Skript zur Vorlesung

Synthese und Analyse fraktaler Bilder

gehalten von

Ludwig Staiger

im Wintersemester 93/94

Ausgearbeitet von
Frank Huch und Daniel Schaus

Lehrstuhl für Informatik II
der
Rheinisch Westfälischen Technischen
Hochschule Aachen

Kapitel 0

Einleitung

Fraktale Bilder haben in den vergangenen Jahrzehnten (mit dem Erscheinen von Mandelbrots 1977er Buch) in zunehmendem Maße das Interesse weiter Kreise von Wissenschaftlern auf sich gezogen, nicht nur in der schon traditionell mit Fraktalen beschäftigten Geometrischen Maßtheorie, sondern auch in Physik, Chaostheorie und anderen Naturwissenschaften. Nicht zuletzt durch die Möglichkeiten, die moderne Computer bieten, interessiert man sich auch von Seiten der Computergraphik her an der Berechnung und Darstellung von Fraktalen; dank dieses Interesses hat sich eine Teilwissenschaft entwickelt, die man "Fraktale Geometrie" nennt und die ihre Wurzeln und Beziehungen zu den verschiedenartigen an der Theorie und Praxis der Fraktale interessierten "klassischen" Disziplinen hat. Es kann nicht Ziel einer Vorlesung sein, diese gesamte Entwicklung zu skizzieren oder auch nur umfassend über Fraktale Geometrie zu lehren, sondern man muß sich auf gewisse Teilbereiche zurückziehen.

Dem vorliegenden Text liegt eine Vorlesung zugrunde, in der ich mich bemüht habe, einige neuere Entwicklungen der Fraktalen Geometrie vorzustellen, welche als Erzeugnismechanismen für fraktale Bilder Mechanismen wie endliche Automaten, Lindenmayer-Systeme (L-Systeme), Grammatiken, die aus der Theoretischen Informatik gut bekannt sind, benutzen. Um die Darstellung nicht zu weit zu komplizieren, habe ich mich auf die Behandlung von schwarz-weiß-Bildern beschränkt. Der Inhalt der Vorlesung ist in diesem Punkten im wesentlichen an die folgenden Publikationen angelehnt:

1. M. F. Barnsley, *"Fractals Everywhere"*, Academic Press, Orlando, 1988.

2. J. Berstel and M. Morcrette, *Compact representations of patterns by finite automata*, in: Proc. Pixim '89, Hermes, Paris, 1989, 387 – 402.

3. K. Čulik II and S. Dube, *Automata-theoretic techniques for image generation and compression*, in: Proc. of FST-TCS 1990, Lect. Notes Comput. Sci. **No. 472**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 76 – 90.

4. K. Čulik II and S. Dube, *Encoding images as words and languages*, Intern. J. Algebra and Computation **3** (2) (1993), 211 – 236.

5. K. Čulik II and S. Dube, *L-systems and mutually recursive function systems*, Acta Informatica **30** (1993), 279 – 306.

6. K. Čulik II and S. Dube, *Rational and affine expressions for image description*, Discrete Appl. Math. **41** (1993), 85 – 120.

7. A. Habel, H.–J. Kreowski, and S. Taubenberger, *Collages and patterns generated by hyperedge replacement*, Languages of Design **1** (2), (1993), 125 – 145.

8. W. Merzenich and L. Staiger, *Fractals, dimension, and formal languages*, RAIRO–Inform. Théor., **28** (3–4), (1994), 361 – 386.

Für den Leser, der an weiterführendem und ergänzendem Stoff zu diesem Gebiet interessiert ist, seien im folgenden eine Reihe von Bücher aufgelistet.

1. B. B. Mandelbrot, *"Fractals, Form, Chance, and Dimension"*, Freeman, San Francisco, 1977.

2. B. B. Mandelbrot, *"The Fractal Geometry of Nature"*, Freeman, San Francisco, 1982

3. H. – O. Peitgen and D. Saupe, *"The Science of Fractal Images"*, Springer–Verlag, New York, 1988.

4. K. J. Falconer, *"Fractal Geometry"*, Wiley, Chichester, 1990.

5. H. – O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe, *"Fractals for the Classroom, 1, 2"*, Springer–Verlag, New York, 1992.

6. H. Fernau, *"Iterierte Funktionen, Sprachen und Fraktale"*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994

Die Vorlesung selbst gliedert sich in elf nicht notwendig gleichartige (und auch nicht gleich gewichtige) Abschnitte. In den ersten beiden Kapiteln werden Rasterbilder und reelle Bilder gegenübergestellt, sowie grundlegende Beziehungen zwischen formalen Sprachen und Bildern bzw. Bildsequenzen hergeleitet. Als Illustration ist dabei schon eine einfache Methode der Erzeugung von Fraktalen durch endliche Automaten angegeben.

Iterierte Funktionensysteme (IFS), ein gut erforschter Mechanismus zur Erzeugung sogenannter selbstähnlicher Fraktale, werden im dritten Kapitel eingeführt.

Im vierten Abschnitt ist es dann unerläßlich, den theoretischen Hintergrund – oder warum die bisher betrachteten Methoden funktionieren – herzuleiten, der Abschnitt enthält im wesentlichen die notwendige Grundlage aus der Theorie der metrischen Räume. Danach wenden wir uns im fünften Abschnitt wieder der Implementierung von IFS zu.

Das Ergebnis einer Kreuzung von endlichen Automaten und IFS, die sogenannten Affinen Automaten, werden im nächsten Kapitel behandelt. Unter den äquivalenten, d.h.

dieselbe Art von Fraktalen erzeugenden Mechanismen erweisen sich die Matrix-IFS (in der Literatur kursieren dafür auch noch eine Reihe anderer Namen) als besonders einfach zu handhaben.
Eine geeignete (effiziente) Methode zur Erzeugung von durch Matrix-IFS beschriebenen Fraktalen mittles probabilistischer (Chaos-Game-) Algorithmen wird im siebenten Abschnitt hergeleitet, während das achte Kapitel einfache Verfahren der fraktalen Bildkodierung vorstellt.
Die Fraktale Dimension ist eine Maßzahl für Fraktale, die sich insbesondere in der Geometrischen Maßtheorie größeren Interesses erfreut. Im neunten Kapitel werden die fraktalen Dimensionen und Möglichkeiten ihrer Bestimmung untersucht.
Das zehnte Kapitel beschäftigt sich mit Fraktalen, die durch Lindenmayer-Systemen mit Hilfe der sogenannten Turtle-Graphik erzeugbar sind, und leitet deren Beziehungen zu den durch Matrix-IFS erzeugbaren Fraktalen her.
Schließlich wird im elften und letzten Abschnitt mit Collagegrammatiken ein vom bisherigen stark abweichendes Hilfsmittel zur Erzeugung von Fraktalen vorgestellt.
Im Anhang sind die zur Vorlesung gestellten Übungsaufgaben aufgeführt.

Abschließend möchte ich den Herren Frank Huch und Daniel Schaus für Ihr Engagement und Ihre Sorgfalt bei der Erstellung dieses Vorlesungsskriptes danken.

Aachen, im Januar 1995

Ludwig Staiger

Kapitel 1

Rasterbilder und reelle Bilder

Im ersten Abschnitt werden wir Beziehungen zwischen Rasterbildern, welche besonders für die Darstellung von Bildern im Computer geeignet sind, und sogenannten reellen Bildern, das sind Teilmengen der euklidischen Ebene, betrachten. Letztere sind notwendig, um überhaupt eigentliche Fraktale darstellen zu können. Ein Rasterbild kann immer nur eine endliche Approximation des Fraktals, die sich bei Auflösungsänderungen mit ändert, darstellen.

1.1 Reelle Bilder

Aus der analytischen Geometrie der Ebene ist die Darstellung $\mathbb{R}^2$ für den zweidimensionalen Euklidischen Raum bekannt.
Im folgenden werden wir speziell das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ betrachten.

Definition 1.1 (schwarz-weiß Bild)
Ein schwarz-weiß Bild ist eine abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]^2$.

Bemerkung: Die Menge $\bar{\mathrm{M}} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen dann und nur dann, wenn gilt: aus $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathrm{M}$ folgt $(\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x, \lim\limits_{i \to \infty} y_i = y) \Rightarrow \ (x, y) \ \in \mathrm{M}$

Bemerkung:
Ebenfalls bekannt ist die Repräsentation eines Punktes des $\mathbb{R}^2$ durch das kartesische Koordinatensystem (x, y) bzw. durch Polarkoordinaten (r, φ). Die Entsprechungen dieser Darstellungen in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ werden ebenfalls als bekannt vorausgesetzt:
$(x, y) \leftrightarrow x + yi$ und $(r, \varphi) \leftrightarrow re^{i\varphi}$

1.2 Rasterbilder

Rasterbilder sind eine diskrete Darstellung reeller Bilder. Sie werden z.B. in der Fotografie, beim Buchdruck und am Computer benutzt, wo die nur vorhandene endliche Auflösung diese Darstellungsart bedingt. Das Bild besteht nun aus einem Raster von Bildpunkten

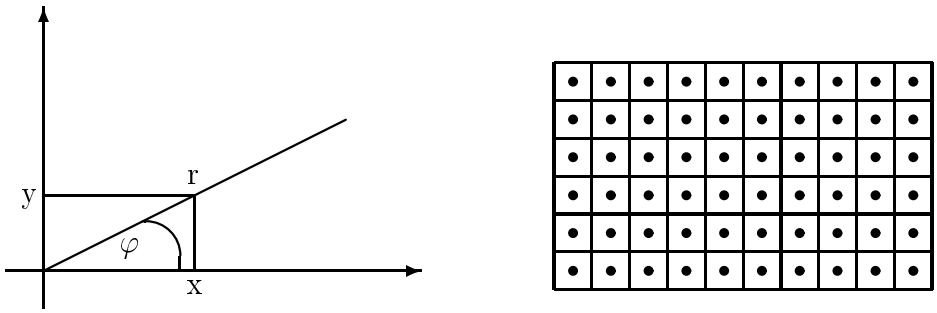
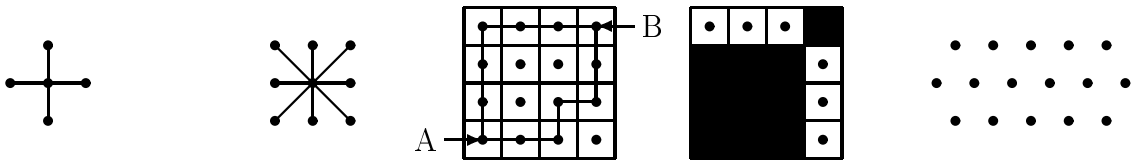


Abbildung 1.1:
Rechtwinklige und Polarkoordinaten, sowie Punkte in einem rechtwinkligen Raster



4er-Nachbarschaft 8er-Nachbarschaft Paradoxa bei 4er- und 8er-Nachbarschaft Bienenwabenraster

Abbildung 1.2:

[pixel, picture elements].

Es fehlt jedoch eine natürliche Topologie, um die Begriffe zu übertragen, die wir bereits aus dem Reellen kennen.

Im folgenden werden wir nur rechtwinklige Raster betrachten.

Definition 1.2 (Rasterbild)

Ein Rasterbild ist eine Teilmenge eines rechtwinkligen $l \times l$ Rasters. Es wird repräsentiert durch eine {0,1} Matrix der Dimension $l \times l$.

Bei dieser Definition eines Rasterbildes stellt sich die Frage, wie man den Begriff Nachbarschaft definieren soll. Unter Nachbarschaft im allgemeinen versteht man die Punkte, die neben einem Punkt liegen. Hier ergeben sich jedoch bereits auf intuitive Weise mehrere Möglichkeiten, die wir im Bild kurz skizzieren wollen (Abb. 1.2):

Beide Versionen haben ihre Vor- und Nachteile. In der 4-er Nachbarschaft existieren viele kürzeste Wege durch zwei auf einer Diagonale liegende Punkte A und B, während in der 8-er Nachbarschaft diese kürzesten Wege eindeutig definiert sind. Umgekehrt können bei der 8-er Nachbarschaft zwei Gebiete , die sich überschneiden, dennoch zusammenhängend sein, was wiederum bei der 4-er Nachbarschaft ausgeschlossen ist. (siehe Abb.1.2: Paradoxa bei Nachbarschaften).

Bemerkung : Eine bessere Möglichkeit zur Definition des Nachbarschaftsbegriffs bieten sogenannte „Bienenwabenraster“. Sie werden häufig in der Fotografie bzw. beim Druck von Fotos in Zeitungen eingesetzt. Bei ihnen sind zwar kürzeste Wege auch nicht eindeutig bestimmt, aber das Komplement eines zusammenhängenden Bereichs ist nicht

zusammenhängend. Bienenwabenraster erfordern jedoch ein „versetztes“ Raster, so daß für unsere Zwecke ein erheblich höherer Aufwand nötig wäre. Der Vorteil dieser versetzten Rasters ist jedoch, daß man mehr Information auf geringerem Platz unterbringen kann („Auflösungserhöhung“).
Glücklicherweise sind für Fraktale kürzeste Wege und Nachbarschaftseigenschaften nicht so von Bedeutung. Die diskrete Darstellung von Fraktalen ist eine Approximation, die durch unsere Anschauung und Fantasie vervollständigt wird. Wollte man ein Fraktal vollständig durch ein Rasterbild darstellen, so ergäbe sich in den interessanten Fällen eine weiße Fläche, da man eine „unendliche Auflösung“, wie man sie für Fraktale benötigt, mit einer endlichen Auflösung nur angenähert darstellen kann.

1.3 Adressierung in Rasterbildern

Bei der Adressierung in Rasterbildern wollen wir zwischen 2 Arten unterscheiden:

- Adressierung durch Koordinaten (direkte Adressierung):

  Das Bild ist eine {0,1}-Matrix der Dimension $l \times l$. Die Indizes der Matrix entsprechen den Koordinaten am Schirm. Dieses Verfahren wird im Computer angewendet. Auf einem Standard VGA Display (640*480) ist es also maximal möglich, ein 480 $\times$ 480 Rasterbild zu realisieren. Die Bildpunkte würden über die Indizes (0,0) bis (479,479) angesprochen.

- Rekursive Adressierung (indirekte Adressierung):

  - Voraussetzung : $l = r^k; r \ll l$; r ist Basis. Diese Voraussetzung wird im weiteren Verlauf des Scriptes immer angenommen, auch wenn dies nicht explizit angegeben ist.
  - Wir unterteilen das quadratische Bild in r^2 „Quadranten“.
  - Jeder dieser Quadranten wird nun rekursiv wieder in „Unterquadranten“ unterteilt. Dieses Vorgehen wird k-mal wiederholt, so daß das Bild letztendlich wieder aus $l \times l$ Quadranten besteht.
  - Ein Quadrant wird nun wie folgt adressiert:
    * Sei X ein Alphabet (Zeichenvorrat) bestehend aus r^2 Zeichen. Jedes Zeichen entspricht einer „Richtung“ (d.h. der relativen Lage eines Unterquadranten zum Ursprungsquadranten).
      X^* sei die Menge aller endlichen Zeichenreihen (Wörter) über X.
      $w \in X^*$entspricht dann genau einem Quadranten.
      Der kleinste Quadrant im $r^k \times r^k$ Raster entspricht einem Pixel.
    * Rekursiv:
      0. e (leeres Wort) entspricht dem gesamten Raster, d.h. das Bild besteht aus einem einzigen großen Pixel.

1. w entspreche dem Quadranten q.
   xw entspricht dann dem durch w bestimmten Unterquadranten im durch x bestimmten Quadranten Q_x erster Ordnung.

* Diese Art der Adressierung läßt sich wie folgt formalisieren:
  - Sei $l = r^k$, $|X| = r^2$, o.B.d.A. $X = Y \times Y$, wobei $Y = \{0, 1, ..., r-1\}$
  - $(a, b) \in X$ entspricht dem a-ten Quadrant in der b-ten Zeile des Bildes
  - Das Raster sei in $r \times r$ Quadranten geteilt.
  - $l \times l$ Raster $\leftrightarrow \{(i, j) | 0 \leq i, j < l\}$
  - $(a, b) \in X \leftrightarrow$ Quadrant 1. Ordnung $\{(i, j) | a \cdot r^{k-1} \leq i < (a+1) \cdot r^k \ \wedge$ $b \cdot r^{k-1} \leq i < (b+1) \cdot r^k\}$
  - Ein Quadrant erster Ordnung ist ein $r^{k-1} \times r^{k-1}$ Raster
* Es ergibt sich für die rekursive Adressierung im $r^k \times r^k$ Raster
  0. e entspricht dem gesamten Raster
  1. xw entspricht dem durch w bestimmten Quadranten im durch x gegebenen $r^{k-1} \times r^{k-1}$ Teilraster

– Folgerung: Der durch $w \in X^*$ bestimmte Quadrant eines $r^k \times r^k$ Rasters wird mit Q_w bezeichnet und hat die Kantenlänge $r^{k-|w|}$ (Beweis erfolgt durch Induktion über die Länge von w, wird hier jedoch nicht näher ausgeführt.)

Beispiel 1.3

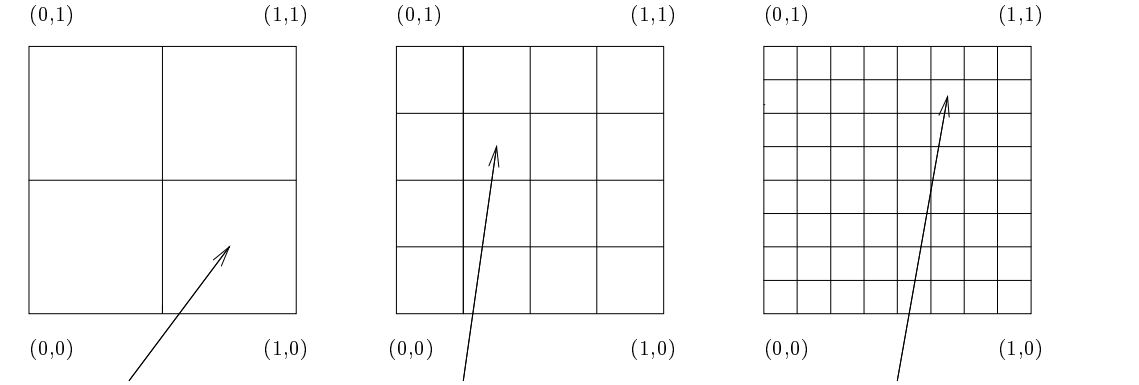


Abbildung 1.3
Adressen im Raster

1.4 Ein Zusammenhang zwischen reellen Bildern und $r^k \times r^k$ Rastern

Um den Zusammenhang zwischen Rasterbildern und reellen Bildern zu erkennen, dient uns die Vorstellung, daß $w \in X^*$ genau einen Quadranten im Raster adressiert.

Wir geben nun an, wie die Adresse w des Quadranten Q_w in seine Koordinatendarstellung umgerechnet werden kann:

$$\text{Sei } w = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } m = |w| \text{ gilt.}$$

Wir ordnen den Folgen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reelle Zahlen zu.

$$\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_m \to a = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot r^{k-i} \\ \\ b_1, \cdots, b_m \to b = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot r^{k-i} \end{pmatrix}$$

Dann entspricht w dem Punkt $\left(\frac{a}{r^k}, \frac{b}{r^k}\right)$ in der Ebene, welcher der linke untere Eckpunkt des Quadrates Q_w ist. Da Q_w die Kantenlänge $r^{-|w|}$ hat, ergibt sich somit

$$Q_w = \left(\frac{a}{r^k}, \frac{a + r^{k-m}}{r^k}\right) \times \left(\frac{b}{r^k}, \frac{b + r^{k-m}}{r^k}\right)$$

Dabei haben wir Rasterbilder (quadratisch) in das Einheitsquadrat eingebettet. Der Vorteil bei diesem Vorgehen liegt in der einheitlichen Größe der Bilder.

$$l \times l \text{ Raster} \to [0,1]^2 \ : \ (i,j) \to \left[\frac{i}{l}, \frac{i+1}{l}\right] \times \left[\frac{j}{l}, \frac{j+1}{l}\right] \ ; \ 0 \le i < l \ , \ 0 \le j < l$$

$$l = r^k \ , \ X = Y \times Y \ , \ Y = \{0, 1, \cdots, r-1\}$$

$w \in X^*$ adressiert ein Teilquadrat von $[0,1]^2$ wie folgt :

1. $|w|$ bestimmt die Größe. Die Kantenlänge beträgt $r^{-|w|}$.
2. Durch w ist der linke untere Eckpunkt gegeben (Verfahren wie oben).

Bezeichnung: $Q_w := \left[\frac{a_w}{r^{|w|}}, \frac{a_w+1}{r^{|w|}}\right] \times \left[\frac{b_w}{r^{|w|}}, \frac{b_w+1}{r^{|w|}}\right]$
Dies liefert uns die Vorstellung einer Familie von $r^k \times r^k$ Rastern über $[0,1]^2$.
Das Rasterbild als Matrix $A \in \{0,1\}^{l \times l} = \{0,1\}^{r^{k-1} \times r^{k-1}}$ liefert uns den Übergang zum reellen Bild $M \subseteq [0,1]^2$ durch

$$\bigcup_{a_{ji} \neq 1} \left[\frac{i}{l}, \frac{i+1}{l}\right] \times \left[\frac{j}{l}, \frac{j+1}{l}\right] \subseteq [0,1]^2$$

Die Rückübersetzung eines reellen Bildes $M \subseteq [0,1]^2$ in ein Rasterbild $A_M \in \{0,1\}^{l \times l}$ verläuft in zwei Schritten :

1. Schritt: Zerlege $[0,1]^2$ gleichmäßig in l^2 Unterquadrate

   Es bleibt die Aufgabe, einem Unterquadrat (i,j) einen Wert $a_{ji} \in \{0,1\}$ zuzuordnen. Die besondere Schwierigkeit liegt hier darin, einen „passenden“ Wert zu finden, falls im Quadranten des reellen Bildes sowohl schwarze, als auch weiße Anteile vorhanden sind.

Wie soll z.B. hier dieses Quadrat im Raster eingefärbt werden ?

2. Schritt: Zuordnung

   (a) Majorität :

   Sei μ ein Maß auf $[0,1]^2$.

$$a_{ji} = \begin{cases} 1, falls\ \mu\ (\boxed{\mathrm{M}_{ij}}) > \frac{1}{2}\mu(\boxed{\quad}) \\ 0, sonst\ \{schwarz\} \end{cases}$$

   (b) Minorität :

$$a_{ji} = 1 \Leftrightarrow \exists x(x \in M \wedge x \in \boxed{\quad}_{ij})$$

   Im folgenden werden wir stets das Minoritätskriterium anwenden, falls es nicht explizit anders angegeben wird.

Bemerkung: μ muß so gewählt werden, daß μ auf dem Rand 0 ergibt.

Abschließende Bemerkung: Rasterbilder sind spezielle reelle Bilder. Die Rückübersetzung für reelle „Rasterbilder“ ist eindeutig unter der Voraussetzung, daß die ehemalige Rastergröße bekannt ist und eben ein Raster dieser Größe oder ein feineres Raster als nötig gewählt wird.

Kapitel 2

Formale Sprachen und Bilder

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß formale Sprachen ein adäquates Mittel zur Beschreibung reeller Bilder, sowie auch ihrer endlichen Approximationen, der Rasterbilder sind. Wir beginnen dabei mit der Zeichnung spezieller Bilder zu formalen Sprachen und erhalten reelle Bilder als Grenzwert (gewisser) Sequenzen von Rasterbildern.

2.0 Formale Sprachen

Eine endliche Menge X wird als Alphabet bezeichnet. Die Menge X^* ist dann die Menge aller Wörter (endliche Zeichenketten) über dem Alphabet X. $W \subseteq X^*$ wird als formale Sprache bezeichnet. Für $w \in W$ und $v \in V$ ist $v{\cdot}w$ die Aneinanderreihung (Konkatenation) der Wörter w und v. Die Notation $w \sqsubseteq v$ bedeutet, daß w ein Anfangsstück (Präfix) von v ist. Weiterhin ist die Menge X^k definiert durch $X^k := \{w \in X^* |\ |w| = k\}$.

2.1 Bilder und Bildsequenzen

Wir beginnen mit einer einfachen Definition spezieller reeller Bilder als Vereinigung der durch die Sprache W definierten Quadranten.
Sei $W \subseteq X^*, X = Y \times Y, Y = \{0, 1, \ldots, r-1\}$, dann ist ein reelles Bild B_W definiert durch $B_W := \bigcup_{w \in W} Q_w$.
Diese Methode erzeugt zwar reelle Bilder, kann aber aufgrund ihrer Orientierung an Quadranten nicht beliebige Feinheit reeller Bilder berücksichtigen. So kann man z.B. quadrantenorientiert keine Linienzüge darstellen.
Sei nun eine unendliche Sprache $W \subseteq X^*$ gegeben. Hieraus ergibt sich mit $(W \cap X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie (Sequenz) von Untersprachen, in denen alle Wörter gleiche Länge haben. Aus dieser Sequenz von Sprachen kann dann eine Sequenz von Rasterbildern erzeugt werden:

$$B_{W,k} := B_{W \cap X^k} = \bigcup_{w \in W, |w| = k} Q_w.$$

Diese Bildfolge ist über immer feineren Rastern angesiedelt. Hierbei stellt sich die Frage, ob eine solche Bildfolge in irgendeiner Weise konvergiert. Zu diesem Zweck führen wir die

folgenden Begriffsbildungen ein.

Definition 2.1

$B_{W,k}$ verfeinert $B_{W,k'}$ genau dann, wenn $B_{W,k} \subseteq B_{W,k'}$.

Satz 2.2

Es sei $k \geq k'$. Dann verfeinert $B_{W,k}$ das Bild $B_{W,k'}$ genau dann, wenn

$$\forall w \in W \cap X^k : \exists w' \in W \cap X^{k'} : w' \sqsubseteq w.$$

Bemerkung Es gelten die folgenden Beziehungen:

1. $Q_{w'} \supseteq Q_w \Leftrightarrow w' \sqsubseteq w$
2. $\exists v \in X^* : Q_v \subseteq Q_{w'} \cap Q_w \Leftrightarrow Q_{w'} \supseteq Q_w \vee Q_{w'} \subseteq Q_w$, mit anderen Worten Q_w und $Q_{w'}$ haben genau dann einen gemeinsamen Unterquadranten, wenn sie ineinander liegen.

Definition 2.3

W heißt Bildfolgensprache genau dann, wenn

1. $W = \emptyset$ [entspricht dem weißen Bild] oder
2. $\forall k \forall k'$ gilt: aus $k \geq k'$ folgt $B_{W,k}$ verfeinert $B_{W,k'}$ und
3. $\forall k \forall k'$ gilt: aus $k \geq k'$ folgt $\forall w' \in W \cap X^{k'} : \exists w \in W \cap X^{k'} : w' \sqsubseteq w$

Bemerkungen

In der Sprachtheorie werden Sprachen mit den Eigenschaften der Bildfolgesprachen auch als Zentren, zentrale Sprachen oder Prozesse bezeichnet.

Eine Motivierung der Bedingungen 2. und 3. läßt sich mit Hilfe der Minimalbedingung geben:

Es sei r gegeben. Dann kann ein reelles Bild über k-Rasterung mit der Minimalbedingung in ein $(r^k \times r^k)$-Rasterbild umgewandelt werden. Hieraus ergibt sich weiter eine Sprache $W_k \subseteq X^k$, welche den Adressen im Bild entspricht. Es ist ohne weiteres klar, daß W_{k+1} die Sprache W_k verfeinert, da bestimmte Quadranten bei Verfeinerung weiß werden. Die dritte Eigenschaft sagt gerade aus,daß ein schwarzer Quadrant niemals ganz weiß wird. Diese dritte Eigenschaft entspricht einer Stetigkeitsbedingung.

Es ergibt sich also $W = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$ ist eine Bildfolgensprache.

2.2 Erzeugung von Fraktalen durch endliche Automaten

Bildfolgesprachen für beliebige Bilder können sehr kompliziert (im Sinne einer algorithmischen Beschreibung) sein. In diesem Abschnitt wollen wir uns mit denjenigen Bildfolgesprachen beschäftigen, die sich auf einfache Art und Weise beschreiben lassen. Einfachste derartige in der Informatik bekannte Beschreibungsweise sind die endliche Automaten.

$\mathcal{A} = (X, Z, \delta, z_0, Z')$ mit der im allgemeinen partiellen Transitionsfunktion

$$\delta : Z \times X \longrightarrow Z$$

sei ein endlicher Automat. Dann wird die Transitionsfunktion rekursiv auf Wörter fortgesetzt:

$$\delta : Z \times X^* \longrightarrow Z$$

mit

- $\delta(z, e) := z$
- $\delta(z, wx) = \begin{cases} \text{nicht definiert} & \text{, falls } \delta(z,w) \text{ nicht definiert oder} \\ & \quad z' := \delta(z,w) \text{ und } \delta(z',x) \text{ nicht definiert} \\ \delta(\delta(z,w),x) & \text{, sonst} \end{cases}$

Solch ein endlicher Automat stellt eine Möglichkeit dar, eine Bildfolgesprache mit endlichen Mitteln zu beschreiben. Zusammen mit der Wortlänge k ergeben sich dann Bilder der Auflösung $r^k \times r^k$.

Die von einem Automaten $\mathcal{A}$ erkannte (dargestellte) Sprache

$$T(\mathcal{A}) = \{w \in X^* | \delta(z_0, w) \in Z'\}$$

ergibt die zugehörigen Bilder bzw. die Bildfolgesequenz $((\{w \in X^n | \delta(z_0, w) \in Z'\})_{n \in \mathbb{N}})$.

Es ergibt sich folgender einfacher Algorithmus zur Darstellung des durch einen Automaten gegebenen (erzeugten) Bildes (in einer vorgegebenen Auflösung k).

Algorithmus zur Darstellung des durch einen Automaten gegebenen Bildes :

```
PROCEDURE fill (z:state; w:word);
  VAR x:char;
  BEGIN
    IF length (w) = k THEN
      IF isfinal (z) THEN
        displayword (w)
      ELSE
        FOR x:='(0,0)' TO '(r-1,r-1)' DO
          IF nextstate (z,x) ≠ ∅ THEN
            fill (nextstate (z,x), concat (w,x))
  END;
```

Die Prozedur wird mit den Initialwerten `z`=z_0 und `w`=e (leeres Wort) gestartet. Der Parameter `k` (*die Auflösung*) muß außerdem noch vorgegeben werden.

Das Ergebnis für `k` $= 1, .., 7$ entspricht der Abbildung 4.6.

Der oben angegebene Darstellungsalgorithmus liefert für beliebige durch endliche Automaten dargestellte Sprachen Resultate, wobei die Bilder der i-ten Auflösungsstufe aber durchaus keine Verfeinerung der Bilder früherer Auflösungsstufen sein müssen (Vgl. Übungsaufgabe 1.1).

Wir geben jetzt eine Charakterisierung derjenigen Automaten an, welche Bildfolgesprachen darstellen.

Satz 2.4

Ein partieller, initial zusammenhängender Automat $\mathcal{A} = (X, Z, \delta, z_0, Z')$ repräsentiert genau dann eine Bildfolgensprache $W = T(\mathcal{A})$, wenn

1. *aus $z \notin Z$' stets $\delta(z, x) \notin Z'$ folgt und*
2. *aus $z \in Z'$ stets $\exists x : \delta(z, x) \in Z'$ folgt.*

Beweis:

Die Bedingung 1. sagt gerade aus, daß aus $w' \notin T(\mathcal{A})$ und $w' \sqsubseteq w$ auch $w \notin T(\mathcal{A})$ folgt. Ein Beweis erfolgt induktiv über das Suffix $u = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{|w|-|w'|}$, für welches $w' \cdot u = w$ gilt.

Analog folgt aus Bedingung 2., daß es für jedes $w' \in T(\mathcal{A})$ und jedes $k \geq |w'|$ ein Wort $w \in T(\mathcal{A})$ mit $|w| = k$ und $w' \sqsubseteq w$ gibt.

Die Notwendigkeit der Bedingungen 1. und 2. des Satzes ist ohnehin klar, da die Bedingungen den Spezialfall $k' = k - 1$ der Definition 2.3 darstellen. □

Nichtleere Bildfolgensprachen können durch partielle Automaten $\mathcal{A} = (X, Z, \delta, z_0, Z)$ dargestellt werden.

2.3 Quadtrees

Anfang der 80er Jahre entwickelte Gargantini (London / Ontario) eine Methode zur kompakten Bilddarstellung für Rasterbilder mittels Quadtrees. Um dies zu verstehen treffen wir folgende Vereinbarung:

Definition 2.5 (Graph)

$G = (V, E)$ heißt (gerichteter) Graph :$\Leftrightarrow E \subseteq V \times V$.

Schreibweise : $v \longrightarrow w$ für $(v, w) \in E$

Ein Baum ist ein initial zusammenhängender zyklenfreier Graph G. G ist genau dann ein Baum, wenn es einen ausgezeichneten Knoten, die Wurzel gibt, von der aus jeder andere Knoten über genau einen Pfad erreicht werden kann.

Markierungen: Knotenmarkierung: $\mu : V \longrightarrow M_1$ und Kantenmarkierung: $\nu : E \longrightarrow M_2$.

Quadtree : Jedes $v \in V$ hat höchstens 4 Nachfolger. Ausgehende Kanten werden mit (0,0), ..., (1,1) markiert und geben die Richtung an.

Beispiel 2.6 Abbildung 2.1 zeigt, wie man das Sierpinski-Dreieck als Quadtree darstellen kann.

Wir merken noch den allgemeinen Zusammenhang zwischen Sprachen $W \subseteq X^*$ und den zugehörigen Bäumen an:

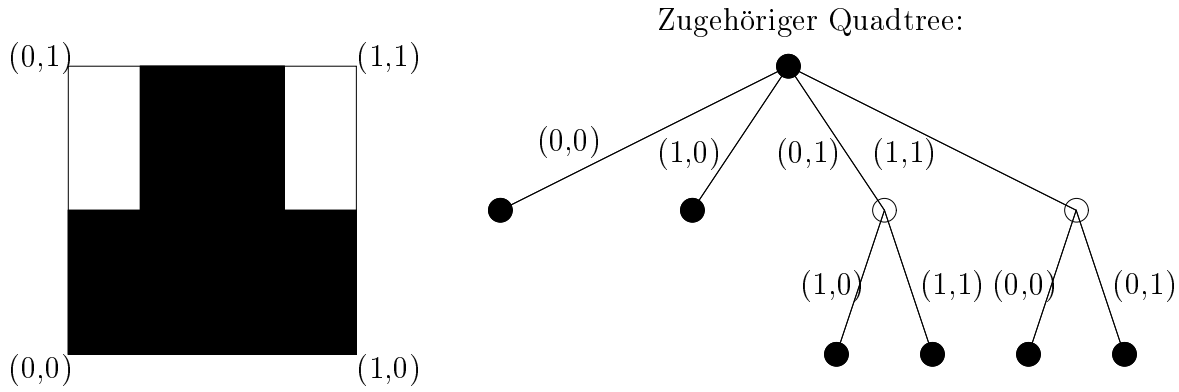


Abbildung 2.1:
Sierpinski-Dreieck mit mit Auflösung $k = 3$ als Quadtree dargestellt

- Sei eine Sprache $W \subseteq X^*$ gegeben. Dann ergibt sich daraus ein markierter Baum:

  $V := \{v \in X^* | \exists w \in W : v \sqsubseteq w\}$

  $E := \{(v, vx) | x \in X \wedge v, vx \in V\}$

  Wurzel : $e \in X^*$, falls $W \neq \emptyset$

  Markierung : $\mu : V \longrightarrow \{0, 1\}$, mit $\mu(v) = 1 \Leftrightarrow v \in W$

- Sei ein Baum B mit den folgenden Eigenschaften gegeben.

