Monotonie für Ab, gilt dann

$$Ab(Gen(X)) \subseteq Ab(Ab(X)),$$

also mit der Abgeschlossenheit für Ab folgt schließlich

$$Ab(Gen(X)) \subseteq Ab(X).$$

ad 7: Die Gleichung $Ab(\phi) = \phi$ gilt trivial.

■

1.4.5 Der Beweisbarkeitsbegriff

Der letzte Schritt bei der Einführung des „regel-basierten Schließens“ ist der nachfolgend definierte Beweisbarkeitsbegriff, der unmittelbar zur syntaktischen Charakterisierung des semantischen Folgerns, also für gegebenes X zur syntaktischen Charakterisierung der Menge

$$Cons(X)$$

verwendet wird.

Dabei steht die folgende Motivation im Hintergrund: X ist das Axiomensystem einer mathematischen Theorie, etwa das Axiomensystem der Gruppentheorie oder der Theorie der Abelschen Gruppen. Auch kann man sich X, in der Terminologie der Informatik, als eine Spezifikation vorstellen, durch die eine Klasse von Datenstrukturen festgelegt wird.

Man strebt nun an, aus den Ausdrücken von X (die jetzt als — mathematische — Axiome aufgefaßt werden) mit Hilfe von bestimmten (prädikatenlogischen) Schlußregeln unter Verwendung der (in Abschnitt 1.4.2 eingeführten) prädikatenlogischen Axiome genau die Ausdrücke aus $Cons(X)$ abzuleiten (zu „beweisen").

Diesem Ziel wird, wie wir in diesem und in Abschnitt 1.5.1 und 1.5.2 zeigen werden, die folgende Definition gerecht.

Definition 1.4.5.1

1. *Aus X ist A beweisbar (kurz: $X\ Bew\ A$)* $=_{def}$ $ax_{\Sigma,V} \cup X\ Abl\ A$.
2. $Be(X) =_{def} Ab(ax_{\Sigma,V} \cup X)$.

Für den so eingeführten Beweisbarkeitsbegriff Bew bzw. Beweisbarkeitsoperator gilt das folgende Theorem.

Theorem 1.4.5.1

1. *Be ist ein Hüllenoperator.*
2. *Be ist kompakt.*
3. *Für jedes $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt: $Ab_{MP}(Be(X)) \subseteq Be(X)$.*
4. *Be erfüllt die Ableitbarkeitseigenschaft.*
5. *Be erfüllt die schwache Deduktionseigenschaft.*
6. *Be erfüllt die Generalisierungsinvarianz.*
7. $Be(\emptyset) = Ab(ax_{\Sigma,V})$.

Beweis
Die Behauptungen 1 bis 6 folgen aus den entsprechenden Behauptungen von Theorem 1.4.4.1 durch einige sehr einfache Rechnungen. Behauptung 7 gilt trivial auf Grund der Definition von Be. ■

Man könnte nun versuchen, die Gleichung

$$Cons(X) = Be(X)$$

für beliebiges $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ dadurch zu beweisen, daß man auf $Cons$ und Be das Charakterisierungstheorem (Theorem 1.3.3.1, Version 2) anwendet.

Geht man die für $Cons$ und Be zu beweisenden Voraussetzungen des Theorems durch, stellt man fest, daß auf Grund der Theoreme 1.3.2.4 und 1.4.5.1 noch gezeigt werden muß

(1) $Cons$ ist kompakt

und

(2) $Cons(\emptyset) = Be(\emptyset)$, d. h. $ag = Ab(ax_{\Sigma,V})$.

Nun ist aber (1) gerade jene Eigenschaft von $Cons$, deren Beweis wir bereits früher als schwierig gekennzeichnet haben und die mit dem Endlichkeitssatz für Modelle äquivalent ist. Hätten wir die Gleichung

$$Cons(X) = Be(X)$$

für beliebige $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ *bereits gezeigt*, so könnten wir aus der (*bewiesenen*) Kompaktheit von *Be* unmittelbar auf die Kompaktheit von *Cons* schließen (wobei wir darauf hinweisen, daß wir diesen Weg im folgenden anstreben).

Aussage (2) ist aber das GÖDELsche Axiomatisierungstheorem, wobei die Inklusion

$$ag \subseteq Ab(ax_{\Sigma,V})$$

als GÖDELscher Vollständigkeitssatz bezeichnet wird, wobei dieser Satz somit besagt, daß jeder „logisch gültige“ Ausdruck, d. h. der in jeder Interpretation allgemeingültig ist, aus dem „logischen Axiomensystem“ mit Hilfe von Ab (prädikatenlogisch) ableitbar ist (siehe [9]).

1.5 Eine syntaktische Charakterisierung des semantischen Folgerns. Der Hauptsatz der Prädikatenlogik der ersten Stufe. Folgerungen aus dem Hauptsatz

1.5.1 Eine syntaktische Charakterisierung des semantischen Folgerns

Im vorliegenden Unterabschnitt 1.5.1 wird der Hauptsatz zunächst noch einmal formuliert und sodann der erste (einfachere) Teil — die *semantische Korrektheit* — bewiesen. Anschließend beweisen wir (in den Unterabschnitten 1.5.2 und 1.5.3) den zweiten Teil des Hauptsatzes, die *semantische Vollständigkeit*. Dabei wird nicht der in Unterabschnitt 1.4.5 kurz angedeutete „klassische" Weg (also direkter Beweis der Kompaktheit für *Cons* und Beweis des GÖDELschen Axiomatisierungstheorems nach dem Muster des originalen GÖDELschen Beweises) beschritten, sondern eine von LEON HENKIN in seiner Dissertation [10] entwickelte „Beweisphilosophie" verwendet und verbessert.

Die HENKINsche Beweisidee ist algebraischer „Natur". Sie besteht darin, Ideale in Booleschen Algebren zu maximalen Idealen „aufzublasen", dann diese maximalen Ideale als Primideale nachzuweisen und schließlich auf der Grundlage eines solchen Primideals ein Modell einer Menge X von Ausdrücken zu konstruieren. Es sei noch bemerkt, daß in vielen logischen Publikationen anstelle des Wortes „Ideal" die Bezeichnung „Filter" und anstelle von „maximalen Idealen" die Bezeichnung „Ultrafilter" verwendet wird.

Da die algebraische Fassung des Henkinschen Vollständigkeitsbeweises eine Reihe von Vorbereitungen aus der Theorie Boolescher Algebren erfordert, wählen wir im folgenden eine Darstellung dieses Beweises, die von der oben erwähnten algebraischen „Einkleidung" Abstand nimmt und die allein die relevanten Begriffsbildungen aus der Syntax und Semantik des betrachteten Prädikatenkalküls verwendet.

In einem weiteren Unterabschnitt 1.5.4 werden Folgerungen aus dem Hauptsatz gezogen, nämlich die Kompaktheit für *Cons*, der Endlichkeitssatz für Modelle und der Satz von LÖWENHEIM/SKOLEM, wobei schon hier erwähnt werden soll, daß der Satz von LÖWENHEIM/SKOLEM wichtige philosophische und wissenschaftliche Diskussionen und Interpretationen (z. B. hinsichtlich mengentheoretischer Standard- und Nicht-Standard-Modelle) herausfordert.

Einige mit dem Satz von LÖWENHEIM/SKOLEM verwandte Theoreme beschließen den Unterabschnitt 1.5.4 und damit den gesamten Abschnitt 1.5.

Theorem 1.5.1.1 (Hauptsatz)
Für beliebiges $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$Cons(X) = Be(X).$$

Wir beweisen als erstes die **semantische Korrektheit**, d. h. den folgenden Satz.

Theorem 1.5.1.2 (Semantische Korrektheit)
Für beliebiges $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$Be(X) \subseteq Cons(X).$$

Beweis
Um diese Inklusion zu beweisen, genügt es offensichtlich, durch Induktion über die Ableitungsstufe k von Abl zu zeigen, daß gilt:

(1) $$\text{Wenn } ax_{\Sigma,V} \cup X \; Abl^k \; A, \text{ so } X \Vdash A.$$

Anfangsschritt: $k = 0$.

Aus der Voraussetzung

$$ax_{\Sigma,V} \cup X \; Abl^0 \; A$$

folgt

$$A \in ax_{\Sigma,V} \cup X,$$

also gilt

$$X \Vdash A,$$

weil nach Theorem 1.4.2.1 und der Monotonie von $Cons$ sowie der Reflexivität von $Cons$

$$ax_{\Sigma,V} \cup X \subseteq Cons(X)$$

gilt.

Induktionsschritt: Aus der Voraussetzung

$$ax_{\Sigma,V} \cup X \; Abl^{k+1} \; A$$

erhalten wir

Fall 1:

$$ax_{\Sigma,V} \cup X \; Abl^k \; A$$

und

Fall 2: A ist durch Anwendung einer der fünf Schlußregeln, die zur Definition von Abl gedient haben, aus k-stufig ableitbaren Ausdrücken entstanden.

Fall 1 wird offenbar durch Anwendung von (1), als Induktionsvoraussetzung genommen, erledigt.

Fall 2 führt zu fünf Unterfällen (entsprechend den fünf Schlußregeln), wobei in jedem einzelnen dieser Unterfälle der Beweis darauf hinausläuft, entsprechend die Aussagen 1 bis 5 des folgenden Lemmas anzuwenden, wobei $\mathfrak{I}$ eine Σ-Interpretation ist:

Lemma 1.5.1.3

1. *Wenn* $\mathfrak{I} \models A$ *und* $\mathfrak{I} \models A \to B$, *so* $\mathfrak{I} \models B$.
2. *Wenn* $\mathfrak{I} \models A \to B$, *so* $\mathfrak{I} \models \forall v A \to B$.
3. *Wenn* $\mathfrak{I} \models A \to B$ *und* v *kommt nicht frei in* A *vor, so* $\mathfrak{I} \models A \to \forall v B$.
4. *Wenn* $\mathfrak{I} \models A$ *und* A *geht durch eine zulässige gebundene Umbenennung in* B *über, so* $\mathfrak{I} \models B$.
5. *Wenn* $\mathfrak{I} \models A$ *und* $A\,{}^{v}/_{T}$ *ist eine zulässige Termeinsetzung, so* $\mathfrak{I} \models A\,{}^{v}/_{T}$.

Beweis

1. Die Behauptungen 1 bis 3 dieses Lemmas können unmittelbar durch Rückgang auf die Definitionen von $\mathfrak{I} \models A$ und $\sigma, \mathfrak{I} \models A$ bewiesen werden.

2. Behauptung 4 folgt aus Lemma 1.2.6.2.

3. Ein Beweis von Behauptung 5 macht mehr Mühe, weil er sich nicht durch Rückgang auf die betreffenden Definitionen führen läßt.

   Behauptung 5 ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Lemma, wobei zu bemerken ist, daß dieses Lemma im folgenden an mehreren Stellen eine wichtige Anwendung findet, z. B. im Vollständigkeitsbeweis beim Beweis von Lemma 1.5.3.1, beim Skolemisierungsverfahren beim Beweis von Lemma _____ und bei den Vorbereitungen zum Beweis des Satzes von HERBRAND in verallgemeinerter Form als Lemma **??**.

■

Zur Formulierung dieses Lemmas erinnern wir daran, wie die Bezeichnung $\sigma \langle v := \xi \rangle$ definiert ist. Gegeben sei eine beliebige Σ-Interpretation

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

mit

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha].$$

Für $s \in SO$, $v \in V_s$, $\xi \in \Delta_s$ und einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ hatten wir definiert, wobei x eine beliebige Individuenvariable aus V ist,

$$\sigma \langle v := \xi \rangle (x) =_{def} \begin{cases} \sigma(x), \text{ falls } x \neq v \\ \xi \quad\;, \text{ falls } x = v. \end{cases}$$

Es seien nun ein Term $T \in TERM_s(\Sigma, V)$ sowie ein beliebiger Term $U \in TERM_s(\Sigma, V)$ und ein beliebiger Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$ gegeben. Außerdem sei $v \in V_s$ und $\xi \in \Delta_s$.

Wie sich unmittelbar aus der folgenden Formulierung des Lemmas ergibt, besteht seine wesentliche Aussage darin, daß eine „semantische“ Abänderung eines Zustands σ zu $\sigma \langle v := \xi \rangle$ „syntaktisch“ durch eine Termeinsetzung T für die Individuenvariable v erfaßt werden kann, falls sich das Element ξ in der Form $\xi = EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$ darstellen läßt.

Lemma 1.5.1.4
Wenn $\xi = EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$, so gilt:

1. $EL(U, \mathfrak{I}, \sigma \langle v := \xi \rangle) = EL(U\,{}^{v}/_{T}, \mathfrak{I}, \sigma)$

2. $\sigma \langle v := \xi \rangle, \mathfrak{I} \models B$ *genau dann, wenn* $\sigma, \mathfrak{I} \models B'\,{}^{v}/_{T}$.

Beweis
ad 1:
Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über die Erzeugungsstufe k des Terms U.

Anfangsschritt:

Fall 1: U ist eine Individuenvariable, etwa $U = x$.

Fall 1.1: $x \neq v$.

Dann ist

$$EL(U, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle) = \sigma\langle v := \xi\rangle(x) = \sigma(x). \tag{2}$$

Ferner gilt in diesem Fall

$$x\,{}^{v}/_{T} = x,$$

also

$$EL(U\,{}^{v}/_{T}, \mathfrak{I}, \sigma) = EL(x, \mathfrak{I}, \sigma) = \sigma(x), \tag{3}$$

aus (2) und (3) folgt aber die Behauptung.

Fall 1.2: $x = v$. Dann ist

$$EL(U, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle) = \sigma\langle v := \xi\rangle(v) = \xi. \tag{4}$$

Ferner gilt in diesem Fall

$$x\,{}^{v}/_{T} = T,$$

also

$$EL(U\,{}^{v}/_{T}, \mathfrak{I}, \sigma) = EL(T, \mathfrak{I}, \sigma). \tag{5}$$

Mit der Voraussetzung

$$\xi = EL(T, \mathfrak{I}, \sigma)$$

folgt aus (4) und (5) ebenfalls die Behauptung.

Fall 2: U ist eine Individuenkonstante, etwa $U = c$.

Dann folgt

$$EL(U, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle) = \Phi_c. \tag{6}$$

Ferner haben wir in diesem Fall

$$U\,{}^{v}/_{T} = U,$$

also

$$EL(U\,{}^{v}/_{T}, \mathfrak{I}, \sigma) = EL(U, \mathfrak{I}, \sigma) = \Phi_c. \tag{7}$$

also folgt aus (6) und (7) die Behauptung.

Induktionsschritt:

Der Term U habe die Form

$$U = f(U_1, \ldots, U_n)$$

mit $n \geq 1$. Dann gilt nach Definition der Einsetzungsprozedur ${}^{v}/_{T}$, daß

$$U\,{}^{v}/_{T} = f(U_1\,{}^{v}/_{T}, \ldots, U_n\,{}^{v}/_{T}).$$

Somit können wir schließen

$$\begin{aligned} &EL(U, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle) \\ &= \Phi_f(EL(U_1, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle), \ldots, EL(U_n, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle)) \end{aligned}$$

nach Definition von EL; also

$$= \Phi_f(EL(U_1\,{}^{v}/_{T}, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL(U_n\,{}^{v}/_{T}, \mathfrak{I}, \sigma))$$

nach Induktionsvoraussetzung für die Terme $U_1, \ldots, U_n$; also

$$= EL(f({U_1}^v/_T, \ldots, {U_n}^v/_T), \mathfrak{I}, \sigma)$$

nach Definition von EL; also nach

$$= EL({U}^v/_T, \mathfrak{I}, \sigma).$$

ad 2:
Diese Behauptung beweisen wir über die Erzeugungsstufe k des Ausdrucks B.

Anfangsschritt: $k = 0$

Fall 1: B ist ein nullstelliges Prädikatensymbol, etwa $B = P$.
Nach Definition von $\models$ haben wir in diesem Fall

(8) $$\sigma\langle v := \xi\rangle, \mathfrak{I} \models P \text{ genau dann, wenn } \Pi_P = \{\emptyset\}.$$

Ferner gilt in diesem Fall

$${B'}^v/_T = P,$$

also folgt

$$\sigma, \mathfrak{I} \models {B'}^v/_T$$

also gilt

(9) $$\sigma, \mathfrak{I} \models {B'}^v/_T \text{ genau dann, wenn } \Pi_P = \{\emptyset\}.$$

Aus (8) und (9) folgt aber die Behauptung.

