Der Mathematiker abstrahiert gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen. Er hat es bloß mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu tun.

C. F. Gauß

Differentialgeometrie

Prof. H. Kerner

Mitschrift vom
Sommersemester 1991

Bearbeitet von Walter Dörwald, Andreas Gaßner und Helmut Hahn.
Getippt von Andreas Gaßner mit TEX und LATEX.

Inhalt:

I Kurven **2**
1 Bogenlänge 2
2 Krümmung und Torsion 6
3 Die Frénétschen Formeln 14
4 Ebene Kurven 21
5 Der Umlaufsatz 29

II Flächen **34**
6 Flächen 34
7 Die erste Fundamentalform einer Fläche 40
8 Krümmung von Flächenkurven und die zweite Fundamentalform 43
9 Die Gaußsche Krümmung 49
10 Gaußabbildung, Weingarten–Abbildung und zweiter Fundamentaltensor 58
11 Isometrische Abbildungen 63
12 Das Theorema egregium 67
13 Die Ableitungsgleichungen 71
14 Der Riemannsche Krümmungstensor 75
15 Die geodätische Krümmung (Seitenkrümmung) 76
16 Geodätische Kurven 80
17 Die covariante Ableitung 85
18 Der Satz von Gauß–Bonnet 92
19 Das covariante Differential und der Riemannsche Krümmungstensor 95

III Riemannsche Mannigfaltigkeiten **100**
20 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 100
21 Riemannsche Mannigfaltigkeiten 103

Anhang **106**
Anhang A: Tensoren 106
Anhang B: Das Differential einer differenzierbaren Abbildung 107
Anhang C: Symbolverzeichnis 108
Anhang D: Literaturverzeichnis 110

I Kurven

1 Bogenlänge

Im folgenden sei I ein Intervall, $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$ und differenzierbar bedeute beliebig oft differenzierbar.

1.1 Definition

Eine **Kurve** im $\mathbb{R}^3$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \Big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\Big)$$

mit $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, wobei

$$\dot{\alpha}(t) := \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right).$$

1.2 Definition

Seien $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\alpha}: \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Kurven. Eine **Parametertransformation** von α nach $\tilde{\alpha}$ ist ein Diffeomorphismus

$$\varphi: \tilde{I} \longrightarrow I$$

mit $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$. φ heißt **orientierungstreu**, wenn $\varphi'(\tilde{t}) > 0$ für alle $\tilde{t} \in \tilde{I}$ ist. α und $\tilde{\alpha}$ heißen dann **äquivalent**.

1.3 Beispiel

Durch die beiden Kurven

$$\tilde{\alpha}: [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$$

und

$$\alpha: [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

werden die Intervalle $[0;1]$ beziehungsweise $[0;2\pi]$ auf den Einheitskreis abgebildet. Die Abbildung

$$\varphi: [0;1] \longrightarrow [0;2\pi];\ t \longmapsto 2\pi t$$

liefert eine orientierungstreue Parametertransformation mit $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$.

1.4 Definition

Die **Bogenlänge** L_α von $\alpha: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$L_\alpha := \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)^2}\, dt.$$

1.5 Hilfssatz

Für äquivalente Kurven α und $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ gilt

$$L_\alpha = L_{\tilde{\alpha}}.$$

Beweis

$$L_\alpha = \int_a^b \|\dot\alpha(t)\|\,dt \overset{\text{Substitution } t=\varphi(\tilde t)}{=} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \|\dot\alpha(\varphi(\tilde t))\|\varphi'(\tilde t)\,d\tilde t$$

$$= \int_{\tilde a}^{\tilde b} \|\dot\alpha(\varphi(\tilde t))\varphi'(\tilde t)\|\,d\tilde t = \int_{\tilde a}^{\tilde b} \|\dot{\overline{\alpha\circ\varphi}}(\tilde t)\|\,d\tilde t = L_{\tilde\alpha}$$

1.6 Definition

Man sagt, α **besitzt als Parameter** die Bogenlänge, wenn für alle $t \in I$ gilt

$$\|\dot\alpha(t)\| = 1.$$

1.7 Lemma

Äquivalent sind folgende Aussagen

1) $\|\dot\alpha(t)\| = 1$ für alle $t \in I$

2) $L_{\alpha|[t_0;t_1]} = t_1 - t_0$ für alle $t_0, t_1 \in I$ mit $t_0 < t_1$.

Beweis

1) $\Longrightarrow$ 2)

$$L_{\alpha|[t_0;t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\|\dot\alpha(t)\|}_{=1}\,dt = t_1 - t_0.$$

2) $\Longrightarrow$ 1)

Definiere

$$s_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \|\dot\alpha(\xi)\|\,d\xi.$$

Nach Voraussetzung ist $s_\alpha(t) = t - t_0$ für alle $t \in I$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung ist $\frac{ds_\alpha}{dt} = \|\dot\alpha\|$, das heißt

$$\|\dot\alpha(t)\| = \tfrac{ds_\alpha}{dt}(t) = \tfrac{d}{dt}(t - t_0) = 1.$$

1.8 Folgerung

Für Kurven mit Parameter Bogenlänge ist die Länge des Intervalls gleich der Länge des Kurvenstücks.

1.9 Hilfssatz

Sei $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve, so existiert eine Parametertransformation φ so, daß $\tilde\alpha := \alpha \circ \varphi$ die Bogenlänge als Parameter hat.

Beweis

Sei

$$s_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \int_{a}^{t} \|\dot\alpha(\xi)\|\,d\xi.$$

Dann gilt $\dot{s}_\alpha = \|\dot{\alpha}\|$. Für $\widetilde{I} := s_\alpha(I)$ ist $s_\alpha : I \longrightarrow \widetilde{I}$ ein Diffeomorphismus, weil $\dot{s}_\alpha = \|\dot{\alpha}\| > 0$. Sei $\varphi := s_\alpha^{-1} : \widetilde{I} \longrightarrow I$ die Umkehrabbildung und $\tilde{t} \in \widetilde{I}$. Für $\widetilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi$ gilt dann

$$\dot{\widetilde{\alpha}}(\tilde{t}) = (\dot{\widetilde{\alpha \circ \varphi}})(\tilde{t}) = \dot{\alpha}(\underbrace{\varphi(\tilde{t})}_{=:t})\dot{\varphi}(\tilde{t}) = \dot{\alpha}(t)\frac{1}{\dot{s}_\alpha(\varphi(\tilde{t}))} = \dot{\alpha}(t)\frac{1}{\dot{s}_\alpha(t)} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}.$$

Damit folgt

$$\|\dot{\widetilde{\alpha}}(\tilde{t})\| = 1 \quad \text{für alle } \tilde{t} \in \widetilde{I}.$$

1.10 Bemerkung

Die Parametertransformation φ in *1.9* ist bis auf Translation eindeutig bestimmt.

Beweis

Gegeben seien orientierungstreue Parametertransformationen φ_1 und φ_2 so, daß die beiden Kurven

$$\widetilde{\alpha}_1 : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \alpha(\varphi_1(t))$$

und

$$\widetilde{\alpha}_2 : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \alpha(\varphi_2(t))$$

Parameter Bogenlänge besitzen. Es gilt also

$$\widetilde{\alpha}_1 = \alpha \circ \varphi_1 = \alpha \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \widetilde{\alpha}_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \widetilde{\alpha}_2 \circ \varphi,$$

wobei

$$\varphi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \widetilde{I} \longrightarrow \widetilde{I}.$$

Hieraus erhält man

$$\dot{\widetilde{\alpha}}_1 = (\dot{\widetilde{\alpha}}_2 \circ \varphi) \cdot \dot{\varphi}$$

und

$$\underbrace{\|\dot{\widetilde{\alpha}}_1\|}_{=1} = \underbrace{\|\dot{\widetilde{\alpha}}_2 \circ \varphi\|}_{=1} \cdot |\dot{\varphi}|.$$

Also gilt $|\dot{\varphi}| = 1$ und somit

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi = \mathrm{id}_{\widetilde{I}}.$$

Analog zeigt man

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{\widetilde{I}}.$$

Damit folgt

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

1.11 Beispiele

1) Kreis

Sei

$$\alpha : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (r\cos t, r\sin t, 0).$$

Dann ist für alle $t \in [0; 2\pi]$

$$\dot{\alpha}(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)$$

und

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = r.$$

Wenn man s_α wie im Beweis zu *1.9* definiert, erhält man

$$s_\alpha(t) = \int_0^t \|\dot{\alpha}(\xi)\|\, d\xi = \int_0^t r\, d\xi = tr.$$

Dann ist

$$\varphi\colon [0;2\pi r] \longrightarrow [0;2\pi];\ \tilde{t} \longmapsto {}^1\!/_r\,\tilde{t}$$

die Umkehrabbildung von s_α und es gilt für $\widetilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi$

$$\widetilde{\alpha}\colon [0;2\pi r] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ \tilde{t} \longmapsto \widetilde{\alpha}(\tilde{t}) = \alpha(\varphi(\tilde{t})) = (r\cos({}^1\!/_r\,\tilde{t}), r\sin({}^1\!/_r\,\tilde{t}), 0)\,.$$

Damit ergibt sich für alle $\tilde{t} \in [0;2\pi r]$

$$\dot{\widetilde{\alpha}}(\tilde{t}) = (-\sin({}^1\!/_r\,\tilde{t}), \cos({}^1\!/_r\,\tilde{t}), 0) \quad \text{und} \quad \|\dot{\widetilde{\alpha}}\| = 1,$$

$\widetilde{\alpha}$ hat also Parameter Bogenlänge.

2) Ellipse

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ und die Kurve

$$\alpha\colon [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (a\cos t, b\sin t, 0)$$

gegeben. Dann ist für alle $t \in [0;2\pi]$

$$\dot{\alpha}(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0).$$

Wie eben erhält man

$$s_\alpha(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\xi + b^2\cos^2\xi}\, d\xi.$$

Die Umkehrabbildung läßt sich nicht mehr explizit angeben (elliptisches Integral).

3) Schraubenline

Sei α die Kurve

$$\alpha\colon [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$$

mit $r, h > 0$. Hiermit ist für alle $t \in [0;2\pi]$

$$\dot{\alpha}(t) = (-r\sin t, r\cos t, h) \quad \text{und} \quad \|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{r^2+h^2}.$$

Damit ist

$$s_\alpha\colon [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto t\sqrt{r^2+h^2}$$

und es ergibt sich

$$\widetilde{\alpha}\colon \left[0;2\pi\sqrt{r^2+h^2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \left(r\cos\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, r\sin\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, h\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}\right).$$

2 Krümmung und Torsion

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Bogenlänge als Parameter.

2.1 Definition

- Die Abbildung $T_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \dot{\alpha}(t)$ heißt **Tangentenvektor** der Kurve α.
- Die Funktion $\kappa_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \|\dot{T}_\alpha(t)\|$ heißt **Krümmung** der Kurve α.

Ist weiterhin $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so definiert man:

- Die Abbildung $N_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}\dot{T}_\alpha(t)$ heißt **Normale** der Kurve α.
- Die Abbildung $B_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)$ heißt die **Binormale** der Kurve α.
- Die Funktion $\tau_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \langle \dot{N}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle$ heißt die **Torsion** der Kurve α.

Falls α nicht die Bogenlänge als Parameter hat, so gehe man nach *1.9* zu $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ über, wobei $\widetilde{\alpha}$ eine Kurve mit Parameter Bogenlänge ist.

2.2 Bemerkung

Es gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ mit $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ und $c = (c_1, c_2, c_3)$ und alle orthogonalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (das heißt $A^T A = 1_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$)

a) $a \times b = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$,

b) $\langle a, b \times c\rangle = \det\left(a \;\middle|\; b \;\middle|\; c\right)$,

c) $\|a \times b\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle \end{pmatrix}$,

d) $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot |\sin\varphi|$,

e) $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$,

f) $Aa \times Ab = \det A\, A(a \times b)$,

wobei φ der Winkel zwischen a und b ist.

Beweis

Die Aussagen a), b) und e) folgen sofort aus der Definition des Kreuzprodukts durch nachrechnen.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle \end{pmatrix} &= \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a,b\rangle^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \\
&\quad + a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_1b_1a_2b_2 - a_1b_1a_3b_3 - a_2b_2a_1b_1 \\
&\quad - a_2^2b_2^2 - a_2b_2a_3b_3 - a_3b_3a_1b_1 - a_3b_3a_2b_2 - a_3^2b_3^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2 \\
&\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (-a_1b_3 + a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|a \times b\|^2.
\end{aligned}$$

d) Mit obiger Rechung gilt

$$\begin{aligned}\|a \times b\| &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a,b\rangle^2} \\ &= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \tfrac{\langle a,b\rangle^2}{\|a\|^2\|b\|^2}} = \|a\|\|b\|\sqrt{1-\cos^2\varphi} \\ &= \|a\|\|b\||\sin\varphi|.\end{aligned}$$

f) Für alle $w \in I\!R^3$ ist

$$\begin{aligned}\langle w, Aa \times Ab\rangle &= \det\Big(w \;\Big|\; Aa \;\Big|\; Ab\Big) \overset{A^TA=1}{=} \det\Big(AA^Tw \;\Big|\; Aa \;\Big|\; Ab\Big) \\ &= \det A \det\Big(A^Tw \;\Big|\; a \;\Big|\; b\Big) = \det A\langle A^Tw, a\times b\rangle \\ &\overset{A^TA=1}{=} \langle w, \det A A(a\times b)\rangle.\end{aligned}$$

Da $w \in I\!R^3$ beliebig war folgt Aussage f).

2.3 Hilfssatz

Sei α eine Kurve, die nicht notwendigerweise Parameter Bogenlänge besitzt. Dann gilt für alle $t \in I$

- $T_\alpha(t) = \dfrac{\dot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t)\|}$,
- $\kappa_\alpha(t) = \dfrac{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|}{\|\dot\alpha(t)\|^3}$.

Ist weiterhin $\kappa_\alpha(t) \neq 0$, so gilt

- $B_\alpha(t) = \dfrac{\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|}$,
- $N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \times T_\alpha(t)$,
- $\tau_\alpha(t) = \dfrac{\det\Big(\dot\alpha(t) \;\Big|\; \ddot\alpha(t) \;\Big|\; \dddot\alpha(t)\Big)}{\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\|^3}$.

Beweis

Sei s_α die Parametertransformation

$$s_\alpha : I \longrightarrow \tilde I;\; t \longmapsto \int_a^t \|\dot\alpha(\xi)\|\, d\xi \quad (\text{wobei } \tilde I = s_\alpha(I)). \tag{$*$}$$

Sei φ die Umkehrabbildung

$$\varphi := s_\alpha^{-1} : \tilde I \longrightarrow I.$$

Damit hat die Kurve $\beta := \alpha \circ \varphi$ nach dem Beweis von *1.9* Parameter Bogenlänge und wir können die Definition anwenden. Damit gilt für alle $\tilde t \in \tilde I$

$$\begin{aligned}T_\beta(\tilde t) = \dot\beta(\tilde t) &\overset{\text{KR}}{=} \dot\alpha(\underbrace{\varphi(\tilde t)}_{=:\,t})\dot\varphi(\tilde t) \\ &= \dot\alpha(t)\frac{1}{\dot s_\alpha(\varphi(\tilde t))} = \frac{\dot\alpha(t)}{\dot s_\alpha(t)} \overset{(*)}{=} \frac{\dot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t)\|}.\end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{s}_\alpha(t)(T_\beta \circ s_\alpha)(t),$$

damit ist

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(t) &= \ddot{s}_\alpha(t)(T_\beta \circ s_\alpha)(t) + \dot{s}_\alpha(t)\,\dot{\overbrace{T_\beta \circ s_\alpha}}(t) \\ &= \ddot{s}_\alpha(t)T_\beta(s_\alpha(t)) + \dot{s}_\alpha(t)\dot{T}_\beta(s_\alpha(t))\dot{s}_\alpha(t) \\ &= \ddot{s}_\alpha(t)T_\beta(s_\alpha(t)) + \dot{s}_\alpha(t)^2\kappa_\beta(s_\alpha(t))N_\beta(s_\alpha(t)).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha})(t) &= \Big(\dot{s}_\alpha(t)T_\beta(s_\alpha(t))\Big) \times \Big(\ddot{s}_\alpha(t)T_\beta(s_\alpha(t)) + \dot{s}_\alpha(t)^2\kappa_\beta(s_\alpha(t))N_\beta(s_\alpha(t))\Big) \\ &= \dot{s}_\alpha(t)\ddot{s}_\alpha(t)\underbrace{T_\beta(s_\alpha(t)) \times T_\beta(s_\alpha(t))}_{=0} + \dot{s}_\alpha(t)^3\kappa_\beta(s_\alpha(t))\underbrace{T_\beta(s_\alpha(t)) \times N_\beta(s_\alpha(t))}_{=B_\beta(s_\alpha(t))} \\ &= \dot{s}_\alpha(t)^3\kappa_\beta(s_\alpha(t))B_\beta(s_\alpha(t)). \qquad (**)\end{aligned}$$

Aus $\kappa_\beta(\tilde{t}) = \kappa_\beta(s_\alpha(t)) = \big|\kappa_\beta(s_\alpha(t))\big|$ (siehe Definition) und obiger Gleichung folgt

$$\kappa_\beta(\tilde{t}) = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\dot{s}_\alpha(t)^3\underbrace{\|B_\beta(s_\alpha(t))\|}_{=1}} = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}.$$

Nach obiger Gleichung und Voraussetzung ist $\kappa_\beta(s_\alpha(t)) > 0$ und mit $(**)$ ergibt sich nun B_β folgendermaßen

$$B_\beta(s_\alpha(t)) = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{\underbrace{\dot{s}_\alpha(t)^3}_{\substack{>0,\text{ da }\alpha\\ \text{regulär}}}\underbrace{\kappa_\beta(s_\alpha(t))}_{>0}} = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3\frac{\|\dot{\alpha}(t)\times\ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}} = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}.$$

Die übrigen Gleichungen lassen sich durch weitere abartige Rechnungen zeigen.

2.4 Lemma

Für jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit Parameter Bogenlänge und jedes $t \in I$ ist

$$\Big\{T_\alpha(t), N_\alpha(t), B_\alpha(t)\Big\}$$

ein Orthonormalsystem.

Beweis

Für alle $t \in I$ gilt

$$\langle T_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle = 1,$$

damit folgt durch differenzieren

$$\langle \dot{T}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle + \langle T_\alpha(t), \dot{T}_\alpha(t)\rangle = 0,$$

das heißt $\langle \dot{T}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle = 0$, also $\dot{T}_\alpha \perp T_\alpha$ und damit auch $N_\alpha \perp T_\alpha$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\langle B_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle &= \langle T_\alpha(t) \times N_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle \\ &= \langle T_\alpha(t), T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)\rangle \\ &= \det\Big(T_\alpha(t) \;\Big|\; T_\alpha(t) \;\Big|\; N_\alpha(t)\Big) = 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle B_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle &= \langle T_\alpha(t) \times N_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle \\ &= \langle N_\alpha(t), T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)\rangle \\ &= \det\Big(N_\alpha(t) \;\Big|\; T_\alpha(t) \;\Big|\; N_\alpha(t)\Big) = 0.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\|T_\alpha(t)\| = \|N_\alpha(t)\| = \|B_\alpha(t)\| = 1,$$

wie sich leicht nachrechnen läßt (siehe *Definition 2.1* beziehungsweise *Bemerkung 2.2*).

2.5 Lemma (τ, κ, T, B, N sind invariant bei Parametertransformation)

Sind $\alpha\colon I \longrightarrow I\!R^3$ und $\tilde{\alpha}\colon \tilde{I} \longrightarrow I\!R^3$ zwei äquivalente Kurven ($\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$), so gilt

$$T_{\tilde{\alpha}} = T_\alpha \circ \varphi \qquad N_{\tilde{\alpha}} = N_\alpha \circ \varphi \qquad B_{\tilde{\alpha}} = B_\alpha \circ \varphi$$

$$\kappa_{\tilde{\alpha}} = \kappa_\alpha \circ \varphi \qquad \tau_{\tilde{\alpha}} = \tau_\alpha \circ \varphi.$$

Beweis

Es gilt für jedes $\tilde{t} \in \tilde{I}$, $(t := \varphi(\tilde{t}))$

$$\begin{aligned}T_{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}) &= \frac{\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})}{\|\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})\|} = \frac{\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi}}(\tilde{t})}{\big\|\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi}}(\tilde{t})\big\|} = \frac{\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\dot{\varphi}(\tilde{t})}{\|\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\dot{\varphi}(\tilde{t})\|} \\ &= \frac{\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))}{\|\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\|} \underbrace{\frac{\dot{\varphi}(\tilde{t})}{|\dot{\varphi}(\tilde{t})|}}_{\substack{=1,\\ \text{da } \varphi \text{ orientierungserhaltend}}} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = T_\alpha(t) = T_\alpha(\varphi(\tilde{t})) \\ &= (T_\alpha \circ \varphi)(\tilde{t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}) &= \frac{\|\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}) \times \ddot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})\|}{\|\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})\|^3} = \frac{\Big\|\Big(\dot{\varphi}(\tilde{t})\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\Big) \times \Big(\frac{d}{d\tilde{t}}\Big(\dot{\varphi}(\tilde{t})\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\Big)\Big)\Big\|}{\dot{\varphi}(\tilde{t})^3\|\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\|^3} \\ &= \frac{\Big\|\dot{\varphi}(\tilde{t})\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t})) \times \Big(\ddot{\varphi}(\tilde{t})\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t})) + \dot{\varphi}(\tilde{t})\ddot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\dot{\varphi}(\tilde{t})\Big)\Big\|}{\dot{\varphi}(\tilde{t})^3\|\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\|^3} \\ &= \frac{\Big\|\dot{\varphi}(\tilde{t})\ddot{\varphi}(\tilde{t})\overbrace{\Big(\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t})) \times \dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\Big)}^{=0} + \dot{\varphi}(\tilde{t})^3\Big(\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t})) \times \ddot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\Big)\Big\|}{\dot{\varphi}(\tilde{t})^3\|\dot{\alpha}(\varphi(\tilde{t}))\|^3} \\ &= \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = \kappa_\alpha(t) = (\kappa_\alpha \circ \varphi)(\tilde{t}).\end{aligned}$$

Durch ähnlich ekelhafte Rechnungen lassen sich auch die übrigen Behauptungen beweisen.

2.6 Beispiele

1) Kreis

Sei wieder

$$\alpha\colon [0; 2\pi r] \longrightarrow I\!R^3;\ t \longmapsto (r\cos {}^t\!/_r, r\sin {}^t\!/_r, 0)\,.$$

Für alle $t \in [0; 2\pi r]$ gilt damit

$$\dot{\alpha}(t) = (-\sin {}^t\!/_r, \cos {}^t\!/_r, 0)$$

und somit

$$\ddot{\alpha}(t) = (-1/r \cos t/r\,, -1/r \sin t/r, 0)\,.$$

Damit ist

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -\sin t/r \\ \cos t/r \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/r \cos t/r \\ -1/r \sin t/r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -\sin t/r \\ \cos t/r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^3}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \sin^2 t/r - (-1/r \cos^2 t/r) \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{\sin^2 t/r + \cos^2 t/r + 0^2}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \end{pmatrix} \right\|}{1} = \frac{1}{r}.$$

Weiter erhält man

$$N_\alpha(t) = (-\cos t/r\,, -\sin t/r, 0)\,,$$
$$B_\alpha(t) = (0, 0, 1)$$

und damit

$$\tau_\alpha(t) = 0.$$

Da α Parameter Bogenlänge besitzt berechnen sich N_α, B_α sowie κ_α und τ_α nach *2.1* auch folgendermaßen

$$\kappa_\alpha(t) = \|\dot{T}_\alpha(t)\| = \|\ddot{\alpha}(t)\| = \sqrt{(1/r \cos t/r)^2 + (-1/r \sin t/r)^2}$$
$$= \sqrt{1/r^2 \cos^2 t/r + 1/r^2 \sin^2 t/r} = 1/r\,,$$
$$N_\alpha(t) = \tfrac{1}{\kappa_\alpha(t)} \dot{T}_\alpha(t) = r\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t/r\,, -\sin t/r, 0),$$
$$B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t) = (0, 0, 1),$$
$$\tau_\alpha(t) = \langle \dot{N}_\alpha(t), B_\alpha(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/r \sin t/r \\ -1/r \cos t/r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

2) Ellipse

Sei wieder

$$\alpha\colon [0; 2\pi] \longrightarrow I\!R^3;\ t \longmapsto (a \cos t, b \sin t, 0).$$

Man erhält

$$\dot{\alpha}(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0)$$

und

$$\ddot{\alpha}(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0)$$

und somit

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)\|}{\|\dot\alpha(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^3}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\sin^2 t - (-ab\cos^2 t) \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}^3} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}^3}.$$

Damit ergibt sich beispielsweise

$$\kappa_\alpha(0) = \frac{ab}{\sqrt{b^2}^3} = \frac{a}{b^2} \quad \text{und} \quad \kappa_\alpha\left(\pi/2\right) = \frac{ab}{\sqrt{a^2}^3} = \frac{b}{a^2}.$$

3) Schraubenlinie

Sei wieder

$$\alpha\colon [0; 2\pi] \longrightarrow I\!R^3;\ t \longmapsto (r\cos t, r\sin t, ht).$$

Man erhält

$$\dot\alpha(t) = (-r\sin t, r\cos t, h)$$

und

$$\ddot\alpha(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)$$

und somit

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \right\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} hr\sin t \\ -hr\cos t \\ r^2\sin^2 t - (-r^2\cos^2 t) \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t h^2}^3}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2r^2\sin^2 t + h^2r^2\cos^2 t + r^4}}{\sqrt{r^2+h^2}^3} = \frac{\sqrt{h^2r^2 + r^4}}{\sqrt{r^2+h^2}^3}$$

$$= \frac{\sqrt{r^2}\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{r^2+h^2}^3} = \frac{r}{r^2+h^2}.$$

Bringt man hingegen α auf Parameter Bogenlänge, so ergibt sich die Kurve

$$\widetilde\alpha\colon \left[0; 2\pi\sqrt{r^2+h^2}\right] \longrightarrow I\!R^3;\ t \longmapsto \left(r\cos\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, r\sin\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

und man erhält wieder nach *Definition 2.1*

$$\begin{aligned}\kappa_{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}) &= \|\dot{T}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})\| = \|\ddot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})\| \\ &= \left\| \left(-\frac{r}{r^2+h^2}\cos\frac{\tilde{t}}{\sqrt{r^2+h^2}}, -\frac{r}{r^2+h^2}\sin\frac{\tilde{t}}{\sqrt{r^2+h^2}}, 0 \right) \right\| \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{(r^2+h^2)^2}\cos^2\frac{\tilde{t}}{\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{r^2}{(r^2+h^2)^2}\sin^2\frac{\tilde{t}}{\sqrt{r^2+h^2}} + 0^2} \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{(r^2+h^2)^2}} = \frac{r}{r^2+h^2}.\end{aligned}$$

Für $\tilde{\alpha}$ erhält man nach *Lemma 2.5* und *Hilfssatz 2.3*

$$B_{\tilde{\alpha}}(t) = \left(\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, -\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \right)$$

und

$$N_{\tilde{\alpha}}(t) = \left(-\cos\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, -\sin\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, 0 \right)$$

sowie

$$\tau_{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{h}{r^2+h^2}.$$

2.7 Definition

Sei $c \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine orthonormale Matrix (das heißt $A^T A = 1_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$). Dann heißt die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ x \longmapsto Ax + c$$

Bewegung des $\mathbb{R}^3$.

2.8 Lemma

Sei $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve und

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ x \longmapsto Ax + b$$

eine Bewegung, sei $\tilde{\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Bildkurve von α unter Φ, das heißt $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$. Dann gilt

$$\kappa_{\tilde{\alpha}} = \kappa_\alpha \qquad \tau_{\tilde{\alpha}} = \tau_\alpha$$

$$T_{\tilde{\alpha}} = AT_\alpha \qquad N_{\tilde{\alpha}} = AN_\alpha \qquad B_{\tilde{\alpha}} = \det(A)AB_\alpha$$

Beweis

Sei $t \in I$. Dann ist

$$T_{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{\dot{\tilde{\alpha}}(t)}{\|\dot{\tilde{\alpha}}(t)\|} = \frac{\widetilde{\dot{\Phi} \circ \alpha}(t)}{\left\|\widetilde{\dot{\Phi} \circ \alpha}(t)\right\|} = \frac{\dot{\Phi}(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\Phi}(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)\|} = \frac{A\dot{\alpha}(t)}{\|A\dot{\alpha}(t)\|} \overset{A \text{ orthonormal}}{=} \frac{A\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = AT_\alpha(t)$$

und

$$\kappa_{\tilde{\alpha}}(t) = \|\dot{T}_{\tilde{\alpha}}(t)\| = \|\widetilde{\dot{AT}_\alpha}(t)\| = \|A\dot{T}_\alpha(t)\| \overset{A \text{ orthonormal}}{=} \|\dot{T}_\alpha(t)\| = \kappa_\alpha(t).$$

Genauso erhält man die restlichen Formeln.

2.9 Beispiel

Betrachte die "beschleunigte Gerade"

$$\alpha\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (\exp(t), \exp(t), \exp(t)).$$

α hat offensichtlich nicht die Bogenlänge als Parameter. Es gilt

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (\exp(t), \exp(t), \exp(t)) \quad \text{für alle } t \in [0;1]$$

und somit

$$\langle \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle = \sqrt{3 \exp(t)^2} = \exp(t)\sqrt{3} \not\equiv 0.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß $\dot{\alpha}(\cdot)$ und $\ddot{\alpha}(\cdot)$ für Kurven ohne Parameter Bogenlänge nicht zwangsläufig aufeinander senkrecht stehen.

3 Die Frénétschen Formeln

Im folgenden stellen wir $\dot{T}_\alpha$, $\dot{N}_\alpha$, $\dot{B}_\alpha$ als Linearkombination der T_α, N_α, B_α dar. Weiterhin wird untersucht, welche Funktionen κ und τ als Krümmung beziehungsweise Torsion von Kurven im $\mathbb{R}^3$ auftreten und ob es zu beliebigen Funktionen $\kappa > 0$ und τ immer eine Kurve α gibt, deren Krümmung κ und deren Torsion τ ist.

3.1 Satz (Frénétsche Formeln)

Für jede reguläre Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und für alle $t \in I$ gilt

$$\begin{array}{rcccc} \dot{T}_\alpha(t) & = & & \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) & \\ \dot{N}_\alpha(t) & = & -\kappa_\alpha(t)T_\alpha(t) & & +\tau_\alpha(t)B_\alpha(t) \\ \dot{B}_\alpha(t) & = & & -\tau_\alpha(t)N_\alpha(t) & \end{array}$$

Beweis

$\dot{T}_\alpha(t)$, $\dot{N}_\alpha(t)$ und $\dot{B}_\alpha(t)$ sind Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und lassen sich daher eindeutig als Linearkombination der $T_\alpha(t)$, $N_\alpha(t)$ und $B_\alpha(t)$ darstellen. Es ist

$$\begin{array}{rcccccc} \dot{T}_\alpha(t) & = & \langle \dot{T}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle T_\alpha(t) & + & \langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle N_\alpha(t) & + & \langle \dot{T}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle B_\alpha(t) \\ \dot{N}_\alpha(t) & = & \langle \dot{N}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle T_\alpha(t) & + & \langle \dot{N}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle N_\alpha(t) & + & \langle \dot{N}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle B_\alpha(t) \\ \dot{B}_\alpha(t) & = & \langle \dot{B}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle T_\alpha(t) & + & \langle \dot{B}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle N_\alpha(t) & + & \langle \dot{B}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle B_\alpha(t). \end{array}$$

Die einzelnen Koeffizienten berechnen sich folgendermaßen. Es wurde bereits gezeigt, daß $\langle \dot{T}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle = 0$ ist. Analog zeigt man $\langle \dot{B}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle = 0$ und $\langle \dot{N}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle = 0$.

Aus $\langle T_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle = 0$ folgt durch Differentiation

$$\langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle + \langle T_\alpha(t), \dot{N}_\alpha(t)\rangle = 0$$

und damit

$$\langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle = -\langle T_\alpha(t), \dot{N}_\alpha(t)\rangle = -\langle \dot{N}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle.$$

Wegen $N_\alpha(t) = \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}\dot{T}_\alpha(t)$ folgt

$$\underbrace{\langle N_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle}_{=1} = \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}\langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle$$

und damit

$$\kappa_\alpha(t) = \langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle.$$

Analog ergibt sich

$$\langle \dot{B}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle = -\langle B_\alpha(t), \dot{N}_\alpha(t)\rangle = -\langle \dot{N}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle$$

und nach Definition ist $\tau_\alpha(t) = \langle \dot{N}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle$.

Wegen $\langle T_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle = 0$ ist

$$\langle \dot{T}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle = -\langle T_\alpha(t), \dot{B}_\alpha(t)\rangle = -\langle \dot{B}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle.$$

Außerdem ist

$$\langle \dot{T}_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle = \langle \dot{T}_\alpha(t), T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)\rangle \overset{2.2}{=} \det\Big(\dot{T}_\alpha(t) \;\Big|\; T_\alpha(t) \;\Big|\; N_\alpha(t)\Big) = 0,$$

da $N_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha}\dot{T}_\alpha$.

Die Fundamentalsätze der Kurventheorie

3.2 Existenzsatz

Seien $\kappa: I \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ und $\tau: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gibt es eine reguläre Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\kappa = \kappa_\alpha$ und $\tau = \tau_\alpha$.

