MANNIGFALTIGKEITEN: EIN STEILKURS

Werner Ballmann

Nach der Mitschrift von *Michael Meyer*. Korrektur gelesen von *Alexander Lytchak, Anna Pratoussevitch, Dorothee Schüth* und *Juan Souto*.

1. Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen

Eine m-dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis der Topologie, so daß es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in M und einen Homöomorphismus $x : U \to U'$ auf eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^m$ gibt. Einen solchen Homöomorphismus x nennen wir eine *Karte* von M und den Definitionsbereich U von x nennen wir das *Kartengebiet* von x. Manchmal nennen wir auch das Tupel (x, U) eine Karte. Eine Menge $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von Karten von M heißt *Atlas* von M, wenn $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ ist.

Sei jetzt M eine topologische Mannigfaltigkeit. Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von M heißt C^∞-Atlas, wenn die *Kartenwechsel*

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

für alle $\alpha, \beta \in A$ glatt, d.h. unendlich oft differenzierbar sind. Äquivalent hierzu können wir verlangen, daß die $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ glatte Diffeomorphismen sind.

Sei nun $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ ein C^∞-Atlas von M. Wir nennen eine Karte $x : U \to U'$ von M mit $\mathcal{A}$ *verträglich*, wenn alle Kartenwechsel

$$x_\alpha \circ x^{-1} : x(U \cap U_\alpha) \to x_\alpha(U \cap U_\alpha), \quad \alpha \in A,$$

glatte Diffeomorphismen sind. Die Menge $\mathcal{S}$ der mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten ist ein maximaler C^∞-Atlas und enthält $\mathcal{A}$ (Kettenregel). Umgekehrt enthält natürlich jeder maximale C^∞-Atlas alle mit ihm verträglichen Karten. Einen maximalen C^∞-Atlas nennen wir auch eine *differenzierbare Struktur* für M.

Eine (glatte) *Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer differenzierbaren Struktur $\mathcal{S}$. Eine (glatte) *Karte* einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine Karte von M, die zur differenzierbaren Struktur von M gehört.

Wie oben erklärt wurde, bestimmt ein C^∞-Atlas kanonisch eine differenzierbare Struktur. In Beispielen genügt es daher, einen C^∞-Atlas zu bestimmen.

1.1 Beispiele. 1) $M = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A} = \{(\mathrm{id}, \mathbb{R}^m)\}$.

2) Sei V ein m-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der kanonischen Topologie. Zu einer Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$ von V erklären wir eine Karte $x_B : V \to \mathbb{R}^m$ durch $x_B(v) = u$, falls $v = \sum_{i=1}^m u^i b_i$. Dann ist $\mathcal{A} = \{(x_B, V) \mid B \text{ Basis von } V\}$ ein C^∞-Atlas von V.

3) Für die Sphäre $S_r^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_m^2 = r^2\}$ mit Radius r sind die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (r, 0, \ldots, 0)$ und p_S vom Südpol $S = (-r, 0, \ldots, 0)$ aus ein Atlas. Die jeweiligen Kartengebiete sind $U_N = S_r^m \setminus \{N\}$ bzw. $U_S = S_r^m \setminus \{S\}$. In Formeln sind p_N und p_S gegeben durch

$$p_N(x) = \frac{r}{r - x_0}(x_1, \ldots, x_m), \qquad p_S(x) = \frac{r}{r + x_0}(x_1, \ldots, x_m).$$

Der Atlas $\{(p_N, U_N), (p_S, U_S)\}$ ist C^∞.

4) Die *projektiven Räume* $\mathbb{K}P^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Nach Definition ist $\mathbb{K}P^n$ die Menge der eindimensionalen $\mathbb{K}$-linearen Unterräume des $\mathbb{K}^{n+1}$. Ein Punkt L in $\mathbb{K}P^n$ ist somit festgelegt durch seine *homogenen Koordinaten* $L = [x_0, \ldots, x_n]$, wobei $(x_0, \ldots, x_n)$ ein Vektor in $L \setminus \{0\}$ ist. Auf den Mengen

$$U_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{K}P^n \mid x_i \neq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

definieren wir Bijektionen

$$b_i : U_i \to \mathbb{K}^n, \qquad b_i([x]) = \frac{1}{x_i}(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n).$$

Man sieht nun leicht, daß es genau eine Topologie auf $\mathbb{K}P^n$ gibt, so daß die U_i offen und die b_i Homöomorphismen sind, $0 \leq i \leq n$. Die Kartenwechsel $b_i \circ b_j^{-1}$ sind glatt. Also ist $\mathbb{K}P^n$ zusammen mit $\mathcal{A} = \{(b_i, U_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n bzw. $2n$ bzw. $4n$.

5) Sei M Mannigfaltigkeit und $W \subset M$ offen. Dann ist W mit der Relativtopologie eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Menge aller Karten $x : U \to U'$ von M (in der differenzierbaren Struktur von M) mit $U \subset W$ ist eine differenzierbare Struktur für W, also ist W in kanonischer Weise eine glatte Mannigfaltigkeit.

Seien nun M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *glatt*, wenn zu jedem $p \in M$ Karten $x : U \to U'$ von M um p und $y : V \to V'$ von N um $f(p)$ existieren, so daß $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt ist auf $x(U \cap f^{-1}(V))$. Äquivalent hierzu können wir verlangen, daß für alle Karten $x : U \to U'$ von M um p und $y : V \to V'$ von N um $f(p)$ die Komposition $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt ist auf $x(U \cap f^{-1}(V))$. Offensichtlich ist id_M glatt, außerdem ist die Komposition glatter Abbildungen glatt.

Die Menge der glatten Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $C^\infty(M, N)$. Ferner setzen wir $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

1.2 Beispiele. 1) Für $W \subset M$ offen ist die Inklusion $W \hookrightarrow M$ glatt.

2) Die Abbildung $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \to S^m$, $x \mapsto x/\|x\|$, ist glatt.

2) Die Abbildung $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}P^n$, $x \mapsto [x]$, ist glatt.

Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn f eine Bijektion und die Umkehrabbildung ebenfalls glatt ist. Wenn M diffeomorph zu N ist, dann ist $\dim M = \dim N$.

1.3 Bemerkung. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Eine C^r-Struktur auf M ist ein Atlas von M, dessen Kartenwechsel C^r sind und der in diesem Sinne maximal ist ($r = \infty$ entspricht glatt, $r = \omega$ entspricht reell analytisch). Nach einem Satz von H. Whitney (Differentiable Manifolds, Annals of Math. 37(1936), 645–680) enthält jede C^1-Struktur eine C^ω-Struktur. Es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, sich auf C^∞-Strukturen zu beschränken.

2. Tangentialvektoren und Ableitung

Falls $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ glatt ist, dann ist die Ableitung von f an einer Stelle $u_0 \in U$ die lineare Abbildung, die f um u_0 am besten approximiert. Die Existenz und die Beschaffenheit der Ableitung hat starke Konsequenzen für die Abbildung f. Die schönsten und bekanntesten Beispiele sind der Umkehrsatz und der Satz über die impliziten Funktionen. Entsprechend groß ist daher unser Interesse, die Methoden der Analysis auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen.