Fall 2: B hat die Form $PT_1 \ldots T_n$ mit $n \geq 1$.
Dann gilt nach Definition von $\models$

$$\sigma\langle v := \xi\rangle, \mathfrak{I} \models PT_1 \ldots T_n$$

genau dann, wenn

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}, \sigma\langle v := \xi\rangle)] \in \Pi_P,$$

also nach Aussage 1 dieses Lemmas genau dann, wenn

$$[EL({T_1}^v/_T, \mathfrak{I}, \sigma), \ldots, EL({T_n}^v/_T, \mathfrak{I}, \sigma)] \in \Pi_P,$$

also nach Definition von $\models$ genau dann, wenn

$$\sigma, \mathfrak{I} \models {PT_1}^v/_T \ldots {T_n}^v/_T,$$

also, weil

$$(PT_1 \ldots T_n)^v/_T = {PT_1}^v/_T \ldots {T_n}^v/_T$$

gilt, genau dann, wenn

$$\sigma, \mathfrak{I} \models (PT_1 \ldots T_n)^v/_T.$$

Fall 3: B hat die Form $T_1 \overset{=}{s} T_2$.
Dieser Fall wird analog zum Fall 2 bewiesen, wobei die Beziehung

$$(T_1 \overset{=}{s} T_2)^v/_T = {T_1}^v/_T \overset{=}{s} {T_2}^v/_T$$

benutzt wird.

Induktionsschritt:

Fall 1: B hat die Form $\neg C$.

Beweis wie im Fall 2 des Anfangsschrittes, wobei die Beziehung

$$(\neg C)^{\,v}/_T = \neg(C^{\,v}/_T)$$

benutzt wird.

Fall 2: B hat die Form $(C \to D)$.

Beweis wie im Fall 2 des Anfangsschrittes, wobei die Beziehung

$$(C \to D)^{\,v}/_T = (C^{\,v}/_T) \to (D^{\,v}/_T)$$

benutzt wird.

Fall 3: B hat die Form $\forall x C$.

Fall 3.1: $x \neq v$, $x \in V_s$.

In diesem Fall gilt nach Definition von $\models$

$$\sigma\,\langle v := \xi\rangle, \mathfrak{I} \models \forall x C$$

genau dann, wenn für *alle* $\eta \in \Delta_s$ gilt:

$$(\sigma\,\langle v := \xi\rangle)\,\langle x := \eta\rangle, \mathfrak{I} \models C;$$

also, weil wegen $x \neq v$

$$(\sigma\,\langle v := \xi\rangle)\,\langle x := \eta\rangle = (\sigma\,\langle x := \eta\rangle)\,\langle v := \xi\rangle$$

gilt, genau dann, wenn für *alle* $\eta \in \Delta_s$ gilt:

$$(\sigma\,\langle x := \eta\rangle)\,\langle v := \xi\rangle, \mathfrak{I} \models C,$$

also für eine Individuenvariable $y \in V_s$ mit $y \neq v$, die weder in C noch in T vorkommt (weil V_s unendlich ist, gibt es stets eine solche Variable), genau dann, wenn für alle $\eta \in \Delta_s$ gilt:

$$(\sigma\,\langle y := \eta\rangle)\,\langle v := \xi\rangle, \mathfrak{I} \models C^{\,x}/_y,$$

also nach Induktionsvoraussetzung, genau dann, wenn für alle $\eta \in \Delta_s$ gilt:

$$\sigma\,\langle y := \eta\rangle, \mathfrak{I} \models (C^{\,x}/_y)^{\,v}/_T,$$

also nach Definition von $\models$ genau dann, wenn

$$\sigma, \mathfrak{I} \models \forall y((C^{\,x}/_y)^{\,v}/_T),$$

also, weil nach Wahl der Variablen y die Gleichung

$$(\forall y(C^{\,x}/_y))^{\,v}/_T = \forall y((C^{\,x}/_y)^{\,v}/_T)$$

gilt, genau dann, wenn

$$\sigma, \mathfrak{I} \models (\forall y(C^{\,x}/_y))^{\,v}/_T.$$

Fall 3.2: $x = v$.

Diesen Fall führen wir auf den Fall 3.1 zurück, indem wir in B die gebundene Umbenennung

$$\forall y C^{\,x}/_y$$

durchführen, wobei y eine Individuenvariable ist, die in C nicht vorkommt und die verschieden von v ist, die jedoch dieselbe Sorte wie v hat. Die Reduktion auf Fall 3.1 ist deshalb möglich, weil für einen beliebigen $\mathfrak{I}$-Zustand σ' stets gilt:

$$\sigma', \mathfrak{I} \models \forall x C \text{ genau dann, wenn } \sigma', \mathfrak{I} \models \forall y C^{\,x}/_y.$$

Damit ist Lemma 1.5.1.4 vollständig bewiesen. ■

1.5.2 Vorbereitungen für den Beweis der semantischen Vollständigkeit

Wir haben noch die Umkehrung von Theorem 1.5.1.2 zu zeigen, also den folgenden Satz.

Theorem 1.5.2.1 (Semantische Vollständigkeit)
Für beliebiges $X \subseteqq AUSD(\Sigma, V)$ *gilt:*

$$Cons(X) \subseteqq Be(X)$$

Beweis
Als erstes reduzieren wir diesen Beweis in zwei Schritten auf einen Spezialfall, der dem späteren Beweis angepaßt ist.

Bevor wir diese Reduktionsschritte ausführen, formulieren und beweisen wir das folgende Lemma, von dem Aussage 1 unmittelbar beim zweiten Reduktionsschritt gebraucht wird (während Aussage 2 nur der Zusatzinformation dient).

Lemma 1.5.2.2

1. $Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})) \subseteq Be(X)$.
2. *Wenn* X *allein aus Aussagen besteht, so* $Be(X) \subseteq Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V}))$.

Beweis
ad 1:
Nach Theorem 1.4.5.1 ist Be einbettend, d. h. wir haben

$$X \subseteq Be(X), \tag{10}$$

ferner ist Be monoton und erfüllt Behauptung 7 dieses Theorems, also gilt

$$Ab(ax_{\Sigma,V}) \subseteq Be(X), \tag{11}$$

somit folgt aus (10) und (11) die Behauptung

$$X \cup Ab(ax_{\Sigma,V}) \subseteq Be(X),$$

also gilt wegen der Monotonie von Ab_{MP} (siehe Theorem 1.4.3.1)

$$Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})) \subseteq Ab_{MP}(Be(X)),$$

also, weil $Be(X)$ abgeschlossen ist gegenüber Ab_{MP} (siehe Theorem 1.4.5.1, Behauptung 3), erhalten wir schließlich

$$Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})) \subseteq Be(X).$$

ad 2:
Unter der Voraussetzung, daß X allein aus Aussagen besteht, haben wir

$$Be(X) \subseteq Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})) \tag{12}$$

zu beweisen.

Dazu sei

$$A \in Be(X). \tag{13}$$

Wir wenden nun Theorem 1.4.5.1 mehrmals wie folgt an.

Aus (13) erhalten wir mit dem Endlichkeitssatz für Be, daß

(14) es eine endliche Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ gibt, so daß $A \in Be(X_{fin})$.

Es sei nun $X_{fin} = \{B_1, \ldots, B_n\}$, wobei wir wegen der Monotonie von Be voraussetzen dürfen, daß $n \geq 1$. Dann folgt mit der schwachen Deduktionseigenschaft für Be, daß

$$(15) \qquad (B_1 \to (\cdots \to (B_n \to A)\cdots)) \in Be(\emptyset),$$

wobei wir darauf verweisen, daß die $B_1, \ldots, B_n$ sämtlich Aussagen sind, und für eine beliebige Aussage C offensichtlich

$$Gen(C) = C$$

gilt.

Aus (15) folgt dann mit der Behauptung 7 von Theorem 1.4.5.1, daß

$$(B_1 \to (\cdots \to (B_n \to A)\cdots)) \in Ab(ax_{\Sigma,V}),$$

also mit Einbettung von Ab_{MP}, daß

$$(B_1 \to (\cdots \to (B_n \to A)\cdots)) \in Ab_{MP}(Ab(ax_{\Sigma,V})),$$

also mit der Ableitbarkeitseigenschaft für Ab_{MP}, daß

$$A \in Ab_{MP}(X_{fin} \cup Ab(ax_{\Sigma,V})),$$

also mit der Monotonie für Ab_{MP}

$$A \in Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})),$$

somit gilt (12).

■

Reduktionsschritt 1
Nach Theorem 1.3.2.4 gilt für *Cons* die Generalisierungsinvarianz, d. h. wir haben

$$Cons(X) = Cons(Gen(X)).$$

Reduktionsschritt 2
Aus Lemma 1.5.2.2 folgt:

Wenn X allein aus Aussagen besteht, so gilt

$$Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})) = Be(X).$$

Zum Beweis von Theorem 1.5.2.1 genügt es nach Ausführung der obigen zwei Reduktionsschritte zu zeigen:

(16) Wenn X allein aus Aussagen besteht, so $Cons(X) \subseteqq Ab_{MP}(X \cup Ab(ax_{\Sigma,V}))$.

Anmerkung:
Bei einer genauen Analyse dieser Reduktion stellt man fest, daß man dazu nur benötigt:

1. die Inklusion $Cons(X) \subseteq Cons(Gen(X))$ und
2. von Lemma 1.5.2.2 die Behauptung 1, die sogar für beliebige Mengen X gilt.

Wir kommen nun zum Vollständigkeitsbeweis in der reduzierten Form.

Um diesen Beweis in einer „glatten" und „schönen" Form durchführen zu können, führen wir zwei neue, zusätzliche Voraussetzungen an die Syntax ein.

Zusatzvoraussetzung 1:
Die Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

hat eine höchstens abzählbar unendliche Mächtigkeit, d. h. jede der Mengen SO, FS und PS enthält höchstens abzählbar unendlich viele Elemente.

Zusatzvoraussetzung 2:
Für jede Sorte $s \in SO$ besteht die Menge V_s der Individuenvariablen der Sorte s aus *genau* abzählbar unendlich vielen Elementen.

Feststellung
Aus diesen beiden Voraussetzungen folgt eine wichtige Feststellung, die wir im folgenden ganz wesentlich benutzen werden, nämlich daß $AUSD(\Sigma, V)$ *abzählbar unendlich* ist.

Zu den formulierten zwei Zusatzvoraussetzungen ist zu bemerken, daß sie in den Anwendungen in der Regel erfüllt sind. Sprachen, für die eine oder beide dieser Voraussetzungen nicht gelten, haben vorrangig theoretisches Interesse und sollen deshalb in dieser Vorlesung nicht betrachtet werden.

Somit wollen wir jetzt beweisen:

Theorem 1.5.2.3 (Semantische Vollständigkeit in modifizierter, reduzierter Form)
Erfüllen Σ und V die angegebenen Zusatzvoraussetzungen 1 und 2 und besteht für $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ die Menge X allein aus Aussagen, so gilt für jedes $A \in AUSD(\Sigma, V)$:

$$\textit{Wenn } X \Vdash A, \textit{ so } X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}\ A.$$

Dem eigentlichen Beweis dieses Satzes schicken wir das folgende Lemma voraus, das später beim Beweis der Lemmata 1.5.2.6 und 1.5.2.7 benötigt wird. Zu diesem Lemma bemerken wir, daß wir zu seinem Beweis weder die formulierten Zusatzvoraussetzungen noch irgendwelche Bedingungen an X benötigen.

Lemma 1.5.2.4

1. *Wenn $X\ Bew\ B \to C$, so $X\ Bew\ B \to \exists v C$.*
2. *Wenn $X\ Bew\ B \to C$ und v kommt nicht frei in C vor, so $X\ Bew\ \exists v B \to C$.*
3. *$ax_{\to}\ Abl_{MP}\ B \to (B \to C) \overset{\cdot\cdot}{\to} B \to C$.*
4. *$ax_{\to}\ Abl_{MP}\ (B \to C) \overset{\cdot\cdot}{\to} (D \to B) \to (D \to C)$.*
5. *$ax_{\to} \cup ax_{\neg}\ Abl_{MP}\ \neg B \to (B \to C)$.*

6. $ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl_{MP}\ (B \rightarrow C) \rightrightarrows (\neg B \rightarrow C) \rightarrow C$.

7. $ax_{\rightarrow}\ Abl_{MP}\ (B \rightarrow D) \rightrightarrows ((B \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow D$.

8. $ax_{\rightarrow} \cup ax_{\neg}\ Abl\ (\forall v B \rightarrow C) \rightarrow \exists v'(B\,{}^{v}/_{v'} \rightarrow C)$, *falls* v *und* v' *dieselbe Sorte haben und* v' *weder in* B *noch in* C *vorkommt.*

Beweis
Der Beweis dieses Lemmas wird nicht durchgeführt, sondern dem Leser als Übung gestellt. Siehe auch [2]. ■

Wir wollen nun Theorem 1.5.2.3 beweisen. Allerdings wird dieses Theorem nicht direkt bewiesen, sondern seine Kontraposition, die wir der Deutlichkeit wegen im folgenden explizit formulieren.

Theorem 1.5.2.5
(Semantische Vollständigkeit in modifizierter, reduzierter Form, kontraponiert)
Wenn

1. Σ *und* V *die angegebenen Zusatzvoraussetzungen 1 und 2 erfüllen und*

2. *die Menge* $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ *allein aus Aussagen besteht und*

3. *nicht* $X \cup Ab\,(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}\ A$

so existieren eine Σ*-Interpretation* $\mathfrak{I}$ *und ein* $\mathfrak{I}$*-Zustand* σ*, so daß*

1. $\mathfrak{I} \models X$ *und*

2. *nicht* $\sigma, \mathfrak{I} \models A$.

Beweis
Mit der angegebenen Formulierung von Theorem 1.5.2.5 haben wir das mit dem Beweis anzustrebende Ziel klar vor Augen: Die Voraussetzungen sind „rein" syntaktischer Natur; so besagt Voraussetzung 3, daß ein gegebener Ausdruck A aus der Menge $X \cup Ab\,(ax_{\Sigma,V})$ nicht mit dem Modus Ponens ableitbar ist. Die Behauptungen 1 und 2 des Theorems haben aber einen „semantischen" Charakter. Es ist die Existenz einer Interpretation $\mathfrak{I}$ zu zeigen, so daß $\mathfrak{I}$ Modell der Menge X ist; ferner ist ein $\mathfrak{I}$-Zustand σ zu konstruieren, so daß $\sigma, \mathfrak{I}$ den Ausdruck A nicht erfüllen.

Angesichts der Fülle von möglichen Interpretationen und Zuständen („semantischer Sumpf") steht man zunächst hilflos vor dieser Aufgabe. Der Ausweg besteht nun darin, daß man — wenn man sich an das klassische Vorbild von Münchhausen erinnert — sich einen „syntaktischen Zopf" verschafft, an dem man sich aus dem „semantischen Sumpf" aller möglichen Interpretationen zieht, d. h. genauer, mit dem man eine geeignete Interpretation konstruiert. Die entscheidende Idee dabei ist, daß die semantischen Objekte „Individuen" und „Individuenbereiche" als „rein syntaktische Objekte" gewählt werden, nämlich als Terme und Mengen von Termen. Mit diesem Ansatzpunkt sind alle weiteren Schritte der Konstruktion der gewünschten Interpretation festgelegt, nämlich die Funktionssymbole werden durch „sich selbst" interpretiert, d. h. sie definieren Funktionen entsprechender Arität im Bereich von Termmengen, und die Prädikatensymbole werden durch Mengen von n-Tupeln aus Termen interpretiert.

Zur Präzisierung dieser zunächst intuitiven Vorstellungen definieren wir:

Definition 1.5.2.1

1. $\mathfrak{I}$ *ist eine* ***Semi-*HERBRAND*-Interpretation*** *über* Σ *und* V
   $=_{def}$ 1.1. *Für jedes* $s \in SO$ *gilt:* $\Delta_s = TERM_s(\Sigma, V)$.
   1.2. *Für jedes* $f \in FS$ *mit* $\alpha(f) \in SO$ *gilt:* $\Phi_f = f$.
   1.3. *Für jedes* $f \in FS$ *mit* $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ *und* $n \geq 1$ *sowie für jedes* $T_1 \in TERM_{s_1}(\Sigma, V), \ldots, T_n \in TERM_{s_n}(\Sigma, V)$ *gilt:*

$$\Phi_f(T_1, \ldots, T_n) = f(T_1, \ldots, T_n).$$

2. $\mathfrak{I}$ *ist ein* ***Semi-*HERBRAND*-Modell*** *über* Σ *und* V *von* X
   $=_{def}$ 2.1. $\mathfrak{I}$ *ist eine Semi-*HERBRAND*-Interpretation über* Σ *und* V.
   2.2. $\mathfrak{I}$ *ist Modell von* X, *d. h.* $\mathfrak{I} \models X$.

Man beachte, daß für fixiertes Σ und V für eine gegebene Semi-Herbrand-Interpretation $\mathfrak{I}$ über Σ und V der „funktionale“ Teil, d. h. der Teil, der durch die Bedingungen 1.1, 1.2 und 1.3 definiert wird, eindeutig festgelegt ist. Der „logische“ Teil dagegen, d. h. die Interpretation Π_P für $P \in PS$, kann verschieden gewählt werden. Jedoch muß unterstrichen werden, daß für $P \in PS$ mit $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$ und $n \geqq 1$ Π_P stets eine (evtl. leere) Menge von n-Tupeln der Form $[T_1, \ldots, T_n]$ ist, wobei $T_1, \ldots, T_n$ Terme mit $T_1 \in TERM_{s_1}(\Sigma, V), \ldots, T_n \in TERM_{s_n}(\Sigma, V)$ sind.