α ist bis auf Bewegung eindeutig bestimmt, das heißt es gilt der

3.3 Eindeutigkeitssatz

Seien $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Kurven mit $\kappa_\alpha(t) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(t)$ und $\tau_\alpha(t) = \tau_{\tilde{\alpha}}(t)$ für alle $t \in I$. Dann existiert eine Bewegung $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$.

3.3′ Eindeutigkeitssatz

Seien $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Kurven. Es gelte $\kappa_\alpha(t) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(t)$ und $\tau_\alpha(t) = \tau_{\tilde{\alpha}}(t)$ für alle $t \in I$. Weiterhin gelte $\alpha(a) = \tilde{\alpha}(a)$, $T_{\tilde{\alpha}}(a) = T_\alpha(a)$, $N_{\tilde{\alpha}}(a) = N_\alpha(a)$ und $B_{\tilde{\alpha}}(a) = B_\alpha(a)$. Dann folgt

$$\alpha = \tilde{\alpha}.$$

Beweis von 3.2

Seien

$$A_\alpha(t) := \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\alpha(t) & 0 \\ -\kappa_\alpha(t) & 0 & \tau_\alpha(t) \\ 0 & -\tau_\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$X_\alpha(t) := \begin{pmatrix} T_\alpha(t) \\ N_\alpha(t) \\ B_\alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\alpha,1}(t) & T_{\alpha,2}(t) & T_{\alpha,3}(t) \\ N_{\alpha,1}(t) & N_{\alpha,2}(t) & N_{\alpha,3}(t) \\ B_{\alpha,1}(t) & B_{\alpha,2}(t) & B_{\alpha,3}(t) \end{pmatrix}.$$

definiert. Die Frénétschen Gleichungen lassen sich nun folgendermaßen definieren

$$\dot{X}_\alpha = A_\alpha X_\alpha.$$

Sei weiterhin für alle $t \in I$

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

mit κ und τ wie in *Satz 3.2*. Sei

$$X: I \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3};\ t \longmapsto \begin{pmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) & X_{13}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) & X_{23}(t) \\ X_{31}(t) & X_{32}(t) & X_{33}(t) \end{pmatrix}$$

die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung

$$\dot{X} = AX$$

mit den Anfangsbedingungen

$$X(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiere die Kurve α so

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longrightarrow \left(\int_a^t X_{11}(s)\,ds, \int_a^t X_{12}(s)\,ds, \int_a^t X_{13}(s)\,ds \right).$$

Dann ist

$$\dot{\alpha} = (X_{11}, X_{12}, X_{13}). \qquad (*)$$

Behauptung: X ist orthonormal (das heißt $X^T X = 1_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$)

$$\begin{aligned}\overbrace{X(t)^T X(t)}^{\bullet} &= \dot{X}(t)^T X(t) + X(t)^T \dot{X}(t) \\ &= (A(t)X(t))^T X(t) + X(t)^T (A(t)X(t)) \\ &\quad \begin{array}{l} A \text{ schiefsymmetrisch} \\ \downarrow \end{array} \\ &= -X(t)^T A(t) X(t) + X(t)^T A(t) X(t) = 0_{\mathbb{R}^{3\times 3}}.\end{aligned}$$

Damit ist $X^T X$ konstant, das heißt

$$X(t)^T X(t) = X(a)^T X(a) \quad \text{für alle } t \in I. \qquad (**)$$

Mit der Anfangsbedingung folgt

$$X(a)^T X(a) = 1_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$$

und daraus mit $(**)$ die Behauptung.

Daher ist $\|X_1\| = 1$ und mit $(*)$ folgt $\|\dot{\alpha}\| = 1$, das heißt α besitzt Parameter Bogenlänge und damit

$$T_\alpha = \dot{\alpha} = X_1.$$

Aus dem Differentialgleichungssystem folgt

$$\ddot{\alpha} = \dot{X}_1 = \kappa X_2,$$

damit gilt

$$\kappa_\alpha = \|\dot{T}_\alpha\| = \|\ddot{\alpha}\| = |\kappa| \underbrace{\|X_2\|}_{=1} = |\kappa| = \kappa.$$

Die Normale N_α berechnet sich so

$$N_\alpha = {}^1\!/_{\kappa_\alpha} \dot{T}_\alpha = {}^1\!/_{\kappa} \dot{X}_1 = X_2.$$

Für die Binormale überlegt man sich, daß $B_\alpha(t) = \pm X_3(t)$ für alle $t \in I$, da

$$X_3(t) \perp X_1(t) = T_\alpha(t), \quad X_3(t) \perp X_2(t) = N_\alpha(t) \quad \text{und} \quad \|X_3(t)\| = 1.$$

Sei h die Funktion

$$h\colon I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \det X(t).$$

Es gilt $h(I) \subset \{-1; +1\}$. Aus $h(a) = 1$ (Anfangsbedingung) und der Stetigkeit von h folgt

$$h(t) = 1 \quad \text{für alle } t \in I. \qquad (***)$$

Wäre für ein $t_0 \in I$

$$X_3(t_0) = -B_\alpha(t_0),$$

so wäre

$$\begin{aligned}h(t_0) = \det(X(t_0)) &= \det \begin{pmatrix} T_\alpha(t_0) \\ N_\alpha(t_0) \\ -B_\alpha(t_0) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} T_\alpha(t_0) \\ N_\alpha(t_0) \\ B_\alpha(t_0) \end{pmatrix} \\ &\overset{2.2}{=} -\langle T_\alpha(t_0) \times N_\alpha(t_0), B_\alpha(t_0)\rangle = -\langle B_\alpha(t_0), B_\alpha(t_0)\rangle = -\|B_\alpha(t_0)\|^2 = -1.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $(***)$. Also gilt $X_3 = B_\alpha$.

Schließlich ergibt sich

$$\tau_\alpha = \langle \dot{N}_\alpha, B_\alpha \rangle \overset{\text{DGL}}{=} \langle -\kappa T_\alpha + \tau B_\alpha, B_\alpha \rangle = -\kappa \underbrace{\langle T_\alpha, B_\alpha \rangle}_{=0} + \tau \underbrace{\langle B_\alpha, B_\alpha \rangle}_{=1} = \tau.$$

Beweis von 3.3′

Seien $\alpha, \tilde{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Kurven mit gleicher Krümmung und Torsion, $\alpha(a) = \tilde{\alpha}(a)$, sowie $T_\alpha(a) = T_{\tilde{\alpha}}(a)$, $N_\alpha(a) = N_{\tilde{\alpha}}(a)$ und $B_\alpha(a) = B_{\tilde{\alpha}}(a)$. $\begin{pmatrix} T_\alpha \\ N_\alpha \\ B_\alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} T_{\tilde{\alpha}} \\ N_{\tilde{\alpha}} \\ B_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix}$ sind Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} X, \quad X(a) = 1_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$$

und stimmen damit nach dem Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf überein. Es gilt also für alle $t \in I$

$$0 = T_\alpha(t) - T_{\tilde{\alpha}}(t) = \dot{\alpha}(t) - \dot{\tilde{\alpha}}(t) = \dot{\overbrace{\alpha - \tilde{\alpha}}}(t),$$

das heißt $\alpha - \tilde{\alpha}$ ist konstant. Da $\alpha(a) = \tilde{\alpha}(a)$ ist, folgt

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

3.3$\Longleftrightarrow$3.3′

"$\Longrightarrow$" Seien $\alpha, \tilde{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Kurven. $\kappa_\alpha(t) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(t)$, $\tau_\alpha(t) = \tau_{\tilde{\alpha}}(t)$, $\alpha(a) = \tilde{\alpha}(a)$, $T_\alpha(a) = T_{\tilde{\alpha}}(a)$, $N_\alpha(a) = N_{\tilde{\alpha}}(a)$ und $B_\alpha(a) = B_{\tilde{\alpha}}(a)$. Nach *Satz 3.3* existiert eine Bewegung

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ x \longmapsto Ax + b$$

mit

$$\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha.$$

Zu zeigen: $\Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ohne Einschränkung sei $\alpha(a) = (0,0,0)$. Damit ist

$$0_{\mathbb{R}^3} = \alpha(a) = \tilde{\alpha}(a) = \Phi(\alpha(a)) = \Phi(0,0,0) = b.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Big(T_{\tilde{\alpha}}(a) \;\Big|\; N_{\tilde{\alpha}}(a) \;\Big|\; B_{\tilde{\alpha}}(a)\Big) &\overset{2.8}{=} \Big(AT_\alpha(a) \;\Big|\; AN_\alpha(a) \;\Big|\; \det(A) AB_\alpha(a)\Big) \\ &= A\Big(T_\alpha(a) \;\Big|\; N_\alpha(a) \;\Big|\; \det(A) B_\alpha(a)\Big). \end{aligned}$$

Da die Vektoren $T_\alpha(a)$, $N_\alpha(a)$ und $\det(A)B_\alpha(a)$ linear unabhängig sind gilt

$$A = 1_{\mathbb{R}^{3\times 3}}.$$

"$\Longleftarrow$" Gegeben seien zwei Kurven $\alpha, \tilde{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\kappa_\alpha = \kappa_{\tilde{\alpha}}$ und $\tau_\alpha = \tau_{\tilde{\alpha}}$.

Zu zeigen: $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$, wobei Φ eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$ ist. Sei $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ x \longmapsto Ax + b$ mit

$$A = \Big(T_{\tilde{\alpha}}(a) \;\Big|\; N_{\tilde{\alpha}}(a) \;\Big|\; B_{\tilde{\alpha}}(a)\Big)\Big(T_\alpha(a) \;\Big|\; N_\alpha(a) \;\Big|\; B_\alpha(a)\Big)^{-1} \quad \text{und} \quad b = \tilde{\alpha}(a) - A\alpha(a).$$

Sei $\widehat{\alpha} := \Phi \circ \alpha$. Dann gilt

$$\widehat{\alpha}(a) = \Phi(\alpha(a)) = A\alpha(a) + b = A\alpha(a) + \widetilde{\alpha}(a) - A\alpha(a) = \widetilde{\alpha}(a).$$

Weiterhin gilt nach *2.8*

$$T_{\hat{\alpha}}(a) = AT_{\alpha}(a) = T_{\tilde{\alpha}}(a), \quad N_{\hat{\alpha}}(a) = AN_{\alpha}(a) = N_{\tilde{\alpha}}(a), \quad B_{\hat{\alpha}}(a) = AB_{\alpha}(a) = B_{\tilde{\alpha}}(a).$$

Nach *Satz 3.3'* gilt somit

$$\widehat{\alpha} = \widetilde{\alpha}$$

also $\widetilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$.

3.4 Bemerkung

Für jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist

$$\kappa_{\alpha} = \langle \dot{T}_{\alpha}, N_{\alpha} \rangle \quad \text{und} \quad \tau_{\alpha} = \langle \dot{N}_{\alpha}, B_{\alpha} \rangle.$$

Beweis

Aus den Frénétschen Formeln folgt

$$\dot{T}_{\alpha} = \kappa_{\alpha} N_{\alpha}$$

und damit

$$\langle \dot{T}_{\alpha}, N_{\alpha} \rangle = \langle \kappa_{\alpha} N_{\alpha}, N_{\alpha} \rangle = \kappa_{\alpha} \underbrace{\langle N_{\alpha}, N_{\alpha} \rangle}_{=1} = \kappa_{\alpha}.$$

Nach Definition gilt $\tau_{\alpha} = \langle \dot{N}_{\alpha}, B_{\alpha} \rangle$.

3.5 Bemerkung

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve. Sei $\widetilde{s}$ die Bogenlänge der Kurve $T_{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto T_{\alpha}(t)$ und $\hat{s}$ die Bogenlänge der Kurve $B_{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto B_{\alpha}(t)$. Dann gilt

$$\dot{\widetilde{s}} = \kappa_{\alpha} \quad \text{und} \quad \dot{\hat{s}} = |\tau_{\alpha}|.$$

Beweis

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $L_{T_{\alpha}}$ die Funktion

$$L_{T_{\alpha}}: I \longrightarrow \mathbb{R};\ s \longmapsto \int_a^s \|\dot{T}_{\alpha}(t)\|\, dt,$$

das heißt die "Bogenlänge" der "Kurve" $T_{\alpha|[a;s]}$ und

$$L_{B_{\alpha}}: I \longrightarrow \mathbb{R};\ s \longmapsto \int_a^s \|\dot{B}_{\alpha}(t)\|\, dt,$$

das heißt die "Bogenlänge" der "Kurve" $B_{\alpha|[a;s]}$. Dann gilt

$$\dot{L}_{T_{\alpha}}(s) = \kappa_{\alpha}(s) \quad \text{und} \quad \dot{L}_{B_{\alpha}}(s) = |\tau_{\alpha}(s)| \qquad \text{für alle } s \in I.$$

Es ist

$$\dot{L}_{T_{\alpha}}(s) = \frac{d}{ds} \int_a^s \|\dot{T}_{\alpha}(t)\|\, dt \overset{\text{HDI}}{=} \|\dot{T}_{\alpha}(s)\| = \kappa_{\alpha}(s)$$

und

$$\dot{L}_{B_\alpha}(s) = \frac{d}{ds}\int_a^s \|\dot{B}_\alpha(t)\|\,dt \overset{\text{HDI}}{=} \|\dot{B}_\alpha(s)\|$$
$$\overset{\text{Frénét}}{=} \|-\tau_\alpha(s)N_\alpha(s)\| \overset{\|N_\alpha\|=1}{=} |\tau_\alpha(s)|.$$

3.6 Beispiel

Jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\kappa_\alpha \equiv 0$ ist eine **Gerade**.

Beweis

Es gilt

$$\|\ddot{\alpha}\| = \|\dot{T}_\alpha\| = \kappa_\alpha \equiv 0.$$

Damit ist $\dot{\alpha}$ konstant und es folgt

$$\alpha(t) = c_1 t + c_0 \quad \text{für alle } t \in I$$

mit Konstanten $c_0 \in \mathbb{R}^3$ und $c_1 \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.

3.7 Folgerung

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa_\alpha > 0$ und konstanter Torsion τ_α. Dann ist α eine Schraubenlinie und bis auf Bewegung die Kurve

$$\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \left(r\cos\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, r\sin\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

mit $r := \dfrac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2}$ und $h := \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2}$.

Beweis

Die Krümmung von β ist (siehe *Beispiel 2.6.3*)

$$\kappa_\beta \equiv \frac{r}{r^2+h^2} = \frac{\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2}}{\frac{\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^2}} = \kappa_\alpha.$$

Die Torsion von β ist

$$\tau_\beta = \frac{h}{r^2+h^2} = \frac{\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2}}{\frac{\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^2}} = \tau_\alpha.$$

Die Behauptung folgt aus dem *Eindeutigkeitssatz 3.3*.

3.8 Folgerung

Jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\kappa_\alpha > 0$ und $\tau_\alpha \equiv 0$ liegt in einer Ebene.

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Aus den Frénétschen Gleichungen folgt

$$\dot{B}_\alpha = -\tau_\alpha N_\alpha \equiv 0.$$

B_α ist also konstant, das heißt

$$B_\alpha(t) = B_\alpha(a) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Aus

$$\dot{\langle \alpha, B_\alpha \rangle} = \underbrace{\langle T_\alpha, B_\alpha \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \alpha, \dot{B}_\alpha \rangle}_{=0} = 0$$

folgt

$$\langle \alpha(t), B_\alpha(t) \rangle = \langle \underbrace{\alpha(a)}_{=0}, B_\alpha(a) \rangle = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Damit gilt

$$\langle \alpha(t), B_\alpha(a) \rangle = \langle \alpha(t), B_\alpha(t) \rangle = \langle \alpha(a), B_\alpha(a) \rangle = 0,$$

das heißt

$$\alpha(t) \in \Big(\mathbb{R} \underbrace{B_\alpha(a)}_{\neq 0_{\mathbb{R}^3}} \Big)^\perp \quad \text{für alle } t \in I.$$

3.9 Folgerung

Jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit konstanter Krümmung $\kappa_\alpha > 0$ und $\tau_\alpha \equiv 0$ ist ein Kreisbogen, das heißt bis auf Bewegung die Kurve

$$\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto (r \cos {}^t\!/_r\,, r \sin {}^t\!/_r\,, 0) \quad \text{mit} \quad r := \tfrac{1}{\kappa_\alpha}.$$

Beweis

Nach *Beispiel 2.6.1* gilt

$$\kappa_\beta = \kappa_\alpha \quad \text{und} \quad \tau_\alpha = 0 = \tau_\beta.$$

Aus *Satz 3.2* folgt wiederum die Behauptung.

3.10 Definition

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve. Für jedes $t \in I$ heißt die von $T_\alpha(t)$ und $N_\alpha(t)$ aufgespannte Ebene **Schmiegebene** von α im Punkt $\alpha(t)$.

4 Ebene Kurven

In diesem Kapitel werden für Kurven

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Normale und Krümmung etwas anders definiert.

4.1 Definition

Sei

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

eine reguläre Kurve mit Parameter Bogenlänge.

a) Die Abbildung

$$T_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto \dot{\alpha}(t)$$

heißt **Tangentenvektor** der Kurve α.

b) Die Abbildung

$$N_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}_2(t) \\ \dot{\alpha}_1(t) \end{pmatrix}$$

heißt **Normalenvektor** der Kurve α.

c) Die Funktion

$$\kappa_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t) \rangle$$

heißt **Krümmung** der Kurve α.

4.2 Bemerkung

Für jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\|N_\alpha(t)\| = 1, \quad \langle T_\alpha(t), N_\alpha(t) \rangle = 0, \quad \det\Big(T_\alpha(t) \;\Big|\; N_\alpha(t)\Big) = 1 \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Für ein $t \in I$ kann aber $\kappa_\alpha(t) < 0$ sein.

4.3 Satz (Frénét)

Für jede reguläre Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und alle $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{T}_\alpha(t) &= \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) \\ \dot{N}_\alpha(t) &= -\kappa_\alpha(t) T_\alpha(t) \end{aligned}$$

Beweis

Für alle $t \in I$ bilden die Vektoren $T_\alpha(t)$ und $N_\alpha(t)$ ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^2$. Deshalb gilt

$$\dot{T}_\alpha(t) = \underbrace{\langle \dot{T}_\alpha(t), T_\alpha(t) \rangle}_{=0} T_\alpha(t) + \underbrace{\langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t) \rangle}_{=\kappa_\alpha(t)} N_\alpha(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t).$$

Weiterhin gilt (wegen $\langle T_\alpha, N_\alpha \rangle = 0$)

$$0 = \dot{\overbrace{\langle T_\alpha, N_\alpha \rangle}} = \langle \dot{T}_\alpha, N_\alpha \rangle + \langle T_\alpha, \dot{N}_\alpha \rangle$$

und damit

$$\langle \dot{T}_\alpha, N_\alpha \rangle = -\langle T_\alpha, \dot{N}_\alpha \rangle.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}\dot{N}_\alpha(t) &= \langle \dot{N}_\alpha(t), T_\alpha(t)\rangle T_\alpha(t) + \underbrace{\langle \dot{N}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle}_{=0} N_\alpha(t)\\ &= \langle T_\alpha(t), \dot{N}_\alpha(t)\rangle T_\alpha(t)\\ &= -\kappa_\alpha(t) T_\alpha(t).\end{aligned}$$

4.4 Hilfssatz

Seien $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen mit $f^2(t) + g^2(t) = 1$ für alle $t \in I$. Dann gilt

a) Es existiert eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\vartheta: I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \cos\vartheta(t), \quad g(t) = \sin\vartheta(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

b) Ist $\widetilde{\vartheta}$ eine weitere solche Funktion, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\widetilde{\vartheta}(t) - \vartheta(t) = 2k\pi \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis

a) Wähle ein $t_0 \in I$ fest. Nach Voraussetzung existiert dann ein $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\cos\vartheta_0 = f(t_0) \quad \text{und} \quad \sin\vartheta_0 = g(t_0).$$

Definiere nun ϑ folgendermaßen

$$\vartheta: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(\dot{g}(\xi) f(\xi) - \dot{f}(\xi) g(\xi)\Big)\, d\xi.$$

Damit ist $\vartheta \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Sei nun h die Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \Big(f(t) - \cos\vartheta(t)\Big)^2 + \Big(g(t) - \sin\vartheta(t)\Big)^2.$$

Wir zeigen nun $h \equiv 0$, woraus a) folgt:
Für alle $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned}h(t) &= f^2(t) - 2f(t)\cos\vartheta(t) + \cos^2\vartheta(t) + g^2(t) - 2g(t)\sin\vartheta(t) + \sin^2\vartheta(t)\\ &= 2 - 2\Big(f(t)\cos\vartheta(t) + g(t)\sin\vartheta(t)\Big)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\dot{h}(t) &= \dot{f}(t)\cos\vartheta(t) - f(t)(\sin\vartheta(t))\dot{\vartheta}(t) + \dot{g}(t)\sin\vartheta(t) + g(t)(\cos\vartheta(t))\dot{\vartheta}(t)\\ &= \cos\vartheta(t)\Big(\dot{f}(t) + g(t)\dot{\vartheta}(t)\Big) + \sin\vartheta(t)\Big(\dot{g}(t) - \dot{\vartheta}(t) f(t)\Big)\\ &\overset{\text{HDI}}{=} \cos\vartheta(t)\Big(\dot{f}(t) + g(t) f(t)\dot{g}(t) - g(t)\dot{f}(t) g(t)\Big)\\ &\qquad + \sin\vartheta(t)\Big(\dot{g}(t) - f(t) f(t)\dot{g}(t) + f(t)\dot{f}(t) g(t)\Big)\\ &\overset{(*)}{=} \cos\vartheta(t)\Big(\dot{f}(t) - f(t) f(t)\dot{f}(t) - g(t)\dot{f}(t) g(t)\Big)\\ &\qquad + \sin\vartheta(t)\Big(\dot{g}(t) - f(t) f(t)\dot{g}(t) - g(t)\dot{g}(t) g(t)\Big)\\ &= \cos\vartheta(t)\Big(\dot{f}(t) - \dot{f}(t)\,(f^2(t) + g^2(t))\Big) + \sin\vartheta(t)\Big(\dot{g}(t) - \dot{g}(t)\,(f^2(t) + g^2(t))\Big)\\ &= 0,\end{aligned}$$

denn aus der Voraussetzung $f^2(t) + g^2(t) = 1$ folgt durch Differentiation

$$\dot{f}(t)f(t) = -\dot{g}(t)g(t). \qquad (*)$$

Dann ist h konstant und aus

$$\begin{aligned} h(t_0) &= \Big(f(t_0) - \cos\vartheta(t_0)\Big)^2 + \Big(g(t_0) - \sin\vartheta(t_0)\Big)^2 \\ &= \Big(f(t_0) - \cos\vartheta_0\Big)^2 + \Big(g(t_0) - \sin\vartheta_0\Big)^2 = 0 \end{aligned}$$

folgt $h \equiv 0$.

b) die Funktion $\widetilde{\vartheta} - \vartheta$ ist stetig und, da

$$\cos\vartheta(t) = f(t) = \cos\widetilde{\vartheta}(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt, ist

$$(\widetilde{\vartheta} - \vartheta)(I) \subset 2\pi\mathbb{Z}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

4.5 Hilfssatz

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig und $h: T \longrightarrow S^1$ eine stetige Abbildung (mit

$$S^1 := \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x^2 + y^2 = 1 \Big\}).$$

Dann existiert eine stetige Abbildung $\vartheta: T \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)) \quad \text{für alle } t \in T.$$

4.6 Lemma und Definition

Ist $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit Parameter Bogenlänge, so existiert eine differenzierbare Funktion $\vartheta_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in I$ gilt

i) $T_\alpha(t) = \Big(\cos\vartheta_\alpha(t), \sin\vartheta_\alpha(t)\Big)$

ii) $N_\alpha(t) = \Big(-\sin\vartheta_\alpha(t), \cos\vartheta_\alpha(t)\Big)$

iii) $\kappa_\alpha(t) = \dot{\vartheta}_\alpha(t)$

Eine stetige Funktion ϑ_α mit der Eigenschaft i) heißt (ein) **Tangentenwinkel** der Kurve α. Zwei Tangentenwinkel unterscheiden sich um ein Vielfaches von 2π.

Beweis

i) Für den Tangentenvektor

$$T_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\; t \longmapsto \begin{pmatrix} T_{\alpha,1}(t) \\ T_{\alpha,2}(t) \end{pmatrix}$$

gilt

$$T_{\alpha,1}^2(t) + T_{\alpha,2}^2(t) = 1 \quad \text{für alle } t \in I,$$

da $\|T_\alpha\| = 1$. Aus *Hilfssatz 4.4* folgt nun die Behauptung. Weiterhin folgt mit einem $k \in \mathbb{Z}$ für zwei Tangentenwinkel $\vartheta_{\alpha,1}$ und $\vartheta_{\alpha,2}$

$$\vartheta_{\alpha,1}(t) - \vartheta_{\alpha,2}(t) = 2k\pi \quad \text{für alle } t \in I.$$

ii) Für

$$N: I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} -\sin\vartheta(t) \\ \cos\vartheta(t) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\langle T_\alpha(t), N(t)\rangle = 0 \quad \text{für alle } t \in I$$

und

$$\det\Big(T_\alpha(t) \;\Big|\; N(t)\Big) = \det \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) & -\sin\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) & \cos\vartheta(t) \end{pmatrix} = 1$$

und damit $N = N_\alpha$.

iii) Es ist für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha(t) &= \langle \dot{T}_\alpha(t), N_\alpha(t)\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -\dot\vartheta(t)\sin\vartheta(t) \\ \dot\vartheta(t)\cos\vartheta(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\vartheta(t) \\ \cos\vartheta(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \dot\vartheta(t)\sin^2\vartheta(t) + \dot\vartheta(t)\cos^2\vartheta(t) \\ &= \dot\vartheta(t). \end{aligned}$$

4.7 Definition

α heißt reguläre **geschlossene** Kurve, wenn $\alpha: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regulär ist und wenn gilt

$$\alpha(a) = \alpha(b), \quad \dot\alpha(a) = \dot\alpha(b), \quad \ddot\alpha(a) = \ddot\alpha(b).$$

4.8 Bemerkung

Eine reguläre geschlossene Kurve

$$\alpha: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

läßt sich folgendermaßen zu einer Kurve

$$\overline{\alpha}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\overline{\alpha}|\,[a;b] = \alpha$$

fortsetzen. Für alle $t = i(b-a) + c \in \mathbb{R}$ mit $i \in \mathbb{Z}$ und $c \in [a;b)$ definiere

$$\overline{\alpha}(t) := \alpha(c) \quad (\text{“periodische Fortsetzung”}).$$

Umlaufzahl für eine reguläre geschlossene Kurve

4.9 Definition

Ist $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre geschlossene Kurve mit Parameter Bogenlänge und $\vartheta_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Tangentenwinkel der Kurve α, dann heißt

$$n_\alpha := \frac{1}{2\pi}\Big(\vartheta_\alpha(b) - \vartheta_\alpha(a)\Big)$$

die **Umlaufzahl** der Kurve α.

4.10 Hinweis

a) n_α ist wohldefiniert, da es nach *Lemma 4.6* von der Wahl von ϑ_α unabhängig ist.

b) Für die aus der Funktionentheorie bekannte Umlaufzahl

$$n_\alpha(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\alpha \frac{dz}{z-a}$$

gilt

$$n_{T_\alpha}(0) = n_\alpha.$$

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} n_{T_\alpha}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_\alpha} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{1}{T_\alpha(t)} \dot{T}_\alpha(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b e^{-i\vartheta_\alpha(t)} \overbrace{e^{i\vartheta_\alpha(t)}}^{\bullet}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \underbrace{e^{-i\vartheta_\alpha(t)} e^{i\vartheta_\alpha(t)}}_{=1} i\dot{\vartheta}_\alpha(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b \dot{\vartheta}_\alpha(t)\, dt \overset{\text{HDI}}{=} \frac{1}{2\pi}\Big(\vartheta_\alpha(b) - \vartheta_\alpha(a)\Big) \\ &= n_\alpha. \end{aligned}$$

4.11 Bemerkung

a) Es gilt

$$n_\alpha \in \mathbb{Z},$$

denn

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta_\alpha(a) \\ \sin\vartheta_\alpha(a) \end{pmatrix} = T_\alpha(a) = \dot{\alpha}(a) = \dot{\alpha}(b) = T_\alpha(b) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_\alpha(b) \\ \sin\vartheta_\alpha(b) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\vartheta_\alpha(b) - \vartheta_\alpha(a) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

b) Es ist

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b \kappa_\alpha(t)\, dt,$$

denn $\kappa_\alpha = \dot{\vartheta}_\alpha$. Hieraus folgt die Bewegungsinvarianz der Umlaufzahl (vgl. *Lemma 2.8*).

Stückweise reguläre Kurven

4.12 Definition

Eine Kurve $\alpha\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **stückweise regulär**, wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

von I gibt, so daß $\alpha_j := \alpha|[t_{j-1};t_j]$ regulär ist für $j = 1, \ldots, k$.

Die Punkte $\alpha(t_j)$ für $j = 1, \ldots, k-1$ heißen **Ecken**.

Für $j = 1, \ldots, k-1$ sei der Winkel $\gamma_{\alpha,j}$ in der Ecke $\alpha(t_j)$ folgendermaßen definiert. Sei die Funktion $\vartheta_{\alpha_j}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Tangentenwinkel der Kurve α_j. Sei

$$\gamma_{\alpha,j} := \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_j) + 2\lambda_{\alpha,j}\pi,$$

wobei $\lambda_{\alpha,j} \in \mathbb{Z}$ so gewählt wird, daß gilt

$$-\pi < \gamma_{\alpha,j} \leq \pi .$$

($\gamma_{\alpha,j}$ ist unabhängig von der Wahl der Tangentenwinkel.)

4.13 Definition

Eine stückweise reguläre Kurve $\alpha\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **geschlossen**, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist. Im Punkt $\alpha(a) = \alpha(b)$ definiert man den Winkel $\gamma_{\alpha,k}$ analog folgendermaßen

$$\gamma_{\alpha,k} := \vartheta_{\alpha_1}(a) - \vartheta_{\alpha_k}(b) + 2\lambda_{\alpha,k}\pi ,$$

wobei $\lambda_{\alpha,k} \in \mathbb{Z}$ so gewählt wird, daß gilt

$$-\pi < \gamma_{\alpha,k} \leq \pi .$$

4.14 Definition

Für eine stückweise geschlossene Kurve $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert man die Umlaufzahl so

$$n_\alpha := \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\Big(\vartheta_{\alpha_i}(t_i) - \vartheta_{\alpha_i}(t_{i-1})\Big) + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\gamma_{\alpha,i}.$$

4.15 Hinweis

Wie man leicht nachrechnet ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Unterteilung und der Wahl der Tangentenwinkel ϑ_{α_i} $(i = 1, \ldots, k)$.

4.16 Bemerkung

Für jede stückweise reguläre geschlossene Kurve α gilt

$$n_\alpha \in \mathbb{Z} .$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}
2\pi n_\alpha &= \sum_{i=1}^{k}\Big(\vartheta_{\alpha_i}(t_i) - \vartheta_{\alpha_i}(t_{i-1})\Big) + \sum_{i=1}^{k}\gamma_{\alpha,i} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\vartheta_{\alpha_i}(t_i) - \sum_{i=1}^{k}\vartheta_{\alpha_i}(t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k}\gamma_{\alpha,i} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}\vartheta_{\alpha_i}(t_i) + \vartheta_{\alpha_k}(t_k) - \vartheta_{\alpha_1}(t_0) - \sum_{i=1}^{k-1}\vartheta_{\alpha_{i+1}}(t_i) + \sum_{i=1}^{k-1}\gamma_{\alpha,i} + \gamma_{\alpha,k} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}\Big(\vartheta_{\alpha_i}(t_i) - \vartheta_{\alpha_{i+1}}(t_i) + \gamma_{\alpha,i}\Big) + \vartheta_{\alpha_k}(b) - \vartheta_{\alpha_1}(a) + \gamma_{\alpha,k} \\
&= 2\pi\sum_{i=1}^{k}\lambda_{\alpha,i} \in 2\pi\mathbb{Z} .
\end{aligned}$$

4.17 Bemerkung

Für jede stückweise reguläre geschlossene Kurve $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\kappa_\alpha(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{\alpha,j}.$$

Beweis

Für $j = 1, \ldots, k$ ist

$$\vartheta_{\alpha_j}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_{j-1}) = \vartheta_{\alpha_j}(t)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\vartheta}_{\alpha_j}(t)\,dt = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_{\alpha_j}(t)\,dt = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_{\alpha}(t)\,dt.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

4.18 Hilfssatz

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve. Sei

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} x + c \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R}^2$$

und $\vartheta_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Tangentenwinkel der Kurve α. Dann ist

$$\vartheta: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \vartheta_\alpha(t) + \beta$$

ein Tangentenwinkel der Kurve $\Phi \circ \alpha$.

