Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Topologie **3**
- 1.1 Der topologische Raum . . . 3
- 1.2 Die topologische Mannigfaltigkeit . . . 4
- 1.3 Abbildungsräume . . . 5

2 Homotopietheorie **7**
- 2.1 Definition der Homotopie . . . 7
- 2.2 Die Fundamentalgruppe und Überlagerungen . . . 7
- 2.3 Homotopiegruppen . . . 10
- 2.4 Faserungen und Kofaserungen . . . 11
- 2.5 Exakte Sequenzen . . . 14
- 2.6 Eilenberg–Mac Lane–Räume . . . 15
- 2.7 Stabilitätssätze . . . 17

3 Homologietheorie **18**
- 3.1 Simpliziale Homologie . . . 18
- 3.2 Singuläre Homologie . . . 22
- 3.3 Homologie von CW–Komplexen . . . 24
- 3.4 Zusammenhang zur Homotopie . . . 24
- 3.5 Homologische Algebra und Axiomensystem . . . 25

4 Kohomologietheorie **29**
- 4.1 Die De-Rham-Kohomologie . . . 29
- 4.2 Garbenkohomlogie . . . 32
- 4.3 Axiomensystem . . . 34
- 4.4 Kohomologiefunktor . . . 36

5 Faserbündeltheorie **37**
- 5.1 Definition und Beispiel . . . 37
- 5.2 Zusammenhang und Krümmung . . . 38
- 5.3 Klassifikation . . . 40
- 5.4 Characteristische Klassen . . . 42

6 K–Theorie **45**
6.1 Whitneysummenbündel und Stabile Äquivalenz 45
6.2 K–Funktor 47
6.3 Höhere K–Theorie 49

7 Indextheoreme **54**
7.1 Elliptische Komplexe und Kohomologie 54
7.2 Analytischer und Topologischer Index 56
7.3 Atiyah–Singer Indexsatz 58
7.4 Indexsatz von Lefschetz 60

8 Morsetheorie **62**
8.1 Kritische Punkte 62
8.2 Theoreme von Morse, Bott und Smale 63
8.3 Kritische Untermannigfaltigkeiten 64

9 Kobordismustheorie **65**
9.1 Thomsche Kobordismusgruppe 65
9.2 Das h–Kobordismustheorem 67
9.3 Pontrjagin–Thom Konstruktion 68

10 Glättungstheorie und 4–Mannigfaltigkeiten **71**
10.1 Obstruktionstheorie 71
10.2 Kirby–Siebenman–Invariante 72
10.3 Freedman's Klassifikation 75
10.4 Donaldson–Theorie 76
10.5 Floer–Homologie 78

Kapitel 1

Allgemeine Topologie

1.1 Der topologische Raum

Definition 1 *:*
Sei eine Menge X gegeben. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist eine Familie von Teilmengen von X mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &(T1) \quad && \emptyset, X \in \mathcal{T} \\ &(T2) \quad && U_1, U_2 \in \mathcal{T} \longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T} \\ &(T3) \quad && \{U_i\} \subset \mathcal{T} \longrightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T} \qquad \text{mit} \quad \mathcal{I} \quad \text{Indexmenge} \end{aligned}$$

Die Menge $(X,\mathcal{T})$ heißt topologischer Raum. Mengen aus $\mathcal{T}$ heißen offen.

Definition 2 *:*
$(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{G})$ seien zwei topologische Räume. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt stetig, wenn für alle $V \in \mathcal{G}$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Definition 3 *:*
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, wenn f bijektiv, stetig und f^{-1} stetig ist.

Definition 4 *:*
Seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ zwei topologische Räume mit Basispunkten. Die Operation:

$$X \vee Y = \{(x, y_0) | x \in X\} \cup \{(x_0, y) | y \in Y\} \subset X \times Y$$

heißt Einpunktvereinigung und das Produkt

$$(X, x_0) \# (Y, y_0) = \left(\frac{X \times Y}{X \vee Y}, \star \right)$$

(wobei $\star$ der durch Identifizierung von $X \vee Y$ zu einem Punkt entstandene Basispunkt ist) wird Kreuzprodukt (smash product) genannt.

Satz 1 *Es gilt:* $X \# S^0 \approx X$ *und* $\forall n > 0$ $S^n \# S^1 \approx S^{n+1}$.
($\approx$ *bezeichnet die Homöomorphie zwischen den Räumen)*

Definition 5 *:*
Das Kreuzprodukt:

$$\Sigma(X, x_0) = X \# S^1$$

heißt reduzierte Einhängung. Die (nicht reduzierte) Einhängung ist durch

$$\Sigma X = \frac{X \times I}{\{X \times 1\} \cup \{X \times 0\}}$$

erklärt.

Satz 2 *Es gilt:* $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

1.2 Die topologische Mannigfaltigkeit

Definition 6 *:*
Sei $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum. Eine Umgebung(Nachbarschaft)* N *am Punkt* $x \in X$ *ist eine Untermenge von* $\mathcal{T}$*, die mindestens eine offene Menge* U_x *mit* $x \in U_x$ *enthält.*

Definition 7 *:*
Ein topologischer Raum X [1] *heißt Hausdorffraum, wenn für ein beliebiges Paar von verschiedenen Punkten* $x, x' \in X$ *Umgebungen* U_x *und* U'_x *mit* $U_x \cap U'_x = \emptyset$ *existieren.*

Definition 8 *:*
Eine Familie $\{A_i\}$ *von offenen Untermengen von* X *mit*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X$$

heißt offene Überdeckung von X*.*

Definition 9 *:*
M *ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit*

1. M *ist ein Hausdorffraum.*
2. $\{U_i\}$ *sei eine offene Überdeckung von* M
3. $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i$ *ist ein Homöomorphismus in die offenen Untermengen* V_i *des* $\mathbb{R}^n$.

[1] im folgenden wird die Topologie weglassen.

Das Paar (U_i, ϕ_i) heißt lokale Karte von M. Die Menge aller Karten, die M überdecken heißt Atlas.

Definition 10 *:*
Seien (U_i, ϕ_i) und (V_k, η_k) zwei lokale Karten von M. Die Abbildung $g_{ik} = \phi_i \circ \eta_k^{-1}$ heißt Übergangsfunktion zwischen beiden lokalen Karten.

Definition 11 *:*

1. *M ist eine topologische Mannigfaltigkeit TOP_n der Dimension n, wenn die Übergangsfunktion ein Homöomorphismus ist.*
2. *M ist eine PL(piecewise linear)-Mannigfaltigkeit PL_n der Dimension n, wenn die Übergangsfunktion eine stückweise lineare Funktion ist.*
3. *M ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $DIFF_n$ der Dimension n, wenn die Übergangsfunktion eine glatte Funktion, d.h. unendlich oft differenzierbar, ist.*

1.3 Abbildungsräume

Definition 12 *:*
Seien X, Y zwei topologische Räume. Mit $Top(X,Y)$ wird die Menge der stetigen Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ bezeichnet. Auf ihr läßt sich eine Topologie konstruieren. Sei $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen, so ist $< K, U > \subset Top(X,Y)$ die Menge aller $f \in Top(X,Y)$ mit $f(K) \subset U$. Eine offene Menge in $Top(X,Y)$ ist also die Vereinigung von (beliebig vielen) endlichen Durchschnitten von Mengen aus dieser Subbasis:

$$\bigcup \bigcap_{endlich} < K, U > \quad .$$

Die Menge $Top(X,Y)$ zusammen mit dieser Topologie wird mit Y^X bezeichnet und heißt Abbildungsraum.

Satz 3 *Seinen $g : X' \longrightarrow X$ und $h : Y \longrightarrow Y'$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, dann sind die Abbildungen:*

$$\begin{aligned} Y^g &= Top(g, Y) : Y^X \longrightarrow Y^{X'} \\ h^X &= Top(X, h) : Y^X \longrightarrow Y'^X \end{aligned}$$

ebenfalls stetig.

Satz 4 *Es seien die stetigen Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ gegeben, dann gilt:*

$$\Sigma(g\, f) = \Sigma\, g\, \Sigma\, f$$

Definition 13 *:*
Ein Raum X heißt lokal kompakt, wenn jede Umgebung eines Punktes x eine kompakte Umgebung von x enthält.

Bem.: Ist X Hausdorff–Raum, so ist X lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.
Im folgenden Satz werden alle Eigenschaften von Abbildungen in Abbildungsräume zusammengestellt.

Satz 5 *Seien X, Y und Z topologische Räume.*

1. *Sind X und Y Hausdorff–Räume und ist Y lokal kompakt, so ist*

$$Z^{X\times Y} \longrightarrow (Z^Y)^X$$

   ein Homöomorphismus. (Exponentialsatz)

2. *Sind X und Y Hausdorff–Räume und ist Y lokal kompakt, so ist*

$$Z^{X\cup Y} \longrightarrow Z^X \times Z^X$$

   ein Homöomorphismus.

3. *Unter den gleichen Voraussetzungen ist auch:*

$$(Z^X)^Y \longrightarrow (Z^Y)^X$$

   ein Homöomorphismus.

4. *Sind (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Hausdorff–Räume und ist Y lokal kompakt, so ist*

$$(Z, Z_0)^{X\#Y} \longrightarrow ((X, x_0)^{(Y,y_0)}, 0)^{(Z,z_0)}$$

   ein Homöomorphismus.

Bem.: Für die volle Symmetrie bei der Formulierung des Exponentialgesetzes benötigt man die Einführung der k–Topologie.

Definition 14 *:*
Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Der Loopraum von X wird durch

$$\Omega(X, x_0) = (X, x_0)^{(S^1,\star)}$$

definiert.

Kapitel 2

Homotopietheorie

2.1 Definition der Homotopie

Definition 15 *:*
$f, g : X \longrightarrow Y$ sind zwei stetige Funktionen. f und g sind homotop zueinander, wenn eine stetige Funktion $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ existiert für die
$F(x,0)=f(x)$ und $F(x,1)=g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Bezeichnung 1 $f \simeq g$

Satz 6 *Die Relation "homotop zueinander"($\simeq$) ist eine Äquivalenzrelation. Der Faktoraum*

$$\{f : X \longrightarrow Y \, stetig\}/\simeq$$

existiert und wird als Homotopieklasse stetiger Abbildungen bezeichnet.

Bezeichnung 2 $[X,Y] = \{f : x \longrightarrow Y \ stetig\}/\simeq$
Homotopieklasse der Abbildungen von X nach Y.

Definition 16 *:*
Zwei topologische Räume X und Y sind homotopieäquivalent, wenn zwei stetige Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ existieren, so daß

$$f \circ g \simeq Id_X$$
$$g \circ f \simeq Id_Y$$

mit Id_X und Id_Y als identische Abbildung in X bzw. in Y.

2.2 Die Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Definition 17 *:*
$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt geschlossene Kurve.

Definition 18 *:*
γ_1 und γ_2 seien Kurven mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. $\gamma_1 \# \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ mit

$$\gamma_1 \# \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

heißt Wegverknüpfung.

Definition 19 *:*
Zwei Kurven γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ heißen homotop bezüglich der Anfangs- und Endwerte, wenn eine Funktion $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ existiert mit

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_1(t) \\ H(t,1) &= \gamma_2(t) \\ H(0,s) &= \gamma_1(0) \\ H(1,s) &= \gamma_1(1) \end{aligned}$$

Bezeichnung 3 $\gamma_1 \simeq \gamma_2 \quad rel(\gamma_1(0), \gamma_1(1))$

Satz 7 *Obige Relation $\simeq rel(x_1, x_2)$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Satz 8 *Die Menge*

$$\{\gamma : [0,1] \longrightarrow X | \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\} / \simeq \quad rel(x_0)$$

zusammen mit der Wegverknüpfung # besitzt die Struktur einer Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, die auch als Fundamentalgruppe des topologischen Raumes X im Punkt x_0 bezeichnet wird.

Satz 9 *Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist unabhängig von x_0, wenn X bogenzusammenhängend ist.*

Einschub: Die freie Gruppe

Definition 20 *:*
Ein Paar (G,) heißt Gruppe, wenn*

1. *$g_1, g_2 \in G$ dann ist auch $g_1 * g_2 \in G$*
2. *Für alle $g \in G$ existiert genau ein Element $e \in G$ mit $g * e = e * g = g$.*
3. *Für jedes $g \in G$ existiert ein $g^{-1} \in G$ mit $g * g^{-1} = e$.*
4. *Für drei Elemente $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt die Assoziativität, d.h. $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * g_2 * g_3$*

Gilt außerdem noch $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ so spricht man von einer abelschen Gruppe.

Definition 21 *:*
$X = \{x_i\}$ sei eine endliche Menge von n verschiedene Elementen. Auf dieser Menge sei eine Verknüpfung definiert. Diese führt zu Ausdrücken der Form:

$$w = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \qquad mit\ i_k \in \mathbb{Z}$$

Dabei gilt $x_i^0 = 1$, $x_i^1 = x_i$ und $x_i^n x_i^{-n} = x_i^0 = 1$.

Bezeichnung 4 *Die Elemente x_i von X heißen Buchstaben und die Verknüpfung dieser Elemente Wörter.*

Definition 22 *:*
$F[X]$ ist die Menge der reduzierten Wörter, die von X erzeugt wird. $F[X]$ besitzt die Struktur einer Gruppe und wird als freie Gruppe bezeichnet.

Definition 23 *:*
Eine Relation ist ein Wort der Form:

$$r = x_{k_1}^{i_1} \dots x_{k_n}^{i_n} = 1$$

Die freie Gruppe $F[X]$ ist dann durch den Ausdruck

$$F[X] =< x_1, \dots, x_n | r_1 = 1, \dots, r_k = 1 >$$

für bestimmte n und k gegeben.

Einschub: Die freie abelsche Gruppe und endlich erzeugte abelsche Gruppen

Definition 24 *:*
X sei eine Menge aus n verschiedenen Elementen. $F[X]$ mit der Verknüpfung + wird freie abelsche Gruppe vom Rank n genannt. Statt x_i^k wird jetzt einfach kx_i geschrieben. Das Einselement dieser Gruppe ist die 0.

Definition 25 *:*
Wird eine abelsche Gruppe G von endlich vielen Elementen $x_1, \dots, x_r$ erzeugt, so heißt sie endlich erzeugte abelsche Gruppe.
Sind die r Generatoren noch linear unabhängig, so heißt G freie abelsche Gruppe vom Rang r.

Satz 10 *Sei G eine freie abelsche Gruppe vom Rang r, dann besteht folgender Isomorphismus:*

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{r}$$

Satz 11 *G sei eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit m Generatoren, dann besteht folgender Isomorphismus*

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{Z}_{i_k}$$

mit m=r+p.

Bezeichnung 5 *r heißt Rang von G.*

Gruppenstruktur der Fundamentalgruppe

Satz 12 *Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ eines kompakten Raumes X besitzt die Struktur einer frei erzeugten Gruppe.*

Bem. Fundamentalgruppen sind i.a. nichtabelsch.

Satz 13 *Seien X und Y zwei bogenzusammenhängende Räume, d.h. alle Punkte des Raumes lassen sich durch eine Kurve verbinden. Dann gilt*

$$\pi_1((X \times Y), (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$$

2.3 Homotopiegruppen

Definition 26 *:*
Die n-Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ des topologische Raumes X ist als Homotopieklasse von Abbildungen $S^n \longrightarrow X$ definiert, d.h.

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]$$

Definition 27 *:*
$I = [0, 1]$ sei das Einheitsintervall. Ein n-Würfel I^n ist das n-fache Kreuzprodukt von Einheitsintervallen I, d.h. $I^n = I \times \ldots \times I$. ∂I^n sei der Rand des Einheitswürfel I^n.

Satz 14 *Es sei $\phi : I^n \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, die ∂I^n auf einen Punkt $x_0 \in X$ abbildet. Dann gilt $I^n/\partial I^n \cong S^n$.*

Bezeichnung 6 *Die Abbildung $\phi : I^n \longrightarrow X$ heißt n-Schleife an x_0.*

Definition 28 *:*
X sei topologischer Raum. $\alpha, \beta : I^n \longrightarrow X$ seien zwei n-Schleifen an $x_0 \in X$. α ist homotop zu β ($\alpha \simeq \beta$), wenn eine stetige Abbildung $F : I^n \times I \longrightarrow X$ existiert mit den Eigenschaften:

$$F(s_1, \ldots, s_n, 0) = \alpha(s_1, \ldots, s_n)$$
$$F(s_1, \ldots, s_n, 1) = \beta(s_1, \ldots, s_n)$$
$$F(s_1, \ldots, s_n, t) = x_0 \quad \textit{für } (s_1, \ldots, s_n) \in \partial I^n, t \in I$$

Satz 15 $\simeq$ *ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse wird mit* $[\alpha]$ *bezeichnet und heißt auch Homotopieklasse.*

Definition 29 *:*
$\gamma_1, \gamma_2 : I^n \longrightarrow X$ *seien zwei n-Schleifen. Der Ausdruck*

$$(\gamma_1 \# \gamma_2)(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} \gamma_1(2s_1, s_2 \ldots, s_n) & \text{für} \quad s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s_1 - 1, s_2 \ldots, s_n) & \text{für} \quad s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

heißt Verknüpfung der beiden n-Schleifen.

Definition 30 *:*
X *sei ein topologischer Raum. Die Menge der Homotopieklassen von n-Schleifen* $(n \geq 1)$ *an* $x_0 \in X$ *wird als n-te Homotopiegruppe* $\pi_n(X, x_0)$ *bezeichnet, d.h.*

$$\pi_n(X, x_0) = \{\alpha : I^n \longrightarrow X | \partial I^n \longmapsto x_0 \in X\} / \simeq$$

Definition 31 *:*
X *und* $\tilde{X}$ *seien zusammenhängende topologische Räume. Das Paar* $(\tilde{X}, p)$ *bzw.* $\tilde{X}$ *heißt Überlagerungsraum von* X*, wenn eine stetige Abbildung* $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ *existiert für die:*
(1) p *ist surjektiv (2) für jedes* $x \in X$ *existiert eine zusammenhängende, offene Menge* $U \subset X$*, die* x *enthält.* $p^{-1}(U)$ *ist eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen in* $\tilde{X}$*, welche homöomorph zu* U *sind, gilt. Ist* $\tilde{X}$ *zusammenhängend, so heißt* $\tilde{X}$ *auch universelle Überlagerung.*

Satz 16 $\tilde{X}$ *sei die universelle Überlagerung eines zusammenhängenden Raumes* X*. Für* $n \geq 2$ *besteht folgender Isomorphismus zwischen den Gruppen:*

$$\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \cong \pi_n(X, x_0)$$

mit $p(\tilde{x_0}) = x_0$*.*

2.4 Faserungen und Kofaserungen

Definition 32 *:*
Eine Abbildung $p : E \longrightarrow B$ *heißt Hurewicz–Faserung, wenn man in jedem vorgegebenen kommutativen Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \tilde{f} \uparrow & & \uparrow F \\ X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \end{array}$$

für einen beliebigen topolog. Raum X *und beliebige stetigen Abbildungen* $\tilde{f}, F$ *eine Abbildung* $\tilde{F} : X \times I \longrightarrow E$ *finden kann, die in das Diagramm kommutativ hineinpaßt, d.h.* $\tilde{f} = \tilde{F} \circ i_0$ *und* $F = p \circ \tilde{F}$*. Diese Eigenschaft heißt auch Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE).*

Definition 33 *:*
Eine Abbildung $p : B \longrightarrow E$ heißt Kofaserung, wenn man in jedem vorgegebenen kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{p} & B \\ \tilde{f}\downarrow & & \downarrow F \\ X & \xleftarrow{p_0} & X^I \end{array}$$

für einen beliebigen topolog. Raum X und beliebige stetigen Abbildungen $\tilde{f}, F$ eine Abbildung $\tilde{F} : X^I \longrightarrow E$ finden kann, die in das Diagramm kommutativ hineinpaßt, d.h. $\tilde{f} = p_0 \circ \tilde{F}$ und $F = \tilde{F} \circ p$. Diese Eigenschaft heißt auch Homotopieerweiterungseigenschaft (HEE).

Die Dualität zwischen beiden Begriffen zeigt folgender Satz.

Satz 17 *Sei K ein topologischer Raum und $p : B \longrightarrow E$ eine Kofaserung, so ist*

$$K^p : K^E \longrightarrow K^B$$

Faserung.

Die entscheidende Frage ist nun: Wann ist eine Inklusion eines Raumes in einen anderen Raum eine Kofaserung? Für die Beantwortung dieser Frage müssen die CW–Komplexe eingeführt werden, die auch in der Homologietheorie eine Rolle spielen.

Definition 34 *:*
Sei A ein topologischer Raum und D^n ein topologischer Raum, der zur n–dimensionalen Vollkugel homöomorph ist (besser ist ein n–Simplex, siehe 3.1). Die Abbildung $f : \partial D^n \longrightarrow A$ bildet den Rand von D^n auf den Raum A ab. Der Raum

$$A' = A \cup_f D^n$$

entsteht aus A durch Anheften von D^n mit der Abbildung f. Weiterhin gibt es Inklusionen (Einbettungen) $i : \partial D^n \subset D^n$ und $q : A \subset A$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A' & \xleftarrow{c} & D^n \\ q\uparrow & & \uparrow i \\ A & \xleftarrow{f} & \partial D^n \end{array}$$

kommutiert. Dadurch wird eine Abbildung $c : D^n \longrightarrow A$, die charakteristische Abbildung, für die Zelle $c(D^n) \subset A'$ definiert. Die Einschränkung von c auf $D^n - \partial D^n$ ist ein Homöomorphismus.

Definition 35 *:*
Ein relativer CW–Komplex (X, A) ist ein Paar von topologischen Räumen $A \subset X$ und eine Folge $A = X^{-1} \subset X^0 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots$ von Teilräumen von X, so daß gilt:

1.

$$X = \bigcup_{n=-1}^{\infty} X^n$$

2. *Es entsteht X^n aus X^{n-1} durch Anheften von n–Zellen.*

3. *Es ist $B \subset X$ abgeschlossen genau dann, wenn $B \cap X^n$ abgeschlossen in X^n ist.*

Bem.: Der Buchstabe C steht für "closure" (Bedingung 2) und W für "weak" (Bedingung 3).

Satz 18 *Ist (X, A) relativer CW–Komplex, so ist die Inklusion $A \subset X$ Kofaserung.*

Satz 19 *Die Abbildung $p : B \times F \longrightarrow B$ ist eine Hurewicz–Faserung.*

Die Klasse der Hurewicz–Faserungen ist noch relativ klein, so daß wir durch eine Spezifizierung der Definition eine größere Klasse erzeugen.

Definition 36 *:*
Eine Abbildung $p : E \longrightarrow B$ heißt lokale (Hurewicz) Faserung, wenn zu jedem $b \in B$ eine Umgebung $U = U(b)$ existiert, so daß $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \longrightarrow U$ Hurewicz Faserung ist.

Bem.: Später wird dieser Begriff in den Begriff der Bündelabbildung bzw. des Faserbündels übergehen.

Satz 20 *Sei E ein zusammenhängender Raum. Die lokale Faserung $p : E \longrightarrow B$ heißt Überlagerung, wenn die Faser $p^{-1}(b_0) = F$ für alle $b_0 \in B$ diskret ist.*

Definition 37 *:*
Eine Abbildung $p : E \longrightarrow B$ heißt Serre–Faserung, wenn sie die Homotopie–Hochhebungseigenschaft (HHE) nur für endliche Polyeder P (siehe 3.1) hat.

Daraus folgt, daß jede Hurewicz Faserung auch Serre–Faserung ist.

Satz 21 *Für eine stetige Abbildung $p : E \longrightarrow B$ von topolog. Räumen sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1. *p ist Serre Faserung*

2. *p hat die HHE für beliebige n–Simplexe D^n, $n = 0, 1, \ldots$*

3. *p hat die HHE für einen rel. CW–Komplexe (X, A) im folgenden Sinne. Wir betrachten das kommutative Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \tilde{f}\uparrow & & \uparrow F \\ X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \end{array}$$

und eine Abbildung $H : A \times I \longrightarrow E$ mit $p \circ H = F|_{A\times I}$, $H \circ i_0|_A = \tilde{f}|_A$, so gibt es ein $\tilde{F} : X \times I \longrightarrow E$ mit $\tilde{F}|_{A\times I} = H$. Man kann damit F so zu einem $\tilde{F}$ hochheben, daß eine auf A bereits vorgegebene Hochhebung angenommen wird.

Zum Schluß vielleicht noch die Interpretation der Faserung für punktierte Räume. Dazu betrachten wir die Folge

$$(F, a_0) \xrightarrow{i} (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$$

wo $F = p^{-1}(b_0)$ die Faser über dem Basispunkt und i die Inklusion von $F \subset E$ ist. Dabei wird a_0 mit e_0 identifiziert.