Zur Wahl der Bezeichnungen „Semi-HERBRAND-Interpretation“ und „Semi-HERBRAND-Modell“ sei auf die Arbeit [12] von J. HERBRAND verwiesen, wo diese grundlegenden Ideen im Prinzip schon zu finden sind, und zwar in Formulierung und Beweis des bekannten HERBRANDschen Theorems (siehe Theorem **??**). Allerdings darf man sich beim HERBRANDschen Theorem auf Grundterme (das sind Terme, in denen keine Variablen vorkommen) beschränken, während wir in unserem Vollständigkeitsbeweis beliebige Terme zulassen müssen. Zur genaueren Analyse dieser Situation sei auf den Unterabschnitt **??** verwiesen.

Wir kommen nun zur systematischen Ausarbeitung des skizzierten Vollständigkeitsbeweises.

Auf Grund von Voraussetzung 1 unseres Theorems ist die Menge $AUSD(\Sigma, V)$ abzählbar unendlich, also können wir uns eine Aufzählung dieser Menge in der Form

$$B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots$$

vorgeben. Falls die Mengen SO, FS und PS sämtlich rekursiv aufzählbar sind, kann die obige Aufzählung ebenfalls als rekursiv gewählt werden; jedoch ist diese Eigenschaft für den folgenden Vollständigkeitsbeweis nicht erforderlich, da dieser Beweis ohnehin „nicht-konstruktiv“ ist.

Außerdem sei für jede Sorte $s \in SO$ eine Aufzählung der Individuenvariablen der Sorte s, also der Menge V_s, etwa in der Form

$$v_0^s, v_1^s, \ldots, v_k^s, \ldots$$

vorgegeben.

Ausgehend von der Menge

$$X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})$$

konstruieren wir nun eine Mengenfolge

$$X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$$

sowie eine Menge X_ω folgendermaßen:

Definition 1.5.2.2

$$X_0 \;=_{def}\; X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})$$

$$X_{k+1} \;=_{def}\; \begin{cases} X_k & , \textit{falls } X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A \\ X_k \cup \{B_k\} & , \textit{falls } \textbf{nicht } X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A \textit{ und } B_k \textbf{ nicht } \textit{mit } \exists \textit{ beginnt} \\ X_k \cup \{B_k, C\,{}^{v}/_{x}\} & , \textit{falls } \textbf{nicht } X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A \textit{ und } B_k \textit{ mit } \exists \textit{ beginnt, etwa die Form } B_k = \exists v C \textit{ mit } v \in V_s \textit{ hat und } x \textit{ in der Aufzählung von } V_s \textit{ die erste Variable ist, die in keinem Ausdruck von } X_k \cup \{B_k, A\} \setminus X_0 \textit{ vorkommt} \end{cases}$$

$$X_\omega \;=_{def}\; \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$$

Das nun folgende Lemma 1.5.2.6 bringt eine Reihe fundamentaler Eigenschaften der konstruierten Menge X_ω zum Ausdruck. Dieses Lemma wird dann sofort benutzt, um Lemma 1.5.2.7 zu beweisen, welches seinerseits die Grundlage für die Konstruktion einer Semi-HERBRAND-Interpretation $\mathfrak{I}$ und eines $\mathfrak{I}$-Zustandes σ ist, so daß die Behauptungen 1 und 2 von Theorem 1.5.2.5 gelten.

Lemma 1.5.2.6

1. $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots \subseteq X_\omega$.
2. *Für jedes* $k \geq 0$ *gilt: Nicht* $X_k\ Abl_{MP}\ A$.
3. *Nicht* $X_\omega\ Abl_{MP}\ A$.
4. $Ab_{MP}(X_\omega) \subseteq X_\omega$.
5. $A \notin X_\omega$.
6. *Für jedes* $B \in AUSD(\Sigma, V)$ *gilt:* $B \notin X_\omega$ *genau dann, wenn* $B \to A \in X_\omega$.

Beweis
ad 1:
Diese Behauptung gilt trivial auf Grund der Konstruktion der Folge

$$X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$$

sowie der Menge X_ω.

ad 2:
Diese Behauptung wird durch Induktion über k bewiesen.

Anfangsschritt: $k = 0$.
Trivial wegen der Voraussetzung

$$\text{nicht } X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}\ A$$

und auf Grund der Definition der Menge X_0.

Induktionsschritt:

Fall 1: $X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A$.
Nach Konstruktion der Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt dann

$$X_{k+1} = X_k,$$

also gilt für X_{k+1} die Induktionsbehauptung auf Grund der Induktionsvoraussetzung für X_k.

Fall 2: *Nicht* $X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A$ und B_k beginnt *nicht* mit $\exists$, d. h. *nicht* mit $\neg\forall\neg$.
Nach Konstruktion der Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt in diesem Falle

$$X_{k+1} = X_k \cup \{B_k\}.$$

Dann folgt aber die Behauptung

$$nicht\ X_{k+1}\ Abl_{MP}\ A$$

trivial aus der Voraussetzung im Fall 2.

Fall 3: *Nicht* $X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A$ und B_k beginnt mit $\exists$, d. h. es gibt eine Sorte $s \in SO$, eine Variable $v \in V_s$ und einen Ausdruck C, so daß $B_k = \exists v C$.
Nach Konstruktion der Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt in diesem Fall

$$X_{k+1} = X_k \cup \{B_k, C\,{}^{v}/_{x}\},$$

wobei x eine Individuenvariable aus V_s ist, die in keinem Ausdruck der Menge

$$X_k \cup \{B_k, A\} \setminus X_0$$

vorkommt (weil diese Menge endlich ist, gibt es auf Grund der Unendlichkeit der Menge V_s stets eine solche Variable).
Wir nehmen nun an (indirekter Beweis!), daß

$$X_k \cup \{B_k, C\,{}^{v}/_{x}\}\ Abl_{MP}\ A. \tag{17}$$

Nach Konstruktion von X_k ist die Menge $X_k \setminus X_0$ endlich, also existiert eine natürliche Zahl $n \geqq 0$ und eine (evtl. leere) Menge $\{C_1, \ldots, C_n\}$, so daß

$$X_k \setminus X_0 = \{C_1, \ldots, C_n\} \quad (n \geq 0) \tag{18}$$

gilt. Weil $ax_{\rightarrow} \subseteq X_0$, erhalten wir mit Monotonie und Deduktionseigenschaft für Ab_{MP} (Theorem 1.4.3.1) aus (17) und (18), daß

$$X_0\ Abl_{MP}\ (C_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (C_n \rightarrow (B_k \rightarrow (C\,{}^{v}/_{x} \rightarrow A))) \cdots).$$

Daraus folgt mit dem Endlichkeitssatz und der Monotonie für Ab_{MP} (Theorem 1.4.3.1), daß es eine endliche Teilmenge $X_{fin} \subseteq X_0$ gibt, so daß

$$X_{fin} \cup Ab(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}\ (C_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (C_n \rightarrow (B_k \rightarrow (C\,{}^{v}/_{x}) \rightarrow A))) \cdots). \tag{19}$$

Es sei etwa

$$X_{fin} = \{D_1, \ldots, D_m\} \quad (m \geq 0). \tag{20}$$

Dann folgt aus (19) und (20) mit der Deduktionseigenschaft für Ab_{MP}, daß

(21) $Ab(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}$
$(D_1 \to \cdots \to (D_m \to (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to (C\ ^v/_x \to A))) \cdots)) \cdots)$.

Weil aber nach Aussage 3 von Theorem 1.4.4.1

$$Ab_{MP}(Ab(ax_{\Sigma,V})) \subseteq Ab(ax_{\Sigma,V}),$$

folgt aus (21), daß

(22)
$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ (D_1 \to \cdots \to (D_m \to (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to (C\ ^v/_x \to A))) \cdots)) \cdots)$.

Aus (22) ergibt sich durch mehrmalige Anwendung der Prämissenvertauschung (siehe Aussage 2 von Lemma 1.4.4.2), daß

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ (C\ ^v/_x \to (D_1 \to \cdots \to (D_m \to (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to A)) \cdots)) \cdots)),$$

also, weil x nach Konstruktion in keinem Ausdruck der Menge $\{D_1, \ldots, D_m, C_1, \ldots, C_n, B_k, A\}$ frei vorkommt (hier wird insbesondere benutzt, daß $D_1, \ldots, D_m$ als Elemente von X Aussagen sind), mit Aussage 2 von Lemma 1.5.2.4, daß

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ (\exists x C\ ^v/_x \to (D_1 \to \cdots \to (D_m \to (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to A)) \cdots)) \cdots)).$$

Nun formen wir in dem obigen Ausdruck durch gebundene Umbenennung die Prämisse

$$\exists x C\ ^v/_x \quad \text{zu} \quad \exists v C = B_k$$

und erhalten durch mehrmalige Anwendung der Prämissenvertauschung, daß

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ (D_1 \to \cdots \to (D_m \to (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to (B_k \to A))) \cdots)) \cdots).$$

Daraus folgt aber mit Aussage 3 und Aussage 4 (mehrmalige Anwendung) von Lemma 1.5.2.4, daß

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ (D_1 \to \cdots \to (D_m \to (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to A)) \cdots)) \cdots),$$

d. h. die doppelte Prämisse B_k ist zu einer „verschmolzen“ worden. Daraus ergibt sich durch Anwendung der Einbettung und der Ableitbarkeitseigenschaft von Ab_{MP}, daß

$$X_{fin} \cup Ab(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}\ (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to A)) \cdots),$$

also wegen $X_{fin} \subseteq X$ mit Monotonie von Ab_{MP}, daß

$$X \cup Ab(ax_{\Sigma,V})\ Abl_{MP}\ (C_1 \to \cdots \to (C_n \to (B_k \to A)) \cdots),$$

also wegen (18) mit der Ableitbarkeitseigenschaft von Ab_{MP}, daß

$$X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme im Fall 3.

Damit ist Aussage 2 von Lemma 1.5.2.6 bewiesen.

ad 3:
Wir haben zu zeigen, daß

$$\text{nicht } X_\omega \; Abl_{MP} \; A.$$

Wir nehmen an (indirekter Beweis!), daß

(23) $$X_\omega \; Abl_{MP} \; A$$

gilt. Mit dem Endlichkeitssatz für Ab_{MP} (Aussage 2 von Theorem 1.4.3.1) erhalten wir aus (23), daß

(24) es eine endliche Teilmenge $X_{fin} \subseteq X$ gibt, so daß $X_{fin} \; Abl_{MP} \; A$.

Nach Konstruktion der Mengenfolge $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, insbesondere der Aussage 1 von Lemma 1.5.2.6, nämlich

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots,$$

folgt aus (24), daß

(25) es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $X_{fin} \subseteq X_k$.

Aus (24) und (25) folgt mit der Monotonie von Ab_{MP}, daß

$$X_k \; Abl_{MP} \; A.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu Aussage 2 von Lemma 1.5.2.6.

ad 4:
Wir haben zu zeigen, daß für jedes $B \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$\text{Wenn } X_\omega \; Abl_{MP} \; B, \text{ so } B \in X_\omega.$$

Es sei nun

(26) $$X_\omega \; Abl_{MP} \; B.$$

Wir nehmen ferner an (indirekter Beweis!), daß

(27) $$B \notin X_\omega.$$

Nun hat B in der anfangs gegebenen Aufzählung aller Ausdrücke eine Nummer, etwa k, d. h. wir haben $B_k = B$. Aus (27) folgt dann

(28) $$X_k \cup \{B_k\} \; Abl_{MP} \; A,$$

d. h. es gilt Fall 1 bei der Konstruktion der Menge X_{k+1}; denn würde Fall 2 oder Fall 3 gelten, hätten wir

$$B_k \in X_{k+1},$$

also

$$B \in X_\omega,$$

im Widerspruch zur Annahme (27).

Aus (28) folgt mit der Deduktionseigenschaft für Ab_{MP} (Aussage 4 von Theorem 1.4.3.1), daß

$$X_k \; Abl_{MP} \; B_k \to A,$$

also mit Monotonie von Ab_{MP} (Aussage 1 von Theorem 1.4.3.1) wegen $X_k \subseteq X_\omega$ und $B_k = B$, daß

$$X_\omega \; Abl_{MP} \; B \to A,$$

also mit (26), daß

$$X_\omega \; Abl_{MP} \; A.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu Aussage 3 von Lemma 1.5.2.6.

ad 5:
Wir haben zu zeigen, daß

$$A \notin X_\omega.$$

Dies folgt aber unmittelbar aus den Aussagen 3 und 4 von Lemma 1.5.2.6.

ad 6:
Wir haben zu zeigen, daß für jeden Ausdruck $B \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

$$B \notin X_\omega \text{ genau dann, wenn } B \to A \in X_\omega.$$

6.1 ($\Rightarrow$)
Es sei

$$B \notin X_\omega.$$

Daraus erhalten wir wie im Beweis von Aussage 4 des Lemmas 1.5.2.6, daß

$$X_\omega \; Abl_{MP} \; B \to A,$$

also folgt mit Aussage 4 dieses Lemmas, daß

$$B \to A \in X_\omega.$$

6.2 ($\Leftarrow$)
Es sei

$$B \to A \in X_\omega.$$

Wir nehmen nun an (indirekter Beweis), daß

$$B \in X_\omega,$$

also folgt mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 der Widerspruch

$$A \in X_\omega$$

zu Aussage 5 dieses Lemmas.

■

Lemma 1.5.2.7
Für jede Sorte $s \in SO$, für jede Individuenvariable $v \in V_s$ und für beliebige Ausdrücke $C, D \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

1. *$\neg C \in X_\omega$ genau dann, wenn nicht $C \in X_\omega$.*
2. *$C \to D \in X_\omega$ genau dann, wenn gilt: Wenn $C \in X_\omega$, so $D \in X_\omega$.*
3. *$\forall v C \in X_\omega$ genau dann, wenn für jedes $T \in TERM_s(\Sigma, V)$ gilt: $C'^{\,v}/_T \in X_\omega$.*

Anmerkung:
Zur Erinnerung weisen wir darauf hin, daß C' einen Ausdruck bezeichnet, der aus C durch eine zulässige gebundene Umbenennung so entsteht, daß in C' für jedes frei vorkommende v der Term T ohne Variablenkonfusion eingesetzt werden kann.

Beweis von Lemma 1.5.2.7:

ad 1:

1.1 ($\Rightarrow$): Es sei

(29) $$\neg C \in X_\omega.$$

Wir nehmen an (indirekter Beweis!), daß

(30) $$C \in X_\omega$$

gilt. Nun ist aber (Lemma 1.5.2.4, Aussage 5)

$$ax_\rightarrow \cup ax_\neg \; Abl_{MP}\; \neg C \rightarrow (C \rightarrow A),$$

also gilt nach Konstruktion von X_ω, daß

(31) $$\neg C \rightarrow (C \rightarrow A) \in X_\omega.$$

Aus (29), (30) und (31) folgt aber mit Lemma 1.5.2.6 (Aussage 4), daß

$$A \in X_\omega,$$

im Widerspruch zu Aussage 5 von Lemma 1.5.2.6.

1.2 ($\Leftarrow$): Es sei

$$C \notin X_\omega,$$

also mit Aussage 6 von Lemma 1.5.2.6, daß

(32) $$C \rightarrow A \in X_\omega.$$

Wir nehmen nun an (wiederum indirekter Beweis!), daß

$$\neg C \notin X_\omega,$$

also folgt mit Aussage 6 von Lemma 1.5.2.6, daß

(33) $$\neg C \rightarrow A \in X_\omega.$$

Nun ist aber (Lemma 1.5.2.4, Aussage 6)

$$ax_\rightarrow \cup ax_\neg \; Abl_{MP}\; (C \rightarrow A) \dashrightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A,$$

also nach Konstruktion von X_ω gilt dann

(34) $$(C \rightarrow A) \dashrightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow A \in X_\omega.$$

Aus (32), (33) und (34) folgt aber mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6, daß

$$A \in X_\omega,$$

im Widerspruch zu Aussage 5 von Lemma 1.5.2.6.

ad 2:

2.1 ($\Rightarrow$): Es sei

$$C \to D \in X_\omega.$$

Außerdem nehmen wir an, daß

$$C \in X_\omega$$

gilt. Dann folgt mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 unmittelbar, daß

$$D \in X_\omega.$$

2.2 ($\Leftarrow$):

Fall 1: $C \notin X_\omega$.

