Integralgeometrie, digitale Konturen und Umfangsmessung

K.Voss
FSU Jena / Digitale Bildverarbeitung

29. April 1999

Zusammenfassung

Während für die erwartungstreue Schätzung des Fächeninhalts von Figuren der euklidischen Ebene mittels Gitterdigitalisierung durch die Integralgeometrie eine eindeutige Lösung bereitgestellt wird, ist das für die Schätzung des Umfangs nicht der Fall. Zwar zeigt die Integralgeometrie, daß die Anzahl der Schnittpunkte einer frei beweglichen Geraden mit der Randlinie einer Figur ein Maß für die Länge des Umfangs dieser Figur ist. Aber im Gegensatz zur Punktdigitalisierung der Flächenmessung existieren keine Abtaster, die solche Schnittpunkte zu erfassen gestatten.

Im vorliegenden Bericht werden die in der Literatur vorhandenen Ergebnisse zur Umfangsbestimmung bei digitalen Objekten dargestellt und das Verfahren der Kontursegmentierung näher untersucht. Es zeigt sich, daß man damit zu praktisch zuverlässigen Resultaten gelangt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Problemstellung 2
- 1.2 Geraden-Approximation 3
- 1.3 Schätzung von Flächen und Längen 5

2 Integralgeometrie **7**
- 2.1 Konvexe planare Figuren 7
- 2.2 Anwendung der Stützfunktion 10

3 Kontursegmentierung **13**
- 3.1 Umfang kreisförmiger Objekte 13
- 3.2 Umfang kreisförmiger Löcher 16

4 Approximation des Konturumfangs **18**
4.1 Innen- und Außenkonturen 18
4.2 Statistische Optimierung 20

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Bestimmung der Länge einer diskreten Kontur ist bereits oft in der Bildverarbeitung untersucht worden [1, 4, 5, 8, 10, 16, 19, 28, 29]. Es soll betont werden, daß die Längenmessung einer diskreten Kontur vor allem ein Schätzproblem ist, da wir nicht an der "Länge" der diskreten Kontur interessiert sind, sondern an der Länge des originalen (kontinuierlichen) Randes einer kompakten Figur der euklidischen Ebene. Einige oft angewendete Formeln nutzen die Anzahl n_0 und n_1 der geraden bzw. schrägen Konturschritte aus, um die Länge der Kontur zu schätzen. Vor allem sind die triviale Schätzung $L_{triv} \approx n_0 + n_1\sqrt{2}$ und die "ausgeglichene" Schätzung $L_{fit} \approx 0.948n_0 + 1.343n_1$ aus [5] bekannt. Doch kann eine beliebige Funktion von n_0 und n_1 prinzipiell keine sehr zuverlässigen Resultate liefern (siehe z.B. [27] und Abbildung 9).

Um diese Aussage belegen zu können, sollen einige numerische Überlegungen angestellt werden: In [5] wird die Länge eines diskreten Geradensegmentes von n Punkten (erzeugt durch die euklidische Gerade $y = \alpha x + e$) durch $f(\alpha, n) = n\sqrt{1+\alpha^2}$ angegeben. Da in [4] die Wahrscheinlichkeitsdichte von Geradensegmenten mit

$$p(\alpha) = \sqrt{2}\left(1+\alpha^2\right)^{-3/2}$$

angegeben wurde, findet man

$$\overline{L}(n) = \int_0^1 f(\alpha, n) \cdot p(\alpha) d\alpha = n \int_0^1 \sqrt{2}\left(1+\alpha^2\right)^{-1} d\alpha = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}n \approx 1.110\,7n$$

als mittlere Länge über alle möglichen durch α gegebenen Richtungen. Die Dispersion ist

$$
\begin{aligned}
(\Delta L(n))^2 &= \int_0^1 \left(\overline{L}(n) - f(\alpha, n)\right)^2 \cdot p(\alpha) d\alpha \\
&= n^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\pi\sqrt{2} - \sqrt{1+\alpha^2}\right)^2 \sqrt{2}\left(1+\alpha^2\right)^{-3/2} d\alpha \\
&= \left(-\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi^2 + \frac{1}{8}\pi^2 - \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) n^2 \approx 0.735\,43 n^2
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, daß die relative Standardabweichung der nach "Eichung" verbleibenden Fehler

$$
\delta L(n) = \frac{\sqrt{\Delta L(n)}}{\overline{L}(n)} \approx \frac{\sqrt{0.735\,43}}{1.1107} \approx 0.772\,1
$$

ist, d.h. daß dieser Fehler auch mit wachsenden Werten von n nicht verschwindet.

In [5] ist gezeigt, daß selbst bei bester Schätzung eine Punktdistanz von 11 Punkten auf der Kontur notwendig ist, um den verbleibenden mittleren Fehler unter 1% zu drücken. Mit anderen Worten: Selbst wenn man die Anzahlen der verschiedenen Konturschritt-Kombinationen mit n_{07}, n_{00}, n_{01}, n_{02}, n_{03}, n_{04}, n_{17}, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14} in ihren verschiedenen Orientierungen (oder noch längere Kombinationen der Konturschritte) berücksichtigt, kann man keine erwartungstreue Schätzung der Konturlänge erhalten.

1.2 Geraden-Approximation

Wir werden deshalb in der vorliegenden Arbeit nicht mit fester Punktdistanz arbeiten, sondern zuerst eine optimale Geraden-Approximation der Kontur durchführen und danach erst die Konturlänge schätzen. Einen ähnlichen Zugang (über sogenannte "euklidische" Wege) findet man in [1, 27, 28]. Aber auch die Arbeiten von Sloboda et al. über die die Länge von kürzesten polygonalen Jordankurven reihen sich in dieses Gebiet ein ([14, 24, 25]). Die Grundidee dabei ist stets, daß man die diskreten Konturpunkte als "Rohmaterial" verwendet, um unter gewissen Optimierungskriterien eine Geraden-Approximation der Kontur zu finden. Die Eckpunkte des so entstehenden Polygons sind entweder (nicht notwendig ganzzahlige) Punkte der euklidischen Ebene ([1, 27, 28], diese Arbeit) oder aber ausgewählte (ganzzahlige) Punkte der Kontur ([14, 24, 25], diese Arbeit).

Die zu lösenden Probleme sind dabei folgende:

- Wahl eines geeigneten Optimierungskriteriums zur Bestimmung der Eckpunkte des approximierenden Polygons.

- Korrektur der systematischen Fehler der Länge des approximierenden Polygons (Unterscheidung von offenen und geschlossenen Konturen, von Objektkonturen und Lochkonturen).

- Minimierung der zufälligen Fehler der Länge des approximierenden Polygons über eine Vielzahl unterschiedlicher für die Praxis interessanter Konturformen (Unterscheidung von "glatten" Konturen wie bei elliptischen Objekten und von "polygonalen" Konturen wie bei rechteckigen Objekten).