2.5 Exakte Sequenzen

Definition 38 *:*
Sei

$$\ldots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\phi_i} M_i \xrightarrow{\phi_{i-1}} M_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

eine endliche oder unendliche Sequenz von Mengen mit Basispunkt und entsprechende Abbildungen. Man nennt die Sequenz exakt (im Punkt M_i) wenn im $\phi_i = \ker \phi_{i-1}$.

Satz 22 *Es sei $(F, a_0) \xrightarrow{i} (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ eine Faserung mit Faser F und (K, k_0) ein beliebiger punktierter, topologischer Raum, so ist die folgende Sequenz exakt*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow [K, \Omega^n F] \longrightarrow [K, \Omega^n E] \longrightarrow [K, \Omega^n B] \longrightarrow [K, \Omega^{n-1} F] \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow [K, \Omega B] \longrightarrow [K, F] \longrightarrow [K, E] \longrightarrow [K, B] \end{aligned}$$

Die Konstruktion der entsprechenden Abbildungen erfolgt durch die Folge:

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \Omega^n F \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \xrightarrow{\Omega^{n-1} r} \Omega^{n-1} F \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow \Omega B \xrightarrow{r} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \end{aligned}$$

Es fehlt noch die Abbildung $r : \Omega B \longrightarrow F$. Wir betrachten das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Omega B & \xrightarrow{O} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ \Omega B \times I & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

worin $\phi(\omega, t) = \omega(t)$ und $O(\omega) \equiv e_0$ für alle $\omega \in \Omega B$ ist. Da p Faserung ist, gibt es ein $\tilde{\phi} \circ i_0 = 0$ und $p \circ \tilde{\phi} = \phi$. Indem man das Exponentialgesetz anwendet, findet man anstelle von $\tilde{\phi}$ ein $\tilde{G} : \Omega B \longrightarrow E^I$ mit $\tilde{G}(\omega)(O) = e_0$ und $p \circ \tilde{G}(\omega)(t) = \omega(t)$. Man setzt

$$r(\omega) = \tilde{G}(\omega)(1), \qquad \omega \in \Omega B$$

woraus sich r eindeutig bis auf Homotopie ergibt.
Aus den Sätzen für Abbildungsräume ergibt sich nun der Satz:

Satz 23 *Seien X und Y zwei topologische Räume. Die Mengen*

$$[X, \Omega Y] = [\Sigma X, Y]$$

sind äquivalent. Σ und Ω sind dual zueinander.

Setzt man $K = S^0$ in der exakten Sequenz, so folgt

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \ldots$$

Mit Hilfe des Exponentialgesetzes läßt sich die exakte Sequenz der Faserung zu einer exakten Sequenz in der Kofaserung dualisieren.

Satz 24 *Es sei $(B, b_0) \xrightarrow{p} (E, e_0) \xrightarrow{i} (F, a_0)$ eine Faserung mit Kofaser F und (K, k_0) ein beliebiger punktierter, topologischer Raum, so ist die folgende Sequenz exakt*

$$\begin{aligned} [B, K] \longleftarrow [E, K] \longleftarrow [F, K] \longleftarrow [\Sigma B, K] \longleftarrow \ldots \\ \ldots \longleftarrow [\Sigma^n B, K] \longleftarrow [\Sigma^n E, K] \longleftarrow [\Sigma^n F, K] \longleftarrow [\Sigma^{n+1} B, K] \longleftarrow \ldots \end{aligned}$$

Die Theorie der exakten Sequenzen wird sich später noch als sehr nützlich erweisen. Vom Prinzip her lassen sich alle exakten Sequenzen der Algebraischen Topologie aus der exakten Sequenz für eine Faserung herleiten.

2.6 Eilenberg–Mac Lane–Räume

Die Menge der CW–Komplexe ist sehr wichtig für die Homotopietheorie. Der Grund ist folgender Satz:

Satz 25 *(Satz von Whitehead)*
Ist $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Abbildung zwischen zwei punktierten, zusammenhängenden CW–Räumen, so sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

1. *Es ist $\pi_n(f)$ ein Isomorphismus für alle $n \geq 0$.*
2. *Es ist f eine Homotopieäquivalenz.*

Nun betrachten wir die Abbildung $[K, \ ]$ von der Menge der topologischen Räume in die Mengen (bzw. Gruppen)[1].

Satz 26 *Die Abbildung $[K, \ ]$ ist stetig für kompaktes K stetig.*

Satz 27 *Es gibt einen Isomorphismus:*

$$\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_n(X \times Y, X \vee Y) \approx \pi_n(X \vee Y) \qquad n \geq 2$$

Definition 39 *:*
Ein Eilenberg–Mac Lane Raum $K(G,n)$ ist ein topologischer Raum mit Basispunkt, für den gilt:

$$\pi_m(K) = \begin{cases} G & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad .$$

Satz 28 *Ist $n \geq 0$, G (für $n > 1$ abelsche) Gruppe, so gibt es einen CW–Komplex $K(G,n)$.*

Satz 29 *Seinen $K(G,n)$ und $K'(G,n)$ zwei Eilenberg–Mac Lane–Räume mit gleichem G und n, so gibt es eine Abbildung*

$$f : K(G,n) \longrightarrow K'(G,n)$$

mit $\pi_m(f) =$ Isomorphismus. Beide Räume haben denselben Homotopietyp.

Satz 30 *Es gibt einen Homöomorphismus:*

$$\Omega K(G,n) \approx K(G,n+1)$$

Mit Hilfe dieser Räume soll nun ein beliebiger Raum bzgl. der Homotopierelation zerlegt werden.

Definition 40 *:*
Sei (X, x_0) ein zusammenhängender CW–Raum mit Basispunkt. Diesem Raum ordnet man eine Folge von Faserungen $p_n^{n+1} : X^{n+1} \longrightarrow X^n$ von Faserungen die als Faser einen Eilenberg–Mac Lane–Raum $K(\pi_{n+1}, n+1)$ wo $\pi_{n+1}(X) \equiv \pi_{n+1}$ und X^n ein zusammenhängender CW–Raum ist. Ferner werden wir Abbildungen $p_n : X \longrightarrow X^n$ erklären, für welche gilt:

1. $p_n^{n+1} \circ p_{n+1} = p_n$
2. $\pi_k(X^n) = 0 \qquad k > n$
3. *Es ist $\pi_k(p_n)$ ein Isomorphismus für $k \leq n$.*

Ein solches System $\mathcal{P} = \mathcal{P}_X = \{X^n, p_n^{n+1}, p_n\}$ heißt Postnikov–Zerlegung von X.

Bei der Obstruktionstheorie wird uns diese Art der Zerlegung wiederbegegnen.

[1] Im Abschnitt 3.5 werden wir eine solche Abbildung einen Funktor nennen, der von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen abbildet. Bisher habe ich aber diese Sprechweise vermieden.

2.7 Stabilitätssätze

Zum Schluß des Kapitels folgen noch zwei sehr wichtige Sätze, der Einhängungssatz und der damit zusammenhängende Stabilitätssatz.

Satz 31 *(Einhängungssatz)*
Y sei ein CW-Komplex mit $\pi_k(Y, y_0) = 0$ *für* $k \leq n$. *Der Einhängungsmorphismus*

$$\Sigma_* : \pi_m(Y, y_0) \longrightarrow \pi_{m+1}(\Sigma Y, \star) \qquad (\star = \textit{Basispunkt von } \Sigma Y)$$

(der durch $\Sigma_*[f] = [\Sigma f]$ *erklärt wird) ist ein Isomorphismus für* $m \leq 2n$ *und eine surjektive Abbildung (Epimorphismus) für* $m \leq 2n + 1$.

Satz 32 *(Stabilitätssatz)*
Seien X und Y zwei CW–Räume, und $\pi_m(Y, y_0) = 0$ *für* $m \leq n$, $n \geq 1$. *Ist* $\dim X \leq 2n + 1$, *so induziert die Einhängung*

$$\begin{aligned} \Sigma_*[X, Y]_0 &\longrightarrow [\Sigma X, \Sigma Y]_0 \\ \Sigma_*[f] = [\Sigma f], &\quad [f] \in [X, Y]_0 \end{aligned}$$

(wobei $[\ ,\ ]_0$ *die basispunkterhaltenden Homotopien sind)*
eine surjektive Abbildung. Ist $\dim X \leq 2n$, *so ist* Σ_* *sogar ein Isomorphismus.*

Eine äquivalente Formulierung lautet:

Satz 33 *Seien X, Y zwei CW–Räume, X endlich dimensional und X, Y zusammenhängend, so gibt es eine Zahl* $k \geq 0$, *so daß die Folge*

$$\begin{aligned} [X, Y]_0 \longrightarrow [\Sigma X, \Sigma Y]_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]_0 \longrightarrow \\ \longrightarrow [\Sigma^{k+1} X, \Sigma^{k+1} Y] \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

vom k-ten Glied an alle folgenden Einhängungshomomorphismen Isomorphismen sind.

Diese Formulierung wird der Bezeichung Stabilitätssatz voll gerecht.

Kapitel 3

Homologietheorie

3.1 Simpliziale Homologie

Definition 41 *:*
σ_n heißt n-Standartsimplex wenn

$$\sigma_n = \{x \in I\!R^n | x = (x_0, ..., x_n) \quad mit \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \quad mit\ x_i > 0\}$$

gilt.
Ein geometrischer Komplex K ist eine (endl.) Menge von Punkten $P_1, \ldots, P_n \in I\!R^d$ in allgemeiner Lage zusammen mit einer Menge von Simplices $\sigma(P_{i_1}, \ldots, P_{i_k})$ mit a) Alle Seiten eines Simplexes gehören zum Komplex. b) Haben 2 Simplices einen nicht-leeren Durchschnitt, so haben sie eine Seite gemeinsam.

Definition 42 *:*
K sei ein Sinmplizialkomplex mit $m \geq \dim K$. Die Vereinigung

$$\bigcup_{i=0}^{m} \sigma_i \subset I\!R^m$$

aller Simplices wird Polyeder genannt und mit $|K|$ bezeichnet.

Definition 43 *:*
X sei ein topologischer Raum. Falls ein Simplizialkomplex K und ein Homöomorphismus $f : |K| \longrightarrow X$ existiert, so ist X triangulierbar. Das Paar (K,f) heißt Triangulation von X.

Satz 34 *Jede PL-Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.*

Satz 35 ***(Satz von Cerf)*** *Jede C^1-Mannigfaltigkeit ist triangulierbar. Deshalb ist auch jede differenzierbare Mannigfaltigkeit triangulierbar.*

Definition 44 *:*
$P_0, \ldots, P_n$ seien n+1 geometrisch unabhängige Punkte des $\mathbb{R}^m$. $\{P_{i_0}, \ldots, P_{i_n}\}$ ist eine Sequenz von Punkten, die aus $P_0, \ldots, P_n$ durch Permutationen entstanden ist.

$$\{P_0, \ldots, P_n\} \quad \textit{ist äquivalent zu } \{P_{i_0}, \ldots, P_{i_n}\}$$

wenn

$$P \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

eine gerade Permutation ist.

Satz 36 *Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen werden orientierte n-Simplices genannt und mit*

$$\sigma_n = [P_0, \ldots, P_n]$$

bezeichnet.

Definition 45 *:*
K sei ein Simplizialkomplex. Die Menge

$$C_q(K) = \{\sum_{i=1}^{I_q} n_i s_i^q | n_i \in \mathbb{Z} \forall i \textit{ mit } s^q = [P_0, \ldots, P_q]\}$$

heißt q-Kette und ist die von I_q gewählten orientierten q-Simplices frei erzeugte abelsche Gruppe.

Definition 46 *:*
K sei ein Simplizialkomplex. Der Operator

$$\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K) \textit{ mit } \partial_q([P_0, \ldots, P_q]) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j [P_0, \ldots, \widehat{P_j}, \ldots, P_q]$$

($\widehat{P_j}$ bedeutet j-te Ëcke"herausgenommen) heißt Randoperator.

Satz 37 *Der Randoperator ∂ genügt der Relation $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.*

Definition 47 *:*
Die Menge

$$Z_q(K) = \{c \in C_q | \partial_q(c) = 0\} = ker(\partial_q)$$

heißt q-Zyklus und

$$B_q(K) = \{\partial_{q+1}(c') | c' \in C_{q+1}\} = im(\partial_{q+1})$$

heißt q-Rand.
Zwei q-Ketten $c_1, c_2 \in C_q(k)$ sind homolog, wenn $c1 - c2 \in B_q(K)$.

Bezeichnung 7 *$c_1 \sim c_2$ bedeutet "c_1 ist homolog zu c_2".*

Satz 38 *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Definition 48 *:*
Der Faktorraum $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ ist die q-te simpliziale Homologiegruppe von K.

Satz 39 *X, Y seien zwei homöomorphe topologische, triangulierbare Räume. Die Triangulationen seien (K,f) bzw. (L,g) dann folgt für die Homologiegruppen:*

$$H_q(K) \cong H_q(L) \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

Satz 40 *Sei K ein zusammenhängender Komplex, dann folgt für die 0-te Homologiegruppe:*

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$$

Ist K nicht zusammenhängend, so zählt $H_0(K)$ die Anzahl der disjunkten (verschiedenen) Komponenten, d.h.

$$H_0(K) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$$

mit n als Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Es gilt aber noch mehr. Sei

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{n} K_i \quad mit \;\; K_i \cap K_j = \emptyset \; \forall (i \neq j)$$

die disjunkte Vereinigung von n Unterkomplexen. Dann gilt für die Homologiegruppen:

$$H_r(K) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_r(K_i) \qquad \forall r$$

Definition 49 *:*
Der Rang der r-ten Homologiegruppe wird auch als r-te Betti-Zahl b_r bezeichnet, d.h.

$$rg(H_r(K)) = b_r$$

Die Euler-Charakteristik $\chi(K)$ von K mit $\dim K = n$ ist durch die Summe:

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i H_i(K)$$

definiert.

Zum Schluß sollen noch die relativen Homologiegruppen eingeführt werden.

Definition 50 *:*
Ist $K_0 \subset K$ ein Teilkomplex, so ist $C_q(K_0) \subset C_q(K)$ eine Untergruppe. Die Faktorgruppe $C_q(K, K_0) = C_q(K)/C_q(K_0)$ heißt q-te relative Kettengruppe (von K relativ K_0); ihre Elemente $c_q + C_q(K_0)$ mit $c_q \in C_q(K)$ heißen Ketten auf K relativ zu K_0. Weil $\partial : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$ die Untergruppe $C_q(K_0)$ nach $C_{q-1}(K_0)$ abbildet, ist der Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \bar{\partial} = \bar{\partial}_q : & C_q(K)/C_q(K_0) & \longrightarrow & C_{q-1}(K)/C_q(K_0) \\ & c_q + C_q(K_0) & \longmapsto & \partial c_q + C_{q-1}(K_0) \end{array}$$

definiert; er heißt relativer Randoperator. Die Elemente von $Z_q(K, K_0) = \ker \bar{\partial}_q$ bzw. $B_q(K, K_0) = \text{im}\, \bar{\partial}_q$ heißen Zyklen bzw. Ränder auf K relativ zu K_0. Es ist $B_q(K, K_0) \subset Z_q(K, K_0)$. Die Faktorgruppe $H_q(K, K_0) = Z_q(K, K_0)/B_q(K, K_0)$ heißt q-te Homologiegruppe von K relativ zu K_0.

Jetzt kommen noch zwei wichtige Sätze:

Satz 41 *Für alle $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir die folgenden Homomorphismen $j_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(K, K_0)$ und $\partial_* : H_q(K, K_0) \longrightarrow H_{q-1}(K_0)$:*

1. *Ist $x \in C_q(K)$ ein Zyklus, so sei $j_*(\{x\}_K) = \{x\}_{(K,K_0)}$.*
2. *Ist $z \in C_q(K)$ ein Zyklus relativ K_0, so sei $\partial_*(\{z\}_{(K,K_0)}) = \{\partial z\}_{K_0}$.*

Dann ist die Sequenz von Homologiegruppen und Homomorphismen

$$\ldots \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(K, K_0) \xrightarrow{\partial_*} H_q(K_0) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, K_0) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

exakt.

Satz 42 *(Ausschneidungssatz)*
Sei $K_0 \subset K$ ein Teilkomplex und sei $U \subset K_0$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

1. *$K \backslash U$ und $K_0 \backslash U$ sind Teilkomplexe von K.*
2. *Ist $\sigma \in U$, so ist σ nicht Seite eines Simplexes aus $K \backslash K_0$.*

Dann induziert die Einbettung $i : (K \backslash U, K_0 \backslash U) \hookrightarrow (K, K_0)$ für alle q Isomorphismen $i_* : H_q(K \backslash U, K_0 \backslash U) \longrightarrow H_q(K, K_0)$.

Satz 43 *Der Simplizialkomplex $K = K_1 \cup K_2$ sei Vereinigung der Teilkomplexe K_1 und K_2. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$\ldots \xrightarrow{\triangle} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\mu} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\nu} H_q(K) \xrightarrow{\triangle} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\nu} \ldots$$

mit $\mu : \{z\}_{K_1 \cap K_2} \mapsto (\{z\}_{K_1}, -\{z\}_{K_2})$, $\nu : (\{z_1\}_{K_1}, \{z_2\}_{K_2}) \mapsto \{z_1 + z_2\}_K$ und $\triangle : (\{z\}_K) \mapsto \{\partial x_1\}_{K_1 \cap K_2}$, wobei $z = x_1 + x_2$ mit $x_i \in C_q(K_i)$. Die Sequenz heißt Mayer–Vietoris Sequenz.

3.2 Singuläre Homologie

Definition 51 :
Sei $q \geq 0$ eine ganze Zahl. Die Punkte $e_0, \ldots, e_q$ sind die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^{q+1}$ mit z.B. $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Das abgeschlossene Simplex mit den Ecken $e_0, \ldots, e_q$ heißt das q–dimensionale Standartsimplex $\triangle_q$:

$$\begin{aligned} \triangle_q &= \{x \in \mathbb{R}^{q+1} | x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i \quad mit \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ und } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 0\} \\ &= \{(\lambda_0, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} |\, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ und } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 0\} \quad . \end{aligned}$$

Das der Ecke e_i gegenüberliegende $(q-1)$–Seitensimplex von $\triangle_q$ heißt die i-te Seite $\triangle_{q-1}^i$ von $\triangle_q$; sie besteht aus allen Punkten $(\lambda_0, \ldots, \lambda_q) \in \triangle_q$ mit $\lambda_i = 0$. Der Rand $\dot{\triangle}_q$ ist die Vereinigung all dieser Seiten; er besteht aus allen Punkten $\dot{\triangle}_q$, für die mindestens eine Koordinate Null ist.

Definition 52 :
Für $q \geq 1$ und $0 \leq i \leq q$ sei $\delta_{q-1}^i = [e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_q] : \triangle_{q-1} \longrightarrow \triangle_q$ die von der Eckenzuordnung $e_0 \mapsto e_0, \ldots, e_{i-1} \mapsto e_{i-1}, e_i \mapsto e_{i+1}, \ldots, e_{q-1} \mapsto e_q$ induzierte lineare Abbildung. Die Abbildung δ_{q-1}^i bildet $\triangle_{q-1}$ bijektiv und linear auf die i-te Seite $\triangle_{q-1}^i$ von $\triangle_q$ ab.

Satz 44 *Für $q \geq 2$ und $0 \leq k < j \leq q$ ist $\delta_{q-1}^j \circ \delta_{q-2}^k = \delta_{q-1}^k \circ_{q-2}^{j-1}$.*

Definition 53 :
Sei X ein topologischer Raum. Ein singuläres q–Simplex in X ist eine stetige Abbildung $\sigma = \sigma_q : \triangle_q \longrightarrow X$. Die q-te singuläre Kettengruppe $S_q(X)$ von X ist die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären q–Simplexen in X erzeugt wird; ihre Elemente heißen singuläre q–Ketten in X. Für $q < 0$ setzen wir $S_q(X) = 0$. Für $q \geq 1$ sei der Randoperator der folgende Homomorphismus

$$\partial = \partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X), \quad \partial\sigma = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ \delta_{q-1}^i) \quad .$$

Für $q \leq 0$ sei $\partial_q = 0$.

Satz 45 *Es gilt $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, d.h. $S(X) = (S_q(X), \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ ist ein Kettenkomplex.*

Definition 54 :
Die freie abelsche Gruppe

$$H_q(X) = H_q(S(X)) = \frac{\ker \partial_q}{im\ \partial_{q+1}}$$

heißt q-te singuläre Homologiegruppe.

Die wesentlichen Aussagen der simplizialen Homologie bleiben auch hier gültig.

Definition 55 *:*
Sei (X, A) ein Raumpaar. Für die Inklusionen $i : A \hookrightarrow X$ ist $i_\bullet : S_q(A) \longrightarrow S_q(X)$ injektiv. Verabredung: Für ein singuläres Simplex $\sigma : \triangle_q \longrightarrow A$ wird $i_\bullet(\sigma) = i \circ \sigma : \triangle_q \longrightarrow X$ wieder mit σ bezeichnet. Damit wird $S_q(A) \subset S_q(X)$ eine Untergruppe und $S(A) \subset S(X)$ ein Teilkettenkomplex. Der Faktorkettenkomplex $S(X, A) = S(X)/S(A)$ heißt der relative singuläre Kettenkomplex des Raumpaares (X, A). Die q-te relative singuläre Homologiegruppe des Raumpaares (X, A) ist $H_q(X, A) = H_q(S(X, A))$. (siehe relative simpliziale Homologie)

Satz 46 *Für jedes Raumpaar (X, A) ist die zugehörige Homologiesequenz*

$$\ldots \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

exakt. Dabei sind i_* und j_* von den Inklusionen $i : A \hookrightarrow X$ bzw. $j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ induziert, und der Randoperator ∂_* ist $\partial_*(\{z\}_{(X,A)}) = \{\partial z\}_A$.

Satz 47 *(Homotopiesatz)*
Aus $f \simeq g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ (f homotop g) folgt $f_* = g_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B)$, d.h. sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz so ist $f_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(y)$ ein Isomorphismus.

Satz 48 *(Ausschneidungssatz)*
Seien $U \subset A \subset X$ Räume, so daß der Abschluß $\bar{U}$ von U im Innern von A liegt. Dann induzieren die Inklusionen $i : (X \backslash U, A \backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen $i_* : H_q(X \backslash U, A \backslash U) \longrightarrow H_q(X, A)$

Satz 49 *Es sei (X, A) ein CW–Paar und sei X/A der CW–Raum, der aus X entsteht, indem man A zu einem Punkt $< A >$ identifiziert. Dann induzierte die identische Abbildung $p : (X, A) \longrightarrow (X/A, < A >)$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus $p_* : H_q(X, A) \longrightarrow H(_q(X/A, < A >)$.*

Satz 50 *(Mayer–Vietoris Sequenz)*
Es sei $X = X_1 \cup X_2$, wobei X_1 und X_2 offen sind in X. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\triangle} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\mu} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\nu} H_q(X) \xrightarrow{\triangle} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\nu} \ldots$$

mit $\mu : \{z\}_{X_1 \cap X_2} \mapsto (\{z\}_{X_1}, -\{z\}_{X_2})$ und $\nu : (\{z_1\}_{X_1}, \{z_2\}_{X_2}) \mapsto \{z_1 + z_2\}_X$. Der Homomorphismus $\triangle$ ist wie folgt definiert: Für eine q–Zyklus z in X wähle man Unterteilungen von z so groß, daß der unterteilte Zyklus $z' = x_1 + x_2$ ist f—'ur gewisse Ketten x_j in X_j, und setze $\triangle(\{z\}_X) = \{\partial x_1\}_{X_1 \cap X_2}$.

Die Beziehung zwischen simplizialer und singulärer Homologie wird durch den folgenden Satz ausgedrückt:

Satz 51 *K sei ein Simplizialkomplex und $|K|$ das entsprechende Polyeder, welches gleichzeitig ein CW–Raum ist, dessen Zellen die offenen Simplexe von K sind. Dann sind die simpliziale Homologie $H_q(K)$ und die singuläre Homologie $H_q(|K|)$ isomorph*

3.3 Homologie von CW–Komplexen

Satz 52 *Sei X ein CW–Raum und X^q sein q–dimensionales Gerüst. Dann ist $H_p(X^q, X^{q-1}) = 0$ für $p \neq q$.*

Definition 56 *:*
Die q-te zelluläre Kettengruppe des CW–Raumes X ist definiert durch $C_q(X) = H_q(X^q, X^{q-1})$; insbesondere ist $C_q(X) = 0$ für $q < 0$. Wir betrachten die Sequenz von Homologiegruppen:

$$C_q(X) = H_q(X^q, X^{q-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X^{q-1}) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) = C_{q-1}(X)$$

mit den durch die Inklusion $j : (X^{q-1}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{q-1}, X^{q-2})$ induzierten Homomorphismus j_* und $\partial_*\{z\}_{(X^q, X^{q-1})} = \{\partial z\}_{X^{q-1}}$. Der Randoperator $\partial = \partial_q : C_q(X) \longrightarrow C_{q-1}(X)$ ist durch $\partial = j_* \circ \partial_*$ definiert.