In diesem Fall folgt mit Aussage 6 von Lemma 1.5.2.6, daß

(35) $$C \to A \in X_\omega$$

gilt. Wir nehmen nun an (indirekter Beweis), daß

$$C \to D \notin X_\omega$$

gilt. Daraus folgt mit Aussage 6 von Lemma 1.5.2.6, daß

(36) $$(C \to D) \to A \in X_\omega$$

gilt. Nun liefert aber (Aussage 7 von Lemma 1.5.2.4), daß

$$ax_{\to}\, Abl_{MP}\, (C \to A) \underset{\cdot\cdot}{\to} ((C \to D) \to A) \to A,$$

also gilt nach Konstruktion von X_ω dann

(37) $$(C \to A) \underset{\cdot\cdot}{\to} ((C \to D) \to A) \to A) \in X_\omega.$$

Aus (35), (36) und (37) folgt mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6, daß

$$A \in X_\omega,$$

und das ist ein Widerspruch zu Aussage 5 von Lemma 1.5.2.6.

Fall 2: $D \in X_\omega$.

Nun ist

$$ax_{\to}\, Abl_{MP}\, D \to (C \to D),$$

also folgt nach Konstruktion der Menge X_ω, daß

$$D \to (C \to D) \in X_\omega,$$

also gilt wegen Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 im Fall 2, daß

$$C \to D \in X_\omega.$$

ad 3:

3.1 ($\Rightarrow$): Es sei

$$\forall vC \in X_\omega. \tag{38}$$

Nach Aussage 1 von Lemma 1.4.4.2 haben wir aber

$$ax_\rightarrow \; Abl \, \forall vC \rightarrow C,$$

also folgt mit den Regeln der gebundenen Umbenennung und der Termeinsetzung, daß

$$ax_\rightarrow \; Abl \, \forall vC \rightarrow C' \, {}^{v}/_{T}.$$

Nach Konstruktion von X_ω folgt daraus

$$\forall vC \rightarrow C' \, {}^{v}/_{T} \in X_\omega, \tag{39}$$

also folgt aus (38) und (39) mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 die Behauptung

$$C' \, {}^{v}/_{T} \in X_\omega.$$

3.2 ($\Leftarrow$): Wir setzen voraus, daß

$$\text{für jeden Term } T \in TERM_s(\Sigma, V) \; C' \, {}^{v}/_{T} \in X_\omega \text{ gilt.} \tag{40}$$

Wir nehmen nun an (indirekter Beweis!), daß

$$\forall vC \notin X_\omega,$$

also folgt mit Aussage 6 von Lemma 1.5.2.6, daß

$$\forall vC \rightarrow A \in X_\omega. \tag{41}$$

Nun gilt aber

$$ax_\rightarrow \cup ax_\neg \; Abl_{MP} \; (\forall vC \rightarrow A) \rightarrow \exists v'(C \, {}^{v}/_{v'} \rightarrow A),$$

falls v' eine Individuenvariable ist, die weder in C noch in A vorkommt und deren Sorte mit der Sorte von v übereinstimmt. Also gilt nach Konstruktion von X_ω, daß

$$(\forall vC \rightarrow A) \rightarrow \exists v'(C \, {}^{v}/_{v'} \rightarrow A) \in X_\omega, \tag{42}$$

also folgt aus (41) und (42) mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6, daß

$$\exists v'(C \, {}^{v}/_{v'} \rightarrow A) \in X_\omega. \tag{43}$$

Nun hat der Ausdruck $\exists v'(C \, {}^{v}/_{v'} \rightarrow A)$ in der anfangs fixierten Aufzählung aller Ausdrücke eine Nummer, etwa k, d. h. es gilt

$$B_k = \exists v'(C \, {}^{v}/_{v'} \rightarrow A) \tag{44}$$

Dann folgt nach Konstruktion der Mengenfolge

$$X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots,$$

daß

(45) $$\text{nicht } X_k \cup \{B_k\}\ Abl_{MP}\ A.$$

Würde nämlich das Gegenteil von (45) gelten, könnten wir daraus mit der Deduktionseigenschaft für Ab_{MP}

$$X_k\ Abl_{MP}\ B_k \rightarrow A$$

erhalten, also würde nach Konstruktion von X_ω und Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6

$$B_k \rightarrow A \in X_\omega$$

gelten, und daraus würde sich mit (43) und (44) der Widerspruch

$$A \in X_\omega$$

zu Aussage 5 von Lemma 1.5.2.6 ergeben.

Nach Konstruktion der Menge X_{k+1} gilt auf Grund von (44) und (45), daß

(46) $$X_{k+1} = X_k \cup \{B_k, C\,{}^{v}\!/_{x} \rightarrow A\}$$

gilt, wobei x eine Individuenvariable ist, die in keinem Ausdruck von $X \cup \{B_k, A\} \setminus X_0$ vorkommt und die dieselbe Sorte wie v hat, d. h. für die $x \in TERM_s(\Sigma, V)$ gilt.

Nach Konstruktion der Menge X_ω folgt aus (46), daß

(47) $$C\,{}^{v}\!/_{x} \rightarrow A \in X_\omega.$$

Aus (40) und (47) erhält man mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 sofort den Widerspruch $A \in X_\omega$ zu Aussage 5 dieses Lemmas.

Damit ist Lemma 1.5.2.7 vollständig bewiesen. ■

1.5.3 Beendigung des Vollständigkeitsbeweises in den Fällen ohne bzw. mit Identität

Fall I. Signaturen ohne Identität.

Wir betrachten als erstes den Fall, daß in der gegebenen Signatur Σ kein Identitätsymbol vorkommt. In diesem Fall können wir ohne weitere Betrachtungen eine Semi-HERBRAND-Interpretation $\mathfrak{I}$ und einen $\mathfrak{I}$-Zustand σ mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren.

Definition 1.5.3.1

1. $\Delta_s =_{def} TERM_s(\Sigma, V)$, $s \in SO$.
2. $\Phi_f =_{def} f$, *falls* $\alpha(f) \in SO$.
3. $\Phi_f(T_1, \ldots, T_n) =_{def} f(T_1, \ldots, T_n)$, *falls* $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$, $n \geq 1$ *und* $T_\nu \in TERM_{s_\nu}(\Sigma, V)$, $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.
4. $\Pi_P =_{def} \begin{cases} \{\emptyset\}, \text{ falls } P \in X_\omega \text{ und } \alpha(P) = e \\ \emptyset \quad , \text{ falls } P \notin X_\omega \text{ und } \alpha(P) = e \end{cases}$.
5. $\Pi_P =_{def} \{[T_1, \ldots, T_n] | PT_1 \ldots T_n \in X_\omega\}$, *falls* $\alpha(P) \neq e$.

6. $\Im =_{def} [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$.

7. $\sigma(v) =_{def} v$, *falls* $v \in V$.

Lemma 1.5.3.1
Für jedes $T \in TERM(\Sigma, V)$ *und jedes* $B \in AUSD(\Sigma, V)$ *gilt:*

1. $EL(T, \Im, \sigma) = T$

2. $\sigma, \Im \models B$ *genau dann, wenn* $B \in X_\omega$.

Beweis
ad 1:
Induktion über die Erzeugungsstufe k von T.

Anfangsschritt: $k = 0$.

Fall 1: $T = v$.
Dann gilt nach Definition von EL

$$EL(v, \Im, \sigma) = \sigma(v),$$

also

$$= v$$

nach Definition von σ.

Fall 2: $T = f$, $\alpha(f) \in SO$.
Dann gilt nach Definition von EL

$$EL(f, \Im, \sigma) = \Phi_f,$$

also

$$= f$$

nach Definition von Φ.

Induktionsschritt: Es sei $T = f(T_1, \ldots, T_n)$, $n \geq 1$.
Dann gilt nach Definition von EL

$$\begin{aligned} & EL(f(T_1, \ldots, T_n), \Im, \sigma) \\ & = \Phi_f(EL(T_1, \Im, \sigma), \ldots, EL(T_n, \Im, \sigma)), \end{aligned}$$

also

$$= \Phi_f(T_1, \ldots, T_n)$$

nach Induktionsvoraussetzung, also

$$= f(T_1, \ldots, T_n)$$

nach Definition von Φ_f.

ad 2:
Induktion über die Erzeugungsstufe k des Ausdrucks B.

Anfangsschritt: $k = 0$.

Fall 1: $B = P$ und $\alpha(P) = e$.
In diesem Fall gilt nach Definition

$$\sigma, \Im \models P$$

genau dann, wenn

$$\Pi_P = \{\emptyset\},$$

also nach Definition von Π_P genau dann, wenn

$$P \in X_\omega.$$

Fall 2: $B = PT_1 \ldots T_n$ und $n \geq 1$.
Dann folgt, daß nach Definition von $\models$

$$\sigma, \Im \models PT_1 \ldots T_n$$

gilt genau dann, wenn

$$[EL(T_1, \Im, \sigma), \ldots, EL(T_n, \Im, \sigma)] \in \Pi_P,$$

also nach Aussage 1 unseres Lemmas genau dann, wenn

$$[T_1, \ldots, T_n] \in \Pi_P,$$

also nach Definition von Π_P genau dann, wenn

$$PT_1 \ldots T_n \in X_\omega.$$

Induktionsschritt:

Fall 1: B hat die Form $\neg C$.
Dann gilt nach Definition von $\models$, daß

$$\sigma, \Im \models \neg C$$

genau dann, wenn

$$\text{nicht } \sigma, \Im \models C,$$

also nach Induktionsvoraussetzung genau dann, wenn

$$\text{nicht } C \in X_\omega$$

also nach Lemma 1.5.2.7 genau dann, wenn

$$\neg C \in X_\omega.$$

Fall 2: B hat die Form $C \to D$.
Dann gilt nach Definition von $\models$, daß

$$\sigma, \Im \models C \to D$$

genau dann, wenn gilt:

$$\text{Wenn } \sigma, \Im \models C, \text{ so } \sigma, \Im \models D.$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist diese Aussage gleichwertig mit:

$$\text{Wenn } C \in X_\omega, \text{ so } D \in X_\omega,$$

und diese letztere Aussage ist wegen Lemma 1.5.2.7 gleichwertig mit:

$$C \to D \in X_\omega.$$

Fall 3: B hat die Form $\forall v C$ mit $v \in V_s$.
Dann gilt nach Definition von $\models$, daß

$$\sigma, \Im \models \forall v C$$

genau dann, wenn

$$\text{für jedes } \xi \in \Delta_s \text{ gilt: } \sigma\langle v := \xi\rangle, \Im \models C,$$

also mit Aussage 2 von Lemma 1.5.1.4 und mit Aussage 1 von Lemma 1.5.3.1 genau dann, wenn

$$\text{für jedes } T \in TERM_s(\Sigma, V) \text{ gilt: } \sigma, \Im \models C\,{}^{v}/_{T},$$

also mit Induktionsvoraussetzung für $C\,{}^{v}/_{T}$ genau dann, wenn

$$\text{für jedes } T \in TERM_s(\Sigma, V) \text{ gilt: } C'\,{}^{v}/_{T} \in X_\omega,$$

also mit Aussage 3 von Lemma 1.5.2.7 genau dann, wenn

$$\forall v C \in X_\omega.$$

■

Wir können nun den Vollständigkeitsbeweis unmittelbar wie folgt beenden.

ad 1:
$\Im \models X$.

Es sei $B \in X$ gegeben. Da B eine Aussage ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\sigma, \Im \models B.$$

Nach Lemma 1.5.3.1 (Aussage 2) genügt es zu zeigen, daß

$$B \in X_\omega.$$

Das Letztere gilt aber, weil nach Konstruktion von X_ω wir die Inklusion

$$X \subseteq X_\omega$$

haben.

ad 2:
nicht $\sigma, \Im \models A$.

Dies folgt mit Lemma 1.5.3.1 (Aussage 2) unmittelbar aus

$$A \notin X_\omega.$$

Das Letztere gilt aber nach Lemma 1.5.2.6 (Aussage 5).

Fall II. Signaturen mit Identität.

Kommt für eine gegebene Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

für eine Sorte $s \in SO$ das Identitätssymbol $\underset{s}{=}$ in PS vor, so haben wir als nullstufige Ausdrücke (Anfangsschritt der Ausdrucksdefinition) auch Gleichungen der Form

$$T_1 \underset{s}{=} T_2,$$

wobei $T_1, T_2 \in TERM_s(\Sigma, V)$, zu betrachten.

Demgemäß wäre für Aussage 2 von Lemma 1.5.3.1 im Anfangsschritt zusätzlich zu beweisen

$$\sigma, \Im \models T_1 \underset{s}{=} T_2 \text{ genau dann, wenn } T_1 \underset{s}{=} T_2 \in X_\omega.$$

Nun haben wir nach Definition von $\models$, daß gilt

$$\sigma, \Im \models T_1 \underset{s}{=} T_2$$

genau dann, wenn

$$EL(T_1, \Im, \sigma) = EL(T_2, \Im, \sigma),$$

also auf Grund der (speziellen) Konstruktion von $\Im$ und σ mit Aussage 1 von Lemma 1.5.3.1 genau dann, wenn

$$T_1 = T_2,$$

wobei $=$ die Gleichheit der Terme T_1 und T_2 als Zeichenreihen bezeichnet.

Somit hätten wir zu zeigen, daß

$$T_1 = T_2 \text{ genau dann, wenn } T_1 \underset{s}{=} T_2 \in X_\omega.$$

Nun gilt die Richtung $\Rightarrow$ auf Grund des Reflexivitätsaxioms für $\underset{s}{=}$, nämlich $x \underset{s}{=} x$, stets. Die Umkehrung ($\Leftarrow$) gilt im allgemeinen nicht. Kommt z. B. in X der Ausdruck $\exists x \exists y\ x \underset{s}{=} y$ vor, wobei x und y verschiedene Individuenvariablen der Sorte s sind, so gibt es nach Konstruktion von X_ω verschiedene Individuenvariablen v und w, so daß $v \underset{s}{=} w \in X_\omega$, und damit gilt die Richtung ($\Leftarrow$) nicht.

Um auch im Fall II den Vollständigkeitsbeweis beenden zu können, führen wir eine Faktorisierung des algebraischen Systems $\Im$ nach geeigneten Kongruenzrelationen durch.

Als erstes definieren wir für jede Sorte $s \in SO$, für die in PS das Gleichheitszeichen $\underset{s}{=}$ vorkommt, über der Menge $TERM_s(\Sigma, V)$ eine binäre Relation $\underset{s}{\approx}$ wie folgt.

Definition 1.5.3.2
$T_1 \underset{s}{\approx} T_2 \ =_{def}\ T_1 \underset{s}{=} T_2 \in X_\omega$ *für* $T_1, T_2 \in TERM_s(\Sigma, V)$.

Lemma 1.5.3.2
$\underset{s}{\approx}$ *ist eine Kongruenzrelation in dem algebraischen System* $\Im$.

Beweis
ad 1: $\underset{s}{\approx}$ ist reflexiv.

Es gilt

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x \underset{s}{=} x,$$

also mit der Regel der Termeinsetzung für alle $T \in TERM_s(\Sigma, V)$, daß

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T \underset{s}{=} T,$$

also nach Konstruktion von X_ω, daß

$$T \underset{s}{=} T \in X_\omega,$$

das heißt

$$T \underset{s}{\approx} T.$$

ad 2: $\approx_s$ ist symmetrisch.

Es gilt

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x \doteq_s y \rightarrow y \doteq_s x,$$

also mit der Regel der Termeinsetzung für alle $T_1, T_2 \in TERM_s(\Sigma, V)$, daß

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T_1 \doteq_s T_2 \rightarrow T_2 \doteq_s T_1,$$

also nach Konstruktion der Menge X_ω, daß

$$T_1 \doteq_s T_2 \rightarrow T_2 \doteq_s T_1 \in X_\omega. \tag{48}$$

Ist nun

$$T_1 \approx_s T_2,$$

so folgt nach Definition von $\approx_s$

$$T_1 \doteq_s T_2 \in X_\omega, \tag{49}$$

also aus (48) und (49) mit Lemma 1.5.2.6 (Aussage 4), daß

$$T_2 \doteq_s T_1 \in X_\omega,$$

das heißt

$$T_2 \approx_s T_1.$$

ad 3: $\approx_s$ ist transitiv.