Wenn die Punkte einer diskreten Punktfolge $(p_1, ..., p_n)$ sämtlich die gleichen Werte der Y-Koordinaten aufweisen, so kann man die Länge $\overline{p_1 p_n}$ der Punktfolge durch die Summe $\sum_{i=1}^{n-1} \overline{p_i p_{i+1}}$ exakt darstellen. Das gilt genauso für "senkrechte" Punktfolgen und für Punktfolgen, die in 45^0- oder 135^0- Richtung verlaufen. Aber für alle anderen Richtungen einer diskreten Punktfolge, die das digitale Abbild eines Geradensegmentes sein soll, findet man

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{p_i p_{i+1}} > \overline{p_1 p_n}$$

Bei der Umfangbestimmung von Gitterpunkt-Polygonen bleibt der durch diese Ungleichung verursachte Fehler relativ klein, wenn man nur die "wesentlichen Eckpunkte" $q_1, q_2, ..., q_m$ des jeweiligen Polygons verwendet und $U \approx \sum_{j=1}^{m-1} \overline{q_j q_{j+1}}$ berechnet. Aus diesem Grunde wird die Länge von digitalen Kurven oder der Umfang von digitalen Objekten zumeist auch durch die seit vielen Jahren eingesetzte Geraden-Approximation bestimmt (siehe beispielsweise [13]). So wird in [12] in Abhängigkeit von den zu approximierenden digitalen Objekten zunächst eine natürliche Zahl m gewählt und dann jeweils nur jeden m-ten Punkt der Kontur berücksichtigt. Oder man wählt für eine Punktfolge $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ein $\varepsilon > 0$ so, daß die Punkte p_i und p_j genau dann *verbindbar* heißen, falls jeder der Punkte $p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_{j-1}$ vom Geradensegment $\widehat{p_i p_j}$ einen euklidischen Abstand $d \sqsupset \varepsilon$ besitzt. Für die Punktfolge P ist nun eine Teilfolge $Q = (q_1, q_2, ..., q_m)$ mit $q_1 = p_1$ und $q_m = p_n$ gesucht, so daß die Punkte q_k und q_{k+1} verbindbar sind. In [20] wurde für diese Aufgabe ein $O(n^2)$-Algorithmus angegeben, und in [22] wurde eine wesentliche Verbesserung durch einen $O(n)$-Algorithmus beschrieben, wobei jedoch relativ umfangreiche analytische Funktionen zu berechnen sind.

Das in [15] dargelegte Verfahren zur Polygon-Approximation kommt dagegen ohne die Verwendung von analytischen Funktionen aus, indem im On-line-Verfahren für die betrachtete Punktfolge konvexe Hüllen berechnet werden, deren jeweils minimale Breite bestimmt wird. Weitere Arbeiten

zur Polygon-Approximation sind in [3, 7, 17] zu finden. Einen etwas anderen Zugang zur Polygon-Approximation stellt die Betrachtung relativ großer Teilfolgen bei der Kettencode-Beschreibung diskreter Punktfolgen dar (siehe [9, 23]). Durch die Konturapproximation mittels Geradensegmenten erhält man stabile und wenig aufwendige Objektbeschreibungen (siehe [18, 21]). Bei diesen Verfahren wird die Methode der kleinsten Quadrate benutzt und ein approximierendes Geradensegment minimiert die Summe der quadratischen Abweichungen einer Untermenge der Konturpunkte von diesem Segment. In [11] wurde ein Algorithmus beschrieben, der ausgehend von der Kettencodedarstellung einer digitalen Kurve in linearer Zeit entscheidet, ob eine Teilfolge von Konturpunkten ein digitales Geradensegment ist oder nicht. Dieser Algorithmus wurde in [2] dahingehend erweitert, daß die Entscheidung bereits in einem einzigen Konturdurchlauf, d.h. on-line, getroffen werden kann. Eine rekursive Geraden-Approximation ist in Arbeiten wie beispielsweise [6, 18, 26, 30] beschrieben.

1.3 Schätzung von Flächen und Längen

Im vorliegenden Artikel soll nun das Problem untersucht werden, wie man den Umfang von Figuren der euklidischen Ebene abschätzen kann, wenn diese Figuren nur durch ihr digitales Abbild gegeben sind. Für den Fall der Flächenbestimmung liefert die Integralgeometrie eine eindeutige Lösung: Man positioniert die Figur F mit ihrem Schwerpunkt gleichmäßig verteilt im Einheitsquadrat und orientiert sie gleichmäßig verteilt über den ganzen Winkelbereich von 0 bis 360^0. Für jede dieser Lagen (x, y, φ) zählt man die Gitterpunkte, die von der Figur bedeckt werden. Diese Anzahl sei $N(x, y, \varphi)$. Dann stimmt der Erwartungswert $\mathsf{E}[N(x, y, \varphi)]$ asymptotisch erwartungstreu mit der zu bestimmenden Fläche von F überein.

Auch für die Umfangsbestimmung stellt die Integralgeometrie eine Lösung bereit: Man schließt die Figur F in eine größere Figur G (Kreis oder Quadrat usw.) ein, deren Umfang U_G bekannt ist. Anschließend positioniert man gleichmäßig verteilte Geraden über F und G ("gleichmäßig verteilt" bedeutet, daß die in der Form $x \cos\varphi + y \sin\varphi = p$ gegebenen Geraden bezüglich p und φ gleichverteilt sind). Für alle Geraden, die G treffen, bestimmt man nun die Gesamtanzahl N_G der Schnittpunkte zwischen den Geraden und dem Rand ∂G der Figur G sowie die Gesamtanzahl N_F der Schnittpunkte zwischen den Geraden und dem Rand ∂F der Figur F. Dann gilt asymptotisch erwartungstreu

$$\frac{U_F}{U_G} = \frac{\mathsf{E}[N_F]}{\mathsf{E}[N_G]}$$

Leider gibt es in der digitalen Bildverarbeitung kein Abtastgerät, das die Schnittpunktzahl mit Kurven zu erfassen gestattet. Wir können nur -

zumindest theoretisch - eine Abtastung im Punktgitter realisieren, so daß lediglich eine endliche Punktmenge als digitales Abbild einer Figur F für alle weiteren Untersuchungen zur Verfügung steht. In der folgenden Abbildung 1 ist dieses Prinzip der Punktabtastung demonstriert. Die Aufgabe besteht nun darin, allein anhand der Randpunkte des digitalen Abbildes eine Schätzung des Umfangs der Originalfigur vorzunehmen.

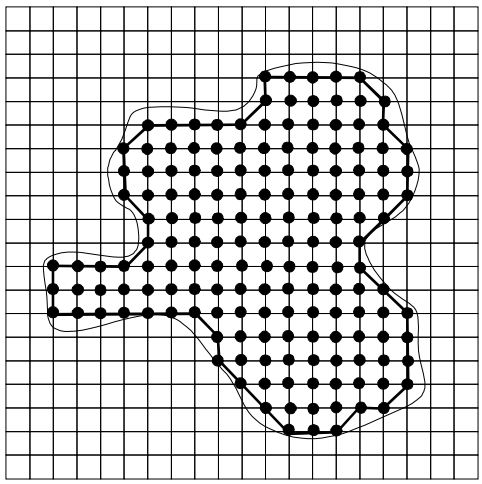

Abbildung 1: Digitalisiertes Abbild F^* einer Figur F, Kontur von F^* und Rand ∂F von F

Die Geraden-Approximation der Kontur liefert einen zu kleinen Umfang, so daß man Korrekturen vornehmen muß. Andererseits muß man sicherlich voraussetzen, daß der Rand ∂F der Figur "hinreichend glatt" ist, weil sonst der Fehler beliebig groß werden kann (z.B. durch eine vielfältig gekräuselte Randlinie ∂F innerhalb eines Rasterquadrates). Wir werden deshalb die Geraden-Approximation auf verschiedenartige Randlinien anwenden und die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten studieren.

