Vorlesung Rekursionstheorie

(Sätze und Definitionen)

Prof. Dr. L. Staiger
Wintersemester 1995/96
vorläufige Version

Inhaltsverzeichnis

0 Literatur zur Vorlesung **2**

1 Primitiv-rekursive Funktionen **2**

2 Hierarchien primitiv-rekursiver Funktionen **8**

3 Partiell-rekursive Funktionen **11**

4 Effektive Numerierungen partiell-rekursiver Funktionen **15**

5 m-Reduktion von Mengen **17**

6 Die arithmetische Hierarchie **19**

7 A-berechenbare Funktionen **22**

8 Die arithmetische Hierarchie von Mengen von Mengen **27**

A Übungsaufgaben **29**

B Weitere Aufgaben **37**

0 Literatur zur Vorlesung

[**Ca**] C. Calude, *Theories of Computational Complexity.* North-Holland, Amsterdam 1987.

[**Ma**] A.I. Mal′cev, *Algorithmen und rekursive Funktionen.* Vieweg, Braunschweig 1975.

[**MY**] M. Machtey, P. Young, *An Introduction to the General Theory of Algorithms.* North-Holland, New York 1978.

[**Ob**] A. Oberschelp, *Rekursionstheorie.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.

[**Od**] P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory: The theory of functions and sets of natural numbers.* Elsevier, Amsterdam 1989.

[**Pé**] R. Péter, *Rekursive Funktionen.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1957.

[**Rg**] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, New York 1967.

[**Rs**] H.E. Rose, *Subrecursion: Functions and Hierarchies.* Clarendon Press, Oxford 1984.

[**WW**] K. Wagner, G. Wechsung, *Computational Complexity.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986, und Reidel, Dordrecht 1986, *Abschnitt 2.4.*

1 Primitiv-rekursive Funktionen

Berechnungsschemata für Funktionen

Bezeichnung: $\mathcal{F}^k := \{f : f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}\}$

1. Substitution $\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k)\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
Es seien $f \in \mathcal{F}^k, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{F}^m$.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k)(x_1, \ldots, x_m) \quad &:= \\ f(g_1(x_1, \ldots, x_m) \ &, \ldots, \ g_k(x_1, \ldots, x_m))\end{aligned}$$

2. Primitive Rekursion $\mathbf{R}(g, h)\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

Es seien $g \in \mathcal{F}^m$ und $h \in \mathcal{F}^{m+2}$.
$\vec{x} := (x_1, \ldots, x_m)$ sei der *Parametervektor.*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(g, h)(\vec{x}, 0) &:= g(\vec{x}) \\ \mathbf{R}(g, h)(\vec{x}, n+1) &:= h(\vec{x}, n, \mathbf{R}(g, h)(\vec{x}, n))\end{aligned}$$

2a. Beschränkte Primitive Rekursion $\mathbf{BR}(g,h;b)\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

Es seien $g \in \mathcal{F}^m$, $h \in \mathcal{F}^{m+2}$ und $b \in \mathcal{F}^{m+1}$.
$\vec{y} := (y_1, \ldots, y_{m+1})$

$$\mathbf{BR}(g,h;b) = \begin{cases} \mathbf{R}(g,h) & , \quad \text{falls } \forall \vec{y}(\mathbf{R}(g,h)(\vec{y}) \leq b(\vec{y})), \\ \emptyset & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Primitiv-rekursive Funktionen

1. Anfangsfunktionen

$$\mathcal{A}_0 := \{o, s\} \cup \{I_k^m : m, k \in \mathbb{N} \wedge k \leq m\}$$

2. induktiver Aufbau

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i+1} := \mathcal{A}_i \quad &\cup \quad \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i\} \\ &\cup \quad \{\mathbf{R}(g,h) : g, h \in \mathcal{A}_i\} \end{aligned}$$

3. Abschluß

$$\mathcal{PR} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$$

Satz 1.1: *Primitiv-rekursive Funktionen sind vollständig definierte Funktionen*

Eigenschaft 1.2: *Die Klasse $\mathcal{PR}$ ist abgeschlossen bezüglich*

(a) Permutation von Variablen,

(b) Identifizierung von Variablen,

(c) Einsetzung von Konstanten, und

(d) Einführung fiktiver Variablen.

Lemma 1.3 (Beschränkte Summation): *Ist $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{PR}$, so ist auch*

$$f(x_1, \ldots, x_m) := \sum_{i=0}^{x_m} g(x_1, \ldots, x_{m-1}, i) \in \mathcal{PR} \ .$$

Folgerung 1.4: *Sind g, h, j primitiv-rekursive m-stellige Funktionen, so ist auch*

$$f(x_1, \ldots, x_m) := \sum_{i=h(x_1,\ldots,x_m)}^{j(x_1,\ldots,x_m)} g(x_1, \ldots, x_{m-1}, i) \in \mathcal{PR} \ .$$

Lemma 1.5 (Beschränkte Multiplikation): *Ist* $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{PR}$*, so ist auch*

$$f(x_1, \ldots, x_m) := \prod_{i=0}^{x_m} g(x_1, \ldots, x_{m-1}, i) \in \mathcal{PR} \ .$$

Satz 1.6 (Fallunterscheidung): *Sind* $f_1, \ldots, f_{n+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{F}^m \cap \mathcal{PR}$ *und sind die Mengen der Nullstellen der Funktionen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *paarweise disjunkt, so ist auch die Funktion*

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} f_1(\vec{x}) & , \quad \textit{falls } \alpha_1(\vec{x}) = 0, \\ \vdots & , \quad \vdots \\ f_n(\vec{x}) & , \quad \textit{falls } \alpha_n(\vec{x}) = 0, \ \textit{und} \\ f_{n+1}(\vec{x}) & , \quad \textit{sonst,} \end{cases}$$

($\vec{x} \in \mathbb{N}^m$*) primitiv-rekursiv.*

Berechnungsschemata für Funktionen (Teil 2)

3. Minimale Nullstelle (Minimisierung)

Es seien $g \in \mathcal{F}^{m+1}$ und $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$.

$$f(\vec{x}) := \mu t(g(\vec{x}, t) = 0) \ , \text{ wobei}$$

$$\mu t(g(\vec{x}, t) = 0) := \begin{cases} \min\{z : g(\vec{x}, z) = 0 \wedge \forall i \leq z(g(\vec{x}, i) \in \mathbb{N})\} & , \text{ falls ex., und} \\ \text{nicht def.} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

3a. Beschränkte Minimisierung
Es seien $g \in \mathcal{F}^{m+1}$ und $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$.

$$f(\vec{x}, y) := (\mu t \leq y)(g(\vec{x}, t) = 0) \ , \text{ wobei}$$

$$\mu t(g(\vec{x}, t) = 0) := \begin{cases} \min\{z : z \leq y \wedge g(\vec{x}, z) = 0 \wedge \forall i \leq z(g(\vec{x}, i) \in \mathbb{N})\} & , \text{ falls ex., und} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Schreibweise: $f = \mathbf{M}_{\leq}\ g$

Satz 1.7: *Ist* $g \in \mathcal{PR}$*, so gilt auch* $\mathbf{M}_{\leq}\ g \in \mathcal{PR}$.

Berechnungsschemata für Funktionen (Teil 3)

Beispiele primitiv-rekursiver Funktionen

$$
\begin{aligned}
quot(x,y) &:= \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor & \text{, falls } y > 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \\
rest(x,y) &:= x \dot{-} y \cdot quot(x,y) \\
prim(x) &:= \begin{cases} 0 \text{ , falls } x \text{ Primzahl ist,} \\ 1 \text{ , sonst.} \end{cases} \\
nd(x) &:= \begin{cases} \text{Anz}\{y : y \in \mathbb{N} \wedge y | x\} & \text{, falls } x \neq 0 \text{ ,} \\ 1 & \text{, sonst.} \end{cases} \\
p(x) &:= (x+1)\text{-te Primzahl} \quad (p(0)=2,\ p(1)=3,\ p(2)=5, \ldots) \\
len(x) &:= \begin{cases} \max\{y : y \in \mathbb{N} \wedge p(y) | x\} & \text{, falls } x \neq 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \\
exp(x,y) &:= \begin{cases} \min\{t : t \in \mathbb{N} \wedge p(y)^t | x \wedge p(y)^{t+1} \not| x\} & \text{, falls } x \neq 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. Werteverlaufsrekursion

Es seien $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_\ell(x)$ Funktionen, für welche $\alpha_i(x+1) \leq x$ gilt.
Die Funktion $f(x_1, \ldots, x_{m+1})$ entsteht aus den Funktionen $g(x_1, \ldots, x_m)$ und $h(x_1, \ldots, x_m, y, z_1, \ldots, z_\ell)$ mittels durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ bestimmter Werteverlaufsrekursion : $\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}, 0) &:= g(\vec{x}) \\
f(\vec{x}, n+1) &:= h(\vec{x}, n, f(\vec{x}, \alpha_1(n+1)), \ldots, f(\vec{x}, \alpha_\ell(n+1)))
\end{aligned}
$$

für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Satz 1.8 (Satz über die Werteverlaufsrekursion): *Sind die Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ mit $\alpha_i(x+1) \leq x$, sowie $g \in \mathcal{F}^m$ und $h \in \mathcal{F}^{m+1+\ell}$ primitiv rekursiv und entsteht f aus ihnen mittels Werteverlaufsrekursion, so ist auch f primitiv rekursiv.*

Berechnungsschemata für Funktionen (Teil 4)

5. Simultane Rekursion

Es seien $g_1, \ldots, g_\ell \in \mathcal{F}^m$ und $h_1, \ldots, h_\ell \in \mathcal{F}^{m+1+\ell}$. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathcal{F}^{m+1}$ entstehen durch simultane Rekursion : $\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f_i(\vec{x}, 0) &:= g_i(\vec{x}) \\
f_i(\vec{x}, n+1) &:= h_i(\vec{x}, n, f_1(\vec{x}, n), \ldots, f_\ell(\vec{x}, n))
\end{aligned}
$$

für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ und für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Satz 1.9 (Satz über die simultane Rekursion): *Sind die Funktionen $g_i \in \mathcal{F}^m$ und $h_i \in \mathcal{F}^{m+1+\ell}$ primitiv rekursiv und entstehen die f_i aus ihnen mittels simultaner Rekursion, so ist auch alle f_i primitiv rekursiv.*

Beispiel: CANTOR-Numerierung

$$c(x,y) := \begin{cases} y^2 + 2 \cdot x & , \text{ falls } x \leq y \text{ ,und} \\ x^2 + 2 \cdot y + 1 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

und Umkehrfunktionen

$$\ell(n+1) = \begin{cases} r(n) & , \text{ falls } \ell(n) < r(n) \text{ ,} \\ r(n)+1 & , \text{ falls } \ell(n) > r(n) \text{ , und} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$r(n+1) = \begin{cases} \ell(n) & , \text{ falls } \ell(n) \neq r(n) \text{ ,} \\ \ell(n)+1 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Berechnungsschemata für Funktionen (Teil 5)

6. **LOOP**-Programme

Syntax

Variablen: $X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i \quad (i \in \mathbb{N})$

Befehle:

(a) **INPUT** $X_1, \ldots, X_\ell$

(b) **OUTPUT** X_j

(c) $X = 0$

(d) $X = Y$

(e) $X = X + 1$

(f) **LOOP** X
⋮
END

Induktive Programmdefinition:

(a) **INPUT** $X_1, \ldots, X_\ell$ ist **LOOP**-Programm.
OUTPUT X_i

(b) **INPUT** $X_1, \ldots, X_\ell$ ist **LOOP**-Programm.
$X_j = 0$ ($= Y$, $= X_j + 1$)
OUTPUT X_i

(c) Sind **INPUT** $X_1, \ldots, X_\ell$ **INPUT** $Y_1, \ldots, Y_k$
P **Q**
OUTPUT X_i **OUTPUT** Y_j
LOOP-Programme, so sind auch

INPUT $X_1, \ldots, X_\ell$	und	**INPUT** $X_1, \ldots, X_\ell$
P		**LOOP** X_i
Q		**P**
OUTPUT Y_j		**END**
		OUTPUT X_m

LOOP-Programme.

Satz 1.10: **LOOP**-*berechenbare Funktionen sind primitiv-rekursiv.*

Satz 1.11: *Jede primitiv-rekursive Funktion ist* **LOOP**-*berechenbar.*

Spezielle Rekursionen

Satz 1.12: *Jede primitiv-rekursive Funktion kann, ausgehend von den Anfangsfunktionen c, r, ℓ, o, o^1, s und I_k^m, durch Substitution und spezielle Rekursion der Form*

$$\begin{aligned} \varphi(x,0) &= x \\ \varphi(x,n+1) &= \Phi(\varphi(x,n)) \end{aligned}$$

erzeugt werden.

