Osnabrücker Schriften
zur Mathematik

Algebraische Geometrie I

Prof. Dr. Heinz Spindler

Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück
Reihe V Vorlesungsskripten, EHeft 5

21. April 1995

OSM Osnabrücker Schriften zur Mathematik

Herausgeber	Selbstverlag der Universität Osnabrück Fachbereich Mathematik/Informatik Postfach 4469 49069 Osnabrück
Geschäftsführer	Prof.Dr.H.-J. Reiffen
Berater	Prof.Dr.P. Brucker/ Prof.Dr.W. Stadje (Angewandte Mathematik) Prof.Dr.H.W. Trapp/ Prof.Dr.R. Vogt (Reine Mathematik) Prof.Dr.A.T. Schreiner/ Prof.Dr.V. Sperschneider (Informatik) Prof.Dr.E. Cohors – Fresenborg/ Prof. Ursula Viet (Didaktik der Mathematik)
Druck	Hausdruckerei der Universität Osnabrück

Copyright bei den Autoren

Weitere Reihen der **OSM**

Reihe D	Mathematisch-didaktische Manuskripte
Reihe I	Manuskripte der Informatik
Reihe M	Mathematische Manuskripte
Reihe P	Preprints
Reihe U	Materialien zum Mathematikunterricht

Algebraische Geometrie I

Vorlesung von

Prof. Dr. Heinz Spindler

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK
FB Mathematik/Informatik
Wintersemester 1994/95

geLaTeXt von Antje Kersting, Wolfgang Lauffher und Vera Stonjek
Korrektur gelesen von Jens Keuchel

Inhaltsverzeichnis

1 Varietäten und Abbildungen **1**

1 Affine und projektive Varietäten 1

2 Lineare Teilräume, endliche Teilmengen, rationale Kurven 27

3 Grundbegriffe der kommutativen Algebra 41

4 Reguläre Funktionen 55

5 Die Kategorie der quasiprojektiven Varietäten 73

6 Projektionen und Eliminationstheorie 91

7 Hilbertscher Nullstellensatz, irreduzible Varietäten 103

8 Rationale Funktionen und rationale Abbildungen 123

9 Beispiele projektiver Varietäten 157

Index **173**

Literaturverzeichnis

Atiyah, MacDonald: Introduction to comutative Algebra (Addison-Wesley 1969)

E. Brieskorn: Algebraische Kurven (Bonn 1975/76)

D. Cox, J. Little, D.O 'Shea: Ideals, Varieties and Algorithms (Springer 1992)

W. Fulton: Algebraic Curves (Benjamin 1969)

J. Harris: Algebraic Geometry. A First Course (Springer 1922)

Hartshorne: Algebraic Geometry (Springer 1977)

Lang: Algebra (Addison-Wesley 1965)

D. Mumford: Algebraic Geometry I (Springer 1976)

D. Mumford: The Red Book of Varieties and Schemes (Springer 1988)

M. Reid: Undergraduate Algebraic Geometry (Cambridge University Press 1988)

Semple/Roth: Introduction to Algebraic Geometry

I.R. Shararevich: Basic Algebraic Geometry (Springer 1974)

van der Waerden: Algebra I + II (Springer 1967, jetzt neue Auflage!)

Kapitel 1

Varietäten und Abbildungen

1 Affine und projektive Varietäten

Es sei K ein Körper.
Bekannte Beispiele sind: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$ (p Primzahl) mit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$,
aber auch z.B. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$, für $d \in \mathbb{Z}$.
Wir nennen K auch den *Grundkörper* für unsere Betrachtungen.

Definition 1.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

a) $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(K) = K^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in K,\ i = 1, \ldots, n\}$ heißt *n-dimensionaler affiner Raum* über K. Die Elemente in $\mathbb{A}^n$ nennen wir Punkte (oder genauer: K-wertige Punkte, rationale Punkte = $\mathbb{Q}$-wertige Punkte, reelle Punkte = $\mathbb{R}$-wertige Punkte, ...).

b) Seien $z_1, \ldots, z_n$ Unbestimmte. Ein *Polynom* in $z_1, \ldots, z_n$ mit Koeffizienten in K ist ein formaler Ausdruck

$$f = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{N} a_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n},$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \in K$ für alle $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\nu_i \leq N$ für $i = 1, \ldots, n$.
Setzt man $a_{\nu_1 \ldots \nu_n} := 0$ für $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\nu_i > N$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so kann man auch schreiben

$$f = \sum_{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n} a_\nu z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}.$$

Die Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^n}$ heißt die *Koeffizientenfolge* des Polynoms f.
Mit der Abkürzung $z^\nu := z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}$ gilt:

$$f = \sum a_\nu z^\nu \quad (\nu \text{ ist ein Multiindex}).$$

Zwei Polynome $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu z^\nu$, $g = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} b_\nu z^\nu$ sind gleich, wenn ihre Koeffizientenfolgen übereinstimmen, d.h. wenn $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^n$ gilt. Die Gleichheit von Polynomen prüft man also durch *Koeffizientenvergleich*. Man sieht nun leicht, daß die Menge

$$K[z_1, \ldots, z_n]$$

aller Polynome in $z_1, \ldots, z_n$ mit Koeffizienten in K mit der Addition

$$f + g := \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} (a_\nu + b_\nu) z^\nu$$

und der Multiplikation

$$f \cdot g := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\mu + \lambda = \nu} a_\mu b_\lambda \right) z^\nu$$

ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins ist. K ist Unterring von $K[z_1, \ldots, z_n]$. $a \in K$ ist das Polynom mit der Koeffizientenfolge

$$a_\nu := \begin{cases} a & \text{falls } \nu = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

$K[z_1, \ldots, z_n]$ heißt der *Polynomring* in den Unbestimmten $z_1, \ldots, z_n$ über K.

Beispiel 1.2
Seien x, y Unbestimmte, $K = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
$f = y^2 \in K[x, y]$ (x kommt nicht vor) und $g = y^2 - x(x-1)(x+1) = y^2 - x^3 + x \in K[x, y]$ sind verschiedene Polynome. Faßt man f und g als Funktionen auf $\mathbb{A}^2(K)$ auf, so ist

$$f(a, b) = b^2 = b^2 - a(a-1)(a+1) = g(a, b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{F} = \{-1, 0, 1\}.$$

Ist $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$, so definiert f eine Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^n(K) &\longrightarrow K, \\ f(a_1, \ldots, a_n) &:= \sum_{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)} a_\nu a_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n} \in K \quad \text{für } a_1, \ldots, a_n \in K. \end{aligned}$$

Beispiel 1.2 zeigt, daß ein von 0 verschiedenes Polynom die Nullfunktion beschreiben kann. Das kann aber nicht auftreten, wenn K genügend viele Elemente hat.

Lemma 1.3 Es sei K unendlich. Dann gilt: Ist $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$ und $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$, so ist f das Nullpolynom. (In diesem Fall sind also zwei Polynome f und g genau dann gleich, wenn $f(a) = g(a)$ für alle $a \in \mathbb{A}^n(K)$ gilt.)

Beweis: Induktion über n:
$n = 1$:
Es sei $f \in K[z]$, $f \neq 0$, $f = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu$, $N \geq 0$, $a_N \neq 0 \Rightarrow \deg(f) = N$
$\Rightarrow f$ hat höchstens N Nullstellen in K
$\Rightarrow f$ ist nicht die Nullfunktion auf K, weil K unendlich ist.

$(n-1) \longrightarrow n$:
Sei $f = \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^\nu$, $f_\nu \in K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$. Für $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}(K)$ sei $f_{a'} := f(a', z_n) = \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu(a') z_n^\nu \in K[z_n]$.
Voraussetzung: $f(a) = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{A}^n$
$\Rightarrow f_{a'}(a_n) = 0 \quad \forall\, a_n \in K,\ a' \in K^{n-1}$
$\Rightarrow f_{a'} = 0 \quad \forall\, a' \in K^{n-1}$
$\Rightarrow f_\nu(a') = 0 \quad \forall\, \nu = 0, \ldots, N,\ a' \in \mathbb{A}^{n-1} \overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow} f_\nu = 0\ \forall\, \nu \Rightarrow f = 0.$ $\square$

Bemerkung 1.4 K ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nichtkonstante Polynom $f \in K[z]$ in Linearfaktoren zerfällt:

$$f = a \prod_{\nu=1}^{n} (z - a_\nu), \quad a \in K^*,\ a_\nu \in K,\ \deg(f) = n.$$

$a_1, \ldots, a_n$ sind die Nullstellen von f.

Beispiel
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, $\mathbb{R}$ hingegen nicht (x^2+1), $\mathbb{F}_p$ auch nicht; aber: Ist K ein Körper $\Rightarrow \exists\, \overline{K}$ algebraisch abgeschlossen mit $K \subset \overline{K}$.

Jeder Körper läßt sich in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten, auch die endlichen Körper. Als „konkretes“ Beispiel für einen algebraisch abgeschlossenen Körper kennen wir $\mathbb{C}$.

Es gilt: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper ist unendlich.
Beweis (Euklid): Ist K endlich, etwa $K = \{a_1, \ldots, a_q\}$, so ist $f = 1 + \prod_{i=1}^{q}(z - a_i) \in K[z]$ ein Polynom vom Grad $q \geq 1$ ohne Nullstellen, denn $f(a) = 1$ für alle $a \in K$. Also ist K nicht algebraisch abgeschlossen. $\square$

Definition 1.5

a) Es sei $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$. $a \in \mathbb{A}^n$ heißt *Nullstelle* von $f \iff f(a) = 0$.

b) Ist $M \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ eine Teilmenge, so heißt

$$\mathbb{V}(M) = \mathbb{V}_K(M) = \{a \in \mathbb{A}^n(K) \mid f(a) = 0\ \forall\, f \in M\}$$

das *Nullstellengebilde* von M in $\mathbb{A}^n(K)$. Sind $f_1, \ldots, f_m \in K[z_1, \ldots, z_n]$, so ist

$$\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m) \ := \ \mathbb{V}(\{f_1, \ldots, f_m\})$$

das *simultane Nullstellengebilde* von $f_1, \ldots, f_m$.
Es gilt natürlich: $\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m) = \mathbb{V}(f_1) \cap \cdots \cap \mathbb{V}(f_m)$.

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{A}^n$ heißt *affine Varietät* (über K) $\iff$
$\exists\, M \subset K[z_1, \ldots, z_n]$, so daß $X = \mathbb{V}(M)$.

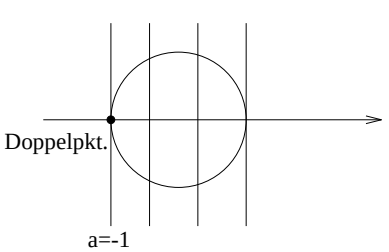
Eine affine Varietät der Form $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^n$ heißt *affine Hyperfläche* (*ebene algebraische Kurve*, falls $n = 2$; *affine Fläche*, falls $n = 3$).

Ist K unendlich, so ist $\mathbb{V}(f) \subsetneq \mathbb{A}^n$, falls $f \neq 0$. f heißt eine *Gleichung* von $\mathbb{V}(f)$.

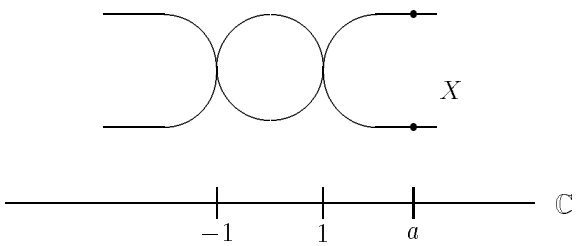
Beispiele 1.6 (ebene algebraische Kurven)
$f = \sum a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \in \mathbb{R}[x, y]$, f nicht konstant, definiert eine reelle algebraische Kurve $C = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

Allerdings treten einige Schwierigkeiten auf, wie an Beispielen erläutert werden soll.

Beispiel 1.6.1
$C := \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{R}^2$ beschreibt einen Kreis, aber $C' := \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(x^2 + y^2) = \{(0, 0)\}$ ist nur noch ein Punkt und $C'' := \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(x^2 + y^2 + 1) = \emptyset$ ist die leere Menge.



Geht man von $\mathbb{R}$ zu seinem algebraischen Abschluß $\mathbb{C}$ über, so sieht man: $X = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(x^2+y^2-1)$ ist eine komplexe ebene Kurve. Jede komplexe Gerade $x = a$ ($a \in \mathbb{C}$) schneidet X in „zwei“ Punkten $(a, \pm\sqrt{1-a^2})$. Dabei denken wir uns im Fall $a = \pm 1$ den Punkt $(a, 0)$ als Doppelpunkt. Für $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ sind diese Punkte nicht reell. Die Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C},\ \varphi(a, b) = a$, ist surjektiv, eine 2-blättrige verzweigte Überlagerung. Schematisch:



Ist $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$, so ist $\varphi^{-1}(a) = (a, \pm\sqrt{a^2-1}i)$.

$X' = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(x^2+y^2) = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}((x-iy)(x+iy)) = L_1 \cup L_2$ ist Vereinigung der komplexen Geraden $L_1 = \mathbb{V}(x-iy) = \mathbb{C}(i, 1)$ und $L_2 = \mathbb{V}(x+iy) = \mathbb{C}(-i, 1)$ in $\mathbb{C}^2$.

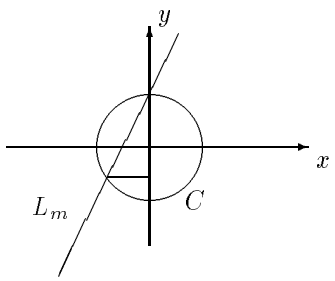
Schließlich „komplexifizieren“ wir C''. $X'' = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(x^2+y^2+1)$ ist nicht wesentlich von X verschieden, denn X geht durch die $\mathbb{C}$-lineare Bijektion $\varphi(x, y) = (ix, iy)$ in X'' über.

X, X', X'' sind Fasern der Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ f(x, y) = x^2+y^2$.
Die Fasern $X_c = f^{-1}(c) = \mathbb{V}(x^2+y^2-c)$ haben für $c \neq 0$ isomorphe Gestalt.

Wie kann man $C \cap \mathbb{Q}^2 = \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(x^2+y^2-1)$ bestimmen?
Es sei $m \in \mathbb{R}$ und $L_m = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(y-mx-1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} L_m \cap C &= \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(x^2+y^2-1, y-mx-1) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1,\ y = mx+1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+(mx+1)^2 = 1,\ y = mx+1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x((m^2+1)x+2m) = 0,\ y = mx+1\} \\ &= \{(0, 1), (\tfrac{-2m}{m^2+1}, \tfrac{1-m^2}{m^2+1})\}. \end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow C,\ \varphi(m) = (\frac{-2m}{m^2+1}, \frac{1-m^2}{m^2+1})$ ist injektiv mit $\varphi(\mathbb{R}) = C \setminus \{(0, -1)\}$.



Wir setzen $\varphi(\infty) = (0, -1)$. Dann gilt: $\varphi^{-1} : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist die Abbildung

$$(x, y) \longmapsto \frac{y-1}{x} = \text{Steigung der Verbindungsgeraden von } (0, 1) \text{ und } (x, y).$$

Offensichtlich induziert φ auch eine Bijektion

$$\varphi : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \longrightarrow C \cap \mathbb{Q}^2 = \{\text{rationale Punkte auf dem Einheitskreis}\}.$$

Daraus kann man die ganzzahligen Lösungen $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ der Gleichung $a^2+b^2=c^2$ bestimmen, indem man $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ untersucht!

Beispiel 1.6.2
$C = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(\frac{2}{5}x^2 + \frac{y^2}{5} - 1)$ ist eine Ellipse, die durch eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, etwa $\psi(x,y) = (\sqrt{2/5}x, \frac{1}{\sqrt{5}}y)$, in den Einheitskreis überführt wird.
Aber: C besitzt keine rationalen Punkte: $C \cap \mathbb{Q}^2 = \emptyset$. Denn man kann sich überlegen: Sind $a,b,c \in \mathbb{Z}$ mit $2a^2+b^2=5c^2$, so ist $a=b=c=0$ (Übung in Arithmetik!).