Die Struktur der vorliegenden Arbeit ist diesen einleitend aufgezeigten Problemen angepaßt. Zuerst werden einige grundlegende integralgeometrische Betrachtungen angestellt, weil sie die Basis für die Korrektur der systematischen und zufälligen Fehler der Geraden-Approximation liefern. Außerdem werden einige neue Ergebnisse über die Umfangbestimmung konvexer Figuren mittels umschreibender N-Ecke mitgeteilt.

Danach wird die Geraden-Approximation untersucht, die auf der aus [6, 18, 26, 30] bekannten rekursiven Methode der Konturs egmentierung mit Steuerparameter h basiert. Insbesondere wird dabei die von der Totalkrümmung der Kontur abhängige systematische Korrektur der Längenschätzung behandelt.

Schließlich werden im letzten Kapitel die zufälligen Fehler minimiert, die

wesentlich vom Konturtyp ("elliptisch" versus "polygonal") abhängen. Eine statistische Auswertung liefert dann den optimalen Steuerparameter $h \approx 0.9$ und die optimierte Schätzformel

$$\boxed{U_{est} = 0.999U_{seg} + 2.729T - 2.361\frac{N_{seg}}{\sqrt{U_{seg}}} + 2.4525}$$

für die Länge der Randlinie der digitalisierten Figur. Hierbei sind U_{seg} bzw. N_{seg} die Länge bzw. die Segmentanzahl des die Kontur approximierenden Polygons und T die Totalkrümmung ($+1$ für Objekte und -1 für Löcher) der (geschlossenen) Randlinie.

2 Integralgeometrie

2.1 Konvexe planare Figuren

Die Theorie der konvexen Figuren und konvexen Körper ist insbesondere deshalb ein besonders reizvolles mathematisches Gebiet, weil es in ihrem Rahmen möglich ist, aus wenigen anschaulichen Voraussetzungen heraus und mit wenigen grundlegenden Kenntnissen der Analysis und Geometrie eine Vielzahl interessanter und auch praktisch bedeutsamer Resultate herzuleiten.

Eine Gerade G wird als *Stützgerade* einer konvexen ebenen Figur K bezeichnet, wenn G Tangente an K ist. Sämtliche Stützgeraden von K bilden eine Kurvenschar, deren Enveloppe (Einhüllende) der Rand ∂K der konvexen Figur ist (siehe Abbildung 2). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit denken wir uns den Ursprung O eines Polarkoordinatensystems im Innern von K. Dann kann eine Gerade G durch ihre Normalenrichtung φ und ihren Abstand p vom Ursprung, den sogenannten *Stützabstand* bezüglich der Richtung φ, beschrieben werden:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p(\varphi) \tag{1}$$

In Formel (1) ist φ der Parameter der Schar der Stützgeraden, und die jeweilige *Stützfunktion* $p(\varphi)$ beschreibt den Rand der konvexen Figur.Wenn man die allgemeine Gleichung einer Kurvenschar nach dem Scharparameter differenziert, so erhält man die Möglichkeit, durch Elimination des Scharparameters die Gleichung der Enveloppe der Kurvenschar zu bestimmen. In unserem Fall folgt aus (1) und aus der nach φ differenzierten Gleichung

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{dp}{d\varphi} = p'(\varphi) \tag{2}$$

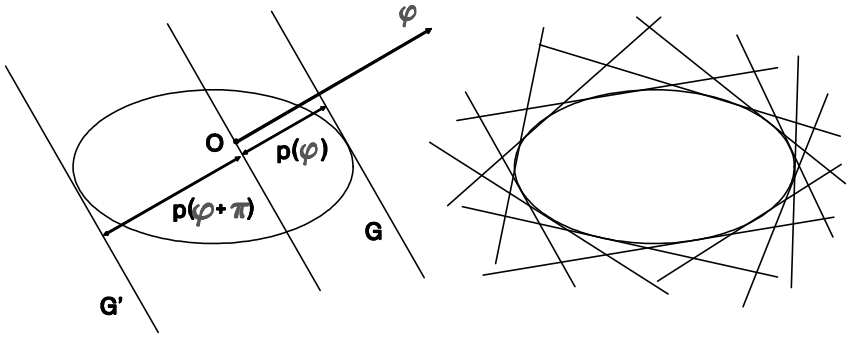

Abbildung 2: Stützgerade G und Enveloppe der Stützgeradenschar

sofort

$$\begin{aligned} x &= p\cos\varphi - p'\sin\varphi \\ y &= p\sin\varphi + p'\cos\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Da $p(\varphi)$ nur allgemein gegeben ist, kann man den Parameter φ aus diesen beiden Gleichungen nicht eliminieren. Aber (3) ist nichts anderes als die Parameterdarstellung der Enveloppe der Geradenschar (1) und damit die Parameterdarstellung des Randes ∂K der konvexen Figur K. Wenn sich der Winkel φ um einen kleinen Betrag $d\varphi$ ändert, so folgen aus (3) die differentiellen Änderungen von x und y:

$$\begin{aligned} dx &= -(p+p'')\sin\varphi \; d\varphi \\ dy &= +(p+p'')\cos\varphi \; d\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

Die Änderung der Bogenlänge

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist also durch die Formel

$$ds = (p+p'')d\varphi = \rho d\varphi \tag{5}$$

gegeben, wobei ρ der Krümmungsradius des Randes ∂K im Berührungspunkt mit der entsprechenden Tangente ist. Da weiter der Umfang U der Figur durch das Integral über die Bogenlänge gegeben wird, erhalten wir für konvexe Figuren

$$U = \int\limits_{\partial K} ds = \int\limits_0^{2\pi} (p+p'')d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} p\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \rho\,d\varphi \; . \tag{6}$$

Bei diesen Integrationen ist stets zu berücksichtigen, daß $p(\varphi)$ eine mit 2π periodische Funktion ist.

Betrachten wir nun die Breite b von K bezüglich einer bestimmten Richtung φ. Es gilt nun

$$b(\varphi) = p(\varphi) + p(\varphi + \pi)$$

Die mittlere Breite von K ist dann durch

$$\overline{b} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p(\varphi) + p(\varphi + \pi)] \, d\varphi = \frac{U}{\pi} \tag{7}$$

gegeben. Diese Formel ist einfach in ihrer Struktur und verblüffend in ihrer Aussage: Unabhängig davon, wie die konvexe Figur aussieht, ist die mittlere Breite b eindeutig durch den Umfang U bestimmt. Die Formel gilt ebenfalls für konvexe Figuren "mit Ecken" , d.h. für teilweise durch Strecken begrenzte konvexe Figuren und für konvexe Polygone.