Die meisten Konzepte der Analysis sind lokaler Natur. Es ist daher wichtig, über Hilfsmittel zur Lokalisierung zu verfügen. Buckelfunktionen wie im folgenden Lemma sind sehr nützlich.

2.1 Lemma. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $W \subset M$ offen und $p \in W$. Dann gibt es $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset W$ und $\varphi \equiv 1$ auf einer Umgebung V von p.*

Beweis. Sei $x : U \to U'$ Karte um p mit $U \subset W$. Setze $u_0 = x(p)$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}_{2\varepsilon}(u_0) \subset U'$, ferner eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subset B_{2\varepsilon}(u_0)$ und $\psi \equiv 1$ auf $B_\varepsilon(u_0)$. Wir definieren nun $\varphi : M \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(q) = \psi(x(q))$ für $q \in U$ und $\varphi(q) = 0$ sonst. □

Sei M eine Mannigfaltigkeit und p ein Punkt in M. Unser Ziel ist nun, den Tangentialraum an M in p zu definieren. Der erste Ansatz ist reichlich abstrakt — wir führen Tangentialvektoren an M in p als Operatoren auf $\mathcal{F}(M)$ ein, die die Produktregel erfüllen. Die Idee dabei ist, daß die Ableitung in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^m$ einen solchen Operator auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ definiert und v durch diesen Operator bestimmt ist.

2.2 Definition. Sei p ein Punkt in M. Ein *Tangentialvektor* an M in p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ mit

$$v(\varphi \cdot \psi) = v(\psi) \cdot \psi(p) + \varphi(p) \cdot v(\psi) \quad \text{(Produktregel)}.$$

Der lineare Raum T_pM der Tangentialvektoren an M in p heißt *Tangentialraum* an M in p. Die *Ableitung* von $\phi \in \mathcal{F}(M)$ in p ist die lineare Abbildung $d\phi(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ mit $d\phi(p)(v) := v(\phi)$.

2.3 Elementare Eigenschaften. *Für alle $v \in T_pM$ gilt*

(1) $v(\varphi) = 0$ *falls φ konstant ist;*
(2) $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$ *falls $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ in einer Umgebung von p in M.*

Beweis. (1) Wegen der $\mathbb{R}$-Linearität genügt es, die konstante Funktion $\varphi \equiv 1$ zu betrachten. Aus der Produktregel folgt

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) = 2v(1),$$

also $v(1) = 0$.

(2) Sei $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ auf einer (offenen) Umgebung W von p in M. Sei $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ wie in Lemma 2.1. Dann ist $\varphi \cdot \varphi_1 = \varphi \cdot \varphi_2$, daher ist

$$v(\varphi)\varphi_1(p) + v(\varphi_1) = v(\varphi\varphi_1) = v(\varphi\varphi_2) = v(\varphi)\varphi_2(p) + v(\varphi_2).$$

Nun ist $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$, also ist $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$. $\square$

Sei $W \subset M$ offen, $p \in W$ und $v \in T_pM$. Wir wollen nun zeigen, daß v auf W *lokalisiert* werden kann. Sei dazu $\psi \in \mathcal{F}(W)$. Es gebe eine Funktion $\psi' \in \mathcal{F}(M)$, so daß $\psi \equiv \psi'$ in einer Umgebung von p in M. Setze

$$v(\psi) := v(\psi'). \tag{2.4}$$

Nach 2.3.2 hängt $v(\psi)$ nicht von der Wahl von ψ' ab. Die Frage ist, ob es zu beliebigem $\psi \in \mathcal{F}(W)$ überhaupt eine solche Funktion ψ' gibt. Dies erkennt man nun wieder leicht mit Hilfe von Lemma 2.1. Sei nämlich φ wie in diesem Lemma. Definiere eine Funktion $\psi' \in \mathcal{F}(M)$ durch $\psi'(q) = \varphi(q)\psi(q)$ für $q \in W$ und $\psi'(q) = 0$ sonst.

Sei nun $x : U \to U'$ eine Karte von M und $p \in U$. Definiere Vektoren $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ durch

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\varphi) = \partial_i(\varphi \circ x^{-1})\Big|_{x(p)}, \tag{2.5}$$

die i-te partielle Ableitung von $\varphi \circ x^{-1}$ im Punkte $x(p)$. Wir schreiben auch $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}(p)$ statt $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\varphi)$. Für die Komponenten x^j von x gilt

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j, \quad 1 \le i, j \le m. \tag{2.6}$$

Merke, daß der Ausdruck auf der linken Seite nach unserer Diskussion oben wohldefiniert ist. Es folgt leicht, daß die Vektoren $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ linear unabhängig sind. Wie wir jetzt sehen werden, bilden diese Vektoren sogar eine Basis von T_pM, die sogenannte *Standardbasis* bezüglich der Karte x.

2.7 Satz. *Die Vektoren* $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x^m}\right|_p$ *sind eine Basis von* T_pM. *Für* $v \in T_pM$ *ist* $v(x^i)$ *der Koeffizient von* $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$; *mit anderen Worten,*

$$v = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

Beweis. Aus 2.6 folgt sofort, daß die $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ linear unabhängig sind. Für $v \in T_pM$ und $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ rechnen wir mit einer Darstellung von φ wie in Lemma 2.8 unten

$$v(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} v(x^i)\varphi_i(p) = \sum_{i=1}^{m} v(x^i)\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p). \quad \square$$

2.8 Lemma. *Seien (x, U) Karte von M und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ glatt. Zu $p \in U$ existieren dann eine offene Umgebung V von p in U und glatte Funktionen $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, mit*

$$\varphi = \varphi(p) + \sum_{i=1}^{m}(x^i - x^i(p))\varphi_i \quad \textit{und} \quad \varphi_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p).$$

Beweis. Sei $u_0 = x(p)$ und V' eine offene Kugel um u_0 in U'. Für $u \in V'$ und $\psi = \varphi \circ x^{-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\psi(u) - \psi(u_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(tu + (1-t)u_0)\,dt \\ &= \sum_{i=1}^{m}(u^i - u_0^i)\int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial u^i}(tu + (1-t)u_0)\,dt.\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\psi_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial u^i}(tu + (1-t)u_0)\,dt.$$

Die ψ_i sind glatt auf V', daher sind die $\varphi_i = \psi_i \circ x$ glatt auf V. Die obige Rechnung zeigt, daß die φ_i die gewünschte Darstellung von φ liefern. $\square$

Seien $v \in T_pM$, x eine Karte um p und $\xi^i = v(x^i)$, $1 \le i \le m$. Wir sagen dann, daß der Vektor $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$ den Tangentialvektor v bezüglich x *repräsentiert*. Wir nennen ξ auch den *Hauptteil* von v bezüglich x.