  1. Ausgangsgrad ist beschränkt: $\exists k \forall v : |\{(v, w) | (v, w) \in E\}| \leq k$.
  2. Knotenmarkierung mit $\{0, 1\}$
  3. Kantenmarkierung mit X

  Dann existiert eine Sprache $W \subseteq X^*$, die den Baum im wesentlichen beschreibt. Im wesentlichen bedeutet hierbei, daß genau die Teile des Baumes beschrieben werden, von denen noch mit 1 markierte Knoten erreichbar sind.

Definition 2.7 (Quadtree)
Ein Quadtree ist der zu einer präfixfreien endlichen Sprache über $X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ gehörende Baum.
Bemerkung W präfixfrei genau dann, wenn $\forall v, w \in W : w \sqsubseteq v \Rightarrow w = v$
Ein Quadtree beschreibt genau das Bild $\bigcup_{w \in W} Q_w$.
Zu jedem Rasterbild läßt sich dann ein Quadtree finden, der dieses Bild beschreibt. Da der Quadtree möglichst große schwarze Quadranten beschreibt, hat die zugehörige präfix-freie Sprache W eine minimale Anzahl kurzer Wörter. Der Aufwand W zu speichern ist also relativ gering.

2.4 Bildfolgensprachen und reelle Bilder

In diesem Abschnitt geben wir eine Beziehung zwischen reellen Bildern und Rasterbildern (ihrer endlichen Approximation) an. Es wird gezeigt, daß sich jedes reelle Bild als eine Folge (Bildsequenz) von Rasterbildern der Auflösung r^k ($k \in \mathbb{N}$) darstellen läßt. Also sind Bildfolgesprachen ein adäquates Mittel zur simultanen Beschreibung von reellen Bildern und Rasterbildern.
Zuerst erzeugt jede Bildfolgensprache $W \subseteq X^*$ nicht nur eine Folge von Rasterbildern, sondern auch (als Grenzwert) ein reelles Bild.
$W \subseteq X^* \longrightarrow (B_{W,k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{B}_W := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{W,k}$
$\mathbb{R}\mathrm{B}_W$ ist ein reelles Bild:

1. $\mathbb{R}\mathrm{B}_W \subseteq [0,1]^2$ klar
2. $\mathbb{R}\mathrm{B}_W$ ist abgeschlossen, da jedes $B_{W,k}$ abgeschlossen ist und die Abschlußeigenschaft unter ∞ Schnitt erhalten bleibt.

Beispiel 2.8 $W := \{(0,0),(1,0),(0,1)\}^*$ ergibt das Sierpinski-Dreieck.
Wir wissen nun, daß jede Bildfolgensprache ein reelles Bild repräsentiert. Es stellt sich natürlich die Frage, ob umgekehrt auch zu jedem reellen Bild eine zugehörige Bildfolgensprache existiert.

Satz 2.9
Es sei $M \subseteq [0,1]^2$ ein reelles Bild. Dann gibt es zu jedem $r \geq 2$ eine Bildfolgesprache $W \subseteq X^*$ derart, daß $\mathbb{R}\mathrm{B}_W = M$.

Beweis:

Man betrachte die r-adische Zahlendarstellung : z.B. $0,5623\ldots \in [0,1]$. Eine Zahl kann hier mehrere Darstellungen besitzen. So kann also ein $(x,y) \in [0,1]^2$ nicht eindeutig in ein $\zeta \in X^\omega$ umgewandelt werden. Es ist jedoch möglich einen Punkt eindeutig auf die Menge aller Worte, welche diesen Punkt beschreiben abzubilden. Somit ergibt sich eine eindeutige Abbildung

$$M \longrightarrow \{\zeta \in X^\omega | (x_\zeta, y_\zeta) \in M\}.$$

Hierbei gilt, da jede Zahl aus $\mathbb{R}$ maximal zwei Darstellungen über X besitzt, daß $|\{\zeta \in X^\omega | (x_\zeta, y_\zeta) \in M\}| \leq 4$.

ζ läßt sich eineindeutig auf die Menge seiner Präfixe abbilden, d.h. es gibt eine eineindeutige Beziehung $\zeta \longleftrightarrow \{w \in X^* | w \sqsubset \zeta\}$. Man kann also aus dem gesamten Bild M eine Sprache $W \subseteq X^*$ erzeugen:

$$M \longrightarrow W = \{w \in X^* | \exists \zeta : w \sqsubset \zeta \wedge (x_\zeta, y_\zeta) \in M\}$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß $M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{W,k}$:

- Wir zeigen zuerst, daß $M \subseteq B_{W,k}$, für jedes k, ist:

  Wenn $(x,y) \in M$ ist, so existiert ein ζ, mit $(x_\zeta, y_\zeta) = (x,y)$. Sei nun $w \sqsubseteq \zeta$ mit $|w| = k$. Betrachte $\beta := w(0,0)^\omega$ und $\overline{\beta} := w(r-1, r-1)^\omega$. Dann gelten

  $$x_\beta \leq x_\zeta \leq x_{\overline{\beta}} \quad , \quad y_\beta \leq y_\zeta \leq y_{\overline{\beta}} \text{ und } x_{\overline{\beta}} - x_\beta = 1/r^k = y_{\overline{\beta}} - y_\beta,$$

  woraus ,wegen $(x,y) = (x_\zeta, y_\zeta) \in Q_w \subseteq B_{W,k}$, die Inklusion $M \subseteq B_{W,k}$ folgt.

- Nun zeigen wir $M \supseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{W,k}$, d.h. ist $(x,y) \notin M$, so existiert ein k mit $(x,y) \notin B_{W,k}$. Da M abgeschlossen ist und $(x,y) \notin M$, folgt

  $$\exists \epsilon > 0 : \forall (x',y') : \max\{|x - x'|, |y - y'|\} < \epsilon \rightarrow (x',y') \notin M.$$

  Wählen wir nun ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $\epsilon > 4 \cdot r^{-k}$, so gilt für $\zeta \in X^\omega$ mit $(x_\zeta, y_\zeta) \notin M$ sicher, daß der durch das Anfangswort $w \sqsubseteq \zeta$, der Länge k, beschriebene Quadrant Q_w zu M disjunkt ist. Mithin ist $Q_w \cap B_{W,k} = \emptyset$, also $(x,y) \notin B_{W,k}$.

□

Wir haben also gesehen, daß Bildfolgesprachen ein Mittel darstellen, um reelle Bilder zu beschreiben. In wieweit diese Beschreibung tatsächlich konstruktiv ist, hängt von der Natur der erhaltenen Bildfolgesprache W ab, d.h. von der Struktur des Bildes $M \subseteq [0,1]$.

2.5 Operationen auf Bildern

In diesem Abschnitt geben wir einige Operationen für Bilder an, die effizient ausgeführt werden können, wenn man die Darstellung durch Bildfolgesprachen benutzt.

1. Boolesche Operationen

   $M_1, M_2 \subseteq [0,1]^2$ seien Bilder und W_1, W_2 die zugehörige n Bildfolgesprachen. Dann ergibt sich:

   Or: $M_1 \cup M_2 \Leftrightarrow W_1 \cup W_2$

   And: $M_1 \cap M_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2$

   Komplement, exclusiv Oder etc. sind nicht abgeschlossen und somit ist ihre Realisierung schwieriger.

2. Komposition : (verkleinern und zusammensetzen)

   Gegeben: r^2 Bilder $M_{(0,0)}, \ldots M_{(r-1,r-1)}$. Das zusammengesetzte Bild M sei wie folgt definiert:

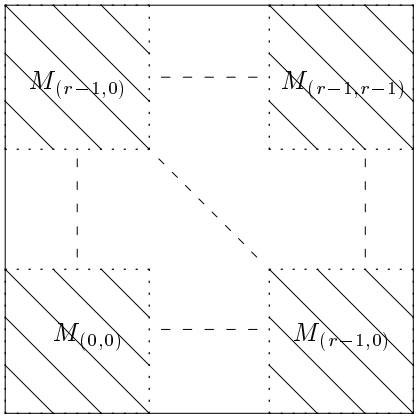


Abbildung 2.2
Komposition einzelner, durch endliche Automaten erzeugte Bilder

$W_{(0,0)}, \ldots, W_{(r-1,r-1)}$ seien die zugehörigen Bildfolgensprachen. Dann ergibt sich für die Komposition die resultierende Bildfolgensprache

$$W := \bigcup_{(i,j)\in X} (i,j) \cdot W_{ij} \cup \{e\} \quad , \quad \text{wobei } W_{ij} \text{ die zu } M_{ij} \text{ gehörige Bildfolgesprache ist.}$$

3. Ausschnittsvergrößerung (zooming) Ein Ausschnitt sei durch $w \in X^*$ bestimmt:

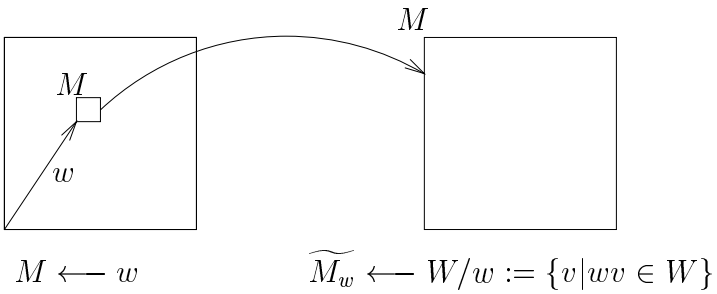


Abbildung 2.3
Vergrößern eines Ausschnittes

4. Rotation um 90°

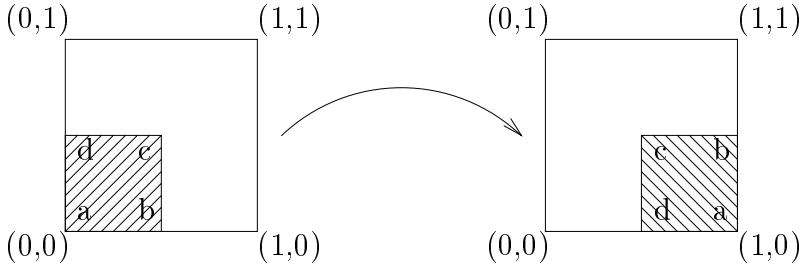


Abbildung 2.4
Rotation um 90°

Bei rekursiver Betrachtung erkennt man, daß diese Rotation um 90° durch Hintereinanderausführung einer Drehung in sich selbst und einer anschließenden Verschiebung erreicht wird. Zu diesem Zweck betrachten wir, wie die einzelnen Quadranten des Bildes bei Rotation transformiert werden. Für den linken unteren Quadranten haben wir dies im oben angegebenen Bild dargestellt. Er wird in sich um 90° gedreht und dann nach rechts verschoben.

Notiert man diese Abfolge mit Hilfe der Bildfolgesprache W, so erhält man die folgende Gleichung.

$$\mathrm{Rot}(W \cap (0,0) \cdot X^*) \;=\; \underbrace{(1,0)}_{Verschiebung} \cdot \underbrace{\mathrm{Rot}(W/(0,0))}_{Drehung\ in\ sich}$$

Analog ergibt sich für die anderen Quadranten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}(W \cap (1,0) \cdot X^*) &= (1,1) \cdot \mathrm{Rot}(W/(1,0)) \\
\mathrm{Rot}(W \cap (1,1) \cdot X^*) &= (0,1) \cdot \mathrm{Rot}(W/(1,1)) \\
\mathrm{Rot}(W \cap (0,1) \cdot X^*) &= (0,0) \cdot \mathrm{Rot}(W/(0,1))
\end{aligned}$$

Summiert man diese Gleichungen auf, so erhält man schließlich die rekursive Definition für die Rotation:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}(W) = \{e\} \cup (1,0) \cdot \mathrm{Rot}(W/(0,0)) \;\cup\; (1,1) \cdot \mathrm{Rot}(W/(1,0)) \\
\cup\, (0,1) \cdot \mathrm{Rot}(W/(1,1)) \;\cup\; (0,0) \cdot \mathrm{Rot}(W/(0,1))
\end{aligned}$$

Dies entspricht einer einfachen Implementierung in X^* durch den Homomorphismus:

$$\begin{aligned}
\varphi_{Rotation\ 90°}\colon (0,0) &\longrightarrow (1,0) \\
(1,0) &\longrightarrow (1,1) \\
(1,1) &\longrightarrow (0,1) \\
(0,1) &\longrightarrow (0,0)
\end{aligned}$$

5. Spiegelung

Mit Hilfe einer Betrachtung, analog zu der bei der Rotation durchgeführten, erhalten wir Implementierunen der Spiegelungen ebenfalls durch Homomorphismen.

(a) an der Mittellinie

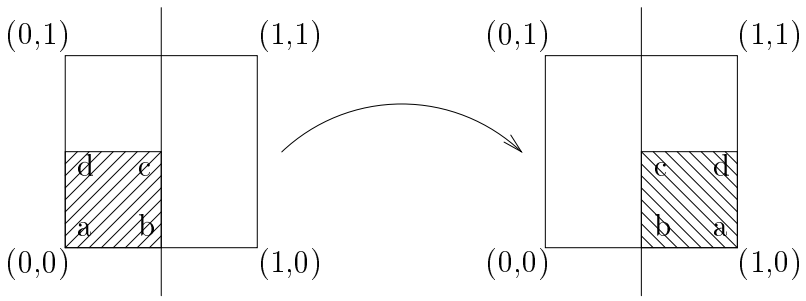


Abbildung 2.5
Spiegelung an der Mittellinie

Implementierung in X^*:

$$\begin{aligned}\varphi_{mitt-spiegelung}\colon (0,0) &\longrightarrow (1,0)\\ (1,0) &\longrightarrow (0,0)\\ (0,1) &\longrightarrow (1,1)\\ (1,1) &\longrightarrow (0,1)\end{aligned}$$

(b) an der Nebendiagonalen

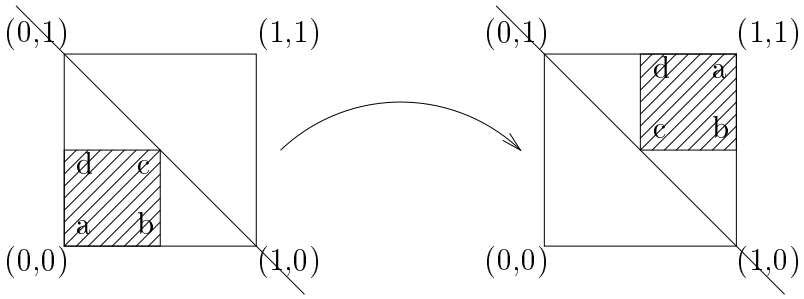


Abbildung 2.6
Spiegelung an der Nebendiagonalen

Die Implementierung in X^*: kann durch Spiegeln an der Mittellinie und Rotation um 90° ersetzt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi_{diag-spiegelung}\colon (0,0) &\longrightarrow (1,1)\\ (1,0) &\longrightarrow (1,0)\\ (0,1) &\longrightarrow (0,1)\\ (1,1) &\longrightarrow (0,0)\end{aligned}$$

6. Verschiebung um $1/r^m$

Bei der horizontalen (oder vertikalen) Verschiebung um eine feste Distanz von $1/r^m$ unterscheiden wir zwischen der zyklischen Verschiebung, bei der das überstehende Stück links (bzw. unten) wieder eingefügt wird und der nicht zyklischen Verschiebung, bei der weiße Streifen angesetzt werden.

In beiden Fällen werden nur die ersten m Buchstaben der Wörter der Bildfolgensprache verändert. Wir demonstrieren dies am Beispiel der zyklischen horizontalen Verschiebung um den Betrag $1/r^m$ nach rechts (im Bild $m = 3$).

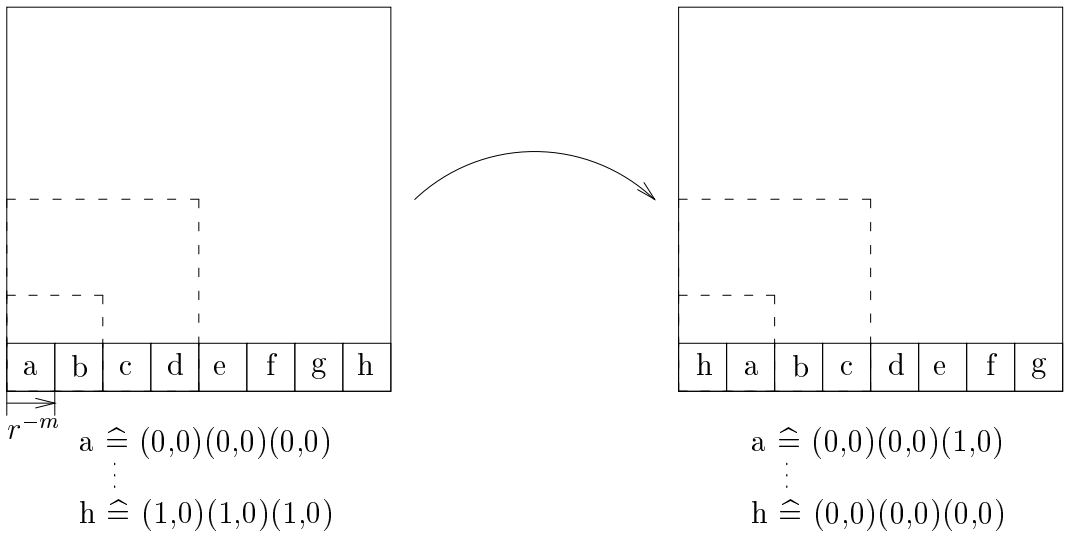


Abbildung 2.7
Verschiebung um $1/r^3$

Die Implementierung in X^* kann durch Addition von $0^{m-1}1$ zur x-Komponente von (x, y) realisiert werden.

Bei der nichtzyklischen Verschiebung um $1/r^m$ werden alle Wörter, deren x-Komponente mit $\underbrace{1\ldots1}_{m-\text{Einsen}}$ beginnt, aus der Bildfolgensprache gestrichen. Danach muß man das Resultat noch "bereinigen", indem man alle Wörter einer Länge $< m$, die keine Fortsetzung der Länge m in der resultierenden Sprache haben, streicht. Das heißt man bildet die größte im Resultat enthaltene Bildfolgensprache.

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Bemerkungen zur Visualisierung von durch Bildfolgesprachen (oder speziell durch endliche Automaten) erzeugten Bildern ab:

1. Zur Verdeutlichung bestimmter Effekte (z.B. Bestimmung von Bereichen mit bestimmten Eigenschaften) ist es günstig, die erzeugten Bilder einzufärben. Es bietet sich hier als einfache Möglichkeit die Einfärbung des Quadranten Q_w ($|w|$ =Auflösung) nach dem Erreichen des Zustands $\delta(z_0, w)$ an.

   Bei zu großer Auflösung ergibt sich allerdings der Effekt, daß das Bild zu bunt werden kann. Man sollte also beim Einfärben die Auflösung des gefärbten Bildes gegenüber der des schwarz-weiß Bildes herabsetzen.

2. Bei der Auflösung k sollte man ein bestimmtes Verhältnis gegenüber der Anzahl der Zustände des erzeugenden Automaten, besser noch gegenüber seinem Erreichbarkeitsgrad

$$Eg(\mathcal{A}) := \min\{n \in \mathbb{N} | Z = \{\delta(z_0, w)| \ |w| \leq n\} \ \}.$$

einhalten, um die Einflüsse sämtlicher Zustände im Bild sichtbar zu machen. Als Faustregel könnte man hier

$$k \geq 2 \cdot Eg(\mathcal{A})$$

gelten lassen.

2.6 Zusammenfassung

1. Bildsequenz $(B_{W,k})_{k\in\mathbb{N}}$ für $W \subseteq X^*$
2. Bildfolgesprachen erzeugen Bildsequenzen einer bestimmten Art
   a) Verfeinerung
   b) Quadrate nie ganz löschen

   Somit 'konvergiert' die Bildsequenz in einem intuitiven Sinne.
3. Beziehung zu reellen Bildern durch Konvergenz $(a_j)_{j=1}^{\infty} \to e, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots$, wobei $a_j \in \{0, \ldots r-1\}$.

   $\to \sum_{j=0}^{k} a_j r^{-j} \longrightarrow a \in \mathbb{R}$

   $|\sum_{j=0}^{k} a_j r^{-j} - \sum_{j=0}^{k+1} a_j r^{-j}| \leq r^{-k+1}$

   $(1/3)_2 = 0,01010101\ldots \widehat{=} e, 0, 01, 010, \ldots$

   $(1/3)_{10} = 0,333333\ldots \widehat{=} e, 3, 33, \ldots$

   $(1/2)_3 = 0,111111\ldots$

   Analog für Paare : $((x_j, y_j))_{j=1}^{\infty} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

   $(x_j)_{j=1}^{\infty} \to e, x_1, x_1x_2, \ldots \to x$

   $(y_j)_{j=1}^{\infty} \to e, y_1, y_1y_2, \ldots \to y$

   Damit für Bildfolgensprachen W:

   $(B_{W,k}) \longrightarrow$ reelles Bild $\mathbb{R}\mathrm{B}_W$

   Umkehrung: Reelles Bild $M \longrightarrow$ Bildfolgensprache über die Adressen der Quadranten, in denen noch Teile von $M \subseteq [0,1]^2$ liegen.

Vorteile von Bildfolgensprachen für bestimmte Bilder (Fraktale):

- kompakte Beschreibung durch endliche Automaten möglich:

  Bildfolgensprache $\longleftrightarrow |\mathcal{A}|$

  $B_{T(\mathcal{A}),\mathrm{k}} \longleftrightarrow |\mathcal{A}| + \log \mathrm{k}$

- geringe Komplexität der Beschreibung, d.h. niedriger Platzbedarf, um das Bild abzulegen. Bildcodierung:

  $M \subseteq [0,1]^2$ bzw. $A \in \{0,1\}^{k \times k} \longrightarrow$ möglichst kompakte (platzsparende) Beschreibung / nicht Punkt für Punkt.

- Gleiches gilt für Operationen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\mathrm{B}_W & \longrightarrow & OP(\mathbb{R}\mathrm{B}_W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W' & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathrm{B}_{OP(W')} = OP(\mathbb{R}\mathrm{B}_W), \end{array}$$

  d.h. die Operation wird nicht auf dem Bild selbst, sondern auf seiner (kompakten) Darstellung ausgeführt.

  Ziel: natürlich Operationen, die einfach implementierbar sind.

Kapitel 3

Iterierte Funktionensysteme (IFS)

3.0 Vorbemerkung

Durch endliche Automaten wie in Kapitel 2 darstellbare Bilder sind in ihrer Vielfalt relativ eingeschränkt. Außerdem hängen sie von der Wahl der Basis r ab. Das bedeutet, daß es Bilder gibt, die durch einen endlichen Automaten bezüglich einer Basis r darstellbar sind. Will man diese Bilder jedoch bezüglich einer anderen Basis r' mit $r' \neq r$ darstellen, so ist dies nicht unbedingt möglich.

Als Folgerung ergibt sich, daß es für manche Anwendungen nützlich ist, zunächst mit reellen Zahlen (Bildern) zu operieren und dann die Approximation durch Rasterbilder darzustellen. Auf diese Weise kann man auch einige Rundungsungsfehler eliminieren.

Im folgenden werden wir eine Methode kennenlernen, Fraktale auf diese Weise zu erhalten.

3.1 Affine Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

Definition 3.1 (affine Abbildung)

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (x', y')$ heißt affin dann und nur dann, wenn gilt: $\exists A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\ \exists \vec{b} \in \mathbb{R}^2 :\ \varphi((x, y)) = (A(x, y)^T + \vec{b}\ )^T$ d.h.

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi} (x', y') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} \right)^T$$

Bemerkung: Aus der analytischen Geometrie sollte die folgende Repräsentation bekannt sein:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos\Theta_1 & -r_2 \cdot \sin\Theta_2 \\ r_1 \cdot \sin\Theta_1 & r_2 \cdot \cos\Theta_2 \end{pmatrix}; r_1, r_2 \geq 0$$

Dieses Verfahren ist als Hauptachsentransformation bekannt. r_1, r_2 sind die Skalierungsfaktoren der x- und y-Achse. Θ_1, Θ_2 hingegen bezeichnen den Winkel, um den die x- bzw. y-Achse gedreht werden.

Eine affine Abbildung der Ebene ist eindeutig bestimmt durch die Bilder dreier nicht kollinearer Punkte. Sie transformiert Punkte in Punkte, Geraden in Geraden (oder Punkte),

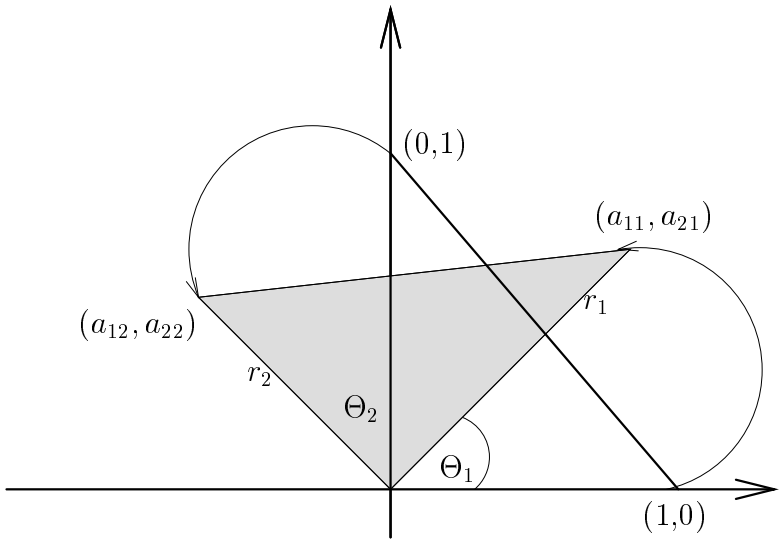


Abbildung 3.1:
Geometrische Veranschaulichung der Hauptachsentransformation

Dreiecke in Dreiecke (oder Geraden oder Punkte) und Parallelogramme in Parallelogramme (oder ...). (Die Angaben in Klammern beziehen sich auf entartete affine Abbildungen.)

Definition 3.2 (Ähnlichkeitsabbildungen)

Eine affine Abbildung

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b}\right)^T$ ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn A die Form

$$A = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\Theta & (-1)^m \cdot r \cdot \sin\Theta \\ r \cdot \sin\Theta & (-1)^{m+1} \cdot r \cdot \cos\Theta \end{pmatrix} ; (\vec{b} \text{ beliebig }, \ r > 0, \ m \in \{0, 1\}) \text{ hat.}$$

Ähnlichkeitsabbildungen [Similituden] transformieren derart, daß Bild und Urbild einander „ähnlich“ sehen.

Spezialfälle affiner Abbildungen :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} ; r_1, r_2 > 0. \text{ reine Skalierung der Achsen}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ reine Spiegelung (hier an der } x\text{-Achse)}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \text{ Drehung um den Winkel } \Theta$$

Bemerkung : Man kann zeigen, daß sich jede affine Abbildung durch diese drei Operationen und durch Verschiebung darstellen läßt. Hierzu sind zwei Skalierungen, sowie je eine Verschiebung, Drehung und Spiegelung ausreichend. (Für den Beweis wird auf die einschlägige Literatur der analytischen Geometrie verwiesen.)

3.2 Kontrahierende Abbildungen und hyperbolische iterierte Funktionensysteme (IFS)

Wir betrachten im folgenden den $\mathbb{R}^2$ zusammen mit einer Abstandsfunktion (Metrik) $\|\cdot\|$. Für die Wahl einer Metrik wollen wir folgende Möglichkeiten in Betracht ziehen:

1. euklidische Metrik: $\|(x,y)-(x',y')\|_2 = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$
2. Maximum Metrik: $\|(x,y)-(x',y')\|_\infty = \max\{|x-x'|,|y-y'|\}$
3. Manhattan Metrik: $\|(x,y)-(x',y')\|_1 = |x-x'|+|y-y'|$

Definition 3.3 (kontrahierende Abbildung)
Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt kontrahierend (bzgl. einer Metrik $\|\cdot\|$) genau dann, wenn $\exists s : (0 \leq s < 1 \wedge \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)-(x',y')\| \leq s \cdot \|\varphi((x,y))-\varphi((x',y'))\|)$
Das kleinstmögliche s, daß diese Bedingung erfüllt heißt Kontraktionsfaktor der Abbildung.
Man erhält sofort:

Satz 3.4 (ohne Beweis)
Kontrahierende Abbildungen sind stetig.

Damit können wir den Gegenstand dieses und der nächsten Abschnitte näher definieren

Definition 3.5 (Iteriertes Funktionensystem - IFS)
$(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ heißt hyperbolisches iteriertes Funktionensystem (IFS) auf $\mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ kontrahierende Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sind.
Wie erzeugt nun ein IFS ein (reelles) Bild ?

Beispiel 3.6 Wir setzen $\varphi(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$, $\varphi_1 := \varphi$, $\varphi_2 := \varphi + (\frac{1}{2}, 0)$ sowie $\varphi_3 := \varphi + (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ und betrachten die Folge von Bildern $M \subseteq [0,1]^2$
$M_1 := \varphi_1(M) \cup \varphi_2(M) \cup \varphi_3(M)$
$M_2 := \varphi_1(M_1) \cup \varphi_2(M_1) \cup \varphi_3(M_1)$
$\vdots$
Als Beispiele sei auf Abbildungen 4.6 und 4.7 verwiesen.
Allgemein sei für das IFS=$(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$; ($\varphi_i$ seien kontrahierende Abbildungen: $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;) die Abbildung

$$\Phi(M) := \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_j(M), \text{ für } M \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ gegeben}$$

Ein möglicher Ansatz ist: Das Bild, welches vom IFS erzeugt wird, sei definiert durch die Gleichung $\Phi(B) = B, B \neq \emptyset$ falls $n \neq 0$, B reelles Bild.
Hierbei ergeben sich jedoch mehrere Fragen:

1. Frage: Hat $\Phi(B) = B$ stets eine nichtleere Lösung für $n > 0$?
2. Frage: Wenn diese Lösung existiert, ist sie dann eindeutig ?

3. Frage: Wenn eine eindeutige Lösung existiert, kann man diese dann approximieren und wenn ja wie ?

Als möglichen einfachen Ansatz für eine Approximation wählen wir:

$$\begin{aligned} M_0 \quad &\longrightarrow \quad M_1 := \Phi(M_0) \\ &\quad\ \vdots \\ M_l \quad &\longrightarrow \quad M_{l+1} := \Phi(M_l) \\ &\quad\ \vdots \end{aligned}$$

Zunächst formulieren wir diese Approximation auf zwei Weisen als Algorithmus:

Ein deterministischer Algorithmus zum Berechnen des Bildes eines IFS

geg.: IFS: $(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

Def.: $\Phi(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(M)$

Input: k (Auflösung)

Start $M_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ (abgeschlossen, beschränkt)

0. $l = 0$
1. `while` $l < k$ `do` $M_{l+1} = \Phi(M_l)$
2. `print` M_k
3. `end.`

$M_k = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_{i_1}(\varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k}(M_0))$

$\varphi_j \longleftrightarrow s_j < 1$

Ein probabilistischer Algorithmius zum Berechnen des Bildes eines IFS

geg.: IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_i, \ldots, \varphi_n)$ und ein Vektor von Wahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_n), p_j > 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$

Input: $i > 0$ (Anzahl der zu berechnenden Punkte), $x_0 \in \mathbb{R}^2$

0. `l=0`
1. `while` $l < i$ `do begin`

   `print` x_l

   `choose` φ_j `with probabilty` p_j

   $x_{l+1} := \varphi_j(x_l)$

   `inc`$\{l\}$

   `end`

2. `print` x_i
3. `end`.

Es zeigt sich, daß sich schon für geringe Anzahlen von Punkten (einige Tausend) gut erkennbare Fraktale darstellen lassen, d.h. die auf Grund unseres intuitiv formulierten Ansatzes definierten Algorithmen geben „korrekte“ Darstellungen der Fraktale.
Es folgen einige Abbildungen, die mittels dieses Algorithmus generiert wurden:

IFS-Koeffizienten

T	a	b	c	d	e	f
1	0.779	−0.294	0.257	0.824	3.148	0.342
2	−0.273	−0.294	0.079	−0.235	11.716	2.599

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

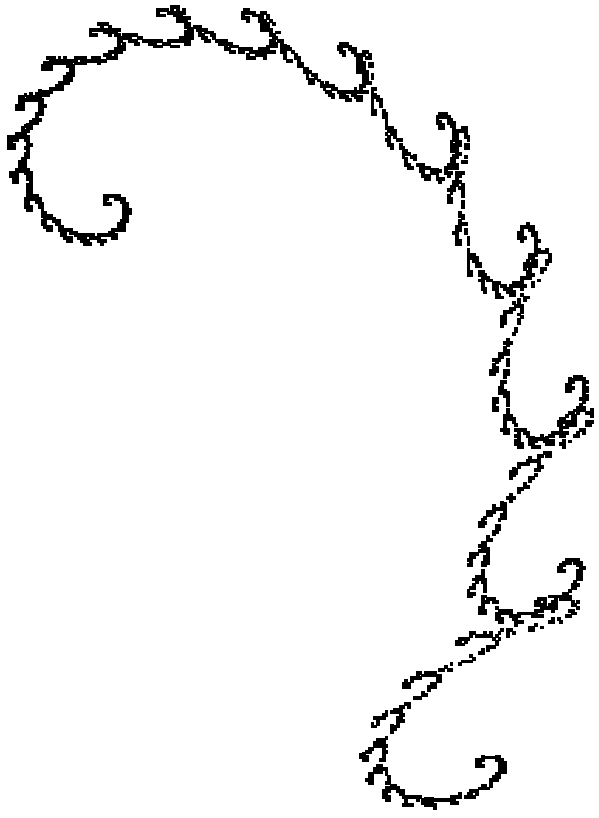


Abbildung 3.2: Spirale

IFS-Koeffizienten

T	a	b	c	d	e	f
1	0.200	−0.260	0.230	0.220	0.000	1.600
2	−0.150	0.280	0.260	0.240	0.000	0.440
3	0.850	0.040	−0.040	0.850	0.000	1.600
4	0.000	0.000	0.000	0.160	0.000	0.000

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Abbildung 3.3: Farnwedel

Beim probalistischen Algorithmus können auf Grund einer ungünstigen Wahl des Startpunktes die ersten Punkte $x_1, \ldots, x_l$ sehr weit vom eigentlichen Fraktal entfernt liegen. Deswegen empfielt es sich bei der Darstellung auf diese zu verzichten.

