GEOMETRISCHE STRUKTUREN

VORLESUNG IM SOMMERSEMESTER 1997

an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Richard Bödi

Inhalt

1. Inzidenzstrukturen 1
2. Endliche Inzidenzstrukturen 9
3. Maximale Untergeometrien projektiver Ebenen 14
4. Zentrale Kollineationen projektiver Ebenen 17
5. Koordinaten 22
6. (A, z)-Transitivität und Koordinaten 27

Literatur 38

KAPITEL 1

Inzidenzstrukturen

(1.1) Einführende Beispiele.

(a) *Die reelle affine (euklidische) Ebene* $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$ besteht aus

(1) einer Menge P von Punkten, die durch Paare reeller Zahlen gegeben sind, also $P = \mathbb{R}^2$,

(2) einer Menge $\mathfrak{L}$ von Geraden, die durch eindimensionale affine Teilräume von $\mathbb{R}^2$ gegeben sind, also $\mathfrak{L} = \left\{ u + v\mathbb{R} \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \right\}$,

(3) einer Vorschrift $\mathfrak{I}$, die festlegt, welche Punkte auf welchen Geraden liegen; in diesem Fall ist $\mathfrak{I} = \in$.

Das Tripel $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ ist ein Beispiel für eine *Inzidenzstruktur*. In $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$ liegen je zwei verschiedene Punkte auf genau einer Geraden. Aber nicht alle Geraden schneiden sich; es gibt (eindeutige) Parallelen.

(b) *Die reelle projektive Ebene* $\mathcal{P}_2\mathbb{R} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ kann wie folgt definiert werden:

(1) $P = \left\{ p < \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dim p = 1 \right\}$,

(2) $\mathfrak{L} = \left\{ L < \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dim L = 2 \right\}$,

(3) $\mathfrak{I} = \subset$.

In $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ liegen je zwei verschiedene Punkte auf genau einer Geraden und alle Geraden schneiden sich in genau einem Punkt. Dieses wird *Dualitätsprinzip* genannt.

(c) *Die reelle hyperbolische Ebene* $\mathcal{H}_2\mathbb{R} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ läßt sich als *Teilgeometrie* von $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$ wie folgt auffassen:

(1) $P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1 \right\}$,

(2) $\mathfrak{L} = \left\{ u + v\mathbb{R} \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, (u + v\mathbb{R}) \cap P \neq \emptyset \right\}$,

(3) $\mathfrak{I} = .$

Wieder liegen je zwei verschiedene Punkte auf genau einer Geraden. Aber zu vorgegebener Geraden L und Punkt $p \notin L$ gibt es viele Parallelen zu L durch p (d.h. Geraden durch p, die L nicht schneiden).

(d) *Die komplexe affine Ebene* $\mathcal{A}_2\mathbb{C} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ kann ähnlich wie $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$ definiert werden:

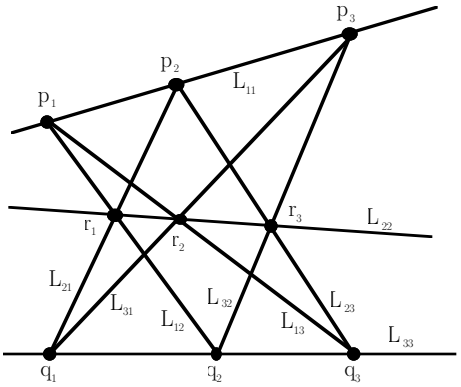
(1) $P = \mathbb{C}^2$,

(2) $\mathfrak{L} = \left\{ u + v\mathbb{C} \;\middle|\; u \in \mathbb{C}^2, v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \right\}$,

(3) $\mathfrak{I} = \in$.

(e) *Die kleinste projektive Ebene* $\mathcal{P}_2\mathbb{F}_2 = (P, \mathcal{L}, \mathfrak{I})$ können wir sogar aufzählen:
(1) $P = \{(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\} = \mathbb{F}_2^3 \backslash \{(0,0,0)\}$,
(2) $\mathcal{L} = \big\{L < \mathbb{F}_2^3 \,\big|\, \dim L = 2\big\}$,
(3) $\mathfrak{I} = \in$.

(f) *Die Pappus-Figur* P ist gegeben durch die folgende Figur



(1) $P = \{p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3\}$,
(2) $\mathcal{L} = \{L_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, 3\}$,
(3) $\mathfrak{I} = \{(p_i, L_{11}), (r_i, L_{22}), (q_i, L_{33}), (p_1, L_{12}), \ldots\}$ (siehe Figur oben).

(g) *Der reelle projektive Raum* $\mathcal{P}_3\mathbb{R} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathfrak{I})$ wird wie folgt definiert:
(1) $P = \big\{p < \mathbb{R}^4 \,\big|\, \dim p = 1\big\}$,
(2) $\mathcal{L} = \big\{L < \mathbb{R}^4 \,\big|\, \dim L = 2\big\}$,
(3) $\mathcal{E} = \big\{E < \mathbb{R}^4 \,\big|\, \dim L = 3\big\}$,
(4) $\mathfrak{I} = \subset$.

Im Gegensatz zur reellen projektiven Ebene gibt es hier wieder nicht schneidende (windschiefe) Geraden.

(h) *Der reelle Möbiusebene* $\mathcal{M}_3\mathbb{R} = (P, \mathcal{K}, \mathfrak{I})$ wird wie folgt definiert:
(1) $P = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$,
(2) $\mathcal{K} = \big\{E \cap P \,\big|\, E \text{ ist 2-dimensionaler affiner Unterraum von } \mathbb{R}^3 \text{ mit } |E \cap P| > 1\big\}$,
(3) $\mathfrak{I} = \in$.

In dieser Inzidenzstruktur heißen Elemente aus $\mathcal{K}$ *Kreise*. Ein Kreis ist durch drei Punkte eindeutig bestimmt und durch je drei Punkte geht ein Kreis. Zwei Kreise müssen sich nicht schneiden.

(1.2) Definition. Ein Tripel $(T, (M_t)_{t\in T}, \mathfrak{I})$ wird eine *Inzidenzstruktur* genannt, falls T und M_t für alle $t \in T$ nichtleere Mengen sind und $\mathfrak{I} \subseteq \prod_{t\in T} M_t$ ist. Die Menge T heißt *Typmenge*, deren Elemente je nach Situation *Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise, Blöcke, etc.* genannt werden. Die Relation $\mathfrak{I}$ heißt *Inzidenzrelation*.

(1.3) Beispiele. (a) Jedes n-dimensionale Polyeder läßt sich als Inzidenzstruktur verstehen, wobei die Typen Ecken, Kanten, Flächen, etc. sind.
(b) Die euklidische Ebene aus (1.1) läßt sich schreiben als $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (\{0,1\}, \{A_0, A_1\}, \in)$, wobei $A_0 = P$ und $A_1 = \mathcal{L}$ ist. Entsprechend wird der euklidische Raum $\mathcal{A}_3\mathbb{R} = (\{0,1,2\}, \{A_0, A_1, A_2\}, \in)$ definiert, wobei $A_0 = \mathbb{R}^3$ und A_i die Menge aller i-dimensionalen affinen Unterräume von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Man beachte, daß "$\in$" manchmal als "$\subset$" interpretiert werden muß.

(1.4) Definition. Ein *Morphismus*

$$f = (f_T, (f_t)_{t\in T}) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

zwischen zwei Inzidenzstrukturen $\mathcal{M} = (T, (M_t)_{t\in T}, \mathcal{I})$ und $\mathcal{N} = (U, (N_u)_{u\in U}, \mathcal{J})$ ist gegeben durch eine *Typabbildung* $f_T : T \to U$ und eine Familie von Abbildungen $f_t : M_t \to N_{f_T(t)}$, so daß eine Abbildung $f_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ existiert, die das Diagramm für jedes $s \in T$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{I} & \overset{\subseteq}{\hookrightarrow} & \prod_{t\in T} M_t & \overset{\mathrm{pr}_s}{\twoheadrightarrow} & M_s \\
\downarrow{\scriptstyle f_{\mathcal{I}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_s} \\
\mathcal{J} & \overset{\subseteq}{\hookrightarrow} & \prod_{u\in U} N_u & \overset{\mathrm{pr}_{f_T(s)}}{\twoheadrightarrow} & N_{f_T(s)}
\end{array}$$

kommutativ ergänzt.

Bemerkung. Die Hintereinanderausführung von Morphismen ergibt wieder ein Morphismus zwischen Inzidenzstrukturen.

(1.5) Definition. Für jede Inzidenzstruktur $\mathcal{M} = (T, (M_t)_{t\in T}, \mathcal{I})$ sei

$$\mathrm{id}_{\mathcal{M}} := (\mathrm{id}_T, (\mathrm{id}_{M_t})_{t\in T}) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}.$$

Ein Morphismus $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ gibt, so daß $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ ist. Im Falle $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ wird ein Isomorphismus f auch *Automorphismus* oder *Kollineation* von $\mathcal{M}$ genannt. Die Menge $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ aller Automorphismen von $\mathcal{M}$ ist bezüglich Komposition eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von* $\mathcal{M}$ genannt wird.

(1.6) Beispiele.
(a) Betrachte $\mathcal{A}_2\mathbb{R} = (\{0,1\}, \{A_0, A_1\}, \mathcal{I})$ und $\mathcal{A}_3\mathbb{R} = (\{0,1,2\}, \{B_0, B_1, B_2\}, \mathcal{J})$ wie

in (1.3). Wir definieren zwei Morphismen $f = (f_T, (f_t)_{t\in T}) : \mathcal{A}_2\mathbb{R} \to \mathcal{A}_3\mathbb{R}$ und $g = (g_T, (g_t)_{t\in T}) : \mathcal{A}_2\mathbb{R} \to \mathcal{A}_3\mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f_T : \{0,1\} &\to \{0,1,2\} : t \mapsto t \\ f_0 &: A_0 \to B_0 : (x,y) \mapsto (x,y,0) \\ f_1 &: A_1 \to B_1 : (x,y) + (u,v)\mathbb{R} \mapsto (x,y,0) + (u,v,0)\mathbb{R} \\ f_{\mathfrak{I}} &: \mathfrak{I} \to \mathfrak{J} : (p,L) \mapsto (p,L,E) \quad \text{mit } E = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_T : \{0,1\} &\to \{0,1,2\} : t \mapsto t+1 \\ g_0 &: A_0 \to B_1 : (x,y) \mapsto (x,y,1)\mathbb{R} \\ g_1 &: A_1 \to B_2 : \begin{cases} (x,y) + (1,t)\mathbb{R} \mapsto \{(u,v,w) \mid \langle (u,v,w), (-t,1,xt-y)\rangle = 0\} \\ (x,y) + (0,1)\mathbb{R} \mapsto \{(u,v,w) \mid \langle (u,v,w), (1,0,-x)\rangle = 0\} \end{cases} \\ g_{\mathfrak{I}} &: \mathfrak{I} \to \mathfrak{J} : (p,L) \mapsto (\{0\}, g_0(p), g_1(L)). \end{aligned}$$

Der erste Morphismus beschreibt die Einbettung der euklidischen Ebene in den euklidischen Raum als (x,y)-Ebene. Der zweite Morphismus ergibt die Darstellung der euklidischen Ebene in *homogenen* Koordinaten. Im Gegensatz zu f erhält g *nicht* die Typen.

(b) Betrachte den reellen projektiven Raum $\mathcal{P}_3\mathbb{R} = (\{0,1,2\}, \{A_0, A_1, A_2\}, \mathfrak{I})$. Durch

$$\begin{aligned} f_T : \{0,1,2\} &\to \{0,1,2\} : t \mapsto 2-t \\ f_0 &: A_0 \to A_2 : p \mapsto p^\perp := \left\{u \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \forall v \in p \;:\; \langle u,v\rangle = 0\right\} \\ f_1 &: A_1 \to A_1 : L \mapsto L^\perp \\ f_2 &: A_2 \to A_0 : E \mapsto E^\perp \\ f_{\mathfrak{I}} &: \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}^* : (p,L,E) \mapsto (E,L,p) \end{aligned}$$

wird ein Morphismus $f = (f_T, (f_t)_{t\in T}) : \mathcal{P}_3\mathbb{R} \to \mathcal{P}_3\mathbb{R}^* = (\{0,1,2\}, \{A_0, A_1, A_2\}, \mathfrak{I}^*)$ definiert, wobei $\mathfrak{I}^* := \{(E,L,p) \mid (p,L,E) \in \mathfrak{I}\}$ ist. Der Raum $\mathcal{P}_3\mathbb{R}^*$ heißt der zu $\mathcal{P}_3\mathbb{R}$ *duale* Raum und f heißt die *kanonische Dualität* von $\mathcal{P}_3\mathbb{R}$. Beachte, daß die Komposition $f \circ f : \mathcal{P}_3\mathbb{R} \to \mathcal{P}_3\mathbb{R}$ gerade $\mathrm{id}_{\mathcal{P}_3\mathbb{R}}$ ist. Deshalb ist f ein Isomorphismus.

Für den Rest des Kapitels wollen wir Inzidenzstrukturen mit nur *zwei* Typen betrachten. Wir verwenden in diesem Fall wieder die Schreibweise $(P, \mathcal{L}, \mathfrak{I})$ aus (1.1) anstelle von $(\{0,1\}, \{A_0, A_1\}, \mathfrak{I})$. Wir nennen P die *Menge der Punkte* und $\mathcal{L}$ die *Menge der Geraden*.

(1.7) Definition. Sei $(P, \mathcal{L}, \mathfrak{I})$ eine Inzidenzstruktur. Für $p \in P$ und $L \in \mathcal{L}$ setzen wir $P_L := \{p \in P \mid (p,L) \in \mathfrak{I}\}$ und $\mathcal{L}_p := \{L \in \mathcal{L} \mid (p,L) \in \mathfrak{I}\}$. Die Menge P_L heißt die

Punktreihe zu L und $\mathfrak{L}_p$ heißt das *Geradenbüschel durch* p. Sei $P' \subseteq P$ und sei $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}$. Dann nennt man $\mathfrak{P}' = (P', \mathfrak{L}')$ eine *Konfiguration* von $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$.

(1.8) Lemma. *Es sei* $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ *eine Inzidenzstruktur, in der aus* $P_L = P_K$ *stets* $K = L$ *folgt. Dann ist durch* $f = (\mathrm{id}_T, (\mathrm{id}_P, L \mapsto P_L))$ *ein Isomorphismus von* $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ *auf die Inzidenzstruktur* $(P, \{P_L \mid L \in \mathfrak{L}\}, \{(p, P_L) \mid p \in P_L\})$ *gegeben.*

Beweis. Aus der angegeben Bedingung folgt, daß f injektiv ist. Nach Konstruktion ist f auch surjektiv. Schließlich ist f ein Isomorphismus mit $(\mathrm{id}_T, (\mathrm{id}_P, P_L \mapsto L))$ als Umkehrabbildung. □

(1.9) Definition. Es sei $\mathcal{A} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ eine $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ eine Inzidenzstruktur. Dann heißt die Inzidenzstruktur $\mathcal{A}^* = (\mathfrak{L}, P, \mathfrak{I}^*)$, gegeben durch $\mathfrak{I}^* = \{(L, p) \mid (p, L) \in \mathfrak{I}\}$, die zu $\mathcal{A}$ *duale* Inzidenzstruktur.