Satz 53 *Es gilt $\partial \circ \partial = 0$, d.h. $(C_q, \partial_q)_{q \in \mathbb{Z}} = C(X)$ ist ein Komplex.*

Definition 57 *:*
Die Homologiegruppen

$$H_q(C(X)) = \frac{\ker \partial_q}{im\ \partial_q}$$

heißen zelluläre Homologiegruppen von X.

Satz 54 *Zelluläre und singuläre Homologie sind isomorph.*

Damit scheinen also die bisher eingeführten Theorien nur Realisierungen einer algemeineren Theorie zu sein. Diese wird im letzten Abschnitt behandelt.

3.4 Zusammenhang zur Homotopie

Satz 55 *Die Homologiegruppen der S^1 sind: $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$ und $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

Satz 56 *X ist CW–Raum. Sei $\phi : S^1 \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, die einen Homomorphismus $\phi_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(X)$ induziert und sei $[\phi] \in \pi_1(X, x_0)$ eine Homotopieklasse von ϕ. $\{S^1\}_+ \in H_1(S^1)$ ist die Homologieklasse des singulären*

1–Zyklus $\triangle_1 \longrightarrow S^1$, *der* $(1-t)e_0 + te_1$ *nach* $\exp(2\pi t)$ *abbildet. Wir definieren den Homomorphismus*

$$h_1 : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & H_1(X) \\ [\phi] & \longmapsto & \phi_*(\{S^1\}_+) \end{array} ,$$

der bei einem zusammenhängenden CW–Raum X *surjektiv ist. Sei* $[\pi_1, \pi_1]$ *die Menge aller Kommutatoren von* $\pi_1(X, x_0)$ *so ist* $H_1(X)$ *isomorph zu* $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1, \pi_1]$.

Auf ähnliche Weise läßt sich der Isomorphismus für höhere Homologiegruppen formulieren.

Satz 57 *Sei* X *ein CW–Raum mit* $\pi_i(X) = 0$ *für* $i < n$, *dann gibt es einen Isomorphismus mit*

$$\pi_n(X, x_0) = H_n(X)$$

3.5 Homologische Algebra und Axiomensystem

Einschub: Kategorien und Funktoren

Definition 58 *:*
Eine Kategorie KAT besteht aus

1. *einer Klasse von Elementen* $X, Y, Z, \ldots$, *die die Objekte der Kategorie heißen,*
2. *einer Menge* $M(X, Y)$ *von Morphismen* $f : X \longrightarrow Y$,
3. *der Komposition* $M(X, Y) \times M(Y, Z) \longrightarrow M(X, Z)$ *von Morphismen* $f \in M(X, Y)$ *und* $g \in M(Y, Z)$, *die mit* $g \circ f$ *bezeichnet wird.*

Es müssen die folgenden Axiomen erfüllt werden:

1. ***Assoziativität:*** *Für* $f \in M(W, X)$, $g \in M(X, Y)$, $h \in M(Y, Z)$ *ist* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
2. ***Identität:*** *Zu jedem Objekt* X *der Kategorie gibt es ein Element* $id_X \in M(X, X)$ *mit* $f \circ id_X = f$ *und* $id_X \circ g = g$ *für alle* $f \in M(X, Y)$ *und* $g \in M(Y, X)$.

Ein Morphismus $f \in M(X, Y)$ *heißt Isomorphismus in KAT, wenn es einen Morphismus* $g \in M(Y, X)$ *mit* $g \circ f = id_X$ *und* $f \circ g = id_Y$ *gibt.* g *ist eindeutig bestimmt und heißt das Inverse* $f{-}1$ *zu* f.

Definition 59 *:*
Es seien KAT_1 *und* KAT_2 *Kategorien mit den Morphismenmengen* $M_1()$ *bzw.* $M_2()$. *Ein (kovarianter) Funktor* $T : KAT_1 \longrightarrow KAT_2$ *ordnet jedem Objekt* X *aus* KAT_1

ein Objekt $T(X)$ aus KAT_2 und jedem Morphismus $f \in M_1(X,Y)$ einen Morphismus $T(f) \in M_2(T(X),T(Y))$ zu, so daß gilt:

$$T(id_X) = id_{T(X)} \qquad und \qquad T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

für alle Objekte X und alle Morphismen f und g in KAT_1, für die $g \circ f$ definiert ist.
Ein Kofunktor (kontravarianter Funktor)$T : KAT_1 \longrightarrow KAT_2$ ordnet jedem Objekt X aus KAT_1 ein Objekt $T(X)$ aus KAT_2 und jedem Morphismus $f \in M_1(X,Y)$ einen Morphismus $T(f) \in M_2(T(Y),T(X))$ zu, so daß gilt:

$$T(id_X) = id_{T(X)} \qquad und \qquad T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$$

für alle Objekte X und alle Morphismen f und g in KAT_1, für die $g \circ f$ definiert ist.

Wichtige Kategorien sind:

TOP: *Kategorie der Topologischen Räume und stetigen Abbildungen*
TOP_0: *Kategorie der topologischen Räume (X, x_0) mit Basispunkt und der Basispunkt–erhaltenden stetigen Abbildung*
TOP^2: *Kategorie der Raumpaare (X, A) und der stetigen Abbildungen $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren*
GR: *Kategorie der Gruppen und Homomorphismen*
AB: *Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen*

Definition 60 *:*
Seien $S, T : KAT_1 \longrightarrow KAT_2$ Funktoren. Eine natürliche Transformation Φ von S nach T ordnet jedem Objekt X in KAT_1 einen Morphismus $\Phi_X \in M_2(S(X),T(X))$ zu, so daß für jeden Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in KAT_1 die Gleichung $\Phi_X \circ S(f) = T(f) \circ \Phi_X$ gilt.

Nun können wir zum Eilenberg–Steenrodschen Axiomensystem kommen.

Definition 61 *:*
Eine Homologietheorie ist eine Folge kovarianter Funktoren $H_0, H_1, \ldots$ von der Kategorie der Raumpaare TOP^2 in der Kategorie der abelschen Gruppen AB zusammen mit einer Folge natürlicher Transformationen

$$\partial_q : H_q(X,A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$$

$(X, A) \in TOP^2$ derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *<u>Dimensionsaxiom:</u>*
   $H_q(Punkt, \emptyset) = 0$ für $q > 0$ und $H_0(Punkt, \emptyset) = G$ mit $G \in AB$,
   G heißt Koeffizientengruppe.

2. *Homotopieaxiom:*
Sind $f_0, f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homotop in TOP^2, so gilt
$H_q(f_0) = H_q(f_1) : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B)$.

3. *Ausschneidungsaxiom:*
Sei $(X, A) \in TOP^2$ und U eine in X offene Teilmenge, so daß der Abschluß $\bar{U}$ von U im Inneren von A liegt. Ist $j : (X\backslash U, A\backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ die Einbettung, so ist $H_q(j) : H_q(X\backslash U, A\backslash U) \longrightarrow H_q(X, A)$ ein Isomorphismus.

4. *Exaktheitsaxiom:*
Sei $(X, A) \in TOP^2$ und $i : A \hookrightarrow X$, $j : X \hookrightarrow (X, A)$ jeweils die Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\ldots \stackrel{H_{q+1}(j)}{\longrightarrow} H_{q+1}(X, A) \stackrel{\partial_{q+1}}{\longrightarrow} H_q(A) \stackrel{H_q(i)}{\longrightarrow} H_q(X) \stackrel{H_q(j)}{\longrightarrow} H_q(X, A) \stackrel{\partial_q}{\longrightarrow} \ldots$$

exakt.

Die Untersuchung solcher Funktoren ist Gegenstand der homologen Algebra. Im folgenden soll noch der Wechsel der Koeffizientengruppe der Homologie behandelt werden.

Einschub: Das Tensorprodukt von frei erzeugten abelschen Gruppen

Definition 62 *:*
Es sei $F(A \times B$ die von der Menge $A \times B$ frei erzeugten abelschen Gruppe und $R(A \times B) \subset F(A \times B$ sei die Untergruppe, die von allen Elementen der Form

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), \quad (a, b + b') - (a, b) - (a, b') \quad \text{mit} \quad a, a' \in A, b, b' \in B$$

erzeugt wird. Die Faktorgruppe $A \otimes B = F(A \times B)/R(A \times B)$ heißt das Tensorprodukt von A und B. Für $a \in A$ und $b \in B$ bezeichnet

$$a \otimes b = (a, b) + R(A \times B) \in A \otimes B$$

die vom Element $(a, b) \in F(A \times B)$ repräsentierte Restklasse.

Satz 58 *Sei A eine abelsche Gruppe. Die von der Menge A frei erzeugte abelsche Gruppe $F(A) = \{\phi : A \longrightarrow \mathbb{Z} | \phi(a) \neq 0 \quad \text{nur für endlich viele} \quad a \in A\}$. Für $p : F(A) \longrightarrow A$ mit $p(\phi) = \sum_a \phi(a)a$, $i : R(A) \hookrightarrow F(A)$ als Inklusion und $R(A) = \ker p$ ist die Sequenz*

$$S(A) : 0 \longrightarrow R(A) \stackrel{i}{\longrightarrow} F(A) \stackrel{p}{\longrightarrow} A \longrightarrow 0$$

exakt und heißt Standartauflösung von A. Das Tensorieren dieser Sequenz mit einer abelschen Gruppe G ergibt die exakte Sequenz

$$S(A) \otimes G : 0 \longrightarrow R(A) \otimes G \stackrel{i \otimes id}{\longrightarrow} F(A) \otimes G \stackrel{p \otimes id}{\longrightarrow} A \otimes G \longrightarrow 0$$

in der $i \otimes id$ nicht notwendig injektiv ist.

Definition 63 *:*
Das Tensorprodukt von A und G ist durch

$$Tor(A,G) = \ker(i \otimes G : R(A) \otimes G \longrightarrow F(A) \otimes G)$$

definiert.

Satz 59 *(Universelles Koeffiziententheorem)*
Für jeden freien Kettenkomplex C und jede ganze Zahl q ist die folgende Sequenz

$$0 \longrightarrow H_q(C) \otimes G \longrightarrow H_q(C \otimes G) \longrightarrow Tor(H_{q-1}(C), G) \longrightarrow 0$$

exakt und zerfällt, d.h.

$$H_q(C \otimes G) = (H_q(C) \otimes G) \oplus Tor(H_{q-1}(C), G) \qquad .$$

Zum Schluß wollen wir die Natürlichkeit der Homologietheorie benutzen, um folgenden Satz zu formulieren.

Satz 60 *Seien C, C', C'' Kettenkomplexe. Die exakte Sequenz (für alle q)*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$$

erzeugt eine lange exakte Sequenz in der Homologie

$$\ldots \xrightarrow{g_*} H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(C') \xrightarrow{g_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

mit den induzierten Homomorphismen f_*, g_* und dem verbindenden Homomorphismus oder Randoperator, der durch

$$\begin{array}{rccc} \partial_* : & H_{q+1}(C'') & \longrightarrow & H_q(C) \\ & \{z''\}_{C''} & \longmapsto & \{f^{-1}\partial g^{-1}(z'')\}_C \end{array}$$

definiert ist.

Kapitel 4

Kohomologietheorie

4.1 Die De-Rham-Kohomologie

Definition 64 *:*
Sei V ein Vektorraum und V^* der duale Raum, $v, w \in V$ und $\phi, \psi \in V^*$, dann ist das alternierende Produkt (Keilprodukt oder Wedge-Produkt) $\wedge$ durch

$$(\phi \wedge \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w) - \psi(v)\phi(w) \qquad \forall v, w \in V$$

definiert.

Satz 61 *Es gibt einen Isomorphismus für den gilt:*

$$\phi \wedge \psi = \phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi$$

Definition 65 *:*
M sei eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = x \in M$ sei eine Kurve in M. Der Tangentialvektor t_x am Punkt $x \in M$ ist durch die Ableitung

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = t_x$$

definiert. Die Menge aller Tangentialvektoren an allen Kurven $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ spannt einen n-dimensionalen reellen Vektorraum auf, der als Tangentialraum T_xM am Punkt x bezeichnet wird.
Durch die Vereinigung

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

aller Tangentialräume entsteht das Tangentialbündel.Der Tangentialraum T_xM ist ein Vektorraum und T_x^*M ist der duale Raum oder Kotangentialraum.

Definition 66 *:*
ω heißt p-Differentialform über T^*M, wenn ω lokal als

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

mit $\omega_{i_1 \ldots i_p} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ als glatte Funktion geschrieben werden kann. D.h. für p Vektorfelder $X_1, \ldots, X_p$ gilt $\omega(X_1, \ldots, X_p)$ ist eine glatte Funktion. Weiterhin gilt

$$dx^i \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^i$$

und $\Lambda^p(T^*M) = \Lambda^p M$ ist der Raum aller p-Differentialformen über M.

Ausgehend von dieser Definition findet man leicht die folgenden Eigenschaften.

Satz 62 *Für zwei beliebige Differentialformen $\psi \in \Lambda^p M, \eta \in \Lambda^q M$ und $\kappa \in \Lambda^r M$ gilt*

1. *$\psi \wedge \psi = 0$ wenn p ungerade ist.*
2. *$\psi \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \psi$*
3. *$(\psi \wedge \eta) \wedge \kappa = \psi \wedge (\eta \wedge \kappa)$*

Definition 67 *:*
Die stetige Funktion $f : M \longrightarrow N$ induziert die Abbildung $f^* : T^*_{f(x)} N \longrightarrow T^*_x M$ mit der die p-Form $\omega_p \in \Lambda^p(N)$ auf $f^*\omega_p \in \Lambda^p(M)$ "zurückgezogen"werden kann (Pullback).

Definition 68 *:*
Sei $\omega \in \Lambda^p(M)$ eine p–Differentialform und $X_1, \ldots, X_{p+1}$ p+1 Vektorfelder. Die äußere Ableitung $d_p : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} d_p\omega_p(X_1, \ldots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots X_{p+1}) + \\ &+ \sum_{i<j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}) \end{aligned}$$

($\hat{X}_i$ bezeichnet das rausgenommene Vektorfeld)

Satz 63 *Es gilt:*

$$d_p \circ d_{p+1} = 0$$

Definition 69 *:*
Existiert auf M eine Volumenform so läßt sich der Hodge-Operator $*$ einführen ($n = \dim M$) $* : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(M)$ durch

$$*(dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon_{k_1 \ldots k_p k_{p+1} \ldots k_n} dx^{k_{p+1}} \wedge \ldots dx^{k_n}$$

mit $\epsilon_{k_1 \ldots k_n}$ als vollständig antisymmetrischer Tensor in n-Dimensionen (Erzeuger der Determinante).

Haupteigenschaft: $*(*\omega_p) = (-1)^{pn-p^2}\omega_p$

Definition 70 *:*
Durch

$$(\alpha_p, \beta_p) = \int\limits_M \alpha_p \wedge *\beta_p$$

wird das innere Produkt definiert. Mit dessen Hilfe läßt sich der adjungierte Operator $\delta : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(M)$ *durch*

$$(d\alpha_p, \beta_{p+1}) = (\alpha_p, \delta\beta_{p+1})$$

erzeugen und es ergibt sich

$$\delta = (-1)^{np+n+1} * d * \qquad .$$

Satz 64 *Auch hier gilt:* $\delta^2 = 0$

Definition 71 *:*
Der Operator $\triangle = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ *heißt Laplace-Operator.*

Definition 72 *:*
$Z^p = \{\omega_p \in \Omega^p | d\omega_p = 0\}$ *Menge der geschlossenen Formen (p-Kozyklen)*
$B^p = \{\omega_p \in \Omega_p | \exists \alpha_{p-1}$ *mit* $\omega_p = d\alpha_{p-1}\}$ *Menge der exakten Formen (p-Koränder)*
$H^p(M, I\!R) = Z^p/B^p$ *heißt p-te De Rhamsche Kohomologiegruppe*

Satz 65 *(De Rham)*
Die p-te simpliziale Homologiegruppe $H_p(M)$ *ist bezüglich des inneren Produktes:* $\pi(C_p, \omega_p) = \int\limits_{C_p} \omega_p$ *dual zur p-ten De Rhamschen Kohomologiegruppe* $H^p(M)$*, d.h. wenn* $C_p \in H_p(M)$ *und* $\omega_p \in H^p(M)$ *dann ist* $H_p(M)$ *isomorph zu* $H^p(M)$*.*

Satz 66 *(Stokes)*
Der zum Randoperator ∂ *bezüglich* $\pi(\ ,\ )$ *adjungierte Operator ist die äußere Ableitung* d*,* $\pi(\partial C_{p+1}, \omega_p) = \pi(C_{p+1}, d\omega_p)$ *oder* $\int\limits_{\partial C_{p+1}} \omega_p = \int\limits_{C_{p+1}} d\omega_p$ *d.h.* $\int = \pi$ *:* $H_p(M) \otimes H^p(M) \longrightarrow I\!R$ *lineare Abbildung.*

Satz 67 *(Poincare Dualität)*
Bezüglich des inneren Produktes $(\omega_p, \omega_{n-p}) = \int_M \omega_p \wedge \omega_{n-p}$ *sind die beiden Kohomologiegruppen* $H^p(M)$ *und* $H^{n-p}(M)$ *dual, d.h.* $H^p(M)$ *ist isomorph zu* $H^{n-p}(M)$*.*

Satz 68 *Das äußere Produkt wird zu einer Abbildung* $\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \longrightarrow H^{p+q}(M)$ *und macht* $H^*(M) = \oplus_p H^p(M)$ *zu einem Ring, dem Kohomologiering.*

Satz 69 *(Künneth Formel)*
Seine M, N zwei CW–Räume. Dann gilt für die De Rham–Kohomologie von $M \times N$:

$$H^k(M \times N) = \bigoplus_{p+g=k} H^p(M) \otimes H^g(N)$$

Satz 70 *(Hodge)*
Es gibt einen Isomorphismus zwischen dem Kern des Laplace-Operators $\triangle_p = d\delta + \delta d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^p(M)$ und der De Rham–Kohomologie $H^p(M)$.

4.2 Garbenkohomlogie

Definition 73 *:*
Eine Garbe S von abelschen Gruppen über einem topologischen Raum X ist ein Tripel $S = (S, \pi, X)$, wobei:

1. *S und X topologische Räume sind und $\pi : S \longrightarrow X$ ein lokaler, surjektiver Homöomorphismus von S auf X ist,*

2. *für jedes $x \in X$ das vollständige Urbild $\pi^{-1}(x) = S_x$ (der sogenannte Halm über x) eine abelsche Gruppe bildet (die gewöhnlich additiv geschrieben werden soll)*

3. *die durch $S \circ S \longrightarrow S$ mit $(g_1, g_2) \longmapsto (g_1 - g_2)$ erklärte Abbildung von $S \circ S = \{(g_1, g_2) \in S \times S | \pi(g_1) = \pi(g_2)\}$ in S stetig ist.*

U sei eine offene Menge in X. Ein Schnitt über U in der Garbe (S, π, X) ist eine stetige Abbildung $s : U \longrightarrow S$ mit $s \circ \pi = id : U \longrightarrow U$. Ein Element f_x des Halmes S_x wird Keim genannt.

Definition 74 *:*
Auf dem Raum X ist eine Prägarbe (Garbendatum) gegeben, wenn jeder offenen Menge U von X eine abelsche Gruppe S_U und jedem Paar offener Mengen U, V von X mit $V \subseteq U$ ein Homomorphismus $r_V^U : S_U \longrightarrow S_V$ zugeordnet ist, so daß gilt:

1. *wenn $U = \emptyset$ ist, so ist $S_U = 0$ (Nullmodul)*

2. *$r_U^U = id$ und*

3. *wenn $W \subseteq V \subseteq U$ gilt, so ist $r_W^U = r_V^U \cdot r_W^V$*

4. *wenn $U = \cup_\alpha U_\alpha, \quad s_1, s_2 \in S_U : \qquad r_{U_\alpha}^U(s_1) = r_{U_\alpha}^U(s_2) \quad \forall \alpha$ dann $s_1 = s_2$*

5. *wenn $r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\beta)$ $\forall \alpha, \beta$ dann gibt es eindeutiges $s \in S_U$, so daß $r_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$*

Man schreibt dann auch $\phi = (S_U, r_V^U)$. Im weiteren Sinne ist die Prägarbe der Atlas der Garbe. Mittels eines kovarianten Funktors kann nämlich aus der Prägarbe die ursprüngliche Garbe eindeutig konstruiert werden. (die Def, von Untergarbe, Garbenhomomorphismus usw. erfolgt analog) Im folgenden soll deshalb zwischen Garbe und Prägarbe nicht mehr unterschieden werden. Der Halm S_x ergibt sich aus S_U durch die Bildung des direkten Limes über alle offenen U, die den Punkt $x \in M$ enthalten:

$$S_x = \varinjlim_{x \in U} S_U = \{ \text{ Menge aller } S_U, \text{ wo } x \in U \text{ und } U \subset M \text{ offen} \}$$

Definition 75 *:*
A, B seien Garben über M, $m : A \longrightarrow B$ heißt Garbenmorphismus, wenn das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_V & \xrightarrow{m_v} & B_V \\ r_U^V \downarrow & & \downarrow r_U^V \\ A_U & \xrightarrow{m_u} & B_U \end{array}$$

mit $U \subset V \subset M$ und m_v, m_u Homomorphismen der abelschen Gruppen, kommutiert.

Definition 76 *:*
Die Garbensequenz $E \xrightarrow{e} F \xrightarrow{f} G$ ist exakt, wenn e, f Garbenmorphismen und die induzierten Abbildungen e_x und f_x die Sequenz $E_x \xrightarrow{e_x} F_x \xrightarrow{f_x} G_x$ exakt machen.

Definition 77 *:*
F Garbe über M, $O = \{O_\alpha\}$ offene Überdeckung von M, $\triangle = (O_1, \ldots, O_{p+1})$ Menge von O_α wenn $\cap O_\beta \neq \emptyset$ für $1 \leq \beta \leq p+1$ $\overline{\triangle} = (O_1, \ldots, O_{p+1})$, so gilt für die Menge der Koketten $C^p(O, F)$ $C^p(O, F) = F(\overline{\triangle})$.

Definition 78 *:*
Der Korandoperator $d : C^p(O, F) \longrightarrow C^{p+1}(O, F)$ ist durch $df(\triangle) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k r_{\triangle}^{\overline{\triangle}_k} f(\triangle_k)$ mit $f(\triangle) \in C^p(O, F)$ mit $\triangle_k = (O_1, \ldots, O_{k-1}, O_{k+1}, \ldots, O_{p+1})$ definiert. Daraus folgt: $d^2 = 0$

Betrachte Sequenz: $\ldots C^{p-1}(O, F) \xrightarrow{d} C^p(O, F) \xrightarrow{d} C^{p+1}(O, F) \longrightarrow \ldots$ und definiere $Z^p(O, F) = \{c \in C^p(O, F) | dc = 0\}$, $B^p(O, F) = \{c \in C^p(O, F) | \exists s \in C^{p-1}(O, F) \text{ mit } c = ds\}$ dann ist $H^p(O, F) = Z^p / B^p$. Ist M parakompakt, so wähle man immer feinere Überdeckungen:

$$H^p(M, F) = \varinjlim_{O} H^p(O, F)$$

heißt p-te Kohomologiegruppe der Garbe F über M
$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ sei eine kurze exakte Garbensequenz, dann ist die folgende Sequenz auch exakt: $0 \longrightarrow H^0(M, E) \longrightarrow H^0(M, F) \longrightarrow H^0(M, G) \longrightarrow$

$H^1(M,E) \longrightarrow H^1(M,F) \longrightarrow H^1(M,G) \longrightarrow \ldots$
Garbe der C^∞-Funktionen auf M: $\mathcal{E}$, die Abbildung $r_U^V : \mathcal{E}_V \longrightarrow \mathcal{E}_U$ mit $U \subseteq V$ die Einschränkung der Funktion, $\mathcal{E}_U$ abelsche Gruppe(Vektorraum der glatten Fkt.) Garbe der reellen-analytischen Funktionen: $\mathcal{A}$ Garbe der holomorphen Funktionen: $\mathcal{O}$ wenn die holomorphen Funktionen nicht verschwinden: $\mathcal{O}^*$ Die Garben $\mathcal{E}$ und $\mathcal{O}$ sind feine Garben, d.h. die lokalen Eigenschaften von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{O}$ lassen sich auf ganz M fortsetzen, d.h. $H^p(M,\mathcal{E}) = 0$ bzw. $H^p(M,\mathcal{O}) = 0 \ \forall p > 0$

Satz 71 *Die p-te De Rhamsche Kohomologiegruppe $H^p(M)$ ist isomorph zu $H^p(M,\mathbb{R})$.*

Definition 79 *:*
$\omega_{p,q} = \omega_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}$ ist in den lokalen Koordinaten $(z_i, \bar{z}_j)$ eine holomorphe (p,q)-Form. Es existieren nun zwei äußere Ableitungen ∂ und $\bar{\partial}$, die sich in lokalen Koordinaten wie folgt darstellen lassen: $\partial = \sum\limits_p \left(\frac{\partial}{\partial z^p} dz^p \right)$ und $\bar{\partial} = \sum\limits_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^q} d\bar{z}^q \right)$ mit $\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$ und $d = \partial + \bar{\partial}$

Satz 72 *(Dolbeault) Wenn M eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, dann gilt $H^q(M,\Omega^p) \simeq H^{p,q}_{partial}(M)$ (Dolbeaultsche Kohomologiegruppe) Ω^p sind die holomorphen p-Formen auf M ($\Omega^0 = \mathcal{O}$)*

4.3 Axiomensystem

Definition 80 *:*
Eine Kohomologietheorie ist eine Folge kontravarianter Funktoren $H^0, H^1, \ldots$ von der Kategorie der Raumpaare TOP^2 in der Kategorie der abelschen Gruppen AB zusammen mit einer Folge natürlicher Transformationen

$$\delta_q : H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X,A)$$

$(X,A) \in TOP^2$ derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Dimensionsaxiom:*
   $H^q(Punkt, \emptyset) = 0$ und $H^0(Punkt, \emptyset) = G$ mit $G \in AB$,
   G heißt Koeffizientengruppe.

