DIFFERENTIALGEOMETRIE

VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 1996/97

an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Richard Bödi

Inhalt

1. Kurven 1
2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 11
3. Flächen I, Die erste Fundamentalform 24
4. Riemannsche Mannigfaltigkeiten 30
5. Flächen II, Die zweite Fundamentalform 42
6. Affiner Zusammenhang und kovariante Ableitung 54
7. Flächen III, Struktur der zweiten Fundamentalform 66
8. Exponentialabbildung und Krümmungstensor 76

Literatur 92

KAPITEL 1

Kurven

Alle differenzierbaren Abbildungen sollen, sofern nichts Gegenteiliges vorausgesetzt wird, stets unendlich oft differenzierbar sein. Als Synonym für "unendlich oft differenzierbar" werden wir auch *glatt* verwenden.

(1.1) Definition. Eine Abbildung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, wenn es eine glatte Fortsetzung $\tilde{c} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ von c gibt. Eine glatte Abbildung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *(parametrisierte) Kurve*. Der Punkt $c(a)$ heißt *Anfangspunkt*, der Punkt $c(b)$ heißt *Endpunkt* der Kurve c. Dei Kurve c heißt *geschlossen*, falls $c(a) = c(b)$ für alle $n \geq 0$ gilt. Die Kurve c heißt *einfach*, falls c injektiv ist. Die Menge $S(c) = \{c(t) \mid t \in [a, b]\}$ heißt *Spur* der Kurve c.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve, so gibt es zu jedem $t_0 \in [a, b]$ eine lineare Abbildung $L_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die *Ableitung* von c im Punkt t_0. Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ haben stets die Form $t \mapsto t \cdot v_0$ mit $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen den Vektor $c'(t_0) := v_0$ den *Tangentialvektor* von c im Punkt t_0. Dieser repräsentiert die Ableitung L_{t_0} von c im Punkt t_0.

(1.2) Definition. Eine parametrisierte Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$ gilt.

(1.3) Beispiele. (a) Die Kurve $c_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto 2t(1, 0) + t(0, 1)$ ist einfach und regulär. Die Spur von c_1 ist ein Geradenstück.
(ã) Die Kurve $\tilde{c}_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto t(1, 0) + \frac{1}{2}t(0, 1)$ hat dieselbe Spur wie die Kurve c_1.
(b) Die Kurve $c_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \cos t(1, 0) + \sin t(0, 1)$ ist regulär und geschlossen, aber nicht einfach. Die Spur von c_2 ist der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$.
(c) Die Kurve $c_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto t^2(1, 0)$ ist weder einfach noch regulär.
(d) Die Kurve $c_4 : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \cos t(1, 0, 0) + \sin t(0, 1, 0) + t(0, 0, 1)$ ist einfach und regulär. Die Spur von c_4 ist eine Schraubenlinie.

Die Kurven aus Beispiel (a) und (ã) sind bis auf die "Durchlaufgeschwindigkeit" gleich. Wir definieren deshalb:

(1.4) Definition. Zwei parametrisierte Kurven $c_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ heißen *äquivalent*, in Zeichen $c_1 \sim c_2$, falls es eine glatte Funktion $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ gibt mit $\varphi(a_2) = a_1$, $\varphi(b_2) = b_1$ und $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [a_2, b_2]$, so daß $c_2 = c_1 \circ \varphi$ gilt. Die Abbildung φ wird *Parameterwechsel* genannt.

Wegen $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} > 0$ ist die Relation $\sim$ symmetrisch; sie ist sogar eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$. Bei Parameterwechsel bleibt die Regularität erhalten, denn es ist $c_2'(t) = c_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0$. Ebenso bleiben Spur, Einfachheit und Geschlossenheit einer Kurve invariant. Die Tangentialvektoren von c_1 bzw. von c_2 in den Punkten t bzw. $\varphi(t)$ unterscheiden sich nur um ein skalares positives Vielfaches (nämlich um $\varphi'(t)$), d.h. sie unterscheiden sich nur in der Länge, nicht aber in der Richtung.

(1.5) Definition. Eine Äquivalenzklasse γ von regulären Kurven heißt *(unparametrisierte) Kurve*. Die Elemente der Klasse γ werden *Parametrisierungen von* γ genannt.

(1.6) Definition. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Die *Länge* von c wird definiert als $l(c) := \int_a^b |c'(t)| \, \mathrm{d}t$.

(1.7) Lemma. *Zwei äquivalente reguläre Kurven haben die gleiche Kurvenlänge. Deshalb setzt man $l(\gamma) = l(c)$ für eine Kurve γ, wobei $c \in \gamma$ beliebig ist.*

Beweis. Sei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ und seien $c_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n, c_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ Parametrisierungen von γ. Sei $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ mit $c_2 = c_1 \circ \varphi$. Dann ist wegen $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in (a_2, b_2)$ nach dem Transformationssatz für Integrale (siehe Spivak, [15], 3-13)

$$\int_{a_2}^{b_2} |c_2'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} |\varphi'(t) \cdot c_1'(\varphi(t))| \, \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} \varphi'(t) \cdot |c_1'(\varphi(t))| \, \mathrm{d}t = \int_{a_1}^{b_1} |c_1'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

□

(1.8) Beispiel. Bogenlänge eines Kreises vom Radius r.
Die Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto r \cdot \cos t(1, 0) + r \cdot \sin t(0, 1)$ hat als Spur den Kreis um den Ursprung 0 mit Radius r. Dann ist

$$l(c) = \int_0^{2\pi} |c'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}t = 2\pi r.$$

*

Sei γ eine (reguläre) Kurve mit Parametrisierung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Setze

$$s_c : [a, b] \to \mathbb{R} : s \mapsto \int_a^s |c'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Dann ist $s_c : [a,b] \to [0,l(\gamma)]$ ein Parameterwechsel, denn es ist $s_c'(t) = |c'(t)| > 0$ aufgrund der Regularität von c. Die parametrisierte Kurve $b = c \circ s_c^{-1} : [0,l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge*. Eine Charakterisierung dieser Parametrisierung gibt das folgende Lemma.

(1.9) Lemma. *Sei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$. Eine Parametrisierung $c : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ von γ ist genau dann die Parametrisierung nach der Bogenlänge, wenn $|c'(t)| = 1$ für alle $t \in [0,l]$ gilt.*

Beweis. Für eine Parametrisierung c nach der Bogenlänge ist $c = d \circ s_d^{-1}$ mit einer Parametrisierung $d : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Also gilt wegen $|d'(t)| = s_d'(t)$

$$|c'(t)| = |(s_d^{-1})'(t) \cdot d'(s_d^{-1}(t))| = |\frac{1}{s_d'(s_d^{-1}(t))} \cdot d'(s_d^{-1}(t))| = \frac{1}{|d'(s_d^{-1}(t))|} \cdot |d'(s_d^{-1}(t))| = 1.$$

Gilt umgekehrt $|c'(t)| = 1$ für alle $t \in [0,l]$, so folgt wegen $s_c(0) = 0$ und $s_c'(t) > 0$

$$s_c(t) = \int_0^t c'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t |c'(s)|\mathrm{d}s = t$$

d.h. die Kurve c ist eine Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge. □

(1.10) Definition. Sei $b \in \gamma$ eine Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge. Dann heißt der Vektor $b''(t) \in \mathbb{R}^n$ der *Krümmungsvektor* der Kurve γ im Punkt $b(t)$. Wir schreiben dafür $\kappa(t)$. Die reelle Zahl $k(t) := |\kappa(t)|$ heißt die *Krümmung* von γ im Punkt $b(t)$.

Bemerkung. Der Krümmungsvektor $\kappa(t)$ beschreibt, wie "schnell" und in welche Richtung sich der Einheitstangentenvektor an die Kurve γ im Punkt $b(t)$ ändert.

(1.11) Beispiel. Es ist

$$b : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto r\left(\cos\frac{t}{r}(1,0) + \sin\frac{t}{r}(0,1)\right)$$

die Parametrisierung nach der Bogenlänge für den Kreis γ im Ursprung mit Radius r, denn für $t \in [0, 2\pi r]$ ist

$$b'(t) = -\sin\frac{t}{r}(1,0) + \cos\frac{t}{r}(0,1),$$

also $|b'(t)| = 1$. Außerdem ist

$$b''(t) = \frac{1}{r}\left(-\cos\frac{t}{r}(1,0) - \sin\frac{t}{r}(0,1)\right) = -\frac{1}{r^2}b(t),$$

d.h. wir haben

$$k(t) = \frac{1}{r}.$$

(1.12) Lemma. *Eine Kurve γ ist genau dann eine Gerade, wenn $\kappa(t) = 0$ für alle $t \in [0, l(\gamma)]$ gilt.*

Beweis. Sei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ von u nach v. Ist γ eine Gerade, so ist nach (1.9) die Abbildung $b : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto u + t\frac{v-u}{|v-u|}$ eine Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge, denn es ist $|b'(t)| = |\frac{v-u}{|v-u|}| = 1$ für alle t. Außerdem gilt $\kappa(t) = b''(t) = 0$. Umgekehrt folgt aus $b'' \equiv 0$, daß die Abbildung b' auf $[0, l(\gamma)]$ konstant ist. Integration liefert nun $b(t) = b(0) + t \cdot b'(0)$, d.h. die Kurve γ ist eine Gerade. □

(1.13) Lemma. *Für eine Kurve γ stehen $\kappa(t)$ und $b'(t)$ stets senkrecht aufeinander.*

Beweis. Aus $1 = |b'(t)|^2 = \langle b'(t), b'(t)\rangle$ folgt mit Hilfe der Produktregel (Skalarprodukt ausschreiben!) folgt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle b'(t), b'(t)\rangle = 2 \langle b''(t), b'(t)\rangle ,$$

was zu beweisen war. □

(1.14) Definition. Sei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$. Eine Familie $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ von glatten Abbildungen $e_i : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Frenet-n-Bein* von γ, wenn $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, und für alle $1 \le k \le n$ die k-te Ableitung $b^{(k)}(t)$ im Unterraum $\langle e_1(t), \ldots, e_k(t)\rangle$ liegt.

(1.15) Satz. *Sei γ eine Kurve mit Parametrisierung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Sind die Vektoren $c'(t), \ldots, c^{(n)}(t)$ für alle $t \in [a, b]$ linear unabhängig, so existiert genau ein Frenet-n-Bein $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$, so daß $\{e_i(t)\}_{i=1}^k$ und $\{c^{(i)}(t)\}_{i=1}^k$ für alle $1 \le k \le n$ gleich orientiert sind.*

Beweis (mittels Gram-Schmidt-Verfahren).
Existenz: Setze $e_1(t) := \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$. Sind $e_1, \ldots, e_{k-1}$ für $k < n$ schon definiert, so setze

$$f_k(t) := c^{(k)}(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \left\langle c^{(k)}(t), e_j(t)\right\rangle \cdot e_j(t) \quad \text{und} \quad e_k(t) = \frac{f_k(t)}{|f_k(t)|} \qquad (\spadesuit).$$

Natürlich erfüllt die so definierte Abbildung e_k die geforderten Eigenschaften.
Eindeutigkeit: Sei $\{e_i^*(t)\}_{i=1}^n$ ein weiteres Frenet-n-Bein mit den im Satz angegebenen Eigenschaften. Dann ist $e_1^*(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = e_1(t)$ aufgrund der Normiertheit von e_1^* und der Tatsache, daß $e_1(t)$ und $e_1^*(t)$ gleich orientiert sind nach Voraussetzung. Da $e_1(t) = e_1^*(t)$ und $e_2^*(t)$ nach Voraussetzung den gleichen Unterraum aufspannen wie $e_1(t)$ und $e_2(t)$ und beide Paare orthonormal sind und die gleiche Orientierung haben, folgt $e_2^*(t) = e_2(t)$ für alle t. Via Induktion gilt dies nun für alle $1 \le k \le n$. □

(1.16) Satz. *Sei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung b nach der Bogenlänge. Es seien die Vektoren $b'(t), \dots, b^{(n)}(t)$ für alle $t \in [0, l(\gamma)]$ linear unabhängig, und es sei $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ ein Frenet-n-Bein zu γ. Dann gibt es Funktionen $\omega_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ und*

$$e_i'(t) = \sum_{j=1}^{i+1} \omega_{ij}(t) \cdot e_j(t)$$

für alle $1 \leq i < n$. Dabei verschwinden alle Funktionen ω_{ij} mit Ausnahme der Funktionen $\omega_{i,i+1} = -\omega_{i+1,i}$. Die reellen Zahlen $k_i(t) := \omega_{i,i+1}(t)$ werden i-te Krümmungen von γ im Punkt $b(t)$ genannt.

Beweis. Sei $b \in \gamma$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge. Dann ist

$$e_1(t) = \frac{b'(t)}{|b'(t)|} = b'(t),$$

und nach (1.10) und (1.13), sowie Gleichung (♠) ist

$$e_1'(t) = b''(t) = b''(t) - \langle b''(t), b'(t)\rangle \cdot b'(t) = e_2(t) \cdot |b''(t)| = k(t) \cdot e_2(t).$$

Also ist $\omega_{11} = 0$ und $\omega_{12}(t) = k(t)$. Induktiv rechnet man nun die Formeln für e_i' nach: Aus

$$e_i(t)|f_i(t)| = f_i(t) = b^{(i)}(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \left\langle b^{(i)}(t), e_j(t)\right\rangle \cdot e_j(t)$$

folgt

$$f_i'(t) = b^{(i+1)}(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\left\langle b^{(i+1)}(t), e_j(t)\right\rangle + \left\langle b^{(i)}(t), e_j'(t)\right\rangle \right) e_j(t) + \left\langle b^{(i)}(t), e_j(t)\right\rangle e_j'(t) \right).$$

Nach Definition eines Frenet-n-Beines und Induktionsvoraussetzung liegt die rechte Seite in $\langle e_1(t), \dots, e_{i+1}(t)\rangle$. Das gleiche gilt auch für $e_i'(t)$. Dabei ist

$$\langle e_i'(t), e_k(t)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{i+1} \omega_{ij}(t) \cdot e_j(t), e_k(t) \right\rangle = \sum_{j=1}^{i+1} \omega_{ij}(t)\delta_{jk} = \omega_{ik}(t).$$

Aus der Konstanz von $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle$ folgt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \langle e_i'(t), e_j(t)\rangle + \left\langle e_i(t), e_j'(t)\right\rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji}.$$

Insbesondere ist also $\omega_{ij} = 0$ für $j \neq i-1, i+1$. □

(1.17) Satz. *Seien $\varphi_i : [0,l] \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n-1$ glatte Funktionen mit $\varphi_i > 0$. Dann existiert eine Kurve γ in $\mathbb{R}^n$ mit Krümmungen $k_i = \varphi_i$ für $1 \le i \le n-1$.*

Beweis. Setze

$$\omega_{ij} := \begin{cases} \varphi_i & \text{falls } i = k \text{ und } j = k+1 \\ -\varphi_i & \text{falls } i = k+1 \text{ und } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(t) x_j(t)$$

zu den Anfangswerten $x_i(0) = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$. Nach der Theorie homogener linearer Differentialgleichungen existieren glatte Lösungen $b_i : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ obiger Gleichungen. Die Kurve

$$b : [0,l] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \int_0^t b_1(s)\,\mathrm{d}s$$

ist parametrisiert nach der Bogenlänge: Mit $s_{ij}(t) := \langle b_i(t), b_j(t)\rangle$ erhalten wir die homogene lineare Differentialgleichung

$$s_{ij}'(t) = \langle b_i'(t), b_j(t)\rangle + \langle b_i(t), b_j'(t)\rangle = \sum_{k=1}^{n} (\omega_{ik}(t) s_{kj}(t) + \omega_{jk}(t) s_{ik}(t))$$

zu den Anfangswerten $s_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Die eindeutige Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch $s_{ij} = \delta_{ij}$ wegen $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Insbesondere folgt hieraus $|b'(t)| = |b_1(t)| = 1$ für alle $t \in [0,l]$. Schließlich ist nach Konstruktion die Familie $\{b_i(t)\}_{i=1}^n$ ein Frenet-n-Bein für die Kurve b und daher ist $k_i = \varphi_i$ für $1 \le i < n$. □

(1.18) Definition. Eine *Bewegung* von $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form $\tau \circ \beta_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei $\beta_0 \in \mathrm{SO}_n\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ linear}, \det f > 0,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\}$ und $\tau = \tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x + v$ ist. Statt $\tau \circ \beta_0$ schreiben wir auch kurz $\tau\beta_0$.

(1.19) Satz. *Seien γ, $\tilde\gamma$ Kurven in $\mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Frenet-n-Beinen $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ und $\{\tilde e_i(t)\}_{i=1}^n$. Es gibt genau dann eine (eindeutig bestimmte) Bewegung $\beta = \tau\beta_0$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\tilde b = \beta \circ b$, wenn $\tilde k_i = k_i$ gilt. Es gilt dann $\tilde e_i = \beta_0 \circ e_i$.*

Beweis. Sei $\beta = \tau_v\beta_0$ eine Bewegung mit $\tilde b = \beta \circ b$. Dann ist wegen $\mathrm{D}\beta_0(x) = \beta_0$ und $\mathrm{D}\tau_v(x) = \mathbb{1}$

$$\tilde b'(t) = (\tau_v\beta_0 b)'(t) = \mathrm{D}\tau_v(\beta_0 b(t)) \cdot (\beta_0 b)'(t) = \mathrm{D}\beta_0(b(t)) \cdot b'(t) = \beta_0 b'(t)$$

und ebenso

$$\tilde b^{(n)}(t) = \beta_0 b^{(n)}(t).$$

Nach Konstruktion eines Frenet-n-Beines folgt somit $\tilde{e}_i = \beta \circ e_i$ für $1 \leq k \leq n$ und nach (1.16) ist

$$\omega_{ij}(t) = \langle e_i'(t), e_j(t)\rangle = \langle \beta_0 e_i'(t), \beta_0 e_j(t)\rangle = \langle (\beta_0 e_i)'(t), \beta_0 e_j(t)\rangle = \langle \tilde{e}_i'(t), \tilde{e}_j(t)\rangle = \tilde{\omega}_{ij}(t).$$

Insbesondere ist $\tilde{k}_i = k_i$.
Umgekehrt gibt es genau eine Bewegung $\beta = \tau\beta_0$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\beta_0 e_i(0) = \tilde{e}_i(0)$ und $\beta b(0) = \tilde{b}(0)$ (wähle dazu die Translation τ entsprechend). Aus $\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t)$ folgt

$$\tilde{e}_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(t)\tilde{e}_j(t).$$

Andererseits ist

$$(\beta_0 e_i)'(t) = \beta_0 e_i'(t) = \beta_0(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(t) e_j(t)) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(t)\beta_0 e_j(t),$$

d.h. $\{\tilde{e}_i(t)\}_{i=1}^n$ und $\{\beta_0 e_i(t)\}_{i=1}^n$ genügen denselben Differentialgleichungen und erfüllen dieselbe Anfangsbedingung. Also sind beide Frenet-n-Beine identisch. Schließlich folgt aus

$$\beta_0 b'(t) = \beta_0 e_1(t) = \tilde{e}_1(t) = \tilde{b}'(t)$$

die Gleichung

$$\beta b(t) - \beta b(0) = \beta_0 b(t) - \beta_0 b(0) = \int_0^t \beta_0 b'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \tilde{b}'(s)\,\mathrm{d}s = \tilde{b}(t) - \tilde{b}(0)$$

und wegen $\beta b(0) = \tilde{b}(0)$ ist somit $\beta b = \tilde{b}$. □

Die bisherigen Lemmata und Sätze behandelten durchweg lokale Probleme. Die nächsten Sätze zeigen, wie die Krümmung einer geschlossenen Kurve das globale Aussehen einer Kurve bestimmt. Sei γ eine einfache geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$. Nach dem Jordanschen Kurvensatz zerlegt (die Spur von) γ den Raum $\mathbb{R}^2$ in zwei Zusammenhangskomponenten, wovon genau eine beschränkt ist. Der Flächeninhalt (Lebesgue-Maß) der beschränkten Komponente C sei mit A bezeichnet. Für welche einfachen geschlossenen Kurven γ der festen Länge l hat die beschränkte Komponente C den größten Flächeninhalt A? Die Antwort ist seit dem Altertum bekannt und lautet: genau für Kreise vom Radius $\frac{l}{2\pi}$. Allgemeiner gilt der folgende Satz.

(1.20) Satz (Isoperimetrische Ungleichung). *Es ist $l(\gamma)^2 \geq 4\pi A$. Gleichheit gilt in dieser Ungleichung genau dann, wenn γ ein Kreis ist.*

Beweis. Sei $l = l(\gamma)$ und sei $b : [0, l] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (b_1(t), b_2(t))$ eine Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge.
(1) Für den Flächeninhalt A gilt nach dem Greenschen Integralsatz (siehe Heuser, Lehrbuch der Analysis II, 207.2 oder Apostol, Mathematical Analysis)

$$A = \int_C \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^l (b_1(t)b_2'(t) - b_2(t)b_1'(t))\,\mathrm{d}t = -\int_0^l b_2(t)b_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^l b_1(t)b_2'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Gleichheit der letzten drei Integrale folgt aus $b(0) = b(l)$ unter Anwendung partieller Integration.
(2) Sei nun $2r$ der Durchmesser von γ in x-Richtung und seien $t_0, t_1 \in [0, l]$ mit $t_0 < t_1$ und $|b(t_0) - b(t_1)| = 2r$. Durch Anwendung einer Translation können wir o.E. $c_1(t_0) = -r$ und $c_1(t_1) = r$ erreichen. Dadurch parametrisieren wir einen Kreis mit Radius r durch

$$d(t) = (d_1(t), d_2(t)) = \begin{cases} (b_1(t), \sqrt{r^2 - b_1(t)^2}) & \text{für } t \in [t_0, t_1] \\ (b_1(t), -\sqrt{r^2 - b_1(t)^2}) & \text{für } t \in [0, t_0] \cup [t_1, l] \end{cases}$$

Beachte, daß d i.a. *keine* reguläre Parametrisierung ist. Nach (1) ist

$$A = \int_0^l b_1(t)b_2'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \pi r^2 = -\int_0^l d_2(t)d_1'(t)\,\mathrm{d}t$$

und es folgt

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (b_1(t)b_2'(t) - d_2(t)d_1'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^l (b_1(t)b_2'(t) - d_2(t)b_1'(t))\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^l \sqrt{(b_1(t)b_2'(t) - d_2(t)b_1'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^l \sqrt{(b_1(t)b_2'(t) - d_2(t)b_1'(t))^2 + (b_1(t)b_1'(t) + d_2(t)b_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^l \sqrt{b_1(t)^2 + d_2(t)^2}\sqrt{b_1'(t)^2 + b_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^l r \cdot 1\,\mathrm{d}t \\ &= rl. \end{aligned}$$

Für $a, b > 0$ ist $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a + b)$ mit Gleichheit genau für $a = b$. Damit erhalten wir

$$A\pi r^2 \le \frac{1}{4}(A + \pi r^2)^2 \le \frac{1}{4}r^2 l^2$$

und es folgt die Behauptung des Satzes.
(3) Ist γ ein Kreis vom Radius r, so gilt natürlich $4\pi A = 4\pi^2 r^2 = l(\gamma)^2$.
(4) Umgekehrt folgt bei $l(\gamma)^2 = 4\pi A$ aus (2) die Gleichheit $A = \pi r^2$ und in der Abschätzung aus (2) gilt überall die Gleichheit. Insbesondere ist $b_1(t)b_1'(t) + d_2(t)b_2'(t) = 0$, woraus $b_1(t)^2 b_1'(t)^2 + b_1(t)^2 b_2'(t)^2 = d_2(t)^2 b_2'(t)^2 + b_1(t)^2 b_2'(t)^2$ und

$$b_1(t) = b_1(t)\sqrt{b_1'(t)^2 + b_2'(t)^2} = \pm b_2'(t)\sqrt{b_1(t)^2 + d_2(t)^2} = \pm b_2'(t) \cdot r$$

folgt. Aus $A = \pi r^2$ folgt überdies, daß r unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist. Also dürfen x- und y-Koordinate vertauscht werden und man erhält

$$b_2(t) = \pm b_1'(t) \cdot r.$$

Damit haben wir wegen $|b'(t)| = 1$

$$b_1(t)^2 + b_2(t)^2 = r^2(b_1'(t)^2 + b_2'(t)^2) = r^2|b'(t)|^2 = r^2,$$

d.h. die Spur von c ist ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt 0. □

(1.21) Definition. Eine reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, falls die Spur von c für alle $t \in (a, b)$ ganz auf einer Seite der Tangente durch $c(t)$ liegt, d.h. das Skalarprodukt $\langle c(s) - c(t), e_2(t)\rangle$ hat für alle $s \in (a, b)$ dasselbe Vorzeichen.

(1.22) Definition. Eine geschlossene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *periodisch*, wenn alle Ableitungen im Punkt a mit denen im Punkt b übereinstimmen, d.h. es gibt eine glatte Funktion $\tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{c}\big|_{[a,\,b]} = c$ und $\tilde{c}(t + w) = \tilde{c}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $w = b - a$.

Ein Beweis des nachstehenden Fenchelschen Satzes findet man z.B. in C. Hsiung, [10], 3.1.4, p.140–142.

(1.23) Satz (Fenchel 1929). *Für eine einfache, periodische Kurve γ in $\mathbb{R}^n$ ist die Gesamtkrümmung $k_\gamma := \int_0^{l(\gamma)} k(s)\,\mathrm{d}s$ mindestens 2π. Genau dann ist $k_\gamma = 2\pi$, wenn γ in einer Ebene liegt und konvex ist.*

(1.24) Vierscheitelsatz. *Sei γ ein konvexe, periodische Kurve. Dann gibt es mindestens vier Punkte auf γ, an denen $k'(t)$ verschwindet.*

Beweis. Da γ geschlossen ist, läßt sich k als periodische Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Periode $l(\gamma)$ deuten. Auf jedem Intervall der Länge $l(\gamma)$ hat k genauso viele lokale Maxima wie Minima. Somit gibt es stets eine gerade Anzahl von Punkten in $[0, l(\gamma)]$ an denen k'

verschwindet. Sei $b : [0, \gamma(l)] \to \mathbb{R} : t \mapsto (b_1(t), b_2(t))$ eine Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge. Für ein Frenet-2-Bein $\{e_1, e_2\}$ gilt nach (1.16) und (1.13)

$$e_1(t) = b'(t) = (b_1'(t), b_2'(t)) \quad \text{und} \quad e_2(t) = (-b_2'(t), b_1'(t)).$$

Die Frenet-Formeln lauten im Zweidimensionalen $e_1'(t) = k(t)e_2(t)$. Einsetzen liefert nun

$$b_1''(t) = -k(t)b_2'(t) \quad \text{und} \quad b_2''(t) = k(t)b_1'(t).$$

Da γ geschlossen ist, ist

$$\int_0^{l(\gamma)} k'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

und mit Hilfe der obigen Gleichungen und partieller Integration folgt ebenso

$$\int_0^{l(\gamma)} b_1(t)k'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{l(\gamma)} (k(t)b_1(t) - b_2'(t))'\,\mathrm{d}t = 0$$

und

$$\int_0^{l(\gamma)} b_2(t)k'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{l(\gamma)} (k(t)b_2(t) + b_1'(t))'\,\mathrm{d}t = 0.$$

Somit gilt für alle $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{l(\gamma)} (a_0 + a_1b_1(t) + a_2b_2(t))k'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (\clubsuit)$$

Wir nehmen nun o.E. an, daß $k(t)$ nicht konstant ist; andernfalls ist der Satz trivial. Dann gibt es $t_0, t_1 \in [0, \gamma(l)]$, so daß k an diesen Punkten relative Extrema besitzt. Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch die Punkte $A = b(t_0)$ und $B = b(t_1)$. Die Gerade g zerlegt die Spur von γ in zwei Teile $C_1 = b([0, t_0]) \cup ([t_1, l(\gamma)])$ und $C_2 = b([t_0, t_1)]$. Angenommen, ein weiterer Punkt P von γ liegt auf g. Sei etwa P auf g zwischen A und B gelegen. Da γ konvex ist, muß die Tangente an γ durch P mit g übereinstimmen (andernfalls lägen A und B auf verschiedenen Seiten der Tangente). Aber dann ist g auch Tangente an den Punkten A und B. Hieraus folgt, daß die Kurve zwischen A und B ganz in g verläuft. Insbesondere ist $k(t_0) = 0 = k(t_1)$, d.h. es ist $k \equiv 0$, ein Widerspruch. Außerdem sieht man nun, daß die Reihenfolge der Punkte A, B, und P auf g irrelevant ist. Also liegt außer A und B kein weiterer Punkt auf g.