Beweis

Es gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} T_{\Phi\circ\alpha}(t) &\overset{2.8}{=} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} T_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta_\alpha(t) \\ \sin\vartheta_\alpha(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\vartheta_\alpha(t) - \sin\beta\sin\vartheta_\alpha(t) \\ \sin\beta\cos\vartheta_\alpha(t) + \cos\beta\sin\vartheta_\alpha(t) \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Add.thm}}{\downarrow} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_\alpha(t) + \beta) \\ \sin(\vartheta_\alpha(t) + \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.19 Hilfssatz

Es sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stückweise reguläre geschlossene Kurve und

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} x + c \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R}^2$$

eine Bewegung, dann ist

$$n_\alpha = n_{\Phi\circ\alpha}.$$

Beweis

Sei für $j = 1, \ldots, k$

$$\vartheta_{\alpha_j}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein Tangentenwinkel der Kurve α_j. Es ist

$$\begin{aligned} 2\pi n_\alpha &= \sum_{i=1}^{k} \Big(\vartheta_{\alpha_i}(t_i) - \vartheta_{\alpha_i}(t_{i-1})\Big) + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha,i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\vartheta}_{\alpha_i}(t)\,dt + \sum_{i=1}^{k} \Big(\vartheta_{\alpha_{i+1}}(t_i) - \vartheta_{\alpha_i}(t_i) + 2\pi\lambda_{\alpha,i}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_{\alpha_i}(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k} \Big(\Big(\vartheta_{\alpha_{i+1}}(t_i) + \beta \Big) - \Big(\vartheta_{\alpha_i}(t_i) + \beta \Big) + 2\pi \lambda_{\alpha,i} \Big) \\
&\overset{2.8}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_{\Phi \circ \alpha_i}(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\vartheta_{\Phi \circ \alpha_{i+1}}(t_i) - \vartheta_{\Phi \circ \alpha_i}(t_i) + 2\pi \lambda_{\alpha,i}}_{\in (-\pi;\pi) \Longrightarrow \lambda_{\alpha,i} = \lambda_{\Phi \circ \alpha,i}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\vartheta}_{\Phi \circ \alpha_i}(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k} \Big(\vartheta_{\Phi \circ \alpha_{i+1}}(t_i) - \vartheta_{\Phi \circ \alpha_i}(t_i) + 2\pi \lambda_{\Phi \circ \alpha,i} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(\vartheta_{\Phi \circ \alpha_i}(t_i) - \vartheta_{\Phi \circ \alpha_i}(t_{i-1}) \Big) + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{\Phi \circ \alpha,i} \\
&= 2\pi n_{\Phi \circ \alpha}.
\end{aligned}
$$

5 Der Umlaufsatz

5.1 Definition

Eine stückweise reguläre, geschlossene Kurve $\alpha\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **einfach geschlossen**, wenn $\alpha|[a;b)$ injektiv ist.

5.2 Satz (Umlaufsatz)

Für jede stückweise reguläre, einfach geschlossene Kurve $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit Parameter Bogenlänge gilt

$$n_\alpha = \pm 1.$$

Beweis

1) Vorbereitungen

Sei $I := [a;b]$ ein Intervall. Sei ϑ_{α_1} ein Tangentenwinkel der Kurve α_1 und Φ die Bewegung $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) & -\sin(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) \\ \sin(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) & \cos(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \cos(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) & -\sin(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) \\ \sin(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) & \cos(-\vartheta_{\alpha_1}(a)) \end{pmatrix} \alpha(a).$$

Dann ist

$$\Phi(\alpha(a)) = 0 \quad \text{und} \quad T_{\Phi\circ\alpha}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn nach *Hilfssatz 4.18* ist

$$\vartheta_{\Phi\circ\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \vartheta_{\alpha_1}(t) - \vartheta_{\alpha_1}(a)$$

ein Tangentenwinkel der Kurve $\Phi \circ \alpha_1$ und es ist

$$T_{\Phi\circ\alpha}(a) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_{\Phi\circ\alpha_1}(a) \\ \sin\vartheta_{\Phi\circ\alpha_1}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_{\alpha_1}(a) - \vartheta_{\alpha_1}(a)) \\ \sin(\vartheta_{\alpha_1}(a) - \vartheta_{\alpha_1}(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist nach *Hilfssatz 4.19*

$$n_\alpha = n_{\Phi\circ\alpha}$$

und $\Phi \circ \alpha|[a;b)$ ist wegen der Bijektivität von Φ ebenfalls injektiv. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte also im weiteren

$$\alpha(a) = 0 \quad \text{und} \quad T_\alpha(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei weiterhin $\alpha(a)$ keine Ecke, also $T_\alpha(a) = T_\alpha(b)$. Dies läßt sich durch eine Translation des Intervalls I erreichen.

Sei

$$(\tau, \sigma) := \operatorname*{arg\,max}_{(s,t)\in I\times I} \|\alpha(t) - \alpha(s)\|.$$

((τ, σ) existiert, da $I \times I$ abgeschlossen ist und die Funktion

$$\varphi\colon I \times I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \|\alpha(t) - \alpha(s)\|$$

stetig ist.) Dann gilt wegen der Regularität von α

$$\alpha(\tau) \neq \alpha(\sigma)$$

und es ist

$$\Big(\alpha(\tau) + \mathbb{R}_+^*\big(\alpha(\tau) - \alpha(\sigma)\big)\Big) \cap \alpha(I) = \emptyset,$$

das heißt der Halbstrahl $\alpha(\tau) + \mathbb{R}_+^*(\alpha(\tau) - \alpha(\sigma))$ schneidet die Kurve nicht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\tau = a$ und damit $\sigma \neq b$.

2) Zerlegung

Sei

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

eine Zerlegung von I und für $j = 1, \ldots, k$ seien

$$\alpha_j := \alpha|[t_{j-1}; t_j]$$

reguläre Kurven mit Parameter Bogenlänge. Sei

$$T := \Big\{\, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a \le t \le s \le b \,\Big\} \backslash \Big\{\, (t_i, t_i) \;\Big|\; 1 \le i \le k-1 \,\Big\}$$

und $I' := I \backslash \{\, t_i \mid 1 \le i \le k-1 \,\}$. Weiter sei die Abbildung β wie folgt definiert

$$\beta\colon T \longrightarrow S^1;\ (t,s) \longmapsto \begin{cases} T_\alpha(t), & \text{für } t = s \text{ und } t \notin I' \\ -T_\alpha(t), & \text{für } (t,s) = (a,b) \\ \dfrac{\alpha(s) - \alpha(t)}{\|\alpha(s) - \alpha(t)\|}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

β ist wohldefiniert, denn für $a \le t < s < b$ ist $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, weil α einfach geschlossen ist. Für alle $(t,s) \in T$ gilt $\|\beta(t,s)\| = 1$, also $\beta(t,s) \in S^1$. Wir betrachten zunächst $(t,s) \in T$ mit $(t,s) \neq (a,b)$ und $t < s$. Die Stetigkeit in diesen Punkten folgt aus der Stetigkeit von α und der Wohldefiniertheit von β. Für $t^* \in I'$ gilt

$$\begin{aligned} \beta(t,s) = \frac{\alpha(s) - \alpha(t)}{\|\alpha(s) - \alpha(t)\|} &\overset{s>t}{=} \frac{\frac{\alpha(s)-\alpha(t)}{s-t}}{\frac{\|\alpha(s)-\alpha(t)\|}{|s-t|}} \xrightarrow{(t,s)\to(t^*,t^*)} \frac{\dot\alpha(t^*)}{\|\dot\alpha(t^*)\|} \\ &= T_\alpha(t^*) = \beta(t^*,t^*) \quad \text{für } t < s \end{aligned}$$

und

$$\beta(t,s) = T_\alpha(t) \xrightarrow{(t,s)\to(t^*,t^*)} T_\alpha(t^*) = \beta(t^*,t^*) \quad \text{für } t = s.$$

Schließlich ist β auch in (a,b) stetig, denn hier ist

$$\begin{aligned} \beta(t,s) &= \frac{\alpha(s) - \alpha(t)}{\|\alpha(s) - \alpha(t)\|} \\ &\overset{b>s}{=} -\frac{\frac{\alpha(s)-\alpha(t)}{s-b}}{\frac{\|\alpha(s)-\alpha(t)\|}{|s-b|}} \xrightarrow[\alpha(a)=\alpha(b)]{(t,s)\to(a,b)} -\frac{\dot\alpha(b)}{\|\dot\alpha(b)\|} \\ &= -T_\alpha(a) = \beta(a,b). \end{aligned}$$

Insgesamt ist β stetig auf T und mit der Sternförmigkeit von T bezüglich (a,b) folgt nach *Hilfssatz 4.5* die Existenz einer stetigen Funktion

$$\vartheta\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\beta(t,s) = \big(\cos\vartheta(t,s), \sin\vartheta(t,s)\big) \quad \text{für } (t,s) \in T.$$

Da

$$\beta(a,b) = -\dot{\alpha}(a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi \\ \sin\pi \end{pmatrix}$$

ist, kann man ϑ so wählen, daß $\vartheta(a,b) = \pi$ ist.

3) Berechne $\vartheta(b,b) - \vartheta(a,a)$

Definiere dazu eine Funktion

$$\delta\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \vartheta(t,b) - \vartheta(a,b).$$

Für $t < b$ gilt

$$\beta(t,b) = \frac{\alpha(b) - \alpha(t)}{\|\alpha(b) - \alpha(t)\|} = -\frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$$

und damit

$$\alpha(t) = -\|\alpha(t)\|\beta(t,b) = -\|\alpha(t)\| \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t,b) \\ \sin\vartheta(t,b) \end{pmatrix}.$$

Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ mit $\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$, dann ist

$$\alpha(t) = \|\alpha(t)\| e^{i\vartheta(t,b)}.$$

Wegen $\vartheta(a,b) = \pi$ ist $\delta(t) = \vartheta(t,b) - \pi$ und

$$e^{i\vartheta(t,b)} = e^{i(\delta(t)-\pi)} = -e^{i\delta(t)}$$

und somit

$$\alpha(t) = \|\alpha(t)\| e^{i\delta(t)} \quad \text{für } a < t < b.$$

Es ist $\delta(a) = 0$; wenn $|\delta|$ einen Wert $\geq 2\pi$ annehmen würde, dann würde δ alle Werte aus $[0;2\pi]$ oder $[-2\pi;0]$ annehmen, was im Widerspruch zu 1) steht. Daher gilt

$$|\delta(t)| \leq 2\pi \quad \text{für } a \leq t \leq b.$$

Wegen $\beta(b,b) = \dot{\alpha}(b) = \dot{\alpha}(a) = (1,0)$ existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ mit

$$\vartheta(b,b) = 2\pi l$$

und

$$\delta(b) = 2\pi l - \pi.$$

Aus $|\delta(b)| \leq 2\pi$ folgt $l = 0$ oder $l = 1$, also $\delta(b) = \pm\pi$ und

$$\vartheta(b,b) - \vartheta(a,b) = \pm\pi.$$

Nun definiert man

$$\tilde{\delta}\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \vartheta(a,t) - \vartheta(a,a).$$

Es ist $\beta(a,a) = \dot{\alpha}(a) = (1,0)$, also $e^{i\vartheta(a,a)} = 1$ und somit gilt für $a < t < b$

$$\beta(a,t) = e^{i\vartheta(a,t)} = e^{i\tilde{\delta}(a,t)}.$$

Nun ist für $a < t < b$

$$\beta(a,t) = \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{\|\alpha(t) - \alpha(a)\|} = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|},$$

also

$$\alpha(t) = \|\alpha(t)\| e^{i\tilde{\delta}(t)}$$

und somit $e^{i\delta(t)} = e^{i\tilde{\delta}(t)}$ für $a < t < b$. Daher existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\delta(t) - \tilde{\delta}(t) = 2\pi m \quad \text{für } a < t < b.$$

Aus der Stetigkeit von δ und $\tilde{\delta}$ und wegen $\delta(a) = \tilde{\delta}(a) = 0$ folgt $m = 0$, also

$$\delta(t) = \tilde{\delta}(t) \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

und somit $\tilde{\delta}(b) = \delta(b)$, das heißt $\vartheta(a,b) - \vartheta(a,a) = \vartheta(b,b) - \vartheta(a,b)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\vartheta(b,b) - \vartheta(a,a) &= \Big(\vartheta(b,b) - \vartheta(a,b)\Big) + \Big(\vartheta(a,b) - \vartheta(a,a)\Big) \\ &= 2\Big(\vartheta(b,b) - \vartheta(a,a)\Big) = \pm 2\pi.\end{aligned}$$

4) Die Kurve

$$\alpha_j : [t_{j-1}; t_j] \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto \alpha(t)$$

ist regulär und daher existiert ein Tangentenwinkel, nämlich eine stetige Funktion

$$\vartheta_{\alpha_j} : [t_{j-1}; t_j] \longrightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\dot{\alpha}_j(t) = e^{i\vartheta_j(t)} \quad \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j.$$

Für $t_{j-1} < t < t_j$ ist

$$\dot{\alpha}_j(t) = \beta(t,t) = e^{i\vartheta(t,t)}$$

und somit

$$\vartheta_{\alpha_j}(t) - \vartheta(t,t) = 2\pi k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Ersetzt man ϑ_{α_j} durch $\vartheta_{\alpha_j} - 2\pi k$, so kann man annehmen, daß gilt

$$\vartheta_{\alpha_j}(t) = \vartheta(t,t) \quad \text{für } t_{j-1} < t < t_j,$$

also

$$\lim_{t \nearrow t_j} \vartheta(t,t) = \vartheta_{\alpha_j}(t_j) \quad \text{und} \quad \lim_{t \searrow t_j} \vartheta(t,t) = \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j).$$

Für den Winkel γ_j in der Ecke t_j gilt

$$\gamma_j = \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_j) + 2\lambda\pi \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Nun zeigen wir $\lambda = 0$ (also $\gamma_j = \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_j)$).

Sei $\varepsilon > 0$; im Dreieck mit den Ecken $\alpha(t_j - \varepsilon)$, $\alpha(t_j)$ und $\alpha(t_j + \varepsilon)$ sei φ der Winkel in der Ecke $\alpha(t_j)$ und φ^- beziehungsweise φ^+ der Winkel in der Ecke $\alpha(t_j - \varepsilon)$ beziehungsweise $\alpha(t_j + \varepsilon)$, wobei $0 < \varphi^+, \varphi^- < \pi$. Dann gilt (bei entsprechender Orientierung, andernfalls für $-\varphi^-$)

$$\varphi^- = \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon) - \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j) + 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Für $t_j \leq t \leq t_j + \varepsilon$ ist

$$\vartheta(t_j - \varepsilon, t) - \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j)$$

stetig in t und verschwindet für $t = t_j$. Für hinreichend kleines ε ist daher $k = 0$, also

$$\varphi^- = \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon) - \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j)$$

und analog

$$\varphi^+ = \vartheta(t_j, t_j + \varepsilon) - \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon).$$

Daher ist

$$\pi - \varphi = \varphi^+ + \varphi^- = \vartheta(t_j, t_j + \varepsilon) - \vartheta(t_j - \varepsilon, t_j).$$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt

$$\begin{aligned} \pi - \varphi &\longrightarrow \gamma_j, \\ \vartheta(t_j, t_j + \varepsilon) &\longrightarrow \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) \end{aligned}$$

und

$$\vartheta(t_j - \varepsilon, t_j) \longrightarrow \vartheta_{\alpha_j}(t_j)$$

und daher

$$\gamma_j = \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_j).$$

5) Nun kann man n_α berechnen. Nach *Definition 4.14* und *4.16* gilt (wenn man beachtet, daß $\alpha(a)$ keine Ecke ist)

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \Big(\gamma_j - (\vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_j)) \Big) + \frac{1}{2\pi} \Big(\vartheta_{\alpha_k}(b) - \vartheta_{\alpha_1}(a) \Big).$$

In 4) wurde $\gamma_j = \vartheta_{\alpha_{j+1}}(t_j) - \vartheta_{\alpha_j}(t_j)$ gezeigt, also

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi} \Big(\vartheta_{\alpha_k}(b) - \vartheta_{\alpha_1}(a) \Big).$$

Außerdem ist

$$\vartheta_{\alpha_k}(b) = \vartheta(b, b) \quad \text{und} \quad \vartheta_{\alpha_1}(a) = \vartheta(a, a).$$

In 3) wurde bewiesen $\vartheta(b, b) - \vartheta(a, a) = \pm 2\pi$, und somit

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi} \Big(\vartheta(b, b) - \vartheta(a, a) \Big) = \pm 1.$$

5.3 Corollar

Für jede reguläre, einfach geschlossene Kurve $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_\alpha(t)\, dt = \pm 1.$$

II Flächen

6 Flächen

6.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine beliebig oft differenzierbare injektive Abbildung $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rg} J_f(u_1, u_2) = 2 \quad \text{für alle } (u_1, u_2) \in U$$

heißt **Flächenstück** oder **Fläche**.

6.2 Bezeichnung

Im folgenden schreiben wir f so

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u_1, u_2) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \\ f_3(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

und die Jakobimatrix

$$J_f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 2};\ (u_1, u_2) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

6.3 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann gibt es zu jedem $p \in U$ eine offene Umgebung $U'(p) \subset U$, eine offene Umgebung $V(f(p))$, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^3$ und einen Diffeomorphismus $\Phi: V \longrightarrow W$, so daß gilt $f(U') \subset V$ und $\widetilde{f} := \Phi \circ f$ ist die Abbildung

$$\widetilde{f}: U' \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis

Siehe Analysis III, Kapitel Untermannigfaltigkeiten.

6.4 Definition

Seien $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f}: \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen. Ein Diffeomorphismus $\varphi: \widetilde{U} \longrightarrow U$ heißt (orientierungstreue) **Parametertransformation** von f zu $\widetilde{f}$, wenn gilt

$$\widetilde{f} = f \circ \varphi \quad \text{und} \quad \det J_\varphi(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) > 0 \quad \text{für alle } (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \in \widetilde{U}.$$

f und $\widetilde{f}$ heißen dann äquivalent.

Tangentialraum und Flächennormale

6.5 Bezeichnung

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und seien

$$f_{u_i}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u_1, u_2) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_i}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_i}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_i}(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2$$

die partiellen Ableitungen von f nach u_1 beziehungsweise u_2.

6.6 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $(u_1, u_2) \in U$. Dann heißt

$$T_f(u_1, u_2) := \operatorname{span}\{f_{u_1}(u_1, u_2), f_{u_2}(u_1, u_2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

der **Tangentialraum** der Fläche f zum Parameterwert (u_1, u_2) beziehungsweise im Punkt $f(u_1, u_2)$. Weiter heißt

$$\mathcal{B}_f(u_1, u_2) := \{f_{u_1}(u_1, u_2), f_{u_2}(u_1, u_2)\}$$

kanonische Tangentialraumbasis von $T_f(u_1, u_2)$.

6.7 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann heißt die Abbildung

$$n_f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u_1, u_2) \longmapsto \frac{f_{u_1}(u_1, u_2) \times f_{u_2}(u_1, u_2)}{\| f_{u_1}(u_1, u_2) \times f_{u_2}(u_1, u_2) \|}$$

Normale der Fläche f.

(Wegen $\operatorname{rg} J_f(u_1, u_2) = 2$ sind $f_{u_1}(u_1, u_2)$ und $f_{u_2}(u_1, u_2)$ linear unabhängig und damit ist $n_f(u_1, u_2)$ wohldefiniert.)

6.8 Hilfssatz

Seien $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f}: \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen und $\varphi: \widetilde{U} \longrightarrow U$ eine Parametertransformation von f zu $\widetilde{f}$, also $\widetilde{f} = f \circ \varphi$, wobei

$$\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \\ \varphi_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \widetilde{U}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{\tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) f_{u_1}(u_1, u_2) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) f_{u_2}(u_1, u_2), \\ \widetilde{f}_{\tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) f_{u_1}(u_1, u_2) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) f_{u_2}(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $(u_1, u_2) = \varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ und

$$T_{\tilde{f}}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = T_f(u_1, u_2). \tag{2}$$

Beweis

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{f}_{\tilde{u}_1} \,\middle|\, \widetilde{f}_{\tilde{u}_2}\right) &= J_{\tilde{f}} = J_{f \circ \varphi} \\ &\overset{\text{KR}}{=} (J_f \circ \varphi) \cdot J_\varphi \\ &= \left(f_{u_1} \circ \varphi \,\middle|\, f_{u_2} \circ \varphi\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_1,1} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_2,1} \circ \varphi & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_1,1} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_2,1} \circ \varphi \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_1,2} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_2,2} \circ \varphi & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_1,2} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_2,2} \circ \varphi \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_1,3} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_2,3} \circ \varphi & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_1,3} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_2,3} \circ \varphi \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_1} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_1} f_{u_2} \circ \varphi \,\middle|\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_1} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{u}_2} f_{u_2} \circ \varphi\right). \end{aligned}$$

(2) Für $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \tilde{U}$ gilt wegen (1)

$$\tilde{f}_{\tilde{u}_1} \in \operatorname{span}\{f_{u_1}, f_{u_2}\} = T_f(u_1, u_2)$$

und

$$\tilde{f}_{\tilde{u}_2} \in \operatorname{span}\{f_{u_1}, f_{u_2}\} = T_f(u_1, u_2)$$

und damit

$$T_{\tilde{f}}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \operatorname{span}\{\tilde{f}_{\tilde{u}_1}, \tilde{f}_{\tilde{u}_2}\} \subset \operatorname{span}\{f_{u_1}, f_{u_2}\} = T_f(u_1, u_2).$$

Mit $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ folgt analog

$$T_f(u_1, u_2) \subset T_{\tilde{f}}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$

und damit die Behauptung.

6.9 Hilfssatz

Seien f, $\tilde{f}$ und φ wie in *Hilfssatz 6.8* und $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \tilde{U}$ und $(u_1, u_2) = \varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, dann gilt

$$\tilde{f}_{\tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \times \tilde{f}_{\tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \det J_\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\Big(f_{u_1}(u_1, u_2) \times f_{u_2}(u_1, u_2)\Big)$$

und

$$n_{\tilde{f}}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = n_f(\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)).$$

Beweis

Es ist nach der Kettenregel

$$J_{\tilde{f}}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = J_f(u_1, u_2) J_\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2).$$

Damit gilt für alle $w \in \mathbb{R}^3$

$$\Big(w \;\Big|\; \tilde{f}_{\tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \;\Big|\; \tilde{f}_{\tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\Big) = \Big(w \;\Big|\; f_{u_1}(u_1, u_2) \;\Big|\; f_{u_2}(u_1, u_2)\Big) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$J_\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

und es folgt

$$\det\Big(w \;\Big|\; \tilde{f}_{\tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \;\Big|\; \tilde{f}_{\tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\Big) = \det\Big(w \;\Big|\; f_{u_1}(u_1, u_2) \;\Big|\; f_{u_2}(u_1, u_2)\Big) \det J_\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2).$$

Nach *Bemerkung 2.2* ist damit

$$\langle w, \tilde{f}_{\tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \times \tilde{f}_{\tilde{u}_2}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\rangle = \Big\langle w, \det J_\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\Big(f_{u_1}(u_1, u_2) \times f_{u_2}(u_1, u_2)\Big)\Big\rangle.$$

Hieraus folgt die Behauptung. Teil 2 folgt direkt aus Teil 1 und der Orientierungstreue von φ.

Kurven auf einer Fläche

6.10 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Eine Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **Kurve auf der Fläche f**, wenn es eine Kurve $\beta: I \longrightarrow U$ gibt mit

$$\alpha = f \circ \beta.$$

6.11 Hinweis

Ist $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f, so gilt $\alpha(I) \subset f(U)$. Ist hingegen $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\alpha(I) \subset f(U)$, so existiert eine Kurve $\beta: [-\varepsilon; \varepsilon] \longrightarrow U$ mit $\alpha = f \circ \beta$. Man erhält β als

$$\beta = \widetilde{f}^{-1} \circ \Phi \circ \alpha,$$

mit $\widetilde{f}$ und Φ wie in *6.3*.

6.12 Schreibweise

Im weiteren schreiben wir β wie folgt

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

mit zwei Funktionen

$$u_i: I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Damit ist

$$\alpha(t) = f \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I.$$

6.13 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $(u_1^*, u_2^*) \in U$ und $p := f(u_1^*, u_2^*)$. Dann gilt

$$T_f(u_1^*, u_2^*) = \Big\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, \text{es existiert eine Kurve } \alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ auf } f \text{ mit } \alpha(\tfrac{a+b}{2}) = p \text{ und } \dot{\alpha}(\tfrac{a+b}{2}) = v \Big\}.$$

Beweis

"$\subset$" Sei $v \in T_f(u_1^*, u_2^*)$, also

$$v = v_1 f_{u_1}(u_1^*, u_2^*) + v_2 f_{u_2}(u_1^*, u_2^*) \quad \text{mit } v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Definiere die Kurve β folgendermaßen

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} v_1(t - \frac{a+b}{2}) + u_1^* \\ v_2(t - \frac{a+b}{2}) + u_2^* \end{pmatrix}.$$

Für die Kurve $\alpha = f \circ \beta$ gilt somit

$$\alpha(\tfrac{a+b}{2}) = f \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = p$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\tfrac{a+b}{2}) &= \tfrac{d(f \circ \beta)}{dt}(\tfrac{a+b}{2}) \overset{\text{KR}}{=} J_f(\beta(\tfrac{a+b}{2}))\dot{\beta}(\tfrac{a+b}{2}) \\ &= J_f(u_1^*, u_2^*) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 f_{u_1}(u_1^*, u_2^*) + v_2 f_{u_2}(u_1^*, u_2^*) \\ &= v. \end{aligned}$$

"$\supset$" Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f mit $\alpha(\frac{a+b}{2}) = p$. Dann ist für $t \in I$

$$\alpha(t) = f(u_1(t), u_2(t)),$$

mit Funktionen

$$u_i: I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Es ist für $i = 1, 2$

$$u_i(\tfrac{a+b}{2}) = u_i^*,$$

denn

$$f(u_1^*, u_2^*) = p = \alpha(\tfrac{a+b}{2}) = f\big(u_1(\tfrac{a+b}{2}), u_2(\tfrac{a+b}{2})\big)$$

und f ist injektiv. Dann ist

$$\begin{aligned}\dot\alpha(\tfrac{a+b}{2}) &= \tfrac{d}{dt} f\big(u_1(\tfrac{a+b}{2}), u_2(\tfrac{a+b}{2})\big) \\ &= J_f\big(u_1(\tfrac{a+b}{2}), u_2(\tfrac{a+b}{2})\big) \begin{pmatrix} \dot u_1(\frac{a+b}{2}) \\ \dot u_2(\frac{a+b}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \dot u_1(\tfrac{a+b}{2}) f_{u_1}(u_1^*, u_2^*) + \dot u_2(\tfrac{a+b}{2}) f_{u_2}(u_1^*, u_2^*) \in T_f(u_1^*, u_2^*).\end{aligned}$$

6.14 Beispiele

1) Obere Halbkugel im $\mathbb{R}^3$

Die obere Halbkugel wird wie folgt definiert

$$S_+^2 := \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z > 0 \Big\}.$$

Sei

$$E := \Big\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; u^2 + v^2 < 1 \Big\}$$

und

$$f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}.$$

Dann ist f eine Fläche, denn

$$J_f(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

besitzt den Rang 2.

2) Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

Sei f die Funktion

$$f\colon (0;\pi) \times (0;2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}.$$

Es läßt sich nachrechnen, daß $\operatorname{rg} J_f = 2$ ist, das heißt f ist eine Fläche.

Man beachte, daß die Abbildung

$$f\colon (0;2\pi) \times (0;\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}.$$

keine Fläche ist, denn $f_v(\pi, {}^{\pi}/_2) = (0, 0, 0)^T$ und somit ist $\operatorname{rg} J_f(\pi, {}^{\pi}/_2) < 2$.

3) Torus

Sei $0 < a < r$ und f die Abbildung

$$f\colon (0;2\pi)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} (r + a\cos u)\cos v \\ (r + a\cos u)\sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}.$$

4) Rotationsfläche

Sei

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}$$

eine injektive Kurve mit $\alpha_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Dann ist

$$f: \mathring{I} \times (0; 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(u) \cos v \\ \alpha_1(u) \sin v \\ \alpha_2(u) \end{pmatrix}$$

eine Fläche.

5) Graph einer Funktion

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $h: U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix}$$

eine Fläche, denn f ist injektiv, differenzierbar und es gilt

$$J_f(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix},$$

das heißt $\operatorname{rg} J_f(u, v) = 2$.

7 Die erste Fundamentalform einer Fläche

Wir beschäftigen uns mit der Bogenlänge einer Kurve α, die auf der Fläche f liegt. Dazu sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einer Kurve

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sei $I = [a; b]$ und $t_0 \in I$, dann erhält man für die Bogenlänge von $\alpha|[a; t_0]$

$$\begin{aligned} L_{\alpha|[a;t_0]} &= \int_a^{t_0} \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt \\ &= \int_a^{t_0} \|J_f(\beta(t))\dot{\beta}(t)\|\, dt \\ &= \int_a^{t_0} \left\| f_{u_1}(u_1(t), u_2(t))\dot{u}_1(t) + f_{u_2}(u_1(t), u_2(t))\dot{u}_2(t) \right\| dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \langle f_{u_i}(\beta(t)), f_{u_j}(\beta(t))\rangle \dot{u}_i(t)\dot{u}_j(t)}\, dt. \end{aligned}$$

7.1 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann heißen die Funktionen

$$\begin{aligned} E_f: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \langle f_{u_1}(u), f_{u_1}(u)\rangle, \\ F_f: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \langle f_{u_1}(u), f_{u_2}(u)\rangle \end{aligned}$$

und

$$G_f: U \longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \langle f_{u_2}(u), f_{u_2}(u)\rangle$$

die **Koeffizienten der ersten Fundamentalform**. Um die Koeffizienten als Matrix darstellen zu können, definiert man die Funktionen $g_{f,ij}$ $(i, j = 1, 2)$ wie folgt

$$g_{f,11} := E_f, \quad g_{f,12} := g_{f,21} := F_f, \quad g_{f,22} := G_f.$$

7.2 Satz

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem β wie oben. Dann gilt für die Bogenlänge von α

$$\begin{aligned} L_{\alpha|[a;t_0]} &= \int_a^{t_0} \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{E_f(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_f(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}\, dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{f,ij}(\beta(t))\dot{u}_i(t)\dot{u}_j(t)}\, dt. \end{aligned}$$

7.3 Hilfssatz

Seien $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f}: \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen und $\varphi: \widetilde{U} \longrightarrow U$ eine Parametertransformation von f zu $\widetilde{f}$, also $\widetilde{f} = f \circ \varphi$, wobei

$$\varphi(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \\ \varphi_2(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \in \widetilde{U}.$$

Dann gilt für $i, j = 1, 2$ und $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \in \widetilde{U}$

$$g_{\widetilde{f},ij}(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) g_{f,kl}(\varphi(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)).$$

Beweis

Die Behauptung folgt sofort aus *Hilfssatz 6.8*.

7.4 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Der Tensor

$$\mathbf{I}_f(p): T_f(p) \times T_f(p) \longrightarrow \mathbb{R};\ (X, Y) \longmapsto \langle X, Y \rangle$$

heißt der **erste Fundamentaltensor** der Fläche f in p. $\mathbf{I}_f(p)$ ist ein zweifach covarianter Tensor ((0,2)-Tensor), das heißt eine Bilinearform.

7.5 Lemma

Die Koordinaten des ersten Fundamentaltensors $\mathbf{I}_f(p)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_f(p)$ von $T_f(p)$ sind die $g_{f,ij}(p)$, $i, j = 1, 2$.

Dieses Lemma liefert uns unter Verwendung der Tensorkoordinatentransformationsformel einen anderen Zugang zur Aussage des *Hilfssatzes 7.3*.

Beweis

Für $i, j = 1, 2$ ist (siehe *Anhang A*)

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{I}_f(p)}_{\mathcal{B}_f(p),ij} &= \mathbf{I}_f(p)(f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)) \\ &= \langle f_{u_i}(p), f_{u_j}(p) \rangle \\ &= g_{f,ij}(p). \end{aligned}$$

7.6 Bemerkung

Für variables p erhält man in *Definition 7.4* ein Tensorfeld

$$\mathbf{I}_f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{(T_f(f(U)) \times T_f(f(U)))};\ p \longmapsto \mathbf{I}_f(p).$$

7.7 Lemma

Für alle $p \in U$ ist $\mathbf{I}_f(p)$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform, das heißt

$$\mathbf{I}_f(p)(X, Y) = \mathbf{I}_f(p)(Y, X) \quad \text{für } X, Y \in T_f(p)$$

und

$$\mathbf{I}_f(p)(X, X) > 0 \quad \text{für } X \in T_f(p) \text{ mit } X \neq 0.$$

Beweis

Das Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.

7.8 Beispiele

1) Ebene

Sei

$$f\colon (0;1)\times(0;1) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $E_f(u,v) = 1$, $F_f(u,v) = 0$ und $G_f(u,v) = 1$ für alle $(u,v) \in (0,1)\times(0,1)$.