Es gilt

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x \doteq_s y \rightarrow (y \doteq_s z \rightarrow x \doteq_s z),$$

also folgt mit der Regel der Termeinsetzung, daß für alle $T_1, T_2, T_3 \in TERM_s(\Sigma, V)$

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T_1 \doteq_s T_2 \rightarrow (T_2 \doteq_s T_3 \rightarrow T_1 \doteq_s T_3),$$

also nach Konstruktion der Menge X_ω, daß

$$T_1 \doteq_s T_2 \rightarrow (T_2 \doteq_s T_3 \rightarrow T_1 \doteq_s T_3) \in X_\omega. \tag{50}$$

Wir nehmen nun an, daß

$$T_1 \approx_s T_2$$

und

$$T_2 \approx_s T_3.$$

Daraus folgt nach Definition von $\approx_s$, daß

$$T_1 \doteq_s T_2 \in X_\omega \tag{51}$$

und

$$T_2 \doteq_s T_3 \in X_\omega, \tag{52}$$

also folgt mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 aus (50), (51) und (52), daß

$$T_1 \doteq_s T_3 \in X_\omega,$$

das heißt

$$T_1 \overset{\approx}{s} T_3.$$

Mit den Punkten 1, 2 und 3 ist gesagt, daß für jede Sorte $s \in SO$, für die das Gleichheitssymbol $\overset{=}{s}$ in PS vorkommt, die binäre Relation $\overset{\approx}{s}$ eine Äquivalenzrelation über der Menge $TERM_s(\Sigma, V)$ aller Terme der Sorte s ist.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß $\overset{\approx}{s}$ stabil ist bezüglich der Anwendung der Funktionen und Relationen (Prädikate) von $\mathfrak{I}$. Offensichtlich haben wir für nullstellige Funktionen und Relationen nichts zu beweisen; somit setzen wir im folgenden voraus, daß die betrachteten Funktionen und Relationen nicht nullstellig sind.

ad 4: Ersetzbarkeit bezüglich Funktionssymbolen.

Gegeben sei ein Funktionssymbol $f \in FS$ mit $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$, $n \geq 1$. Die Stabilität der durch f im Bereich der Terme definierten Funktion besagt dann, daß für alle Terme $T_1, T_1' \in TERM_{s_1}(\Sigma, V)$, ..., $T_n, T_n' \in TERM_{s_n}(\Sigma, V)$ gilt:

$$\text{Wenn } T_1 \overset{\approx}{s_1} T_1', \ldots, T_n \overset{\approx}{s_n} T_n', \text{ so } f(T_1, \ldots, T_n) \overset{\approx}{s} f(T_1', \ldots, T_n').$$

Um diese Behauptung zu beweisen, genügt es offensichtlich, die n folgenden spezielleren Behauptungen zu zeigen:

$$\begin{aligned}
&\text{Wenn } T_1 \overset{\approx}{s_1} T_1', \text{ so } f(T_1, T_2, \ldots, T_n) \overset{\approx}{s} f(T_1', T_2, \ldots, T_n),\\
&\vdots\\
&\text{wenn } T_n \overset{\approx}{s_n} T_n', \text{ so } f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n) \overset{\approx}{s} f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n').
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x_1 \overset{=}{s_1} x_1' \rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{=}{s} f(x_1', x_2, \ldots, x_n),\\
&\vdots\\
&ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x_n \overset{=}{s_n} x_n' \rightarrow f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \overset{=}{s} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n').
\end{aligned}$$

Also folgt mit der Regel der Termeinsetzung für alle Terme $T_1, T_1' \in TERM_{s_1}(\Sigma, V)$, ..., $T_n, T_n' \in TERM_{s_n}(\Sigma, V)$:

$$\begin{aligned}
&ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T_1 \overset{=}{s_1} T_1' \rightarrow f(T_1, T_2, \ldots, T_n) \overset{=}{s} f(T_1', T_2, \ldots, T_n),\\
&\vdots\\
&ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T_n \overset{=}{s_n} T_n' \rightarrow f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n) \overset{=}{s} f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n'),
\end{aligned}$$

also gilt nach Konstruktion der Menge X_ω, daß

$$\begin{aligned}
&T_1 \overset{=}{s_1} T_1' \rightarrow f(T_1, T_2, \ldots, T_n) \overset{=}{s} f(T_1', T_2, \ldots, T_n) \in X_\omega,\\
&\vdots\\
&T_n \overset{=}{s_n} T_n' \rightarrow f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n) \overset{=}{s} f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n') \in X_\omega.
\end{aligned} \tag{53}$$

Wenn wir nun

$$T_1 \overset{\approx}{s_1} T_1' \text{ bzw. } \ldots \text{ bzw. } T_n \overset{\approx}{s_n} T_n'$$

voraussetzen, so bedeutet dies nach Definition der betreffenden Äquivalenzrelationen, daß

$$T_1 \overset{=}{s_1} T_1' \in X_\omega \text{ bzw. } \ldots \text{ bzw. } T_n \overset{=}{s_n} T_n' \in X_\omega,$$

also folgt daraus mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6

$$f(T_1, T_2, \ldots, T_n) \underset{s}{=} f(T_1', T_2, \ldots, T_n) \in X_\omega,$$

bzw.

$$\vdots$$

bzw.

$$f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n) \underset{s}{=} f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n') \in X_\omega,$$

also gilt nach Definition der Äquivalenzrelation $\underset{s}{\approx}$, daß

$$f(T_1, T_2, \ldots, T_n) \underset{s}{\approx} f(T_1', T_2, \ldots, T_n)$$

bzw.

$$\vdots$$

bzw.

$$f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n) \underset{s}{\approx} f(T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n').$$

ad 5: Ersetzbarkeit bezüglich Prädikatensymbolen.

Gegeben sei ein Prädikatensymbol $P \in PS$ mit $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$, $n \geq 1$. Die Stabilität der durch P im Bereich der Terme definierten Relation besagt dann, daß für alle Terme $T_1, T_1' \in TERM_{s_1}(\Sigma, V)$, ..., $T_n, T_n' \in TERM_{s_n}(\Sigma, V)$ gilt:

Wenn $T_1 \underset{s_1}{\approx} T_1', \ldots, T_n \underset{s_n}{\approx} T_n'$, so gilt:
$[T_1, \ldots, T_n] \in \Pi_P$ genau dann, wenn $[T_1', \ldots, T_n'] \in \Pi_P$.

Analog zum Fall 4 genügt es, um diese Behauptung zu beweisen, die n folgenden spezielleren Behauptungen zu zeigen:

Wenn $T_1 \underset{s_1}{\approx} T_1'$, so gilt:
$[T_1, T_2 \ldots, T_n] \in \Pi_P$ genau dann, wenn $[T_1', T_2, \ldots, T_n] \in \Pi_P$.

$\vdots$

wenn $T_n \underset{s_n}{\approx} T_n'$, so gilt:
$[T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n] \in \Pi_P$ genau dann, wenn $[T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n'] \in \Pi_P$.

Nun ist aber

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x_1 \underset{s_1}{=} x_1' \rightarrow (Px_1x_2 \ldots x_n \leftrightarrow Px_1'x_2 \ldots x_n)$$

$$\vdots$$

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ x_n \underset{s_n}{=} x_n' \rightarrow (Px_1 \ldots x_{n-1}x_n \leftrightarrow Px_1 \ldots x_{n-1}x_n').$$

Also folgt mit der Regel der Termeinsetzung für alle Terme $T_1, T_1' \in TERM_{s_1}(\Sigma, V)$, ..., $T_n, T_n' \in TERM_{s_n}(\Sigma, V)$:

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T_1 \underset{s_1}{=} T_1' \rightarrow (PT_1T_2 \ldots T_n \leftrightarrow PT_1'T_2 \ldots T_n),$$

$$\vdots$$

$$ax_{\Sigma,V}\ Abl\ T_n \underset{s_n}{=} T_n' \rightarrow (PT_1 \ldots T_{n-1}T_n \leftrightarrow PT_1 \ldots T_{n-1}T_n'),$$

also gilt nach Konstruktion der Menge X_ω, daß

$$
\begin{aligned}
&T_1 \underset{s_1}{=} T_1' \rightarrow (PT_1T_2 \ldots T_n \leftrightarrow PT_1'T_2 \ldots T_n) \in X_\omega \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (54) \\
&T_n \underset{s_n}{=} T_n' \rightarrow (PT_1 \ldots T_{n-1}T_n \leftrightarrow PT_1 \ldots T_{n-1}T_n') \in X_\omega .
\end{aligned}
$$

Wenn wir nun

$$T_1 \underset{s_1}{\approx} T_1' \text{ bzw. } \ldots \text{ bzw. } T_n \underset{s_n}{\approx} T_n'$$

voraussetzen, so bedeutet dies nach Definition der betreffenden Äquivalenzrelationen, daß

$$T_1 \underset{s_1}{=} T_1' \in X_\omega \text{ bzw. } \ldots \text{ bzw. } T_n \underset{s_n}{=} T_n' \in X_\omega ,$$

also folgt daraus mit Aussage 4 von Lemma 1.5.2.6 unter Verwendung von (54), daß

$$PT_1T_2 \ldots T_n \leftrightarrow PT_1'T_2 \ldots T_n \in X_\omega ,$$

bzw.

$$\vdots$$

bzw.

$$PT_1 \ldots T_{n-1}T_n \leftrightarrow PT_1 \ldots T_{n-1}T_n' \in X_\omega ,$$

also folgt mit Lemma 1.5.2.7 unter Berücksichtigung der Definitionen für $\leftrightarrow$, $\wedge$ und Π_P, daß gilt:

$$[T_1, T_2, \ldots, T_n] \in \Pi_P \text{ genau dann, wenn } [T_1', T_2, \ldots, T_n] \in \Pi_P$$

bzw.

$$\vdots$$

bzw.

$$[T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n] \in \Pi_P \text{ genau dann, wenn } [T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n'] \in \Pi_P .$$

■

Ist $T \in TERM_s(\Sigma, V)$ gegeben, so bezeichnen wir die von der Äquivalenzrelation $\underset{s}{\approx}$ in $TERM_s(\Sigma, V)$ durch T erzeugte Restklasse mit $\overline{T}$; das System aller dieser Restklassen wird durch $TERM_s(\Sigma, V)/\underset{s}{\approx}$ angedeutet. Kommt für eine Sorte $s \in SO$ in Σ das Gleichheitssymbol $\underset{s}{=}$ nicht in PS vor, wählen wir die zeichentheoretische Gleichheit von Termen der Sorte s als Äquivalenzrelation $\underset{s}{\approx}$.

Wir konstruieren nun über der Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

eine Σ-Interpretation

$$\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$$

sowie einen $\mathfrak{I}'$-Zustand σ' entsprechend der folgenden Definition.

Definition 1.5.3.3

1. $\Delta_s' =_{def} TERM_s(\Sigma, V)/\underset{s}{\approx}$ *für* $s \in SO$.
2. $\Phi_f' =_{def} \overline{f}$, *falls* $f \in FS$ *und* $\alpha(f) \in SO$.
3. $\Phi_f'\,(\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}) =_{def} \overline{f(T_1, \ldots, T_n)}$, *falls* $f \in FS$ *und* $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$, $n \geq 1$, $T_\nu \in TERM_{s_\nu}(\Sigma, V)$, $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.

4. $\Pi'_P =_{def} \begin{cases} \{\emptyset\}, \text{ falls } P \in X_\omega \text{ und } \alpha(P) = e \\ \emptyset \quad , \text{ falls } P \notin X_\omega \text{ und } \alpha(P) = e \end{cases}$.

5. $\Pi'_P =_{def} \left\{ \left[\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}\right] \,\middle|\, PT_1 \ldots T_n \in X_\omega \right\}$, *falls* $\alpha(P) \neq e$.

6. $\sigma'(v) =_{def} \overline{v}$ *für* $v \in V$.

Punkt 3 dieser Definition ist korrekt, d. h. repräsentantenunabhängig, weil nach Lemma 1.5.3.2 Stabilität vorliegt.

Das zu Definition 1.5.3.1 gehörende Lemma 1.5.3.1 wird nun entsprechend Definition 1.5.3.3 wie folgt modifiziert.

Lemma 1.5.3.3
Für jedes $T \in TERM(\Sigma, V)$ *und jedes* $B \in AUSD(\Sigma, V)$ *gilt:*

1. $EL(T, \Im', \sigma') = \overline{T}$.

2. $\sigma', \Im' \models B$ *genau dann, wenn* $B \in X_\omega$.

Beweis
ad 1:
Wie in Lemma 1.5.3.1 wird diese Behauptung durch Induktion über die Erzeugungsstufe k von T bewiesen.

Anfangsschritt:
$k = 0$.
Hier ändert sich gegenüber Lemma 1.5.3.1 nichts.

Induktionsschritt:
Um die Induktionsbehauptung

$$EL(f(T_1, \ldots, T_n), \Im', \sigma') = \overline{f(T_1, \ldots, T_n)}$$

zu beweisen, genügt es offensichtlich nach Anwendung der Induktionsvoraussetzungen

$$EL(T_\nu, \Im', \sigma') = \overline{T_\nu}, \quad \nu \in \{1, \ldots, n\}$$

noch zu beweisen, daß

$$\overline{f(T_1, \ldots, T_n)} = \Phi'_f\left(\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}\right)$$

gilt. Dies folgt aber aus der Definition von Φ'_f und der Tatsache, daß für $\alpha(f) = s_1 \ldots s_n s$ $(n \geq 1)$ die Abbildung Φ_f, welche durch das Funktionssymbol f definiert ist (siehe Definition 1.5.3.1), *stabil* ist bezüglich der Äquivalenzrelationen $\approx_{s_1}, \ldots, \approx_{s_n}$ und $\approx_s$ (Lemma 1.5.3.2).

ad 2:
Auch diese Behauptung wird analog zu Lemma 1.5.3.1 durch Induktion über die Erzeugungsstufe k von B bewiesen.

Anfangsschritt:
$k = 0$.

Fall 1: $B = P$ und $\alpha(P) = e$.
Hier ändert sich gegenüber dem entsprechenden Beweis von Lemma 1.5.3.1 nichts.

Fall 2: $B = PT_1 \ldots T_n$ und $n \geq 1$ sowie $\alpha(P) = s_1 \ldots s_n$.
Dann folgt nach Definition von $\models$ sowie von $\mathfrak{I}'$ und σ', daß gilt:

$$\sigma', \mathfrak{I}' \models PT_1 \ldots T_n$$

genau dann, wenn

$$[EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma'), \ldots, EL(T_n, \mathfrak{I}', \sigma')] \in \Pi'_P,$$

also nach Aussage 1 von Lemma 1.5.3.3 genau dann, wenn

$$[\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}] \in \Pi'_P.$$

Wir müssen noch zeigen, daß die letzte Aussage genau dann gilt, wenn

$$PT_1 \ldots T_n \in X_\omega.$$

Es sei nun

$$[\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}] \in \Pi'_P.$$

Nach Definition von Π'_P kann man daraus zunächst nur folgern, daß es Terme $T'_1, \ldots, T'_n$ gibt mit

$$T_\nu \underset{s}{\approx} T'_\nu \quad (\nu \in \{1, \ldots, n\})$$

und

$$PT'_1 \ldots T'_n \in X_\omega.$$

Weil aber nach Lemma 1.5.3.2 die Relation Π_P, welche durch das Prädikatensymbol P definiert ist (siehe Definition 1.5.3.1) *stabil* ist bezüglich der Äquivalenzrelationen $\underset{s_1}{\approx}, \ldots, \underset{s_n}{\approx}$ (siehe Lemma 1.5.3.2), folgt

$$PT_1 \ldots T_n \in X_\omega.$$

Setzen wir umgekehrt

$$PT_1 \ldots T_n \in X_\omega$$

voraus, folgt nach Definition von Π'_P unmittelbar

$$[\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}] \in \Pi'_P.$$

Fall 3: $B = T_1 \underset{s}{=} T_2$, wobei $T_1, T_2 \in TERM_s(\Sigma, V)$.
Nach Definition von $\models$ gilt dann

$$\sigma', \mathfrak{I}' \models T_1 \underset{s}{=} T_2$$

genau dann, wenn

$$EL(T_1, \mathfrak{I}', \sigma') = EL(T_2, \mathfrak{I}', \sigma'),$$

also mit Aussage 1 von Lemma 1.5.3.3 genau dann, wenn

$$\overline{T_1} = \overline{T_2}.$$

Das Letztere gilt aber nach Lemma 1.5.3.2 genau dann, wenn

$$T_1 \underset{s}{\approx} T_2,$$

also nach Definition von $\underset{s}{\approx}$ genau dann, wenn

$$T_1 \underset{s}{=} T_2 \in X_\omega.$$

Induktionsschritt:
Analog zum Fall ohne Identität.

■

1.5.4 Folgerungen aus dem Hauptsatz

Folgerung 1:
Der semantische Folgerungsoperator *Cons* ist kompakt.

Beweis
Anwendung des Hauptsatzes und der Tatsache, daß der Beweisoperator *Be* kompakt ist (siehe Theorem 1.4.5.1, Aussage 2). ■

Damit ist die Aussage 2 von Theorem 1.3.2.4 vollständig bewiesen.

Folgerung 2:
Es gilt der Endlichkeitssatz für Modelle, d. h. es gilt Theorem 1.3.1.2.

Beweis
Aus Folgerung 1 mit Hilfe der Tatsache, daß die Kompaktheit von *Cons* logisch äquivalent mit dem Endlichkeitssatz für Modelle ist (ein Beweis für diese Behauptung findet man im Punkt 4 des Beweises von Theorem 1.3.2.4). ■

Folgerung 3:
Es gilt das GÖDEL*sche Axiomatisierungstheorem*, d. h. es gilt

$$ag = Ab(ax_{\Sigma,V}),$$

speziell, es gilt der GÖDEL*sche Vollständigkeitssatz* [9], d. h. es gilt

$$ag \subseteq Ab(ax_{\Sigma,V}),$$

d. h. jeder (in jeder Interpretation) allgemeingültige Ausdruck A ist aus dem (prädikatenlogischen) Axiomensystem $ax_{\Sigma,V}$ mit den fünf Schlußregeln, auf denen Ab beruht, ableitbar.