Sei die Gerade g durch die Gleichung $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ gegeben. Angenommen, die Funktion k hat nur die zwei lokalen Extrema t_0 und t_1. Dann ist etwa $k' > 0$ auf C_1 und $k' < 0$ auf C_2. Da C_1 und C_2 auf verschiedenen Seiten von g liegen, gilt etwa $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 > 0$ für Punkte auf C_1 und $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 < 0$ für Punkte auf C_2. Jedenfalls hat der Integrand in der Gleichung ($\clubsuit$) stets gleiches Vorzeichen. Dies widerspricht aber Gleichung ($\clubsuit$). Damit ist der Satz bewiesen. □

KAPITEL 2

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

(2.1) Definition. Eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* M^n ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p und einen Homöomorphismus $h : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei U' offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Die Homöomorphismen h werden *Karten*, *lokale Koordinatensysteme* oder *lokale Koordinaten* genannt, die zugehörigen Umgebungen U heißen *Kartengebiete*. Eine Familie $\{(h_i, U_i)\}_{i\in I}$ von Karten-Kartengebiet-Paaren heißt *Atlas* von M, falls $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt. Oft wird auch ein Paar (h, U) eine Karte genannt.

(2.2) Beispiele topologischer Mannigfaltigkeiten.
(a) Jede offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ mit $(x \mapsto x, U)$ als einzige Karte.
(b) Die n-Sphäre $\mathbb{S}_n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |x| = 1\right\}$. Ein Atlas wird etwa durch die Mengen der Form $U_{ik} = \left\{x \in \mathbb{S}_n \,\middle|\, (-1)^k x_i > 0\right\}$ gegeben, wobei x_i die i-te Komponente von x ist. Die zugehörigen Karten sind $h_{ik} : U_{ik} \to \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\} : x \mapsto (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Da die n-Sphäre homöomorph zur Einpunkt-Kompaktifizierung $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ist, können wir z.B. auch $(h_1, U_1) = (x \mapsto x, \mathbb{R}^n)$ und $(h_2, U_2) = (x \mapsto \frac{x}{|x|^2}, \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \setminus 0)$ als Atlas wählen.
(c) Der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{RP}_n = \mathbb{S}_n/_\sim$ mit der Quotiententopologie, wobei $\sim$ bedeutet, daß Antipodenpunkte identifiziert werden. Als Kartengebiete kann man etwa $U_k = \{[x]_\sim \in \mathbb{RP}_n \mid x_k \neq 0\}$ wählen. Die zugehörigen Karten können wir definieren als $h_k : U_k \to \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\} : [x_1, \ldots, x_n] \mapsto \frac{x_k}{|x_k|}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

(2.3) Definition. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit und seien (h_α, U_α) und (h_β, U_β) zwei Karten von M mit $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Die Abbildung

$$h_{\alpha\beta} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to h_\beta(U_{\alpha\beta}))$$

ist ein Homöomorpismus und wird *Kartenwechsel* genannt.

(2.4) Definition. Eine topologische n-Mannigfaltigkeit M^n heißt *differenzierbar* oder *glatt*, falls alle Kartenwechsel eines Atlas von M unendlich oft differenzierbar sind.

Bemerkung. (a) Alle Beispiele von (2.2) sind glatte Mannigfaltigkeiten.

(b) Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas einer glatten Mannigfaltigkeit M, so sei $\mathcal{D}$ die Menge aller Karten auf M, für die jeder Kartenwechsel mit einer Karte aus $\mathcal{A}$ glatt ist. Dann ist auch $\mathcal{D}$ ein glatter Atlas für M, der nach Konstruktion der größte glatte Atlas auf M ist, d.h. jeder Atlas $\mathcal{A}$ einer glatten Mannigfaltigkeit M bestimmt eindeutig einen größten Atlas $\mathcal{D}$ auf M, der *von* $\mathcal{A}$ *erzeugt* heißt. Der Atlas $\mathcal{D}$ wird auch *glatte Struktur* auf M genannt. Im weiteren werden wir jedoch nicht streng unterscheiden zwischen den Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$. Wir werden stets davon ausgehen, daß wir einen maximalen Atlas vor uns haben, auch wenn wir wie in den Beispielen (2.2) nur erzeugende Atlanten angegeben haben. Dies wird z.B. bei der Definition einer Untermannigfaltigkeit eine Rolle spielen.

(2.5) Definition. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten heißt *differenzierbar im Punkt* $p \in M$, wenn es Karten $h : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $p \in U$ und $g : V \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f(p) \in V$ gibt, so daß die Komposition $\tilde{f} := g \circ f \circ h^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ glatt ist. Die Abbildung f heißt *differenzierbar* oder *glatt*, falls f in jedem Punkt von M differenzierbar ist. Man sagt, *die Abbildung* $\tilde{f}$ *ist eine Darstellung von* f *in lokalen Koordinaten.* Die Abbildung f heißt ein *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind.

Bemerkung. (a) Ein differenzierbarer Homöomorphismus muß nicht unbedingt ein Diffeomorphismus sein. Als Beispiel betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Hier ist f^{-1} im Punkt 0 nicht differenzierbar.
(b) Alle Kartenwechsel eines glatten Atlanten sind Diffeomorphismen.

(2.6) Definition. Eine Teilmenge N einer $n+k$-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M*, falls es zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte $h : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ mit $p \in U$ gibt, so daß $h(N \cap U) = U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ gilt. Die Zahl k heißt *Kodimension von N in M.*
Eine glatte Abbildung $f : N \to M$ heißt eine *Einbettung*, falls $f(N) \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, und $f : N \to f(N)$ ein Diffeomorphismus ist.

(2.7) Beispiele. (a) Der Äquator $N := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}_n \mid x_n = 0\}$ der n-Sphäre $\mathbb{S}_n$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{S}_n$ der Kodimension 1. Die Inklusionsabbildung $N \hookrightarrow \mathbb{S}_n : x \mapsto x$ ist eine Einbettung.
(b) Das Paraboloid $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\right\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ der Kodimension 1.
(c) Die Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \cos t(1,0,0) + \sin t(0,1,0) + t(0,0,1)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ der Kodimension 2 und c ist eine Einbettung.
(d) Die Menge $\left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$ ist *keine* Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Als nächstes soll der wichtige Begriff des *Tangentialraumes* eingeführt werden. Betrachtet man z.B. die 2-Sphäre $\mathbb{S}_2$ in $\mathbb{R}^3$, so ist intuitiv klar, was die Tangentialebene von $\mathbb{S}_2$ in einem Punkt $p \in \mathbb{S}_n$ sein soll. Bei dieser Vorstellung hängt aber die Tangentialebene nicht nur von $\mathbb{S}_2$ ab, sondern auch vom umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$. Deshalb werden wir den Begriff des Tangentialraumes abstrakt einführen. Welche Zusammenhänge zwischen diesem abstrakten Begriff und der zuvor angesprochenen intuitiven Vorstellung bestehen, wird im nächsten Kapitel näher beleuchtet.

(2.8) Definition. Sei A eine Algebra über einem Körper K, d.h. A ist ein K-Vektorraum mit einer assoziativen Multiplikation $A \times A \to A : (a, b) \mapsto ab$, die beide Distributivgesetze erfüllt. Eine lineare Abbildung $D : A \to A$ heißt eine *Derivation* von A, falls

$$D(f \cdot g) = f(Dg) + g(Df)$$

für alle $f, g \in A$ gilt.

Bemerkung. Besitzt A ein Einslement e, so folgt aus der Produktregel $D(e) = D(e) + D(e)$, also ist $D(e) = 0$. Aus der Linearität von D folgt $D(\lambda \cdot e) = \lambda \cdot D(e) = 0$ für alle $\lambda \in K$.

(2.9) Lemma. *Sei A eine K-Algebra. Die Menge $\mathrm{Der}\,(A)$ aller Derivationen von A ist ein Modul über dem Ring A bezüglich punktweiser Verknüpfungen.*

Beweis. Durch

$$X + Y : A \to A : g \mapsto Xg + Yg$$

für alle $X, Y \in \mathrm{Der}\,(A)$ wird $\mathrm{Der}\,(A)$ zur kommutativen Gruppe. Schließlich wird $\mathrm{Der}\,(A)$ durch die wie folgt definierte Skalarmultiplikation

$$A \times \mathrm{Der}\,(A) \to \mathrm{Der}\,(A) : (f, X) \mapsto fX = (g \mapsto f(Xg))$$

ein Modul über dem Ring A. □

(2.10) Definition. Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Wir bezeichnen mit $C^\infty(p)$ die Menge aller Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}$, die im Punkt p unendlich oft differenzierbar (also glatt) sind. Für $U \subseteq M$ sei

$$C^\infty(U) = \bigcap_{p \in U} C^\infty(p)$$

die Menge aller Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}$, die in allen Punkten aus U glatt sind.

(2.11) Lemma. *Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $U \subseteq M$. Dann ist $C^\infty(U)$ eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra bezüglich punktweiser Verknüpfungen. Insbesondere ist also $C^\infty(U)$ ein kommutativer Ring mit Einselement $f \equiv 1$.*

Beweis. Für $f, g \in C^\infty(U)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$f + g : M \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$$

und analog

$$f \cdot g : M \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x),$$

sowie

$$\lambda f : M \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot f(x).$$

Es ist klar, daß $f + g, f \cdot g, \lambda f$ wieder glatt sind auf U. Ebenso ist klar, daß $C^\infty(U)$ bezüglich der oben definierten Operationen eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra ist. □

(2.12) Notation. Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $U \subseteq M$. Dann setzen wir $\mathrm{Der}\,(U) := \mathrm{Der}\,(C^\infty(U))$.

(2.13) Definition. Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Die Menge linearer Abbildungen

$$\mathrm{T}_pM := \{X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R} : f \mapsto (Xf)(p) \mid X \in \mathrm{Der}\,(p)\}$$

heißt der *Tangentialraum von M an p*. Die Elemente aus T_pM werden *Tangentialvektoren in p* genannt.

(2.14) Lemma. Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist T_pM ein reeller Vektorraum. □

Jede glatte Abbildung f zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten M nach N induziert für jedes $p \in M$ durch

$$f^* : C^\infty(f(p)) \to C^\infty(p) : \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

einen $\mathbb{R}$-Algebren-Homomorphismus. Dabei gelten die Relationen

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad \text{und} \quad (\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_{C^\infty(p)} \quad \text{im Falle } M = N.$$

Desweiteren induziert f eine lineare Abbildung

$$\mathrm{T}_pf : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N : X_p \mapsto X_p \circ f^*.$$

Die Abbildung $\mathrm{T}_p f$ heißt *Tangentialabbildung* oder *Differential* von f in p.

Ist $p \in M$, so gibt es eine Karte $h : U \to \mathbb{R}^n$ mit $h(p) = 0$. Verstehen wir $\mathbb{R}^n$ ebenfalls als glatte Mannigfaltigkeit, so folgt aus $h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ die Relation

$$(h^{-1})^* \circ h^* = \mathrm{id}_{C^\infty(0)},$$

d.h. die Abbildung $h^* : C^\infty(0) \to C^\infty(p)$ ist ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Algebren. Somit genügt es, die Algebren $C^\infty(0)$ aller in 0 glatten Funktionen f von $\mathbb{R}^n$ zu untersuchen. Außerdem induziert h^* einen Vektorraum-Isomorphismus $\mathrm{T}_p h : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_0 \mathbb{R}^n$.

Als nächstes wollen wir die Dimension von $\mathrm{T}_p M$ bestimmen. Nach der intuitiven Vorstellung wie vor (2.10) beschrieben erwarten wir, daß $\dim \mathrm{T}_p M = n$ ist. Nach dem zuvor Gesagten genügt es, $\dim \mathrm{T}_0 \mathbb{R}^n$ auszurechnen. Um dies zu tun, benötigen wir das folgende Lemma.

(2.15) Lemma. *Sei $B_r(p) \subseteq \mathbb{R}^n$ die offene Kugel um $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r, wobei $r = \infty$ zugelassen ist und $B_\infty(p) = \mathbb{R}^n$ bedeute. Sei $f : B_r(p) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es glatte Funktionen $f_1, \ldots, f_n : B_r(p) \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \cdot f_i(x)$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_r(p)$, und $f_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ist die Ableitung von f nach der i-ten Komponente im Punkt p.

Beweis. Setzt man

$$f_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1 + t(x_1 - p_1), \ldots, p_n + t(x_n - p_n))\, \mathrm{d}t,$$

so gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p_1 + t(x_1 - p_1), \ldots, p_n + t(x_n - p_n))\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1 + t(x_1 - p_1), \ldots, p_n + t(x_n - p_n))\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \cdot f_i(x). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$f_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \ldots, p_n) \mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

□

(2.16) Satz. *Die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(0) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(0),$$

ausgewertet an der Stelle 0*, bilden eine Basis von* $\mathrm{T}_0\mathbb{R}^n$*. Insbesondere ist* $\dim \mathrm{T}_p M = \dim \mathrm{T}_0\mathbb{R}^n = n$*.*

Beweis. Aus der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

folgt für die k-te Koordinatenfunktion x_k

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_k = 0,$$

d.h. die partiellen Ableitungen an der Stelle 0 sind linear unabhängig. Wir wollen nun zeigen, daß diese auch den Vektorraum $\mathrm{T}_0\mathbb{R}^n$ erzeugen. Sei dazu $D \in \mathrm{Der}\,(0)$ und $a_k := D_0 x_k$. Betrachtet man die partiellen Ableitungen als Elemente von $\mathrm{Der}\,(0)$, so ist die Abbildung

$$C := D - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

eine Derivation von $C^\infty(p)$, und es gilt $C_0 x_k = 0$ nach Konstruktion. Eine Funktion $f \in C^\infty(0)$ läßt sich nach Lemma (2.15) schreiben als

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i$$

und wir erhalten hieraus

$$Cf = C(f(0)) + \sum_{i=1}^{n} Cx_i \cdot f_i + \sum_{i=1}^{n} Cf_i \cdot x_i,$$

wobei wir $f(0)$ als konstante Abbildung von M nach $\mathbb{R}$ mit Wert $f(0)$ auffassen. Wegen

$$X_0(gh) = X(gh)(0) = (g \cdot Xh + h \cdot Xg)(0) = g(0) \cdot X_0 h + h(0) \cdot X_0 g$$

für alle $X \in \mathrm{Der}\,(0)$ und alle $f, g \in C^\infty(0)$ folgt

$$C_0 f = \underbrace{C_0(f(0))}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_0 x_i \cdot f_i(0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} C_0 f_i \cdot \underbrace{x_i(0)}_{=0} = 0,$$

d.h. wir haben

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

wie gewünscht. □

Bemerkung. (a) Der obige Beweis funktioniert immer noch, wenn man anstelle von $D \in \mathrm{Der}\,(0)$ nur voraussetzt, daß $D : C^\infty(0) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $D(fg) = f(0)Dg + g(0)Df$ für alle $f, g \in C^\infty(0)$ ist.
(b) Ist $h : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M um p mit $h(p) = 0$, so ist die Menge

$$\left\{ \mathrm{T}_p h^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}) \right\}_{i=1}^{n} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ h^{-1^*} \right\}_{i=1}^{n}$$

eine Basis von T_pM. Wenn keine Verwechselungsgefahr besteht, schreiben wir für für $\frac{\partial}{\partial x_i} \circ h^{-1^*}$ wieder kurz $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

(2.17) Satz. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine glatte Abbildung in $p \in M$ und seien h_M bzw. h_N lokale Koordinaten um p bzw. um $f(p)$. Dann wird bezüglich der Basen $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{m}$ und $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \right\}_{j=1}^{n}$ von T_pM bzw. von $\mathrm{T}_{f(p)}N$ die Tangentialabbildung $\mathrm{T}_0\tilde{f}$ von $\tilde{f} = h_N \circ f \circ h_M^{-1}$ beschrieben durch die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}\tilde{f}(0)$ von $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ im Punkt 0 via*

$$\mathrm{D}\tilde{f}(0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i} \right)_{ij} (0) \cdot x.$$

Beweis. Durch die Einführung lokaler Koordinaten haben wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle h_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_N} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

wobei $\tilde{f}(0) = 0$ ist. Für $\varphi \in C^\infty(0)$ folgt aus der Definition des Differentials

$$\mathrm{T}_0\tilde{f}(X_0)(\varphi) = X_0 \circ \tilde{f}^*(\varphi) = X_0(\varphi \circ \tilde{f})$$

für alle $X_0 \in \mathrm{T}_0\mathbb{R}^m$. Mit Hilfe der Kettenregel gilt daher

$$\mathrm{T}_0\tilde{f}(\frac{\partial}{\partial x_i})(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi \circ \tilde{f})(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(0) \cdot \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i}(0)$$

und somit ist

$$\mathrm{T}_0\tilde{f}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}$$

wie behauptet. □

Da wir schon wissen, daß die Kettenregel für glatte reelle Funktionen gilt, folgt aus dem letzten Satz die Kettenregel für Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

(2.18) Korollar. *Seien $f : K^k \to M^m$ und $g : M^m \to N^n$ glatte Abbildungen und sei $p \in K$. Dann gilt die Kettenregel*

$$\mathrm{T}_p(g \circ f) = \mathrm{T}_{f(p)}g \circ \mathrm{T}_p f.$$

□

(2.19) Satz. *Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und sei (h, U) eine Karte von M. Sei X eine Derivation von $C^\infty(U)$. Dann gibt es Abbildungen $\gamma_i \in C^\infty(U)$ mit*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Insbesondere ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

eine Basis von $\mathrm{Der}\,(U)$.

Beweis. Sei $p \in U$ und $h(q) = (h_1(q), \ldots, h_n(q))$ für alle $q \in U$. Für $f \in C^\infty(U)$ setzen wir $\tilde{f} = f \circ h^{-1}$. Sei $V \subseteq M$ eine Umgebung von p, so daß $W = h(V)$ eine Kugel um $h(p)$ mit Radius r ist. Nach (2.15) können wir die Funktion $\tilde{f}$ auf W schreiben als

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(h(p)) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - h_i(p))\tilde{f}_i(x)$$

mit $\tilde{f}_i \in C^\infty(W)$ und

$$\tilde{f}_i(h(p)) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(h(p)).$$

Damit gilt für alle $q \in V$

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (h_i(q) - h_i(p)) f_i(x)$$

mit $f_i(q) = \tilde{f}_i(h(q)) \in C^\infty(V)$. Damit ist

$$f_i(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(h(p)).$$

Analog wie im Beweis von (2.16) ergibt die Anwendung der Derivation X mit anschließender Auswertung im Punkt $q = p$

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(h(p))(Xh_i)(p).$$

Bezeichnen wir die Derivation

$$C^\infty(U) \to C^\infty(U) : f \mapsto \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right) \circ h$$

erneut mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

so folgt mit $\gamma_i = Xh_i$ die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt aus (2.16). □

(2.20) Satz. *Seien M^m und N^n glatte Mannigfaltigkeiten und sei $f : U \subseteq M \to N$ glatt auf einer offenen Teilmenge U. Ist die Tangentialabbildung $\mathrm{T}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$ ein Vektorraum-Isomorphismus, so ist f ein lokaler Diffeomorphismus um p, d.h. es gibt Umgebungen $V \subseteq U$ von p und $W \subseteq N$ von $f(p)$, so daß die Einschränkung $f\big|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Seien $h_M : V' \to \mathbb{R}^m$ und $h_N : W' \to \mathbb{R}^n$ Karten um p bzw. um $f(p)$. Wir schreiben $g = h_N \circ f \circ h_M^{-1}$ mit $g(0) = 0$. Nach (2.17) wird $\mathrm{T}_0 g$ beschrieben durch

$$\mathrm{D}g(0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{ij} (0) \cdot x.$$

Nach Voraussetzung und dem Satz über die inverse Abbildung ist die Abbildung g lokal diffeomorph in einer Umgebung von 0. Da die Karten h_M und h_N Diffeomorphismen sind, ist auch $h_N^{-1} \circ g \circ h_M = f$ ein lokaler Diffeomorphismus um $h_M^{-1}(0) = p$. □

(2.21) Definition. Es sei $f : M^m \to N^n$ ein glatte Abbildung. Die Abbildung heißt *Immersion*, falls die lineare Abbildung $\mathrm{T}_p f$ für alle $p \in M$ den Rang m hat. Sie heißt *Submersion*, wenn $\mathrm{T}_p f$ für alle $p \in M$ den Rang n hat. Die Abbildung f heißt eine *Einbettung*, wenn $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von M und $f : M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus ist. Hat $\mathrm{T}_p f$ einen Rang kleiner als m, so heißt p ein *singulärer* oder *kritischer Punkt* von

f und $f(p)$ heißt ein *singulärer* oder *kritischer Wert* von f. Nicht singuläre Punkte und Werte werden *regulär* genannt.

(2.22) Der Tangentialraum (alternative Definition). Sei W_p die Menge aller glatten Abbildungen (Kurven) $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ mit $c(0) = p \in M$. Wir definieren zwei solche Wege c und d als äquivalent, in Zeichen $c \sim_p d$, falls für jede Funktion $f \in C^\infty(p)$

$$(f \circ c)'(0) = (f \circ d)'(0)$$

gilt, d.h. wenn sie die gleiche ,,Ableitung von Funktionen in Richtung der Kurve" definieren. Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden mit $[c]_p$ bezeichnet. Durch die lineare Abbildung

$$D_c : C^\infty(p) \to \mathbb{R} : f \mapsto (f \circ c)'(0)$$

wird ein Tangentialvektor von T_pM definiert, denn nach der Bemerkung von (2.16) folgt aus (2.16) und (2.19), daß eine lineare Abbildung $X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ genau dann ein Tangentialvektor ist, wenn $X_p(fg) = f(p)X_pg + g(p)X_pf$ für alle $f, g \in C^\infty(p)$ gilt. Die Derivation D_c wird die *Richtungsableitung in Richtung* $[c]_p$ genannt. Die Zuordnung

$$W_p/_{\sim_p} \to \mathrm{T}_pM : [c]_p \mapsto D_c$$

ist injektiv nach Definition. Sie ist auch surjektiv, denn für $D = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist $D = D_{h^{-1} \circ c}$ mit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : t \mapsto p + (ta_1, \ldots, ta_n)$, wobei $h : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte mit $h(p) = 0$ ist. Die Tangentialabbildung T_pf einer glatten Abbildung $f : M \to N$ läßt sich wie folgt beschreiben. Die Abbildung f induziert die Abbildung

$$W_p/_{\sim_p} \to W_{f(p)}/_{\sim_{f(p)}} : [c]_p \mapsto [f \circ c]_{f(p)},$$

und man erhält

$$\mathrm{T}_pf : D_c \mapsto D_{f \circ c}.$$

Diese Definition stimmt mit der usprünglichen Definition aus (2.13) überein, denn es gilt

$$D_{f \circ c}(\varphi) = (\varphi \circ f \circ c)'(0) = D_c(\varphi \circ f) = \mathrm{T}_pf(D_c)(\varphi).$$

(2.23) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ von glatten Funktionen $\varphi_i : M \to [0, 1]$ heißt eine (glatte) *Zerlegung der Eins*, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U_x von x gibt, so daß nur endlich viele Funktionen φ_i auf U_x nicht verschwinden und

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(u) = 1$$

für alle $u \in M$ gilt. Eine Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ heißt einer Überdeckung $\{V_j\}_{j\in J}$ von M aus offenen Mengen V_j *untergeordnet*, falls für jedes $i \in I$ der Träger

$$\operatorname{supp} \varphi_i := \overline{\{x \in M \mid \varphi_i(x) \neq 0\}}$$

in einer der Mengen V_j enthalten ist.

(2.24) Lemma. *Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es einen Atlas $\mathcal{A}_\mathfrak{U} = \{(h_k, V_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ von M mit folgenden Eigenschaften:*

(AT1) Zu jedem U_i gibt es ein V_k mit $V_k \subseteq U_i$.
(AT2) Jeder Punkt $x \in M$ liegt nur in endlich vielen Mengen V_k.
(AT3) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $h_k(V_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 3\}$.
(AT4) Die Urbilder $W_k := h_k^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\})$ überdecken M.

Beweis. Da M eine abzählbare Basis besitzt, können wir o.E. voraussetzen, daß $\mathfrak{U}$ abzählbar ist. Als lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis besitzt M eine Familie $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen $K_m \subseteq M$ mit $K_m \subseteq (K_{m+1})^\circ$ und $M = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$, siehe etwa Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Satz 8.22b. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es aufgrund der Kompaktheit der Mengen K_m endlich viele Karten $h_k : V_k \to \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 3\}$ mit $V_k \subseteq K^\circ_{m+2} \setminus K_{m-1}$ und $V_k \subseteq U_i$ für ein $i \in I$, so daß die Urbilder W_k die Menge $K_{m+1} \setminus K^\circ_m$ überdecken. Dies ergibt insgesamt abzählbar viele Karten, die (AT1) bis (AT4) erfüllen. □

(2.25) Lemma. *Zu jedem Paar (r, R) positiver reeller Zahlen mit $R > r$ gibt es eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit*

$$\psi^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\} \quad \text{und} \quad \psi^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \geq R\}\,.$$

Eine solche Funktion wird Glockenfunktion genannt.