Kapitel 4

Der Raum, in welchem die Fraktale leben

4.1 Metrische Räume

Bisher wurde in den Algorithmen zur Darstellung der von IFS erzeugten Bilder die Konvergenz nur intuitiv angenommen. Anlaß dazu gaben experimentelle Resultate. Ziel dieses Abschnittes ist es, diese Konvergenz exakt nachzuweisen.

Das Problem der Konvergenz kann jedoch nicht ganz so einfach entschieden werden, wie das Beispiel der Folge

$1; 1,5; 1,833; 2,083; 2,283; 2,350; 2,492; 2,617; 2,728; 2,828; \ldots$

zeigt. Es scheint, daß die Folge gegen einen Wert um 3 oder vielleicht $3,5$ konvergiert. Dies ist nicht der Fall. Die Folge kann auch durch $(\sum_{i=1}^{n} 1/i)_{n\in\mathbb{N}}$ beschrieben werden. Wie aber aus der Analysis bekannt (es handelt sich um die harmonische Reihe), divergiert diese Folge. Die vorliegenden Werte können also täuschen.

Bei IFS ist das Problem noch komplizierter. Hier können 'Teile' wandern, wieder zurückkehren usw.. Wir haben es hier nicht mit der einfachen Konvergenz von Zahlenfolgen zu tun, sondern mit einer Konvergenz von Mengenfolgen. Dazu müssen wir einen geeigneten Abstandsbegriff von Mengen definieren, welcher gut mit dem Abstand von Punkten in dem Raum, dessen Teilmengen wir betrachteten, übereinstimmt.

Wir benötigen dazu gewisse Grundlagen aus dem Bereich der metrischen Räume.

Definition 4.1 (Metrik)

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge von Punkten. Dann heißt $d : M \times M \longrightarrow [0, \infty)$ Metrik auf M, falls gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

(M, d) heißt dann metrischer Raum.

Definition 4.2 (Metriken im $\mathbb{R}^2$)

Im $\mathbb{R}^2$ seien folgende Metriken definiert:

- Maximum-Metrik

  $\|(x, y) - (x', y')\|_\infty := \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$

- Manhattan-Metrik

  $\|(x, y) - (x', y')\|_1 := |x - x'| + |y - y'|$

- Euklidische Metrik

  $\|(x, y) - (x', y')\|_2 := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

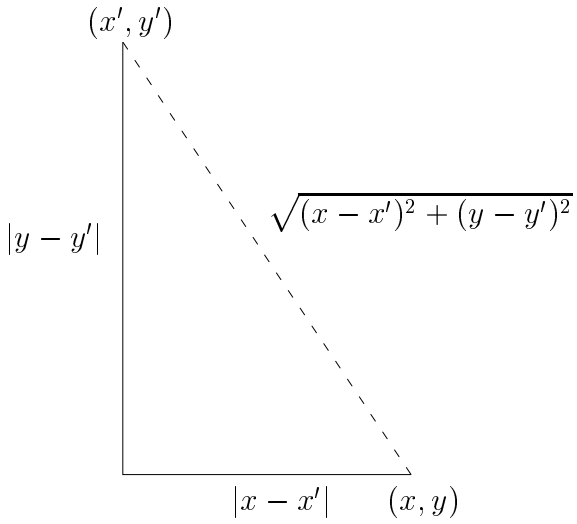


Abbildung 4.1
Metriken im $\mathbb{R}^2$

Beispiele metrischer Räume sind:
$(\mathbb{R}, d)$, wobei $d(x, y) = |x - y|$ ist.
$(\mathbb{R}^2, d)$, wobei d einer der drei oben betrachteten Abstände ist.
$(\mathbb{Q}, d)$, wobei d wie oben. $(\mathbb{Q}, d)$ ist insbesondere ein Teilraum von $(\mathbb{R}, d)$.

Definition 4.3 (Kugeln)

Kugeln mit dem Radius ε um den Mittelpunkt x sind wie folgt definiert:

- offene Kugel: $K_\varepsilon(x) := \{y \in M | d(x, y) < \varepsilon\}$

- abgeschlossene Kugel: $\overline{K_\varepsilon}(x) := \{y \in M | d(x, y) \leq \varepsilon\}$

Die Einheitskugeln in der Ebene haben dann für unsere Metriken die Form:

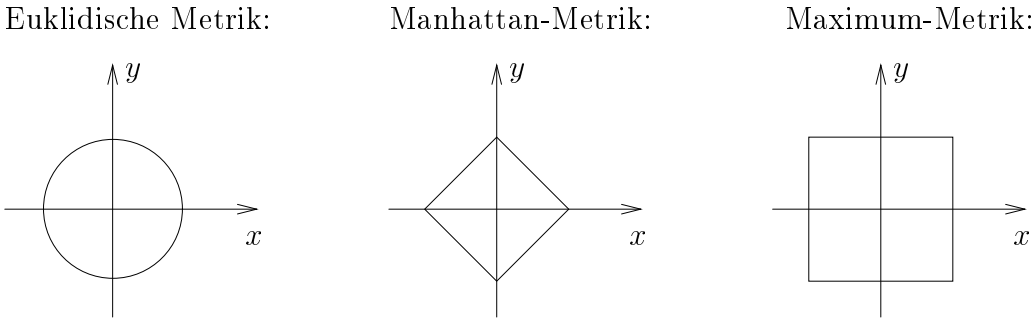


Abbildung 4.2
Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$

Definition 4.4 (Cauchy-Folge)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in M$ heißt CAUCHY-*Folge*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}(d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq n_\varepsilon)$$

gilt.

Definition 4.5 (Konvergente Folge)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in M$ heißt *konvergent*, wenn

$$\exists x \in M : \forall \varepsilon > 0(\exists n_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon, \text{ für alle } n \geq n_\varepsilon)$$

gilt.

Es ergibt sich unmittelbar, daß jede konvergente Folge auch Cauchy-Folge ist. Ist nämlich x der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so haben wir für $n, m > n_{\varepsilon/2}$ stets

$$d(x_n, x), d(x_m, x) < \varepsilon/2, \text{ also } d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Umgekehrt ist allerdings nicht jede Cauchy-Folge konvergent, da der Grenzpunkt im Raum M nicht vorhanden sein muß.

Beispiel 4.6 Berechnung der Quadratwurzel aus x nach dem Quadratwurzelverfahren (Newton- Iteration). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_0 = x; x_n = 1/2(x_{n-1} + x_0/x_{n-1})$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{x}$, aber in $\mathbb{Q}$ konvergiert die Folge z.B. für $x = 2$ nicht!

Definition 4.7 (vollständiger metrischer Raum)
Ein metrischer Raum (M, d) heißt vollständig genau dann, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

Beispiel 4.8 $(\mathbb{R}, d), (\mathbb{R}^2, d)$ sind vollständig, aber wie wir in Beispiel 4.6 gesehen haben, ist $(\mathbb{Q}, d) \subseteq (\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig.

Definition 4.9 (Häufungspunkt)
Es sei $S \subseteq M$. x heißt Häufungspunkt (HP) von S, wenn
$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x\} : x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Definition 4.10 (abgeschlossene Teilmenge)
Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt abgeschlossen, falls jeder Häufungspunkt von S auch ein Punkt von S ist, d.h., für die Menge der Häufungspunkte S' von S muß $S' \subseteq S$ gelten.

Definition 4.11 (offene Teilmenge)
Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt offen, wenn $M \setminus S$ abgeschlossen ist.

Beispiel 4.12

- $K_\varepsilon(x) = \{y \in M | d(x,y) < \varepsilon\}$ ist offen.
- $\overline{K_\varepsilon}(x) = \{y \in M | d(x,y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- Sei aber nun $M := \mathbb{Q}$. Dann ist $K_{\sqrt{2}}(0) = \overline{K_{\sqrt{2}}}(0)$, also ist $K_{\sqrt{2}}(0)$ sowohl abgeschlossen, als auch offen.
- Der Raum $([0,1] \cup [2,3], d)$ ist vollständig. Aber auch hier gilt $K_{1,5}(0) = \overline{K_{1,5}}(0)$. Also ist $K_{1,5}$ sowohl abgeschlossen, als auch offen, obwohl der Raum vollständig ist. Dies liegt an dem 'Loch' in dem Raum, in welchem die Kugel liegt.

Definition 4.13 (beschränkte Teilmenge)
Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt beschränkt, wenn

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall x, y \in S : d(x,y) \leq n.$$

Definition 4.14 (kompakte Teilmenge)
Eine Teilmenge $S \subseteq M (S \neq \emptyset)$ heißt kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ eine konvergente Teilfolge enthält.

Folgerung Ist S kompakt, so ist S auch abgeschlossen.

Satz 4.15
Ist $S \subseteq M$ kompakt, so ist S beschränkt.

Beweis:

Wir konstruieren für eine unbeschränkte Menge S eine Folge $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq S$ derart, daß $d(z_i, z_j) \geq 1$, für $i \neq j$ gilt. Wir wählen $z_0, z_1 \in S$ mit $d(z_0, z_1) \geq 1$ und für $j \geq 2$ die Punkte z_j so, daß $d(z_0, z_j) > 2 \cdot d(z_0, z_{j-1})$ gilt. Diese Wahl ist möglich, da S unbeschränkt ist.

Durch Induktion zeigt man nun leicht:

$$2^{j-i} \cdot d(z_0, z_i) < d(z_0, z_j), \text{ für } i < j$$

Daraus erhält man, wegen $d(z_0, z_j) \leq d(z_0, z_i) + d(z_i, z_j)$, sofort:

$$1 \leq (2^{j-i} - 1) \cdot d(z_0, z_i) < d(z_i, z_j), \text{ für } i < j$$

□

Satz 4.16
Im $(\mathbb{R}^2, d)$ ist jede beschränkte, abgeschlossene Menge kompakt.

Beweis:

Ist S beschränkt, so existiert ein $l \in \mathbb{N}$ derart, daß $S \subseteq [-l, l] \times [-l, l]$.

- Ist S endlich, so ist S kompakt, weil dann jede Folge $(x_n)_{x\in\mathbb{N}} \subseteq S$ einen Punkt $x \in S$ unendlich oft enthält. Wir wählen also $(x_n)_{n\in T}$ mit $T := \{m \in \mathbb{N} | x_m = x\}$.
- Ist S unendlich, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, dann teilen wir $[-l, l]^2$ in 36 Quadrate $Q_1, \ldots Q_{36}$ der Kantenlänge $l/3$. Eines dieser Quadrate Q_i erfüllt die Bedingung, daß $Q_i \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich ist. Somit gilt für $x_j, x_k \in Q_i \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Ungleichung $d(x_j, x_k) < 2l/3$.

  Weiter wählen wir in den 9 Quadraten der Kantenlänge $l/3^2$, in die Q_i zerfällt, ein Quadrat Q_{ij} derart, daß $Q_{ij} \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich ist. Verfährt man nun so weiter, so erhält man eine Folge von Quadraten $P_0 := [-l, l]^2, P_1 := Q_i, P_2 = Q_{ij}, \ldots$, mit

  1. $P_i \supseteq P_i + 1$, für $i = 0, 1, \ldots$,
  2. die Kantenlänge von P_i ist $\leq l/3^i$, für $i \geq 1$ und
  3. $P_i \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unendlich.

  Wählen wir nun $z_i \in P_i \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_i = x_{n_i}$, $n_i > n_{i-1}$ für alle i, beliebig, aber fest, dann gilt für diese Folge:

  1. $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  2. $d(z_i, z_j) \leq 2l/3^i$, für $j \geq i \geq 1$.

  Dies sind aber gerade die Kriterien einer Cauchy-Folge, womit mit der Folge $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ausgewählt wurde.

  Außerdem ist die Folge $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, da der Raum vollständig ist, und $\lim_{i\to\infty} z_i \in S$, da S abgeschlossen ist.

□

Definition 4.17 (zusammenhängende Teilmenge)
Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt zusammenhängend, wenn es keine abgeschlossenen Mengen $M_1, M_2 \subseteq M$ gibt, derart,daß

1. $M_i \cap S \neq \emptyset$, für $i = 1, 2$,
2. $M_1 \cap M_2 \cap S = \emptyset$ und
3. $S \subseteq M_1 \cup M_2$.

Beispiele nichtzusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die in Beispiel 4.12 angegebene Menge $\mathbb{Q}$ und $[0, 1] \cup [2, 3]$.

4.2 Stetige und kontrahierende Abbildungen - Der Fixpunktsatz

Definition 4.18 (stetige Abbildung)
Eine Abbildung $f : M_1 \longrightarrow M_2$ eines metrischen Raumes (M_1, d_1) in einen metrischen Raum (M_2, d_2) heißt stetig, wenn gilt:

$$\forall x_0 \in M_1 : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_{\varepsilon,x_0} > 0 : \forall x \in M_1 : (d_1(x_0, x) < \delta_{\varepsilon,x_0} \rightarrow d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)$$

Definition 4.19 (kontrahierende Abbildung)
Eine Abbildung $f : M_1 \longrightarrow M_2$ heißt kontrahierend, falls ein $s < 1$ existiert, so daß für alle $x, y \in M_1$ stets $d_2(f(x), f(y)) \leq s \cdot d_1(x, y)$ gilt.

Satz 4.20 (Fixpunktsatz von Banach)
Es sei f eine kontrahierende Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes (M, d) in sich selbst. Dann hat f genau einen Fixpunkt x_f, und jede Folge $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots$ konvergiert gegen x_f.

Beweis:

1. Es kann höchstens einen Fixpunkt geben, denn angenommen x_f, y_f seien Fixpunkte von f. Dann gilt:

   $$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s \cdot d(x_f, y_f)),$$

   woraus wegen wegen $0 \leq s < 1$ sofort $d(x_f, y_f) = 0$ folgt.

2. Zu zeigen: $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots, f^n(x_0), \ldots$ ist eine Cauchy-Folge.
   Sei $m < n$, $x_0 \in M$, dann gilt:

   $$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq s \cdot d(f^{m-1}(x_0), f^{n-1}(x_0)) \\ &\vdots \\ &\leq s^m \cdot d(x_0, f^{n-m}(x_0)) \ . \end{aligned}$$

   Wir schätzen nun den Abstand $d(x_0, f^l(x_0))$, für $l \in \mathbb{N}$, ab:
   $d(x_0, f^l(x_0))$
   $\leq d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f^2(x_0)) + \ldots + d(f^{l-1}(x_0)) + s \cdot d(x_0, f^l(x_0))$
   $\leq d(x_0, f(x_0)) + s \cdot d(x_o, f(x_0)) + \ldots + s^{l-1} \cdot d(x_0, f(x_0))$
   $\leq d(x_0, f(x_0)) \cdot (1 + s + \ldots + s^{l-1} + \ldots)$
   $= d(x_0, f(x_0)) \cdot \frac{1}{1-s}$
   Also gilt für $n \geq m$ die Abschätzung $d(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq s^m \cdot d(x_0, f^{n-m}(x_0)) \leq \frac{s^m}{1-s} \cdot d(x_0, f(x_0))$ und es liegt eine Cauchy-Folge vor. Der Grenzwert dieser Folge sei $x_f := \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)$. Da f eine stetige Funktion ist, gilt auch:

   $$f(x_f) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_f,$$

   und x_f ist der gewünschte Fixpunkt.

3. Da f stetig ist, gilt auch $f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$

□

Satz 4.21
Es sei (M,d) ein kompakter metrischer Raum (d.h., insbesondere ist M beschränkt und vollständig), und es sei S eine abgeschlossene Teilmenge von M. Ist $f : M \longrightarrow M'$ eine stetige Abbildung von (M,d) in (M',d'), so ist auch $f(S)$ abgeschlossen.
Beweis:

Sei y Häufungspunkt von $f(S)$, d.h., es existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(M)$ mit $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Somit gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$.

Diese Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine konvergente Teilfolge $(x_i)_{i\in T}$, für welche der Grenzwert $\lim_{i\in T,\ i\to\infty} x_i$ ebenfalls in S liegt.

Also gilt $f(x) = \lim_{i\in T,\ i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\in T,\ i\to\infty} y_i = \lim_{n\to\infty} y_n \ \in f(S)$. □

Beachte hierbei, daß die Kompaktheit wichtig ist, denn z.B der abgeschlossene, aber nicht kompakte Raum $[1,\infty)$ kann mit einer stetigen Abbildung in einen nicht abgeschlossenen Raum abgebildet werden:

$[1,\infty) \xrightarrow{1/x} (0,1]$

4.3 Der Hausdorffsche Raum

In den bisherigen Kapiteln haben wir Bilder als abgeschlossene Mengen betrachtet. Die Mechanismen zur Erzeugung von fraktalen Bildern, wie z.B. durch endliche Automaten oder IFS konnten uns aus Gründen der Effizienz immer nur Approximationen (im intuitiven Sinne) der tatsächlichen Bilder (in einer gewünschten Auflösung) liefern. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Algorithmen tatsächlich auch im strengen Sinne Approximationen erzeugen.

Definition 4.22 (Hausdorffscher Raum)
Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum, etwa $(\mathbb{R}^2,d)$, d natürliche Metrik in $\mathbb{R}^2$. Dann ist der Hausdorffsche Raum (benannt nach Felix Hausdorff) definiert durch:

$\mathcal{H}(M) := \{S \subseteq M | S \neq \emptyset, S \textit{ kompakt}\}$

(Der Raum aller nicht vollständig weißen Bilder.)

Folgerung: $\mathcal{H}(M)$ ist abgeschlossen bezüglich Vereinigung.

$\mathcal{H}(M)$ wäre geeigneter Bildraum, denn er enthält abgeschlossene und beschränkte Mengen. Es stellt sich nun also die Frage, ob es eine Konvergenz in $\mathcal{H}(M)$ gibt. Um Konvergenz in $\mathcal{H}(M)$ zu untersuchen benötigen wir eine Metrik in $\mathcal{H}(M)$. Diese Metrik soll sich auch im kanonischen Sinne aus der auf M gegebenen Metrik d ergeben. Insbesondere soll der Abstand der Mengen $\{x\},\{y\} \in \mathcal{H}(M)$ gleich dem Abstand $d(x,y)$ von $x,y \in M$ sein.

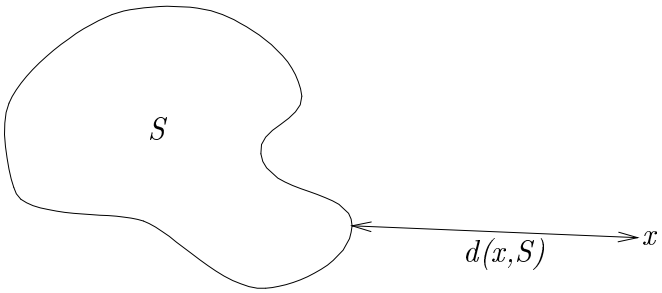


Abbildung 4.3:
Abstand eines Punktes zu einer Menge

Hierzu verallgemeinern wir die Metrik d auf M zu einem 'Abstand' zwischen Teilmengen von M.
Als erstes definieren wir den Abstand eines Punktes $x \in M$ zu einer Menge $S \subseteq M$ (siehe auch Abbildung 4.3), als

$$d(x, S) := \inf\{d(x, y) | y \in S\}$$

Eigenschaft: Ist S kompakt und nicht leer, so gilt $d(x, S) = \min\{d(x, y) | y \in S\}$.
Diese Definition dehnen wir zu dem Abstand einer Menge $S' \subseteq M$ zu einer Menge $S \subseteq M$ aus (siehe auch Abbildung 4.4):

$$d(S', S) := \sup\{d(x, S) | x \in S'\}$$

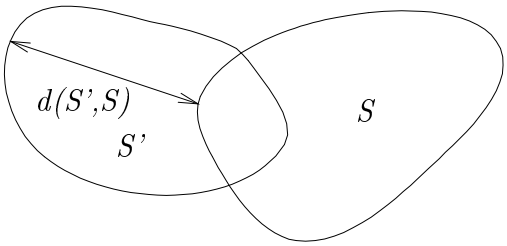


Abbildung 4.4
Abstand zweier Mengen zueinander

Bemerkung: d ist nicht unbedingt symmetrisch.
Eigenschaften 4.23

1. *Sind S', S kompakt und nichtleer, so gilt $d(S', S) = \max\{d(x, S) | x \in S'\}$.*
2. *$S \subseteq S' \Rightarrow d(x, S) \geq d(x, S')$* und somit $d(S'', S) \geq d(S'', S')$, für bel. $S'' \subseteq M$.
3. *Es gilt im allgemeinen <u>nicht</u> $d(S', S) = d(S, S')$.*
4. $d(S_1 \cup S_2, S) = \max\{d(S_1, S), d(S_2, S)\}$

Satz 4.24
$d(x, S) = 0 \Leftrightarrow x \in S$ oder x ist Häufungspunkt von S.
Beweis:

"$\Rightarrow$': Ist $x \notin S$, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in S$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, also ist x Häufungspunkt von S.

$\Leftarrow$": Analog.

□

Definition 4.25 (Berührungspunkt)
Ein Punkt x heißt Berührungspunkt von S , wenn $d(x, S) = 0$ gilt.

Satz 4.26 *In (M, d) sei jede beschränkte abgeschlossene Menge kompakt. Dann gibt es zu jedem $x \in M$ und jedem $S \subseteq M, S \neq \emptyset$ einen Berührungspunkt x_S von S, welcher x am nächsten liegt:*

$$\forall x \in M : \forall S \subseteq M : S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_S \in M : (d(x_S, S) = 0 \ \wedge d(x, S) = d(x, x_S))$$

Beweis:

Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x, z_n) \leq d(x, S) + 2^{-n}).$$

Da $d(x, z_n) \leq d(x, S) + 1$, sind alle z_n in der abgeschlossenen Kugel $\overline{K}_{d(x,S)+1}(x) := \{z \in M | d(x, z) \leq d(x, S) + 1\} \subseteq M$ enthalten. Nach Voraussetzung ist diese Kugel kompakt, da beschränkt.

Also konvergiert eine Teilfolge

$$(z_t)_{t\in T} \subseteq (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$$

gegen ein $x_S \in M$. Wenn $x_S \notin S$, so ist x_S Häufungspunkt von S, also $d(x_S, S) = 0$.

Um $d(x, x_S) = d(x, S)$ zu zeigen, seien $\varepsilon > 0$ und $d(z_t, x_S) < \varepsilon$.

Dann ist einerseits

$$d(x, x_S) \leq d(x, z_t) + d(z_t, x_S) \leq d(x, S) + 2^{-t} + \varepsilon \quad ,$$

und andererseits

$$d(x, S) - 2^{-t} \leq d(x, z_t) \leq d(x, x_S) + d(x_S, z_t) < d(x, x_S) + \varepsilon \ .$$

□

Lemma 4.27

$$d(S_1, S_3) \leq d(S_1, S_2) + d(S_2, S_3)$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst verschiedene Hilfsungleichungen:

1. $d(x,S) \leq d(x,y) + d(y,S)$, für alle $y \in M$.

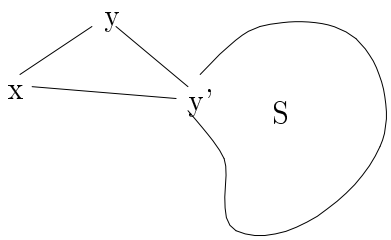


Abbildung 4.5

Wir wählen für $\varepsilon > 0$ einen Punkt $y' \in S$ derart, daß $d(y,y') \leq d(y,S)+\varepsilon$. Dann gilt:

$$d(x,S) \leq d(x,y') \leq d(x,y) + d(y,S) + \varepsilon.$$

2. $d(x,S) \leq d(x,S') + d(S',S)$,für alle $S' \subseteq M$
   Es sei $y' \in S'$ ein Punkt mit $d(x,y') \leq d(x,S') + \varepsilon$. Nach 1. folgt nun aus der Definition des Abstandes zweier Mengen

$$d(x,S) \leq d(x,y') + d(y',S) \leq d(x,S') + \varepsilon + d(S',S)\ .$$

Also gilt: $\forall x \in S_1 : d(x,S_3) \leq d(x,S_2) + d(S_2,S_3)$, und somit auch für die Suprema $d(S_1,S_3) \leq d(S_1,S_2) + d(S_2,S_3)$. □

Definition 4.28 (Hausdorff-Metrik)
$h(S,S') := \max\{d(S,S'), d(S',S)\}$ heißt Hausdorff-Metrik.

Satz 4.29
h ist Metrik auf $\mathcal{H}(M)$.

Beweis:

1. (a) $h(S,S) = 0$, weil $d(S,S) = 0$.
   (b) Ist $S, S' \in \mathcal{H}(M)$, $h(S,S') = 0$, so gilt wegen $d(S',S) = 0$ auch $S' \subseteq S$, da S und S' abgeschlossen sind.
2. h ist symmetrisch (nach Definition).
3. Es ist $d(S_1,S_3) \leq d(S_1,S_2) + d(S_2,S_3)$ und
   $d(S_3,S_1) \leq d(S_2,S_1) + d(S_3,S_2)$.
   Also gilt $h(S_1,S_3) \leq h(S_1,S_2) + h(S_2,S_3)$, weil
   $\max\{a+b, c+d\} \leq \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$ in $\mathbb{R}$.

□

Satz 4.30

Ist (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist auch $(\mathcal{H}(M),h)$ ein vollständiger metrischer Raum, wobei der Grenzwert $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ einer Cauchy-Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}(M)$ durch

$$S := \{x|\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}(x_n\in S_n \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x)\}$$

gegeben ist.

Dieser Satz soll hier nicht bewiesen werden.

Bemerkung: Barnsley bezeichnet $(\mathcal{H}(M),h)$ als Raum der Fraktale (über M).

4.4 Anwendung auf Bildfolgesprachen und IFS

Wiederholung:

Eine Sprache W heißt Bildfolgesprache, gdw.

- $w'\sqsubseteq w \wedge w\in W \Rightarrow w'\in W$ und
- $w\in W \wedge l\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists w'': |w''|\geq l \ \wedge\ ww''\in W$.

Für die zugehörigen Quadranten gilt: $Q_{w'}\supseteq Q_w \Leftrightarrow w'\sqsubseteq w$.

Das reelle Bild $\mathbb{R}B_W$ wurde dann als Grenzwert der $B_{W,k}=\bigcup\limits_{\substack{w\in W\\|w|=k}} Q_w$ definiert.

Ist nun $w'\sqsubseteq w$, so gilt $h(Q'_w,Q_w) \leq$ max. Abstand zweier Punkte aus Q'_w
$= \operatorname{diam} Q_{w'}$ (Durchmesser)
$\leq 2\cdot r^{-|w'|}$.

Satz 4.31

Ist W eine Bildfolgesprache, so ist $B_{W,k}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

Zum Beweis benötigen wir zunächst noch die folgende Eigenschaft von h:

Lemma 4.32

$$h(S_1\cup S_2, S_3\cup S_4)\leq \max\{h(S_1,S_3),h(S_2,S_4)\}$$

Beweis:

Es gilt einerseits $d(S_1\cup S_2,S)\leq\max\{d(S_1,S),d(S_2,S)\}$, denn es gibt einen von S am weitesten entfernten Berührungspunkt von $S_1\cup S_2$. Dieser ist Berührungspunkt von S_1 oder S_2. Die Ungleichungen $d(S'',S_3\cup S_4)\leq d(S'',S_3)$ und $d(S'',S_3\cup S_4)\leq d(S'',S_4)$ sind nach der Eigenschaft 4.23 2. klar. □

Nun zeigen wir den Satz 4.31.

Beweis: (von Satz 4.31)

Betrachtet man $h(B_{W,k},B_{W,l}) = h(\bigcup\limits_{\substack{w'\in W\\|w'|=k}} Q'_w\ ,\ \bigcup\limits_{\substack{w\in W\\|w|=l}} Q_w)$, so ergibt sich o.B.d.A. (nicht: ohne Bedenken des Autors) wegen $k<l$:

$h(B_{W,k},B_{W,l})\leq\max\{h(Q_{w'},Q_w)|w'\sqsubseteq w,|w'|=k,|w|=l,w\in W\}\leq 2\cdot r^{-k}$.

D.h. $(B_W, l)_{l\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. □

Außerdem gilt wegen der Schachtelung der $B_{W,k} : \mathbb{R}B_W = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{W,k}$

Satz 4.33

Es sei $(M, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein IFS über M und $s_1, \ldots, s_n < 1$ seien die Kontraktionsfaktoren von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Dann ist die Abbildung $\Phi : \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$, die durch $\Phi(S) := \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(S)$ definiert ist, eine Kontraktion mit einem Faktor $s \leq \max\{s_1, \ldots, s_n\}$.

Beweis:

1. Wir zeigen, daß für eine kompakte Menge $S \subseteq M$ stets auch $\Phi(S)$ kompakt ist.

   Sei $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \Phi(S)$. O.B.d.A. können wir dann annehmen, daß $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \varphi_i(S)$. Dann existiert eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq S$, mit $\varphi_i(x_j) = z_j$. Weil S kompakt ist existiert weiter eine Teilfolge $(x_t)_{t\in T} \subseteq (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq S$, mit

   $$x_t \xrightarrow[t\in T]{t\to\infty} x \in S.$$

   Weil φ_i stetig ist gilt weiter:

   $$\begin{array}{ccc} x_t & \xrightarrow[t\in T]{t\to\infty} & x \in S. \\ \downarrow & & \downarrow \\ z_t = \varphi_i(x_t) & \xrightarrow[t\in T]{t\to\infty} & \varphi_i(x) \in \varphi_i(S) \end{array}$$

   Also ist $(Z_t)_{t\in T}$ eine Teilfolge von $(Z_j)_{j\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert $\varphi_i(x)$ in $\varphi_i(S)$ liegt.

2. Nun zeigen wir, daß Φ eine Kontraktion mit Faktor s ist, d.h. für kompakte $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt: $h(\Phi(S_1), \Phi(S_2)) \subseteq s \cdot h(S_1, S_2)$.

   Wir wissen, daß

   $$h(S_1 \cup S_2, S_3 \cup S_4) \leq \max\{h(S_1, S_3), h(S_2, S_4)\}$$

   gilt. Hieraus folgt dann

   $$h(\Phi(S_1), \Phi(S_2)) \leq \max_{1\leq i\leq n} h(\varphi_i(S_1), \varphi_i(S_2)).$$

   Nun reicht es zu zeigen, daß, falls φ eine Kontraktion auf (M, d) mit Faktor s_φ ist, $d(\varphi(S), \varphi(S')) \leq s_\varphi \cdot d(S, S')$, für kompakte $S, S' \subseteq M$, ist.
   Dazu sei $\tilde{x}$ fernster Punkt von $\varphi(S)$ zu $\varphi(S')$, d.h $d(\tilde{x}, \varphi(S')) = d(\varphi(S), \varphi(S'))$.
   Dann existiert $x \in S$ mit $\varphi(x) = \tilde{x}$. Sei y nächster Punkt von S' zu x, d.h. $d(x, S') = d(x, y)$. Dann ist $\varphi(y) = \tilde{y} \in \varphi(S')$.

   Somit ergibt sich: $d(\varphi(S), \varphi(S')) = d(\tilde{x}, \varphi(S')) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq s_\varphi \cdot d(x, y)$
   $= s_\varphi \cdot d(x, S') \leq s_\varphi \cdot d(S, S')$.

□

Der Fixpunktsatz erlaubt nun die folgende Definition.

Definition 4.34 (Attraktor einer Abbildung)

Der Attraktor / Fixpunkt der Abbildung Φ des IFS ist vermöge $\lim_{l\to\infty} \Phi^l(M_0)$ unabhängig von M_0 in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ definiert.

Die Unabhängigkeit von M_0 erkennt man in den in Abbildung 4.6 und Abbildung 4.7 dargestellten Entwicklungen des Sierpinski Dreiecks mit unterschiedlichen Startmengen M_0.

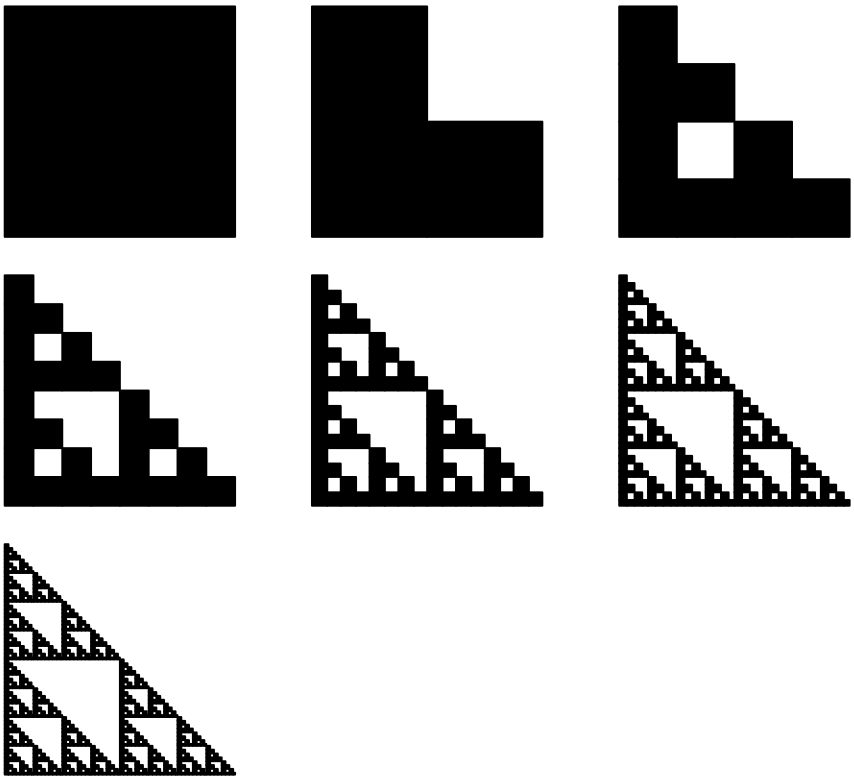


Abbildung 4.6
Sierpiński Dreieck mit schwarzem Quadrat als Startmenge

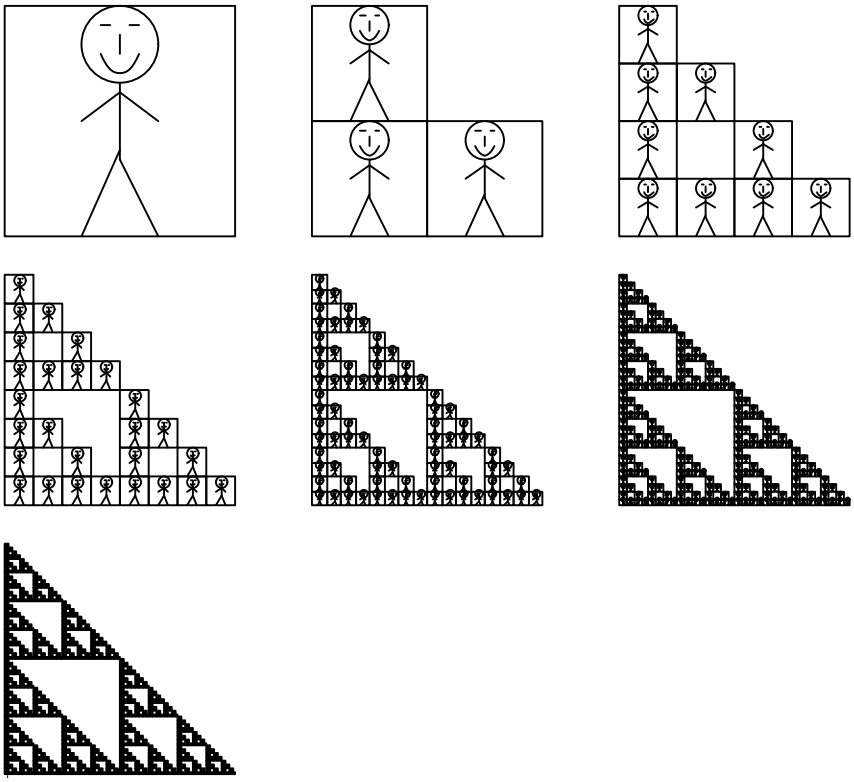


Abbildung 4.7
Sierpiński Dreieck mit Männchen als Startmenge

Bemerkung: Da es sich um einen Fixpunkt handelt gilt natürlich:
$\Phi(\lim_{l\to\infty} \Phi^l(M_0)) = \lim_{l\to\infty} \Phi^l(M_0)$.