Beweis
Aus dem Hauptsatz folgt für $X = \emptyset$

$$Cons(\emptyset) = Be(\emptyset).$$

Nun gilt aber nach Definition

$$\begin{aligned} Cons(\emptyset) &= ag \\ Be(\emptyset) &= Ab(ax_{\Sigma,V}), \end{aligned}$$

also gilt das GÖDELsche Axiomatisierungtheorem. ■

Folgerung 4:
Es gilt der Satz von LÖWENHEIM/SKOLEM [3, 16, 21].

Wir formulieren den Satz von LÖWENHEIM/SKOLEM in zwei Varianten, zuerst unter der Voraussetzung, daß die gegebene Signatur Σ keine Gleichheitssymbole enthält, danach dann ohne diese Voraussetzung.

Ferner sei daran erinnert, daß die beiden beim Vollständigkeitsbeweis getroffenen Zusatzvoraussetzungen, nämlich,

1. daß jede der Mengen SO, FS und PS der Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$ höchstens abzählbar unendlich ist, und

2. daß für jede Sorte $s \in SO$ die Menge V_s der Individuenvariablen der Sorte s aus genau abzählbar unendlich vielen Elementen besteht,

auch bei diesen beiden Sätzen angenommen werden müssen.

Man könnte nun vermuten, daß diese beiden Zusatzvoraussetzungen aus beweistechnischen Gründen beim Vollständigkeitsbeweis nach der HENKINschen algebraischen Methode getroffen werden müssen. Diese Vermutung trifft auf die beiden hier zu formulierenden Theoreme von LÖWENHEIM/SKOLEM *nicht* zu, wie Beweise dieser Theoreme, die nicht den Hauptsatz verwenden, zeigen.

Theorem 1.5.4.1
Erfüllen Σ und V die Zusatzvoraussetzungen 1 und 2 und enthält Σ kein Identitätssymbol, so gilt:

Gibt es ein $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models X$, so existiert ein $\mathfrak{I}'$ mit

1. *$\mathfrak{I}' \models X$ und*
2. *$card\, \Delta'_s = \aleph_0$ für jedes $s \in SO$.*

Beweis
Wir wissen, daß für einen beliebigen Ausdruck B und für ein beliebiges Σ-algebraisches System $\mathfrak{I}$ stets

$$\text{nicht } \mathfrak{I} \models B \wedge \neg B$$

gilt. Wenden wir nun die semantische Korrektheit von Be (d. h. den Hauptsatz in der Richtung $\Leftarrow$) auf ein beliebiges $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ und $A =_{def} B \wedge \neg B$ an, so erhalten wir:

$$\text{Wenn } \mathfrak{I} \models X, \text{ so nicht } X\ Bew\ B \wedge \neg B.$$

Aus nicht $X\ Bew\ B \wedge \neg B$ folgt mit der semantischen Vollständigkeit von Bew (d. h. mit der Richtung $\Rightarrow$ des Hauptsatzes), daß es ein $\mathfrak{I}'$ gibt, so daß

1. $\mathfrak{I}' \models X$ und
2. $card\, \Delta_s = \aleph_0$ für jedes $s \in SO$.

Damit ist aber Theorem 1.5.4.1 bewiesen. ■

Theorem 1.5.4.2
Erfüllen Σ und V die Zusatzvoraussetzungen 1 und 2, so gilt:

Gibt es ein $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models X$, so existiert ein $\mathfrak{I}'$ mit

1. *$\mathfrak{I}' \models X$ und*
2. *$card\, \Delta'_s \leq \aleph_0$ für jedes $s \in SO$.*

Beweis
Bei diesem Theorem bleibt offen, ob in Σ ein Gleichheitssymbol vorkommt oder nicht.

Wir beginnen den Beweis wie beim Beweis von Theorem 1.5.4.1.

Mit der semantischen Vollständigkeit von Bew (Richtung $\Rightarrow$ des Hauptsatzes) schließen wir aus

$$\text{nicht } X\ Bew\ B \wedge \neg B,$$

daß es (im Falle, daß in Σ Gleichheitssymbole vorkommen dürfen) ein $\mathfrak{I}'$ gibt, so daß

1. $\mathfrak{I}' \models X$ und
2. $card\,\Delta_s \leq \aleph_0$ für jedes $s \in SO$.

Damit ist Theorem 1.5.4.2 bewiesen. ■

1.6 Das Entscheidungsproblem. Lösbare Fälle. Das Unentscheidbarkeitstheorem von CHURCH

1.6.1 Vorbemerkungen, Überblick

Unter dem *Entscheidungsproblem* versteht man — im Kontext dieser Vorlesung — folgendes:

Fixiert sei eine Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha].$$

Wir betrachten nun die auf Grund von Σ und einer gewählten Menge V von Individuenvariablen konstruierte Menge

$$AUSD(\Sigma, V)$$

von Ausdrücken.

Wir erinnern: Für eine Σ-Interpretation

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi]$$

hatten wir definiert (siehe Definition 1.2.4.1), wann ein Ausdruck $A \in AUSD(\Sigma, V)$ in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig genannt wird, kurz

$$\mathfrak{I} \models A.$$

Die Menge aller $A \in AUSD(\Sigma, V)$, die in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig sind, wird durch

$$ag_{\mathfrak{I}}$$

bezeichnet.

Ein Ausdruck A, der in jedem Σ-algebraischen System $\mathfrak{I}$ allgemeingültig ist, heißt allgemeingültig (manchmal genauer auch: „schlechthin“ allgemeingültig oder „logisch“ allgemeingültig). Die Menge dieser Ausdrücke wird durch

$$ag$$

angedeutet.

Das **Entscheidungsproblem** (der „Logik“ der Sprache $AUSD(\Sigma, V)$) besteht nun in der Frage, ob die Menge ag (in bezug auf $AUSD(\Sigma, V)$) rekursiv ist, d. h. ob es einen Turing-Akzeptor gibt, der für *alle* $A \in AUSD(\Sigma, V)$ stoppt und A akzeptiert genau dann, wenn $A \in ag$, d. h. wenn A allgemeingültig ist.

Genauer formuliert, spricht man von einer positiven (bzw. negativen) Lösung des betrachteten Entscheidungsproblems, wenn die betreffende Menge als rekursiv (bzw. als nicht-rekursiv) nachgewiesen ist. Eine positive Lösung sichert die „volle algorithmische Beherrschbarkeit“ der betreffenden Menge, allerdings nur „im Pronzip“, d. h. zum Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf der gefundenen Algorithmen werden auf dieser Ebene der Betrachtung keine Aussagen getroffen. Solche Untersuchungen gehören zum Stoffgebiet der Vorlesungen „Komplexitätstheorie“ und „Effiziente Algorithmen“. Liegt eine negative Lösung vor, so kann man die Frage stellen, ob die betrachtete Menge wenigstens noch rekursiv aufzählbar ist und damit eine „abgeschwächte“ algorithmische Beherrschbarkeit vorliegt. Dies ist auf Grund des Hauptsatzes (Theorem 1.5.1.1) immer dann der Fall, wenn sich diese Menge in der Form $Cons(X)$ darstellen läßt und X rekursiv aufzählbar ist.

Häufig wird neben diesem Entscheidungsproblem für die **Allgemeingültigkeit** das entsprechende für die **Erfüllbarkeit** betrachtet, d. h. man fragt, ob es einen Turing-Akzeptor gibt, der

für alle $A \in AUSD(\Sigma, V)$ stoppt und der A akzeptiert genau dann, wenn $A \in ef$, d. h. wenn A erfüllbar ist.

Das folgende Lemma besagt, daß beide Entscheidungsprobleme auf sehr einfache Weise äquivalent sind.

Lemma 1.6.1.1
Die Menge ag ist rekursiv genau dann, wenn ef rekursiv ist.

Beweis
Ein Beweis für dieses Lemma ergibt sich aus den folgenden drei (sehr leicht einsehbaren) Feststellungen:

1. Für beliebiges $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt: X ist rekursiv genau dann, wenn $AUSD(\Sigma, V) \setminus X$ rekursiv ist.
2. Für beliebiges $A \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt: A ist nicht allgemeingültig genau dann, wenn $\neg A$ erfüllbar ist.
3. Für beliebiges $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ gilt: X ist rekursiv genau dann, wenn die Menge $\{\neg A | A \in X\}$ rekursiv ist.

■

Das Entscheidungsproblem wird nun wie folgt verallgemeinert:

Gegeben sei eine Klasse $\mathfrak{K}$ von Σ-algebraischen Systemen, d. h. es gelte

$$\mathfrak{K} \subseteq ALG(\Sigma).$$

Man sagt dann, daß $A \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ allgemeingültig bezüglich $\mathfrak{K}$ sei (kurz: $ag_{\mathfrak{K}}A$), falls für jedes $\mathfrak{I} \in \mathfrak{K}$ der Ausdruck A in $\mathfrak{I}$ allgemeingültig ist. Die Menge der $A \in AUSD(\Sigma, V)$ mit $ag_{\mathfrak{K}}A$ wird durch $ag_{\mathfrak{K}}$ bezeichnet.

Der folgende Spezialfall, daß

$$\mathfrak{K} = MOD(X),$$

also daß die gewählte Klasse $\mathfrak{K}$ von Σ-algebraischen Systemen gleich der Klasse *aller* Modelle einer gewählten Menge X von Ausdrücken aus $AUSD(\Sigma, V)$ ist, muß für die Anwendungen (und auch für die Theorie) als besonders wichtig angesehen werden. Denn in diesem Spezialfall gilt, wenn wir die Definition des semantischen Folgerungsoperators *Cons* beachten, offensichtlich die Gleichung

$$Cons(X) = ag_{\mathfrak{K}},$$

also ist das Entscheidungsproblem, ob $A \in AUSD(\Sigma, V)$ bezüglich aller $\mathfrak{I} \in \mathfrak{K}$ allgemeingültig ist, identisch mit dem Entscheidungsproblem, ob A aus X semantisch gefolgert werden kann.

Das Entscheidungsproblem ist seit dem Ende des vergangenen Jahrhunderts von Logikern und Mathematikern als eine große wissenschaftliche Herausforderung empfunden und demgemäß umfangreich untersucht worden.

Dabei glaubte man bis Mitte der dreißiger Jahre dieses Jahrhunderts, daß das Entscheidungsproblem der „Logik“, d. h. daß die Menge

$$ag$$

(wobei die betrachteten Ausdrücke aus $AUSD(\Sigma, V)$ bei festgewählter Signatur Σ und gegebenen V stammen) rekursiv sei. Da das Entscheidungsproblem für beliebige Signaturen zunächst allen Lösungsversuchen widerstand, gingen die Untersuchungen in zwei (verschiedene) Richtungen:

1. Man löste das Problem (positiv) für spezielle Typen von Ausdrücken, z. B. für pränexe Normalformen, bei denen das Präfix eine bestimmte Struktur hat. Auch wurden positive Lösungen für alle Ausdrücke von Sprachen über speziellen Signaturen gefunden, z. B. für *Monadische Prädikatenkalküle*, das sind Fälle, wobei die zugrunde gelegte Signatur *keine* Funktionssymbole und nur *einstellige* Prädikatensymbole enthält. Etwas allgemeiner sind die Fälle, wo entweder zusätzlich Gleichheitszeichen vorkommen dürfen oder einstellige Funktionssymbole zugelassen sind.

   Hierzu ist zu bemerken, daß man sich mit solchen Erweiterungen nahe an die Grenze zur Unentscheidbarkeit begibt; gilt doch, daß die Allgemeingültigkeit unentscheidbar wird, wenn man für eine Sorte $s \in SO$ das Gleichheitssymbol $\overset{=}{}_s$ und *zwei* einstellige Funktionssymbole f und g mit $\alpha(f) = \alpha(g) = ss$ zur Verfügung hat.

2. Bei der zweiten Richtung versuchte man, das Entscheidungsproblem auf spezielle *Typen* von Ausdrücken zu reduzieren, wobei man sich auf Ausdrücke in pränexer Normalform und auf die Verteilung der $\forall$- und $\exists$-Quantoren im Präfix solcher Normalformen konzentrierte. Demgemäß spricht man von der *Reduktionstheorie* des Entscheidungsproblems. Einen guten Überblick über diese Untersuchungen gibt die Arbeit [22] von JANOS SURÁNYI.

Auf Grund der Erfolge zu den Punkten 1 und 2 war man bis 1936 optimistisch, daß das Entscheidungsproblem generell lösbar ist. Demgemäß war es eine wissenschaftliche Sensation, als ALONZO CHURCH 1936 beweisen konnte [5], daß das Entscheidungsproblem (rekursiv) unlösbar ist.

Zur Interpretation dieses Satzes ist zu sagen, daß er die Nichtexistenz eines Entscheidungs*verfahrens* für die Menge ag besagt. Da es sich um die *Nichtexistenz* eines Verfahrens handelt, muß man definieren, was man in diesem Falle allgemein unter einem „*Verfahren*“ versteht, sonst ist der Satz unpräzise formuliert, d. h. man weiß — genau genommen — eigentlich nicht, was er beschreibt.

Um 1936 hatten aber ALAN TURING den Begriff der nach ihm benannten Turing-Maschine als allgemeinen Begriff eines Rechenautomaten, STEPHEN COLE KLEENE den Begriff der rekursiven Funktion und ALONZO CHURCH den λ-Kalkül, der später zum Ausgangspunkt der funktionalen Programmier-Paradigmen wurde, als Präzisierungen von „Verfahren“ entwickelt. Ferner formulierte etwa zur gleichen Zeit CHURCH die nach ihm benannte CHURCHsche These, wonach jede andere Präzisierung von „Verfahren“ auf die oben genannten (die sich als äquivalent erwiesen) zurückgeführt werden kann.

Es muß betont werden, daß die CHURCHsche These keine „Hypothese“ ist, die man irgendwann einmal wird beweisen oder widerlegen können (wie z. B. den „Großen Fermat“), sondern daß sie eher als Glaubenssatz zu werten ist, wobei die Erfahrung seit 1936 diesen Glaubenssatz erhärtet. Denn seitdem sind zahlreiche andere Präzisierungen von „Verfahren“ entwickelt worden, in allen Fällen haben sie sich aber mit den oben genannten als äquivalent erwiesen.

Auf der Grundlage der zur Verfügung stehenden Präzisierungen hatte CHURCH nun die Möglichkeit, einen auf einer korrekten Definition beruhenden Unentscheidbarkeitsbeweis zu führen.

Abschließend kommen wir nochmal auf den Hauptsatz zurück, der besagt, daß aus X ein Ausdruck A semantisch folgt ($X \models A$) genau dann, wenn er aus X beweisbar ist ($X \; Bew \; A$).

Für viele Zwecke ist es von Vorteil, wenn man die „Beweisbarkeit“ konkreter faßt, indem man den Begriff „Beweis“ einführt und verwendet. Dabei werden „Beweise“ als endliche nicht-leere Folgen von Ausdrücken (man könnte auch Bäume wählen) mit einer besonderen „inneren“ Struktur definiert.

Gegeben seien $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ sowie $A, B_1, \ldots, B_n \in AUSD(\Sigma, V)$, wobei $n \geq 1$.

Definition 1.6.1.1
$BEW = [B_1, \ldots, B_n]$ ist ein Beweis für A aus X
$=_{def}$ 1. *$B_n = A$ und*

2. *für jedes $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

   $B_\nu \in X \cup ax_{\Sigma,V}$ oder

   B_ν ist entstanden aus Ausdrücken, die in der Folge BEW vor B_ν stehen, durch Anwendung einer der fünf prädikatenlogischen Schlußregeln.

Eine Rechtfertigung für diese Definition ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma 1.6.1.2
Aus X ist A beweisbar (d. h. X Bew A) genau dann, wenn es eine Folge $BEW = [B_1, \ldots, B_n]$ gibt, so daß BEW ein Beweis für A aus X ist.

Beweis
1. ($\Rightarrow$)

Durch Induktion über die Ableitungsstufe k zeigen wir:

Wenn $X \cup ax_{\Sigma,V}$ Abl^k A, so gibt es einen Beweis BEW für A aus X.

Dieser Induktionsbeweis wird nicht ausgeführt, sondern dem Leser als Übungsaufgabe gestellt.

2. ($\Leftarrow$)

Wir beweisen durch Induktion über die Länge n eines Beweises:

Wenn $[B_1, \ldots, B_n]$ ein Beweis aus X für B_n ist, so gilt: X Bew B_n.

Auch dieser Induktionsbeweis wird als Übungsaufgabe gestellt.