Beweis. Die Funktion

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-2}) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist glatt und es gilt $\alpha^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Deshalb ist auch

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \alpha(R - x)}$$

glatt und es ist $\beta^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, sowie $\beta^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq R\}$. Die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - \beta(|x| - r)$$

ist glatt und erfüllt die Aussagen des Lemmas. Beachte dabei, daß die Betragsfunktion bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist. In einer Umgebung von $-r$ ist jedoch β konstant, d.h. ψ ist in einer Umgebung von 0 konstant und daher glatt. □

(2.26) Folgerung. *Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine zu $\mathfrak{U}$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}_{\mathfrak{U}} = \{h_k : V_k \to \mathbb{R}^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ der nach Lemma (2.24) zu $\mathfrak{U}$ assoziierte Atlas. Wähle nach (2.25) eine Glockenfunktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\psi^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ und $\psi^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \geq 2\}$. Dann ist für $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\psi_k : M \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \psi \circ h_k(x) & \text{falls } x \in V_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

glatt nach (AT3). Nach (AT2) ist

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$$

wohldefiniert und glatt. Wegen (AT4) und wegen $\psi \geq 0$ ist $s(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Also bildet die Familie $\left\{s^{-1} \cdot \psi_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine zu $\mathfrak{U}$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. □

(2.27) Folgerung. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien A und B zwei nichtleere, abgeschlossene, disjunkte Mengen aus M. Dann gibt es eine glatte Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(A) = \{0\}$ und $\varphi(B) = \{1\}$. Die Abbildung φ wird eine (glatte) Urysohn-Funktion auf M genannt.*

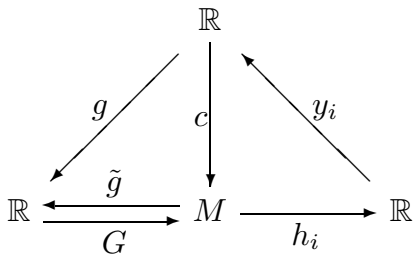
Beweis. Sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\{M \setminus A, M \setminus B\}$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Setzt man $J = \{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{supp}\varphi_n \subseteq M \setminus A\}$, so ist

$$\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$$

die gesuchte Abbildung, denn für $a \in A$ ist $\varphi(a) = 0$ nach Definition von J. Für $b \in B$ mit $\varphi_n(b) \neq 0$ ist $b \in \operatorname{supp}\varphi_n$, also $\operatorname{supp}\varphi_n \not\subseteq M \setminus B$. Da $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Überdeckung $\{M \setminus A, M \setminus B\}$ untergeordnet ist, folgt $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq M \setminus A$, also $n \in J$. Damit ist $1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(b) = \sum_{j\in J} \varphi_j(b) = \varphi(b)$. □

(2.28) Folgerung. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine einfache reguläre Kurve. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, so daß eine Karte (h, U) existiert mit $c([a, b]) \subseteq U$. Dann gibt es eine glatte Funktion $G : M \to \mathbb{R}$ mit $G(c(t)) = g(t)$ für alle $t \in [a, b]$.*

Beweis. Sei $t_0 \in [a,b]$ und sei $h : U \to \mathbb{R}^n : q \mapsto (h_1(q), \ldots, h_n(q))$ eine Karte um $c(t_0)$. Da c regulär ist, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ so daß die Abbildung $[a,b] \to \mathbb{R} : t \mapsto (h_i \circ c)(t))$ eine nichtverschwindende Ableitung im Punkt t_0 besitzt. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion gibt es eine glatte Funktion $y_i : (c,d) \to \mathbb{R}$ mit $(y_i \circ h_i \circ c)(t) = t$. Außerdem gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ um $c(t_0)$, so daß $\tilde{g} := g \circ y_i \circ x_i : V \to \mathbb{R}$ glatt ist. Da M lokalkompakt ist, ist M regulär. Also gibt es offene Umgebungen $W, W' \subseteq V$ um $c(t_0)$ mit $\overline{W} \subseteq W' \subseteq \overline{W'} \subseteq V$. Wegen $\overline{W} \cap M \setminus V = \emptyset$ gibt es nach (2.27) eine glatte Urysohn-Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(\overline{W}) = \{1\}$ und $\varphi(M \setminus W') = \{0\}$. Dann läßt sich die Abbildung $\varphi \cdot \tilde{g}$ durch die Nullfunktion zu einer glatten Abbildung $\tilde{G} : M \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Insbesondere ist $\tilde{G}(c(t)) = g(t)$ in einer Umgebung von t_0 in $[a,b]$. Das folgende Diagramm zeigt die bisherige Situation.



Da $[a,b]$ kompakt ist, ist auch $c([a,b])$ kompakt. Daher gibt es endlich viele offene Mengen $U_1, \ldots, U_n \subseteq U$ und glatte Abbildungen $\tilde{G}_i : M \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{G}_i(c(t)) = g(t)$ für alle $t \in [a,b]$ mit $c(t) \in U_i$. Wähle eine offene Überdeckung $\left\{\tilde{U}_i\right\}_{i \in I}$ von $M \setminus c([a,b])$. Dann ist

$$\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\} \cup \left\{\tilde{U}_i\right\}_{i \in I}$$

eine Überdeckung von M. Nach (2.26) gibt es eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Setze $J_1 := \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{supp} s_i \subseteq U_1\}$, sowie $J_k := \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{supp} s_i \subseteq U_k\} \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_{k-1})$ für $1 < k \leq n$. Die Funktion

$$G : M \to \mathbb{R} : q \mapsto \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{G}_i(q) \sum_{j \in J_i} s_j(q) \right)$$

ist glatt und es gilt für $t \in [a,b]$

$$G(c(t)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{G}_i(c(t)) \sum_{j \in J_i} s_j(c(t)) \right) = g(t) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} s_j(c(t))}_{=1} = g(t).$$

□

KAPITEL 3

Flächen I, Die erste Fundamentalform

(3.1) Definition. Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *(reguläre) m-Fläche*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, und einen glatten regulären (d.h. das Differential $\mathrm{D}F(x)$ ist für alle $x \in U$ injektiv) Homöomorphismus $F : U \to V \cap S$ gibt. Die Abbildung F heißt eine *Parametrisierung von S um p.*

(3.2) Beispiele. (a) Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine glatte Funktion, so ist die Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (x, g(x))$ eine Parametrisierung der m-Fläche $S = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$, genannt der *Graph von g.*
(b) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine glatte Funktion und sei $a \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f, d.h. es hat $\mathrm{D}f(p)$ Rang $n - m$ für alle $p \in U$ mit $f(p) = a$. Dann folgt aus dem Satz über implizite Funktionen (siehe Spivak [15], 2-12), daß die Menge $S = f^{-1}(a) = \{x \in U \mid f(x) = a\}$ eine m-Fläche ist, die *Niveaufläche* genannt wird.

Bemerkung. Eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist stets eine glatte Mannigfaltigkeit im Sinne von Definition (2.4), denn S ist bzgl. der Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$ ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis und die Menge der Inversen aller Parametrisierungen von S ergibt einen glatten Atlas von S, da alle Kartenwechsel glatt sind aufgrund der Injektivität der Differentiale (Satz über die Umkehrfunktion, siehe [15], 2-11). Deshalb ist eine Fläche S im wesentlichen unabhängig von der Wahl der Parametrisierung, d.h. zwei Parametrisierungen $F : U \to S$, $G : V \to S$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ unterscheiden sich nur durch einen Diffeomorphismus $G^{-1} \circ F$.

(3.3) Satz. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche. Dann gibt es zu jedem $p \in S$ eine offene Umgebung W von p in S, so daß W der Graph einer glatten Funktion $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ ist.*

Beweis. Nach Definition gibt es zu $p \in S$ eine Parametrisierung $F : U \to W := V \cap S$ von S, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist. Sei $a \in U$ mit $F(a) = p$. Das Differential $\mathrm{D}F(a)$ von F in a ist bzgl. der kanonischen Basen durch eine $n \times m$-Matrix A beschrieben. Da nach Voraussetzung der Kern der linearen Abbildung $\lambda : x \mapsto Ax : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ trivial ist, hat A den Rang m, d.h. es existieren m linear unabhängige Zeilen in A. Durch etwaiges Permutieren der kanonischen Basis können wir annehmen, daß die ersten m Zeilen von A linear unabhängig sind. Sei $\pi^n_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$ die entsprechende

Projektion. Dann ist die Komposition $G := \pi_m^n \circ F : U \to \mathbb{R}^m$ regulär im Punkt $F^{-1}(p)$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist G^{-1} in einer Umgebung von p differenzierbar und regulär. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß diese Umgebung gerade $\pi_m^n(W)$ ist. Mit $\pi_{n-m}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ ist dann

$$F(x) = (\pi_m^n(F(x)), \pi_{n-m}^n(F(x))) = (G(x), \pi_{n-m}^n(F(x)))$$

für alle $x \in U$. Damit ist

$$W = \left\{(u, \pi_{n-m}^n \circ F \circ G^{-1}(u)) \;\middle|\; u \in \pi_m^n(W)\right\}$$

der Graph der glatten Funktion $H := \pi_{n-m}^n \circ F \circ G^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$. □

(3.4) Korollar. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche. Dann gibt es zu jedem $p \in S$ eine offene Umgebung W von p in S, so daß $W = g^{-1}(0)$ Niveaufläche einer glatten Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ ist, die in p regulär ist.*

Beweis. Zu $p \in S$ gibt es nach (3.3) eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, so daß $W = V \cap S$ der Graph einer glatten Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ ist, also $p = (x, f(x))$ für ein $x \in U$. Setzt man

$$g : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m} : (x, a) \mapsto a - f(x),$$

so ist $W = \{(x, a) \in U \times \mathbb{R}^{n-m} \mid g(x, a) = 0\}$ und g ist regulär in p, d.h. der Rang von $\mathrm{D}g(p)$ ist $n - m$. □

(3.5) Beispiele. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$ mit $a = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$. Dann ist 1 ein regulärer Wert von f, denn für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = 1$ gibt es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $a_ix_i^2 \neq 0$, und daher ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2a_ix_i \neq 0$. Also ist nach Beispiel (3.2)(b) die Niveaufläche $Q := f^{-1}(1)$ eine Fläche in $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten einige Spezialfälle:

(a) $a = (1, 1, 1)$. Dann ist Q die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$.
(b) Sind alle a_i positiv, so ist Q ein Ellipsoid.
(c) Für $a = (-1, -1, 1)$ ergibt sich die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$ eines zweischaligen Hyperboloids. Diese Fläche ist unzusammenhängend.
(d) Ist $a = (1, 1, -1)$, so erhält man ein einschaliges Hyperboloid.
(e) Für $a = (1, 1, 0)$ bekommt man den Zylinder.

(3.6) Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche und sei $p \in S$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor an S in p*, wenn es eine glatte parametrisierte Kurve $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \to S$ gibt, so daß $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ gilt. Die Menge aller Tangentialvektoren an S in p bezeichnen wir wieder mit T_pS.

(3.7) Satz. *Sei $F : U \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der m-Fläche S. Dann ist die Menge aller Tangentialvektoren in $b = F(a)$ ein m-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, der gegeben ist durch $\mathrm{D}F(a)(\mathbb{R}^m)$. Somit ist der auf diese Weise definierte Tangentialraum unabhängig von der Parametrisierung.*

Beweis. Sei v ein Tangentialvektor an S in b. Dann gibt es eine glatte Kurve $c : [-1, 1] \to S$ mit $c(0) = b$ und $c'(0) = v$. Dann ist die Komposition $d : F^{-1} \circ c : [-1, 1] \to U$ eine glatte Kurve in U mit $d(0) = a$. Außerdem ist

$$v = c'(0) = \mathrm{D}F(d(0)) \cdot d'(0) = \mathrm{D}F(a) \cdot d'(0) \in \mathrm{D}F(a)(\mathbb{R}^m).$$

Ist umgekehrt $v \in \mathrm{D}F(a)(\mathbb{R}^m)$, so gibt es $w \in \mathbb{R}^m$ mit $v = \mathrm{D}F(a)(w)$. Betrachte die glatte Kurve $d : [-1, 1] \to \mathbb{R}^m : t \mapsto a + tw$. Die Kurve $c = F \circ d : [-\varepsilon, \varepsilon] \to S$ ist für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ebenfalls glatt und es ist $c(0) = F(a) = b$ und $c'(0) = \mathrm{D}F(d(0)) \cdot d'(0) = \mathrm{D}F(a)(w) = v$.
Ist $\tilde{F} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Parametrisierung mit $b = \tilde{F}(\tilde{a})$, so ist $h = F^{-1} \circ \tilde{F}$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\mathrm{D}F(a) = D(\tilde{F} \circ h^{-1})(a) = \mathrm{D}\tilde{F}(h^{-1}(a)) \cdot \mathrm{D}h^{-1}(a) = \mathrm{D}\tilde{F}(\tilde{a}) \cdot \mathrm{D}h^{-1}(a),$$

also

$$\mathrm{D}F(a)(\mathbb{R}^m) = \mathrm{D}\tilde{F}(\tilde{a}) \cdot \mathrm{D}h^{-1}(a)(\mathbb{R}^m) = \mathrm{D}\tilde{F}(\tilde{a})(\mathbb{R}^m),$$

da $\mathrm{D}h^{-1}(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Also ist der Tangentialraum im Punkt b unabhängig von der gewählten Parametrisierung. □

(3.8) Satz. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Niveaumenge einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ vom Rang $n - m$, d.h. es ist $S = f^{-1}(b)$. Dann ist die Menge aller Tangentialvektoren in $a \in S$ gegeben durch* $\ker \mathrm{D}f(a)$.

Beweis. Sei v ein Tangentialvektor an S in a. Dann gibt es eine glatte Kurve $c : [-1, 1] \to S$ mit $c(0) = a$ und $c'(0) = v$. Außerdem ist $f(c(t)) = b$ für alle $t \in [-1, 1]$. Somit folgt $0 = \mathrm{D}f(a)(c'(0)) = \mathrm{D}f(a)(v)$, also $v \in \ker \mathrm{D}f(a)$. Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen liefert $\dim \ker \mathrm{D}f(a) + \dim \mathrm{D}f(a)(\mathbb{R}^n) = n$, also ist $\dim \ker \mathrm{D}f(a) = m$. Wegen $\dim \mathrm{T}_a S = m$ folgt damit $\ker \mathrm{D}f(a) = \mathrm{T}_a S$. □

Bemerkung. Nach der alternativen Beschreibung des Tangentialraumes in Kapitel 2 ist klar, daß Tangentialvektoren auch im Sinne von (2.22) interpretiert werden können, wenn wir S als glatte Mannigfaltigkeit auffassen. Deshalb können die Resultate aus Kapitel 2 im Rahmen der jetzigen Definitionen interpretiert werden. Ein wichtiges Ergebnis dabei ist:

(3.9) Satz. *Seien $S_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ und $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Flächen und sei $f : S_1 \to S_2$ glatt im Punkt p, d.h. es gibt Parametrisierungen $F_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^m \to S_1$ mit $F_1(0) = p$ und $F_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \to S_2$ mit $F_2(0) = f(p)$, so daß $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \to U_2$ glatt ist im Punkt 0. Dann ist die Tangentialabbildung $\mathrm{T}_p f$ gegeben durch*

$$\mathrm{T}_p f : \mathrm{T}_p S_1 \to \mathrm{T}_{f(p)} S_2 : c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0),$$

wobei $c : [-1, 1] \to S_1$ eine Kurve ist mit $c(0) = p$. □

(3.10) Erinnerung an Bilinearformen. Eine *Bilinearform* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine in beiden Argumenten lineare Abbildung f, d.h. es ist $f(ax + bx', y) = af(x, y) + bf(x', y)$ und $f(x, ay + by') = af(x, y) + bf(x, y')$ für alle $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$.
Die zu f gehörige *quadratische Form* $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $q(x) := f(x, x)$. Insbesondere gilt $q(ax) = a^2 q(x)$. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *quadratisch*. Falls f symmetrisch ist (also falls $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt), so ist f durch q via $f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ eindeutig bestimmt. Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so gilt mit $f_{ij} = f(b_i, b_j)$, $x = \sum x_i b_i$ und $y = \sum y_i b_i$ die Darstellung

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i y_j.$$

Wählt man speziell für $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die kanonische Basis, so ist

$$f(x, y) = x^t F y \quad \text{mit } F = (f_{ij})_{i,j}.$$

Ist f symmetrisch, so ist die Matrix F ebenfalls symmetrisch. Die Umkehrung gilt natürlich ebenso. Eine symmetrische Bilinearform f heißt *Skalarprodukt*, falls sie *positiv definit* ist, d.h. es ist $q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Das gewöhnliche Skalarprodukt $f(x, y) = \langle x, y \rangle = x^t y$ ist ein Skalarprodukt in diesem Sinne und besitzt die Einheitsmatrix $F = E_n$ als zugehörige Matrix.
Ist $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, so ist durch $g(x, y) := f(\alpha(x), \alpha(y))$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^m$ definiert. Diese heißt die von f und α *induzierte Bilinearform*. Hat α die Matrixdarstllung A bzgl. gewisser Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, und hat f bzgl. $\mathcal{B}_1$ die Matrix F, so hat g bzgl. $\mathcal{B}_2$ die Matrixdarstellung $G = A^t F A$.
Sind $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ zwei Basen von $\mathbb{R}^n$ und sind F bzw. $\tilde{F}$ die zugehörigen Matrixdarstellungen von f, so ist $\tilde{F} = A^t F A$, wobei A die Transformationsmatrix zum Basiswechsel ist.
Ist f eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ und ist $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear mit $f(\alpha(x), y) = f(x, \alpha(y))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, so heißt α *selbstadjungiert bzgl. f*. Bezüglich einer Orthonormalbasis wird α durch eine symmetrische Matrix beschrieben.

(3.11) Die erste Fundamentalform. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche und sei $p \in S$. Das Skalarprodukt

$$g_p : \mathrm{T}_pS \times \mathrm{T}_pS \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle ,$$

heißt die *erste Fundamentalform* von S in p, d.h. g_p ist die Einschränkung des gewöhnlichen Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle$ von $\mathbb{R}^n$ auf den m-dimensionalen Unterraum T_pS. Die erste Fundamentalform ist ein Spezialfall einer *Riemannschen Metrik*, siehe dazu das folgende Kapitel.

(3.12) Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform. Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to S$ eine Parametrisierung der Fläche S bei $y = F(x)$. Nach (3.7) ist dann $\mathrm{D}F(x) : \mathbb{R}^m \to \mathrm{T}_yS$ ein linearer Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^m$ und T_yS. Die vom euklidischen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathrm{D}F(x) = (\frac{\partial F_k}{\partial x_l}(x))_{kl}$ induzierte Bilinearform g_y auf T_yS ist bzgl. der Basis $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\right\}_{i=1}^m$ gegeben durch die Matrix

$$G(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^m, \quad \text{wobei } g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right\rangle .$$

In dieser Schreibweise ist dann $g_y(u, v) = u^t G(x) v$ für alle $u, v \in \mathrm{T}_yS$. Wendet man das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die kanonische Basis $(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m})$ von T_pS an, so kann man stets erreichen, daß $G(p)$ die Einheitsmatrix ist.

(3.13) Lemma. *Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche mit Parametrisierungen $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to S$ und $\tilde{F} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m \to S$. Ist $y = F(x) = \tilde{F}(\tilde{x})$, so gilt für die Matrixdarstellungen G und $\tilde{G}$ der zugehörigen ersten Fundamentalformen $\tilde{G} = A^t G A$, wobei $A = A(\tilde{x})$ die Jacobi-Matrix des Parameterwechsels $h = F^{-1} \circ \tilde{F}$ an der Stelle $\tilde{x}$ ist.*

Beweis. Wegen $\tilde{F} = F \circ h$ ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}).$$

Damit folgt die Behauptung aus (3.10) und (3.12), da die beiden Basen $\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\right\}_{i=1}^m$ und $\left\{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x})\right\}_{i=1}^m$ nach obiger Gleichung durch die Jacobi-Matrix von h ineinander übergeführt werden. □

(3.14) Beispiele.
(a) *Die Hyperebene* $H = \left\{a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig. Dann ist

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n$$

eine globale Parametrisierung von H und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_1,\ldots,t_n) = a_i$$

und

$$g_{ij}(t_1,\ldots,t_n) = \langle a_i, a_j\rangle\,.$$

(b) *Die Sphäre* $S_r = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x| = r\right\}$ *in* $\mathbb{R}^3$. Die Sphäre S_r läßt sich parametrisieren durch $F : (0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 : (s,t) \mapsto (r\sin s\cos t, r\sin s\sin t, r\cos s)$. Damit folgt

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = (r\cos s\cos t, r\cos s\sin t, -r\sin s), \quad \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = (-r\sin s\sin t, r\sin s\cos t, 0),$$

und

$$g_{11}(s,t) = r^2,\ g_{12}(s,t) = 0,\ g_{22}(s,t) = r^2\sin^2 s.$$

(c) *Der Zylinder* $Z_r = \{(r\cos t, r\sin t, s) \mid s \in \mathbb{R}, t \in (0,2\pi)\}$. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = (0,0,1), \quad \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = (-r\sin t, r\cos t, 0),$$

woraus

$$g_{11}(s,t) = 1,\ g_{12}(s,t) = 0,\ g_{22}(s,t) = r^2$$

folgt.

(d) *Der Torus* $T_r = \{((r_1 + r_2\cos s)\cos t, (r_1 + r_2\cos s)\sin t, r_2\sin s) \mid s,t \in (0,2\pi)\}$. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = (-r_2\sin s\cos t, -r_2\sin s\sin t, r_2\cos s),$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = (-(r_1 + r_2\cos s)\sin t, (r_1 + r_2\cos s)\cos t, 0),$$

und

$$g_{11}(s,t) = r_2^2,\ g_{12}(s,t) = 0,\ g_{22}(s,t) = (r_1 + r_2\cos s)^2.$$

(e) *Die Sattelfläche* $A = \left\{(s,t,s^2 - t^2) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, s,t \in (-1,1)\right\}$. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = (1,0,2s), \quad \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = (0,1,-2t),$$

und

$$g_{11}(s,t) = 4s^2 + 1,\ g_{12}(s,t) = -4st,\ g_{22}(s,t) = 4t^2 + 1.$$

KAPITEL 4

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Die Idee der Riemannschen Mannigfaltigkeit beruht auf dem Begriff des Tangentialbündels. Um letzteres zu definieren, beginnen wir etwas allgemeiner mit Vektorraumbündeln. In diesem Kapitel sei M stets ein glatte Mannigfaltigkeit.

(4.1) Definition. Ein Tripel $\xi = (E, \pi, B)$ heißt *n-dimensionales reelles Vektorraumbündel*, wenn E und B topologische Räume sind und $\pi : E \to B$ eine stetige surjektive Abbildung ist, so daß folgende Axiome gelten:

(VB1) Jede *Faser* $E_b := \pi^{-1}(b) \subseteq E$ ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

(VB2) Zu jedem Punkt $b \in B$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq B$ und einen Homöomorphismus $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, so daß die Einschränkung $h_b := h\big|_{E_b} : E_b \to \{b\} \times \mathbb{R}^n$ für jedes $b \in U$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Der Raum E heißt der *Totalraum*, der Raum B heißt die *Basis* und die Abbildung π die *Projektion* des Bündels ξ. Die Abbildung (h, U) aus Axiom (VB2) wird eine *Bündelkarte* genannt. Das Bündel ξ heißt *trivial*, wenn eine Bündelkarte $h : E \to B \times \mathbb{R}^n$ existiert. Deshalb wird Axiom (VB2) auch *Axiom der lokalen Trivialität* genannt.

Eine stetige Abbildung $s : B \to E$ heißt *Schnitt* des Bündels ξ, falls $s(b) \in E_b$ ist für alle $b \in B$. Die Abbildung $s_0 : B \to E : b \mapsto 0 \in E_b$ ist ein Schnitt von ξ, genannt der *Nullschnitt*.

Bemerkung. Ist $s : B \to E$ ein Schnitt eines Vektorraumbündels $\xi = (E, \pi, B)$, so ist $s : B \to s(B) \subseteq E$ eine Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung s^{-1} ist gerade die Einschränkung $\pi\big|_{s(B)}$.

(4.2) Beispiele. (a) Der Zylinder $Z = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ läßt sich als ein triviales 1-dimensionales Vektorraumbündel $(Z, \pi, \mathbb{S}_1)$ ansehen, wobei $\pi : Z \to \mathbb{S}_1$ die Projektion auf die zweite Komponente ist.
(b) Das offene Moebiusband läßt sich ebenfalls als ein 1-dimensionales Vektorraumbündel deuten. Dieses ist aber *nicht* trivial.

(4.3) Definition. Sei $\xi = (E, \pi, B)$ ein n-dimensionales Vektorbündel und sei $A \subseteq B$ ein topologischer Unterraum von B. Dann ist $\xi_A := (\pi^{-1}(A), \pi\big|_{\pi^{-1}(A)}, A)$ ein n-

dimensionales Vektorbündel über A, welches die *Einschränkung von ξ auf A* genannt wird. Gibt es eine Teilmenge $F \subseteq E$, so daß es um jeden Punkt aus B eine Bündelkarte (h, U) mit

$$h(\pi^{-1}(U) \cap F) = U \times \mathbb{R}^k \subseteq U \times \mathbb{R}^n$$

gibt, so ist $\xi^F = (F, \pi\big|_F, B)$ ein k-dimensionales Vektorbündel über B, welches ein k-dimensionales *Teilbündel* von ξ genannt wird.

(4.4) Definition. Sei $\xi = (E, \pi, B)$ ein n-dimensionales reelles Vektorraumbündel. Eine Menge $\{(h_i, U_i)\}_{i \in I}$ von Bündelkarten heißt *Bündelatlas* von ξ, falls $\bigcup_{i \in I} U_i = B$ ist. Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so heißen die Abbildungen

$$U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n^2} : x \mapsto (h_j)_x \circ (h_i)_x^{-1}$$

Übergangsfunktionen des Atlanten.

(4.5) Definition. Sei $\xi = (E, \pi, B)$ ein n-dimensionales reelles Vektorraumbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit B. Das Bündel ξ mit Bündelatlas $\mathcal{A}$ heißt *glatt*, falls alle Übergangsfunktionen bzgl. $\mathcal{A}$ glatt sind.

Bemerkung. (a) Wie in der Bemerkung zu Definition (2.4) läßt sich der Bündelatlas eines glatten Vektorraumbündels stets zu einem maximalen glatten Bündelatlas erweitern. (b) Ist $\xi = (E, \pi, B)$ ein glattes n-dimensionales reelles Vektorraumbündel über der k-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit B, so ist der Totalraum eine $(n+k)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn die Bündelkarten von ξ definieren einen glatten Atlas auf E.

Um das *Tangentialbündel* $\xi = (E, \pi, M)$ einer glatten Mannigfaltigkeit M zu definieren, wird es notwendig sein, anstatt von einem topologischen Raum E nur von einer Menge E auszugehen. In diesem Falle wird π nur als surjektiv und die Bündelkarten (h, U) als bijektiv vorausgesetzt, so daß die Abbildungen $h_b : E_b \to \{b\} \times \mathbb{R}^n$ lineare Vektorraum-Isomorphismen sind und alle Übergangsfunktionen glatt sein sollen. Man nennt ξ dann ein *Prä-Vektorbündel*. Von dieser Situation ausgehend wollen wir der Menge E eine Hausdorff-Topologie mit abzählbarer Basis verpassen. Dazu wählen wir eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ von M. Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Bündelkarte (h_p, U_p), wobei U_p eine offene Umgebung von p in M ist. Wähle zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $B_p \in \mathcal{B}$ um p mit $B_p \subseteq U_p$. Zu jedem $B \in \mathcal{B}$, welches in einer Bündelkartenumgebung U_B liegt, sei h_B die Einschränkung der zu U_B gehörigen Bündelkarte auf B. Da $\mathcal{B}$ abzählbar ist, ist auch die Menge aller so definierten Paare (B, h_B) abzählbar. Nun definieren wir die Topologie auf E als die Initialtopologie $\mathcal{O}_E$ bzgl. aller Abbildungen $h_B : E \to B \times \mathbb{R}^n$. Diese hat nach Konstruktion ebenfalls eine abzählbare Basis. Da die Abbildungen h_B injektiv sind,

werden die Abbildungen $h_B : \pi^{-1}(B) \to B \times \mathbb{R}^n$ bzgl. $\mathcal{O}_E$ zu Homöomorphismen. Die Hausdorff-Eigenschaft folgt aus dem Axiom der lokalen Trivialität.