2.9 Transformationsregeln. *Seien x und y Karten um p. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p. \tag{1}$$

Zu gegebenem $v \in T_pM$ seien ξ bzw. η die Hauptteile von v bezüglich x bzw. y. Dann gilt

$$\eta^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\xi^i \quad \textit{bzw. ohne Indizes:} \quad \eta = d(y \circ x^{-1})_{x(p)}\xi. \tag{2}$$

Beweis. Die Formel (1) folgt sofort aus 2.7. Zum Beweis von (2) und (3) rechnen wir

$$v = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{i,j} \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \overset{!}{=} \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p. \quad \square$$

Eine weitere Art, Tangentialvektoren darzustellen, erhält man mit Hilfe von Kurven. Sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und sei $c : I \to M$ eine (glatte) Kurve durch $p \in M$, d. h., $c(0) = p$. Erkläre einen Tangentialvektor $[c] \in T_pM$ durch

$$[c](\varphi) := \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)\Big|_{t=0}, \quad \varphi \in \mathcal{F}(M). \tag{2.10}$$

Statt $[c]$ schreiben wir auch $\dot{c}(0)$. Wir stellen uns $[c] = \dot{c}(0)$ als Geschwindigkeitsvektor an die Kurve c vor.

2.11 Satz. *Zu jedem $v \in T_pM$ gibt es eine Kurve c durch p mit $[c] = v$. Falls x eine Karte um p ist, dann gilt:*

(1) $\frac{d}{dt}(x \circ c)(0)$ *ist der Hauptteil von* $\dot{c}(0)$.
(2) $c(t) = x^{-1}(x(p) + t \cdot \xi)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$ *ist eine Kurve durch p, so daß ξ der Hauptteil von* $\dot{c}(0)$ *bez. x ist.*

Beweis. Sei $x : U \to U'$ Karte um p, $x(p) = u_0$. Sei $\xi = \frac{d}{dt}(x \circ c)(0)$. Für $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ gilt dann

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\varphi \circ x^{-1}) \circ (x \circ c))\Big|_{t=0} = \sum_i \partial_i(\varphi \circ x^{-1})_{u_0}\xi^i$$

$$= \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p)\xi^i = \Big(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big)(\varphi).$$

Damit folgt (1). Für die spezielle Kurve c in (2) gilt nun $(x \circ c)(t) = x(p) + t \cdot \xi$, damit folgt (2). $\square$

2.12 Bemerkung. 1) Für $M = \mathbb{R}^m$ ist $\mathrm{id} : M \to \mathbb{R}^m$ die *kanonische Karte*. In diesem Sinne ist T_pM, $p \in M$, kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}^m$.

2) Falls V ein m-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist und $p \in V$ ein Punkt, dann ist T_pV kanonisch isomorph zu V. Die Abbildung

$$V \ni v \mapsto [p + tv, t \in \mathbb{R}] \in T_pV$$

ist ein Isomorphismus. Im Falle des $\mathbb{R}^m$ stimmt dieser Isomorphismus mit dem kanonischen Isomorphismus $T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ aus 1) überein.

2.13 Definition. Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ glatt. Die *Ableitung* von f im Punkte $p \in M$ ist die lineare Abbildung $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ definiert durch

$$f_{*p}(v)(\varphi) := v(\varphi \circ f).$$

Der *Rang* von f in p ist der Rang von f_{*p}.

2.14 Berechnung der Ableitung mit Karten. *Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ glatt und p ein Punkt in M. Sei x Karte von M um p, y Karte von N um $f(p)$. Dann ist*

$$f_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(p)} \tag{1}$$

mit $f^j := y^j \circ f$. Zu gegebenem $v \in T_pM$ sei ξ der Hauptteil von v bez. x und η der Hauptteil von $f_{*p}v$ bez. y. Dann ist

$$\eta^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\xi^i \quad \text{bzw. ohne Indizes:} \quad \eta = d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi. \tag{2}$$

Beweis. Die Formeln sind äquivalent. Wir rechnen (1) nach. Per definitionem gilt

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)(y^j) = \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p). \quad \square$$

2.15 Berechnung der Ableitung mit Kurven. *Falls c eine Kurve durch p ist, so ist*

$$f_{*p}([c]) = [f \circ c].$$

Beweis. Zum Beweis rechnen wir nach

$$[f \circ c](\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ c)\Big|_{t=0} = [c](\varphi \circ f) = f_{*p}([c]). \quad \square$$

2.16 Kettenregel. *Seien L, M, N Mannigfaltigkeiten und $g : L \to M$, $f : M \to N$ glatte Abbildungen. Sei $p \in L$. Dann ist*

$$(f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}.$$

Beweis. Sei c eine Kurve durch p. Nach 2.15 ist dann

$$(f \circ g)_{*p}([c]) = [(f \circ g) \circ c] = [f \circ (g \circ c)] = f_{*g(p)}([g \circ c]) = f_{*g(p)}(g_{*p}([c])). \quad \square$$

2.17 Umkehrsatz. *Falls $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es offene Umgebungen U von p und V von $f(p)$, so daß $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.* $\square$

Wir nennen $p \in M$ einen *regulären Punkt* von f, wenn f_{*p} surjektiv und $q \in N$ einen *regulären Wert* von f, wenn alle $p \in f^{-1}(q)$ regulär sind. Die Abbildung f heißt *Submersion*, wenn f surjektiv ist und alle $p \in M$ regulär sind.

Falls alle f_{*p}, $p \in M$, injektiv sind, so heißt f *Immersion*. Manchmal nennt man Immersionen auch reguläre Abbildungen — insbesondere heißt eine Kurve $c : I \to M$ *regulär*, wenn $\dot{c}(t) \neq 0$ ist für alle $t \in I$.

Wir nennen f eine *Einbettung*, wenn f eine Immersion und $f : M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist. Hierbei ist $f(M)$ mit der Relativtopologie versehen.

3. Rang von Abbildungen und Untermannigfaltigkeiten

Sei N eine (glatte) Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt m-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* von N, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Karte $x : U \to U' \times U''$ von N um p gibt, wobei $U' \subset \mathbb{R}^m$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ offen sind, so daß $x(U \cap M) = U' \times \{z_0\}$ ist für ein $z_0 \in U''$. Dann ist M zusammen mit der Relativtopologie eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension m, und die Menge der Karten $x : U \cap M \to U' \cong U' \times \{z_0\}$ ist ein C^∞-Atlas für M. Daher ist M kanonisch eine glatte Mannigfaltigkeit.

Untermannigfaltigkeiten sind häufig in natürlicher Weise Niveauflächen glatter Abbildungen. Erinnert sei an die Sphäre. Umgekehrt sind Niveauflächen glatter Abbildungen Untermannigfaltigkeiten, wenn die Ableitung der gegebenen Abbildung in jedem Punkt einer Umgebung der Niveaufläche surjektiv ist. Dies folgt sofort aus dem Satz, den wir jetzt diskutieren.