2. *Homotopieaxiom:*
   Sind $f_0, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ homotop in TOP^2, so gilt
   $H^q(f_0) = H^q(f_1) : H^q(Y,B) \longrightarrow H^q(X,A)$.

3. *Ausschneidungsaxiom:*
   Sei $(X,A) \in TOP^2$ und U eine in X offene Teilmenge, so daß der Abschluß $\bar{U}$ von U im Inneren von A liegt. Ist $j : (X \backslash U, A \backslash U) \hookrightarrow (X,A)$ die Einbettung, so ist $H^q(j) : H^q(X,A) \longrightarrow H^q(X \backslash U, A \backslash U)$ ein Isomorphismus.

4. *Exaktheitsaxiom:*
Sei $(X,A) \in TOP^2$ und $i : A \hookrightarrow X$, $j : X \hookrightarrow (X,A)$ jeweils die Inklusionen. Dann ist die Folge

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{q+1}} H^q(X,A) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(X) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(A) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(X,A) \xrightarrow{H^{q+1}(j)} \ldots$$

exakt.

Die Kohomologie läßt sich mit Hilfe eines kovarianten Funktors (Kofunktor) aus der Homologietheorie gewinnen.

Definition 81 *:*
Für abelsche Gruppen A, C (additiv geschrieben) ist $Hom(A,G)$ die Menge der Homomorphismen $f : A \longrightarrow G$. Erklärt man die Addition durch $(f + f')(a) = f(a) + f'(a)$, so ist $Hom(A,G)$ ebenfalls eine abelsche Gruppe.

Definition 82 *:*
Für eine Homomorphismus $f : A \longrightarrow B$ ist der duale Homomorphismus $\tilde{f} : Hom(B,G) \longrightarrow Hom(A,G)$ wie folgt definiert: für $\phi \in Hom(B,G)$ ist $\tilde{f}(\phi) = \phi \circ f \in Hom(A,G)$ die Komposition der Homomorphismus $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\phi} G$, d.h. $Hom(,G) : AB \longrightarrow AB$ ist ein kontravarianter Funktor (Kofunktor).

Satz 73 *Ist die Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0$ exakt, so ebenfalls die Sequenz $0 \longrightarrow Hom(C,G) \xrightarrow{\tilde{h}} Hom(B,G) \xrightarrow{\tilde{f}} Hom(A,G)$.*

Bem.: Funktoren mit dieser Eigenschaft heißen auch linksexakt.

Satz 74 *Sei A eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. Zu jeder freien Auflösung $\mathcal{S} : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$ von A (siehe vorheriges Kapitel, i Inklusion, p Projektion, $A = F/R$) gehört ein eindeutig bestimmter Isomorphismus*

$$\psi(\mathcal{S}) = \psi(id_A; \mathcal{S}, \mathcal{S}(A)) : Ext(A,G) \longrightarrow Hom(R,G)/im\ \tilde{i}$$

Bem.: Ext heißt Extension und ist gleich der Menge der Äquivalenzklassen von Ausdehnungen von A durch R.

Definition 83 *:*
Sei $C = (C_q, \partial_q)$ ein Kettenkomplex. Die abelsche Gruppe $Hom(C,G)$ hat die Eigenschaften eines Kokettenkomplexes mit dem Korandoperator $Hom(\partial_q, G)$. Die Gruppe $H^n(C,G) = Hom(H_n(C), G)$ heißt Kohomologiegruppe.

Diese Art der Definition enthält die Dualität zwischen Homologie und Kohomologie per Definition. Besser ist es daher, die Homologie und Kohomologie auf unterschiedlichen Wegen zu erzeugen und dann die Dualität zu zeigen.

Satz 75 *(Universelles Koeffiziententheorem)*
Für jeden freien Kettenkomplex C und jedes $q \in \mathbb{Z}$ ist die folgende Sequenz exakt und zerfällt:

$$0 \longrightarrow Ext(H_{q-1}(C), G) \longrightarrow H^q(C, G) \longrightarrow Hom(H_q(C), G) \longrightarrow G$$

d.h. $H^q(C, G) = Hom(H_q(C), G) \oplus Ext(H_{q-1}(C), G)$.

Zum Schluß sei nur noch die Existenz zweier Produkte erwähnt, die in Spezialfällen schon konstruiert wurden.

Satz 76 *Sei X ein CW–Raum. Es gibt eine natürliche Abbildung*

$$\cap : H^q(X) \times H_n(X) \longrightarrow H_{n-q}(X)$$

das cap–Produkt und eine natürliche Abbildung

$$\cup : H^q(X, G) \times H^p(X, G) \longrightarrow H^{q+p}(X, G)$$

die $H^*(X, G) = \oplus_p H^p(X, G)$ zu einem Ring macht.

4.4 Kohomologiefunktor

Satz 77 *Sei (X, x_0) ein punktierter CW-Raum und $(K(G, n), k_0)$ ein punktierter Eilenberg-Mac Lane–Raum, welcher mindestens den Homotopietyp eines CW–Komplexes hat. Dann gilt:*

$$[(X, x_0), (K(G, n), k_0)]_0 = [X, K(G, n)] \qquad ,$$

d.h. der Basispunkt spielt keine Rolle.

Definition 84 *:*
Es sei $n \geq 0$. Der kontravarianter Funktor

$$H^n(, G) = [, K(G, n)] : TOP \longrightarrow AB$$

mit $G \in AB$ heißt Kohomologiefunktor.

Interessanter weise folgen aus dieser Definition die Sätze der Kohomologietheorie einzig aus den Eigenschaften der Eilenberg–Mac Lane–Räume und den Sätzen der Homotopietheorie. Einige dieser Sätze seien nun aufgeführt.

Satz 78 *Für $n \geq 2$ gibt es einen Isomorphismus:*

$$H^n(X, G) \longrightarrow H^{n+1}(\Sigma X, G)$$

Satz 79 *Seien $f_i : X \longrightarrow Y$ Abbildungen ($i = 0, 1$) zwischen den CW–Räumen X, Y. Sind beide Abbildungen homotop ($f_0 \simeq f_1$), so sind $H^n(f_0)$ und $H^n(f_1)$ für alle $n \geq 0$.*

Satz 80 *Sei $X = x_0$ ein Punkt, so ist $H^0(X, G) = G$ und $H^n(X, G) = 0$ für $n > 0$.*

Auch die anderen beiden Axiome (Exaktheitsaxiom und Ausschneidungsaxiom) lassen sich verifizieren.

Kapitel 5

Faserbündeltheorie

5.1 Definition und Beispiel

Definition 85 *:*
E, F, X seien topologische Räume mit $\dim E > \dim X$*. Die Abbildung* $\pi : E \longrightarrow X$ *ist die Projektion von E auf X. Es sei* $x \in X$ *ein beliebiges Element, dann ist* $\pi^{-1}(x)$ *homöomorph zu F. Die Menge der Homöomorphismen von F bilden eine Gruppe G. Die Menge* $\{U_i\}$ *sei eine endliche, offene Überdeckung von X. Eine lokale Trivialisierung ist die Menge der Paare* (U_i, ϕ_i) *mit* ϕ_i *als Homöo- morphismus*

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F \qquad \text{wobei } (\pi \circ \phi_i^{-1})(x, f) = x$$

für alle $x \in U_i$ *und* $f \in F$ *erfüllt sein muß. Seien nun* $(U_i, \phi_i), (U_k, \phi_k)$ *gegeben. Die Abbildung*

$$g_{ik} = \phi_i \circ \phi_k^{-1} : (U_i \cap U_k) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_k) \times F$$

ist stetig und invertierbar und wird Übergangsfunktion genannt. Das Tripel (E,F,X) heißt Faserbündel mit der Strukturgruppe G.

Bezeichnung 8 *E totaler Raum (Bündelraum), X Basisraum, F Faser, G Strukturgruppe*

Definition 86 *:*
(E,V,M) heißt Vektorbündel über M, wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und V ein m-dimensionaler Vektorraum ist. Der Rang des Vektorbündels ist die Dimension der Faser, d.h. rangE=m.

Definition 87 *:*
Ein Hauptfaserbündel ist ein Tripel (P,G,π*), wobei (G,P) eine freie Liesche Rechts-Transformationsgruppe derart ist, daß der Faktoraum P/G=M eine* C^∞*-Struktur besitzt und* $\pi : P \longrightarrow P/G = M$ *die Projektion von P auf M ist. Die lokale Beschreibung von P erfolgt über einen Bündelatlas* (U_i, ϕ_i) *mit:*

1. *$\{U_i\}$ sei eine offene Überdeckung von M*

2. *$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$ ist ein fasererhaltender Diffeomorphismus.*

3. *Durch $(\phi_i \circ \phi_k^{-1})(x,g) = (x, g_{ik}(x) * g)$ für alle $x \in U_i \cap U_k$ und $g \in G$ ist eine C^∞-Abbildung $g_{ik} : U_i \cap U_k \longrightarrow G$ gegeben, die als Übergangsfunktion bezeichnet wird.*

4. *Die Eigenschaften von g_{ik} sind:*
   $g_{ii}(x) = e \qquad x \in U_i$
   $g_{ik}(x) = (g_{ki}(x))^{-1} \qquad x \in U_i \cap U_K$
   $g_{ik}(x)g_{kl}(x) = g_{il}(x) \quad x \in U_i \cap U_k \cap U_l$

Bezeichnung 9 *P Bündelraum, G Strukturgruppe, M Basis, $P_x = \pi^{-1}(x)$ Faser über $x \in M$*

Definition 88 *:*
Sei (P,G,π) ein Hauptfaserbündel. Das assoziierte Faserbündel zu P entsteht dadurch, daß wir jeder Transformationsgruppe (G,F) ein Vektorbündel (E,F,π_e) wie folgt zuordnen:

$$E = P \times_G F = P \times F/\sim \quad \text{mit der Projektion} \quad \pi_e : E \longrightarrow P/G = M$$

und mit der Äquivalenzrelation $\sim$:

$$(z,f) \sim (z_1,f_1) := \text{es existiert ein } g \in G \text{ mit } z_1 = z * g \quad f_1 = g^{-1} * f$$

für $z, z_1 \in P$ und $f, f_1 \in F$

Definition 89 *:*
Eine Abbildung $s_i : U_i \longrightarrow P$ mit $U_i \subset M$ und $\pi \circ s_i = Id_M$ heißt lokaler Schnitt in P. (Id_M ist die identische Abbildung in M)

5.2 Zusammenhang und Krümmung

Definition 90 *:*
Die adjungierte Darstellung $Ad_{g_0} : G \longrightarrow G$ der Gruppe G ist der innere Automorphismus $Aut(G)$ mit $Ad_{g_0}(g) = g_0 g g_0^{-1}$, wobei $g, g_0 \in G$ ist.

Definition 91 *:*
(G,M) sei Liesche Transformationsgruppe mit rechtsseitiger Wirkung, d.h. es existiert eine Abbildung $r : G \times M \longrightarrow M$ mit $r(g,x) = r_g x = g * x \in M$.

Definition 92 *:*
$\widehat{X} : M \longrightarrow TM$ *heißt das zu* $X \in \underline{\boldsymbol{g}}$ *gehörende fundamentale Vektorfeld, wenn*

$$\widehat{X}(x) = \frac{d}{dt}(r(\exp(-tX), x))|(t = 0) \in T_xM$$

gilt.

Definition 93 *:*
Ein Zusammenhang ω *auf* P *ist eine g-wertige 1-Form in* $T^*(P)$*, d.h.* $\omega : T(P) \longrightarrow \underline{\boldsymbol{g}}$ *mit*

1. $\omega(\widehat{X}(z)) = X \ \forall X \in \underline{\boldsymbol{g}}$ *und* $\widehat{X} : P \longrightarrow T(P)$ *fundamentales Vektorfeld von* X *erzeugt*
2. $r_g^*\omega = Ad(g)^{-1} \circ \omega$

Der Tangentialraum T(P) spaltet in zwei orthogonale Unterräume H(P) und V(P) auf. V(P)=$\ker\pi$ *heißt vertikaler Tangentialraum und H(P) horizontaler Tangentialraum.* $T(P) = H(P) \oplus V(P)$ *wobei V(P) in T(G) liegt. Die kovariante Ableitung* ∇ *ist dann das horizontale Vektorfeld* $(P \longrightarrow H(P))$*, für das gilt:*

$$< \omega, \nabla >= \omega(\nabla) = 0$$

Satz 81 *P sei ein G-Hauptfaserbündel über M mit der Projektion* $\pi : P \longrightarrow M = P/G$*. Wir wählen nun eine lokale Trivialisierung* $\phi_i : \pi^{-1} \longrightarrow U_i \times G$ *und einen Schnitt* $s_i : U_i \longrightarrow \pi^{-1}$ *mit* $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ *wobei* $u = s_i(p)g_i$ *gilt. Die lokale Form* $A_i \in \underline{\boldsymbol{g}} \oplus \Lambda^1(U_i)$ *und der Zusammenhang* ω *in* P *werden durch die Formel*

$$\omega_i = g_i^{-1}\pi^* A_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i$$

mit d_P *als äußere Ableitung in P, miteinander verbunden.*

Definition 94 *:*
Sei $g : [0,1] \longrightarrow M = P/G$ *eine stückweise glatte Kurve, ein horizontaler Lift* $\tilde{g} : [0,1] \longrightarrow P$ *ist eine Kurve mit:*

$$(1)\frac{d}{dt}(\tilde{g}(t)) \in H_{g(t)}(P) \quad und \quad (2)\pi \circ \tilde{g} = g \quad \forall t$$

Definition 95 *:*
Sei nun g eine geschlossene stückweise glatte Kurve mit $g(0) = g(1) = x$*,* $\tilde{g}$ *der horizontale Lift von g. Dann existiert eine Zuordnung* $\tau_g : z \in P_x \longrightarrow \tilde{g}(1) \in P_x$ *mit* $x = \pi(z)$ *und* $\tau_g(z) = r_h z, \quad h \in G$ *Es entsteht eine Abbildung* $\tau : g \in S_x(M) \longrightarrow h \in G$ *wobei* $S_x(M) = \{g(t)|g(0) = g(1) = x\}$ *der Bogenraum (Loop-space) von M ist und es gilt:*

$$\tau_{g_1 \# g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} \qquad \tau_{-g} = (\tau_g)^{-1}$$

Das Bild von τ *wird dann Holonomiegruppe genannt. Im Allgemeinen ist* $im\tau \subseteq G$*.*

Definition 96 *:*
Eine Krümmung Ω *im Hauptfaserbündel* P *mit dem Zusammenhang* ω *ist die folgende* $\underline{\boldsymbol{g}}$*-wertige 2-Form:* $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$

5.3 Klassifikation

Definition 97 *:*
Eine Grassmann-Mannigfaltigkeit $Gr(m,k,\mathbb{C})$ einer komplexen Mannigfaltigkeit M ($\dim M = m$) sind alle k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M. (analog für reelle Mannigfaltigkeit) ($M = \mathbb{C}^m$ i.a.) $L(m,k,\mathbb{C})$ ist dann das natürliche Bündel über $Gr(m,k,\mathbb{C})$ dessen Fasern die k-dimensionalen Vektorräume in $\mathbb{C}^m$, die zum entsprechenden Punkt in $Gr(m,k,\mathbb{C})$ korrespondieren, sind. $P(m,k,\mathbb{C})$ ist die Menge der Basisvektoren der Fasern von $L(m,k,\mathbb{C})$ und wird Stiefel-Mannigfaltigkeit genannt. (assoziertes Hauptfaserbündel zu $L(m,k,\mathbb{C})$)

Definition 98 *:*
E sei ein Faserbündel über M mit der Faser F und der Projektion $\pi : E \longrightarrow M$. $h : N \longrightarrow M$ sei eine stetige Abbildung. Das Pullback-Bündel h^*E entsteht durch $h^*E = \{(x,e) \in N \times E | \pi(e) = h(x)\}$ (faserweise Abbildung)
so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & M \end{array}$$

kommutiert. (bei Hauptfaserbündel $F = G, M = E/G$)
Wenn die Abbildungen $f, g : N \longrightarrow M$ homotop zueinander sind, so sind die Bündel f^*E und g^*E äquivalent.

Satz 82 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und E ein k-dim. komplexes Vektorbündel über M. Dann existiert eine ganze Zahl $m_0(n)$, so daß für $m > m_0$ gilt:*

1. *$\exists f : M \longrightarrow Gr(m,k,\mathbb{C})$ so daß $E = f^*L(m,k,\mathbb{C})$*
2. *$f, g : M \longrightarrow Gr(m,k,\mathbb{C})$ gegeben, dann ist $f^*L(m,k,\mathbb{C}) = g^*L(m,k,\mathbb{C})$ nur wenn f und g homotop zueinander sind.*

Bemerkung 1 *$Gl(n,\mathbb{C})$-Hauptfaserbündel sind zu $U(n)$-Hauptfaserbündel und $Gl(n,\mathbb{R})$-Hauptfaserbündel zu $O(n)$-Hauptfaserbündel äquivalent.*

Für $Gr(m,k,\mathbb{C})$ und $P(m,k,\mathbb{C})$ ergibt sich im Kontext der Hauptfaserbündel:

$$Gr(m,k,\mathbb{C}) = \frac{Gl(m,\mathbb{C})}{Gl(k,\mathbb{C}) \times Gl(m-k,\mathbb{C})} \text{ und } P(m,k,\mathbb{C}) = \frac{Gl(m,\mathbb{C})}{Gl(m-k,\mathbb{C})}$$

d.h. $P(m,k,\mathbb{C})$ ist ein $Gl(k,\mathbb{C})$-Hauptfaserbündel über $Gr(m,k,\mathbb{C})$. Aufgrund obiger Äquivalenz kann eigentlich statt $Gl(n,\mathbb{C})$ $U(n)$ bzw. statt $Gl(n,\mathbb{R})$ $O(n)$ geschrieben werden.

Definition 99 *:*
Universelles Bündel: E sei $O(k)$-Hauptfaserbündel über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit $\dim M = d$. *Dieses Hauptfaserbündel wird jetzt mit einem bestimmten Bündel $\xi(n-k-1, O(k))$ verglichen. $\xi(n-k-1, O(k))$ ist das universelle Bündel mit dem totalen Raum $P(n,k,\mathbb{R})$ über dem Basisraum $Gr(n,k,\mathbb{R})$, d.h. dieses Bündel besitzt die Faser $O(k)$. Aufgrund der obigen Äquivalenz zwischen $Gl(n,\mathbb{R})$-Hauptfaserbündel und $O(n)$-Hauptfaserbündel gilt:*

$$Gr(n,k,\mathbb{R}) = \frac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)} \qquad P(n,k,\mathbb{R}) = \frac{O(n)}{O(n-k)}$$

Die Zahl $n-k-1$ entsteht durch die folgende Kette von Homotopiegruppen von $P(n,k,\mathbb{R})$:

$$\pi_q(P(n,k,\mathbb{R})) = 0 \quad mit \quad 0 < q < n-k-1 \ (n > dim\ allgemeinen)$$

($P(n,k,\mathbb{R})$ heißt manchmal auch $n-k-1$ zusammenhängend)

allgemeines Prinzip: Für jedes $O(k)$-Hauptfaserbündel E existiert eine Abbildung $f : M \longrightarrow Gr(n,k,\mathbb{R})$, so daß E das Pullbackbündel von $\xi(n-k-1, O(k))$ ist. $E = f^*\xi(n-k-1, O(k))$

Satz 83 *$g, f : M \longrightarrow Gr(n,k,\mathbb{R})$ mit $g \simeq f$ (g homotop f) dann ist $g^*\xi = f^*\xi$, d.h. die beiden Bündel mit $g^*\xi$ und $f^*\xi$ sind gleich.*

D.h., das die Äquivalenzklassen von $O(k)$-Hauptfaserbündel über M werden durch die Homotopieklassen von Abbildungen $M \longrightarrow G(n,k,\mathbb{R})$ bestimmt.
Allgemeine Konstruktion: P sei G-Hauptfaserbündel über M, konstruiere $\xi(n-k-1, G)$ mit $O(n)/O(n-k)$ als totalen Raum und $O(n)/G \times O(n-k)$ als Basisraum. neues universelles Bündel ξ allgemeines Prinzip ist aber dasselbe.

Definition 100 *:*
Ein Hauptfaserbündel $p : EG \longrightarrow BG$ mit Strukturgruppe G heißt universell, wenn die Trivialisierung durch ein numerierbare Menge von Zerlegungen dargestellt werden kann (ein solches Bündel heißt numerierbar) und wenn jedes andere Hauptfaserbündel $q : E \longrightarrow B$ mit dieser Eigenschaft bis auf Homotopie genau eine Bündelabbildung nach p besitzt.

Satz 84 *Zu jeder topologischen Gruppe G gibt es ein universelles Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe G und es gilt $BG = EG/G$.*

Satz 85 *Ein numerierbares Hauptfaserbündel $q : E \longrightarrow B$ mit Strukturgruppe G ist genau dann universell, wenn E zusammenziehbar ist, d.h. $\pi_n(E) = 0$ für $n \geq 0$.*

Satz 86 *Für eine diskrete Gruppe G ist $BG = K(G,1)$.*

Bem.: Natürlich sind alle Faserbündel auch Faserungen (Serre und Hurewicz).

5.4 Characteristische Klassen

Definition 101 *:*
Universelle Klassifizierende Räume: Einführen einer Funktion c mit:

1. *$c(P) = c(S)$ wenn P und S äquivalent sind*

2. *$f^*c(\xi) = c(f^*\xi)$ mit $\xi(n-k-1, G)$ als universelles Bündel*

$c(\xi)$ heißt charakteristische Klasse und $c(\xi) \in H^q(O(n)/G \times O(n-k), \mathbb{R})$ daraus folgt $c(P) \in H^q(M, \mathbb{R})$ mit $P = f^*\xi$.

Definition 102 *:*
$Gr(\infty, k, \mathbb{R})$ heißt universelle Grassmann-Mannigfaltigkeit und ist definiert durch:

$$Gr(\infty, k, \mathbb{R}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} Gr(m+k, k, \mathbb{R}) \quad mit$$

$\ldots \subset Gr(m+1, k, \mathbb{R}) \subset Gr(m+2, k, \mathbb{R}) \subset Gr(m+3, k, \mathbb{R}) \subset \ldots$ (Inklusionen)

Die Definition von $P(\infty, k, \mathbb{R})$ und $L(\infty, k, \mathbb{R})$ erfolgt analog.