Bemerkung. Zu jeder Aussage Φ über eine Inzidenzstruktur $\mathcal{A}$ läßt sich die duale Aussage Φ^* bilden, indem man durchweg P durch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}^*$ vertauscht. Im Allgemeinen sind die Aussagen Φ und Φ^* *nicht* äquivalent. Es gilt jedoch das folgende **Dualitätsprinzip**: Sind Φ und Ψ zwei Aussagen über eine Inzidenzstruktur mit zwei Typen, so gilt

$$(\Phi \implies \Psi) \iff (\Phi^* \implies \Psi^*).$$

(1.10) Definition. Eine Inzidenzstruktur $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ heißt *partielle Ebene*, falls für alle $K, L \in \mathfrak{L}$ aus $|P_K \cap P_L| \geq 2$ stets $K = L$ folgt. Eine Inzidenzstruktur $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ mit $P \neq \emptyset$ heißt *linearer Raum*, wenn gilt
(LR1) $\forall\, L, K \in \mathfrak{L} : |P_K \cap P_L| \geq 2 \iff K = L$
(LR2) $\forall\, p, q \in P : |\mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q| \geq 2 \iff p = q$
(LR3) $\forall\, p, q \in P : |\mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q| \geq 1$

Für je zwei verschiedene Punkte $p, q \in P$ gibt es also nach (LR2) und (LR3) stets eine Gerade $L \in \mathfrak{L}$ mit $(p, L), (q, L) \in \mathfrak{I}$. Diese Gerade heißt *Verbindungsgerade von* p *und* q und wird mit $p \vee q$ bezeichnet. Punkte, die auf einer Gerden liegen, werden *kollinear* genannt. Geraden, die alle durch einen Punkt gehen, werden *kopunktal* genannt. Ein n-Eck ist eine Menge von n Punkten derart, daß keine drei Punkte dieser Menge kollinear sind.

(1.11) Definition. Ein linearer Raum $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ heißt *affine Ebene*, wenn es zu jeder Geraden $L \in \mathfrak{L}$ und jedem Punkt $p \in P \setminus P_L$ genau eine *Parallele* $K \in \mathfrak{L}$ mit $(p, K) \in \mathfrak{I}$ und $P_K \cap P_L = \emptyset$ gibt. Ein linearer Raum $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ heißt *projektive Ebene*, falls auch die duale Inzidenzstruktur $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})^*$ ein linearer Raum ist und falls $(P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ ein *Viereck* enthält.

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, daß die Eigenschaft, parallel zu sein, eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{L}$ der Geraden ist. Wir bezeichnen mit

$$||_L = \{K \in \mathcal{L} \mid K \text{ ist parallel zu } L\}$$

die Menge aller zu L parallelen Geraden, genannt die *Parallelklasse zu* L.

(1.12) Beispiele. Alle Beispiele aus (1.1) mit Ausnahme von (g) und (h) sind lineare Räume. Die reelle hyperbolische Ebene ist weder eine affine noch eine projektive Ebene. Das gleiche gilt für die Pappus-Figur.

(1.13) Lemma. *Es sei $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine Inzidenzstruktur. Dann gilt*
a) Ist $\mathcal{A}$ eine partielle Ebene, so ist auch die duale Inzidenzstruktur $\mathcal{A}^*$ eine partielle Ebene.
b) Jeder lineare Raum einthält ein Dreieck.
c) Jede affine Ebene einthält ein Viereck.
d) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^*$ lineare Räume, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:
- *(i) Es gibt ein Viereck in $\mathcal{A}$.*
- *(i*) Es gibt ein Viereck in $\mathcal{A}^*$.*
- *(ii) Für jeden Punkt $p \in P$ ist $|\mathcal{L}_p| \geq 3$.*
- *(ii*) Für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ ist $|P_L| \geq 3$.*

Beweis. (a) Es ist $\{K, L\} \subseteq \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q$ genau dann, wenn $\{p, q\} \times \{K, L\} \subseteq \mathcal{I}$ gilt. Letzteres ist äquivalent zu $\{p, q\} \subseteq P_K \cap P_L$. Dies beweist Teil a).
(b) Sei $p \in P$. Nach (LR2) gibt es zwei verschiedene Geraden K, L durch p. Nach (LR1) liegt auf jeder der Geraden K bzw. L ein Punkt q bzw. r verschieden von p. Dann ist $\{p, q, r\}$ ein Dreieck.
(c) Nach (b) gibt es in $\mathcal{A}$ ein Dreieck $\{p_1, p_2, p_3\}$. Da $\mathcal{A}$ affin ist, gibt es Parallelen L_1 zu $p_2 \vee p_3$ durch p_1 und L_2 zu $p_1 \vee p_3$ durch p_2. Die Geraden L_1 und L_2 schneiden sich in einem Punkt p_4 (andernfalls wären $p_2 \vee p_3$ und $p_1 \vee p_3$ parallel, was nicht der Fall ist), der nach Konstruktion kein Punkt des Dreiecks ist und das Dreieck zu einem Viereck ergänzt.
(d) Ist $\{p_1, \ldots, p_4\}$ ein Viereck in $\mathcal{A}$, so bildet die Menge $\{p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_3, p_3 \vee p_4, p_4 \vee p_1\}$ ein Viereck in $\mathcal{A}^*$, d.h. aus (i) folgt (i*). Die Umkehrung folgt sofort aus dem Dualitätsprinzip.
$(i) \implies (ii)$: Sei wieder $\mathcal{V} = \{p_1, \ldots, p_4\}$ ein Viereck in $\mathcal{A}$ und sei $p \in P$. Durch p_1 drei verschiedene Geraden $p_1 \vee p_i$ mit $i = 2, 3, 4$. Analog gehen durch die anderen Punkte p_j drei Geraden. Ist $p \notin \mathcal{V}$, so gilt nach (1.10) $|\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{p_1}| = 1$, d.h. mindestens drei von den vier Geraden $p \vee p_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ sind paarweise verschieden. Aus dem Dualitätsprinzip folgt dann auch (ii*).
$(ii) \implies (i)$: Sei $p \in P$ und seien L_1, L_2, L_3 drei paarweise verschiedene Geraden durch

p. Nach (LR1) gibt es Punkte $p_i \in L_i$ mit $p_i \neq p$. Dann ist $\{p, p_1, p_2, p_3\}$ das gesuchte Viereck. □

Bemerkung. Ist $\mathcal{A}$ eine affine Ebene, so ist $\mathcal{A}^*$ *kein* linearer Raum, da die Existenz von Parallelen in $\mathcal{A}$ gleichwertig ist zu der Aussage in $\mathcal{A}^*$, daß sich zwei Punkte nicht verbinden lassen. Ist $\mathcal{A}$ eine projektive Ebene, so ist auch $\mathcal{A}^*$ wieder eine projektive Ebene. Projektive Ebenen sind also selbstdual.

(1.14) Definition. Es sei $(P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine Inzidenzstruktur und sei $X \subseteq P$. Setze

$$\mathcal{L}_X := \{L \in \mathcal{L} \mid |P_L \cap X| \geq 2\} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_X := \mathcal{I} \cap (X \times \mathcal{L}_X).$$

Die Inzidenzstruktur $(X, \mathcal{L}_X, \mathcal{I}_X)$ heißt *die von* $(P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *auf* X *induzierte Inzidenzstruktur.*

(1.15) Beispiele. Die reelle hyperbolische Ebene ist eine von der affinen Ebene $\mathcal{A}_2\mathbb{R}$ auf $X := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$ induzierte Inzidenzstruktur.

(1.16) Lemma. *Es sei $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine Inzidenzstruktur und sei $X \subseteq P$. Dann gilt*
a) Ist $\mathcal{A}$ eine partielle Ebene, so ist auch $(X, \mathcal{L}_X, \mathcal{I}_X)$ eine partielle Ebene.
b) Ist $\mathcal{A}$ ein linearer Raum und enthält X ein Dreieck, so ist auch $(X, \mathcal{L}_X, \mathcal{I}_X)$ ein linearer Raum.

□

(1.17) Der projektive Abschluß einer affinen Ebene. Sei $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine affine Ebene. Für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ sei $||_L$ die Parallelklasse zu L. Setze L_∞ als die Menge aller Parallelklassen von Geraden aus $\mathcal{L}$. Wir definieren nun eine neue Inzidenzstruktur

$$\mathcal{P} = (P \cup L_\infty, \mathcal{L} \cup \{L_\infty\}, \mathcal{J}),$$

mit

$$\mathcal{J} = \mathcal{I} \cup \{(p, L_\infty) \mid p \in L_\infty\} \cup \{(||_L, K) \mid K \in ||_L\}.$$

Die so erhaltende Inzidenzstruktur ist eine projektive Ebene. Es ist nach Konstruktion von $\mathcal{P}$ klar, daß sich je zwei Geraden eindeutig schneiden, da alle Geraden einer Parallelklassen $||_L$ durch den Punkt $||_L$ gehen. Wir zeigen, daß sich je zwei Punkte mit genau einer Geraden verbinden lassen. Dies ist klar für Punkte aus P und aus L_∞. Sei also $p \in P$ und $q = ||_K \in L_\infty$. Da $\mathcal{A}$ eine affine Ebene ist, gibt es durch p genau eine Parallele L zu K. Diese ist die eindeutige Verbindungsgerade von p und q. Schließlich enthält nach (1.13) mit $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{P}$ ein Viereck. Also ist $\mathcal{P}$ eine projektive Ebene. Insbesondere haben wir gezeigt, daß sich *jede* affine Ebene in eine projektive Ebene einbetten läßt. Diese wird der *projektive Abschluß genannt* und ist bis auf Isomorphie eindeutig. Umgekehrt läßt sich

jede projektive Ebene $\mathcal{P}$ durch Herausnahme einer beliebigen Geraden samt aller mit ihr inzidenten Punkte zu einer affinen Ebene machen. Allerdings müssen die so entstehenden affinen Ebenen, die *affine Spezialisierungen von* $\mathcal{P}$ genannt werden, *nicht* alle zueinander isomorph sein!

(1.18) Definition. Sei $\mathcal{M} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine Inzidenzstruktur und sei $\Delta = \mathrm{tAut}(\mathcal{M})$ die Menge aller typerhaltenden Automorphismen von $\mathcal{M}$, d.h. es ist $f = (f_T, (f_P, f_\mathcal{L})) \in \Delta$ genau dann, wenn $f_T = \mathrm{id}_T$ ist.

Bemerkung. Typerhaltenden Automorphismen bilden also Punkte auf Punkte, sowie Geraden auf Geraden ab. Die Abbildungen $f_P : P \to P$ und $f_\mathcal{L} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ sind Bijektionen derart, daß $(p, L) \in \mathcal{I}$ genau dann gilt, wenn $(f_P(p), f_\mathcal{L}(L)) \in \mathcal{I}$ ist. (Ist f_T bijektiv, so ist die in Definition (1.4) geforderte Abbildung $f_\mathcal{I}$ eindeutig durch $f_\mathcal{I} = (f_P, f_\mathcal{L})$ bestimmt. Dies liefert die vorige Behauptung). Natürlich bildet bezüglich der Komposition die Menge Δ eine Gruppe. Ab sofort werden wir nur noch typerhaltenden Automorphismen betrachten und diese fortan schlicht *Kollineationen* nennen.

(1.19) Fortsetzung von Kollineation auf den projektiven Abschluß. Jede Kollineation γ einer affinen Ebene $\mathcal{A}$ bildet parallel Geraden auf parallele Geraden ab, d.h. jede solche Kollineation permutiert die Parallelklassen von $\mathcal{A}$. Somit läßt sich γ auf eindeutige Art und Weise zu einer Kollineation Γ des projektiven Abschlusses $\mathcal{P}$ von $\mathcal{A}$ forsetzen. Dabei ist $L_\infty^\gamma = L_\infty$ und die Punkte auf L_∞ werden gemäß den Parallelenscharen permutiert. Umgekehrt induziert jede Kollineation einer projektiven Ebene, die eine Gerade L festläßt, eine Kollineation der an L geschlitzten affinen Ebene.

KAPITEL 2

Endliche Inzidenzstrukturen

In diesem Kapitel untersuchen wir endliche Inzidenzstrukturen $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ mit zwei Typen, d.h. sowohl P als auch $\mathcal{L}$ sind *endliche* Mengen.

(2.1) Definition. Die Matrix

$$A = (a_{p,L})_{(p,L)\in P\times\mathcal{L}} \quad \text{mit} \quad a_{p,L} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (p,L) \in \mathcal{I} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird *Inzidenzmatrix von* $\mathcal{A}$ genannt.

(2.2) Beispiele. (a) Aus dem Tetraeder $(\{0,1,2\}, \{A_0, A_1, A_2\}, \subset)$ lassen sich im Wesentlichen zwei verschiedene Inzidenzstrukturen mit zwei Typen gewinnen, deren Inzidenzmatrizen gegeben sind durch

	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
$\{1\}$	1	1	1	0	0	0
$\{2\}$	1	0	0	1	1	0
$\{3\}$	0	1	0	1	0	1
$\{4\}$	0	0	1	0	1	1

und durch

	$\{2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	0	1	1	1
$\{2\}$	1	0	1	1
$\{3\}$	1	1	0	1
$\{4\}$	1	1	1	0

(2.3) Satz. *Eine endliche Inzidenzstruktur $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ist genau dann ein linearer Raum, wenn gilt*

a) *Für eine (und damit für jede) zugehörige Inzidenzmatrix A ist $AA^t = J + D$, wobei alle Einträge von J gerade 1 sind und $D = \operatorname{diag}(d_p)_{p\in P}$ eine Diagonalmatrix mit $d_p \geq 1$ ist. Beachte, daß A^t die zu A transponierte Matrix ist.*

b) *$P \neq \emptyset$ und $|P_L| \geq 2$ für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$.*

Beweis. Schreibe $A = (a_{p,L})_{(p,L)\in\mathfrak{I}}$ und $AA^t = (c_{pq})_{p,q\in P}$. Dann ist

$$c_{pq} = \sum_{L\in\mathfrak{L}} a_{p,L}a_{q,L},$$

und $a_{p,L}a_{q,L}$ ist genau dann 1, wenn *beide* Punkte p und q mit L inzidieren, andernfalls ist dieses Produkt Null. Also ist $c_{pq} = |\mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q|$. Ist $\mathcal{A}$ ein linearer Raum, so ist also $c_{pq} = 1$ oder es gilt $p = q$ und $c_{pp} \geq 2$. Dies liefert die Darstellung in a). Aussage b) gilt nach Definition in jedem linearen Raum. Hat umgekehrt AA^t die in a) angegebene Darstellung, so gilt stets $c_{pq} = |\mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q| = 1$ und es ist $c_{pq} = |\mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q| \geq 2$ genau dann, wenn $p = q$. Für $p, q \in P_K \cap P_L$ ist $K, L \in \mathfrak{L}_p \cap \mathfrak{L}_q$, also $K = L$ oder $p = q$. Daher folgt aus $|P_K \cap P_L| \geq 2$ stets $K = L$. Die umgekehrte Implikation ist gerade Teil b). □

(2.4) Korollar. *Ist $\mathcal{A} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ ein endlicher linearer Raum, so ist* $\operatorname{rang}(A) = |P| \leq |\mathfrak{L}|$.