■

Mit dieser Begriffsbildung und Lemma 1.6.1.2 können wir das bisher „semantisch“ beschriebene Entscheidungsproblem wie folgt „syntaktisch“ umformulieren. Gegeben sei eine Menge $X \subseteq AUSD(\Sigma, V)$. Mit dem Hauptsatz und Lemma 1.6.1.2 gilt dann:

$$X \Vdash A \text{ genau dann, wenn es einen Beweis } BEW \text{ für } A \text{ aus } X \text{ gibt.}$$

Somit kann man die „semantische“ Frage nach einem Verfahren, das für beliebiges $A \in AUSD(\Sigma, V)$ die Relation $X \Vdash A$ (d. h. ob jedes Modell von X auch Modell von A ist) entscheidet, zurückführen auf die „syntaktische“ Frage nach einem Entscheidungsverfahren dafür, ob für A ein *Beweis* aus X existiert.

Nach den grundsätzlichen Resultaten für $X = \emptyset$ (also lösbare Fälle und Satz von Church) ist in den darauf folgenden Jahren intensiv untersucht worden, für welche nicht-leeren X es Entscheidungsverfahren gibt. *Fazit*: Sobald X „hinreichend ausdrucksfähig“ ist, liegt Unentscheidbarkeit vor, z. B. wenn X ein Axiomensystem für die (allgemeine) Gruppentheorie ist. Entscheidbarkeit ist, genau genommen, eine Ausnahme. Ein entsprechender Beweis erfordert in der Regel detaillierte und schwierige Untersuchungen der betreffenden mathematischen Theorie. Jedoch gibt es interessante und nicht-triviale Theorien, die entscheidbar sind, z. B. die Theorie der *Abelschen* Gruppen, die dreidimensionale euklidische Geometrie, die Theorie der reellen Zahlen (wobei jede dieser Theorien durch eine spezielle Signatur Σ und eine spezielle Menge $X \subsetneqq AUSD(\Sigma, V)$ von Axiomen charakterisiert wird) [?, ?, ?].

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß die Theorie des automatischen bzw. maschinellen Beweisens nach Verfahren bzw. Programmen fragt, mit denen möglichst effizient ein Beweis konstruiert werden kann, falls ein solcher existiert. Existiert jedoch für ein A kein Beweis aus X, so soll ein solches Verfahren nach endlich-vielen Schritten abbrechen und mit „Nein" antworten (d. h. es gibt keinen Beweis), falls Entscheidbarkeit vorliegt. Ist für ein X die Menge $Be(X)$ unentscheidbar, so kann man eine solche Antwort (im Falle nicht $X\,Bew\,A$) nicht erwarten (man hätte sonst einen Widerspruch zur Unentscheidbarkeit); vielmehr wird ein solches Verfahren für ein A mit nicht $X\,Bew\,A$ im allgemeinen (d. h. gewisse A können dabei ausgenommen sein) ohne Resultat ad infinitum weiterlaufen.

1.6.2 Lösbare Fälle

Wir wollen im folgenden einige lösbare Fälle diskutieren, wobei wir keine Vollständigkeit anstreben. Weitere Informationen kann der interessierte Leser finden in W. ACKERMANN [1].

Die hier diskutierten Fälle sind für die Anwendungen wichtig. Sie fallen zum Teil unter ein Schema, das in der englisch-sprachigen Literatur unter dem Terminus *(Constructive) Finite Model Property* zitiert wird und das allgemein in der Logik und bei der Untersuchung spezieller (mathematischer) Theorie eine große Bedeutung hat. (Im Deutschen hat sich bisher — außer der wörtlichen Übersetzung — kein verbindlicher entsprechender Terminus eingebürgert.)

Gegeben sei eine Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

sowie eine Menge

$$AUSD \subseteq AUSD(\Sigma, V).$$

Definition 1.6.2.1
$AUSD$ erfüllt die Constructive Finite Model Property (CFMP)
$=_{def}$ Es gibt eine rekursive Funktion φ mit

1. *φ ist für alle $A \in AUSD$ definiert, $\varphi(A) \in \mathbb{N}^+$.*
2. *Für alle $A \in AUSD$ gilt: Hat A ein Modell $\mathfrak{I}$, so gibt es ein $\mathfrak{I}' = [\Sigma, \Delta', \Phi', \Pi']$ mit*
   1. *$\mathfrak{I}' \models A$ und*
   2. *$card\,\Delta'_s \leq \varphi(A)$ für alle $s \in SO$.*

Bemerkung:
Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$|\mathfrak{I}'| =_{def} \begin{cases} max\{card\,\Delta'_s | s \in SO\}, & \text{falls dieses Maximum existiert} \\ \aleph_0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Ist die CFMP für $AUSD(\Sigma, V)$ erfüllt, so ergibt sich die Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit für Ausdrücke $A \in AUSD(\Sigma, V)$ auf Grund des folgenden Lemmas.

Lemma 1.6.2.1
Wenn gilt:

1. *$AUSD$ erfüllt die CFMP vermöge φ,*
2. *für alle A: Wenn $A \in AUSD$, so $\neg Gen(A) \in AUSD$.*

3. *für alle* A: $\varphi(\neg Gen(A)) \leq \varphi(A)$,

dann gilt für alle $A \in AUSD$:

A ist allgemeingültig genau dann, wenn für alle $\mathfrak{I}' \in ALG(\Sigma)$:

$$\textit{Wenn } |\mathfrak{I}'| \leq \varphi(A), \textit{ so } \mathfrak{I}' \models A.$$

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzungen 2 und 3 sind, wie der folgende Beweis zeigen wird, erforderlich; sie sind aber in den Anwendungen dieses Lemmas in der Regel erfüllt.
2. Aus diesem Lemma folgt für $AUSD$ die Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit, wenn man beachtet, daß bei $|\mathfrak{I}'| \leq \varphi(A)$ es (bis auf Isomorphie, siehe Theorem 1.2.7.13) nur endlich-viele Σ-algebraische Systeme mit fixierter endlicher Kardinalzahl $card\,\Delta'_s$ gibt.

Beweis
ad 1 ($\Rightarrow$):

Diese Richtung des Lemmas ist trivial.

ad 2 ($\Leftarrow$):

Wir beweisen diese Richtung indirekt, indem wir annehmen, daß für $A \in AUSD(\Sigma, V)$ gilt:

(1) $$\text{nicht } ag\ A.$$

Dann folgt

(2) $$\text{nicht } ag\ Gen(A),$$

also

(3) $$\text{es existiert ein } \mathfrak{I} \text{ mit } \mathfrak{I} \models \neg Gen(A).$$

Mit Voraussetzung 1 und 2 unseres Lemmas folgt aus (3), daß

(4) $$\text{es existiert ein } \mathfrak{I}' \text{ mit } \mathfrak{I}' \models \neg Gen(A) \text{ und } |\mathfrak{I}'| \leq \varphi(\neg Gen(A)).$$

Daraus folgt nach Definition von $\models$ und Voraussetzung 3 unseres Lemmas, daß gilt:

(5) $$\text{es existiert ein } \mathfrak{I}' \text{ mit nicht } \mathfrak{I}' \models A \text{ und } |\mathfrak{I}'| \leq \varphi(A).$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß alle $\mathfrak{I}'$ mit $|\mathfrak{I}'| \leq \varphi(A)$ Modelle von A sind.

■

Theorem 1.6.2.2
Sind für die Menge $AUSD \subseteq AUSD(\Sigma, V)$ *die Voraussetzungen von Lemma 1.6.2.1 erfüllt, so ist die Allgemeingültigkeit für AUSD entscheidbar.*

Beweis
Schritt 1: Anwendung von Lemma 1.6.2.1 und dadurch für ein gegebenes $A \in AUSD$ Reduktion der Prüfung, ob $\mathfrak{I} \models A$ für alle $\mathfrak{I} \in ALG(\Sigma)$ gilt, auf den Spezialfall, ob $\mathfrak{I} \models A$ für alle $\mathfrak{I} \in ALG(\Sigma)$ mit $|\mathfrak{I}| \leq \varphi(A)$ gilt.

Schritt 2: Feststellung, daß auf Grund von Theorem 1.2.7.13 die Menge

$$\{\mathfrak{I} \mid \mathfrak{I} \in ALG(\Sigma) \text{ und } |\mathfrak{I}| \leq \varphi(A)\}$$

„bis auf Isomorphie" nur endlich-viele Elemente enthält, die sämtlich auf Grund der Rekursivität von φ konstruierbar sind.

Schritt 3: Für die endlich-vielen konstruierten $\mathfrak{I}$ prüfen, ob

$$\mathfrak{I} \models A$$

gilt, wobei wegen $|\mathfrak{I}| \leq \varphi(A)$, also alle Individuenbereiche von $\mathfrak{I}$ sind endlich, die Relation $\mathfrak{I} \models A$ entscheidbar ist.

■

Anmerkung
Das beschriebene Entscheidungsverfahren ist extrem ineffizient; aber es war allein unsere Aufgabe, die Existenz eines Entscheidungsverfahrens zu zeigen. Effizienzuntersuchungen gehören zur Komplexitätstheorie; wir müssen hier aus Zeit- und Platzgründen darauf verzichten.

Wir ziehen zwei Folgerungen aus Theorem 1.6.2.2.

Theorem 1.6.2.3 (L. LÖWENHEIM, 1915 [16])
Für monadische Prädikatenkalküle ist die Allgemeingültigkeit entscheidbar.

Beweis
Zur Erinnerung: Man spricht von einem monadischen Prädikatenkalkül, wenn die betreffende Signatur Σ keine Funktionssymbole und allein einstellige Prädikatensymbole enthält.

Es sei eine Sorte $s \in SO$ fixiert. Wir nehmen an, daß in $A \in AUSD(\Sigma, V)$ genau die Prädikatensymbole

$$P_1, \ldots, P_n \quad (n \geq 1)$$

der Sorte s vorkommen. Für $\xi, \eta \in \Delta_s$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \xi \approx_s \eta =_{def} & (\xi \in \Pi_{P_1} \text{ genau dann, wenn } \eta \in \Pi_{P_1}) \\ & \text{und} \\ & \vdots \\ & \text{und} \\ & (\xi \in \Pi_{P_n} \text{ genau dann, wenn } \eta \in \Pi_{P_n}) \end{aligned}$$

Dann folgt

1. $\approx_s$ ist für $s \in SO$ eine Äquivalenzrelation und es gilt $card(\Delta_s / \approx_s) \leq 2^n$,
2. die Relationen Π_P, $P \in PS$, sind stabil bezüglich $\approx_s$ $(s \in SO)$, also existiert die Faktorstruktur $\mathfrak{I} / \approx_s$ $(s \in SO)$ und $h(\xi) =_{def} \overline{\xi}$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{I}$ auf $\mathfrak{I} / \approx_s$ $(s \in SO)$.

Daraus folgt aber, daß Lemma 1.6.2.1 gilt, also liegt nach Theorem 1.6.2.2 Entscheidbarkeit vor.

■

Theorem 1.6.2.4 (L. LÖWENHEIM, 1915)
Für alle monadischen Prädikatenkalküle mit Identität ist die Allgemeingültigkeit entscheidbar.

Beweis
Analog zum Beweis von Theorem 1.6.2.3. ■

Theorem 1.6.2.5 (L. E. Post, 1921, Łukasiewicz, Wittgenstein, Behmann)
Für gegebenes Σ ist die Allgemeingültigkeit für die quantorenfreien Ausdrücke aus $AUSD(\Sigma, V)$ entscheidbar.

Beweis
Analog zum Beweis von Theorem 1.6.2.3. ■

Theorem 1.6.2.6
Für gegebenes Σ ist die Allgemeingültigkeit für Ausdrücke in pränexer Normalform für die folgenden Präfixklassen entscheidbar:

1. $\forall \cdots \forall \exists \cdots \exists$ *(Bernays, Schönfinkel, 1928)*
2. $\forall \cdots \forall \exists \forall \cdots \forall$ *(Ackermann, Skolem, Herbrand, 1928)*
3. $\forall \cdots \forall \exists \exists \forall \cdots \forall$ *(Gödel, Kalmár, Schütte, 1932/34)*

Beweis
Siehe Buch W. Ackermann, Solvable Cases ... ■

Theorem 1.6.2.7
Für alle monadischen Prädikatenkalküle mit einstelligen Funktionssymbolen, aber ohne Identität, ist die Allgemeingültigkeit entscheidbar.

Beweis
Siehe Arbeit (Dissertation) von Thomas Eichholz [8]. ■

Abschlußbemerkung
Neben der Constructive Finite Model Property ist als weitere allgemeine Methode die *Quantorenelimination* zu nennen, die dann zusammen mit Theorem 1.6.2.5 zur positiven Lösung eines Entscheidungsproblems führen kann.

1.6.3 Das Unentscheidbarkeitstheorem von Church

Das Unentscheidbarkeitstheorem von Church gehört von seiner Natur her nicht in den Kreis der Sätze, die wir in Abschnitt 1.5 behandelt haben und die in gewisser Weise „miteinander verwandt“ sind, das sind

- der Hauptsatz
- der Kompaktheitssatz für *Cons*
- der Endlichkeitssatz für Modelle
- der Gödelsche Vollständigkeitssatz
- die Sätze von Löwenheim/Skolem für den Fall ohne bzw. mit Identität.

Im vorangegangenen Abschnitt 1.6.2 hatten wir die Constructive Finite Model Property (CFMP) betrachtet und mit ihrer Hilfe das Entscheidungsproblem in einer Reihe von Spezialfällen gelöst.

Unter dem Eindruck dieser Betrachtungen kann man den folgenden Fakt als eine „Vorwarnung" dafür ansehen, daß das Entscheidungsproblem nicht mehr (positiv) gelöst werden kann, falls nur die verwendete Signatur und die darauf aufgebaute Sprache gewisse Voraussetzungen erfüllen. Dieser Fakt besteht darin, daß es dann Ausdrücke A gibt, die im „Unendlichen" ein Modell haben, für die es aber kein Modell mit einem endlichen Individuenbereich gibt.

Als Beispiel betrachten wir eine Signatur $\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$, in der es eine Sorte $s \in SO$ und ein Prädikatensymbol $P \in PS$ mit $\alpha(P) = ss$ gibt. Es seien x, y, z paarweise verschiedene Individuenvariablen der Sorte s. Wir betrachten dann den Ausdruck A mit

$$A =_{def} \forall x \neg Pxx \wedge \forall x \exists y Pxy \wedge \forall x \forall y \forall z (Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz).$$

Wählt man als Individuenbereich Δ_s die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und interpretiert man P als die „Kleiner"-Relation $<$ über $\mathbb{N}$, dann erhält man ein Modell für A. — Nimmt man nun an, daß es ein Modell mit einem endlichen Individuenbereich für A gibt, folgt daraus unmittelbar ein Widerspruch.

In der Literatur findet man verschiedene Methoden, mit denen der Satz von CHURCH bewiesen werden kann.

Als erstes sind die „direkten" Methoden zu nennen. Hier wird von einer bestimmten Präzisierung des Begriffs „Entscheidungsverfahren" ausgegangen, etwa durch eine Turing-Maschine oder mit den Begriffsbildungen des λ-Kalküls oder auf der Grundlage des Begriffs der (allgemein-)rekursiven Funktion. Man nimmt dann an, daß das Entscheidungsproblem, etwa die Allgemeingültigkeit, für die gewählte prädikatenlogische Sprache lösbar sei. Diese Annahme wird anschließend zum Widerspruch geführt. Die Grundidee dabei ist, daß die gewählte Sprache so „ausdrucksstark" ist, daß man einen Ausdruck dieser Sprache konstruieren kann, der die „Funktionsweise" der gewählten Präzisierung (also Turing-Maschine, λ-Kalkül oder allgemein-rekursive Funktion) „beschreibt". Eine solche „Beschreibung" zu finden und das betreffende „Korrektheitslemma" zu beweisen, ist im allgemeinen mühselig und langwierig, wobei das Korrektheitslemma besagt, daß der konstruierte Ausdruck die Funktionsweise des gewählten präzisierten Begriffs eines Verfahrens exakt beschreibt.

Zweitens sind die sogenannten „indirekten" Beweismethoden zu nennen, die man auch häufig unter der Bezeichnung „*Reduktionsmethoden*" zusammenfaßt. Sie beruhen darauf, daß man (auf direktem Wege) bereits bewiesen hat, daß ein bestimmtes Problem $\mathcal{P}$ (genauer, daß die unendliche Klasse von Instantiierungen dieses Problems) unentscheidbar ist.

Man konstruiert nun zu jeder Instantiierung I dieses Problems einen Ausdruck A_I der gewählten Sprache so, daß I eine Lösung hat genau dann, wenn A_I allgemeingültig ist. Wäre nun die Allgemeingültigkeit entscheidbar, so wäre auch das gewählte Problem $\mathcal{P}$ entscheidbar, also hätte man einen Widerspruch.

Die Reduktionsmethode ist im allgemeinen einfacher durchzuführen, falls man ein unentscheidbares Problem $\mathcal{P}$ wählt, dessen Instantiierungen sich besonders einfach durch Ausdrücke beschreiben lassen.