Die Kohomologie von $Gr(\infty, k, \mathbb{R})$ ist einfacher als von $Gr(m, k, \mathbb{R})$ und läßt sich als Polynomalgebra realisieren $c_i = c_i(P(\infty, k, \mathbb{R}) = c_i(L(\infty, k, \mathbb{R}) \in H^i(Gr(\infty, k, \mathbb{R}), \mathbb{R})$
E sei ein $O(k)$-Hauptfaserbündel, dann existiert eine Abbildung $f : M \longrightarrow Gr(\infty, k, \mathbb{R})$ mit $f^*P(\infty, k, \mathbb{R}) = E$ und $c_i(E) = f^*c_i$
$Gr(\infty, k, \mathbb{R})$ heißt dann universeller klassifizierender Raum der $O(k)$-Hauptfaserbündel.

Definition 103 *:*
Sei G eine Lie-Gruppe und $\underline{\boldsymbol{g}}$ die Lie-Algebra mit der Basis $\{X_p\}$. Polynome von X_p $P(X_p)$ mit $[P(X_p), X_k] = 0 \ \forall X_k \in \underline{\boldsymbol{g}}$ heißen Casimir-Operatoren (Polynome im Zentrum von $\underline{\boldsymbol{g}}$)

Satz 87 *(Weil-Homomorphismus) Die Casimir-Operatoren lassen sich durch:*

$$\det(t\mathbb{1} + a_p X_p) = \sum_k t^k P_k(a_p)$$

erzeugen.

Definition 104 *:*
$P(X)$ heißt invariantes Polynom (Ad_g invariantes) wenn $P(X) = P(g^{-1}Xg)\ \forall g \in G$ und $X \underline{\boldsymbol{g}}$.

Satz 88 *(Chern)*
E sei ein G-Hauptfaserbündel über M mit Zuasmmenhang ω und Krümmung Ω. $P(X)$ sei ein invariantes Polynom. Dann hat $P(\Omega)$ folgende Eigenschaften:

1. *$P(\Omega)$ ist geschlossen, d.h. $dP(\Omega) = 0$*

2. *$P(\Omega)$ hat topologisch invariante Integrale, d.h. $P(\Omega)$ ist von der Wahl des Zusammenhanges ω unabhängig.*

Definition 105 *:*
E sei ein komplexes Vektorbündel über M mit Zusammenhang ω und Krümmung Ω. Das entsprechende Hauptfaserbündel $P(E)$ ist ein $U(k)$-Hauptfaserbündel über M, wenn $rk(E) = k$ gilt. Der Ausdruck:

$$c(\Omega) = \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\Omega}{2\pi}\right) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \ldots$$

heißt totale Chern-Form von E und es gilt $c_p(\Omega) \in H^{2p}(M)$. (Konstruktion mittels Weil-Homomorphismus)

Satz 89 *Eigenschaften:*

1. *Whitney-Summe: $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$*

2. *Pullback-Klasse: $f : N \longrightarrow M$ und $F = f^*E$ ist ein Bündel über N dann gilt $c(f^*E) = f^*c(E)$*

3. *$c_1(L \otimes K) = c_1(L) + c_1(K)$ wenn K, L Linienbündel*

Satz 90 *Aufspaltungsprinzip:*
E sei ein Vektorbündel vom Rang k und durch k Linienbündel $L_1, \ldots, L_k$ darstellbar, d.h. $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$. Da für jedes Linienbündel L gilt $c(L) = 1 + c_1(L)$ ergibt sich daraus:

$$c(E) = c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) = \prod_b c(L_b) = \prod_b (1 + x_b) \qquad mit \quad x_b = c_1(L_b)$$

$\prod(1 + x)$ heißt auch erzeugende Funktion von $c(E)$

Definition 106 *:*
Chern-Charakter: $ch(\alpha) = Tr \exp\left(\frac{i\alpha}{2\pi}\right)$ ist ebenfalls ein invariantes Polynom

$$\begin{aligned} \textit{Eigenschaften:} \quad & ch \quad (\alpha \oplus \beta) = ch(\alpha) + ch(\beta) \\ & ch \quad (\alpha \otimes \beta) = ch(\alpha)ch(\beta) \end{aligned}$$

mittels des obigen Prinzips ergibt sich als erzeugende Funktion: $ch(E) = \sum_p exp(x_p)$

Definition 107 *:*
Andere Charakteristischen Polynome: Es lassen sich noch andere invariante Polynome definieren, die folgende erzeugende Funktion besitzen (nur die wichtigsten sind aufgeführt):

$$\textit{Todd-Klasse: } td(E) = \prod_p \frac{x_p}{(1-\exp(-x_p))} \quad \textit{mit } td(E \oplus F) = td(E)td(F)$$

$$\textit{Hirzebruch L-Polynom: } L(E) = \prod_p \frac{x_p}{\tanh x_p}$$

$$\textit{$\hat{A}$-roof-genus: } \hat{A}(E) = \prod_p \frac{x_p}{\left(2\sinh\left(\frac{x_p}{2}\right)\right)} \quad \textit{(Dirac-Index)}$$

Definition 108 *:*
E sei ein $O(k)$-Hauptfaserbündel über M mit dem Zusammenhang ω und der Krümmung Ω. Die Pontrjagin-Klasse $p(E)$ von E ist dann durch:

$$p(E) = \det\left(\mathbb{1} - \frac{\Omega}{2\pi}\right) = 1 + p_1(E) + p_2(E) + \ldots$$

gegeben mit $p(E \oplus F) = p(E)p(F) \bmod 2$.

Satz 91 *E sei reelles Bündel, dann ist $E_c = E \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifikation von E (komplexes Bündel). Für die Pontrjagin-Klasse folgt nun: $p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E_c)$, d.h. $p_k(E) \in H^{4k}(M, \mathbb{Z})$*

Aufspaltungsprinzip: $p_1(E) = \sum_i x_i^2$, $p_2(E) = \sum_{ij} x_i^2 x_j^2$ usw.

Definition 109 *:*
E sei $SO(2k)$-Hauptfaserbündel über M. $p_k(E)$ ist die höchste Pontrjagin-Klasse. Die Euler-Klasse $e(E)$ ist dann durch $p_k(E) = e(E) \wedge e(E)$ gegeben.

Satz 92 *(Gauß-Bonnet Theorem:)*
M sei eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension. $\chi(M) = \sum_k (-1)^k H^k(M)$ die Euler-Charakteristik. Dann gilt:

$$\chi(M) = \int_M e(TM)$$

Hat M ungerade Dimension, so ist $\chi(M) = 0$ und $e(TM)$ verschwindet ebenfalls.

Definition 110 *:*
Die i-te Stiefel-Whitney-Klasse w_i eines reellen Bündels E über M mit k-dimensionaler Faser sind definiert durch: $w_i \in H^i(M, \mathbb{Z}_2)$ bzw. $w_p \in H^p(Gr(n,k,\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2)$ mit $i = 1, \ldots, n-1$.
Ist $\dim M = 2n$ gerade so fällt $w_n(E)$ mit der Euler-Klasse $e(E)$ zusammen.

Satz 93 *Die erste Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(TM)$ ist null, dann und nur dann wenn M orientierbar ist. Eine Mannigfaltigkeit M heißt Spin-Mannigfaltigkeit, d.h. der Paralleltransport von Spinoren ist eineindeutig möglich, wenn $w_1(TM) = w_2(TM) = 0$ erfüllt ist.*

Kapitel 6

K–Theorie

6.1 Whitneysummenbündel und Stabile Äquivalenz

Definition 111 :
Die Whitney-Summe $V \oplus W$ zweier Vektorräume V, W ist die Menge der Paare (v, w) mit $v \in V$ und $w \in W$ und $(v, w) + (f, g) = (v + f, w + g)$; $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$ sowie $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

Definition 112 :
E, F seien Vektorbündel über M mit den Fasern V bzw. W (beides Vektorräume). $E \oplus F$ heißt dann Whitney-Summenbündel über M mit der Faser $V \oplus W$, d.h. es existiert eine Überdeckung $\{U_a\}$ von M und eine Projektion $\pi : E \oplus F \longrightarrow M$ mit der lokalen Trivialisierung $\pi^{-1}(U_a) \simeq U_a \times (V \oplus W)$ und der Übergangsfunktion

$$g = \begin{pmatrix} g_E & 0 \\ 0 & g_F \end{pmatrix}$$

mit g_E Übergangsfkt. von E und g_F Übergangsfkt. von F.

Definition 113 :
Zwei Bündel E und F über M heißen stabil äquivalent, wenn nach Addition eines trivialen Bündels I^k diese isomorph werden.

$$E \oplus I^j \simeq F \oplus I^k \qquad \textit{(im allgemeinen } j \neq k\textit{)}$$

(wobei $I^k \simeq M \times \mathbb{C}^k$ für komplexe Bündel und $I^k \simeq M \times \mathbb{R}^k$ für reelle Bündel)
obige Relation ist eine Äquivalenzrelation, man schreibt dafür $E \overset{s}{\sim} F$

Satz 94 *Sind E, F und G Vektorbündel über M, die $E \oplus G \simeq F \oplus G$ erfüllen, so gilt $E \overset{s}{\sim} F$.*

Definition 114 *:*
$Vect(M)$ ist die Menge aller komplexen Vektorbündel über M. Mit der direkten Summe $\oplus$ ist $Vect(M)$ eine abelsche Halbgruppe (inverse fehlt, d.h. die formale Differenz $\ominus$)

Grothendieck Konstruktion: (Ergänzung einer abelschen Halbgruppe zur vollen Gruppe)
Äquivalenzrelation: $E, F, G, H \in Vect(M)$

$$(E, F) \sim (G, H) = \exists J \in Vect(M) \text{ so daß } E \oplus H \oplus J \simeq G \oplus F \oplus J$$

Definition 115 *:*
Die Gruppe $K(M) = (Vect(M) \times Vect(M))/\sim$ ist die Gruppe der Äquivalenzklassen von formalen Differenzen von Vektorbündel. $E, F \in Vect(M) \longrightarrow [E] - [F] = [E \ominus F] \in K(M)$
Das reelle Vektorbündel E über M mit der Faser F hat den Rang n wenn $F \simeq \mathbb{R}^n$ (entsprechend für komplexe $F \simeq \mathbb{C}^n$) Bezeichnung: $rk(E) = n$
Die virtuelle Dimension von $[E] - [F]$ ist die ganze Zahl $rk(E) - rk(F)$.

Definition 116 *:*
Die Menge der stabilen Äquivalenzklassen von $Vect(M)$ bildet die reduzierte K-Theorie von M und wird mit $\tilde{K}(M)$ bezeichnet. $\tilde{K}(M)$ hat die virtuelle Dimension 0*.*

Satz 95 *Es existiert ein Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen: $K(M) = \tilde{K}(M) \oplus \mathbb{Z}$.*

Satz 96 *Wenn E_k ein reelles Vektorbündel mit Rang k über M ($\dim M = n$), dann ist $E_k \simeq F_n \oplus I^{k-n}$ $(k > n)$ für ein Bündel F_n. E_k heißt (bei $k > n$) in einem stabilen Rang.*

Satz 97 *Es gilt $\tilde{K}(M) = [M, Gr(\infty, k, \mathbb{R})]$ (Homotopieklassen von Abbildungen $M \longrightarrow Gr(\infty, k, \mathbb{R})$).*

Satz 98 *Wir betrachten im folgenden die formale Erweiterung von $K(M)$ und $\tilde{K}(M)$ in die rationalen Zahlen durch:*

$$K(M, \mathbb{Q}) = K(M) \otimes \mathbb{Q} \quad \textit{und} \quad \tilde{K}(M, \mathbb{Q}) = \tilde{K}(M) \otimes \mathbb{Q}$$

Nun können wir den Chern-Charakter $ch(E)$ auf die K-Theorie durch die Beziehung:

$$ch(E \ominus F) = ch(E) - ch(F)$$

ausdehnen. Der Chern-Charakter ist nun ein Ring-Homomorphismus:

$$ch : K(M) \longrightarrow \bigoplus_p H^{2p}(M, \mathbb{Q})$$

Für $K(M, \mathbb{Q})$ gilt sogar, daß:

$$K(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \bigoplus_p H^{2p}(M, \mathbb{Q}) \quad p > 0$$

ein Isomorphismus ist.

Definition 117 *:*
Sei X ein CW–Raum und $\Sigma^n X$ die n-fache Einhängung. Die bisherige K–Theorie wird als $K^0(X)$ bezeichnet. Die K–Theorie vom Grad n wird durch

$$K^0(\Sigma^n X) = K^{-n}(X)$$

definiert.

6.2 K–Funktor

Es gibt zwei Arten auf axiomatische Art und Weise eine solche Theorie zu formulieren. Die erste Möglichkeit als Kohomologietheorie ohne Dimensionsaxiom oder gleich als Verallgemeinerte Kohomologietheorie (nach P. Hilton). Im folgenden sollen beide Möglichkeiten angegeben werden.

Definition 118 *:*
Eine verallgemeinerte Kohomologietheorie ist eine Folge kontravarianter Funktoren $\{H^q,\ q \in \mathbb{Z}\}$ von der Kategorie der Raumpaare TOP^2 in der Kategorie der abelschen Gruppen AB zusammen mit einer Folge natürlicher Transformationen

$$\delta_q : H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X, A)$$

$(X, A) \in TOP^2$ derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Homotopieaxiom:*
   Sind $f_0, f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homotop in TOP^2, so gilt $H^q(f_0) = H^q(f_1) : H^q(Y, B) \longrightarrow H^q(X, A)$.

2. *Ausschneidungsaxiom:*
   Sei $(X, A) \in TOP^2$ und U eine in X offene Teilmenge, so daß der Abschluß $\bar{U}$ von U im Inneren von A liegt. Ist $j : (X \backslash U, A \backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ die Einbettung, so ist $H^q(j) : H^q(X, A) \longrightarrow H^q(X \backslash U, A \backslash U)$ ein Isomorphismus.

3. *Exaktheitsaxiom:*
   Sei $(X, A) \in TOP^2$ und $i : A \hookrightarrow X$, $j : X \hookrightarrow (X, A)$ jeweils die Inklusionen. Dann ist die Folge

   $$\ldots \xrightarrow{\delta_{q+1}} H^q(X, A) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(X) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(A) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(X, A) \xrightarrow{H^{q+1}(j)} \ldots$$

   exakt.

Definition 119 *:*
Eine (reduzierte) Kohomologietheorie ist eine Folge kontravarianter Funktoren $\{H^q,\ q \in \mathbb{Z}\}$ *von der Kategorie der Raumpaare* TOP^2 *in der Kategorie der abelschen Gruppen* AB *zusammen mit einer Folge natürlicher Transformationen*

$$\sigma^q : H^q \longrightarrow H^{q+1}\Sigma \qquad q \in \mathbb{Z}$$

$(X, A) \in TOP^2$ *derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Homotopieaxiom:*
   Sind $f_0, f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *homotop in* TOP^2*, so gilt* $H^q(f_0) = H^q(f_1) : H^q(Y, B) \longrightarrow H^q(X, A)$.

2. *Einhängungsaxiom*
   σ^q *ist ein natürlicher Isomorphismus für alle* $q \in \mathbb{Z}$.

3. *Exaktheitsaxiom:*
   Gegeben sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C_f$*, die Sequenz von abelschen Gruppen*

   $$H^q(X) \xleftarrow{H^q(f)} H^q(Y) \xleftarrow{H^q(i)} H^q(C_f)$$

   ist für alle $q \in \mathbb{Z}$ *exakt.*

Der Raum C_f heißt Abbildungskegel und entsteht aus der Abbildung $f : X \longrightarrow Y$durch

$$C_f = (X \times I \cup Y)/\sim$$

mit der Äquivalenzrelation ($t \in I, x_0 \in X$ fixiert): $\sim$: $(x, 0) \cong (x_0, t) \quad (x, 1) \cong f(x)$, wobei $\cong$ heißt, daß die beiden Punkte identifiziert werden.

Satz 99 *Beide Axiomensysteme sind äquivalent.*

Satz 100 *Die K–Theorie* K^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ *ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie* TOP^2 *in die Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen.*[1] *Sie erfüllt die Axiome einer verallgemeinerten Kohomologietheorie.*

Satz 101 *(Periodizitätssatz von Atiyah–Bott)*
Das äußere Produkt

$$\mu : K^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} K^0(S^2) \longrightarrow K^0(X \times S^2)$$

ist Ringisomorphismus.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satz ist:

Satz 102 *Es gibt eine natürliche Ringisomorphie zwischen* $K^0(X, A)$ *und* $K^{-2}(X, A)$.

[1] Die Kategorie AB ist eine Unterkategorie dieser Kategorie.

Desweiteren läßt sich ein Zusammenhang zur Homotopietheorie herstellen.

Satz 103 *Sei* $U = \bigcup_{n=1} \infty U(n)$ *die unendliche, unitäre Gruppe* $U = U(\infty)$ *und* x_0 *ein Punkt,so gibt es einen Isomorphismus*

$$K^{-n}(x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(U)$$

Daraus ergibt sich:

$$K^{-n}(x_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ ist gerade} \\ 0 & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

und insbesondere:

$$\pi_n(U) = \begin{cases} 0 & n \text{ ist gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

Damit wurde gezeigt, daß das Dimensionsaxiom nicht erfüllt wird.
Mit Hilfe dieser Periodizität kann die K–Theorie K^{-n} auch auf $n \in \mathbb{Z}$ ausgedehnt werden.

Definition 120 *:*
Wir definieren $K^n(X)$ *mit* $n \in \mathbb{Z}$ *durch:* $K^n(X) = K^{n-2}(X)$ *induktiv.*

Satz 104 *Es gibt die folgenden natürlichen Isomorphismen:*

$$K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_p H^{2p}(X, \mathbb{Q})$$
$$K^1(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_p H^{2p+1}(X, \mathbb{Q})$$

6.3 Höhere K–Theorie

In diesem Abschnitt soll die algebraische Seite der K–Theorie beleuchtet werden.

Definition 121 *:*
Sei Λ *irgendein Ring (nicht notwendig kommutativ) und* ${}_\Lambda Mod$ *die Kategorie der linken* Λ*–Module.*
$K_0\Lambda$ *ist die abelsche Gruppe* F/R*, wobei* F *eine freie Gruppe ist, dessen Generatoren* $< P >$ *die Isomorphismus–Klassen von endlich erzeugten, projektiven* Λ*–Modulen sind und* R *ist die Untergruppe von* F *erzeugt durch die Ausdrücke*

$$< P > + < Q > - < P \oplus Q >$$

$K_0\Lambda$ *wird die projektive Klassengruppe von* Λ *genannt.*

Definition 122 *:*
Sei $M_n(\Lambda)$ der Ring der $n \times n$–Matrizen mit ganzen Zahlen in einem assoziativen Ring mit Einselement. Sei $GL_n(\Lambda)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen von $M_n(\Lambda)$. Eine Matrix, welche von der Einheitsmatrix um ein Element $\lambda \in \Lambda$ differiert. heißt elementar und wird mit e_{ij}^{λ}, $i \neq j$ bezeichnet. Es gilt wegen $(e_{ij}^{\lambda})^{-1} = e_{ij}^{-\lambda}$

$$[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = \begin{cases} 1 & wenn \quad j \neq k, \quad j \neq l \\ e_{il}^{\lambda\mu} & wenn \quad j = k, \quad i \neq l \\ e_{kj}^{-\lambda\mu} & wenn \quad j \neq k, \quad i = l \end{cases}$$

wobei $[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = e_{ij}^{\lambda} e_{kl}^{\mu} e_{ij}^{-\lambda} e_{kl}^{-\mu}$, $n \geq 3$. Sei $E_n(\Lambda)$ die Untergruppe von $GL_n(\Lambda)$ erzeugt durch alle e_{ij}^{λ}, $\lambda \in \Lambda$ mit $1 \leq i \neq j \leq n$, die elementare, lineare Gruppe genannt wird. Durch die Identifikation von $A \in GL_n(\Lambda)$ mit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\Lambda)$ erhält man eine Einbettung $GL_n(\Lambda) \subset GL_{n+1}(\Lambda)$. Sei $GL(\Lambda) = lim\underrightarrow{} GL_n(\Lambda)$ der direkte Limes von $GL_n(\Lambda)$ und $E(\Lambda)$ ist der direkte Limes von $E_n(\Lambda)$.

Satz 105 *(Whitehead)*

$$[GL(\Lambda), GL(\Lambda)] = E(\Lambda)$$

Definition 123 *:*
Die Quotientengruppe $GL(\Lambda)/E(\lambda)$ heißt erste algebraische K–Theorie $K_1\Lambda$ des Ringes Λ.

Definition 124 *:*
Für $n > 2$ definieren wir die Steinberg Gruppe $St(\Lambda)$ als die nichtabelsche Gruppe, die durch die Darstellung:

$$\begin{array}{lll} \textit{Generatoren:} & & x_{ij}^{\lambda}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n, \ \lambda \in \Lambda \\ \textit{Relationen:} & 1. & x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu} = x_{ij}^{\lambda+\mu} \\ & 2. & [x_{ij}^{\lambda}, x_{ij}^{\lambda}] = \begin{cases} 1 & j \neq k, i \neq l \\ x_{il}^{\lambda\mu} & i \neq l, j = k \end{cases} \end{array}$$

Satz 106 *Es gibt eine surjektive Homomorphismus (Epimorphismus) $\phi : St_n(\Lambda) \longrightarrow E_n(\Lambda)$, der durch $\phi(x_{ij}^{\lambda}) = e_{ij}^{\lambda}$ gegeben ist. Der direkte Limes wird mit $St(\Lambda)$ bezeichnet.*

Definition 125 *:*
Die zweite algebraische K–Theorie $K_2\Lambda$ eines Ringes Λ ist als Kern von ϕ definiert, d.h. $K_2\Lambda = \ker(\phi : St(\Lambda) \longrightarrow E(\Lambda) \subset GL(\Lambda))$. Es entstehen die exakten Sequenzen:

$$1 \longrightarrow K_2\Lambda \longrightarrow St(\Lambda) \xrightarrow{\phi} E(\Lambda) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow K_2\Lambda \longrightarrow St(\Lambda) \overset{G}{L} (\Lambda) \longrightarrow K_1\Lambda \longrightarrow 1$$

Satz 107 *Die Abbildung*

$$K_2\Lambda \longrightarrow H_2(E(\Lambda), \mathbb{Z})$$

ist ein Isomorphismus. Weiterhin gibt es Isomorphismen, so daß

$$St(\Lambda \times \Lambda') = St(\Lambda) \oplus St(\Lambda')$$
$$K_2(\Lambda \times \Lambda') = K_2(\Lambda) \oplus K_2(\Lambda')$$

Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu. Die entsprechende Konstruktion wird Quillen's Plus Konstruktion genannt. Vorher brauchen wir aber noch einige Definitionen.

Definition 126 *:*
Eine Gruppe G wird perfekt genannt, wenn sie gleich der Kommutatorgruppe $[G, G]$ ist.

Plus Konstruktion:

Definition 127 *:*
Sei X ein zusammenhängender zellulärer Komplex mit Basispunkt. X habe eine perfekte Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$. Sei $f_\alpha : S^1 \longrightarrow X$ mit $\alpha \in \Lambda$ die Menge der basispunkterhaltenden Abbildungen. Diese erzeugen eine Verklebung von 2–Zellen e^2_α mit

$$X_1 = X \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} e^2_\alpha$$

Sei $\rho : \pi_2(X_1) \longrightarrow H_2(X_1)$ die Hurewicz–Abbildung und $j : H_2(X_1) \longrightarrow H_2(X_1) \longrightarrow H_2(X_1, X)$ eine surjektive Abbildung, die aus der Inklusion $X \hookrightarrow X_1$ entsteht. Wir wählen eine Abbildung $b_\alpha : S^2 \longrightarrow X_1$, so daß $j \circ \rho[b_\alpha] = (e^\alpha_2)$ mit e^α_2 als Generator der $H_2(X_1, X)$. Die Abbildung b_α erzeugt eine Verklebung

$$X^+ = X_1 \cup \bigcup_{\alpha \in A} e^3_\alpha$$

Satz 108 *Sei X ein zusammenhängender zellularer Komplex und N eine normale, perfekte Untergruppe von $\pi_1(X)$. Dann gibt es einen Raum X^+ (abhängig von N).*

Sei G eine diskrete Gruppe und $BG = K(G, 1)$ der klassifizierende Raum. Wir nehmen an. daß $N = [G, G]$ perfekt ist, dann kann die Plus–Konstruktion auf BG mit N angewendet werden und wir erhalten BG^+. Wegen $E(\Lambda) = [GL(\Lambda), GL(\Lambda)]$ (siehe oben) existiert $BGL(\Lambda)^+$.

Definition 128 *:*
Für $n \geq 1$ sind die K–Gruppen von Λ durch

$$K_n(\Lambda) = \pi_n(BGL(\Lambda)^+$$

definiert.

Bem.: Diese Gruppen sind isomorph zur Zyklischen Homologie.