Lemma 1.13: *Entsteht $f \in \mathcal{F}^1$ aus einer primitiv-rekursiven Funktion h durch eine Rekursion der Form $f(0) = 0,\ f(n+1) = h(n, f(n))$, so kann man f aus den Funktionen h, c, r, ℓ, o und s durch Substitution und spezielle Rekursion der Form*

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(n+1) &= \Phi(\varphi(n)) \end{aligned}$$

erzeugen.

Beispiele von CANTOR-Numerierungen

$$\begin{aligned} c_1(x,y) &:= x + \sum_{t=0}^{x+y} t = \left(\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\right) + x \\ \ell_1(z) &:= z \dot{-} \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1} \dot{-} 1}{2} \right\rfloor \\ r_1(z) &:= \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1} \dot{-} 1}{2} \right\rfloor \dot{-} l_1(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x,y) &:= \left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + y\right)^2 + x \\ \ell_2(z) &:= \mathbf{q}(z) := z \dot{-} \lfloor \sqrt{z} \rfloor^2 \\ r_2(z) &:= \lfloor \sqrt{z} \rfloor \dot{-} \lfloor (\mathbf{q}(z)+1)/2 \rfloor \end{aligned}$$

Einstellige primitiv-rekursive Funktionen

Erzeugungsschema der *einfachen Iteration* $\beta = f^{\mathcal{I}}$

$$\begin{aligned} \beta(0) &:= 0 \\ \beta(n+1) &:= f(\beta(n)) \end{aligned}$$

Satz 1.14: *Sämtliche einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen (und nur solche) werden aus den Anfangsfunktionen s und $\mathbf{q}$ mit Hilfe der Operationen Addition, Substitution und Iteration erzeugt.*

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} I_1^1 &= s^{\mathcal{I}} \\ o^1 &= I_1^{1\mathcal{I}} \\ sg &= (s \circ o^1)^{\mathcal{I}} \\ \overline{sg}(x) &= \mathbf{q}(2 + 2 \cdot sg(x)) \end{aligned}$$

Die Beweise der Sätze 1.12, 1.14 und des Lemmas 1.13 findet man in [**Ma**].

2 Hierarchien primitiv-rekursiver Funktionen (Subrekursive Hierarchien)

LOOP-Schachtelungstiefe d_L

$$d_L(\boxed{X = 0}) = d_L(\boxed{X = Y}) = d_L(\boxed{X = X + 1}) := 0$$

$$d_L\left(\boxed{\begin{array}{l} P \\ Q \end{array}}\right) := \max\left\{d_L(\boxed{P}),\ d_L(\boxed{Q})\right\}$$

$$d_L\left(\boxed{\begin{array}{l} \textbf{LOOP } X \\ P \\ \textbf{END} \end{array}}\right) := d_L(\boxed{P}) + 1$$

Programme und Funktionen der Schachtelungstiefe $\leq i$

$$\mathbb{L}_i := \left\{ \begin{array}{l} \textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_m \\ P \\ \textbf{OUTPUT } Y \end{array} : d_L(\boxed{P}) \leq i \right\}$$

$$\mathcal{L}_i := \{f : f \in \mathcal{PR} \wedge \exists \mathbb{P}(\mathbb{P} \in \mathbb{L}_i \wedge \mathbb{P} \text{ berechnet } f)\}$$

Eigenschaft 2.1: *$\mathcal{L}_i$ ist abgeschlossen bezüglich Substitution.*

Wachstumsfunktionen:

$$\begin{aligned} t_0(x) &:= x+2 \\ t_{n+1}(x) &:= t_n^x(1) = \underbrace{t_n \circ \cdots \circ t_n}_{x \text{ mal}}(1) \end{aligned}$$

Eigenschaft 2.2: *Es gelten $t_n \in \mathcal{L}_n$, sowie die folgenden Ungleichungen*

$$\begin{aligned} t_n(x) &\geq x+1 && && \textit{(2.2.1)} \\ t_n(x+1) &> t_n(x) && && \textit{(2.2.2)} \\ t_{n+1}(x) &\geq t_n(x) && \textit{, falls } x+n>0 && \textit{(2.2.3)} \\ t_n^{k+1}(x) &\geq 2 \cdot t_n^k(x) && \textit{, falls } n>0 && \textit{(2.2.4)} \\ t_n^{k+1}(x) &\geq t_n^k(x)+x && \textit{, falls } n>0 && \textit{(2.2.5)} \end{aligned}$$

Satz 2.3: *Ist $f \in \mathcal{L}_n$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ derart, daß*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m (f(x_1,\ldots,x_m) \leq t_n^k(\max\{x_1,\ldots,x_m\})) \ .$$

Zeitkomplexität von LOOP-Programmen

$$\begin{aligned} \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_m) &:= \text{Anzahl der bei Eingabe} \\ &\quad\ \text{von } x_1,\ldots,x_m \text{ ausgeführten Instruktionen} \end{aligned}$$

Lemma 2.4: *Ist $\mathbb{P} \in \mathbb{L}_n$, so ist $\mathrm{Time}_{\mathbb{P}} \in \mathcal{L}_n$.*

Folgerung 2.5: *Ist $f \in \mathcal{L}_n$, so gilt für jedes $\mathbb{P} \in \mathbb{L}_n$, welches f berechnet,*

$$f(x_1,\ldots,x_m) \leq \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_m) + \max\{x_1,\ldots,x_m\} \ .$$

Satz 2.6: *Es seien $m \geq 1$ und $n \geq 2$. Eine m stellige* **LOOP***-berechenbare Funktion f ist genau dann in $\mathcal{L}_n$, wenn es ein* **LOOP***-Programm $\mathbb{P}$ gibt, welches f berechnet und für das*

$$\exists k (k \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_m) \leq t_n^k(\max\{x_1,\ldots,x_m\}) \quad \textit{gilt.}$$

Ein Zusammenhang zwischen den Klassen $\mathcal{L}_n$ und $\mathcal{L}_{n+1}$.

Satz 2.7: *Sind* $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{L}_n$ *und entstehen* $f_1, \ldots, f_m$ *durch simultane Rekursion aus* $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m$, *so sind* $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{L}_{n+1}$.

Folgerung 2.8: $\mathcal{L}_{n+1}$ *ist der Abschluß der Menge* $\{\mathbf{SR}(g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m) : m \in \mathbb{N} \wedge g_i, h_i \in \mathcal{L}_n\}$ *bezüglich Substitution.*

Lemma 2.9: *Für* $n \geq 2$ *ist* $\mathcal{L}_n$ *abgeschlossen bezüglich beschränkter simultaner Rekursion.*

Die Grzegorczyk-Hierarchie

Lemma 2.10: *Für jedes* $f \in \mathcal{E}^n$, $(n \geq 2)$ *gibt es ein* $k \in \mathbb{N}$ *derart, daß* $f(x_1, \ldots, x_m) \leq E_n^k(\max\{x_1, \ldots, x_m\})$.

Lemma 2.11: *Sind* $g, h \in \mathcal{E}^i$, $(i \neq 1)$, *so gilt* $\mathbf{R}(g, h) \in \mathcal{E}^{i+1}$.

Lemma 2.12: *Ist* $n \geq 3$, *so wird* $\mathcal{E}^n$ *mit Hilfe von Substitution und beschränkter primitiver Rekursion schon aus* $\mathcal{A}_0 \cup \{E_1, t_{n-1}\}$ *erzeugt.*

Folgerung 2.13: *Für* $n \geq 2$ *gilt* $\mathcal{E}^{n+1} \subseteq \mathcal{L}_n$.

Folgerung 2.14: *Für* $n \geq 2$ *gilt: Entstehen die Funktionen* $f_1, \ldots, f_m$ *durch simultane Rekursion aus* $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{E}^n$, *so sind* $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{E}^{n+1}$.

Folgerung 2.15: $\mathcal{E}^{n+1} \supseteq \mathcal{L}_n$ *für* $n \geq 0$.

Satz 2.16: *Für* $n \geq 2$ *gilt* $\mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{L}_n$.

Übrigens: Die Klasse $\mathcal{L}_1$ der mit Schachtelungstiefe 1 **LOOP**-berechenbaren Funktionen ist nach einem Satz von Tsichritzis charakterisierbar als die Klasse aller aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0$ vermehrt um die Funktionen $\lambda xy[x + y]$, $\lambda x[x \dot{-} 1]$ und $w := \lambda xy[x \cdot (1 \dot{-} y) + y]$ sowie um die Familien von Funktionen

$$\left\{\lambda x[\mathrm{quot}(x, k+1)] : k \in \mathbb{N}\right\} \text{ und } \left\{\lambda x[\mathrm{rest}(x, k+1)] : k \in \mathbb{N}\right\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante sei, allein durch Substitution erzeugbaren Funktionen.

3 Partiell-rekursive Funktionen

Uneingeschränkter μ-Operator: $\mathbf{M}(\psi)(\vec{x}) = \mu t(\psi(\vec{x}, t) = 0)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i \text{ , wobei} \\
\mathcal{B}_0 &:= \mathcal{A}_0 \text{ , und} \\
\mathcal{B}_{i+1} &:= \mathcal{B}_i \cup \{\mathbf{S}(\varphi; \psi_1, \ldots, \psi_k : k \in \mathbb{N} \wedge \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_k \in \mathcal{B}_i\} \cup \\
&\quad \cup \{\mathbf{R}(\varphi, \psi) : \varphi, \psi \in \mathcal{B}_i\} \cup \{\mathbf{M}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{B}_i\}
\end{aligned}$$

Rekursive Funktionen:

$$\mathcal{R} := \mathcal{P} \cap \{f : f \text{ ist vollständig definiert}\}$$

Allgemeine Programme

Erweiterung der **LOOP**-Programme um zusätzliche Bausteine:

a) $\boxed{i}$, wobei $i \in \mathbb{N}$ (Sprungmarke), und

b) **IF** $X \neq 0$ **GOTO** i .

1. **LOOP**-Programme sind allgemeine Programme.

2. Sind
   INPUT $X_1, \ldots, X_\ell$ / **P** / **OUTPUT** X_i und
   INPUT $Y_1, \ldots, Y_k$ / **Q** / **OUTPUT** Y_j

   allgemeine Programme, haben **P** und **Q** keine Sprungmarken gemeinsam und kommt $\boxed{i}$ nicht in **P** vor, so sind auch

   INPUT $X_1, \ldots, X_\ell$ / **P** / **Q** / **OUTPUT** Y_j

   INPUT $X_1, \ldots, X_\ell$ / **LOOP** X_i / **P** / **END** / **OUTPUT** X_m und

   INPUT $X_1, \ldots, X_\ell$ / $\boxed{i}$ / **P** / **IF** $X \neq 0$ **GOTO** i / **OUTPUT** X_m

   allgemeine Programme.

Satz 3.1: *Eine Funktion ist genau dann partiell-rekursiv, wenn sie von einem allgemeinen Programm berechnet wird.*

Lemma 3.2: *Es sei* $\mathbb{P}$ *ein allgemeines Programm. Dann ist die Funktion* $\text{Time}_{\mathbb{P}}$ *partiell-rekursiv.* $\text{Time}_{\mathbb{P}}$ *ist rekursiv, falls die von* $\mathbb{P}$ *berechnete Funktion* $\varphi_{\mathbb{P}}$ *ebenfalls rekursiv ist.*

Lemma 3.3: *Die Funktion $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ sei durch $\mathbb{P}$ berechnet, und $f(x_1, \ldots, x_m)$ sei rekursiv. Dann ist*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := \begin{cases} \psi(x_1, \ldots, x_m) & , \textit{ falls } \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1, \ldots, x_m) \leq f(x_1, \ldots, x_m) \textit{ , und} \\ 0 & , \textit{ sonst,} \end{cases}$$

ebenfalls rekursiv.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *(primitiv-) rekursiv*, falls die charakteristische Funktion χ_M (primitiv-) rekursiv ist.
Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ heißt *rekursiv aufzählbar*, falls $M = \emptyset$ oder es gibt eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, daß $M = f(\mathbb{N})$. Analog nennen wir $M \subseteq \mathbb{N}^k$ *rekursiv aufzählbar*, falls $c^k(M)$ rekursiv aufzählbar ist.