Die Formel (7) kann auch wie folgt interpretiert werden: Die Anzahl $z(\varphi)$ der Geraden, die senkrecht zur Richtung φ verlaufen und dabei die gegebene Figur schneiden, ist proportional zur Breite $b(\varphi)$. Also ist die "Gesamtanzahl" Z_G aller dieser Geraden proportional dem Integral über $b(\varphi)$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$:

$$Z_G \sim \int_0^{\pi} b(\varphi) \; d\varphi = \pi \overline{b} = U \; . \tag{8}$$

Damit ist der Umfang U ein integralgeometrisches Maß für die Anzahl aller Geraden, die die konvexe Figur K schneiden. Wir können natürlich auch die "Anzahl" aller Schnittpunkte Z_S zwischen dem Rand ∂K einer konvexen Figur K und einer frei beweglichen Geraden G bestimmen, die einfach das Doppelte von Z_G ist. Aber wenn wir beliebige kompakte Figuren X betrachten, so kann der Durchschnitt $X \cap G$ von Figur und Geraden auch aus mehreren Segmenten bestehen. Jedes dieser Segmente besitzt zwei Endpunkte, die durch den Schnitt der Geraden mit dem Rand der Figur entstanden sind. In diesem Fall gilt dann mit $n(G)$ als "Anzahl der Schnittpunkte für die Gerade G"

$$Z_S(X) \sim \int_{X \cap G \neq \oslash} n(G) \; dG = 2U \tag{9}$$

Speziell ermöglicht (9) die experimentelle Bestimmung der Länge L_C einer komplizierten Kurve C. Dazu legen wir einfach einen Kreis vom Radius

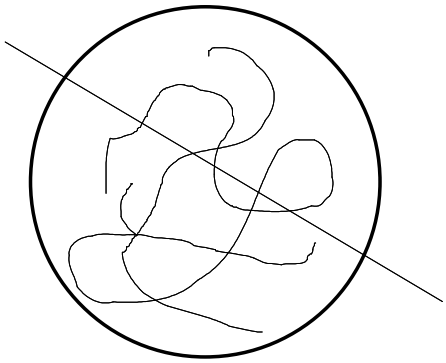

Abbildung 3: Zur experimentellen Bestimmung der Länge einer Kurve C

r so um die Kurve, daß sie vollständig vom Kreis eingeschlossen ist (siehe Abbildung 3).

Werfen wir jetzt N_G "unendlich lange" Geraden zufällig auf die Zeichnung und zählen alle $N_K = 2N_G$ Schnittpunkte zwischen diesen Geraden und der Kreislinie einerseits sowie alle Schnittpunkte N_C zwischen Geraden und der Kurve C, so folgt wegen (9) sofort

$$\frac{N_C}{N_K} \approx \frac{2\ L_C}{2\ U_K} \qquad bzw. \qquad L_C \approx \pi r\ \frac{N_C}{N_G} \tag{10}$$

2.2 Anwendung der Stützfunktion

Die Breite einer konvexen Figur bei einer Parallelprojektion in Richtung $\varphi + \pi/2$ liefert gleichzeitig die Länge $l(\varphi)$ der Schattenlinie bei einer Parallelprojektion in Richtung φ, so daß mit

$$l(\varphi) = b(\varphi + \pi/2) = p(\varphi + \pi/2) + p(\varphi - \pi/2)$$

sofort $\int_0^{2\pi} l(\varphi) d\varphi = U/\pi$ folgt.

Statt der zwei parallelen Tangenten zur Definition der Breite einer Figur kann man auch N Tangenten an die (konvexe) Figur legen, die senkrecht zu den Richtungen

$$\varphi_n = \varphi + n\frac{2\pi}{N} \qquad f\ddot{u}r \quad n \in \{0, 1, ..., N-1\}$$

stehen. Für jedes ganzzahlige $n > 2$ entstehen damit umschreibende N-Ecke, die im allgemeinen - bis auf das umschreibende Dreieck - unterschiedlich lange Seiten besitzen, aber an allen Ecken gleiche Innenwinkel $\pi - 2\pi/N$

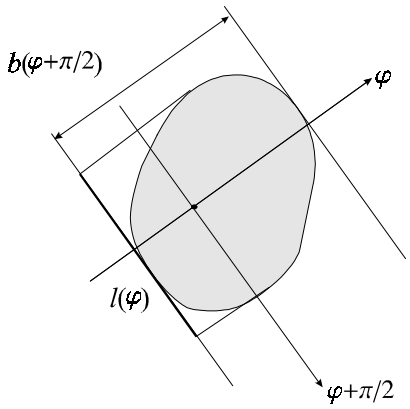

Abbildung 4: Mittlere Breite $b(\varphi + \pi/2)$ und Schattenlinie $l(\varphi)$

aufweisen. Mit Hilfe der Stützfunktion ist es jetzt möglich, die Länge der zur Richtung φ senkrechten Seite eines umschreibenden N-Ecks zu bestimmen (siehe Abbildung 5).

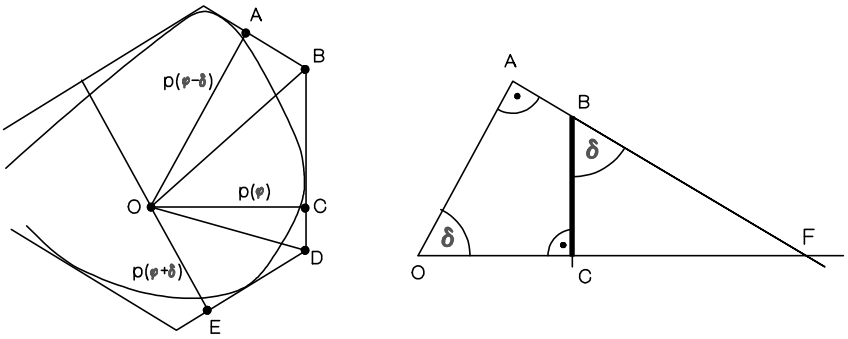

Abbildung 5: Zur Berechnung der Seitenlänge im umschreibenden N-Eck

Es ist $BC/CF = OA/AF$ oder $BC = CF \cdot \cot(\delta)$. Da aber weiter die einfach zu beweisenden Beziehungen $CF = OF - OC = OA/\cos(\delta) - OC$ und $OA = p(\varphi - \delta)$ bzw.$OC = p(\varphi)$ gelten, folgt

$$BC = \frac{p(\varphi - \delta)}{\sin \delta} - \frac{p(\varphi)}{\tan \delta}$$

Dabei haben wir $\delta = 2\pi/N$ gesetzt. Genauso können wir die Strecke CD bestimmen, so daß wir für die Seitenlänge $s(\varphi) = BD$ des umschreibenden N-Ecks den Ausdruck

$$s(\varphi) = \frac{p(\varphi+\delta) + p(\varphi-\delta) - 2p(\varphi)\cos(\delta)}{\sin\delta}$$

erhalten. Der Mittelwert dieser Seite über alle Winkel φ ist mit

$$\overline{p} = \frac{\overline{b}}{2} = \frac{U}{2\pi}$$

durch

$$\overline{s} = \frac{U}{\pi} \cdot \frac{1-\cos\delta}{\sin\delta}$$

gegeben. Da die Mittelwerte der N Seiten des umschreibenden N-Ecks sämtlich gleich sind, folgt für den mittleren Umfang des umschreibenden N-Ecks der N-fache Ausdruck

$$\overline{U_N} = U \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \frac{1-\cos\delta}{\sin\delta} = U \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \tan\frac{\delta}{2}$$

bzw.

$$\overline{U_N} = U \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \tan\frac{\pi}{N} \tag{11}$$