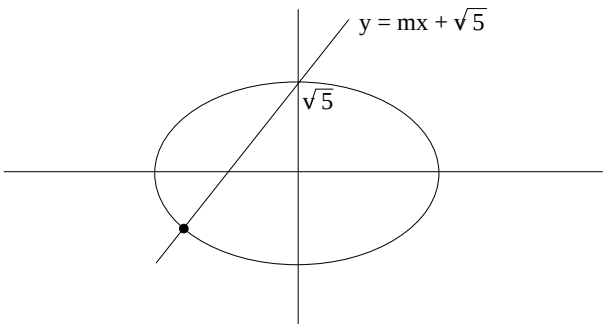
Beweis: Annahme: $\exists\, a,b,c \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b,c)=1,\ 2a^2+b^2=5c^2$.
a,b sind nicht durch 5 teilbar, weil gilt:
$5|a \Rightarrow 5|b^2 \Rightarrow 5|b \Rightarrow 25|2a^2+b^2 \Rightarrow 5|c^2 \Rightarrow 5|c \Rightarrow 5|\mathrm{ggT}(a,b,c)$. Widerspruch!
Ebenso ergibt sich aus $5|b$ ein Widerspruch. Modulo 5 erhält man nur $\{-4,-1,1,4\} = \{\pm 1\}$ als Quadratzahlen $\neq 0$. Es folgt für $a,b \in \mathbb{Z},\ a,b \neq 0 \bmod 5$:

$$2a^2+b^2 \equiv \pm 2 \pm 1 \in \{3,1,-1,-3\} \bmod 5,$$

also $2a^2+b^2 \not\equiv 0 \bmod 5$ und somit erst recht $2a^2+b^2 \neq 5c^2$.Widerspruch!

Geht man jedoch von $\mathbb{Q}$ zu dem Erweiterungkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{R}$ über, so erhält man $C \cap \mathbb{Q}[\sqrt{5}]^2 \neq \emptyset$, denn $(0,\sqrt{5}) \in C$.

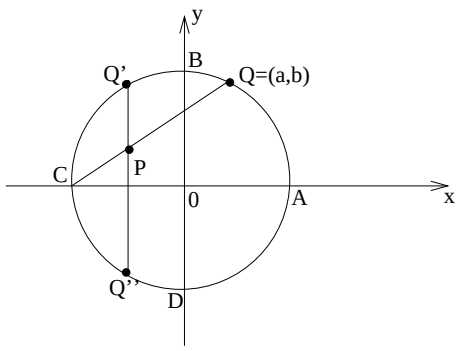
$\varphi : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow C, \quad \varphi(m) = \sqrt{5}\left(\frac{-2m}{2+m^2}, \frac{2-m^2}{2+m^2}\right), \quad \varphi(\infty) = (0,-\sqrt{5})$ ist Bijektion,
$\varphi^{-1}(x,y) = \frac{y-\sqrt{5}}{x}$.



Ist $m \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \cup \{\infty\}$, dann ist $\varphi(m) \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]^2$, und ist $(x,y) \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]^2$, dann ist $\varphi^{-1}(x,y) \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \cup \{\infty\}$. Also induziert φ eine Bijektion $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \cup \{\infty\} \longrightarrow C \cap \mathbb{Q}[\sqrt{5}]^2$.

Beispiel 1.6.3
Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und den Schnittpunkten A,B,C,D mit den Koordinatenachsen gegeben. Wir definieren: Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gehört zur Kurve X, wenn $P = CQ \cap Q'Q''$ ist, wobei Q ein Punkt auf der Kreislinie und Q' der Spiegelpunkt von Q an der Geraden BD, Q''

der Spiegelpunkt von Q' an der Geraden AC ist.



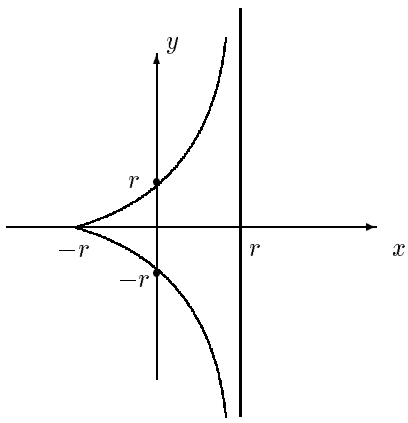
X ist eine algebraische Kurve, denn für $Q = (a, b)$ mit $a^2 + b^2 = r^2$ gilt:
CQ =Verbindungsgerade von (a, b) und $(-r, 0)$ hat die Gleichung $x = \frac{a+r}{b}y - r$. $Q'Q''$ hat die Gleichung: $x = -a$. Für den Schnittpunkt $P = (x, y)$ von CQ und $Q'Q''$ gilt also

$$x = -a, \quad y = \frac{b}{a+r}(r-a)$$

und somit

$$y^2 \;=\; \frac{b^2}{(a+r)^2}(r-a)^2 \;=\; \frac{r^2-a^2}{(a+r)^2}(r-a)^2 \;=\; \frac{(r-a)^3}{a+r} \;=\; \frac{(r+x)^3}{r-x}.$$

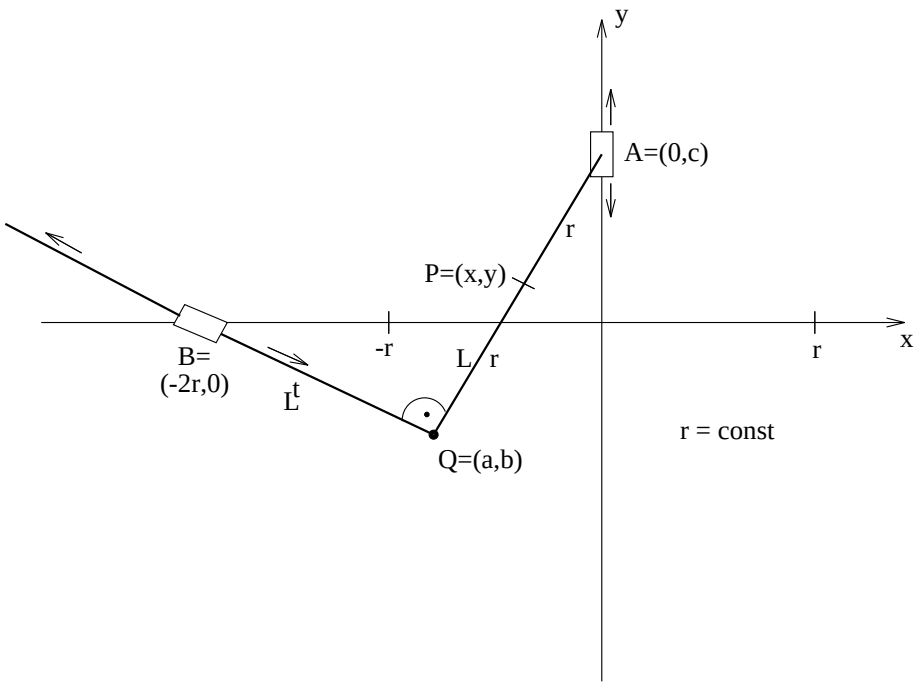
Damit genügt $P = (x, y)$ der kubischen Gleichung $(r-x)y^2 - (r+x)^3 = 0$. Dies ist die Gleichung der *Kissoide*.



Bemerkung: Man kann die Kissoide nach Newton durch folgenden Mechanismus erzeugen:
Gegeben sei ein Stab L der Länge $2r$. An einem Ende von L werde senkrecht ein weiterer Stab $L^\perp$ fest angebracht. Die Stange $L^\perp$ werde nun durch eine im festen Punkt $B = (-2r, 0)$ drehbar montierte Öse geführt. Der andere Endpunkt A von L wird fest an eine auf der x-Achse bewegliche Öse montiert. Die Bahn, die der Mittelpunkt P der Stange L beschreibt, wenn man den Endpunkt A von L auf der x-Achse bewegt, ist die Kissoide.

Es sei m die Steigung von L. Die Gleichung von L ist

$$(1) \qquad y = mx + c.$$



Die Gleichung von $L^\perp$ ist also

$$(2) \qquad x = -my - 2r.$$

Der Schnittpunkt $Q = (a, b) = L \cap L^\perp$ ergibt sich aus (1) und (2):

$$b = ma + c, \quad a = -mb - 2r,$$

also $a = -m^2 a - mc - 2r$, $\Rightarrow$

$$a = -\frac{mc + 2r}{1 + m^2}, \quad b = \frac{-m^2 c - 2mr + c + m^2 c}{1 + m^2} = \frac{c - 2mr}{1 + m^2}.$$

Weiter ist der Abstand von A und Q konstant $2r$, also $a^2 + (b-c)^2 = 4r^2$, d.h. $a^2 + (ma)^2 = 4r^2$, also $a^2 = \frac{4r^2}{1+m^2}$. Setzt man $a = -\frac{mc+2r}{1+m^2}$ ein, so ergibt sich $(1 + m^2)4r^2 = m^2c^2 + 4mrc + 4r^2$ und somit

$$4r^2m^2 - m^2c^2 - 4rmc = 0, \quad \text{d.h. } m = 0 \text{ oder } m = \frac{4rc}{4r^2 - c^2}.$$

Nur der zweite Fall ist interessant. Es folgt

$$\begin{aligned} a &= -\frac{4rc^2 + 2r(4r^2 - c^2)}{4r^2 - c^2} \cdot \frac{(4r^2 - c^2)^2}{(4r^2 - c^2)^2 + 16r^2c^2} \\ &= -\frac{(8r^3 + 2rc^2)(4r^2 - c^2)}{(4r^2 + c^2)^2} = -\frac{2r(4r^2 - c^2)}{4r^2 + c^2}, \\ b &= -\frac{4rc}{4r^2 - c^2} \cdot \frac{2r(4r^2 - c^2)}{4r^2 + c^2} + c = \frac{-8r^2c + 4r^2c + c^3}{4r^2 + c^2} = -c\frac{4r^2 - c^2}{4r^2 + c^2}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} = -r\frac{4r^2-c^2}{4r^2+c^2} \\ y &= mx+c = -r\frac{4rc}{4r^2+c^2}+c = \frac{-4r^2c+4r^2c+c^3}{4r^2+c^2} = \frac{c^3}{4r^2+c^2}. \end{aligned}$$

Wir haben somit die Parametrisierung

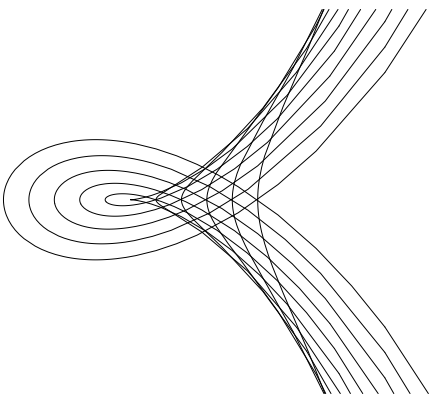
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(c) = \left(-r\frac{4r^2-c^2}{4r^2+c^2}, \frac{c^3}{4r^2+c^2}\right) = (x,y).$$

Es folgt: $r+x = \frac{4r^3+rc^2-4r^3+rc^2}{4r^2+c^2} = \frac{2rc^2}{4r^2+c^2}$, $r-x = \frac{4r^3+rc^2+4r^3-rc^2}{4r^2+c^2} = \frac{8r^3}{4r^2+c^2}$, also $(r-x)y^2 = \frac{8r^3c^6}{(4r^2+c^2)^3} = (r+x)^3$. $\varphi(\mathbb{R})$ ist also Teilmenge der Kissoide.

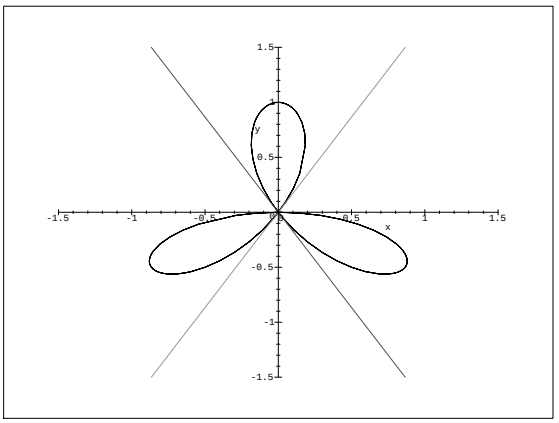
Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\varphi_t(c) = t(a,b) + (1-t)(0,c) = t\frac{4r^2-c^2}{4r^2+c^2}(-2r,-c) + (1-t)(0,c).$$

$\varphi_{\frac{1}{2}}$ ist die Kissoide (Spitze in $(-r,0)$), φ_0 ist die y-Achse, φ_1 ist Kurve mit Doppelpunkt (0,0). (Familie von Kubiken) $\varphi_t(c)$ ist Punkt auf der Geraden L.



Beispiel 1.6.4
$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3,\ g(x,y) = 3x^2y - y^3 = (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y)y$



$C = \mathbb{V}(f)$ ist eine Quartik mit einer Singularität. $K = \mathbb{V}(g)$ besteht aus den drei Tangenten der Kurve C in der Singularität. Es sei $r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$ und $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.
Dann ist $(x,y) \in C$ genau dann, wenn $r^4 + r^3(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) = 0$ gilt.
Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi &= e^{i3\varphi} = (e^{i\varphi})^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3\\ &= \cos^3 i\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi, \text{ also}\\ \sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.\end{aligned}$$

Also folgt: $(x,y) \in C \Leftrightarrow r = 0$ oder $r + \sin 3\varphi = 0$. Da $\sin 3\varphi$ Nullstellen hat, kann man die erste Gleichung weglassen. Außerdem ist $-\sin x = \sin(-x)$. Man erhält also die Parametrisierung

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^2, \quad \psi(\mathbb{R}) = C \quad \text{mit } \psi(t) = (\sin 3t\cos t, \sin 3t\sin t).$$

Beispiel 1.6.1 (Tangenten an ebene Kurven)
Sei $f \in \mathbb{R}[x,y]$, $C = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(f)$. Es sei $(a,b) \in C$, und es gelte $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen offene Umgebungen U von a, U' von b und eine C^∞-Funktion (sogar reellanalytisch!)

$$g : U \longrightarrow U' \quad \text{mit } g(a) = b \quad \text{und}$$

$$C \cap (U \times U') = \text{Graph}(g) = \{(x,y) \in U \times U' \mid y = g(x)\}$$

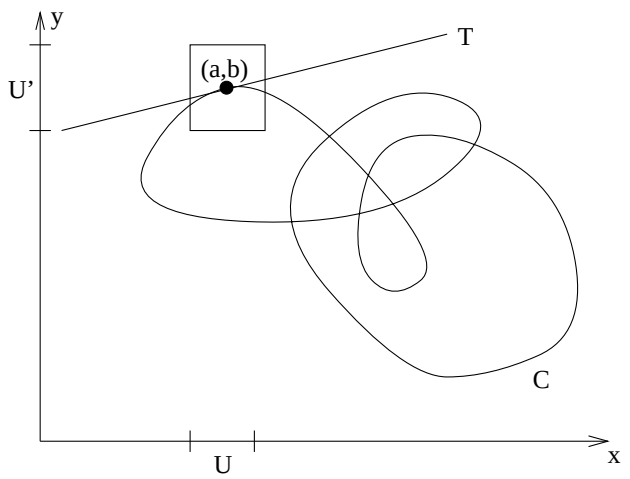
(g wird im allgemeinen natürlich kein Polynom sein!). Es gilt

$$g(x) = b + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots.$$

Die Gerade

$$T = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(y - b - g'(a)(x-a))$$

ist die Tangente von C im Punkt (a,b).



Wendet man die Kettenregel auf $f(x,g(x)) = 0$ an, so erhält man $g'(a) = -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\big/\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.
Die Gerade T hat also auch die Gleichung

$$T_{(a,b)}f := \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a).$$

Dies ist ein Polynom von der Form $a_1x + a_2y + c$ in $\mathbb{R}[x,y]$ und genau dann nicht das Nullpolynom, wenn der *Gradient* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ von f im Punkt (a,b) nicht verschwindet.
(a,b) heißt dann ein *einfacher Punkt* von f. Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, so ist (a,b) eine *Singularität* von f.

$$\mathrm{Sing}(f) \;=\; \mathbb{V}_{\mathbb{R}}\left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \subset \mathbb{R}^2$$

ist die Singularitätenmenge von f. Ist $\mathrm{Sing}(f) = \emptyset$, so ist $C = \mathbb{V}(f)$ eine *glatte Kurve*.
Wir betrachten das Beispiel $f = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3,\ g = 3x^2y - y^3$. Man errechnet

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sing}(f) &= \mathbb{V}\left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{V}\left(4f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(4f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(g, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cup \mathbb{V}\left(\sqrt{3}x - y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cup \mathbb{V}\left(\sqrt{3}x + y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \{(0,0)\}.
\end{aligned}$$

Wie erwartet hat f nur eine Singularität.