Als ein solches Problem bietet sich das POSTsche *Korrespondenz-Problem* an.

Ausgangspunkt ist ein endliches Alphabet. Wir beschränken uns im folgenden auf ein Binäralphabet, d. h. ein Alphabet, bestehend aus zwei Buchstaben, etwa 0 und 1. (Das genügt für alles Folgende!) Das POSTsche Korrespondenz-Problem wird nun durch seine Instantiierungen definiert, die wir POSTsche Korrespondenz-*Systeme* nennen.

Ein POSTsches Korrespondenz-*System* ist festgelegt durch zwei gleichlange nicht-leere Folgen

$$\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

und

$$\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$$

von nicht-leeren Wörtern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \{0,1\}^*$. Dieses POSTsche-Korrespondenz-System wird durch $PKS(\alpha, \beta)$ bezeichnet. Sei nun $l \geq 1$, $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$.

Definition 1.6.3.1

1. $[i_1, \ldots, i_l]$ *ist eine Lösung von* $PKS(\alpha, \beta) =_{def} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l} = \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}$.

2. $PKS(\alpha, \beta)$ *ist lösbar*
   $=_{def}$ *Es gibt* $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$, $l \geq 1$, *so daß die Folge* $[i_1, \ldots, i_l]$ *eine Lösung von* $PKS(\alpha, \beta)$ *ist.*

Theorem 1.6.3.1
Das POSTsche *Korrespondenz-Problem (über* $\{0,1\}$*) ist unentscheidbar.*

Beweis
Ein Beweis dieses Satzes ist aus der Grundvorlesung „Grundbegriffe der Theoretischen Informatik“ (GTI) (4. Semester, FB Informatik der Universität Dortmund) bekannt und wird deshalb hier nicht dargestellt. Siehe auch das Buch [14] von JOHN E. HOPCROFT und JEFFREY D. ULLMANN. ■

Für die nun folgende Reduktion (siehe dazu auch das Buch [20] von UWE SCHÖNING) des Satzes von CHURCH auf die Unentscheidbarkeit des POSTschen Korrespondenzproblems (Theorem 1.6.3.1) sei eine Signatur

$$\Sigma = [SO, FS, PS, \alpha]$$

gegeben, die die folgenden Voraussetzungen erfüllt: Es gibt eine Sorte $s \in SO$, so daß es für diese Sorte ein nullstelliges Funktionssymbol c, zwei einstellige Funktionssymbole f_0 und f_1 sowie ein zweistelliges Prädikatensymbol P in Σ vorkommen. Gegeben sei weiterhin ein Wort $\gamma = d_1 \ldots d_m$ mit $m \geq 1$ und $d_1, \ldots, d_m \in \{0,1\}$. Wir definieren den Term $g_\gamma(x)$ für eine Individuenvariable $x \in V_s$ wie folgt

$$g_\gamma(x) =_{def} f_{d_1}(f_{d_2}(\cdots f_{d_m}(x)\cdots)).$$

Hinter dieser Definition steht die folgende Absicht:

- Δ_s wird als $\{0,1\}^*$ gewählt,
- c wird als das leere Wort aus $\{0,1\}^*$ interpretiert,
- wird x durch das Wort $w \in \{0,1\}^*$ interpretiert, so wird $f_0(x)$ als $0w$ interpretiert, d. h. f_0 wird als „Linksmultiplikation“ mit 0 in $\{0,1\}^*$ interpretiert. Analog wird f_1 als Linksmultiplikation mit 1 in $\{0,1\}^*$ interpretiert.

Demgemäß hat der Term $g_\gamma(c)$ bei dieser Interpretation das Wort γ als Wert. Mit dem Prädikatensymbol P verbinden wir die folgende Intention: Es wird über dem Bereich $\{0,1\}^*$ durch eine binäre Relation R interpretiert, für die für beliebige $\xi, \eta \in \{0,1\}^*$ gelten soll:

$R\xi\eta$ genau dann, wenn es ein $l \geq 1$ und Elemente $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so daß $\xi = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l}$ und $\eta = \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}$.

D. h. ξ und η stehen in der Relation R genau dann, wenn sie sich durch dieselbe Indexfolge aus „α-Elementen“ bzw. „β-Elementen“ erzeugen lassen.

Auf der Grundlage dieser Veranschaulichung konstruieren wir in drei Schritten einen bestimmten Ausdruck A.

Schritt 1 (Anfangsbedingung):

$$\begin{array}{c} Pg_{\alpha_1}(c)g_{\beta_1}(c) \\ \vdots \\ Pg_{\alpha_n}(c)g_{\beta_n}(c) \end{array}$$

$$B_1 =_{def} \bigwedge_{\nu=1}^{n} Pg_{\alpha_\nu}(c)g_{\beta_\nu}(c)$$

Offenbar „besagt“ der Ausdruck B_1, daß entsprechend der obigen Charakterisierung von R das Paar $[\xi, \eta]$ schon dann in der Relation R steht, wenn es sich in einem (d. h. $l = 1$) Schritt aus „α-Elementen“ bzw. „β-Elementen“ erzeugen läßt. Demgemäß kann man B_1 als Anfangsbedingung des Erzeugungsprozesses auffassen.

Schritt 2 (Induktionsbedingung):

$$B_2 =_{def} \forall x \forall y \left(Pxy \rightarrow \bigwedge_{\nu=1}^{n} Pg_{\alpha_\nu}(x)g_{\beta_\nu}(y) \right)$$

Der Ausdruck B_2 „besagt“ offensichtlich folgendes: Wenn ξ bzw. η durch dieselbe Indexfolge $[i_1, \ldots, i_l]$ aus „α-Elementen“ bzw. „β-Elementen“ erzeugt werden, dann trifft dies für beliebiges $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ auch für die Elemente $\alpha_\nu \xi$ und $\beta_\nu \eta$ zu, weil trivialerweise die Indexfolge $[\nu, i_1, \ldots, i_l]$ dies leistet.

Schritt 3:

$$C =_{def} \exists z Pzz$$

Dieser Ausdruck „besagt“ offenbar, daß es eine Indexfolge $[i_1, \ldots, i_l]$ gibt, die bei Verwendung von α-Elementen dasselbe liefert wie bei Verwendung von β-Elementen, d. h. C „besagt“, daß das betreffende POSTsche Korrespondenz-System eine Lösung hat.

Wir definieren nun

$$A_{\alpha,\beta} =_{def} B_1 \wedge B_2 \rightarrow C$$

und beweisen das folgende Korrektheitslemma.

Lemma 1.6.3.2
$PKS(\alpha, \beta)$ hat eine Lösung genau dann, wenn $A_{\alpha,\beta}$ allgemeingültig ist.

Beweis
ad 1 ($\Leftarrow$):
Diese Richtung ist einfacher zu beweisen, deshalb beginnen wir damit.

Wir nehmen an, daß für jedes Σ-algebraische System $\mathfrak{I}$ gilt

$$\mathfrak{I} \models A_{\alpha,\beta}.$$

Also trifft dies auch für dasjenige System $\mathfrak{I}_{ST}$ zu, das wir oben als Interpretation benutzt haben, d. h. für das gilt

$\Delta_s = \{0,1\}^*$
$\Phi_c = e$ (das leere Wort in $\{0,1\}^*$)
Φ_{f_0} = Linksmultiplikation mit 0 in $\{0,1\}^*$
Φ_{f_1} = Linksmultiplikation mit 1 in $\{0,1\}^*$
$\Pi_P = \{[\xi,\eta] |$ Existiert ein $l \geq 1$ und es gibt $i_1, \ldots, i_l \in \{1,\ldots,n\}$, so daß $\xi = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l}$ und $\eta = \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}\}$.

Weitere in Σ noch vorkommende Sorten, Funktionssymbole und Prädikatensymbole können beliebig interpretiert werden; die Wahl dieser Interpretationen hat offenbar auf die folgenden Betrachtungen keinen Einfluß. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß wir bei $\mathfrak{I}_{ST}$ durch den Index ST andeuten wollen, daß im Hinblick auf s, c, f_0, f_1 und P eine Standardinterpretation vorliegt.

Nun gilt aber nach Konstruktion

$$\mathfrak{I}_{ST} \models B_1$$

und

$$\mathfrak{I}_{ST} \models B_2,$$

also folgt aus der Voraussetzung

$$\mathfrak{I}_{ST} \models B_1 \wedge B_2 \rightarrow C$$

unmittelbar

$$\mathfrak{I}_{ST} \models C,$$

und daraus ergibt sich wieder nach Konstruktion, daß $PKS(\alpha,\beta)$ eine Lösung hat.

ad 2 ($\Rightarrow$):
Wir setzen voraus, daß

(6) $PKS(\alpha,\beta)$ eine Lösung hat.

Für ein beliebiges Σ-algebraisches System $\mathfrak{I}$ setzen wir ferner voraus, daß

(7) $$\mathfrak{I} \models B_1$$

und

(8) $$\mathfrak{I} \models B_2.$$

Wir haben dann zu zeigen daß

(9) $$\mathfrak{I} \models C$$

gilt.

Es sei gegeben eine Interpretation $\mathfrak{I}$ der Form

$$\mathfrak{I} = [\Sigma, \Delta, \Phi, \Pi].$$

Wir definieren nun durch Indultion über die Länge von $w \in \{0,1\}^*$ eine Abbildung

$$h : \{0,1\}^* \rightarrow \Delta_s$$

wie folgt:

$$h(e) =_{def} \Phi_c$$
$$h(0w) =_{def} \Phi_{f_0}(h(w))$$
$$h(1w) =_{def} \Phi_{f_1}(h(w))$$

Daraus folgt mit der Definition

$$g_w(c) = f_{d_1}(f_{d_2}(\cdots f_{d_m}(c)\cdots))$$

für $w = d_1 \ldots d_m$ $(d_1, \ldots, d_m \in \{0,1\})$, daß

(10) $$h(w) = EL(g_w(c), \mathfrak{I}).$$

(Weil $g_w(c)$ keine Individuenvariablen enthält, kann in $EL(g_w(c), \mathfrak{I}, \sigma)$ der $\mathfrak{I}$-Zustand σ weggelassen werden, da in diesem Fall $EL(g_w(c), \mathfrak{I}, \sigma)$ von σ unabhängig ist.

Um nun (9) zu zeigen, genügt es zu zeigen:

(11) es gibt ein $\xi \in \Delta_s$, so daß $[\xi, \xi] \in \Pi_P$ gilt.

Wendet man (7) und (8) (rekursiv) an, genügt es (um (11) zu zeigen) zu beweisen, daß

(12) es eine Folge $i_1, \ldots, i_l$ mit $l \geq 1$ und $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit
$$EL(g_{\alpha_{i_1}}(\cdots g_{\alpha_{i_l}}(c)\cdots), \mathfrak{I}) = EL(g_{\beta_{i_1}}(\cdots g_{\beta_{i_l}}(c)\cdots), \mathfrak{I}).$$

Nach Voraussetzung hat aber $PKS(\alpha, \beta)$ eine Lösung, d. h.

(13)
es gibt eine Folge $i_1, \ldots, i_l$ mit $l \geq 1$ und $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l} = \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}$.

Daraus folgt trivial

(14) $$h(\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l}) = h(\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}),$$

also mit (10), daß

(15) $$EL(g_{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l}}(c), \mathfrak{I}) = EL(g_{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}}(c), \mathfrak{I}).$$

Auf Grund der Definition von $g_w(c)$ folgt aber trivial

(16) $$EL(g_{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l}}(c), \mathfrak{I}) = EL(g_{\alpha_{i_1}}(\cdots g_{\alpha_{i_l}}(c)\cdots), \mathfrak{I})$$

und

(17) $$EL(g_{\beta_{i_1} \ldots \beta_{i_l}}(c), \mathfrak{I}) = EL(g_{\beta_{i_1}}(\cdots g_{\beta_{i_l}}(c)\cdots), \mathfrak{I}),$$

also folgt aus (15), (16) und (17), daß

(18) $$EL(g_{\alpha_{i_1}}(\cdots g_{\alpha_{i_l}}(c)\cdots), \mathfrak{I}) = EL(g_{\beta_{i_1}}(\cdots g_{\beta_{i_l}}(c)\cdots), \mathfrak{I}).$$

Damit ist aber (12), was noch zu beweisen war, gezeigt.

■

Wir können nun das Unentscheidbarkeitstheorem von CHURCH wie folgt formulieren.

Theorem 1.6.3.3
Gibt es in der Signatur Σ eine Sorte s, so daß für diese Sorte ein nullstelliges Funktionssymbol, zwei einstellige Funktionssymbole und ein zweistelliges Prädikatensymbol vorkommen, so ist für die Sprache $AUSD(\Sigma, V)$ die Allgemeingültigkeit unentscheidbar.

Beweis
Indirekt, d. h. wäre die Allgemeingültigkeit in $AUSD(\Sigma, V)$ entscheidbar, so wäre auch das POSTsche Korrespondenz-Problem über $\{0, 1\}$ entscheidbar, im Widerspruch zu Theorem 1.6.3.1 ■

Bemerkungen

1. Im Unterschied zum Beweis der semantischen Vollständigkeit werden hier beim Beweis des CHURCHschen Satzes nicht abzählbar unendlich viele Individuenvariablen verwendet, sondern — genau genommen — nur drei benötigt.

2. Das Theorem 1.6.3.3 kann noch weiter reduziert werden. So kann man z. B. beweisen, daß die Allgemeingültigkeit in $AUSD(\Sigma, V)$ schon dann unentscheidbar ist, falls in Σ für eine Sorte s nur

   - ein zweistelliges Prädikatensymbol vorkommt bzw.
   - zwei einstellige Funktionssymbole sowie das Gleichheitssymbol vorkommen.

Literaturverzeichnis

[1] Ackermann, Wilhelm: *Solvable Cases of the Decision Problem.* North-Holland, Amsterdam, 1954.

[2] Asser, Günter: *Aussagenkalkül*, Band 1 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik.* Verlag Harri Deutsch, Thun·Frankfurt/Main, 6. Auflage, 1983.

[3] Asser, Günter: *Prädikatenkalkül der ersten Stufe*, Band 2 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik.* Verlag Harri Deutsch, Thun·Frankfurt/Main, 2. Auflage, 1976.

[4] Borkowski, L. (editor): *Selected works of* J. Lukasiewicz. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[5] Church, A.: *A note on the Entscheidungsproblem.* Journal of Symbolic Logic, 1:40–41, 1936.

[6] Cohn, P. M.: *Universal Algebra*, volume 6 of *Mathematics and Its Applications.* D. Reidel Publishing Company, 1965.

[7] Ehrig, Hartmut and Bernd Mahr: *Fundamentals of Algebraic Specification I. Equations and Initial Semantics*, volume 6 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science.* Springer-Verlag, 1985.

[8] Eichholz, Thomas: *Semantische Untersuchungen zur Entscheidbarkeit im Prädikatenkalkül mit Funktionsvariablen.* Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, 3:19–28, 1957.

[9] Gödel, Kurt: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik und Physik, 37:349–360, 1930.

[10] Henkin, Leon: *The completeness of the first-order functional calculus.* Journal of Symbolic Logic, 14:159–166, 1949.

[11] Herbrand, Jacques. *Travaux Soc. Lett. Varsoure*, Cl. III, 33:1–128, 1930.

[12] Herbrand, Jacques: *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Thesis, Paris, 1930. Also in [11].

[13] Hermes, Hans: *Einführung in die Verbandstheorie.* Nummer73 in *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer, Zweite Auflage, 1966.

[14] Hopcroft, John E. and Jeffrey D. Ullmann: *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.* Addison–Wesley Series in Computer Science. Addison–Wesley, 1979.

[15] Lloyd, John W.: *Foundations of Logic Programming.* Springer-Verlag, 1984.

[16] Löwenheim, Leopold: *Über Möglichkeiten im Relativkalkül.* Mathematische Annalen, 76:447–470, 1915.

[17] Łukasiewicz, Jan und Alfred Tarski: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Computes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie, 23:30–50, 1930. Nachgedruckt (engl. Fassung) in [4] and [23].

[18] Schmidt, Arnold: *Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen.* Mathematische Annalen, 115:485–506, 1938.

[19] Schmidt, Arnold: *Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittles der üblichen Prädikatenlogik.* Mathematische Annalen, 123:187–200, 1951.

[20] Schöning, Uwe: *Logik für Informatiker*, Band 56 der Reihe *Reihe Informatik.* B·I· Wissenschaftsverlag, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, 3. Auflage, 1992.

[21] Skolem, Thoralf: *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* In: *Wiss. Vorträge des 5. Kongr. d. Skand. Mathematiker*, Seiten 217–232, Helsingfors, 1923.

[22] Surányi, Janos: *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül.* In: *Ungar. Akademie der Wissenschaften*, Budapest, 1959.

[23] Tarski, A.: *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford, 1956.