Beweis. Es ist

$$\operatorname{rang}(AA^t) \leq \operatorname{rang}(A) \leq \min\{|P|, |\mathfrak{L}|\}.$$

Nach (2.3), a) ist $AA^t = J + D$. Wegen

$$vJv^t = \left(\sum_{p\in P} v_p\right)^2$$

ist J positiv semi-definit und D ist sogar positiv definit. Also ist auch AA^t positiv definit und somit invertierbar. Insbesondere ist $\operatorname{rang}(A) = |P|$. □

(2.5) Lemma. *Sei $\mathcal{P} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ eine projektive Ebene. Dann ist für jedes Paar $(p, L) \in (P \times \mathfrak{L}) \setminus \mathfrak{I}$ die Perspektivität genannte Abbildung*

$$\pi_{p,L} := [p, L] := \mathfrak{L}_p \to P_L : K \mapsto K \wedge L$$

bijektiv. Insbesondere haben alle Punktreihen und alle Geradenbüschel dieselbe Anzahl von Elementen. Ist $\mathcal{P}$ endlich, so wird die Zahl $\operatorname{ord}(\mathcal{P}) := |P_L| - 1$ *die Ordnung von $\mathcal{P}$ genannt.*

Beweis. Die Abbildung $\pi_{p,L}$ ist bijektiv, denn $\pi_{L,p} := [L, p] := P_L \to \mathfrak{L}_p : q \mapsto q \vee p$ ist offensichtlich die Umkehrabbildung von $\pi_{p,L}$. Für die zweite Behauptung wähle man für $p, q \in P$ eine Gerade K mit $p, q \notin P_K$; eine solche Gerade existiert nach (1.13), d). □

(2.6) Korollar. *Ist $\mathcal{P} = (P, \mathfrak{L}, \mathfrak{I})$ eine projektive Ebene der Ordnung n, so ist* $\operatorname{rang}(A) = |P| = |\mathfrak{L}|$ *und A ist invertierbar (als Matrix über $\mathbb{Q}$). Außerdem ist $AA^t = J + nE$, wobei E die Einheitsmatrix ist.* □

(2.7) Satz. *Sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine projektive Ebene der Ordnung n. Dann ist $|P| = |\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$.*

Beweis. Sei $p \in P$. Jeder Punkt aus $P \setminus \{p\}$ liegt auf genau einer Geraden durch p. Auf diese Weise erhalten wir eine disjunkte Vereinigung

$$P = \{p\} \cup \bigcup_{L \in \mathcal{L}_p} (P_L \setminus \{p\}).$$

Hieraus folgt die Behauptung $|P| = 1 + (n+1)n = n^2 + n + 1$. □

Aus der Beschreibung (1.17) einer affinen Ebene folgt aus dem letzten Satz sofort:

(2.8) Korollar. *Sei $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine affine Ebene. Dann haben alle Geraden die gleiche Anzahl von Punkten und alle Geradenbüschel haben die gleiche Anzahl von Geraden. Sei $|P_L| = n$. Dann ist $|P| = n^2$ und $|\mathcal{L}| = n(n+1)$.* □

Es gibt *nicht* zu jeder Ordnung projektive Ebenen. Dies zeigt der folgende Satz von Bruck-Ryser.

(2.9) Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\, 4)$. Läßt sich n nicht als Summe zweier Quadrate schreiben, so gibt es keine projektive Ebene der Ordnung n. Insbesondere gibt es keine projektive Ebene der Ordnung n, falls $n \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 8)$ ist.*

Bemerkung. Es gibt zu jeder Primzahlpotenz p^k eine projektive Ebene dieser Ordnung. Es gibt (genau) eine projektive Ebene der Ordnung 5, obwohl $5 = 2^2 + 1^2$ ist. Nach dem obigen Satz gibt es aber keine projektive Ebene der Ordnung 6. Es gibt projektive Ebenen der Ordnung 9, aber keine der Ordnung 10 (auf beide Zahlen ist der Satz von Bruck-Ryser *nicht* anwendbar). Dies wurde erst 1988 von Lam, McKay und anderen mit Hilfe eines Computers bewiesen. Es ist nicht bekannt, ob es projektive Ebenen der Ordnung 12 oder 15 gibt. Diese Zahlen sind momentan (oder vielleicht für immer) für den Einsatz eines Rechners zu groß.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ eine projektive Ebene der Ordnung n mit $A = (a_{p,L})_{(p,L) \in P \times \mathcal{L}}$ als Inzidenzmatrix und sei $k = n^2 + n + 1$. Sei $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_k\}$. Definiere Polynome $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ in Unbestimmten $t_1, \ldots, t_k$ durch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) := (t_1, \ldots, t_k)A$ und

setze $\alpha = t_1 + \ldots + t_k$. Dann ist nach (2.6)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 &= \langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\rangle \\
&= \langle(t_1, \ldots, t_k)A, (t_1, \ldots, t_k)A\rangle \\
&= (t_1, \ldots, t_k)AA^t(t_1, \ldots, t_k)^t \\
&= (t_1, \ldots, t_k)(J + nE)(t_1, \ldots, t_k)^t \\
&= (t_1, \ldots, t_k)J(t_1, \ldots, t_k)^t + n(t_1, \ldots, t_k)E(t_1, \ldots, t_k)^t \\
&= (\alpha, \ldots, \alpha)(t_1, \ldots, t_k)^t + n\sum_{i=1}^{k} t_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} t_i t_j + n\sum_{i=1}^{k} t_i^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)^2 + n\sum_{i=1}^{k} t_i^2 \\
&= \alpha^2 + n\sum_{i=1}^{k} t_i^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + nt_{k+1}^2 = \alpha^2 + n\sum_{i=1}^{k+1} t_i^2.$$

Aus der Zahlentheorie weiß man, daß sich jede ganze Zahl als Summe von vier Quadraten schreiben lößt. Sei also $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Betrachte die folgende Matrix über $\mathbb{Q}$

$$M_n = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\det M_n = n^2 \neq 0$, d.h. die Matrix M_n ist invertierbar. Aus der Identität

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) = (aw - bx - cy - dz)^2 + (bw + ax - dy + cz)^2 \\
+ (cw + dx + ay - bz)^2 + (dw - cx + by + az)^2
\end{aligned}$$

folgt mit $(s_1, s_2, s_3, s_4) := (t_1, t_2, t_3, t_4)M_n$

$$n(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^3 + s_4^2.$$

Damit erhalten wir wegen $k = n^2 + n + 1 \geq 7$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + nt_{k+1}^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + n\sum_{i=5}^{k+1} t_i^2 + \alpha^2.$$

Wegen $k = n^2 + n + 1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$ nach Voraussetzung ist die Anzahl der Summanden in der Summe auf der rechten Seite durch vier teilbar und wir können sukzessive die t_i durch s_i ersetzen, also

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + nt_{k+1}^2 = \sum_{i=1}^{k+1} s_i^2 + \alpha^2. \qquad (\dagger)$$

Dabei können wir uns wegen $(s_1, s_2, s_3, s_4)M_n^{-1} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ die Elemente α, α_i und t_{k+1} als rationale lineare Polynome in $s_1, \ldots, s_{k+1}$ denken. Da s_1 eine Unbestimmte ist, können wir für s_1 auch $-\alpha_1$ bzw. α_1 setzen, je nachdem ob der Koeffizient von s_1 in α_1 gerade 1 ist oder nicht. Somit können wir die Gleichung $s_1 = \pm\alpha_1$ stets nach $s_2, \ldots, s_{k+1}$ auflösen, d.h. s_1 läßt sich als rationales lineares Polynom in $s_2, \ldots, s_{k+1}$ darstellen. Ersetzen wir s_1 in jedem Ausdruck von (†) durch dieses Polynom, so erhalten wir eine Gleichung

$$\sum_{i=2}^{k} \alpha_i^2 + nt_{k+1}^2 = \sum_{i=2}^{k+1} s_i^2 + \alpha^2 \qquad (\ddagger)$$

in den Unbestimmten $s_2, \ldots, s_{k+1}$. So fortfahrend erhalten wir schließlich

$$nt_{k+1}^2 = s_{k+1}^2 + \alpha^2,$$

wobei t_{k+1} und α rationale lineare Polynome in s_{k+1} mit Absolutglied Null sind, d.h. es ist $t_{k+1} = as_{k+1}$ und $\alpha = bs_{k+1}$ für $a, b \in \mathbb{Q}$. Dies liefert

$$na^2 = 1 + b^2 \quad \text{oder} \quad n = \frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

Nach einem weiteren Satz aus der Zahlentheorie ist jede ganze Zahl genau dann als Summe zweier ganzer Quadratzahlen schreibbar, wenn sie Summe zweier *rationaler* Quadrate ist. Dies beweist den Satz. □

KAPITEL 3

Maximale Untergeometrien projektiver Ebenen

In diesem Kapitel sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ stets eine projektive Ebene.

(3.1) Definition. Eine Konfiguration $(P', \mathcal{L}')$ heißt *Baer-Konfiguration* von $\mathcal{P}$ oder *dicht in* $\mathcal{P}$, falls jeder Punkt und jede Gerade von $\mathcal{P}$ mit einem Element von $P' \cup \mathcal{L}'$ inzidiert. Ist $\mathcal{P}'$ unter Schneiden und Verbinden abgeschlossen, so heißt $\mathcal{P}'$ *abgeschlossen*. Bildet $\mathcal{P}' = (P', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$, wobei $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap (P' \times \mathcal{L}')$ ist, zudem eine echte projektive Unterebene, so heißt $\mathcal{P}'$ eine *Baer-Unterebene* von $\mathcal{P}$.

(3.2) Beispiele. (a) In $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$ ist die reelle projektive Ebene $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ als Teilebene enthalten und bildet eine Baer-Unterbene von $\mathcal{P}_2\mathbb{C}$.
(b) Jedes Punkt-Geraden-Paar (p, L) gibt Anlaß zu einer Baer-Konfiguration

$$\mathcal{B}(p, L) = \{(q, L) \mid q \in P_L\} \cup \{(p, K) \mid K \in \mathcal{L}_p\}$$

jeder projektiven Ebene $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$, denn jeder Punkt ungleich p liegt auf einer Geraden durch p und dual schneidet jede Gerade aus $\mathcal{P}$ die Gerade L.

(3.3) Satz. *Sei $\mathcal{P}' = (P', \mathcal{L}')$ eine abgeschlossene Baer-Konfiguration von $\mathcal{P}$. Dann ist entweder $\mathcal{P}'$ eine Baer-Unterebene oder aber es gibt ein Punkt-Geraden-Oaar (p, L) mit $\mathcal{P}' = \mathcal{B}(p, L)$.*

Beweis. (a) Sei $\mathcal{P}'$ eine abgeschlossene Baer-Konfiguration von $\mathcal{P}$, die keine Unterebene von $\mathcal{P}$ ist. Dann besitzt $\mathcal{P}'$ auch kein Viereck. Wir nehmen zuerst an, daß $\mathcal{P}'$ ein Dreieck $\Delta = \{p, q, r\}$ besitzt. Da es in $\mathcal{P}'$ kein Viereck gibt, müssen alle Punkte von $\mathcal{P}'$ auf einer Seite, etwa $L := q \vee r$, von Δ liegen. Sei $s \in P$ auf der Geraden $q \vee r$ mit $s \neq q, r$ und sei $K \neq q \vee r, p \vee s$ eine Gerade durch s. Solche Elemente existieren nach (1.13). Da $\mathcal{P}'$ eine Baer-Konfiguration ist, gibt es einen Punkt t auf L. Da L nicht durch r geht, muß $t \in P'$ auf L liegen, d.h. es ist $s = t$. Da s auf L beliebig gewählt war, folgt die Behauptung: $\mathcal{P}' = \mathcal{B}(p, L)$. Somit können wir im weiteren annehmen, daß $\mathcal{P}'$ kein Dreieck enthält. Dann liegen alle Punkte von $\mathcal{P}'$ auf einer Geraden L und alle Geraden von $\mathcal{P}'$ gehen durch einen Punkt p. Da jeder Punkt von $\mathcal{P}$ auf einer Geraden von $\mathcal{P}'$ liegt, enthält $\mathcal{P}'$ mindestens zwei

Geraden. Dies zeigt, daß $p \in P'$ und dual auch $L \in \mathfrak{L}'$ gilt und überdies p auf L liegt. Sei $q \neq p$ ein Punkt auf L und sei $K \neq L$ eine Gerade durch q. Da $\mathcal{P}'$ eine Baer-Konfiguration ist, inzidiert K mit einem Punkt aus $\mathcal{P}'$. Da alle Punkte von $\mathcal{P}'$ auf L liegen, folgt $q \in P'$. Also liegen alle Punkte auf L in P'. Dual zeigt man, daß jede Gerade durch p zu $\mathfrak{L}'$ gehört. Dies beweist den ersten Teil der Aussage.
(b) Wir müssen noch nachweisen, daß nicht beide Bedingungen zugleich erfüllt sein können. Sei dazu $\mathcal{P}'$ eine Unterebene. Wir nehmen an, daß es eine Gerade $L \in \mathfrak{L}'$ mit $P_L \subseteq P'$ gibt. Da $\mathcal{P}'$ eine Unterebene ist, gibt es einen Punkt $p \in P'$, der nicht auf L liegt. Da jede Gerade durch p die Gerade L schneidet und jeder Punkt auf L in P' liegt, ist $\mathfrak{L}_p \subseteq \mathfrak{L}'$. Sei $r \in P$ beliebig. Wir zeigen, daß $r \in P'$ gilt. Wähle dazu eine Gerade $K \in \mathfrak{L}_p$ ungleich $p \vee r$. Die Gerade K liegt in der Unterebene $\mathcal{P}'$, enthält also einen (dritten) Punkt $t \in P' \setminus \{p, K \wedge L\}$. Die Gerade $r \vee t$ ist nicht L und schneidet L in einem Punkt $s \in P'$. Wegen $s, t \in P'$ ist $r \vee t = s \vee t \in \mathfrak{L}'$ und wir haben $r = (r \vee t) \wedge (r \vee p)$ als Schnitt zweier verschiedener Geraden aus $\mathfrak{L}'$ dargestellt. Dies beweist $r \in P'$. Da r beliebig war, folgt $P = P'$. Da jede Gerade aus $\mathfrak{L}$ Verbindungsgerade zweier Punkte aus $P = P'$ ist, folgt auch $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$. Dies beweist den Satz. □

(3.4) Satz. *Jede abgeschlossene Baer-Konfiguration $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}$ ist eine maximale abgeschlossene Konfiguration von $\mathcal{P}$.*

Beweis. Sei $p \in P$ kein Punkt von $\mathcal{B}$. Sei $\mathcal{P}^* = (P^*, \mathfrak{L}^*)$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Konfigurationen von $\mathcal{P}$, die $\mathcal{B}$ und p enthalten. Nach (3.3) enthält $\mathcal{P}^*$ stets ein Viereck. Also ist $\mathcal{P}^*$ eine projektive Unterebene von $\mathcal{P}$. Ist $\mathcal{B}$ keine projektive Ebene, so besitzt $\mathcal{B}$ nach (3.3) eine Gerade L sowie sämtliche mit ihr inzidierenden Punkte. Aus dem Beweis von (3.3) folgt nun, daß $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ ist. Also können wir annehmen, daß $\mathcal{B}$ eine Baer-Unterebene ist. Dann besitzt jede Gerade durch p einen Punkt von $\mathcal{B}$, d.h. jede solche Gerade liegt in $\mathfrak{L}^*$. Dies ist die duale Aussage zum ersten Fall und es folgt wieder $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$. □

(3.5) Definition. Für eine Kollineation γ von $\mathcal{P}$ sei $\mathrm{Fix}(\gamma) = (P_\gamma, \mathfrak{L}_\gamma)$ die Konfiguration aller Fixpunkte P_γ und aller Fixgeraden $\mathfrak{L}_\gamma$ von γ.