(4.6) Satz. Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$. Dann ist durch

$$\mathrm{T}M := \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p M,$$

$$\pi : \mathrm{T}M \to M : x \mapsto b, \quad \text{falls } x \in \mathrm{T}_b M,$$

$$\{h_f \mid (f, U) \in \mathcal{A}\},$$

wobei

$$h_f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n : D \mapsto \{p\} \times (Df_1, \ldots, Df_n),$$

falls $D \in \mathrm{T}_p M$ und $f = (f_i)_{i=1}^n$ ist, ein glattes n-dimensionales Vektorraum-Bündel

$$\mathrm{T}M = (\mathrm{T}M, \pi, M)$$

definiert. Das Bündel $\mathrm{T}M$ wird das *Tangentialbündel* von M genannt. Nach obiger Bemerkung ist $\mathrm{T}M$ eine $2n$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei (f, U) eine Karte von M. Nach (2.17) läßt sich die Tangentialabbildung $\mathrm{T}_p f$ als Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(0)$ bzgl. der Basen $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^n$ und $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j=1}^n$ schreiben. Da die Abbildung $f : U \to f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist, ist

$$\mathrm{D}f(0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(0)$$

eine reguläre Matrix. Sei $D \in \mathrm{T}_b M = \pi^{-1}(b)$ für ein $b \in M$. Dann ist in lokalen Koordinaten nach (2.16)

$$D = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

für gewisse $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wegen

$$(Df_1, \ldots, Df_n) = (a_1, \ldots, a_n)\mathrm{D}f(0)$$

folgt aus der Regularität von $\mathrm{D}f(0)$, daß die Abbildung $h_f\big|_{T_p M}$ bijektiv ist. Damit ist auch h_f eine Bijektion. Die Übergangsfunktionen

$$(h_f)_x \circ (h_g)_x^{-1} : U_f \cap U_g \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$$

lassen sich lokal wie oben als Produkt von Jacobi-Matrizen darstellen. Deshalb sind die Übergangsfunktionen glatt. □

(4.7) Definition. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Durch die Tangentialabbildungen $\mathrm{T}_p f : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$ wird nach (2.17) eine glatte Abbildung $\mathrm{T}f : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$, das *Differential* von f, definiert.

(4.8) Definition. Ein (glattes) *Vektorfeld* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein (glatter) Schnitt $X : M \to \mathrm{T}M$ des Tangentialbündels. Anstelle des Funktionswertes $X(p)$ schreiben wir auch häufig X_p.

(4.9) Lemma. *Die Menge $\mathrm{Vec}(M)$ (oder auch $\mathfrak{T}^1(M)$) aller Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M^n ist bezüglich punktweiser Addition und $(f, X) \mapsto fX = (p \mapsto f(p) \cdot X_p)$ als Skalarmultiplikation ein Modul über dem Ring $\mathrm{C}^\infty(M)$.* □

Bemerkung. Ein glattes Vektorfeld X auf M läßt sich via

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto (p \mapsto (X_p(f)(p)))$$

als Derivation der $\mathbb{R}$-Algebra $C^\infty(M)$ auffassen. Umgekehrt induziert jede Derivation X von $C^\infty(M)$ via

$$p \mapsto X_p = (f \mapsto (Xf)(p)) : M \to \mathrm{T}M$$

ein Vektorfeld auf M, welches nach (2.19) glatt ist.

(4.10) Lemma. *Sei $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$. Sei $p \in M$ und sei $h : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um p mit lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$. Dann gibt es Funktionen $f_i \in C^\infty(U)$ mit*

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Beweis. Folgt aus der obigen Bemerkung wie im Beweis von (2.19). □

(4.11) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge von M. Sei $p \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von p in U, so daß zu jedem Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathrm{Vec}\,(U)$ ein Vektorfeld $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$ gibt, welches auf V mit $\tilde{X}$ übereinstimmt.*

Beweis. Sei $p \in U$. Da M lokalkompakt und damit regulär ist, gibt es eine offene Umgebungen V, W von p in U mit $\overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Dann ist $\overline{V} \cap (M \setminus W) = \emptyset$. Somit gibt es nach (2.27) eine glatte Urysohn-Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(V) = \{1\}$ und $\varphi(M \setminus W) \subseteq \{0\}$.

Damit läßt sich $\varphi\tilde{X}$ außerhalb von U durch den Nullschnitt zu einem glatten Vektorfeld $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$ fortsetzen, welches auf V mit $\tilde{X}$ übereinstimmt. □

(4.12) Definition. Sei $\mathfrak{T}_1(M)$ der zu $\mathrm{Vec}\,(M) = \mathfrak{T}^1(M)$ duale $C^\infty(M)$-Modul. Wir nennen die Elemente von $\mathfrak{T}_1(M)$ *Differential-1-Formen* oder einfach *1-Formen.*

(4.13) Lemma. *Seien $X \in \mathfrak{T}^1(M)$ und $\omega \in \mathfrak{T}_1(M)$. Verschwindet X auf einer Umgebung U von p, so verschwindet auch $\omega(X)$ auf U.*

Beweis. Sei $p \in U$. Da M lokalkompakt ist, gibt es offene Umgebungen V, W von p mit $\overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Nach (2.27) gibt es eine glatte Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(\overline{V}) = \{0\}$ und $\varphi(M \setminus W) \subseteq \{1\}$. Dann ist $\varphi X = X$ und aus der Linearität von ω folgt

$$\omega(X)(p) = \omega(\varphi X)(p) = \varphi(p)\omega(X)(p) = 0.$$

□

(4.14) Lemma. *Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge von M. Dann induziert jede 1-Form ω auf M eine 1-Form auf U.*

Beweis. Sei $\tilde{X} \in \mathrm{Vec}\,(U)$ und sei $p \in U$. Dann gibt es nach (4.11) eine offene Umgebung $V \subseteq U$ um p und ein Vektorfeld $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$, welches mit $\tilde{X}$ auf V übereinstimmt. Setze nun

$$\left(\omega_U(\tilde{X})\right)(p) = \omega(X)(p).$$

Nach (4.13) ist $\omega_U(X)$ unabhängig von der Wahl des Vektorfeldes X, d.h. die Abbildung ω_U ist wohldefiniert. Da ω_U linear ist, ist ω_U eine 1-Form auf U. □

(4.15) Darstellung einer 1-Form in lokalen Koordinaten. Sei $\omega \in \mathfrak{T}_1(M)$. Sei $h : U \to \mathbb{R}^n : q \mapsto (x_1(q), \ldots, x_n(q))$ eine Karte von M. Betrachte auf U die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann sind auf U durch

$$\omega^j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta_{ij}$$

n verschiedene 1-Formen ω^j auf U definiert. Sei $X \in \mathfrak{T}^1(M)$. Nach (4.10) läßt sich X auf U schreiben als

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Setzen wir

$$u^j := \omega_U\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

und

$$\tilde{\omega} := \sum_{j=1}^{n} u^j \omega^j,$$

so folgt aus der Linearität von ω_U

$$\omega_U(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \omega_U \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, u^i = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \tilde{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \tilde{\omega}(X),$$

d.h. es ist

$$\omega_U = \sum_{j=1}^{n} u^j \omega^j,$$

(4.16) Lemma. *Seien $X \in \mathfrak{T}^1(M)$ und $\omega \in \mathfrak{T}_1(M)$. Ist $X_p = 0$ für ein $p \in M$, so ist $\omega(X)(p) = 0$.*

Beweis. Sei $h : U \to \mathbb{R}^n : q \mapsto (x_1(q), \ldots, x_n(q))$ eine Karte um den Punkt p. Auf U läßt sich X nach (4.10) darstellen als

$$X = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

mit glatten Funktionen $f_k : U \to \mathbb{R}$. Wegen $X_p = 0$ folgt $f_k(p) = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$. Dann ist nach (4.14) und (4.13)

$$\omega(X)(p) = \omega_U(X)(p) = \sum_{k=1}^{n} f_k(p) \omega_U \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)(p) = 0.$$

□

Ist $\omega \in \mathfrak{T}_1(M)$, so ist die Abbildung

$$\omega_p : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R} : X_p \mapsto \omega(X)(p)$$

wohldefiniert, denn sind $X, Y \in \mathfrak{T}^1(M)$ mit $X_p = Y_p$, so folgt aus (4.16) sofort

$$\omega(X - Y)(p) = 0,$$

also $\omega_p(X_p) = \omega_p(Y_p)$. Somit können wir folgende Definition angeben.

(4.17) Definition. Sei $p \in M$. Die Menge linearer Abbildungen

$$\mathrm{T}_p^* M := \{\omega_p : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R} \,|\, \omega \in \mathfrak{T}_1(M)\}$$

heißt der *Cotangentialraum von M an p*. Die Elemente aus T_p^*M werden *Cotangentialvektoren in p* genannt.

(4.18) Lemma. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist T_p^*M ein reeller Vektorraum. □

(4.19) Tensoren. Sei V ein Modul über einem kommutativen Ring R und sei V^* der zu V duale R-Modul. Dann bildet die Menge aller Multilinearformen

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s} \to R$$

via punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen R-Modul $\mathfrak{T}_s^r(V)$: für $f, g \in \mathfrak{T}_s^r(V)$ und $\lambda \in R$ setzen wir

$$(f+g)(x_1, \ldots, x_{r+s}) = f(x_1, \ldots, x_{r+s}) + g(x_1, \ldots, x_{r+s})$$

und

$$(\lambda f)(x_1, \ldots, x_{r+s}) = \lambda \cdot f(x_1, \ldots, x_{r+s}).$$

Die Elemente von $\mathfrak{T}_s^r(V)$ werden auch *Tensoren vom Typ* (r, s) oder kurz (r, s)-*Tensoren* genannt. Ein Tensor vom Typ (r, s) heißt *kontravariant vom Grad r* und *kovariant vom Grad s*. Wie setzen zusätzlich $\mathfrak{T}_0^0(V) = R$.

Für $f \in \mathfrak{T}_s^r(V)$ und $g \in \mathfrak{T}_l^k(V)$ definieren wir das *Tensorprodukt* $f \otimes g \in \mathfrak{T}_{s+l}^{r+k}(V)$ von f und g durch

$$(f \otimes g)(u_1, \ldots, u_{r+k}, v_1, \ldots, v_{s+l}) :=$$

$$f(u_1, \ldots, v_r, v_1, \ldots, v_s) \cdot g(u_{r+1}, \ldots, u_{r+k}, v_{s+1}, \ldots, v_{s+l}).$$

Es ist klar, daß im allgemeinen $f \otimes g$ und $g \otimes f$ verschieden sind. Es gelten die folgenden leicht nachzuweisenden Rechenregeln:

(TR1) $(f+g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$
(TR2) $h \otimes (f+g) = h \otimes f + h \otimes g$
(TR3) $(\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda(f \otimes g)$
(TR4) $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

(4.20) Lemma. *Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Sei $\mathcal{B}^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \subseteq V^*$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis, d.h. es ist $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Dann bilden die Elemente der Form $\omega_{i_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{i_r}$ mit $1 \le i_j \le n$ eine Basis von $\mathfrak{T}_r^0(V)$. Insbesondere ist $\mathfrak{T}_r^0(V)$ ein n^r-dimensionaler reeller Vektorraum.*

Beweis. Es ist

$$\omega_{i_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{i_r}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_r j_r} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i_1 = j_1, \ldots, i_r = j_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $f \in \mathfrak{T}^0_r(V)$ und $v_1, \ldots, v_r \in V$ mit $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ gilt dann aufgrund der Multilinearität von f

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_r) &= \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{n} a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot a_{r,j_r} f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{n} (\omega_{j_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{j_r})(v_1, \ldots, v_r) f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}), \end{aligned}$$

d.h. wir haben

$$f = \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{n} f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) \cdot (\omega_{j_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{j_r}).$$

Also spannen die im Lemma genannten Elemente den Vektorraum $\mathfrak{T}^0_r(V)$ auf. Diese sind aber auch linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{j_1, \ldots, j_r}^{n} a_{j_1, \ldots, j_r} \cdot (\omega_{j_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{j_r}) = 0$$

folgt nach Anwendung der linken Seite dieser Gleichung auf $(e_{k_1}, \ldots, e_{k_r})$

$$a_{k_1, \ldots, k_r} = 0$$

für alle $1 \leq k_i \leq n$. □

(4.21) Definition. Sei $p \in M$. Wir setzen $\mathfrak{T}^r_s(p) := \mathfrak{T}^r_s(\mathrm{T}_p M)$ und $\mathfrak{T}^r_s(M) := \mathfrak{T}^r_s(\mathrm{Vec}\,(M))$.

(4.22) Folgerung. *Sei $p \in M$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathfrak{T}^r_s(p)$ ist isomorph zum Tensorprodukt* $\underbrace{\mathrm{T}^*_p M \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}^*_p M}_{r} \otimes \underbrace{\mathrm{T}_p M \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_p M}_{s}$. □

(4.23) Darstellung eines (r,s)-Tensors in lokalen Koordinaten. Sei $T \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ und sei $h : U \to \mathbb{R}^n : q \mapsto (x_1(q), \ldots, x_n(q))$ eine Karte von M. Seien $\gamma^1, \ldots, \gamma^r \in \mathfrak{T}_1(M)$ und $Z_1, \ldots, Z_s \in \mathfrak{T}^1(M)$. Betrachte auf U die Vektorfelder

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \omega^j$$

wie in (4.15). Dann gibt es Funktionen $f_{ik}, g_{jl} \in C^\infty(U)$ mit

$$\gamma^j = \sum_{l=1}^{n} g_{jl}\omega^l \quad \text{und} \quad Z_i = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}X_k$$

auf U. Damit ist auf U

$$T(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, Z_1, \ldots, Z_s) = \sum_{l_j, k_i = 1}^{n} g_{1l_1} \ldots g_{rl_r} f_{1k_1} \ldots f_{sk_s} T(\omega^{l_1}, \ldots, \omega^{l_r}, X_{k_1}, \ldots, X_{k_s}),$$

vergleiche den Beweis von (4.20).

(4.24) Definition. Sei $\xi = (E, \pi, B)$ ein n-dimensionales Vektorraumbündel mit Bündelatlas $\mathcal{A}$. Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei $k = r + s$. Durch

$$E_s^r = \bigcup_{x \in X} \mathcal{T}_s^r(E_x),$$

$$\pi_s^r : E_s^r \to B : v \mapsto x, \quad \text{falls } v \in \mathcal{T}_s^r(E_x),$$

und

$$\mathcal{A}_s^r = \{h_s^r \mid (h, U) \in \mathcal{A}\},$$

wobei $h_s^r : (\pi_s^r)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n^k}$ gegeben ist durch

$$(h_s^r)_x : \mathcal{T}_s^r(E_x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^{n^k} : f \mapsto (x, f_s^r)$$

und

$$f_s^r(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s) := f(h_x^*(x, u_1), \ldots, h_x^*(x, u_r), h_x^{-1}(x, v_1), \ldots, h_x^{-1}(x, v_s))$$

mit

$$h_x^* : \{x\} \times \mathbb{R}^n \to E_x^* : (x, \lambda) \mapsto \lambda \circ h_x,$$

ist ein n^k-dimensionales Prä-Vektorraumbündel mit Bündelatlas $\mathcal{A}_s^r$ gegeben. Das zugehörige Vektorraumbündel $\xi_s^r = (E_s^r, \pi_s^r, B)$ wird das zu ξ gehörige *Tensorbündel vom Typ* (r, s) genannt. Klar: Ist ξ ein glattes Vektorraumbündel, so ist auch ξ_s^r glatt.

(4.25) Lemma. *Sei $\xi = (E, \pi, B)$ ein triviales Vektorraumbündel, so ist ξ_s^r für alle $r, s \geq 0$ ebenfalls ein triviales Vektorraumbündel.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Definition von ξ_s^r, denn mit der globalen Bündelkarte (h, B) von ξ gibt es auch eine globale Bündelkarte (h_s^r, B) von ξ_s^r, d.h. das Bündel ξ_s^r ist trivial. □

(4.26) Definition. Ein (glattes) *Tensorfeld vom Typ* (r,s) auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein (glatter) Schnitt $X : M \to (\mathrm{T}M)^r_s$ des Tensorbündels $(\mathrm{T}M)^r_s$ bzgl. des Tangentialbündels $\mathrm{T}M$.
Eine (glatte) *Riemannsche Metrik* ist ein (glattes) Tensorfeld $g \in (\mathrm{T}M)^0_2$ auf M mit g_p symmetrisch und $g_p(u,u) > 0$ für alle $p \in M$ und alle $u \in \mathrm{T}_pM$ mit $u \neq 0$ und $g_p(u,v) = g_p(v,u)$ für alle $u, v \in \mathrm{T}_pM$. Eine glatte Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer glatten Riemannschen Metrik g wird *Riemannsche Mannigfaltigkeit* (M,g) genannt. Das von g induzierte Skalarprodukt g_p in T_pM wird auch mit $\langle\ ,\ \rangle_p$ bezeichnet.

Bemerkung. Ein Tensorfeld X auf M läßt sich via

$$X = (p \mapsto X(p))$$

als Element von $\mathfrak{T}^r_s(M)$ auffassen. Umgekehrt induziert jedes Element $X \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ durch

$$p \mapsto X_p = ((\gamma^1, \ldots, \gamma^r, Z_1, \ldots, Z_s) \mapsto X(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, Z_1, \ldots, Z_s)(p)) : M \to (\mathrm{T}M)^r_s$$

ein Tensorfeld auf M, welches nach (4.23) glatt ist, denn es gilt das folgende Lemma (vgl. (4.16)):
Lemma. Seien $\gamma^1, \ldots, \gamma^r \in \mathfrak{T}_1(M)$ und $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{T}^1(M)$. Sei $p \in M$. Ist $\gamma^j(p) = 0$ oder $X_i(p) = 0$ für ein i oder ein j, so ist $T(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0$ für alle $T \in \mathfrak{T}^r_s(M)$
Tensoren aus $\mathfrak{T}^0_0(M)$ sind nach Definition gerade die glatten Funktionen von M nach $\mathbb{R}$. Die Elemente aus $\mathfrak{T}^0_1(M)$ sind gerade die 1-Formen. Da die $C^\infty(M)$-Module $\mathfrak{T}_1(M)$ und $\mathfrak{T}^1(M)$ dual zueinander sind, sind die Tensoren aus $\mathfrak{T}^1_0(M)$ die Vektorfelder auf M, d.h. wir haben

$$\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{T}_1(M) \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}^1_0(M) = \mathrm{Vec}\,(M) = \mathfrak{T}^1(M).$$

(4.27) Die Tensoralgebra. Sei $p \in M$. Dann setzen wir

$$\mathfrak{T}(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^r_s(M) \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}(p) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^r_s(p).$$

Dann ist $\mathfrak{T}(M)$ ein Modul über $C^\infty(M)$ und $\mathfrak{T}(p)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mittels des Tensorproduktes wird $\mathfrak{T}(p)$ soger zu einer $\mathbb{R}$-Algebra. Wir wollen nun $\mathfrak{T}(M)$ ebenfalls mit Hilfe des Tensorproduktes zu einer Algebra machen, allerdings zu einer Algebra über dem Ring $C^\infty(M)$. Dies wird durch

$$(S \otimes T)_p = S_p \otimes T_p$$

für $S, T \in \mathfrak{T}(M)$ und alle $p \in M$ erreicht. Die Algebren $\mathfrak{T}(p)$ bzw. $\mathfrak{T}(M)$ heißen die *Tensoralgebren über* T_pM *bzw. über* M.

(4.28) Definition. Betrachte die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$C^i_j : \mathfrak{T}^r_s(p) \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(p)$$
$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_r \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_s \mapsto e_i(f_j)(e_1 \otimes \ldots \hat{e}_i \ldots \otimes e_r \otimes f_1 \otimes \ldots \hat{f}_j \ldots \otimes f_s),$$

wobei $\hat{}$ bedeutet, daß dieses Element fehlt. Durch

$$(C^i_j(T))_p := C^i_j(T_p)$$

bekommen wir auch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$C^i_j : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(M),$$

die eine *Kontraktion* genannt wird.

(4.29) Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit von M. Die Einschränkung des Tangentialbündels $\mathrm{T}M$ auf N sei mit $\mathrm{T}M\big|_N$ bezeichnet. Das Tangentialbündel $\mathrm{T}N$ von N läßt sich als Unterbündel von $\mathrm{T}M\big|_N$ verstehen. Für jedes $x \in N$ läßt sich deshalb ein Unterbündel $\nu N = (F, \pi\big|_N, N)$ auf N durch $F_x = \{u \in \mathrm{T}_xM \mid \forall\, v \in \mathrm{T}_xM : \langle u, v\rangle_x = 0\}$ und $F = \bigcup_{x\in N} F_x$ definieren, welches als *Normalenbündel von* N *in* M bezeichnet wird.

(4.30) Definition. Eine glatte Abbildung $f : M^m \to \tilde{M}^n$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ heißt *Isometrie*, falls für alle $p \in M$ und alle $u, v \in \mathrm{T}_pM$ gilt

$$g_p(u, v) = \tilde{g}_{f(p)}(\mathrm{T}_pf(u), \mathrm{T}_pf(v)).$$

(4.31) Proposition. *Sei* M^n *eine glatte Mannigfaltigkeit mit trivialem Tangentialbündel* $\mathrm{T}M$. *Dann gibt es auf* M *eine Riemannsche Metrik.*

Beweis. Da $\mathrm{T}M$ trivial ist, ist nach (4.25) auch das Bündel $(\mathrm{T}M)^0_2$ trivial, d.h. es gibt eine globale Bündelkarte $f : (\mathrm{T}M)^0_2 \to M \times \mathbb{R}^{n^2}$. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, welches durch die Einheitsmatrix $E \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben ist. Dann ist

$$g : M \to (\mathrm{T}M)^0_2 : x \mapsto f^{-1}(x, E)$$

eine Riemannsche Metrik auf M, da f^{-1} eine glatte Abbildung ist. □

Wir wollen nun zeigen, daß auf *jeder* glatten Mannigfaltigkeit M eine Riemannsche Metrik g existiert. Dazu werden wir wieder eine *Zerlegung der Eins* verwenden.

(4.32) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Riemannsche Metrik g auf M.*

Beweis. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $\mathfrak{T} = \{(h_i, U_i)\}_{i\in I}$ ein Bündelatlas von $\mathrm{T}M$. Nach (2.26) gibt es eine zu $\{U_i\}_{i\in I}$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wähle eine Karte (h_{i_k}, U_{i_k}) mit supp $\tau_k \subseteq U_{i_k}$, sowie eine Riemannsche Metrik s_k auf U_{i_k} gemäß (4.31). Dann ist

$$\tau_k \cdot s_k : U_{i_k} \to (\mathrm{T}M)_2^0$$

ein glatter Schnitt, der sich wegen supp $\tau_k \subseteq U_{i_k}$ außerhalb von U_{i_k} durch den Nullschnitt glatt fortsetzen läßt. Bezeichnen wir mit S_k diese Fortsetzung, so ist

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$$

eine Riemannsche Metrik auf M. □

KAPITEL 5

Flächen II, Die zweite Fundamentalform

(5.1) Die erste Fundamentalform als Riemannsche Metrik. Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to S$ eine Parametrisierung der Fläche S um $y = F(x)$. Betrachte in jedem Punkt y von S die erste Fundamentalform g_y. Faßt man S als glatte Mannigfaltigkeit auf, so ist die Abbildung $g : S \to \mathcal{T}(S)^2_0 : u \to g_u$ nach der Darstellung aus (3.12) glatt in einer Umgebung von y. Da sich zwei Parametrisierungen von S nur durch einen Diffeomorphismus unterscheiden, ist $S \to \mathcal{T}(S)^2_0 : u \to g_u$ auf ganz S glatt, d.h. die Abbildung g ist eine Riemannsche Metrik.

Eine der wichtigsten Eigenschaften einer Metrik ist, Begriffe wie Länge von Kurven und Winkel zwischen Kurven zu definieren. Wir benützen dazu die erste Fundamentalform.

(5.2) Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche mit Parametrisierung $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to S$ um $y = F(x)$ und sei $c : [-1, 1] \to S$ eine Kurve durch den Punkt $y = c(0)$. Dann ist $c_1 := F^{-1} \circ c : [-1, 1] \to U$ eine Kurve durch $x = F^{-1}(y)$. Mit $c_2 := F\big|_{\mathrm{im}(c_1)}$ können wir die Kurve c somit schreiben als $c = c_2 \circ c_1$. In (1.6) wurde die Bogenlänge einer Kurve $d : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definiert als

$$l(d) := \int_a^b |d'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\langle d'(t), d'(t)\rangle} \, \mathrm{d}t.$$

Nach (3.12) und der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} l(c) := \int_{-1}^1 |c'(t)| \, \mathrm{d}t &= \int_{-1}^1 |\mathrm{D}c_2(c_1(t)) \cdot c_1'(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^1 |\mathrm{D}F(c_1(t)) \cdot c_1'(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \mathrm{D}F(c_1(t)) \cdot c_1'(t), \mathrm{D}F(c_1(t)) \cdot c_1'(t)\rangle} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{g_{c_1(t)}(c_1'(t), c_1'(t))} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

die *Bogenlänge* der Kurve c. Ist $b : [-1, 1] \to S$ eine zweite Kurve mit $b(0) = y = c(0)$, so definieren wir den *Winkel* $\varphi = \varphi(b, c, y)$ *zwischen den Kurven* b *und* c *im Punkt* y durch

$$\cos \varphi(b, c, y) = \frac{g_y(b_1'(t), c_1'(t))}{\sqrt{g_y(b_1'(t), b_1'(t))} \cdot \sqrt{g_y(c_1'(t), c_1'(t))}}.$$

Für eine beschränkte, abgeschlossene Menge $B = F(A)$ definieren wir

$$|B| := \int_B \mathrm{d}\mu := \int_A \sqrt{\det G(F(x))}\mathrm{d}x$$

als den *Flächeninhalt* der Menge B, wobei $G(F(x))$ die zur ersten Fundamentalform gehörige Matrix im Punkt $F(x)$ gemäß (3.12) ist.

(5.3) Lemma. *Der Flächeninhalt einer beschränkten, abgeschlossenen Menge $B = F(A)$ ist unabhängig von der Parametrisierung.*

Beweis. Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-Fläche mit Parametrisierungen $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to S$ und $\tilde{F} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m \to S$. Es sei $A(u)$ die Jacobimatrix des Parameterwechsel $h = \tilde{F}^{-1} \circ F$ an der Stelle u. Sei $F(A) = B = \tilde{F}(\tilde{A})$ eine beschränkte, abgeschlossene Menge. Dann ist $h(K) = \tilde{A}$, und nach (3.13) und dem Transformationssatz für Integrale ([15], 3-13) gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{A}} \sqrt{\det \tilde{G}(\tilde{F}(\tilde{x}))}\,\mathrm{d}\tilde{x} &= \int_{\tilde{A}} \sqrt{\det A^t G A(\tilde{F}(x))}\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_{\tilde{A}} \sqrt{\det A(\tilde{x}) \det G(\tilde{F}(\tilde{x})) \det A(\tilde{x})}\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_{\tilde{A}} \sqrt{\det G(\tilde{F}(\tilde{x}))} \cdot |\det A(\tilde{x})|\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&= \int_A \sqrt{\det G(F(x))}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

(5.4) Beispiel. Der Torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ mit den Radien r_1 und r_2 wird (bis auf eine Nullmenge) parametrisiert von der Abbildung

$$F : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) : (s, t) \mapsto ((r_1 + r_2 \cos s)\cos t, (r_1 + r_2 \cos s)\sin t, r_2 \sin s).$$

Die Matrix $G(s, t)$ der zugehörigen ersten Fundamentalform $g_{F(s,t)}$ bzgl. der Basis

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial s}(s, t), \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\}$$

wird nach (3.12) durch die Elemente

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}(s, t), \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right\rangle$$

bestimmt. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) &= (-r_2 \sin s \cos t, -r_2 \sin s \sin t, r_2 \cos s), \\
\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) &= (-(r_1 + r_2 \cos s)\sin t, (r_1 + r_2 \cos s)\cos t, 0)
\end{aligned}$$

folgt

$$g_{11} = r_2^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = (r_1 + r_2 \cos s)^2.$$

Damit ist

$$\sqrt{\det G(F(s,t))} = r_2(r_1 + r_2 \cos s)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} |T| &= \lim_{u \to 0, v \to 2\pi} \int_u^v \int_u^v r_2(r_1 + r_2 \cos s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\ &= 4\pi^2 r_1 r_2 + r_2^2 \lim_{u \to 0, v \to 2\pi} \int_u^v \int_u^v \cos s \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\ &= 4\pi^2 r_1 r_2. \end{aligned}$$

Als nächstes soll das Konzept der *Krümmung*, welches bisher nur für Kurven definiert wurde, auf Flächen ausgedehnt werden. Im darauffolgenden Kapitel werden wir dann den Krümmungsbegriff auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Wie bei Kurven soll eine Fläche lokal durch ihre Krümmung bis auf eine Bewegung eindeutig festgelegt sein, vgl. Satz (1.19). Um möglichst einfach argumentieren zu können, beschränken wir uns im Rest dieses Kapitels auf Hyperflächen $H^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. auf Flächen der Codimension 1. Es sei außerdem stets $\mathbb{S}_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1 \right\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.