Topologische Konstruktion:
Als erstes soll dazu eine Abbildung zwischen der algebraischen und topologischen K–Theorie gefunden werden.

Definition 129 *:*
Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit X und die Garbe $\mathcal{O}(X)$ der stetigen Funktionen über X. Für $n \geq 0$ sind die K–Gruppen von X durch

$$K_n(X) = \pi_n(K_0(\mathcal{O}(X)) \times BGL(\mathcal{O}(X))^+)$$

definiert.

Satz 109 *Sei $\mathcal{C}(X) \supset \mathcal{O}(X)$ der Ring der stetigen Funktionen von X. Es gibt eine natürliche Homotopieäquivalenz*

$$BU^X \longrightarrow BGL(\mathcal{C}(X))$$

mit dem Homotopieinversen

$$\eta_X : BGL(\mathcal{O}(X))^+ \longrightarrow BU^X \qquad ,$$

die eine Abbildung η^q für $q > 0$ mit

$$K_q(X) = \pi_q(BGL(\mathcal{O}(X))^+ \longrightarrow \pi_q(BU^X) = K^{-q}(X)$$

induziert.

Die Deutung dieses Satzes erfolgt durch die Theorie der C^*–Algebren.

Definition 130 *:*
Eine Algebra $\mathcal{E}$ (Vektorraum mit assoziativer Multiplikation) über $\mathbb{C}$ heißt C^*–Algebra, falls $\mathcal{E}$ eine Norm $\|.\|$, so daß $\mathcal{E}$ ein Banachraum ist und eine Involution $a \mapsto a^*$ mit $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in \mathcal{E}$ existieren.

Der Ring der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(X)$ über einen kompakten, metrischen Raum X ist eine C^*–Algebra.

Definition 131 *:*
Sei $\mathcal{K}$ die C^*–Algebra der kompakten Operatoren über einen seperablen Hilbertraum. Durch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0$$

werden die kompakten Operatoren um die C^*–Algebra der stetigen Funktionen erweitert. Die Menge solcher Erweiterungen wird mit $Ext(X)$ bezeichnet.

Definition 132 *:*
Seien G, G' endlich erzeugte abelsche Gruppen. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow ext(G', G) \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

heißt Erweiterung der Gruppe G' durch G.

Satz 110 *(Brown's Universelles Koeffiziententheorem)*
Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow ext(K^0(X), \mathbb{Z}) \longrightarrow Ext(X) \longrightarrow Hom(K^1(X), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

welche aufspaltet, d.h.

$$Ext(X) = Hom(K^1(X), \mathbb{Z}) \oplus ext(K^0(X), \mathbb{Z})$$

Nun befassen wir uns direkt mit der Erweiterung. Da $\mathcal{C}(X)$ ein Ring ist, können wir die Ergebnisse der algebraische K–Theorie nutzen.

Definition 133 *:*
Die K–Theorie für $\mathcal{C}(X)$ wird durch $K_0(\mathcal{C}(X)) = K^0(X)$ und $K_1(\mathcal{C}(X)) = K^1(X)$ definiert. (wegen der Bott-Periodizität braucht man eigentlich nicht mehr)

Satz 111 *Zur exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0$$

gibt es eine exakte Sequenz in der algebraischen K–Theorie

$$K_1(\mathcal{E}) \longrightarrow K_1(\mathcal{C}(X)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{E}) \longrightarrow K_0(\mathcal{C}(X)) \longrightarrow 0$$

wodurch das Element in $ext(K^0(X), \mathbb{Z})$ mittels der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(\mathcal{E}) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow 0$$

bestimmt.

Die höhere K–Theorie ist also dual zur sogenannten K–Homologie, die die Äquivalenzklassen von Erweiterungen von C^*–Algebren beschreibt.

Kapitel 7

Indextheoreme

7.1 Elliptische Komplexe und Kohomologie

Definition 134 *:*
E und F seien Vektorbündel über M mit $rk(E) = p$ und $rk(F) = q$. $\Gamma(M,E)$ und $\Gamma(M,F)$ seien die Räume der glatten Schnitte in E bzw. F. Die lineare Abbildung $L : \Gamma(M,E) \longrightarrow \Gamma(M,F)$ ist ein linearer Operator der Ordnung m.
Das Symbol $\sigma_m(L)$ des linearen Operators L ist die Fouriertransformierte von L. Sei $\pi : T^*M \longrightarrow M$ eine Projektion im Kotangentialbündel. L heißt elliptisch, wenn $\sigma_m : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$ ein Bündelisomorphismus auf die Nullschnitte von T^*M ist. ($\sigma_m(L)$ ist invertierbar)

Definition 135 *:*
$\{E_p\}$ sei eine endliche Sequenz von Vektorbündel über M und $D_p : \Gamma(M,E_p) \longrightarrow \Gamma(M,E_{p+1})$ eine Sequenz von elliptischen Differentialoperatoren. Diese Sequenz heißt Elliptischer Komplex $(E,D) = (\{E_p\},\{D_p\})$ wenn $D_{p+1} \circ D_p = 0 \ \forall p$.

Zusammenhang zur K-Theorie: $\{E_p\}$ sei eine Sequenz von Vektorbündel über M und die Sequenz

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\alpha_0} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} E_{n+1} \longrightarrow 0$$

von Bündelhomomorphismus $\alpha_p : E_p \longrightarrow E_{p+1}$ mit $\alpha_p \circ \alpha_{p+1} = 0$ heißt Komplex E. Zwei Komplexe E und F sind homotop zueinander, wenn ein Komplex G über $M \times [0,1]$ existiert, so daß $G|_{M\times\{0\}} \simeq E$ und $G|_{M\times\{1\}} \simeq F$. Die Homotopieklassen von Komplexen über M werden dann mit $C(M)$ bezeichnet. Die Whitney-Summe $\oplus$ zwischen den Vektorbündel der Komplexe induziert dann die Whitney-Summe der Komplexe selbst.

Satz 112 *$C(M)$ wird mit $\oplus$ eine Halbgruppe.*

Definition 136 *:*
Ein Träger eines Komplexes E ist die Menge der $x \in M$ für welche die Sequenz der Fasern

$$0 \longrightarrow (E_0)_x \longrightarrow (E_1)_x \longrightarrow \ldots \longrightarrow (E_{n+1})_x \longrightarrow 0$$

mit obigen α_p nicht exakt ist. $C_\phi(M)$ sei die Menge aller leeren Träger ϕ und ist ebenfalls eine Halbgruppe mit $C_\phi(M) \subset C(M)$. Dann gilt:

$$K(M) = C(M)/C_\phi(M)$$

für die K-Theorie von M.

Definition 137 *:*
(E, D) sei ein Elliptischer Komplex über M. $D_p^* : \Gamma(M, E_{p+1}) \longrightarrow \Gamma(M, E_p)$ sei der zu D_p duale Operator. $\triangle_p : \Gamma(M, E_p) \longrightarrow \Gamma(M, E_p)$ mit $\triangle_p = D_p^* D_p + D_{p+1} D_{p+1}^*$ heißt der zu D_p assozierte Laplace-Operator.
Die p-te Kohomologie-Gruppe des Elliptischen Komplexes (E, D) ist durch:

$$H^p(E, D) = ker D_p / im D_{p+1}$$

definiert.

Satz 113 *Jede Kohomologie-Klasse enthält eine eindeutige harmonische Darstellung und es besteht der Isomorphismus: $H^p(E, D) \simeq \ker \triangle_p$.*

Definition 138 *:*
Der Index eines Elliptischen Komplexes (E,D) ist:

$$index(E, D) = \dim ker D - \dim coker D \quad mit \quad coker D = \Gamma(M, E)/ker D$$

Satz 114 *Für (E, D) gilt: $coker D = ker D^*$*

Satz 115 *Der Index eines Elliptischen Komplexes läßt sich noch wie folgt darstellen:*

$$index(E, D) = \sum_p (-1)^p \dim ker D_p = \sum_p (-1)^p \dim H^p(E, D)$$

Definition 139 *:*
(F, A) ist der aus (E, D) konstruierte 2-term-Komplex mit:

$$F_0 = \bigoplus_{2k} E_{2k} \quad F_1 = \bigoplus_{2k+1} E_{2k+1} \quad und \quad A = \bigoplus_k (D_{2k} + D_{2k+1}^*) \quad A^* = \bigoplus_k (D_{2k}^* + D_{2k+1})$$

d.h.

$$A : \Gamma(M, F_0) \longrightarrow \Gamma(M, F_1) \qquad A^* : \Gamma(M, F_1) \longrightarrow \Gamma(M, F_0)$$

mit den assoziierten Laplace-Operatoren:

$$\Box_0 = A^* \circ A = \bigoplus_{2k} \triangle_{2k} \qquad \Box_1 = A \circ A^* = \bigoplus_{2k+1} \triangle_{2k+1}$$

dann folgt für den Index:

$$index(E, D) = index(F, A) = \dim ker \Box_0 - \dim ker \Box_1$$

7.2 Analytischer und Topologischer Index

Dazu werden zwei unterschiedliche Indexe eingeführt. Der analytische Index als Differenz von Kernen des elliptischen Operators und des dazu adjungierten Operators, und der topologische Index als Abbildung vom Symbolkomplex auf die ganzen Zahlen unter Verwendung des Thom-Homomorphismus und Gysin-Homomorphismus. Das Indextheorem von Atiyah und Singer ist dann einfach die Gleichheit beider Indexe.

Definition 140 *:*
(E, D) sei ein elliptischer Komplex mit E als Vektorbündel über M. Der analytische Index ist dann die Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} ind_a: & K(T^*M) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\sigma(D)] & \longmapsto & index D \end{array}$$

Definition 141 *:*
Sei F ein komplexes G–Hauptfaserbündel (Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe G) über X. Gegeben sei ein Schnitt $s : X \longrightarrow F$. Mit $\Lambda^i(F)$ bezeichnen wir das komplexe G–Vektorbündel der i–Vektoren über X. Nun definieren wir eine Sequenz $\Lambda(F, s)$ der Länge $n = \dim F$ wie folgt

$$\Lambda(F,s): \quad 0 \longrightarrow \Lambda^0(F) \xrightarrow{\alpha^0} \Lambda^1(F) \xrightarrow{\alpha^1} \ldots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} \Lambda^n(F) \longrightarrow 0$$

mit $\alpha^k(v_x) = s(x) \wedge v_x$, $v_x \in \Lambda^k(F)$.

Satz 116 *1. $\Lambda(F, s)$ ist ein Komplex.*

2. *Der Träger des Komplexes $\Lambda(F, s)$ ist gleich der Menge aller $x \in X$ mit $s(x) = 0$,*
$$Tr(\Lambda(F,s)) = \{x \in X \ : \ s(x) = 0\}$$

3. *Ist $Tr(\Lambda(F, s))$ kompakt, so definiert $\Lambda(F, s)$ ein Element aus $K^0(X)$.*

Satz 117 *Sei X kompakt. Ist $p : F \longrightarrow X$ die Projektion in F, so ist p^*F ein G–Vektorbündel über F, dessen Projektion wir mit $\pi : p^*F \longrightarrow F$ bezeichnen. Der Totalraum des Bündels p^*F ist*

$$p^*F = \{f^1, f^2) \in F \times F : p(f^1) = p(f^2)\}$$

und π ist durch $\pi(f^1, f^2) = f^1$ gegeben. Das Vektorbündel (p^*F, π, F) besitzt einen kanonischen Schnitt

$$\begin{array}{rccc} S_F: & F & \longrightarrow & p^*F \\ & f & \longmapsto & (f, f) \end{array}$$

Der Träger des Schnittes S_F ist

$$\{f \in F : S_F(f) = 0\} = \{f \in F : f = 0\} = X$$

Der Träger von $\Lambda(p^*F, S_F)$ ist kompakt und definiert ein Element $\lambda_F \in K^0(X)$. Die Projektion $p : F \longrightarrow X$ läßt $K^0(F)$ mittels des Produktes $a \cdot b = K^0(p)(a) \otimes b$ mit $a \in K^0(X), b \in K^0(F)$ und $K^0(p) : K^0(X) \longrightarrow K^0(F)$ zu einem $K^0(X)$–Modul werden.

Definition 142 *:*
Der Thom–Homomorphismus ist durch

$$\begin{array}{rccc} \phi : & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(F) \\ & a & \longmapsto & a \cdot \lambda_F \end{array}$$

definiert.

Satz 118 *Für jeden lokal–kompakten Raum X und jedes G–Vektorbündel E über X ist*

$$\phi : K^0(X) \longrightarrow K^0(E)$$

eine Isomorphie.

Definition 143 *:*
Sei $X \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine tubulare Umgebung W von X in Y ist ein Paar (f, ξ) bestehend aus einem glatten Vektorbündel $\xi : E \longrightarrow X$ und einer Einbettung $f : E \longrightarrow Y$ mit den Eigenschaften:

1. *Die Zusammensetzung von f mit dem Nullschnitt $i : X \longrightarrow E$ ist die gegebene Inklusion $X \subset Y$.*

2. *$f(E)$ ist eine offene Umgebung von X in V.*

Das Normalenbündel N von X in Y ist der Kokern von $j : TX \longrightarrow TY|_X$, d.h $cokerj = TY|_X / im\ j$.

Satz 119 *Es gibt einen G-invarianten Diffeomorphismus $\Phi : N \longrightarrow W$.*

Satz 120 *Seien p_T und p_N die Projektionen im Tangentialbündel TX bzw. im Normalenbündel N. Die Einbettung $i : X \longrightarrow Y$ zerlegen wir in zwei Einbettungen $i_1 : X \longrightarrow W$ und $i_2 : W \longrightarrow Y$ mit $i = i_2 \circ i_1$, so erhalten wir für die Differentiale*

$$TX \xrightarrow{di_1} TW \xrightarrow{di_2} TY$$

und $T\Phi : TN \longrightarrow TW$. Das Bündel $p_T^*(N \oplus N) = p_T^*(N) \oplus p_T^*(N)$ wird mittels einer G-invarianten Diffeomorphie Ψ

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & TN & \longrightarrow & p_T^*(N \oplus N) \\ & (n_1, t + n_2) & \longmapsto & (t, n_1 + n_2) \end{array}$$

mit $TN = p_T^*(TX) \oplus p_N^*(N)$ identifiziert.

Definition 144 *:*
Sei $\phi : K^0(TX) \longrightarrow K^0(p_T^*(N \oplus N))$ *der Thom–Homomorphismus und* $(di_2)_* : K^0(TW) \longrightarrow K^0(TY)$, $\Psi^* : K^0(p_T^*(N \oplus N)) \longrightarrow K^0(TN)$ *Homorphismen. Der zur Einbettung* $i : X \longrightarrow Y$ *gehörige Gysin–Homomorphismus* $i_! : K^0(TX) \longrightarrow K^0(TY)$ *wird durch* $i_! = (di_2)_* \circ (d\Phi^{-1})^* \circ \Psi^* \circ \phi$ *definiert.*

Satz 121 *Sei* E *ein* G*–Hauptfaserbündel und* $X = E/G$ *eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein reeller Vektorraum* V *und eine Darstellung der Gruppe* G *in der orthogonalen Gruppe* $O(V)$ *sowie eine* G*–invariante Einbettung* $i : X \longrightarrow V$.

Definition 145 *:*
Mit den oben gemachten Voraussetzungen erhalten wir den Gysin–Homomorphismus

$$i_! : K^0(TX) \longrightarrow K^0(TV) = K^0(V \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

und den Thom–Homomorphismus

$$\phi : K^0(V) = \mathbb{Z} \longrightarrow K(TV) \qquad ,$$

der ein Isomorphismus ist. Der topologische Index ind_t

$$ind_t : K^0(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist durch $ind_t = \phi^{-1} \circ i_!$ *definiert.*

7.3 Atiyah–Singer Indexsatz

Konstruktion des Symbolbündels:
(E, D) sei elliptischer Komplex, (F, A) der 2-Term-Komplex
T^*X das Kotangentialbündel von X mit den lokalen Koordinaten (x, k) und der "symplektischen Orientierung" $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dk_1 \wedge \cdots \wedge dk_n$. Sei $D(X) = \{(x, k) : |k|^2 \leq 1\}$ das Einheitskreisbündel aus T^*X und $S(X) = \partial D(X)$ das Einheitssphärenbündel.
Nun nimmt man zwei Kopien $D_\pm(X)$ von $D(X)$ und klebe diese entsprechend ihrer Orientierung entlang des Randes $S(X)$ zusammen. Dadurch entsteht ein neues Bündel $\Psi(X)$ über X mit der Faser S^n und der Orientierung von $D_+(X)$. $\Psi(X)$ heißt kompaktifiziertes Tangentialbündel von X (tubulare Umgebung). ρ sei die Projektion $\rho : \Psi(X) \longrightarrow X$ des Bündels und $\rho_\pm$ die Einschränkung auf die $D_\pm(X)$-Bündel $\rho_\pm : D_\pm(X) \longrightarrow X$.
Nun werden die Pullback-Bündel $F_+ = \rho_+^*(F_0)$ (über $D_+(X)$) und $F_- = \rho_-^*(F_1)$ (über $D_-(X)$) mit $F_0 = \oplus_{2k} E_{2k}$, $F_1 = \oplus_{2k+1} E_{2k+1}$ betrachtet. Der Symbolkomplex $\sigma(A)$ von A ist dann eine Abbildung von F_+ nach F_- über $S(X) = D_+(X) \cap D_-(X)$. Wegen der Elliptizität von A ist $\sigma(A)$ ein Isomorphismus zwischen F_+ und F_- über $S(X)$.
Nun kann das Symbolbündel $\Sigma(A)$ durch das Zusammenkleben von F_+ und F_- unter Verwendung von $\sigma(A)$ als Übergangsfunktion über $S(M)$ erhalten werden.

Satz 122 *Sei $td(X)$ die Todd-Klasse von TX und $ch(\Sigma(A))$ der Chern-Charakter von $\Sigma(A)$, so läßt sich der topologische Index ind_t wie folgt darstellen:*

$$ind_t = \int\limits_{\Psi(X)} ch(\Sigma(A)) \wedge \rho^* td(X)$$

Satz 123 *(Atiyah-Singer)*
Der topologische Index ind_t und der analytische Index ind_a sind gleich.

Beispiel: Index des Dirac–Operators
M sei eine Spin-Mannigfaltigkeit gerader Dimension $\dim M = 2k$, $Spin(2k)$ sei die Spin-Gruppe des Raumes (d.h. $Spin(2k) \simeq SO(2k)/\mathbb{Z}_2$ im allgemeinen) S sei der Darstellungsraum von $Spin(2k)$. S spaltet in zwei irreduzible Komponenten auf, d.h. $S = S^+ \oplus S^-$ mit $\dim S = 2^k$ und $\dim S^\pm = 2^{k-1}$, Spinoren auf M liegen in S^+ oder S^-.
P sei ein $SO(2k)$-Hauptfaserbündel über M, $\hat{P}$ sei das $Spin(2k)$-Hauptfaserbündel über M, Dann sind die Spinor-Bündel E^+ und E^- assozierte komplexe Vektorbündel mit

$$E^+ = \hat{P} \times S^+/Spin(2k) \qquad E^- = \hat{P} \times S^-/Spin(2k) \qquad E = E^+ \oplus E^-$$

Schnitte $\Gamma(M, E)$ werden Spinoren über M genannt.
Die Diracschen γ-Matrizen generieren die Clifford-Algebra von $Spin(2k)$, d.h.

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = -2\delta^{ab}\mathbb{1}$$

Es sind damit antikommutierende $2^k \times 2^k$-Matrizen.
In Räumen gerader Dimension läßt sich noch eine weitere Matrix γ^5 definieren:

$$\gamma^5 = i^{k(2k+1}\gamma^1 \cdots \gamma^{2k} \quad mit \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad \{\gamma^5, \gamma^a\} = 0$$

γ^a (Chiralitätsoperator)
Wir definieren nun den Dirac-Operator $\check{D}$ durch:
$\check{D} : \Gamma(M, E) \longrightarrow \Gamma(M, E)$ mit $\check{D} = \gamma^a e_a^\mu(x)(\partial_\mu + \omega_\mu)$ und $e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab} = g_{\mu\nu}$ g_{mn} Riemannsche Metrik und ω_μ Riemannscher Spin-Zusammenhang.
Durch die Konstruktion $\check{\partial} = \check{D}\frac{(1+\gamma^5)}{2}$ wird der chirale Dirac-Operator erzeugt, d.h.

$$\check{\partial} : \Gamma(M, E^+) \longrightarrow \Gamma(M, E^-)$$

bzw. der adjungierte Operator

$$\check{\partial}^* : \Gamma(M, E^-) \longrightarrow \Gamma(M, E^+)$$

mit $\check{\partial}^* = \check{D}\frac{(1-\gamma^5)}{2}$. Dann ergibt sich für den Index des Spin-Komplexes $(E^\pm, \check{\partial})$:

$$index(\check{\partial}) = \dim ker\check{\partial} - dimker\check{\partial}^* = \int\limits_M \hat{A}(M)$$

mit $\hat{A}(M)$ als A-roof-genus (Dirac-Index)

$$\hat{A}(M) = 1 - \frac{p_1}{24} + \frac{(7p_1^2 - 4p_2)}{5760} + \cdots$$

und $\dim M$ ist durch 4 teilbar.

Bemerkung 2 *Gewöhnlich lassen sich alle elliptischen Operatoren als Vielfache des Dirac-Operators schreiben, da $\check{\partial} \circ \check{\partial}^* = \check{\partial}^* \circ \check{\partial}$ ein elliptischer Operator ist. Der Dirac-Operator ist damit die "Wurzel" aller elliptischen Komplexe.*

Satz 124 *Für den getwisteten Spin-Komplex $E^{\pm} \otimes V$, wobei das komplexe Vektorbündel V den Zusammenhang A hat, ergibt sich mit dem getwisteten Dirac-Operator:*

$$\check{\partial}_A = \gamma^a e_a^\mu(x)(\partial_\mu + \omega_\mu + A_\mu)\frac{(1+\gamma^5)}{2}$$

die Formel:

$$index(\check{\partial}_A) = \int_M \hat{A}(M) \wedge ch(V)$$

und $\dim M$ ist durch 2 teilbar.

Definition 146 *:*
D_Y ist eine Familie von elliptischen Operatoren parametrisiert durch eine Menge Y.$\ker D_y$ und $coker D_y$ sind Vektorräume parametrisiert durch $y \in Y$. Dann lassen sich die Vektorbündel $kerD$ und $cokerD$ durch:

$$kerD = \bigcup_{y \in Y} kerD_y \quad und \quad cokerD = \bigcup_{y \in Y} cokerD_y$$

definieren.

Zusammenhang zur K-Theorie:
Der analytische Index $indexD$ von D_Y ist dann die formale Differenz zweier Vektorbündel:

$$indexD = [kerD] - [cokerD] = [kerD \ominus cokerD] \in K(Y)$$

Der Index ist also damit ein Element der K-Theorie von Y. (Familienindextheorem)

7.4 Indexsatz von Lefschetz

Definition 147 *:*
Sei M eine kompakte, reelle Mannigfaltigkeit der Dimension n ohne Rand und sei $H^p(M, \mathbb{R})$ die p-te Kohomologiegruppe von M. Sei $f : M \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung und sei f_p^* der Pullback von $H^p(M, \mathbb{R})$. Wir wählen eine entsprechende Basis

in $H^p(M,\mathbb{R})$, so daß $f_p^* : H^p(M,\mathbb{R}) \longrightarrow H^p(M,\mathbb{R})$ als eine Matrix von ganzen Zahlen dargestellt werden kann. Die Lefschetz Zahl $L(f)$ ist die ganze Zahl:

$$L(f) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p Tr(f_p^*)$$

Satz 125 *(Fixpunktsatz von Lefschetz)*
Sei $f : M \longrightarrow M$ eine Isometrie, d.h. eine metrikerhaltende Abbildung. Dann wird die Fixpunktmenge von f aus den total geodätischen Untermannigfaltigkeiten μ_i von M gebildet. Sei $\chi(\mu_i)$ die Euler–Charakteristik von μ_i, dann gilt:

$$L(f) = \sum_{\{\mu_i\}} \chi(\mu_i)$$

Definition 148 *:*
Sie $f : M \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung mit Fixpunkt $f(x_0) = x_0$. Durch

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\nu}(x_0) \right)$$

bezeichnen wir die Jakobische Matrix von f an der Stelle x_0. Weiterhin nehmen wir an, daß

$$\det(\mathbb{1} - f') \neq 0$$

ist, d.h. f ist nicht entartet. Sei (E, D) ein Elliptischer Komplex und $(E_\pm, A)$ mit $E_+ = \oplus_k E_{2k}$, $E_- = \oplus_k E_{2k+1}$ der entsprechende 2–Term–Komplex. f^* ist der Pullback von $E_\pm \longrightarrow E_\pm$, der sich gleichzeitig auf die Kohomologie $H^\pm = H^\pm(E_\pm)$ fortsetzen läßt. Die Lefschetz–Zahl ist dann definiert durch

$$L_E(f) = Tr(f^* H^+) - Tr(f^* H^-)$$

Satz 126 *(G–Indextheorem) Die Lefschetz–Zahl $L_E(f)$ ist durch*

$$L_E(f) = \sum_{Fixpunkte\ x_0} \frac{Tr(f^*(x_0)E_+) - Tr(f^*(x_0)E_-)}{|\det(\mathbb{1} - f')|}$$

gegeben.