Folgerung 3.4: *Jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar.*

Folgerung 3.5: *Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}^k$ rekursiv aufzählbar, so gibt es rekursive Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ derart, daß $M = \{(f_1(t), \ldots, f_k(t)) : t \in \mathbb{N}\}$.*

Wir nennen eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ *primitiv-rekursiv darstellbar*, falls es eine primitiv-rekursive Funktion g mit

$$M = \{(x_1, \ldots, x_m) : \exists a(a \in \mathbb{N} \wedge g(x_1, \ldots, x_m, a) = 0)\} \quad \text{gibt.}$$

Satz 3.6: *Eine nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann primitiv-rekursiv darstellbar, wenn es eine primitiv-rekursive Funktion f gibt, die $c^k(M)$ aufzählt.*

Folgerung 3.7: *Jede primitiv-rekursive Menge ist primitiv-rekursiv darstellbar.*

Folgerung 3.8: *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann primitiv-rekursiv darstellbar, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine primitiv-rekursive Funktion $g \in \mathcal{F}^{k+m}$ derart gibt, daß*

$$M = \{(x_1, \ldots, x_k) : \exists a_1 \ldots \exists a_m (g(x_1, \ldots, x_k, a_1, \ldots, a_m) = 0\} \ .$$

Eine Menge $\mathbf{G}_\psi$ heißt *Graph* einer k-stelligen partiellen Fumktion $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$: $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\psi &\subseteq \mathbb{N}^{k+1} \quad \text{und} \\ (x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbf{G}_\psi &\leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_k) = y \ . \end{aligned}$$

Folgerung 3.9: *Der Graph einer (primitiv-) rekursiven Funktion ist (primitiv-) rekursiv.*

Satz 3.10: *Der Graph $\mathbf{G}_\psi$ einer partiellen Funktion $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist genau dann primitiv-rekursiv darstellbar, wenn ψ partiell-rekursiv ist.*

zum Beweis von Satz 3.10. Die Graphen von θ_1, θ_2 seien durch die primitiv-rekursiven Funktionen g_1, g_2 darstellbar:

$$\begin{aligned} \theta_1(\vec{x}) = z_0 &\Leftrightarrow \exists a_0(g_1(\vec{x}, z_0, a_0) = 0) \\ \theta_2(\vec{x}, i, z_i) = z_{i+1} &\Leftrightarrow \exists a_{i+1}(g_2(\vec{x}, i, z_i, z_{i+1}, a_{i+1}) = 0) \ . \end{aligned}$$

Weiter sei $\theta = \mathbf{R}(\theta_1, \theta_2)$, d.h. $\begin{aligned} \theta(\vec{x}, 0) &= \theta_1(\vec{x}) \\ \theta(\vec{x}, y+1) &= \theta_2(\vec{x}, y, \theta(\vec{x}, y)) \ . \end{aligned}$

Dann ist

$$\mathbf{G}_\theta = \{(\vec{x}, y, z) : \exists z_0, \ldots, z_y(\theta_1(\vec{x}) = z_0 \wedge \forall i(0 \leq i < y \to \theta_2(\vec{x}, i, z_i) = z_{i+1}) \wedge z = z_y)\} \ .$$

Nach Codierung $\Gamma(u, i) = z_i$ mit der GÖDEL-Funktion Γ ergibt sich

$$\begin{aligned} (\vec{x}, y, z) \in \mathbf{G}_\theta \Leftrightarrow \exists u\Big(&\Gamma(u, 0) = \theta_1(\vec{x}) \wedge \\ &\forall i(0 \leq i < y \to \Gamma(u, i+1) = \theta_2(\vec{x}, i, \Gamma(u, i))) \wedge \Gamma(u, y) = z\Big) \ . \end{aligned}$$

Jetzt erhalten wir mit der Voraussetzung

$$\begin{aligned} (\vec{x}, y, z) \in \mathbf{G}_\theta \Leftrightarrow \exists u \exists a\Big(&g_1(\vec{x}, \Gamma(u, 0), \Gamma(a, 0)) + \\ &\mathrm{sg}(y) \cdot \sum_{i=0}^{y \dot{-} 1} g_2(\vec{x}, i, \Gamma(u, i), \Gamma(u, i+1), \Gamma(a, i+1)) + |\Gamma(u, y) - z| = 0\Big) \ . \end{aligned}$$

Hilfssatz 3.11 (Gödel): *Es gibt eine primitiv-rekursive Funktion Γ mit der Eigenschaft*

$$\forall n \forall (a_0, \ldots, a_n)(n, a_0, \ldots a_n \in \mathbb{N} \to \exists z(z \in \mathbb{N} \wedge \forall i(i \leq n \to \Gamma(z, i) = a_i))) \ .$$

Beweis. Die Funktion $\Gamma(z, i) := exp(z+1, i)$ ist primitiv-rekursiv und erfüllt die angegebene Eigenschaft.

Q.E.D.

Folgerung 3.12 (Normalformsatz von Kleene): *Zu jeder partiell-rekursiven Funktion $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es eine primitiv-rekursive Funktion $h_\psi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ derart, daß*

$$\psi(x_1, \ldots, x_k) = \ell(\mu z(h_\psi(x_1, \ldots, x_k, z) = 0) \ .$$

(Hierbei sei ℓ die linke Umkehrfunktion der CANTOR*-Numerierung.)*

Folgerung 3.13:

(a) Definitions- und Wertebereich partiell-rekursiver Funktionen sind primitiv-rekursiv darstellbar.

(b) Jede nichtleere rekursiv aufzählbare Menge kann schon durch eine primitiv-rekursive Funktion aufgezählt werden.

Es seien $F = \{f_1, \ldots, f_\ell\}$ eine endliche Menge von einstelligen Funktionen und $M \subseteq \mathbb{N}$. Wir nennen M^F *iteriertes Bild* von M falls $M^F = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ wobei $M_0 := M$ und

$$M_{i+1} := M_i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} f_j(M_i) \ .$$

Satz 3.14: *Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und sind $f_1, \ldots, f_\ell$ einstellige rekursive Funktionen, so ist auch das iterierte Bild $M^{\{f_1,\ldots,f_\ell\}}$ rekursiv aufzählbar.*

Eine partiell-rekursive Funktion $\Phi^{(k)} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ ist eine *effektive Numerierung* einer Klasse $\mathcal{K}$ von k-stelligen Funktionen : $\Longleftrightarrow$

(a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_i(x_1, \ldots, x_k) := \Phi(i, x_1, \ldots, x_k)$ eine Funktion aus $\mathcal{K}$, und

(b) für jede Funktion $g \in \mathcal{K}$ gibt es eine Nummer $i \in \mathbb{N}$ derart, daß $g(x_1, \ldots, x_k) := \Phi(i, x_1, \ldots, x_k)$.

Satz 3.15: *Es gibt eine effektive Numerierung aller einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen.*

Folgerung 3.16: *Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine effektive Numerierung $\Phi^{(k)}$ aller k-stelligen primitiv-rekursiven Funktionen.*

Folgerung 3.17: *Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine k-stellige rekursive nicht primitiv-rekursive Funktion.*

Folgerung 3.18: *Es gibt rekursive nicht primitiv-rekursive Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ $(k > 0)$.*

Folgerung 3.19: *Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine effektive Numerierung $\Gamma^{(k)}$ aller k-stelligen partiell-rekursiven Funktionen.*

Folgerung 3.20: *Es gibt k-stellige partiell-rekursive Funktionen, die nicht zu (voll definierten) rekursiven Funktionen erweitert werden können.*

Lemma 3.21: *Es seien $\varphi \in \mathcal{P}$ und $dom(\varphi)$ rekursiv. Dann gibt es eine rekursive Funktion f mit $\varphi \subseteq f$.*

Folgerung 3.22: *Es gibt rekursiv aufzählbare nichtrekursive Mengen.*

Folgerung 3.23: *Die Menge $\{M : M \subseteq \mathbb{N}^k \wedge M$ ist rekursiv aufzählbar$\}$ ist für $k \geq 1$ nicht abgeschlossen bezüglich Komplement.*

4 Effektive Numerierungen partiell-rekursiver Funktionen

Eigenschaft 4.1: *Für beliebige $k \geq 1$ gilt*
$$c^{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) = c^k(c(x_1, x_2), \ldots, x_{k+1}) \ .$$

Eigenschaft 4.2:

$$\begin{aligned} \Phi^{(k+1)}(i, x_1, \ldots, x_k) &= \Phi^{(k)}(i, c(x_1, x_2), \ldots, x_k) \\ \Gamma^{(k+1)}(i, x_1, \ldots, x_k) &= \Gamma^{(k)}(i, c(x_1, x_2), \ldots, x_k) \end{aligned}$$

KLEENE-Numerierung von Paaren:

$$[x, y] := c\Big(\ell(x)\ ,\ c(r(x), y)\Big)$$

Eigenschaft 4.3:

$$[x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_k] = \Big[[x_1, \ldots, x_m], x_{m+1}, \ldots, x_k\Big]$$

$$\begin{aligned} K^2(i, x) &:= \Gamma^{(1)}\Big(\ell(i)\ ,\ c(r(i), x)\Big) \\ K^{s+1}(i, x_1, \ldots, x_s) &:= K^s\Big([i, x_1], x_2, \ldots, x_s\Big) \end{aligned}$$

Lemma 4.4 (Beziehung zwischen K und Γ):

$$K^s\Big(c(j, x_1), x_2, \ldots, x_s\Big) = \Gamma^{(s)}(j, x_1, \ldots, x_s)$$

Satz 4.5: *Die Funktion K^s ist eine universelle (numerierende) Funktion für die Menge aller s-stelligen partiell-rekursiven Funktionen.*

Folgerung 4.6: *Jede partiell-rekursive Funktion hat unendlich viele Nummern.*

Satz 4.7 (s-m-n-Theorem, Iterationssatz):

$$K^{m+n+1}(x_0, \ldots, x_{m+n}) = K^{n+1}\Big([x_0, \ldots, x_m], x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}\Big)$$

Satz 4.8 (KLEENEscher Fixpunktsatz, Rekursionstheorem): *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $\varphi \in \mathcal{P}$ existiert eine primitiv-rekursive Funktion g derart, daß für $n < m$ stets*

$$K^{m-n+1}(\varphi(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)), x_{n+1}, \ldots, x_m) = K^{m-n+1}(g(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

gilt.

Bezeichnung: $\kappa_i^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) := K(i, x_1, \ldots, x_m)$

Beispiele nichtrekursiver Indexmengen

- $\mathbf{K} := \{x : \kappa_x(x) \text{ ist definiert}\}$ (Spezielles Halteproblem)
- $M = \{i : \kappa_i \in \mathcal{R}\}$
- $M' = \{(x, y, z) : \kappa_x(y) = z\}$
- $M'' = \{(x, y) : \kappa_x = \kappa_y\}$
- $A_a = \{x : \exists t(\kappa_x(t) = a\}$ für festes $a \in \mathbb{N}$
- $A' = \{x : \kappa_x(\mathbb{N}) \text{ ist unendlich}\}$

Sprechweise: $\{i : \kappa_i \in \mathcal{M}^{(k)}\}$, wobei $\mathcal{M}^{(k)}$ eine Teilmenge aller k-stelligen partiellen (oder partiell-rekursiven) Funktionen sei, heiße *Eigenschaft.*

Satz 4.9 (Satz von RICE): *Keine nichttriviale Eigenschaft partiell-rekursiver Funktionen ist entscheidbar.*

Beispiele nichtrekursiver Eigenschaften

- $\mathcal{S}_a = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{P} \wedge \exists \vec{x}(\varphi(\vec{x}) = a)\}$ ist rekursiv aufzählbar.
- $\mathcal{R}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.
- $\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{P} \wedge \exists \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \text{ ist definiert})\}$ ist rekursiv aufzählbar.

Satz 4.10 (Padding-Theorem): *Zu jedem $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine zweistellige rekursive Funktion g_m derart, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $y \in \mathbb{N}$ die Beziehungen*

$$\begin{array}{rcll} g_m(i, y) & \neq & g_m(i, y') & \text{für } y \neq y' \quad \text{und} \\ \kappa_i^{(m)} & = & \kappa_{g_m(i,y)}^{(m)} & \text{gelten.} \end{array}$$

Beispiele effektiver Operationen

- Substitution $\mathbf{S}(\kappa_a; \kappa_{b_1}, \ldots, \kappa_{b_m})$
- μ-Operator $\mu t(\kappa_a(\vec{x}, t) = 0) = \kappa_{[x_\mu, a]}(\vec{x})$
- $\varphi_{a,b} = \begin{cases} \kappa_a(\vec{x}) & , \text{ falls } \kappa_a(\vec{x}) = \kappa_b(\vec{x}) \text{ und} \\ \text{nicht definiert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Effektive Numerierungen von Mengen

- $\{A : A \subseteq \mathbb{N} \wedge \chi_A \in \mathcal{PR}\}$
- $\{A : A \subseteq \mathbb{N} \wedge A \text{ ist endlich}\}$
- $\{A : A \subseteq \mathbb{N} \wedge A \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$

Lemma 4.11 (Umrechnung der Indizes): *Es gibt primitiv-rekursive Funktionen g, h derart, daß*

$$\forall i(i \in \mathbb{N} \rightarrow dom(\kappa_i) = \kappa_{g(i)}(\mathbb{N})) \quad \textit{und}$$
$$\forall i(i \in \mathbb{N} \rightarrow \kappa_i(\mathbb{N}) = dom(\kappa_{h(i)})) \quad \textit{gelten.}$$

5 m-Reduktion von Mengen

$$A \leq_m B \iff \exists f(f \in \mathcal{R} \wedge A = f^{-1}(B))$$

Eigenschaft 5.1:

(a) $A \leq_m A$

(b) $A \leq_m B \wedge B \leq_m C \Rightarrow A \leq_m C$

(c) $A \leq_m B \iff (\mathbb{N} \setminus A) \leq_m (\mathbb{N} \setminus B)$

(d) $A \neq \emptyset \iff \mathbb{N} \leq A$

(e) Ist B rekursiv und $A \leq_m B$, so ist auch A rekursiv.