(3.6) Korollar. *Sei γ eine Kollineation der projektiven Ebene $\mathcal{P}$. Dann ist* $\mathrm{Fix}(\gamma)$ *eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{P}$. Besitzt* $\mathrm{Fix}(\gamma)$ *ein Viereck, so bildet diese Menge eine projektive Unterebene von $\mathcal{P}$.*

Beweis. Seien $p, q \in P_\gamma$ zwei verschiedene Punkte. Da γ die Inzidenz erhält, ist $(p \vee q)^\gamma = p^\gamma \vee q^\gamma = p \vee q$, also $p \vee q \in \mathfrak{L}_\gamma$. Dual zeigt man die Aussage für zwei verschiedene Geraden von $\mathrm{Fix}(\gamma)$. Damit ist $\mathrm{Fix}(\gamma)$ abgeschlossen. Die zweite Aussage ist trivial. □

(3.7) Definition. Eine Kollineation γ der projektiven Ebene $\mathcal{P}$ heißt *Quasiperspektivität* oder *quasizentral*, wenn $\mathrm{Fix}(\gamma)$ eine Baer-Konfiguration ist. Per Definition wollen wir auch die identische Abbildung $\mathbb{1}$ als eine Quasiperspektivität auffassen.

(3.8) Satz. *Sei $\gamma \neq \mathbb{1}$ eine Kollineation von $\mathcal{P}$ mit $\gamma^2 = \mathbb{1}$. Solche Kollineationen werden Involutionen genannt. Dann ist γ eine Quasiperspektivität.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jedes Element aus $P \cup \mathcal{L}$ mit einem Element aus $P_\gamma \cup \mathcal{L}_\gamma$ inzidiert. Wir können annehmen, daß $\gamma \neq \mathbb{1}$ ist. Dann gibt es $p \in P$ mit $p^\gamma \neq p$. Wegen

$$(p \vee p^\gamma)^\gamma = p^\gamma \vee p^{\gamma^2} = p^\gamma \vee p$$

ist $p \vee p^\gamma$ eine Fixgerade von γ. Also liegt jeder Nichtfixpunkt auf einer Fixgeraden von γ. Dual liegt dann jede Nichtfixgerade auf einem Fixpunkt von γ. □

(3.9) Satz. *Sei γ eine Quasiperspektivität von $\mathcal{P}$. Dann ist γ durch* $\mathrm{Fix}(\gamma)$ *und dem Bild eines einzigen Elementes außerhalb von* $\mathrm{Fix}(\gamma)$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir nehmen wieder $\gamma \neq \mathbb{1}$ an. Seien γ und δ zwei Quasiperspektivitäten mit $\mathrm{Fix}(\gamma) = \mathrm{Fix}(\delta)$ und sei $p \notin P_\gamma$ mit $p^\gamma = p^\delta$. Dann fixiert $\gamma\delta^{-1}$ alle Elemente von $\mathrm{Fix}(\gamma)$ und zusätzlich den Punkt p. Nach (3.6) ist $\mathrm{Fix}(\gamma\delta^{-1})$ eine abgeschlossene Konfiguration, die die Baer-Konfiguration $\mathrm{Fix}(\gamma)$ *echt* enthält. Nach (3.4) folgt daraus $\mathrm{Fix}(\gamma\delta^{-1}) = \mathcal{P}$, also $\gamma\delta^{-1} = \mathbb{1}$ oder $\gamma = \delta$. □

(3.10) Proposition. *Sei γ eine Quasiperspektivität von $\mathcal{P}$. Ist $p \in P$, so sind alle Punkte $p, p^\gamma, p^{\gamma^2}, \ldots$ kollinear. Dual ist die Menge aller Geraden $L, L^\gamma, L^{\gamma^2}, \ldots$ kopunktal.*

Beweis. Sei $p \in P$. Ist $p = p^\gamma$, so ist auch $p = p^{\gamma^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung ist trivial. Sei also $p \neq p^\gamma$. Die Gerade $L = p \vee p^\gamma$ inzidiert mit einem Fixpunkt q von γ, da υ eine Quasiperspektivität ist. Also sind p, p^γ und q kollinear und es ist

$$L^\gamma = (p^\gamma \vee p)^\gamma = (q \vee p)^\gamma = q^\gamma \vee p^\gamma = q \vee p^\gamma = p \vee p^\gamma = L.$$

Damit ist L eine Fixgerade von γ und p^{γ^2} liegt auf L. Induktiv folgt nun, daß p^{γ^n} auf L liegt. Die duale Aussage wird dual bewiesen. □

KAPITEL 4

Zentrale Kollineationen projektiver Ebenen

In diesem Kapitel sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ stets eine projektive Ebene.

(4.1) Definition. Eine Kollineation γ von $\mathcal{P}$ heißt *zentral*, falls es einen Punkt $p \in P$ gibt, so daß $L^\gamma = L$ für alle $L \in \mathcal{L}_p$ gilt. Der Punkt p wird *Zentrum* von γ genannt. Dual hierzu wird γ *axial* genannt, falls es eine Gerade $L \in \mathcal{L}$ gibt, so daß $p^\gamma = p$ für alle Punkte $p \in P_L$ gilt. Die Gerade L heißt dann *Achse* von γ.

(4.2) Satz. *Jede zentrale Kollineation hat eine Achse und jede axiale Kollineation hat ein Zentrum. Ist $\gamma \neq \mathbb{1}$ eine zentrale Kollineation, so sind das Zentrum z und die Achse A von γ eindeutig bestimmt und es gilt* $\mathrm{Fix}(\gamma) = (\{z\} \cup P_A, \{A\} \cap \mathcal{L}_z)$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $\gamma \neq \mathbb{1}$ annehmen. Sei A eine Achse von γ. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Fix}(\gamma)$ eine Baer-Konfiguration ist. Nach (3.6) ist nämlich $\mathrm{Fix}(\gamma)$ abgeschlossen und die Behauptung folgt damit aus (3.3). Natürlich schneidet jede Gerade von $\mathcal{P}$ die Achse A in einem Fixpunkt von γ. Sei $p \in P \setminus P_A$. Ist p ein Fixpunkt von γ, so schneidet jede Gerade durch p die Achse A und ist deshalb eine Fixgerade von γ, d.h. p inzidiert mit einer Fixgeraden von γ. Sei also $p^\gamma \neq p$. Mit $q := (p \vee p^\gamma) \wedge A$ ist $(p \vee q)^\gamma = p^\gamma \vee q^\gamma = p^\gamma \vee q = p \vee q$, da p, p^γ und q kollinear sind. Also inzidiert p mit einer Fixgeraden von γ und wir haben gezeigt, daß $\mathrm{Fix}(\gamma)$ eine Baer-Konfiguration ist. Die duale Aussage wird ebenso bewiesen. □

(4.3) Definition. Eine zentrale Kollineation γ mit Zentrum z und Achse A wird (z, A)-*Perspektivität* genannt. Ist z inzident mit A, so nennt man γ eine *Elation*, andernfalls eine *Homologie*.

Bemerkung. (1) Perspektivitäten sind Quasiperspektivitäten. Nach (3.3) sind die Perspektivitäten genau diejenigen Quasiperspektivitäten, die *keine* Baer-Unterebene als Fixkonfiguration besitzen. Die Identität ist die einzige Quasiperspektivität, die sowohl eine Elation als auch eine Homologie ist.
(2) Ist $\mathcal{P}$ eine projektive Ebene und ist γ eine (z, A)-Perspektivität, so ist die Einschränkung $\gamma_\mathcal{A}$ von γ auf die bei A geschlitzte affine Ebene $\mathcal{A}$ eine Kollineation. Liegt z auf A, so heißt

$\gamma_{\mathcal{A}}$ eine *Translation von* $\mathcal{A}$; anderfalls wird $\gamma_{\mathcal{A}}$ eine *Streckung* genannt. Schlitzt man $\mathcal{P}$ an einer Geraden $L \neq A$ durch z, so wird L von γ ebenfalls festgelassen und γ induziert auf der bei L geschlitzten Ebene $\mathcal{A}$ wieder eine Kollineation. Für $z \in P_L$ heißt die so induizierte Kollineation eine *Scherung*, anderfalls wird sie eine *Homothetie* genannt.

(4.4) Definition. Sei Δ die Kollineationsgruppe der projektiven Ebene $\mathcal{P}$ und sei z ein Punkt, sowie A eine Gerade von $\mathcal{P}$. Setze $\Delta_{[z,A]} \leq \Delta$ als die Gruppe aller (z, A)-Perspektivitäten in Δ. Sei $\Delta_{[z,z]} = \bigcup_{A \in \mathcal{L}_z} \Delta_{[z,A]}$ und dual dazu $\Delta_{[A,A]} = \bigcup_{z \in P_A} \Delta_{[z,A]}$. Außerdem setzen wir $\Delta_{[z]} = \bigcup_{A \in \mathcal{L}} \Delta_{[z,A]}$ und dual $\Delta_{[A]} = \bigcup_{z \in P} \Delta_{[z,A]}$.

Bemerkung. Natürlich bilden die Mengen $\Delta_{[z]}$ und $\Delta_{[A]}$ via Komposition eine Gruppe. Es ist jedoch a priori nicht klar, daß die Mengen $\Delta_{[z,z]}$ und $\Delta_{[A,A]}$ Untergruppen von Δ sind. Dazu muß nachgewiesen werden, daß diese Mengen unter Kompositionen abgeschlossen sind.

(4.5) Lemma. *Sei* $\gamma \in \Delta_{[z,A]}$. *Dann ist* $\delta^{-1}\gamma\delta \in \Delta_{[z^\delta, A^\delta]}$ *für alle* $\delta \in \Delta$.

Beweis. Wir zeigen, daß A^δ eine Achse von $\alpha := \delta^{-1}\gamma\delta$ ist. Sei dazu q ein Punkt auf A^δ. Dann liegt $q^{\delta^{-1}}$ auf A, also ist $(q^{\delta^{-1}})^\gamma = q^{\delta^{-1}}$, d.h. es ist $q^\alpha = q$. Also ist A^δ eine Achse von α. Analog zeigt man, daß z^δ ein Zentrum von α ist. □

(4.6) Korollar. *Es ist* $\Delta^\delta_{[z,A]} := \delta^{-1}\Delta_{[z,A]}\delta = \Delta_{[z^\delta, A^\delta]}$ *für alle* $\delta \in \Delta$. □

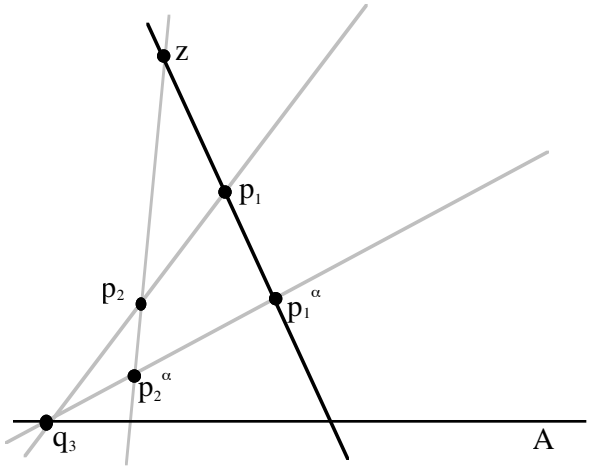
(4.7) Satz. *Sei* Δ *die Kollineationsgruppe einer projektiven Ebene* $\mathcal{P}$. *Die Mengen* $\Delta_{[z,z]}$ *und* $\Delta_{[A,A]}$ *bilden bezüglich Komposition eine Gruppe. Überdies ist* $\Delta_{[z,z]}$ *ein Normalteiler von* $\Delta_{[z]}$, *und dual ist* $\Delta_{[A,A]}$ *ein Normalteiler von* $\Delta_{[A]}$.

Beweis. Aufgrund des Dualitätsprinzips genügt es, die Aussage für die Mengen $\Delta_{[A,A]}$ zu zeigen. Seien $\alpha, \beta \in \Delta_{[A,A]}$. Wir zeigen, daß auch $\alpha\beta^{-1} \in \Delta_{[A,A]}$ ist. Nach Definition gibt es Punkte $p, q \in P_A$ mit $\alpha \in \Delta_{[p,A]}$ und $\beta \in \Delta_{[q,A]}$. Ist $p = q$, so ist auch $\alpha\beta^{-1} \in \Delta_{[p,A]}$, da letztere Menge eine Gruppe ist. Sei also $p \neq q$. Da $\delta := \alpha\beta^{-1}$ die Gerade A als Achse hat, gibt es nach (4.2) auch ein Zentrum z von δ. Wir müssen nachweisen, daß z auf A liegt. Dazu genügt es nach dem zweiten Teil von (4.2) zu zeigen, daß aus $r^\delta = r$ stets $r \in A$ folgt. Sei also $r \in P$ mit $r^\delta = r$, also $r^\alpha = r^\beta$. Da p das Zentrum von α ist, sind die Punkte p, r, r^α kollinear. Analog sind auch q, r, r^β kollinear. Liegt r nicht auf A, so ist $r \neq r^\alpha$ und p, q liegen auf $r \vee r^\alpha$ wegen $r^\alpha = r^\beta$. Also ist $A = p \vee q = r \vee r^\alpha$, also doch $r \in P_A$. Damit ist $\Delta_{[A,A]}$ eine Gruppe. Die Normalteiler-Eigenschaft folgt sofort aus (4.6) und der Darstellung $\Delta_{[A,A]} = \bigcup_{z \in P_A} \Delta_{[z,A]}$. □

(4.8) Die Desargues-Konfiguration. Sei $\alpha \in \Delta_{[z,A]}$ und sei p_1 *kein* Fixpunkt von α. Dann ist α durch das Bild p_1^α eindeutig bestimmt, siehe (3.9). Wir wollen nun das Bild

p_2^α für einen beliebigen Punkt $p_2 \notin p_1 \vee z$ bestimmen. Sei dazu $q_3 = (p_1 \vee p_2) \wedge A$. Wegen $p_2 = (z \vee p_2) \wedge (q_3 \vee p_1)$ ist dann

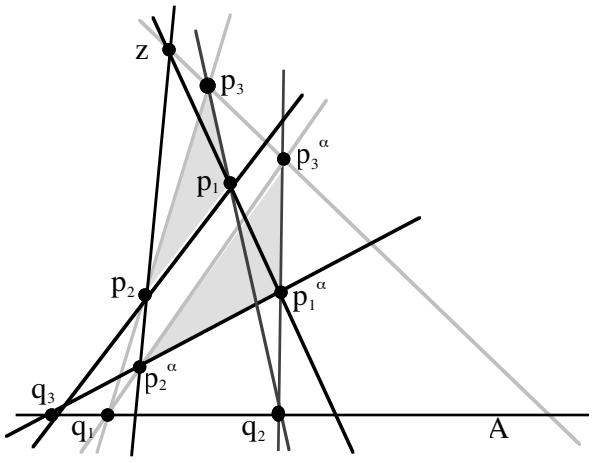
$$p_2^\alpha = (z \vee p_2)^\alpha \wedge (q_3 \vee p_1)^\alpha = (z \vee p_2) \wedge (q_3 \vee p_1^\alpha).$$



Für einen Punkt p_3, der weder auf $z \vee p_1$ noch auf $z \vee p_2$ liegt, können wir die obige Konstruktionen ebenfalls erwenden, um das Bild p_3^α zu konstruieren. Allerdings haben wir die Wahl, die Konstruktion über p_1 oder über p_2 durchzuführen. Nach (3.9) muß in beiden Fällen der gleiche Punkt p_3^α herauskommen. Mit $q_1 = (p_2 \vee p_3) \wedge A$ und $q_2 = (p_1 \vee p_3) \wedge A$ ist also

$$p_3^\alpha = (z \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2^\alpha) = (z \vee p_3) \wedge (q_2 \vee p_1^\alpha).$$

Die so erhaltene Konfiguration aus zehn Punkten und zehn Geraden wird *Desargues-Konfiguration* genannt.