Für den mittleren Umfang des umschreibenden Rechtecks einer beliebigen konvexen Figur gilt daher mit $\tan(\pi/4) = 1$

$$\overline{U_4} = \frac{4U}{\pi} \approx 1.273\,2U \tag{12}$$

und für den mittleren Umfang des umschreibenden Achtecks einer beliebigen konvexen Figur erhalten wir mit $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$

$$\overline{U_8} = \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)U}{\pi} \approx 1.054\,8U \tag{13}$$

Den "wahren" Umfang einer konvexen Figur (bzw. den Umfang der konvexen Hülle einer beliebigen Figur) können wir in der Praxis der digitalen Bildverarbeitung also mit Hilfe der Formeln (11),(12) oder (13) ermitteln. Allerdings wird dabei nicht "über alle Rotationswinkel φ" gemittelt, sondern man bestimmt nur für eine einzige Lage der Figur $\overline{U_N}$, $\overline{U_4}$ oder $\overline{U_8}$. Deshalb ist es von besonderem Interesse, die dabei auftretenden Fehler statistisch zu untersuchen (siehe Tabelle 1).

N	$\mathrm{E}[U_N/U]$	$\mathrm{E}[U_N/U]$
3	$\frac{3}{\pi}\sqrt{3}$	1.6540
4	$\frac{4}{\pi}$	1.273 2
5	$\frac{5}{\pi}\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)}$	1.156 3
6	$\frac{2}{\pi}\sqrt{3}$	1.102 7
7	$\frac{7}{\pi}\tan\frac{1}{7}\pi$	1.0730
8	$\frac{8}{\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)$	1.054 8
9	$\frac{9}{\pi}\tan\frac{1}{9}\pi$	1.042 7

Tabelle 1: Erwartungswert des Umfangs U_N

Ein weiterer wichtiger Begriff in der Integralgeometrie ist der der *Parallelfigur*. Die Parallelfigur K_r einer konvexen Figur K besteht aus allen Punkten der Ebene, die entweder in K liegen oder aber von K einen Abstand haben, der kleiner oder gleich r ist. Wenn sich ein Kreis vom Radius r mit seinem Mittelpunkt auf dem Rande der Figur entlang bewegt, so gehören außer den Punkten $q \in K$ auch alle diejenigen Punkte zu K_r, die dabei vom Kreis überstrichen werden.

Für beliebige konvexe Figuren wird entsprechend dieser Konstruktion die Parallelfigur dadurch bestimmt, daß man die Stützfunktion $p(\varphi)$ um den Betrag r vergrößert:

$$p_r(\varphi) = p(\varphi) + r$$

Für Umfang und Fläche der Parallelfigur ergeben sich dann die Formeln

$$U(r) = \int_0^{2\pi} p_r(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} p(\varphi)d\varphi + 2\pi r = U + 2\pi r \tag{14}$$

und

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \left[p_r^2(\varphi) - \left(\frac{dp_r(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi = F + U \cdot r + \pi r^2 \tag{15}$$

3 Kontursegmentierung

3.1 Umfang kreisförmiger Objekte

Die Segmentierung der Kontur geschieht nach dem schon lange bekannten Verfahren der Zerlegung einer Punktfolge $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$: Es wird der

am weitesten von der Geraden $\widehat{p_1, p_n}$ entfernte Punkt p_j aus der Punktfolge ermittelt und als Endpunkt der beiden Teilfolgen $\widehat{p_1, p_j}$ und $\widehat{p_j, p_n}$ verwendet. Auf diese beiden Teilfolgen wird diese Grundoperation erneut angewendet. Eine Teilfolge $(p_k, p_{k+1}, ..., p_l)$ wird dann nicht mehr weiter unterteilt, wenn alle Punkt $p_{k+1}, ..., p_{l-1}$ von der Geraden $\widehat{p_k, p_l}$ einen hinreichend kleinen Abstand kleiner als h haben (siehe [6, 18, 26, 30]).

Wir betrachten jetzt Kreise vom Radius r, deren Peripherie durch Sekanten angenähert werden sollen. Wenn die Höhe h eines Kreissegmentes gegeben ist, dann ergibt sich die Länge s des entsprechenden Geradensegmentes zu

$$s = 2\sqrt{2hr - h^2}$$

und der Winkel des entsprechenden Kreissektors ist durch

$$\alpha = 2 \arctan \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}$$

festgelegt. Die Länge der durch die Geraden-Approximation bestimmten Sehne ist kürzer als die Bogenlänge $b = \alpha r$, so daß wir den Fehler

$$\Delta = s - b = 2\sqrt{2hr - h^2} - 2r \arctan \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}$$

begehen. Asymptotisch ist dieser Fehler

$$\Delta = -h \cdot \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{h}{r}} + \frac{\sqrt{2}}{10} \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^3} + \frac{3\sqrt{2}}{112} \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^5} + ... \right]$$

oder mit $h = r - \sqrt{4r^2 - s^2}/2$ durch

$$\Delta = -s \cdot \left[\frac{1}{24} \left(\frac{s}{r}\right)^2 + \frac{3}{640} \left(\frac{s}{r}\right)^4 + \frac{5}{7168} \left(\frac{s}{r}\right)^6 ... \right]$$

gegeben. Die Anzahl der Sektoren bzw. Geradensegmente beträgt

$$n_G = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\arctan \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}} \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2r}{h}} - \frac{\pi}{24} \sqrt{\frac{2h}{r}} - \frac{17\pi}{2880} \sqrt{\frac{2h^3}{r^3}} + ...$$

Die Abweichung zwischen dem Kreisumfang $2\pi r$ und dem approximierenden Polygon ist also

$$\Delta_U = 2\pi r - s \cdot n_G = 2\pi r - \frac{2\pi\sqrt{2hr - h^2}}{\arctan\dfrac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}}$$

mit dem Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty}\left(2\pi r - \frac{2\pi\sqrt{2hr - h^2}}{\arctan\dfrac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}}\right) = \frac{2}{3}\pi h$$

Für $h = 1$ ergibt sich beispielsweise der in Abbildung 6 gezeigte Verlauf mit dem Grenzwert $2\pi/3 = 2.094\,4$.

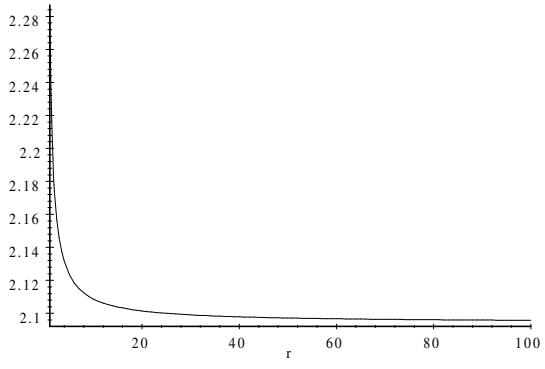

Abbildung 6: Differenz zwischen Kreisumfang $2\pi r$ und Gesamtlänge der Geraden-Approximation für $h = 1$

Anhand umfangreicher Simulationsexperimente sind mit $h = 1.0$ in der folgenden Abbildung 7 die Anzahl der Geradensegmente und der Umfangsfehler für digitale Kreise mit Radien zwischen 3 und 250 dargestellt.