(f) Ist B rekursiv aufzählbar und $A \leq_m B$, so ist auch A rekursiv aufzählbar.

Eigenschaft 5.2: *Ist A rekursiv und $B \notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, so gilt $A \leq_m B$, und sind $A, B \notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und rekursiv, so gelten $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$.*

Schreibweise: $A \oplus B := \{2x : x \in A\} \cup \{2y + 1 : y \in B\}$

Eigenschaft 5.3: *Für je zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein C (z.B. $C = A \oplus B$) derart, daß für alle C' mit $A \leq_m C'$ und $B \leq_m C'$ stets $C \leq_m C'$ folgt.*

Eigenschaft 5.4: *Es gibt Mengen A, B derart, daß $A \not\leq_m B$ und $B \not\leq_m A$.*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *m-vollständig*, wenn A rekursiv aufzählbar ist und für jede rekursiv aufzählbare Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ die Beziehung $B \leq_m A$ gilt.

Eigenschaft 5.5: $K_0 := \{c(i, x) : \kappa_i(x) \textit{ ist definiert}\}$ *ist m-vollständig.*

Lemma 5.6: *$K := \{x : \kappa_x(x)$ ist definiert$\}$ ist m-vollständig.*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *produktiv*, falls es ein $\psi \in \mathcal{P}$ mit der Eigenschaft

$$\forall i(dom(\kappa_i) \subseteq A \rightarrow i \in dom(\psi) \wedge \psi(i) \in A \setminus dom(\kappa_i)) \text{ gibt.}$$

ψ heißt dabei *produktive Funktion* für A.
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *kreativ*, falls A rekursiv aufzählbar ist und $\mathbb{N} \setminus A$ produktiv ist.
K ist kreativ (mit $\psi = I_1^1$ als produktiver Funktion für $\mathbb{N} \setminus K$).

Lemma 5.7: *Wenn A produktiv ist, so ist A nicht rekursiv aufzählbar, und aus $A \leq_m B$ folgt, daß auch B produktiv ist.*

Folgerung 5.8: *Wenn A kreativ ist, so ist A nicht rekursiv und aus $A \leq_m B$ folgt, daß $\mathbb{N} \setminus B$ produktiv ist. Weiterhin sind m-vollständige Mengen stets kreativ.*

Satz 5.9: *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann produktiv, wenn es eine rekursive produktive Funktion für A gibt.*

Satz 5.10 (Myhill): *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann kreativ, wenn sie m-vollständig ist.*

Beispiele produktiver Mengen:

- $K \oplus (\mathbb{N} \setminus K)$
- $c\,(K \times (\mathbb{N} \setminus K))$
- $\{i : \kappa_i \notin \mathcal{R}\}$
- $\{i : \kappa_i = \emptyset\}$
- $\{i : \kappa_i \in \mathcal{R}\}$

Lemma 5.11: *Ist B produktiv, so enthält B eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge.*

Eine Teilmenge A von $\mathbb{N}$ heißt *immun*, falls A unendlich ist, aber keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält. A heißt *biimmun*, falls A und $\mathbb{N} \setminus A$ immun sind.
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *einfach*, falls A rekursiv aufzählbar und $\mathbb{N} \setminus A$ immun sind.

Satz 5.12: *Es gibt einfache Mengen.*

Beweis: Wir benutzen die im 3. Abschnitt der Vorlesung eingeführte effektive Numerierung aller einstelligen primitiv rekursiven Funktionen $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und definieren die partiell-rekursive Funktion $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gemäß der folgenden Gleichung:

$$\Psi(x) := r(\mu t(|\Phi(x, l(t)) - r(t)| + ((2x+1) \dot{-} r(t)) = 0)).$$

Dann läßt sich nachweisen, daß $\Psi(\mathbb{N})$ aus jeder unendlichen aufzählbaren Menge mindestens ein Element, aber höchstens x Elemente aus $\{i : i \leq 2x\}$ enthält. Damit ist $\mathbb{N} \setminus \Psi(\mathbb{N})$ unendlich.

6 Die arithmetische Hierarchie

Eine Teilmenge $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *arithmetische Relation* : $\Longleftrightarrow$

(a) R ist rekursiv, oder

(b) es gibt eine arithmetische Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ derart, daß $R = \{(x_1, \ldots, x_k) : \exists x_{k+1}((x_1, \ldots, x_{k+1}) \in S)\}$, oder

(c) R ist Komplement einer arithmetischen Relation.

Folgerung 6.1: *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann arithmetisch, wenn $c^k(R)$ arithmetische Menge ist.*

Satz 6.2: *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann arithmetisch, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$, eine rekursive Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ und Quantoren $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_m \in \{\forall, \exists\}$ derart gibt, daß*

$$R = \{(x_1, \ldots, x_k) : \mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_m y_m((x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) \in S)\} \ .$$

Ein Präfix von Quantoren $\mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_m y_m$ hat k *Quantorenwechsel*, falls es Zahlen i_j $(j = 1, \ldots, k)$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ gibt, für die $\mathsf{Q}_{i_j} = \forall \longleftrightarrow \mathsf{Q}_{i_{j+1}} = \exists$ gilt.

Satz 6.3:

$$\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$$
$$R \in \Sigma_n \longleftrightarrow (\mathbb{N}^k \setminus R) \in \Pi_n \quad \textit{für } R \subseteq \mathbb{N}^k$$

Satz 6.4: *Jede Relation aus $\Sigma_n \cup \Pi_n$ kann durch eine Prädikatenform mit einem Präfix von höchstens n Quantoren dargestellt werden.*

Satz 6.5 (Normalformtheorem): *Zu jeden $n, k \geq 1$ gibt es ein rekursives Prädikat (sog.* Turing-*Prädikat) $T_{k,n}$ derart, daß für $R \subseteq \mathbb{N}^k$ gilt*

$$R \in \Sigma_n(\Pi_n) \leftrightarrow \exists z(R = \{(x_1, \ldots, x_k) : \mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_n y_n(\neg)(T_{k,n}(z, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)\}) \ ,$$

wobei $\mathsf{Q}_1 = \exists$ für Σ_n, $\mathsf{Q}_1 = \forall$ für Π_n und $\neg$ genau dann auftritt, wenn $\mathsf{Q}_n = \forall$.

Der Algorithmus von Tarski und Kuratowski

Definition von arithmetischen Relationen mittels prädikatenlogischer Ausdrücke:

0. Wir benutzen die folgenden Symbole:
   (i) x_i, y_i Individuenvariablen (über $\mathbb{N}$)
   (ii) a_i Konstanten (über $\mathbb{N}$)
   (iii) P_j Prädikatenvariablen
1. $x_i = y_j$, $x_i = a_j$ und $P_j(x_1, \ldots, x_k)$ sind Ausdrücke.
2. Sind α_1, α_2 Ausdrücke und x eine Individuenvariable, so sind auch $\neg(\alpha_1)$, $(\alpha_1) \vee (\alpha_2)$, $(\alpha_1) \wedge (\alpha_2)$, $(\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)$, $(\alpha_1) \leftrightarrow (\alpha_2)$, sowie $\forall x(\alpha_1)$ und $\exists x(\alpha_1)$ Ausdrücke.
3. Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von 1 oder 2 der Fall ist.

Beispiel: Peanosche Arithmetik

ax 1 $\forall x \forall y(x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$

ax 2 $\forall x(\neg\ (0 = x + 1))$

ax 3 $\forall x(x + 0 = x)$

ax 4 $\forall x \forall y(x + (y + 1) = (x + y) + 1)$

ax 5 $\forall x \forall y(x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$

und in der Prädikatenlogik *erster* Stufe

ax 6 (Induktionsaxiom, eigentlich ein Schema)
$\mathcal{P}(0) \wedge \forall x(\mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x + 1)) \rightarrow \forall x(\mathcal{P}(x))$
für alle in der Sprache der Arithmetik ausdrückbaren Prädikatenformen $\mathcal{P}(x)$ mit einer freien Variablen x.

bzw. in der Prädikatenlogik *zweiter* Stufe

ax 6 (Induktionsaxiom)
$\forall P(P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(x + 1)) \rightarrow \forall x(P(x)))$

Satz 6.6: *Ist eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ durch einen prädikatenlogischen Ausdruck erster Stufe über rekursiven Prädikaten definierbar, so gibt es ein n derart, daß $R \in \Sigma_n \cup \Pi_n$.*

Zum Beweis. Kommt die Variable x *nicht* frei in α_2 vor, so sind die folgenden Ausdrücke paarweise äquivalent (Hierbei wurde von Klammereinsparungsregeln Gebrauch gemacht.):

$$\begin{array}{rcl}
\exists x(\alpha_1) \vee \alpha_2 & ; & \exists x(\alpha_1 \vee \alpha_2) \\
\forall x(\alpha_1) \vee \alpha_2 & ; & \forall x(\alpha_1 \vee \alpha_2) \\
\exists x(\alpha_1) \wedge \alpha_2 & ; & \exists x(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \\
\forall x(\alpha_1) \wedge \alpha_2 & ; & \forall x(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \\
\exists x(\alpha_1) \to \alpha_2 & ; & \forall x(\alpha_1 \to \alpha_2) \\
\forall x(\alpha_1) \to \alpha_2 & ; & \exists x(\alpha_1 \to \alpha_2) \\
\alpha_2 \to \exists x(\alpha_1) & ; & \exists x(\alpha_2 \to \alpha_1) \\
\alpha_2 \to \forall x(\alpha_1) & ; & \forall x(\alpha_2 \to \alpha_1)
\end{array}$$

Entsteht $\alpha(y)$ aus $\alpha(x)$ durch Ersetzen *aller* freien Vorkommen der Variablen x durch die Variable y, und kommt y nicht frei in $\alpha(x)$ vor, so sind die folgenden Ausdrücke paarweise äquivalent:

$$\begin{array}{rcl}
\exists x(\alpha(x)) & ; & \exists y(\alpha(y)) \\
\forall x(\alpha(x)) & ; & \forall y(\alpha(y))
\end{array}$$

Weiter sind paarweise äquivalent:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(\alpha) & ; & \forall(\neg\alpha) \\
\neg\forall x(\alpha) & ; & \exists(\neg\alpha) \\
\neg\neg\alpha & ; & \alpha \\
\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 & ; & (\alpha_1 \to \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \to \alpha_1)
\end{array}$$

Lemma 6.7:

(a) Ist $A \leq_m B$ und $B \in \Sigma_n$ (Π_n), so gilt auch $A \in \Sigma_n$ (Π_n).

(b) Σ_n und Π_n sind abgeschlossen bezüglich $\cup$, $\cap$ und $\oplus$.