(5.5) Die zweite Fundamentalform. Sei $y \in H$ und sei $F : U \to H$ eine Parametrisierung von H mit $F(x) = y$ für ein $x \in U$. Nach (3.7) ist der Tangentialraum $\mathrm{T}_y H$ gegeben durch $\mathrm{D}F(x)(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Wähle einen Normalenvektor $\nu(y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ zu $\mathrm{T}_y H$ der Länge 1 (wegen $\dim H = n$ hat man für $\nu(y)$ genau zwei Möglichkeiten, nämlich bis auf das Vorzeichen). Durch geeignete Wahl des Einheitsnormalenvektors wird die Abbildung

$$\nu : F(U) \to \mathbb{S}_n : p \mapsto \nu(p)$$

eine glatte Abbildung, die die *Gauß-Abbildung* genannt wird. Deren Differential

$$\mathrm{D}\nu(p) : \mathrm{T}_p H \to \mathrm{T}_{\nu(p)} \mathbb{S}_n$$

heißt *Weingarten-Abbildung*. Da beide Tangentialräume $\mathrm{T}_p H$ und $\mathrm{T}_{\nu(p)} \mathbb{S}_n$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind, werden wir stets $\mathrm{T}_{\nu(p)} \mathbb{S}_n$ mit $\mathrm{T}_p H$ identifizieren, so daß wir $\mathrm{D}\nu(p)$ als Abbildung von $\mathrm{T}_p H$ in $\mathrm{T}_p H$ verstehen werden. Mit Hilfe der Weingarten-Abbildung definieren wir eine weitere Bilinearform

$$a_p : \mathrm{T}_p H \times \mathrm{T}_p H \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto g_p \left(\mathrm{D}\nu(p)(u), v \right),$$

die *zweite Fundamentalform von H* genannt wird.

(5.6) Lemma. *Die zweite Fundamentalform a_p ist symmetrisch.*

Beweis. Sei $p \in H$ und sei $F : U \to H$ eine Parametrisierung von H mit $F(x) = p$ für ein $x \in U$. Betrachte die Abbildung

$$\tilde{\nu} = \nu \circ F : U \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aus $\mathrm{D}\tilde{\nu}(x) = \mathrm{D}\nu(F(x)) \cdot \mathrm{D}F(x)$ folgt

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i}(x) = \mathrm{D}\nu(p) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x).$$

Da die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)$ den Tangentialraum $\mathrm{T}_p H$ aufspannen, gilt nach Definition eines Normalenvektors

$$\left\langle \tilde{\nu}(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right\rangle = 0$$

für alle $1 \leq i \leq n$, alle $x \in U$ und $p = F(x)$. Partielle Differentiation nach x_j liefert hieraus

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle \tilde{\nu}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{D}\nu(p) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle \tilde{\nu}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\rangle \\
&= g_p \left(\mathrm{D}\nu(p) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right) + \left\langle \tilde{\nu}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\rangle \\
&= a_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right) + \left\langle \tilde{\nu}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\rangle \qquad (\clubsuit)
\end{aligned}$$

für alle i, j. Nach dem Schwarzschen Vertauschungssatz ist der rechte Term der letzten Gleichung symmetrisch in i und j. Also ist auch a_p symmetrisch. □

(5.7) Definition. Setze für $F(x) = p$ und $i, j = 1, \ldots, n$

$$h_{ij} := a_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right).$$

Die aus obiger Gleichung (♣) gewonnene Beziehung

$$h_{ij} = -\left\langle \nu(p), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\rangle = g_p \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right)$$

heißen die *Weingarten-Gleichungen.*

Aus der Symmetrie der ersten Fundamentalform g_p und der Gleichung (♣) folgt sofort:

(5.8) Korollar. *Die Weingartenabbildung* $\mathrm{D}\nu(p)$ *ist selbstadjungiert.* □

(5.9) Definition. Als selbstadjungierte lineare Abbildung kann die Weingartenabbildung $\mathrm{D}\nu(p)$ nach (3.10) durch eine symmetrische Matrix dargestellt werden. Da solche Matrizen stets diagonalisierbar sind, besitzt $\mathrm{D}\nu(p)$ folglich n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Diese Eigenwerte werden die *Hauptkrümmungen* der Fläche M an der Stelle p genannt. Die zugehörigen Eigenvektoren werden *Hauptkrümmungsrichtungen* genannt.

(5.10) Bemerkung. Sei $p \in H$ und sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pH bzgl. g_p. Für $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ und $Y = \sum_{i=1}^n g_i e_i$ aus T_pH ist dann

$$a_p(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} f_i g_j$$

und mit $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ ist

$$g_p(\mathrm{D}\nu(p)X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} (\mathrm{D}\nu(p)X)_i g_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} \right)(p) f_k \right) g_j.$$

Damit folgt aus der Weingarten-Gleichung für alle i, j

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ki} \frac{\partial \nu_k}{\partial x_j}.$$

Ist X eine Hauptkrümmungsrichtung zur Krümmung λ, so folgt

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} f_i g_j = g_p(\mathrm{D}\nu(p)\, X, Y) = g_p(\lambda X, Y) = \lambda g_p(X,Y) = \lambda \sum_{i,j=1}^n g_{ij} f_i g_j.$$

Nach (3.12) können wir eine Basis von T_pH stets so wählen, daß $G(p)$ die Einheitsmatrix ist. Da die zweite Fundamentalform a_p symmetrisch ist, kann man desweiteren eine orthogonale Abbildung auf T_pM finden, welche die zu a gehörige Matrix A diagonalisiert. Da dieser Basiswechsel die Einheitsmatrix $G(p)$ invariant läßt, gilt somit in dieser Basis

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Dies läßt sich sogar auf einer ganzen Umgebung von p erreichen.

Das nächste Lemma zeigt, daß der bisher nur für Kurven definierte Begriff der Krümmung in der zweiten Fundamentalform enthalten ist.

(5.11) Lemma. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und sei γ eine Kurve auf M durch einen Punkt $p \in M$. Sei $b : [0, l(\gamma)] \to M$ die Parametrisierung nach der Bogenlänge von γ. Sei $t_0 \in (0, l(\gamma))$ mit $b(t_0) = p$. Dann ist*

$$\langle b''(t_0), \nu(p)\rangle = -a_p(b'(t_0), b'(t_0)),$$

d.h. $-a_p(b'(t_0), b'(t_0))$ ist die Krümmung $k(t_0)$ der Kurve $\tilde{\gamma}$ im Punkt $p = b(t_0)$, die als Schnitt von M mit der Ebene $p + \langle \nu(p), b'(t_0)\rangle$ entsteht.

Beweis. Da $b'(t)$ für alle t in $\mathrm{T}_{b(t)}M$ liegt, ist $\langle b'(t), \nu(b(t))\rangle = 0$ für alle t. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu(b(t)) = \mathrm{D}\nu(b(t)) \cdot b'(t)$$

folgt via Differentiation

$$\begin{aligned} 0 &= \langle b''(t), \nu(b(t))\rangle + \langle b'(t), \mathrm{D}\nu(b(t)) \cdot b'(t)\rangle \\ &= \langle b''(t), \nu(b(t))\rangle + g_{b(t)}(b'(t), \mathrm{D}\nu(b(t)) \cdot b'(t)) \\ &= \langle b''(t), \nu(b(t))\rangle + a_{b(t)}(b'(t), b'(t)) \end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $t = t_0$ folgt. □

Bemerkung. Eine Kurve γ auf einer Hyperfläche M heißt *Krümmungslinie*, wenn $\gamma = \tilde{\gamma}$ ist. Krümmungslinien können dazu benutzt werden, um die zweite Fundamentalform zu bestimmen, siehe Beispiel b) unten.

(5.12) Beispiele.
(a) *Die Hyperebene* $H = \left\{a_0 + t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig besitzt als Gauß-Abbildung die konstante Abbildung auf einen Einheitsvektor des orthogonalen Komplements von $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit ist die Weingarten-Abbildung $\mathrm{D}\nu$ konstant Null. Somit ist auch die zweite Fundamentalform identisch Null, d.h. die Hyperebene H ist nicht gekrümmt. Umgekehrt wird eine Hyperebene durch die Eigenschaft $\mathrm{D}\nu \equiv 0$ charakterisiert.

(b) *Sphäre* $S_r = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |x| = r\right\}$ *in* $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Gauß-Abbildung ist die Abbildung $\S_r \to \mathbb{S}_n : x \mapsto r^{-1}x$ und somit ist die Weingarten-Abbildung $\mathrm{D}\nu(x) : u \mapsto r^{-1}u$. Um die zweite Fundamentalform zu bestimmen, verwenden wir Lemma (5.11). Betrachte den Nordpol $N = (0, \ldots, 0, r) \in S_r$ und sei $e_1, \ldots, e_{n+1}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$. Der Schnitt der Ebene $E_i = \langle e_i, e_{n+1}\rangle$ für $1 \leq i \leq n$ ergibt einen Großkreis γ_i durch N. Betrachte die Parametrisierung $b_i : [0, 2\pi r] \to S_r$ nach Bogenlänge von γ_i mit $b_i(\pi) = N$. Dann ist in N der Vektor e_{n+1} ein normierter Normalenvektor an S_r und es ist $b'(\pi) =$

e_i (wobei der Umlaufsinn von γ_i entsprechend gewählt sei). Nach (1.11) ist $b''(\pi) = -r^{-2}b(\pi) = -r^{-1}e_{n+1}$ und es folgt

$$-a_N(b'(\pi), b'(\pi)) = -a_N(e_i, e_i) = \langle b''(\pi), \nu(N)\rangle = \left\langle -\frac{1}{r}e_{n+1}, e_{n+1}\right\rangle = -\frac{1}{r}.$$

Mit Hilfe der Polarisierung

$$a_N(e_i, e_j) = a_N(e_i + e_j, e_i + e_j) - a_N(e_i, e_i) - a_N(e_j, e_j)$$

läßt sich nun a_N vollständig bestimmen. Wegen $g_N(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ folgt damit

$$a_N(e_i, e_j) = \frac{1}{r}\delta_{ij}.$$

(c) *Zylinder* $Z_r = \{(r\cos t, r\sin t, s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. Es ist

$$\nu : Z_r \to \mathbb{S}_2 : (r\cos t, r\sin t, s) \mapsto (-\sin t, \cos t, o)$$

eine Gauß-Abbildung. Wie in (b) berechnen wir für einen Punkt $p \in Z_r$

$$a_p(e_1, e_1) = \frac{1}{r}, \quad a_p(e_2, e_2) = 0, \quad a_p(e_1, e_2) = a_p(e_2, e_1) = 0.$$

Bezüglich der kanonischen Basis folgt damit aus den Weingarten-Gleichungen

$$\mathrm{D}\nu(s,t) = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5.13) Definition. Sei $F : U \to M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und sei $p \in M$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die n Hauptkrümmungen von M in p. Die Spur der Weingartenabbildung ist gerade die Summe

$$H = H(p) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

und wird als *mittlere Krümmung* von M in p bezeichnet. Die Determinante der Weingartenabbildung ist das Produkt

$$K = K(p) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

und wird als die *Gauß-Kronecker-Krümmung* von M in p bezeichnet. Das zweite elementarsymmetrische Polynom

$$R = R(p) = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n)$$

in den Hauptkrümmungen wird die *skalare Krümmung* von M in p bezeichnet. Eine Hyperfläche M mit mittlerer Krümmung 0 in allen Punkten wird als *Minimalfläche* bezeichnet.

Bemerkung. (a) Alle oben definierten Ausdrücke sind unabhängig von der Parametrisierung F und werden *Krümmungsinvarianten* von M in p genannt. Für $n = 2$ heißt $K(p) = \lambda_1\lambda_2$ die *Gauß-Krümmung* der Fläche im Punkt p, und in diesem Falle ist $R(p) = 2K(p)$.

(b) Alle Hauptkrümmungen, sowie die oben definierten Krümmungsbegriffe hängen a priori vom umgebenden Raum ab. So ist der Zylinder zwar lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$, aber die Hauptkrümmungen, sowie die mittlere Krümmung des Zylinders stimmen nicht mit denen von $\mathbb{R}^2$ überein. Jedoch sind die Gauß-Krümmungen von Zylinder und euklidischer Ebene beide Null. Es zeigt sich (siehe Satz (7.7), Theorema Egregium von C.F. Gauß), daß die Gauß-Krümmung tatsächlich *nicht* vom umgebenden Raum abhängt und damit ein Begriff der *inneren* Geometrie einer Fläche ist.

(c) Lokal isometrische Flächen besitzen nach (b) die gleiche Gauß-Krümmung. Deshalb können die n-Sphäre (Gauß-Krümmung in jedem Punkt positiv) und der $\mathbb{R}^n$ (Gauß-Krümmung in jedem Punkt Null) *nicht* lokal isometrisch sein. Die Umkehrung dieses Sachverhaltes ist falsch: Es gibt nicht lokal isometrische Flöchen mit gleicher Gauß-Krümmung.

Als nächstes sollen Berechnungsverfahren für die zweite Fundamentalform im Falle von Niveauflächen und Graphen angegeben werden.

(5.14) Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, die in einer Umgebung von $p \in M$ als Niveaufläche gegeben sein soll, also $M \cap V = f^{-1}(0)$ für eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit 0 als regulärem Wert. Setze*

$$B(q) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right)_{i,j=1}^{n+1}$$

und betrachte die Bilinearform

$$b(q) : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^t B(q) v.$$

Dann gilt:

(i) Die Gauß-Abbildung ist gegeben durch

$$\nu : M \cap V \to \mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto \frac{1}{|\mathrm{grad} f(x)|} \mathrm{grad}\, f(x)$$

(ii) Die Weingarten-Abbildung in q ist gegeben durch

$$\mathrm{D}\nu(q) : \mathrm{T}_q M \to \mathrm{T}_q M : v \mapsto \frac{1}{|\operatorname{grad} f(q)|}\left(B(q)v - \frac{b(q)(\operatorname{grad} f(q), v)}{|\operatorname{grad} f(q)|^2}\operatorname{grad} f(q)\right)$$

(iii) Die zweite Fundamentalform in q ist gegeben durch

$$a_q : \mathrm{T}_q M \times \mathrm{T}_q M \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \frac{1}{|\operatorname{grad} f(q)|} b(q)(v, w).$$

(iv) Die mittlere Krümmung H in q ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{|\operatorname{grad} f(q)|}\left(\Delta f(q) - \frac{b(q)(\operatorname{grad} f(q), \operatorname{grad} f(q))}{|\operatorname{grad} f(q)|^2}\right)$$

mit

$$\Delta f(q) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(q)$$

(v) Die Gauß-Kronecker-Krümmung K in q ist gegeben durch

$$K = \frac{1}{|\operatorname{grad} f(q)|^{n+2}} \langle B(q)^* \operatorname{grad} f(q), \operatorname{grad} f(q)\rangle$$

wobei $B(q)^*$ die zu $B(q)$ adjunkte Matrix ist.

Beweis. (i): Nach (3.8) ist für $y = f(x)$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_p M = \ker \mathrm{D}f(x) &= \ker \operatorname{grad} f(x) \\ &= \left\{u \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \operatorname{grad} f(x) \cdot u = 0\right\} \\ &= \left\{u \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \langle \operatorname{grad} f(x), u\rangle = 0\right\},\end{aligned}$$

d.h. der Vektor $\operatorname{grad} f(x)$ steht senkrecht auf $\mathrm{T}_p M$. Da die Abbildung

$$\nu : M \cap V \to \mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto \frac{1}{|\operatorname{grad} f(x)|} \operatorname{grad} f(x).$$

glatt ist, ist diese eine Gauß-Abbildung.

(ii): Es ist

$$\mathrm{D}(\operatorname{grad} f)(q) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right)_{i,j=1}^{n+1}(q) = B(q)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(|\operatorname{grad} f|)(q) &= \mathrm{D}\left(\sqrt{\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle}\right)(q) \\
&= \mathrm{D}\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)^2}\right)(q) \\
&= \frac{1}{2\,|\operatorname{grad} f(q)|}\,\mathrm{D}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)^2\right)(q) \\
&= \frac{1}{2\,|\operatorname{grad} f(q)|}\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right)_{i,j=1}^{n+1}(q)\cdot 2\operatorname{grad} f(q) \\
&= \frac{b(q)(\operatorname{grad} f(q),\,.\,)}{|\operatorname{grad} f(q)|^2}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die behauptete Formel aus der Quotientenregel.

(iii): Es ist $a_q(v,w) = \langle \mathrm{D}\nu(p)v, w\rangle$ und wegen $\langle w, \operatorname{grad} f(q)\rangle = 0$ für alle $w \in \mathrm{T}_qM$ folgt die angegebene Formel aus (ii).

(iv): Die Summe der Eigenwerte von $\mathrm{D}\nu(q)$ ist gerade die Summe der Diagonalelemente (bzgl. einer beliebigen Matrixdarstellung). Außerdem ist die lineare Abbildung

$$A_q : \mathrm{T}_qM \to \mathrm{T}_qM : v \mapsto b(q)(\operatorname{grad} f(q), v)\operatorname{grad} f(q)$$

durch die Matrix $(\alpha_{ij}(q))_{i,j=1}^{n+1}$ gegeben, wobei

$$\alpha_{ij}(q) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ist. Damit folgt die Behauptung aus (ii) durch Aufsummieren der Diagonalelemente.

(v): Das Produkt der Eigenwerte von $\mathrm{D}\nu(q)$ ist gerade die Determinante von $\mathrm{D}\nu(q)$. Dies ergibt die Formel für K. □

(5.15) Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, die in einer Umgebung von $p \in M$ als Graph gegeben sein soll, also $M \cap V = \{(x, g(x)) \mid x \in U \subseteq \mathbb{R}^n\}$ für eine glatte Abbildung $g : U \to \mathbb{R}$. Setze*

$$\tilde{B}(q) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right)_{i,j=1}^{n} \quad \textit{und} \quad B(q) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(q) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und betrachte die zugehörigen Bilinearformen

$$\tilde{b}(q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto u^t \tilde{B}(q) v.$$

und

$$b(q) : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^t B(q) v.$$

Für $q = (x, g(x)) \in M \cap V$ *und* $N(q) := \sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x)|^2}$ *gilt:*

(i) Die Gauß-Abbildung in q *ist gegeben durch*

$$\nu : M \cap V \to \mathbb{R}^{n+1} : q \mapsto \frac{1}{N(q)}(-\operatorname{grad} g(x), 1).$$

(ii) Die Weingarten-Abbildung in q *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\nu(q) \ : \ \mathrm{T}_q M &\to \mathrm{T}_q M \\ v &\mapsto \frac{1}{N(q)} \left(B(q)v - \frac{b(q)((-\operatorname{grad} g(x), 1), v)}{N(q)^2}(-\operatorname{grad} g(x), 1) \right) \end{aligned}$$

(iii) Die zweite Fundamentalform in q *ist gegeben durch*

$$a_q : \mathrm{T}_q M \times \mathrm{T}_q M \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \frac{1}{N(q)} b(q)(v, w)$$

(iv) Die mittlere Krümmung H *in* q *ist gegeben durch*

$$H = \frac{1}{N(q)} \left(\Delta g(q) - \frac{\tilde{b}(q)(\operatorname{grad} g(x), \operatorname{grad} g(x))}{N(q)^2} \right)$$

(v) Die Gauß-Kronecker-Krümmung K *in* q *ist gegeben durch*

$$K = \frac{1}{N(q)^{n+2}} \det \tilde{B}(q).$$

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto g(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+1}.$$

Damit läßt sich $M \cap V$ als Niveaufläche $f^{-1}(0) \cap V$ schreiben, denn f hat 0 als regulären Wert: Ist $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) = 0$, so ist $\operatorname{grad} f(x) = (\operatorname{grad} g(x), 1) \neq 0$. Die Aussagen folgen nun aus dem vorhergehenden Satz. □

(5.16) Beispiel. *Sattelfläche* $A = \left\{ (s, t, s^2 - t^2) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, s, t \in (-1, 1) \right\}$. Die Sattelfläche A ist Graph der Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (s, t) \mapsto s^2 - t^2$. Für $q = (s, t) \in \mathbb{R}^2$ ist $\operatorname{grad} f(q) = (2s, 2t)$. Damit haben wir $N(q) = \sqrt{1 + 4s^2 + 4t^2}$ und

$$\nu(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4s^2 + 4t^2}}(-2s, 2t, 1).$$

Für $q = (0,0)$ ist $\mathrm{T}_q A = \langle e_1, e_2 \rangle$, wobei e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Somit ist $b(q)((-\operatorname{grad} g(x), 1), v) = 0$ für alle $v \in \mathrm{T}_q A$, und es folgt

$$\mathrm{D}\nu(q) = B(q) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten h_{ij} der zweiten Fundamentalform gilt

$$a_{11} = 2, \quad a_{22} = -2, \quad a_{12} = a_{21} = 0.$$

Daraus errechnet man $H(0,0) = 0$ und $K(0,0) = -4$.

KAPITEL 6

Affiner Zusammenhang und kovariante Ableitung

(6.1) Der kanonische Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$. Um den Begriff der Krümmung auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu übertragen, ist es zwechmäßig, Richtungsableitungen von Vektorfeldern zu definieren. Dies wird in Analogie zur Richtungsableitung von Funktionen getan, siehe (2.22). Als Motivation für den allgemeinen Fall studieren wir zunächst die Situation im $\mathbb{R}^n$. In (4.8) haben wir Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten definiert. Dies waren glatte Abbildungen $X : M \to \mathrm{T}M$. Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein (glattes) Vektorfeld auf U ist in diesem Fall nichts anderes als eine (glatte) Abbildung $V : U \to \mathbb{R}^n$. Ist $c : [-1, 1] \to U$ ein Weg, so heißt die Komposition $V_c = V \circ c : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ ein *Vektorfeld entlang des Weges c*. Die Ableitung $V_c' : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Ableitung des Vektorfeldes V_c längs c*. Diese Ableitung kann natürlich wieder als ein Vektorfeld entlang c angesehen werden, und der Funktionswert $V_c'(0)$ hängt nach der Kettenregel nur von $p = c(0)$ und $c'(0)$, also vom Keim $[c]$ ab. Ist $W_p \in \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ mit $W_p = c'(0)$, so setzen wir $\nabla_{W_p}(V) = V_c'(0)$. Für ein gegebenes Vektorfeld W auf U haben wir also eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\nabla_W : \mathrm{Vec}\,(U) \to \mathrm{Vec}\,(U) : V \mapsto \nabla_W V = (p \mapsto \nabla_{W_p}(V)).$$

Die daraus gewonnene Abbildung

$$\nabla : \mathrm{Vec}\,(U) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Vec}\,(U), \mathrm{Vec}\,(U)) : W \mapsto \nabla_W$$

heißt der *kanonische Zusammenhang von* $\mathbb{R}^n$. Außerdem können wir die Richtungsableitungen $D_c f$ einer glatten Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ zu einer neuen Funktion wie folgt zusammenfassen: Für $f : U \to \mathbb{R}$ glatt und $V \in \mathrm{Vec}\,(U)$ definieren wir die *Richtungsableitung von f längs des Vektorfeldes V* als

$$D_V f : U \to \mathbb{R} : p \mapsto D_V f(p) := (D_{V(p)} f).$$

Für $f, g : U \to \mathbb{R}$ glatt und $V, W \in \mathrm{Vec}\,(U)$ gilt dann

(KAZ1) $\nabla_{fV+gW} = f\nabla_V + g\nabla_W$,
(KAZ2) $\nabla_V(fW) = f\nabla_V(W) + (D_V f)W$.

Beweis von (KAZ1). Seien $V, W \in \mathrm{Vec}\,(U)$ und sei $p \in U$. Seien $c, d : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$ Wege mit $c'(0) = V_p$ und $d'(0) = W_p$. Betrachte außerdem die Wege

$$c^* : [-1,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto p + \int_0^t ((f \circ c) \cdot c)'(s) - (f \circ c)'(s) \cdot c(s) \mathrm{d}s$$

und

$$d^* : [-1,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto p + \int_0^t ((g \circ d) \cdot d)'(s) - (g \circ d)'(s) \cdot d(s) \mathrm{d}s,$$

sowie

$$e^*(t) = c^*(t) + d^*(t) - p.$$

Dann ist $c^*(0) = d^*(0) = e^*(0) = p$ und nach der Produktregel gilt

$$c^{*\prime}(0) = (f \circ c) \cdot c)'(0) - (f \circ c)'(0) \cdot c(0) = (f \circ c)'(0) \cdot c'(0) = f(p) V_p,$$

und ebenso

$$d^{*\prime}(0) = g(p) W_p \quad \text{und} \quad e^{*\prime}(0) = c^{*\prime}(0) + d^{*\prime}(0).$$

Damit ist für $X \in \mathrm{Vec}\,(U)$

$$\begin{aligned}
\nabla_{fV+gW}(X)_p &= \nabla_{f(p)V_p + g(p)W_p}(X) \\
&= X'_{e^*}(0) \\
&= (X \circ e^*)'(0) \\
&= \mathrm{D}X(e^*(0)) \cdot e^{*\prime}(0) \\
&= \mathrm{D}X(p)(c^{*\prime}(0) + d^{*\prime}(0)) \\
&= \mathrm{D}X(p)c^{*\prime}(0) + \mathrm{D}X(p)d^{*\prime}(0) && \text{da } \mathrm{D}X \text{ linear} \\
&= f(p)\mathrm{D}X(p)c'(0) + g(p)\mathrm{D}X(p)d'(0) \\
&= f(p)(X \circ c)'(0) + g(p)(X \circ d)'(0) \\
&= f(p)\nabla_{V_p}(X) + g(p)\nabla_{W_p}(X) \\
&= \left(f\nabla_V(X) + g\nabla_W(X)\right)_p .
\end{aligned}$$

Beweis von (KAZ2). Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla_V(fW)(p) &= (fW \circ c)'(0) \\
&= ((f \circ c)(W \circ c))'(0) \\
&= (f \circ c)(0)(W \circ c)'(0) + (f \circ c)'(0)(W \circ c)(0) \\
&= f(p)(W \circ c)'(0) + (f \circ c)'(0) d'(0) \\
&= (\mathrm{D}_V f)\, W_p + f(p)\nabla_V(W)_p.
\end{aligned}$$

In Anlehnung an den kanonischen Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ wollen wir nun entsprechende Abbildungen auf einer glatten Mannigfaltigkeit M definieren. Wir werden uns dabei von den Axiomen (KAZ1) und (KAZ2) leiten lassen.