Beispiel 1.6.5
Die bisher betrachteten Kurven $C \subset \mathbb{R}^2$ ließen sich rational parametrisieren. Eine *rationale Parametrisierung* von $C \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der Form $\varphi(t) = \left(\frac{P(t)}{Q(t)}, \frac{R(t)}{S(t)}\right)$ mit Polynomen $P, Q, R, S \in \mathbb{R}[t]$, so daß $\varphi(\mathbb{R} \setminus A) = C \setminus B$, wobei A und B jeweils endliche Ausnahmemengen sind.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2, \\
t &\longmapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \\
\varphi(\mathbb{R}) &= \text{Einheitskreis} \setminus \{(0,-1)\}.
\end{aligned}$$

Auch die Kurve

$$C \;=\; \mathbb{V}((x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3)$$

aus 1.6.4 läßt sich rational parametrisieren, denn eine Gerade $L_m = \mathbb{V}(y - mx)$ durch die Singularität $(0,0)$ schneidet C nicht wie allgemein erwartet in 4 verschiedenen Punkten, sondern neben $(0,0)$ nur in einem weiteren Punkt:

$$\begin{aligned}
& (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0 \quad \text{und } y = mx \\
\Rightarrow\ & (1+m^2)^2x^4 + x^3(3m - m^3) = 0 \\
\Rightarrow\ & x = 0 \qquad \text{3-fache Nullstelle} \\
& \text{oder } x = \tfrac{m^3-3m}{(1+m^2)^2}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Parametrisierung

$$\varphi(t) = \left(\frac{t(t^2-3)}{(1+t^2)^2}, \frac{t^2(t^2-3)}{(1+t^2)^2}\right),$$

$$\varphi : \mathbb{R} \overset{\text{bijektiv}}{\longrightarrow} C \setminus \{(0,1)\}, \quad (0,1) = \varphi(\infty).$$

(Ersetzt man t durch $\tan\alpha$, so erhält man nach etwas Rechnung die Parametrisierung $\psi(-\alpha)$ aus Beispiel 1.6.4.)

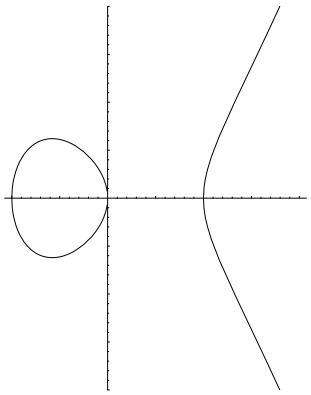
Beispiel 1.6.6
Wir wollen ein Beispiel einer Kurve kennenlernen, die sich nicht rational parametrisieren läßt. Es sei

$$E_K = \mathbb{V}_K(y^2 - x(x+1)(x-1)), \quad \operatorname{char} K \neq 2.$$

$$f = y^2 - x^3 + x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Sing}(f) &:= \mathbb{V}_K(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \mathbb{V}_K(-x^3 + x, y, -3x^2 + 1) \\ &= \mathbb{V}(-x^2 + 1, y, -3x^2 + 1) \cup \mathbb{V}(x, y, -3x^2 + 1) \\ &= \mathbb{V}(-x^2 + 1, y, -2x^2) \cup \emptyset \overset{[\operatorname{char} K \neq 2]}{=} \mathbb{V}(1, y) = \emptyset. \end{aligned}$$

E_K ist also singularitätenfreie ebene Kurve in $\mathbb{A}^2(K)$.



Behauptung: Sind $P, Q, R, S \in K[t]$ Polynome mit $Q \neq 0$, $S \neq 0$, und gilt „formal“ $\left(\frac{R}{S}\right)^2 = \left(\frac{P}{Q}\right)^3 - \frac{P}{Q}$ (das heißt im Quotientenkörper von $K[t]$), bzw. (Erweitern mit S^2Q^3)

$$(*) \qquad Q^3R^2 = P^3S^2 - PQ^2S^2 \quad \text{in } K[t],$$

so folgt: Es gibt $a, b \in K$, so daß $P = aQ$ und $R = bS$ gilt. Die „rationale Abbildung“

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^1(K) \setminus A &\longrightarrow E_K \qquad (A \text{ endlich}), \\ t &\longmapsto \left(\frac{P(t)}{Q(t)}, \frac{R(t)}{S(t)}\right) = (a, b) \end{aligned}$$

ist also konstant!. Es gibt keine rationale Parametrisierung von E_K.

Beweis: Der Bequemlichkeit halber sei K algebraisch abgeschlossen. Ist $P = 0$, so ist auch $R = 0$. Ist $R = 0$, so ist $P = 0$ oder $P^2 - Q^2 = 0$, also $P = Q$ oder $P = -Q$. Wir können daher

annehmen, daß P, Q, R, S ungleich Null sind. Weiter können wir $\mathrm{ggT}(P,Q) = 1$, $\mathrm{ggT}(R,S) = 1$ voraussetzen (man kann die ggT's von P, Q bzw. R, S aus der Gleichung $(*)$ herauskürzen!). Aus

$$(*) \qquad Q^3R^2 = P(P-Q)(P+Q)S^2$$

folgt S^2 ist ein Teiler von Q^3R^2, also (Beweis!) ist S^2 ein Teiler von Q^3: $S^2|Q^3$.
Da $\mathrm{ggT}(P,Q) = 1$, folgt (Beweis!) $\mathrm{ggT}(Q^3, P(P-Q)(P+Q)) = 1$, und somit ist Q^3 ein Teiler von S^2: $Q^3|S^2$. Es folgt somit

$$(**) \qquad S^2 = cQ^3 \quad \text{für ein } c \in K \setminus \{0\}$$

und somit

$$(***) \qquad R^2 = cP(P-Q)(P+Q).$$

Aus $(**)$ folgt: Q ist Quadrat in $K[t]$. Aus $(***)$ folgt, weil $P, P-Q, P+Q$ paarweise teilerfremd sind: $P, P-Q, P+Q$ sind Quadrate in $K[t]$. Jetzt brauchen wir nur noch folgende Aussage zu beweisen:

Lemma Seien $P, Q \in K[t] \setminus \{0\}$ teilerfremd und $n = \max(\deg(P), \deg(Q)) \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$. Gilt nun:

$$P,\ Q,\ P-Q,\ P-\lambda Q$$

sind Quadrate in $K[t]$, so gibt es teilerfremde Polynome $P_1, Q_1 \in K[t] \setminus \{0\}$ und $\lambda_1 \in K \setminus \{0,1\}$, so daß $n_1 = \max(\deg(P_1), \deg(Q_1)) = \frac{1}{2}n$ ist und

$$P_1,\ Q_1,\ P_1-Q_1,\ P_1-\lambda_1 Q_1$$

Quadrate in $K[t]$ sind.

Iteriert man dies, so ergibt sich, daß n für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch 2^k teilbar ist, also $n = 0$ sein muß und somit P und Q konstante Polynome sind!

Beweis: Es sei $P = U^2$, $Q = V^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} P-Q &= U^2 - V^2 = (U-V)(U+V), \\ P-\lambda Q &= (U-\mu V)(U+\mu V), \end{aligned}$$

wobei $\mu \in K$ mit $\mu^2 = \lambda$. Da $\lambda \notin \{0,1\}$, ist auch $\mu \notin \{0,1,-1\}$. Da

$$\mathrm{ggT}(U-V, U+V) = \mathrm{ggT}(U,V) = \mathrm{ggT}(P,Q) = 1$$

und ebenso

$$\mathrm{ggT}(U-\mu V, U+\mu V) = \mathrm{ggT}(U,V) = 1 \text{ ist,}$$

und da nach Voraussetzung $P-Q, P-\lambda Q$ Quadrate sind, müssen $U-V, U+V, U-\mu V, U+\mu V$ ebenfalls Quadrate sein. Es seien nun $\alpha, \beta \in K$ mit $\alpha - \beta = 1$, $\alpha + \beta = \mu$, also $\alpha, \beta \neq 0$, weil $\mu \notin \{0,1,-1\}$. Dann setze $P_1 = \alpha(U-V)$, $Q_1 = \beta(U+V)$. Es folgt

$$\begin{aligned} P_1 - Q_1 &= U - \mu V, \\ P_1 - \lambda_1 Q_1 &= (\alpha - \lambda_1\beta)U - (\alpha + \lambda_1\beta)V = (\alpha - \lambda_1\beta)(U - \mu V), \end{aligned}$$

falls $\lambda_1 \in K$ so gewählt ist, daß $\lambda_1 \neq \frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha+\lambda_1\beta}{\alpha-\lambda_1\beta} = \mu$. P_1, Q_1, $P_1 - Q_1$, $P_1 - \lambda_1 Q_1$ sind dann Quadrate und es gilt $n_1 = \max(\deg(P_1), \deg(Q_1)) = \frac{1}{2}n$. $\square$

Bemerkung Die Kurve $E_{\mathbb{C}}$ ist ein Beispiel einer *elliptischen Kurve*. $E_{\mathbb{C}}$ besitzt keine rationale Parametrisierung. Man kann aber $E_{\mathbb{C}}$ durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion und ihre Ableitung $\wp'$ parametrisieren. Dabei ist $\Omega = \{n + m\tau \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ($\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$) und

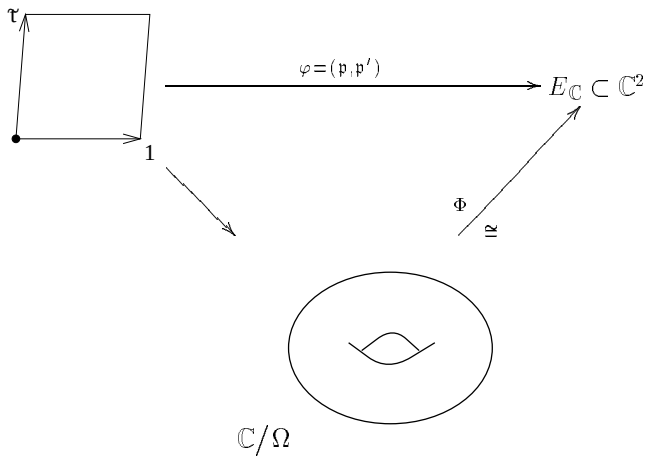
$$\wp : \mathbb{C} \setminus \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

die (meromorphe) Funktion

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

$\varphi = (\wp, \wp') : \mathbb{C} \setminus \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^2$ ist doppeltperiodisch und induziert eine bijektive Abbildung Φ des gelochten Torus $\mathbb{C}/\Omega \setminus \{p_0\}$ ($p_0 = \Omega$) auf die elliptische Kurve $E_{\mathbb{C}}$ mit der Gleichung

$$\omega^2 = 4z^3 - g_2(\tau)z - g_3(\tau), \quad g_2(\tau) := 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3(\tau) := 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$



(Literatur: Hurwitz-Courant: Funktionentheorie, Fischer-Lieb: Funktionentheorie)
Man sieht, daß man $E_{\mathbb{C}}$ durch Hinzunahme eines neuen Punktes ∞ so vervollständigen kann, daß $E_{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$ die topologische Gestalt des Torus $\mathbb{C}/\Omega \cong S^1 \times S^1$ = „orientierbare kompakte Fläche vom Geschlecht 1“ hat.

In der algebraischen Geometrie wird diese Vervollständigung affiner Varietäten dadurch erreicht, daß man zunächst $\mathbb{A}^n(K)$ zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$ vervollständigt.

Wir geben zunächst die

Definition 1.7

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(K) := \{W \mid W \subset K^{n+1} \text{ 1-dimensionaler Untervektorraum}\}$$

heißt *n-dimensionaler projektiver Raum* über K. Die Elemente von $\mathbb{P}^n$ heißen Punkte. Wir bezeichnen diese gewöhnlich mit kleinen Buchstaben $p, q, \ldots$ und nennen die zugehörigen 1-dimensionalen Untervektorräume von K^{n+1} dann $W_p, W_q, \ldots$.

Ist $a = (a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, so spannt a einen 1-dimensionalen Untervektorraum $W = Ka \subset K^{n+1}$ auf. Dieser „ist“ ein Punkt p in $\mathbb{P}^n$ und wird üblicherweise mit

$$p = [a_0 : \ldots : a_n] \quad \text{oder kurz } [a]$$

bezeichnet. Das Tupel $(a_0, \ldots, a_n)$ heißt dann ein *System homogener Koordinaten* von p.

Ist $b = (b_0, \ldots, b_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ ein weiteres Tupel, so gilt $Ka = Kb$ (also $[a] = [b]$ in $\mathbb{P}^n$) genau dann, wenn ein $\lambda \in K^* = K \setminus \{0\}$ existiert, so daß $b_0 = \lambda a_0, \ldots, b_n = \lambda a_n$ gilt.
Die multiplikative Gruppe K^* operiert durch $\lambda(a_0, \ldots, a_n) = (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$ auf $K^{n+1} \setminus \{0\}$, und die Abbildung

$$K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad a \longmapsto [a]$$

ist K^*-invariant und induziert eine Bijektion

$$K^{n+1} \setminus \{0\} / K^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^n.$$

b) Es sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt

$$\mathbb{P}(V) = \{U \mid U \subset V \text{ 1-dimensionaler Untervektorraum}\}$$

projektiver Raum von V. Wieder gibt es eine kanonische Bijektion

$$V \setminus \{0\} / K^* \longrightarrow \mathbb{P}(V),$$

die durch $v \longmapsto [v] = Kv$ induziert wird. Ist $\dim V = n + 1$, so erhält man nach Wahl einer K-Vektorraumbasis $v_0, \ldots, v_n$ von V eine Bijektion

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}(V), \quad [a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto [\sum_{i=0}^{n} a_i v_i].$$

Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum, so ist $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$.

Beispiele 1.8

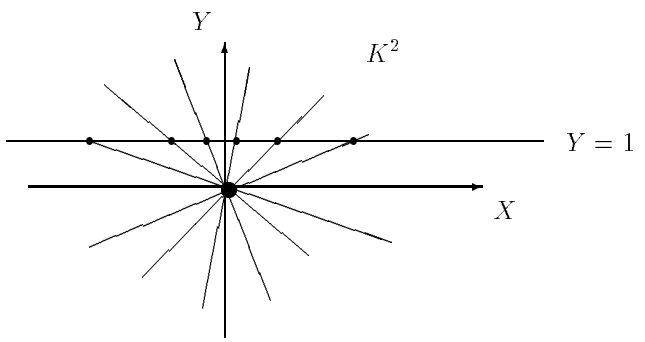
1.8.1

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &= \{[X : Y] \mid (X, Y) \in K^2 \setminus \{0\}\} \\ &= \{[x : 1] \mid x \in \mathbb{A}^1\} \cup \{[1 : 0]\} \\ &= \mathbb{A}^1 \cup \infty, \end{aligned}$$

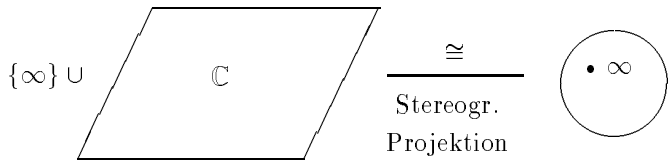
wenn man $[X : Y]$ mit $x = \frac{X}{Y}$ identifiziert.

$$[X : Y] \longmapsto x = \frac{X}{Y} \in \mathbb{A}^1 \quad \text{falls } Y \neq 0, \quad [X : 0] = [1 : 0] \longmapsto \text{„}\frac{1}{0}\text{“} := \infty.$$

$\mathbb{P}^1$ heißt die *projektive Gerade*. Sie entsteht aus $\mathbb{A}^1$ durch Hinzunahme eines unendlichfernen Punktes ∞.



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^1 = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{R}^2$ kann man sich geometrisch als *Kreislinie* denken.
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2 = \mathbb{V}_{\mathbb{R}}(x^2+y^2+z^2-1) \subset \mathbb{R}^3$ ist die *Riemannsche Zahlenkugel.*



1.8.2
Die *projektive Ebene* $\mathbb{P}^2$ kann man aus der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$ durch Hinzunahme einer projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$ erhalten:

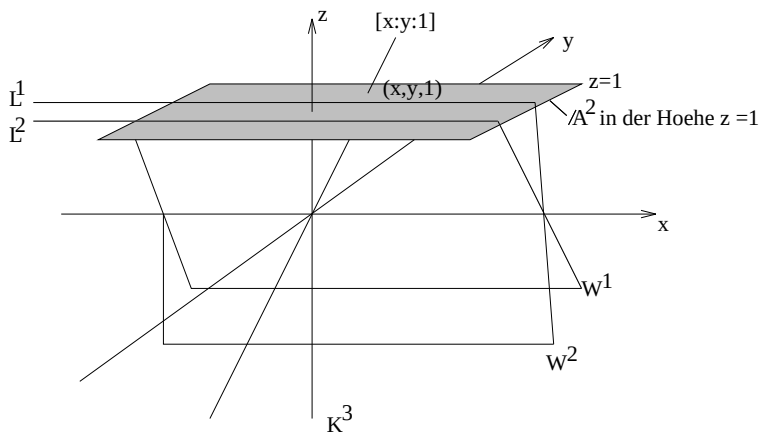
$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2 &= \{[X:Y:Z] \mid (X,Y,Z) \in K^3 \setminus \{0\}\} \\ &= \{[X:Y:Z] \mid Z \neq 0\} \cup \{[X:Y:0] \mid (X,Y) \in K^2 \setminus \{0\}\} \\ &= \{[\tfrac{X}{Z}:\tfrac{Y}{Z}:1]\} \cup \{[X:Y:0] \mid (X,Y) \in K^2 \setminus \{0\}\}.\end{aligned}$$

Setzt man $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, und identifiziert (x,y) mit $[x:y:1] = [X:Y:Z]$ und für $(X,Y) \in K^2 \setminus \{0\}$ $[X:Y] \in \mathbb{P}^1$ mit $[X:Y:0] \in \mathbb{P}^2$, so ergibt sich $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(K^2 \times \{0\}) \subset \mathbb{P}(K^3) = \mathbb{P}^2$, $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1$, also

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1.$$

Bei dieser Zerlegung nennt man die Punkte in $\mathbb{P}^1$ *unendlichferne Punkte*. Die beiden parallelen Geraden L_1 und L_2 in $\mathbb{A}^2$ schneiden sich in $\mathbb{A}^2$ nicht. Aber L_1, L_2 spannen in K^3 zwei 2-

dimensionale Unterräume $W_1,\ W_2$ auf.