3.1 Satz. *Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $m = \dim M$, $n = \dim N$.*

1) Falls f in $p \in M$ Rang r hat, dann gibt es zu jeder Karte (y, V) um $f(p)$ mit $y(f(p)) = 0$ eine Karte (x, U) um p mit $x(p) = 0$, so daß

$$y \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^r, \varphi^{r+1}(u), \ldots, \varphi^n(u))$$

nach eventueller Umnumerierung der Komponenten von y. Hierbei sind die φ^j, $r < j \leq n$, geeignete glatte Funktionen auf $x(U)$.

2) Falls f in einer Umgebung von p Rang r hat, dann gibt es Karten (x, U) um p mit $x(p) = 0$ und (y, V) um $f(p)$ mit $y(f(p)) = 0$, so daß

$$y \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^r, 0, \ldots, 0).$$

Beweis. Sei (x, U) eine Karte um p mit $x(p) = 0$. Nach eventueller Umnumerierung der Komponenten von x und y können wir annehmen, daß

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

invertierbar ist. Hierbei ist $f^j := y^j \circ f$. Für $1 \leq j \leq r$ setzen wir nun $\hat{x}^j = f^j$ und $\hat{x}^j = x^j$ sonst. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^i}(p) \right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also hat $\hat{x} : U \cap f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^m$ in p Rang m. Nach dem Umkehrsatz ist $\hat{x}$ ein lokaler Diffeomorphismus um p: Es gibt eine Umgebung $\hat{U}$ um p, so daß $\hat{x} : \hat{U} \to \hat{U}' = \hat{x}(\hat{U})$ eine Karte von M um p ist. Nach Definition von $\hat{x}$ gilt

$$y \circ f \circ \hat{x}^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^r, \varphi^{r+1}(u), \ldots, \varphi^n(u))$$

mit gewissen glatten Funktionen φ^j auf $\hat{U}'$. Damit ist Behauptung 1) bewiesen. Ferner ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial_i \varphi^j) \end{pmatrix},$$

die Jacobi-Matrix von $y \circ f \circ \hat{x}^{-1}$, wobei in der Untermatrix $(\partial_i \varphi^j)$ die Indizes über die Bereiche $r < i \leq m$ und $r < j \leq n$ laufen. Unter der Voraussetzung in 2) gilt daher

$$\partial_i \varphi^j \equiv 0,\ r < i \leq m,\ r < j \leq n,$$

in einer Umgebung von $\hat{x}(p) = 0$. Wenn wir $\hat{U}$ eventuell noch verkleinern, können wir annehmen, daß $\hat{U}'$ von der Gestalt $(-\varepsilon, \varepsilon)^m$ ist und die partiellen Ableitungen $\partial_i \varphi^j,\ r < i \leq m,\ r < j \leq n$ auf $\hat{U}'$ verschwinden. Dann folgt

$$\varphi^j(u) = \psi^j(u^1, \ldots, u^r),\ r < j \leq m,$$

das heißt, die φ^j hängen nicht von $u^{r+1}, \ldots, u^m$ ab. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nach 1) annehmen, daß $V' = y(V)$ von der Gestalt $(-\varepsilon, \varepsilon)^r \times (-\delta, \delta)^{n-r}$ ist. Wir setzen nun $\hat{y}^j = y^j$ für $1 \leq j \leq r$ und $\hat{y}^j = y^j - \psi^j(y^1, \ldots, y^r)$ sonst. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial \hat{y}^j}{\partial y^k}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Umkehrsatz ist $\hat{y}$ ein lokaler Diffeomorphismus um $f(p)$, also eine Karte von N auf einer offenen Umgebung $\hat{V}$ von $f(p)$. Nach Definition gilt

$$\hat{y} \circ f \circ \hat{x}^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^r, 0, \ldots, 0).$$

Damit folgt Behauptung 2). □

3.2 Korollar. *1) Falls f_{*p} surjektiv ist, so gibt es Karten x um p und y um $f(p)$ mit*

$$y \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^n).$$

Insbesondere ist die Niveaufläche $P = f^{-1}(q)$ eine $(m-n)$-dimensionale Untermannigfaltigleit von M, falls q ein regulärer Wert von f ist.

2) Falls f_{*p} injektiv ist, so gibt es Karten x um p und y um $f(p)$ mit

$$y \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = (u^1, \ldots, u^m, 0, \ldots, 0).$$

Insbesondere gibt es eine offene Umgebung U um p, so daß $Q = f(U)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension m von N ist und $f : U \to Q$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Die Bedingung in 1) ist äquivalent zu der Bedingung $\operatorname{rang}_p f = \dim N$, die in 2) zu $\operatorname{rang}_p f = \dim M$. Diese Bedingungen sind aber offen. □

3.3 Korollar. *Falls f eine Einbettung ist, so ist $Q = f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N und $f : M \to Q$ ein Diffeomorphismus.* □

3.4 Korollar. *Falls f in einer Umgebung von p konstanten Rang hat, dann können wir f in einer Umgebung von p als Komposition $f = g \circ h$ schreiben, wobei g eine Einbettung und h eine Submersion ist.*

Beweis. Seien $x : U \to U'$ und $y : V :\to V'$ Karten um p und $f(p)$ wie in 3.1.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen $U' = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$ und $V' = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$. Sei nun $h : U \to (-\varepsilon, \varepsilon)^r$ die Komposition von x mit der Projektion

$$(-\varepsilon, \varepsilon)^m \to (-\varepsilon, \varepsilon)^r, \quad (u^1, \ldots, u^m) \mapsto (u^1, \ldots, u^r),$$

ferner $g : (-\varepsilon, \varepsilon)^r \to V$ die Komposition der Inklusion

$$(-\varepsilon, \varepsilon)^r \to (-\varepsilon, \varepsilon)^n, \quad (u^1, \ldots, u^r) \mapsto (u^1, \ldots, u^r, 0, \ldots, 0)$$

mit y^{-1}. Offensichtlich ist h eine Submersion, g eine Einbettung. □

3.5 Korollar. *Falls f in einer Umgebung von $P = f^{-1}(q)$ Rang r hat, so ist P eine Untermannigfaltigkeit von N der Dimension $m - r$.* □

Zum Abschluß noch eine Bemerkung zu Tangentialräumen von Untermannigfaltigkeiten. Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, $i : M \to N$ die Inklusion. Für $p \in M$ ist dann T_pM kanonisch isomorph zu einem Unterraum von T_pN: Wenn $v = [c] \in T_pM$ ist, dann ist $[i \circ c] \in T_pN$. Falls M durch die (reguläre) Gleichung $f(p) = q$ definiert ist, so ist $T_pM = \ker f_{*p} \subset T_pN$ bezüglich dieser Identifikation.

4. Tangentialbündel und Vektorfelder

Die Menge $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ heißt *Tangentialbündel* von M. Die Projektion $\pi : TM \to M$ ordnet $v \in T_pM$ den *Fußpunkt* $p = \pi(v)$ zu.