Die Segmentanzahl n_G steigt mit wachsendem Radius für $h = 1$ asymptotisch wie $\pi\sqrt{2r}/2$ an (dicke Linie). Die experimentellen Werte liegen etwas darüber, da der maximal erlaubte Punktabstand $h = 1$ im allgemeinen nicht ausgenutzt wird, so daß die einzelnen Segmente meist kürzer sind als $s = 2\sqrt{2r - 1}$. Die gesamte Segmentlänge weicht auch für $r \to \infty$ nur wenig vom Kreisumfang $2\pi r$ ab, so daß asymptotisch der Wert $\Delta = \lim(s \cdot n_G - 2\pi r) = 2\pi/3 = 2.094\,4$ erreicht wird. Auf Grund der gegenüber dem theoretischen Wert etwas größeren Segmentanzahl kann die

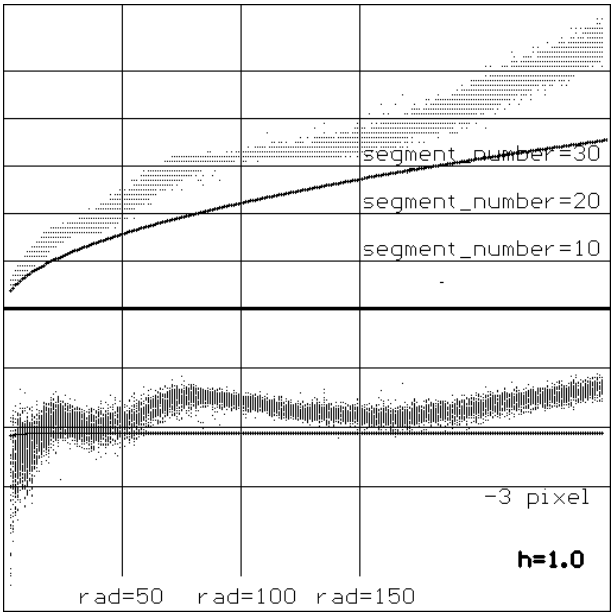

Abbildung 7: Segmentanzahl n_G und Approximationsfehler Δ_U bei der Umfangbestimmung kreisförmiger Objekte

Kreisperipherie etwas besser approximiert werden, so daß der experimentelle Wert Δ^* zwischen 1 und 2 Bildpunktabständen liegt.

3.2 Umfang kreisförmiger Löcher

Für kreisförmige Löcher erhalten wir ein anderes Verhalten der Geraden-Approximation. Hier werden die Segmente außerhalb des Loches verlaufen, d.h. sie werden den Kreis tangieren. Nimmt man an, daß die Endpunkte der Segmente einen Abstand h von der Kreisperipherie haben, so ist die Segmentlänge durch

$$s = 2\sqrt{2rh + h^2}$$

gegeben. Der Winkel des entsprechenden Kreissektors ist

$$\alpha = 2 \arctan \frac{\sqrt{2rh + h^2}}{r}$$

und die Segmentanzahl ist

$$n_G = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\arctan \dfrac{\sqrt{2rh+h^2}}{r}} \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2r}{h}} + \frac{5\pi}{24}\sqrt{\frac{2h}{r}} - \frac{137\pi}{2880}\sqrt{\frac{2h^3}{r^3}} + \ldots$$

Also ist $s \cdot n_G$ die gesamte Segmentlänge, und

$$\Delta_U = 2\pi r - \frac{2\pi\sqrt{2rh+h^2}}{\arctan \dfrac{\sqrt{2rh+h^2}}{r}}$$

ist der verbleibende Fehler. Wir erhalten asymptotisch

$$\lim_{r\to\infty}\left(2\pi r - \frac{2\pi\sqrt{2rh+h^2}}{\arctan \dfrac{\sqrt{2rh+h^2}}{r}}\right) = -\frac{4}{3}\pi h \approx -4.188\,8h$$

d.h. der Absolutfehler für kreisförmige Löcher wird etwa doppelt so groß sein wie der Fehler im Fall kreisförmiger Objekte (siehe Abbildung 8).

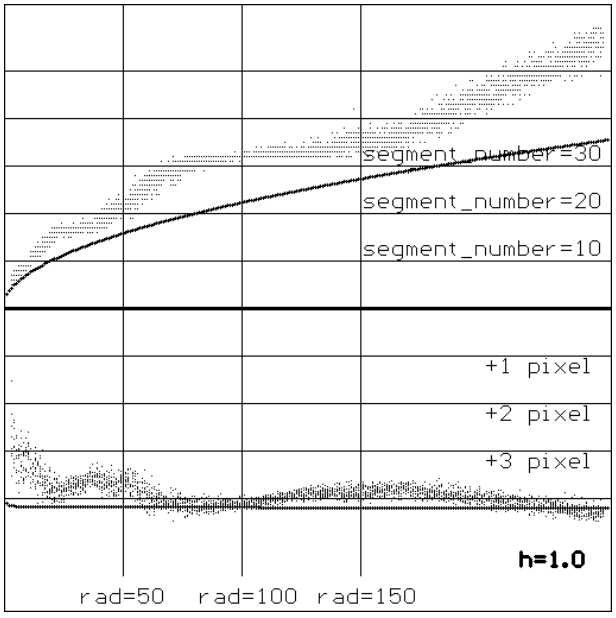

Abbildung 8: Segmentanzahl n_G und Approximationsfehler Δ_U bei der Umfangbestimmung kreisförmiger Löcher

4 Approximation des Konturumfangs

4.1 Innen- und Außenkonturen

Wir haben also ein unterschiedliches Verhalten der asymptotischen Approximationsfehler, je nachdem es sich um kreisförmige Objekte (mit der Totalkrümmung $T = +1$) oder kreisförmige Löcher (mit der Totalkrümmung $T = -1$) handelt:

$$\Delta_U = \frac{\pi}{3}(3T - 1)$$

Dieser Fehler gilt für den gesamten Umfang. Wenn wir nur die Länge eines Kreisbogens mit dem Zentriwinkel φ abschätzen wollen, so ist

$$\Delta_\varphi = \frac{\varphi}{6}(3T - 1)$$

Wechseln sich bei einer Kontur also positiv und negativ gekrümmte Bögen miteinander ab, so werden sich positive ($T = +1$) und negative ($T = -1$) Beiträge derart gegeneinander aufrechnen, daß $\Delta_U = \pi(3T - 1)/3$ auch für beliebige Figuren der euklidischen Ebene gilt (vorausgesetzt, daß deren Rand hinreichend "vernünftig" ist, d.h. keine starke "Kräuselung" aufweist).