Es gilt: $\bar{L}_1 := \mathbb{P}(W_1) = L_1 \cup \{[1:0:0]\}$, $\bar{L}_2 := \mathbb{P}(W_2) = L_2 \cup \{[1:0:0]\}$. $\bar{L}_1$ und $\bar{L}_2$ schneiden sich also in dem unendlichfernen Punkt $[1:0:0]$ von $\mathbb{P}^2$.
Ist $L = \mathbb{V}(ax+by+c)$ eine Gerade in $\mathbb{A}^2$, $(a,b) \neq 0$, so ist L als Teilmenge in $\mathbb{A}^3$ gegeben als

$$\begin{aligned} L &= \mathbb{V}(ax+by+c, z-1) \\ &= \{(x,y,z) \in K^3 \mid ax+by+c=0,\ z=1\} \\ &= \{(x,y,z) \in K^3 \mid ax+by+cz=0,\ z=1\}. \end{aligned}$$

$W = \mathbb{V}(ax+by+cz) \subset K^3$ ist der von L aufgespannte Untervektorraum von K^3, und die projektive Gerade $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^2$ ist

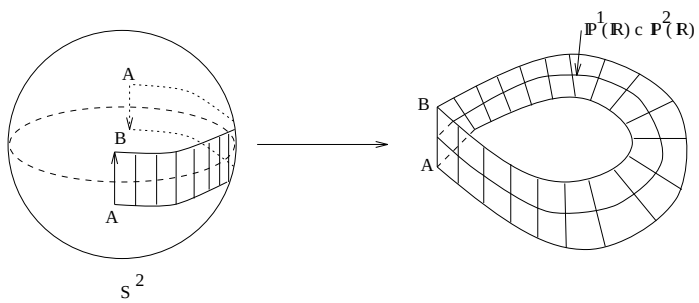
$$\mathbb{P}(W) = L \cup \underbrace{\mathbb{V}(ax+by+cz, z)}_{\{[-b:a:0]\}}.$$

$(-b,a)$ ist Richtungsvektor von $L \subset \mathbb{A}^2$. Zu den Punkten $[x:y:1] \in L,\ ax+by+c=0$, kommt noch der unendlichferne Punkt $\infty = [-b:a:0]$ hinzu. Das ist der Punkt in $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$, der durch den Untervektorraum $\ker((a,b) : K^2 \longrightarrow K)$ gegeben wird.
$\bar{L} = L \cup \infty = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^2$ ist der projektive Abschluß von $L \subset \mathbb{A}^2$.
∞ ist der Schnittpunkt von $\bar{L}$ mit der *unendlichfernen Geraden* $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$.

Wir wollen noch die „topologische Gestalt“ von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ untersuchen.
Jede Gerade durch den Nullpunkt schneidet die 2-Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ in 2 Punkten. Deshalb ist die Abbildung

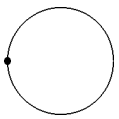
$$\begin{aligned} \varphi : S^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \\ (x,y,z) &\longmapsto [x:y:z] \end{aligned}$$

surjektiv (mit $x^2+y^2+z^2=1$) und $\varphi^{-1}([a]) = \{\pm a\}$ für $a \in S^2$.

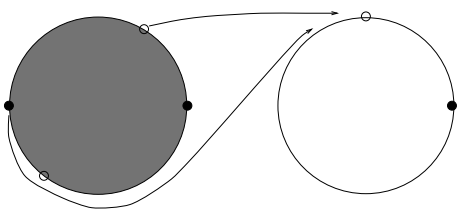


$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ kann man nicht als glatte Fläche in $\mathbb{R}^3$ einbetten, wohl aber als Fläche mit Selbstdurchdringungen (siehe: François Apéry: Models of the Real Projektive Plane).
Eine projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zerlegt $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nicht, vielmehr ist $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ weiter zusammenhängend.

Vom Standpunkt der Topologie aus ist $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen aufgebaut:
Man beginnt mit einer 0-Zelle $e^0 = \{p_0\}$. Sodann heftet man eine 1-Zelle $e^1 = [-1, 1]$ (= kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$) an die 0-Zelle, indem man die Randpunkte ± 1 von e^1 mit e^0 identifiziert. Das Ergebnis ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

$e^0 + e^1 \longrightarrow$  $e^0 \cup \mathrm{int}(e^1)$.

Sodann heftet man eine 2-Zelle $e^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ an $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, indem man den Rand S^1 von e^2 mit Hilfe der Abbildung $z \longmapsto z^2$, $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $z^2 \in S^1 = e^0 \cup \mathrm{int}(e^1)$ an $\mathbb{P}^1$ anheftet.



Analog kann man auch die komplexprojektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ als topologischen Raum konstruieren:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \underbrace{e^0 \cup \mathrm{int}(e^2)}_{\cong S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \cup \underbrace{\mathrm{int}(e^4)}_{\cong \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^4} .$$

Der Rand S^3 einer 4-Zelle $e^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| \leq 1\}$ wird mit Hilfe der Abbildung $\pi : S^3 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\pi =$ Einschränkung der kanonischen Abbildung $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, an S^2 angeheftet.

Wir kommen nun zur Definition projektiver Varietäten.

Zunächst bemerken wir: Ist $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ ein Polynom, so kann man F als Funktion auf $\mathbb{A}^{n+1}$, aber im allgemeinen nicht als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ auffassen, denn $F(a_0, \ldots, a_n)$ und $F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$ werden im allgemeinen verschieden sein.

Definition 1.9 Es sei $S = K[Z_0, \ldots, Z_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $Z_0, \ldots, Z_n$. Es sei $d \geq 0$. $F \in S$ heißt *homogen vom Grad d* (oder eine *Form vom Grad d*), wenn F die Gestalt

$$F = \sum_{\substack{\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\nu| = \nu_0 + \cdots + \nu_n = d}} a_{\nu_0 \cdots \nu_n} Z_0^{\nu_0} \cdots Z_n^{\nu_n}$$

besitzt. Die Formen vom Grad d bilden einen endlichdimensionalen K-Untervektorraum S_d von S.

Ist $F \in S$, so gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_N$$

in homogene Polynome F_d vom Grad d, $d = 0, \ldots, N$. Also gilt

$$S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d .$$

Ist $F = \sum_{|\nu|=d} a_\nu z^\nu$ homogen vom Grad d und $a \in K^{n+1}$, $\lambda \in K$, so gilt

$$F(\lambda a) \;=\; \sum_{|\nu|=d} a_\nu (\lambda a)^\nu \;=\; \sum_{|\nu|=d} a_\nu \lambda^d a^\nu \;=\; \lambda^d F(a).$$

Für $a \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ und $\lambda \in K^*$ gilt somit $F(\lambda a) = 0 \iff F(a) = 0$. Ist $F(a) = 0$, so heißt $p = [a] = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ eine *Nullstelle von* F. Man schreibt dann auch: $F(p) = 0$. (Man beachte, daß nur die Aussagen $F(p) = 0$, $F(p) \neq 0$ Sinn haben. $F(p)$ ist nicht als Wert in K definiert, wenn $p \in \mathbb{P}^n$ und $d > 0$.)

Definition 1.10 Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{P}^n$ heißt *projektive Varietät* über $K \iff$
$\exists$ Teilmenge $M \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ von homogenen Polynomen, so daß

$$X \;=\; \{p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0 \;\forall\, F \in M\} \;=\; \mathbb{V}(M).$$

$\mathbb{V}(M)$ heißt das *projektive Nullstellengebilde* von M.
(Zur Unterscheidung sei jetzt mit $\mathbb{V}_{\text{aff}}(M)$ das affine Nullstellengebilde in $\mathbb{A}^{n+1}$ bezeichnet:
$\mathbb{V}_{\text{aff}}(M) = \pi^{-1}(\mathbb{V}(M)) \cup \{0\}$, $\pi : K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ kanonisch.)

Ist $F \in S_d \setminus \{0\}$, so heißt $\mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^n$ *Hyperfläche* (vom Grad d). Ist $n = 2$, $S = K[X, Y, Z]$, so heißt $C = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$, $F \in S_d \setminus \{0\}$ *ebene projektive Kurve*.

Wie schon bemerkt, werden wir in der Regel K als algebraisch abgeschlossen voraussetzen müssen, wenn wir Ausnahmefälle vermeiden wollen.

Bevor wir Beispiele untersuchen, eine weitere

Definition 1.11 Eine Bijektion $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ heißt *lineare Transformation* (oder *Projektivität*) von $\mathbb{P}^n \iff \exists$ Matrix $A \in GL_{n+1}(K)$, $A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$, so daß

$$\varphi([x_0 : \ldots : x_n]) = [\sum_{j=0}^{n} a_{0j} x_j : \ldots : \sum_{j=0}^{n} a_{nj} x_j].$$

Denkt man sich $x = (x_0, \ldots, x_n)^t$ als Spaltenvektor, so ist $\varphi([x]) = [Ax]$.

Ist $B \in GL_{n+1}(K)$ und gilt $[Bx] = [Ax]$ für alle $x \in K^{n+1}$, so ist $Be^i = \lambda_i Ae^i$ für ein $\lambda_i \in K^*$, $B(e^i + e^j) = \lambda_{ij} A(e^i + e^j)$ mit $\lambda_{ij} \in K^*$, also $\lambda_i Ae^i + \lambda_j Ae^j = \lambda_{ij} Ae^i + \lambda_{ij} Ae^j$.
Da Ae^i und Ae^j linear unabhängig sind, ist $\lambda_i = \lambda_{ij} = \lambda_j$, also $B = \lambda A$ für ein $\lambda \in K^*$.
Die Projektivitäten $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ bilden eine kanonisch zu $PGL_{n+1}(K) := GL_{n+1}(K)/K^*$ isomorphe Gruppe. Wir nennen A eine Matrix von φ und schreiben dann auch $\varphi = [A]$.

Zwei projektive Varietäten $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ heißen *projektiv äquivalent in* $\mathbb{P}^n \iff$
$\exists\, \varphi \in PGL_{n+1}(K)$, so daß $\varphi(X) = Y$.

Beispiel 1.12 (Kegelschnitte im $\mathbb{P}^3$)
Es sei K ein Körper mit char $K \neq 2$.

$$S = K[X, Y, Z] \;=\; \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d .$$

$$S_2 \;=\; \{\text{homogene Polynome vom Grad 2}\} \;=\; \{\text{symmetrische Bilinearformen auf } K^3\}.$$

$$Q = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 \;\in\; S_2 \quad (a,b,c,d,e,f \in K)$$

entspricht die symmetrische Matrix

$$G \;=\; \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}: \qquad Q(X,Y,Z) \;=\; (X,Y,Z)G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

$g : K^3 \times K^3 \longrightarrow K$ mit $g(v,w) = v^t G w$ ist zugehörige symmetrische Bilinearform. Bekanntlich gibt es eine Matrix $A \in GL_3(K)$, so daß gilt

$$A^t G A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha,\beta,\gamma \in K.$$

Setzt man

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \;=\; A \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \;=\; Av', \quad (X,Y,Z) = (X',Y',Z')A^t,$$

so folgt

$$Q(X,Y,Z) \;=\; (X',Y',Z')A^tGA \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \;=\; \alpha X'^2 + \beta Y'^2 + \gamma Z'^2 \;=:\; Q'(X',Y',Z').$$

A definiert eine Projektivität

$$\begin{aligned} \varphi = [A] : \mathbb{P}^2 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{P}^2, \\ \varphi([X' : Y' : Z']) \quad &= \quad \left[A \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \right] \;=\; [X : Y : Z]. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß $\varphi(\mathbb{V}(Q')) = \mathbb{V}(Q)$, denn: $Q'(X',Y',Z') = 0 \Leftrightarrow Q(X,Y,Z) = 0$. Der *Kegelschnitt* $\mathbb{V}(Q) \subset \mathbb{P}^2$ ist also projektiv äquivalent zu einem Kegelschnitt der Form $\mathbb{V}(\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2)$ mit $\alpha,\beta,\gamma \in K$. Dabei darf man durch weitere Transformationen der Form $(X,Y,Z) = (\lambda X', \mu Y', \varrho Z')$ α,β,γ durch $\lambda^2\alpha, \mu^2\beta, \varrho^2\gamma$ ersetzen. Ebenso darf man natürlich Q durch cQ ersetzen ($c \in K^*$), ohne $\mathbb{V}(Q)$ zu ändern.
Wir haben daher

$$\mathbb{P}^2(S_2) = S_2 \setminus \{0\}/K^* \;=\; (\text{5-dimensionaler projektiver Raum der Kegelschnitte in } \mathbb{P}^2).$$

Jeder Kegelschnitt $\mathbb{V}(Q)$, $Q \in S_2 \setminus \{0\}$, ist projektiv äquivalent zu einem der folgenden Typen:

a) $Q = \alpha X^2 + \beta Y^2 + Z^2, \quad \alpha,\beta \neq 0$ (nicht entarteter Kegelschnitt, kann leer sein),

b) $Q = \alpha X^2 + Y^2, \quad \alpha \neq 0$ (Geradenpaar, falls $-\alpha$ Quadratzahl in K),

c) $Q = Z^2$ (Doppelgerade).

Ist $K = \mathbb{R}$, so erhält man hieraus (weil $\alpha, \beta = \pm 1$ modulo Quadratzahlen in $\mathbb{R}$):

a) $Q = X^2 + Y^2 - Z^2$ (oder $Q = X^2 + Y^2 + Z^2$, $\mathbb{V}(Q) = \emptyset$),

b) $Q = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$ (oder $Q = X^2 + Y^2$, $\mathbb{V}(Q) = \emptyset$),

c) $Q = X^2$.

a) können wir auch auf eine andere Normalform bringen:
Mit $X = \frac{1}{2}(X' - Z')$, $Y = Y'$, $Z = \frac{1}{2}(Z' + X')$ gilt

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \;=\; \frac{1}{4}(X' - Z')^2 + Y'^2 - \frac{1}{4}(Z' + X')^2 \;=\; -X'Z' + Y'^2.$$

Also ist der Kegelschnitt $C_1 = \mathbb{V}(-XZ + Y^2)$ projektiv äquivalent zu $C_2 = \mathbb{V}(X^2 + Y^2 - Z^2)$.

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C_1, \quad \varphi([U : V]) = [U^2 : UV : V^2]$$

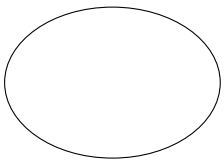
ist eine Bijektion von $\mathbb{P}^1$ auf $C_1 \subset \mathbb{P}^2$ (dies ist natürlich keine lineare Transformation).
Beweis der Bijektivität von φ:

a) $X = U^2$, $Y = UV$, $Z = V^2 \;\Rightarrow\; XZ = U^2V^2 = Y^2$.

b) Ist $xz = y^2$ und $z = 1$, so ist $x = y^2$, also $\varphi([y : 1]) = [y^2 : y : 1] = [x : y : 1]$. Ist $xz = y^2$ und $z = 0$, so ist $y^2 = 0$, also $\varphi([1 : 0]) = [1 : 0 : 0] = [x : y : 0]$.

Ist $K = \mathbb{C}$, so gibt es genau drei verschiedene Klassen von projektiv äquivalenten Kegelschnitten $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

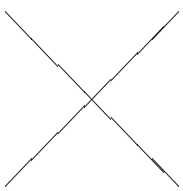
a) C ist projektiv äquivalent zu $\mathbb{V}(X^2+Y^2+Z^2)$. Dies sind die nicht entarteten Kegelschnitte.