Das Tangentialbündel ist kanonisch wieder eine glatte Mannigfaltigkeit: Dazu konstruieren wir zunächst einen Atlas für TM, definieren dann eine dazu passende natürliche Topologie auf TM und erklären dann, warum TM mit diesen Daten eine (glatte) Mannigfaltigkeit ist. Es lohnt sich, diese Methode kennenzulernen, denn viele Mannigfaltigkeiten sind nach diesem Muster gestrickt.

Sei $x : U \to U'$ Karte von M. Wir setzen $TM|U = \bigcup_{p \in U} T_pM$ und definieren

$$\overline{x} : TM|U \to U' \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}, \quad \overline{x}(v) := (x(p), \xi), \tag{4.1}$$

wobei p der Fußpunkt von v und ξ der Hauptteil von v bezüglich der Karte x ist. Nach Satz 2.7 ist $\overline{x}$ eine Bijektion. Falls $y : V \to V'$ eine andere Karte für M ist, so gilt nach der Transformationsregel 2.10

$$\overline{y} \circ \overline{x}^{-1}(u, \xi) = (y \circ x^{-1}(u), d(y \circ x^{-1})|_u \cdot \xi).$$

Die Abbildung $\overline{y} \circ \overline{x}^{-1}$ sind daher (glatte) Diffeomorphismen.

Wir erklären nun eine Topologie auf TM, die mit den (zukünftigen) Karten $\overline{x}$ zusammenpaßt. Wir nennen $\mathcal{O} \subset TM$ offen wenn $\overline{x}(\mathcal{O} \cap TM|U)$ offen in $U' \times \mathbb{R}^m$ ist für alle Karten (x, U) von M. Die Menge der so definierten offenen Mengen in TM ist eine Topologie, die Hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis hat. Die Karten $\overline{x}$ sind bezüglich dieser Topologie Homöomorphismen und der Atlas der

$$\{(\overline{x}, TM|U) \mid (x, U) \text{ Karte für } M\} \tag{4.2}$$

ist ein C^∞-Atlas für TM. Der Beweis dieser Behauptungen ist einfach. Damit ist TM eine glatte Mannigfaltigkeit.

Die Projektion $\pi : TM \to M$ ist bezüglich der differenzierbaren Struktur von TM glatt und eine Submersion. In Karten (x, U), $(\overline{x}, TM|U)$ wie oben gilt nämlich $x \circ \pi \circ \overline{x}^{-1}(u, \xi) = u$. Für $\phi \in \mathcal{F}(M)$ ist $d\phi : TM \to \mathbb{R}$, $T_pM \ni v \mapsto d\phi(p)(v) = v(\phi)$ glatt, und für $f \in C^\infty(M, N)$ ist $f_* : TM \to TN$, $T_pM \ni v \mapsto f_{*p}v$ glatt.

Ein *Vektorfeld* auf M ist eine *glatte* Abbildung $X : M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}$. Mit anderen Worten: X ist glatt und $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Für eine Karte (x, U) von M sind die

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to TM|U, \quad p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

Vektorfelder auf U.

Die Menge der Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(M)$. Ist (x, U) eine Karte von M und X ein Vektorfeld auf M, dann ist X auf U (punktweise) eine Linearkombination $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Nach Definition der Karte $\overline{x}$ ist die Abbildung $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m) : U \to \mathbb{R}^m$ glatt. Wir nennen ξ den *Hauptteil* von X bezüglich der Karte x. An dieser Darstellung erkennt man, daß 1) der *Nullschnitt* $p \mapsto 0_p \in T_pM$, 2) das (punktweise) Produkt $\varphi \cdot X$ einer glatten Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit einem Vektorfeld X und 3) die (punktweise) Summe $X + Y$ zweier Vektorfelder X und Y Vektorfelder auf M sind. Der Raum $\mathcal{V}(M)$ aller Vektorfelder auf M ist damit ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und ein Modul über dem Ring $\mathcal{F}(M)$.

4.3 Beispiele. 1) Sei X ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist $\overline{\mathrm{id}} \circ X$ von der Form $x \mapsto (x, \xi(x))$, wobei ξ der Hauptteil von X bez. der Karte id ist. In diesem Sinne betrachten wir Vektorfelder auf $\mathbb{R}^m$ als glatte Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

2) Sei $M = S^m$. Für $x \in S^m$ ist

$$T_xS^m \cong \{v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid v \perp x\}.$$

Ein Vektorfeld auf S^m ist daher eine glatte Abbildung $V : S^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ mit $V(x) \perp x$ für alle $x \in S^m$. Falls $m = 2k - 1$ ist, so ist

$$(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) \mapsto (-y_1, x_1, \ldots, -y_k, x_k)$$

ein Vektorfeld auf S^m, das nirgends verschwindet. Falls m gerade ist, so hat jedes Vektorfeld auf S^m eine Nullstelle (Satz vom Igel). Auf S^3 gibt es drei Vektorfelder I, J und K,

die in jedem Punkt der S^3 linear unabhängig sind. Dazu identifizieren wir $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ und setzen

$$I(x) = xi,\ J(x) = xj,\ K(x) = xk.$$

Auf S^m gibt es genau dann m Vektorfelder, die in jedem Punkt linear unabhängig sind, wenn $m \in \{1, 3, 7\}$ (J. Adams, 1962).

3) Sei $M = O(n)$, $\mathfrak{so}(n) = \{C \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid C^* = -C\}$. Dann ist

$$T_A O(n) = \{B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid B = AC \text{ für ein } C \in \mathfrak{so}(n)\}.$$

Für $C \in \mathfrak{so}(n)$ ist daher $X_C : A \mapsto AC$ ein Vektorfeld auf $O(n)$, ein sogenanntes *linksinvariantes* Vektorfeld.

Für $X \in \mathcal{V}(M)$ und $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ sei $X\varphi = X(\varphi) \in \mathcal{F}(M)$ definiert durch

$$(X\varphi)(p) = X_p(\varphi).$$

Die Abbildung $\mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, $\varphi \mapsto X\varphi$, ist eine *Derivation* des Ringes $\mathcal{F}(M)$, das heißt,

$$X(\varphi \cdot \psi) = X(\varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot X(\psi).$$

Seien nun $X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Dann definieren wir die *Lieklammer* $[X, Y] \in \mathcal{V}(M)$ von X und Y durch

$$[X, Y]_p(\varphi) = X_p(Y\varphi) - Y_p(X\varphi). \tag{4.4}$$

Die Lieklammer entspricht dem Kommutator der oben diskutierten Derivationen. Wir müssen noch zeigen, daß $[X, Y]$ ein Vektorfeld auf M ist. Dazu rechnen wir zunächst die Produktregel nach:

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p(\varphi\psi) =& X_p(Y(\varphi\psi)) - Y_p(X(\varphi\psi)) \\
=& X_p((Y\varphi)\psi + \varphi(Y\psi)) - Y_p((X\varphi)\psi + \varphi(X\psi)) \\
=& (X_p(Y\varphi))\psi_p + (Y\varphi)_p X_p(\psi) + X_p(\varphi)(Y\psi)_p + \varphi_p X_p(Y\psi) \\
& - Y_p(X\varphi)\psi_p - (X\varphi)_p Y_p(\psi) - Y_p(\varphi)(X\psi)_p - \varphi_p Y_p(X\psi) \\
=& (X_p(Y\varphi))\psi_p + \varphi_p X_p(Y\psi) - Y_p(X\varphi)\psi_p - \varphi_p Y_p(X\psi) \\
=& [X, Y]_p(\varphi)\psi(p) + \varphi(p)[X, Y]_p(\psi).
\end{aligned}$$

Daher ist $[X, Y]_p \in T_p M$. Das Lokalisierungsprinzip 2.4 zeigt, daß $[X, Y]_p(x^j)$ für jede Karte $x = (x^1, \ldots, x^m) : U \to U'$ von M und jeden Punkt $p \in U$ wohldefiniert ist. Die Formel 4.4 zeigt, daß diese Funktionen glatt auf U sind, also ist $[X, Y] \in \mathcal{V}(M)$.

Wir berechnen jetzt lokale Formeln für die Liesche Klammer. Seien $X, Y \in \mathcal{F}(M)$. Sei (x, U) eine Karte von M. Seien $\xi, \eta, \zeta : U \to \mathbb{R}^n$ die Hauptteile von X, Y und $[X, Y]$ bezüglich (x, U). Dann gilt

$$\zeta^j = \sum_{i=1}^{m} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right), \quad \text{bzw. ohne Indizes:} \quad \zeta = d\eta(X) - d\xi(Y) \tag{4.5}$$

Zum Beweis bemerken wir, daß $\xi^j = X(x^j)$, $\eta^j = Y(x^j)$ und $\zeta^j = [X,Y](x^j)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\zeta^j =&[X,Y](x^j) = X(Y(x^j)) - Y(X(x^j))\\ =&X(\eta^j) - Y(\xi^j) = \sum_{i=1}^{m}\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i} - \eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right),\end{aligned}$$

also 4.5.

Sei nun $f : M \to \hat{M}$ eine glatte Abbildung. Vektorfelder $X \in \mathcal{V}(M)$ und $\hat{X} \in \mathcal{V}(\hat{M})$ heißen *f-verwandt*, wenn

$$f_{*p}(X_p) = \hat{X}_{f(p)} \tag{4.6}$$

für alle $p \in M$. Das folgende Lemma ist wichtig bei der Bestimmung von Lieschen Klammern.

4.7 Lemma. *Seien $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ f-verwandt zu $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{V}(\hat{M})$. Dann ist $[X,Y]$ f-verwandt zu $[\hat{X},\hat{Y}]$, d.h., für alle $p \in M$ ist*

$$f_{*p}([X,Y]_p) = [\hat{X},\hat{Y}]_{f(p)}.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{F}(\hat{M})$. Dann ist

$$\hat{X}_{f(p)}(\varphi) = (f_{*p}(X_p))(\varphi) = X_p(\varphi \circ f)$$

nach Definition von f_{*p}, also

$$(\hat{X}\varphi) \circ f = X(\varphi \circ f).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}[\hat{X},\hat{Y}]_{f(p)}(\varphi) =&\hat{X}_{f(p)}(\hat{Y}\varphi) - \hat{Y}_{f(p)}(\hat{X}\varphi)\\ =&X_p((\hat{Y}\varphi)\circ f) - Y_p((\hat{X}\varphi)\circ f)\\ =&X_p(Y(\varphi\circ f)) - Y_p(X(\varphi\circ f))\\ =&[X,Y]_p(\varphi\circ f) = (f_{*p}([X,Y]_p))(\varphi). \quad \square\end{aligned}$$

4.8 Beispiele. 1) Sei (x,U) eine Karte von M. Dann ist

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$$

2) Seien I, J, K die Vektorfelder auf S^3 wie in Beispiel 3.1.2. Wir betrachten $M = S^3$ als Untermannigfaltigkeit in $\hat{M} = \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$. Dann sind I, J, K bezüglich der Inklusion verwandt zu den Vektorfeldern

$$\hat{I} : x \mapsto xi,\ \hat{J} \mapsto xj,\ \hat{K} : x \mapsto xk$$

auf $\mathbb{H}$ (genaugenommen sind dies die Hauptteile bezüglich der Karte id auf $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$). Mit Lemma 4.7 folgt $[I,J]_x = xij - xji = 2xk = 2K(x)$.

3) Analog berechnen wir die Lieklammer linksinvarianter Vektorfelder X_C, X_D auf $O(n)$:

$$[X_C, X_D]_A = ACD - ADC = X_{(CD-DC)}(A).$$

Die Lieklammer linksinvarianter Vektorfelder auf $O(n)$ ist wieder ein linksinvariantes Vektorfeld und entspricht dem Kommutator in $\mathfrak{so}(n)$.

5. Flüsse

Sei X ein Vektorfeld auf M. Dann können wir X als gewöhnliche Differentialgleichung auffassen: Gesucht sind Lösungen der Gleichung

$$\dot{c}(t) = X(c(t)). \tag{5.1}$$

Die Lösungen c dieser Gleichung heißen *Integralkurven* oder *Trajektorien* von X.

Sei nun $\kappa : U \to U'$ eine Karte für M. Sei ξ der Hauptteil von X bezüglich κ. Dann ist eine glatte Kurve c in U genau dann eine Integralkurve von X, wenn

$$\frac{d}{dt}\big(\kappa \circ c\big)(t) \stackrel{!}{=} \xi(c(t)) = (\xi \circ \kappa^{-1})(\kappa \circ c)(t).$$

Wir setzen $\hat{\xi} = \xi \circ \kappa^{-1} : U' \to \mathbb{R}^m$. Unsere Rechnung zeigt, daß $\sigma : I \to U'$ genau dann eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\sigma}(t) = \hat{\xi}(\sigma(t)), \tag{5.2}$$

ist, wenn $c = \kappa^{-1} \circ \sigma : I \to U$ eine Integralkurve von X, d.h., eine Lösung von 5.1 ist. Damit ist die lokale Lösungstheorie der Differentialgleichung 5.1 zurückgeführt auf die entsprechende lokale Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^m$. Aus dieser Theorie zitieren wir die beiden Sätze, die für uns wesentlich sind, den Eindeutigkeitssatz und den Existenzsatz. Wir benützen dabei das obige Übersetzungsschema und formulieren diese Sätze in Termen der Integralkurven von X.

5.3 Satz (Eindeutigkeit). *Seien $c_1 : (\alpha_1, \beta_1) \to M$, $c_2 : (\alpha_2, \beta_2) \to M$ Integralkurven von X mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ für ein $t_0 \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$. Dann ist $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$.*

Weil die Topologie von M Hausdorffsch ist, ist die Menge A der $t \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ mit $c_1(t) = c_2(t)$ abgeschlossen in $(\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$. Offenheit folgt aus dem entsprechenden Satz für Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^m$, daher 5.3.