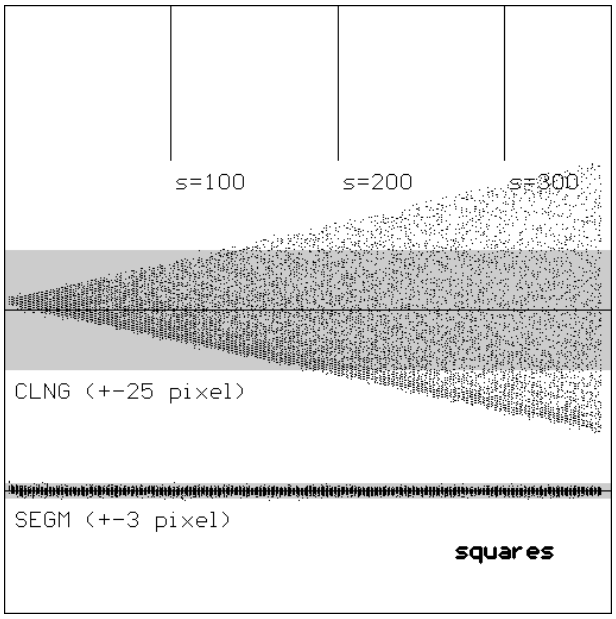

Abbildung 9: Fehler der Konturlänge für Quadrate der Seitenlänge s

In der Abbildung 9 sind für Polygone (Quadrate der Seitenlänge s) die Fehler der Konturlänge (im Vergleich zur exakten Länge $U = 4s$) aufgetragen. Wenn man die Konturlänge mit $N_0 + \sqrt{2}N_1$ bestimmt (N_0 als Anzahl der horizontal/vertikalen Konturschritte, N_1 als Anzahl der schrägen Konturschritte), so gibt es nicht nur einen systematischen Fehler, den man durch $U \approx 0.959\left(N_0 + \sqrt{2}N_1\right)$ einigermaßen kompensieren kann (siehe [16]). Es tritt auch ein zufälliger Fehler auf, der von der Orientierung der Figur und ihrer Lage abhängt. Dieser zufällige Fehler ist proportional dem Umfang, d.h. die relative Standardabweichung $\Delta U/\overline{U}$ wird auch asymptotisch nicht beliebig klein. Auch die Verbesserungen $0.948N_0 + 1.343N_1$ aus [16] oder $1.183N_0 + 1.059N_1$ aus [10] liefern keine asymptotisch erwartungstreuen Längenabschätzungen.

Im Gegensatz dazu funktioniert die Konturbestimmung über die hier vorgestellte Geraden-Approximation hervorragend. Die absoluten Fehler bleiben im Bereich ± 3 Pixel, so daß die relative Standardabweichung $\Delta U/\overline{U}$ asymptotisch gegen Null geht, d.h. die Geraden-Approximation liefert für Polygone mit minimaler Seitenlänge $s_{\min} \to \infty$ einen erwartungstreuen Schätzwert für den Umfang (bei Figuren mit glatten Rändern treten noch systematische Fehler $\Delta_U = \pi\left(3T - 1\right)/3$ auf). In jedem Fall aber erhalten wir

$$\lim_{U \to \infty} \frac{\Delta U}{\overline{U}} = 0$$

In der Abbildung 10 sind die durch Simulation erhaltenen Meßfehler für den Umfang unterschiedlich großer, unterschiedlich gestalteter und unterschiedlich orientierter Ellipsen und Rechtecke dargestellt. Die oberhalb der Null liegenden Meßwerte gelten für elliptische bzw. rechteckige Objekte, die unteren für elliptische bzw. rechteckige Löcher. Dabei liegen die Meßwerte für die Ellipsen in einem ziemlich gedrängten Band, während die Meßwerte für die Rechtecke wesentlich mehr streuen.

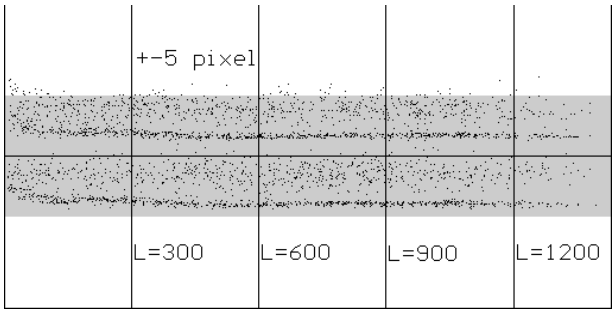

Abbildung 10: Umfangsfehler für Ellipsen und Rechtecke

Wenn wir nun die Korrekturen $\Delta_U = \pi\,(3T-1)\,/3$ einführen, so ergibt sich die Abbildung 11. Wir erkennen, daß die Fehler noch eine systematische Abweichung aufweisen, die aber durch einen weiteren additiven Korrekturterm behoben werden können.

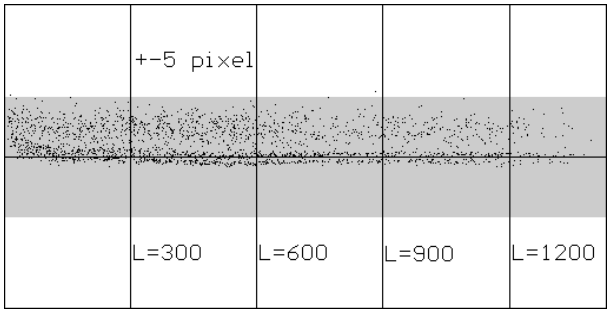

Abbildung 11: Mit $\Delta_U = \pi\,(3T-1)\,/3$ korrigierte Meßfehler für Ellipsen und Rechtecke

4.2 Statistische Optimierung

Die verbleibenden Fehler können durch eine additive Korrektur δ auf $\Delta_U \approx \pm 1.8$ (bei $h = 1.0$) verringert werden. Bei einer anderen Wahl von h läßt sich der Fehler sogar noch etwas weiter senken ($\Delta_U \approx \pm 1.6$ bei $h = 0.9$). Wesentlicher aber ist, daß die additive Konstante für Ellipsen eine andere sein müßte als für Rechtecke, genauer gesagt, glatte Konturen müßten mit einer anderen additiven Konstante korrigiert werden als stückweise geradlinige Konturen (Polygone).

Um diesen Einfluß zu untersuchen, sind in der Abbildung 12 für elliptische/rechteckige Objekte/Löcher die Anzahl der jeweils gefundenen Geradensegmente gegen den Umfang der Figuren aufgetragen.

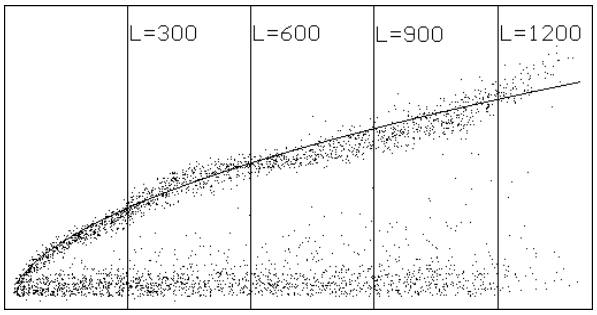

Abbildung 12: Segmentanzahl N_{seg} als Funktion des Umfangs elliptischer/rechteckiger Figuren

h	α	β	γ	δ	$\pm\Delta$
.80	0.998	2.738	−3.102	3.560	1.018
.85	0.998	2.762	−2.710	2.952	0.819
.89	0.999	2.726	−2.375	2.450	0.679
.90	0.999	2.729	−2.361	2.425	0.646
.91	0.999	2.709	−2.414	2.542	0.666
.95	0.999	2.722	−2.377	2.441	0.662
1.00	0.999	2.753	−2.549	2.510	0.656
1.05	0.999	2.709	−2.525	2.636	0.687
1.10	0.999	2.644	−2.537	2.627	0.681
1.20	0.999	2.702	−2.539	2.620	0.669
1.50	0.999	2.692	−2.803	2.930	0.710