Lemma 6.8: *Es gelten die folgenden Vereinfachungsregeln:*

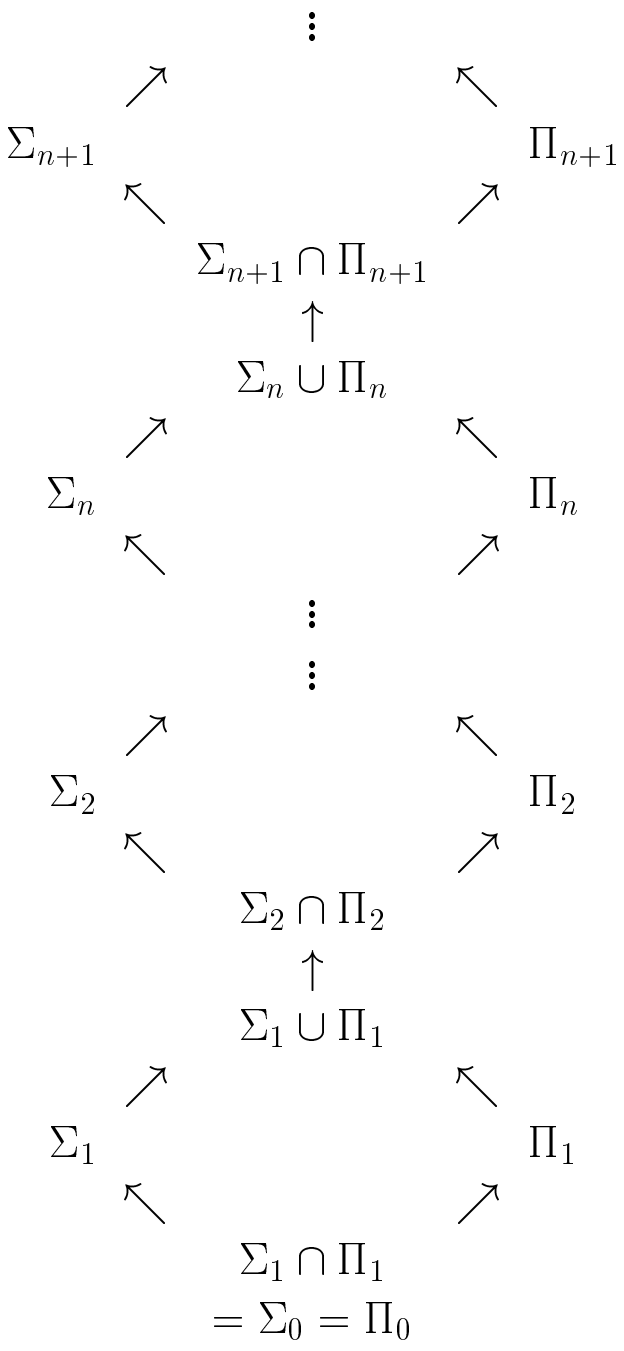
(a) $(\forall x \leq y)\exists z(P(x, y, z, \vec{\mathbf{x}})) \leftrightarrow \exists z(\forall x \leq y)(P(x, y, \Gamma(z, x), \vec{\mathbf{x}}))$

(b) $(\exists x \leq y)\forall z(P(x, y, z, \vec{\mathbf{x}})) \leftrightarrow \forall z(\exists x \leq y)(P(x, y, \Gamma(z, x), \vec{\mathbf{x}}))$

Satz 6.9: *Es gilt $\Sigma_n \setminus \Pi_n \neq \emptyset$ für $n \geq 1$.*

Satz 6.10 (Hierarchiesatz): *Es gilt $\Sigma_n \cup \Pi_n \subset \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$ für $n \geq 1$.*

Die arithmetische Hierarchie



7 A-berechenbare Funktionen

Eine Funktion φ heißt *partiell A-rekursiv* (*partiell f-rekursiv*) für $A \subseteq \mathbb{N}$ ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) $:\Longleftrightarrow$ φ entsteht aus den um die Funktion $h := \chi_A$ (bzw. $h := f$) erweiterte Menge von

Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0 \cup \{h\}$ durch Substitution, primitive Rekursion und Minimisierung.

Folgerung 7.1: *Für eine vollständig definierte Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist die Erweiterung um f mit der Erweiterung um die charakteristische Funktion des Graphen χ_{G_f} äquivalent.*

Satz 7.2: *ψ ist genau dann partiell A-rekursiv, wenn ψ aus $\mathcal{P} \cup \{\chi_A\}$ mit Hilfe der Operationen Substitution und Minimisierung erzeugbar ist.*

Schreibweisen:

- $W_i^{(k)} := dom(\kappa_i^{(k)})$
- $D_u = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\} \iff u = \sum_{m=1}^{k} 2^{\ell_m}$
- $A \rhd (u, v) : \iff D_u \subseteq A \wedge D_v \cap A = \emptyset$

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}^k$ $(k \geq 4)$ heißt genau dann *regulär*, wenn für alle $(\vec{x}, y_1, u_1, v_1)$, $(\vec{x}, y_2, u_2, v_2) \in B$

(a) $D_{u_1} \cap D_{v_1} = \emptyset$ und

(b) aus $D_{u_1} \cap D_{v_2} = D_{u_2} \cap D_{v_1} = \emptyset$ folgt $y_1 = y_2$, $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$

gelten.

Lemma 7.3: *Für jedes $k \geq 4$ gibt es eine rekursive Funktion ρ_k derart, daß*

(a) $\forall i(dom(\kappa^{(k)}_{\rho_k(i)})$ ist regulär$)$, *und*

(b) $\forall i(dom(\kappa_i^{(k)})$ ist regulär $\to dom(\kappa_i^{(k)}) = dom(\kappa^{(k)}_{\rho_k(i)}))$.

Eine $(k-3)$-stellige (partielle) Funktion φ heißt *A-berechenbar*, falls es ein $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi(\vec{x}) = y \iff \exists u \exists v((\vec{x}, y, u, v) \in W^{(k)}_{\rho_k(i)} \wedge A \rhd (u, v))$$

gibt.

Satz 7.4: *Eine (partielle) Funktion φ ist genau dann partiell A-rekursiv wenn sie A-berechenbar ist.*

Wir setzen

$$\varphi_i^A := \{(\vec{x}, y) : \exists u \exists v((\vec{x}, y, u, v) \in W^{(k)}_{\rho_k(i)} \wedge A \rhd (u, v))\} \ .$$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *A-rekursiv* (oder *rekursiv in A*), falls

(a) f voll definiert ist und

(b) f A-berechenbar ist.

Eine Menge (Relation) $B \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *A-rekursiv* (oder *rekursiv in A*), falls χ_B rekursiv in A ist.

Eine Menge (Relation) $B \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *A-rekursiv aufzählbar* (oder *rekursiv aufzählbar in A*), falls $B = \emptyset$ oder es eine A-rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(\mathbb{N}) = c^k(B)$ gibt.

Folgerung 7.5: *Ist A rekursiv in B und ist B rekursiv in C, so ist auch A rekursiv in C.*

Folgerung 7.6: *Ist $A \leq_m B$ so ist A auch B-rekursiv.*

Folgerung 7.7: *Sind A, B beide C-rekursiv, so ist auch $A \oplus B$ rekursiv in C.*

Satz 7.8 (Satz von POST): *Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann A-rekursiv, wenn B und $\mathbb{N}^k \setminus B$ rekursiv aufzählbar in A sind.*

Satz 7.9: *Für eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}^k$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:*

(a) B ist A-rekursiv aufzählbar.

(b) $\exists i(B = dom(\varphi_i^A))$

(c) $\exists j(c^k(B) = \varphi_j^A(\mathbb{N}))$

Eine Menge A heißt TURING-*reduzierbar* auf B (kurz: $A \leq_T B$), falls A rekursiv in B ist, und wir schreiben $A \equiv_T B$ für $A \leq_T B \wedge B \leq_T A$.

Folgerung 7.10: *Die Menge $\mathbf{d}_A := \{B : B \subseteq \mathbb{N} \wedge B \leq_T A\}$ ist abgeschlossen bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Komplement. Ist A rekursiv, so ist $\mathbf{d}_A$ die Menge aller rekursiven Teilmengen von $\mathbb{N}$.*

Folgerung 7.11: *Die Menge $\mathcal{R}_A := \{B : B \subseteq \mathbb{N} \wedge B$ ist rekursiv aufzählbar in $A\}$ ist abgeschlossen bezüglich Durchschnitt, Vereinigung, Abbildungen mittels partiell-rekursiver Funktionen sowie ihrer Inversen. Ist A rekursiv, so ist $\mathcal{R}_A$ die Menge aller rekursiv aufzählbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$.*

Für $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt A' der *Sprung* der Menge A, falls

$$A' = \{i : i \in \mathbb{N} \wedge \varphi_i^A(i) \text{ ist definiert}\} .$$

Weiter sei $A^{(n+1)} := (A^{(n)})'$ der $n+1$-*fache Sprung* von A für $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 7.12: *Für jedes $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein $B \subseteq \mathbb{N}$ welches rekursiv aufzählbar in A, aber nicht A-rekursiv ist.*
Insbesondere ist A' rekursiv aufzählbar in A, aber nicht rekursiv in A.

Lemma 7.13: *Eine Menge B ist genau dann rekursiv aufzählbar in A, wenn $B \leq_m A'$ gilt.*

Folgerung 7.14: *B ist genau dann A-rekursiv, wenn $B' \leq_m A'$.*

Beispiel: $K \equiv_m \emptyset'$

Die relativierte arithmetische Hierarchie

Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *arithmetisch in A* $:\Longleftrightarrow$

(a) R ist A-rekursiv, oder

(b) es gibt eine in A arithmetische Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ derart, daß $R = \{(x_1, \ldots, x_k) : \exists x_{k+1}((x_1, \ldots, x_{k+1}) \in S)\}$, oder

(c) R ist Komplement einer in A arithmetischen Relation.

Folgerung 7.15: *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann arithmetisch in A, wenn die Menge $c^k(R)$ arithmetisch in A ist.*

Satz 7.16: *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann arithmetisch in A, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$, eine A-rekursive Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ und Quantoren $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_m \in \{\forall, \exists\}$ derart gibt, daß*

$$R = \{(x_1, \ldots, x_k) : \mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_m y_m((x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) \in S)\} \ .$$

Satz 7.17:

$$\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A \subseteq \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$$
$$R \in \Sigma_n^A \longleftrightarrow (\mathbb{N}^k \setminus R) \in \Pi_n^A \quad \textit{für } R \subseteq \mathbb{N}^k$$

Satz 7.18: *Jede Relation aus $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A$ kann durch eine Prädikatenform mit einem Präfix von höchstens n Quantoren dargestellt werden.*

Satz 7.19 (Normalformtheorem): *Zu jeden $n, k \geq 1$ gibt es ein A-rekursives Prädikat (sog. relativiertes* Turing*-Prädikat) $T_{k,n}^A$ derart, daß für $R \subseteq \mathbb{N}^k$ gilt*

$$R \in \Sigma_n^A(\Pi_n^A) \leftrightarrow \exists z(R = \{(x_1, \ldots, x_k) : \mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_n y_n(\neg)(T_{k,n}^A(z, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)\}) \ ,$$

wobei $\mathsf{Q}_1 = \exists$ für Σ_n^A, $\mathsf{Q}_1 = \forall$ für Π_n^A und $\neg$ genau dann auftritt, wenn $\mathsf{Q}_n = \forall$.

Lemma 7.20:

(a) *Ist* $C \leq_m B$ *und* $B \in \Sigma_n^A$ (Π_n^A), *so gilt auch* $C \in \Sigma_n^A$ (Π_n^A).

(b) Σ_n^A *und* Π_n^A *sind abgeschlossen bezüglich* $\cup$, $\cap$ *und* $\oplus$.

Satz 7.21: *Es gilt* $\Sigma_n^A \setminus \Pi_n^A \neq \emptyset$ *für* $n \geq 1$.

Satz 7.22 (Hierarchiesatz): *Es gilt* $\Sigma_n^A \cup \Pi_n^A \subset \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A$ *für* $n \geq 1$.

Satz 7.23: *Es sei* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

(a) $B \in \Sigma_{n+1}^A \iff B$ *ist rekursiv aufzählbar in* $A^{(n)}$.

(b) $B \in \Sigma_{n+1}^A \cap \Pi_{n+1}^A \iff B \leq_T A^{(n)}$

Folgerung 7.24: *Für* $n \geq 1$ *gilt:*

(a) $B \in \Sigma_n^A \iff B \leq_m A^{(n)}$

(b) $B \in \Pi_n^A \iff B \leq_m \mathbb{N} \setminus A^{(n)}$

(c) $B \in \Sigma_n \iff B \leq_m \emptyset^{(n)}$

(d) $B \in \Pi_n \iff B \leq_m \mathbb{N} \setminus \emptyset^{(n)}$

Beispiel: $\emptyset'' \equiv_m K' \equiv_m \{x : dom(\kappa_x) \text{ ist endlich}\}$

Implizite Definition der reduzierenden Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
für $K' \leq_m \{x : dom(\kappa_x) \text{ ist endlich}\}$

Voraussetzungen: Es seien $K' = \{x : x \in dom(\varphi_x^K)\} = \{x : \exists y \exists u \exists v((x,y,u,v) \in W_{\varrho(x)} \wedge D_u \subseteq K \wedge D_v \cap K = \emptyset\}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine aufzählende Funktion für $c^4(\{(x,y,u,v) \in W_{\varrho(x)}\})$ (dabei sei $f(j) := c^4(x_j, y_j, u_j, v_j)$) und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine aufzählende Funktion für K.