5.4 Satz (Existenz). *Zu jedem $p_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung V von p_0 in M, ein $\varepsilon > 0$ und eine glatte Abbildung*

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M,$$

so daß $f(\cdot, p)$ eine Integralkurve von X mit $f(0, p) = p$ ist.

Wir schreiben auch $f^t = f(t, \cdot)$ und nennen (f^t) einen *(lokalen) Fluß* von X.

Seien nun $p \in M$ und $c_1 : (\alpha_1, \beta_1) \to M$, $c_2 : (\alpha_2, \beta_2) \to M$ Integralkurven von X mit $0 \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ und $c_1(0) = c_2(0) = p$. Dann ist die Kurve

$$c : (\alpha_1, \beta_1) \cup (\alpha_2, \beta_2) \to M, \quad t \mapsto \begin{cases} c_1(t) & \text{falls } t \in (\alpha_1, \beta_1) \\ c_2(t) & \text{falls } t \in (\alpha_2, \beta_2) \end{cases}$$

wohldefiniert, glatt und Integralkurve von X. Daher gibt es eine *maximale Integralkurve* $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ von X mit $c_p(0) = p$. Hierbei bedeutet maximal, daß für jede andere

Integralkurve $c : (\alpha, \beta) \to M$ mit $0 \in (\alpha, \beta)$ und $c(0) = p$ gilt $(\alpha, \beta) \subset (\alpha_p, \omega_p)$ und $c_p|(\alpha, \beta) = c$. Wir setzen noch $I_p = (\alpha_p, \omega_p)$,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_X = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_p\} \tag{5.5}$$

und

$$f(t, p) = f^t(p) = c_p(t), \ t \in I_p. \tag{5.6}$$

Wir nennen f bzw. die Familie der (f^t) den *(maximalen) Fluß* von X. Nach Definition ist $f^0 = \mathrm{id}_M$.

Sei nun $(t, p) \in \mathcal{D}$, also $t \in I_p$. Dann ist

$$\dot{c}_p(t) = \frac{d}{ds}(s \mapsto c_p(s + t))|_{s=0} = X(c_p(t)),$$

daher ist $s \mapsto c_p(s + t)$ Integralkurve von X. Mit 5.3 folgt $I_{f(t,p)} = I_p - t$ und

$$f^{s+t}(p) = f^s(f^t(p)). \tag{5.7}$$

5.8 Satz. *$\mathcal{D}$ ist offen und f ist glatt.*

Beweis. Sei $p \in M$. Sei A die Menge aller $t \geq 0$, so daß $[0, t] \times \{p\}$ eine offene Umgebung in $\mathbb{R} \times M$ hat, die in $\mathcal{D}$ enthalten ist und auf der f glatt ist. Nach Definition ist A ein offenes Intervall und enthalten in $[0, \infty) \cap I_p$. Wegen 5.4 ist $0 \in A$.

Sei nun $t \in [0, \infty) \cap I_p$ im Abschluß von A. Zu $p_0 = f^t(p)$ gibt es dann nach 5.4 eine offene Umgebung V von p_0 in M und ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \subset \mathcal{D}$, so daß f auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ glatt ist. Weil t im Abschluß des Intervalls A liegt, gibt es ein $s \in A$ mit $f^s(p) \in V$ und $s < t < s + \varepsilon$. Nun ist $s \in A$. Also gibt es eine offene Umgebung W von p in M und ein $\delta > 0$ mit $U = (-\delta, s + \delta) \times W \subset \mathcal{D}$, so daß $f|U$ glatt ist. Dann ist

$$W' = \{q \in W \mid f^s(q) \in V\}$$

eine offene Umgebung von p in M. Für alle $q \in W'$ ist $(-\delta, s + \varepsilon) \subset I_q$, denn

$$f^r(q) = \begin{cases} f^r(q) & \text{falls } -\delta < r < s + \delta \\ f^{r-s}(f^s(q)) & \text{falls } s - \varepsilon < r < s + \varepsilon \end{cases}$$

ist eine Integralkurve von X durch q. An dieser Darstellung sehen wir, daß f auf $U' = (-\delta, s + \varepsilon) \times W'$ definiert und glatt ist. Nun ist $s + \varepsilon > t$, daher $t \in A$. Damit folgt $A = [0, \infty) \cap I_p$. Um alle $(t, p) \in \mathcal{D}$ mit $t \geq 0$ ist daher $\mathcal{D}$ offen und f glatt. Analog diskutiert man den Fall $t \leq 0$. $\square$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{D}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ offen in M, und f^t ist wegen 5.7 und $f^0 = \mathrm{id}$ ein Diffeomorphismus von $\mathcal{D}_t$ auf $\mathcal{D}_{-t}$. Wir nennen die Familie der (f^t) wegen 5.7 daher eine *lokale 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen.*

Sei nun $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ offen und $f : \mathcal{D} \to M$ ein *Fluß*, d.h., eine glatte Abbildung mit $f(0,.) = \mathrm{id}$, die 5.7 erfüllt. Dann ist

$$X(p) = \frac{d}{dt}(t \mapsto f(t,p))|_{t=0},\ p \in M, \tag{5.9}$$

ein Vektorfeld auf M und f ist Einschränkung des maximalen Flusses von X. Wir nennen X den *Erzeuger* von f.

Sei $h : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Sei $X \in \mathcal{V}(M)$ bzw. $Y \in \mathcal{V}(N)$. Dann erklären wir $h_*X \in \mathcal{V}(N)$ bzw. $h^*Y \in \mathcal{V}(M)$ durch

$$h_*X(q) = h_*(X(h^{-1}(q))) \quad \text{bzw.} \quad h^*Y(p) = h_*^{-1}(Y(h(p))). \tag{5.10}$$

Das Vektorfeld $\hat{\xi} : U' \to \mathbb{R}^m$ zu Anfang des Abschnitts entspricht genau dem Vektorfeld κ_*X. Wir wiederholen jetzt das Argument, das die Lösungen von 5.1 mit den Lösungen von 5.2 in Verbindung brachte.

5.11 Lemma. *Sei $f : \mathcal{D} \to M$ der (maximale) Fluß von X. Dann ist*

$$\{(t,q) \mid (t, h^{-1}(q)) \in \mathcal{D}\} \to N, \quad (t,q) \mapsto h(f(t, h^{-1}(q))),$$

der Fluß von h_*X. Eine entsprechende Aussage gilt für h^*Y.