4.5 IFS mit Kondensationsmenge

Bei den bisher betrachteten IFS war es nicht möglich, bereits erzeugte Teile des Fraktals unverändert zu lassen. Dies ist jedoch oftmals erwünscht, z.B. bei der Erzeugung einer "Allee" (unendliche Folge von immer kleiner werdenden Bäumen). Es ist also eine mächtigere Beschreibungsmöglichkeit von Fraktalen, als die allein durch IFS, gesucht.
Wir erinnern uns: ein normales IFS sah wie folgt aus:

$$\varphi_i : M \longrightarrow M \qquad \Phi(S) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(S)$$

Die Idee, den Erhalt von Fraktalkomponenten zu ermöglichen, ist nun die Einführung einer Kondensationsmenge $C \in \mathcal{H}(M)$ mit $\Phi(S) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(S) \ \cup C$. Hierbei sind φ_i weiterhin Kontraktionen auf $\mathcal{H}(M)$. Zusätzlich nimmt man zur Realisierung der Kondensationsmenge C noch eine weitere Abbildung $\varphi_0 : \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$ mit $\varphi_0(S) := C$. Da φ_0 stets nur die Kondensationsmenge hinzufügt, handelt es sich hierbei um eine Kontraktion auf $\mathcal{H}(M)$ mit dem Faktor $s_{\varphi_0} = 0$. Somit gilt analog zu den IFS der Satz:

Satz 4.35

Es sei $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *ein hyperbolisches IFS mit Kondensationsmenge* C*, d.h.* $\varphi_0 : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$*, wobei* $\varphi_0(S) = C$*, dann ist die durch* $\Phi(S) := \bigcup_{i=0}^{n} \varphi_i(S)$ *definierte Abbildung* $\Phi : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *eine kontrahierende Abbildung.*

Sind $s_0, s_1, \ldots, s_n$ *die Kontraktionsfaktoren von* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$*, so gilt für den Kontraktionsfaktor* s *von* Φ*:* $s \leq \max\{s_0, \ldots s_n\} = \max\{s_1, \ldots, s_n\}$.

Bemerkung: $C \subseteq \Phi(C) \subseteq \Phi^2(C) \subseteq \ldots$

Möchte man nun zu einem 'normalen' IFS ohne Kondensationsmenge ein IFS mit Kondensationsmenge finden, welches das gleiche Fraktal erzeugt, so stellt sich die Frage: Wie ist C zu wählen ?

Hierzu gibt es zwei einfache Möglichkeiten:

1. Wähle für C den Attraktor $\lim_{l\to\infty} \Phi^l(M_0)$ des normalen IFS.
2. Wähle C, als Menge von Fixpunkten aus $\mathbb{R}^2$ von $(\varphi_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Definition 4.36 (Abschluß)

Der Abschluß $\underline{cl}(S)$ einer Menge $S \subseteq M$ ist definiert durch

$$\underline{cl}(S) := \{x | d(x, S) = 0\}.$$

Satz 4.37

Ist $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *ein IFS mit Kondensationsmenge* $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$*, so ist* $\underline{cl}(\bigcup_{l=0}^{\infty} \Phi^l(C))$ *der Attraktor des IFS.*

Beweis:

Wir zeigen zunächst: $(\bigcup_{l=0}^{k} \Phi^l(C))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

Sei $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ und Φ Kontraktion. Dann ist für kompaktes S die Menge $\Phi(S)$ beschränkt und abgeschlossen, somit also auch kompakt. Da auch die endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt ist gilt somit auch: $\bigcup_{l=0}^{k} \Phi^l(C) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ kompakt. Mit Lemma 4.32 ergibt sich nun für $k' > k$

$$h(\bigcup_{l=0}^{k} \Phi^l(C), \bigcup_{l'=0}^{k'} \Phi^l(C))$$

$$\leq \max_{k'\geq k''>k} h(\Phi^{k''}(C), \Phi^k(C))$$

$$\leq h(\Phi^{k'}(C), \Phi^k(C)), \text{ wegen } \Phi^{k'}(C) \supseteq \Phi^{k''}(C) \supseteq \Phi^k(C).$$

Da Φ Kontraktion ist, ergibt sich analog zum Beweis des Fixpunktsatzes:

$$h(\Phi^{k'}(C), \Phi^k(C)) \leq s^k \cdot h(C, \Phi^{k'-k}(C)) \leq \frac{s^k}{1-s} h(C, \Phi(C))$$

Hierbei ergeben sich die letzten zwei Ungleichungen analog zum Beweis des Fixpunktsatzes. Der Grenzwert dieser Folge in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ sei $S_\Phi := \lim_{l\to\infty} \Phi^l(C)$. Wir zeigen nun $\Phi^l(C) \subseteq S_\Phi$. Es sei $x \in \Phi^l(C)$, dann gilt immer

$$d(x, S_\Phi) \leq d(x, \Phi^k(C)) + d(\Phi^k(C), S_\Phi).$$

Da S_Φ der Grenzwert der Folge $(\Phi^k(C))_{k\in\mathbb{N}}$ ist, gilt $d(\Phi^k(C), S_\Phi) < \varepsilon$, für k genügend groß. Also ist, wegen $d(x, \Phi^k(C)) = 0$, für $k \geq l$, auch $d(x, S_\Phi) \leq \varepsilon$, für beliebiges $\varepsilon > 0$. Somit ist $x \in S_\Phi$, da S_Φ abgeschlossen ist.

Ist andererseits $x \notin \underline{cl}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Phi^k(C))$, so existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $d(x, \Phi^k(C)) > \delta$, für jedes $k \in \mathbb{N}$. Ist nun $d(S_\Phi, \Phi^k(C)) < \delta/2$, so ergibt sich aus $d(x, \Phi^k(C)) \leq d(x, S_\Phi) + d(S_\Phi, \Phi^k(C))$ sofort $d(x, S_\Phi) > \delta/2$, also ist $x \notin S_\Phi$. □

Kapitel 5

Implementierung von IFS

Um IFS geeignet implementieren zu können, müssen wir uns von dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ lösen. Aufgrund der Tatsache, daß die kontrahierenden Abbildungen des IFS auch Verschiebungen beinhalten können, müssen wir den gesamten $\mathbb{R}^2$ betrachen. In Abhängigkeit vom speziellen IFS können wir uns auch mit einer beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ begnügen, eine allgemeine Beschränkung läßt sich (unabhängig vom IFS) nicht herleiten.
Im Zusammenhang mit IFS wollen wir mehrere Aspekte näher betrachten:
Ist ein IFS gegeben, so suchen wir einen konvexen, kompakten Bereich, in dem der Attraktor dieses IFS liegt.
Außerdem drängt sich die Frage auf, wozu wir IFS überhaupt benötigen. M.F.Barnsley gibt darauf in seinem Buch „Fractals everywhere“ die Antwort, daß Fraktale eine kompakte Bilddarstellung liefern. Dies führt uns in den Bereich den Bilddatenkompression, worauf wir in späteren Kapiteln noch einmal eingehen wollen.
Ist hingegen ein (reelles) Bild gegeben, so stellt sich ein ganzer Fragenkomplex:

1. Ist es möglich, dieses Bild durch ein IFS zu beschreiben?
2. Wenn es möglich ist, wie sieht dann die konkrete Realisierung aus ?
3. Wie gut ist eine solche Realisierung, d.h. inwieweit weicht der Attraktor des gefundenen IFS vom Bild ab ?

Im folgenden wollen wir versuchen, so weit wie möglich eine Antwort darauf zu finden.

5.1 Wohin wandern die Punkte des Attraktors ?

In diesem Abschnitt wollen wir Methoden kennenlernen, die es ermöglichen, zu einem gegebenen IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit Kondensationsmenge φ_0 eine Abschätzung für die Einschränkung des $\mathbb{R}^2$ zu treffen.
Sei das IFS durch IFS=$(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ gegeben. Die Kondensationsmenge C entspreche hierbei φ_0 und und es gelte $C \supseteq M_0 := \{x | \exists i : \varphi_i(x) = x\}$. Dann können wir folgende aufsteigende Reihe bilden:

$C \subseteq \Phi(C) \subseteq \Phi^2(C) \subseteq \ldots \subseteq S_\Phi$, wobei S_Φ der Attraktor des IFS ist, wie wir aus der Bemerkung zum Satz 4.35 wissen.
Aus dem Kapitel 4 ist bekannt,daß
$h(\Phi^k(C), \Phi^{k'}(C)) \leq \frac{s^k}{1-s} \cdot h(C, \Phi(C)),$ für $k \leq k'$.
Betrachtet man nun den Grenzprozeß für $k' \to \infty$ so erhält man
$h(\Phi^k(C), S_\Phi) \leq \frac{s^k}{1-s} \cdot h(C, \Phi(C))$ und speziell für den Fall k=0:
$h(C, S_\Phi) \leq \frac{1}{1-s} \cdot h(C, \Phi(C))$.
Schränkt man nun noch die Kondensationsmenge C auf M_0 ein, was allerdings nicht immer möglich ist, so erhält man mit
$M_0 := \{z_1, \ldots, z_n | \varphi_i(z_i) = z_i\}$ $\Phi(M_0) = \{\varphi_i(z_j) | i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$:
$d(z_i, \varphi_i(z_j)) = d(\varphi_i(z_i), \varphi_i(z_j)) \leq s \cdot d(z_i, z_j) \leq s \cdot diam(M_0)$
Wir erhalten also als grobe Abschätzung: $h(M_0, \Phi(M_0)) \leq s \cdot diam(M_0)$
Zur Verbesserung dieser Abschätzung können wir das IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ersetzen durch das IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1 \cdot \varphi_1, \varphi_1 \cdot \varphi_2, \ldots, \varphi_n \cdot \varphi_n)$ ersetzen, das $n^2 + 1$ statt $n + 1$ Abbildungen hat. Diese Erhöhung der Anzahl der Abbildungen bewirkt ein Senken des Kontraktionsfaktors des IFS von s auf mindestens s^2, und somit ist die Abschätzung $h(M_0, \Phi(M_0)) \leq s \cdot diam(M_0)$ schärfer.

5.2 Das Collage-Theorem

In diesem Abschnitt wollen wir das Collage-Theorem als Hilfsmittel für einen interaktiven Prozeß zur Bestimmung eines geeigneten IFS zur Komprimierung von Bilddaten kennenlernen.
Gegeben seien ein (reelles) Bild $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein $\varepsilon > 0$. Auf der Grundlage dieses Bildes suchen wir nun ein IFS $\Phi = (\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit $h(S_\Phi, B) < \varepsilon$

Satz 5.1 (Collage-Theorem) *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und es seien $S_0 \in \mathcal{H}(M), \varepsilon > 0$. Wenn für ein IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die Bedingung $h(S_0, \Phi(S_0)) < \varepsilon$ erfüllt ist, so gilt $h(S_\Phi, S_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$, wobei s der Kontraktionsfaktor von Φ sei.*

Beweis:

Der Beweis verläuft vollständig analog zum Beweis des Fixpunktsatzes. □

Auf diese Weise erhalten wir ein wirksames Mittel zur Bilddatenkompression.

Beispiel 5.2 Farn

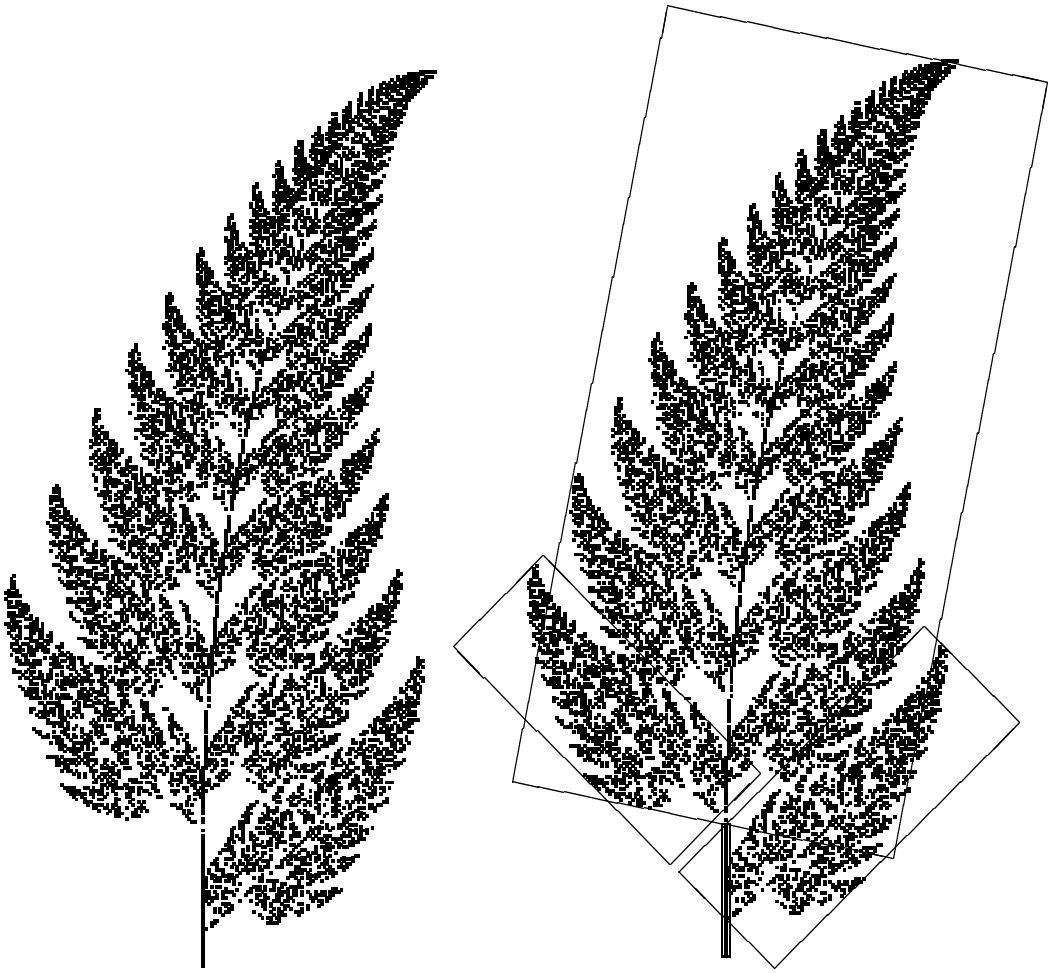


Abbildung 5.1: Farn und Farn mit eingezeichneten Abbildungen

Der Farn besteht bei genauerem Hinsehen aus mindestens 4 einander ähnlich sehenden Teilen. Diese Teile lassen sich aus dem Farn selbst durch affine Abbildungen gewinnen. Eine dieser Abbildungen dient dazu, den gesamten Farn zu verkleinern, hochzuschieben und ein wenig zu neigen. Zwei weitere Abbildungen fügen links und rechts je ein neues Blatt an, das aus dem stark verkleinerten und gedrehten Farn selbst besteht. Die vierte Abbildung schließlich stellt den Stiel dar, indem sie das gesamte Bild extrem in der Breite staucht und zwischen den bestehendem Farn und den zwei neuen Blättern einfügt.

Beispiel 5.3 Spirale

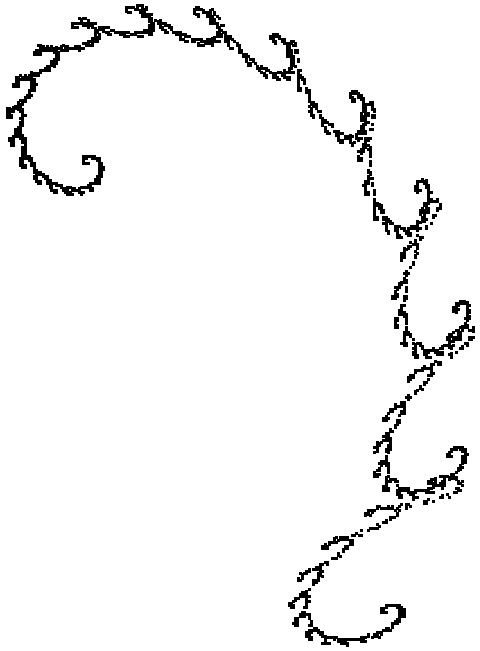


Abbildung 5.2: Spirale aus 2 Abbildungen konstruiert

Beispiel 5.4 Schneeflocke

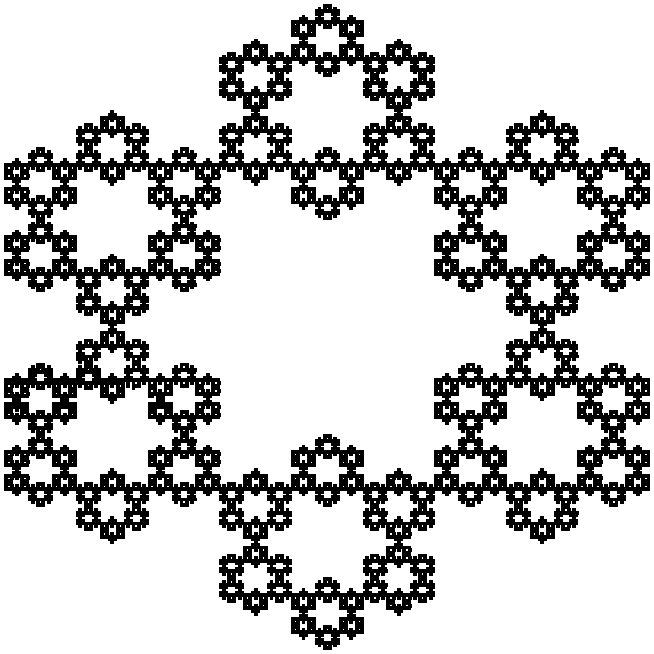


Abbildung 5.3:
Schneeflocke aus 6 Abbildungen konstruiert

Beispiel 5.5 Blatt

Abbildung 5.4
Verschiedene Ansätze zur Darstellung eines Blattes mittels IFS

Bemerkung: Die Überdeckungen für das Fraktal müssen nicht notwendig disjunkt sein.
Nach dem Buch von Barnsley kann man das Errechnen des zu einem Bild gehörigen IFS als interaktiven Prozeß auffassen:

$$\text{Bild} \rightarrow (\ \text{Überdeckung} \rightarrow \text{Attraktor}\ )^*$$

Wir wollen nun untersuchen, wie der Attraktor vom IFS abhängt. Insbesondere wollen wir feststellen, ob kleine Änderungen im IFS auch tatsächlich nur kleine Änderungen des Attraktors bewirken. Hierzu benötigen wir **Abstandsbegriffe** (zum Beschreiben kleiner Änderungen von Attraktoren)
Für Attraktoren (kompakte Mengen) selbst benützen wir die in Definition 4.28 eingeführte Hausdorff Metrik: h.
Für IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und $(\mathbb{R}^2, \varphi'_0, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)$ betrachten wir den Abstand von Funktionen. Insbesondere ist hier der Abstand stetiger Funktionen interessant.
Seien $f, f' : (M, d) \rightarrow (M', d')$:

1. Möglichkeit: Wir wählen eine geeignete Metrik. Sei M kompakt:

$$d_c(f, f') = \sup\{d'(f(x), f'(x)) | x \in M\}$$

Das Supremum existiert, falls f, f' stetig sind, da M nach Voraussetzung kompakt ist.

2. Möglichkeit: Wir betrachten Funktionenscharen. Sei $f : \mathbb{P} \times M \to M'$ stetig, $\mathbb{P}$ ein kompakter Raum:

$$(f_p : M \to M')_{p \in \mathbb{P}} \text{ ist parametrisierte Menge stetiger Funktionen}$$

$$f_p : M \to M' \text{ mit } f_p(x) = f(p, x), p \in \Pi$$

Hier entsprechen kleine Änderungen der Funktionen kleinen Änderungen der Parameter.

Bemerkung Bei affinen kontrahierenden Abbildungen kann man als Raum $\mathbb{P}$ die Parameter der affinen Abbildungen wählen. Bis auf die Komponenten der Verschiebungsvektoren sind diese - bei fester Wahl der Matrixnorm - wegen der Kontraktionseigenschaft der Abbildungen sämtlich beschränkt. Man kann sich somit auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^6$ beschränken.

Satz 5.6

Es seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum, $f, f' : M \to M'$ Kontraktionen mit den Kontraktionsfaktoren s_f bzw. $s_{f'}$. Dann gilt für die Fixpunkte x_f bzw. $x_{f'}$ von f bzw. f' die Ungleichung

$$d(x_f, x_{f'}) \leq \min\{\frac{1}{1 - s_f}, \frac{1}{1 - s_{f'}}\} d_c(f, f') \text{ mit } d_c(f, f') = \max_{x \in M}(d(f(x), f'(x)))$$

(Das Maximum existiert, da M kompakt, f, f' stetig).

Beweis:

Wir betrachten nur den Fall $s_f \geq s_{f'}$. Im anderen Fall erhalten wir analog die Ungleichung $d(x_f, x_{f'}) \leq \frac{1}{1-s_{f'}} \cdot d_c(f, f')$.

Wegen $f(x_f) = x_f$ und $f'(x_{f'}) = x_{f'}$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_f, x_{f'}) \leq d(f(x_f), f(x_{f'})) + d(f(x_{f'}), f'(x_{f'}))$$

Woraus wir sofort $d(x_f, f(x_{f'})) \leq s_f \cdot d(x_f, x_{f'}) + d_c(f, f')$, d.h.

$$(1 - s_f) \cdot d(x_f, x_{f'}) \leq d_c(f, f') \text{ erhalten.}$$

□

Wir können nun den Abstand zweier IFS berechnen: Zuerst „vereinigen“ wir beide IFS Φ_1, Φ_2 zu einem IFS Φ und bestimmen wie in Punkt 5.1 eine kompakte Menge, in der der Attraktor $S_\Phi \supseteq S_{\Phi_1} \cup S_{\Phi_2}$ liegt.

Um nun Satz 5.6 anwenden zu können, stellen wir einen Zusammenhang zwischen dem Abstand zweier stetiger Funktionen f, f' auf M - $d_c(f, f')$ - und dem derselben Funktionen auf $\mathcal{H}(M)$- $d_M(f, f')$ - her:

Man rechnet leicht nach,daß

$$\sup_{x\in S} d(f(x), f'(x)) \geq \sup_{x\in S} d(f(x), f'(S)) = d(f(S), f'(S))$$

gilt. Also folgt

$$d_c(f, f') = d_M(f, f') = \max\{h(f(S), f'(S))|\emptyset \neq S \subseteq M, S \text{ kompakt}\}$$

Die Gleichheit ergibt sich wegen $d(f(x), f'(x)) = h(f(\{x\}), f'(\{x\}))$.

Damit können wir den Satz 5.6 also auf Φ (entsprechend $(\mathbb{R}^2, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$) und Φ' (entsprechend $(\mathbb{R}^2, \varphi'_0, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n'})$) anwenden und erhalten wir die oben postulierte Abhängigkeit, nämlich daß geringe Änderungen in $d_c(\Phi, \Phi')$ nur geringe Änderungen in $h(S_\Phi, S_{\Phi'})$ ergeben.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} d_c(\Phi, \Phi') &= \max\{h(\Phi(S), \Phi'(S))|s \in \mathcal{H}(M)\} \\ &\leq \max_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n'} \{h(\varphi_i(S), \varphi'_j(S))|S \in \mathcal{H}(M)\} \\ &\leq \max_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n'} d_c(\varphi_i, \varphi'_i). \end{aligned}$$

5.3 Operationen auf IFS

In diesem Unterabschnitt sollen nun einige Operationen auf IFS betrachtet werden. Die Manipulationsmöglichkeiten unterscheiden sich grundlegend von den Möglichkeiten, die uns für endliche Automaten zur Verfügung stehen. So kann man durch endliche Automaten erzeugte Bilder einfach schneiden und vereinigen. Bei IFS sind diese Operationen in der Regel nicht so einfach realisierbar. Wir betrachten deshalb auch nur stetige, invertierbare Abbildungen (Drehungen, Spiegelungen, etc.), die auf IFS angewendet werden.

Es sei f eine auf $\hat{K} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ stetige und eineindeutige Abbildung. Dann gibt es Werte $k_f, k'_f \in \mathbb{R}$ derart, daß $d(f(x), f(x')) \leq k_f \cdot d(x, x')$ für $x, x' \in \hat{K}$ und $d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leq k'_f \cdot d(y, y')$ für $y, y' \in f(\hat{K})$. (Mit anderen Worten: f und f^{-1} sind Lipschitz-stetig).

Man rechnet nun auf Grund der Gleichung $(f \cdot \varphi \cdot f^{-1}) \cdot (f \cdot \psi \cdot f^{-1}) = f \cdot (\varphi \cdot \psi) \cdot f^{-1}$ und wegen der Unabhängigkeit des Fixpunktes von der Wahl des Startpunktes leicht nach, daß $f(S_\Phi)$ der Attraktor von $(\mathbb{R}^2, f\varphi_0, f\varphi_1 f^{-1}, \ldots, f\varphi_n f^{-1})$ ist.

Bemerkung Dieses System ist nicht unbedingt ein IFS. Der Kontraktionsfaktor ist durch $k_f \cdot s \cdot k'_f$ beschränkt. Eine Umwandlung in ein IFS ist jedoch möglich, indem man mehr Abbildungen zwischen f und f^{-1} einschließt, z.B. $(\mathbb{R}^2, f \cdot \varphi_0, f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_1 \cdot f^{-1}, f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot f^{-1}, \ldots, f \cdot \varphi_n \cdot \varphi_n \cdot f^{-1})$. Schließt man m Abbildungen zwischen f und f^{-1} ein, so erhält man als Kontraktionsfaktor $k_f \cdot s^m \cdot k'_f$, was für ein genügend großes $m \in \mathbb{N}$ schließlich kleiner als 1 wird. Dies führt jedoch zu einer explosionsartigen Zunahme der Abbildungen.

Es folgt: $\Phi'(S) = f(C) \cup f(\bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(f^{-1}(S)))$

Beispiel 5.7 [Ausschnittsvergrößerung [Zooming].]

Bei endlichen Automaten ist eine Ausschnittsvergrößerung relativ leicht zu bewerkstelligen. Man läßt den Automaten einfach erst ab dem gewünschten Quadranten eine Ausgabe machen. Auf diese Weise erhält man gegenüber dem ursprünglichen Bild vergrößerte Pixel.

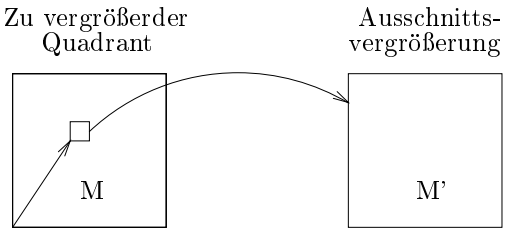


Abbildung 5.5

Beim IFS hingegen muß man erst den gesamten Attraktor berechnen und dann den entsprechenden Ausschnitt darzustellen. Deshalb bleibt die Pixelgröße im Vergleich zum Ursprungsbild auch konstant.

Kapitel 6

Affine Automaten

Bisher wurden Fraktale nur durch endliche Automaten oder IFS erzeugt. Die durch IFS bzw. endlichen Automaten erzeugbaren Fraktale liegen jedoch 'schief' zueinander. Dies bedeutet, daß es Fraktale gibt, welche nur von einem der beiden Systeme erzeugt werden können. So kann zum Beispiel das Bild von $\{1, 1/4, 1/16, \ldots, 0\}$ nur durch einen endlichen Automaten, nicht aber durch ein IFS erzeugt werden. Andererseits kann aber das Bild von $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ nur durch ein IFS, aber nicht durch einen endlichen Automaten erzeugt werden. Gesucht ist also ein System, welches genauso 'mächtig' ist, wie die eindlichen Automaten und die IFS zusammen.
Hierzu werden die Affinen Automaten eingeführt.

6.1 Definition und einfache Eigenschaften

Wir betrachten einen endlichen, partiellen, initial zusammenhängenden Automaten $\mathcal{A} = (\Sigma, Z, \delta, z_0)$ mit $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ und ein IFS $\mathcal{I} = (\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ohne Kondensation. Der endliche Automat soll dann die Reihenfolge der möglichen (oder zulässigen) Funktionsanwendungen des IFS angeben.

Definition 6.1 (Affiner Automat)
$(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ heißt Affiner Automat, falls

1. $\mathcal{A}$ ist ein endlicher Automat.
2. $\mathcal{I}$ ist ein IFS ohne Kondensation mit $|\Sigma|$ Funktionen, welche nicht notwendig alle kontrahierend sein müssen.
3. Die Kreiskontraktionsbedingung (s.u.) ist erfüllt.

Wir sagen $u \in \Sigma^*$ ist ein **Kreis** (bzgl. $\mathcal{A}$) genau dann, wenn $\exists z \in Z : \delta(z, u) = z$.
Weiter seien $\varphi_w := \varphi_{w(1)} \circ \ldots \circ \varphi_{w(|w|)}$ und $s_w := s_{w(1)} \cdot \ldots \cdot s_{w(|w|)}$, für ein Wort $w = w(1) \ldots w(|w|) \in \Sigma^*$.
Hierbei ist $w(j)$ der j-te Buchstabe von w und s_i $(i \in \Sigma)$ der 'Kontraktionsfaktor' (kann hier auch größer als 1 sein!) von φ_i.

Kreiskontraktionsbedingung (KKB): $\forall u \in \Sigma^* : (u \neq e \wedge u \text{ ist Kreis}) \Rightarrow s_u < 1)$
Es sei $k_{\mathcal{A}}$ die Länge des längsten wiederholungsfreien Kreises in $\mathcal{A}$.

$$z \xrightarrow{u(1)} z^{(1)} \xrightarrow{u(2)} z^{(2)} \dots z^{(|u|-1)} \xrightarrow{u(|u|)} z$$

Wiederholungsfrei bedeutet hierbei, daß für alle $i \neq j$ gilt $z^{(i)} \neq z^{(j)}$.
Die Länge $k_{\mathcal{A}}$ derartiger wiederholungsfreien Kreise ist beschränkt durch die Anzahl der Zustände, d.h. $k_{\mathcal{A}} \leq |Z|$.

Lemma 6.2
Ist $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat, $\mathcal{I}$ ein IFS, $\Sigma = \{1, \dots, n\}$, so ist die KKB für $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ genau dann erfüllt, wenn sie für alle Wörter einer Länge kleiner gleich $k_{\mathcal{A}}$ erfüllt ist.

Beweis:

Ist die KKB erfüllt, so ist sie insbesondere für alle Wörter einer Länge $\leq k_{\mathcal{A}}$ erfüllt.

Es sei nun die KKB nicht erfüllt. Dann existiert ein kürzestes Wort u mit $\delta(z, u) = z, u \neq e$ und $s_u \geq 1$.

- Ist $|u| \leq k_{\mathcal{A}}$, so gibt es ein Wort einer Länge $\leq k_{\mathcal{A}}$, für das die KKB nicht gilt.
- Angenommen es sei $|u| > k_{\mathcal{A}}$. Dann gibt es eine Zerlegung $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ und Zustände $z, z' \in Z$ derart, daß $u_2 \neq e, u_1 \cdot u_3 \neq e$ und $\delta(z, u_1) = \delta(z, u_1 u_2) = z'$:

$$z \underbrace{\xrightarrow{u(1)} \cdots \longrightarrow}_{u_1} z' \underbrace{\longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{u_2} z' \underbrace{\longrightarrow \cdots \xrightarrow{u(|u|)}}_{u_3} z.$$

  Dann sind auch $u_1 u_3$ und u_2 Kreise, $s_u = s_{u_1} s_{u_2} s_{u_3}$ und $s_u \geq 1$.
  Hieraus folgt $s_{u_2} \geq 1$ oder $s_{u_1 u_3} \geq 1$, was aber wegen $|u_2|, |u_1 u_3| < |u|$ im Widerspruch zur Minimalität von $|u|$ steht.

□

Definition 6.3

- $\hat{k}_{\mathcal{A}}$ - Länge eines maximalen wiederholungsfreien Pfades (kein Kreis !).
- $k_{\mathcal{A}}$ - Länge eines maximalen wiederholungsfreien Kreises.

Eigenschaft $\hat{k}_{\mathcal{A}} \geq k_{\mathcal{A}} - 1$
Definition 6.4

- $\overline{s_l} := \max\{s_w |\ |w| = l\}$
- $\underline{s_l} := \max\{s_w |\ |w| \leq l \wedge w \text{ ist Kreis in } \mathcal{A}\}$
- $s_{max} := \max\{\overline{s_l} |\ l \in \mathbb{N}\}$ ($\widehat{=}$ maximale Expansion über $k_{\mathcal{A}}$ Schritten)

- $s_{loop} := \max\{\underline{s_l} \mid l \in \mathbb{N}\}$ ($\widehat{=}$ maximale Expansion eines Kreis)

Lemma 6.5
$s_{loop} = \max\{s_u | u$ ist wiederholungsfreier Kreis in $\mathcal{A}\}$.
Beweis:

Ist der Kreis u nicht wiederholungsfrei, so existiert ein kürzerer Kreis u', mit $s_{u'} > s_u$. Ist nämlich, wie im Beweis von Lemma 6.2, $u = u_1u_2u_2$, wobei u_2 und u_1u_2 nichtleere Kreise sind, so gilt $s_u = s_{u_2} \cdot s_{u_1u_3} < 1$. Also ist $s_{u_2}, s_{u_1u_3} > s_u$, wegen $s_{u_2}, s_{u_1,u_3} < 1$. □

Eigenschaften

- $s_{max} = \max\{\overline{s_l} \mid 0 \leq l \leq \hat{k}_{\mathcal{A}}\}$
- $s_{loop} = \max\{\underline{s_l} \mid 0 \leq l \leq k_{\mathcal{A}}\}$

Aus der Definition von s_{loop} ergibt sich unmittelbar:
Lemma 6.6
Ist $\delta(z, u) = z,\ u \neq e$, so gilt $s_u \leq s_{loop}$.
Lemma 6.7
Ist u ein Kreis in $\mathcal{A}$, $|u| > c \cdot k_{\mathcal{A}},\ c \in \mathbb{N}$, so ist $s_u \leq s_{loop}^c$.
Beweis:

Wir zeigen die Aussage durch Induktion über $c \in \mathbb{N}$.