Tabelle 2: Parameter α, β, γ, δ von Formel (16) und verbleibender Fehler Δ der Umfangsschätzung U_{est}

Für elliptische Konturen steigt die Anzahl N_{seg} der Segmente ungefähr proportional zu $\sqrt{U}$ mit U als Umfang der Kontur. Für rechteckige Figuren bleibt dagegen die Segmentanzahl auch bei wachsendem Umfang näherungsweise konstant, so daß das Verhältnis $N_{seg}/\sqrt{U}$ für Ellipsen gegen eine Konstante, für Rechtecke aber gegen Null geht. Wir werden also den Umfang der Originalfigur durch

$$U_{est} = \alpha U_{seg} + \beta T + \gamma \frac{N_{seg}}{\sqrt{U_{seg}}} + \delta \tag{16}$$

abschätzen können. Die hier noch auftretenden Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hängen von h ab und müssen aus den Ergebnissen von K Simulationsexperimenten durch die Forderung

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\alpha U_{seg}^{(k)} + \beta T^{(k)} + \gamma \frac{N_{seg}^{(k)}}{\sqrt{U_{seg}^{(k)}}} + \delta - U_{fig}^{(k)} \right]^2 \rightarrow Minimum$$

bestimmt werden. Die Parameter ergeben sich mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate. Sie sind in der folgende Tabelle 2 zusammengefaßt, wobei jeweils einige tausend Simulationen durchgeführt wurden.

Wir sehen also, daß die verbleibenden mittleren Fehler $\pm\Delta$ der Umfangsbestimmung mittels der Formel (16) über einen weiten Bereich von h etwa bei ± 0.66 liegen - ein praktisch bedeutsames Ergebnis für die Umfangsschätzung.

Literatur

[1] J.P.Braquelaire, L.Brun, A.Vialard: Inter-pixel Euclidean paths for image analysis. In: S.Miguet, A.Montanvert, S.Ubeda (eds.): Discrete Geometry for Computer Imagery. Proc. 6th International Workshop DGCI'96 Lyon, Lecture Notes in Computer Science 1176, Springer 1996, pp. 193-203

[2] E.Creutzburg, A.Hübler, V.Wedler: On-line-Erkennung digitaler Geradensegmente in linearer Zeit. Geobild'82 - Symposium Geometrische Probleme der Bildverarbeitung, Georgenthal 1982, FSU Jena 1982, S. 48-65

[3] L.S.Davis: Understanding shapes, angles and sides. IEEE Trans. **C-26** (1977) 236-242

[4] L.Dorst, A.W.M.Smeulders: Best linear unbiased estimators for properties of digitized straight lines. IEEE Trans. **PAMI-8** (1986) 276-282

[5] L.Dorst, A.W.M.Smeulders: Length estimators for digitized contours. CVGIP **40** (1987) 311-333

[6] R.O. Duda, P.E. Hart: Pattern Classification and Scene Analysis. John Wiley and Sons, New York, 1973

[7] H.Y.F.Feng, T.Pavlidis: Decomposing of polygons into simpler components. IEEE Trans. **C-24** (1975) 630-650

[8] H.freeman: Boundary encoding and processing. In: B.S.Lipkin, A.Rosenfeld (eds.): Picture Processing and Psychopictorics. Academic Press, New York 1970, pp. 241-266

[9] H.Freeman, J.A.Saghri: Comparative analysis of line-drawing modeling schemes. CGIP **12** (1980) 203-223

[10] C.A.Groen,P.W.Verbeek: Freeman code probabilities of object boundary quantized contours. CGIP **7** (1978) 391-402

[11] A.Hübler, R.Klette, K.Voss: Determination of the convex hull of a finite set of planar points within linear time. EIK **17** (1981) 121-139

[12] A.K.Jain, S.P.Smith, E.Backer: Segmentation of muscle cell pictures. IEEE Trans. **PAMI-2** (1980) 232-242

[13] R.Klette: Geometrische Probleme der digitalen Bildverarbeitung. Autbild'81, 1.Jenaer Symposium zur automatischen Bildverarbeitung 1981, FSU Jena 1982, S. 9-46

[14] R.Klette, N.Yang: Measurements of arc length's by shortest polygonal Jordan curves. Techn.Rep. VCITR-TR-26, Computer Science Department of the Univeristy of Auckland, July 1998

[15] V.A.Kovalevski: Methoden und Algorithmen zur Bildsegmentierung, Konturapproximation und Bilderkennung. Autbild'81, 1.Jenaer Symposium zur automatischen Bildverarbeitung 1981, FSU Jena 1982, S. 47-74

[16] Z.Kulpa: Area and perimeter measurement of blobs in discrete binary pictures. CGIP **6** (1977) 434-454

[17] Y.Nakagawa, A.Rosenfeld: polygonal and elliptical approximation of mechanical parts. Techn.Rep. TR-676 Computer Science Center, University of Maryland, College Park 1978

[18] T.Pavlidis: Structural Pattern Recognition. Springer Verlag 1977, pp. 57-73, 168-184

[19] D.Proffitt, D.Rosen: Metrication errors and coding efficiency of chain-encoding schemes for the representation of lines and edges. CGIP **10** (1979) 318-332

[20] U.E.Ramer: An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves. CGIP **1** (1972) 244-256

[21] U.Rösler: Vergleich ausgewählter Iterationsverfahren zur Approximation von diskret gegebenen Funktionen. Messen-Steuern-Regeln **20** (1977) 482-486

[22] J.Sklansky, V.Gonzales: Fast polygonal approximation of digitized curves. Proc. IEEE Conf. Pattern Recognition and Image Processing, Chicago 1979, pp. 604- 609

[23] F.Sloboda: Algoritmy kodovania vizualnej informacie pre ucely rozpoznavania. Zbornik ALGORITMY'81, Strebsko Pleso 1981, pp. 276-280

[24] F.Sloboda, B.Zatko, J.Stoer: On approximation of planar one-dimensional continua. In: R.Klette, A.Rosenfeld, F.Sloboda (eds.): Advances in Digital and Computational Geometry. Springer Singapore 1998, pp. 113-160

[25] F.Sloboda, B.Zatko, R.Klette: On the topology of grid continua. Techn.Rep. VCITR-TR-22, Computer Science Department of the Univeristy of Auckland, June 1998

[26] M.Sonka, V.Hlavac, R.Boyle: Image Processing, Analysis and Machine Vision. Chapman and Hall Computing, London, Glasgow, New York, Tokyo, Melbourne, Madras, 1993

[27] A.Vialard: Geometrical parameters extraction from discrete paths. In: S.Miguet, A.Montanvert, S.Ubeda (eds.): Discrete Geometry for Computer Imagery. Proc. 6th International Workshop DGCI'96 Lyon, Lecture Notes in Computer Science 1176, Springer 1996, pp 24-35

[28] A.Vialard: Les chemins euclidiens - model et applications. PhD thesis, Université Bordeaux 1 (1996)

[29] M.Vossepoel, A.W.M.Smeulders: Vector code probability and metrication error in the representation of straight lines of finite length. CGIP **20** (1982) 347-364

[30] K.Voss, R.Neubauer, M.Schubert: Monokulare Rekonstruktion für Robotvision. Shaker-Verlag Aachen 1995, S. 131-135