Kapitel 8

Morsetheorie

8.1 Kritische Punkte

Definition 149 *:*
Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit M (im weiteren werde alle Mannigfaltigkeiten glatt sein). Ein Punkt $p \in M$ heißt kritischer Punkt von f wenn die induzierte Abbildung $f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ Null ist. Wenn man ein lokales Koordinatensystem $(x^1, \ldots, x^n)$ in einer Nachbarschaft U von p verwendet, so ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

Die reelle Zahl $f(p)$ heißt kritischer Wert von f. Ein kritischer Punkt p ist nicht entartet, falls die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j(p)}\right) = Hf(p)$$

nicht singulär ist, d.h.

$$\det Hf(p) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j(p)}\right) \neq 0$$

Satz 127 *(Lemma von Morse)*
Sei p ein nicht entarteter, kritischer Punkt von f. Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem $(y^1, \ldots, y^n)$ in einer Nachbarschaft von U von p mit $y^i(p) = 0$ für alle i und der Beziehung

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \ldots - (y^k)^2 + (y^{k+1})^2 + \ldots + (y^n)^2$$

in U.

Die Variable k heißt Index von f in p.

Definition 150 *:*
Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf M. Die Niveaumenge ist durch

$$M^a = \{x \in M | f(x) \leq a\} = f^{-1}(-\infty, a)$$

definiert.

Satz 128 *Sei f eine glatte, reellwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit M. Sei $a < b$ und nehmen wir an, daß die Menge $f^{-1}(a, b)$, bestehend aus allen $x \in M$ mit $a \leq f(x) \leq b$, ist kompakt und enthält keinen kritischen Punkt von f. Dann ist M^a diffeomorph zu M^b. Weiterhin ist M^a Deformationsretrakt von M^b, so daß die Inklusion $M^a \hookrightarrow M^b$ eine Homotopieäquivalenz ist.*

8.2 Theoreme von Morse, Bott und Smale

Satz 129 *(Satz von Bott und Smale)*
Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei p ein nichtentarteter kritischer Punkt mit Index k. Wir setzen $f(p) = c$ und nehmen an, daß $f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon)$ ist kompakt und enthält keine kritischen Punkte außer p für einige $\epsilon > 0$. Dann ist für genügend kleine ϵ die Menge $M^{c+\epsilon}$ Homotopieäquivalent zu $M^{c-\epsilon} \cup e_k$, d.h. $M^{c-\epsilon}$ an dem eine k-Zelle angeklebt wurde.

Satz 130 *(Morse Ungleichungen)*
Sei M eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit und $b_i = \dim H_i(M, \mathbb{Z})$ die i-te Betti Nummer von M. Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei C_k die Menge der kritischen Punkte von f mit Index k. Dann gelten folgende Ungleichungen:

$$b_i \leq C_i \qquad \forall i$$
$$\sum_i (-1)^i b_i = \sum_k C_k$$

Satz 131 *Wenn $C_{k+1} = C_{k-1} = 0$ dann ist $b_k = C_k$ und $b_{k+1} = b_{k-1} = 0$.*

Definition 151 *:*
Sein $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Morse–Funktion, d.h. erfüllt f alle oben gemachten Bedingungen, dann definieren wir die Morse–Serie durch

$$M_t(f) = \sum_i C_i t^i$$

mit C_i als Anzahl der kritischen Punkte mit Index i. Das Polynom

$$P_t(M) = \sum_i b_i t^i$$

heißt Poincaré–Serie von M.

Satz 132 *Für die Morse– und Poincaré–Serie gelten folgende Formeln:*

$$\begin{aligned} M_t(f) &\geq P_t(M) \\ M_t(f) - P_t(M) &= (1+t)\sum_i r_i t^i \qquad mit \quad r_i \geq 0 \\ M_t(f)|_{t=1} &= Anzahl\ der\ kritischen\ Punkte\ von\ f \\ M_{-1}(f) &= P_{-1}(M) = \chi(M) \end{aligned}$$

mit $\chi(M)$ als Euler–Charakteristik von M.

Satz 133 *(Morses "Lücken"–Theorem)*
Wenn $M_t(f)$ keine aufeinanderfolgenden Potenzen von t enthält, so ist $M_t(f) = P_t(M)$.

8.3 Kritische Untermannigfaltigkeiten

Definition 152 *:*
Sei $B \subset M$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Gilt für f (Morse–Funktion) $df = 0$ auf B und verschwindet $\det Hf(p)$ nicht auf dem Normalenbündel $N(B)$, so heißt B kritische Untermannigfaltigkeit.

Satz 134 *Das Normalenbündel $N(B)$ spaltet bezüglich der positive und negativen Eigenwerte von $Hf(p)$ auf, d.h. $N(B) = N^+(B) \oplus N^-(B)$ mit $N^+(B)$ und $N^-(B)$ für die negativen bzw. positiven Eigenwerte.*

Definition 153 *:*
Der Index des kritischen Mannigfaltigkeit λ_B ist der Rank des Vektorbündels $N^-(B)$. Die Morse–Serie $M_t(f)$ wird durch

$$M_t(f) = \sum_{alle\ B} t^{\lambda_B} P_t(B)$$

wobei $P_t(C)$ die Poincaré–Serie von B ist.

Satz 135 *Es gelten auch hier die Formeln:*

$$\begin{aligned} M_t(f) &\geq P_t(M) \\ M_t(f) - P_t(M) &= (1+t)\sum_i r_i t^i \qquad mit \quad r_i \geq 0 \\ M_t(f)|_{t=1} &= Anzahl\ der\ kritischen\ Punkte\ von\ f \\ M_{-1}(f) &= P_{-1}(M) = \chi(M) \end{aligned}$$

mit $\chi(M)$ als Euler–Charakteristik von M.

Kapitel 9

Kobordismustheorie

9.1 Thomsche Kobordismusgruppe

Als erstes soll die Bordismusrelation eingeführt werden, die in der englischen Literatur manchmal auch "Cobordism" heißt.

Definition 154 *:*
Sei X ein topologischer Raum. Eine n–dimensionale singuläre Mannigfaltigkeit mit Rand in X ist eine stetige Abbildung $F : B \longrightarrow X$ einer kompakten n–dimensionalen Mannigfaltigkeit B nach X. Bezeichnung: (B, F)
Die singuläre Mannigfaltigkeit $\partial(B, F) = (\partial B, F|\partial B)$ heißt Rand von (B, F); die singuläre Mannigfaltigkeit (B, F) heißt geschlossen, falls $\partial B = \emptyset$ ist.

Definition 155 *:*
Sei (M, f) eine geschlossene singuläre Mannigfaltigkeit in X, dann heißt (M, f) nullbordant, wenn es eine singuläre Mannigfaltigkeit (B, F) in X gibt, so daß $(M, f) = \partial(B, F)$.[1] Man sagt: (B, F) ist ein Nullbordismus von (M, f).
Sind (M_1, f_1) und (M_2, f_2) singuläre Mannigfaltigkeiten in X gleicher Dimension, so bezeichnen wir mit $(M_1, f_1) + (M_2, f_2)$ die singuläre Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &: M_1 + M_2 \longrightarrow X \\ (f_1, f_2) &|M_i = f_i\end{aligned}$$

dabei ist hier $+$ die topologische (und differenzierbare) Summe.

Definition 156 *:*
Zwei geschlossene n–dimensionale singuläre Mannigfaltigkeiten (M_1, f_1) und (M_2, f_2) in X heißen bordant, wenn $(M_1, f_1) + (M_2, f_2)$ nullbordant ist. Ein Nullbordismus von $(M_1, f_1) + (M_2, f_2)$ heißt Bordismus zwischen (M_1, f_1) und (M_2, f_2).

Satz 136 *"Bordant" ist eine Äquivalenzrelation.*

[1] Das "=" ist ein Diffeomorphismus.

Definition 157 *:*
Die Äquivalenzklasse einer geschlossen n–dimensionalen singulären Mannigfaltigkeit (M, f) in X bezüglich der "bordant"–Relation heißt Bordismusklasse und wird mit $[M, f]$ bezeichnet. Die Menge aller Bordismusklassen von geschlossen n–dimensionalen singulären Mannigfaltigkeiten in X heißt $N_n(X)$ für $X \neq \emptyset$.
Durch

$$[M, f] + [N, g] = [M + n, (f, g)]$$

wird eine assoziative und kommutative Operation in $N_n(X)$ definiert.
Für zwei topologische Räume X und Y definieren wir eine Paarungsabbildung

$$\begin{array}{rccc} \pi: & N_p(X) \times N_q(Y) & \longrightarrow & N_{p+q}(X \times Y) \\ & ((M, f), (N, g)) & \longmapsto & (M \times N, f \times g) \end{array}$$

Ist X ein Punktraum, dann schreiben wir einfach N_n anstatt $N_n(X)$ und $[M]$ anstatt $[M, f]$, da f eindeutig bestimmt ist. Wir sprechen in diesem Fall von Bordismen oder Bordismenklassen von Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung π ist eine bilineare Abbildung und definiert eine Operation $\cdot$ durch

$$\begin{array}{rccc} \pi: & N_p \times N_q & \longrightarrow & N_{p+q} \\ & ([M], [N]) & \longmapsto & [M \times N] = [M] \cdot [N] \end{array}$$

Satz 137 *Durch die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wird $N_\star = (N_n, n \in \mathbb{Z})$ zu einer kommutativen graduierten Algebra über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.*

Satz 138 *Die graduierte Gruppe $N_\star(X) = (N_n(X), n \in \mathbb{Z})$ wird durch die Verknüpfung*

$$[M] \cdot [N, f] = [M \times N, f \circ pr_2]$$

mit pr_2 als Projektion von $M \times N$ auf N zu einem graduierten Modul über $N\star$.

Wir werden jetzt aus einen Homomorphismus konstruieren, der $N_n()$ zu einem Homologiefunktor macht.

Definition 158 *:*
Seinen X_0 und X_1 offene Teilmengen von X mit $X = X_0 \cup X_1$. Sei $[M, f] \in N_n(X)$ gegeben, dann sind

$$M_0 = f^{-1}(X \backslash X_0) \qquad M_1 = f^{-1}(X \backslash X_1)$$

disjunkte abgeschlossene Teilmengen von M.

Satz 139 *Es gibt eine differenzierbare Funktion $\phi : M \longrightarrow [0, 1]$ mit $M_0 \subset \phi^{-1}(0), M_1 \subset \phi^{-1}(1)$ und so daß $\frac{1}{2}$ ein regulärer Wert von ϕ ist. ϕ heißt trennende Funktion für (M, f). $M_\phi = \phi^{-1}(\frac{1}{2})$ ist Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $n - 1$ (oder leer) und f induziert $f|M_\phi = f_\phi : M_\phi \longrightarrow X_0 \cap X_1$.*

Satz 140 *Sei $[M,f]=[M',f']\in N_n(X)$ und seien ϕ,ϕ' trennende Funktionen für (M,f) bzw. (M',f'), dann ist*

$$[M_\phi,f_\phi]=[M'_{\phi'},f'_{\phi'}]\in N_{n-1}(X_0\cap X_1)$$

dabei sei $[M_\phi,f_\phi]=0$ falls $M_\phi=\emptyset$.

Definition 159 *:*
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc}\partial: & N_n(X) & \longrightarrow & N_{n-1}(X_0\cap X_1)\\ & [M,f] & \longmapsto & [M_\phi,f_\phi]\end{array}$$

heißt Randoperator.

Satz 141 *$N_\star(\ )$ ist zusammen mit der natürlichen Transformation ∂ eine Homologietheorie mit Multiplikation.*

9.2 Das h–Kobordismustheorem

Wir werden am Anfang eine etwas andere Definition von Kobordismus kennenlernen, die aber zur obigen Definition äquivalent ist. Die Bezeichnung Kobordismus ist wieder aus dem Englischen entlehnt und müßte eigentlich Bordismus heißen. Die "eigentliche" Kobordismus–Theorie kommt erst im nächsten Abschnitt.

Definition 160 *:*
(W,V_0,V_1) heißt glatte Mannigfaltigkeitstriade wenn W eine kompakte, glatte n–Mannigfaltigkeit ist, deren Rand $\partial W=V_0\sqcup V_1$ die disjunkte Vereinigung ($V_1\cap V_0=\emptyset$) zweier offener Untermannigfaltigkeiten V_0 und V_1 ohne Rand ist.

Definition 161 *:*
Seien M_0 und M_1 zwei kompakte, glatte n-Mannigfaltigkeiten mit $\partial M_0=\partial M_1=\emptyset$. Ein Kobordismus von M_0 nach M_1 ist ein 5-Tupel (W,V_0,V_1,h_0,h_1) wo (W,V_0,V_1) ist eine glatte Mannigfaltigkeitstriade und $h_i:V_i\longrightarrow M_i$ $(i=0,1)$ ist ein Diffeomorphismus. Zwei Kobordismen (W,V_0,V_1,h_0,h_1) und (W',V_0',V_1',h_0',h_1') von M_0 nach M_1 sind äquivalent falls ein Diffeomorphismus $g:W\longrightarrow W'$, der V_0 in V_0' bzw. V_1 in V_1' überführt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}V_i & \xrightarrow{g|_{V_i}} & V_i'\\ {\scriptstyle h_i}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle h_i'}\\ & M_i & \end{array}$$

kommutiert.

Definition 162 *:*
Eine Morsefunktion auf einer glatten Mannigfaltigkeitstriade (W,V_0,V_1) ist eine glatte Funktion $f:W\longrightarrow[a,b]$ so daß

1. $f^{-1}(a) = V_0$, $f^{-1}(b) = V_1$

2. *Alle kritischen Punkte von f liegen in $W \setminus \{\partial W\}$ (Inneres).*

Die Morsenummer μ von (W, V_0, V_1) ist das Minimum der Anzahl der kritischen Punkte von f über alle Morsefunktionen f betrachtet.

Satz 142 *Jede glatte Mannigfaltigkeitstriade (W, V_0, V_1) hat eine Morsefunktion.*

Satz 143 *Jeder Kobordismus kann durch eine Vereinigung von Kobordismen mit Morsenummer 1 dargestellt werden.*

Definition 163 *:*
Ein Kobordismus (W, V_0, V_1, h_0, h_1) heißt h–Kobordismus falls die Inklusionen $V_0 \subset W$ und $V_1 \subset W$ homotopieäquivalent sind. V_0 und V_1 heißen dann h-kobordant und sind Deformationsretrakte von W.

Satz 144 ***h-Kobordismustheorem***
Sei (W, V_0, V_1) ein h–Kobordismus zwischen V_0 und V_1 der Dimension $\dim W \leq 6$. Dann gibt es eine Diffeomorphismus $V_0 \times [0,1] \simeq W$. Insbesondere sind V_0 und V_1 diffeomorph.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satz ist der Beweis der Poincaré 'schen Vermutung für Dimensionen ≤ 5.

Satz 145 *Sei M ($\dim M \leq 5$) eine geschlossene einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit der ganzzahligen Homologie einer n Sphäre S^n, dann ist M homöomorph zu S^n.*

9.3 Pontrjagin–Thom Konstruktion

Definition 164 *:*
Sei $\xi : E \longrightarrow B$ ein reelles k-dimensionales Vektorbündel , B kompakt, und sei $M(\xi) = E^c$ die Einpunktkompaktifizierung ($E^c = E \cup \{\infty\}$) von E; der hinzugefügte Punkt ∞ sei der Grundpunkt von $M(\xi)$. Der Raum $M(\xi)$ heißt Thom–Raum von ξ.

Definition 165 *:*
Sei X ein topologischer Raum. $\xi_k = \xi_k(X)$ ist das Bündel $\xi_k = id_X \times \gamma_{k,\infty}$: $X \times P(\infty, k, \mathbb{R}) \longrightarrow X \times Gr(\infty, k, \mathbb{R})$ mit $\gamma_{k,\infty}$ als universelles reelles Bündel

$$\begin{array}{ccc} O(k) & \rightarrow & P(\infty, k, \mathbb{R}) \\ & & \downarrow \pi \\ & & Gr(\infty, k, \mathbb{R}) \end{array}$$

Mittels der Pontrjagin–Thom Konstruktion wird jeder Einbettung einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M^n in den $\mathbb{R}^{n+k}$ und jeder Bündelabbildung vom Normalenbündel vom Vektorbündel E zum Vektorbündel E eine Homotopieklasse in $[S^{n+k}, M(\xi)]_0 = \pi_{n+k}(M(\xi))$ zu. Mittels dieser Konstruktion ergibt sich folgender Satz.

Satz 146 ***Theorem von Thom und Conner-Floyd***
Die Abbildung

$$N_n(X) \longrightarrow \varinjlim_k \pi_{n+k}(M(\xi_k(X)))$$

ist ein natürlicher Isomorphismus zwischen dem Homotopiefunktor und dem Bordismusfunktor.

Satz 147 ***Theorem von Pontrjagin und Thom***
Eine kompakte Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist Rand von W wenn und nur wenn alle Stiefel–Whitney Zahlen verschwinden, d.h. alle Kohomologiegruppen $H^\star(M, \mathbb{Z}_2)$ verschwinden. (nach Wahl einer Orientierung)

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die Bordismustheorie als Homologietheorie dargelegt wurde, soll nun die entsprechende duale Theorie entwickelt werden. Diese Theorie ist dann eine wirkliche Kobordismustheorie.

Definition 166 *:*
Ein Spektrum $\underline{\underline{X}} = (X_n, e_n | n \in \mathbb{Z})$ besteht aus einer Familie X_n von punktierten topologischen Räumen und einer Familie $e_n : X_n \wedge S^1 \longrightarrow X_{n+1}$ von punktierten Abbildung.

Definition 167 *:*
Sei $\gamma_{n,\infty}$ das universelle n-dimensionale reelle Vektorbündel und $M(\gamma_{n,\infty}) = MO(n)$ der Thom-Raum. Durch die Bündelabbildung $\gamma_{n,\infty} \oplus \epsilon \longrightarrow \gamma_{n+1,\infty}$ mit ϵ als triviales Bündel über $Gr(\infty, n, \mathbb{R})$ wird eine Abbildung $e_n : MO(n) \wedge S^1 \longrightarrow MO(n+1)$ induziert, die $MO = (MO(n), e_n)$ zu einem Spektrum machen, das Thom-Spektrum.

Definition 168 *:*
Sei $\underline{\underline{(X)}} = ((X_n, e_n | n \in \mathbb{Z})$ ein Spektrum. Sei W ein punktierter Raum mit einer Abbildung

$$b_n^k(K) : [W \wedge S^{n-k}, X_n] \xrightarrow{\wedge S^1} [W \wedge S^{n-k} \wedge S^1, X_n \wedge S^1] \xrightarrow{e_{n\star}} [W \wedge S^{n+1-k}, X_{n+1}]$$

Satz 148 *Die Abbildung $b_n^k(K)$ ist ein in K natürlicher Homomorphismus von Gruppen.*

Definition 169 *:*
Sei $h^k(W, \underline{\underline{X}})$ oder $\underline{\underline{X}}^k(W)$ der direkte Limes über das System $([W \wedge S^{n-k}, X_n], b_n^k | n \in \mathbb{Z})$ für festes k und $n \longrightarrow \infty$. Wir nennen diese Gruppe die k-te Kohomologie von W mit Koeffizienten in $\underline{\underline{X}}$. Wir bezeichnen $h^{-k}(S^0, W \wedge \underline{\underline{X}})$ mit $h_k(W, \underline{\underline{X}})$ oder $\underline{\underline{X}}_k(W)$ und nennen diese Gruppe die k-te Homologie von W mit Koeffizienten in $\underline{\underline{X}}$.

Definition 170 *:*
Es sei X ein topologischer Raum und X^+ der topologische Raum mit $X \cup \{+\}$ wobei $+$ der Grundpunkt ist. Die Gruppe $N^k(X^+, MO) = N^k(X)$ heißt die k-te Kobordismusgruppe des Raumes X.

Satz 149 *Es gibt einen natürlicher Isomorphismus*

$$N_n \xrightarrow{T} \lim_k \pi_{n+k}(MO(k)) = N^{-n} = h_n(S^0, MO)$$

der die Dualität zwischen Bordismus– und Kobordismustheorie widerspiegelt.

Kapitel 10

Glättungstheorie und 4–Mannigfaltigkeiten

10.1 Obstruktionstheorie

Satz 150 *Gegeben sei ein CW–Paar (Y, X) (mit $X \subset Y$), eine Abbildung $f : Y \longrightarrow Z$ und eine Homotopie $F : X \times I \longrightarrow Z$ von $f|_X$ nach $f' : X \longrightarrow Z$, dann gibt es eine Ausdehnung $G : Y \times I \longrightarrow Z$ von F so daß $G(y, 0) = f(y)$.*

Im folgenden gilt immer $\pi_1(Y) = 0$.

Definition 171 *:*
Sei (X, A) ein CW-Paar. Wir bezeichnen mit $X^{(n)} \cup A$ die Vereinigung von A und allen Zellen von $X \backslash A$ der Dimension $\leq n$. Wir nehmen an, daß $f_n : X^{(n)} \cup A \longrightarrow Y$ gegeben ist. Wir definieren den Obstruktion-Kokette $\tilde{\sigma}(f_n) \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ wie folgt:

Wenn $e_\alpha^{n+1} \in C_{n+1}(X, A)$ eine orientierte $(n+1)$-Zelle von (X, A) ist dann ist die Komposition $f \circ C_\alpha : S^n \longrightarrow Y$ zwischen f und der Verheftungsabbildung $c_\alpha : S^n \longrightarrow X^{(n)} \cup A$ gegeben. Diese Komposition bestimmt ein Element in $\pi_n(Y)$. Kehrt man die Orientierung von e_α^{n+1} um (und damit von ∂e_α^{n+1}) dann wechselt das entsprechende Element in $\pi_n(Y)$ das Vorzeichen. Somit gibt es ein wohlbestimmten Homomorphismus $C_{n+1}(X, A) \longrightarrow \pi_n(Y)$. Wir bezeichnen ihn mit $\tilde{\sigma}(f_n)$ und nennen ihn Obstruktion-Kokette.

Satz 151 *Die Obstruktions-Kokette $\tilde{\sigma}(f_n)$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *Sie ist eine Invariante der Homotopieklasse von f_n.*
2. *Sie ist 0 wenn und nur wenn f_n zu einer Abbildung $f_{n+1} : X^{(n+1)} \cup A \longrightarrow Y$.*
3. *$\tilde{\sigma}(f_n)$ ist ein Kozyklus, d.h. $\delta\tilde{\sigma}(f_n) : C_{n+2}(X, A) \longrightarrow \pi_n(Y)$ ist 0 bzw. $< \delta\tilde{\sigma}(f_n), \tau_{n+2} > = < \tilde{\sigma}(f_n), \partial\tau_{n+2} >$ für alle $\tau_{n+2} \in C_{n+2}(X, A)$.*

4. *Wenn* $g_n : X^{(n)} \cup A \longrightarrow Y$ *stimmt mit* f_n *auf* $X^{(n-1)} \cup A$ *überein, dann ist* $\tilde{\sigma}(g_n) - \tilde{\sigma}(f_n)$ *ein Korand.*

5. *Durch Variation der Homotopieklasse von* f_n *relativ zu* $X^{(n-1)} \cup A$ *wir verändern* $\tilde{\sigma}(f_n)$ *durch einen willkürlichen Korand.*

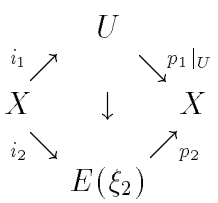
Satz 152 *Gegeben sei* $f_n : X^{(n)} \cup A \longrightarrow A$ *mit* $\pi_1(Y) = 0$*, dann gibt es eine Kohomologieklasse* $\sigma(f_n) \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ *konstruiert vom Kozyklus* $\tilde{\sigma}(f_n)$*. Diese Klasse verschwindet wenn und nur wenn* $f|_{X^{(n-1)} \cup A}$ *zu einer Abbildung* $f : X^{(n+1)} \cup A \longrightarrow Y$ *ausgedehnt werden kann. Sei* f *und* $g : X \longrightarrow Y$ *gegeben und* $H : (X^{(n)} \cup A) \times I \longrightarrow Y$ *eine Homotopie zwischen* $f|_{X^{(n)} \cup A}$ *und* $g|_{X^{(n)} \cup A}$*. Die Obstruktion zu Ausdehnen der Homotopie über* $(X^{(n+1)} \cup A) \times I$ *liegt in* $H^{n+1}(X \times I, ((X \times \{0 \cup 1\}) \cup A \times I); \pi_n(Y))$ *welche isomorph zu* $H^n(X, A; \pi_n(Y))$ *ist.*

10.2 Kirby–Siebenman–Invariante

Im folgenden steht CAT im folgenden für die Kategorien TOP, PL oder $DIFF$. Für die Definition der Invariante wird die Technik der Mikrobündel von Milnor benutzt.