Ist $c = 0$, so ist die Behauptung nach Lemma 6.6 klar.

Sei nun u ein Kreis mit $|u| \geq (c+1) \cdot k_{\mathcal{A}}$. Wir betrachten das Anfangswort von u, mit der Länge $k_{\mathcal{A}}$. Da u ein Kreis ist, wiederholt sich ein Zustand in u. Also wiederholt sich nach Definition schon ein Zustand im Anfangswort der Länge $k_{\mathcal{A}}$. Es gibt somit Zustände $z, z' \in Z$ und Wörter $u_1, u_2, u_3 \in \Sigma^*$ mit $0 < |u_2| \leq |u_1u_2| \leq k_{\mathcal{A}}$ derart, daß für $u = u_1u_2u_3,\ \delta(z, u_1) = \delta(z, u_1u_2) = z'$ ist, wobei $\delta(z, u) = z$. Damit haben wir $s_{u_2} \leq s_{loop}$ und $|u_1u_3| \geq c \cdot k_{\mathcal{A}}$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung $s_{u_1u_3} \leq s_{loop}^c$, mithin $s_u = s_{u_1} \cdot s_{u_2} \cdot s_{u_3} \leq s_{loop}^{c+1}$. □

Satz 6.8
Es seien $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ein Affiner Automat und $w, v \in T(\mathcal{A})$ mit $w \sqsubseteq v$.
Ist $l := |v| - |w|$, so gilt:

$$s_v \leq s_{max} \cdot s_{loop}^c \cdot s_w, \text{ wobei } c = \left\lceil \frac{l - \hat{k}_{\mathcal{A}}}{k_{\mathcal{A}}} \right\rceil$$

Beweis:

Es sei $v = wu$ mit $|u| = l$. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über l.

Ist $l \leq \hat{k}_{\mathcal{A}}$, so ist $c = 0$ und $s_u \leq s_{max}$. Also gilt $s_v = s_w \cdot s_u \leq s_w \cdot s_{max}$. Ist $l > \hat{k}_{\mathcal{A}}$, so enthält u einen wiederholungsfrien Kreis, da $\delta(z_0, wu)$ definiert ist, d.h. $u = u_1u_2u_3$, mit $k_{\mathcal{A}} \geq |u_2| > 0$, $\delta(z_0, wu) = \delta(z_0, wu_1u_2)$ und $s_{u_2} \leq s_{loop}$.

Da $l - k_{\mathcal{A}} \geq |u_1u_3| < l$ und $\delta(z_0, wu_1u_3)$ definiert ist, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, wegen $\left\lceil \frac{l-k_{\mathcal{A}}-\hat{k}_{\mathcal{A}}}{k_{\mathcal{A}}} \right\rceil \geq c - 1$, falls $\left\lceil \frac{l-\hat{k}_{\mathcal{A}}}{k_{\mathcal{A}}} \right\rceil \geq c$:

$$s_{wu_1u_3} \leq s_{max} \cdot s_{loop}^{c-1} \cdot s_w.$$

Damit gilt dann

$$s_v = s_{wu_1u_2u_3} \leq s_{max} \cdot s_{loop}^{c} \cdot s_w.$$

□

Welche Fraktale werden nun von Affinen Automaten definiert? In Analogie zu IFS setzen wir für einen Affinen Automaten $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$

$$\Phi_{\mathcal{A},l}(S) := \bigcup_{\substack{|w|=l \\ w \in T(\mathcal{A})}} \varphi_w(S), \text{ für } S \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß $(\Phi_{\mathcal{A},l}(S))_{l \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ist.

Dazu betrachten wir

$$h(\Phi_{\mathcal{A},l}(S), \Phi_{\mathcal{A},l+l'}(S)).$$

Es sei nun $\mathcal{A}_w := (X, Z, \delta, \delta(z_0, w))$ der Automat, welcher aus $\mathcal{A} = (X, Z, \delta, z_0)$ durch Änderung des Anfangszustandes von z_0 zu $\delta(z_0, w)$ entsteht (Ist $\delta(z_0, w)$ nicht definiert, so ist auch $\mathcal{A}_w$ nicht definiert).

Zwar ist $\mathcal{A}_w$ nun möglicherweise nicht mehr initial zusammenhängend. Da dieser Automat aber dieselbe innere Struktur (δ-Funktion) wie $\mathcal{A}$ hat, erhalten wir $\hat{k}_{\mathcal{A}} \geq \hat{k}_{\mathcal{A}_w} und k_{\mathcal{A}} \geq k_{\mathcal{A}_w}$.

Damit können wir nun mit mit der Ungleichung

$$h(S_1 \cup S_2, S_3 \cup S_4) \leq \max\{h(S_1, S_3), h(S_2, S_4)\}$$

aus Lemma 4.32 sukzessive den Ausdruck $h(\Phi_{\mathcal{A},l}(S), \Phi_{\mathcal{A},l+l'}(S))$ auflösen:

$$\begin{aligned} h(\Phi_{\mathcal{A},l}(S), \Phi_{\mathcal{A},l+l'}(S)) &\leq \max_{\substack{|w|=l \\ w \in T(\mathcal{A})}} \{h(\varphi_w(S), \varphi_w(\Phi_{\mathcal{A}_w,l'}(S)))\} \\ &\leq s_{max} \cdot s_{loop}^{c} \cdot \max_{\substack{|w|=l \\ w \in T(\mathcal{A})}} h(S, \Phi_{\mathcal{A}_w,l'}(S)), \text{ wobei } c = \left\lceil \frac{|w|-\hat{k}_{\mathcal{A}}}{k_{\mathcal{A}}} \right\rceil \end{aligned}$$

Um nun zu zeigen, daß $(\Phi_{\mathcal{A},l}(S))$ für $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ eine Cauchy-Folge ist, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 6.9

Es sei $(\Phi_{j,l})_{j \in A, l \in \mathbb{N}}$ ($A \subseteq \mathbb{N}$ *endlich*) *eine Familie von Abbildungen* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *derart, daß es Konstanten* $k, \hat{k} \in \mathbb{N}$, $s_{max} > 0$ *und* $0 \leq s_{loop} < 1$ *gibt, für die*

$$h(\Phi_{j,l}(S), \Phi_{j,l+l'}(S) \leq s_{max} \cdot s_{loop}^{c} \cdot \max\{h(S, \Phi_{j',l'}(S)) | j' \in A\},$$

für $c = \left\lceil \frac{l-\hat{k}}{k} \right\rceil$ *und* $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, *gilt.*
Dann ist für jedes $j \in \mathcal{A}$ *und für jedes* $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *die Folge* $(\Phi_{j,l}(S))_{l \in \mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge in* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

Beweis:

Da $c = \left\lceil \frac{l-\hat{k}}{k} \right\rceil$ mit wachsendem l ebenfalls unbeschränkt wächst und da $\mathcal{A}$ endlich ist, reicht es aus, zu zeigen, daß $h(S, \Phi_{j,l}(S))$ für $j \in \mathcal{A}$, $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ und beliebiges $l \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Es sei $l = c \cdot k + k_0$, mit $k_0 < k + \hat{k}$. Dann ist

$$\begin{aligned} h(S, \Phi_{j,k_0+k}(S) &\leq h(S, \Phi_{j,k_0}(S)) + h(\Phi_{j,k_0}(S), \Phi_{j,k_0+k}(S)) + \ldots + \\ &\quad h(\Phi_{j,k_0+(c-1)\cdot k}(S), \Phi_{j,k_0+c\cdot k}(S)) \\ &\leq s_{max} \cdot \sum_{i=0}^{c-1} s_{loop}^i \cdot \max\{h(S, \Phi_{j,m}(S)) | j \in \mathcal{A}, m \leq k + \hat{k}\} \\ &\leq \tfrac{s_{max}}{1-s_{loop}} \cdot \max\{h(S, \Phi_{j,m}(S)) | j \in \mathcal{A}, m \leq k + \hat{k}\} \end{aligned}$$

□

Damit können wir nun den gewünschten Fixpunktsatz für Affine Automaten zeigen.

Satz 6.10 (Fixpunktsatz für Affine Automaten)
Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ein Affiner Automat, so konvergiert $(\Phi_{\mathcal{A},l}(S))_{l \in \mathbb{N}}$ unabhängig vom Startpunkt $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ gegen ein Element $S_\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

Anmerkung Wir nennen S_Φ den Attraktor von Φ bzw. von $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$.

Beweis:

Die Konvergenz für $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ folgt aus Satz 6.9. Die Eindeutigkeit ergibt sich dann wegen $c = \left\lceil \frac{l-\hat{k}_\mathcal{A}}{\hat{k}_\mathcal{A}} \right\rceil$ aus

$$h(\Phi_{\mathcal{A},l}(S), \Phi_{\mathcal{A},l}(S')) \leq \underbrace{s_{max} \cdot s_{loop}^c \cdot h(S, S')}_{\text{geht für } l \to \infty \text{ gegen 0, da } c \sim l} .$$

□

6.2 Algorithmen zur Darstellung des Attraktors

Um Algorithmen zur Darstellung des gemäß Satz 6.10 eindeutig bestimmten Attraktors herzuleiten, erinnern wir uns an die aus den vorhergehenden Kapiteln bekannten Algorithmen für endliche Automaten bzw. IFS.

Im deterministischen Algorithmus für endliche Automaten wurde für gegebene Auflösung $l \in \mathbb{N}$ ($\widehat{=} r^{-l}$ im Raster) auf einfache Art das Rasterbild erzeugt.

Wir gehen jetzt analog von einer "Auflösung" $l \in \mathbb{N}$ und einer Startmenge $S \subseteq \mathbb{R}^2$ aus und berechnen dann $\Phi_{\mathcal{A},l}(S)$.

Die durch den Parameter $l \in \mathbb{N}$ festgelegte Auflösung hängt natürlich noch von S und den Kontraktionsfaktoren der Abbildung, insbesondere von s_{max} und *sloop*, ab. Will man die einzelnen $\phi_w(S)$ im Durchmesser beschränken, so kann man die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Beschränkungsformeln der Form

$$" \leq s_{max} \cdot s_{loop}^c \cdot diam(S) "$$

benutzen.
Wir stellen der Einfachheit halber den deterministischen Algorithmus mit dem Auflösungsparameter $l \in \mathbb{N}$ dar.
Gegeben: $l \in \mathbb{N}$ und Startmenge S.
Für jedes $w \in T(\mathcal{A})$ mit $|w| = l$ berechnen wir $\varphi_w(S)$ und stellen diese Menge dar. (Das entspricht genau dem Algorithmus für endliche Automaten).
Bemerkungen zur Implementierung:

1. Man wähle die Startmenge S möglichst so, daß ihr Abstand zum Attraktor S_Φ möglichst gering ist, oder aber in Verbindung mit der Auflösung so, daß $\varphi_W(S)$ nur wenige Pixel im Raster belegt.

2. Um die ständig wiederkehrende aufwendige Berechnung der Abbildung $\varphi_w = \varphi_{w(1)} \cdot \ldots \cdot \varphi_{w(l)}$ abkürzen zu können, sollte man sich die Zwischenresultate (im Baumformat) speichern:

   Für ein $w \in X^l$ sähe das dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{cccc} w(1) & w(2) & \ldots & w(l-1) \\ \varphi_{w(1)} & \varphi_{w(1)} \cdot \varphi_{w(2)} & \ldots & \varphi_{w(1)} \cdot \ldots \cdot \varphi_{w(l-1)} \end{array}$$

Nachdem wir gesehen haben, daß sich der deterministische Algorithmus vom Fall der endlichen Automaten relativ einfach übertragen läßt, müssen wir feststellen, daß sich der probabilistische Algorithmus von den IFS her nicht so einfach übertragen läßt. Die Ursache dafür ist, daß die neue Abbildung am falschen Ende angefügt wird: Haben wir nämlich für einen Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und ein Wort $w \in T(\mathcal{A})$ einen Punkt $\varphi_w(x_0)$ berechnet, so wird für ein neues $x \in X$ der neue Punkt $\varphi_x(\varphi_w(x_0)) = \varphi_{xw}(x_0)$ berechnet, xw muß aber nicht in $T(\mathcal{A})$ liegen.
Um diesen Effekt genauer betrachten zu können führen wir den Adreßraum von Punkten im Attraktor ein.
Als erste Vorbereitung dazu dient uns das folgende Lemma.

Lemma 6.11
Für jede Folge von Wörtern $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq T(\mathcal{A})$ mit $w_i \sqsubset w_{i+1}$ konvergiert die Punktfolge $(\varphi_{w_i}(z_0))_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig von $z_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen denselben Wert.
Beweis:

Wie zum Beispiel im Beweis von Satz 6.8 erhält man:

$$d(\varphi_w(z_0), \varphi_{w\cdot u}(z_0)) \leq s_{max} \cdot s_{loop}^c \cdot d(z_0, \varphi_{\mathcal{A}_w, u}(z_0)),$$

wobei $c = \lceil \frac{|w| - \hat{k}_\mathcal{A}}{k_\mathcal{A}} \rceil$ und $\mathcal{A}_w$ der Automat $\mathcal{A}$ mit dem abgewandelten Anfangszustand $\delta(z_0, w)$ ist.

Die Familie $(\varphi_{\mathcal{A}_w, u})_{wu\in T(\mathcal{A})}$ erfüllt die Voraussetzung von Satz 6.9, damit ist $(\varphi_{w_i}(z_0))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes erhält man wie üblich wegen

$$d(\varphi_w(z_0), \varphi_w(z_0') \leq s_{max} \cdot s_{loop}^c \cdot d(z_0, z_0')$$

□

Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$, dann ergibt sich der Adreßraum $\Sigma^\omega := \{\beta : \mathbb{N}\backslash\{0\} \longrightarrow \Sigma\}$ mit $\beta = \beta(1)\beta(2)\beta(3)\ldots\beta(l)\ldots$.
Wir führen eine natürliche Metrik in Σ^ω ein:

$$\rho(\beta, \zeta) := \sup\{n^{-l} | \zeta(l+1) \neq \beta(l+1)\},$$

was man sich wie folgt vorstellen kann:

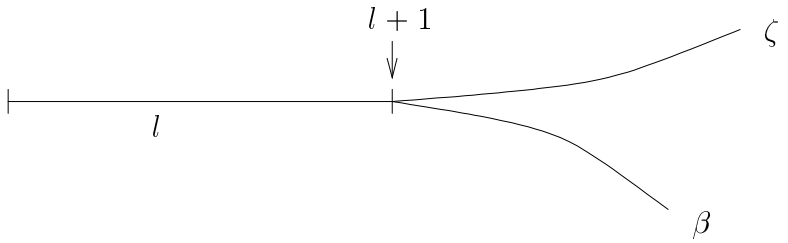


Abbildung 6.1
Kugeln im Hausdorffschen Raum

Es ist klar, daß $\delta(\beta, \zeta) = 0$ nur für $\beta = \zeta$ gilt, und daß $\delta(\beta, \zeta) = \delta(\zeta, \beta)$.
Zur Verifizierung der Dreiecksungleichung betrachten wir $\beta, \eta, \zeta \in \Sigma^\omega$ mit $\delta(\beta, \zeta) = n^{-l}$, d.h. β und ζ stimmen auf den ersten l Buchstaben überein und weichen auf dem $(l+1)$-ten voneinander ab.
Im 1. Fall stimme η mit β (und ζ) auch auf den ersten l Buchstaben überein:

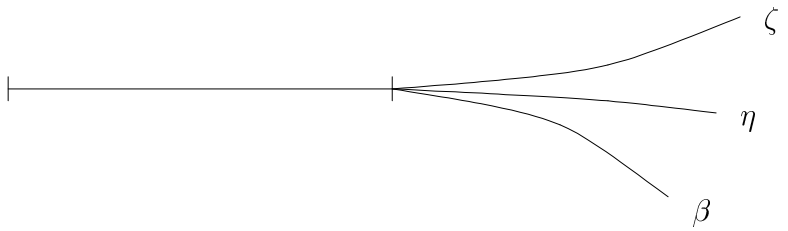


Abbildung 6.2

Dann gilt offenbar

$$\rho(\zeta, \eta) \leq \rho(\zeta, \beta) \text{ und } \rho(\beta, \eta) \leq \rho(\zeta, \beta).$$

Damit ist aber

$$\rho(\beta, \eta) = \rho(\zeta, \beta) \text{ oder } \rho(\zeta, \eta) = \rho(\zeta, \beta).$$

Im 2. Fall stimme η mit β (und ζ) nicht auf den ersten l Buchstaben überein:

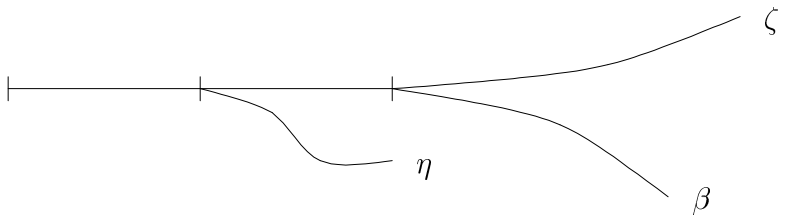


Abbildung 6.3

Damit ist

$$\rho(\eta, \beta) = \rho(\eta, \zeta) > \rho(\beta.\zeta), \text{ also } \rho(\zeta, \beta) \leq \max\{\rho(\zeta, \eta), \rho(\beta, \eta)\}$$

Bemerkung:

Wie wir bei der Herleitung der Dreiecksungleichung gesehen haben, spannen drei Punkte $\beta, \eta, \zeta \in \Sigma^\omega$ stets ein gleichschenkliges Dreieck auf.

Der nächste Satz garantiert uns nun die Existenz einer Abbildung, die uns die Adressierbarkeit der Punkte des Attraktors S_Φ mit "Adresse" aus Σ^ω sogar auf stetige Weise sicherstellt.

Satz 6.12

Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ein Affiner Automat, so gibt es eine stetige Abbildung f von $\{\zeta | \forall w \sqsubset \zeta : w \in T(\mathcal{A})\}$ auf den Attraktor S_Φ des Affinen Automaten. Sei diese Abbildung f, so gilt:

$$d(f(\zeta), f(\beta)) \leq c_{\mathcal{A},\mathcal{I}} \cdot \sqrt[k_{\mathcal{A}}]{\rho(\zeta, \beta)}$$

Ein Punkt des Attraktors S_Φ kann im allgemeinen mehr als eine Adresse haben. Bevor wir an einer (hier nur intuitiv ausgeführten) Klassifizierung der Überdeckung des Attraktors durch den Affinen Automaten kommen, geben wir noch (topologische) Eigenschaften des Raumes Σ^ω an. In Σ^ω haben Kugeln mit dem Radius $\epsilon > 0$ folgendes Aussehen:

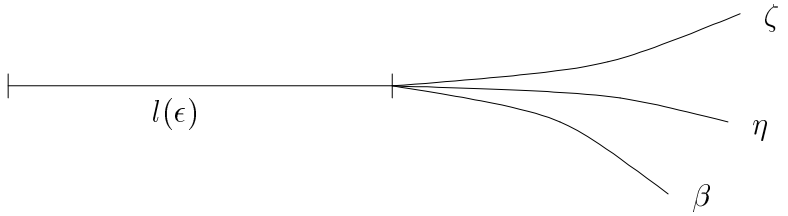


Abbildung 6.4
Kugeln in Σ^ω

Hieraus ergibt sich die Notation:

$$w \cdot \Sigma^\omega = \{\zeta \in \Sigma^\omega | w \sqsubset \zeta\}$$

Eigenschaften

- Radius und Durchmesser sind gleich.
- Offene und abgeschlossene Kugeln sind, bis auf eine kleine Variation im Radius, identisch.
- Der Kugelradius kann stets nur diskrete Werte annehmen und beträgt $1/n^l$.

- Zwischen zwei Punkten *zeta* und *beta* kann keine Linie gezogen werden.

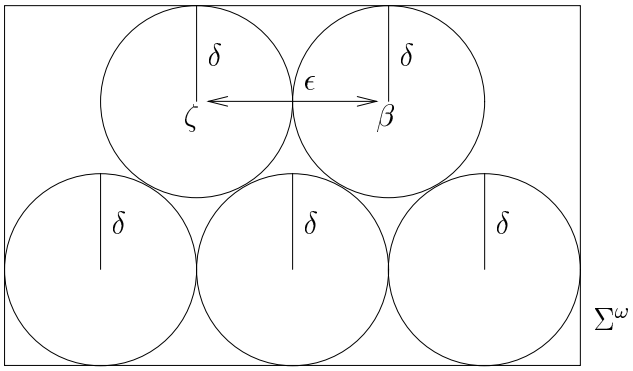


Abbildung 6.5

$\rho(\zeta, \beta) = 1/n^l$ Somit existieren n^{l+1} paarweise disjunkte Kugeln vom Radius $\delta = \frac{1}{n^l+1}$. Die Vereinigung dieser Kugeln ist σ^ω. ζ, β liegen in verschiedenen Kugeln. Diese Kugeln sind: $\{w \cdot \Sigma^\omega | \ |w| = l + 1\}$. Somit ist Σ^ω total unzusammenhängend.

Wir klassifizieren nun Affine Automaten bezüglich der Güte (Genauigkeit) ihrer Adressierung.

Definition 6.13 (Überdeckung eines Attraktors)
Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ein Affiner Automat. Dann überdeckt $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ seinen Attraktor

a) total disjunkt genau dann, wenn jeder Punkt in S_Φ genau eine Adresse hat.

b) knapp berührend genau dann, wenn die Menge der Punkte mit mehr als einer Adresse "klein" ist.

c) überlappend, sonst.

Bemerkung
Da der Raum Σ^ω unzusammenhängend ist, der $\mathbb{R}^2$ aber zusammenhängend, muß der Attraktor eines total disjunkten Affinen Automaten notwendigerweise auch total unzusammenhängend sein.

Beispiel 6.14

- Beim Sierpinski Dreieck haben "nur" abzählbar viele Punkt mehr als eine Adresse. Da das Sierpinski Dreieck aber überabzählbar viele Punkt enthält ist die Menge der Punkt mit mehr als einer Adresse "klein". Somit ist das Sierpinski Dreieck knapp berührend.

- Ein total disjunktes Fraktal $\Phi \subseteq \mathbb{R}$ ist das Cantorsche Diskontinuum, welches durch folgendes IFS beschrieben werden kann:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Abbildung 6.6:
Buchenblatt durch überlappenden Affinen Automaten erzeugt

- Das Buchenblatt in Abbildung 6.6 ist ein Beispiel für ein überlappendes Fraktal. Hierbei ist die Überlappung in Abbildung 6.6 oben günstig und unten ungünstig gewählt.

Bemerkung
Durch Bildfolgesprachen beschriebene Fraktale sind nicht überlappend!

6.3 Matrix IFS

In diesem Abschnitt werden wir zu Affinen Automaten äquivalente Systeme einführen, d.h. Systeme, die dieselbe Klasse von Fraktalen erzeugen, welche aber, wie wir später sehen werden, für eine Implementierung eines probabilistischen Algorithmus besser geeignet sind. Diese Systeme nennen wir Matrix IFS (MIFS).
Matrix IFS werden auch als hierarchische oder wechselseitig rekursive Funktionensysteme oder MRFS (mutually recursive function systems) bezeichnet. Im folgenden leiten wir ein Matrix IFS aus einem Affinen Automaten her.
Wir gehen von einem Affinen Automaten $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$, mit $S_\Phi = \lim_{l\to\infty} \Phi_{\mathcal{A},l}(S), S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ aus. Dann läßt sich die Abbildung $\Phi_{\mathcal{A},l}$ formal wie folgt schreiben:

$$\Phi_{\mathcal{A},l} \mathrel{\widehat{=}} \bigcup_{\substack{|x|=l \\ w\in T(\mathcal{A})}} \varphi_w = \bigcup_{\substack{a\in\Sigma \\ a\in T(\mathcal{A})}} \varphi_a \cdot \Big(\bigcup_{\substack{aw'\in T(\mathcal{A}) \\ |w'|=l-1}} \varphi_a \Big)$$

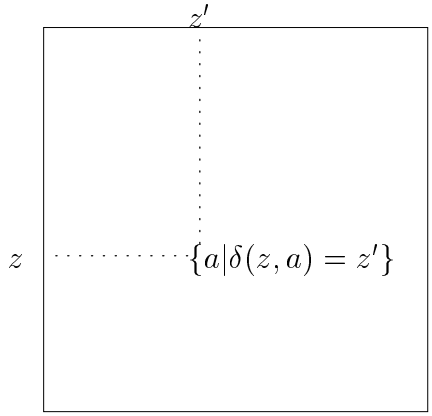
Der Anfangsbuchstabe a muß wegen der Eigenschaften der Bildfolgesprachen auch in $T(\mathcal{A})$ liegen.
Für den Attraktor gilt dann:

$$S_\Phi = \bigcup_{\substack{a\in\Sigma\\ a\in T(\mathcal{A})}} \varphi_a \cdot \underbrace{(\lim_{l\to\infty} \Phi_{\mathcal{A}_a,l}(S))}_{S_{\Phi_a}} = \bigcup_{\substack{a\in\Sigma\\ a\in T(\mathcal{A})}} \varphi_a \cdot (S_{\Phi_a})$$

Hierbei ist S_{Φ_a} "derselbe" Attraktor, wie bei dem Affinen Automaten, bei dem z_0 in $\delta(z_0, a)$ geändert wurde. Genauso ergibt sich dann

$$S_{\Phi_a} = \bigcup_{\substack{b\in\Sigma\\ b\in T(\mathcal{A})}} \varphi_b \cdot (S_{\Phi_{ab}})$$

Fahren wir analog fort, erhalten wir ein endliches System von Gleichungen für die Attraktoren und die Affinen Abbildungen. Dieses Gleichungssystem ist durch die Anzahl der Zustände des Automaten beschränkt.
Nun betrachten wir den Automaten als $|Z| \times |Z|$-Matrix mit Einträgen aus $\mathcal{P}(\Sigma)$:



Sei nun $|Z| = m$ und die resultierende $m \times m$-Matrix $\mathcal{M}$ mit Einträgen $m_{lj} \subseteq \{1, \ldots, n\} = \Sigma$, so ergibt sich hieraus das Matrix IFS:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\varphi_{111}, \ldots, \varphi_{11k_{11}}} & \cdots & \boxed{\varphi_{1m1}, \ldots, \varphi_{1mk_{1m}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\varphi_{m11}, \ldots, \varphi_{m1k_{m1}}} & \cdots & \boxed{\varphi_{mm1}, \ldots, \varphi_{mmk_{mm}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ \vdots \\ S'_m \end{bmatrix}$$

Diese Matrix-System besteht sozusagen aus m Gleichungen der Form

$$S_i = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{k_{ij}} \varphi_{ijl}(S'_j), \text{ für } i \in \{1, \ldots, m\}$$

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem, welches bezüglich S'_j geordnet ist. Hierbei müssen wir jedoch beachten, daß - wie bei Affinen Automaten - auch hier die KKB erfüllt wird.

Setzen wir $s_{lj} := \max\{s_{ljk} | 1 \le k \le k_{lj}\}$, so erhalten wir den Kontraktionskoeffizienten von φ_{ljk}. Dann gilt wegen der KKB:

$$s_{lj_1} \cdot s_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot s_{j_t l} < 1. \tag{6.1}$$

Nun wollen wir das Matrix IFS als IFS über $(\mathbb{R}^2)^m$ auffassen, mit

$$\Phi_m : \mathcal{H}((\mathbb{R}^2)^m) \longrightarrow \mathcal{H}((\mathbb{R}^2)^m).$$

Dann ist Φ_m^l kontrahierend für ein gewisses l, wegen der KKB und (6.1).
Hierbei ist anzumerken, daß wir l so groß wählen, daß $s_{max} \cdot s_{loop} < 1$ gilt.
Wir erhalten also, daß Φ_m einen Attraktor in $(\mathbb{R}^2)^m$ hat. Als Fraktal von Φ_m (oder von $\mathcal{M}$) bezeichnen wir S_1 (die sogenannte Display-variable).

6.4 Beispiele zur Umwandlung in Matrix IFS

In diesem Abschnitt wollen wir aus den bisher bekannten Erzeugungsmechanismen für Fraktale zugehörige Matrix IFS erzeugen.

Beispiel 6.15 (Endlicher Automat nach Matrix IFS)
Gegeben $\mathcal{A}$:

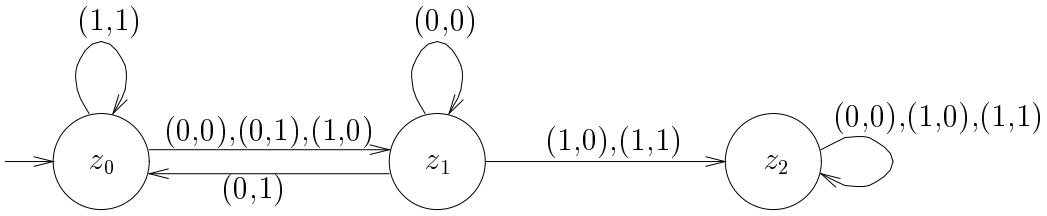


Abbildung 6.7
Endlicher Automat für überlagertes Sierpinski Dreieck

Dann erhalten wir für den Attraktor $\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi)$:

$$\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi) = \varphi_{(1,1)}(\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi)) \cup \bigcup_{a \neq (1,1)} \varphi_a(\Phi_{\mathcal{A},1}(S_\Phi)),$$

wobei $\varphi_{(1,1)}$ einer Verkleinerung und Verschiebung entspricht. Außerdem ist $\Phi_{\mathcal{A},1}$ die Abbildung, welche von $\mathcal{A}$ mit dem Startzustand z_1 erzeugt wird.
Dann erhalten wir für den zugehörigen Attrakor:

$$\Phi_{\mathcal{A},1}(S_\Phi) = \varphi_{(0,0)}(\Phi_{\mathcal{A},1}(S_\Phi)) \cup \varphi_{(0,1)}(\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi)) \cup \bigcup_{a \in \{(1,0),(1,1)\}} \varphi_a(\Phi_{\mathcal{A},2}(S_\Phi))$$

$$\Phi_{\mathcal{A},2}(S_\Phi) = \bigcup_{a \neq (0,0)} \varphi_a(\Phi_{\mathcal{A},2}(S_\Phi))$$

Es ergibt sich also für das Matrix IFS:

$$S_1 = \varphi_{(1,1)}(S_1) \cup \bigcup_{a \neq (1,1)} \varphi_a(S_2)$$

$$S_2 = \varphi_{(0,0)}(S_2) \cup \varphi_{(0,1)}(S_1) \cup \varphi_{(1,0)}(S_3) \cup \varphi_{(1,1)}(S_3)$$

$$S_3 = \bigcup_{a \neq (0,0)} \varphi_a(S_3)$$

Beispiel 6.16 (Affiner Automat nach Matrix IFS)
Gegeben: Baum mit Schatten (siehe Abbildung 6.8) und zugehöriger Affiner Automat $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{A}$:

Abbildung 6.8:
Baum mit Schatten

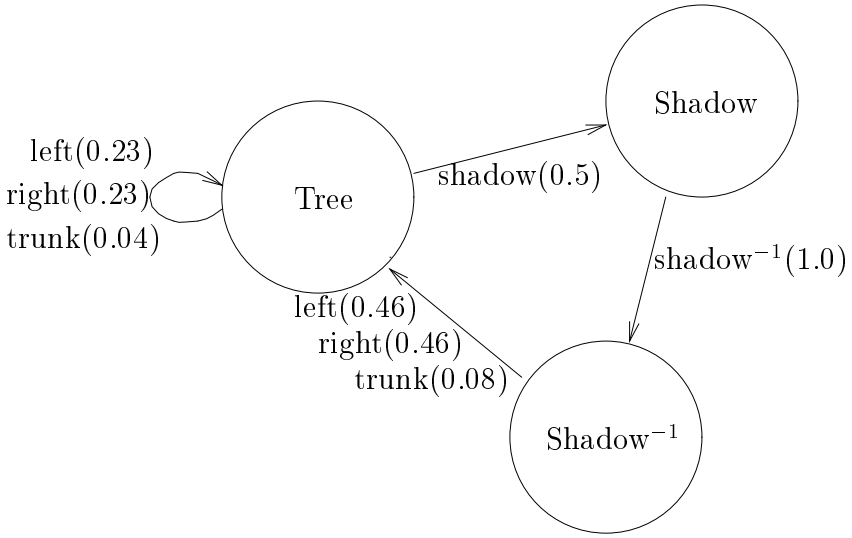


Abbildung 6.9
Affiner Automat zur Erzeugung des Baums mit Schatten

Dann gilt für den Attraktor

$$\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi) = \bigcup_{i \in \{left,right,trunk\}} \varphi_i(\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi)) \cup \varphi_{shadow}(\Phi_{\mathcal{A},shadow}(S_\Phi))$$

$$\Phi_{\mathcal{A},shadow}(S_\Phi) = \varphi_{shadow^{-1}}(\Phi_{,\mathcal{A}}(S_\Phi))$$

$$\Phi_{\mathcal{A},shadow \cdot shadow^{-1}}(S_\Phi) = \bigcup_{i \in \{left,right,trunk\}} \varphi_i(\Phi_{\mathcal{A}}(S_\Phi))$$

Wir erhalten also das Matrix IFS

$$\begin{pmatrix} \{\varphi_{left}, \varphi_{right}, \varphi_{trunk}\} & \{\varphi_{shadow}\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\varphi_{shadow^{-1}}\} \\ \{\varphi_{left}, \varphi_{right}, \varphi_{trunk}\} & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Das Matrix IFS enthält zwei Kreise. Für diese muß die KKB erfüllt sein.

1. Kreis: $\{\varphi_{left}, \varphi_{right}, \varphi_{trunk}\}$, also $s_{11} < 1$.

2. Kreis: $\{\varphi_{shadow}\}; \{\varphi_{shadow^{-1}}\}; \{\varphi_{left}, \varphi_{right}, \varphi_{trunk}\}$, also $s_{12} \cdot s_{23} \cdot s_{31} < 1$.