Sie besitzen eine rationale Parametrisierung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^2, \\ [U : V] & \overset{\nu}{\longmapsto} & [U^2 : UV : V^2], \quad \varphi \in PGL_3(\mathbb{C}), \\ C & = & \varphi(\nu(\mathbb{P}^1)) \;\cong\; \mathbb{P}^1. \end{array}$$

b) C ist projektiv äquivalent zu $\mathbb{V}(X^2 + Y^2)$.



C ist die Vereinigung zweier verschiedener Geraden.

c) $C = \mathbb{V}(L^2),\ L = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \in S_1 \setminus \{0\}$ „Doppelgerade“.

Ist $G = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ Gramsche Matrix von $C = \mathbb{V}(Q)$,

$$Q = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2,$$

so kann man den Typ von C an G ablesen:

a) C ist nicht entartet $\iff \det G \neq 0 \iff \exists\, A \in GL_3(\mathbb{C})$, so daß $G = A^t A$.

b) C ist Vereinigung zweier Geraden $\iff$
$\exists\, A \in GL_3(\mathbb{C})$, so daß $G = A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \iff \operatorname{rg} G = 2.$

c) C ist Doppelgerade $\iff \exists\, A \in GL_3(\mathbb{C})$, so daß $G = A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \iff \operatorname{rg} G = 1.$

Die Menge der entarteten Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,

$$X = \{[a:b:c:d:e:f] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \mid \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0\},$$

ist eine Hyperfläche vom Grad 3 in $\mathbb{P}^5$. Die Menge der Doppelgeraden

$$Y = \{[a:b:c:d:e:f] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \mid \text{Alle zweireihigen Unterdeterminanten von } \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ sind Null}\}$$

ist eine projektive Varietät, die von 6 Quadriken ausgeschnitten wird, nämlich

$$\mathbb{V}(ac - b^2, ae - bd, be - cd, af - d^2, bf - de, cf - e^2).$$

Ist $L = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$, so hat L^2 die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ & * & \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}).$$

Y läßt sich also durch $[\alpha:\beta:\gamma] \longrightarrow [\alpha^2 : \alpha\beta : \beta^2 : \alpha\gamma : \beta\gamma : \gamma^2]$ parametrisieren.

Definition 1.13 $H \subset \mathbb{P}^n$ heißt *Hyperebene* $\iff \exists\, L \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad 1, $L \neq 0$, so daß $H = \mathbb{V}(L)$. L heißt eine *Gleichung von* H.

Ist L' eine weitere Gleichung von H, also $\mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(L')$, so sind L und L' K-linear abhängig, also $L' = aL$ mit $a \in K^*$. Modulo Multiplikation mit Konstanten $a \in K^*$ ist „die“ Gleichung L

eindeutig durch H bestimmt. Ist $L = a_0 Z_0 + \cdots + a_n Z_n$ mit $a_i \neq 0$, so ist $Z_0' = L$, $Z_j' = Z_{j-1}$, für $j \leq i$, $Z_j' = Z_j$, für $j > i$, eine Projektivität

$$\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad (Z \longmapsto Z')$$

mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1\,0\,0 & & \vdots \\ & & 0\,1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(eine sogenannte Scherung).}$$

Es gilt $\varphi(H) = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \mathbb{V}(Z_0)$. Jede Hyperebene H in $\mathbb{P}^n$ ist also zur Koordinatenhyperebene $\mathbb{V}(Z_0)$ projektiv äquivalent.

Es sei $S = K[Z_0, \ldots, Z_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$.

Definition 1.14 Ist $F \in S_d$ Form vom Grad d und $L \in S_1$, $L \neq 0$, so erhält man durch Einsetzen der formalen Brüche $\frac{Z_0}{L}, \ldots, \frac{Z_n}{L}$ in F den Ausdruck

$$f = F\left(\frac{Z_0}{L}, \ldots, \frac{Z_n}{L}\right) = \frac{F(Z_0, \ldots, Z_n)}{L^d} = \frac{F}{L^d}$$

(ein Element im Quotientenkörper von $K[Z_0, \ldots, Z_n]$).
f heißt die *Dehomogenisierung von F bzgl. L.*

$$F = \sum_{|\nu|=d} a_\nu Z^\nu \;\Rightarrow\; F\left(\frac{Z_0}{L}, \ldots, \frac{Z_n}{L}\right) = \sum_{|\nu|=d} a_\nu \frac{Z_0^{\nu_0}}{L^{\nu_0}} \cdots \frac{Z_n^{\nu_n}}{L^{\nu_n}} = \sum_{|\nu|=d} a_\nu \frac{Z^\nu}{L^{|\nu|}} = \frac{F}{L^d}$$

f kann man als Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(L) &\longrightarrow K, \\ f([x_0 : \ldots : x_n]) &:= \frac{F(x_0, \ldots, x_n)}{L(x_0, \ldots, x_n)^d} \end{aligned}$$

auffassen (Beweis!). Ist f die Dehomogenisierung von F bzgl. Z_i, so ist

$$f \in K[\tfrac{Z_0}{Z_i}, \ldots, \tfrac{Z_{i-1}}{Z_i}, \tfrac{Z_{i+1}}{Z_i}, \ldots, \tfrac{Z_n}{Z_i}]$$

ein Polynom in den n Unbestimmten

$$z_j^{(i)} := \frac{Z_j}{Z_i}, \quad j = 0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

$z_j^{(i)}$ kann man auch als Funktion

$$z_j^{(i)} : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_i) \longrightarrow K$$

auffassen. Ist $p = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_i)$, also $a_i \neq 0$, so ist $z_j^{(i)}(p) = \frac{a_j}{a_i}$.
$\frac{a_j}{a_i}$ heißt die j-te *inhomogene Koordinate* von p bzgl. Z_i für $j = 0, \ldots, n$.
Da $\frac{a_i}{a_i} = 1$ ist, brauchen wir nur die Koordinaten $\frac{a_j}{a_i}$ für $j = 0, \ldots, n$, aber $j \neq i$, zu betrachten.

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi^{(i)} : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_i) &\longrightarrow \mathbb{A}^n, \\ p &\longmapsto (z_0^{(i)}, \ldots, z_{i-1}^{(i)}, z_{i+1}^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)})(p) \\ &= \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right) \end{aligned}$$

ist Bijektion mit Umkehrabbildung

$$(b_0, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \longmapsto [b_0 : \ldots : b_{i-1} : 1 : b_{i+1} : \ldots : b_n].$$

Die „Überdeckung“ $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_i))$ heißt die (affine) *Standardüberdeckung* von $\mathbb{P}^n$.
Wir betrachten $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_0)$: Es sei $z_j := \frac{Z_j}{Z_0}$ für $j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_0) &= \{[1 : a_1 : \ldots : a_n] \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n\}, \\ \mathbb{V}(Z_0) &= \{[0 : a_1 : \ldots : a_n] \mid [a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}\}. \end{aligned}$$

Wir identifizieren $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_0)$ mit $\mathbb{A}^n$ und $\mathbb{V}(Z_0)$ mit $\mathbb{P}^{n-1}$, also $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$. $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{V}(Z_0)$ nennen wir in diesem Zusammenhang die *unendlichferne Hyperebene*.
Für $F \in S_d$ bezeichnen wir mit $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$ (oder auch mit F_{dh}) die Dehomogenisierung von F, also

$$f = F\left(1, \frac{Z_1}{Z_0}, \ldots, \frac{Z_n}{Z_0}\right) = F(1, z_1, \ldots, z_n).$$

Es gilt dann offensichtlich

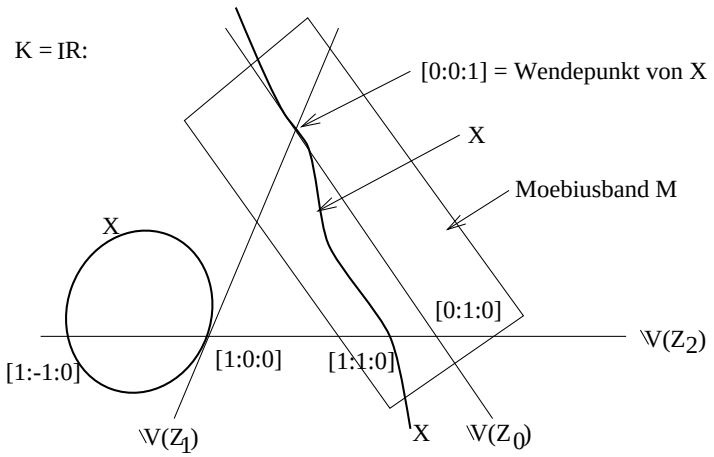
$$\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{A}^n = \mathbb{V}(f).$$

Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät, $X = \bigcap_{\alpha \in A} \mathbb{V}(F_\alpha)$, $F_\alpha \in S_{d_\alpha}$, so ist $X_0 := X \cap \mathbb{A}^n = \bigcap_{\alpha \in A} \mathbb{V}(f_\alpha)$, wobei f_α die Dehomogenisierung von F_α bzgl. Z_0 ist.

$$f_\alpha(z_1, \ldots, z_n) = F_\alpha(1, z_1, \ldots, z_n).$$

Beispiel 1.15
$X = \mathbb{V}(Z_0 Z_2^2 - Z_1(Z_1 - Z_0)(Z_1 + Z_0)) \subset \mathbb{P}^2 \Rightarrow X_0 = \mathbb{V}(z_2^2 - z_1(z_1 - 1)(z_1 + 1)) \subset \mathbb{A}^2$ ist eine elliptische Kurve in $\mathbb{A}^2$. $X \cap \mathbb{V}(Z_0) = \mathbb{V}(Z_1^3, Z_0) = \{[0 : 0 : 1]\}$ dreifach gezählt, d.h. die unendlichferne Gerade $\mathbb{V}(Z_0)$ ist „Wendetangente“ von X im Wendepunkt $[0 : 0 : 1]$. Dieser Punkt ist der Nullpunkt bzgl. der inhomogenen Koordinaten $w_0 = \frac{Z_0}{Z_2}$, $w_1 = \frac{Z_1}{Z_2}$ auf $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{V}(Z_2)$.

Es gilt $X_2 = X \setminus \mathbb{V}(Z_2) = \mathbb{V}(w_0 - w_1(w_1 - w_0)(w_1 + w_0)) \subset \mathbb{A}^2$.



Im Fall $K = \mathbb{R}$ besteht X aus zwei disjunkten einfach geschlossenen Kurven. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_0) \cap X &= \{\underbrace{[0:0:1]}_{\text{3-fach}}\}, \\
\mathbb{V}(Z_1) \cap X &= \{\underbrace{[1:0:0]}_{\text{2-fach}}, [0:0:1]\}, \\
\mathbb{V}(Z_2) \cap X &= \{[1:1:0], [1:0:0], [1:-1:0]\}.
\end{aligned}$$

$\mathbb{V}(Z_0)$ und $\mathbb{V}(Z_1)$ sind Tangenten an X! $\mathbb{V}(Z_1)$ = gewöhnliche Tangente, $\mathbb{V}(Z_0)$ = Wendetangente.

Definition 1.16 Ist $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$ und $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ die Zerlegung in homogene Bestandteile f_ν ($\deg(f_\nu) = \nu$), $f_d \neq 0$, so heißt

$$F := Z_0^d f_0 + Z_0^{d-1} f_1(Z_1, \ldots, Z_n) + \cdots + f_d(Z_1, \ldots, Z_n)$$

die *Homogenisierung* von F bzgl. $Z_0; Z_1, \ldots, Z_n$. Wir bezeichnen F auch mit f^h.
(Bemerkung: $F^{(i)} = Z_i^d f_0 + Z_i^{d-1} f_i(Z_0, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n) + \cdots$ ist die Homogenisierung von f bzgl. $Z_i; Z_0, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n$.)

Es gelten die Regeln:

Lemma 1.17

$$\begin{aligned}
K[z_1, \ldots, z_n] &\longrightarrow K[Z_0, \ldots, Z_n], \quad f \longmapsto f^h, \\
\{F \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \mid F \text{ homogen}\} &\longrightarrow K[z_1, \ldots, z_n], \quad F \longmapsto F_{dh}
\end{aligned}$$

sei die Homogenisierungs- bzw. Dehomogenisierungsabbildung. Dann gilt

a) $(fg)^h = f^h g^h$, $\quad (FG)_{dh} = F_{dh} G_{dh}$,

b) $(f^h)_{dh} = f$, $\quad (F_{dh})^h X_0^r = F$ für ein $r \in \mathbb{N}$,

c) $(F + G)_{dh} = F_{dh} + G_{dh}$, $\quad X_0^t (f + g)^h = X_0^r f^h + X_0^s g^h$, wobei $r, s, t \in \mathbb{N}$ geeignet zu wählen sind.

Beweis: Übung.

Übungen

1) Beweise: Ist $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad m, so gilt $m \cdot F = \sum_{\nu=0}^{n} Z_\nu \frac{\partial F}{\partial Z_\nu}$.

2) Für $F \in \mathbb{R}[Z_0, Z_1, Z_2]$ sei $\mathrm{Sing}(F) := \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial Z_0}, \frac{\partial F}{\partial Z_1}, \frac{\partial F}{\partial Z_2}\right) \subset \mathbb{P}^2$. $\varphi : \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{V}(Z_0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Bijektion $\varphi([Z_0 : Z_1 : Z_2]) = \left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}\right) = (z_1, z_2)$. $f \in \mathbb{R}[z_1, z_2]$ sei die Dehomogenisierung von F bzgl. Z_0. Zeige:

   (a) $\varphi(\mathrm{Sing}(F)) = \mathrm{Sing}(f)$.

   (b) Ist $p = [a] \in \mathbb{V}(F) \setminus \mathbb{V}(Z_0)$ und $p \notin \mathrm{Sing}(F)$, so ist

$$T = \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial Z_0}(a) Z_0 + \frac{\partial F}{\partial Z_1}(a) Z_1 + \frac{\partial F}{\partial Z_2}(a) Z_2\right) \subset \mathbb{P}^2$$

   der projektive Abschluß der (affinen) Tangente von $\mathbb{V}(f)$ im Punkt $\varphi(p)$.

   T heißt die *projektive Tangente* von $C(F)$ im Punkt p.
   $P = \mathbb{V}\left(a_0 \frac{\partial F}{\partial Z_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial Z_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial Z_2}\right)$ heißt die *Polare* von $[a]$ bzgl. $\mathbb{V}(F)$.

3) Berechne $\mathrm{Sing}(F)$ für $F = Z_0 Z_2^2 - Z_1(Z_1 - Z_0)(Z_1 + Z_0)$. Wieviele projektive Tangenten von $C = \mathbb{V}(F)$ gehen durch einen gegebenen Punkt $p \in \mathbb{P}^2$?
   Hinweis: Für $p = [a]$ untersuche $\mathbb{V}\left(F, \sum_{i=0}^{2} a_i \frac{\partial F}{\partial Z_i}\right)$.

2 Lineare Teilräume von $\mathbb{P}^n$. Endliche Teilmengen, Rationale Kurven in $\mathbb{P}^n$

Es sei K ein Körper. V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 2.1 Ist $W \subset V$ ein $(k+1)$-dimensionaler Untervektorraum von V, so heißt

$$\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$$

ein *k-dimensionaler linearer Unterraum* von $\mathbb{P}(V)$.

Es gilt $\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1$. $\emptyset = \mathbb{P}(0)$ fassen wir als (-1)-dimensionalen linearen Teilraum von $\mathbb{P}(V)$ auf. Ein Punkt im $\mathbb{P}^n$ ist ein 0-dimensionaler linearer Teilraum, eine projektive Gerade ein 1-dimensionaler. Lineare Räume sind projektive Räume!
Es sei wieder $S = K[Z_0, \ldots, Z_n] = \bigoplus_{d=0}^{n} S_d$.
$S_1 = \{a_0 Z_0 + \cdots + a_n Z_n \mid a_0, \ldots, a_n \in K\}$ ist der Raum der Linearformen auf K^{n+1}. Es gilt:

Lemma 2.2 Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{P}^n$ sind äquivalent:

a) X ist k-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{P}^n$.

b) $\exists$ K-linear unabhängige Linearformen $L_1, \ldots, L_{n-k} \in S_1$, so daß

$$X = \mathbb{V}(L_1, \ldots, L_{n-k}) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathbb{V}(L_i)$$

der Durchschnitt der $n-k$ Hyperebenen $\mathbb{V}(L_1), \ldots, \mathbb{V}(L_{n-k})$ ist.