Definition 172 *:*
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ *in einer Kategorie* CAT *heißt triviales Bündel falls ein* CAT*–Objekt* F *und ein* CAT*–Isomorphismus* $\theta : F \times Y \longrightarrow X$ *so daß* $f \circ \theta = pr_2$ *wo* pr_2 *die Projektion auf* Y *ist. Das Bündel heißt lokal trivial wenn jeder Punkt* y *von* Y *eine offene Nachbarschaft besitzt, so daß* f *darüber ein triviales Bündel.* f *heißt eine* CAT*-Submersion wenn jeder Punkt* x *von* X *eine offene Nachbarschaft* U *derart besitzt, daß* $f(U)$ *offen in* Y *und das die Einschränkung* $U \longrightarrow f(U)$ *von* f *ist ein* CAT *triviales Bündel ist.*
Ein CAT*-Mikrobündel ist eine* CAT*-Submersion wo die Faser* F *eine* CAT*–Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Ein* n*-Mikrobündel (in der Kategorie* TOP*)* ξ *über einem Raum* X *ist ein Diagramm* $\xi : X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} X$ *(*X*=Basis,* i*=Nullschnitt,* E*=Totalraum,* p*=Projektion), so daß* $p \circ i = id_X$ *und* p *sieht in der Nähe jedes Punktes von* $i(X)$ *in* E *wie die Projektion* $X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X$*.*

Definition 173 *:*
Ein Mikro-Isomorphismus $\xi_1 \longrightarrow \xi_2$ *von* n*-Mikrobündeln über* X *enthält eine Nachbarschaft* U *des Nullschnitts* $i_1(X)$ *im Totalraum* $E(\xi_1)$ *von* ξ_1 *und eine topologische Einbettung* h *auf eine Nachbarschaft von* $i_2(X)$ *in* $E(\xi_2)$*, die das Diagramm*



kommutativ machen. Wenn h *eine Inklusion eines Unterraumes ist, so heißt die Abbildung Mikro-Identität und* ξ_1, ξ_2 *heißen mikroidentisch* $\xi_1 \doteq \xi_2$*.*

Definition 174 *:*
Sei ξ ein TOP-Mikrobündel über einem CAT-Objekt X ($CAT = DIFF$ oder PL). Eine Konkurdanz zwischen CAT-Strukturen ξ_0 und ξ_1 auf ξ ist eine CAT-Struktur γ auf $I \times \xi$, so daß die Einschränkung $\gamma|_{i\times X}$ ein CAT mikro-identisch zu $i \times \xi_i$ für $i = 0, 1$ ($\gamma|_{i\times X} \doteq i \times \xi_i$) ist. Wenn C in X geschlossen ist und falls es eine Nachbarschaft U von X gibt, so daß $\gamma|_{(I\times U)} \doteq I \times (\xi_0|_U)$, dann heißt γ Konkurdanz rel C und wird mit $\xi_1 \overset{\sim}{=} \xi_2$ rel C bezeichnet.

Definition 175 *:*
Eine stabile CAT-Struktur auf ξ bedeutet, daß eine CAT-Struktur η auf $\xi \oplus \epsilon^s$ $s \geq 0$, wobei $\epsilon^s : X \longrightarrow X \times \mathbb{R}^s \longrightarrow X$ das Standard triviale Mikrobündel ist. Zwei stabile CAT-Strukturen η und η' auf $\xi \oplus \epsilon^t$ $t \geq s$ heißen mikroidentisch $\eta \doteq \eta'$ wenn $\eta \oplus \epsilon^{t-s} \doteq \eta'$ gilt.
Die stabile Konkurdanz rel C zweier stabiler CAT-Strukturen ξ_0, ξ_1 auf ξ heißt $\xi_0 \doteq \zeta_0 \overset{\sim}{=} \xi_1 \doteq \zeta_1$ für die Stabilisierer ζ_0 von ξ_0 und ζ_1 von ξ_1. Wenn η eine stabile CAT-Struktur auf ξ_V für eine gewisse Nachbarschaft V von C in der Basis ist, dann schreiben wir

$$TOP/CAT\ (\xi\ rel\ C, \eta)$$

für die Menge der stabilen Konkurdanzklassen rel C der stabilen CAT-Struktur ξ' auf ξ die in der Nähe von C mit η im Sinne von $\xi'|_U \doteq \eta|_U$ für eine gewisse Nachbarschaft von C übereinstimmt.

Definition 176 *:*
Sei M^m eine TOP-Mannigfaltigkeit der Dimension m. Wir nehmen an, daß eine CAT-Struktur Σ_0 auf der Nachbarschaft einer geschlossenen Untermenge C von M gegeben sei. Die Menge der Konkordanzklassen rel C von CAT-Strukturen auf M die in einer Umgebung von C mit Σ_0 übereinstimmen, wird mit $\mathcal{S}_{CAT}(M\ rel\ C, \Sigma_0)$ bezeichnet.

Satz 153 *Es gibt einen simplizialen Komplex $BCAT(n)$ und ein CAT-Mikrobündel γ^m_{CAT} über $BCAT(n)$ das universell im folgenden Sinne ist:*
Sei ξ ein CAT n-Mikrobündel über ein euklidischen Nachbarschaftsretrakt von X; sei U eine offene Nachbarschaft der geschlossenen Menge $C \subset X$; und sei $f_0 : \xi|_U \longrightarrow \gamma^m_{CAT}$ eine CAT-Mikrobündelabbildung. Dann gibt es eine Mikrobündelabbildung $f : \xi \longrightarrow \gamma^m_{CAT}$ so daß $f = f_0$ in der Nähe von C.

Satz 154 *Die Abbildung $p_n BCAT(n) \longrightarrow BTOP(n)$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser $TOP(n)/CAT(n)$. Der Limes $n \longrightarrow \infty$ führt dann zu einer Faserung $BCAT \longrightarrow BTOP$ mit Faser TOP/CAT.*

Definition 177 *:*
Eine Abbildung $\tilde{f} : X \longrightarrow BCAT(n)$ heißt vertikaler Lift von $f : X \longrightarrow BTOP(n)$ wenn die Komposition $p_n \circ \tilde{f}$ die konstante Homotopie von f ergibt. Die Menge der

vertikalen Lifts von f wird mit $Lift(f)$ bezeichnet.
Die Menge $Lift_n(f\ rel\ C, F_0)$ ist die Menge der Lifts von f nach $BCAT(n)$ die gleich $F_0 : \xi_0 \longrightarrow \gamma^m_{CAT}$ (ξ_0 CAT-Struktur auf $\xi|_U$, U offene Nachbarschaft in X) in der Nähe von C ist dividiert durch die Äquivalenzrelation der vertikalen Homotopie rel C.

Satz 155 ***Klassifikationstheorem***
Sei M eine m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit $m \geq 6$ (oder $m = 5$ und $\partial M \subset C$). Dann besitzt M eine CAT-Struktur Σ gleich Σ_0 in der Nähe von C wenn und nur wenn f hat einen Lift $M \longrightarrow BCAT$ gleich $F_0 : U \longrightarrow BCAT$ (U offene Nachbarschaft von C mit CAT-Struktur Σ_0) in der Nähe von C. Es gibt Bijektionen

$$\mathcal{S}_{CAT}(M\ rel\ C, \Sigma_0) \longrightarrow Lift(f\ rel\ C, F_0)$$

und

$$\mathcal{S}_{CAT}(M\ rel\ C, \Sigma_0) \longrightarrow [M\ rel\ C, TOP/CAT]$$

Satz 156 *Die Obstruktion für die Existenz eines Elements in $Lift(f\ rel\ C, F_0)$ liegt in $H^i(M, C; \pi_{i-1})$ mit $\pi_{i-1} = \pi_{i-1}(TOP/CAT)$.*

Satz 157 *Für $m \geq 5$ gibt es eine Gruppenisomorphismus*

$$\pi_m(TOP/CAT) \longrightarrow \Theta^{CAT}_m$$

auf die orientierten Isomorphieklassen Θ^{CAT}_m von zu S^m homotopen m-Mannigfaltigkeiten.

Satz 158 *Für die Gruppen $\pi_n(TOP/PL)$ gilt:*

$$\pi_n(TOP/PL) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & n = 3 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die Obstruktion für die Existenz einer PL-Struktur liegt damit in $H^4(M, \mathbb{Z}_2$. Dieses Element wird auch Kirby-Siebenmann-Invariante genannt.

Die andere Gruppen von Kervaire und Milnor bestimmt und es gilt:

Satz 159 *Die Gruppen Θ^{DIFF}_m ist für $m \geq 5$ endlich und lautet für die Dimensionen $m = 5, 6, 7, \ldots 16$:*

$$0, 0, \mathbb{Z}_{28}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{992}, 0, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{16256}, \mathbb{Z}_2$$

10.3 Freedman's Klassifikation

Wir wenden uns nun den 4–Mannigfaltigkeiten zu. Dabei spielt die sogenannte Schnittform (intersection form) eine herausragende Rolle.

Satz 160 *Sei M^4 geschlossen und orientiert. Wenn $\pi_1(M) = 0$, dann sind $H^2(M, \mathbb{Z})$ und $H_2(M, \mathbb{Z})$ torsionsfrei. Wenn $\pi_1(M) = 0$, dann sind $H_2(M, \mathbb{Z})/T$ und $H_2(M, \mathbb{Z})/T$ mit T als entsprechende Torsionsgruppen torsionsfrei. Es gibt zwei Isomorphismen $H_2(M, \mathbb{Z})/T \longrightarrow H_2(M, \mathbb{Z})/T$, der erste wird mit "$\hat{}$" bezeichnet (wie $\alpha \longrightarrow \hat{\alpha}$) und ist durch die Poincaré–Dualität gegeben und der zweite ist durch den Hom–Funktor gegeben und wird mit "*", d.h. $\alpha \longrightarrow \alpha^*$, bezeichnet.*

Definition 178 *:*
Es gibt eine Paarung

$$H^2(M, \mathbb{Z})/T \otimes H^2(M, \mathbb{Z})/T \longrightarrow \mathbb{Z}$$

gegeben durch $\alpha \otimes \beta \mapsto (\alpha \cup \beta)[M]$ mit $[M] \in H_4(M, Z)$ als Fundamentalzyklus von M heißt Schnittform (intersection form).

Satz 161 *Wir wählen eine Basis in $H^2(M, \mathbb{Z})/T$, dann ist die Schnittform $q = (\alpha \cup \beta)[M] = \alpha \cdot \beta$ eine Matrix mit der Determinante ± 1 (unimodular) und vor allem ist q homotopieinvariant. q ist symmetrisch und läßt sich damit diagonalisieren.*

Definition 179 *:*
Die Signatur von q $sig(q)$ ist als die Anzahl der positiven Eigenwerte minus der Anzahl der negativen Eigenwerte definiert. Der Rank ist die Dimension von $H^2(M, \mathbb{Z})/T$ als freies $\mathbb{Z}$-Modul. q heißt gerade, wenn $\alpha \cdot \alpha = 0 \mod 2$ und ungerade falls $\alpha \cdot \alpha = 1 \mod 2$ für alle $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z})/T$.

Satz 162 *Sei q ungerade und indefinite, dann ist die Schnittform nach der Diagonalisierung eine Matrix der Form $\oplus^p(1) \oplus^q (-1)$. Die Signatur ist durch 8 teilbar.*

Satz 163 ***Klassifikation der 4-Mannigfaltigkeiten nach Freedman***
Gegeben sei eine gerade Form, dann existiert genau eine einfach zusammenhängende, geschlossene, topologische 4–Mannigfaltigkeit, die durch diese Form dargestellt wird. Ist die Form ungerade, so gibt zwei solcher Mannigfaltigkeiten.

Satz 164 ***Satz von Wall***
Seien M_0 und M_1 zwei glatte, einfach zusammenhängende, geschlossenen 4-Mannigfaltigkeiten mit isomorpher Schnittform, dann sind M_0 und M_1 h-kobordant.

Satz 165 ***Satz von Rohlin***
Sei M eine glatte, geschlossene, orientierbare Spin-4-Mannigfaltigkeit, dann ist die Schnittform durch 16 teilbar.

10.4 Donaldson–Theorie

Satz 166 ***Satz von Whitehead***
Sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit und sei ω mit

$$\omega(\alpha,\beta) = \int_M \alpha \wedge \beta \qquad \alpha,\beta \in H^2(M,\mathbb{R})$$

als Schnittform. Der Homotopietyp von M wird durch die Isomorphismusklassen von ω bestimmt.

Satz 167 ***Quinn***
Jede nicht-kompakte 4-Mannigfaltigkeit ist glättbar.

Satz 168 ***Freedman***
Es gibt eine exotische differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^4$.

Satz 169 *Sei P ein $SU(2)$-Hauptfaserbündel über einer kompakten, orientierten, glatten 4-Mannigfaltigkeit M. Wir spezifizieren eine Darstellung $G \longrightarrow Aut(V)$ in die Automorphismen eines Vektorraumes V und bilden damit das zu P assoziierte Vektorbündel $\eta = P \times_{SU(2)} V$. Sei $D : C^\infty(\eta) \longrightarrow C^\infty(\eta \otimes T^*M)$ die kovariante Ableitung und A der Zusammenhang auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{O}_\alpha \subset M$ (besser Karte) durch $A_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow T^*(\mathcal{O}_\alpha) \otimes \underline{\boldsymbol{su}}(2)$ mit $\underline{\boldsymbol{su}}(2)$ als Lie-Algebra der $SU(2)$. Die Krümmung F ist durch $F = da + A \wedge A$ definiert. Dann wird η durch die 2.Chern-Klasse*

$$c_2(\eta) = \frac{1}{8\pi^2} tr\,(F \wedge F) \in H^4(M,\mathbb{Z})$$

klassifiziert. Sei $[M] \in H_4(M)$ die Fundamentalklasse von M, dann heißt die ganze Zahl

$$k = -c_2(\eta)[M] = -\frac{1}{8\pi^2}\int_M tr\,(F \wedge F)$$

topologische Ladung. Insbesondere verschwindet die 1.Chern-Klasse

$$c_1(\eta) = \frac{i}{2\pi} tr\,(F) = 0 \qquad .$$

Satz 170 *Sei λ ein komplexes Linienbündel über M vollständig klassifiziert durch die 1.Chern-Klasse $c_1(\lambda)$. Das Bündel η spaltet topologische in zwei Linienbündel auf, d.h. $\eta = \lambda \oplus \lambda^{-1}$, wenn und nur wenn die Gleichung $k = \omega(\alpha,\alpha)$ für einige $\alpha = \pm c_1(\lambda)$ eine Lösung besitzt.*

Definition 180 *:*
Wir fixieren auf M eine Metrik. Das Yang–Mills–Funktional gegeben durch

$$\mathcal{Y}M = -\int_M tr\,(F \wedge \star F)$$

mit $\star$ als Hodge–Operator. Die Krümmungen

$$F_+ = \star F_+ \qquad\qquad F_- = -\star F_-$$

heißen selbstduale bzw. antiselbstduale Krümmungen.

Satz 171 *Die Krümmungen lassen immer selbstduale und antiselbstduale Krümmungen durch $F = F_+ + F_-$ zerlegen. Ist $k > 0$ so F immer selbstdual und das Yang–Mills–Funktional besitzt die untere Schranke*

$$\mathcal{Y}M \geq 8\pi^2 k \qquad ;$$

im anderen Falle ist F immer antiselbstdual und es gilt

$$\mathcal{Y}M \geq -8\pi^2 k \qquad ;$$

Definition 181 *:*
Der Raum der Zusammenhänge wird mit $\mathcal{A}$ und die Gruppe der Eichtransformationen mit $\mathcal{G} = C^\infty(Aut\eta)$ bezeichnet. Sei F_A die Krümmung, die durch den Zusammenhang $A \in \mathcal{A}$ erzeugt wird, dann heißt der Raum $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid F_A = \star F_A\}/\mathcal{G}$ Moduli–Raum.

Satz 172 *Sei η ein $k = 1$ $SU(2)$-Bündel über einer kompakten, einfach zusammenhängenden, orientierten, glatten 4-Mannigfaltigkeit M, dessen Schnittform ω ist positiv definite. Weiterhin sei $\mathcal{M}$ der Moduliraum der selbsdualen Zusammenhänge von η, dann gilt:*

1. *Sei m die Hälfte der Lösungen von $\omega(\alpha, \alpha) = 1$. Dann gibt es Punkte $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{M}$ für alle Metriken von M, so daß $\mathcal{M} \backslash \{p_1, \ldots, p_m\}$ eine glatte 5-Mannigfaltigkeit ist. Die Punkte p_i stehen in 1-1 Korrespondenz zu den topologischen Aufspaltungen $\eta = \lambda \oplus \lambda^{-1}$.*

2. *Es gibt eine Nachbarschaft $\mathcal{O}_{p_i}$ von p_i, so daß $\mathcal{O}_{p_i}$ homotop zu einem Kegel im $\mathbb{C}P^2$ ist.*

3. *$\mathcal{M}$ ist orientierbar.*

4. *$\mathcal{M} \backslash \{p_1, \ldots, p_m\}$ ist nichtleer. Tatsächlich existiert ein Kragen $(0, \lambda_0] \times M \subset \mathcal{M}$ und $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup M \supset [0, \lambda_0] \times M$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand.*

5. *$\overline{\mathcal{M}}$ ist kompakt.*

Satz 173 *M ist orientiert bordant zur disjunkten Vereinigung $\underbrace{\pm\mathbb{C}P^2 \amalg \ldots \amalg \pm\mathbb{C}P^2}_{m}$.*

Satz 174 ***Satz von Donaldson***
Wenn eine positiv definite Form durch eine glatte, einfach zusammenhängende, geschlossene 4–Mannigfaltigkeit M dargestellt wird, dann ist die Form isomorph zu $\oplus^m(1)$.

Satz 175 *Wenn $\omega \neq \emptyset$ und $\omega(\alpha, \alpha) \neq 1$ für alle $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z})$, dann ist M nicht glättbar. (Das ist dann erfüllt, wenn ω gerade ist.)*

Satz 176 ***Gompf-Taubes***
Es gibt überabzählbar viele $\mathbb{R}^4$'s mit exotischer Differenzierbarkeitsstruktur, die durch ein Tupel von reellen Parametern parametrisiert werden.

10.5 Floer–Homologie

Definition 182 *:*
Eine zusammenhängende, geschlossene 3-Mannigfaltigkeit M heißt Homologie-3-Sphäre, wenn $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$.

Definition 183 *:*
Wir definieren die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{R}(M) = Hom(\pi_1(M), SU(2))/SU(2)$, d.h. die Menge der flachen Zusammenhänge eines $SU(2)$-Hauptfaserbündels über M, welches immer trivial ist.

Satz 177 *Die Menge der irreduziblen Darstellungen von $\pi_1(M)$ ist durch $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \backslash (1)$.*

Satz 178 *Sei $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(A) = \int_M tr\,(\frac{1}{2} A \wedge dA + \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A)$$

die Chern-Simons-Wirkung, dann sind die kritischen Punkte von $f(A)$ die flachen Zusammenhänge. Der Hessian $H(A)$ ist durch $H(A) = *d_A$ mit d_A als kovariante Ableitung gegeben.

Definition 184 *:*
Sei $A(t) \in \mathcal{A}$ eine einparametrige Familie von Zusammenhängen mit $A(0) = A_0$ und $A(1) = A_1$. Der Spektralfluß $\tau(A_0, A_1)$ des Operators $H(A(t))$ von A_0 nach A_1 ist die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H(A_0)$ welche zu positiven Eigenwerten von $H(A_1)$ werden.

Definition 185 *:*
Sei $\mathcal{M}(a, b)$ die Menge der Instantonen (d.h. Lösungen der selbstdualen Gleichung), die die Zusammenhänge $a, b \in \mathcal{R}^*$ verbindet (einparametrige Kurve). Der relative Morseindex $\mu : \mathcal{R}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist durch den Spektralfluß von a nach b definiert, d.h. $\mu(a, b) = \mu(a) - \mu(b) = \tau(a, b)$.

Satz 179 *Sei $A(t) \in \mathcal{A}$ eine einparametrige Familie von Zusammenhängen mit $A(0) = a$ und $A(1) = b$. Der Spektralfluß $\tau(A_0, A_1)$ des Operators $H(A(t))$ ist der Index des Operators $d/dt + *d_{A(t)}$ und stimmt mit der Dimension von $\mathcal{M}(a,b)$ überein. Insbesondere besitzt der Morseindex μ eine $\mathbb{Z}_8$-Graduierung, d.h. $\mu : \mathcal{R}^* \longrightarrow \mathbb{Z}_8$.*

Satz 180 ***Satz von Floer***
Sei M eine Homologie-3-Sphäre, so daß $H^1_a(M, \underline{\boldsymbol{su}}(2)) = 0$ für alle $a \in \mathcal{R}(M)$. Weiterhin sei σ eine Metrik auf M, so daß der Moduliraum $\mathcal{M}$ der selbstdualen Zusammenhänge über $\mathbb{R} \times M$ regulär ist. Dann hat $\mathcal{M}(a,b)$ mit $\mu(a) - \mu(b) = 1$ für alle $a, b \in \mathcal{R}^*$ nur endlich viele eindimensionale Komponenten. Sei $< \partial a, b > \in \mathbb{Z}$ die Summe über die Vorzeichen dieser Komponenten und R_p $p \in \mathbb{Z}_8$ ist die freie abelsche Gruppe über der Menge $\mathcal{R}_p = \{a \in \mathcal{R}^* \mid \mu(a) = p\}$ dann genügt der Operator

$$\partial : R_p \longrightarrow R_{p-1} \qquad ; \qquad \partial a = \sum_{\mu(b)=p-1} < \partial a, b > b$$

der Relation $\partial\partial = 0$. Die Homologiegruppe

$$I_*(M) = \frac{\ker \partial}{im\ \partial}$$

hängt nicht von der Metrik σ auf M ab.

Literaturverzeichnis

[1] Nakahara,M. *Geometry, Toplogy, and Physics* Adam Hilger 1989

[2] Eguchi,T.;Gilkey,P.B. and Hanson,A.J.: Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry, Phys. Rep. 66 No.6, 213-393 (1980)

[3] Tammo tom Dieck: *Topologie*, Walter de Gruyter, Berlin 1991

[4] Nash,C. and Sen,S. *Topology and Geometry for Physicists* Academic Press 1988

[5] Daniel,M. and Viallet,C.M.; Rev. Mod. Phys. 52, 175-195 (1980)

[6] C. Nash, *Differential Topology and Quantum field theory* Academic Press 1990

[7] Stöcker,R. and Zieschang,H. *Algebraische Topologie* BG Teubner Stuttgart 1988

[8] Eilenberg,S. and Steenrod,N. *Foundations of Algebraic Topology* Princeton University Press 1952

[9] tom Diek, T., Kamps,K.H. and Puppe, D. *Homotopietheorie* Lec. Notes in Math. 157, Springer Verlag New–York Heidelberg Berlin 1970

[10] Bröcker, T. and Jänich, K. *Einführung in die Differentialtopologie* Heidelberger Taschenbücher 143. Springer Verlag New–York Heidelberg Berlin 1973

[11] Spanier, E.H. *Algebraic Topology* McGraw–Hill New York 1966

[12] Bauer, F.W. *Homotpietheorie* Bibliograph. Institut Mannheim Wien Zürich 1971

[13] Friedrich, T. *Vorlesungen über K–Theorie* Teubner Texte zur Math. BSB B.G. Teubner Verlagsgesell. Leipzig 1978

[14] Lluis–Puebla, E., Loday, J.L., Gillet, H., Soulé, C. and Snaith, V. *Higher Algebraic K–Theory: an overview* Lec. Notes in Math. 1491, Spinger Verlag New–York Heidelberg Berlin 1992

[15] Milnor, J. *Morse Theory* Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press 1963

[16] Milnor, J. *Lectures on the H–Cobordism Theorem* Princeton University Press 1965