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit. Wir orientieren uns hierbei nicht an dem Affinen Automaten, sondern betrachten das Fraktal. Dieses besteht aus dem Baum und dem Schatten. Für den Baum gilt:

$$S_{Baum} = \bigcup_{i \in \{links, rechts, Stamm\}} \varphi_i(S_{Baum})$$

und für den Schatten:

$$S_{schatten} = \varphi_{Schatten}(S_{Baum}).$$

Da sich das Fraktal nur aus Baum und Schatten zusammensetzt, erhalten wir des weiteren

$$S = S_{tree} \cup S_{shadow}.$$

Nun haben wir das Matrix IFS

$$\begin{pmatrix} \emptyset & \{id, \varphi_{Schatten}\} \\ \emptyset & \{\varphi_{links}, \varphi_{rechts}, \varphi_{Stamm}\} \end{pmatrix}.$$

Dieses Matrix IFS enthält nur den Kreis $\{\varphi_{links}, \varphi_{rechts}, \varphi_{Stamm}\}$. Für diesen muß die KKB erfüllt sein, also muß $s_{22} < 1$ gelten.

Beispiel 6.17 (IFS mit Kondensationsmenge nach Matrix IFS)
Gegeben: Allee (Baumfolge)

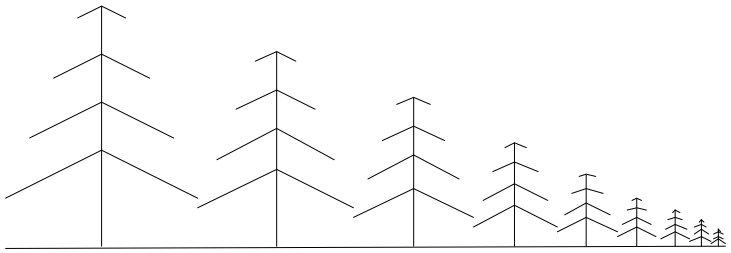


Abbildung 6.10
Durch ein IFS mit Kondensationsmenge erzeugte Allee

Der Startpunkt C ist hier durch das IFS gegeben. D.h. wir erhalten für S_2 ein Gleichungssystem, auf dessen rechten Seiten S_1 nicht vorkommt. Dieses Gleichungssystem erzeugt dann - falls möglich - die Kondensationsmenge. Für das Fraktal gilt dann

$$S_1 = S_2 \cup \varphi(S_1),$$

wobei φ eine Verkleinierung und Verschiebung bewirkt.

Das Matrix IFS sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \{\varphi\} & \{id\} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \multicolumn{4}{c}{\multirow{3}{*}{\boxed{\begin{array}{c}\text{Matrix}\\ \text{zur Erzeugung}\\ \text{von } S_2\end{array}}}} \\ \vdots & & & & \\ \emptyset & & & & \end{pmatrix}$$

Kreise sind hierbei $\{\varphi\}$ und ggf. Kreise in S_2. Es muß also $s_{11} < 1$ gelten.

Beispiel 6.18 In diesem Beispiel wollen wir eine Folge von kleiner werdenden Bäumen mit Schatten und einem am linken Ast hängenden Spiegel betrachten. Der Spiegel reflektiert hierbei die restliche Baumfolge (siehe Abbildung 6.11).

Abbildung 6.11

Folge von Bäumen mit Schatten und Spiegel ((a) probabilistisch (b) deterministisch)

Der Baum setzt sich analog zum Beispiel 6.16 zusammen

$$Baum = left(Baum) \cup right(Baum) \cup trunk(Baum).$$

Sowohl die Schnur, an welcher der Spiegel hängt, als auch den Rahmen des Spiegels erzeugen wir durch Linien:

$$Schnur = id(Schnur) \quad und \quad Rahmen = id(Rahmen)$$

Die Bäume ergeben sich dann als Komposition der einzelnen Teile

$$Bäume = id(Baum) \cup a(Schnur) \cup b(Rahmen) \cup c(Reihe),$$

wobei a, b und c Abbildungen zum exakten Einjustieren der Bildelemente sind. Abschließend erhalten wir noch für die gesamte Reihe

$$Reihe = id(Baum) \cup shadow(Baum) \cup shift(Reihe).$$

Beispiel 6.19 Es sei die Pflanze durch einen Affinen Automaten gegeben:

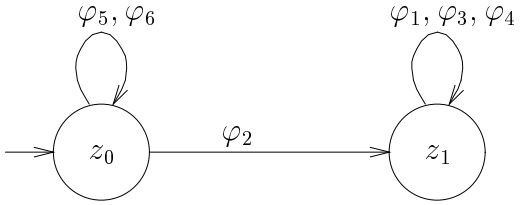


Abbildung 6.12
Affiner Automat zur Erzeugung der Pflanze (ohne Wahrscheinlichkeiten)

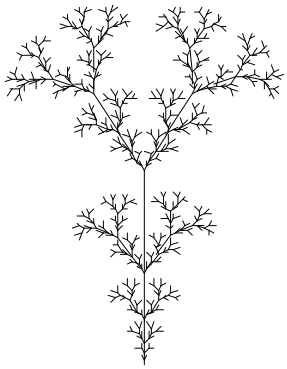


Abbildung 6.13
Eine durch einen Affinen Automaten erzeugte Pflanze

Es ergibt sich für das Matrix IFS:

$$S_1 = \varphi_1(S_1) \cup \varphi_2(S_2) \cup \varphi_3(S_1) \cup \varphi_4(S_1)$$

$$S_2 = \varphi_5(S_2) \cup \varphi_6(S_2)$$

mit

$$\varphi_1 = s_{\frac{1}{2}} \qquad \varphi_3 = t_{(0,\frac{1}{2})} \circ r_{-\delta} \circ s_{\frac{1}{2}} \qquad \varphi_5 = s_{\frac{1}{2}}$$
$$\varphi_2 = t_{(0,\frac{1}{4})} \circ s_{\frac{1}{4}} \qquad \varphi_4 = t_{(0,\frac{1}{2})} \circ r_{\delta} \circ s_{\frac{1}{2}} \qquad \varphi_6 = t_{(0,\frac{1}{2})} \circ s_{\frac{1}{2}}$$

Beispiel 6.20 Abschließend wollen wir nun noch ein Matrix IFS finden, welches die Drachenkurve erzeugt:

Abbildung 6.14
Drachenkurve

Es ergibt sich für das Matrix IFS:
Für die gesamte Drachenkurve

$$S_1 = \varphi_1(S_1) \cup \varphi_2(S_2)$$

und für den verkleinerten und gespiegelten Teil

$$S_2 = \varphi_3(S_1) \cup \varphi_4(S_2)$$

mit

$$\varphi_1 = r_{\frac{\pi}{4}} \circ s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \varphi_2 = t_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \circ r_{-\frac{\pi}{4}} \circ s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \varphi_3 = r_{-\frac{\pi}{4}} \circ s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \varphi_4 = t_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} \circ r_{\frac{\pi}{4}} \circ s_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

6.5 Umwandlung von Matrix IFS in Affine Automaten

In den letzten Abschnitten haben wir gesehen, wie man von anderen Erzeugungsmechanismen zu Matrix IFS gelangt. In diesem Abschnitt interessieren wir uns nun für den umgekehrten Weg und wollen untersuchen, wie man aus einen Matrix IFS einen Affinen Automaten ableiten kann.
Sei also ein Matrix IFS gegeben. Dann konstruieren wir einen Affinen Automaten $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ wie folgt:

- $\Sigma = \{(i,j,k) | 1 \leq i,j \leq m \text{ und } 1 \leq k \leq k_{ij}\}$ (Menge aller Indizes der Abbildungsmatrix des Matrix IFS)
- $Z = \{S_1, \ldots, S_m\}$
- $z_0 = S_1$

- $\delta(S_l,(i,j,k)) = \begin{cases} S_j & , \text{ falls } i = l \\ nicht\ definiert & , \text{ falls } i \neq l \end{cases}$
- $S_l = \ldots \cup \varphi_{ljk}(S_j) \cup \ldots$

Nun müssen wir noch zeigen, daß der so konstruierte Affine Automat S_1 erzeugt.
Sei $z \in S_1$. Dann gilt:

$$\exists j_1 \exists l_1 \exists z_1 \in S_{j_1} : z = \varphi_{1 j_1 l_1}(z_1) = \psi_1(z_1)$$

und

$$\exists j_2 \exists l_2 \exists z_2 \in S_{j_2} : z_1 = \varphi_{j_1 j_2 l_2}(z_2) = \psi_2(z_2), \text{ d.h. } z = \psi_1(\psi_2(z_2))$$

$$\vdots$$

Also ergibt sich insgesamt

$$z = \psi_1(\psi_2(\psi_3(\ldots \psi_l(z_l) \ldots))).$$

es existiert also zu jedem $z \in S_1$ eine Folge von Abbildungen $\psi 1, \psi_2, \ldots$ derart, daß

$$\lim_{l \to \infty} \psi_1(\psi_2(\ldots(\psi_l(z_0))\ldots)) = z$$

unabhängig von z_0.
Betrachten wir nun den Abstand, so erhalten wir

$$d(\psi_1(\ldots(\psi_l(z_0))\ldots), \underbrace{\psi_1(\ldots(\psi_l(z_l))\ldots)}_{=z}) \leq s_{max} \cdot s_{loop}^c \cdot d(z_0, z_l).$$

Außerdem ist

$$d(z_0, z_l) \leq diam(S_1 \cup \ldots S_m), \text{ falls } z_0 \in S_1 \cup \ldots \cup S_m.$$

Liegt z im Attraktor, so wählen wir $z_l \in S_{j_l}$ und erhalten

$$d(\underbrace{\psi(\ldots(\psi_l(z_o'))\ldots)}_{\simeq z'}, \underbrace{\psi_1(\ldots(\psi_l(z_l))\ldots)}_{=z}) \leq k \cdot s_{loop}^c, \text{ falls } z_0 \text{ fest gewählt ist.}$$

Somit liefert der Affine Automat den selben Attraktor, wie das Matrix IFS.

Kapitel 7

Probabilistische Affine Automaten (PAA)

In diesem Abschnitt stellen wir eine Erweiterung der affinen Automaten vor; den probabilistischen affinen Automaten (PAA), bei dem ein „normaler“ affiner Automat um eine „Verzweigungswahrscheinlichkeit“ erweitert wurde. Wir betrachten $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$, wobei $\mathcal{I}$ ein IFS und $\mathcal{P}$ ein probabilistischer Automat (Σ, Z, p, Z') ist.

Z' ist die Menge der Endzustände und p eine Funktion $p : Z \times \Sigma \times Z \to [0,1]$ derart, daß

$$\sum_{a \in \Sigma} \sum_{z \in Z} p(z', a, z) = 1 \text{ für jedes } z' \in Z$$

Der Unterschied zu einem „normalen“ probalistischen Automaten wird in der Doppelsumme deutlich.

Wir betrachten zusätzlich noch die Funktion f mit $f : \Sigma \to \mathcal{I} = (\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_{|\Sigma|})$ und der Kreiskontraktionsbedingung, die wie bei affinen Automaten lautet.

Wir wollen nun einen **probabilistischen Algorithmus** kennenlernen, der es uns ermöglicht, das von einem gegebenem probabilistischen affinen Automaten erzeugte Fraktal darzustellen.

Chaos Game Algorithmus

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2, z_0 \in Z$ zufällig gewählt und $\mathcal{N}$ die Anzahl der darzustellenden Punkte.

```
z:=z0
x:=x0
REPEAT
  wähle Transition (z,a,z') zufällig [gemäß p]
  z:=z'
  x:=φa(x)
  IF z∈Z' THEN PRINT(x)
  N:=max {N-1,0} ENDIF
UNTIL N=0
END.
```

Wenn man das folgende Beispiel gemäß dem Algorithmus in ein Bild umsetzt, wird man

feststellen, daß das gewünschte Resultat noch nicht erreicht wird. Man erkennt keine Pflanze, wie geplant, sondern nur Blätter da die Stiele nicht kräftig genug dargestellt werden.

Beispiel 7.1 PAA, der eine Pflanze erzeugt

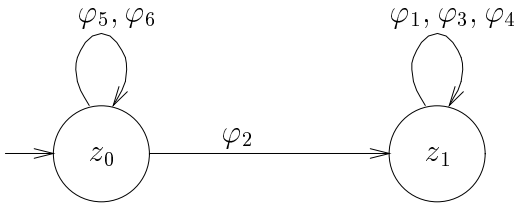


Abbildung 7.1
Affiner Automat zur Erzeugung der Pflanze (ohne Verzweigungswahrscheinlichkeiten)

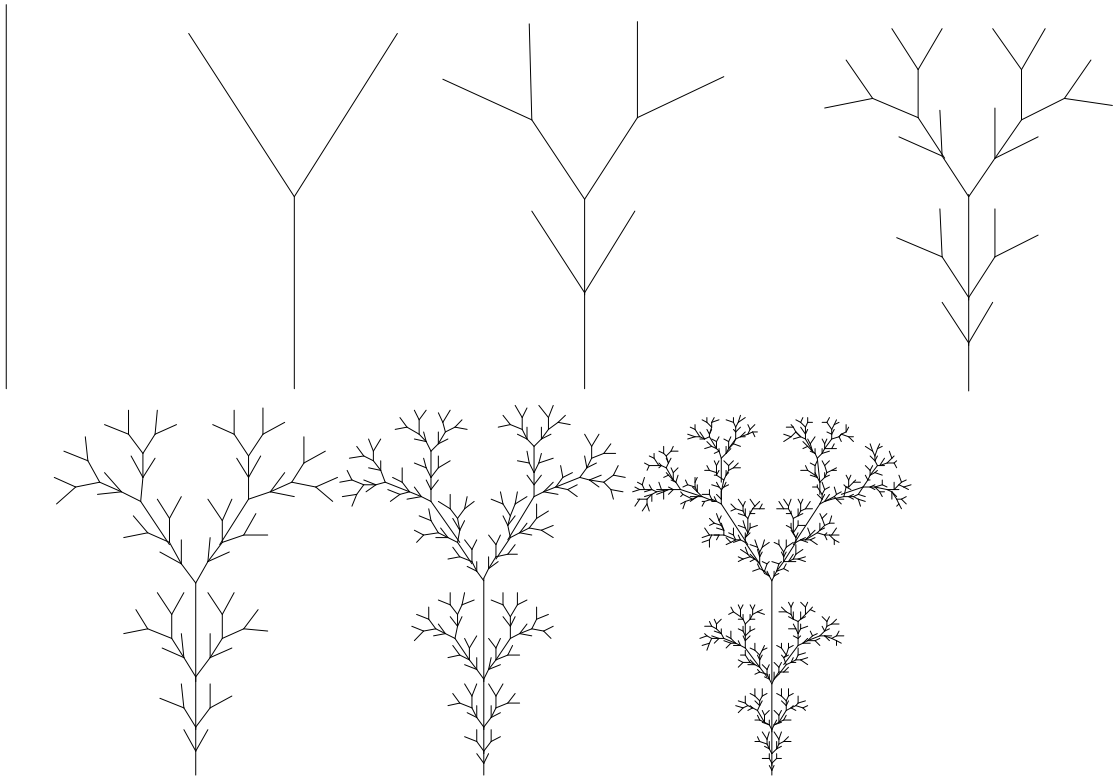


Abbildung 7.2
Gewünschte Ausgabe des probabilistischen Automaten

Die Ursache für das oben angesprochene Manko hierfür ist die Tatasche, daß von z_1 keine Transition mehr zurück zu z_0 führt und nur durch den Zustand z_0 ein senkrechter Strich generiert wird.

Aus diesem Grund müssen wir eine weitere Voraussetzung für PAA treffen: wir fordern, daß ein PAA stark zusammenhängend sein muß, d.h.:

$$\forall z\ \forall z'\ \exists w \in \Sigma^* : p(z, w, z') > 0$$

wobei $p(z, w, z') = p(z, a_1, z_1) \cdot p(z_1, a_2, z_2) \cdot \ldots \cdot p(z_l - 1, a_l, z')$ ist, falls als $w = a_1 \ldots a_l$ definiert ist.

Informell könnte man sagen, daß von jedem Punkt des Graphen jeder beliebige andere Punkt erreichbar ist oder daß der Graph nicht in Komponenten zerfällt und alle Punkte auf Kreisen liegen.

Dazu überlegen wir uns als Vorarbeit, wie wir jedes beliebiges Matrix IFS in ein stark zusammenhängendes Matrix IFS mit gleichem Fraktal transformieren können. Aus einem gegebenen Matrix IFS (links) wird das stark zusammenhängende Matrix IFS (rechts):

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_{1j}(S_{1j}) \\ &\vdots& \\ S_n &=& \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_{nj}(S_{nj}) \end{array} \quad \text{wird zu} \quad \begin{array}{rcl} S_1 &=& \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_{1j}(S_{1j}) \cup \psi_1(S_{n+1}) \\ &\vdots& \\ S_n &=& \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_{nj}(S_{nj}) \cup \psi_n(S_{n+1}) \\ S_{n+1} &=& \bigcup_{i=1}^{n} \psi_i(S_i) \end{array}$$

Es gilt hierbei $S_{ij} \in \{S_1, \ldots, S_n\} \cup \{\emptyset\}$, $x_i \in S_i$ fest und $\psi_i : \mathbb{R}^2 \to \{x_i\}$.

Die zugrunde liegende Idee ist einfach. Man erweitert das Matrix IFS um eine Zeile, in der jede Funktion des ursprünglichen Matrix IFS genau einmal aufgerufen wird. Außerdem werden in jeder Zeile des ursprünglichen Matrix IFS die vorhandenen Gleichungen um einen Aufruf der letzten Zeile erweitert. Auf diese Weise wird das Matrix IFS stark zusammenhängend. Es ist aber noch nicht gewährleistet, daß der Attraktor des neuen MIFS derselbe ist, wie der des alten. Deshalb muß man an den Aufruf der neuen Funktionen die Forderung machen, daß diese nur Punkte aus dem ursprünglichen Attraktor darstellt. Deshalb schränkt man die Kontraktionen ψ_i idealerweise auf einen Punkt aus dem korrespondierenden S_i ein.

Die folgende Illustration verdeutlicht die Idee noch einmal anhand eines Beispiels:

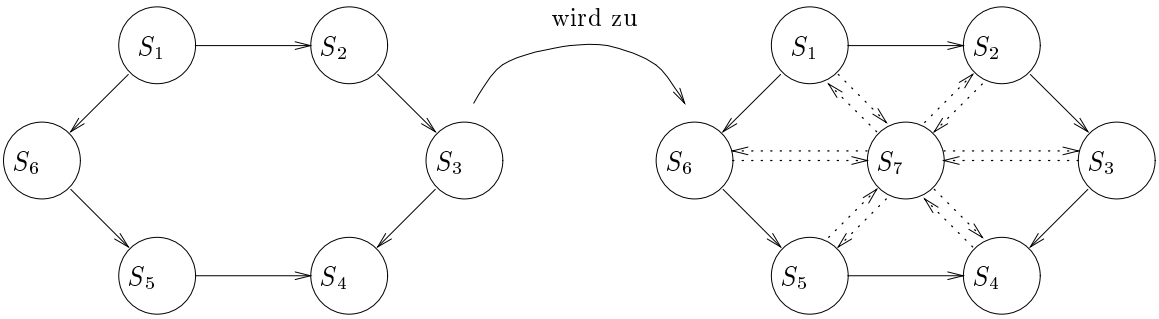


Abbildung 7.3
Erzwingen des starken Zusammenhangs eines MIFS

Beim Beispiel oben ist es hinreichend, die Abbildung S_2 zu $S_2 = \varphi_5(S_2) \cup \varphi_6(S_2) \cup \varphi_7(S_1)$ zu modifizieren, wobei $\varphi_7(\cdot) = \{x_1\}$ ist.

Nun wollen wir die Transformation eines Matrix IFS in einen PAA betrachten:

Zunächst transformieren wir das MIFS in ein stark zusammenhängendes MIFS wie oben angegeben. Wir erhalten den PAA wie folgt:

PAA: $Z = \{S_1, \ldots, S_{n+1}\}$, $Z' = \{S_1\}$ und $p(S_l, ik, S_{jk}) = 0$, falls $i \neq j$ oder $S_l \neq S_{jk}$.

Wir treffen dabei stillschweigend die Vereinbarung, $\varphi_{i(n+1)} := \psi_i$, falls $i \leq n$ und $\varphi_{(n+1)i} := \psi_i$. Ansonsten ist $p(S_l, ik, S_j) > 0$ so zu wählen, daß ein möglichst gleichmäßiger Schwärzungsgrad gewährleistet ist.

Kapitel 8

Einfache Verfahren fraktaler Bildcodierung

In diesem Kapitel soll eine praktische Anwendung von Fraktalen vorgestellt werden. Wie wir bereits gesehen haben, ist es möglich, fraktal erzeugte Bilder mit sehr kleinem Aufwand zu beschreiben. So läßt sich das Sierpinski-Dreieck mit einem Automaten, welcher nur einen Zustand hat, oder einem IFS mit drei Abbildungen beschreiben. Man sieht, daß es möglich ist die große Menge der Informationen eines Fraktals in einer einer kleinen Menge von Informationen zu kodieren. Wir wollen nun überlegen, ob dies auch für beliebige reelle Bilder effizient durchführbar ist.
Ein großer Vorteil von Fraktalen beim Einsatz in der Bilddatenkompression wäre die Eigenschaft, daß die Beschreibung unabhängig von der Auflösung ist, was gewöhnliche Bildkompressionsverfahren nicht gewährleisten können.
Betrachten wir unsere Beschreibungsmöglichkeiten von Fraktalen, so können wir die Verfahren in Abhängigkeit der Geschwindigkeit der Wiedergewinnung des Bildes nach fraktaler Kodierung in zwei Gruppen unterteilen:

- Schnelle Wiedergewinnung durch endliche Automaten und probabilistische Algorithmen
- Langsame Wiedergewinnung durch deterministische Algorithmen, z.B. bei Affine Automaten

Man muß dann im Einzelfall untersuchen, ob höhere Genauigkeit, also Verwendung von langsamen, aber qualitativ besseren Verfahren, oder höhere Geschwindigkeit, also schnelle Algorithmen mit eventuellem Qualitätsverlust, benötigt werden.

8.1 Rekursive Bildunterteilung

Bei der rekursiven Bildunterteilung sucht man einen endlichen Automaten, welcher ein gegebenes reelles Bild kodiert. Hierbei unterteilt man das Bild in Ähnlichkeitsklassen

Abbildung 8.1:
Raute als endlicher Automat codiert

von Unterquadranten, welche jeweils durch einen Zustand des Automaten repräsentiert werden.

Wir kodieren als Beispiel eine Raute und erhalten einen endlichen Automaten mit 34 Zuständen. Ein Teil des Automaten ist in Abbildung 8.1 dargestellt. Hiebei müsten die Zustnde 1, 3, 5 und 6 in vier und die Zustnde 2 und 4 in acht einzelne Zustände unterteilt werden (wegen notwendiger Spiegelung und Drehung der einzelnen Quadranten). Nun besteht aber durch Ausnutzung der Symetrie die Möglichkeit, die Anzahl der Zustände zu reduzieren.

Somit sehen wir, daß ein Matrix IFS mit Standardabbildungen für Verkleinerung um $1/r$, Drehung, Spiegelung und deren Hintereinanderausführung eine Kodierung mit geringem Platzaufwand ermöglicht.

Abbildung 8.2:
Dreifuß als endlicher Automaten über Dreiecksgrundmuster codiert

Eine weitere Reduktion der Anzahl der Zustände können wir nun noch durch die Änderung des Grundmusters für die rekursive Unterteilung erreichen. So ist es nicht möglich das Dreifuß (siehe Abbildung 8.2) durch einen gewöhnlichen endlichen Automaten zu beschreiben. Hierfür würde man unendlich viele Zustände benötigen. Bei diesem Beispiel wäre es besser als Grundmuster Dreiecke zu wählen. Dann sind die Q̈uadranten¨, in die man hineinkopiert die Dreiecke 0 bis 3 aus Abbildung 8.2. So erhält man als Beschreibung des Dreifusses einen endlichen Automaten über dem Grundmuster Dreieck mit nur sieben Zuständen. Generell sind nur Muster mit der Eigenschaft, daß man mit Ihnen die gesamte Ebene (ohne Löcher) ausfüllen kann, möglich. einige verwendbare Muster sind in der Abbildung 8.3 dargestellt.

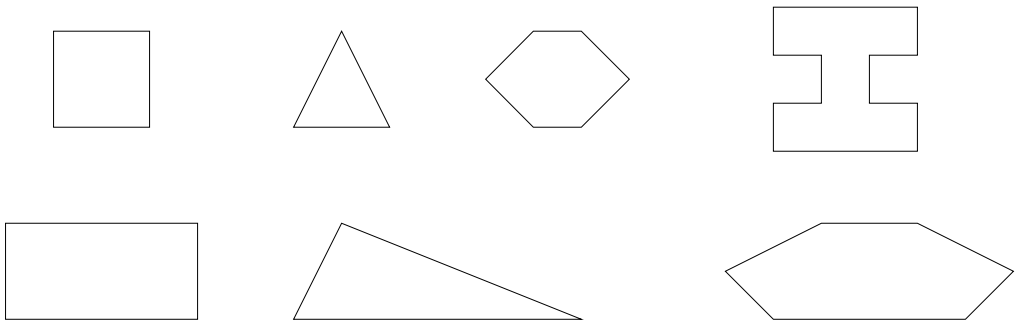


Abbildung 8.3
Mögliche Grundmuster für rekursive Unterteilung

8.2 Approximative Bildkodierung

Die meisten Bilder sind nicht exakt durch Matrix IFS erzeugbar. So gibt es zum Beispiel Punkte, die nicht durch ein Matrix IFS berechnet werden können.
Somit müssen wir uns bei der Kompression auf die Approximation der zugrundeliegenden reellen Bilder beschränken, was aber für die in der Praxis vorkommenden diskreten Bilder keine wirkliche Einschränkung bedeutet.
Die approximative rekursive Unterteilung sieht dann wie folgt aus:

1. $z_0 \widehat{=}$ Bild $= [0,1]^2$.
2. Es entspreche z dem aktuellen Quadranten Q. Man unterteile Q in r^2 Unterquadranten $Q_1, \ldots, Q_{r^2}$.
3. Man prüfe, ob $Q_i \sim z'$, wobei z' die Menge der bisher erhaltenen Zustände durchlaufe. Gilt nun für alle z' nicht $Q_i \sim z'$, so übernehme für Q_i einen neuen Zustand $\hat{z}$. (Bem: Hierbei muß man für dir Bedingung $Q_i \sim z'$ einen geeigneten Ermessensspielraum finden.)
4. Solange es noch Zustände gibt, welche nicht nach Punkt 1 und 2 geprüft worden sind wiederhole dieses Verfahren.

Um mit diesem approximativen Verfahren eine gute Kompression bei geringsten Informationsverlusten im Bild zu erhalten, muß man nun interaktiv weiter verfahren und den Ermessensspielraum solange ändern, bis man mit der Kompressionsrate und der Qualität des durch das Fraktal erzeugten Bildes im Vergleich zum Orginalbild zufrieden ist.

Kapitel 9

Fraktale Dimension

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage nach der Dimension eines Fraktals beschäftigen. So stellt sich zum Beispiel die Frage, ob ein „schwärzeres“ Fraktal eine höhere Dimension hat, als ein weniger schwarzes. Im Verlauf dieses Kapitels werden wir geeignete Möglichkeiten kennenlernen, die uns eine Dimensionsberechnung eines Fraktals gestatten. Diese Methoden unterscheiden sich grundsätzlich von den intuitiven Ansätzen, die uns zunächst einfallen (Volumen, Fläche, etc. berechnen), wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 9.1 Wir betrachten das Sierpinski Dreieck gegeben durch ein IFS. Als Startbild wählen wir das schwarze Einheitheitsquadrat. Zunächst wollen wir seine Fläche berechnen. Dazu definieren wir die Fläche der ersten Approximation als eine Flächeneinheit. In der zweiten Iteration wird dargestellte Bild in beiden Richtungen um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht, so daß es nur noch $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Fläche einnimmt. Dann wird dieses verkleinerte Bild insgesamt dreimal wieder in das Einheitsquadrat eingefügt. Insgesamt beträgt die Fläche also nur noch $\frac{3}{4}$ der vorigen Fläche. Dies gilt auch für jeden weiteren Schritt, so daß im zweiten Schritt die Fläche nur noch $\frac{9}{16}$ der Ursprungsfläche beträgt. Als Grenzwert ergibt sich für die Fläche des Sierpinski Dreiecks: $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n} = 0$

Wir sehen also, daß das Sierpinski Dreieck keine Fläche hat. Demnach kann es sich nicht um ein zweidimensionales Objekt handeln, da dieses über eine berechenbare Fläche verfügen müßte, falls es durch ein Objekt mit einer definierten Fläche, wie hier dem Einheitsquadrat, vollständig überdeckt werden kann.

Untersuchen wir also die Länge des Dreiecks als Kurve. Als Startbild nehmen wir diesmal jedoch eine Linie, die den ganzen unteren Rand des Einheitsquadrates einnimmt. Dies ist zur Längenbestimmung zweckmäßig, da wir dieser Linie die Länge eins zuordnen. Für den Grenzprozeß des Sierpinski Dreiecks spielt es -wie wir in früheren Kapiteln bereits gesehen haben - keine Rolle, welches Bild für das IFS als Startbild gewählt wird, solange dieses nicht vollständig weiß ist. Analog zu oben wird in der ersten Iteration die Linie gestaucht, allerdings nur um den Faktor $\frac{1}{2}$, da die Linie nur eine Länge und keine Breite hat. Anschließend wird diese gestauchte Linie dreimal in das Einheitsquadrat gesetzt, so daß die Länge des Sierpinski Dreiecks in der zweiten Iteration nun $\frac{3}{2}$ Längeneinheiten beträgt, also um den Faktor $\frac{3}{2}$ zunimmt. Diese Zunahme ist in jeder Iteration konstant,

so daß sich für den Grenzprozeß ergibt: $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$

Das Sierpinski Dreieck hat also eine unendliche Länge. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Dimension der Sierpinski Dreiecks größer als eins ist. Es müßte sich also um eine gebrochene Dimension mit $1 < dim < 2$ handeln.

Ähnliche Phänomene hat man auch schon bei der Landvermessung beobachtet. Je genauer man die Küstenlinie Großbritanniens vermaß, desto länger wurde diese. Man konnte schließlich annehmen, daß die Küstenlinie unendlich lang sei.

Ein umgekehrtes Phänomen stellt die Cantor Menge (das Cantorsche Diskontinuum) dar. Diese erhält man wenn man mit dem Einheitsintervall [0,1] startet und ein IFS aus zwei Funktionen nimmt, die beide um den Faktor $\frac{1}{3}$ stauchen und von denen die eine das gestauchte Bild zusätzlich um $\frac{2}{3}$ in x-Richtung verschiebt. Man kann dann zeigen, daß die Cantor Menge, die im Grenzprozeß aus unendlich vielen Punkten besteht, die Länge 0 hat, da die Summe der „herausgeschnittenen“ Zwischenstücke 1 beträgt. In Abbildung 9.1 sind die ersten fünf Iterationen der Cantor Menge noch einmal dargestellt:

Abbildung 9.1
Die Cantor-Menge.

Es wäre nun interessant eine Maßzahl α für jedes Fraktal zu finden, so daß für alle $\alpha' > \alpha$ gilt: $Fläche_{\alpha'}(Fraktal) = 0$ und für alle $\alpha'' < \alpha$: $Länge_{\alpha''}(Fraktal) = \infty$.

9.1 Die Minkowski Dimension

Wir unterteilen das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ in r^2 Quadranten, r^4 Subquadranten, r^6 Subsubquadranten, etc. und beobachten zu einer gegebenen Teilmenge $S \subseteq [0,1]^2$ das Wachstum der Funktion $\mathcal{N}(S, r^{-n})$ definiert durch

$$\mathcal{N}(S, r^{-n}) := \textit{Anzahl der Quadranten } Q \textit{ der Kantenlänge } r^{-n} \textit{ mit } S \cap Q \neq \emptyset$$

Beispiel 9.2 Sierpinski Dreieck Für das Sierpinski Dreieck gilt: $\mathcal{N}(S, r^0) = 1$ $\mathcal{N}(S, r^{-1}) = 4$ $\mathcal{N}(S, r^{-2}) = 12$ $\mathcal{N}(S, r^{-3}) = 36$ $\mathcal{N}(S, r^{-n}) = 4 \cdot 3^{n-1}$ für $n \geq 1$ Unsere Wunschvorstellung ist, das Wachstum der Funktion $f_S^{(r)} := \mathcal{N}(S, r^{-n})$ abzuschätzen durch $f_S^{(r)} \sim C \cdot r^{\alpha n}$ für ein allgemeines $S \subseteq [0,1]^2$ wobei α unabhängig von r sein sollte.

Leider ist dieser Wunsch nicht generell erfüllbar. Deshalb definieren wir die obere und untere Minkowski Dimension.

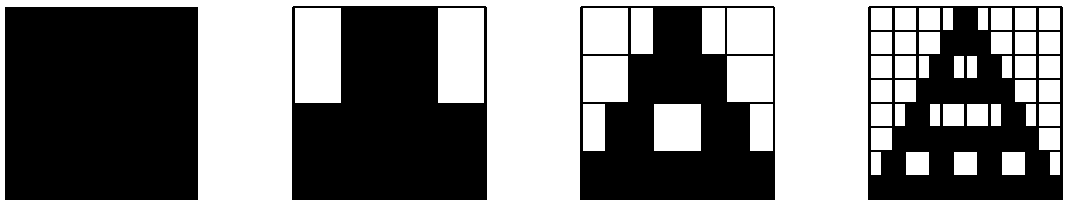


Abbildung 9.2: Sierpinski-Dreieck mit überlagertem Raster

Definition 9.3 (Minkowski Dimension, box counting dimension)
Die obere Minkowski Dimension ist definiert als

$$\overline{bdim}(S) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log_r(\mathcal{N}(S, r^{-n}) + 1)}{n}$$

Die untere Minkowski Dimension ist definiert durch

$$\underline{bdim}(S) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\log_r(\mathcal{N}(S, r^{-n}) + 1)}{n}$$

Bemerkung: In der Definition wurde jeweils das Argument des Logarithmus' im Zähler um 1 erhöht, damit die Minkowski Dimension auch für die leere Menge $= 0$ ist (sonst wäre die Minkowski Dimension der leeren Menge $-\infty$). Im folgenden werden wir die leere Menge vernachlässigen und dafür auch die Addition von eins im Zähler weglassen.

Da die rechten Seiten in Definition 9.3 stets existieren, gilt

Satz 9.4

Die Minkowski Dimensionen existieren für beliebige $S \subseteq [0,1]^2$

Bemerkung: Falls $\overline{bdim}(S) = \underline{bdim}(S)$ gilt, der Grenzwert also existiert, so wird $bdim(S)$ auch fraktale Dimension genannt.