$\kappa_{h(x)}(k)$:

1. Zähle $\{(x_0,y_0,u_0,v_0), \ldots, (x_k,y_k,u_k,v_k)\}$ auf. Sind alle $x_j \neq x$, so setze $\kappa_{h(x)}(k) = k$, anderenfalls $M_k' := \{j : j \leq k \wedge x_j = x\}$

2. Berechne $G_k := \{g(0), \ldots, g(k)\} (\subseteq K)$. Gilt $D_{u_j} \not\subseteq G_k (\subseteq K)$ für alle $j \in M_k'$, so setze $\kappa_{h(x)}(k) = k$,
anderenfalls $M_k := \{j : j \leq k \wedge x_j = x \wedge D_{u_j} \subseteq G_k\}$.

3. $n := k$

4. $n := n + 1$, berechne $G_n := \{g(0), \ldots, g(n)\} (\subseteq K)$.

5. Gilt $D_{v_j} \cap G_n \neq \emptyset$ für alle $j \in M_k$, so setze $\kappa_{h(x)}(k) = k$,
anderenfalls gehe zu **4**.

Also ist $\kappa_{h(x)}(k)$ genau dann nicht definiert, wenn es $y, u, v \in \mathbb{N}$ mit $c^4(x,y,u,v) \in W_{\varrho(i)}, D_u \subseteq G_k (\subseteq K)$ und $D_v \cap K = \emptyset$ gibt.

8 Die arithmetische Hierarchie von Mengen von Mengen

Wir nennen eine Funktion $\lambda\vec{x}A[\varphi_i^A(\vec{x})]$ *total-rekursiv* falls $\varphi_i^A(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ und alle $A \subseteq \mathbb{N}$ definiert ist.

Satz 8.1: *Eine Funktion $\lambda\vec{x}A[\varphi_i^A(\vec{x})]$ ist genau dann total-rekursiv, wenn es eine rekursive Funktion $\lambda\vec{x}[f(\vec{x})]$ gibt, für die*

(a) $\varphi_i^D(\vec{x})$ ist definiert für alle $D \subseteq \{0, \ldots, f(\vec{x})\}$, und

(b) $\varphi_i^A(\vec{x}) = \varphi_i^D(\vec{x})$ falls $D = A \cap \{0, \ldots, f(\vec{x})\}$.

Lemma 8.2 (KÖNIGs Unendlichkeitslemma): *Ein endlich verzweigter Baum ist genau dann unendlich, wenn er mindestens einen unendlichen Pfad enthält.*

Schreibweise: $\varphi_i^{A_1,\ldots,A_n}(\vec{x}) := \varphi_i^{\vec{A}}(\vec{x})$, wobei $\vec{A} := (\ldots(A_1 \oplus A_2) \oplus \ \ldots\ ) \oplus A_n$

Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^m \times 2^{\mathbb{N}^n}$ ist genau dann

(a) *rekursiv*, wenn es eine total-rekursive Funktion φ_i mit $(\vec{x}, \vec{A}) \in R \leftrightarrow \varphi_i^{\vec{A}}(\vec{x}) = 1$ gibt.
Falls $m = 0$, so sei $\vec{A} \in R \leftrightarrow \varphi_i^{\vec{A}}(0) = 1$.

(b) *rekursiv aufzählbar*, wenn es eine partiell-rekursive Funktion φ_i mit $(\vec{x}, \vec{A}) \in R \leftrightarrow \exists y(\varphi_i^{\vec{A}}(\vec{x}) = y)$ gibt.
Falls $m = 0$, so sei $\vec{A} \in R \leftrightarrow \exists y(\varphi_i^{\vec{A}}(0) = y)$

Satz 8.3 (Satz von POST): *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^m \times 2^{\mathbb{N}^n}$ ist genau dann rekursiv, wenn R und $\mathbb{N}^m \times 2^{\mathbb{N}^n} \setminus R$ rekursiv aufzählbar sind.*

Eine Teilmenge $R \subseteq \mathbb{N}^k \times 2^{\mathbb{N}^n}$ heißt *arithmetische Relation* $:\Longleftrightarrow$

(a) R ist rekursiv, oder

(b) es gibt eine arithmetische Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1} \times 2^{\mathbb{N}^n}$ derart, daß $R = \{(x_1, \ldots, x_k, \vec{A}) : \exists x_{k+1}((x_1, \ldots, x_{k+1}, \vec{A}) \in S)\}$, oder

(c) R ist Komplement einer arithmetischen Relation.

Satz 8.4: *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k \times 2^{\mathbb{N}^n}$ ist genau dann arithmetisch, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$, eine rekursive Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{k+m} \times 2^{\mathbb{N}^n}$ und Quantoren $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_m \in \{\forall, \exists\}$ derart gibt, daß*

$$R = \{(x_1, \ldots, x_k, \vec{A}) : \mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_m y_m((x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m, \vec{A}) \in S)\} \ .$$

Satz 8.5 (Normalformtheorem): *Zu jeden $n, k \geq 1$ gibt es ein total-rekursives Prädikat (sog. relativiertes* TURING*-Prädikat) $T^{(\cdot)}_{k,n}$ derart, daß für $R \subseteq \mathbb{N}^k \times 2^{\mathbb{N}^n}$ gilt*

$$R \in \Sigma_n(\Pi_n) \leftrightarrow \exists z(R = \{(x_1, \ldots, x_k, \vec{A}) : \mathsf{Q}_1 y_1 \ldots \mathsf{Q}_n y_n(\neg)(T^{\vec{A}}_{k,n}(z, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)\}) ,$$

wobei $\mathsf{Q}_1 = \exists$ für Σ_n, $\mathsf{Q}_1 = \forall$ für Π_n und $\neg$ genau dann auftritt, wenn $\mathsf{Q}_n = \forall$.

Bemerkung: Hier kann der Beweis von Satz 7.19 übernommen werden.

Satz 8.6: *Ist eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k \times 2^{\mathbb{N}^n}$ durch einen prädikatenlogischen Ausdruck erster Stufe über rekursiven Prädikaten definierbar, so gibt es ein n derart, daß $R \in \Sigma_n \cup \Pi_n$.*

Bemerkung: Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k \times 2^{\mathbb{N}^n}$ ist genau dann arithmetisch, wenn sie sich durch einen prädikatenlogischen Ausdruck erster Stufe mit Hilfe arithmetischer Prädikate, die nur Individuenvariablen haben, sowie des zweistelligen Prädikats „$x \in X$“ darstellen läßt.

Die Hierarchie der Mengen von Mengen

Bezeichnung: $\Sigma^{(s)}_n := \{A : A \subseteq \mathbb{N} \wedge A \in \Sigma_n\}$
$\Pi^{(s)}_n := \{A : A \subseteq \mathbb{N} \wedge A \in \Pi_n\}$

Topologie im CANTORschen *Raum* $\{A : A \subseteq \mathbb{N}\}$

Metrik (sog. BAIREsche Metrik)

$$\rho(A, B) := \frac{1}{\inf\{n + 1 : n \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}}$$

(Offene) Kugeln im CANTORschen Raum

$$\mathcal{K}_\varepsilon(A) = \{B : \forall n(n \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \to \varepsilon > (n + 1)^{-1}\}$$

Folgerung 8.7: *Im* CANTORschen *Raum $(\{A : A \subseteq \mathbb{N}\}, \rho)$ gelten:*

(a) $\rho(A, C) \leq \max\{\rho(A, B), \rho(C, B)\}$

(b) $\mathcal{K}_\varepsilon(A) \cap \mathcal{K}_{\varepsilon'}(B) \neq \emptyset \wedge \varepsilon \geq \varepsilon' \to \mathcal{K}_\varepsilon(A) \supseteq \mathcal{K}_{\varepsilon'}(B)$

Offene Mengen im CANTORschen Raum sind beliebige Vereinigungen von Kugeln.
Die Komplemente offener Mengen sind *abgeschlossen*. Eine Menge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, heißt *offen-abgeschlossenen*.

Lemma 8.8: *Die Menge der rekursiven Teilmengen von $2^{\mathbb{N}} = \{A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ ist gleich der Menge der offen-abgeschlossenen Teilmengen von $2^{\mathbb{N}}$.*

Lemma 8.9: *Alle Mengen aus $\Sigma^{(s)}_1$ sind offen, und alle Mengen aus $\Pi^{(s)}_1$ sind abgeschlossen.*

Beispiel: Die Menge $\{A : A \text{ ist endlich}\}$ ist in $\Sigma_2^{(s)} \setminus (\Sigma_1^{(s)} \cup \Pi_1^{(s)})$

Lemma 8.9: *Alle Mengen aus $\Pi_2^{(s)}$ sind abzählbare Durchschnitte offener Mengen (sog. $\mathbf{G}_\delta$-Mengen), und alle Mengen aus $\Sigma_2^{(s)}$ sind abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sog. $\mathbf{F}_\sigma$-Mengen).*

Satz 8.10: *Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ und es seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A &:= \{B : \exists k(k \in A \wedge k \in B \wedge (\forall m < k)(m \notin B))\} \text{ sowie} \\ \mathcal{P}_A &:= \{B : B = \emptyset \vee \exists k(k \in A \wedge B = \{k\})\} . \end{aligned}$$

Dann gelten für $n \geq 1$ die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} A \in \Sigma_n &\leftrightarrow \mathcal{S}_A \in \Sigma_n^{(s)} \text{ und} \\ A \in \Pi_n &\leftrightarrow \mathcal{P}_A \in \Pi_n^{(s)} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Mengen $\mathcal{S}_A$ sind offen, und die Mengen $\mathcal{P}_A$ sind abgeschlossen.

Satz 8.11 (Hierarchiesatz für Mengen von Mengen):
Es gilt $\Sigma_n^{(s)} \cup \Pi_n^{(s)} \subset \Sigma_{n+1}^{(s)} \cap \Pi_{n+1}^{(s)}$ für $n \geq 1$.

A Übungsaufgaben

Analog zur Klasse $\mathcal{PR}$ definieren wir die Klasse $\mathcal{E}^0$ aller Funktionen, die sich aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}^0$ durch Substitution und beschränkte primitive Rekursion erzeugen lassen, d.h. $\mathcal{E}^0$ ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{A}_i^0$, wobei $\mathcal{A}_0^0 := \mathcal{A}^0$ und

$$\mathcal{A}_{i+1}^0 := \mathcal{A}_i^0 \cup \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^0\} \cup \{\mathbf{BR}(g, h; b) : g, h, b \in \mathcal{A}_i^0\}.$$

($\mathcal{E}^0$ ist die nullte Klasse der sog. *Grzegorczyk*-Hierarchie.)

Aufgabe 1.1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß $\mathcal{E}^0$ die folgenden arithmetischen Funktionen enthält:

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x \dot{-} 1 && (1) \\ f_2(x, y) &:= x \dot{-} y && (2) \\ f_3(x, y) &:= (1 \dot{-} x) \cdot y && (3) \\ f_4(x, y) &:= (1 \dot{-} x) + y && (4) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2: (4 Punkte)

Ist $f \in \mathcal{E}^0$, so sind auch die beschränkten Summen und Produkte

$$\sigma_f(x) := \sum_{t \leq x} \big(1 \dot{-} f(t)\big) \quad \text{bzw.} \quad \pi_f(x) := \prod_{t \leq x} \big(1 \dot{-} f(t)\big) \quad \text{in } \mathcal{E}^0.$$

Aufgabe 1.3: (3 Punkte)

Ist $f \in \mathcal{E}^0$, so ist auch die beschränkte Minimumbildung $(\mu t \leq x)[f(t) = 0]$ in $\mathcal{E}^0$.

Aufgabe 1.4: (3 Punkte)

Für jede m-stellige Funktion $f \in \mathcal{E}^0$ gibt es natürliche Zahlen $k \in \{1, \ldots, m\}$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $\forall x_1 \ldots \forall x_m (f(x_1, \ldots, x_m) \leq x_k + n)$ gilt.

Aufgabe 1.5: (2 Punkte)

Geben Sie mindestens vier primitiv-rekursive Funktionen an, welche nicht in $\mathcal{E}^0$ liegen.

Aufgabe 1.6: (3 Punkte)

Für jede Funktion $f \in \mathcal{E}^0$ ist auch $f'(x, y) := x \dot{-} \sum_{t \leq y} f(t) \in \mathcal{E}^0$.

Aufgabe 2.1: (4 Punkte)

Es seien $f(x, y) := x^y$, sowie $\psi_1 := \mathbf{S}(f; I_3^3, I_1^3)$ und $\psi_2 := \mathbf{S}(f; I_1^3, I_3^3)$. Bestimmen Sie die Funktionen: $g_1 := \mathbf{R}(I_1^1, \psi_1)$ und $g_2 := \mathbf{R}(I_1^1, \psi_2)$.

Aufgabe 2.2: (6 Punkte)

Welche der in den Beispielen der Vorlesung eingeführten Funktionen *quot, rest, prim, nd, p, len* und *exp* gehören zur Klasse $\mathcal{E}^0$?