2) Zylinder

Sei

$$f\colon (0;2\pi)\times(0;1) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} E_f(u,v) &= \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \\ F_f(u,v) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$G_f(u,v) = 1.$$

3) Kugel

Sei

$$f\colon (0;\pi)\times(0;2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$E_f(u,v) = 1, \quad F_f(u,v) = 0, \quad \text{und} \quad G_f(u,v) = \sin^2 u.$$

Sei

$$\alpha_\vartheta\colon (0;2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longrightarrow f(\vartheta,t)$$

eine Kurve auf der Fläche f, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit

$$\beta_\vartheta\colon I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \vartheta \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$L_{\alpha_\vartheta} = \int_0^{2\pi} \|\dot{\alpha}_\vartheta(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{G_f(\vartheta,t)}\, dt = 2\pi\,|\sin\vartheta|\,.$$

Also ergibt sich

$$L_{\alpha_{\pi/2}} = 2\pi \quad (\text{“Äquator”})$$

und

$$L_{\alpha_\vartheta} \overset{\vartheta\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{“Kreis um Nordpol”}).$$

8 Krümmung von Flächenkurven und die zweite Fundamentalform

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f, das heißt es existiert ein

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = f \circ \beta$. Sei wie in *Kapitel 1*

$$s_\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \int_a^t \|\dot{\alpha}(\tau)\|\, d\tau,$$

$I' := s_\alpha(I)$ und

$$\varphi_\alpha: I' \longrightarrow I;\ s \longmapsto s_\alpha^{-1}(s).$$

Dann hat die Kurve

$$\alpha \circ \varphi_\alpha: I' \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Parameter Bogenlänge und für alle $t \in I$ ist

$$\dot{s}_\alpha(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|.$$

Sei $s \in I'$ und $t := \varphi_\alpha(s)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{n_f \circ \beta}}(t) &= \dot{\overbrace{n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha \circ s_\alpha}}(t) \overset{\text{KR}}{=} \dot{\overbrace{n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha}}(s_\alpha(t))\dot{s}_\alpha(t) \\ &= \dot{\overbrace{n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha}}(s)\|\dot{\alpha}(t)\|. \end{aligned} \tag{$*$}$$

(Physikermethode: $\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dn}{ds}\dot{s} = \frac{dn}{ds}\|\dot{\alpha}\|$.) Weiterhin gilt

$$\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi_\alpha}}(s) = \dot{\alpha}(\varphi_\alpha(s))\dot{\varphi}_\alpha(s) = \dot{\alpha}(t)\frac{1}{\dot{s}_\alpha(\varphi_\alpha(s))} \tag{$**$}$$

für die transformierte Kurve. Außerdem ist

$$\langle T_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s), n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha(s)\rangle \overset{2.5}{=} \langle T_\alpha(t), n_f(\beta(t))\rangle \overset{T_\alpha(t)\in T_f(\beta(t))}{\downarrow} = 0. \tag{$***$}$$

Somit gilt (wenn ϑ der Winkel zwischen $N_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s)$ und $n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha(s)$ ist)

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s)\cos\vartheta &= \kappa_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s)\langle N_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s), n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha(s)\rangle \\ &= \langle \dot{T}_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s), n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha(s)\rangle \\ &= \dot{\overbrace{\langle T_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s), n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha(s)\rangle}} - \langle T_{\alpha\circ\varphi_\alpha}(s), \dot{\overbrace{n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha}}(s)\rangle \\ &\overset{(***)}{=} -\left\langle \frac{\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi_\alpha}}(s)}{\left\|\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi_\alpha}}(s)\right\|}, \dot{\overbrace{n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha}}(s) \right\rangle \\ &\overset{(*)}{=} -\left\langle \frac{\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi_\alpha}}(s)}{\left\|\dot{\overbrace{\alpha \circ \varphi_\alpha}}(s)\right\|}, \frac{\dot{\overbrace{n_f \circ \beta}}(\varphi_\alpha(s))}{\|\dot{\alpha} \circ \varphi_\alpha(s)\|} \right\rangle \\ &\overset{(**)}{=} -\left\langle \frac{\frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}}{\left\|\frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}\right\|}, \frac{\dot{\overbrace{n_f \circ \beta}}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\|\dot\alpha(t)\|^2}\langle \dot\alpha(t), \dot{n_f \circ \beta}(t)\rangle \\
&\overset{\text{KR}}{=} -\frac{1}{\|\dot\alpha(t)\|^2}\Big\langle f_{u_1}(\beta(t))\dot u_1(t) + f_{u_2}(\beta(t))\dot u_2(t), n_{f,u_1}(\beta(t))\dot u_1(t) + n_{f,u_2}(\beta(t))\dot u_2(t)\Big\rangle \\
&= -\frac{\Big\langle f_{u_1}(\beta(t)), n_{f,u_1}(\beta(t))\Big\rangle \dot u_1^2(t)}{E_f(\beta(t))\dot u_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot u_1(t)\dot u_2(t) + G_f(\beta(t))\dot u_2^2(t)} \\
&\quad - \frac{\Big(\Big\langle f_{u_1}(\beta(t)), n_{f,u_2}(\beta(t))\Big\rangle + \Big\langle f_{u_2}(\beta(t)), n_{f,u_1}(\beta(t))\Big\rangle\Big)\dot u_1(t)\dot u_2(t)}{E_f(\beta(t))\dot u_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot u_1(t)\dot u_2(t) + G_f(\beta(t))\dot u_2^2(t)} \\
&\quad - \frac{\Big\langle f_{u_2}(\beta(t)), n_{f,u_2}(\beta(t))\Big\rangle \dot u_2^2(t)}{E_f(\beta(t))\dot u_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot u_1(t)\dot u_2(t) + G_f(\beta(t))\dot u_2^2(t)}.
\end{aligned}
$$

8.1 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann heißen die Funktionen

$$
\begin{aligned}
L_f: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto -\langle f_{u_1}(u), n_{f,u_1}(u)\rangle, \\
M_f: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto -1/2\Big(\langle f_{u_1}(u), n_{f,u_2}(u)\rangle + \langle f_{u_2}(u), n_{f,u_1}(u)\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

und

$$
N_f: U \longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto -\langle f_{u_2}(u), n_{f,u_2}(u)\rangle
$$

die **Koeffizienten der zweiten Fundamentalform**. Um nun auch diese Koeffizienten als Matrix darstellen zu können, definiert man die Funktionen $h_{f,ij}$ $(i,j = 1,2)$ wie folgt.

$$
h_{f,11} := L_f, \quad h_{f,12} := h_{f,21} := M_f, \quad h_{f,22} := N_f.
$$

8.2 Hilfssatz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann gilt für alle $u \in U$

$$
\begin{aligned}
L_f(u) &= \langle n_f(u), f_{u_1u_1}(u)\rangle, && (1)\\
M_f(u) &= \langle n_f(u), f_{u_1u_2}(u)\rangle = -\langle n_{f,u_1}(u), f_{u_2}(u)\rangle = -\langle n_{f,u_2}(u), f_{u_1}(u)\rangle, && (2)\\
N_f(u) &= \langle n_f(u), f_{u_2u_2}(u)\rangle. && (3)
\end{aligned}
$$

Beweis

Nach Konstruktion von n_f gilt für alle $u \in U$ und $i = 1,2$

$$
\langle f_{u_i}(u), n_f(u)\rangle = 0. \qquad (*)
$$

Differentiation dieser Gleichung nach u_i liefert

$$
\langle f_{u_iu_i}(u), n_f(u)\rangle + \underbrace{\langle f_{u_i}(u), n_{f,u_i}(u)\rangle}_{=-h_{f,ii}(u)} = 0,
$$

woraus die Gleichungen (1) und (3) folgen. Aus $(*)$ folgt durch Differentiation nach u_{3-i} die Gleichung

$$
\langle f_{u_1u_2}(u), n_f(u)\rangle + \langle f_{u_1}(u), n_{f,u_2}(u)\rangle = 0,
$$

beziehungsweise

$$\langle f_{u_1u_2}(u), n_f(u)\rangle + \langle f_{u_2}(u), n_{f,u_1}(u)\rangle = 0$$

und daraus

$$\langle f_{u_1u_2}(u), n_f(u)\rangle = -\langle f_{u_1}(u), n_{f,u_2}(u)\rangle, \qquad (**)$$

beziehungsweise

$$\langle f_{u_1u_2}(u), n_f(u)\rangle = -\langle f_{u_2}(u), n_{f,u_1}(u)\rangle. \qquad (***)$$

Durch Addition von $(**)$ und $(***)$ ergibt sich

$$2\langle f_{u_1u_2}(u), n_f(u)\rangle = 2M_f(u).$$

Zusammen mit $(**)$ und $(***)$ folgen die Gleichungen (2).

8.3 Hilfssatz

Seien $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f}\colon \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen und $\varphi\colon \widetilde{U} \longrightarrow U$ eine Parametertransformation von f zu $\widetilde{f}$, also $\widetilde{f} = f \circ \varphi$, wobei

$$\varphi(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \\ \varphi_2(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \in \widetilde{U}.$$

Dann gilt für $i, j = 1, 2$ und $\widetilde{u} \in \widetilde{U}$

$$h_{\tilde{f},ij}(\widetilde{u}) = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) h_{f,kl}(\varphi(\widetilde{u})).$$

Beweis

Mit $u := \varphi(\widetilde{u})$ ist

$$\begin{aligned}
-h_{\tilde{f},ij}(\widetilde{u}) &= \langle \widetilde{f}_{\tilde{u}_i}(\widetilde{u}), n_{\tilde{f},\tilde{u}_j}(\widetilde{u})\rangle \\
&\overset{6.9}{=} \langle (f \circ \varphi)_{\tilde{u}_i}(\widetilde{u}), (n_f \circ \varphi)_{\tilde{u}_j}(\widetilde{u})\rangle \\
&\overset{\text{KR}}{=} \left\langle J_f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}), J_{n_f}(u) \frac{\partial \varphi}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_1}{\partial u_k}(u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \\ \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_2}{\partial u_k}(u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \\ \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_3}{\partial u_k}(u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial n_{f,1}}{\partial u_l}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \\ \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial n_{f,2}}{\partial u_l}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \\ \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial n_{f,3}}{\partial u_l}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{3} \left(\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_m}{\partial u_k}(u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \right) \left(\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial n_{f,m}}{\partial u_l}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \right) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial f_m}{\partial u_k}(u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \frac{\partial n_{f,m}}{\partial u_l}(u) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \frac{\partial f_m}{\partial u_k}(u) \frac{\partial n_{f,m}}{\partial u_l}(u) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \langle f_{u_k}(u), n_{f,u_l}(u)\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}) \frac{\partial \varphi_l}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) (-h_{f,kl}(u)).
\end{aligned}$$

8.4 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche f, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sei für $s \in I'$ ein $\vartheta_s \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß gilt (I' wie am Anfang des Kapitels gewählt)

$$\cos \vartheta_s = \langle N_{\alpha \circ \varphi_\alpha}(s), n_f \circ \beta \circ \varphi_\alpha(s) \rangle,$$

dann gilt mit $t := \varphi_\alpha(s)$ (φ_α wie am Anfang des Kapitels definiert)

$$\kappa_{\alpha \circ \varphi_\alpha}(s) \cos \vartheta_s = \frac{L_f(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2M_f(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + N_f(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}{E_f(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_f(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}.$$

8.5 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche f, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

1) $\kappa_{\alpha \circ \varphi_\alpha}(s) \cos \vartheta_s$ heißt **Normalkrümmung** von $\alpha \circ \varphi_\alpha$ im Punkt s.

2) Für $s \in I'$ heißt α **Normalschnitt** in $\alpha(\varphi_\alpha(s))$, falls

$$n_f(\beta(\varphi_\alpha(s))) = N_{\alpha \circ \varphi_\alpha}(s).$$

8.6 Bemerkung

Satz 8.4 bedeutet insbesondere, daß zwei Kurven auf f, die in einem Punkt die selbe Tangente besitzen, gleiche Normalkrümmung haben.

8.7 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann gilt für jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf f, die in $\beta(t)$ Normalschnitt ist und für $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\dot{\alpha}(t) = \xi_1 f_{u_1}(\beta(t)) + \xi_2 f_{u_2}(\beta(t))$$

folgendes

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{L_f(\beta(t))\xi_1^2 + 2M_f(\beta(t))\xi_1\xi_2 + N_f(\beta(t))\xi_2^2}{E_f(\beta(t))\xi_1^2 + 2F_f(\beta(t))\xi_1\xi_2 + G_f(\beta(t))\xi_2^2}.$$

Dies heißt insbesondere, daß zwei Normalschnitte, die in einem Punkt die selbe Tangente besitzen, die gleiche Krümmung haben.

Beweis

Es ist $\xi_i = \dot{u}_i(t)$ für $i = 1, 2$. Hieraus folgt mit *8.4* die Behauptung.

8.8 Definition

Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in U$ und

$$X_p = \xi_1 f_{u_1}(p) + \xi_2 f_{u_2}(p) \in T_f(p) \backslash \{0\}.$$

Definiere dann

$$\kappa_f(X_p) := \frac{L_f(\beta(t))\xi_1^2 + 2M_f(\beta(t))\xi_1\xi_2 + N_f(\beta(t))\xi_2^2}{E_f(\beta(t))\xi_1^2 + 2F_f(\beta(t))\xi_1\xi_2 + G_f(\beta(t))\xi_2^2}.$$

8.9 Satz (Meusnier, 1776)

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einer Kurve

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $t \in I$ und $R_t := \frac{1}{\kappa_f(\alpha(t))}$ und $\vartheta_t \in \mathbb{R}$ mit $\cos\vartheta_t = \langle N_\alpha(t), n_f(\beta(t))\rangle$ und $\varrho_t := \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}$

$$\varrho_t = R_t \cos\vartheta_t.$$

8.10 Beispiele

Wir betrachten die Fläche

$$f: (-1;1)\times(-1;1) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \\ v \end{pmatrix}$$

und die drei Kurven

$$\begin{aligned}
\beta_1: (-1;1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto (-t, 0),\\
\beta_2: (-1;1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto (-t, t^2),\\
\beta_3: (-1;1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto (-t, t^4),
\end{aligned}$$

sowie die drei Kurven $\alpha_i := f \circ \beta_i$ $(i = 1,2,3)$ auf f, das heißt

$$\begin{aligned}
\alpha_1: (-1;1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \\ 0 \end{pmatrix},\\
\alpha_2: (-1;1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \\ t^2 \end{pmatrix},\\
\alpha_3: (-1;1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \\ t^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
n_f(0,0) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \times \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \times \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \right\|}\\
&= \frac{\left.\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{\substack{u=0\\v=0}} \times \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{\substack{u=0\\v=0}}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es ist nun

$$\dot\alpha_1(0) = \left.\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot\alpha_1(0) = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}^3} \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\alpha}_2(0) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ 2t \end{array} \right)\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\alpha}_2(0) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}^3} \\ 2 \end{array} \right)\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{\alpha}_3(0) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ 4t^3 \end{array} \right)\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\alpha}_3(0) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}^3} \\ 12t^2 \end{array} \right)\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich nach *Hilfssatz 2.3*

$$\begin{aligned} N_{\alpha_1}(0) &= \frac{\dot{\alpha}_1(0) \times \ddot{\alpha}_1(0)}{\|\dot{\alpha}_1(0) \times \ddot{\alpha}_1(0)\|} \times \frac{\dot{\alpha}_1(0)}{\|\dot{\alpha}_1(0)\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ N_{\alpha_2}(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$N_{\alpha_3}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das heißt die Kurven α_1 und α_3 sind in (0,1,0) Normalschnitte, α_2 hingegen nicht.

9 Die Gaußsche Krümmung

9.1 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann definiert man

$$A_f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2};\ u \longmapsto \begin{pmatrix} E_f(u) & F_f(u) \\ F_f(u) & G_f(u) \end{pmatrix} = \Big(g_{f,ij}(u)\Big)_{i,j=1,2}$$

und

$$B_f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2};\ u \longmapsto \begin{pmatrix} L_f(u) & M_f(u) \\ M_f(u) & N_f(u) \end{pmatrix} = \Big(h_{f,ij}(u)\Big)_{i,j=1,2},$$

sowie

$$a_f: U \longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \det A_f(u) = E_f(u)G_f(u) - F_f(u)^2$$

und

$$b_f: U \longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \det B_f(u) = L_f(u)N_f(u) - M_f(u)^2.$$

Aus

$$E_f(u) = \langle f_{u_1}(u), f_{u_1}(u)\rangle = \|f_{u_1}(u)\|^2 > 0$$

und

$$E_f(u)G_f(u) - F_f(u)^2 = \langle f_{u_1}(u), f_{u_1}(u)\rangle\langle f_{u_2}(u), f_{u_2}(u)\rangle - \langle f_{u_1}(u), f_{u_2}(u)\rangle^2 \overset{\text{CS}}{>} 0,$$

da $f_{u_1}(u)$ und $f_{u_2}(u)$ linear unabhängig sind, folgt, daß $A_f(u)$ positiv definit ist für alle $u \in U$. Im weiteren benötigen wir noch des öfteren A_f^{-1} und definieren deshalb für $u \in U$

$$\Big(\tilde{g}_{f,ij}(u)\Big)_{i,j=1,2} := A_f(u)^{-1}.$$

9.2 Definition

Für $p \in U$ definiert man

$$S_f^1(p) := \Big\{ X \in T_f(p) \;\Big|\; \|X\| = 1 \Big\}.$$

9.3 Bemerkung

Sei $p \in U$, seien $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$,

$$x_1 := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 := \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

sowie

$$X_1 := \xi_1 f_{u_1}(p) + \eta_1 f_{u_2}(p)$$

und

$$X_2 := \xi_2 f_{u_1}(p) + \eta_2 f_{u_2}(p).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \langle X_1, X_2\rangle &= \Big\langle \xi_1 f_{u_1}(p) + \eta_1 f_{u_2}(p), \xi_2 f_{u_1}(p) + \eta_2 f_{u_2}(p)\Big\rangle \\ &= E_f(p)\xi_1\xi_2 + F_f(p)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G_f(p)\eta_1\eta_2 \\ &= \langle A_f(p)x_1, x_2\rangle \\ &= x_1^T A_f(p) x_2. \end{aligned}$$

9.4 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ein Punkt $p \in U$ heißt ein **Nabelpunkt** von f, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$h_{f,ij}(p) = \lambda g_{f,ij}(p) \quad \text{für alle } i,j = 1,2.$$

Das heißt alle Kurven α auf f die durch $f(p)$ laufen haben in $f(p)$ gleiche Normalkrümmung.

9.5 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$ kein Nabelpunkt von f. Dann existieren Vektoren $X_1, X_2 \in S_f^1(p)$ mit

$$\kappa_f(X_1) = \max\Big\{ \kappa_f(X) \;\Big|\; X \in S_f^1(p) \Big\} =: \kappa_1$$

und

$$\kappa_f(X_2) = \min\Big\{ \kappa_f(X) \;\Big|\; X \in S_f^1(p) \Big\} =: \kappa_2.$$

Es ist $X_1 \perp X_2$ und κ_f nimmt das Maximum genau in $\pm X_1$ und das Minimum genau in $\pm X_2$ an.

Beweis

Zu lösen sind die Probleme

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{X \in T_f(p)} & \kappa_f(X) \\ \text{N.B.} & \langle X, X\rangle = 1 \end{array} \overset{X = J_f(p)x}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{ll} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^2} & \frac{\langle B_f(u)x, x\rangle}{\langle A_f(u)x, x\rangle} \\ \text{N.B.} & \langle A_f(u)x, x\rangle = 1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^2} & \langle B_f(u)x, x\rangle \\ \text{N.B.} & \langle A_f(u)x, x\rangle - 1 = 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{X \in T_f(p)} & \kappa_f(X) \\ \text{N.B.} & \langle X, X\rangle = 1 \end{array} \overset{X = J_f(p)x}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} & \frac{\langle B_f(u)x, x\rangle}{\langle A_f(u)x, x\rangle} \\ \text{N.B.} & \langle A_f(u)x, x\rangle = 1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} & \langle B_f(u)x, x\rangle \\ \text{N.B.} & \langle A_f(u)x, x\rangle - 1 = 0 \end{array}.$$

Sei x^* Extremum von $\langle B_f(p)x, x\rangle$. Dann liefert der aus der Analysis bekannte Satz über Extrema unter Nebenbedingungen die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla_x(\langle B_f(p)x, x\rangle)\Big|_{x=x^*} = \lambda \nabla_x(\langle A_f(p)x, x\rangle)\Big|_{x=x^*},$$

das heißt

$$2B_f(p)x^* = 2\lambda A_f(p)x^*,$$

also (da $A_f(u)$ positiv definit ist)

$$A_f(p)^{-1} B_f(p)x^* = \lambda x^*.$$

Anmerkung

Aus $B_f(p)x^* = \lambda A_f(p)x^*$ folgt

$$\langle B_f(p)x^*, x^*\rangle = \langle \lambda A_f(p)x^*, x^*\rangle = \lambda \langle A_f(p)x^*, x^*\rangle = \lambda \langle X, X\rangle = \lambda,$$

das heißt λ ist gerade der Wert der Zielfunktion in x^*.

Aus der Kompaktheit von $\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T A x = 1 \,\}$ und der Stetigkeit von $\langle B_f(p)\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ folgt die Existenz eines Maximums x_1 und eines Minimums x_2. Es ist

$$B_f(p) - \lambda A_f(p) \neq 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}},$$

denn für alle $\mu \in \mathbb{R}$ ist $B_f(p) \neq \mu A_f(p)$, da p nach Voraussetzung kein Nabelpunkt ist. Weiter gilt

$$\det\Big(B_f(p) - \lambda A_f(p)\Big) = 0,$$

da $(B_f(p) - \lambda A_f(p))x_1 = B_f(p)x_1 - \lambda A_f(p)x_1 = 0$ und $x_1 \neq 0$, da $x_1^T A_f(p) x_1 = 1$. Damit erhält man

$$\operatorname{rg}\Big(B_f(p) - \lambda A_f(p)\Big) = 1,$$

das heißt

$$\dim \ker\Big(B_f(p) - \lambda A_f(p)\Big) = 1.$$

Aus $x_1 \in \ker(B_f(p) - \lambda A_f(p))$ folgt für jedes $x \in \mathbb{R}^2$, für das $(B_f(p) - \lambda A_f(p))x = 0$ gilt, $x = cx_1$, mit einem $c \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 = \langle X, X\rangle &= \langle A_f(p)x, x\rangle = \langle A_f(p)cx_1, cx_1\rangle \\ &\underset{X_1 = J_f(p)x_1}{\downarrow} \\ &= c^2\langle A_f(p)x_1, x_1\rangle \overset{}{=} c^2\langle X_1, X_1\rangle = c^2 \end{aligned}$$

und damit $c = \pm 1$. Das heißt das Maximum wird nur in $\pm X_1$ angenommen. Analog erhält man für $X_2 = J_f(p)x_2$, daß das Minimum nur in $\pm X_2$ angenommen wird. Sei $\kappa_1 := \kappa_f(X_1)$ und $\kappa_2 := \kappa_f(X_2)$. Es ist

$$\begin{aligned} \kappa_1\langle A_f(p)x_1, x_2\rangle &= \langle \kappa_1 A_f(p)x_1, x_2\rangle \overset{\text{Anm.}}{=} \langle B_f(p)x_1, x_2\rangle \\ &= \langle x_1, B_f(p)x_2\rangle \overset{\text{Anm.}}{=} \langle x_1, \kappa_2 A_f(p)x_2\rangle \\ &\quad \uparrow_{B \text{ symm.}} \qquad\qquad \downarrow_{A \text{ symm.}} \\ &= \kappa_2\langle x_1, A_f(p)x_2\rangle \overset{}{=} \kappa_2\langle A_f(p)x_1, x_2\rangle. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$(\kappa_1 - \kappa_2)\langle A_f(p)x_1, x_2\rangle = 0.$$

Es ist $\kappa_1 \neq \kappa_2$, denn andernfalls würde für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle A_f(p)x, x\rangle = 1$ gelten

$$\langle B_f(p)x, x\rangle = \kappa_1\langle A_f(p)x, x\rangle$$

und somit

$$\Big\langle \Big(B_f(p) - \kappa_1 A_f(p)\Big)x, x\Big\rangle = 0, \quad \text{also} \quad B_f(p) - \kappa_1 A_f(p) = 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung (p kein Nabelpunkt) steht. Wir erhalten schließlich

$$0 = \langle A_f(p)x_1, x_2\rangle = \langle X_1, X_2\rangle,$$

womit der Satz bewiesen wäre.

9.6 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$ kein Nabelpunkt. Die Zahlen

$$\kappa_{f,1}(p) := \max\Big\{ \kappa_f(X) \;\Big|\; X \in S_f^1(p) \Big\}$$

und

$$\kappa_{f,2}(p) := \min\Big\{ \kappa_f(X) \;\Big|\; X \in S_f^1(p) \Big\}$$

heißen **Hauptkrümmungen** der Fläche f zum Parameterwert p.

Seien

$$X_{f,1}(p) := \arg\max_{X \in S_f^1(p)} \kappa_f(X) \quad \text{und} \quad X_{f,2}(p) := \arg\min_{X \in S_f^1(p)} \kappa_f(X).$$

Dann heißen $\pm X_{f,1}(p)$ und $\pm X_{f,2}(p)$ die **Hauptkrümmungsrichtungen** von f zum Parameterwert p.

Weiter heißt

$$K_f(p) := \kappa_{f,1}(p)\kappa_{f,2}(p)$$

Gaußsche Krümmung und

$$H_f(p) := \tfrac{1}{2}\Big(\kappa_{f,1}(p) + \kappa_{f,2}(p)\Big)$$

mittlere Krümmung von f zum Parameterwert p.

Ist p ein Nabelpunkt, so gilt

$$\kappa_f(X) = \kappa_0 \quad \text{für alle } X \in S_f^1(p)$$

mit einem $\kappa_0 \in \mathbb{R}$. In diesem Fall definiert man

$$K_f(p) := \kappa_0^2$$

und

$$H_f(p) := \kappa_0.$$

9.7 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$ kein Nabelpunkt. Dann sind die Hauptkrümmungen $\kappa_{f,1}(p)$ und $\kappa_{f,2}(p)$ die Eigenwerte von

$$A_f(p)^{-1}B_f(p) = \frac{1}{a_f(p)} \begin{pmatrix} G_f(p) & -F_f(p) \\ -F_f(p) & E_f(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_f(p) & M_f(p) \\ M_f(p) & N_f(p) \end{pmatrix}.$$

Seien x_1 und x_2 die Eigenvektoren zu $\kappa_{f,1}(p)$ und $\kappa_{f,2}(p)$. Dann ist

$$X_{f,1}(p) = J_f(p)x_1 \quad \text{und} \quad X_{f,2}(p) = J_f(p)x_2,$$

das heißt die Eigenvektoren sind die Koordinaten der Hauptkrümmungsrichtungen. Weiter gilt

$$K_f(p) = \frac{b_f(p)}{a_f(p)} = \frac{L_f(p)N_f(p) - M_f(p)^2}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}$$

und

$$H_f(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_f(p)N_f(p) - 2F_f(p)M_f(p) + G_f(p)L_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}.$$

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A_f(p)^{-1}B_f(p)}(\lambda) &= \det\Big(A_f(p)^{-1}B_f(p) - \lambda I_{2\times 2}\Big) \\ &= \det\Big(A_f(p)^{-1}\Big)\det\Big(A_f(p)\Big)\det\Big(A_f(p)^{-1}B_f(p) - \lambda I_{2\times 2}\Big) \\ &= \det\Big(A_f(p)^{-1}\Big)\det\Big(B_f(p) - \lambda A_f(p)\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_f(p)} \det \begin{pmatrix} L_f(p) - \lambda E_f(p) & M_f(p) - \lambda F_f(p) \\ M_f(p) - \lambda F_f(p) & N_f(p) - \lambda G_f(p) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a_f(p)} \Big(\big(L_f(p) - \lambda E_f(p) \big) \big(N_f(p) - \lambda G_f(p) \big) - \big(M_f(p) - \lambda F_f(p) \big)^2 \Big) \\
&= \frac{1}{a_f(p)} \Big(\big(L_f(p) N_f(p) - M_f(p)^2 \big) + \big(E_f(p) G_f(p) - F_f(p)^2 \big) \lambda^2 \\
&\quad - \big(E_f(p) N_f(p) + G_f(p) L_f(p) - 2 F_f(p) M_f(p) \big) \lambda \Big) \\
&= \lambda^2 - \frac{E_f(p) N_f(p) - 2 F_f(p) M_f(p) + G_f(p) L_f(p)}{E_f(p) G_f(p) - F_f(p)^2} \lambda \\
&\quad + \frac{L_f(p) N_f(p) - M_f(p)^2}{E_f(p) G_f(p) - F_f(p)^2}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Wir betrachten die Gleichungen

$$A_f(p)^{-1} B_f(p) x_i = \lambda_i x_i \quad \text{für } i = 1, 2,$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ aus dem Beweis von *Satz 9.5*. Wie in der *Anmerkung* im Beweis *des Satzes 9.5* erhalten wir für $i = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{f,i}(p) &= \kappa_f(X_{f,i}(p)) = \langle B_f(p) x_i, x_i \rangle \\
&= \langle \lambda_i A_f(p) x_i, x_i \rangle = \lambda_i \langle A_f(p) x_i, x_i \rangle \\
&= \lambda_i \langle X_{f,i}(p), X_{f,i}(p) \rangle = \lambda_i,
\end{aligned}
$$

also

$$A_f(p)^{-1} B_f(p) x_i = \kappa_{f,i}(p) x_i.$$

Daher sind $\kappa_{f,1}(p)$ und $\kappa_{f,2}(p)$ die Eigenwerte zu den Eigenvektoren x_1 und x_2 der Matrix $A_f(p)^{-1} B_f(p)$. Somit sind $\kappa_{f,1}(p)$ und $\kappa_{f,2}(p)$ die Nullstellen von $\chi_{A_f(p)^{-1} B_f(p)}$, das heißt

$$
\begin{aligned}
\chi_{A_f(p)^{-1} B_f(p)}(\lambda) &= \big(\lambda - \kappa_{f,1}(p) \big) \big(\lambda - \kappa_{f,2}(p) \big) \\
&= \lambda^2 - \underbrace{\big(\kappa_{f,1}(p) + \kappa_{f,2}(p) \big)}_{= 2H_f(p)} \lambda + \underbrace{\kappa_{f,1}(p) \kappa_{f,2}(p)}_{= K_f(p)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Ein Vergleich mit $(*)$ liefert die Behauptung.