Beweis. In $p = h^{-1}(q)$ ist

$$\frac{d}{dt}\left(t \mapsto h(f(t, h^{-1}(q)))\right)\Big|_{t=0} = h_{*p}(X(p)) = h_*X(q). \quad \square$$

Seien nun $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ mit Fluß (f^t) bzw. (g^t). Dann erklären wir die *Lie-Ableitung* von Y in Richtung X durch

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((f^{-t})_*(Y(f^t(p))) - Y(p)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(f_*^{-t} Y(f^t(p))\right). \tag{5.12}$$

5.13 Satz. $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$.

Beweis:. Sei $p \in M$ und $\kappa : U \to U'$ eine Karte um p, $u_0 = \kappa(p)$. Wie zu Beginn des Abschnitts seien $\hat{\xi} = \xi \circ \kappa^{-1}$, $\hat{\eta} = \eta \circ \kappa^{-1}$ die Vektorfelder auf U', die X bzw. Y vermöge κ entsprechen. Dann ist $\varphi(t,u) = \kappa\left(f(t, \kappa^{-1}(u))\right)$ bzw. $\psi(t,u) = \kappa\left(g(t,\kappa^{-1}(u))\right)$ Fluß von $\hat{\xi}$ bzw. $\hat{\eta}$. Bezüglich κ entspricht

$$(\varphi^{-t})_*\left(\hat{\eta}(\varphi(t,u_0))\right) = d_u\varphi\left(-t, \varphi(t,u_0)\right) \cdot \hat{\eta}\left(\varphi(t,u_0)\right)$$

dem Vektor $(f^{-t})_*\left(Y(f^t(p))\right)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} &\left(d_u\varphi(-t,\varphi(t,u_0)) \cdot \hat{\eta}\left(\varphi(t,u_0)\right)\right) = \\
&- d_u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,u)\right)\Big|_{u=u_0} \cdot \hat{\eta}(u_0) + d_u^2\varphi(0,u_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,u_0), \hat{\eta}(u_0)\right) \\
&+ d_u\varphi(0,u_0) \cdot d\hat{\eta}(u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,u_0) = -d\hat{\xi}(u_0) \cdot \hat{\eta}(u_0) + d\hat{\eta}(u_0) \cdot \hat{\xi}(u_0)
\end{aligned}$$

weil $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0,u) = \hat{\xi}(u)$ und $d_u^2\varphi(0,u) \equiv 0$ (letzteres, weil $\varphi(0,u) \equiv u$, $d_u\varphi(0,u) \equiv \mathrm{id}$). $\square$

Satz 5.14. $[X,Y] \equiv 0$ *genau dann, wenn zu jedem* $p \in M$ *ein* $\varepsilon > 0$ *existiert mit* $g^s f^t(p) = f^t g^s(p)$ *für alle* $s,t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Beweis. Falls es zu p ein $\varepsilon > 0$ mit der angegebenen Eigenschaft gibt, so gilt

$$(f^{-t})_* Y(f^t(p)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (f^{-t} g^s f^t(p)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (g^s(p)) = Y(p),$$

also $\mathcal{L}_X Y(p) = 0$.

Sei nun umgekehrt $[X,Y] \equiv 0$. Setze

$$Z(t) = (f^{-t})_* \big(Y(f^t(p))\big) \in T_p M.$$

Wir leiten Z ab,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \Big((f^{-(t+\tau)})_* (Y(f^{t+\tau}(p)))\Big) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \big(f_*^{-t}(f_*^{-\tau}(Y(f^\tau(f^t(p))))))\big) \\ &= f_*^{-t}\left(\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \big(f_*^{-\tau}(Y(f^\tau(f^t(p)))))\big)\right) = f_*^{-t}\left(\mathcal{L}_X Y(f^t(p))\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $p \in M$, also folgt (lokal) $Y = (f^t)^* Y$. Nach Lemma 5.11 ist $(f^{-t} \circ g^s \circ f^t)$ der Fluß von $(f^t)^* Y$, daher ist $g^s = f^{-t} \circ g^s \circ f^t$ (lokal). $\square$

5.15 Bemerkung. Zu $p \in M$ sei $c(t) = g^{-t} f^{-t} g^t f^t(p)$. Dann gilt $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = 0$, $\ddot{c}(0) = 2 \cdot [X,Y](p)$, siehe [Spivak I].

Ein Vektorfeld X auf M heißt *vollständig*, wenn sein Fluß f auf $\mathbb{R} \times M$ definiert ist, also wenn die maximale Integralkurve durch jedes $p \in M$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Wenn X vollständig ist, dann ist $f^t : M \to M$ ein Diffeomorphismus mit $(f^t)^{-1} = f^{-t}$. Wir nennen dann (f^t) eine *1-Parametergruppe von Diffeomorphismen* oder ein *dynamisches System.*

5.16 Lemma. *Sei* $c : [0,b) \to M$, $b < \infty$, *eine Integralkurve von* X *mit* $c(0) = p$. *Es gebe eine Folge* (t_n) *in* $[0,b)$ *mit* $t_n \to b$ *und* $c(t_n) \to q \in M$. *Dann ist* $b \in I_p$ *und* $f(b,p) = q$.

Beweis. Zu $p_0 = q$ seien V eine offene Umgebung und $\varepsilon > 0$ wie in 5.4. Wähle n so groß, daß $c(t_n) \in V$ und $b - t_n < \varepsilon$ ist. Dann ist $f^s(c(t_n))$ erklärt für $-\varepsilon < s < \varepsilon$ und

$$\hat{c}(t) = \begin{cases} f^t(p) & \text{falls } 0 \le t < b \\ f^{t-t_n}(f^{t_n}(p)) & \text{falls } -\varepsilon < t - t_n < \varepsilon \end{cases}$$

eine Integralkurve von X mit $\hat{c}(t) = c(t)$, $0 \le t < b$. Daher ist $b < t_n + \varepsilon$ in I_p und $f^b(p) = \hat{c}(b)$. $\square$

5.17 Korollar. *Falls* $\operatorname{supp} X$ *kompakt ist, so ist* X *vollständig. Insbesondere sind Vektorfelder auf kompakten Mannigfaltigkeiten vollständig.* $\square$

Es ist im allgemeinen ein hoffnungsloses Unterfangen, gewöhnliche Differentialgleichungen explizit zu lösen. Nichtsdestoweniger existiert häufig eine Koordinatentransformation, so daß die Differentialgleichung in den neuen Koordinaten eine besonders einfache Gestalt annimmt. Zum Abschluß dieses Abschnitts diskutieren wir hierzu ein wichtiges Beispiel.

5.18 Satz. *Falls $X(p) \neq 0$ ist, dann gibt es eine Karte (x, U) um p mit $X \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ über U.*

Beweis. Wähle eine Karte (y, V) um p mit $y(p) = 0$ und $X(p) = \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p$. Erkläre eine Abbildung

$$h : (t, u^2, \ldots, u^n) \mapsto f^t(y^{-1}(0, u^2, \ldots, u^n)).$$

Dann gilt

$$h_{*0}(e_1) = X(p) = \frac{\partial}{\partial y^1}(p), \quad h_{*0}(e_i) = \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Nach dem Umkehrsatz ist h ein lokaler Diffeomorphismus und h^{-1} eine Karte wie behauptet. $\square$