Aufgabe 2.3: (2 Punkte)

Es sei $\mathcal{L}^0$ die Klasse aller **LOOP**-berechenbaren Funktionen, für welche es ein **LOOP**-Programm $\mathbb{P}$ ohne (**LOOP** ... **END**)-Anweisung gibt, das f berechnet. Man zeige, daß f genau dann in $\mathcal{L}^0$ liegt, wenn

$$\exists i \exists m \forall x_1 \ldots \forall x_k (f(x_1, \ldots, x_k) = x_i + m \vee f(x_1, \ldots, x_k) = m) \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 2.4: (4 Punkte)

Schreiben Sie **LOOP**-Programme für die Funktionen aus den Aufgaben 1.1 und 2.2.

Wissenswertes über Primzahlen

Es seien p_i die i-te Primzahl ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$) und $\pi(x) := \max\{i : p_i \leq x\}$. Dann gelten[1]*:*

$$n \cdot (\ln(n \cdot \ln n) - \tfrac{3}{2}) < \ p_n \ < n \cdot (\ln(n \cdot \ln n) - \tfrac{1}{2}) \quad \textit{für } n \geq 20 \quad \textit{und}$$

$$\frac{x}{\ln x - 1/2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 3/2} \qquad \textit{für } x \geq 67\ .$$

Aufgabe 3.1: (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob es möglich ist, für LOOP-Programme eine Anweisung der Form **IF** $X \neq 0$ **EXIT**, welche ein bedingtes Verlassen der Schleife bewirkt, zuzulassen, ohne daß sich die Klasse der berechenbaren Funktionen dabei vergrößert.

[1] nach: J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, *Approximal Formulas for Some Functions of Prime Numbers.* Ill. Journ. Math. **6** (1962), 64 – 94.

Aufgabe 3.2: (2 Punkte)

Überlegen Sie sich eine CANTOR-Numerierung c_{bin}, die selbst und deren Umkehrfunktionen ℓ_{bin} und r_{bin} sowohl arithmetisch als auch besonders im Falle binärer Zahlendarstellung besonders einfach berechenbar sind.

Aufgabe 3.3: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die einfache Iteration $f_i^{\mathcal{I}}$ folgender Funktionen:

3.3.1 $f_1(x) := a \cdot x + b$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

3.3.2 $f_2(x) := (1 \dot{-} x) + 2x$

3.3.3 $f_3(x) := 1 + \lfloor x/2 \rfloor$.

Analog zur Klasse $\mathcal{E}^0$ definieren wir die erste und zweite Klasse $\mathcal{E}^1$ bzw. $\mathcal{E}^2$ der sogenannten *Grzegorczyk*-Hierarchie als die Klassen aller Funktionen, die sich aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0$ und den Funktionen $E_1(x, y) := x + y$ bzw. $E_2(x) := x^2 + 2$ durch Substitution und beschränkte primitive Rekursion erzeugen lassen, d.h. $\mathcal{E}^j$ $(j = 1, 2)$ ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{A}_i^j$, wobei $\mathcal{A}_0^j := \mathcal{A}^0 \cup \{E_i : i \leq j\}$ und

$$\mathcal{A}_{i+1}^j := \mathcal{A}_i^j \cup \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^j\} \cup \{\mathbf{BR}(g, h; b) : g, h, b \in \mathcal{A}_i^j\}.$$

Aufgabe 3.4: (5 Punkte)

3.4.1 Zeigen Sie, daß es für $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{E}^1$ Konstanten $c_1, \ldots, c_{k+1}$ gibt, so daß $\forall x_1 \ldots \forall x_k (f(x_1, \ldots, x_k) \leq c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_k \cdot x_k + c_{k+1})$ gilt.

3.4.2 Beweisen Sie, daß für jedes $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{E}^2$ ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\forall x_1 \ldots \forall x_k (f(x_1, \ldots, x_k) \leq p(x_1, \ldots, x_k))$ existiert.

3.4.3 Zeigen Sie die echte Inklusion $\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2$.

Aufgabe 4.1: (3 Punkte)

Weisen Sie nach, daß die Klassen $\mathcal{L}_i$ der **LOOP**-Hierarchie eine echt aufsteigende Kette bilden.
Hinweis: *Zeigen Sie* u.a. $t_{i+1}(x + k) > t_i^k(x + k)$ *für* $x \geq k$.

Aufgabe 4.2: (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß keine CANTOR-Numerierung $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in der GRZEGORCZYK-Klasse $\mathcal{E}^1$ liegt, und prüfen Sie nach, ob die in der Vorlesung angegebenen Numerierungen $c_1(x, y) := \lfloor \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \rfloor + x = x + \sum_{t \leq x+y} t$ bzw. $c_2(x, y) := \left(\lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor + y \right)^2 + x$ tatsächlich schon in $\mathcal{E}^2$ liegen.

Aufgabe 4.3: (6 Punkte)

In welcher GRZEGORCZYK-Klasse $\mathcal{E}^i$ liegen die entsprechenden Umkehrfunktionen

$$\begin{array}{lcllcl} \ell_1(z) & := & z \dot{-} \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1} \dot{-} 1}{2} \right\rfloor & \text{und} & r_1(z) & := & \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1} \dot{-} 1}{2} \right\rfloor \dot{-} l_1(z) \quad \text{bzw.} \\ \ell_2(z) & := & \mathbf{q}(z) := z \dot{-} (\lfloor \sqrt{z} \rfloor)^2 & \text{und} & r_2(z) & := & \lfloor \sqrt{z} \rfloor \dot{-} \lfloor (\mathbf{q}(z)+1)/2 \rfloor \ . \end{array}$$

Hinweis: *Sie können* $\frac{(x+y+1)(x+y)}{2} = \sum_{t \leq x+y} t$ *bzw.* $(z+1)^2 = \sum_{t \leq z}(2t+1)$ *benutzen.*

Wir definieren weiter für $j \geq 3$ die Klassen $\mathcal{E}^j$ der sogenannten GRZEGORCZYK-Hierarchie als die Klassen aller Funktionen, die sich aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0$ und den Funktionen E_i, wobei $E_1(x,y) := x+y, E_2(x) := x^2+2$ bzw. $E_n(0) := 2$ und $E_n(x+1) := E_{n-1}(E_n(x))$ für $n \geq 3$ seien, durch Substitution und beschränkte primitive Rekursion erzeugen lassen; genauer gesagt, $\mathcal{E}^j$ ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{A}_i^j$, wobei $\mathcal{A}_0^j := \mathcal{A}^0 \cup \{E_1, E_j\}$ und

$$\mathcal{A}_{i+1}^j := \mathcal{A}_i^j \cup \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^j\} \cup \{\mathbf{BR}(g,h;b) : g,h,b \in \mathcal{A}_i^j\}.$$

Aufgabe 4.4: (4 Punkte)

Welche Klassen von primitiv rekursiven Funktionen werden definiert, wenn man für $j \geq 1$ in der angegebenen Definition der GRZEGORCZYK-Klassen die Funktionen E_j durch die aus der Vorlesung bekannten Funktionen t_{j-1} ersetzt?
Hinweis: *Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen*

$$\begin{array}{rcll} t_j^2(t_{j+1}(x)) & \leq & t_{j+1}(t_j(x)) & , \\ t_j(x) & \leq & E_{j+1}(x) & \text{für } j \geq 1 \text{ , und} \\ E_{j+1}(x) & \leq & t_j^2(x) & \text{für } j \geq 2 \ . \end{array}$$

Aufgabe 4.5: *(3 Punkte)*

In welcher Klasse der GRZEGORCZYK*-Hierarchie liegt das Ergebnis der primitiven Rekursion* $\mathbf{R}(g,h)$*, wenn* $g, h \in \mathcal{E}^i$ *?*

Die Klasse der *elementaren* (nach KALMÁR) *Funktionen* $\mathcal{E}$ ist die kleinste Klasse von Funktionen, die die konstanten Funktionen, Nachfolgerfunktion s, Summe, Produkt, modifizierte Differenz $x \dot{-} y$ enthält und abgeschlossen bezüglich Substitution, beschränkter Summation und beschränktem Produkt ist.

Aufgabe 4.6: *(3 Punkte)*

In welcher der GRZEGORCZYK*-Klassen* $\mathcal{E}^i$ *ist die Klasse* $\mathcal{E}$ *enthalten ?*

Aufgabe 4.7: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß die Klasse der elementaren Funktionen $\mathcal{E}$ *abgeschlossen ist bezüglich der beschränkten Minimumbildung* $(\mu t \leq x)(f(x_1, \ldots, x_m, x) = 0)$*.*

Aufgabe 5.1: *(4 Punkte)*

Es seien $\mathbb{P}$ *ein allgemeines Programm. Zeigen Sie, daß die Funktion* $\tau_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit*

$$\tau_{\mathbb{P}}(x,t) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x) \leq t, \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases}$$

rekursiv ist.

Aufgabe 5.2: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ (primitiv) rekursive Mengen. Zeigen Sie daß dann auch $A \cup B$, $A \cap B$, $\mathbb{N} \setminus A$ (primitiv) rekursiv sind. Weiter sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Ist dann auch $f^{-1}(A)$ (primitiv) rekursiv?

Aufgabe 5.3: *(4 Punkte)*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann rekursiv, wenn sowohl A als auch $\mathbb{N} \setminus A$ rekursiv aufzählbar sind. Beweisen Sie diesen Satz von E. POST.

Aufgabe 5.4: *(4 Punkte)*

Gibt es zu einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive aufzählende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f(x) \geq x$, so ist A (primitiv) rekursiv.

Aufgabe 6.1: *(4 Punkte)*

Wir betrachten die folgende Modifikation von allgemeinen Programmen:
Neben den üblichen Befehlen der LOOP-Programme sind bedingte Sprunganweisungen der Art **IF** $X \neq 0$ **GOTO** i *erlaubt, wobei aber die Marke i im Programm unterhalb (!) der bedingten Sprunganweisung stehen muß. Welche Funktionen werden von derartigen Programmen berechnet?*

Aufgabe 6.2: *(4 Punkte)*

Im Zusammenhang mit der KLEENEschen *Normalform für partiell-rekursive Funktionen $\varphi(x) := l(\mu y(g(x,y) = 0))$ ist es von Interesse, ob es möglich ist, auch noch die äußere Funktion l dabei wegzulassen. Wir betrachten zu diesem Zweck partiell-rekursive Funktionen der Form $\varphi(x) := \mu y(g(x,y) = 0)$, wobei g eine (primitiv) rekursive Funktion sei.*
Zeigen Sie den Satz von SKOLEM*: Eine Funktion φ ist genau dann in der oben angegebenen Form darstellbar, wenn ihr Graph $\mathbf{G}\varphi$ (primitiv) rekursiv ist.*

Aufgabe 6.3: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbare Mengen. Finden Sie rekursiv aufzählbare Mengen $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ derart, daß $A' \cap B' = \emptyset$ und $A' \cup B' = A \cup B$.

Aufgabe 6.4: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbare Mengen. Dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $\varphi(A)$ und $\varphi^{-1}(A)$ für beliebiges $\varphi \in \mathcal{P}$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 7.1: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß die durch die Doppelrekursion definierte Funktion

$$\begin{aligned} T(0,x) &= x+2 \\ T(n+1,0) &= 1 \\ T(n+1,x+1) &= T(n,T(n+1,x)) \end{aligned}$$

rekursiv, aber nicht primitiv-rekursiv ist.[2]
(Hinweis: Vergleichen Sie mit den Funktionen t_n.)

[2] Die klassische ACKERMANN-Funktion *Ack* ist durch die folgende Doppelrekursion definiert:

$$\begin{aligned} Ack(0,x) &= x+1 \\ Ack(n+1,0) &= Ack(n,1) \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2: *(4 Punkte)*

Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche rekursiv aufzählbare Menge. Dann gibt es eine eineindeutige rekursive A aufzählende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.3: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, und es sei $A' \subseteq \mathbb{N}$ eine rekursive Menge, welche der Bedingung $A \subseteq A' \subseteq A \cup B$ genüge. Zeigen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen A schon rekursiv ist.

Aufgabe 7.4: *(4 Punkte)*

Wir betrachten die folgende Definition von Funktionen durch Fallunterscheidung:
Es seien A_i $(i = 1, \ldots, k)$ paarweise disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, und es seien φ_i $(i = 1, \ldots, k)$ partiell-rekursive Funktionen. Wir setzen:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{, falls } x \in A_i, \\ \text{nicht definiert} & \text{, anderenfalls.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß φ ebenfalls partiell-rekursiv ist.

Aufgabe 8.1: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge eine unendliche rekursive Teilmenge enthält.