(6.2) Definition. Ein *affiner Zusammenhang* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathrm{Vec}\,(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Vec}\,(M), \mathrm{Vec}\,(M)) : X \mapsto \nabla_X,$$

die folgende Axiome erfüllt:

(AZ1) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$
(AZ2) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$

für alle $f, g : M \to \mathbb{R}$ glatt und alle $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$. Die lineare Abbildung ∇_X heißt *kovariante Ableitung bezüglich X.*

(6.3) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Verschwindet eines der Vektorfelder X, Y auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, so verschwindet auch $\nabla_X(Y)$ auf U.*

Beweis. Sei zunächst $Y_x = 0$ für alle $x \in U$. Sei $p \in U$. Nach (2.27) gibt es eine Urysohn-Funktion φ auf M mit $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(M \setminus U) = \{1\}$. Dann gilt $\varphi Y = Y$ und für $g : M \to \mathbb{R}$ glatt haben wir nach (AZ2)

$$\nabla_X(Y) = \nabla_X(\varphi Y) = \varphi\nabla_X(Y) + (X\varphi)Y.$$

Wegen $Y_p = 0$ haben wir $(X\varphi)(p)Y_p = 0$. Außerdem ist

$$(\varphi\nabla_X(Y))_p = \varphi(p)\nabla_X(Y)_p = 0,$$

d.h. es gilt $\nabla_X(Y)_p = 0$. Ist $X_p = 0$ für alle $p \in U$, so folgt die Behauptung wie eben aus (AZ1). □

(6.4) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $U \subseteq M$ eine offene Untermannigfaltigkeit von M. Dann induziert jeder affine Zusammenhang ∇ auf M einen affinen Zusammenhang ∇_U auf U.*

Beweis. Seien $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathrm{Vec}\,(U)$ und sei $p \in U$. Dann gibt es nach (4.11) eine offene Umgebung $V \subseteq U$ um p und Vektorfelder $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$, die mit $\tilde{X}$ bzw. mit $\tilde{Y}$ auf V übereinstimmen. Setze nun

$$(\nabla_U)_{\tilde{X}}(\tilde{Y})_p := \nabla_X(Y)_p.$$

Nach (6.3) ist $(\nabla_U)_{\tilde{X}}(\tilde{Y})$ unabhängig von der Wahl der Vektorfelder X und Y, d.h. ∇_U ist wohldefiniert. Da ∇_U natürlich (AZ1) und (AZ2) erfüllt, ist ∇_U ein affiner Zusammenhang auf U. □

(6.5) Darstellung eines affinen Zusammenhangs in lokalen Koordinaten. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $h : U \to \mathbb{R}^n : q \mapsto (h_1(q), \ldots, h_n(q))$ eine Karte. Nach (2.16) läßt sich $(\nabla_U)_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ in lokalen Koordinaten schreiben als

$$(\nabla_U)_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

mit glatten Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$. Die Funktionen Γ_{ij}^k werden *Christoffel-Symbole* von ∇_U genannt. Der affine Zusammenhang ∇_U ist durch die Christoffel-Symbole eindeutig bestimmt. Mit Hilfe von (AZ1) und (AZ2) können wir $(\nabla_U)_X(Y)$ für $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$ mit

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

durch

$$(\nabla_U)_X(Y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i g_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (\heartsuit)$$

darstellen.

(6.6) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Verschwindet das Vektorfeld X im Punkt $p \in M$, so gilt $\nabla_X(Y)_p = 0$.*

Beweis. Sei $h : U \to \mathbb{R}^n : q \mapsto (h_1(q), \ldots, h_n(q))$ eine Karte um den Punkt p. Auf U läßt sich X nach (4.10) darstellen als

$$X = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

mit glatten Funktionen $f_k : U \to \mathbb{R}$. Wegen $X_p = 0$ folgt $f_k(p) = 0$ für alle $1 \le k \le n$. Dann ist nach (6.5)

$$\nabla_X(Y)_p = \left((\nabla_U)_X(Y)\right)_p = \sum_{k=1}^{n} u_k(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = 0$$

wegen $u_k(p) = 0$ für alle $1 \le k \le n$. □

Als nächstes wollen wir den Begriff des Parallelismus einführen. Dies wird mit Hilfe eines affinen Zusammenhanges geschehen. Wir benötigen dazu ein paar Vorbereitungen.

(6.7) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve. Eine glatte Abbildung $X : \mathbb{R} \to \mathrm{T}M$ mit $X(t) \in \mathrm{T}_{c(t)}M$ heißt *Vektorfeld entlang der Kurve c.* Die Menge $\mathrm{Vec}_c(M)$ aller Vektorfelder entlang c bilden bezüglich der punktweisen Addition und der Verknüpfung

$$C^\infty(\mathbb{R}) \times \mathrm{Vec}_c(M) \to \mathrm{Vec}_c(M)(f, X) \mapsto fX = (t \mapsto f(t)X(t))$$

als Skalarmultiplikation einen kommutativen Modul über $C^\infty(\mathbb{R})$.

(6.8) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine einfache Kurve. Liegt $c([a, b])$ in einer Koordinatenumgebung U, so besitzt jedes glatte Vektorfeld $\tilde{X} : [a, b] \to \mathrm{T}M$ entlang c ein Vektorfeld X auf M als Fortsetzung, d.h. es ist $\tilde{X}(t) = X(c(t))$ für alle $t \in [a, b]$.*

Beweis. Nach (4.10) läßt sich $\tilde{X}$ darstellen als

$$\tilde{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{c(t)}$$

mit $g_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ glatt. Nach (2.28) gibt es glatte Abbildungen $G_i : M \to \mathbb{R}$ mit $G_i(c(t)) = g_i(t)$ für alle $t \in [a, b]$ und alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definieren wir nun X auf einer beliebigen Karte von M durch

$$X = \sum_{i=1}^{n} G_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

so ist X ein wohldefiniertes Vektorfeld auf M, welches die im Lemma angegeben Eigenschaften nach Konstruktion besitzt. □

Nach (2.16) ist die gewöhnliche Ableitung

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(p)$$

eine Basis des Tangentialraumes $\mathrm{T}_p\mathbb{R}$ und es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : \mathbb{R} \to \mathrm{T}\mathbb{R} : p \mapsto \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_p$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}$, welches das *kanonische Vektorfeld auf* $\mathbb{R}$ genannt wird.

(6.9) Definition. Sei $c : (a, b) \to M$ eine einfache Kurve. Das Vektorfeld

$$X_c : \mathbb{R} \to \mathrm{T}M : s \mapsto c'(s) := \mathrm{T}_s c \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_s\right)$$

entlang der Kurve c heißt das *Geschwindigkeitsvektorfeld* der Kurve c. Ist umgekehrt $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$, so heißt eine nichtkonstante Kurve $c : (a, b) \to M$ eine *Integralkurve von* X, falls

$$X_{c(t)} = c'(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung. Man beachte, daß die obige Definition von X_c mit der Definition einer Richtungsableitung D_c wie in (2.22) definiert zusammenpaßt, denn für $f \in C^\infty(M)$ ist

$$X_c(0)f = \mathrm{T}_0 c\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_0\right)(f) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \circ c^*(f) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_0 (f \circ c) = (f \circ c)'(0) = D_c(f)$$

(6.10) Darstellung eines Geschwindigkeitsvektorfeldes in lokalen Koordinaten. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ so, daß $c([a, b])$ in einer Koordinatenumgebung U liegt. Sei $X_c : \mathbb{R} \to \mathrm{T}M$ das Geschwindigkeitsvektorfeld längs c und sei $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$ eine Fortsetzung von X_c. Dann gilt nach (2.19) bezüglich der lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ auf U

$$X = \sum_{i=1}^{n} Xx_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Somit haben wir für $t \in [a, b]$ und $\tilde{x}_i(t) = x_i(c(t))$

$$X_c(t) = X_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} (Xx_i)_{c(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} X_c(t)x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i'(t) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\right)_t.$$

(6.11) Definition. Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine einfache Kurve. Sei $X_c : \mathbb{R} \to \mathrm{T}M$ das Geschwindigkeitsvektorfeld von c und sei $\tilde{Y} : \mathbb{R} \to \mathrm{T}M$ ein Vektorfeld entlang c. Seien X und Y Fortsetzungen von X_c und $\tilde{Y}$ gemäß (6.8). Das Vektorfeld

$$\nabla_{X_c}(\tilde{Y}) : \mathbb{R} \to \mathrm{T}M : t \mapsto \nabla_X(Y)_{c(t)}$$

entlang c wird die *kovariante Ableitung von* $\tilde{Y}$ *entlang der Kurve* c genannt. In der Literatur wird für $\nabla_{X_c}(\tilde{Y})$ auch häufig das Symbol

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Y} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{D}\tilde{Y}}{\mathrm{d}t}$$

verwendet. Das Vektorfeld $\tilde{Y}$ heißt *parallel entlang* c, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\nabla_{X_c}(\tilde{Y})_t = 0$$

gilt.

Bemerkung. Damit sich obige Definition als sinnvoll erweist, müssen wir nachweisen, daß $\nabla_{X_c}(Y)_t$ unabhängig von den Fortsetzungen X und Y ist. Sei dazu U eine Koordinatenumgebung mit Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$. Nach (4.10) gibt es $f_i, g_i \in C^\infty(U)$ mit

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Setzen wir auf $[a, b]$

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(c(t)), \quad \tilde{f}_i(t) = f_i(c(t)) \quad \text{und} \quad \tilde{g}_i(t) = g_i(c(t)),$$

so ist nach der Bemerkung vor (6.11)

$$\tilde{g}_k'(t) = (g_k \circ c)'(t) = X_c(t) g_k = X(c(t)) g_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(c(t)) \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right)_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t) \left(\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial \tilde{x}_i}\right)_t.$$

Nach Wahl des Vektorfeldes X ist $\tilde{f}_i(t) = \tilde{x}'(t)$. Aus der Darstellung ($\heartsuit$) in (6.5) folgt für die Koeffizienten u_k von $\nabla_{X_c}(\tilde{Y})_t = \nabla_X(Y)_{c(t)} = \left((\nabla_U)_X(Y)\right)_{c(t)}$

$$\begin{aligned} u_k(c(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t) \left(\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial \tilde{x}_i}\right)_t + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{f}_i(t) \tilde{g}_j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) \\ &= \tilde{g}_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{f}_i(t) \tilde{g}_j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) \qquad (\diamondsuit) \\ &= \tilde{g}_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{x}_i'(t) \tilde{g}_j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)). \end{aligned}$$

Der rechte Ausdruck hängt nur von den Werten von X und Y auf der Kurve c ab, d.h. $\nabla_{X_c}(\tilde{Y})$ ist unabhängig von den Fortsetzungen X und Y.

(6.12) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine einfache Kurve. Es gilt für alle Vektorfelder $\tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathrm{Vec}_c(M)$ und für alle glatten Funktionen $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{Y} + \tilde{Z}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Y} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Z}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{f}\tilde{Y}) = \tilde{f}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Y} + \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{f}\right)\tilde{Y}$

Beweis. Teil (a) folgt sofort aus der Linearität von ∇_{X_c}. Nach (2.28) gibt es eine Abbildung $f \in C^\infty(M)$ mit $f(c(t)) = \tilde{f}(t)$ für alle $t \in [a, b]$ eines geeigneten Intervalles $[a, b]$. Seien

$X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$ Fortsetzungen von X_c und $\tilde{Y}$ gemäß (6.8). Teil (b) der Aussage folgt nun aus dem Axiom (AZ2): Nach (2.22) ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{f}(s) = (f \circ c)'(s) = X_c(s)f = X(c(s))f$$

und wir bekommen hieraus mittels (AZ2)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{f}\tilde{Y})(s) &= \nabla_X(fY)_{c(s)} \\ &= f(c(s))\nabla_X(Y)_{c(s)} + (X_{c(s)}f)Y_{c(s)} \\ &= \tilde{f}(s)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{Y}\right)(s) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{f}\right)(s)\cdot\tilde{Y}(s).\end{aligned}$$

□

(6.13) Definition. Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine einfache reguläre Kurve in M. Die Kurve c heißt eine *Geodäte in* M, wenn das Geschwindigkeitsvektorfeld X_c parallel entlang der Kurve c ist, d.h. wenn $\nabla_{X_c}(X_c)_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Eine Geodäte heißt *maximal*, wenn sie keine echte Einschränkung einer anderen Geodäte ist.

(6.14) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇ und sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine einfache reguläre Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Dann induziert der Parallelismus entlang c, d.h. die Gleichung $\nabla_{X_c}(Y) = 0$, einen Isomorphismus Φ_c zwischen den Tangentialräumen T_pM und T_qM, der Parallelverschiebung von p nach q längs c genannt wird. Die Menge*

$$\left\{\Phi_t : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{c(t)}M \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$$

heißt die Parallelverschiebung längs der Kurve c.

Beweis. Seien zunächst p, q in einer Koordinatenumgebung U enthalten. Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ die Koordinaten auf U. Aus $\nabla_{X_c}(Y) = 0$ und den Gleichungen (♡) und (♢) erhält man das folgende System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung in den Funktion $\tilde{g}_k$:

$$\tilde{g}_k' = -\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{f}_i\tilde{g}_i\left(\Gamma_{ij}^k \circ c\right) \qquad (♠)$$

Es gibt n eindeutig bestimmte glatte Funktionen $\varphi : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so daß für jedes $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ die Abbildungen $\varphi_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ Lösungen dieses Systems sind, welche die Anfangsbedingung $\varphi_i(a, y_1, \ldots, y_n) = y_i$ erfüllen und linear in den y_i sind. Somit ist das Vektorfeld

$$\tilde{Y} : [a, b] \to \mathrm{T}M : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t, y_1, \ldots, y_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{c(t)}$$

entlang der Kurve $c : [a, b] \to M$ parallel entlang c und es gilt

$$Y(a) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p .$$

Da die Abbildungen φ_i in den Variablen $y_1, \ldots, y_n$ linear sind, ist die Abbildung

$$\Phi_c : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_q M : Y(a) \mapsto Y(b)$$

eine lineare Abbildung. Da die Abbildungen φ_i eindeutig sind, ist Φ_c injektiv. Da beide Vektorräume $\mathrm{T}_p M$ und $\mathrm{T}_q M$ die gleiche Dimension haben, ist Φ_c auch surjektiv.
Sind $p, q \in M$ beliebig, so gibt es aufgrund der Kompaktheit von $c([a, b])$ endlich viele Punkte $p_1, \ldots, p_m \in c([a, b])$ mit $p_0 = p$, und $p_m = q$, so daß p_i, p_{i+1} für alle i immer in einer Koordinatenumgebung liegen. Damit erhält man Φ_c als Komposition der Parallelverschiebungen zwischen den Punkten p_i, p_{i+1}. □

Ist $c : [a, b] \to M$ die Einschränkung einer Geodäten, so gilt in einer Koordinatenumgebung bezüglich der Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ in den Bezeichnungen von oben

$$\tilde{f}_i(t) = \tilde{x}_i'(t) \quad \text{und} \quad \tilde{g}_i(t) = \tilde{x}_i'(t).$$

Die erste Gleichung gilt nach der Bemerkung vor (6.11), da X_c ein Geschwindigkeitsvektorfeld ist. Die zweite Gleichung folgt aus der Eigenschaft, daß c eine Geodäte ist. Somit bekommt die Gleichung (♠) folgende Gestalt

$$\tilde{x}_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{x}_i'(t) x_j'(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0.$$

Mit ähnlichen Methoden (Existenz- und Eindeutigkeit der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen) wie sie im Beweis des letzten Lemmas verwendet wurden beweist man damit den folgenden Satz.

(6.15) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇. Sei $p \in M$ und $X \in \mathrm{T}_p M \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte maximale Geodäte $c_X : \mathbb{R} \to M$ mit $c_X(0) = p$ und $(c_X)'(0) = X$.* □

Wir wollen nun den Begriff der kovarianten Ableitung auf Tensorfelder beliebiger Stufe erweitern. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

(6.16) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇. Sei $p \in M$ und seien $X, Y \in \mathrm{Vec}(M)$ mit $X_p \neq 0$. Dann existiert eine Integralkurve $c : \mathbb{R} \to M$ durch $p = c(0)$. Ist $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ die Parallelverschiebung längs c, so ist*

$$(\nabla_X(Y))_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\Phi_t^{-1} Y_{c(t)} - Y_p\right).$$

Beweis. Sei U eine Koordinatenumgebung um p mit den Koordinaten $h = (x_1, \ldots, x_n)$. Wir schreiben X auf U als

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit $f_i \in C^\infty(U)$. Bezeichnen wir wieder $\tilde{x}_i(t) = x_i(c(t))$ für $t \in [a, b]$ und $\tilde{f}_i = f_i \circ c$ für eine Kurve $c : [a, b] \to U$ mit $0 \in [a, b]$ und $c(0) = p$, so ist $X_{c(t)} = c'(t)$ äquivalent zu

$$\tilde{x}_i'(t) = (x_i \circ c)'(t) = X_c(t)x_i = X_{c(t)}x_i = \sum_{j=1}^{n} f_i(c(t)) \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_{c(t)} = \tilde{f}_i(t).$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, welches eine Lösung $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit $\varphi_i(0) = 0$ besitzt. Wegen $X_p \neq 0$ verschwinden nicht alle Funktion $\tilde{f}_i$ im Punkt 0, woraus folgt, daß die Lösung φ nichtkonstant ist. Somit existiert eine Integralkurve $c : \mathbb{R} \to M$ durch $p = c(0)$. Sei nun $t \in [0, b]$. Nach dem Beweis von (6.14) existiert ein paralleles Vektorfeld Z entlang $c([0, t])$ mit $Z(0) = \Phi_t^{-1} Y_{c(t)}$. Mit

$$Z(s) = \sum_{i=1}^{n} k_i(s) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{c(s)} \qquad Y_{c(s)} = \sum_{i=1}^{n} g_i(s) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{c(s)}$$

folgt

$$Z(t) = \Phi_t(Z(0)) = Y_{c(t)},$$

da Z parallel entlang c ist und wir bekommen nach Gleichung ($\diamondsuit$)

$$k_l'(s) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{x}_i'(s) k_j(s) \Gamma_{ij}^l(c(s)) = 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in (0, t)$ mit

$$k_l(t) = k_l(0) + t k_l'(\xi).$$

Damit die l-te Komponente von

$$\frac{1}{t}\left(\Phi_t^{-1} Y_{c(t)} - Y_p\right) = \frac{1}{t}\left(Z(0) - Y_p\right)$$

gerade

$$\frac{1}{t}\left(k_l(0)-g_l(0)\right)=\frac{1}{t}\left(k_l(t)-tk_l'(\xi)-g_l(0)\right)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{x}_i'(\xi)k_j(\xi)\Gamma_{ij}^l(c(\xi))+\frac{1}{t}\left(g_l(t)-g_l(0)\right).$$

Für $t\to 0$ wird nach $(\diamondsuit)$ die rechte Seite dieser Gleichung wegen $\tilde{f}_i(t)=\tilde{x}_i'(t)$

$$g_l'(0)+\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{f}_i(0)k_j(0)\Gamma_{ij}^l(c(0))=u_l(p).$$

Dies beweist nach $(\heartsuit)$ die Gleichung. □

(6.17) Kovariante Ableitung eines Tensorfeldes. Seien p,q zwei Punkte einer glatten Mannigfaltigkeit M und sei $c:[a,b]\to M$ eine einfache Kurve zwischen p und q. Sei Φ_c die Parallelverschiebung entlang von p nach q längs c. Für einen Cotangentialvektor $\gamma\in \mathrm{T}_p^*M$ definieren wir $\Phi_t\gamma\in \mathrm{T}_q^*M$ durch

$$\Phi_t\gamma:\mathrm{T}_qM\to\mathbb{R}:D\mapsto\gamma(\Phi_t^{-1}D).$$

Für einen Tensor $T\in\mathfrak{T}_s^r(M)$ definieren wir $\Phi_tT\in\mathfrak{T}_s^r(M)$ durch

$$\Phi_tT_p:\mathrm{T}_q^*M\times\ldots\times\mathrm{T}_q^*M\times\mathrm{T}_qM\times\ldots\times\mathrm{T}_qM\to\mathbb{R}$$
$$(\gamma^1,\ldots,\gamma^r,D_1,\ldots,D_s)\mapsto T_p(\Phi_t^{-1}\gamma^1,\ldots,\Phi_t^{-1}\gamma^r,\Phi_t^{-1}D_1,\ldots,\Phi_t^{-1}D_s).$$

Für $X\in\mathrm{Vec}\,(M)$ mit $X_p\neq 0$ setzen wir

$$(\nabla_XT)_p:=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(\Phi_t^{-1}T_{c(s)}-T_p\right).$$

Ist $X_p=0$, so setzen wir

$$(\nabla_XT)_p:=0,$$

vergleiche hierzu (6.6). Für eine Abbildung $f\in C^\infty(M)$ setzen wir überdies

$$(\nabla_Xf)_p:=\lim_{t\to0}t^{-1}\left(f(c(t))-f(0)\right),$$

falls $X_p\neq0$ und

$$(\nabla_Xf)_p:=0$$

sonst. Damit gilt

$$\nabla_Xf=Xf.$$

Die Abbildungen $\nabla_X:\mathfrak{T}_s^r(M)\to\mathfrak{T}_s^r(M)$ sind $\mathbb{R}$-linear und lassen sich auf kanonische Weise zu einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\nabla_X:\mathfrak{T}(M)\to\mathfrak{T}(M)$ zusammensetzen (beachte, daß die Tensoralgebra $\mathfrak{T}(M)$ eine direkte Summe der Räume $\mathfrak{T}_s^r(M)$ ist).

(6.18) Lemma. *Die Abbildung ∇_X hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) ∇_X ist eine Derivation der Tensoralgebra $\mathfrak{T}(M)$.

(b) ∇_X erhält den Typ der Tensoren.

(c) ∇_X kommutiert mit allen Kontraktionen.

Beweis. (a) Seien $X, Y \in \mathfrak{T}(M)$ Tensoren vom Typ (r,s) bzw. (k,l). Sei $Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$ und $p \in M$. Sei zunächst $Z_p \neq 0$ und sei $c : [-1,1] \to M$ eine Integralkurve von Z mit $c(0) = p \in M$. Es sei $\{\Phi_t \mid t \in [-1,1]\}$ die Parallelverschiebung entlang c. Für $\gamma^1, \ldots, \gamma^{r+k} \in \mathfrak{T}_1(M)$ und $D_1, \ldots, D_{s+l} \in \mathfrak{T}^1(M)$ setze

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \Phi_t^{-1} X_{c(t)}(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, D_1, \ldots, D_s)$$

und

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \Phi_t^{-1} Y_{c(t)}(\gamma^{r+1}, \ldots, \gamma^{r+s}, D_{s+1}, \ldots, D_{r+s}),$$

wobei wir der Einfachheit halber anstelle von $(\gamma^i)_{c(t)}$ und $(D_j)_{c(t)}$ wieder γ^i und D_j schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Phi_t^{-1}(X \otimes Y)_{c(t)}(\gamma^1, \ldots, D_{s+l}) &= (X \otimes Y)_p(\Phi_t^{-1}\gamma^1, \ldots, \Phi_t^{-1} D_{s+l}) \\
&= X_p(\Phi_t^{-1}\gamma^1, \ldots, \Phi_t^{-1} D_s) \cdot Y_p(\Phi_t^{-1}\gamma^{r+1}, \ldots, \Phi_t^{-1} D_{s+l}) \\
&= \Phi_t^{-1} X_{c(t)}(\gamma^1, \ldots, D_s) \cdot \Phi_t^{-1} Y_{c(t)}(\gamma^{r+1}, \ldots, D_{r+s}) \\
&= f(t)g(t)
\end{aligned}$$

und wir erhalten nach der Produktformel für Ableitungen

$$\begin{aligned}
&\nabla_Z(X \otimes Y)_p(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r+k}, D_1, \ldots, D_{s+l}) \\
&\quad = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\Phi_t^{-1}(X \otimes Y)_{c(t)} - (X \otimes Y)_p)(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r+k}, D_1, \ldots, D_{s+l}) \\
&\quad = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(t)g(t) - f(0)g(0)) \\
&\quad = (fg)'(0) \\
&\quad = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \\
&\quad = \left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(t) - f(0))\right) g(0) + f(0) \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g(t) - g(0)) \\
&\quad = \left(\nabla_Z(X)\right)_p (\gamma^1, \ldots, \gamma^r, D_1, \ldots, D_s) Y_p(\gamma^{r+1}, \ldots, \gamma^{r+s}, D_{s+1}, \ldots, D_{r+s}) \\
&\qquad + X_p(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, D_1, \ldots, D_s \left(\nabla_Z(Y)\right)_p (\gamma^{r+1}, \ldots, \gamma^{r+s}, D_{s+1}, \ldots, D_{r+s}) \\
&\quad = \Big(\left(\nabla_Z(X)\right)_p \otimes Y_p + X_p \otimes \left(\nabla_Z(Y)\right)_p\Big) (\gamma^1, \ldots, \gamma^{r+k}, D_1, \ldots, D_{s+l}).
\end{aligned}$$

Dies beweist

$$\nabla_Z(X \otimes Y) = \nabla_Z(X) \otimes Y + X \otimes \nabla_Z(Y),$$

d.h. ∇_Z ist eine Derivation der Tensoralgebra $\mathfrak{T}(M)$. Teil (b) folgt sofort aus der Konstruktin von ∇_X. Teil (c) ist eine Übungsaufgabe. □

KAPITEL 7

Flächen Teil III, Struktur der zweiten Fundamentalform

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine reguläre Hyperfläche mit einer Parametrisierung $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$. Nach (3.12) ist $B_p := \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1,\dots,n}$ eine Basis des Tangentialraumes $\mathrm{T}_p M$ für alle $p \in U$. Sei $\nu : F(U) \to \mathbb{S}_n$ eine Gauß-Abbildung und sei $\tilde{\nu} = \nu \circ F$. Wir erinnern, daß g_{ij} bzw. h_{ij} die Koeffizienten der zur ersten bzw. der zweiten Fundamentalform gehörigen Matrix G bzw. H sind. Desweiteren sei $G^{-1} = \left(g^{ij}\right)$.

(7.1) Lemma. *Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:*

(a) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k} + h_{ij} \cdot \nu$$

wobei $$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right)$$ *ist.*

(b) $$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\nu} = \sum_{k=1}^{n} h_{ik} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial F}{\partial x_l}$$

Beweis. Da $B_p \cup \{\tilde{\nu}(p)\}$ eine Basis von $\mathrm{T}_p \mathbb{R}^{n+1}$ bildet, gibt es reelle Funktionen Γ_{ij}^k und a_{ij} mit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k} + a_{ij} \cdot \tilde{\nu}.$$

Nach den Weingartengleichungen (5.7) gilt

$$h_{ij} = -\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \tilde{\nu} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k}, \tilde{\nu} \right\rangle + a_{ij} \left\langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu} \right\rangle = a_{ij}.$$

Außerdem bekommen wir aus der gleichen Rechnung

$$\Gamma_{ijl} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} g_{kl} \Gamma_{ij}^k.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_l} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} g_{kl} \Gamma_{ij}^k + \sum_{k=1}^{n} g_{ki} \Gamma_{jl}^k = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{jli}.\end{aligned}$$

Analog ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{ijl} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} = \Gamma_{jli} + \Gamma_{ilj}$$

und wir bekommen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} = 2\Gamma_{ijl} = 2 \sum_{k=1}^{n} g_{kl} \Gamma_{ij}^k.$$

Dies beweist Teil (a).