9.8 Satz (Euler)

Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$ kein Nabelpunkt, dann gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $X = \cos\varphi X_{f,1}(p) + \sin\varphi X_{f,2}(p) \in S^1_f(p)$

$$\kappa_f(X) = \kappa_{f,1}(p) \cos^2\varphi + \kappa_{f,2}(p) \sin^2\varphi.$$

Beweis

Seien x, x_1, x_2 die Koordinaten von $X, X_{f,1}(p), X_{f,2}(p)$, das heißt

$$X = J_f(p) x, \quad X_{f,1}(p) = J_f(p) x_1, \quad X_{f,2}(p) = J_f(p) x_2.$$

Es ist

$$x = \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2,$$

denn andernfalls wäre wegen $J_f(p) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\simeq} T_f(p)$

$$J_f(p) x \neq J_f(p) (\cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2),$$

das heißt

$$J_f(p)x \neq \cos\varphi J_f(p)x_1 + \sin\varphi J_f(p)x_2$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\kappa_f(X) &= \langle B_f(p)x, x\rangle = \langle B_f(p)(\cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2), x\rangle \\
&= \cos\varphi\langle B_f(p)x_1, x\rangle + \sin\varphi\langle B_f(p)x_2, x\rangle \\
&= \cos\varphi\langle \kappa_{f,1}(p)A_f(p)x_1, \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2\rangle \\
&\quad + \sin\varphi\langle \kappa_{f,2}(p)A_f(p)x_2, \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2\rangle \\
&= \cos\varphi\kappa_{f,1}(p)\Big(\cos\varphi\langle A_f(p)x_1, x_1\rangle + \sin\varphi\langle A_f(p)x_1, x_2\rangle\Big) \\
&\quad + \sin\varphi\kappa_{f,2}(p)\Big(\cos\varphi\langle A_f(p)x_2, x_1\rangle + \sin\varphi\langle A_f(p)x_2, x_2\rangle\Big) \\
&= \cos\varphi\kappa_{f,1}(p)\Big(\cos\varphi \underbrace{\langle X_{f,1}(p), X_{f,1}(p)\rangle}_{=1} + \sin\varphi \underbrace{\langle X_{f,1}(p), X_{f,2}(p)\rangle}_{=0}\Big) \\
&\quad + \sin\varphi\kappa_{f,2}(p)\Big(\cos\varphi \underbrace{\langle X_{f,2}(p), X_{f,1}(p)\rangle}_{=0} + \sin\varphi \underbrace{\langle X_{f,2}(p), X_{f,2}(p)\rangle}_{=1}\Big) \\
&= \cos^2\varphi\kappa_{f,1}(p) + \sin^2\varphi\kappa_{f,2}(p).
\end{aligned}$$

9.9 Beispiel (Gaußsche Krümmung des Torus)

Sei $0 < a < r$ und

$$f\colon (0;2\pi)\times(0;2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} (r + a\cos u)\cos v \\ (r + a\cos u)\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}.$$

Dann ist für alle $(u,v) \in (0;2\pi)\times(0;2\pi)$

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} -a\sin u\cos v \\ -a\sin u\sin v \\ a\cos u \end{pmatrix}, \quad f_v(u,v) = \begin{pmatrix} -(r + a\cos u)\sin v \\ (r + a\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
n_f(u,v) &= \frac{\begin{pmatrix} -a\sin u\sin v\cdot 0 - a\cos u(r + a\cos u)\cos v \\ -a\cos u(r + a\cos u)\sin v + a\sin u\cos v\cdot 0 \\ -a\sin u\cos v(r + a\cos u)\cos v - a\sin u\sin v(r + a\cos u)\sin v \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -a\cos u\cos v(r + a\cos u) \\ -a\cos u\sin v(r + a\cos u) \\ -a\sin u(r + a\cos u) \end{pmatrix} \right\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -a\cos u\cos v(r + a\cos u) \\ -a\cos u\sin v(r + a\cos u) \\ -a\sin u(r + a\cos u) \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2\cos^2 u\cos^2 v(r + a\cos u)^2 + a^2\cos^2 u\sin^2 v(r + a\cos u)^2 + a^2\sin^2 u(r + a\cos u)^2}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -a\cos u\cos v(r + a\cos u) \\ -a\cos u\sin v(r + a\cos u) \\ -a\sin u(r + a\cos u) \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2(r + a\cos u)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} -a\cos u\cos v(r + a\cos u) \\ -a\cos u\sin v(r + a\cos u) \\ -a\sin u(r + a\cos u) \end{pmatrix}}{a(r + a\cos u)}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$E_f(u,v) = \langle f_u(u,v), f_u(u,v)\rangle = a^2$$

und

$$F_f(u,v) = \langle f_u(u,v), f_v(u,v)\rangle = 0,$$

sowie

$$G_f(u,v) = \langle f_v(u,v), f_v(u,v)\rangle = (r + a\cos u)^2,$$

also

$$a_f(u,v) = E_f(u,v)G_f(u,v) - F_f(u,v)^2 = a^2(r + a\cos u)^2.$$

Weiter ist

$$f_{uu}(u,v) = \begin{pmatrix} -a\cos u\cos v \\ -a\cos u\sin v \\ -a\sin u \end{pmatrix},$$
$$f_{uv}(u,v) = \begin{pmatrix} a\sin u\sin v \\ -a\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$f_{vv}(u,v) = \begin{pmatrix} -(r + a\cos u)\cos v \\ -(r + a\cos u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist

$$\begin{aligned} L_f(u,v) &= \langle n_f(u,v), f_{uu}(u,v)\rangle \\ &= \frac{a^2\cos^2 u\cos^2 v(r + a\cos u) + a^2\cos^2 u\sin^2 v(r + a\cos u) + a^2\sin^2 u(r + a\cos u)}{a(r + a\cos u)} \\ &= a\cos^2 u\cos^2 v + a\cos^2 u\sin^2 v + a\sin^2 u \\ &= a, \\ M_f(u,v) &= \langle n_f(u,v), f_{uv}(u,v)\rangle \\ &= \frac{-a^2\sin u\cos u\sin v\cos v(r + a\cos u) + a^2\sin u\cos u\sin v\cos v(r + a\cos u) + 0}{a(r + a\cos u)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_f(u,v) &= \langle n_f(u,v), f_{vv}(u,v)\rangle \\ &= \frac{a\cos u\cos^2 v(r + a\cos u)^2 + a\cos u\sin^2 v(r + a\cos u)^2 + 0}{a(r + a\cos u)} \\ &= \cos u(r + a\cos u), \end{aligned}$$

also

$$b_f(u,v) = L_f(u,v)N_f(u,v) - M_f(u,v)^2 = a\cos u(r + a\cos u).$$

Also ist

$$K_f(u,v) = \frac{b_f(u,v)}{a_f(u,v)} = \frac{a\cos u(r + a\cos u)}{a^2(r + a\cos u)^2} = \frac{\cos u}{a(r + a\cos u)}.$$

Speziell ergibt sich

$$K_f(\pi,0) = -\frac{1}{a(r-a)}, \quad K_f(0,0) = \frac{1}{a(r+a)} \quad \text{und} \quad K_f(\pi/2,0) = 0.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \det A_f(u,v)\chi_{A_f(u,v)^{-1}B_f(u,v)}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} L_f(u,v) - \lambda E_f(u,v) & M_f(u,v) - \lambda F_f(u,v) \\ M_f(u,v) - \lambda F_f(u,v) & N_f(u,v) - \lambda G_f(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda a^2 & 0 \\ 0 & \cos u(r + a\cos u) - \lambda(r + a\cos u)^2 \end{pmatrix} \\ &= (a - \lambda a^2)\Big(\cos u(r + a\cos u) - \lambda(r + a\cos u)^2\Big). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\kappa_{f,1}(u,v) = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \kappa_{f,2}(u,v) = \frac{\cos u}{r + a\cos u}.$$

9.10 Beispiel

Sei $r > 0$ und

$$f\colon (0;2\pi) \times (0;\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos u \sin v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos v \end{pmatrix}.$$

Dann ist für alle $(u,v) \in (0;2\pi) \times (0;\pi)$

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u \sin v \\ r\cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_v(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ -r \sin v \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} n_f(u,v) &= \frac{\begin{pmatrix} r^2\cos u \sin v(-\sin v) - 0 \\ -r^2 \sin u \sin v \sin v + 0 \\ -r^2 \sin u \sin v \sin u \cos v - r^2 \cos u \sin v \cos u \cos v \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -r^2\cos u \sin^2 v \\ -r^2 \sin u \sin^2 v \\ -r^2 \sin^2 u \sin v \cos v - r^2 \cos^2 u \sin v \cos v \end{pmatrix} \right\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -r^2\cos u \sin^2 v \\ -r^2 \sin u \sin^2 v \\ -r^2 \sin v \cos v \end{pmatrix}}{\sqrt{r^4\cos^2 u \sin^4 v + r^4 \sin^2 u \sin^4 v + r^4 \sin^2 v \cos^2 v}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -r^2\cos u \sin^2 v \\ -r^2 \sin u \sin^2 v \\ -r^2 \sin v \cos v \end{pmatrix}}{\sqrt{r^4 \sin^4 v + r^4 \sin^2 v \cos^2 v}} = \frac{1}{\sin v} \begin{pmatrix} -\cos u \sin^2 v \\ -\sin u \sin^2 v \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform erhält man

$$\begin{aligned} E_f(u,v) &= r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 u \sin^2 v + 0 = r^2 \sin^2 v, \\ F_f(u,v) &= -r^2 \sin u \sin v \cos u \cos v + r^2 \cos u \sin v \sin u \cos v - 0 = 0 \end{aligned}$$

und

$$G_f(u,v) = r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \sin^2 u \cos^2 v + r^2 \sin^2 v = r^2.$$

Es gilt

$$f_{uu}(u,v) = \begin{pmatrix} -r\cos u \sin v \\ -r \sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{uv}(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u \cos v \\ r\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{vv}(u,v) = \begin{pmatrix} -r\cos u \sin v \\ -r \sin u \sin v \\ -r \cos v \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform erhält man

$$\begin{aligned} L_f(u,v) &= r\cos u\sin v\cos u\sin v - r\sin u\sin v\sin u\sin v + 0 \\ &= r\cos^2 u\sin^2 v + r\sin^2 u\sin^2 v = r\sin^2 v, \\ M_f(u,v) &= r\cos u\sin v\sin u\cos v - r\sin u\sin v\cos u\cos v = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_f(u,v) &= r\cos u\sin v\cos u\sin v + r\sin u\sin v\sin u\sin v + r\cos v\cos v \\ &= r\cos^2 u\sin^2 v + r\sin^2 u\sin^2 v + r\cos^2 v = r. \end{aligned}$$

Somit ist jeder Punkt auf der Kugeloberfläche Nabelpunkt, denn es gilt für $i,j = 1,2$

$$h_{f,ij}(u,v) = {}^1\!/_r g_{f,ij}(u,v) \quad \text{für alle } (u,v) \in (0;2\pi)\times(0;\pi).$$

10 Gaußabbildung, Weingarten–Abbildung und zweiter Fundamentaltensor

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Wir haben die Abbildung

$$n_f: U \longrightarrow S^2$$

und erhalten daraus (siehe *Anhang B*)

$$dn_{f,p}: T_U(p) \longrightarrow T_{S^2}(n_f(p));\ v \longmapsto J_{n_f}(p)v.$$

Mit den Eigenschaften dieses Differentials wollen wir uns im folgenden befassen.

10.1 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

a) Dann ist für $i = 1, 2$

$$n_{f,u_i}(p) = \sum_{j=1}^{2} c_{ji} f_{u_j}(p) \quad \text{für alle } p \in U,$$

wobei

$$\left(c_{ji}\right)_{j,i=1,2} := -A_f(p)^{-1} B_f(p).$$

b) Insbesondere folgt daraus

$$dn_{f,p}(T_U(p)) \subset T_f(p).$$

Beweis

Sei $p \in U$.

a) Dann gilt nach Definition

$$\langle n_f(p), n_f(p) \rangle = 1.$$

Differentiation nach u_i $(i = 1, 2)$ liefert

$$\langle n_f(p), n_{f,u_i}(p) \rangle = 0,$$

also

$$\begin{aligned} n_{f,u_i}(p) \in n_f(p)^{\perp} &= \left(\operatorname{span}\{f_{u_1}(p) \times f_{u_2}(p)\}\right)^{\perp} \\ &= \left(\left(\operatorname{span}\{f_{u_1}(p), f_{u_2}(p)\}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = T_f(p). \end{aligned}$$

Damit können wir für $i = 1, 2$

$$n_{f,u_i}(p) = \sum_{j=1}^{2} c_{ji} f_{u_j}(p)$$

ansetzen. Wir berechnen nun die c_{ji}. Für $k = 1, 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} -h_{f,ik}(p) &= \langle n_{f,u_i}(p), f_{u_k}(p) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{2} c_{ji} \langle f_{u_j}(p), f_{u_k}(p) \rangle \qquad (*) \\ &= \sum_{j=1}^{2} c_{ji} g_{f,jk}(p). \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$-\sum_{k=1}^{2}\widetilde{g}_{f,lk}(p)h_{f,ki}(p) = -\sum_{k=1}^{2}\widetilde{g}_{f,lk}(p)h_{f,ik}(p) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{2}\Big(\widetilde{g}_{f,lk}(p)\sum_{j=1}^{2}c_{ji}g_{f,jk}(p)\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{2}c_{ji}\sum_{k=1}^{2}\widetilde{g}_{f,lk}(p)g_{f,kj}(p) = \sum_{j=1}^{2}c_{ji}\delta_{lj} = c_{li}.$$

b) Sei $v = (v_1, v_2) \in T_U(p)$. Dann ist

$$\begin{aligned} dn_{f,p}(v) &= J_{n_f}(p)v = \Big(n_{f,u_1}(p) \;\Big|\; n_{f,u_2}(p)\Big)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1 n_{f,u_1}(p) + v_2 n_{f,u_2}(p) \\ &\overset{\text{a)}}{=} v_1\sum_{j=1}^{2}c_{j1}f_{u_j}(p) + v_2\sum_{j=1}^{2}c_{j2}f_{u_j}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{2}v_i\sum_{j=1}^{2}c_{ji}f_{u_j}(p) \\ &= \sum_{j=1}^{2}\Big(\sum_{i=1}^{2}v_i c_{ji}\Big)f_{u_j}(p) \in T_f(p). \end{aligned}$$

10.2 Formeln von Weingarten

Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Dann gilt

$$n_{f,u_1}(p) = \frac{M_f(p)F_f(p) - L_f(p)G_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_1}(p) + \frac{L_f(p)F_f(p) - M_f(p)E_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_2}(p)$$

und

$$n_{f,u_2}(p) = \frac{N_f(p)F_f(p) - M_f(p)G_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_1}(p) + \frac{M_f(p)F_f(p) - N_f(p)E_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_2}(p).$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} n_{f,u_1}(p) &= c_{11}f_{u_1}(p) + c_{21}f_{u_2}(p) \\ &= -\frac{1}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}\Big(L_f(p)G_f(p) - M_f(p)F_f(p)\Big)f_{u_1}(p) \\ &\quad - \frac{1}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}\Big(-L_f(p)F_f(p) + M_f(p)E_f(p)\Big)f_{u_2}(p) \\ &= \frac{M_f(p)F_f(p) - L_f(p)G_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_1}(p) + \frac{L_f(p)F_f(p) - M_f(p)E_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_2}(p) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} n_{f,u_2}(p) &= c_{12}f_{u_1}(p) + c_{22}f_{u_2}(p) \\ &= -\frac{1}{a_f(p)}\Big(M_f(p)G_f(p) - N_f(p)F_f(p)\Big)f_{u_1}(p) \\ &\quad - \frac{1}{a_f(p)}\Big(-M_f(p)F_f(p) + N_f(p)E_f(p)\Big)f_{u_2}(p) \\ &= \frac{N_f(p)F_f(p) - M_f(p)G_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_1}(p) + \frac{M_f(p)F_f(p) - N_f(p)E_f(p)}{E_f(p)G_f(p) - F_f(p)^2}f_{u_2}(p). \end{aligned}$$

Weingartenabbildung

10.3 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Die lineare Abbildung

$$W_{f,p}: T_f(p) \longrightarrow T_f(p);\ X \longmapsto -\Big(dn_{f,p} \circ (df_p)^{-1}\Big)(X)$$

heißt die **Weingartenabbildung** der Fläche f.

10.4 Anmerkung

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$df_p(x) = x_1 f_{u_1}(p) + x_2 f_{u_2}(p) \in T_f(p).$$

Für

$$X = x_1 f_{u_1}(p) + x_2 f_{u_2}(p) = J_f(p)x$$

ist daher

$$W_{f,p}(X) = -dn_{f,p}\Big((df_p)^{-1}(X)\Big) = -dn_{f,p}(x) = -x_1 n_{f,u_1}(p) - x_2 n_{f,u_2}(p).$$

10.5 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{f,p}$ der Weingartenabbildung bezüglich der Basis $\mathcal{B}_f(p)$ ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E_f & F_f \\ F_f & G_f \end{pmatrix}^{-1}(p) \begin{pmatrix} L_f & M_f \\ M_f & N_f \end{pmatrix}(p) &= \frac{1}{a_f(p)} \begin{pmatrix} G_f & -F_f \\ -F_f & E_f \end{pmatrix}(p) \begin{pmatrix} L_f & M_f \\ M_f & N_f \end{pmatrix}(p) \\ &= \frac{1}{a_f(p)} \begin{pmatrix} G_f L_f - F_f M_f & G_f M_f - F_f N_f \\ E_f M_f - F_f L_f & E_f N_f - F_f M_f \end{pmatrix}(p).\end{aligned}$$

Für $X = J_f(p)x$ liefert $\mathcal{M}_{f,p}x$ die Koordinaten von $W_{f,p}(X)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_f(p)$.

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} W_{f,p}(f_{u_1}(p)) &= -dn_{f,p}\Big(df_p^{-1}(f_{u_1}(p))\Big) = -dn_{f,p}\left(\tbinom{1}{0}\right) \\ &= -n_{f,u_1}(p) = -c_{11} f_{u_1}(p) - c_{21} f_{u_2}(p), \\ W_{f,p}(f_{u_2}(p)) &= -dn_{f,p}\Big(df_p^{-1}(f_{u_2}(p))\Big) = -dn_{f,p}\left(\tbinom{0}{1}\right) \\ &= -n_{f,u_2}(p) = -c_{12} f_{u_1}(p) - c_{22} f_{u_2}(p), \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{M}_{f,p} = \begin{pmatrix} -c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & -c_{22} \end{pmatrix} = A_f(p)^{-1} B_f(p).$$

10.6 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Die Eigenwerte der Weingartenabbildung $W_{f,p}$ sind genau die Hauptkrümmungen $\kappa_{f,1}(p)$ und $\kappa_{f,2}(p)$ der Fläche f in p. Ein $X \in S_f^1(p)$ ist genau dann Hauptkrümmungsrichtung, wenn X Eigenvektor von $W_{f,p}$ ist. Daher gilt

$$K_f(p) = \det W_{f,p} \quad \text{und} \quad H_f(p) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{spur}\, W_{f,p}.$$

Beweis

Die Behauptung folgt direkt aus *Satz 9.7* und den bekannten Ergebnissen der Eigenwerttheorie.

Der zweite Fundamentaltensor einer Fläche

10.7 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Dann heißt die Bilinearform

$$\mathbf{II}_f(p): T_f(p) \times T_f(p) \longrightarrow \mathbb{R};\ (X,Y) \longmapsto \langle W_{f,p}(X), Y\rangle$$

der **zweite Fundamentaltensor** der Fläche f zum Parameterwert p beziehungsweise im Punkt $f(p)$.

10.8 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Die Komponenten des Tensors $\mathbf{II}_f(p)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_f(p)$ von $T_f(p)$ sind die $h_{f,ij}(p)$, $i,j = 1,2$, das heißt

$$\mathbf{II}_f(p)(f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)) = h_{f,ij}(p).$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{II}_f(p)}_{\mathcal{B}_f(p),ij} &= \mathbf{II}_f(p)(f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)) = \langle W_{f,p}(f_{u_i}(p)), f_{u_j}(p)\rangle \\ &= \langle -n_{f,u_i}(p), f_{u_j}(p)\rangle = h_{f,ij}(p). \end{aligned}$$

10.9 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Die Weingartenabbildung $W_{f,p}$ ist selbstadjungiert, das heißt

$$\langle W_{f,p}(X), Y\rangle = \langle X, W_{f,p}(Y)\rangle \quad \text{für alle } X, Y \in T_f(p),$$

somit ist insbesondere $\mathbf{II}_f(p)$ ein symmetrischer Tensor also

$$\mathbf{II}_f(p)(X,Y) = \mathbf{II}_f(p)(Y,X) \quad \text{für alle } X, Y \in T_f(p).$$

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_f(p)(f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)) &= \langle W_{f,p}(f_{u_i}(p)), f_{u_j}(p)\rangle = \langle -n_{f,u_i}(p), f_{u_j}(p)\rangle \\ &\overset{8.2}{=} -\langle f_{u_i}(p), n_{f,u_j}(p)\rangle = \langle f_{u_i}(p), W_{f,p}(f_{u_j}(p))\rangle \\ &= \mathbf{II}_f(p)(f_{u_j}(p), f_{u_i}(p)). \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes gilt somit auf der Basis, also für alle $X, Y \in T_f(p)$.

10.10 Anmerkung

a) Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in U$ und $X = x_1 f_{u_1}(p) + x_2 f_{u_2}(p) \in T_f(p)\backslash\{0\}$. Dann ist

$$\kappa_f(X) = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} h_{f,ij}(p) x_i x_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{f,ij}(p) x_i x_j} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} x_i x_j \mathbf{II}_f(p)\left(f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)\right)}{\sum\limits_{i,j=1}^{2} x_i x_j \mathbf{I}_f(p)\left(f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)\right)}$$

$$= \frac{\mathbf{II}_f(p)\left(\sum\limits_{i=1}^{2} x_i f_{u_i}(p), \sum\limits_{i=1}^{2} x_i f_{u_i}(p)\right)}{\mathbf{I}_f(p)\left(\sum\limits_{i=1}^{2} x_i f_{u_i}(p), \sum\limits_{i=1}^{2} x_i f_{u_i}(p)\right)} = \frac{\mathbf{II}_f(p)(X,X)}{\mathbf{I}_f(p)(X,X)}.$$

b) Mittels df_p lassen sich die beiden Fundamentaltensoren auf $\mathbb{R}^2$ zurücktransformieren, das heißt man definiert

$$\widetilde{\mathbf{I}}_f(p)\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ (x,y) \longmapsto \mathbf{I}_f(p)\,(df_p(x), df_p(y)) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{f,ij}(p) x_i y_j$$

und

$$\widetilde{\mathbf{II}}_f(p)\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ (x,y) \longmapsto \mathbf{II}_f(p)\,(df_p(x), df_p(y)) = \sum_{i,j=1}^{2} h_{f,ij}(p) x_i y_j.$$

11 Isometrische Abbildungen

11.1 Definition

Seien $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen. Ein Diffeomorphismus

$$h: f(U) \longrightarrow \widetilde{f}(U)$$

mit $\widetilde{f} = h \circ f$ heißt **Isometrie** zwischen f und $\widetilde{f}$, falls

$$E_f = E_{\widetilde{f}}, \quad F_f = F_{\widetilde{f}} \quad \text{und} \quad G_f = G_{\widetilde{f}}$$

ist.

11.2 Satz

Seien $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen. Eine Abbildung

$$h: f(U) \longrightarrow \widetilde{f}(U)$$

ist genau dann eine Isometrie, wenn für jede Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf f gilt

$$L_\alpha = L_{h \circ \alpha}.$$

Beweis

"$\Longrightarrow$" Sei $h: f(U) \longrightarrow \widetilde{f}(U)$ eine Isometrie und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

$h \circ \alpha$ ist eine Kurve auf $\widetilde{f}$, es ist

$$h \circ \alpha = h \circ f \circ \beta = \widetilde{f} \circ \beta.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} L_{h\circ\alpha} &= \int_a^b \sqrt{E_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E_f(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_f(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}\, dt \\ &= L_\alpha. \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$" Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist für alle $x \in I$

$$L_{h\circ\alpha|[a;x]} = L_{\alpha|[a;x]}$$

und somit

$$\int_a^x \sqrt{E_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_a^x \sqrt{E_f(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_f(\beta(t))\dot{u}_2^2(t)}\, dt.$$

Aus der Stetigkeit des Integranden folgt

$$\begin{aligned} E_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_{\tilde{f}}(\beta(t))\dot{u}_2^2(t) = \\ = E_f(\beta(t))\dot{u}_1^2(t) + 2F_f(\beta(t))\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + G_f(\beta(t))\dot{u}_2^2(t). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Sei $p = (p_1, p_2) \in U$ beliebig aber fest und $\varepsilon > 0$ so, daß $\overline{B_\varepsilon^\infty(p)} \subset U$ (U offen!). (B_ε^∞ sei die ε-Kugel in der ∞-Norm) Wir definieren nun

$$\beta_1 \colon I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} p_1 + \frac{2\varepsilon}{b-a}(t - \frac{a+b}{2}) \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

(β_1 ist wohldefiniert, da $\beta_1(I) = [p_1 - \varepsilon; p_1 + \varepsilon] \times \{p_2\} \subset \overline{B_\varepsilon^\infty(p)} \subset U$.) Aus $(*)$ erhalten wir

$$E_{\tilde{f}}(\beta_1(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} = E_f(\beta_1(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2}$$

und somit

$$E_{\tilde{f}}(p) = E_f(p). \tag{$**$}$$

Wir zeigen nun $G_{\tilde{f}}(p) = G_f(p)$. Sei dazu

$$\beta_2 \colon I \longrightarrow I\!R^3;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 + \frac{2\varepsilon}{b-a}(t - \frac{a+b}{2}) \end{pmatrix}$$

und α_2 die Kurve $f \circ \beta_2$. (Auch hier ist $\beta_2(I) \subset U$.) Hier liefert $(*)$

$$G_{\tilde{f}}(\beta_2(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} = G_f(\beta_2(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2},$$

also

$$G_{\tilde{f}}(p) = G_f(p). \tag{$***$}$$

Schließlich ist noch $F_{\tilde{f}}(p) = F_f(p)$ zu zeigen. Sei

$$\beta_3 \colon I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} p_1 + \frac{2\varepsilon}{b-a}(t - \frac{a+b}{2}) \\ p_2 + \frac{2\varepsilon}{b-a}(t - \frac{a+b}{2}) \end{pmatrix}$$

und α_3 die Kurve $f \circ \beta_3$. Hier erhalten wir mit $(*)$

$$\begin{aligned} E_{\tilde{f}}(\beta_3(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} + 2F_{\tilde{f}}(\beta_3(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} + G_{\tilde{f}}(\beta_3(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} = \\ = E_f(\beta_3(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} + 2F_f(\beta_3(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2} + G_f(\beta_3(\tfrac{a+b}{2}))\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

Mit $(**)$ und $(***)$ erhalten wir

$$F_{\tilde{f}}(p) = F_f(p).$$

Da $p \in U$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung des Satzes.

11.3 Beispiel (Zylinder)

Sei $r > 0$ und $U := (0; 2\pi r) \times \mathbb{R}$. Sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos {}^{u}\!/_{r} \\ r\sin {}^{u}\!/_{r} \\ v \end{pmatrix},$$

dann ist für alle $(u,v) \in U$

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin {}^{u}\!/_{r} \\ \cos {}^{u}\!/_{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man wegen $\|f_u(u,v)\| = \|f_v(u,v)\| = 1$ und $\langle f_u(u,v), f_v(u,v)\rangle = 0$

$$n_f(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin {}^{u}\!/_{r} \\ \cos {}^{u}\!/_{r} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos {}^{u}\!/_{r} \\ \sin {}^{u}\!/_{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$n_{f,u}(u,v) = \begin{pmatrix} -{}^{1}\!/_{r} \sin {}^{u}\!/_{r} \\ {}^{1}\!/_{r} \cos {}^{u}\!/_{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n_{f,v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform berechnen.

$$\begin{aligned} E_f(u,v) &= \langle f_u(u,v), f_u(u,v)\rangle = 1, \\ F_f(u,v) &= \langle f_u(u,v), f_v(u,v)\rangle = 0, \\ G_f(u,v) &= \langle f_v(u,v), f_v(u,v)\rangle = 1, \\ L_f(u,v) &= -\langle n_{f,u}(u,v), f_u(u,v)\rangle = {}^{1}\!/_{r}, \\ M_f(u,v) &= -\langle n_{f,u}(u,v), f_v(u,v)\rangle = 0, \\ N_f(u,v) &= -\langle n_{f,v}(u,v), f_v(u,v)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Mittels *9.7* erhalten wir daraus die Gaußkrümmung

$$K_f(u,v) = \frac{L_f(u,v)N_f(u,v) - M_f(u,v)^2}{E_f(u,v)G_f(u,v) - F_f(u,v)^2} = 0.$$

Die Hauptkrümmungen sind die Nullstellen von $\det\Big(B_f(u,v) - \lambda A_f(u,v)\Big)$, das heißt

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} L_f(u,v) - \lambda E_f(u,v) & M_f(u,v) - \lambda F_f(u,v) \\ M_f(u,v) - \lambda F_f(u,v) & N_f(u,v) - \lambda G_f(u,v) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} {}^{1}\!/_{r} - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - {}^{1}\!/_{r}) \end{aligned}$$

und man erhält

$$\kappa_{f,1}(u,v) = {}^{1}\!/_{r} \quad \text{und} \quad \kappa_{f,2}(u,v) = 0 \quad \text{für alle } (u,v) \in U.$$

Die Koordinaten der Hauptkrümmungsrichtungen erhält man nun durch Lösen von

$$\Big(B_f(u,v) - \kappa_{f,i}(u,v)A_f(u,v)\Big)x_i = 0 \quad \text{für } i = 1,2,$$

das heißt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/r \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$X_{f,1}(u,v) = f_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u/r \\ \cos u/r \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_{f,2}(u,v) = f_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun eine Isometrie zwischen f und der Ebene konstruieren. Sei dazu

$$\widetilde{f}\colon (0;2\pi r) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

und

$$h\colon \widetilde{f}(U) \xrightarrow{\sim} f(U);\ (u,w,v) \longmapsto f(u,v).$$

Dann ist $f = h \circ \widetilde{f}$ und h ist eine Isometrie, denn

$$E_{\tilde{f}}(u,v) = 1, \quad F_{\tilde{f}}(u,v) = 0 \quad \text{und} \quad G_{\tilde{f}}(u,v) = 1 \quad \text{für alle } (u,v) \in U.$$

Wegen $f_{uu} \equiv f_{uv} \equiv f_{vv} \equiv 0$ ist

$$L_{\tilde{f}}(u,v) = M_{\tilde{f}}(u,v) = N_{\tilde{f}}(u,v) = 0 \quad \text{für alle } (u,v) \in U.$$

Dies zeigt, daß die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform trotz Isometrie nicht übereinstimmen müssen. Wir erhalten

$$\kappa_{\tilde{f},1} \equiv \kappa_{\tilde{f},2} \equiv 0$$

und somit

$$K_f \equiv K_{\tilde{f}} \equiv 0.$$

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß die letzte Identität für alle isometrischen Flächen gilt.

12 Das theorema egregium

12.1 Theorema egregium (C.F. Gauß, 1828)

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die Gaußsche Krümmung K_f läßt sich ausdrücken durch die Koeffizienten E_f, F_f, G_f der ersten Fundamentalform und deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Es ist

$$K_f = \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix} E_f & F_f & F_{f,u_2} - \frac{1}{2}G_{f,u_1} \\ F_f & G_f & \frac{1}{2}G_{f,u_2} \\ \frac{1}{2}E_{f,u_1} & F_{f,u_1} - \frac{1}{2}E_{f,u_2} & F_{f,u_1u_2} - \frac{1}{2}E_{f,u_2u_2} - \frac{1}{2}G_{f,u_1u_1} \end{vmatrix} - \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix} E_f & F_f & \frac{1}{2}E_{f,u_2} \\ F_f & G_f & \frac{1}{2}G_{f,u_1} \\ \frac{1}{2}E_{f,u_2} & \frac{1}{2}G_{f,u_1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Beweis

Bemerkung 2.2 zeigt

$$\|f_{u_1}(p) \times f_{u_2}(p)\|^2 = \det \begin{pmatrix} E_f(p) & F_f(p) \\ F_f(p) & G_f(p) \end{pmatrix} = a_f(p)$$

und damit ist

$$n_f(p) = \frac{f_{u_1}(p) \times f_{u_2}(p)}{\sqrt{a_f(p)}}.$$

Weiter folgt aus *2.2* und *8.2*, daß gilt

$$\begin{aligned} L_f(p) &= \langle n_f(p), f_{u_1u_1}(p)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_f(p)}}\langle f_{u_1}(p) \times f_{u_2}(p), f_{u_1u_1}(p)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_f(p)}} \det\Big(f_{u_1}(p) \;\Big|\; f_{u_2}(p) \;\Big|\; f_{u_1u_1}(p)\Big), \\ M_f(p) &= \frac{1}{\sqrt{a_f(p)}} \det\Big(f_{u_1}(p) \;\Big|\; f_{u_2}(p) \;\Big|\; f_{u_1u_2}(p)\Big) \end{aligned}$$

und

$$N_f(p) = \frac{1}{\sqrt{a_f(p)}} \det\Big(f_{u_1}(p) \;\Big|\; f_{u_2}(p) \;\Big|\; f_{u_2u_2}(p)\Big).$$

Außerdem ist für $i = 1, 2$

$$\frac{1}{2}E_{f,u_i}(p) = \langle f_{u_1u_i}(p), f_{u_1}(p)\rangle \qquad \boxed{1}$$

und

$$\frac{1}{2}G_{f,u_i}(p) = \langle f_{u_2u_i}(p), f_{u_2}(p)\rangle. \qquad \boxed{2}$$

Mit $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ erhält man

$$\begin{aligned} F_{f,u_1}(p) &= \langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_2}(p)\rangle + \langle f_{u_1}(p), f_{u_2u_1}(p)\rangle \\ &= \langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_2}(p)\rangle + \frac{1}{2}E_{f,u_2}(p) \end{aligned} \qquad \boxed{3}$$

und

$$\begin{aligned} F_{f,u_2}(p) &= \langle f_{u_1u_2}(p), f_{u_2}(p)\rangle + \langle f_{u_1}(p), f_{u_2u_2}(p)\rangle \\ &= \frac{1}{2}G_{f,u_1}(p) + \langle f_{u_1}(p), f_{u_2u_2}(p)\rangle. \end{aligned} \qquad \boxed{4}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial u_2}(F_{f,u_1}(u) - \tfrac{1}{2}E_{f,u_2}(u))\Big|_{u=p} &= \tfrac{\partial}{\partial u_2}\langle f_{u_1u_1}(u), f_{u_2}(u)\rangle\Big|_{u=p}\\ &= \langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_2u_2}(p)\rangle + \langle f_{u_1u_1u_2}(p), f_{u_2}(p)\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}G_{f,u_1u_1}(p) &= \tfrac{\partial}{\partial u_1}\langle f_{u_2}(u), f_{u_1u_2}(u)\rangle\Big|_{u=p}\\ &= \langle f_{u_1u_2}(p), f_{u_1u_2}(p)\rangle + \langle f_{u_2}(p), f_{u_1u_2u_1}(p)\rangle\end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}F_{f,u_1u_2}(p) - \tfrac{1}{2}E_{f,u_2u_2}(p) - \tfrac{1}{2}G_{f,u_1u_1}(p) &=\\ &= \langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_2u_2}(p)\rangle - \langle f_{u_1u_2}(p), f_{u_1u_2}(p)\rangle.\end{aligned}$$

5

Nach diesen Vorbereitungen können wir $K_f(p)$ berechnen.

$$K_f = \frac{L_fN_f - M_f^2}{a_f}$$

$$= \frac{1}{a_f}\left(\frac{1}{\sqrt{a_f}}\det\left(f_{u_1}\;\middle|\; f_{u_2}\;\middle|\; f_{u_1u_1}\right)\frac{1}{\sqrt{a_f}}\det\left(f_{u_1}\;\middle|\; f_{u_2}\;\middle|\; f_{u_2u_2}\right)\right)$$

$$- \frac{1}{a_f}\left(\frac{1}{\sqrt{a_f}}\det\left(f_{u_1}\;\middle|\; f_{u_2}\;\middle|\; f_{u_1u_2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_f}}\det\left(f_{u_1}\;\middle|\; f_{u_2}\;\middle|\; f_{u_1u_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a_f^2}\det\left(\begin{pmatrix}f_{u_1}^T\\ f_{u_2}^T\\ f_{u_1u_1}^T\end{pmatrix}\left(f_{u_1}\;\middle|\; f_{u_2}\;\middle|\; f_{u_2u_2}\right)\right) - \frac{1}{a_f^2}\det\left(\begin{pmatrix}f_{u_1}^T\\ f_{u_2}^T\\ f_{u_1u_2}^T\end{pmatrix}\left(f_{u_1}\;\middle|\; f_{u_2}\;\middle|\; f_{u_1u_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix}\langle f_{u_1},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_2u_2}\rangle\\ \langle f_{u_2},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_2u_2}\rangle\\ \langle f_{u_1u_1},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1u_1},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1u_1},f_{u_2u_2}\rangle\end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix}\langle f_{u_1},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_1u_2}\rangle\\ \langle f_{u_2},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_1u_2}\rangle\\ \langle f_{u_1u_2},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1u_2},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1u_2},f_{u_1u_2}\rangle\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix}\langle f_{u_1},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_2u_2}\rangle\\ \langle f_{u_2},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_2u_2}\rangle\\ \langle f_{u_1u_1},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1u_1},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1u_1},f_{u_2u_2}\rangle - \langle f_{u_1u_2},f_{u_1u_2}\rangle\end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix}\langle f_{u_1},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_1},f_{u_1u_2}\rangle\\ \langle f_{u_2},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_2}\rangle & \langle f_{u_2},f_{u_1u_2}\rangle\\ \langle f_{u_1u_2},f_{u_1}\rangle & \langle f_{u_1u_2},f_{u_2}\rangle & 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix}E_f & F_f & F_{f,u_2} - \tfrac{1}{2}G_{f,u_1}\;\boxed{4}\\ F_f & G_f & \tfrac{1}{2}G_{f,u_2}\;\boxed{2}\\ \tfrac{1}{2}E_{f,u_1}\;\boxed{1} & F_{f,u_1} - \tfrac{1}{2}E_{f,u_2}\;\boxed{3} & F_{f,u_1u_2} - \tfrac{1}{2}E_{f,u_2u_2} - \tfrac{1}{2}G_{f,u_1u_1}\;\boxed{5}\end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{a_f^2}\begin{vmatrix}E_f & F_f & \tfrac{1}{2}E_{f,u_2}\;\boxed{1}\\ F_f & G_f & \tfrac{1}{2}G_{f,u_1}\;\boxed{2}\\ \tfrac{1}{2}E_{f,u_2}\;\boxed{1} & \tfrac{1}{2}G_{f,u_1}\;\boxed{2} & 0\end{vmatrix}.$$

Dies ist die Behauptung des Satzes.