Aufgabe 8.2: *(4 Punkte)*

Ausgehend von einer CANTOR*-Numerierung $c(x, y)$ mit den Umkehrfunktionen ℓ und r definieren wir die* KLEENE*-Numerierung $[x, y] := c(\ell(x), c(r(x), y))$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der* KLEENE*-Numerierung:*

8.2.1 $c(x_0, c(x_1, x_2)) = [c(x_0, x_1), x_2]$.

8.2.2 $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ *ist eine bijektive rekursive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$. (Geben Sie auch die Umkehrfunktionen an.)*

Aufgabe 8.3: *(4 Punkte)*

Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\kappa_n = \chi_{\{n\}}$?
Hinweis: Weisen Sie die Existenz einer primitiv-rekursiven Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\kappa_{g(n)} = \chi_{\{g(n)\}}$ nach.

Aufgabe 8.4: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, ohne den Satz von RICE *zu benutzen, daß die Menge $M_{\overline{\emptyset}} := \{x : dom(\kappa_x) \neq \emptyset\}$ rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv ist.*

Aufgabe 9.1: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß eine rekursiv aufzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ schon dann rekursiv ist, falls $A \leq_m (\mathbb{N} \setminus A)$ gilt.
Kann man dabei auf die Voraussetzung "A ist rekursiv aufzählbar" verzichten?
`Hinweis: Benutzen Sie den` Satz von POST`.`

$$Ack(n+1, x+1) \quad = \quad Ack(n, Ack(n+1, x)) \; .$$

Aufgabe 9.2: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Ist $A \cup B = \mathbb{N}$ und $A \cap B \neq \emptyset$, so gilt $A \leq_m A \cap B$.
`Hinweis: Sie dürfen hierbei die` Aufgabe 6.3 `verwenden.`

Analog zur m-Reduktion führen wir den Begriff der *1-Reduktion* ein:
Es gelte $A \leq_1 B$, falls es eine *eineindeutige* rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, für welche $A = f^{-1}(B)$ erfüllt ist.

Aufgabe 9.3: *(2 Punkte)*

Zeigen Sie die folgenden einfachen Beziehungen zwischen $\leq_1$ und $\leq_m$:

(a) $A \leq_1 c(A \times \mathbb{N})$

(b) $c(A \times \mathbb{N}) \leq_m A$

Wir nennen eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ *Zylinder*, falls $c(A \times \mathbb{N}) \leq_1 A$ gilt.

Aufgabe 9.4: *(2 Punkte)*

Weisen Sie die folgenden Eigenschaften von Zylindern nach:

(a) Eine Menge A ist genau dann ein Zylinder, falls aus $B \leq_m A$ stets $B \leq_1 A$ folgt.

(b) Es gilt genau dann $A \leq_m B$, wenn $c(A \times \mathbb{N}) \leq_1 c(B \times \mathbb{N})$.

Aufgabe 9.5: *(3 Punkte)*

Es seien A, B nichtleere Mengen mit nichtleerem Komplement, deren symmetrische Differenz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ rekursiv ist. Gilt dann $A \leq_m B \wedge B \leq_m A$?

Aufgabe 10.1: *(4 Punkte)*

Einfache *Mengen sind keine Zylinder.*

Aufgabe 10.2: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ einfach *und $C \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Dann sind $A \cap B$ sowie $A \oplus B$ ebenfalls* einfach, *während $A \cup C$* einfach *oder Komplement einer endlichen Menge* (co-endlich) *ist.*
Was können Sie über $A \cap C$ aussagen, falls C unendlich ist?

Aufgabe 10.3: *(4 Punkte)*

Für welche rekursiven bzw. rekursiv aufzählbaren Mengen B gilt $B \leq_1 A$, falls A einfach *ist?*

Aufgabe 11.1: *(4 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$, B produktiv und A rekursiv aufzählbar. Dann gelten:

1. *Ist $A \subseteq B$, so ist auch $B \setminus A$ produktiv.*
2. *Ist $A \supseteq B$, so ist auch $B \cup (\mathbb{N} \setminus A)$ produktiv.*

Zwei Mengen $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{N}$ heißen *rekursiv trennbar* falls es eine rekursive Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $B_1 \subseteq A$ und $B_2 \cap A = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 11.2: *(4 Punkte)*

Es seien $B, C \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und B sogar einfach. Gilt dann neben der notwendigen Voraussetzung $A \cap C = \emptyset$ noch $A \leq_m B$, so sind A und C rekursiv trennbar.

Aufgabe 11.3: *(4 Punkte)*

Es seien $B, C \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und C kreativ. Dann ist auch $c(B \times C)$ kreativ.

Aufgabe 11.4: *(4 Punkte)*

Es sei A eine rekursiv aufzählbare Menge. Zeigen Sie, daß die Menge

$$M_A := \{i : A \subseteq dom(\kappa_i)\}$$

arithmetisch ist. Geben Sie eine möglichst genaue Einordnung von M_A in die arithmetische Hierarchie an und überlegen Sie, ob sich diese in speziellen Fällen noch verbessern läßt.

Aufgabe 12.1: *(4 Punkte)*

Es seien $A \in \Sigma_n$ und $B \in \Pi_n$, wobei $(n > 0)$. Dann liegen sowohl $A \oplus B$ als auch $c(A \times B)$ im Booleschen Abschluß der Klasse Σ_n. Geben Sie möglichst einfache Boolesche Kombinationen für $A \oplus B$ und $c(A \times B)$ mit Mengen aus Σ_n an.

Wir setzen $W_i := dom(\kappa_i)$. Weiter sei wie in der Vorlesung $D_u = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\} \iff u = \sum_{m=1}^{k} 2^{\ell_m}$.

Aufgabe 12.2: *(10 Punkte)*

In welchen Klassen der arithmetischen Hierarchie liegen die folgenden Mengen:

$$B_1 := \{i : \mathbb{N} \setminus W_i \text{ ist endlich}\}\ , \tag{5}$$
$$B_2 := \{i : W_i = \mathbb{N}\}\ , \tag{6}$$
$$B_3 := \{i : W_i \neq \emptyset\}\ , \text{und} \tag{7}$$
$$B_4 := \{i : W_i \text{ ist einfach}\}\ . \tag{8}$$

Aufgabe 12.3: *(4 Punkte)*

Es seien $(\forall x \leq f(y))(P)$ und $(\exists x \leq f(y))(P)$ Abkürzungen für $\forall x(x \leq f(y) \to P)$ bzw. $\exists x(x \leq f(y) \wedge P)$. Ist f eine rekursive Funktion und P ein arithmetisches Prädikat, so können die Quantoren $(\forall x \leq f(y))$ und $(\exists x \leq f(y))$ wie die entsprechenden beschränkten Quantoren behandelt werden.

Aufgabe 13.1: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie direkt, daß die charakteristische Funktion χ_A von $A \subseteq \mathbb{N}$ auch A-berechenbar ist.

Eine Menge A heißt TURING-*reduzierbar* auf B (kurz: $A \leq_T B$), falls A rekursiv in B ist, und wir schreiben $A \equiv_T B$ für $A \leq_T B \wedge B \leq_T A$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *retrassierbar* wenn es eine partiell-rekursive (retrassierende) Funktion ψ mit den folgenden Eigenschaften gibt.

(a) $dom(\psi) \supseteq A$,

(b) $\psi(\min A) = \min A$, und

(c) $\forall n(n \in A \setminus \{\min A\} \to \psi(n) = \max\{m : m \in A \wedge m < n\})$

Aufgabe 13.2: *(4 Punkte)*

Eine retrassierbare Teilmenge A von $\mathbb{N}$ ist entweder rekursiv oder immun.

Aufgabe 13.3: *(4 Punkte)*

Ist $B \subseteq \mathbb{N}$ retrassierbar und A eine unendliche Teilmenge von B, so gilt $B \leq_T A$.

Aufgabe 13.4: *(2 Punkte)*

Zeigen Sie, daß es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, die für überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ retrassierend ist.[3]

Aufgabe 13.5: *(3 Punkte)*

Wir setzen $A^* := \{x : x \in \mathbb{N} \wedge \exists u \exists v(c(u,v) \in D_x \wedge D_u \subseteq A \wedge D_v \cap A = \emptyset)\}$ für $A \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $A \equiv_T A^*$ gilt.

Aufgabe 14.1: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie das s-m-n-Theorem (den Iterationssatz) für die effektive Numerierung der Funktionenfamilien[4] $\left(\varphi_i^A\right)_{i\in\mathbb{N}}$*:*

Für je zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine rekursive Funktion $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ derart, daß für alle $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$ und $\vec{z} \in \mathbb{N}^n$ die Gleichung

$$\lambda\vec{z}[\,\varphi_i^A(\vec{x},\vec{z})] = \varphi^A_{s_n^m(i,\vec{x})}(\vec{z})$$

erfüllt ist.
Lösung: $s_n^m(i,x_1,\ldots,x_m) = [\varrho(i),x_1,\ldots,x_m]$

Aufgabe 14.2: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß der Graph einer A'-berechenbaren Funktion in der Klasse Σ_2^A liegt.

Aufgabe 14.3: *(4 Punkte)*

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann in $\Sigma_2 \cap \Pi_2$, wenn es eine rekursive Funktion $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\chi_B(x) = \lim_{i\to\infty} g(x,i) \text{ gibt.}$$

B Weitere Aufgaben

1 *Welche der Funktionen $quot(x,y), rest(x,y), r'(x), p(y), exp(x,y)$ sind elementar?*

2 *Sind die in Abschnitt 1 definierten* CANTOR*-Numerierungen bzw. die entsprechenden Umkehrfunktionen*

$$\begin{aligned} c_1(x,y) &:= x + \sum_{t=0}^{x+y} t = \left(\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\right) + x \\ \ell_1(z) &:= z \dot{-} \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}\dot{-}1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

[3] *Hinweis*: Ordnen Sie $\mathbb{N}$ in Form eines unendlichen binären Baumes an.
[4] Die Stelligkeit der Funktionen ergibt sich hierbei aus dem Kontext.

$$
\begin{aligned}
r_1(z) &:= \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1} \dot{-} 1}{2} \right\rfloor \dot{-} l_1(z) \\
c_2(x,y) &:= \left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + y \right)^2 + x \\
\ell_2(z) &:= \mathbf{q}(z) := z \dot{-} \lfloor \sqrt{z} \rfloor^2 \\
r_2(z) &:= \lfloor \sqrt{z} \rfloor \dot{-} \lfloor (\mathbf{q}(z)+1)/2 \rfloor
\end{aligned}
$$

elementare Funktionen?

3 Weisen Sie nach, daß für $f \in \mathcal{E}$ auch die Funktion

$$\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_m, y) := \prod_{i \le y} p(i)^{f(x_1,\ldots,x_m,i)}$$

elementar ist.

4 Nutzen Sie die bisherigen Überlegungen aus, um zu zeigen, daß $\mathcal{E}$ bezüglich beschränkter primitiver Rekursion abgeschlossen ist.

Analog zu Operationen über partiell-rekursiven Funktionen nennen wir eine (zweistellige) Operation **op** auf rekursiv aufzählbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$ *effektiv*, falls es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, für die $dom(\kappa_i)$ **op** $dom(\kappa_j) = dom(\kappa_{f(i,j)})$ gilt.

5.1 Zeigen Sie daß die Operationen $\cap$, $\cup$ und $c(\cdot\ ,\ \cdot)$ effektiv sind.

5.2 Gilt dies auch für die durch $\kappa_i(dom(\kappa_j))$ bzw. $\kappa_i^{-1}(dom(\kappa_j))$ definierten Operationen?

Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ *immun*, falls A unendlich ist, aber keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält.[5]

6 Gibt es m-vollständige Mengen mit immunem Komplement?

7 Ist die Menge $\{i : dom(\kappa_i) \neq \emptyset\}$ ebenfalls (wie ihr Komplement) produktiv?

8 Zeigen Sie, auf nichtkonstruktivem Wege natürlich, daß es $2^{\aleph_0}$ (d.h. überabzählbar viele) immune Mengen mit immunem Komplement gibt.
Hinweis: Wählen Sie auf geschickte Weise aus jeder unendlichen rekursiv aufzählbaren Menge zwei Elemente aus und verwenden Sie diese weiter.

9 Verbessern Sie die Lösung des Beispiels 6.3 der Vorlesung so, daß Sie die Aussage

$$\{i : dom(\kappa_i^{(1)}) \text{ ist endlich}\} \in \Sigma_2$$

erhalten. Ist die Menge $\{i : dom(\kappa_i^{(1)})$ ist endlich$\}$ immun?

[5] Begreifen wir die Eigenschaft, rekursiv aufzählbar zu sein, als eine Krankheit, so sind immune Mengen in höchstem Maße gegen diese Seuche gefeit.