Die beiden schraffiert gezeichneten Dreiecke werden *perspektivisch bzgl. z* genannt. Sind wie im Bild die Punkte q_1, q_2, q_3 kollinear, so heißen diese Dreiecke *perspektivisch bzgl. A*. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

(4.9) Satz. *Ist α eine (z, A)-Perspektivität und ist ∇ ein Dreieck, so daß jede Seite und jede Ecke von ∇ von α bewegt wird, so sind ∇ und das Bilddreieck ∇^γ perspektivisch bzgl. z und A.* □

Bemerkung. Nicht jede projektive Ebene besitzt Perspektivitäten. Es ist nicht bekannt, ob jede *endliche* projektive Ebene Perspektivitäten besitzt. Allerdings besagt ein Satz von Ostrom, daß jede endliche projektive Ebene viele Desargues-Konfigurationen besitzt. Somit ist nicht klar, ob die Existenz von Desargues-Konfigurationen die Existenz von Perspektivitäten nach sich zieht. Gibt es aber *genügend viele* Desargues-Konfigurationen, so besagt der folgende Satz von R. Baer, daß Perspektivitäten existieren. Wir benötigen zuvor eine Definition, um den Begriff *genügend viele* präzise fassen zu können.

(4.10) Definition. Eine projektive Ebene $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$ heißt (z, A)-*transitiv*, wenn es für alle Punkte $p, q \in P \setminus \{z\}$ mit $p, q \notin P_A$ und $z \vee p = z \vee q$ eine (z, A)-Perspektivität γ von $\mathcal{P}$ gibt mit $p^\gamma = q$. Die Ebene $\mathcal{P}$ heißt (z, A)-*desarguessch*, falls jedes Paar von bzgl. z perspektivischen Dreiecken ∇_1 und ∇_2, für das der Schnitt zweier korrespondierender Seitenpaare auf A liegt, auch perspektivisch bzgl. A ist.

(4.11) Satz (R. Baer). *Eine projektive Ebene ist genau dann (z, A)-transitiv, wenn sie (z, A)-desarguessch ist.*

Beweis. In (4.9) haben wir bewiesen, daß aus (z, A)-transitiv stets (z, A)-desarguessch folgt. Sei $\mathcal{P}$ also (z, A)-desarguessch. Seien also $p, p^* \in P \setminus \{z\}$ mit $p, p^* \notin P_A$ und $p \vee z = p^* \vee z$. Wir müssen eine (z, A)-Perspektivität γ angeben mit $p^\gamma = p^*$. Dazu definieren wir eine Abbildung $\alpha = \alpha_{pp^*}$ auf der Punktmenge $P_\alpha := (P \setminus P_{p \vee p^*}) \cup \{z\}$ durch

$$x^\alpha = \begin{cases} x & \text{falls } x = z \text{ oder } x \in P_A \\ (((x \vee p) \wedge A) \vee p^*) \wedge (x \vee z) & \text{sonst.} \end{cases}$$

In analoger Art und Weise können wir für jeden Punkt $q \in P_\alpha \setminus \{z\}$, der nicht auf A liegt, eine Abbildung $\beta = \alpha_{qq^*}$ mit $q^* = q^\alpha$ definieren. Wir zeigen, daß $r^\alpha = r^\beta$ für alle Punkte $r \in (P \setminus (P_\alpha \cup P_\beta) \cup \{z\}$ gilt. Für $r \in p \vee q$ ist wegen

$$(r \vee p) \wedge A = (r \vee q) \wedge A = (p^* \vee q^*) \wedge A$$

auch $((r \vee p) \wedge A) \vee p^* = ((r \vee q) \wedge A) \vee q^*$ und damit $r^\alpha = r^\beta$. Sei nun r nicht auf $p \vee q$. Setze dann $r^* = r^\alpha$, $u = (p \vee q) \wedge A$, $v = (r \vee q) \wedge A$ und $w = (r \vee p) \wedge A$. Dann sind die Dreiecke pqr und $p^*q^*r^*$ perspektiv bzgl. z. Nach Definition von α ist außerdem $(p \vee q) \wedge (p^* \vee q^*) = u$ und $(r \vee p) \wedge (r^* \vee p^*) = w$. Da $\mathcal{P}$ (z, A)-desarguessch ist und u, w auf A liegen, muß auch $(r \vee q) \wedge (r^* \vee q^*)$ auf A liegen, d.h. es ist $(r \vee q) \wedge A = v = (r^* \vee q^*) \wedge A$. Hieraus folgt sofort $r^\beta = r^*$. Auf diese Weise können wir die Abbildung α also auf ganz

P fortsetzen. Nun müssen wir α auf den Geraden definieren. Wir setzen $A^\alpha = A$ und $(p \vee p^*)^\alpha = p \vee p^*$. Für alle anderen Geraden L wähle einen Punkt s auf L, der nicht auf A und nicht auf $p \vee p^*$ liegt und setze $L^\alpha = (L \wedge A) \vee s^\alpha$. Diese Definition ist wohldefiniert, denn für $t \in P_L$ sind die Dreiecke pts und $p^* t^\alpha s^\alpha$ perspektiv bzgl. z und $(p \vee t) \wedge (p^* \vee t^\alpha)$, $(p \vee s) \wedge (p^* \vee s^\alpha) \in P_A$. Da $\mathcal{P}$ (z, A)-desarguessch ist, liegt auch $(s \vee t) \wedge (s^\alpha \vee t^\alpha)$ auf A, d.h. die Punkte $L \wedge A$, s^α und t^α sind kollinear und liegen auf L^α. Also ist α auf den Geraden wohldefiniert. Nach Konstruktion erhält α die Inzidenz. Die Bijektivität von α ist ebenfalls klar. Also ist α die gesuchte Kollineation. □

(4.12) Definition. Eine projektive Ebene $\mathcal{P}$ heißt (K, L)-*transitiv*, falls sie (z, L)-transitiv für alle $z \in P_K$ ist. Ist $\mathcal{P}$ (L, L)-transitiv, so heißt $\mathcal{P}$ eine Translationsebene bzgl. der Translationsachse L. Ist jede Gerade von $\mathcal{P}$ eine Translationachse, so wird $\mathcal{P}$ eine *Moufang-Ebene* genannt. Eine projektive Ebene heißt *desarguessch*, falls sie für alle Punkte z und alle Geraden A (z, A)-desarguessch ist.

Bemerkung. Nach dem Satz von Baer ist also jede Moufang-Ebene (z, A)-desarguessch für alle inzidenten Punkt-Geradenpaare (z, A).

(4.13) Lemma. *Eine projektive Ebene $\mathcal{P}$ ist genau dann (y, A)-transitiv und (z, A)-transitiv für zwei verschiedene Punkte $y, z \in P_A$, wenn A eine Translationsachse von $\mathcal{P}$ ist.*

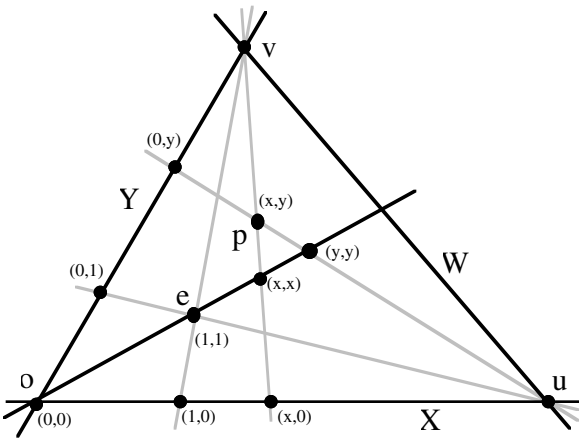
Beweis. Ist A eine Translationsachse, so ist die Behauptung des Lemmas trivial. Sei umgekehrt $\mathcal{P}$ sowohl (y, A)-transitiv als auch (z, A)-transitiv. Sei $x \in P_A$ und wähle Punkte $a, b \neq x$ mit $a \vee x = b \vee x$, die nicht auf A liegen. Wir müssen zeigen, daß es (x, A)-Perspektivität τ gibt mit $a^\tau = b$. Setze $c = (y \vee a) \wedge (z \vee b)$. Nach Voraussetzung existiert eine (y, A)-Perspektivität α mit $a^\alpha = c$ und eine (y, A)-Perspektivität β mit $c^\beta = b$. Dann besitzt $\tau = \alpha\beta$ die Gerade A als Achse und es gilt $a^\tau = b$. Nach (4.2) besitzt τ ein Zentrum t. Dann ist $a \vee t = b \vee t$, also $t = (a \vee b) \wedge A = x$. □

KAPITEL 5

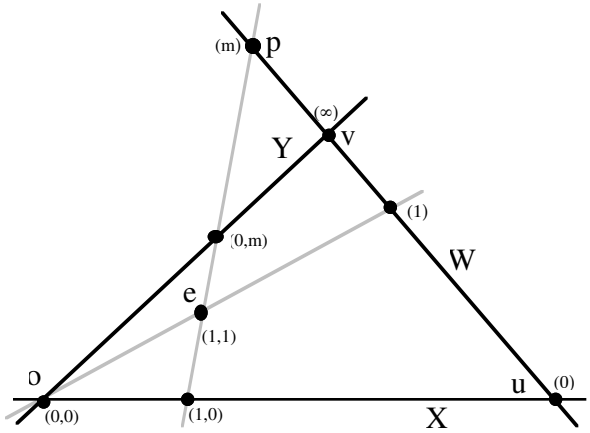
Koordinatisierung affiner und projektiver Ebenen

Es sei in diesem Kapitel $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ stets eine projektive Ebene. Im folgenden wollen wir $\mathcal{P}$ eine algebraische Struktur (T, τ) zuordnen. Diese Zuordnung wird abhängig sein von der Wahl eines Vierecks (o, u, v, e), d.h. für verschiedene solche Vierecke können die entstehenden algebraischen Strukturen nichtisomorph sein.

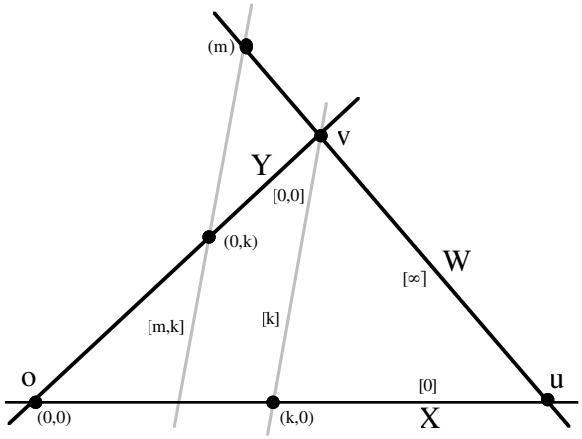
(5.1) Koordinatisierung einer projektiven Ebene. Sei T eine Menge mit den Symbolen 0 und 1, wobei $0 \neq 1$ gelte. Die Menge $T \cup \{\infty\}$ sei gleichmächtig zu einer (beliebigen) Punktreihe. Des Weiteren wählen wir ein Symbol ∞, welches nicht in T liegt. Setze $X = o \vee u$, $Y = o \vee v$ $E = o \vee e$, sowie $W = O \vee u$. Betrachte die bei W geschlitzte affine Ebene $\mathcal{A} = (P', \mathcal{L}', \mathcal{F}')$. Den Punkten aus P' werden wir wie folgt Paare von Elementen aus T zuordnen. Die Punkte auf W werden speziell behandelt. Als erstes ordnen wir jedem Punkt auf $E \in \mathcal{L}'$ ein Paar (t, t) für $t \in T$ zu. Dieses ist möglich, da T gleichmächtig zur *affinen* Gerade E ist. Dabei wollen wir dem Punkt o das Paar $(0, 0)$ und dem Punkt e das Paar $(1, 1)$ zuordnen. Der affine Punkt $((t, t) \vee v) \wedge X$ bekommt die *Koordinaten* $(t, 0)$; entsprechend ordnen wir $((t, t) \vee u) \wedge Y$ die *Koordinaten* $(0, t)$ zu. Schließlich setzen wir die Koordinaten (x, y) eines beliebigen Punktes $p \in P'$ durch $(x, 0) = (p \vee v) \wedge X$ und $(0, y) = (p \vee u) \wedge Y$ fest. Damit haben alle affinen Punkte Koordinaten zugewiesen bekommen.



Um die Punkte der *projektiven Ebene* zu koordinatisieren, fehlen noch die Punkte auf der Geraden W. Dazu setzen wir die Koordinaten von v als (∞). Für $p \in P_W$ mit $p \neq v$ betrachten wir die Koordinaten $(0, m)$ des (affinen) Punktes $(p \vee (1,0)) \wedge Y$. Wir setzen in diesem Falle (m) als Koordinaten von p. Insbesondere bekommt u die Koordinaten (0).



Die Koordinatisierung der affinen Ebene $\mathcal{A}$ bzw. der projektiven Ebene $\mathcal{P}$ wird beendet durch die Vergabe von Koordinaten an die Geraden. Dies wird wie in der untenstehenden Abbildung getan. Bei der Koordinate $[m, k]$ deuten wir m als *Steigung* und k als den *y-Achsenabschnitt* der zugehörigen Geraden.



Als nächstes wollen wir mit Hilfe der soeben eingeführten *Koordinatisierung* eine algebraische Struktur auf der Menge T definieren. Dies führt zum Begriff des *Ternärkürpers*.

(5.2) Ternärkörper. Wir definieren auf T eine *ternäre Operation* $\tau : T \times T \times T \to T$ wie folgt. Für $m, x, k \in T$ setzen wir $\tau(m, x, k) = y$, falls der Punkt mit den Koordinaten (x, y) auf der Geraden mit den Koordinaten $[m, k]$ liegt. Das Paar (T, τ) wird ein *Ternärkörper* genannt.

Bemerkung. Beachte, daß die ternäre Verknüpfung auch oft mit vertauschten Rollen der

Argumente und des Funktionswertes definiert wird, siehe dazu etwa Hughes-Piper; dort sind das dritte Argument und der Funktionswert miteinander vertauscht.

(5.3) Lemma. *Für den oben definierten Ternärkörper (T, τ) gelten die folgenden Eigenschaften:*

(TK1) $\tau(0, x, k) = \tau(m, 0, k) = k$ *und* $\tau(m, 1, 0) = \tau(1, m, 0) = m$ *für alle* $m, x, k \in T$.

(TK2) Für alle $m, x, y \in T$ *gibt es genau ein* $k \in T$ *mit* $\tau(m, x, k) = y$.

(TK3) Für alle $m, m', k, k' \in T$ *mit* $m \neq m'$ *gibt es genau ein* $x \in T$ *mit* $\tau(m, x, k) = \tau(m', x, k')$.

(TK4) Für alle $x, x', y, y' \in T$ *mit* $x \neq x'$ *gibt es genau ein* $m \in T$ *und genau ein* $k \in T$ *mit* $y = \tau(m, x, k)$ *und* $y' = \tau(m, x', k)$.