12.2 Folgerung

Seien $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Flächen und $h: f(U) \longrightarrow \tilde{f}(U)$ eine Isometrie zwischen f und $\tilde{f}$, also $\tilde{f} = h \circ f$. Dann gilt

$$K_f = K_{\tilde{f}},$$

denn nach *12.1* hängt die Krümmung nur von E_f, F_f und G_f ab und E_f, F_f und G_f ändern sich bei Isometrie nicht.

12.3 Folgerung

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und es gebe eine Isometrie h von f auf ein Ebenenstück. Dann ist

$$K_f \equiv 0.$$

Dies bedeutet anschaulich, daß es keine längentreuen Landkarten gibt.

Für *Kapitel 18* benötigen wir folgendes

12.4 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Ist $E_f(p) = 1$ und $F_f(p) = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} K_f(p) &= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{G_f(p)}} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{G_{f,u_1}(u)}{\sqrt{G_f(u)}} \right) \Bigg|_{u=p} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{G_f(p)}} \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} \sqrt{G_f(u)} \Big|_{u=p}. \end{aligned}$$

Beweis

Es ist

$$-\frac{1}{2 \cdot \sqrt{G_f(p)}} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{G_{f,u_1}(u)}{\sqrt{G_f(u)}} \right) \Bigg|_{u=p} =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{G_f(p)}} \frac{\sqrt{G_f(p)} G_{f,u_1,u_1}(p) - G_{f,u_1}(p) \frac{1}{2 \cdot \sqrt{G_f(p)}} G_{f,u_1}(p)}{G_f(p)}$$

$$= -\frac{G_{f,u_1u_1}(p) - \frac{1}{2G_f(p)} G_{f,u_1}(p)^2}{2G_f(p)}$$

$$= -\frac{G_{f,u_1u_1}(p)}{2G_f(p)} + \frac{G_{f,u_1}(p)^2}{4G_f(p)^2} \qquad (*)$$

$$= -\frac{\dfrac{2 \cdot \sqrt{G_f(p)} G_{f,u_1u_1}(p) - G_{f,u_1}(p) \frac{1}{\sqrt{G_f(p)}} G_{f,u_1}(p)}{4G_f(p)}}{\sqrt{G_f(p)}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{G_f(u)}} G_{f,u_1}(u) \right) \Big|_{u=p}}{\sqrt{G_f(p)}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\sqrt{G_f(u)}\right)\Big|_{u=p}}{\sqrt{G_f(p)}}$$

und

$$\begin{aligned}
K_f(p) &= \frac{1}{a_f(p)^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}G_{f,u_1}(p) \\ 0 & G_f(p) & \frac{1}{2}G_{f,u_2}(p) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}G_{f,u_1u_1}(p) \end{vmatrix} - \frac{1}{a_f(p)^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}G_{f,u_1}(p) \\ 0 & \frac{1}{2}G_{f,u_1}(p) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{G_f(p)^2}\begin{vmatrix} G_f(p) & \frac{1}{2}G_{f,u_2}(p) \\ 0 & -\frac{1}{2}G_{f,u_1u_1}(p) \end{vmatrix} - \frac{1}{G_f(p)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G_{f,u_1}(p) \\ \frac{1}{2}G_{f,u_1}(p) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{G_f(p)^2}\Big(-\frac{1}{2}G_f(p)G_{f,u_1u_1}(p) + \frac{1}{4}G_{f,u_1}(p)^2\Big) \\
&= -\frac{G_{f,u_1u_1}(p)}{2G_f(p)} + \frac{G_{f,u_1}(p)^2}{4G_f(p)^2} = (*).
\end{aligned}$$

13 Die Ableitungsgleichungen

In *Kapitel 3* hatten wir für eine Kurve α die zugehörigen "Kurven" $\dot{T}_\alpha$, $\dot{N}_\alpha$ und $\dot{B}_\alpha$ als Linearkombination der T_α, N_α, B_α dargestellt. Hier sollen nun bei Flächen die $f_{u_1u_1}$, $f_{u_1u_2}$, $f_{u_2u_2}$, n_{f,u_1} und n_{f,u_2} als Linearkombination der f_{u_1}, f_{u_2} und n_f dargestellt werden.

13.1 Definition

Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die Funktionen

$$\Gamma_{f,kij}\colon U \longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \tfrac{1}{2}\Big(g_{f,ij,u_k}(u) + g_{f,jk,u_i}(u) - g_{f,ki,u_j}(u)\Big) \quad \text{für } i,j,k = 1,2$$

heißen **Christoffelsymbole erster Art**. Weiterhin heißen

$$\Gamma^m_{f,ik}\colon U \longrightarrow \mathbb{R};\ u \longmapsto \sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,mj}(u)\Gamma_{f,kij}(u) \quad \text{für } i,k,m = 1,2$$

Christoffelsymbole zweiter Art.

13.2 Hilfssatz

Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, dann gilt

$$\Gamma^m_{f,12} = \Gamma^m_{f,21} \quad \text{für } m = 1,2.$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}\Gamma^m_{f,12} &= \sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,mj}\Gamma_{f,21j} = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,mj}(g_{f,1j,u_2} + g_{f,j2,u_1} - g_{f,21,u_j}) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,mj}(g_{f,2j,u_1} + g_{f,j1,u_2} - g_{f,12,u_j}) = \sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,mj}\Gamma_{f,12,j} = \Gamma^m_{f,21}.\end{aligned}$$

13.3 Ableitungsgleichungen

Für eine Fläche $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$f_{u_iu_k} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{f,ik} f_{u_m} + h_{f,ik} n_f \quad \text{für } i,k = 1,2 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Gleichungen}\\ \text{von Gauß}\end{array}\right)$$

und

$$n_{f,u_i} = -\sum_{k,l=1}^{2} \tilde{g}_{f,kl} h_{f,li} f_{u_k} \quad \text{für } i = 1,2. \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Gleichungen}\\ \text{von Weingarten}\end{array}\right)$$

Beweis

Für alle $p \in U$ bilden $f_{u_1}(p)$, $f_{u_2}(p)$ und $n_f(p)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir können deshalb für $i,k = 1,2$ ansetzen

$$f_{u_iu_k} = \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} f_{u_m} + c_{ik} n_f, \tag{1}$$

mit Funktionen $c_{ik1}, c_{ik2}, c_{ik}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Im ersten Schritt zeigen wir nun

$$c_{ik} = h_{f,ik}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} h_{f,ik} &\overset{8.2}{=} \langle n_f, f_{u_i u_k} \rangle \overset{(1)}{=} \Big\langle n_f, \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} f_{u_m} + c_{ik} n_f \Big\rangle = \\ &= \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} \underbrace{\langle n_f, f_{u_m} \rangle}_{=0} + c_{ik} \underbrace{\langle n_f, n_f \rangle}_{=1} = c_{ik} \end{aligned} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt damit

$$\sum_{m=1}^{2} c_{ikm} f_{u_m} = f_{u_i u_k} - h_{f,ik} n_f = f_{u_k u_i} - h_{f,ki} n_f = \sum_{m=1}^{2} c_{kim} f_{u_m}$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit von f_{u_1} und f_{u_2} gilt somit

$$c_{ikm} = c_{kim} \quad \text{für } m = 1, 2. \tag{3}$$

Für $j = 1, 2$ ist

$$\begin{aligned} \langle f_{u_j}, f_{u_i u_k} \rangle &\overset{(1),(2)}{=} \Big\langle f_{u_j}, \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} f_{u_m} + h_{f,ik} n_f \Big\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} \langle f_{u_j}, f_{u_m} \rangle + h_{f,ik} \underbrace{\langle f_{u_j}, n_f \rangle}_{=0} \\ &= \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} g_{f,jm}. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} g_{f,ij,u_k} &= \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial}{\partial u_k} \langle f_{u_i}, f_{u_j} \rangle \\ &= \tfrac{1}{2} \langle f_{u_i u_k}, f_{u_j} \rangle + \tfrac{1}{2} \langle f_{u_i}, f_{u_j u_k} \rangle \\ &\overset{(4)}{=} \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} g_{f,jm} + \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{jkm} g_{f,im}. \end{aligned} \tag{5}$$

Analog ergibt sich

$$\tfrac{1}{2} g_{f,jk,u_i} = \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{jim} g_{f,km} + \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{kim} g_{f,jm} \tag{6}$$

und

$$-\tfrac{1}{2} g_{f,ki,u_j} = -\tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{kjm} g_{f,im} - \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{ijm} g_{f,km}. \tag{7}$$

Addition von (5), (6) und (7) ergibt

$$\begin{aligned} \Gamma_{f,kij} &= \tfrac{1}{2} (g_{f,ij,u_k} + g_{f,jk,u_i} - g_{f,ki,u_j}) \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} g_{f,jm} + c_{jkm} g_{f,im} + c_{jim} g_{f,km} + c_{kim} g_{f,jm} - c_{kjm} g_{f,im} - c_{ijm} g_{f,km} \\ &\overset{(3)}{=} \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} g_{f,jm} + c_{jkm} g_{f,im} + c_{jim} g_{f,km} + c_{ikm} g_{f,jm} - c_{jkm} g_{f,im} - c_{jim} g_{f,km} \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} 2 c_{ikm} g_{f,jm} \\ &= \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} g_{f,jm}. \end{aligned} \tag{8}$$

Schließlich erhalten wir

$$\Gamma^l_{f,ik} = \sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,lj}\Gamma_{f,kij} \overset{(8)}{=} \sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,lj} \sum_{m=1}^{2} c_{ikm} g_{f,jm}$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \Big(\sum_{j=1}^{2} \tilde{g}_{f,lj} g_{f,jm} \Big) c_{ikm} = \sum_{m=1}^{2} \delta_{lm} c_{ikm} = c_{ikl}.$$

Damit sind die Gleichungen von Gauß gezeigt. Die Gleichungen von Weingarten wurden bereits in *Kapitel 10* bewiesen und wurden hier nur der Vollständigkeit wegen nochmals aufgeführt.

13.4 Lemma

Für eine Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$f_{u_i u_j u_k} = \sum_{l=1}^{2} \Big(\Gamma^l_{f,ij,u_k} + \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{f,ij}\Gamma^l_{f,mk} - \sum_{m=1}^{2} \tilde{g}_{f,lm} h_{f,ij} h_{f,mk} \Big) f_{u_l}$$
$$+ \Big(h_{f,ij,u_k} + \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{f,ij} h_{f,mk} \Big) n_f.$$

Beweis

Für $i,j,k = 1,2$ gilt

$$f_{u_i u_j u_k} \overset{13.3}{=} \sum_{m=1}^{2} \Big(\Gamma^m_{f,ij,u_k} f_{u_m} + \Gamma^m_{f,ij} f_{u_m u_k} \Big) + h_{f,ij,u_k} n_f + h_{f,ij} n_{f,u_k}$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma^m_{f,ij,u_k} f_{u_m} + \Gamma^m_{f,ij} \Big(\sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{f,mk} f_{u_l} + h_{f,mk} n_f \Big) \right)$$
$$+ h_{f,ij,u_k} n_f - h_{f,ij} \sum_{l,m=1}^{2} \tilde{g}_{f,lm} h_{f,mk} f_{u_l}$$
$$= \sum_{l=1}^{2} \Big(\Gamma^l_{f,ij,u_k} + \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{f,ij}\Gamma^l_{f,mk} - \sum_{m=1}^{2} \tilde{g}_{f,lm} h_{f,ij} h_{f,mk} \Big) f_{u_l}$$
$$+ \Big(h_{f,ij,u_k} + \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{f,ij} h_{f,mk} \Big) n_f.$$

13.5 Satz (Integrabilitätsbedingungen, Gleichungen von Gauß und Codazzi–Mainardi)

Für jede Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt $f_{u_i u_j u_k} = f_{u_i u_k u_j}$ und $n_{f,u_i u_j} = n_{f,u_j u_i}$ und daher

$$\Gamma^m_{f,ij,u_k} - \Gamma^m_{f,ik,u_j} + \sum_{l=1}^{2} \Big(\Gamma^l_{f,ij}\Gamma^m_{f,lk} - \Gamma^l_{f,ik}\Gamma^m_{f,lj} \Big) = \qquad \text{(Gauß)}$$
$$= \sum_{l=1}^{2} \tilde{g}_{f,lm} \Big(h_{f,ij} h_{f,kl} - h_{f,ik} h_{f,jl} \Big)$$

und

$$h_{f,ij,u_k} - h_{f,ik,u_j} = \sum_{l=1}^{2} \Big(\Gamma^l_{f,ik} h_{f,lj} - \Gamma^l_{f,ij} h_{f,lk} \Big). \qquad \begin{pmatrix} \text{Coddazzi–} \\ \text{Mainardi} \end{pmatrix}$$

13.6 Fundamentalsatz der lokalen Flächentheorie

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe und für $i,j = 1,2$ die $g_{ij}, h_{ij}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen mit $g_{12} = g_{21}$, $g_{11} > 0$, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ und $h_{12} = h_{21}$. Weiterhin seien mit diesen Funktionen die Gleichungen von Gauß und Codazzi–Mainardi erfüllt. Dann existiert eine Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$g_{f,ij} = g_{ij} \quad \text{und} \quad h_{f,ij} = h_{ij} \qquad \text{für } i,j = 1,2.$$

f ist bis auf Bewegung eindeutig bestimmt.

14 Der Riemannsche Krümmungstensor

14.1 Definition

Sei $f: U \longrightarrow I\!R^3$ eine Fläche, dann heißen für $i,j,k,m = 1,2$

$$R^m_{f,ijk} := \Gamma^m_{f,ij,u_k} - \Gamma^m_{f,ik,u_j} + \sum_{l=1}^{2}\left(\Gamma^l_{f,ij}\,\Gamma^m_{f,lk} - \Gamma^l_{f,ik}\,\Gamma^m_{f,lj}\right)$$

die **Komponenten des gemischten Riemannschen Krümmungstensors** und

$$R_{f,injk} := \sum_{m=1}^{2} g_{f,nm} R^m_{f,ijk}$$

die **Komponenten des rein covarianten Riemannschen Krümmungstensors**.

14.2 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow I\!R^3$ eine Fläche, dann gilt

$$R_{f,injk} = h_{f,ij}h_{f,kn} - h_{f,ik}h_{f,jn} \quad \text{für } i,j,k,n = 1,2.$$

Beweis

Für $i,j,k,n = 1,2$ ist

$$\begin{aligned} R_{f,injk} &= \sum_{m=1}^{2} g_{f,nm} R^m_{f,ijk} \\ &\overset{13.5}{\downarrow} \\ &= \sum_{m=1}^{2} g_{f,nm} \sum_{l=1}^{2} \tilde{g}_{f,lm}(h_{f,ij}h_{f,kl} - h_{f,ik}h_{f,jl}) \\ &= \sum_{l=1}^{2}\left(\underbrace{\left(\sum_{m=1}^{2} g_{f,nm}\tilde{g}_{f,ml}\right)}_{=\delta_{nl}}\left(h_{f,ij}h_{f,kl} - h_{f,ik}h_{f,jl}\right)\right) \\ &= h_{f,ij}h_{f,kn} - h_{f,ik}h_{f,jn}. \end{aligned}$$

14.3 Folgerung

Sei $f: U \longrightarrow I\!R^3$ eine Fläche, dann gilt

$$R_{f,injk} = \begin{cases} b_f, & (i,n,j,k) \in \{(1,2,1,2);(2,1,2,1)\} \\ -b_f, & (i,n,j,k) \in \{(2,1,1,2);(1,2,2,1)\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies folgt direkt aus *Lemma 14.2* und $h_{f,12} = h_{f,21}$, durch Einsetzen der Indizes.

14.4 Theorema egregium

Sei $f: U \longrightarrow I\!R^3$ eine Fläche, dann gilt

$$K_f = \frac{R_{f,1212}}{a_f}.$$

Beweis

Es ist

$$K_f \overset{9.7}{=} \frac{b_f}{a_f} \overset{14.3}{=} \frac{R_{f,1212}}{a_f}.$$

Dies zeigt wiederum, daß sich K_f allein aus den Koeffizienten der ersten Fundamentalform berechnen läßt, denn nach den *Definitionen 14.1* und *13.1* ist $R_{f,1212}$ nur von E_f, F_f und G_f abhängig.

15 Die geodätische Krümmung (Seitenkrümmung)

In diesem Kapitel versuchen wir die Krümmung von Kurven auf Flächen in einen zur Fläche und einen zur Kurve gehörigen Anteil aufzuspalten. Wir erhalten "kürzeste Verbindungen", wenn der zur Kurve gehörende Anteil Null ist, das heißt diese Kurven sind nicht "unnötig gekrümmt".

15.1 Definition

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Parameter Bogenlänge auf einer Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt die Funktion

$$\kappa_{\substack{\alpha \\ f},g}: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \det\Big(\dot\alpha(t) \;\Big|\; \ddot\alpha(t) \;\Big|\; n_f(\beta(t))\Big)$$

geodätische Krümmung und die Funktion

$$\kappa_{\substack{\alpha \\ f},n}: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longmapsto \kappa_\alpha(t)\langle n_f(\beta(t)), N_\alpha(t)\rangle$$

Normalkrümmung der Kurve α auf f.

15.2 Bemerkung

Es gilt

$$\kappa_{\substack{\alpha \\ f},n}(t) = \mathrm{I\!I}_f(\beta(t))(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)),$$

denn

$$\begin{aligned}
\kappa_{\substack{\alpha \\ f},n}(t) = \kappa_\alpha(t)\langle n_f(\beta(t)), N_\alpha(t)\rangle &\overset{8.4,8.8}{\underset{\downarrow}{=}} \kappa_f(\dot\alpha(t)) \\
&\overset{10.10}{=} \frac{\mathrm{I\!I}_f(\beta(t))(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t))}{\mathrm{I}_f(\beta(t))(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t))} = \frac{\mathrm{I\!I}_f(\beta(t))(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t))}{\langle \dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle} \\
&= \mathrm{I\!I}_f(\beta(t))(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)) \overset{10.8}{=} \sum_{i,j=1}^{2} h_{f,ij}(\beta(t))\dot u_i(t)\dot u_j(t).
\end{aligned}$$

15.3 Lemma

Für eine Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit Parameter Bogenlänge auf einer Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\ddot\alpha(t) = \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) = \kappa_{\substack{\alpha \\ f},n}(t)n_f(\beta(t)) + \kappa_{\substack{\alpha \\ f},g}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big).$$

Beweis

Wegen

$$N_\alpha(t) \in T_\alpha(t)^\perp = \operatorname{span}\Big\{n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big\},$$

kann man $N_\alpha(t)$ als Linearkombination von $n_f(\beta(t))$ und $n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)$ darstellen, das heißt

$$\kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) = a \cdot n_f(\beta(t)) + b\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\kappa_{{}_f^{\alpha},n}(t) &= \kappa_\alpha(t)\langle N_\alpha(t), n_f(\beta(t))\rangle \\
&= \langle \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t), n_f(\beta(t))\rangle \\
&\overset{(*)}{=} a\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t))\rangle}_{=1} + b\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t), n_f(\beta(t))\rangle}_{=0} \\
&= a
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t) &\overset{2.2}{=} \langle \ddot{\alpha}(t), n_f(\beta(t)) \times \dot{\alpha}(t)\rangle \\
&= \langle \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t), n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\rangle \\
&\overset{(*)}{=} a\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\rangle}_{=0} + b\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t), n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\rangle}_{=1} \\
&= b.
\end{aligned}$$

15.4 Lemma

Seien α, β und f wie oben, dann gilt

$$\kappa_\alpha^2 = \kappa_{{}_f^{\alpha},n}^2 + \kappa_{{}_f^{\alpha},g}^2.$$

Beweis

Es ist für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(t)^2 &= \langle \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\rangle \\
&\overset{15.3}{=} \left\langle \begin{array}{c|c} \kappa_{{}_f^{\alpha},n}(t) n_f(\beta(t)) + & \kappa_{{}_f^{\alpha},n}(t) n_f(\beta(t)) + \\ \kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big) & \kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big) \end{array} \right\rangle \\
&= \kappa_{{}_f^{\alpha},n}(t)^2\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t))\rangle}_{=1} + 2\kappa_{{}_f^{\alpha},n}(t)\kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t)\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\rangle}_{=0} \\
&\quad + \kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t)^2\,\underbrace{\langle n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t), n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\rangle}_{=1} \\
&= \kappa_{{}_f^{\alpha},n}(t)^2 + \kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t)^2.
\end{aligned}$$

15.5 Lemma

Seien α, β und f wie oben, dann gilt für alle $t \in I$

$$\kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t) = \kappa_\alpha(t)\langle n_f(\beta(t)), B_\alpha(t)\rangle.$$

Beweis

Für alle $t \in I$ ist

$$\begin{aligned}
\kappa_{{}_f^{\alpha},g}(t) &= \det\Big(\dot{\alpha}(t) \;\Big|\; \ddot{\alpha}(t) \;\Big|\; n_f(\beta(t))\Big) \\
&= \det\Big(n_f(\beta(t)) \;\Big|\; \dot{\alpha}(t) \;\Big|\; \ddot{\alpha}(t)\Big) \\
&= \det\Big(n_f(\beta(t)) \;\Big|\; T_\alpha(t) \;\Big|\; \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t)\Big) \\
&\overset{2.2}{=} \kappa_\alpha(t) \cdot \langle n_f(\beta(t)), T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)\rangle \\
&= \kappa_\alpha(t) \cdot \langle n_f(\beta(t)), B_\alpha(t)\rangle.
\end{aligned}$$

15.6 Bemerkung

Falls α in $\alpha(t)$ Normalschnitt ist, so gilt

$$\kappa_{f,g}^{\alpha}(t) = \kappa_\alpha(t)\langle n_f(\beta(t)), B_\alpha(t)\rangle = \kappa_\alpha(t)\underbrace{\langle N_\alpha(t), B_\alpha(t)\rangle}_{=0} = 0.$$

Aus diesem Lemma und *Definition 16.1* folgt, daß eine Kurve, die in jedem Punkt Normalschnitt ist, eine geodätische Kurve ist.

15.7 Satz

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Parameter Bogenlänge auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $t \in I$

$$\kappa_{f,g}^{\alpha}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big) = \sum_{i=1}^{2}\Big(\ddot{u}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{2}\dot{u}_j(t)\dot{u}_k(t)\Gamma_{f,jk}^{i}(\beta(t))\Big) f_{u_i}(\beta(t)).$$

Beweis

Es ist nach Kettenregel für alle $t \in I$

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{2}\dot{u}_i(t) f_{u_i}(\beta(t))$$

und damit

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{i=1}^{2}\dot{u}_i(t) f_{u_i}(\beta(t))\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\Big(\ddot{u}_i(t) f_{u_i}(\beta(t)) + \dot{u}_i(t)\sum_{j=1}^{2}\dot{u}_j(t) f_{u_i u_j}(\beta(t))\Big) \\
&\overset{13.3}{\downarrow} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\ddot{u}_i(t) f_{u_i}(\beta(t)) \\
&\qquad + \sum_{k,j=1}^{2}\dot{u}_k(t)\dot{u}_j(t)\Big(\sum_{i=1}^{2}\Gamma_{f,kj}^{i}(\beta(t)) f_{u_i}(\beta(t)) + h_{f,kj}(\beta(t)) n_f(\beta(t))\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\Big(\ddot{u}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{2}\dot{u}_j(t)\dot{u}_k(t)\Gamma_{f,kj}^{i}(\beta(t))\Big) f_{u_i}(\beta(t)) \\
&\qquad + \Big(\sum_{k,j=1}^{2} h_{f,kj}(\beta(t))\dot{u}_k(t)\dot{u}_j(t)\Big) n_f(\beta(t)) \\
&\overset{15.2}{\downarrow} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\Big(\ddot{u}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{2}\dot{u}_j(t)\dot{u}_k(t)\Gamma_{f,kj}^{i}(\beta(t))\Big) f_{u_i}(\beta(t)) + \kappa_{f,n}^{\alpha}(t) n_f(\beta(t)).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\kappa_{f,g}^{\alpha}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big) &\overset{15.3}{=} \ddot{\alpha}(t) - \kappa_{f,n}^{\alpha}(t) n_f(\beta(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\Big(\ddot{u}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{2}\dot{u}_j(t)\dot{u}_k(t)\Gamma_{f,kj}^{i}(\beta(t))\Big) f_{u_i}(\beta(t)).
\end{aligned}$$

Mit *13.2* folgt die Behauptung.

15.8 Bemerkung

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\widetilde{f}: \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Fläche $f \circ \varphi$, wobei $\varphi: \widetilde{U} \longrightarrow U$ eine orientierungstreue Parametertransformation ist. Weiter sei $\widetilde{\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $\widetilde{f}$, das heißt es existiert ein $\widetilde{\beta}: I \longrightarrow \widetilde{U}$, so daß $\widetilde{\alpha} = \widetilde{f} \circ \widetilde{\beta}$. Definiert man $\beta: I \longrightarrow U$ als $\beta = \varphi \circ \widetilde{\beta}$, so erhält man

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{f} \circ \widetilde{\beta} = f \circ \varphi \circ \widetilde{\beta} = f \circ \beta.$$

Also ist $\widetilde{\alpha}$ auch eine Kurve auf f und es gilt

$$\kappa_{\widetilde{\alpha}, \widetilde{f}, g} = \kappa_{\widetilde{\alpha}, f, g},$$

da

$$\kappa_{\widetilde{\alpha}, \widetilde{f}, g}(t) = \kappa_{\widetilde{\alpha}}(t) \langle n_{\widetilde{f}}(\widetilde{\beta}(t)), B_{\widetilde{\alpha}}(t) \rangle \overset{6.9}{=} \kappa_{\widetilde{\alpha}}(t) \langle n_f(\beta(t)), B_{\widetilde{\alpha}}(t) \rangle = \kappa_{\widetilde{\alpha}, f, g}(t).$$

16 Geodätische Kurven

16.1 Definition

Eine Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit Parameter Bogenlänge auf einer Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **geodätische Kurve**, wenn gilt

$$\kappa_{f,g}^{\alpha} \equiv 0.$$

16.2 Satz (Differentialgleichung der Geodätischen)

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Parameter Bogenlänge auf einer Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

α ist genau dann geodätisch, wenn gilt

$$\ddot{u}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{f,jk}^{i}(\beta(t))\dot{u}_j(t)\dot{u}_k(t) = 0 \quad \text{für } i = 1,2 \text{ und alle } t \in I.$$

Beweis

Die Behauptung folgt sofort aus *Satz 15.7*.

16.3 Bemerkung

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve, die nicht notwendigerweise Parameter Bogenlänge hat und den Differentialgleichungen in *Satz 16.2* genügt. Dann existiert ein $c > 0$ so, daß

$$L_{\alpha|[a;t]} = c(t-a) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dies sieht man so

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\langle\dot{\alpha},\dot{\alpha}\rangle = 2\langle\ddot{\alpha},\dot{\alpha}\rangle &\overset{15.3}{=} 2\Big\langle \kappa_{f,n}^{\alpha}(n_f \circ \beta) + \kappa_{f,g}^{\alpha}((n_f \circ \beta) \times T_\alpha), \|\dot{\alpha}\| T_\alpha \Big\rangle \\ &\overset{16.2}{=} 2\|\dot{\alpha}\|\langle \kappa_{f,n}^{\alpha}(n_f \circ \beta), T_\alpha\rangle = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\|\dot{\alpha}(t)\| = c$ für alle $t \in I$, mit einem $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$L_{\alpha|[a;t]} = \int_a^t \|\dot{\alpha}(\tau)\|\, d\tau = c(t-a).$$

16.4 Satz (Existenz geodätischer Kurven)

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in U$ und $X \in S_f^1(p)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und genau eine geodätische Kurve $\alpha: (-\varepsilon; +\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf f mit

$$\alpha(0) = f(p) \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}(0) = X.$$

Beweis

Sei $X = J_f(p)x$ mit einem $x \in \mathbb{R}^2$. Löse das Differentialgleichungssystem

$$\left(\ddot{u}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{f,jk}^{i}(\beta(t))\dot{u}_j(t)\dot{u}_k(t)\right)_{i=1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Anfangsbedingungen $\beta(0) = p$ und $\dot{\beta}(0) = x$. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf liefert die Behauptung.

16.5 Definition

Eine Fläche $f: I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ hat ein geodätisches Koordinatensystem, wenn gilt

1) Die Kurve

$$\beta_{u_2}: I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ u_1 \longmapsto f(u_1, u_2)$$

ist geodätisch für alle $u_2 \in I_2$.

2) Es ist

$$A_f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{f,22}(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (u_1, u_2) \in I_1 \times I_2.$$

16.6 Bemerkung

16.5.2 ist äquivalent zur Forderung

$$\begin{gathered} \beta_{u_2} \text{ hat Parameter Bogenlänge für alle } u_2 \text{ und} \\ \langle \dot{\beta}_{u_2}, \dot{\alpha}_{u_1} \rangle \equiv 0 \quad \text{für alle } (u_1, u_2) \in I_1 \times I_2, \end{gathered}$$

wobei

$$\alpha_{u_1}: I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ u_2 \longmapsto f(u_1, u_2) \quad \text{für alle } u_1 \in I_1.$$

16.7 Satz (Existenz geodätischer Koordinaten)

Sei $J := [d; e]$ und $\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $\widetilde{f}: \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = \widetilde{f} \circ \beta$ mit einem

$$\beta: J \longrightarrow \widetilde{U};\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $p \in \widetilde{U}$ und $\widetilde{f}(p) \in \alpha(J)$. Dann gibt es eine Umgebung $\widetilde{U}'$ von p in $\widetilde{U}$ und eine orientierungstreue Parametertransformation

$$\varphi: I \times J \longrightarrow \widetilde{U}'$$

so, daß für $f = \widetilde{f} \circ \varphi$ gilt:

1) f hat ein geodätisches Koordinatensystem.