Seien wieder b_{ij} und $c_1, \ldots, c_n$ reelle Funktion auf U mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\nu} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_k} + c_i \nu.$$

Dann ist

$$0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\nu}, \tilde{\nu} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}, \tilde{\nu} \right\rangle + c_i \left\langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu} \right\rangle = 0 + c_i = c_i$$

und

$$h_{ij} = h_{ji} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\nu}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} g_{kj},$$

d.h. es ist $H = BG$ mit $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, also $B = HG^{-1}$. □

Bemerkung. (1) Die Koeffizienten Γ_{ij}^k und Γ_{ijk} hängen nur von der ersten Fundamentalform ab und werden als *Christoffel-Symbole erster bzw. zweiter Art* bezeichnet.

(2) Im Falle $n = 1$ reduzieren sich die obigen Gleichungen zu den Frenetschen Ableitungsregeln für eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, vgl. (1.16).

(7.2) Normaldarstellung der Metrik. Für $p \in M$ kann eine Parametrisierung $F : U \to M$ von M um p immer so gewählt werden, daß $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ und $\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(p) = 0$ für alle i, j ist: Schreibe dazu M in einer Umgebung von p als Graph einer Funktion u mit $u(0) = p$ und $\mathrm{D}u(0) = 0$. Dann ist

$$g_{ij}(u(x)) = \delta_{ij} + \mathrm{D}_i u(x) \mathrm{D}_j u(x)$$

und damit sowohl

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}$$

als auch

$$\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(p) = \mathrm{D}_k\mathrm{D}_i u(0) \cdot \mathrm{D}_j u(0) + \mathrm{D}_i u(0) \cdot \mathrm{D}_k\mathrm{D}_j u(0) = 0.$$

Die Abbildung $F(x) := (x, u(x))$ für alle $x \in U$ ist dann die gesuchte Parametrisierung. Insbesondere verschwinden bzgl. F alle Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k und Γ_{ijk} in p und die Ableitung der Tangentialvektoren in p hat ausschließlich eine Normalkomponente.

(7.3) Satz. *Bezüglich der Normaldarstellung der Metrik gelten die folgenden Gleichungen im Punkt p:*

$$\text{(a)}\quad \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m = \sum_{l=1}^n (h_{ij}h_{kl} - h_{ik}h_{jl})\, g^{lm} \qquad \textit{(Gauß)}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{\partial}{\partial x_k} h_{ij} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{lk} = \frac{\partial}{\partial x_j} h_{ik} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l h_{lj} \qquad \textit{(Codazzi-Mainardi)}$$

Beweis. Differenzieren der Ableitungsgleichungen aus (7.1) liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} \cdot \tilde{\nu} - h_{ij} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_l} + \sum_{l,m=1}^n \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{lk} \tilde{\nu} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} \cdot \tilde{\nu} - \sum_{l,m=1}^n h_{ij} h_{kl} g^{lm} \frac{\partial F}{\partial x_m}.\end{aligned}$$

Nach (7.2) ist $g_{ij}(p) = \delta_{ij}(p)$ und wir erhalten damit in p

$$\left\langle \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_m} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ij}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m - \sum_{l=1}^n h_{ij}h_{kl}g^{lm}.$$

Nach dem Vertauschungssatz von Schwarz ist

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},$$

d.h. wir haben ebenso

$$\left\langle \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_m} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{kj}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l\Gamma_{li}^m - \sum_{l=1}^n h_{kj}h_{kl}g^{lm},$$

woraus die Gauß-Gleichung folgt. Die Codazzi-Meinardi-Gleichung wird analog bewiesen durch Ausrechnen von □

$$\left\langle \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}, \nu \right\rangle.$$

Aus dem letzten Satz folgt, daß die Koeffizienten g_{ij} und h_{ij} der ersten und zweiten Fundamentalform nicht beliebig vorgegeben werden können, so daß sich eine Fläche aus diesen Daten konstruieren ließe. Die beiden untenstehenden Gleichungen werden auch *Integrabilitätsbedingungen* genannt. Andererseits sind die oben genannten Gleichungen auch die einzigen Bedingungen, die für eine Fläche erfüllt sein müssen. Es gilt nämlich der folgende Satz.

(7.4) Satz. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend. Für alle $x \in U$ seien symmetrische Bilinearformen $G(x) = (g_{ij}(x))_{ij}$ und $H(x) = (h_{ij}(x))_{ij}$ gegeben, wobei G positiv definit ist auf U und die Abbildungen $g_{ij}, h_{ij} : U \to \mathbb{R}$ glatt sind. Erfüllen die Koeffizienten g_{ij} und h_{ij} die Integrabilitätsbedingungen, so existiert eine reguläre Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und eine globale Parametrisierung $F : U \to M$, deren erste und zweite Fundamentalform durch G bzw. H gegeben ist. Je zwei solche Flächen unterscheiden sich durch eine Bewegung des $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Beweis. Betrachte die Ableitungsgleichungen als ein System partieller Differentialgleichungen in den $n+1$ Variablen $e_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ und ν. Die Integrabilitätsbedingungen für dieses DGL-System entsperchen genau den Integrabilitätsbedingungen aus Satz (7.3), siehe etwa Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Kapitel IX. Somit gibt es genau eine Lösung $e_1, \ldots, e_n, \nu$ mit $\langle e_i(0), e_j(0)\rangle = g_{ij}(0)$, $\langle e_i, \nu\rangle = 0$ und $\langle \nu, \nu\rangle = 1$. Damit ist

$$F : U \to M : X \mapsto \sum_{i=1}^{n} \int_0^x e_i(x)\mathrm{d}x_i + a$$

eine Parametrisierung der gesuchten Fläche M. Man rechnet nun leicht nach, daß diese Fläche G und H als erste bzw. als zweite Fundamentalform besitzen. Dies ist klar im Punkt 0 nach Konstruktion. Da die Fundamentalformen von M aber das gleiche Anfangswertproblem erfüllen wie G und H und die Lösung eindeutig ist, gilt die Übereinstimmung in allen Punkten von U. Die Eindeutigkeit der Fläche bis auf eine Bewegung wird wie im Fall von Kurven, siehe Satz (1.19), bewiesen. □

(7.5) Satz. *Sei $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine zusammenhängende reguläre Fläche. Für die Hauptkrümmungen gelte $\lambda_1(p) = \ldots = \lambda_n(p) = \lambda(p)$ für alle $p \in M$. Ist $n \geq 2$, so ist λ konstant und M ist entweder eine Ebene (und dann ist $\lambda \equiv 0$) oder M ist in einer Sphäre vom Radius $|\lambda|^{-1}$ enthalten.*

Beweis. Für die mittlere Krümmung H gilt $H(p) = n\lambda(p)$ für alle $p \in M$. Sei $p \in M$ fest. Wir wählen nach (7.2) eine Parametrisierung $F : U \to M$ um p, für die $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ und $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ gilt. Nach den Codazzi-Meinardi-Gleichungen ist dann in p

$$\frac{\partial}{\partial x_k} h_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} h_{jk}.$$

Damit folgt nach (7.2) in p

$$\frac{\partial}{\partial x_k}H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}h_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}h_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}h_{kk} = \frac{\partial}{\partial x_k}\lambda = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_k}H.$$

Wegen $n \geq 2$ folgt hieraus für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}H(p) = 0,$$

d.h. es ist $\mathrm{D}H(p) = 0$. Da $p \in M$ beliebig war und M zusammenhängend ist, ist H auf M konstant c. Nach (5.10) ist damit $h_{ij} = cg_{ij}$. Für $c = 0$ ist M eine Hyperebene nach (5.12). Andernfalls betrachte die Abbildung

$$a : U \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto F(x) - \frac{1}{c}\nu(x).$$

Dann ist nach (7.1) auf U

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}a &= \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}h_{kl}g^{lm}\frac{\partial F}{\partial x_m}\\ &= \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}cg_{kl}g^{lm}\frac{\partial F}{\partial x_m}\\ &= \frac{\partial F}{\partial x_k} - GG^{-1}\frac{\partial F}{\partial x_k}\\ &= 0,\end{aligned}$$

d.h. a ist konstant auf U. Damit ist

$$F(x) = a + \frac{1}{c}\nu(x),$$

und M ist damit in einer Sphäre vom Radius c^{-1} enthalten. □

(7.6) Satz. *Sei $p = F(x) \in M$ mit $K(p) \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei K_n die Kugel um x mit Radius $\frac{1}{n}$. Sei $M_n = F(K_n)$ und $L_n = \tilde{\nu}(K_n)$. Seien A_n und B_n die Flächeninhalte von L_n und M_n. Dann ist*

$$K(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}.$$

Beweis. Es ist

$$B_n = \int_{M_n}\mathrm{d}\mu = \int_{K_n}\sqrt{\det G(F(x))}\mathrm{d}x.$$

Setzen wir

$$a_{ij} := \left\langle \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\rangle,$$

so ist für $A(x) = (a_{ij}(x))$ ebenso

$$A_n = \int_{L_n} \mathrm{d}\mu = \int_{K_n} \sqrt{\det A(x)}\mathrm{d}x.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} h_{ik} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial F}{\partial x_l}, \sum_{k=1}^{n} h_{jk} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial F}{\partial x_l} \right\rangle \\ &= \sum_{k,l,r,s=1}^{n} h_{ik} g^{kl} g_{lr} g^{rs} h_{js} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} h_{ik} g^{kl} h_{lj}.\end{aligned}$$

Ist $X = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial F}{\partial x_k}$ in der Normaldarstellung der Metrik eine Hauptkrümmungsrichtung in q zur Hauptkrümmung λ, so gilt nach Bemerkung (5.10)

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} f_i f_j = \lambda \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} f_i f_j.$$

Damit ist $AX = \lambda^2 GX$ in p und es folgt $\det A(p) = \det G(p) H(p)^2 = K(p)^2 \det G(p)$. Aus der Stetigkeit der Abbildung K in p folgt nun die Behauptung. □

(7.7) Definition. Für jeden Punkt $p \in M^n$ setzen wir

$$R^m_{ijk}(p) = R^m_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma^m_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^m_{ik} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lk} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lj}$$

und

$$R_{iljk}(p) = R_{iljk} = \sum_{m=1}^{n} g_{lm} R^m_{ijk}.$$

Wir nennen $\{R_{iljk}\}_{i,l,j,k=1}^{n}$ den *Riemannschen Krümmungstensor von M an der Stelle p.*

Bemerkung. Der Riemannsche Krümmungstensor hängt nach Definition von den g_{ij} und deren ersten und zweiten Ableitungen ab. Der Riemannsche Krümmungstensor beschreibt also den Anteil der Krümmung, der nur von der Metrik g abhängt. Mit Hilfe der Gauß-Gleichungen läßt sich jedoch $\{R_{iljk}\}_{i,l,j,k=1}^{n}$ durch die zweite Fundamentalform allein via $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$ bestimmen.

(7.8) Theorema Egregium (C.F. Gauß). *Sei $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Dann hängt die Gauß-Krümmung K nur von der ersten Fundamentalform und deren ersten und zweiten Ableitungen ab. Sie ist gegeben durch*

$$K(p) = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij}(p))}.$$

Beweis. Wähle eine Parametrisierung F wie im Beweis von (7.5). Dann ist $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$ und es folgt dann

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} \quad \text{und} \quad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

Damit sind die einzigen nicht verschwindenden Terme

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

und es gilt nach (5.10)

$$R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \det(h_{ij}) = K \cdot \det(g_{ij}).$$

□

Bemerkung. Bezüglich der Normaldarstellung der Metrik ist $R_{ijkl} = 0$ außer für

$$R_{ijij} = \lambda_i \lambda_j,$$

falls $i \neq j$. Die Werte $\sigma_{ij} = R_{ijij}$ heißen *Schnittkrümmungen* von M in p. Für n-Flächen mit $n \geq 2$ ist die Gauß-Kronecker-Krümmung *keine* Invariante der inneren Geometrie, wohl aber die Schnittkrümmungen.

(7.9) Satz. *Sei $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine reguläre Fläche. Sei $p \in M$. Die Fläche M ist genau dann im Punkt p lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ (dies wird lokal flach in p genannt), falls für eine Parametrisierung $F : U \to M$ um p alle Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors in einer Umgebung von p verschwinden.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß M in p genau dann lokal flach ist, wenn es eine Parametrisierung $E : V \to M$ um p gibt, bzgl. der $g_{ij}(q) = \delta_{ij}$ für alle $q \in E(V)$ gilt. Gibt es eine solche Parametrisierung, so ist diese natürlich eine lokale Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und M. Sei umgekehrt $F : U \to M$ eine beliebige Parametrisierung um p für die der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet und sei $g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(q), \frac{\partial F}{\partial x_j}(q) \right\rangle$.

(1) Eine Parametrisierung $E : V \to M$ um p ist genau dann eine lokale Isometrie, wenn

$$\left\langle \mathrm{D}E\frac{\partial Y}{\partial x_i}, \mathrm{D}E\frac{\partial Y}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial Y}{\partial x_i}, \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right\rangle$$

auf U für alle i, j gilt, wobei $Y := E^{-1} \circ F$ ist. Da die linke Seite obiger Gleichung gerade $\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}$ ist, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$g_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(u)\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(u).$$

Setzen wir

$$X = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \quad \text{und} \quad G = (g_{ij})_{i,j},$$

so ist obige Bedingung gleichwertig zu

$$G = A^t A \quad \text{bzw. zu} \quad AG^{-1}A^t = E,$$

also zu

$$\delta_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}(u)\frac{\partial y_i}{\partial x_k}(u)\frac{\partial y_j}{\partial x_l}(u) \qquad (*)$$

für alle $u \in U$ und alle i, j.

(2) Das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jk} h_i$$

besitzt genau dann eine Lösung $(h_1, \ldots, h_n)$ zu beliebig vorgegebenen Anfangsbedingungen $(h_1(0), \ldots, h_n(0))$, wenn die Integrabilitätsbedingung $R^m_{ijk}(x) = 0$ für alle $x \in U$ erfüllt ist (vgl. (7.1) und (7.3)). Dies ist äquivalent zum Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors auf U. Ist also $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{T}_0\mathbb{R}^n$, so gibt es für jedes $m \in \{1, \ldots, n\}$ Lösungen $(h^m_1, \ldots, h^m_n)$ obigen DGL-Systems mit

$$(h^m_1(0), \ldots, h^m_n(0)) = e_m.$$

(3) Betrachte das DGL-System

$$h_j = \frac{\partial y}{\partial x_j}.$$

Dieses hat genau dann eine Lösung $y = (y_1, \ldots, y_n)$, wenn

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_k} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j}$$

für alle j,k gilt, siehe etwa Spivak, I.7-15. Wegen $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ ist diese Bedingung erfüllt. Damit gilt auf U

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{m=1}^{n} \Gamma^m_{jk} \frac{\partial y_i}{\partial x_m}$$

mit $Y^* = (\frac{\partial y^i}{\partial x_j}(0))_{ij} = (e_1, \ldots, e_n)$. Insbesondere ist die Matrix Y^* regulär und $(y_1, \ldots, y_n)$ ist daher ein Koordinatensystem um 0.

(4) Wir zeigen, daß $y = (y_1, \ldots, y_n)$ die Gleichung $(*)$ auf U erfüllt. Dies gilt nach Wahl von y im Punkt 0. Somit genügt es nachzuweisen, daß alle partiellen Ableitungen der rechten Seite von $(*)$ auf U verschwinden. Wie im Beweis von (7.1) zeigt man

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_m} = -\sum_{l=1}^{n} \left(g^{il}\Gamma^j_{lm} + g^{lj}\Gamma^i_{lm} \right).$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_m} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} &= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l x_m} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \sum_{r=0}^{n} \Gamma^r_{km} \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \sum_{r=0}^{n} \Gamma^r_{lm} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_r} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} \left(\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_m} + \sum_{r=1}^{n} g^{rl}\Gamma^k_{rm} + g^{kr}\Gamma^l_{rm} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

nach der ersten Gleichung von (4). Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

(7.10) Beispiele. (a) Die n-Sphäre vom Radius r hat alle Hauptkrümmungen konstant r^{-1}, d.h. es ist $R_{ijij} = r^{-2}$ für $i \neq j$. Deshalb ist die n-Sphäre nicht lokal isometrisch zum $\mathbb{R}^n$.

(b) Für den Zylinder $Z_{n-m,m} = \mathbb{S}_{n-m} \times \mathbb{R}^m$ ist

$$R_{ijij} = \begin{cases} \lambda_i \lambda_j & \text{falls } 1 \leq i,j \leq n-m,\ i \neq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist der Zylinder $Z_{n-m,m}$ nur für $n - m = 1$ lokal isometrisch zum $\mathbb{R}^n$.

(7.11) Definition. Sei $p \in M^n$ und sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von T_pM. Dann wird durch

$$\mathrm{Ric} : (X, Y) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} f_i g_i$$

eine Bilinearform auf T_pM definiert, wobei $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^n g_i e_i$ und

$$R_{ij} = \sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} R_{iljk}$$

ist. Diese Bilinearform wird die *Ricci-Krümmung* vom M in p genannt. Die Spur der Ricci-Krümmung heißt *skalare Krümmung.*

KAPITEL 8

Exponentialabbildung und Krümmungstensor

Das vor (6.15) angebene System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\tilde{x}_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{x}_i'(t)\tilde{x}_j'(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0$$

läßt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} x_i' &= z_i \\ z_k' &= -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x_1,\ldots,x_n) z_i z_j \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

Wir betrachten dieses System auf dem Würfel $W = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid |x_i| < c\}$, wobei wir annehmen, daß W im Bild $h(U)$ einer Karte $h : U \to \mathbb{R}^n$ liegt und $h(p) = 0$ gelte. Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe etwa [13], p. 64) wissen wir dann:

Es gibt Konstanten $b \in (0, c)$ und $M > 0$, sowie eindeutig bestimmte glatte Abbildungen

$$\varphi_i : [-2b, 2b] \times [-b, b]^{2n} \to \mathbb{R} : (t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \mapsto \varphi_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n),$$

so daß für alle $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \in [-b, b]^{2n}$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \varphi_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \\ z_i(t) &= \mathrm{D}_1\varphi_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

das System ($\clubsuit$) lösen, $|x_i(t)| < \frac{1}{2}$, $|z_i(t)| < M$ gilt, und die Anfangswerte $x_i(0) = u_i$ und $z_i(0) = v_i$ erfüllt sind. Dabei bezeichnen D_i die partielle Ableitung nach dem i-ten Argument.

Setzen wir

$$\psi_i : [-2b, 2b] \times [-b, b]^{n} \to \mathbb{R} : (t, v_1, \ldots, v_n) \mapsto \varphi_i(t, 0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_n),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \psi(0, v_1, \ldots, v_n) &= 0 \\ \mathrm{D}_1\psi_i(0, v_1, \ldots, v_n) &= v_i. \end{aligned}$$

Sei nun $X \in \mathrm{T}_pM \setminus \{0\}$. Die maximale Geodäte c_X mit $c_X(0) = p$ und $(c_X)'(0) = X$ existiert und ist eindeutig nach (6.15). Der Tangentialvektor X läßt sich nach (2.16) schreiben als

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$. Wir betrachten nun speziell die Anfangswertbedingung

$$(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_n).$$

Für $s \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $d_X : t \mapsto s \cdot c_X(t)$ ebenfalls eine maximale Geodäte mit $d_X(0) = p$ und $(d_X)'(0) = sX$. Andererseits ist auch $\tilde{d}_X : t \mapsto c_X(st)$ eine maximale Geodäte mit $\tilde{d}_X(0) = p$ und $(\tilde{d}_X)'(0) = s \cdot (c_X)'(0) = sX$. Aus der Eindeutigkeit der Geodäten folgt damit

$$c_X(st) = c_{sX}(t)$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Aus der Eindeutigkeit der Abbildungen φ_i folgt somit

$$\psi_i(st, a_1, \ldots, a_n) = \psi_i(t, sa_1, \ldots, sa_n)$$

für alle $s \in (-1, 1)$, $t \in [-2, 2b]$ und $a_i \in [-b, b]$. Damit folgt aus obiger Gleichung durch Differentiation nach s

$$t \cdot D_1\psi_i(st, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot D_{j+1}\psi_i(t, sa_1, \ldots, sa_n)$$

$$t^2 \cdot D_1^2\psi_i(st, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \cdot D_{j+1}D_{k+1}\psi_i(t, sa_1, \ldots, sa_n).$$

Nach der Taylorschen Formel ist

$$\psi_i(b, a_1, \ldots, a_n) = \psi_i(0, a_1, \ldots, a_n) + \mathrm{D}_1\psi_i(0, a_1, \ldots, a_n)b + \frac{1}{2}\mathrm{D}_1^2\psi_i(\xi, a_1, \ldots, a_n)b^2$$

für ein $\xi \in [0, b]$. Obige Gleichung für die zweite Ableitung eingesetzt ergibt

$$\psi_i(b, a_1, \ldots, a_n) = 0 + a_i b + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \cdot D_{j+1}D_{k+1}\psi_i(b, \frac{\xi}{b}a_1, \ldots, \frac{\xi}{b}a_n).$$

Somit besitzt die Abbildung

$$\Psi : [-b, b]^n \to \mathbb{R} : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto (\psi_1(b, v_1, \ldots, v_n), \ldots, \psi_n(b, v_1, \ldots, v_n))$$

im Ursprung die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{D}\Psi(0) = b\mathrm{E}_n,$$

wobei E_n die Einheits-$n \times n$-Matrix ist. Insbesondere ist die Jacobi-Matrix im Ursprung regulär und nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus um 0. Nun ist Ψ die Abbildung $X \mapsto c_X(b)$, dargestellt in den lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$, da die Abbildungen ψ_i gerade die Lösungen von Gleichung (♣) sind. Wegen $c_{bX}(1) = c_X(b)$ haben wir also den folgenden Satz bewiesen.

(8.1) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇ und sei $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von 0 in T_pM, so daß die Abbildung $\exp_p : V \to M : X \mapsto c_X(1)$ ein Diffeomorphismus zwischen V und $\exp_p(V)$ ist. Die Abbildung $\exp = \exp_p$ wird die Exponentialabbildung im Punkt p genannt. Die Geodäten durch p haben die Form $t \mapsto \exp(tX)$ für $X \in \mathrm{Vec}(M)$.* □

(8.2) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang ∇. Sei $p \in M$. Eine Umgebung N_0 des Ursprungs in T_pM heißt *normal*, falls die Exponentialabbildung $\exp = \exp_p : N_0 \to N_p = \exp(N_0)$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung N_p von p ist und N_0 sternförmig ist, d.h. es ist $tX \in N_0$ ist für alle $X \in N_0$ und alle $t \in [0, 1]$. Die Umgebung N_p heißt eine *normale Umgebung von p.* Ist $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Basis von T_pM, so heißt die Umkehrabbildung

$$\log_p : N_p \to N_0 \subseteq \mathbb{R}^n : \exp_p(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) \to (a_1, \ldots, a_n)$$

von $\exp = \exp_p$ ein *Normalkoordinatensystem in p.*

Da die ε-Kugeln eine Basis der euklidischen Topologie des $\mathbb{R}^n$ bilden, folgt aus (8.1) sofort, daß jeder Punkt p ein Normalkoordinatensystem besitzt. Es gilt sogar der folgende Satz. Für einen Beweis siehe etwa Helgason, [8], p. 34-35.

(8.3) Definition. Eine Umgebung U von p heißt *konvex*, falls zu je zwei Punkten q_1, q_2 aus U eine Geodäte zwischen q_1 und q_2 gibt, die ganz in U enthalten ist. Die Umgebung U heißt *einfach*, wenn es zu je zwei Punkten $q_1, q_2 \in U$ höchstens eine Geodäte gibt, die q_1 und q_2 verbindet.

(8.4) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang ∇. Dann besitzt jeder Punkt $p \in M$ eine normale Umgebung N_p, welche eine normale Umgebung für jede ihrer Punkte ist. Insbesondere ist N_p einfach und konvex.* □

Sei $p \in M$ und $X \in T_pM$. Wie in Kapitel 6 gezeigt, gilt für eine Geodäte $c : [a, b] \to M$ mit $c(a) = p$ in lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ die Beziehung

$$\tilde{x}_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{x}_i'(t)\tilde{x}_j'(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0.$$

Da nach dem Beweis von (6.14) die Lösung $\varphi(b)$ dieser Gleichung lediglich von $c(a)$, $c'(a)$ und vom Endpunkt $c(b)$ (differenzierbar) abhängt, ist die Abbildung $\Phi^* : q \mapsto \Phi_{pq}X$ glatt, wobei Φ_{pq} die Parallelverschiebung von p nach q ist. Betrachtet man die Abbildung Φ^* auf einer normalen, einfachen, konvexen Umgebung N_p, so ist Φ^* auf der ganzen Menge N_p definiert und dort wohldefiniert.

(8.5) Definition. Sei $p \in M$, $X \in \mathrm{T}_pM$, und sei N_p eine normale, einfache, konvexe Umgebung von p. Dann heißt das durch

$$X_p^* := \Phi_{pq}X$$

definierte glatte Vektorfeld auf N_p das *durch X bestimmte Parallelfeld.*

Als nächstes wollen wir untersuchen, welche Verbindungen zwischen einer Riemannschen Metrik und einem affinen Zusammenhang auf einer glatten Mannigfaltigkeit bestehen können.

(8.6) Definition. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik g. Ein affiner Zusammenhang ∇ auf M heißt ein *Riemannscher Zusammenhang* oder auch *kompatibel zur Riemannschen Metrik g*, falls zu jeder regulären Kurve $c : [a, b] \to M$ und zu je zwei parallelen Vektorfeldern X und Y entlang c das Skalarprodukt $g_{c(t)}(X(t), Y(t))$ für alle $t \in [a, b]$ konstant ist.

Bemerkung. Durch die Skalarprodukte g_p werden die Tangentialräume T_pM zu euklidischen Vektorräumen. Nach (6.14) induziert jede Kurve $c : [a, b] \to M$ mit $p = c(a)$ und $q = c(b)$ einen Vektorraum-Isomorphismus $\Phi_c : \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_qM$. Ist der affine Zusammenhang kompatibel zur Riemannschen Metrik g, so ist Φ_c sogar eine orthogonale lineare Abbildung.

(8.7) Satz. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Der affine Zusammenhang ∇ auf M ist ein Riemannscher Zusammenhang.

(b) Für jede reguläre Kurve c und Vektorfelder V, W entlang c ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t} \right\rangle.$$

(c) Für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$ ist $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z(X), Y) + g(X, \nabla_Z(Y))$.

(d) Für alle $Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$ ist $\nabla_Z g = 0$.

Die Gleichung (c) wird die Ricci-Identität genannt.

Beweis. $(c) \iff (d)$: Für $X, Y, Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$ gilt nach (6.18)

$$\begin{aligned}\nabla_Z(X \otimes Y \otimes g) &= \nabla_Z(X \otimes Y) \otimes g + (X \otimes Y) \otimes \nabla_Z(g) \\ &= (\nabla_Z(X) \otimes Y) \otimes g + (X \otimes \nabla_Z(Y)) \otimes g + (X \otimes Y) \otimes \nabla_Z(g).\end{aligned}$$

Kontrahieren wir obige Gleichung, so bekommen wir

$$\nabla_Z(g(X,Y)) = Zg(X,Y) = g(\nabla_Z(X), Y) + g(X, \nabla_Z(Y)) + (\nabla_Z(g))(X,Y),$$

woraus die Äquivalenz von (c) und (d) folgt.