Beweis:

b) $\Rightarrow$ a) $W = \mathbb{V}_{\text{aff}}(L_1, \ldots, L_{n-k}) \subset K^{n+1}$ ist $n+1-(n-k) = (k+1)$-dimensionaler Untervektorraum von K^{n+1} und $X = \mathbb{P}(W)$.

a) $\Rightarrow$ b) Ist $X = \mathbb{P}(W)$, $W \subset K^{n+1}$ $(k+1)$-dimensionaler Untervektorraum, so ist $W = \mathbb{V}_{\text{aff}}(L_1, \ldots, L_{n-k})$, mit $L_1, \ldots, L_{n-k} \in S_1$ linear unabhängig. Denn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & K^{n+1} & \longrightarrow & K^{n+1}/W & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \searrow^{L_1,\ldots,L_{n-k}} & \cong \downarrow \Phi & & \\ & & & & & & K^{n-k} & & \end{array} \qquad \text{ist exakt.}$$

Behauptung: $L_1, \ldots, L_{n-k}$ sind linear unabhängig.
Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k} \in K$ und $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_{n-k} L_{n-k} = 0$, so ist für $L_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} Z_j$

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i a_{ij} \right) Z_j = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i a_{ij} = 0 \quad \forall\, j = 0, \ldots, n.$$

Da nach Voraussetzung $\operatorname{rg}(a_{ij}) = n-k$, ist $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-k} = 0$. $\square$

Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$ sind die einfachsten projektiven Varietäten im $\mathbb{P}^n$. Sie sind selbst projektive Räume. Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ k-dimensionaler linearer Teilraum, so heißt $n-k$ die *Kodimension* von X in $\mathbb{P}^n$, $n-k = \operatorname{codim}(X, \mathbb{P}^n)$ = minimale Anzahl von Hyperebenen in $\mathbb{P}^n$, die X ausschneiden.
Eine *Gerade* in $\mathbb{P}^n$ ist ein 1-dimensionaler linearer Teilraum. Ist $A = (a_{ij})_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,k}}$ eine $(n+1) \times (k+1)$-Matrix über K vom Rang $k+1$, so ist

$$\varphi = [A] : \mathbb{P}^k \longrightarrow \mathbb{P}^n \text{ injektiv}, \quad \varphi([x_0 : \ldots : x_k]) = [\sum_{j=0}^{k} a_{0j}x_j : \ldots : \sum_{j=0}^{k} a_{nj}x_j],$$

und $\varphi(\mathbb{P}^k) = X = \mathbb{P}(\operatorname{im} A) \subset \mathbb{P}^n$ ist k-dimensionaler linearer Teilraum.
Sind die Zeilenvektoren $b_j = (b_{j0}, \ldots, b_{jn}) \in K^{n+1}$, $j = 1, \ldots, n-k$ linear unabhängige Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$xA = 0 \qquad (x = (x_0, \ldots, x_n) \text{ Zeilenvektor}),$$

so ist

$$X = \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{n} b_{1i}Z_i, \ldots, \sum_{i=0}^{n} b_{n-k,i}Z_i\right).$$

Definition 2.3 Ist $M \subset \mathbb{P}^n$ eine beliebige Teilmenge, so wird mit

$$\operatorname{Span}(M) \;=\; \langle M \rangle = \bigcap_{\substack{M \subset X \subset \mathbb{P}^n \\ X \text{ linear}}} X \subset \mathbb{P}^n$$

der kleinste lineare Unterraum von $\mathbb{P}^n$ bezeichnet, der M enthält.
Sind $X = \mathbb{P}(W)$, $Y = \mathbb{P}(U)$, $W, U \subset K^{n+1}$ Untervektorräume, so ist

$$\overline{XY} := \operatorname{Span}(X \cup Y) = \mathbb{P}(W + U)$$

der von X und Y aufgespannte lineare Teilraum. $p \neq q \in \mathbb{P}^n \Rightarrow \overline{pq}$ =Verbindungsgerade.

Folgende Aussage zeigt den fundamentalen Unterschied zwischen affiner und projektiver Geometrie.

Lemma 2.4 Es seien $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ lineare Teilräume. Dann gilt:

a) $\dim \overline{XY} = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$.

b) Ist $\dim X + \dim Y \geq n$, so ist $X \cap Y \neq \emptyset$ und $\dim(X \cap Y) \geq \dim X + \dim Y - n$ (oder anders formuliert: $\operatorname{codim}(X \cap Y) \leq \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y$, falls $\operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y \leq n$).

Beweis: Es sei $X = \mathbb{P}(W)$, $Y = \mathbb{P}(U)$. Dann ist $\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$. Da $X \cap Y = \mathbb{P}(W \cap U)$, folgt (a).
Zu (b): $\dim \overline{XY} \leq n \overset{(a)}{\Rightarrow} \dim(X \cap Y) \geq \dim X + \dim Y - n$. Ist die rechte Seite dieser Ungleichung nicht negativ, so ist auch $\dim(X \cap Y) \geq 0$, d.h. $X \cap Y \neq \emptyset$. $\square$

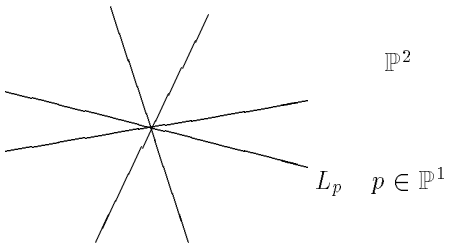
Definition 2.5 Zwei lineare Teilräume X und Y in $\mathbb{P}^n$ mit $\operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y \leq n$ schneiden sich in *allgemeiner Lage* genau dann, wenn $\operatorname{codim}(X \cap Y) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y$ gilt.

Ist X durch die unabhängigen Gleichungen $L_1, \ldots, L_q$ und Y durch die unabhängigen Gleichungen $L_{q+1}, \ldots, L_{q+r}$ gegeben, so sind $L_1, \ldots, L_{q+r}$ ebenfalls linear unabhängig über K ($q + r = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y \leq n$). Ist $\operatorname{codim} X + r > n$, so schneidet der „allgemeine" r-codimensionale lineare Teilraum $Y \subset \mathbb{P}^n$ den Raum X nicht (Begründung als Übung).

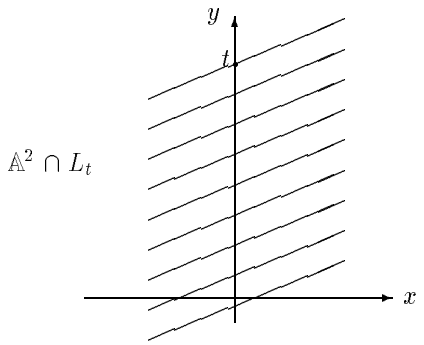
Beispiele 2.6

2.6.1
Zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{P}^2$ schneiden sich stets in genau einem Punkt.

2.6.2
Es sei $m \in K$ fest und für $t \in K$ sei $L_t = \mathbb{V}(tZ + mX - Y) \subset \mathbb{P}^2$. Es sei $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{V}(Z)$. Dann ist $L_t \cap \mathbb{A}^2 = \mathbb{V}(y - mx - t)$, $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ die Gerade „$y = mx + t$" in $\mathbb{A}^2$. Läßt man t laufen, so erhält man alle Geraden mit Steigung m in $\mathbb{A}^2$.
Für $s, t \in K$, $s \neq t$ ist $L_t \cap L_s = \mathbb{V}(tZ - mX - Y, sZ - mX - Y) = \{[0 : 1 : m]\}$. Die Familie $(L_t)_{t \in K}$ enthält alle Geraden in $\mathbb{P}^2$ durch den Punkt $[0 : 1 : m]$ bis auf die „unendlichferne" Gerade $\mathbb{V}(Z)$.
Setzt man $L_{[t_0 : t_1]} := \mathbb{V}(t_0 Z + t_1 mX - t_1 Y)$, so erhält man das „Geradenbüschel" $(L_p)_{p \in \mathbb{P}^1}$ aller Geraden durch den Punkt $[0 : 1 : m]$.



$p \longmapsto L_p$ ist eine Bijektion $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \{L \mid L \subset \mathbb{P}^2 \text{ Gerade mit } [0 : 1 : m] \in L\}$.



Allgemein gilt:

Lemma 2.7 Es sei $W \subset K^{n+1}$ ein $(k+1)$-dimensionaler Untervektorraum von K^{n+1} und $X = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^n$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(K^{n+1}/W\right) &\longrightarrow \{Y \mid X \subset Y,\ Y \text{ ist } (k+1)\text{-dimensionaler linearer Teilraum von } \mathbb{P}^n\}, \\ \tilde{U} &\longmapsto \mathbb{P}(U), \end{aligned}$$

wobei $U = q^{-1}(\tilde{U})$ das Urbild von $\tilde{U} \subset K^{n+1}/W$ unter der natürlichen Quotientenabbildung $q : K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}/W$ ist.

Beweis: Übung!

Die Menge der $(k+1)$-dimensionalen linearen Teilräume von $\mathbb{P}^n$, die einen festen k-dimensionalen linearen Teilraum enthalten, hat in natürlicher Weise die Struktur eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^{n-k-1}$.

Beispiel 2.8
Hyperebenen durch einen festen 2-codimensionalen Teilraum bilden einen $\mathbb{P}^1$, ein sogenanntes *Hyperebenenbüschel*.
Sind $H_1 = \mathbb{V}(L_1),\ H_2 = \mathbb{V}(L_2) \subset \mathbb{P}^n$ zwei Hyperebenen mit Gleichungen $L_1, L_2 \in S_1$, L_1, L_2 K-linear unabhängig, so ist $X = H_1 \cap H_2 = \mathbb{V}(L_1, L_2)$ 2-codimensional und

$$\{H \text{ Hyperebene in } \mathbb{P}^n \mid H \supset X\} = \{\mathbb{V}(aL_1 + bL_2) \mid [a:b] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Definition 2.9

a) Ist $H = \mathbb{V}(L) \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene mit Gleichung $L = a_0Z_0 + \cdots + a_nZ_n$, so ist $[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ eindeutig durch H bestimmt und $H \longmapsto [a_0 : \ldots : a_n]$ ist eine Bijektion $\mathbb{P}^{n*} = \{H \mid H \text{ Hyperebene in } \mathbb{P}^n\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$. $\mathbb{P}^{n*}$ heißt *dualer projektiver Raum* zu $\mathbb{P}^n$. Aus der linearen Algebra wissen wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n*} &= \{H = \mathbb{P}(W) \mid W \subset K^{n+1} \text{ 1-codimensionaler Untervektorraum}\} \\ &= \{\mathbb{P}(\ker\varphi) \mid \varphi : K^{n+1} \longrightarrow K \text{ surjektive Linearform}\}. \end{aligned}$$

Ein System homogener Koordinaten von $H = \mathbb{V}(L) \in \mathbb{P}^{n*}$ wird von den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ der Linearform $L = a_0Z_0 + \cdots + a_nZ_n$ gebildet.

b) Es sei V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Dann heißt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V)^* &= \{\mathbb{P}(W) \mid W \subset V \text{ 1-codimensionaler Untervektorraum}\} \\ &= \{H \subset \mathbb{P}(V) \mid H \text{ Hyperebene}\} \end{aligned}$$

der zu $\mathbb{P}(V)$ *duale projektive Raum*. $\lambda \longmapsto \ker\lambda$ induziert eine natürliche Bijektion

$$\mathbb{P}(V^*) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}(V)^*, \quad [\lambda] \longmapsto \mathbb{P}(\ker\lambda)$$

(wobei $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der *Dualraum* von V ist).

Lemma 2.10 Sei $\dim V = n+1$. Es sei $X = \mathbb{P}(W)$ ein k-dimensionaler linearer Teilraum von $\mathbb{P}(V)$, $q : V \longrightarrow V/W$ sei die Quotientenabbildung. Für $\tilde{\lambda} \in (V/W)^*$, $\tilde{\lambda} \neq 0$, ist $\lambda = \tilde{\lambda} \circ q \in V^*$, $\lambda \neq 0$ und $W \subset \ker\lambda$. $[\tilde{\lambda}] \longmapsto \mathbb{P}(\ker\lambda)$ ist eine Bijektion

$$\mathbb{P}((V/W)^*) \longrightarrow \{H \in \mathbb{P}(V)^* \mid X \subset H\}.$$

Die Menge der Hyperebenen $H \subset \mathbb{P}^n$, die einen festen k-dimensionalen Teilraum X enthalten, ist ein projektiver Raum $\mathbb{P}^{n-k-1}$.

$\mathbb{P}((V/W)^*) \subset \mathbb{P}(V^*)$ heißt die zu $X = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ *duale Untervarietät* und wird auch mit $X^\vee$ bezeichnet. ($X^\vee \subset \mathbb{P}^{n*}$ kann für jede projektive Varietät $X \subset \mathbb{P}^n$ definiert werden.)

Übungen

1) Durch n allgemeine Punkte im $\mathbb{P}^n$ gibt es genau eine Hyperebene.

2) n allgemeine Hyperebenen im $\mathbb{P}^n$ schneiden sich in genau einem Punkt.

3) Es seien $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ lineare Teilräume und $\dim X - \dim Y \leq n-2$.
Dann ist $\dim \overline{XY} \leq \dim X + \dim Y + 1$. Wann gilt Gleichheit?

4) Wie können sich lineare Teilräume $X, Y \subset \mathbb{P}^4$ schneiden? Was ist jeweils die allgemeine Situation?

5) (a) Sind $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^4$ disjunkte Geraden, so ist $H := \overline{L_1 L_2}$ eine Hyperebene in $\mathbb{P}^4$.

   (b) Sind $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^4$ paarweise disjunkte Geraden und schneiden sich $H = \overline{L_1 L_2}$ und L_3 in allgemeiner Lage, so gibt es genau eine Gerade $L \subset \mathbb{P}^4$ mit $L \cap L_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, 3$.

6) Wir betrachten folgende Aussage: „Sind $E_1, E_2, E_3 \subset \mathbb{P}^4$ Ebenen, so gibt es genau eine Ebene $E \subset \mathbb{P}^4$, so daß $E \cap E_i$ eine Gerade ist für $i = 1, 2, 3$." Wie müssen E_1, E_2, E_3 gewählt sein, damit diese Aussage gilt?

7) Man kann $(\mathbb{P}^{n*})^*$ in natürlicher Weise mit $\mathbb{P}^n$ identifizieren. Es gilt dann $(X^\vee)^\vee = X$ für jeden linearen Teilraum $X \subset \mathbb{P}^n$.

8) Es seien $X, Y \subset \mathbb{P}^1$ lineare Teilräume. Gilt dann

   (a) $(\overline{XY})^\vee = X^\vee \cap Y^\vee$,

   (b) $(X \cap Y)^\vee = \overline{X^\vee Y^\vee}$?

9) Sind die Aufgaben 5b) und 6) dual zueinander?

10) Es sei $F \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ homogen vom Grad $d \geq 2$, und es sei

$$\mathrm{Sing}(F) := \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right) = \emptyset.$$

$C = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ sei die Kurve mit der Gleichung F. Für $p = [a : b : c] \in C$ ist

$$T_p = \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial X}(a,b,c)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(a,b,c)Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(a,b,c)Z\right)$$

die *Tangente* von X in p.

$$C^\vee = \{T_p \mid p \in X\} \subset \mathbb{P}^{2*}$$

heißt die *duale Kurve* von C. Führt man in $\mathbb{P}^{2*}$ die zu X, Y, Z dualen homogenen Koordinaten ein, so ist $C^\vee$ das Bild der sogenannten *Gaußabbildung*

$$G : C \longrightarrow \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^{2*}, \quad G([a : b : c]) = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(a,b,c) : \frac{\partial F}{\partial Y}(a,b,c) : \frac{\partial F}{\partial Z}(a,b,c)\right].$$

Bestimme eine Gleichung von $C^\vee$ für

   (a) $C = \mathbb{V}(X^2 + Y^2 - Z^2)$,

   (b) $C = \mathbb{V}(ZY^2 - X^3 + XZ^2)$!

Dies wird später systematisch untersucht.

Wir untersuchen jetzt endliche Punktmengen in $\mathbb{P}^n$. Im folgenden sei der Körper K stets unendlich.

Lemma 2.11 Ist $X = \{p_1, \ldots, p_d\} \subset \mathbb{P}^n$ eine Menge von d Punkten, so gibt es homogene Polynome $F_1, \ldots, F_s \in K[Z_0, \ldots, Z_n] = S$ vom Grad d, so daß $X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s)$.