Satz 9.5 *Es sei* $\mathcal{N}'(S, \varepsilon)$ *die minimale Anzahl von Kugeln des Radius* $\varepsilon, \varepsilon > 0$*, die nötig sind, um* S *zu überdecken. Dann gelten:*

$$\overline{bdim}(S) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\mathcal{N}'(S, \varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\underline{bdim}(S) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\mathcal{N}'(S, \varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \qquad \text{für } S \neq \emptyset$$

Bemerkung: Hiermit lösen wir uns von der starren Gitterstruktur des Rasters. Mitunter kann man mit Kugeln eine bessere Überdeckung erreichen und somit eine schärfere Abschätzung erhalten, da die Lage der Kugeln jetzt vom Raster unabhängig ist.

Beweis: Skizze

Wir betrachten den Spezialfall der Supremum-Metrik im $\mathbb{R}^2$.

Eine Kugel vom Radius $\frac{1}{2} \cdot r^{-n}$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge r^{-n}. Somit ist ein Überdecken dieser „Kugel" durch höchstens 4 Quadranten der Seitenlänge r^{-n} möglich. Andererseits ist natürlich jeder Quadrant eine Kugel in der Supremummetrik. Damit ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$\mathcal{N}(S, r^{-n}) \leq 4 \cdot \mathcal{N}'(S, \frac{1}{2}r^{-n})$ und $\mathcal{N}'(S, \frac{1}{2}r^{-n}) \leq \mathcal{N}(S, r^{-n})$. (Für andere Metriken im $\mathbb{R}^2$ ergeben sich ähnliche Abschätzungen; allerdings ist deren Verifikation schwieriger.)

Es folgt

$$\frac{\log_r \mathcal{N}'(S, \frac{1}{2}r^{-n})}{\underbrace{\log_r \frac{2}{r^{-n}}}_{\sim n}} \leq \frac{\log_r \mathcal{N}(S, r^{-n})}{n} \leq \frac{\log_r \mathcal{N}'(S, \frac{1}{2}r^{-n}) + \overbrace{\log_r 4}^{\text{irrelevant für Grenzwert}}}{\underbrace{\log_r \frac{2}{r^{-n}}}_{\sim n}},$$

und die Behauptung folgt durch Grenzübergang. □

Satz 9.6

Die Minkowski*schen Dimensionen hängen nicht von der Skalierung der Menge ab, d.h. ist* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *mit* $d(\varphi(z), \varphi(z')) = c \cdot d(z, z')$ *für* $c > 0$ *so gelten:*
$\overline{bdim}(\varphi(S)) = \overline{bdim}(S)$ *und* $\underline{bdim}(\varphi(S)) = \underline{bdim}(S)$.

Beweis:

Sei $c > 1$. Wenn eine Überdeckung eines Gebietes S mit n Kugeln vom Radius r möglich ist, so ist eine Überdeckung von $\varphi(S)$ mit n Kugeln vom Radius $c \cdot r$ möglich. Damit kann $\varphi(S)$ auch mit $\underline{const} \cdot n$ Kugeln vom Radius r überdeckt werden. Mit den vorigen Sätzen folgt: $\mathcal{N}(\varphi(S), \varepsilon) \leq \underline{const} \cdot \mathcal{N}(S, \frac{1}{c}\varepsilon) \leq \mathcal{N}(S, \varepsilon)$ □

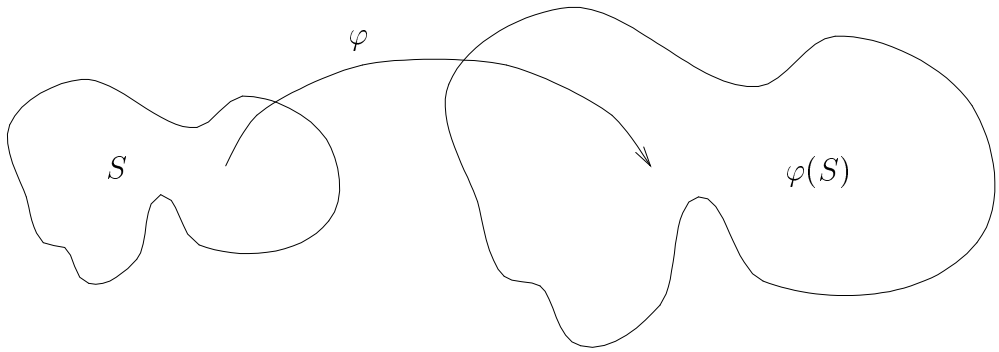


Abbildung 9.3
Beide Mengen haben gleiche Minkowski Dimension !

Im folgenden wollen wir den ε-parallelen Körper, der auf eine Idee von Minkowski zurückgeht, kennenlernen:

Definition 9.7 (ε-paralleler Körper) $\overline{K_\varepsilon}(S) := \{z : \exists z' \in S : \rho(z, z') \leq \varepsilon\}$ ist der *ε-parallele Körper* zur Menge $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: $\overline{K}_\varepsilon(S)$ ist also die Vereinigung aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ε mit Zentren in S.

Satz 9.8 *Es gelten für* $S \neq \emptyset$

$$\overline{bdim}(S) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log m(S, \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

und

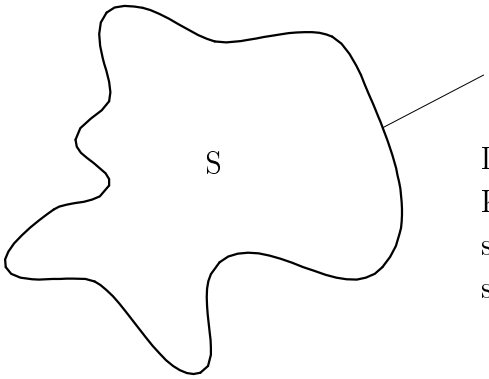
$$\underline{bdim}(S) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log m(S,\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \ ,$$

wobei

$$m(S,\varepsilon) := \frac{Vol(\overline{K_\varepsilon}(S))}{Vol(\overline{K_\varepsilon}(z))}$$

das ε-normierte Volumen *der Menge* S *sei.*

Beweis:



Das Volumen des Minkowski ε-parallelen Körpers ist die Fläche der hier dargestellten schwarzen Linie, da wir uns im zweidimensionalen Raum befinden.

Abbildung 9.4
Der Minkowskische Parallelkörper

Sei m so gewählt, daß m Kugeln vom Radius 1 eine Kugel vom Radius 2 überdecken. Angenommen S werde von n Kugeln vom Radius ε überdeckt. Verdoppeln wir den Radius der Kugeln, so wird auch jeder Punkt von $\overline{K_\varepsilon}(S)$ mit überdeckt, d.h.
$\mathcal{N}'(S,\varepsilon) \cdot Vol(\overline{K_{2\varepsilon}}(x)) \geq Vol(\overline{K_\varepsilon}(S))$ woraus $m \cdot \mathcal{N}'(S,\varepsilon) \geq \frac{Vol(\overline{K_\varepsilon}(S))}{Vol(\overline{K_\varepsilon}(x))}$ folgt. □

9.2 Verfahren zur Bestimmung der Minkowskischen Dimension eines Rasterbildes

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie wir anhand einer Reihe von Meßdaten eine Approximation für den Grenzwert der Minkowski Dimension erhalten können. „Quadrantenzählen“ als Approximation für die Minkowski Dimension ist keine günstige Methode, da die Quadranten fest an das jeweilige Raster gebunden sind. Mit Satz 9.8 ist uns jedoch auch die Möglichkeit gegeben, die Dimension auch anhand einer Überdeckung mit Kugeln auszurechnen, was die Genauigkeit der Approximation erhöht. Deshalb bestimmen wir für verschiedene ε_i die Werte $\mathcal{N}'(S,\varepsilon_i)$. Die einzelnen Meßwerte werden in einem doppelt logarithmischen Diagramm abgetragen und durch eine Gerade approximiert. Anhand der Steigung der Geraden läßt sich eine Schätzung für den Grenzwert der Minkowski Dimension treffen. Das folgende Bild verdeutlicht diesen Prozeß nocheinmal:

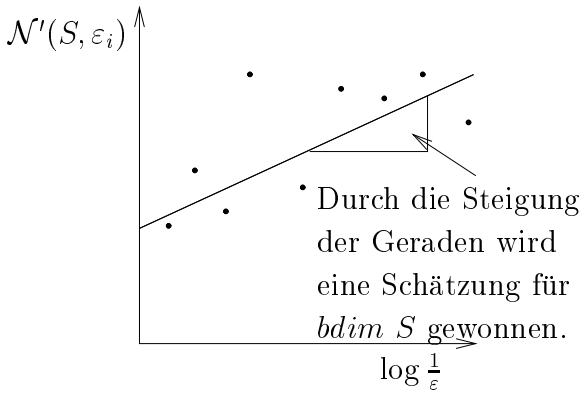


Abbildung 9.5

Jetzt wollen wir ein Verfahren zur Ermittlung der Minkowski Dimension mit Hilfe des Minkowski-ε-parallelen Körpers für $\varepsilon > 0$ kennenlernen:

1. Zunächst bestimmen wir anhand des Bildes die „Fläche“ von $\overline{K_\varepsilon}(S)$.
2. Jetzt dividieren wir durch die Fläche von $\overline{K_\varepsilon}(x)$ und logarithmieren.
3. Nun müssen wir wieder die Ergebnisse darstellen. Auf der Abszisse tragen wir $\log \frac{1}{\varepsilon}$ und auf der Ordinate $\log \frac{Vol(\overline{K_\varepsilon}(S))}{Vol(\overline{K_\varepsilon}(x))}$ ab.
4. Den Grenzwert für die Minkowski Dimension erhalten wir wiederum aus der graphischen Auswertung der Steigung einer Geraden durch die Meßwerte.

Bemerkung zur Effizienz der Verfahren:

- Überdeckung durch Kugeln:

  Hier stellt sich zum einen das Problem, daß die Wahl der Radien durch die Auflösung begrenzt ist. Außerdem ist das Finden einer minimalen Überdeckung, was beim Ermitteln von $\mathcal{N}(S, r^{-n})$ sehr schnell geht, nicht so einfach. Je nach gegebenem Bild kann sich hier sogar ein NP-vollständiges Problem ergeben.

  Außerdem ist im Rasterbild die Wahl der Metrik entscheidend. Die euklidische Metrik ist denkbar ungeeignet, da sie runde Kugeln hervorbringt, die quadratische Pixel überdecken müßten, so daß die Abschätzung $\mathcal{N}'(S, \varepsilon)$ hier sicherlich den Grenzwert überschätzen würde.

  Die geeigneteren Metriken sind sowohl die Manhattan Metrik, als auch die Maximum Metrik. Bei der Manhattan Metrik, die der Viererumgebung entspricht, wird der Abstand mit der kleinsten Überdeckung gemessen, während bei der Maximum Metrik, die der Achterumgebung entspricht, der Abstand mit der größten Überdeckung gemessen wird:

Volumina der Kugeln (in pixeln)

Radius (pix)	4er Umgebung	8er Umgebung
1	1	1
2	5	9
3	13	25

- Minkowskischer Parallelkörper

  Der Minkowskische Parallelkörper läßt sich auf Pixelebene leicht errechnen. Sowohl bei der 4er- als auch bei der 8er- Umgebung gilt $\overline{K_1}(S) = S$. $\overline{K_2}(S)$ erhält man, indem man am Bild „wackelt“, d.h. das Bild in alle 4 (bzw. 8) Richtungen verschiebt und mit dem alten Bild eine parallele OR Operation auf allen Pixeln durchführt. Mit dem Computer ist dies sehr schnell durchführbar, da für unsere schwarz-weiß-Bilder man nur shift- und OR-Operationen durchführen muß. Außerdem gilt für $n > 2$ $\overline{K_n}(S) = \overline{K_2}(\overline{K_{n-1}}(S))$.

  Das Verfahren beginnt bei kleinen Kugeln (auf Pixelebene). Dann wird der Kugelradius sukzessive um 1 Pixel vergrößert, bis hinreichend viele Meßpunkte vorhanden sind. Für n Meßwerte muß man n-mal die Bildpunkte zählen und (n-1)-mal die $\overline{K_2}$ Operation durchführen. Die anschließende Auswertung geschieht wie oben beschrieben, so daß man das Verfahren als hinreichend effizient bezeichnen kann.

9.3 Exakte Berechnung der Minkowski-Dimension für Bildfolgensprachen

In diesem Abschnitt wollen wir überlegen, ob sich aus einem Verfahren zur Erzeugung von Fraktalen ein Verfahren zur Berechnung der Minkowskischen Dimension entwickeln läßt.

Dazu wollen wir zunächst Bildfolgesprachen betrachten:

Wir erinnern uns daran, daß eine Bildfolgensprache W als Teilmenge eines Alphabetes $W \subseteq X^*$ eine Entsprechung im Raster durch $\mathbb{R}B_W$ hat. Somit haben auch die Wörter fester Länge $W \cap X^n = \{w \in W |\ |w| = n\}$ eine Entsprechung in den Quadranten der Kantenlänge r^{-n}, in denen $\mathbb{R}B_W$ liegt.

Als Wert für $\mathcal{N}(\mathbb{R}B_W, r^{-n})$ erhalten wir ungefähr $|\{w \in W |\ |w| = n\}|$. Die Gleichheit kann man nicht unbedingt annehmen, da man nicht weiß, wie mit den Punkten auf den Kanten verfahren wird, d.h. welchem Quatrenten sie zugerechnet werden. Die maximale Diskrepanz ist jedoch durch den Faktor 4 beschränkt.

Als Hilfsmittel zur Errechnung der Minkowski Dimension führen wir die Strukturfunktion einer Sprache $V \subseteq X^*$ ein.

Definition 9.9 (Strukturfunktion)

Die Strukturfunktion einer Sprache $V \subseteq X^*$ ist definiert durch

$$s_v(n) = |\{v \in V |\ |v| = n\}| \ .$$

Folgerung 9.10

$$\overline{bdim}(\mathbb{R}B_W) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log_r s_W(n)}{n} \text{ und } \underline{bdim}(\mathbb{R}B_W) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log_r s_W(n)}{n}$$

Das folgende Beispiel zeigt, daß obere und untere Minkowski-Dimension für Bilder nicht notwendig übereinstimmen. Bei der Konstruktion dieses Beispiels werden wir vorteilhaft von Bildfolgesprachen und Strukturfunktionen Gebrauch machen:

Beispiel 9.11 Wir definieren die Bildfolgensprache W durch eine vollständige Teilmenge V. Das heißt, wir benennen eine Sprache V, bei der für unendlich viele n gilt: $V \cap X^n = W \cap X^n$. Sei $X = \{a, b, c, d\}$, $V_m = \prod_{i=0}^{m} X^{(2i)!}\{a\}^{(2i+1)!}$ und $V'_m = (\prod_{i=0}^{m} X^{(2i)!}\{a\}^{(2i+1)!})X^{(2m+2)!}$. Dann ist V definiert durch $V = \bigcup_{m=0}^{\infty}(V_m \cup V'_m)$:

Die Wörter aus V haben die Gestalt:

$$\left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \cdot a \cdot \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \cdot \ldots$$

Mit Hilfe dieser Sprache kann man leicht die Bildfolgensprache $W \supseteq V$ definieren durch: $W := \{w | \exists v \in V : w \sqsubseteq v\}$. Die Tatsache, daß W Obermenge von V ist, ist leicht einzusehen. Es gibt in V nur bestimmte Wortlängen. So existieren in V keine Wörter der Länge 1 bzw. 3, aber z.B.ist aaa ist in W, da $aaaa$ in V liegt. Für die Fälle $n_1 = \sum_{i=0}^{m}((2i)! + (2i+1)!)$ und $n_2 = \sum_{i=0}^{m}((2i)! + (2i+1)!) + (2m+2)!$ gilt $V \cap X^n = W \cap X^n$.

Wir betrachten nun die Strukturfunktionen an diesen Stellen: $s_W(n_1) = s_V(n_1) = \sum_{i=0}^{m} 4^{(2i)!}$ und $s_W(n_2) = s_V(n_2) = \sum_{i=0}^{m+1} 4^{(2i)!}$. Die Werte resultieren aus der Tatsache, daß man an den durch X beschriebenen Positionen genau 4 Buchstaben einsetzen kann, an den durch a beschriebenen jedoch nur einen. Bei der Berechnung der Minkowski Dimension berechnen wir nun zunächst $\underline{bdim}(\mathbb{R}B_W) = \liminf_{n_1\to\infty} \frac{\log s_W(n_1)}{n_1} = 0$. Außerdem ist $\overline{bdim}(\mathbb{R}B_W) = \limsup_{n_2\to\infty} \frac{\log s_W(n_2)}{n_2} = 2$.

Wir sehen also, daß obere und untere Minkowski Dimension nicht notwendig übereinstimmen müssen.

Wir bemerken noch eine Eigenschaft, die es uns gestattet, die Minkowskische Dimension abzuschätzen. Ist W eine Bildfolgensprache, so gilt: $s_W(n) \leq s_W(n+1) \leq s_W(n) \cdot |X|$.

Die Korrektheit sehen wir ein, wenn wir uns vor Augen halten, daß bei einer Bildfolgensprache W jedes neu entstehende Wort in W auch ein Präfix in W hat. Somit können durch Hinzufügen eines Buchstabens an die Worte in W auch höchstens $|X|$ neue Worte entstehen. Die Abschätzung $s_W(n+1) \leq s_W(n) \cdot |X|$ gilt also.

Die zweite Eigenschaft einer Bildfolgensprache W ist, daß es zu jedem Wort $w \in W$ auch ein Wort $w' \in W$ gibt, das w verlängert(d.h. $w \sqsubseteq w'$). Dies verdeutlicht uns, daß auch die Abschätzung $s_W(n) \leq s_W(n+1)$ korrekt ist.

Wir suchen nun eine allgemeine Möglichkeit für die Berechnung der Minkowski Dimension. Deshalb definieren wir die Erzeugendenfunktion von $s_W(n)$.

Definition 9.12 (Erzeugendenfunktion von s_W)
Die Erzeugendenfunktion von $s_W(n)$ ist definiert vermöge

$$\int_W(t) : [0,\infty] \to [0,\infty] \text{ mit } \int_W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_W(n)t^n$$

Bemerkung: $\int_W(t)$ ist monoton. Den Konvergenzradius von $\int_W(t)$ bezeichnen wir mit $Rad(W)$. Es gilt $Rad(W) \leq 1$, falls W unendlich.

Bemerkung: Es gilt weiter: $s_W(n) \leq |X|^n = r^{2n}$. Somit folgt $\frac{1}{r^2} \leq Rad(W)$, denn ist $t < \frac{1}{r^2}$, so gilt $r^{2n} \cdot t^n < a^n$ mit $a < 1$.

Die Funktion $\int_W$ ist oft leichter zu berechnen als s_W. Wir haben im folgenden Beispiel bewußt darauf verzichtet, daß W eine Bildfolgensprache ist, um einfach zu zeigen, daß die Erzeugendenfunktion von s_W auch hier berechenbar ist.

Beispiel 9.13
Sei $W = \{a\} \cup \{b\} \cdot W^2$, d.h. $W = \{a, baa, babaa, bbaaa, bbaabaa, \ldots\}$.
Es folgt $\int_W(0) = 0$ und $\int_W(t) = t + t \cdot \int_W(t)^2$, denn jedes $w \in W$ ist eindeutig darstellbar. Dies ist eine quadratische Gleichung, die man zur Ermittlung der Koeffizienten in eine Potenzreihe umwandeln kann. Aus der Potenzreihe ergibt sich dann $Rad(W) = \frac{1}{2}$ mit $\int_W(\frac{1}{2}) = 1$.
Aus der Funktionentheorie wissen wir:

Satz 9.14
Ist $\int(t) := \sum_{i=0}^{\infty} s_i \cdot t^i$ *eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten, so gibt es in* $[0,\infty]$ *einen Punkt, den sogenannten Spektralradius* $Rad(\int)$*, für welchen* $\int(t)$ *innerhalb von* $[0, Rad(\int)]$ *stetig ist und für* $t > Rad(\int)$ *gilt:* $\int(t) = \infty$*. Weiterhin ist* $Rad(\int) = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n}}$.

Folgerung 9.15 *Ist W eine Bildfolgensprache, so gilt:*
$\log_r Rad(\int_W) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log_r s_W(n)}{n} = \overline{bdim}\ \mathbb{R}B_W$

Folgerung 9.16 $\overline{bdim}\ \mathbb{R}B_W \leq 2$

Beweis:

> Da $\overline{bdim}$ monoton und die maximale Bildfolgensprache X^* ist, kann man die Behauptung beweisen. Für X^* läßt sich leicht $\overline{bdim}\ \mathbb{R}B_{X^*} = 2$ nachweisen. □

Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß eine Bildfolgensprache W auch durch einen deterministischen endlichen, partiellen Automaten $\mathcal{A} = (X, Z, \delta, z_0, Z')$ modellierbar ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathcal{A}$ initial zusammenhängend ist, d.h. daß vom Startzustand aus jeder andere Zustand erreichbar ist, und daß $Z' = Z$ gilt.
Wir schreiben s_z für die Strukturfunktion der von $\mathcal{A}_z = (X, Z, \delta, z, Z)$ bestimmten Sprache. $\mathcal{A}_z$ muß dabei nicht notwendig initial zusammenhängend sein.
Aus der Automatentheorie wissen wir, daß $\delta(z, v \cdot w) = \delta(\delta(z, v), w)$ gilt. Somit folgt für $m \leq n$:

$$\underbrace{s_z(n)} \quad = \quad \underbrace{\sum_{v\in X^m}} \quad \underbrace{s_{\delta(z,v)}(n-m)}$$

$$\{w|\ |w|=n\ \wedge\ \delta(z,w)\in Z\} \quad = \quad \bigcup_{v\in X^m} v\cdot \quad \{u|\ |u|=n-m\ \wedge\ \delta(z,vu)\in Z\}$$

Wir definieren nun die

Definition 9.17 (Adjazenzmatrix eines endlichen Automaten)
Die Adjazenzmatrix eines Automaten $\mathcal{A}$ ist definiert durch $\mathcal{M}_\mathcal{A} := (a_{z,z'})_{z,z'\in Z}$ mit $a_{z,z'} := |\{x\in X|\delta(z,x)=z'\}|$.

Bemerkung: Sei $\mathcal{M}_\mathcal{A}^n = (a_{z,z'}^{(n)})_{z,z'\in Z}$. Dann ist $a_{z,z'}^{(n)} = |\{w\in X^*|\ |w|=n\wedge\delta(z,w)=z'\}|$. Diese Behauptung ist durch Induktion über n leicht nachzuweisen.

Lemma 9.18
Ist $\mathcal{A}=(X,Z,\delta,z_0,Z)$ ein endlicher Automat, so gilt: $(s_z(n+1))_{z\in Z} = \mathcal{M}_\mathcal{A}\cdot(s_z(n))_{z\in Z}$.

Beweis:

Eine Zeile der im Lemma stehenden Matrixgleichung lautet

$$s_z(n+1) = \sum_{z\in Z'} a_{z,z'}\cdot s_{z'}(n) = \sum_{\substack{x\in X\\ \delta(z,w)=z'}} s_z(n) = \sum_{x\in X} s_{\delta(z,x)}(n) \qquad \square$$

Wir wollen nun folgende Konventionen treffen: $(1)_z$ sei der Einheitsvektor mit 1 in der z-ten Koordinate und $\mathbb{1}$ der Vektor, der aus lauter Einsen besteht. Mit diesen Konventionen formulieren wir:

Folgerung 9.19

a) $s_z(n) = (1)_z\mathcal{M}_\mathcal{A}^n\mathbb{1}$

b) Es sei $|Z|\le k$. Dann gilt $s_z(n)\le s_{z_0}(n+k)$.

Beweis:

a) der Beweis erfolgt durch Induktion über n mit Hilfe von Lemma 9.18.

b) Da $|Z|\le k$ und $\mathcal{A}$ initial zusammenhängend ist, folgt $\exists v(|v|\le k\ \wedge\ \delta(z_0,v)\le z)$. Somit ist also $s_z(n)\le s_{z_0}(n+|v|) \underbrace{\le}_{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{von } s_Z(n)}} s_{z_0}(n+k)$.

$\square$

Da $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ an keiner Stelle negativ ist, können wir uns die Perron-Frobenius-Theorie zunutze machen:

Satz 9.20 (Perron-Frobenius)
Ist $\mathcal{M}$ eine nichtnegative Matrix, so gibt es unter ihren Eigenwerten maximalen Betrags λ_i einen nichtnegativen $\lambda_{max}\ge 0$.
Weiterhin gilt: $\sqrt[n]{\|\mathcal{M}^n\|} \overset{\text{von oben}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \lambda_{max}$, genauer $\lambda_{max} = \inf\{\sqrt[n]{\|\mathcal{M}^n\|}\ |n\in N\}$
Für unsere Zwecke ist hier die Zeilensummennorm besonders gut geeignet: $\|\mathcal{M}\| := \max\{\sum_{Zeilen}\ \sum_{Spalten} |a_{zz'}|\}$. Aus der Folgerung 9.19 ergibt sich dann für eine Zeile der Matrix $s_{z_0}(n)\le\|\mathcal{M}_\mathcal{A}^n\|\le s_{z_0}(n+k)$.

Satz 9.21

Ist $\mathcal{A} = (X, Z, \delta, z_0, Z)$ ein initial zusammenhängender endlicher Automat, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_r s_W(n)}{n} = \log \lambda_{max},$$

wenn W die von $\mathcal{A}$ dargestellte Bildfolgensprache und λ_{max} der maximale Eigenwert von $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ ist. Weiterhin gilt: $\underline{bdim}\,\mathbb{R}B_W = \overline{bdim}\,\mathbb{R}B_W = \log \lambda_{max}$

9.4 Minkowski Dimension und Ähnlichkeitsdimension für IFS

Nun wollen wir uns den IFS zuwenden, um auch hier die Dimensionen der erzeugten Fraktale zu berechnen. Sei ein IFS gegeben durch $(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit den Kontraktionsfaktoren $s_1, \ldots, s_n$.

Definition 9.22 (Ähnlichkeitsdimension)

Die Ähnlichkeitsdimension, *sdim S* des Attraktors S eines IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist die Lösung der Gleichung $\sum_{s_i \neq 0} s_i^\delta = 1$, falls wenigstens einer der Kontraktionsfaktoren $s_i \neq 0$ ist, und $sdim S = 0$ andernfalls.

Bemerkung: Falls alle $s_i = 0$ sind, so ist S eine endliche Menge mit höchstens n Punkten.

Satz 9.23

Es sei $(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein knapp berührendes IFS mit Kontraktionsfaktoren $s_1, \ldots, s_n$. Dann gilt $\overline{bdim}\ S \leq sdim\ S$ für den Attraktor S des IFS.

Beweis:

Falls alle $s_i = 0$ sind, so folgt die Behauptung offenbar, da $sdim\ S = 0$ per definitionem gilt. Es folgt

$$\mathcal{N}'(S, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}'(\varphi_i(S), \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}(S, s_i^{-1} \cdot \varepsilon)$$

Wir setzen nun für $\mathcal{N}'(S, \varepsilon)$ die etwas ungenauere Abschätzung $\mathcal{N}'(S, \varepsilon) \sim C \cdot \varepsilon^{-D}$ ein, wobei $D = \overline{bdim}\ S$, für unendlich viele $\varepsilon > 0$ ist. Dann ist:

$C \cdot \varepsilon^{-D} \leq \sum_{i=1}^{n} C \cdot s_i^D \cdot \varepsilon^{-D}$ und somit $1 \leq \sum_{i=1}^{n} s_i^{\overline{bdim}\ S}$.

Wir betrachten nun die Funktion $f : D \to \sum_{i=1}^{n} s_i^D$. Diese ist stetig in $(0, \infty)$, da nach Voraussetzung ein $s_i \neq 0$ und alle $s_i < 1$ sind. Es gilt: $\lim_{D\to\infty} f(D) = 0$, wobei f monoton fallend ist. Somit folgt $\overline{bdim}\ S \leq sdim\ S$.

□

Satz 9.24

Es sei $(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein IFS und für jedes i gebe es ein s_i derart, daß $d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) \geq s_i \cdot d(x, y)$. Dann gilt für den Attraktor S des IFS $\underline{bdim}\ S \geq D$, wobei D die Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^{n} s_i^D = 1$ ist.

Beweis:

Der Beweis verläuft vollständig zu dem des Satzes 9.23 □

Folgerung 9.25 *Ist $(R, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein knapp berührendes IFS, wobei die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Ähnlichkeitsabbildungen mit den Kontraktionsfaktoren $s_1, \ldots, s_n$ seien. Dann gilt für den Attraktor S des IFS:*

$$\underline{bdim}\ S = sdim\ S = \overline{bdim}\ S$$

9.5 Die Hausdorff Dimension

In diesem Abschnitt werden wir die Hausdorff Dimension für Fraktale kennenlernen, die einen wesentlichen Makel der Minkowski Dimension beseitigt. Bei der Ermittlung der Minkowski Dimension wurden nur Kugeln ein und desselben Radius zur Überdeckung verwendet. Deshalb mußte man auch eine sehr feine Überdeckung wählen, um eine brauchbare Näherung zu erhalten. Wir diskutieren deshalb die Idee, die Überdeckung von $S \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Kugeln verschiedener Radien durchzuführen:

Definition 9.26 (Hausdorff Dimension)

Es sei: $\mathcal{H}^\alpha(S) := \liminf\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{\substack{\bigcup K_i \supseteq S \\ diam K_i \leq \delta}} (diam K_i)^\alpha$. Die Hausdorff Dimension ist dann definiert vermöge:

$$dim\ S = \inf_\alpha \{\mathcal{H}^\alpha(S) = 0\} = \sup_\alpha \{\mathcal{H}^\alpha(S) = \infty\}$$

Folie Verhalten von $\mathcal{H}^\alpha(S)$ in Abhängigkeit von α

Bemerkung: Man kann zeigen $\underline{bdim}\ S = \inf\limits_\alpha \{\mathcal{M}^\alpha(S) = 0\} = \sup\limits_\alpha \{\mathcal{M}^\alpha(S) = \infty\}$ für $\mathcal{M}^\alpha(S) = \liminf\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{\substack{\bigcup K_i \supseteq S \\ diam K_i = \delta}} (diam K_i)^\alpha$. Hieraus folgt direkt, daß $dim\ S \leq \underline{bdim}\ S$, da $\mathcal{H}^\alpha(S) \leq \mathcal{M}^\alpha(S)$.

Folgerung 9.27 *a) Ist S endlich, so gilt $\mathcal{H}^0(S) = \mathcal{M}^0 = Anz(S)$*

b) Ist S unendlich, so gilt $\mathcal{H}^0(S) = \mathcal{M}^0 = \infty$

Wir geben nun einige Fälle an, in denen Hausdorff-Dimension und Minkowski-Dimension übereinstimmen. Auf die komplizierten Beweise dieser Sätze wollen wir dabei verzichten.

Satz 9.28

Ist $S = \mathbb{R}B_W$ für eine durch einen endlichen Automaten beschriebene Bildfolgensprache W, so gelten

$dim\ S = \underline{bdim}\ S = \overline{bdim}\ S$ und $\mathcal{H}^{dim\ S}(S) > 0$ für $S \neq \emptyset$.

Satz 9.29

Ist S Attraktor eines knapp berührenden IFS $(\mathbb{R}^2, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit den Ähnlichkeitsabbildungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, so gelten:

$dim\ S = \underline{bdim}\ S = \overline{bdim}\ S = sdim\ S$ und $0 < \mathcal{H}^{dim\ S}(S) < \infty$ für $n \geq 1$.

Bemerkung: Dieser Satz gilt auch für total disjunkte IFS.

9.6 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir einige Fraktale mit deren Dimensionen angeben, um unsere eingangs vermutete Behauptung, nämlich daß ein höherer Schwärzungsgrad auch eine größere fraktale Dimension bedeutet, zu untermauern.