Beweis. (TK1) Aus $\tau(0, x, k) = y$ folgt, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden $[0, k]$ liegt. Diese Gerade ist gegeben durch $L = (0) \vee (0, k)$. Der Punkt (x, y) liegt andererseits auf der Geraden $K = (0) \vee (0, y)$. Wegen $(0) \in K \wedge L$ und der Tatsache, daß (x, y) einen affinen Punkt (aus $\mathcal{A}$) bezeichnet, folgt $K = L$ und damit $y = k$, da der Schnittpunkt von K und L mit W eindeutig ist. Analog wird in den anderen Fällen $\tau(m, 0, k) = y$ geschlossen.
(TK2) Es ist $\tau(m, x, k) = y$ genau dann, wenn (x, y) auf $[m, k]$ liegt. Dabei sind $[m, k]$ die Koordinaten der Geraden $L = (m) \vee (0, k)$. Wegen $m \neq \infty$ ist $L \neq W$ und damit haben L und W einen eindeutigen Schnittpunkt $(0, k)$, d.h. es gilt (TK2).
(TK3) *Eindeutiger Schnittpunkt affiner Geraden.* Sei $L = (m) \vee (0, k)$ und $L' = (m') \vee (0, k')$. Wegen $m \neq m'$ liegt der eindeutige Schnittpunkt p nicht auf der Geraden W. Also hat p Koordinaten der Form (x, y) und es gilt nach Definition $\tau(m, x, k) = \tau(m', x, k')$.
(TK4) *Eindeutige Verbindungsgerade.* □

(5.4) Beispiel. Jeder Schiefkörper $(K, +, \cdot)$ wird durch die Setzung $\tau(a, x, b) = ax + b$ zu einem Ternärkörper.

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß jede algebraische Struktur (T, τ), die die Axiome (TK1) bis (TK4) erfüllt, eine affine Ebene eindeutig festlegt (die natürlich zu einer projektiven Ebene vervollständigt werden kann).

(5.5) Lemma. *Sei (T, τ) eine algebraische Struktur (T, τ), die die Axiome (TK1) bis (TK4) erfüllt. Setze*

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in T\},$$
$$\mathcal{G} = \{[m, k] \mid m, k \in T\} \cup \{[m] \mid m \in T\},$$
$$\mathcal{F}' = \{((x, y), [m, k]) \mid (x, y) \in A, [m, k] \in \mathcal{G}, \tau(m, x, k) = y\} \cup \{(x, y), [m]) \mid x = m\}.$$

Dann ist $\mathcal{A} = (A, \mathcal{G}, \mathcal{F}')$ eine affine Ebene.

Beweis. Wir zeigen nur, daß je zwei Punkte eine eindeutige Verbindungsgerade haben. Die Existenz eines eindeutigen Schnittpunktes wird analog verifiziert. Seien also $(x,y),(x',y')$ zwei verschiedene Punkte aus A. Ist $x \neq x'$, so gibt es nach (TK4) genau ein $m \in T$ und genau ein $k \in T$ mit $y = \tau(m,x,k)$ und $y' = \tau(m,x',k)$. Also liegen die Punkte $(x,y),(x',y')$ auf der eindeutig bestimmten Geraden $[m,k]$. Ist $x = x'$, so gibt es nach Definition der Fahnenmenge $\mathcal{F}'$ genau eine Gerade $[x]$, auf der die beiden Punkte liegen. Die vier Punkte $((0,0),(0,1),(1,0),(1,1))$ bilden ein Viereck. Wir beweisen zuletzt, daß es eindeutige Parallelen gibt. Sei $(x,y) \in A$. Ist die Gerade von der Form $[m]$, so ist $[x]$ parallel zu $[m]$ und geht durch (x,y). Nach Definition der Fahnenmenge $\mathcal{F}'$ ist diese Gerade auch die einzige mit dieser Eigenschaft. Sei nun die betrachtete Gerade von der Form $[m,k]$. Dann gibt es nach (TK2) genau ein $t \in T$ mit $\tau(m,x,t) = y$, d.h. es gibt genau eine Gerade $[m,t]$ durch (x,y) mit Steigung m. Dies ist nach Definition von $\mathcal{F}'$ aber die einzige Gerade durch (x,y), die $[m,k]$ nicht schneidet. □

Bemerkung. Die letzten beiden Lemmata haben also gezeigt, daß das geometrische Konzept einer affinen Ebene (mit zwei ausgezeichneten Geraden und einem außerhalb dieser Geraden liegenden Punkt) und das algebraische Konzept eines Ternärkörpers äquivalent sind. Die Fahnenmenge $\mathcal{F}'$ kann auf die projektive Ebene

$$\mathcal{P} = (A \cup \{(x) \mid x \in T \cup \{\infty\}\}, \mathcal{G} \cup \{[\infty]\}, \mathcal{F})$$

wie folgt ausgedehnt werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \mathcal{F}' &\cup \{((x),[x,k]) \mid x \in T\} \\ &\cup \{((\infty),[x]) \mid x \in T\} \cup \{((x),[\infty]) \mid x \in T\} \cup \{((\infty),[\infty])\}.\end{aligned}$$

(5.6) Definition. Ein Paar $(L,\cdot)$ heißt *Loop*, falls L ein Element 1 enthält und die Operation $\cdot : L \times L \to L$ folgende Axiome erfüllt:

(LO1) Für alle $a \in L$ ist $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.

(LO2) Für alle $a,b \in L$ gibt es genau ein $y \in L$ mit $a \cdot y = b$.

(LO3) Für alle $a,b \in L$ gibt es genau ein $x \in L$ mit $x \cdot a = b$.

Das Element 1 wird als *neutrales Element* von L bezeichnet. Erfüllt $(L,\cdot)$ nur die Axiome (LO2) und (LO3), so heißt $(L,\cdot)$ eine *Quasigruppe*.

(5.7) Lemma. *Sei (T,τ) ein Ternärkörper gemäß (TK1) bis (TK4). Für $a,b \in T$ setze $a+b = \tau(a,1,b)$ und für $a,b \neq 0$ sei $a \cdot b = \tau(a,b,0)$. Dann sind $(T,+)$ und $(T^*,\cdot)$ Loops mit 0 bzw. mit 1 als Neutralelement. Dabei bedeutet $T^* = T \setminus \{0\}$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst $(T,+)$. Nach (TK1) ist 0 ein Neutralelement, d.h. 0 erfüllt (LO1). Die Gleichung $a + y = b$ besitzt nach (TK2) eine eindeutige Lösung y. Es bleibt

die Gleichung $x + a = b$ in x zu untersuchen. Nach (TK4) gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x, k \in T$ mit $\tau(x, 0, k) = a$ und $\tau(x, 1, k) = b$. Wegen $k = \tau(x, 0, k) = a$ folgt damit (LO3). Wir untersuchen nun $(T^*, \cdot)$. Wir müssen als erstes nachweisen, daß T^* abgeschlossen ist unter $\cdot$. Sei also $a \cdot b = 0$ mit $b \neq 0$. Nach (TK4) besitzt die Gleichung $x \cdot b = \tau(x, b, 0) = \tau(x, 0, 0) = 0$ eine eindeutige Lösung $x \in T$. Da offensichtlich $x = 0$ eine Lösung dieser Gleichnung ist, folgt $a = 0$. Nach (TK1) ist 1 ein Neutralelement bzgl. $\cdot$, d.h. 1 erfüllt (LO1). Nach (TK3) gibt es wegen $a \neq 0$ genau ein $y \in T$ mit $a \cdot y = \tau(a, y, 0) = \tau(0, y, b) = b$, also gilt (LO2) für $(T^*, \cdot)$. Schließlich gibt es nach (TK4) wegen $a \neq 0$ genau ein $x \in T$ und genau ein $k \in T$ mit $b = \tau(x, a, k)$ und $0 = \tau(x, 0, k)$. Aus der zweiten Gleichung folgt $k = 0$ und die erste Gleichung liefert nun $b = x \cdot a$. Dies beweist (LO3). □

KAPITEL 6

(A,z)-Transitivität und Koordinaten

In diesem Kapitel wollen wir algebraische Eigenschaften eines Ternärkörpers T übersetzen in geometrische Eigenschaften der zu T gehörenden projektiven Ebene und umgekehrt. Es sei also (T, τ) stets ein Ternärkörper und es sei $\mathcal{P} = (P, \mathfrak{L}, \mathcal{F})$ diejenige projektive Ebene, die bzgl. des Vierecks (o, u, v, e) durch T koordinatisiert wird.

(6.1) Definition. Ein Ternärkörper (T, τ) heißt *linear*, falls $\tau(a, b, c) = a \cdot b + c$ für alle $a, b, c \in T$ gilt, wobei $+$ und $\cdot$ wie in (5.7) definiert sind.

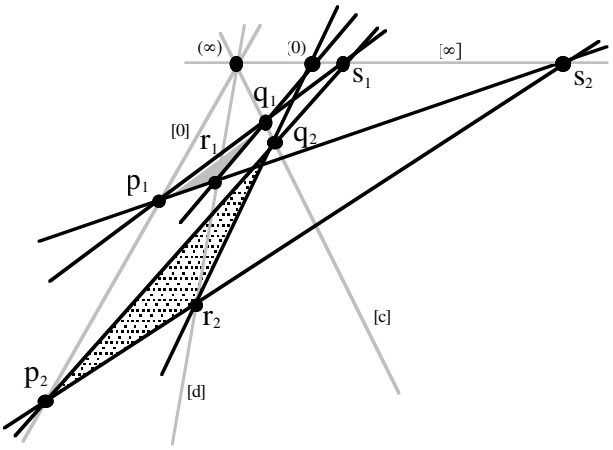
(6.2) Satz. *Ein Ternärkörper (T, τ) ist genau dann linear, wenn je zwei Dreiecke $p_1q_1r_1$ und $p_2q_2r_2$,*

(i) die perspektiv bzgl. (∞) sind,

(ii) die je einen Punkt p_i auf der Geraden $[0]$ haben,

(iii) deren Geraden $p_1 \vee q_1$, $p_2 \vee q_2$ und $p_1 \vee r_1$, $p_2 \vee r_2$ sich auf $[\infty]$ in Punkten s_1 und s_2 schneiden,

die Eigenschaft haben, daß die Gerade $q_1 \vee r_1$ genau dann durch (0) geht, wenn die Gerade $q_2 \vee r_2$ durch (0) geht.



Beweis. Es sei die Situation wie in der Abbildung oben gegeben. Es sei $s_1 = (m_1)$ und $s_2 = (m_2)$ mit $m_1, m_2 \in T$. Wir nehmen an, daß $(q_1 \vee r_1) \wedge [\infty] = (0)$ ist. Des Weiteren sei $p_1 = (0, a_1)$ und $p_2 = (0, a_2)$, sowie $q_1 = (c, b_1)$ und $q_2 = (c, b_2)$. Dann ist $r_1 = (d, b_1)$. Hat

r_2 die Koordinaten (d, b_3), so gilt die im Satz beschriebene Schließungseigenschaft genau dann, wenn $b_2 = b_3$ ist.

Gilt die Schließungseigenschaft, so haben wir also $b_2 = b_3$. Da p_1, q_1, s_1 und p_1, r_1, s_2 jeweils kollinear sind, gilt

$$\tau(m_1, c, a_1) = b_1 = \tau(m_2, d, a_1).$$

Aus der Kollinearität von p_2, q_2, s_1 und p_2, r_2, s_2 folgt ebenso

$$\tau(m_1, c, a_2) = b_2 = \tau(m_2, d, a_2).$$

Nach Voraussetzung müssen diese beiden Gleichungen für beliebige m_i, a_1 und c gelten. Für $a_2 = 0$ und $m_2 = 1$ gilt nach der zweiten Gleichung $m_1 \cdot c = b_2 = d$. In die erste Gleichung eingesetzt ergibt dies

$$\tau(m_1, c, a_1) = \tau(1, d, a_1) = d + a_1 = m_1 \cdot c + a_1,$$

d.h. (T, τ) ist linear. Umgekehrt folgt aus der Linearität von T und der Kollinearität oben genannter Punkte die Gleichungen

$$m_1 \cdot c + a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad m_2 \cdot d + a_1 = b_1.$$

Da $(T, +)$ eine Loop ist, folgt also $m_1 \cdot c = m_2 \cdot d$. Analog ergibt die Kollinearität der Punkte p_2, q_2, s_1 und p_2, r_2, s_2 die Relation

$$m_1 \cdot c + a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad m_2 \cdot d + a_2 = b_3.$$

Wegen $m_1 \cdot c = m_2 \cdot d$ folgt hieraus $b_2 = b_3$, was zu zeigen war. □

(6.3) Satz. *Ein Ternärkörper (T, τ) ist genau dann linear und besitzt eine assoziative Addition $+$, wenn die projektive Ebene $\mathcal{P}$ $((\infty), [\infty])$-transitiv ist. Ein solcher Ternärkörper wird eine kartesische Gruppe genannt.*

Beweis. (1) Es sei (T, τ) linear die Addition $+$ sei assoziativ. Es sei $\mathcal{A} = (A, \mathcal{G})$ die affine Spezialisierung von $\mathcal{P}$ bezüglich der Geraden $[\infty]$. Seien $p, q \in A$ kollinear mit (∞). Wir müssen eine $((\infty), [\infty])$-Perspektivität γ finden, die p auf q abbildet. Wegen $p \in A$ hat p Koordinaten der Form (r, s). Da $p, q, (\infty)$ kollinear sind, hat q Koordinaten der Form (r, t). Da $(T, +)$ eine Loop ist, hat die Gleichung $t = s + x$ eine eindeutige Lösung $x = u$. Nun können wir γ wie folgt definieren. Dabei genügt es, γ auf $\mathcal{A}$ zu definieren, siehe (1.17). Wir setzen

$$\gamma : A \to A : (x, y) \mapsto (x, y + u) \quad \text{und} \quad \gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{G} : \begin{cases} [m, k] & \mapsto [m, k + u] \\ [k] & \mapsto [k] \end{cases}$$

Dann ist γ eine bijektive Abbildung von A auf sich und von $\mathcal{G}$ auf sich (verwende dazu die Loop-Eigenschaften der additiven Loop $(T,+)$). Geraden der Form $[k]$ werden festgelassen und es wird nach Konstruktion der Punkt p auf q abgebildet. Wenn wir also zeigen können, daß γ eine Kollineation von $\mathcal{A}$ ist, so ist die Fortsetzung von γ auf $\mathcal{P}$ die gesuchte $((\infty),[\infty])$-Perspektivität. Nun inzidiert (x,y) genau dann mit $[m,k]$, wenn $\tau(m,x,k)=mx+k=y$ ist. Andererseits inzidiert $(x,y)^\gamma$ genau dann mit $[m,k]^\gamma$, wenn $mx+(k+u)=y+u$ ist. Aufgrund der Assoziativität der Addition ist $mx+(k+u)=(mx+k)+u$, d.h. wir haben $mx+(k+u)=y+u$ genau dann, wenn $mx+k=y$ gilt. Mit anderen Worten inzidiert (x,y) genau dann mit $[m,k]$, wenn $(x,y)^\gamma$ mit $[m,k]^\gamma$ inzidiert. Schließlich liegt (x,y) genau dann $[k]$, wenn $x=k$ ist, d.h. wenn $(x,y)^\gamma$ auf $[k]^\gamma$ liegt. Damit haben wir gezeigt, daß γ die Inzidenz in $\mathcal{A}$ erhält.
(2) Sei $\mathcal{P}$ nun $((\infty),[\infty])$-transitiv. Nach dem Satz von Baer (4.11) ist $\mathcal{P}$ $((\infty),[\infty])$-desarguessch und damit linear nach (6.2). Nach Voraussetzung gibt es für jeden Punkt $(0,u)$ eine $((\infty),[\infty])$-Perspektivität γ mit $(0,0)^\gamma=(0,u)$. Für jeden Punkt (x,y) gilt dann $(x,y)^\gamma=(x,y^\alpha)$, da die zweite Koordinate nur von u und y abhängt. Dabei ist $\alpha: T\to T$ eine bijektive Abbildung mit $0^\alpha=u$. Wegen $[k]^\gamma=[k]$ und $[\infty]^\gamma=[\infty]$ folgt $(m)^\gamma=(m)$ und $(\infty)^\gamma=(\infty)$. Außerdem haben wir $[m,k]^\gamma=((0,k)\vee(m))^\gamma=(0,k^\alpha)\vee(m)=[m,k^\alpha]$. Da γ inzidenzerhaltend ist, gilt $mx+k=y$ genau dann, wenn $mx+k^\alpha=y^\alpha$ gilt, d.h. wir haben

$$mx+k^\alpha=(mx+k)^\alpha \quad \text{für alle } m,x,y\in T.$$

Für $k=0$ und $m=1$ liefert diese Gleichung $x+u=x+0^\alpha=x^\alpha$. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein und setzen wieder $m=1$, so folgt

$$x+(k+a)=(x+k)+a,$$

d.h. die Addition ist assoziativ. □

(6.4) Satz. *Der Ternärkörper (T,τ) sei eine kartesische Gruppe. Es gilt in (T,τ) genau dann das Links-Distributivgesetz $x(u+v)=xu+xv$ für alle $x,u,v\in T$, wenn die projektive Ebene $\mathcal{P}$ $((0),[\infty])$-transitiv ist. Eine kartesische Gruppe, in der das Links-Distributivgesetz gilt, wird Quasikörper genannt.*