Beweis: Es seien $L_{\nu 1}, \ldots, L_{\nu n} \in S$ homogen vom Grad 1, so daß $\{p_i\} = \mathbb{V}(L_{i1}, \ldots, L_{in})$ für $i = 1, \ldots, d$. Für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \{1, \ldots, n\}^d$ sei $F_\nu = \prod_{i=1}^d L_{i\nu_i}$.
Dann gilt $X = \mathbb{V}(\{F_\nu \mid \nu \in \{1, \ldots, n\}^d\})$.

a) $F_\nu(p_j) = \prod_{i=1}^d L_{i\nu_i}(p_j) = 0$, weil $L_{j\nu_j}(p_j) = 0$.

b) Ist $F_\nu(p) \neq 0$ für ein $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$, so ist $L_{i\nu_i}(p) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, d$, also $p \neq p_i$ für $i = 1, \ldots, d$. $\square$

Problem: Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät, so ist das minimale $m \in \mathbb{N}$ gesucht, so daß $X = \mathbb{V}(M)$ mit $M \subset \bigoplus_{d=0}^m S_d$ ist; X soll also Nullstellengebilde von homogenen Polynomen vom Grad $\leq m$ sein.

Beispiele 2.12

a) $m = 1$ bedeutet, daß X linear ist.

b) Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ endlich, $|X| = d$ und liegt X auf einer Geraden L, so ist $m = d$.
Beweis: Ist F homogen vom Grad $< d$, und ist $X \subset \mathbb{V}(F)$, so ist $L \subset \mathbb{V}(F)$. Das sieht man so: Es sei $\varphi : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\cong} L$ eine Parametrisierung

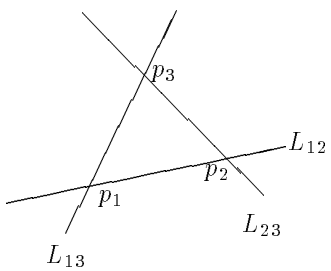
$$\begin{aligned} Z_0 &= a_0 X_0 + b_0 X_1 \\ &\vdots \\ Z_n &= a_n X_0 + b_n X_1 \qquad \text{von } L. \end{aligned}$$

$X \subset \mathbb{V}(F)$ und $X \subset L$ bedeutet: Das homogene Polynom

$$F|L := F(a_0 X_0 + b_0 X_1, \ldots, a_n X_0 + b_n X_1) \in K[X_0, X_1]$$

vom Grad $< d$ hat d Nullstellen in $\mathbb{P}^2$; also ist $F|L = 0$.

c) Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ endlich mit $|X| = d$ und liegt X in keiner Geraden von $\mathbb{P}^n$, so ist $X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s)$ mit homogenen Polynomen $F_1, \ldots, F_s$ vom Grad $\leq d - 1$.
Beweis: Nach Voraussetzung ist $d \geq 3$.
Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach d.
$d = 3$: Span(X) ist eine Ebene, also Œ $n = 2$. Es seien $L_{ij} \in K[Z_0, Z_1, Z_2]$ mit $L_{ij}(p_i) = L_{ij}(p_j) = 0$ für $1 \leq i < j \leq 3$, wobei $X = \{p_1, p_2, p_3\}$.
Dann ist $X = \mathbb{V}(L_{12}L_{13}, L_{12}L_{23}, L_{13}L_{23})$ Schnitt von drei entarteten Kegelschnitten in $\mathbb{P}^2$.



(Übung: Es sei $Q_1 = L_{12}L_{13},\ Q_2 = L_{12}L_{23},\ Q_3 = L_{13}L_{23}$. Ein Kegelschnitt $\mathbb{V}(Q)$ enthält X dann und nur dann, wenn $Q = a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3$ mit $a_i \in K$ gilt. Für welche a_i ist Q nicht entartet? Hinweis: Bestimme $\dim_K\{Q \in S_2 \mid Q(p_i) = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3\}$).

Es sei $d \geq 4$. $X = \{p_1, \ldots, p_d\}$, $X \setminus \{p_d\}$ nicht auf einer Geraden.
$\Rightarrow X' = X \setminus \{p_d\} = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_r)$, $\deg(F_i) < d - 1$, $\{p_d\} = \mathbb{V}(L_1, \ldots, L_n)$, $\deg(L_j) = 1$
$\Rightarrow \deg(F_iL_j) < d$ und $X = X' \cup \{p_d\} = \mathbb{V}(\{F_iL_j \mid i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n\})$.

d) Ist $X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s)$, $\deg(F_i) = d_i$, und ist $d \in \mathbb{N}$ beliebig mit $d \geq d_i \ \forall i$, so gibt es homogene Polynome $\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_r \in S_d$, so daß $X = \mathbb{V}(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_r)$.
Beweis: Anstelle von F_i wähle man die Polynome $Z_0^{\nu_0} \cdots Z_n^{\nu_n} F_i$ mit $\nu_0 + \cdots + \nu_n + d_i = d$. Da $\mathbb{V}(Z_0, \ldots, Z_n) = \emptyset$, ändert sich die Nullstellenmenge nicht:

$$\mathbb{V}(F_i) = \mathbb{V}(\{Z^\nu F_i \mid |\nu| + d_i = d\}) .$$

Definition 2.13 Eine endliche Menge $X \subset \mathbb{P}^n$ heißt in *allgemeiner Lage* $\iff$ Für jede Teilmenge $Y \subset X$ mit $|Y| \leq n+1$ ist $\dim(\mathrm{Span}(Y)) = |Y| - 1$;
d.h. ist $k \leq n+1$ und sind $[a_{10} : \ldots : a_{1n}], \ldots, [a_{k0} : \ldots : a_{kn}]$ verschiedene Punkte von X, so ist der Rang der Matrix $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=0,\ldots,n}}$ maximal, also gleich k.

Satz 2.14 Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ endlich, in allgemeiner Lage und gilt $|X| = d \leq 2n$, so gibt es quadratische Formen $Q_1, \ldots, Q_s \in S_2$, so daß $X = \mathbb{V}(Q_1, \ldots, Q_s)$. ($X$ ist Durchschnitt von Quadriken.)

Beweis:
1.Fall: Es sei $d = 2n$ und $M = \{Q \in S_2 \mid Q(p) = 0 \ \forall p \in X\}$.
Behauptung: $X = \mathbb{V}(M)$.
Natürlich ist $X \subset \mathbb{V}(M)$ nach Definition von M. Es sei nun $q = [b] \in \mathbb{V}(M)$, $b \in K^{n+1} \setminus \{0\}$. Wir müssen zeigen, daß $q \in X$ gilt. Als ersten Schritt überlegen wir uns:
Behauptung 1:
Für jede Teilmenge $X_1 \subset X$ mit $|X_1| = n$ gilt: $q \in \mathrm{Span}(X_1)$ oder $q \in \mathrm{Span}(X \setminus X_1)$.
Beweis: Es sei $X = X_1 \cup X_2$ irgendeine Zerlegung von X mit $|X_i| = n$. $L_i \in S_1$ sei Linearform mit $\mathrm{Span}(X_i) = \mathbb{V}(L_i)$ $(i = 1, 2)$. (Nach Voraussetzung ist ja $\dim(\mathrm{Span}(X_i)) = |X_i| - 1 = n - 1$.)
Es folgt: $Q := L_1 L_2 \in S_2$ mit $\mathbb{V}(Q) = H_1 \cup H_2 \supset X$; also ist $Q \in M$, also $Q(q) = 0$, d.h.: $q \in H_1 \cup H_2$.

Jetzt können wir eine Teilmenge $Y \subset X$ finden, so daß

$$(1) \qquad |Y| = k \leq n \text{ und } q \in \mathrm{Span}(Y), \text{ aber } q \notin \mathrm{Span}(Y \setminus \{p\}) \text{ für alle } p \in Y.$$

Wir numerieren die Elemente von X in der Form $X = \{p_1, \ldots, p_{2n}\}$ mit $Y = \{p_1, \ldots, p_k\}$ $(k \leq n)$. Es sei $a_i \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $p_i = [a_i]$. Je $m \leq n+1$ der Vektoren $a_1, \ldots, a_{2n}$ sind nach Voraussetzung K-linear unabhängig. Nach (1) ist $q = [b]$ durch eine Linearkombination $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ mit $\lambda_i \in K \setminus \{0\}$ $\forall i$ gegeben.
Nun ist dies auch die Darstellung von b in der Basis $\mathcal{B}_{\underline{i}} = (a_1, \ldots, a_k, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n+1-k}})$, wobei $k+1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1-k} \leq 2n$, $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_{n+1-k})$. Folglich ist

$$b \notin \langle a_2, \ldots, a_k, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n+1-k}} \rangle \quad \forall \underline{i}.$$

Nach Behauptung 1 muß somit

$$b \in \langle a_1, a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-1}} \rangle \quad \text{für alle } k+1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-1} \leq 2n$$

gelten. Es folgt insbesondere

$$b \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle a_1, a_{n+1}, \ldots, \hat{a}_{n+i}, \ldots, a_{2n} \rangle = \langle a_1 \rangle,$$

und das heißt $q = p_1$, also $q \in X$ (ein $\hat{}$ über einem Index bedeutet, daß dieser wegzulassen ist).

2.Fall: $d < 2n$.
Seien $X, Y_1, Y_2 \subset \mathbb{P}^n$ disjunkt mit $|Y_i| = 2n - d$. Dann ist $X_i = X \cup Y_i$ endlich mit $|X_i| = 2n$ und

$X_1 \cap X_2 = X$. Also reduziert man den Beweis auf den ersten Fall, wenn man Y_i noch so wählt, daß $X \cup Y_i$ in allgemeiner Lage ist. $\square$

Allgemein gilt der

Satz 2.15 Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ endlich und in allgemeiner Lage. $k \geq 2$ sei minimal gewählt, so daß $|X| \leq kn$. Dann ist X der Durchschnitt von Hyperflächen vom Grad k.

Beweis:
1.Fall: $d = kn$. Induktion nach k. $k = 2$ ist schon bewiesen.
$(k-1) \longrightarrow k$ $(k \geq 3)$:
Es sei $M = \{F \in S_k \mid F(p) = 0 \; \forall p \in X\}$. Es sei $q \in \mathbb{V}(M)$. Zu zeigen ist: $q \in X$.
Behauptung 1: $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, $|X_i| = n \; \forall i \; \Rightarrow \exists \, i$, so daß $q \in \mathrm{Span}(X_i)$.
Beweis wie in 2.14.
Sei wieder $Y \subset X$ minimal mit $q \in \mathrm{Span}(Y)$. Nach Behauptung 1 ist $m = |Y| \leq n$. Sei $Y' \subset X \setminus Y$ beliebig mit $|Y'| = n - m + 1$ und $p \in Y$ fest gewählt. $H_{Y'} := \mathrm{Span}(Y' \cup (Y \setminus \{p\}))$ ist Hyperebene mit $q \notin H_{Y'}$. Wir schreiben $X = \underbrace{[(Y \setminus \{p\}) \cup Y']}_{n \text{ Elemente}} \quad \dot\cup \quad \underbrace{[Y'' \cup \{p\}]}_{(k-1)n \text{ Elemente}}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Teilmenge $M' \subset S_{k-1}$ mit $Y'' \cup \{p\} = \mathbb{V}(M')$. Sei $L' \in S_1$ eine Gleichung für $H_{Y'}$. Dann ist $L'M' = \{L'F' \mid F' \in M'\} \subset M$;
also ist $q \in \mathbb{V}(L'M') = H_{Y'} \cup \mathbb{V}(M')$. Da $q \notin H_{Y'}$, ist $q \in \mathbb{V}(M') = Y'' \cup \{p\}$. Also ist

$$q \in \bigcap_{\substack{Y'' \subset X \\ Y'' \cap Y = \emptyset \\ |Y''| = (k-1)n-1}} (Y'' \cup \{p\}) = \{p\}$$

(denn $|X \setminus Y| = kn - m \geq (k-1)n$). Es folgt also $q = p \in X$.

2.Fall: $d < kn$ wie in 2.14. $\square$

Problem: Seien $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ endlich mit $|X| = |Y| = d$. Wann sind X und Y projektiv äquivalent?

Übungen

1) Sind X, Y in allgemeiner Lage und gilt $|X| = |Y| = d \leq n + 2$, so sind X und Y projektiv äquivalent.

2) Ist $d = n + 2$, so gibt es genau eine lineare Transformation $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ mit $\varphi(p_i) = q_i$ für $i = 1, \ldots, n+2$, wobei $X = \{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$, $Y = \{q_1, \ldots, q_{n+2}\}$.

3) Sei $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ mit $x = [x : 1]$, $\infty = [1 : 0]$. Dann gibt es zu drei paarweise verschiedenen Punkten $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1$ genau eine projektive Transformation $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ mit $\varphi(p_1) = [1 : 1] = 1$, $\varphi(p_2) = [1 : 0] = \infty$, $\varphi(p_3) = [0 : 1] = 0$. $DV(p_1, p_2, p_3, p_4) := \varphi(p_4)$ heißt dann das *Doppelverhältnis* von p_1, p_2, p_3, p_4. Zeige:

$$DV([z_1 : 1], [z_2 : 1], [z_3 : 1], [z_4 : 1]) = [(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) : (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)].$$

Wir kommen nun zu den rationalen Kurven in $\mathbb{P}^n$.

Beispiel 2.16 Die *rationale Kubik* in $\mathbb{P}^3$.

$$t \longmapsto (t, t^2, t^3) = (z_1, z_2, z_3)$$

$$\begin{array}{ccc} t & \mathbb{A}^1 & \longrightarrow \mathbb{A}^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [1:t] & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^3 \end{array} \qquad z_i := \tfrac{Z_i}{Z_0}, \quad t = \tfrac{T_1}{T_0}$$

$$[T_0 : T_1] \longmapsto [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]$$

$Z_0 = T_0^3, \quad Z_1 = T_0^2 T_1, \quad Z_2 = T_0 T_1^2, \quad Z_3 = T_1^3.$
Dann gilt offensichtlich

$$C := \nu(\mathbb{P}^1) \in \mathbb{V}(\underbrace{Z_0 Z_2 - Z_1^2}_{F_0}, \underbrace{Z_0 Z_3 - Z_1 Z_2}_{F_1}, \underbrace{Z_1 Z_3 - Z_2^2}_{F_2}).$$

Die Gleichungen F_0, F_1, F_2 sind offensichtlich die Unterdeterminanten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}.$$

Es sei $Q_i = \mathbb{V}(F_i)$. Dann gilt also $Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2 = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid \operatorname{rg} A(p) \leq 1\}$. Aus dieser Gleichung folgert man leicht

$$Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2 \subset C \qquad (\text{Übung}).$$

Also haben wir

$$C = Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2.$$

Die Abbildung $\nu : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$ ist bijektiv. C heißt eine *rationale Normkurve* in $\mathbb{P}^3$. Jede Quadrik der Form $Q_{[a]} = \mathbb{V}(a_0 F_0 + a_1 F_1 + a_2 F_2)$, $[a] = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$, enthält die Kurve C.

Übungen Zeige:

1) $W = \operatorname{Span}_K(F_0, F_1, F_2)$ ist 3-dimensionaler Untervektorraum des 10-dimensionalen K-Vektorraums S_2 aller quadratischen Formen in Z_0, Z_1, Z_2, Z_3.

2) Für $r \in \mathbb{P}^3 \setminus C$ ist $W_r = \{F \in W \mid F(r) = 0\}$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum von W. Liegt r auf einer Sekante von C, d.h. ist $r \in \overline{pq}$ für geeignete Punkte $p, q \in C$, $p \neq q$, so ist $\{p, q, r\} \subset \mathbb{V}(F)$ für alle $F \in W_r$. Da ein quadratisches Polynom auf einer Geraden identisch verschwindet, wenn es dort drei Nullstellen hat, gilt

$$\overline{pq} \cup C \subset \bigcap_{F \in W_r} \mathbb{V}(F).$$

Da W_r 2-dimensional ist, gibt es Punkte $[a], [b] \in \mathbb{P}^2$, so daß $(\overline{pq} \cup C) \subset (Q_{[a]} \cap Q_{[b]})$ gilt.

3) $Q_{[a]} = \mathbb{V}\left(\det \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}\right)$ für $[a] = [a_0 : a_1 : a_2]$.

4) Seien $[a] = [a_0 : a_1 : a_2]$, $[b] = [b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^2$ zwei verschiedene Punkte. Es sei

$$A = A(Z_0, Z_1, Z_2) = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Beweise: $\{p \in \mathbb{P}^2 \mid \operatorname{rg} A(p) \leq 2\} = Q_{[a]} \cap Q_{[b]} = C \cup L_{[a],[b]}$, wobei
$L_{[a],[b]} := \mathbb{V}\left(\det \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix}\right)$.

5) Berechne $C \cap L_{[a],[b]}$.