2) Für $v \in J$ gilt

$$\alpha(v) = f(\tfrac{a+b}{2}, v).$$

Beweis

Wir führen den Beweis, indem wir nach *Satz 16.4* durch jeden Punkt $\alpha(v)$, $v \in J$ eine geodätische Kurve β_v legen, die die Kurve α im Punkt $\alpha(v)$ senkrecht schneidet. Sei $s \in J$. Wähle ein $X_s \in T_{\tilde{f}}(\beta(s))$ mit $X_s \in S^1_{\tilde{f}}(\beta(s))$ und

$$\langle \dot{\alpha}(s), X_s \rangle = 0.$$

Sei weiter $x_s = (x_{s,1}, x_{s,2})$ so, daß

$$X_s = x_{s,1} \widetilde{f}_{u_1}(\beta(s)) + x_{s,2} \widetilde{f}_{u_2}(\beta(s)),$$

das heißt $x_{s,1}$ und $x_{s,2}$ sind die Koordinaten von X_s bezüglich der Basis $\widetilde{f}_{u_1}(\beta(s)), \widetilde{f}_{u_2}(\beta(s))$. In dem man X_s gegebenenfalls durch $-X_s$ (und damit x_s durch $-x_s$) ersetzt, erreicht man

$$\det\Big(x_s \;\Big|\; \dot{\beta}(s)\Big) > 0.$$

Sei für $s \in J$

$$w_s : I \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} w_{s,1}(t) \\ w_{s,2}(t) \end{pmatrix}$$

die Lösung des Differentialgleichungssystems der geodätischen Kurven

$$\ddot{w}_{s,i} + \sum_{j,k=1}^{2} \left(\Gamma^i_{\tilde{f},jk} \circ w_s \right) \dot{w}_{s,j} \dot{w}_{s,k} = 0 \quad \text{für } i = 1,2$$

mit den Anfangsbedingungen

$$w_s(\tfrac{a+b}{2}) = \beta(s) \quad \text{und} \quad \dot{w}_s(\tfrac{a+b}{2}) = x_s .$$

Dabei ist I eine Umgebung von $\frac{a+b}{2}$ und ergibt sich aus den Sätzen über Differentialgleichungen. Wir definieren nun

$$\varphi : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ (t,s) \longmapsto w_s(t).$$

Die Sätze der Analysis liefern die Differenzierbarkeit von φ nach s. Wir erhalten

$$\tfrac{\partial \varphi}{\partial t}(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{d+e}{2}) = x_{\frac{1}{2}(d+e)} \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial \varphi}{\partial s}(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{d+e}{2}) = \tfrac{\partial}{\partial s}\beta(s)\Big|_{s=\frac{1}{2}(d+e)} = \dot{\beta}(\tfrac{d+e}{2})$$

und somit

$$\det J_\varphi(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{d+e}{2}) = \det\left(x_{\frac{1}{2}(d+e)}, \Big| \dot{\beta}(\tfrac{d+e}{2}) \right) > 0.$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es daher $I' \subset I$, $J' \subset J$ und $\widetilde{U}'(p) \subset \widetilde{U}$ so, daß $\varphi : I' \times J' \longrightarrow \widetilde{U}'$ ein Diffeomorphismus ist. Seien ohne Einschränkung $I = I'$ und $J = J'$. Setze nun $f := \widetilde{f} \circ \varphi$ und definiere für $t \in I$

$$\alpha_t : J \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ s \longmapsto f(t,s) = \widetilde{f}(w_s(t))$$

und für $s \in J$

$$\beta_s : I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto f(t,s) = \widetilde{f}(w_s(t)).$$

Dann gilt für alle $s \in J$

$$f(\tfrac{a+b}{2}, s) = \alpha_{\frac{1}{2}(a+b)}(s) = \widetilde{f}(w_s(\tfrac{a+b}{2})) = \widetilde{f}(\beta(s)) = \alpha(s), \qquad (*)$$

womit 2) bewiesen wäre.

β_s genügt der Differentialgleichung der Geodätischen auf $\widetilde{f}$. Wegen *Bemerkung 16.3* kann man annehmen, daß β_s Parameter Bogenlänge besitzt. β_s ist somit geodätisch auf $\widetilde{f}$, also — wegen *Bemerkung 15.8* — auch auf f. Damit genügt β_s der Differentialgleichung der Geodätischen auf f, das heißt

$$\ddot{u}_1(t) + \Gamma^1_{f,11}(t,s)\dot{u}_1(t)^2 + 2\Gamma^1_{f,12}(t,s)\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \Gamma^1_{f,22}(t,s)\dot{u}_2(t)^2 = 0$$

und

$$\ddot{u}_2(t) + \Gamma^2_{f,11}(t,s)\dot{u}_1(t)^2 + 2\Gamma^2_{f,12}(t,s)\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) + \Gamma^2_{f,22}(t,s)\dot{u}_2(t)^2 = 0$$

für alle $t \in I$. Wegen

$$u_1(t) = t \quad \text{und} \quad u_2(t) = s \qquad \text{für alle } t \in I$$

liefert dies

$$\Gamma^1_{f,11} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \Gamma^2_{f,11} \equiv 0.$$

Da β_s Parameter Bogenlänge besitzt gilt $g_{f,11} \equiv 1$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
0 &= \Gamma^1_{f,11}(t,s) \\
&= {}^1\!/_2 \sum_{i=1}^{2} \widetilde{g}_{f,1i}(t,s) \Big(\underbrace{g_{f,i1,u_1}(t,s) + g_{f,1i,u_1}(t,s)}_{=2g_{f,i1,u_1}(t,s)} - \underbrace{g_{f,11,u_i}(t,s)}_{=0} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \widetilde{g}_{f,1i}(t,s) g_{f,i1,u_1}(t,s) \\
&= \widetilde{g}_{f,11}(t,s) \underbrace{g_{f,11,u_1}(t,s)}_{=0} + \widetilde{g}_{f,12}(t,s) g_{f,21,u_1}(t,s) \\
&= -\frac{g_{f,12}(t,s)}{a_f(t,s)} g_{f,12,u_1}(t,s) \\
&= -\frac{1}{2a_f(t,s)} \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{f,12}(t,s)^2 \right).
\end{aligned}$$

Also ist $g_{f,12}$ konstant bezüglich t. Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
g_{f,12}(t,s) = g_{f,12}(\tfrac{a+b}{2},s) &= \langle f_{u_1}(\tfrac{a+b}{2},s), f_{u_2}(\tfrac{a+b}{2},s) \rangle \\
&\overset{(*)}{=} \left\langle \dot{\beta}_s(\tfrac{a+b}{2}), \dot{\alpha}(s) \right\rangle = \left\langle J_{\tilde{f}}(w_s(\tfrac{a+b}{2})) \underbrace{\dot{w}_s(\tfrac{a+b}{2})}_{=x_s}, \dot{\alpha}(s) \right\rangle \\
&= \langle X_s, \dot{\alpha}(s) \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt $g_{f,12} \equiv 0$.

16.8 Satz (Lokal sind geodätische Kurven "kürzeste Verbindungskurven")

Sei $f\colon I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit geodätischen Koordinaten und damit

$$\alpha_0\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto f(t, \tfrac{d+e}{2})$$

eine geodätische Kurve. Dann gilt für jede Kurve $\alpha\colon [a';b'] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf f mit $\alpha(a') = \alpha_0(a)$ und $\alpha(b') = \alpha_0(b)$

$$L_\alpha \geq L_{\alpha_0}.$$

Beweis

Da α eine Kurve auf der Fläche f ist, existiert ein

$$\beta\colon [a';b'] \longrightarrow I \times J;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = f \circ \beta$. Wegen

$$f(a, \tfrac{d+e}{2}) = \alpha_0(a) = \alpha(a') = f(\beta(a'))$$

und

$$f(b, \tfrac{d+e}{2}) = \alpha_0(b) = \alpha(b') = f(\beta(b'))$$

und der Injektivität von f ist

$$\beta(a') = (a, \tfrac{d+e}{2}) \quad \text{und} \quad \beta(b') = (b, \tfrac{d+e}{2}). \qquad (*)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} L_\alpha &\overset{16.5}{=} \int_{a'}^{b'} \sqrt{\dot{u}_1(t)^2 + \underbrace{g_{f,22}(\beta(t))}_{>0}\dot{u}_2(t)^2}\, dt \\ &\geq \int_{a'}^{b'} \sqrt{\dot{u}_1(t)^2}\, dt = \int_{a'}^{b'} |\dot{u}_1(t)|\, dt \geq \int_{a'}^{b'} \dot{u}_1(t)\, dt \\ &\overset{\text{HDI}}{=} u_1(b') - u_1(a') \overset{(*)}{=} b - a \overset{16.1,1.7}{=} L_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

16.9 Bemerkung

Die Fläche

$$f\colon (0;\pi) \times (0;2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}$$

besitzt ein geodätisches Koordinatensystem.

Aus *Beispiel 7.8.3* wissen wir bereits, daß Teil 2 von *Definition 16.5* erfüllt ist. Sei nun für $v \in (0;2\pi)$ die Kurve

$$\alpha_v\colon (0;\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto f(t,v)$$

definiert. Es gilt $\alpha_v = f \circ \beta_v$ mit

$$\beta_v\colon (0;\pi) \longrightarrow (0;\pi) \times (0;2\pi);\ t \longmapsto (t,v).$$

Wegen $E_f(u,v) \equiv 1$ hat α_v die Bogenlänge als Parameter. Es ist für alle $t \in (0;\pi)$

$$\dot{\alpha}_v(t) = \begin{pmatrix} \cos v \cos t \\ \sin v \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \ddot{\alpha}_v(t) = \begin{pmatrix} -\cos v \sin t \\ -\sin v \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

sowie (vergleiche *Beispiel 9.10*)

$$n_f(\beta_v(t)) = \begin{pmatrix} -\cos v \sin t \\ -\sin v \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

und damit

$$\kappa_{f,g}^{\alpha}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos v \cos t & -\cos v \sin t & -\cos v \sin t \\ \sin v \cos t & -\sin v \sin t & -\sin v \sin t \\ -\sin t & -\cos t & -\cos t \end{pmatrix} = 0$$

wegen $n_f(\beta_v(t)) = \ddot{\alpha}_v(t)$.

Man beachte, daß die wie in *Beispiel 9.10* parametrisierte Kugeloberfläche kein geodätisches Koordinatensystem besitzt, da dort $E_f(u,v) \not\equiv 1$ ist.

17 Die covariante Ableitung

17.1 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto f(\beta(t))$ eine Kurve auf f.

a) Der **Tangentialraum der Fläche** f (in Zeichen $T_f(U)$) ist definiert als

$$T_f(U) := \bigcup_{p \in U} T_f(p).$$

b) Ein **Tangentenvektorfeld** X auf der Fläche f ist eine Abbildung

$$X: U \longrightarrow T_f(U) \quad \text{mit } X(p) \in T_f(p) \text{ für alle } p \in U.$$

c) Ein **Tangentenvektorfeld** X auf f **längs** α ist eine Abbildung

$$X: I \longrightarrow T_f(U) \quad \text{mit } X(t) \in T_f(\beta(t)) \text{ für alle } t \in I.$$

d) Die Funktionen $\xi_{X,1}, \xi_{X,2}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$X(p) = \sum_{i=1}^{2} \xi_{X,i}(p) f_{u_i}(p) \quad \text{für alle } p \in U$$

heißen **Koordinatenfunktionen** des Tangentenvektorfeldes X auf der Fläche f. Analog sind die Koordinatenfunktionen $\xi_{X,1}, \xi_{X,2}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ für ein Tangentenvektorfeld längs α definiert.

e) Ein Tangentenvektorfeld X heißt **differenzierbar**, wenn die Koordinatenfunktionen differenzierbar sind.

17.2 Bemerkung

Für eine Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf einer Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

ist $\dot{\alpha}: I \longrightarrow T_f(U)$ ein differenzierbares Tangentenvektorfeld auf f längs α mit

$$\xi_{\dot{\alpha},i} = \dot{u}_i \quad \text{für } i = 1, 2.$$

17.3 Definition

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $X: I \longrightarrow T_f(U)$ ein Tangentenvektorfeld auf f längs α. Sei $\mathrm{pr}_p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_f(p)$ die orthogonale Projektion, dann heißt

$$\frac{\nabla X}{dt}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t \longmapsto \mathrm{pr}_{\beta(t)}\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)(t)\right)$$

die **covariante Ableitung** von X **längs** α.

17.4 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$X: I \longrightarrow T_f(U);\ t \longmapsto \sum_{i=1}^{2} \xi_{X,i}(t) f_{u_i}(\beta(t))$$

ein Tangentenvektorfeld längs α. Dann gilt für alle $t \in I$

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{2} \Big(\dot{\xi}_{X,i}(t) + \sum_{j,k=1}^{2} \xi_{X,k}(t)\, \dot{u}_j(t) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \Big) f_{u_i}(\beta(t)).$$

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla X}{dt}(t) &= \mathrm{pr}_{\beta(t)}(\dot{X}(t)) = \mathrm{pr}_{\beta(t)} \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\dot{\xi}_{X,i}(t) f_{u_i}(\beta(t)) + \xi_{X,i}(t) \sum_{j=1}^{2} \dot{u}_j(t) f_{u_i u_j}(\beta(t)) \right) \right) \\
&= \mathrm{pr}_{\beta(t)} \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\dot{\xi}_{X,i}(t) f_{u_i}(\beta(t)) + \xi_{X,i}(t) \sum_{j=1}^{2} \dot{u}_j(t) \Big(\Big(\sum_{k=1}^{2} \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) f_{u_k}(\beta(t)) \Big) \right. \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. \left. + h_{f,ij}(\beta(t)) n_f(\beta(t)) \Big) \right) \right) \\
&= \mathrm{pr}_{\beta(t)} \Bigg(\sum_{i=1}^{2} \Big(\dot{\xi}_{X,i}(t) + \sum_{j=1}^{2} \dot{u}_j(t) \sum_{k=1}^{2} \xi_{X,k}(t) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \Big) f_{u_i}(\beta(t)) \\
&\qquad + \Big(\sum_{i=1}^{2} \xi_{X,i}(t) \sum_{j=1}^{2} \dot{u}_j(t) h_{f,ij}(\beta(t)) \Big) n_f(\beta(t)) \Bigg) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \Big(\dot{\xi}_{X,i}(t) + \sum_{j=1}^{2} \dot{u}_j(t) \sum_{k=1}^{2} \xi_{X,k}(t) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \Big) f_{u_i}(\beta(t)).
\end{aligned}$$

17.5 Beispiel

Seien $I_1 = (a;b)$, $I_2 = (d;e)$ und $f: I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Gegeben seien die Kurven

$$\alpha_{t_1,1}: I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t_2 \longmapsto f(t_1,t_2) \quad \text{für } t_1 \in I_1$$

und

$$\alpha_{t_2,2}: I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t_1 \longmapsto f(t_1,t_2) \quad \text{für } t_2 \in I_2$$

auf f. Dann sind für $t_1 \in I_1$ und $t_2 \in I_2$ die Abbildungen

$$\alpha_{t_i,ij}: I_i \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ t_i \longmapsto f_{u_j}(t_1,t_2) \quad \text{für } j = 1,2$$

Tangentenvektorfelder auf f längs $\alpha_{t_i,i}$ für $i = 1,2$. Dann gilt

$$\frac{\nabla \alpha_{t_i,ij}}{dt}(t_{3-i}) = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{f,ij}(t_1,t_2) f_{u_k}(t_1,t_2) \quad \text{für } i = 1,2 \text{ und alle } t_{3-i} \in I_{3-i},$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla \alpha_{t_i,ij}}{dt}(t_{3-i}) &= \mathrm{pr}_{(t_1,t_2)}(f_{u_i u_j}(t_1,t_2)) \\
&\overset{13.3}{=} \mathrm{pr}_{(t_1,t_2)} \Big(\sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{f,ij}(t_1,t_2) f_{u_k}(t_1,t_2) + h_{f,ij}(t_1,t_2) n_f(t_1,t_2) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{f,ij}(t_1,t_2) f_{u_k}(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

17.6 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Parameter Bogenlänge auf f, also $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}(t) = \kappa_{f,g}^{\alpha}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big).$$

Beweis

Nach *Bemerkung 17.2* ist $\dot{\alpha}: I \longrightarrow T_f(U)$ ein Tangentenvektorfeld auf f längs α. Wir erhalten für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}(t) &= \mathrm{pr}_{\beta(t)}(\ddot{\alpha}(t)) \\ &\overset{15.3}{=} \mathrm{pr}_{\beta(t)}\Big(\kappa_{f,n}^{\alpha}(t) \cdot n_f(\beta(t)) + \kappa_{f,g}^{\alpha}(t) \cdot \Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big)\Big) \\ &= \kappa_{f,g}^{\alpha}(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times T_\alpha(t)\Big). \end{aligned}$$

17.7 Folgerung

Dieses Lemma besagt unter anderem, daß eine Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit Parameter Bogenlänge genau dann geodätisch ist, wenn gilt

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \equiv 0.$$

17.8 Lemma und Definition

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sei X ein Einheitstangentenvektorfeld längs α (das heißt $\|X(t)\| = 1$ für alle $t \in I$), dann existiert ein $\lambda_t \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \lambda_t\Big(n_f(\beta(t)) \times X(t)\Big) \quad \text{für alle } t \in I. \tag{$*$}$$

Für dieses λ_t schreiben wir

$$\left[\frac{\nabla X}{dt}\right]: I \longrightarrow \mathbb{R};\ t \longrightarrow \lambda_t.$$

Es ist

$$\lambda_t = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, (n_f \circ \beta) \times X \right\rangle = \langle \dot{X}, (n_f \circ \beta) \times X \rangle.$$

Beweis

Wegen

$$\langle X(t), X(t) \rangle = 1 \quad \text{für alle } t \in I$$

ist

$$\langle \dot{X}(t), X(t) \rangle = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{pr}_{\beta(t)}(\dot{X}(t)) \in X(t)^{\perp} \cap T_f(\beta(t)),$$

also

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) \perp X(t) \quad \text{und} \quad \frac{\nabla X}{dt}(t) \perp n_f(t),$$

womit die Existenz eines λ_t mit $(*)$ bewiesen wäre. Mit einem $c_t \in \mathbb{R}$ läßt sich $\dot{X}(t)$ darstellen als

$$\dot{X}(t) = \mathrm{pr}_{\beta(t)}(\dot{X}(t)) + c_t n_f(\beta(t)).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\langle \dot{X}(t), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle &= \langle \mathrm{pr}_{\beta(t)}(\dot{X}(t)) + c_t n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla X}{dt}(t), n_f(\beta(t)) \times X(t) \right\rangle + \underbrace{\langle c_t n_f(\beta(t)), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle}_{=0} \\ &= \left\langle \frac{\nabla X}{dt}(t), n_f(\beta(t)) \times X(t) \right\rangle.\end{aligned}$$

17.9 Folgerung

Es gilt

$$\left[\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}\right] \equiv \kappa_{f,g}^{\alpha}.$$

Dies folgt sofort aus *17.6*.

17.10 Lemma

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Seien $X, Y: I \longrightarrow T_f(U)$ Einheitstangentenvektorfelder längs α und $\varphi(t)$ der Winkel zwischen $X(t)$ und $Y(t)$. Dann gilt

$$\left[\frac{\nabla Y}{dt}\right](t) - \left[\frac{\nabla X}{dt}\right](t) = \dot{\varphi}(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis

Für $t \in I$ bilden $X(t)$ und $n_f(\beta(t)) \times X(t)$ eine Basis von $T_f(\beta(t))$. Damit existieren differenzierbare Funktionen $a, b: I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Y(t) = a(t)X(t) + b(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times X(t)\Big).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}1 &= \|Y(t)\|^2 \\ &= \Big\|a(t)X(t) + b(t)\Big(n_f(\beta(t)) \times X(t)\Big)\Big\|^2 \\ &= a(t)^2\|X(t)\|^2 + b(t)^2\|n_f(\beta(t)) \times X(t)\|^2 \\ &= a(t)^2 + b(t)^2 \quad \text{für alle } t \in I.\end{aligned}$$

Hilfssatz 4.4 liefert die Existenz einer differenzierbaren Funktion $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$a(t) = \cos\varphi(t) \quad \text{und} \quad b(t) = \sin\varphi(t) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

$\varphi(t)$ ist der Winkel zwischen $X(t)$ und $Y(t)$, denn

$$\begin{aligned}\langle X(t), Y(t)\rangle &= \langle X(t), a(t)X(t) + b(t)n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle \\ &= a(t)\underbrace{\langle X(t), X(t)\rangle}_{=1} + b(t)\underbrace{\langle X(t), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle}_{=0} \\ &= a(t) = \cos\varphi(t).\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\nabla Y}{dt}\right](t) &= \langle \dot{Y}(t), n_f(\beta(t)) \times Y(t)\rangle \\ &= \Big\langle \dot{Y}(t), n_f(\beta(t)) \times \Big(\cos\varphi(t)X(t) + \sin\varphi(t)n_f(\beta(t)) \times X(t)\Big)\Big\rangle \\ &= \Big\langle -\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)X(t) + \cos\varphi(t)\dot{X}(t) \\ &\qquad + \dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)n_f(\beta(t)) \times X(t) + \sin\varphi(t)\overbrace{n_f(\beta(t)) \times X(t)}^{\bullet}, \\ &\qquad\qquad \cos\varphi(t)n_f(\beta(t)) \times X(t) \\ &\qquad\qquad + \sin\varphi(t)\underbrace{n_f(\beta(t)) \times \Big(n_f(\beta(t)) \times X(t)\Big)}_{\overset{2.2}{=} -X(t)}\Big\rangle \\ &= -\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)\cos\varphi(t)\underbrace{\langle X(t), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle}_{=0} + \dot{\varphi}(t)\sin^2\varphi(t)\underbrace{\langle X(t), X(t)\rangle}_{=1} \\ &\quad + \cos^2\varphi(t)\langle \dot{X}(t), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle - \cos\varphi(t)\sin\varphi(t)\underbrace{\langle \dot{X}(t), X(t)\rangle}_{=0} \\ &\quad + \dot{\varphi}(t)\cos^2\varphi(t)\underbrace{\langle n_f(\beta(t)) \times X(t), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle}_{=1} \\ &\quad - \dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)\sin\varphi(t)\underbrace{\langle n_f(\beta(t)) \times X(t), X(t)\rangle}_{=0} \\ &\quad + \sin\varphi(t)\cos\varphi(t)\underbrace{\langle \overbrace{n_f(\beta(t)) \times X(t)}^{\bullet}, n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle}_{=0} \\ &\quad - \sin^2\varphi(t)\underbrace{\langle \overbrace{n_f(\beta(t)) \times X(t)}^{\bullet}, X(t)\rangle}_{=-\langle n_f(\beta(t)) \times X(t), \dot{X}(t)\rangle} \\ &= \dot{\varphi}(t) + \langle \dot{X}(t), n_f(\beta(t)) \times X(t)\rangle \\ &= \dot{\varphi}(t) + \left[\frac{\nabla X}{dt}\right](t).\end{aligned}$$

17.11 Definition

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ein Tangentenvektorfeld X längs α heißt **parallel**, wenn gilt

$$\frac{\nabla X}{dt} \equiv 0.$$

17.12 Lemma

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine geodätische Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und X ein Einheitstangentenvektorfeld längs α auf f. Sei φ der Winkel zwischen $\dot{\alpha}$ und X, dann gilt

$$X \text{ ist parallel} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ ist konstant.}$$

Beweis

Aus der Gleichung

$$\left[\frac{\nabla X}{dt}\right] \overset{17.9}{=} \left[\frac{\nabla X}{dt}\right](t) - \left[\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}\right](t) = \dot{\varphi}(t)$$

folgt die Behauptung.

17.13 Bemerkung

Anschaulich bedeutet *17.12*, daß die covariante Ableitung eines Einheitstangentenvektorfeldes X die Änderung des Winkels zwischen X und der Kurventangente mißt.

17.14 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit geodätischen Koordinaten und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sei weiter X ein Einheitstangentenvektorfeld auf f längs α und φ der Winkel zwischen $f_{u_1} \circ \beta$ und X. Dann gilt

$$\left[\frac{\nabla X}{dt}\right](t) = \frac{G_{f,u_1}(\beta(t))}{2\sqrt{G_f(\beta(t))}}\dot{u}_2(t) + \dot{\varphi}(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis

Sei $p \in U$. Aus der Tatsache, daß f geodätische Koordinaten besitzt, folgern wir zunächst

$$1 = E_f(p) = \langle f_{u_1}(p), f_{u_1}(p)\rangle$$

und durch Differentiation nach u_1 beziehungsweise u_2

$$\langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_1}(p)\rangle = 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad \langle f_{u_1u_2}(p), f_{u_1}(p)\rangle = 0. \tag{$*$}$$

Analog erhält man aus $0 = F_f(p) = \langle f_{u_1}(p), f_{u_2}(p)\rangle$ die Gleichung

$$\langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_2}(p)\rangle + \langle f_{u_1}(p), f_{u_2u_1}(p)\rangle = 0.$$

Dies zusammen mit $(*)$ liefert

$$\langle f_{u_1u_1}(p), f_{u_2}(p)\rangle = 0. \tag{$**$}$$

Wegen $G_f(p) = \langle f_{u_2}(p), f_{u_2}(p)\rangle$ folgt

$$G_{f,u_1}(p) = 2\langle f_{u_2u_1}(p), f_{u_2}(p)\rangle. \tag{$***$}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\nabla f_{u_1} \circ \beta}{dt}\right](t) &= \langle \dot{\overbrace{f_{u_1} \circ \beta}}(t), n_f(\beta(t)) \times f_{u_1}(\beta(t))\rangle \\
&\overset{2.2}{=} \frac{1}{\sqrt{G_f(\beta(t))}}\left\langle \dot{\overbrace{f_{u_1} \circ \beta}}(t), \Big(f_{u_1}(\beta(t)) \times f_{u_2}(\beta(t))\Big) \times f_{u_1}(\beta(t))\right\rangle \\
&\overset{2.2}{=} \frac{1}{\sqrt{G_f(\beta(t))}}\Big\langle f_{u_1u_1}(\beta(t))\dot{u}_1(t) + f_{u_1u_2}(\beta(t))\dot{u}_2(t), f_{u_2}(\beta(t))\Big\rangle \\
&= \frac{\dot{u}_1(t)}{\sqrt{G_f(\beta(t))}}\langle f_{u_1u_1}(\beta(t)), f_{u_2}(\beta(t))\rangle + \frac{\dot{u}_2(t)}{\sqrt{G_f(\beta(t))}}\langle f_{u_1u_2}(\beta(t)), f_{u_2}(\beta(t))\rangle \\
&\overset{(**),(***)}{\downarrow} \\
&= \frac{G_{f,u_1}(\beta(t))}{2\sqrt{G_f(\beta(t))}}\dot{u}_2(t).
\end{aligned}$$

Zusammen mit *Lemma 17.10* folgt die Behauptung.

17.15 Lemma

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit geodätischen Koordinaten und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf f mit Parameter Bogenlänge, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sei weiter φ der Winkel zwischen f_{u_1} und $\dot{\alpha}$, dann gilt

$$\kappa_{f,g}^{\alpha}(t) = \frac{G_{f,u_1}(\beta(t))}{2\sqrt{G_f(\beta(t))}}\dot{u}_2(t) + \dot{\varphi}(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis

Die Behauptung folgt direkt aus *17.9* und *17.14*.

18 Der Satz von Gauß–Bonnet

In diesem Kapitel wollen wir den Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Innenwinkel von Polygonen sowie der Gaußschen Krümmung behandeln. Dazu benötigen wir zunächst einige Definitionen.

18.1 Definition

Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge und homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe. Es existiere eine stückweise reguläre, einfach geschlossene Kurve $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\beta(I) = \partial Q$, dann heißt Q ein **Polygon** in $\mathbb{R}^2$ und β **Randkurve** von Q.

18.2 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $Q \subset U$ ein Polygon in $\mathbb{R}^2$. Dann heißt $P := f(Q)$ **Polygon auf der Fläche f** und $\alpha = f \circ \beta$ die **Randkurve von P**, wobei β die Randkurve von Q ist.

18.3 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit Parameter Bogenlänge auf f. Man definiert

$$\int_{\partial P} \kappa_{f,g}^{\alpha}(t)\, dt := \int_I \kappa_{f,g}^{\alpha}(t)\, dt := \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_{f,g}^{\alpha|[t_{i-1};t_i]}(t)\, dt,$$

wobei

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

eine Unterteilung von I ist, so daß $\alpha|[t_{i-1}; t_i]$ für $i = 1, \ldots, k$ regulär ist.

18.4 Satz von Gauß–Bonnet

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Sei P ein Polygon auf f und $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Randkurve von P mit Parameter Bogenlänge, das heißt $\alpha = f \circ \beta$ mit einem

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Seien weiter $\gamma_{\alpha,1}, \ldots, \gamma_{\alpha,k}$ die Winkel in den Ecken von α, so gilt

$$\iint_P K_f + \int_{\partial P} \kappa_{f,g}^{\alpha} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\alpha,j} = 2\pi.$$

Beweis

Ohne Einschränkung besitze f geodätische Koordinaten (sonst benutze eine hinreichend kleine Partitionierung von P; die Summe der Randintegrale über Teilbereiche von P der geodätischen Krümmungen der Randkurven der Teilbereiche von P ergibt aus Orientierungsgründen gerade $\int_{\partial P} \kappa_{f,g}^{\alpha}$).

$$\iint_P K_f(u)\, dS(u) \overset{\text{An. III}}{\downarrow} = \iint_Q K_f(u) \sqrt{\det A_f(u)}\, du = \iint_Q K_f(u) \sqrt{G_f(u)}\, du$$

$$\overset{12.4}{=} \iint_Q -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G_f(u)}} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{G_{f,u_1}(u)}{\sqrt{G_f(u)}} \right) \sqrt{G_f(u)}\, du$$

$$= -1/2 \iint\limits_Q \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{G_{f,u_1}(u)}{\sqrt{G_f(u)}}\right) du \overset{\text{Stokes}}{\downarrow} = -1/2 \int\limits_{\partial Q} \frac{G_{f,u_1}(u)}{\sqrt{G_f(u)}}\, du_2$$

$$\overset{\text{An. III}}{\downarrow} = -1/2 \int\limits_I \frac{G_{f,u_1}(\beta(t))}{\sqrt{G_f(\beta(t))}} \dot{u}_2(t)\, dt \overset{17.15}{=} -\int\limits_I \Big(\kappa_{\substack{\alpha\\ f},g}(t) - \dot{\varphi}(t)\Big)\, dt$$

$$= -\int\limits_I \kappa_{\substack{\alpha\\ f},g}(t)\, dt + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\varphi}(t)\, dt$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} -\int\limits_{\partial P} \kappa_{\substack{\alpha\\ f},g}(t)\, dt + \sum_{j=1}^{k} (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}))$$

$$\overset{21.11}{=} -\int\limits_{\partial P} \kappa_{\substack{\alpha\\ f},g}(t)\, dt + \Big(2\pi - \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\alpha,j}\Big).$$

Der Umlaufsatz für Kurven $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und die hier benutzten Folgerungen finden sich in *Bemerkung 21.11*.

18.5 Definition

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Randkurve eines Polyeders P auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dann heißen die Zahlen

$$\beta_{\alpha,j} := \pi - \gamma_{\alpha,j} \quad \text{für } j = 1, \ldots, k$$

die **Innenwinkel** von P.

18.6 Satz

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Gauß–Bonnet gilt

$$\iint\limits_P K_f + \int\limits_{\partial P} \kappa_{\substack{\alpha\\ f},g} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{\alpha,j} + (2-k)\pi.$$

Beweis

Die Behauptung folgt sofort aus *Satz 18.4*.

18.7 Theorema elegantissimum

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Randkurve des Polygons P auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\alpha|[t_{i-1}; t_i]$ für $i = 1, \ldots, k$ (regulär und) geodätisch, wobei

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$$

eine Unterteilung von I ist. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_{\alpha,j} = (k-2)\pi + \iint\limits_P K_f(u)\, dS(u).$$

Speziell gilt für ein geodätisches Dreieck

$$\beta_{\alpha,1} + \beta_{\alpha,2} + \beta_{\alpha,3} = \pi + \iint\limits_P K_f(u)\, dS(u).$$

Ist weiterhin $K_f \equiv K_0$ konstant, so gilt

$$\beta_{\alpha,1} + \beta_{\alpha,2} + \beta_{\alpha,3} = \pi + K_0 \mathrm{vol}_2(P).$$

Beweis

Dies ist eine direkte Folgerung des vorherigen Satzes.

18.8 Beispiele

a) Für ein geodätisches Dreieck P auf der Kugeloberfläche (Radius R) mit Spitze im Nordpol und gegenüberliegender Seite auf dem Äquator gilt

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta = \pi + \frac{1}{R^2}\mathrm{vol}_2(P) = \pi + \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 \frac{\beta}{4\pi} = \pi + \beta.$$

b) Auf einer Fläche f mit $K_f \leq 0$ gibt es keine geodätischen Zweiecke, denn es ist

$$0 \leq \beta_1 + \beta_2 = (2-2)\pi + \iint_P K_f \leq 0.$$

19 Das covariante Differential und der Riemannsche Krümmungstensor

19.1 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in U$ und $X: U \longrightarrow T_f(U)$ ein Tangentenvektorfeld auf f. Weiter sei $Y := y_1 f_{u_1}(p) + y_2 f_{u_2}(p)$ mit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\nabla_{Y,p} X := \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi_{X,i}}{\partial u_j}(p) + \sum_{k=1}^{2} \Gamma^i_{f,jk}(p) \xi_{X,k}(p) \right) y_j \right) f_{u_i}(p)$$

covariante Ableitung des Vektorfeldes X in Richtung Y.