Beweis. (1) Es sei (T,τ) eine kartesische Gruppe, in der das Links-Distributivgesetz gilt. Es sei wieder $\mathcal{A}=(A,\mathcal{G})$ die affine Spezialisierung von $\mathcal{P}$ bezüglich $[\infty]$. Wie im Beweis zuvor müssen wir eine (affine) $((0),[\infty])$-Perspektivität γ finden, die $(0,0)$ auf $(0,u)$ für ein vorgegebenes $u\in T$ abbildet. Wir setzen

$$\gamma: A\to A: (x,y)\mapsto(x+u,y) \quad \text{und} \quad \gamma:\mathcal{G}\to\mathcal{G}: \begin{cases} [m,k] & \mapsto [m,-mu+k] \\ [k] & \mapsto [u+k] \end{cases}$$

Beachte dabei, daß die Operation $-$ wohldefiniert ist, da nach Voraussetzung $(T,+)$ eine Gruppe ist. Dann ist γ eine bijektive Abbildung von A auf sich und von $\mathcal{G}$ auf sich (verwende wieder die Loop-Eigenschaft der additiven und der multiplikativen Loop). Alle Geraden der Form $[0,k]$ werden festgelassen. Da γ keinen Punkt von A festläßt, muß γ alle Punkte auf $[\infty]$ fixieren nach (4.2). Also müssen noch wir zeigen, daß γ die Inzidenz erhält. Es ist $(x,y)^\gamma = (x+u,y)$ genau dann inzident mit der Geraden $[m,k]^\gamma = [m,-mu+k]$, wenn $\tau(m,x+u,-mu+k) = y$ ist. Aufgrund der Linearität, der Assoziativität und der Links-Distributivität ist dies äquivalent mit $mx+mu+(-mu+\ k) = mx+k = y$. Dies bedeutet aber, daß (x,y) mit $[m,k]$ inzidiert. Für Geraden der Form $[k]$ ist es sofort klar, daß γ inzidenzerhaltend ist.
(2) Sei umgekehrt $\mathcal{P}$ $((0),[\infty])$-transitiv. Sei γ die $((0),[\infty])$-Perspektivität, die $(0,0)$ auf $(u,0)$ abbildet. Wie im letzten Beweis ist dann $(x,y)^\gamma = (x^\alpha,y)$ für eine bijektive Abbildung $\alpha : T \to T$, für die $0^\alpha = u$ gilt. Damit ist die Wirkung von γ auf den Punkten von $\mathcal{A}$ durch α bestimmt. Desweiteren ist $[k]^\gamma = [u+k]$ und es folgt $[m,k]^\gamma = [m,\beta(m,k)]$. Da $(0,k)$ auf $[m,k]$ liegt, liegt auch $(u,k) = (0,k)^\gamma$ auf $[m,k]^\gamma = [m,\beta(m,k)]$, d.h. es ist $mu+\beta(m,k) = k$ bzw. $\beta(m,k) = k-mu$ (dies können wir so schreiben, da $(T,+)$ eine Gruppe ist). Damit haben wir $mx+k = y$ genau dann, wenn $mx^\alpha+(k-mu) = y$ gilt. Also ist

$$mx^\alpha + (k-mu) = y = mx+k$$

für alle $m,x,k,u \in T$. Setzen wir $m=1$ und $k=0$, so folgt hieraus $x^\alpha - u = x$ bzw. $x^\alpha = x+u$. Eingesetzt in die obige Gleichung erhalten wir für $k=0$

$$m(x+u) = mx+mu,$$

d.h. (T,τ) ist links-distributiv. □

(6.5) Folgerung. *Der Ternärkörper (T,τ) ist genau dann ein Quasikörper, wenn $\mathcal{P}$ eine Translationsebene mit Translationsgeraden $[\infty]$ ist.*

Beweis. Ist (T,τ) ein Quasikörper, so ist $\mathcal{P}$ nach den beiden letzten Sätzen sowohl $((\infty),[\infty])$-transitiv als auch $((0),[\infty])$-transitiv. Nach (4.13) ist dann $[\infty]$ eine Translationsgerade von $\mathcal{P}$. Die Umkehrung ist trivial. □

Bemerkung. Man kann zeigen, daß die additive Gruppe eines Quasikörpers stets eine abelsche Gruppe ist. Wir haben gesehen, daß sich die Elationen mit Achse $[\infty]$ auf die Struktur der additiven Loop $(T,+)$ auswirken. Es wird sich herausstellen, daß die Struktur der multiplikativen Loop $(T,\cdot)$ durch die Existenz von Homologien beeinflußt wird.

(6.6) Satz. *Der Ternärkörper (T,τ) ist genau dann linear und erfüllt multiplikativ das Assoziativgesetz, wenn die projektive Ebene $\mathcal{P}$ $((0),[0])$-transitiv ist.*

Beweis. (1) Es sei (T,τ) linear mit assoziativer Multiplikation. Sei $u \in T \setminus \{0\}$. Wir suchen eine $((0),[0])$-Perspektivität γ, die $(1,0)$ auf $(u,0)$ abbildet. Es sei dazu $x = v$ die eindeutige Lösung der Gleichung $x \cdot u = 1$ in $(T \setminus \{0\}, \cdot)$. Wir setzen

$$\gamma : \begin{cases} P \to P : (x,y) \mapsto (ux,y),\ (m) \mapsto (mv),\ (\infty) \mapsto (\infty) \\ \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} : [m,k] \mapsto [mv,k],\ [k] \mapsto [uk],\ [\infty] \mapsto [\infty] \end{cases}$$

und müssen noch nachweisen, daß γ tatsächlich eine Kollineation von $\mathcal{P}$ ist. Dann ist klar, daß γ eine $((0),[0])$-Perspektivität ist, die das Gewünschte leistet. Da (T,τ) linear ist, liegt (x,y) genau dann auf $[m,k]$, wenn $mx + k = y$ gilt. Entsprechend ist $(x,y)^\gamma$ genau dann auf $[m,k]^\gamma$, wenn $(mv)(ux) + k = y$ gilt. Da die Multiplikation assoziativ ist, sind nach Definition von v beide Bedingungen gleichwertig. Die fehlenden Fälle sind ebenso einfach nachzuweisen.
(2) Sei umgekehrt $\mathcal{P}$ $((0),[0])$-transitiv. Sei γ die $((0),[0])$-Perspektivität, die $(1,0)$ auf $(u,0)$ abbildet. Dann gibt es Bijektionen $\alpha, \beta : T \to T$ mit $(m)^\gamma = (m^\alpha)$ und $0^\alpha = 0$, sowie $(x,0)^\gamma = (x^\beta, 0)$ und $0^\beta = 0$, $1^\beta = u$. Wegen $(\infty)^\gamma = (\infty)$ ist

$$[k]^\gamma = ((k,0) \vee (\infty))^\gamma = (k^\beta, 0) \vee (\infty) = [k^\beta].$$

Da γ alle Geraden durch (0) fixiert, ist

$$(x,y)^\gamma = (((x,0) \vee (\infty)) \wedge [0,y])^\gamma = (x^\beta, y)$$

und wir erhalten ebenso

$$[m,k]^\gamma = [m^\alpha, k].$$

Also gilt $\tau(m,x,k) = \tau(m^\alpha, x^\beta, k)$ für alle $x,m,k \in T$. Insbesondere haben wir für $k = 0$ die Gleichung $mx = m^\alpha x^\beta$. Für $x = 1$ ergibt dies $m = m^\alpha u$. Setzen wir

$$\delta : T \setminus \{0\} \to T \setminus \{0\} : x \mapsto x \cdot u,$$

so folgt aus der letzten Gleichung $\delta = \alpha^{-1}$ und daher ist $u^\alpha = 1$, also $ux = x^\beta$. Dies ergibt $mx = m^\alpha(ux)$. Für $m = vu$ haben wir

$$(vu)x = (vu)^\alpha(ux) = (v^\delta)^\alpha(ux) = v(ux).$$

Diese Gleichung gilt für alle $u,v,x \in T \setminus \{0\}$, da δ bijektiv ist. Also ist die Multiplikation assoziativ. Schließlich gilt $\tau(m,x,k) = \tau(m^\alpha, ux, k)$ für alle x,k,m,u mit $u \neq 0$. Für $m = u$ folgt hieraus $\tau(u,x,k) = \tau(1,ux,k) = ux + k$, d.h. (T,τ) ist linear. □

(6.7) Satz. *Der Ternärkörper (T,τ) sei linear. Es erfüllt (T,τ) genau dann das multiplikative Assoziativgesetz und das Links-Distributivgesetz, wenn die projektive Ebene $\mathcal{P}$ $((\infty),[0,0])$-transitiv ist.*

Beweis. (1) Es sei (T,τ) linear mit assoziativer Multiplikation und Links-Distributivgesetz. Sei $u \in T \setminus \{0\}$. Wie im Satz zuvor suchen wir eine $((\infty),[0,0])$-Perspektivität γ mit $(0,1)^\gamma = (0,u)$. Diese ist gegeben durch

$$\gamma : \begin{cases} P \to P : (x,y) \mapsto (x,uy),\ (m) \mapsto (um),\ (\infty) \mapsto (\infty) \\ \mathfrak{L} \to \mathfrak{L} : [m,k] \mapsto [um,uk],\ [k] \mapsto [k],\ [\infty] \mapsto [\infty] \end{cases}$$

(2) Sei umgekehrt $\mathcal{P}$ $((\infty),[0,0])$-transitiv. Sei γ die $((0),[0])$-Perspektivität, die $(0,1)$ auf $(0,u)$ abbildet. Wie zuvor gibt es bijektive Abbildungen $\alpha,\beta : T \to T$ mit $0^\alpha = 0 = 0^\beta$, $1^\beta = u$ und $(m)^\gamma = (m^\alpha)$, $(x,y)^\gamma = (x,y^\beta)$, $[m,k]^\gamma = [m^\alpha,k^\beta]$. Da (T,τ) linear ist, gilt $mx+k=y$ genau dann, wenn $m^\alpha x + k^\beta = y^\beta$ gilt. Also haben wir

$$m^\alpha x + k^\beta = (mx+k)^\beta$$

für alle $m,k,x \in T$. Für $k=0$ und $x=1$ erhalten wir $m^\alpha = m^\beta$ für alle $m \in T$, d.h. es ist $\alpha = \beta$. Setzen wir $m=1$ und $k=0$, so ergibt sich $1^\alpha x = ux = x^\alpha$. Damit läßt sich unsere Gleichung schreiben als

$$(um)x + uk = u(mx+k)$$

für alle $u,m,k,x \in T$. Für $k=0$ ergibt dies die Assoziativität der Multiplikation und für $m=1$ ist dies gerade die Links-Distributivität. □

(6.8) Definition. Ein Quasikörper mit assoziativer Multiplikation wird *Fastkörper* genannt.

(6.9) Folgerung. *Der Ternärkörper (T,τ) ist genau dann ein Fastkörper, wenn eine der folgenden Bediungungen erfüllt ist:*

(i) die projektive Ebene $\mathcal{P}$ ist eine Translationsebene mit Translationsachse $[\infty]$, die $((\infty),[0,0])$-trabsitiv ist,

(ii) die projektive Ebene $\mathcal{P}$ ist $((\infty),[\infty])$- und $((\infty),[0,0])$-transitiv.

□

KAPITEL 7

Translationsebenen

(7.1) Lemma. *Sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ eine projektive Ebene mit Kollineationsgruppe Δ. Seien $(p, L), (q, K) \in \mathcal{F}$ und es gelte $p \neq q$ oder $K \neq L$. Dann gilt $\gamma\delta = \delta\gamma$ für alle $\gamma \in \Delta_{[p,K]}$ und $\delta \in \Delta_{[q,L]}$.*

Beweis. Wegen $p \neq q$ oder $K \neq L$ ist $\Delta_{[p,K]} \cap \Delta_{[q,L]} = \{\mathbb{1}\}$. Sei $\gamma \in \Delta_{[p,K]}$ und $\delta \in \Delta_{[q,L]}$. Dann ist $\delta\gamma\delta^{-1} \in \Delta_{[p^\delta, K^\delta]} = \Delta_{[p,K]}$ wegen $p^\delta = p$ und $K^\delta = K$. Damit gilt $\delta\gamma\delta^{-1}\gamma^{-1} \in \Delta_{[p,K]}$. Analog zeigt man $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} \in \Delta_{[q,L]}$. Dies zeigt $(\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1})^{-1} = \delta\gamma\delta^{-1}\gamma^{-1} \in \Delta_{[p,K]} \cap \Delta_{[q,L]} = \{\mathbb{1}\}$. □

(7.2) Korollar. *Sei $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ eine Translationsebene mit Translationsachse L und Kollineationsgruppe Δ. Dann ist die Translationsgruppe $\Delta_{[L,L]}$ kommutativ.*

Beweis. Seien $\gamma, \delta \in \Delta_{[L,L]} \setminus \{\mathbb{1}\}$ zwei Translationen. Besitzen γ und δ verschiedene Zentren, so kommutieren diese beiden Elemente nach (7.1). Sei also p das gemeinsame Zentrum von γ und δ. Sei $q \neq p$ ein Punkt auf L. Da L die Translationsachse von $\mathcal{P}$ ist, gibt es eine Translation $\alpha \in \Delta_{[q,L]}$ mit $\alpha \neq \mathbb{1}$. Dann besitzt $\delta\alpha$ ein von p und q verschiedenes Zentrum und es gilt damit

$$(\gamma\delta)\alpha = \gamma(\delta\alpha) = (\delta\alpha)\gamma = \delta(\alpha\gamma) = \delta(\gamma\alpha) = (\delta\vartheta)\alpha,$$

woraus $\gamma\delta = \delta\gamma$ folgt. □

(7.3) Definition. Sei V ein (Links-)Vektorraum über einem Schiefkörper $\mathbb{F}$. Eine Familie $\mathcal{S}$ von Untervektorräumen von V mit $|\mathcal{S}| \geq 3$ heißt ein *partielles Spread* von V, wenn gilt

(SP1) Für je zwei verschiedene Elemente U und V von $\mathcal{S}$ oist $V = U \oplus V$.

Ein partielles Spread $\mathcal{S}$ heißt *Spread*, falls gilt

(SP2) Jedes Element von V liegt in einem Element von $\mathcal{S}$.