$(c) \implies (b)$: Sei $c : [-1,1] \to M$ eine reguläre Kurve mit $c(0) = p$. Sei Z_c das Geschwindigkeitsvektorfeld von c und sei $Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$ eine Fortsetzung von Z_c. Seien V, W Vektorfelder entlang c mit Fortsetzungen $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(V(s), W(s))) = \nabla_{Z_c(s)}(g(X_{c(s)}, Y_{c(s)})) = Z_{c(s)}(g(X_{c(s)}, Y_{c(s)})) \\ &= g(\nabla_{Z_c(s)}X, Y_{c(s)}) + g(X_{c(s)}, \nabla_{Z_c(s)}Y) \\ &= g\left(\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}(s), W(s)\right) + g\left(V(s), \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}(s)\right),\end{aligned}$$

woraus (b) folgt.

$(b) \implies (a)$: Sei $c : [a,b] \to M$ eine reguläre Kurve und seien V, W parallele Vektorfelder entlang c. Dann ist

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t},$$

und es folgt aus (b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Also ist $g(V(s), W(s))$ auf $[a,b]$ konstant, d.h. ∇ ist kompatibel zur Riemannschen Metrik g.

$(a) \implies (c)$: Sei N_p eine normale Umgebung von p und $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Basis von T_pM. Wir wählen die durch $(X_1, \ldots, X_n)$ bestimmten Parallelfelder $X_1^*, \ldots, X_n^*$ auf N_p. Auf N_p können wir $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$ darstellen als

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i^* \quad \text{und} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} g_i X_i^*$$

mit $f_i, g_i \in C^\infty(N_p)$. Seien $c_i : U_i \to M$ Geodäten durch p mit $c_i'(0) = X_i$, siehe (6.15). Nach Definition ist c_i eine Integralkurve des Geschwindigkeitsvektorfeldes X_{c_i}. Durch die

Gleichung $\nabla_{X_{c_i}} V = 0$ ist ein Vektorfeld V durch V_p auf c_i eindeutig bestimmt. Da c_i eine Geodäte ist, haben wir $\nabla_{X_{c_i}} X_{c_i} = 0$. Andererseits ist für alle i, j

$$\nabla_{X_{c_j}} (X_i^*)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\Phi_t^{-1} (X_i^*)_{c_j(t)} - (X_i^*)_p \right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(X_i - X_i \right) = 0.$$

Wegen $(X_i^*)_p = X_i = c_i'(0) = X_{c_i}(0)$ ist daher aufgrund der Eindeutigkeit $c_i'(t) = X_{c_i}(t) = (X_i^*)_{c_i(t)}$, d.h. c_i ist auch eine Integralkurve von X_i^*. Nach (6.16) und der Definition von X_i^* ist somit

$$\nabla_{X_j^*} (X_i^*)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\Phi_t^{-1} (X_i^*)_{c_j(t)} - (X_i^*)_p \right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left((X_i)_p - (X_i)_p \right) = 0,$$

also ist $\nabla_Z (X_i^*)_p = 0$ für alle $Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$ wegen Axiom (AZ1). Da nach Voraussetzung $g_p((X_i^*)_p, (X_j^*)_p) = g_{ij}$ konstant ist auf N_p, haben wir nach (4.23)

$$\begin{aligned} Z_p(g(X,Y)) &= \sum_{i,j=1}^{n} Z_p(f_i g_j) g_{ij} \\ \nabla_Z(X)_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \nabla_Z(X_i^*) + \nabla_Z(f_i) X_i^* \right)_p = \sum_{i=1}^{n} (Z f_i)(p) X_i \\ g_p(\nabla_Z(X), Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} Z(f_i)(p) g_j(p) g_{ij}. \end{aligned}$$

Da Z_p eine Derivation von $C^\infty(p)$ ist. folgt (c). □

(8.8) Definition. Ein affiner Zusammenhang auf einer glatten Mannigfaltigkeit M heißt *symmetrisch* oder *torsionsfrei*, wenn

$$[X, Y] := XY - YX = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X)$$

für alle $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$ gilt. Dabei heißt $[X, Y]$ die *Lie-Klammer* oder die *Lie-Ableitung* von X und Y und XY ist definiert durch $f \mapsto X(Yf)$. Ein symmetrischer Riemannscher Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M wird ein *Levi-Civita-Zusammenhang* genannt.

Bemerkung. Auf einer Koordinatenumgebung U ist ein affiner Zusammenhang ∇ durch die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k eindeutig bestimmt. Auf U setzen wir

$$\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}.$$

Ist ∇ symmetrisch, so ist nach dem Vertauschungssatz von Schwarz

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \nabla_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0.$$

Andererseits ist nach (6.5)

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \nabla_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

und damit folgt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

für alle i, j, k. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *symmetrisch.*

Der kanonische Zusammenhang des $\mathbb{R}^n$ aus (6.1) ist symmetrisch. Dies wurde in den Aufg. 54 und 55 gezeigt.

(8.9) Satz. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g. Dann gibt es stets einen eindeutig bestimmten zu g kompatiblen Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf M.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien ∇ und $\tilde{\nabla}$ zu g kompatible Levi-Civita-Zusammenhänge. Dann gilt nach (8.7) und (8.8) für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z(X), Y) + g(X, \nabla_Z(Y)) = g(\nabla_X(Z), Y) + g([Z,X], Y) + g(X, \nabla_Z(Y)).$$

Zyklisches Vertauschen der Vektorfelder X, Y, Z liefert zwei weitere Gleichungen. Aus den so gewonnenen drei Gleichungen bekommen wir nach Elimination von ∇_X und ∇_Y

$$\begin{aligned} 2g(X, \nabla_Z(Y)) = {} & Zg(X,Y) + Yg(X,Z) - Xg(Y,Z) \\ & + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]). \end{aligned} \tag{♠}$$

Die gleiche Relation gilt natürlich auch für $\tilde{\nabla}$. Sei $p \in M$ und sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Orthonormalbasis von T_pM bzgl. des Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle_p$. Dann ist für $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \in \mathrm{Vec}\,(M)$

$$\langle X_i, Y \rangle_p = a_i,$$

d.h. durch Kenntnis von $\langle X_i, Y \rangle_p$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ läßt sich Y zurückgewinnen. Da die rechte Seite von (♠) nur von X, Y, Z abhängt, folgt damit $\nabla = \tilde{\nabla}$. Umgekehrt wird ∇_Z durch die Gleichung (♠) definiert und man erhält die Eigenschaften $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z(X), Y) + g(X, \nabla_Z(Y))$ sowie $[X,Y] = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X)$ zurück. Durch elementare (aber langwierige) Rechnung zeigt man überdies, daß das so definierte ∇ ein affiner Zusammenhang auf M darstellt. □

(8.10) Satz. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit kompatiblem Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Sei $p \in M$ und sei $h = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Normalkoordinatensystem um p bzgl. eine Orthonormalbasis $(X_1, \ldots, X_n)$ von T_pM. Dann gilt*

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \textit{für alle } i, j, k.$$

Deshalb ist nach (♡) aus (6.5)

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(Y)_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p$$

für $Y = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}$*, d.h. die Koeffizienten der kovarianten Ableitung im Punkt* p *sind gerade die Koordinatenableitungen von* f_k *nach* $\frac{\partial}{\partial x_k}$ *in* p*.*

Beweis. Die erste Gleichung folgt sofort aus der Tatsache, daß $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{T}_p M$ ist. Nach (8.1) haben die Geodäten durch p die Form $t \mapsto \exp(tX)$ für $X \in \mathrm{Vec}\,(M) \setminus \{0\}$, d.h. in Normalkoordinaten $h = (x_1, \ldots, x_n)$ um p sind die Geodäten gerade die eindimensionalen Untervektorräume geschnitten mit N_0. Ist $c : (a, b) \to M$ also eine Geodäte durch p, so ist bzgl. h

$$c'(t) = (a_1, \ldots, a_n) \quad \text{und} \quad c''(t) = 0.$$

Also ist nach der Geodätengleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(c(t)) a_i a_j = 0.$$

Insbesondere gilt in $p = c(0)$ für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p) a_i a_j = 0.$$

Für $a_i = 1$ und $a_j = 0$ für $i \neq j$ folgt daraus $\Gamma_{ii}^k(p) = 0$ für alle i, k. Für $a_i = a_j = 1$ und sonst $a_l = 0$ folgt

$$0 = \Gamma_{ii}^k(p) + \Gamma_{jj}^k(p) + \Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 2\Gamma_{ij}^k(p).$$

Damit verschwinden alle Christoffel-Symbole in p. □

(8.11) Vertauschung kovarianter Ableitungen. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit kompatiblem Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Wir setzen wieder

$$\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$$

auf einer Koordinatenumgebung U von M. Für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist nach der letzten Bemerkung

$$\nabla_i \nabla_j(f) = \nabla_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \nabla_j \nabla_i(f),$$

d.h. die zweiten kovarianten Ableitungen einer Funktion sind symmetrisch. Sei nun $X \in \mathrm{Vec}\,(M)$ mit

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

auf U. Dann gilt nach (♡) von Kapitel 6

$$\nabla_j(X) = \sum_{k=1}^{n} u_k^j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{mit} \quad u_k^j = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} f_l \Gamma_{jl}^k$$

und

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \nabla_i \left(u_k^j \frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(u_k^j \nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(u_k^j \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^j \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{n} u_k^j \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^{n} f_m \Gamma_{jm}^l \right) \Gamma_{il}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und

$$\frac{\partial u_k^j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} \Gamma_{jl}^k + f_l \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x_i} \right)$$

folgt für die k-te Komponente von $\nabla_i \nabla_j(X) - \nabla_j \nabla_i(X)$ die Relation

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_k^j}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{n} u_l^j \Gamma_{il}^k \right) - \left(\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} u_l^i \Gamma_{jl}^k \right) \\ &\qquad = \sum_{l=1}^{n} \left(f_l \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x_j} \right) + \sum_{m=1}^{n} f_m \left(\Gamma_{jm}^l \Gamma_{il}^k - \Gamma_{im}^l \Gamma_{jl}^k \right) \right) \\ &\qquad = \sum_{l=1}^{n} f_l \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma_{jl}^m \Gamma_{im}^k - \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^k \right) \right) \\ &\qquad := \sum_{l=1}^{n} f_l R_{lij}^k. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit/Definition wird durch (7.7) angeregt. Somit wäre eine Möglichkeit, einen Krümmungstensor in Analogie zu (7.7) zu definieren, die folgende: Mit

$$R(X,Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$$

sei

$$R : \mathfrak{T}_1(M) \times \mathfrak{T}^1(M) \times \mathfrak{T}^1(M) \times \mathfrak{T}^1(M) \to C^\infty(M) : (\omega, X, Y, Z) \mapsto \omega(R(X,Y)Z)$$

der Riemannsche Krümmungs"tensor". Ist das so definierte R auch ein Tensor, d.h. eine Multilinearform? Dies ist klar für die Argumente ω, X und Y nach (AZ1). Wie sieht es für Z aus? In Z ist R zumindest additiv. Aber es gilt für $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) \\ &= \nabla_X (f\nabla_Y(Z) + (Yf)Z) - \nabla_Y (f\nabla_X(Z) + (Xf)Z) \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y(Z)) + (Xf)\nabla_Y(Z) + (Yf)\nabla_X(Z) + X(Yf)Z \\ &\quad - f(\nabla_Y \nabla_X(Z)) - (Yf)\nabla_X(Z) - (Xf)\nabla_Y(Z) - Y(Xf)Z \\ &= f(R(X,Y)Z) + ([X,Y]f)Z, \end{aligned}$$

d.h. das so definierte R ist *nicht* linear in Z. Deshalb muß der letzte Term korrigiert werden. Wegen

$$\nabla_{[X,Y]}(fZ) = f\nabla_{[X,Y]}(Z) + ([X,Y]f)Z$$

definieren wir also:

(8.12) Definition. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Für $X, Y \in \mathrm{Vec}\,(M)$ setze

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

Die $C^\infty(M)$-lineare Abbildung

$$R : \mathfrak{T}_1(M) \times \mathfrak{T}^1(M) \times \mathfrak{T}^1(M) \times \mathfrak{T}^1(M) \to C^\infty(M) : (\omega, X, Y, Z) \mapsto \omega(R(X,Y)Z)$$

heißt das *Krümmungstensorfeld von* M. Dies ist also ein Tensor der Stufe (1,3).

Bemerkung. (a) Der Krümmungstensor R mißt also den Grad der Symmetrie der zweiten kovarianten Ableitung, denn es ist wegen $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i.$$

(b) Der kanonische affine Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Levi-Civita-Zusammenhang von $\mathbb{R}^n$ bzgl. der gewöhnlichen Riemannschen Metrik. Nach (7.9) ist der zugehörige Riemannsche Krümmungstensor identisch Null.

(8.13) Lemma. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigflatigkeit. Für den Krümmungstensor R gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $R(X, Y) = -R(Y, X)$
(b) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
(c) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
(b) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

für alle $W, X, Y, Z \in \mathrm{Vec}\,(M)$.

Beweis. (a) Folgt sofort aus $[X, Y] = -[Y, X]$.

(b) Wegen $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ genügt es aufgrund der Trilinearität von $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$, die Relation für Vektorfelder X, Y, Z mit $[X, Y] = [Y, Z] = [X, Z] = 0$ nachzuweisen. Dann ist

$$\nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) + \nabla_Y \nabla_Z(X) - \nabla_Z \nabla_Y(X) + \nabla_Z \nabla_X(Y) - \nabla_X \nabla_Z(Y) = 0$$

zu prüfen. Da ∇ symmetrisch ist, gilt

$$\nabla_Y(Z) - \nabla_Z(Y) = [Y, Z] = 0$$

und entsprechend für die anderen Kombinationen. Dies beweist obige Gleichung.

(c) Wie in (a) können wir wieder $[X, Y] = 0$ annehmen. Es genügt, die Relation

$$g(R(X, Y)Z, Z) = 0$$

nachzuweisen. Wir haben

$$g(R(X, Y)Z, Z) = g(\nabla_X \nabla_Y(Z), Z) - g(\nabla_Y \nabla_X(Z), Z).$$

Aus der Gleichung (8.7)(c) und der Symmetrie von ∇ folgt

$$Xg(Z, Z) = 2g(\nabla_X(Z), Z)$$

und erneute Anwendung von (8.7)(c) liefert

$$YXg(Z, Z) = 2\left(g(\nabla_Y \nabla_X(Z), Z) + g(\nabla_X(Z), \nabla_Y(Z))\right).$$

Wegen $[X, Y] = 0$ ist die linke Seite obiger Gleichung symmetrisch in X und Y. Da der rechte Term der rechten Seite ebenfalls in X und Y symmetrisch ist, gilt dasselbe auch für den mittleren Term. Dies liefert die Behauptung.

(d) Folgt durch Anwenden von (a), (b) und (c). □

Als nächstes soll die geometrische Bedeutung der Lie-Klammer untersucht werden. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, dessen Beweis etwa in Lang, Analysis II, 126–138 zu finden ist.

(8.14) Lemma. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $X \in \mathrm{Vec}(M)$ und sei $p \in M$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, eine offene Umgebung U von p, sowie eine Familie $\Phi = \{\varphi_t\}_{|t|<\varepsilon}$ von Diffeomorphismen $\varphi_t : U \to \varphi_t(U) \subseteq M$, für die gilt:

(a) Die Abbildung $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M : (t, q) \mapsto \varphi_t(q)$ ist glatt.
(b) Für alle $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und für alle $q \in U$ mit $\varphi_t(q) \in U$ gilt $\varphi_{s+t}(q) = \varphi_s(\varphi_t(q))$.
(c) Für alle $q \in U$ ist die Kurve $c_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : t \mapsto \varphi_t(q)$ eine Integralkurve von X mit $c_q(0) = q$.

Die Familie Φ heißt *die von X erzeugte (lokale) Einparametergruppe.*

(8.15) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $f : M \to M$ eine glatte bijektive Abbildung. Sei $X \in \mathrm{Vec}(M)$ mit Φ als die von X erzeugte Einparametergruppe. Es ist $\mathrm{T}f(X) = X$ genau dann, wenn $\varphi_t \circ f = f \circ \varphi_t$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt.*

Beweis. Für $g \in C^\infty(M)$ ist nach Eigenschaft (c)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}fX)_p(g) &= \mathrm{T}_{f^{-1}(p)} X_{f^{-1}(p)}(g) \\
&= X_{f^{-1}(p)}(g \circ f) \\
&= (g \circ f \circ c_{f^{-1}(p)})'(0) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g \circ f \circ c_{f^{-1}(p)}(t) - g \circ f(f^{-1}(p))) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g \circ f \circ \varphi_t \circ f^{-1}(p) - g(p)).
\end{aligned}$$

Nun ist $f \circ \varphi_t \circ f^{-1} = \varphi_t$ genau dann, wenn

$$(\mathrm{T}fX)_p(g) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g(\varphi_t(p)) - g(p)) = X_p(g)$$

für alle $g \in C^\infty(M)$ gilt. Dies beweist das Lemma. □

(8.16) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $X, Y \in \mathrm{Vec}(M)$ mit Φ und Ψ als die von X bzw. von Y erzeugten Einparametergruppen. Dann ist für alle $p \in M$*

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(Y_p - (\mathrm{T}\varphi_t Y)_p\right).$$

Beweis. Die Abbildungen aus Φ seien auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$ definiert. Für $f \in C^\infty(M)$ und U wie in (8.14) setze

$$h : (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \to M : (t,p) \mapsto f(\varphi_t(p)) - f(p),$$

sowie

$$g : (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \to M : (t,p) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} h(st,p)\mathrm{d}s.$$

Dann ist

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = X_p f$$

und

$$h(t,p) = h(1\cdot t,p) - h(0,p) = \int_0^1 t\frac{\partial}{\partial s} h(st,p)\mathrm{d}s = t g(t,p),$$

woraus mittels Produktableitung

$$X_p f = \frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$$

folgt. Wir erhalten somit wegen $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$

$$(\mathrm{T}\varphi_t Y)_p(f) = \mathrm{T}_{\varphi_{-t}(p)}\varphi_t\, Y_{\varphi_{-t}(p)}(f) = Y_{\varphi_{-t}(p)}(f\circ\varphi_t) = Y_{\varphi_{-t}(p)}(f + t g(t,.)).$$

Insgesamt bekommen wir

$$\begin{aligned}
[X,Y]_p(f) &= X_p(Yf) - Y_p(Xf)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((Yf)\circ\varphi_t(p) - (Yf)(p)\right) - (Yg(0,.))_p\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((Yf)(p) - (Yf)\circ\varphi_{-t}(p)\right) - \lim_{t\to 0}(Yg(t,.))_{\varphi_{-t}(p)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((Yf)(p) - (Yf)\circ\varphi_{-t}(p) - t(Yg(t,.))_{\varphi_{-t}(p)}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y_p - (\mathrm{T}\varphi_t Y)_p\right).
\end{aligned}$$

□

(8.17) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $X, Y \in \mathrm{Vec}(M)$ mit Φ und Ψ als die von X bzw. von Y erzeugten Einparametergruppen. Es ist $[X,Y] = 0$ genau dann, wenn $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ für alle s,t gilt.*

Beweis. Vertauschen φ_t und ψ_s für alle s,t, so ist $\mathrm{T}\varphi_t Y = Y$ nach (8.15) und es folgt $[X,Y] = 0$ nach der Darstellung der Lieklammer aus (8.16). Sei umgekehrt $[X,Y] = 0$ und $p \in M$. Betrachte die Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{T}_p M : t \mapsto (\mathrm{T}\varphi_t Y)_p$. Wegen

$$\begin{aligned} c_p'(s) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(c(s+t) - c(s)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((\mathrm{T}\varphi_{s+t} Y)_p - (\mathrm{T}\varphi_s Y)_p) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{T}_{\varphi_{-s}(p)}\varphi_s(\mathrm{T}\varphi_t Y)_{\varphi_{-s}(p)} - \mathrm{T}_{\varphi_{-s}(p)}\varphi_s Y_{\varphi_{-s}(p)}) \\ &= \mathrm{T}_{\varphi_{-s}(p)}\varphi_s \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((\mathrm{T}\varphi_t Y)_{\varphi_{-s}(p)} - Y_{\varphi_{-s}(p)} \right) \\ &= \mathrm{T}_{\varphi_{-s}(p)}\varphi_s(0) = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wieder aus (8.16) folgt, gilt $c_p(s) = c_p(0)$ für alle s. Also ist $\mathrm{T}\varphi_t Y = Y$, da $p \in M$ beliebig war. Nach (8.15) folgt nun die Behauptung. □

(8.18) Satz. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Seien $X_1, \ldots, X_n \in \mathrm{Vec}(M)$ in einer Umgebung W von p linear unabhängig. Genau dann gilt $[X_i, X_j] = 0$ für alle i,j, wenn es eine Karte (h,U) um p mit $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ auf U gibt.*

Beweis. Wir können annehmen, daß die Umgebung W von p bereits in einer Koordinatenumgebung mit Koordinaten $k = (y_1, \ldots, y_n)$ liegt und die X_i auf $k(W)$ definiert sind. Dort können wir außerdem $(X_i)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0$ annehmen. Sei $\Phi_i = \{\varphi_t^i\}$ die von X_i erzeugte lokale Einparametergruppe. Setze

$$j(u_1, \ldots, u_n) := \varphi^1_{u_1}(\varphi^2_{u_2}(\ldots(\varphi^n_{u_n}(0, \ldots, 0)\ldots).$$

Dann ist $j(v_1 + u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi^1_{v_1}(j(u_1, \ldots, u_n))$ und für $u = (u_1, \ldots, u_n) \in k(W)$ und $f \in C^\infty(k(W))$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_0 j \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_u (f) &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_u (f \circ j) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(j(u_1 + t, u_2, \ldots, u_n)) - f(j(u))\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\varphi^1_t(j(u_1, u_2, \ldots, u_n))) - f(j(u))\right) \\ &= (X_1 f)_{j(u)}. \end{aligned}$$

Setzen wir $h = (x_1, \ldots, x_n) = j^{-1}$, so folgt aus der eben erhaltenen Gleichung

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Da nach Voraussetzung und (8.17) die Reihenfolge der Abbildungen φ_t^i in der Definition von j keine Rolle spielt, folgt ebenso für alle i

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Die Umkehrung ist klar. □

(8.19) Satz. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und Riemannschem Krümmungstensor R. Sei $p \in M$. Die Mannigfaltigkeit M ist genau dann im Punkt p lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$, falls R auf einer Umgebung von p verschwindet.*

Beweis. Sei $p \in M$ und sei (h, N_p) ein normales Koordinatensystem um p mit $\log = (y_1, \ldots, y_n)$, so daß der Riemannsche Krümmungstensor auf N_p verschwindet. Im folgenden werden wir stets auf $N_0 = \log(N_p)$ argumentieren. Sei Φ_{pq}^c der zum Zusammenhang ∇ gehörige Paralleltransport auf N_0 längs einer Kurve c von $p = c(a)$ nach $q = c(b)$. Setze wieder $\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_i}}$. Sei $D \in \mathrm{T}_0\mathbb{R}^n$.

(1) Es gibt ein Vektorfeld $X \in \mathrm{Vec}\,(N_0)$ mit $\nabla_i X = 0$ und $X_0 = D$.

Auf der Kurve $c_1 : U_1 \to N_0 : t \mapsto (t, 0, \ldots, 0)$ setzen wir $X_q := \Phi_{0q}^{c_1} D$. Dann ist X parallel entlang c_1 mit $X_0 = D$. Für $t_1 \in U_1$ fest sei $c_2^{t_1} : U_2^{t_1} \to N_0 : t \mapsto (t_1, t, 0, \ldots, 0)$. Auf $c_2^{t_1}$ definieren wir wieder $X_q := \Phi_{0q}^{c_2^{t_1}}$. Dann ist X parallel zu allen Kurven $c_2^{t_1}$, d.h. es ist $\nabla_2(X) = 0$ auf $V_2 = \{(t_1, \ldots, t_n) \in N_0 \mid t_3 = \ldots = t_n = 0\}$. Wegen

$$\nabla_2 \nabla_1(X) - \nabla_1 \nabla_2(X) = R(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2})X = 0$$

auf V_2, folgt daher

$$\nabla_2 \nabla_1(X) = 0$$

auf V_2, d.h. $\nabla_1(X)$ ist parallel entlang der Kurven $c_2^{t_1}$. Wegen $\nabla_1(X)_{(t_1,0,\ldots,0)} = 0$ folgt daher $\nabla_1(X) = 0$ auf V_2. Durch Iteration dieses Verfahrens erhält man schließlich ein Vektorfeld X auf N_0 mit $\nabla_i X = 0$ und $X_0 = D$.

(2) Nach (1) und (AZ1) ist also $\nabla_Z X = 0$ für jedes Vektorfeld $Z \in \mathrm{Vec}\,(N_0)$. Wähle nun eine Orthonormalbasis $(D_1, \ldots, D_n)$ in $\mathrm{T}_0 M$ bzgl. g_0. Nach (1) gibt es Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n$ auf N_0 mit $\nabla_Z X_i = 0$ für alle $Z \in \mathrm{Vec}\,(N_0)$ und $(X_i)_0 = D_i$. Sei $U \subseteq N_0$

eine Umgebung von p, so daß die Vektorfelder X_i auf U linear unabhängig sind. Da ∇ symmetrisch ist, haben wir

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0.$$

Nach (8.18) gibt es also ein Koordinatensystem (h, V) um p mit $h = (x_1, \ldots, x_n)$ und $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nach Konstruktion sind die Vektorfelder X_i orthonormal im Punkt 0. Da die X_i parallel entlang jeder Kurve sind und der Paralleltransport eine ortogonale Abbildung ist, sind die Vektorfelder X_i auf ganz V orthonormal, d.h. h ist eine Isometrie. Die Umkehrung folgt nach der zweiten Bemerkung nach (8.12). □

Literatur

[1] Berger, M., Geometry I, II, Berlin: Springer **1987**
[2] Bishop, R.L., Crittenden, J., Geometry of Manifolds, New York-London **1964**
[3] Blaschke, W., Leichtweiß, K., Elementare Differentialgeometrie, Berlin: Springer **1973**
[4] Bröcker, T., Jänich, K., Einführung in die Differentialtopologie, Berlin: Springer **1973**
[5] Chavel, I., Riemannian Geometry: A modern Introduction, Cambridge University Press **1993**
[6] do Carmo, M., Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Stuttgart: Vieweg **???**
[7] Gallot, S., Hulin, S., Lafontaine, J., Riemannian geometry, Berlin: Springer **1990**
[8] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Boston: Academic Press **1978**
[9] Hilbert, C., Cohn-Vossen, S., Anschauliche Geometrie, Berlin: Springer **1932, 1996**
[10] Hsiung, C.C., A first course in differential geometry, New York: Wiley **1981**
[11] Klingenberg, W., Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Berlin: Springer **1973**
[12] Laugwitz, D., Differentialgeometrie, Stuttgart: Vieweg **1977**
[13] Miller, K.S., Murray, F.J., Existence Theorems for Ordinary Equations, New York **1954**
[14] O'Neill, B., Elementary differential geometry, New York **1966**
[15] Spivak, M., Calculus on Manifolds, Menlo Park **1965**
[16] Spivak, M., A comprehensive introduction in differential geometry I–V, Boston **1970–1975**
[17] Thorpe, J., Elementary topics in differential geometry, New York **1979**
[18] Walter, R., Differentialgeometrie, BI **1978**