19.2 Bemerkung

Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\beta: I \longrightarrow U;\ t \longmapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sei weiter $X: U \longrightarrow T_f(U)$ ein Tangentenvektorfeld auf f, dann gilt für alle $t \in I$

a) $\xi_{X \circ \beta, i}(t) = \xi_{X,i}(\beta(t)) \quad$ für $i = 1, 2$,

b) $\dfrac{\nabla X \circ \beta}{dt}(t) = \nabla_{\dot\alpha(t), \beta(t)} X.$

Beweis

Es ist für $t \in I$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \xi_{X,i}(\beta(t)) f_{u_i}(\beta(t)) &= X(\beta(t)) \\ &= (X \circ \beta)(t) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \xi_{X \circ \beta, i}(t) f_{u_i}(\beta(t)). \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $f_{u_1}(\beta(t))$ und $f_{u_2}(\beta(t))$ folgt a). Die Behauptung b) ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{\nabla X \circ \beta}{dt}(t) &\overset{17.4}{=} \sum_{i=1}^{2} \left(\dot\xi_{X \circ \beta, i}(t) + \sum_{j,k=1}^{2} \xi_{X \circ \beta, k}(t) \dot u_j(t) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \right) f_{u_i}(\beta(t)) \\ &\overset{a)}{=} \sum_{i=1}^{2} \left(\dot{\overbrace{\xi_{X,i} \circ \beta}}(t) + \sum_{j,k=1}^{2} \left(\xi_{X,i}(\beta(t)) \dot u_j(t) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \right) \right) f_{u_i}(\beta(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi_{X,i}}{\partial u_j}(\beta(t)) \dot u_j(t) + \sum_{k=1}^{2} \xi_{X,k}(\beta(t)) \dot u_j(t) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \right) \right) f_{u_i}(\beta(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi_{X,i}}{du_j}(\beta(t)) + \sum_{k=1}^{2} \xi_{X,k}(\beta(t)) \Gamma^i_{f,kj}(\beta(t)) \right) \dot u_j(t) \right) f_{u_i}(\beta(t)) \\ &\overset{19.1}{=} \nabla_{\dot\alpha(t), \beta(t)} X. \end{aligned}$$

19.3 Definition

Sei $X: U \longrightarrow T_f(U)$ ein Tangentenvektorfeld auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $p \in U$. Die folgende lineare Abbildung heißt das **covariante Differential** von X

$$\nabla_p X: T_f(p) \longrightarrow T_f(p);\ Y \longmapsto \nabla_{Y,p} X.$$

19.4 Definition

Seien $X, Y: U \longrightarrow T_f(U)$ Tangentenvektorfelder auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dann ist die Abbildung

$$\nabla_Y X: U \longrightarrow T_f(U);\ p \longmapsto \nabla_{Y(p),p} X$$

ein Tangentenvektorfeld auf f.

19.5 Definition

Seien $X, Y: U \longrightarrow T_f(U)$ Tangentenvektorfelder auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dann definiert man

$$[X,Y]: U \longrightarrow T_f(U);\ p \longmapsto \sum_{i=1}^{2} \Big(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_{Y,i}}{\partial u_j}(p) \xi_{X,j}(p) - \xi_{Y,j}(p) \frac{\partial \xi_{X,i}}{\partial u_j}(p) \Big) f_{u_i}(p).$$

19.6 Definition

Seien $X, Y, Z: U \longrightarrow T_f(U)$ Tangentenvektorfelder auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dann heißt die Abbildung

$$R(X,Y)Z: U \longrightarrow T_f(U);\ p \longmapsto \nabla_X(\nabla_Y Z)(p) - \nabla_Y(\nabla_X Z)(p) - \nabla_{[X,Y]} Z(p)$$

der **Riemannsche Krümmungsoperator** von X, Y und Z.

19.7 Bemerkung

Seien $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2: U \longrightarrow T_f(U)$ Tangentenvektorfelder auf der Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Es sei $p \in U$ und es gelte

$$X_1(p) = X_2(p), \quad Y_1(p) = Y_2(p) \quad \text{und} \quad Z_1(p) = Z_2(p),$$

dann gilt

$$(R(X_1, Y_1)Z_1)(p) = (R(X_2, Y_2)Z_2)(p).$$

19.8 Definition

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann definieren wir für $i = 1, 2$ die Tangentenvektorfelder

$$\mathcal{I}_{f,i}: U \longrightarrow T_f(U);\ p \longmapsto f_{u_i}(p).$$

19.9 Bemerkung

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann gilt für $i, j = 1, 2$

$$\xi_{\mathcal{I}_{f,i},j} \equiv \delta_{ij}.$$

19.10 Hilfssatz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Für $i, j = 1, 2$ gilt

$$\nabla_{\mathcal{I}_{f,i}} \mathcal{I}_{f,j} \equiv \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{f,ij}^k \mathcal{I}_{f,k} \equiv \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{f,ij}^k f_{u_k}.$$

Beweis

Für $p \in U$ gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{I}_{f,i}} \mathcal{I}_{f,j}(p) &= \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi_{\mathcal{I}_{f,j},i}}{\partial u_j}(p) + \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{f,jk}^{i}(p) \xi_{\mathcal{I}_{f,j},k}(p) \right) \delta_{ij} \right) f_{u_i}(p) \\
&\overset{19.1}{\downarrow} \\
&= \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{l=1}^{2} \left(\underbrace{\frac{\partial \xi_{\mathcal{I}_{f,j},k}}{\partial u_l}(p)}_{=0} + \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{f,lm}^{k}(p) \xi_{\mathcal{I}_{f,j},m}(p) \right) \delta_{li} \right) f_{u_k}(p) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{l=1}^{2} \left(\sum_{m=1}^{2} \Gamma_{f,lm}^{k}(p) \delta_{jm} \right) \delta_{li} \right) f_{u_k}(p) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{l=1}^{2} \Gamma_{f,lj}^{k}(p) \delta_{li} \right) f_{u_k}(p) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{f,ij}^{k}(p) f_{u_k}(p).
\end{aligned}$$

19.11 Satz

Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, dann gilt

$$R(\mathcal{I}_{f,k}, \mathcal{I}_{f,j}) \mathcal{I}_{f,i} = \sum_{m=1}^{2} R_{f,ijk}^{m} \mathcal{I}_{f,m}.$$

Beweis

Für $i, j, k = 1, 2$ wissen wir

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{I}_{f,k}} (\nabla_{\mathcal{I}_{f,j}} \mathcal{I}_{f,i}) &\overset{19.10}{\downarrow} \\
&= \nabla_{\mathcal{I}_{f,k}} \left(\sum_{l=1}^{2} \Gamma_{f,kj}^{l} \mathcal{I}_{f,l} \right) \\
&\overset{19.9}{\downarrow} \\
&= \sum_{r=1}^{2} \left(\sum_{m=1}^{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{f,ji}^{r}}{\partial u_m} + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_{f,mn}^{r} \Gamma_{f,ji}^{n} \right) \delta_{mk} \right) \mathcal{I}_{f,r} \qquad (*) \\
&= \sum_{r=1}^{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{f,ji}^{r}}{\partial u_k} + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_{f,kn}^{r} \Gamma_{f,ji}^{n} \right) \mathcal{I}_{f,r}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$[\mathcal{I}_{f,k}, \mathcal{I}_{f,j}] = \sum_{m=1}^{2} \left(\sum_{n=1}^{2} \underbrace{\frac{\partial \xi_{\mathcal{I}_{f,j},m}}{\partial u_n}}_{=0} \xi_{\mathcal{I}_{f,k},n} - \xi_{\mathcal{I}_{f,j},n} \underbrace{\frac{\partial \xi_{\mathcal{I}_{f,k},m}}{\partial u_n}}_{=0} \right) \mathcal{I}_{f,m} \equiv 0$$

folgt

$$\nabla_{[\mathcal{I}_{f,k}, \mathcal{I}_{f,j}]} \mathcal{I}_{f,i} = \nabla_0 \mathcal{I}_{f,i} = \sum_{r=1}^{2} \left(\sum_{m=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi_{\mathcal{I}_{f,i},r}}{\partial u_m} + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_{f,mn}^{r} \xi_{\mathcal{I}_{f,i},n} \right) 0 \right) \mathcal{I}_{f,r} \equiv 0. \qquad (**)$$

Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
R(\mathcal{I}_{f,k},\mathcal{I}_{f,j})\mathcal{I}_{f,i} &= \nabla_{\mathcal{I}_{f,k}}(\nabla_{\mathcal{I}_{f,j}}\mathcal{I}_{f,i}) - \nabla_{\mathcal{I}_{f,j}}(\nabla_{\mathcal{I}_{f,k}}\mathcal{I}_{f,i}) - \nabla_{[\mathcal{I}_{f,k},\mathcal{I}_{f,j}]}\mathcal{I}_{f,i} \\
&\overset{(*),(**)}{\downarrow} \\
&= \sum_{r=1}^{2}\Big(\frac{\partial\Gamma^r_{f,ji}}{\partial u_k} + \sum_{n=1}^{2}\Gamma^r_{f,kn}\Gamma^n_{f,ji}\Big)\mathcal{I}_{f,r} - \sum_{r=1}^{2}\Big(\frac{\partial\Gamma^r_{f,ki}}{\partial u_j} + \sum_{n=1}^{2}\Gamma^r_{f,jn}\Gamma^n_{f,ki}\Big)\mathcal{I}_{f,r} \\
&\overset{13.2}{\downarrow} \\
&= \sum_{r=1}^{2}\Big(\Gamma^r_{f,ij,u_k} - \Gamma^r_{f,ik,u_j} + \sum_{n=1}^{2}\Gamma^n_{f,ij}\Gamma^r_{f,nk} - \Gamma^n_{f,ik}\Gamma^r_{f,nj}\Big)\mathcal{I}_{f,r} \\
&\overset{14.1}{\downarrow} \\
&= \sum_{r=1}^{2} R^r_{f,ijk}\mathcal{I}_{f,r}.
\end{aligned}$$

19.12 Definition

Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann heißt die Funktion

$$R_p\colon T_f(p)\times T_f(p)\times T_f(p)\times T_f(p) \longrightarrow \mathbb{R};\ (X_p,Y_p,Z_p,W_p) \longmapsto \langle (R(X,Y)Z)(p), W(p)\rangle$$

der **Riemannsche Krümmungstensor** auf der Fläche f in p. Dabei sind

$$X,Y,Z,W\colon U \longrightarrow T_f(U)$$

Tangentenvektorfelder mit

$$X_p = X(p), \quad Y_p = Y(p), \quad Z_p = Z(p) \quad \text{und} \quad W_p = W(p).$$

(Nach *Bemerkung 19.7* ist R_p wohldefiniert.)

19.13 Bemerkung

Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $X = J_f(p)x \in T_f(p)$, dann ist die Abbildung

$$\mathcal{K}_{f,x}\colon U \longrightarrow T_f(U);\ p \longmapsto J_f(p)x$$

ein differenzierbares Tangentenvektorfeld auf f mit $\mathcal{K}_{f,x}(p) = X$. Somit gilt

$$R_p(X_1,X_2,X_3,X_4) = \Big\langle R(\mathcal{K}_{f,x_1}(p),\mathcal{K}_{f,x_2}(p))\mathcal{K}_{f,x_3}(p), X_4\Big\rangle,$$

für $X_i \in T_f(p)$ $(i = 1,2,3,4)$ und

$$X_i = J_f(p)x_i \quad \text{für } i = 1,2,3.$$

19.14 Satz

Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in U$. Dann ist für $i,j,k,l = 1,2$

$$R_p\Big(f_{u_l}(p), f_{u_k}(p), f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)\Big) = R_{f,ijkl}(p).$$

Das heißt, die $R_{f,ijkl}(p)$ sind die Koeffizienten des Tensors R_p bezüglich der Basis $\mathcal{B}_f(p)$.

Beweis

Für $i,j,k,l = 1,2$ ist

$$\begin{aligned}
R_p\Big(f_{u_l}(p), f_{u_k}(p), f_{u_i}(p), f_{u_j}(p)\Big) &= R_p\Big(J_f(p)e_l, J_f(p)e_k, J_f(p)e_i, J_f(p)e_j\Big) \\
&= \Big\langle R(\mathcal{K}_{f,e_l}(p), \mathcal{K}_{f,e_k}(p))\mathcal{K}_{f,e_i}(p), \mathcal{K}_{f,e_j}(p)\Big\rangle \\
&= \Big\langle R(\mathcal{I}_{f,l}(p), \mathcal{I}_{f,k}(p))\mathcal{I}_{f,i}(p), \mathcal{I}_{f,j}(p)\Big\rangle \\
&\overset{19.11}{=} \Big\langle \sum_{m=1}^{2} R^m_{f,ikl}(p)\mathcal{I}_{f,m}(p), \mathcal{I}_{f,j}(p)\Big\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{2} R^m_{f,ikl}(p)\langle f_{u_m}(p), f_{u_j}(p)\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{2} R^m_{f,ikl}(p) g_{f,mj}(p) \\
&= R_{f,ijkl}(p).
\end{aligned}$$

III Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Wir wollen in den folgenden Kapiteln eine Einführung in das weiterführende Gebiet der Riemannschen Mannigfaltigkeiten geben.

20 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Sei im weiteren M ein zusammenhängender Hausdorffraum und $n \in \mathbb{N}$.

20.1 Definition

Ein Tripel (φ, U, V) heißt **Karte** auf M, wenn $U \subset M$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen sind und

$$\varphi: U \longrightarrow V$$

eine topologische Abbildung ist.

20.2 Definition

Zwei Karten (φ_1, U_1, V_1) und (φ_2, U_2, V_2) heißen **verträglich**, wenn die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

differenzierbar ist.

20.3 Definition

Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf M ist eine Familie von Karten $(\varphi_i, U_i, V_i)_{i \in I}$ mit den Eigenschaften

1) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

2) Für je zwei Indizes $i, j \in I$ sind die Karten (φ_i, U_i, V_i) und (φ_j, U_j, V_j) verträglich.

20.4 Definition

Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M, so heißt das Paar $(M, \mathcal{A})$ eine **differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit**. $\mathcal{A}$ heißt auch **differenzierbare Struktur** auf M.

20.5 Definition

M heißt orientiert, wenn für alle $i, j \in I$ gilt

$$\det J_{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}}(v_i) > 0 \quad \text{für alle } v_i \in V_i.$$

20.6 Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $W \subset M$ offen. Eine Funktion $h: W \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar**, wenn für jede Karte $(\varphi, U, V) \in \mathcal{A}$

$$h \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar ist.

20.7 Definition

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $F: M \longrightarrow N$ eine Abbildung. F heißt **differenzierbar**, wenn F stetig ist und für jedes $W \subset N$ offen und jedes differenzierbare $h: W \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h \circ F^{-1}: F^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar ist.

20.8 Definition

Für $p \in M$ heißt

$$C_p^\infty := \left\{ f : U(p) \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; U \text{ Umgebung von } p \text{ und } f \text{ in } p \text{ unendlich oft differenzierbar} \right\}$$

Algebra der in p differenzierbaren Funktionen. Dabei sollen die Funktionen

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

identifiziert werden, falls es eine Umgebung $W(p)$ mit $W \subset (U \cap V)$ gibt mit $g|W = h|W$.

20.9 Definition

Sei $p \in M$. Eine Abbildung $X : C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $g, h \in C_p^\infty$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$X(ag + bh) = aX(g) + bX(h)$$

und

$$X(gh) = h(p)X(g) + g(p)X(h)$$

gilt, heißt **Tangentenvektor** oder **Derivation** von M in p.

20.10 Definition

Für $p \in M$ heißt die Menge

$$T_M(p) := \left\{ X : C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; X \text{ Derivation von } M \text{ in } p \right\}$$

Tangentialraum von M in p.

20.11 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Abbildung

$$X_v : C_0^\infty \longrightarrow \mathbb{R};\ g \longmapsto \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \frac{\partial g}{\partial x_\nu}(0) = \langle v, \operatorname{grad} g(0) \rangle$$

eine Derivation von M in 0.

20.12 Definition

a) $T_M := \bigcup_{p \in M} T_M(p)$ heißt **Tangentialraum** von M.

b) Eine Abbildung $X : M \longrightarrow T_M$ mit $X(p) \in T_M(p)$ für alle $p \in M$ heißt **Vektorfeld**.

c) X heißt **differenzierbar**, wenn für alle differenzierbaren Funktionen h die Abbildung

$$\mathcal{X}_{X,h} : M \longrightarrow \mathbb{R};\ p \longmapsto X(p)(h)$$

differenzierbar ist. Somit erhalten wir für $p \in M$ eine Abbildung

$$\overline{X}_p : C_p^\infty \longrightarrow C_p^\infty;\ h \longmapsto \mathcal{X}_{X,h}.$$

20.13 Beispiel

Seien $M := U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v_1, \ldots v_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist die folgende Abbildung ein differenzierbares Vektorfeld auf M

$$X : M \longrightarrow T_M;\ x \longmapsto \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_\nu}(x).$$

20.14 Bemerkung

Sei X ein Vektorfeld auf M und $p \in M$, dann gilt für alle $g, h \in C_p^\infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$

$$\overline{X}_p(ag + bh) = a\overline{X}_p(g) + b\overline{X}_p(h)$$

und

$$\overline{X}_p(gh) = h\overline{X}_p(g) + g\overline{X}_p(h). \qquad (*)$$

20.15 Bemerkung

Seien X und Y Vektorfelder auf M, dann besitzt die Abbildung $\overline{X}_p \circ \overline{Y}_p$ im allgemeinen nicht die Eigenschaft $(*)$.

20.16 Definition

Seien X, Y Tangentenvektorfelder auf M, dann besitzt die Abbildung

$$[X, Y]_p : C_p^\infty \longrightarrow C_p^\infty;\ h \longmapsto \overline{Y}_p(\overline{X}_p(h)) - \overline{X}_p(\overline{Y}_p(h))$$

die Eigenschaft $(*)$.

20.17 Definition

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und weiter sei $p \in M$ und eine differenzierbare Abbildung $F : M \longrightarrow N$ gegeben. Dann ist für $X \in T_M(p)$ die Abbildung

$$dF(X)_p : C_{F(p)}^\infty \longrightarrow \mathbb{R};\ g \longmapsto X(g \circ F)$$

ein Tangentenvektorfeld von M in $F(p)$ und die lineare Abbildung

$$dF_p : T_M(p) \longrightarrow T_N(F(p));\ X \longmapsto dF(X)_p$$

das **Differential** der Abbildung F in p.

21 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

21.1 Definition

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein **zweifach covarianter Tensor** ((0,2)–Tensor) F_p ist eine bilineare Abbildung

$$F_p: T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

21.2 Definition

Ein **(0,2)–Tensorfeld** auf M ist eine Familie $(F_p)_{p\in M}$ von (0,2)–Tensoren

$$F_p: T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

21.3 Definition

Ein Vektorfeld $F = (F_p)_{p\in M}$ heißt **differenzierbar**, wenn für je zwei differenzierbare Vektorfelder $X, Y: M \longrightarrow T_M$ die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbb{R};\ p \longmapsto F_p(X(p), Y(p))$$

differenzierbar ist.

21.4 Definition

Ein Paar (M, g) heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**, wenn gilt

a) M ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

b) $g = (g_p)_{p\in M}$ ist ein differenzierbares (0,2)–Tensorfeld auf M und für $p \in M$ ist

$$g_p: T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

symmetrisch und positiv definit, das heißt für $X_p, Y_p \in T_M(p)$ gilt

1) $g_p(Y_p, X_p) = g_p(X_p, Y_p)$

2) $g_p(X_p, X_p) > 0, \quad$ falls $X_p \not\equiv 0$.

Damit ist g_p ein Skalarprodukt auf $T_M(p)$.

21.5 Beispiel

Sei $U := (0;\pi) \times (0;2\pi)$. Weiter seien für $i, j = 1, 2$ die Funktionen $g_{ij}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Für $p \in U$ sind

$$X_p = \sum_{i=1}^{2} \xi_{X_p,i} \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{und} \quad Y_p = \sum_{i=1}^{2} \xi_{Y_p,i} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Tensorfelder. Dann bilden für $p \in M$ die Abbildungen

$$g_p: T_M(p) \times T_M(p) \longrightarrow \mathbb{R};\ g_p(X, Y) := \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \xi_{X_p,i} \xi_{Y_p,j}$$

ein (0,2)–Tensorfeld und für

$$g_{11} > 0, \quad g_{12} = g_{21} \quad \text{und} \quad \det\left(g_{ij}\right)_{i,j=1,2} > 0$$

ist (U, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

21.6 Definition

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$, dann definieren wir durch

$$\|X\| := \sqrt{g_p(X,X)} \quad \text{für } X \in T_M(p)$$

eine Norm auf $T_M(p)$. Somit wird $T_M(p)$ zum euklidischen Vektorraum. Für $X, Y \in T_M(p)$ heißt

$$\varphi := \arccos \frac{g_p(X,Y)}{\|X\|\|Y\|}$$

der Winkel zwischen X und Y.

21.7 Definition

a) Eine differenzierbare Abbildung $\alpha: I \longrightarrow M$ heißt Kurve auf M.

b) Sei $\alpha: I \longrightarrow M$ eine Kurve auf M. Wir definieren das folgende Tangentialvektorfeld auf I

$$E_1: I \longrightarrow T_I;\ t \longmapsto \frac{d\,\cdot}{dt}(t).$$

Dann heißt

$$L_\alpha := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}\Big(d\alpha(E_1(t)), d\alpha(E_1(t))\Big)}\, dt$$

Länge von α.

21.8 Definition

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abbildung

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R};\ (p,q) \longmapsto \inf\Big\{ L_\alpha \;\Big|\; \alpha: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Kurve mit } \alpha(a) = p, \alpha(b) = q \Big\}$$

ist eine mit der Topologie auf M verträgliche Metrik.

21.9 Bemerkung

Man kann auch für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten einen Riemannschen Krümmungstensor

$$R_p: T_M \times T_M \times T_M \times T_M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } p \in M$$

definieren. Auch der Begriff einer geodätischen Kurve ist wohldefiniert.

21.10 Beispiele

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit wie in *21.5*. Damit können wir die Gaußkrümmung

$$K: M \longrightarrow \mathbb{R};\ p \longmapsto \frac{R_{1212}(p)}{g_{11}(p)g_{22}(p) - g_{12}(p)^2}$$

definieren. Wir betrachten folgende Beispiele.

1) Sei $U := (0;\pi) \times (0;2\pi)$. Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned} g_{11}: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto 1, \\ g_{12}, g_{21}: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto 0, \\ g_{22}: U &\longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto \sin^2 u. \end{aligned}$$

Dies sind die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von S^2. Hier erhalten wir $K \equiv 1$, wie bei S^2.

2) Sei $U := (0;2\pi) \times (0;2\pi)$, $0 < a < r$ und

$$\begin{aligned} g_{11}&: U \longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto a^2, \\ g_{12}, g_{21}&: U \longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto 0, \\ g_{22}&: U \longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto (r + a\cos u)^2. \end{aligned}$$

Dies sind die Koeffizienten der ersten Fundamentalform des Torus.

3) Sei $H := \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0 \,\}$. Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned} g_{11}&: U \longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto \frac{1}{v^2}, \\ g_{12}, g_{21}&: U \longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto 0, \\ g_{22}&: U \longrightarrow \mathbb{R};\ (u,v) \longmapsto \frac{1}{v^2}. \end{aligned}$$

Die Mannigfaltigkeit $(H, (g_{ij})_{i,j=1,2})$ heißt Poincaré–Halbebene. Für ihre Krümmung gilt $K \equiv -1$. Es gibt jedoch keine Fläche $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $g_{ij} \equiv g_{f,ij}$, $i,j = 1,2$, das heißt die Geometrie der Poincaré–Halbebene wird nicht von einer Fläche induziert. Die Poincaré–Halbebene ist ein Beispiel nichteuklidischer Geometrie.

21.11 Bemerkung (Umlaufsatz für (U,g))

Sei (U,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit wie in *Beispiel 21.5* und $\alpha: I \longrightarrow U$ eine stückweise reguläre, einfach geschlossene Kurve. Mit der wie in *21.6* definierten Winkelmessung kann man nun analog zu *Kapitel 4* die Umlaufzahl n_α definieren. (Für $g_{22} \equiv 1$ ist dies die bereits bekannte Umlaufzahl.) Auch hier ist $n_\alpha \in \mathbb{Z}$. Für $\lambda \in [0;1]$ definieren wir eine neue Riemannsche Mannigfaltigkeit $(U, g^{(\lambda)})$ mit

$$g_{11}^{(\lambda)} \equiv 1, \quad g_{12}^{(\lambda)} = g_{21}^{(\lambda)} \equiv 0 \quad \text{und} \quad g_{22}^{(\lambda)} \equiv \lambda + (1-\lambda) g_{22}$$

und die zugehörige Umlaufzahl $n_\alpha^{(\lambda)}$. Die Abbildung

$$[0;1] \longrightarrow \mathbb{Z};\ \lambda \longmapsto n_\alpha^{(\lambda)}$$

ist nach Definition stetig und damit konstant. Wir erhalten also

$$n_\alpha^{(1)} = n_\alpha^{(\lambda)} \quad \text{für alle } \lambda \in [0;1].$$

Damit ist

$$n_\alpha^{(0)} = n_\alpha^{(1)} = n_\alpha \overset{5.1}{=} \pm 1.$$

Anhang

Anhang A: Tensoren

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum (über $\mathbb{R}$).

Definition

Ein **p–fach kontravarianter, q–fach covarianter Tensor** ((p,q)–Tensor) F ist eine multilineare Abbildung

$$F: \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei V^* der duale Vektorraum zu V ist, das heißt $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

Basis und duale Basis

Sei $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis in V und $\mathcal{B}^* := \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ die zugehörige duale Basis in V^*, das heißt

$$v_i^*: V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n \text{ und}$$
$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Koordinatentransformation

Für $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q) \in \{1, \ldots, n\}^{p+q}$ heißen die Zahlen

$$a^{F;i_1,\ldots,i_p}_{\mathcal{B};j_1,\ldots,j_q} := F(v_{i_1}^*, \ldots, v_{i_p}^*, v_{j_1}, \ldots, v_{j_q})$$

die **Koordinaten** von F bezüglich $\mathcal{B}$. Sei $\widetilde{\mathcal{B}} := \{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n\}$ eine weitere Basis von V und $\widetilde{\mathcal{B}}^* := \{\widetilde{v}_1^*, \ldots, \widetilde{v}_n^*\}$ die zugehörige duale Basis. Seien die Zahlen $\widetilde{t}_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ so, daß gilt

$$\widetilde{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{t}_{ij} v_j \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

und die Zahlen t_{ij} für $i, j = 1, \ldots, n$ so, daß gilt

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \widetilde{v}_j.$$

Dann ist

$$a^{F;i_1,\ldots,i_p}_{\widetilde{\mathcal{B}};j_1,\ldots,j_q} = \sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\mu_p \\ \nu_1,\ldots,\nu_q}} \tilde{t}_{i_1\mu_1} \cdot \ldots \cdot \tilde{t}_{i_p\mu_p} \cdot t_{j_1\nu_1} \cdot \ldots \cdot t_{j_q\nu_q} \cdot a^{F;\mu_1,\ldots,\mu_p}_{\mathcal{B};\nu_1,\ldots,\nu_q}.$$

Anhang B: Das Differential einer differenzierbaren Abbildung

Für $S \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in S$ sei der Tangentialraum $T_S(p)$ so definiert

$$T_S(p) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{zu } v \text{ existiert eine Kurve } \alpha: I \longrightarrow S \text{ mit } \alpha(\tfrac{a+b}{2}) = p \text{ und } \dot{\alpha}(\tfrac{a+b}{2}) = v \right\}.$$

Sei weiter $S' \subset \mathbb{R}^k$, $q \in S'$ und $F: S \longrightarrow S'$ eine differenzierbare Abbildung mit $F(p) = q$. Dazu definieren wir das Differential von F in p wie folgt

$$dF_p: T_S(p) \longrightarrow T_{S'}(q);\ v \longmapsto J_F(p)v.$$

Anmerkung

Für eine Kurve $\alpha: I \longrightarrow S$ mit

$$\alpha(\tfrac{a+b}{2}) = p \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}(\tfrac{a+b}{2}) = v$$

gilt

$$\dot{\overbrace{F \circ \alpha}}(\tfrac{a+b}{2}) = J_F(\alpha(\tfrac{a+b}{2}))\dot{\alpha}(\tfrac{a+b}{2}) = J_F(p)v.$$

Also läßt sich dF_p auch folgendermaßen auffassen.

$$dF_p: T_S(p) \longrightarrow T_{S'}(q);\ \dot{\alpha}(\tfrac{a+b}{2}) \longmapsto \dot{\overbrace{F \circ \alpha}}(\tfrac{a+b}{2}).$$

Wir betrachten nun den Spezialfall einer differenzierbaren Funktion

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$dF_p: T_{\mathbb{R}^n}(p) \longrightarrow T_{\mathbb{R}}(F(p));\ v \longmapsto \langle \operatorname{grad} F(p), v \rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(p) v_\nu.$$

Mit Hilfe der Projektionen

$$x_\nu: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_\nu$$

und der zugehörigen Differentiale

$$dx_\nu: T_{\mathbb{R}^n}(p) \longrightarrow T_{\mathbb{R}}(x_\nu(p));\ v \longmapsto \langle \operatorname{grad} x_\nu(p), v \rangle = v_\nu$$

erhalten wir

$$dF_p(v) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(p) v_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(p) dx_\nu(v) \quad \text{für alle } v \in T_{\mathbb{R}^n}(p).$$

Noch spezieller, das heißt für $n = 1$ ergibt sich für eine differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$df_p: T_{\mathbb{R}}(p) \longrightarrow T_{\mathbb{R}}(f(p));\ x \longmapsto \frac{df}{dx}(p)x = f'(p)x,$$

also

$$df_p = \frac{df}{dx}(p)dx.$$

Anhang C: Symbolverzeichnis

Symbol	*Bezeichnung*	*S.*	*Nr.*
a_f	Determinante der ersten Fundamentalmatrix der Fläche f	49	9.1
A_f	erste Fundamentalmatrix der Fläche f	49	9.1
B_α	Binormale der Kurve α	6	2.1
b_f	Determinante der zweiten Fundamentalmatrix der Fläche f	49	9.1
B_f	zweite Fundamentalmatrix der Fläche f	49	9.1
$\mathcal{B}_f(p)$	kanonische Tangentialraumbasis	35	6.6
E_f	Koeffizient der ersten Fundamentalform	40	7.1
F_f	Koeffizient der ersten Fundamentalform	40	7.1
G_f	Koeffizient der ersten Fundamentalform	40	7.1
$g_{f,ij}$	Koeffizient der ersten Fundamentalform	40	7.1
$\widetilde{g}_{f,ij}$	Komponenten der Matrix A_f^{-1}	49	9.1
$\gamma_{\alpha,j}$	Eckwinkel	25	4.12
$\Gamma_{f,ijk}$	Christoffelsymbole erster Art	71	13.1
$\Gamma^m_{f,ik}$	Christoffelsymbole zweiter Art	71	13.1
H_f	mittlere Krümmung	52	9.6
$h_{f,ij}$	Koeffizient der zweiten Fundamentalform	44	8.1
$\mathbf{I}_f$	erster Fundamentaltensor	41	7.4
$\mathbf{II}_f$	zweiter Fundamentaltensor	61	10.7
$\mathcal{I}_{f,i}$	kanonische Tangentenvektorfelder	96	19.8
K_f	Gaußsche Krümmung	52	9.6
$\mathcal{K}_{f,x}$	ein spezielles Tangentenvektorfeld	98	19.13
κ_α	Krümmung der Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$	6	2.1
κ_α	Krümmung der Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$	21	4.1
$\kappa^{\alpha}_{f,g}$	geodätische Krümmung	76	15.1
$\kappa^{\alpha}_{f,n}$	Normalkrümmung der Kurve α auf f	76	15.1
κ_f	nomen est omen	46	8.8
$\kappa_{f,i}$	Hauptkrümmungen der Fläche f	51	9.6
L_α	Bogenlänge der Kurve α	2	1.4
L_f	Koeffizient der zweiten Fundamentalform	44	8.1
M_f	Koeffizient der zweiten Fundamentalform	44	8.1
$\nabla_p X$	covariantes Differential von X	95	19.3
$\nabla_{Y,p} X$	covariante Ableitung des Vektorfeldes X in Richtung Y	95	19.1
$\nabla_Y X$	ein spezielles Tangentenvektorfeld	96	19.4
n_α	Umlaufzahl der Kurve α	24	4.9
N_α	Normalenvektor der Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$	6	2.1
N_α	Normalenvektor der Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$	21	4.1
N_f	Koeffizient der zweiten Fundamentalform	44	8.1
n_f	Normale der Fläche f	35	6.7
$R^m_{f,ijk}$	Komponenten des gemischten Riemannschen Krümmungstensors	75	14.1
$R_{f,injk}$	Komponenten des rein covarianten Riemannschen Krümmungstensors	75	14.1

Symbol	*Bezeichnung*	*S.*	*Nr.*
R_p	Riemannscher Krümmungstensor	98	19.12
$R(X,Y)Z$	Riemannscher Krümmungsoperator von X, Y und Z	96	19.6
s_α	Standardbogenlängenparametertransformation	3	1.7
$S^1_f(p)$	Tangentialeinheitssphäre	49	9.2
T_α	Tangentenvektor der Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$	6	2.1
T_α	Tangentenvektor der Kurve $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$	21	4.1
τ_α	Torsion der Kurve α	6	2.1
$T_f(U)$	Tangentialraum der Fläche f	85	17.1
$T_f(u_1,u_2)$	Tangentialraum der Fläche f im Punkt $f(u_1,u_2)$	35	6.6
ϑ_α	Tangentenwinkel der Kurve α	23	4.6
$W_{f,p}$	Weingartenabbildung	60	10.3
$X_{f,i}$	Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche f	52	9.6
$[X,Y]$	ein spezielles Tangentenvektorfeld	96	19.5
$\xi_{X,i}$	Koordinatenfunktionen des Vektorfeldes X	85	17.1

Anhang D: Literaturverzeichnis

do Carmo, M.P.: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Braunschweig 1983, Vieweg

Klingenberg, W.: A Course in Differential Geometry, Berlin 1978, Springer

Walter, R.: Differentialgeometrie, Mannheim 1978, Bibliographisches Institut

Blaschke, W., Leichtweiß, K.: Elementare Differentialgeometrie, Berlin 1973, Springer

Boothby, W.M.: An Intoduction to Differentiable Manifolds and Riemann Geometry, Orlando 1986, Academic Press

Haack, W.: Differential–Geometrie, Bd. 1,2, Wolfenbüttel 1948, Wolfenbütteler Verlagsanstalt