(7.4) Satz. *Sei $\mathcal{S}$ ein Spread eines Vektorraumes V über einem Schiefkörper $\mathbb{F}$. Sei $P = V$ und $\mathcal{L} = \{x + U \mid x \in V, U \in \mathcal{S}\}$. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{S}) = (P, \mathcal{L}, \in)$ eine affine Ebene, deren projektiver Abschluß $\mathcal{P}$ eine Translationsebene ist, wobei die Ferngerade L*

die Translationsachse ist. Die Translationsgruppe $\Delta_{[L,L]}$ von $\mathcal{P}$ ist isomorph zur additiven Gruppe von V.

Beweis. Wegen $|\mathbb{F}| \geq 2$ und $|\mathcal{S}| \geq 3$ besitzt jede Gerade von $\mathcal{A}$ mindestens zwei Punkte und durch jeden Punkt gehen mindestens drei Geraden. Damit besitzt $\mathcal{A}$ ein Viereck. Seien $p, q \in P$ verschiedene Punkte. Dann gibt es nach (SP2) ein Element $U \in \mathcal{S}$ mit $p - q \in U$. Nach (SP1) ist dieses U eindeutig. Also ist $p + U = q + U$ die eindeutig bestimmte Verbindugsgerade von p und q. Sei $p \in P$ und $q + U \in \mathcal{L}$. Die Geraden durch p sind genau die Geraden $p + W$ mit $W \in \mathcal{S}$. Eine solche Gerade ist genau dann parallel zu $q + U$, wenn $W = U$ gilt, denn andernfalls ist $U + W = V$ nach (SP1). Also ist $p + U$ die eindeutige Parallele zu $q + U$ durch p. Smoit ist $\mathcal{A}$ eine affine Ebene. Die Menge $\{\tau_p : P \to P : q \mapsto q + p \,|\, p \in P\} \cong (V, +)$ ist eine transitive Translationsgruppe von $\mathcal{A}$, d.h. der projektive Abschluß $\mathcal{P}$ von $\mathcal{A}$ ist eine Translationsebene mit der unendlich fernen Geraden L als Translationsachse. □

Bevor wir die Umkehrung obigen Satzes beweisen, benötigen wir ein einfaches Lemma. Dazu sei $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \in)$ eine affine Translationsebene mit projektivem Abschluß $\mathcal{P}$ und Ferngeraden L. Es sei Δ die Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$.

(7.5) Lemma. *Für je zwei verschiedene Punkte $p, q \in L$ ist $\Delta_{[L,L]} = \Delta_{[p,L]} \oplus \Delta_{[q,L]}$.*

Beweis. Wegen $p \neq q$ ist obige Summe direkt. Da $\Delta_{[L,L]}$ fixpunktfrei (d.h. keine Translation aus $\Delta_{[L,L]}$ fixiert einen Punkt aus P) und transitiv auf P operiert, genuügt es zu zeigen, daß die Summe $\Delta_{[p,L]} \oplus \Delta_{[q,L]}$ transitiv auf P operiert. Man sagt, die Gruppe $\Delta_{[L,L]}$ operiert *scharf transitiv.* Seien dazu $u, v \in P$ und setze $r = (u \vee p) \wedge (v \vee q)$. Dann gibt es $\gamma \in \Delta_{[p,L]}$ und $\delta \in \Delta_{[q,L]}$ mit $u^\gamma = r$ und $r^\delta = v$. Damit ist $(u^\gamma)^\delta = v$, was zu zeigen war. □

(7.6) Satz (André 1954). *Sei $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, \in)$ eine affine Translationsebene wie oben. Setze $V := \Delta_{[L,L]}$ und $\mathcal{S} = \left\{\Delta_{[p,L]} \,\middle|\, p \in L\right\}$. Die Menge $K(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathrm{End}(V) \mid \forall U \in \mathcal{S} : \lambda(U) \subseteq U\}$, die der Kern von $\mathcal{A}$ genannt wird, ist ein Schiefkörper, V ist ein Links-Vektorraum über $K(\mathcal{A})$ und $\mathcal{S}$ ist ein Spread von V. Außerdem sind $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ und $\mathcal{A}$ isomorph.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $K(\mathcal{A})$ ein Ring ist. Seien dazu $\lambda, \mu \in K(\mathcal{A})$ und $U \in \mathcal{S}$. Dann ist $U^{\lambda - \mu} \subseteq U^\lambda - U^\mu \subseteq U + U = U$ und $U^{\lambda \circ \mu} \subseteq U^\lambda \subseteq U$, d.h. $K(\mathcal{A})$ ist ein Teilring von $\mathrm{End}(V)$. Via $K(\mathcal{A}) \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto v^\lambda$ wird V zu einem Links-$K(\mathcal{A})$-Modul und die Elemente von $\mathcal{S}$ sind Links-$K(\mathcal{A})$-Teilmodule. Deshalb können wir wie in (7.4) die Inzidenzstruktur $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ definieren, auch wenn noch nicht klar ist, daß $K(\mathcal{A})$ ein Schiefkörper ist. Nach (7.5) erfüllt $\mathcal{S}$ Axiom (SP1). Da jede Translation aus $\Delta_{[L,L]}$ ein Zentrum auf L hat, gilt auch Axiom (SP2). Sei $q \in P$ und setze $\sigma : V \to P : \tau \mapsto q^\tau$. Da V scharf transitiv auf P operiert, ist σ eine Bijektion. Außerdem ist klar, daß σ Punktreihen von

$\mathcal{A}(\mathcal{S})$ auf Punktreihen von $\mathcal{A}$ abbildet, d.h. σ ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ eine affine Ebene.

Es bleibt zu zeigen, daß $K(\mathcal{A})$ ein Schiefkörper ist. Sei dazu $\lambda \in K(\mathcal{A})\setminus\{0\}$. Angenommen, die Abbildung λ wäre nicht injektiv. Dann gibt es ein $x \in V \setminus \{0\}$ mit $x^\lambda = 0$. Sei $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$. Wähle einen Punkt $y \in V \setminus U$ und seien $W, Z \in \mathcal{S}$ mit $y \in W$ und $y + x \in Z$. Dann ist $W \neq Z$, andernfalls wäre $x = y - (y - x) \in W$, also $W = U$, was $y \in W$ und $y \in V \setminus U = V \setminus W$ widerspricht. Da $y \in V$ beliebig war, folgt aus

$$y^\lambda = (y + x)^\lambda \in W^\lambda \cap Z^\lambda \subseteq W \cap Z = \{0\},$$

daß $\lambda = 0$ ist im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist λ doch injektiv. Die Abbildung λ ist auch surjektiv: Sei $x \in V \setminus \{0\}$ und sei $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$. Sei $y \in V \setminus U$ und sei $W \in \mathcal{S}$ mit $y \in W$. Wegen $\lambda(W) \subseteq W$ ist $x \neq y^\lambda$. Also gibt es ein eindeutiges $Z \in \mathcal{S}$ mit $y^\lambda - x \in Z$. Da $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ eine affine Ebene ist und $U \neq Z$ gilt, gibt es ein $z \in (y + Z) \cap U$. Also ist $z - y \in Z$ und damit auch $z^\lambda - y^\lambda \in Z$. Da Z eine Untergruppe von V ist, folgt $z^\lambda - x \in Z$. Andererseits folgt aus $z \in U$ auch $z^\lambda \in U$. Wegen $Z \cap U = \{0\}$ ist also $z^\lambda = x$, d.h. λ ist surjektiv. Wegen $U^{\lambda^{-1}} = (U^\lambda)^{\lambda^{-1}} = U$ ist also $\lambda^{-1} \in K(\mathcal{A})$. Also ist $K(\mathcal{A})$ ein Schiefkörper. □

Als nächstes wollen wir die volle Kollineationsgruppe Δ einer affinen Translationsebene $\mathcal{A}$ bestimmen. Nach den bisherigen Resultaten wissen wir, daß Δ die Translationsgruppe $\Delta_{[L,L]} \cong V$ als einen Normalteiler besitzt. Wie sieht der "Rest" der Gruppe Δ aus? Gibt es ein Komplement von $\Delta_{[L,L]}$ in Δ? Mit den Bezeichnungen von (7.6) gilt zunächst das folgende Lemma.

(7.7) Lemma. *Für $q \in P$ und $\sigma : V \to P : \tau \mapsto q^\tau$ ist*

$$\Delta_{[q,L]} = \left\{\sigma\lambda\sigma^{-1} \;\middle|\; \lambda \in K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}\right\} \cong (K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}, \cdot).$$

Beweis. Nach (7.6) ist σ ein Isomorphismus zwischen den affinen Ebenen $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ und $\mathcal{A}$, der 0 auf q abbildet. Deshalb können wir im folgenden $P = V$, $q = 0$ und $\sigma = \mathrm{id}$ annehmen. Sei $\delta \in \Delta_{[q,L]}$. Da $\Delta_{[L,L]}$ ein Normalteiler von Δ ist, induziert δ via Konjugation einen Automorphismus λ von $V = \Delta_{[L,L]}$. Die Geraden durch $q = 0$ sind genau die Elemente des Spreads $\mathcal{S}$. Nach Voraussetzung läßt δ jedes Element von $\mathcal{S}$ fest. Also ist nach Definition des Kernes $\lambda \in K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$. Sei umgekehrt $\lambda \neq 0$ im Kern von $\mathcal{A}$ enthalten. Dann ist λ eine Bijektion, da $K(\mathcal{A})$ ein Schiefkörper ist. Da λ die Elemente von $\mathcal{S}$ festhält, ist λ also eine Permutation der Geradenmenge von $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$. Also ist λ eine Kollineation von $\mathcal{A}$, die alle Geraden durch 0 sowie alle Parallelenscharen festläßt. Also ist $\lambda \in \Delta_{[q,L]}$. □

(7.8) Satz (André 1954). *Für $i = 1, 2$ sei V_i ein Link-Vektorraum über einem Schiefkörper $\mathbb{F}_i$ und sei $\mathcal{S}_i$ ein Spread von V_i. Dabei sei $\mathbb{F}_i$ der Kern der Translationsebene*

$\mathcal{A}(\mathfrak{S}_i)$. *Es sei* $\sigma : V_1 \to V_2$ *eine bijektive Abbildung. Es induziert* σ *genau dann einen Isomorphismus zwischen den affinen Translationsbebenen* $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_1)$ *und* $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_2)$, *wenn es eine semilineare Abbildung* $\lambda : V_1 \to V_2$ *und einen Vektor* $u \in V_2$ *gibt, so daß* $\lambda(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_2$ *und* $v^\sigma = v^\lambda + u$ *für alle* $v \in V_1$ *gilt.*

Beweis. Besitzt σ die im Satz angegebene Form, so induziert wegen

$$(U + v)^\sigma = (U + v)^\lambda + u = U^\lambda + v^\lambda + u$$

und $\lambda(U) \in \mathfrak{S}_2$ die Abbildung σ einen Isomorphismus von $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_1)$ auf $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_2)$. Umgekehrt setzen wir $u := 0^\sigma$ und $\lambda : V_1 \to V_2 : v \mapsto v^\sigma - u$. Dann ist $0^\lambda = 0$ und λ induziert ebenfalls einen Isomorphismus von $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_1)$ auf $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_2)$ und wir haben somit $\lambda(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_2$. Es bleibt zu zeigen, daß λ eine $\mathbb{F}_1$-semilineare Abbildung ist. Dies geschieht in mehreren Schritten.
Für $w \in V_1$ sei $\tau_w : V_1 \to V_1 : v \mapsto v + w$ die zu w gehörige Translation. Dann ist $\lambda\tau_w\lambda^{-1} : V_2 \to V_2$ eine Translation von $\mathcal{A}_2$ mit $0^{\lambda^{-1}\tau_w\lambda} = 0^{\tau_w\lambda} = x^\lambda$. Also ist $\lambda^{-1}\tau_w\lambda = \tau_{w^\lambda}$ bzw. $\tau_w\lambda = \lambda\tau_{w^\lambda}$. Für $v \in V_1$ gilt außerdem $(v + w)^\lambda = (v^{\tau_w})^\lambda = (v^\lambda)^{\tau_{w^\lambda}} = v^\lambda + w^\lambda$. Also ist die Abbildung λ additiv.
Für $a \in \mathbb{F}_1$ setzen wir $\delta_a : V_1 \to V_1 : v \mapsto av$. Da $\mathbb{F}_1$ der Kern von $\mathcal{A}_1$ ist, sind die Abbildung δ_a genau die Streckungen von $\mathcal{A}_1$ mit Zentrum 0. Wegen $0^\lambda = 0$ ist $\lambda^{-1}\delta_a\lambda : V_2 \to V_2$ eine Streckung von $\mathcal{A}_2$ mit Zentrum 0. Also gibt es eine injektive Abbildung $\alpha : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ mit $\lambda^{-1}\delta_a\lambda = \delta_{a^\alpha}$. Da $\mathbb{F}_2$ der Kern von $\mathcal{A}_2$ ist, ist α auch surjektiv. Wir zeigen als nächstes, daß $\alpha : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ ein Schiefkörper-Isomorphismus ist. Seien dazu $a, b \in \mathbb{F}_1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta_{(a+b)^\alpha} &= \lambda^{-1}\delta_{a+b}\lambda \\
&= \lambda^{-1}(\delta_a + \delta_b)\lambda \\
&= \lambda^{-1}\delta_a\lambda + \lambda^{-1}\delta_b\lambda \\
&= \delta_{a^\alpha} + \delta_{b^\alpha} \\
&= \delta_{a^\alpha + b^\alpha},
\end{aligned}$$

woraus die Additivität von α folgt. Analog folgt aus

$$\begin{aligned}
\delta_{(ab)^\alpha} &= \lambda^{-1}\delta_{ab}\lambda \\
&= \lambda^{-1}(\delta_b\delta_a)\lambda \\
&= (\lambda^{-1}\delta_b\lambda)(\lambda^{-1}\delta_a\lambda) \\
&= \delta_{b^\alpha}\delta_{a^\alpha} \\
&= \delta_{a^\alpha b^\alpha},
\end{aligned}$$

die Multiplikativität von δ. Also ist α ein Schiefkörper-Isomorphismus. Für $v \in V_1$ und $c \in \mathbb{F}_1$ ist schließlich $(cx)^\lambda = (x_c^\delta)^\lambda = (x^\lambda)^{\delta_{c^\alpha}} = c^\alpha x^\lambda$. Also ist λ eine $\mathbb{F}_1$-semilineare Abbidung mit Begleitisomorphismus α. □

(7.9) Korollar. *Die Kollineationsgruppe einer affinen Translationsbenene $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ist isomorph zum semidirekten Produkt der Translationsgruppe und der Gruppe aller bijektiven Abbildungen, die semilinear über dem Kern von $\mathcal{A}$ sind und das Spread $\mathcal{S}$ elementeweise festlassen.* □

Literatur

[1] Beutelspacher, A., Einführung in die endliche Geometrie I, II, Zürich: BI **1982**

[2] Dembowski, P., Finite Geometries, New York: Springer **1967**

[3] Hughes, D.R., Piper, F.C., Projective Planes, New York–Heidelberg–Berlin: Springer **1982**

[4] Karzel, H., Kroll, H.-J., Geschichte der Geometrie seit Hilbert, Darmstadt: WB **1988**

[5] Knarr, N., Translation Planes, Lecture Notes in Mathematics 1611, New York–Heidelberg–Berlin: Springer **1995**

[6] Pickert, G., Projektive Ebenen, New York–Heidelberg–Berlin: Springer **1975**