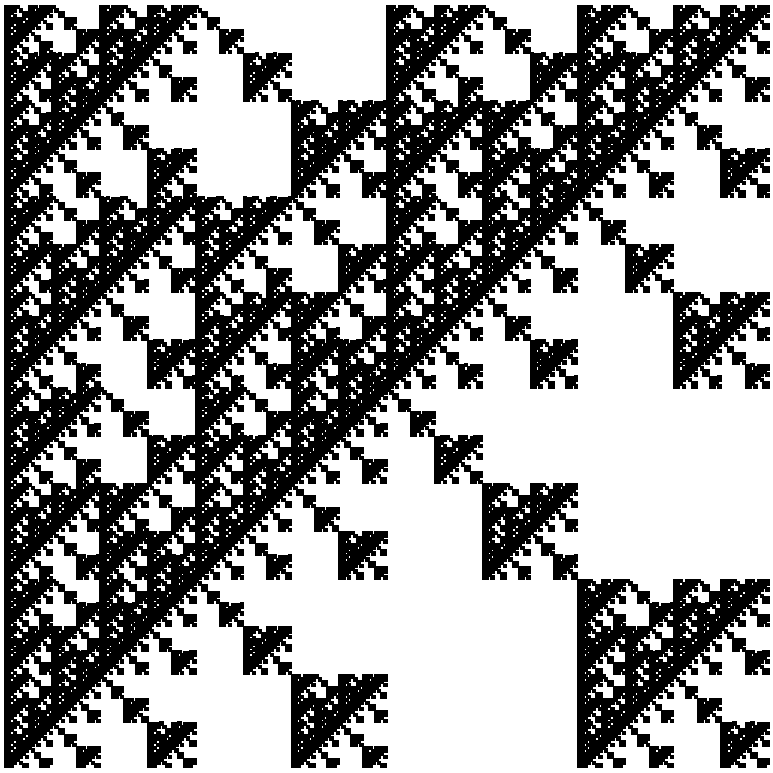


Abbildung 9.6:

System Table

	SE	SW	NE	NW
1	3	1	1	2
2	2	1	3	1
3	1	0	0	3

Adjacency Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maximal eigenvalue: 3.4142
Haussdorff dimension: 1.7716
Measure vector: [1.000, 1.000, 0.414]

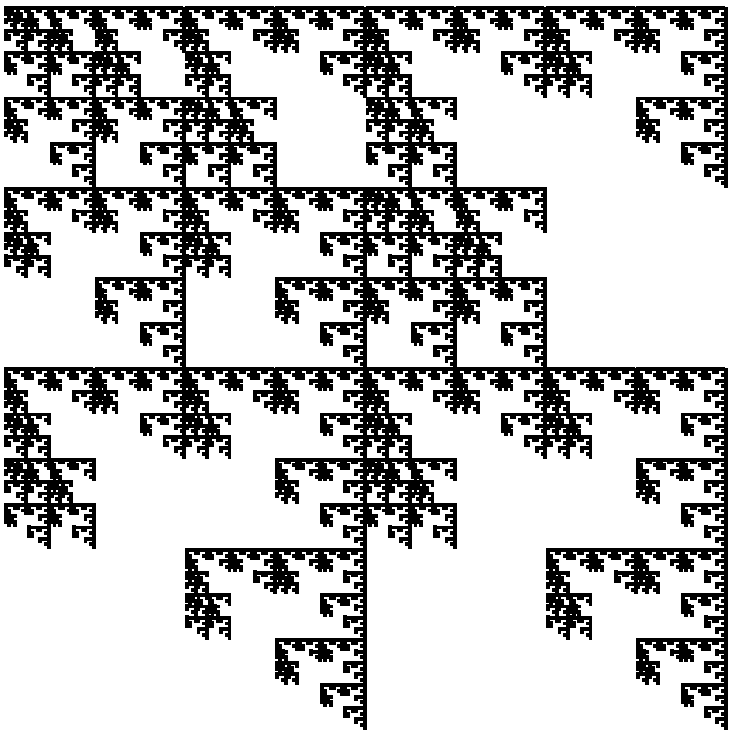


Abbildung 9.7:

System Table

	SE	SW	NE	NW
1	3	3	2	1
2	0	1	3	2
3	3	0	3	2

Adjacency Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maximal eigenvalue: 3.1479
Haussdorff dimension: 1.6544
Measure vector: [1.000, 0.783, 0.682]

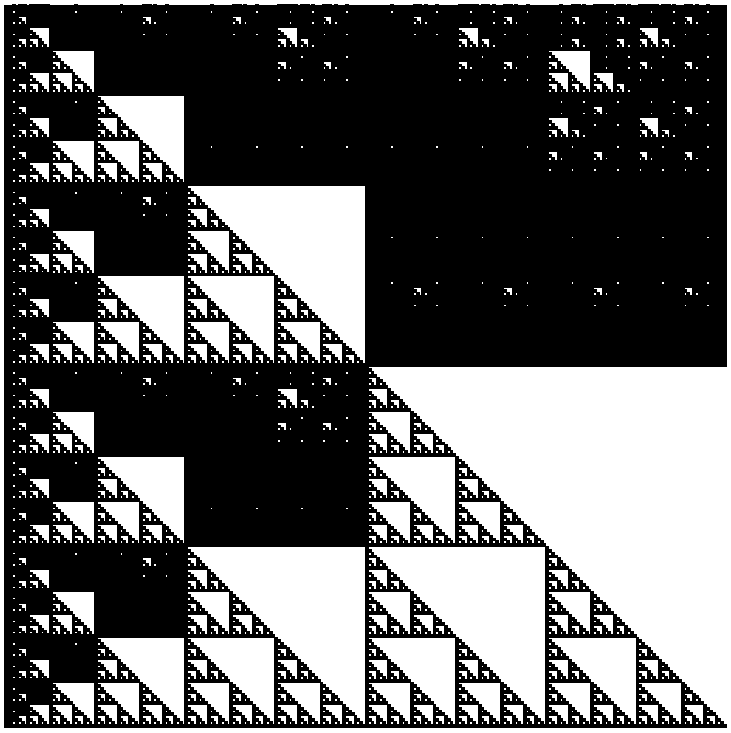


Abbildung 9.8:

System Table

	SE	SW	NE	NW
1	7	1	2	1
2	3	3	4	2
3	2	2	3	3
4	4	4	4	5
5	5	7	6	6
6	5	6	5	6
7	7	7	0	7

Adjacency Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Maximal eigenvalue: 3.5616
Haussdorff dimension: 1.8325
Measure vector: [∞, ∞, ∞, 1.390, 0.781, 1.000, 0.000]

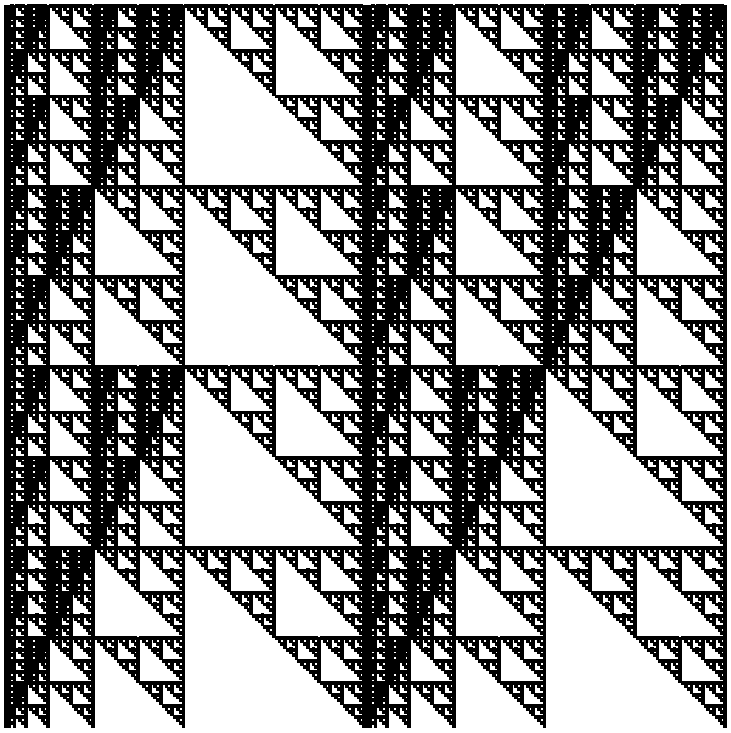


Abbildung 9.9:

System Table

	SE	SW	NE	NW
1	2	2	1	2
2	3	2	3	1
3	3	0	3	3

Adjacency Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Maximal eigenvalue: 3.0000
Haussdorff dimension: 1.5850
Measure vector: [6.000, 4.000, 1.000]

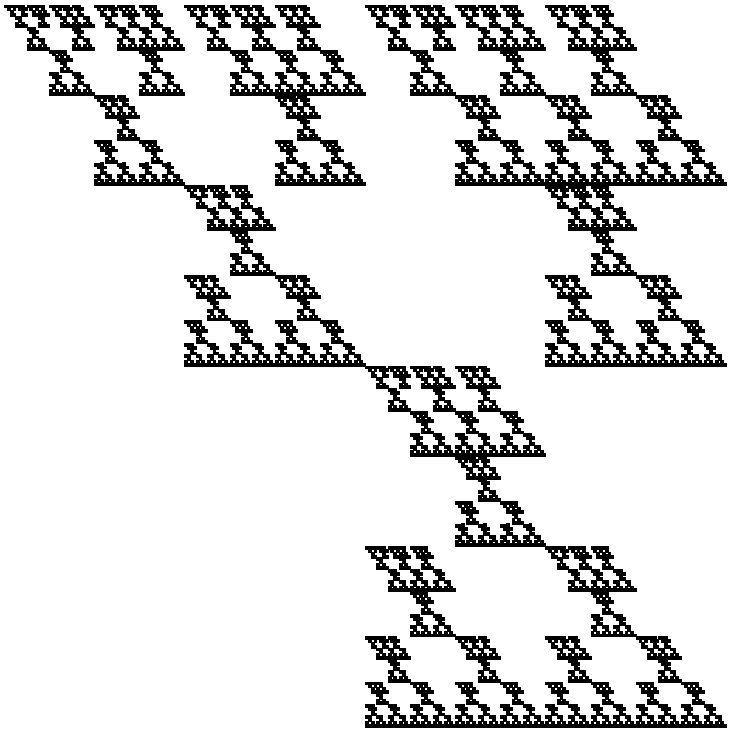


Abbildung 9.10:

System Table

	SE	SW	NE	NW
1	2	0	3	1
2	2	2	0	3
3	2	0	2	1

Adjacency Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maximal eigenvalue: 3.0000
Haussdorff dimension: 1.5850
Measure vector: [1.000, 1.000, 1.000]

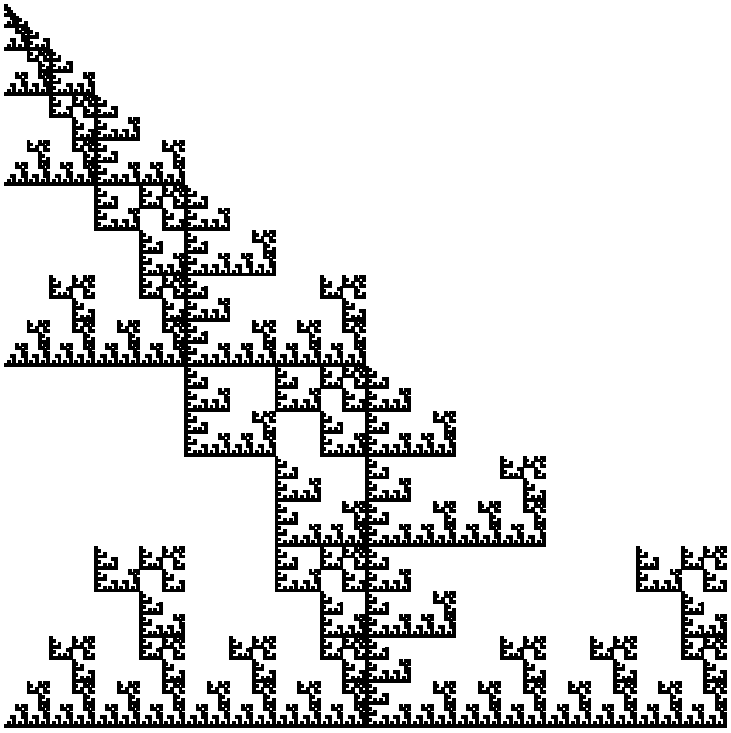


Abbildung 9.11:

System Table

	SE	SW	NE	NW
1	3	2	0	1
2	2	2	4	0
3	2	3	0	3
4	3	0	4	3

Adjacency Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maximal eigenvalue: 3.000
Haussdorff dimension: 1.5850
Measure vector: [1.000, 1.000, 1.000, 1.000]

Kapitel 10

Lindenmayer-Systeme

Diese Systeme gehen auf den Niederländer Aristid Lindenmayer zurück, der sie zur Modellierung des Wachstums von Zellfäden entwickelte. Wir wollen diese Systeme zur erzeugung von Wörtern $(\omega_i)_{i\in N}$ einsetzen. Anschließend wollen wir uns für diese Folgen geeignete Interpretationen überlegen, um aus den Wortfolgen Fraktale zu erzeugen.

- Erste Möglichkeit

  Wir wollen das Sierpinski Dreieck durch eine Wortfolge modellieren. Für die ersten drei Iterationen ordnen wir die Wörter $v, rlvv$ und $0r0vl0v0rlvvrlvv$ zu. Wenn wir die quadrantenweise Unterteilung der ersten Iteration betrachten und den Buchstaben zuordnen, so erkennen wir leicht die Interpretation der Buchstaben:

  Bild 10.1: Das Sierpinski-Dreieck

  l bedeutet, daß die linke Hälfte eines Quadranten gefüllt ist, r bezeichnet eine gefüllte rechte Quadrantenhälfte, v einen vollständig gefüllten und 0 einen vollständig leeren Quadranten.

  Wir überlegen uns nun, wie wir ein Ersetzungssystem, in dem alle Buchstaben gleichzeitig ersetzt werden, definieren können, so daß mit der obigen Interpretation das Sierpinski Dreieck erzeugt wird. Durch eine einfache Analyse erhalten wir die Ersetzungen:

  $$v \to rlvv, r \to 0r0v, l \to \text{und} \quad 0 \to 0000$$

  Die Länge der rechten Seiten ist konstant r^2, was in diesem Beispiel einleuchtend ist, da von einer Iteration zur nächsten die Quadrantenzahl auch quadratisch zunimmt.

  Zur letzten Ersetzung ist noch anzumerken, daß 0 Spezialfall darstellt. Wäre eine Ersetzung der Form $0\to\ xyza \neq 0000$ vorhanden, so wäre die Bildfolgenspracheneigenschaft verletzt. Analog gilt dies, falls eine Ersetzung der Form $x \to 0000$ vorkommt. (Bei Bildfolgensprachen kann ein schwarzer Quadrant, der weiter unter-

teilt wird, niemals ganz weiß werden. Ebenso kann ein weißer Quadrant, der weiter unterteilt wird, nicht plötzlich über schwarze Anteile verfügen.)

Mit dieser Interpretation kann man alle durch endliche Automaten erzeugbare Fraktale ebenfalls durch Lindenmayer Systeme modellieren.

- Zweite Möglichkeit

Wir interpretieren die Lindenmayer Systeme als LOGO Turtle. Dies ist eine Schildkröte die durch Befehle gesteuert wird und Linien zeichnen kann. Diese Idee geht auf Prusinkiewicz zurück. Das Alphabet besteht hier aus unver¨nderlichen Symbolen mit festen Interpretationen: F steht für forward, d.h. die Turtle geht eine Einheit vorw¨rts und zeichnet dabei eine Linie. 1 bzw.- bezeichnen eine Drehung um $+\delta^o$ bzw. $-\delta^o$. Das Zeichen [steht für das Speichern der aktuellen Position auf dem Stack, während die zugehörige schließende Klammer] die letzte gespeicherte Position vom Stack holt und die Schildkröte dorthin bewegt, ohne die Linie zu zuehen.

Beipiel 10.1 Von Koch Kurve Die von Koch-Kurve wird durch das Lindenmayer System $F \to F + F - -F+$ mit $\delta = 60^o$ beschrieben. Hierbei ist noch anzumerken, daß für die F's auf der rechten Seite gelten muß. daß deren Länge nur $\frac{1}{3}$ der F's auf der linken Seite betragen darf:

Bild 10.2: Von Koch Kurve

Die von Koch Kurve stellt ein Beispiel für eine Linie unendlicher Länge dar, da sich ihre Länge in jedem (parallelen) Ersetzungsschritt um $\frac{4}{3}$ vergrößert.

- Dritte Möglichkeit

Diese Variante geht auf Dekking zurück. Die Wörter der Lindenmayer Systeme werden als Vektoren interpretiert. Das heißt, es wird eine Zuordnung $a \to z_a \in \mathbf{R}^2$ getroffen.

Die von Koch Kurve wird durch die relativen Koordinatenzuordnungen $a \to abca, b \to abca$ und $c \to abca$ beschrieben, wobei man dies auch mit „relative“ Vektoren beschreiben kann: $a = (1.0), b = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $c = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Es ist von relativen Vektoren die Rede, da hier Änderungen durch Drehung und Stauchung unberücksichtigt bleiben. Die angegebenen Vektoren sind nur für die erste Iteration absolut.

10.1 OL-Systeme

Dies sind die einfachsten Lindenmayer Systeme. Die Ersetzungen erfolgen ohne Berücksichtuung eine Links- oder Rechtskontextes. Zugrunde liegen

0. Ein Alphabet bzw. eine endliche Menge A.
1. Ein Axiom $\omega \in A^*$, das dem Startzustand einer Grammatik entspricht.
2. Eine Regelmenge: $R \subseteq AxA^*$

Wir interpretieren eine Anleitung wie folgt:
$v = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \overset{Ableitung}{\rightarrow} v' = v_1' \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n$, wobei $(a_i, v_i) \in R$. Wir schreiben $v' \in R(v)$.
In diesem Kapitel haben wir schon die LOGO-Turtle und die von Koch Kurve als Beispiele für OL-Systeme kennengelernt.
Die Ableitungen in OL-Systemen sind sehr unübersichtlich. Deshalb treffen wir eine weitere Einschränkung und betrachten im folgenden nur noch determininistische OL-Systeme (D0L-Systeme). Diese liefern nur noch eine Sequenz statt einer Menge von Wörtern. Deshalb fordern wir, daß R eindeutig ist, d. h. $R = (a, h(a)) \mid a \in A$ mit $h\colon A \rightarrow A^*$ als Homomorphismus. Eine Ableitung geht dann wie folgt vor sich: $\omega \rightarrow h(\omega) \rightarrow h(h(\omega)) \rightarrow \ldots \rightarrow h^i(\omega) \rightarrow \ldots$. Diese interpretieren wir als $Bild(\omega) \rightarrow Bild(h(\omega)) \rightarrow Bild(h(h)\omega))) \rightarrow \underbrace{\ldots}_{i \rightarrow \infty} \rightarrow Bild$.
Wir stellen uns die Frage, welche Art von Fraktalen durch D0L-Systeme darstellbar sind. Es stellt sich hierbei ein Problem der Skalierung.
Deshalb betrachten wir nun:

10.2 Uniforme D0L-Systeme

Wir betrachten hier zu nächst die Vektorinterpretation. Gegeben seien ein D0L-System $(\omega.h)$ mit $\omega \in A^*$ und $h\colon A \rightarrow \mathbf{R}^2$. Unter $I - \varphi(\omega)$ verstehen wir die Aneinanderreihung der zu ω zugehörigen Vektorinterpretationen. Dabei wollen wir annehmen, daß ein „rückwärts“ gerichteter Vektoren einen vorwärts gerichteten gleicher Richtung löscht.

Beipiel 10.2 Sei $a \rightarrow abb, b \rightarrow bc, c \rightarrow cd$ und $d \rightarrow dac$ ein D0L-System mit Interpretation $a = (2,0), b = (0,1), c = (-1,0)$ und $d = (0,-1)$. Nach der oben getroffenen Konvention wären also die Buchstabenfolgen db und acc in iherer Interpretation nichts andres als Punkte. Wir starten das System mit dem Axiom $a \in A^*$. Es ergibt sich als Ableitungsfolge:

$$a \rightarrow abb \rightarrow abbbcbc \rightarrow abbbcbcbccdbccd \rightarrow abbbcbcbccdbccdbccdcddacbccdcd \rightarrow \ldots$$

Bei der graphischen Visualisierung ist zu beachten, daß man die Anfangs- und Endpunkte des Graphen festhält und den neuen Graph durch eine Ähnlichkeitsabbildung auf die alten Punkte zurückbildet:

Abbildung 10.3:

Wenn wir das gegebene D0L-System immer wieder ableiten, so ergibt sich als Grenzprozeß das Fraktal aus Aufgabe 9.3.

Definition 10.3 (Uniformes D0L-System)
Ein D0L-System (A, ω, h) mit Vektorinterpretation $\Phi: A \to \mathbf{R}^2$ heißt uniform, dann und nur dann wenn gilt:

1. $\|\Phi(a)\| < \|\Phi(h(a))\|$ für $a \in A$. Es gilt: $\|\Phi(v)\| = \sum_{i=1}^{n} \|\Phi(a_i)\|$, wenn $v = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ ist.) Insbesondere ist $h(a) \neq e$ für alle $a \in A$.

2. Für alle in (A, w, h) benachbarten Paare von Buchstaben $(a, b) \in A \times A$ sind die relativen Lagen von $\Phi(a)$ zu $\Phi(b)$ dieselben wie die der Polygonzüge $\hat{\Phi}(h(a))$ und $\hat{\Phi}(h(b))$ zueinander.

Bemerkung:

- Sei $v = a_1 \ldots a_n$. Dann beschreibt $\hat{\Phi}(v)$ den Polygonzug, der durch Aneinanderreihung von $\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)$ entsteht.
- Dieselbe relative Lage liegt dann vor, wenn die Linienzüge $\Phi(a), \Phi(b)$ und $\Phi(h(a)), \Phi(h(b))$ ähnlich zueinander sind.
- Zwei Buchstaben $a, b \in A$ sind benachbart in (A, ω, h) genau dann, wenn ab ein Unterwort in $h^i(\omega)$ für ein $i \in N$ ist.
- Die Nachbarschaftseigenschaft ist nicht symmetrisch.

Verfahren zur Überprüfung der Eigenschaft, „benachbart“ zu sein.
(a, b) sind benachbart in (A, ω, h) genau dann, wenn gilt:

1. ab ist Unterwort von W bzw. eines $h(a')$ mit $a \in A$.

2. Für ein Paar benachbarter Buchstaben (a', b') ist

   (a) a Suffix von $h(a')$

(b) b Präfix von $h(b')$

Bemerkung: $h(a')$ ist nicht leer, da $\|\Phi(h(a'))\| > \Phi(a')\|$ gilt. Das Verfahren terminiert, da nur endlich viele Paare (a, b) existieren (nach Voraussetzung war das Alphabet A endlich). Somit ist die Korrektheit des Verfahrens gesichert und die Uniformität nachprüfbar.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie wir aus einem uniformwn D0L-System ein MIFS konstruieren können, das dasselbe Fraktal erzeugt. Dazu analysieren wir das D0L-System: Im n-ten Schritt der Ableitung wird jeder Vektor a duch den Polygonzug $h(a)$ ersetzt. Dann bilden wir aus diesem Polygonzug den Summenvektor $\Phi(h(a))$, der mittels der Ähnlichkeitsabbildung $\hat{\varphi}(\Phi(h(a)))$ auf den ursprünglichen Vektor a wieder abgebildet wird. Diese Phase dient lediglich der Ermittlung von $\hat{\varphi}$ und müßte eigentlich nur einmal für jede Ersetzungsregel erfolgen. aus Grnden der Vollständikeit wurde sie hier jedoch erwähnt. Als Bild der ersetzung stellen wir jedoch den durch Ähnlichkeitsabbildung $\hat{\varphi}$ veränderten Pogonzug $h(a)$ ab, d. h. wir sehen $\hat{\varphi}(h(a))$. $\hat{\varphi}$ ist also eine Abbildung, die um den Faktor $\frac{\|\Phi(a)\|}{\|\Phi(h(a))\|}$ staucht, sowie eine entsprechende Drehung und Verschiebung vornimmt.
Betrachtet man die Regel $a \to a_1 \ldots a_n$ im D0L-System, so findet sich in einem MIFS die Entsprechung $S_a = \bigcup ni = 1\varphi_{a_i}(S_{a_i})$.

Beispiel 10.4 Sei das uns schon bekannte D0L-System $a \to abb, b \to bc, c \to cd$ und $d \to dac$ mit den Interprätationen $a = (2, 0), b = (0, 1), c = (-1, 0)$ und $d = (0, -1)$ gegeben.
Es ergibt sich:

Abbildung 10.4: Ersetzungen in Lindenmayer Systemen

Für unser IFS folgern wir: $S_a = \varphi_{a_1}(S_a) \cup \varphi_{a_2}(S_b) \cup \varphi_{a_3}(S_b)$. Durch grahpische Analyse erkennen wir:

$$\varphi_{a_1} = r - \frac{\pi}{4} \cdot s_{\ frac1\sqrt{2}}, \varphi_{a_2} = t_{(1,-1)} \cdot r - \frac{\pi}{4} \cdot s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{und} \quad \varphi_{a_3} = t_{1.5,-0.5)} \cdot r - \frac{\pi}{4} \cdot s_{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Wenn wir diese Vorgehensweise für die anderen Buchstaben wiederholen, gelangen wir zum MIFS.
Das Verfahren an sich besteht aus zwei Schritten:

1. Die Regeln $a \to h(a)$ des D0L-Systems wie beim Beispiel in Gleichungen umwandeln.
2. Das Axiom $\omega = a_1 \ldots a_n$ ergibt die sogenannte Displayvariable
   $S_\omega = \bigcup_{i=1}^{n} \psi_i(S_{a_i}.$

Wir haben also gesehen, daß uniforme D0L-Systeme direkt mit MIFS vergelichbar sind. Im allgemeinen kann man D0L-Systeme und MIFS jedoch nicht miteinander vergleichen. Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch sehen, wie wir ein MIFS aus der Turtle Interpretation gewinnen können. Bei der Turtle Interpretation war eine Besonderheit, daß es spezielle Symbole [,],+,- gibt, für die die Regel stets $a \to a (a \in \{[,], +, -\})$ gilt.

Beispiel 10.5 Sei G das Axinom des D0L-Systems und $\delta = \frac{\pi}{7}$. Seien weiter die Regeln gegeben vermöge $G \to DGFX[+G][-G], X \to XFX$ und $F \to F, G, X$ werden nicht gezeichnet. Als Ableitungsfolge ergibt sich $G, GFX[+G][-G], GFX[+G][-G]FXFX[+GFX[+G][-G]][$ usw.. Bei der LOGO-turtle Interpretation ergibt sich als Grenzprozeß die Pflanze aus Abbildung 7.1.
Bei der Verwaltung in ein MIFS wird die Darstellung für F auch noch vernachlässigt, da es auf jeder rechten Seite höchstens einmal vorkommt und somit im Genzprozeß inifinitesimal klein wird.

Beispiel 10.6 Sei ein D0l-System gegeben durch $X \to X + YF+, Y \to -FX - Y$ und $F \to F$. Durch Umwandeln in ein MIFS und Vernachlässigen von F erhält man den „Drachen“ für $\delta = \frac{\pi}{7}$.
Wir haben in diesem Kapitel also 0L-Systeme zur Erzeugung von Wortsequenzen benutzt, die wir dann durch geeignete Interpretationen und Grenzwerbildung zur Darstellung von Fraktalen herangezogen haben.
Bei geeigneten Ähnlichkeitsabbildungen (uniform) hatten wir sogar die Möglichkeit, auch flächenartige Fraktale darzustellen, die uns die Möglichkeit der Transformation in MIFS boten.

Kapitel 11

Collage-Grammatiken

In diesem Abschnitt wollen wir die Collage-Grammatik als eine Art zur Erzeugung fraktaler Bilder kennenlernen. Collage-Grammatiken wurden als Erweiterung einer kontextfreien Grammatik entwickelt. Kontextfreie Grammatiken wurden beschrieben durch das Terminalalphabet A, das Nichtterminalalphabet H, das Axiom ax und die Regelmenge $P \subseteq H \times (A \cup H)^*$. Verkürzt dargestellt wurden sie durch $G = (A, H, ax, P)$. Als Sprache einer solchen Grammatik - $L(G) \subseteq A^*$ - bezeichnet man diejenige Teilmenge von A^*, die sich beginnend mit dem Axiom ax ausschließlich unter Verwendung der Regelmenge P herleiten läßt.

Collage-Grammatiken stellen ein ähnliches System dar, daß Bilder durch Substitutionen ersetzt. Die Menge der Terminalsymbole ist dabei der Menge der Teilbilder, die für die Erzeugung des Fraktals nötig sind, zuzuordnen. Um nun zu erkennen, wie Collage-Grammatiken arbeiten, müssen wir zunächst einige Vorraussetzungen schaffen:

11.1 Collagen

Definition 11.1 (Teilbild)

Unter einem Teilbild oder Teil verstehen wir eine Menge $T \subseteq \mathbb{R}^2$. Speziell, bzw. für praktische Zwecke kann diese Teilmenge eingeschränkt werden, z.B. auf eine Teilmenge der Menge aller Dreiecke, Vierecke, Kreise, etc.

Definition 11.2 (Collage)

Unter einer Collage C verstehen wir das Tupel $C := (TEIL_c, pin_c)$ mit $TEIL_c$ als Menge von Teilen und pin_c als Folge von Punkten des $\mathbb{R}^2$. Sie werden als Heftpunkte bezeichnet.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Heftpunkte ist wesentlich.**Folie Collage**

Definition 11.3 (Muster)

Umter einem Muster M verstehen wir das Tupel (M, pin). pin sind wie bei der Collage die Heftpunkte, und M ist eine Teilmenge des zweidimensionalen euklidischen Raumes ($M \subseteq \mathbb{R}^2$).

Ein Muster ist nichts anderes als die zweidimensionale Projektion einer Collage in die

Ebene $C \rightarrow Muster(\bigcup_{t \in TEIL_c} t, pin_c)$.

Definition 11.4 (Dekorierte Collage)
Unter einer dekorierten Collage verstehen wir das Tupel $(TEIL_c, E_c, att_c, lab_c, pin_c)$ mit $TEIL_c$ und pin_c wie bei einer Collage, E_c als Menge von Hyperkanten (Kanten mit mehr als zwei Enden), $att_c : E_c \rightarrow$ Menge der endlichen Folgen von Punkten des $\mathbb{R}^2$ (attachment-points, $att_c(e) = (z_1, \ldots, z_l), z_i \in \mathbb{R}^2$) und $lab_c : E_c \rightarrow$ Namen.

Beispiel 11.5 Von Koch Baum
Paralleles Abarbeiten der Ersetzungen ist nicht zwingend, es können auch nur einzelne Symbole ersetzt werden.
Die Abbildungen zu diesem Beispiel findensich am Ende dieses Kapitels.

11.2 Operationen für Collagen und Muster

1. Hyperkantenentfernung: Sei $C = (TEIL_c, E_c, att_c, lab_c, pin_c)$ und $e \in E_c$

   $C \backslash \{e\} = (TEIL_c, E_c \backslash \{e\}, att_c^{'}, lab_c^{'}, pin_c)$ mit

   $att_c^{'}(e^{'}) = att_c(e^{'})$ für $e^{'} \in E_c \backslash \{e\}$ und

   $lab_c^{'}(e^{'}) = lab_c(e^{'})$ für $e^{'} \in E_c \backslash \{e\}$.

   Für $\beta \subseteq E_c$ erhält man $C \backslash \beta$ analog durch Iteration.

2. Transformation mit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

   $\varphi(C) = (TEIL_{\varphi(C)}, E_c, att_{\varphi(C)}, lab_c, pin_{\varphi(C)})$ mit

   $TEIL_{\varphi(C)} = \{\varphi(t) | t \in TEIL_c\}$,

   $att_{\varphi(C)}(e) = (\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_l))$, falls $att_c(e) = (y_1, \ldots, y_l)$ und

   $pin_{\varphi(C)} = (\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n))$, falls $pin_c = (z_1, \ldots, z_n)$.

3. Einsetzung $C \leftarrow D$

   $D = (Teil_D, E_D, att_D, lab_D, pin_D)$ für $E_D \cap E_C = \emptyset$

   $C \leftarrow D = (TEIL_C \cup TEIL_D, E_C \cup E_D, att, lab, pin_c)$ mit

   $$att(e) = \begin{cases} att_C(e), \text{ falls } e \in E_C \\ att_D(e), \text{ falls } e \in E_D \end{cases}$$

   $$lab(e) = \begin{cases} lab_C(e), \text{ falls } e \in E_C \\ lab_D(e), \text{ falls } e \in E_D \end{cases}$$

   Die Ersetzung von $C \leftarrow \{D_1, \ldots, D_n\}$ verläuft analog, da $(C \leftarrow D_1) \leftarrow D_2 = (C \leftarrow D_2) \leftarrow D_1$.

   Es gilt jedoch im allgemeinen nicht: $C \leftarrow D = D \leftarrow C$

Wir denken uns COLL als Menge von Collagen und TRANS als Menge von Transformationen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (z.B. Ähnlichkeitstransformationen, affine Abbildungen, etc.) fixiert.

11.3 Ersetzen von Hyperkanten einer Collage

Sei $C = (TEIL_C, E_C, att_C, lab_C, pin_C)$ und $B \subseteq E_C$. Weiter sei $repl : B \to COLL$ und $trans : B \to TRANS$ oder $trans : COLL \to TRANS$.

Wir setzen $Y(B) := \{trans(e)(repl(e)) | e \in B\}$, d.h. wir betrachten die Hyperkante als Collage.

$(C \backslash B) \leftarrow Y(B)$ ist Ersetzung der Hyperkanten.

Beispiel 11.6

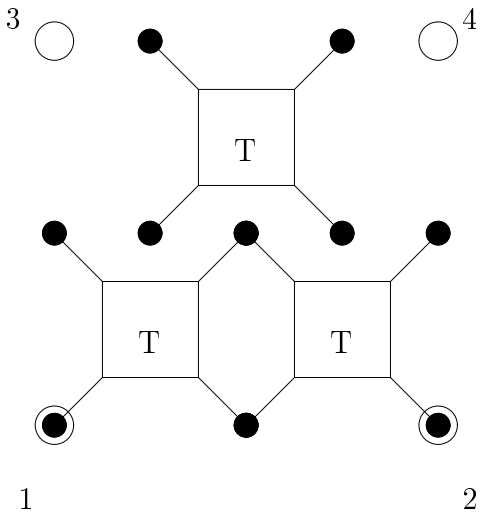


Abbildung 11.1
Startbild einer Collagengrammatik für ein angenähertes Sierpinski-Dreieck

Die Abbildungen zu der oberen Collage lauten: $repl(e_i) = C$, $trans(e_1) = t_{(0.25,0.5)} \cdot s_{\frac{1}{2}}$, $trans(e_2) = s_{\frac{1}{2}}$ und $trans(e_3) = t_{(0.5,0)} \cdot s_{\frac{1}{2}}$.

Ersetzt man die Hyperkanten eines Bildes parallel und zum Abschluß alle Hyperkanten durch ■, so erhält man als Grenzprozeß das Siepinski Dreieck. Bei nichtparalleler Ersetzung entstehen andere Figuren.

Wichtig: Die Heftpunkte der Hyperkanten müssen mit den pin-Punkten der Collage, die eingesetzt werden soll, übereinstimmen, d.h. $att_c(e) = pin_{trans(e)}(repl(e))$ (Paßbedingung).

Die Regeln einer Collage-Grammatik sehen nun so aus, daß auf der linken Seite ein Symbol oder Label steht. Die rechte Seite besteht aus einer Collage, die nicht notwendig dekoriert sein muß.

Das Einsetzen in eine Collage gestaltet sich nun so, daß die Hyperkante mit einer der linken Regelseite entsprechenden Markierung durch die transformierte rechte Regelseite ersetzt wird. Dabei muß die Collage so transformiert werden, daß ihre pin-Punkte auf die attachmentpoints der Hyperkante abgebildet werden. Ist dies nicht möglich, so ist diese Regel im konkreten Fall nicht anwendbar.

Der Ersetzungsmechanismus geht also wie folgt vonstatten:

Hyperkante → Markierung (und Befestigungspunkte) → Regel der Grammatik → Transformation (Heftpunkte → Befestigungspunkte) → Ersetzen.

Das Axiom einer Collage-Grammatik ist eine Hyperkante mit Markierung.
Die terminalen Objekte sind TEIL.
Die nichtterminalen Objekte sind Hyperkanten inclusive Befestigungspunkte und Heftpunkte.
Eine Collage-Grammatik G kann eine Reihe von Collagen erzeugen. Was man jedoch unter dem Erzeugnis einer Collage-Grammatik versteht, hängt von den gewählten Terminalbedingungen ab.

1. Terminalbedingung. (vollfrei)

   Erzeugte Bilder sind die $\{Muster(coll_i)|coll_i$ von G erzeugt$\}$

2. Terminalbedingung.

   Erzeugte Bilder sind die $\{Muster(coll_i)|coll_i$ von G erzeugt und $coll_i$ ist nicht dekoriert.$\}$

3. Terminalbedingung. (parallel)

   Erzeugte Bilder sind die $\{Muster(coll_i)|coll_i$ von G durch parallele Ableitung erzeugt$\}$. Unter paralleler Ableitung wollen wir dabei das Ersetzen aller Hyperkanten in jedem Schritt verstehen.

Es sind noch viele weitere Terminalbedingungen denkbar. Diese sollen hier jedoch nicht näher betrachtet werden, da sie den Rahmen der Vorlesung sprengen würden, die hier ihr Ende findet.
Zum Abschluß des Skriptes geben wir noch zwei Collage - Grammatiken und deren Erzeugnisse an.

Abbildung 11.2
Die Regeln der Grammatik Koch-Baum

Abbildung 11.3
Eine Ableitung in der Grammatik Koch-Baum

Abbildung 11.4
Beispiele für nichtparalleles Ableiten in der Grammatik Koch-Baum

Abbildung 11.5
Die Regeln der Grammatik Pseudolimit

Abbildung 11.6
Eine Ableitung in der Grammatik Pseudolimit

Abbildung 11.7
Endergebnis der oben angeführten Ableitung