Definition 2.17 Es sei $d \geq 2$ und

$$S_d = \{A \in K[T_0, T_1] \mid A \text{ homogen vom Grad } d\}.$$

S_d ist $(d+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $A_0, \ldots, A_d$ eine Basis von S_d. Dann haben $A_0, \ldots, A_d$ keine gemeinsamen Nullstellen in $\mathbb{P}^1$,
(denn $A_0(t_0, t_1) = \cdots = A_d(t_0, t_1) = 0 \overset{!}{\Rightarrow} t_0^d = t_0^{d-1} t_1 = \cdots = t_1^d = 0 \Rightarrow t_0 = t_1 = 0$)
und $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$ mit $\varphi([t_0 : t_1]) = [A_0(t_0, t_1) : \ldots : A_d(t_0, t_1)]$ ist wohldefinierte injektive Abbildung. $C = \varphi(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$ heißt eine *rationale Normkurve* in $\mathbb{P}^d$.

Speziell erhält man $\nu_d : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$, $\nu_d([t_0 : t_1]) = [t_0^d : t_0^{d-1} t_1 : \ldots : t_1^d]$ für die Basis $T_0^d, T_0^{d-1} T_1, \ldots, T_1^d$ von S_d. $\nu_d(\mathbb{P}^1) = \left\{[Z_0 : \ldots : Z_d] \in \mathbb{P}^d \mid \operatorname{rg} \begin{pmatrix} Z_0 & \cdots & Z_{d-1} \\ Z_1 & \cdots & Z_d \end{pmatrix} \leq 1\right\}$ ist projektive Varietät (Durchschnitt von $\binom{d}{2}$ Quadriken).
Ist $A_i = \sum_{j=0}^{d} a_{ij} T_0^{d-j} T_1^j$, so definiert $A = (a_{ij}) \in GL_{d+1}(K)$ eine lineare Transformation $[A] : \mathbb{P}^d \longrightarrow \mathbb{P}^d$ mit $[A] \circ \nu_d = \varphi$.
Also ist $C = [A](\nu_d(\mathbb{P}^1))$ ebenfalls projektive Varietät und zur sogenannten *Standardnormkurve* $\nu_d(\mathbb{P}^1)$ projektiv äquivalent.

Übungen

1) Es sei C eine rationale Normkurve in $\mathbb{P}^d$. Zeige:

   (a) Jede endliche Menge $X \subset C$ ist in allgemeiner Lage. (Hinweis: Man stößt auf die Vandermondsche Determinante.)

   (b) Ist $k \geq 2$, und sind $p_1, \ldots, p_{dk+1}$ paarweise verschiedene Punkte auf C, so verschwindet ein homogenes Polynom $F \in K[Z_0, \ldots, Z_d]$ vom Grad k, das in $p_1, \ldots, p_{dk+1}$ verschwindet, identisch auf C. Insbesondere wird die Menge $X = \{p_1, \ldots, p_{dk+1}\}$ nicht von Hyperflächen vom Grad $\leq k$ ausgeschnitten. Satz 2.15 ist also „scharf“.

2) Für $1 \leq k \leq d-1$ sei $M_k = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \cdots & Z_k \\ Z_1 & & & Z_{k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{d-k} & \cdots & \cdots & Z_d \end{pmatrix}$.
   Dann ist $\nu_d(\mathbb{P}^1) = \{[Z] \in \mathbb{P}^d \mid \operatorname{rg} M_k(Z) \leq 1\}$.

3) Es sei $F = \det \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_2 \end{pmatrix}$ und $G = \det \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_2 & Z_3 & Z_0 \end{pmatrix}$. Bestimme $\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(G)$.

Satz 2.18 Durch $d+3$ Punkte in allgemeiner Lage in $\mathbb{P}^d$ geht genau eine rationale Normkurve.

Beweis: Œ können wir annehmen, daß die gegebenen Punkte folgende homogene Koordinaten besitzen (eventuell muß man eine Projektivität anwenden):

$$p_0 = [1 : 0 : \ldots : 0], \quad p_1 = [0 : 1 : 0 : \ldots : 0], \ \ldots, \ p_d = [0 : \ldots : 0 : 1],$$

$$p_{d+1} = [1 : \ldots : 1], \quad p_{d+2} = [a_0 : \ldots : a_d].$$

Daß $p_0, \ldots, p_{d+2}$ in allgemeiner Lage sind, bedeutet:
$a_i \neq 0$ für $i = 0, \ldots, d$ ($a_i =$„$\det(p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{d+2}, p_{i+1}, \ldots, p_d)$“) und $a_i \neq a_j \quad \forall\, i \neq j$.
($a_i - a_j = \pm \det(p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_d, p_{d+1}, p_{d+2})$. Ein Dach $\hat{}$ über einem Element bedeutet, daß dieses Element wegzulassen ist.)
Nun sei

$$L_i = T_0 - a_i^{-1} T_1 \ \in K[T_0, T_1] \quad \text{und}$$

$$G := \prod_{i=0}^{d} L_i, \quad A_i := \frac{G}{L_i} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d} L_j \ \in S_d \subset K[T_0, T_1].$$

$A_0, \ldots, A_d$ sind linear unabhängig, denn aus $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i A_i = 0$ folgt $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i A_i(a_j^{-1}, 1) = 0$;
da $A_i(a_j^{-1}, 1) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{d} (a_j^{-1} - a_k^{-1}) = 0 \Leftrightarrow j \neq i$, erhalten wir $\lambda_i = 0$ für alle $i = 0, \ldots, d$.
Damit ist $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d, \ \varphi([t_0 : t_1]) = [A_0(t_0, t_1) : \ldots : A_d(t_0, t_1)]$ wohldefiniert und $C = \varphi(\mathbb{P}^1)$ ist rationale Normkurve in $\mathbb{P}^1$ mit $\varphi([a_i^{-1} : 1]) = p_i$ für $i = 0, \ldots, d$ und (da $L_i(1, 0) = 1$)

$$\begin{aligned} \varphi([1 : 0]) &= [G(1,0) : \ldots : G(1,0)] = [1 : \ldots : 1] \ = \ p_{d+1}, \\ \varphi([0 : 1]) &= [\frac{G(1,0)}{-a_0^{-1}} : \ldots : \frac{G(1,0)}{-a_d^{-1}}] \ = \ p_{d+2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine rationale Normkurve $C \subset \mathbb{P}^d$ mit $p_0, \ldots, p_{d+2} \in C$ gefunden. Wir müssen noch die Eindeutigkeit beweisen:
Es sei $q_i = [1 : a_i] \in \mathbb{P}^1$, $q_{d+1} = [1 : 0]$, $q_{d+2} = [0 : 1]$. Dann gilt also $\varphi(q_i) = p_i$ für $i = 0, \ldots, d+2$. Sei nun $\psi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$ eine weitere Normkurve durch $p_0, \ldots, p_{d+2}$. Es gibt also Punkte $r_0, \ldots, r_{d+2} \in \mathbb{P}^1$ mit $\psi(r_i) = p_i$. ψ sei durch die Basis $(B_0, \ldots, B_d)$ der homogenen Polynome vom Grad d in den Unbestimmten T_0, T_1 definiert.
Da $p_i = [0 : \ldots : 1 : \ldots : 0]$ für $i = 0, \ldots, d$, gilt also $B_j(r_i) = 0$ für $i, j = 0, \ldots, d$ und $i \neq j$.
Da man ψ durch $\psi \circ \alpha$ ersetzen darf, wobei $\alpha : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ eine beliebige Projektivität ist, sei Œ $r_i = [1 : b_i]$ für $i = 0, \ldots, d$, $r_{d+1} = q_{d+1} = [1 : 0]$ und $r_{d+2} = q_{d+2} = [0 : 1]$. Es folgt

$$B_j = \lambda_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{d} (T_0 - b_i^{-1} T_1),$$

wobei $\lambda_j \in K \setminus \{0\}$. Weiter gilt $\psi(r_{d+1}) = [1 : \ldots : 1]$, also $B_j(1, 0) = B_k(1, 0)$ für alle j, k, d.h. $\lambda_j = \lambda_k$ für alle j, k und somit Œ $\lambda_j = 1 \quad \forall\, j$.
Als letzte Bedingung haben wir $\psi([0 : 1]) = p_{d+2} = \varphi([0 : 1])$, d.h.

$$[b_0, \ldots, b_d] = [B_0(0,1) : \ldots : B_d(0,1)] = [A_0(0,1) : \ldots : A_d(0,1)] = [a_0 : \ldots : a_d],$$

also $b_i = a a_i$ mit $a \in K \setminus \{0\}$. Es folgt $B_j(T_0, T_1) = A_j(T_0, a^{-1} T_1)$ und somit ist $\psi = \varphi \circ \beta$, wobei $\beta : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ die Projektivität $[t_0 : t_1] \longmapsto [t_0 : a^{-1} t_1]$ ist. Die Behauptung $\psi(\mathbb{P}^1) = \varphi(\mathbb{P}^1)$ ist bewiesen! $\square$

Bemerkung 2.19 Wir haben eine einfache Parametrisierung $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$ der rationalen Normkurve in $\mathbb{P}^d$ durch die Punkte $[1:0:\ldots:0],\ldots,[0:\ldots:0:1],[1:\ldots:1],[a_0,\ldots,a_d]$, nämlich

$$\varphi([t_0:t_1]) = [\tfrac{a_0}{a_0t_0-t_1} : \ldots : \tfrac{a_d}{a_dt_0-t_1}] \quad \text{für } [t_0:t_1] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{[1:a_i] \mid i=0,\ldots,d\}.$$

Durch Erweitern mit dem homogenen Polynom $G = \prod_{i=0}^{d}(T_0 - a_i^{-1}T_1)$ werden die undefinierten Stellen aufgehoben. φ definiert die rationale Abbildung

$$\varphi_0 : \underset{\left(t=\frac{t_1}{t_0}\right)}{\mathbb{A}^1} \longrightarrow \underset{\left(z_i=\frac{Z_i}{Z_0}\right)}{\mathbb{A}^d},$$

$$\varphi_0(t) = \left(\frac{a_1}{a_0}\frac{a_0-t}{a_1-t},\ldots,\frac{a_d}{a_0}\frac{a_0-t}{a_d-t}\right).$$

Für $d=2$ sagt der Satz: Es gibt genau einen nicht entarteten Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}^2$ durch 5 gegebene Punkte in allgemeiner Lage. Durch die Punkte

$$[1:0:0],[0:1:0],[0:0:1],[1:1:1],[1:a:b] \quad (a \neq b,\ a,b \notin \{0,1\})$$

geht der Kegelschnitt C mit der rationalen Parametrisierung

$$\varphi_0(t) = \left(\frac{a(1-t)}{a-t}, \frac{b(1-t)}{b-t}\right) \quad (t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{a,b\})$$

und der homogenen Beschreibung

$$\varphi(t_0:t_1) = [(at_0-t_1)(bt_0-t_1) : (bt_0-t_1)(t_0-t_1)a : (at_0-t_1)(t_0-t_1)b].$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1:1) &= [(a-1)(b-1):0:0] = [1:0:0]\\
\varphi(1:a) &= [0:1:0]\\
\varphi(1:b) &= [0:0:1]\\
\varphi(1:0) &= [1:1:1]\\
\varphi(0:1) &= [1:a:b]
\end{aligned}$$

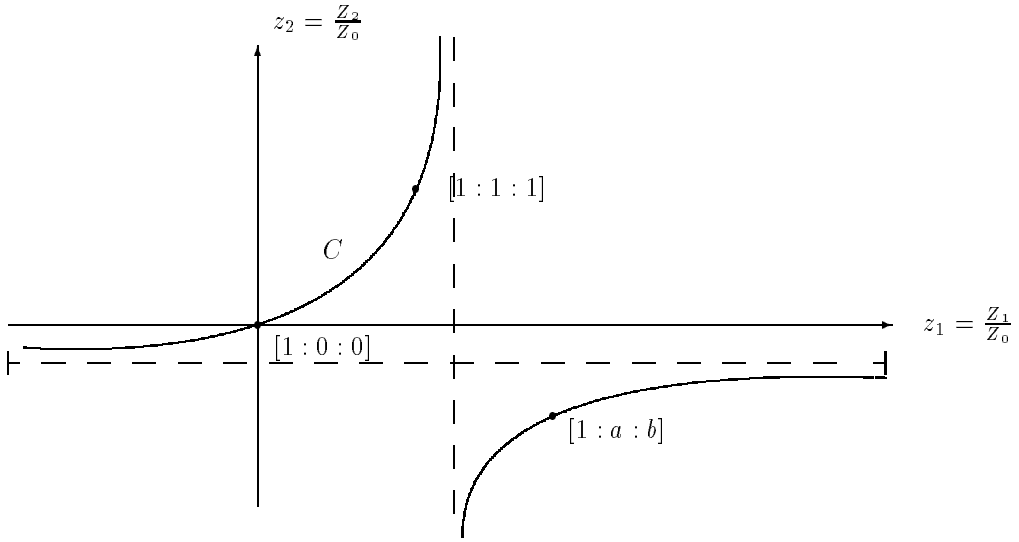
$[1:a],[1:b] \in \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{V}(T_0)$ werden auf die unendlichferne Gerade $\mathbb{V}(Z_0) \subset \mathbb{P}^2$ abgebildet.

$$z_1 = a\frac{1-t}{a-t}, \quad z_2 = b\frac{1-t}{b-t}, \quad t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{a,b\}.$$

Asymptoten sind die Geraden $z_2 = b\frac{1-a}{b-a}$ für $t \longrightarrow a$ und $z_1 = a\frac{1-b}{a-b}$ für $t \longrightarrow b$. Die Gleichung F von C erhält man durch den Ansatz

$$F = x_1Z_0^2 + 2x_2Z_0Z_1 + x_3Z_1^2 + 2x_4Z_0Z_2 + 2x_5Z_1Z_2 + x_6Z_2^2$$

mit Unbekannten $x_1,\ldots,x_6$. Einsetzen der 5 Punkte ergibt die fünf linearen Gleichungen $x_1=0$, $x_3=0$, $x_6=0$, $x_1+2x_2+x_3+2x_4+2x_5+x_6=0$, $x_1+2ax_2+a^2x_3+2bx_4+2abx_5+b^2x_6=0$.



htp

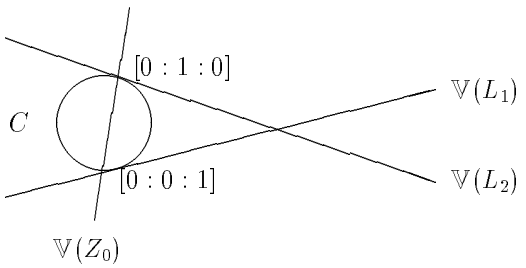
Die bis auf Multiplikation mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$ eindeutig bestimmte, von Null verschiedene Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ ist $\left(0, \frac{b(1-a)}{b-a}, 0, \frac{a(1-b)}{a-b}, -1, 0\right)$. Dazu gehört die Gleichung

$$F = -Z_1 Z_2 + \frac{b(1-a)}{b-a} Z_0 Z_1 + \frac{a(1-b)}{a-b} Z_0 Z_2.$$

Die Dehomogenisierung bzgl. Z_0 ergibt

$$\begin{aligned} f &= -z_1 z_2 + \frac{b(1-a)}{b-a} z_1 + \frac{a(1-b)}{a-b} z_2 \\ &= -\left(z_1 - \frac{a(1-b)}{a-b}\right)\left(z_2 - \frac{b(1-a)}{b-a}\right) - \frac{ab(1-a)(1-b)}{(b-a)^2} \\ &= l_1 \cdot l_2 + c \end{aligned}$$

mit Geradengleichungen l_1, l_2 und einer von Null verschiedenen Konstanten. Da $\mathbb{V}(l_1)$ und $\mathbb{V}(l_2)$ nicht parallel sind, ist $C_0 = C \setminus \mathbb{V}(Z_0) = \mathbb{V}(f)$ eine Hyperbel mit dem „Achsenkreuz“ $\mathbb{V}(l_1 l_2)$ als Asymptoten. Sei $L_i = l_i^h$ die Homogenisierung von l_i. $\mathbb{V}(L_1), \mathbb{V}(L_2)$ sind Tangenten von C in den unendlichfernen Punkten von C!



Übungen

1) Sind die Punkte

$$[1:1:0], [1:0:1], [1:2:0], [0:1:1], [1:1:2]$$

in allgemeiner Lage? Wenn ja, bestimme eine Parametrisierung $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$ und eine Gleichung $F \in K[Z_0, Z_1, Z_2]$ des Kegelschnitts $C \subset \mathbb{P}^2$ durch diese fünf Punkte.

2) Seien $X = \{p_1, \ldots, p_{d+3}\}$, $X' = \{p'_1, \ldots, p'_{d+3}\} \subset \mathbb{P}^d$ in allgemeiner Lage. C und C' seien die rationalen Normkurven in $\mathbb{P}^d$ mit $X \subset C$, $X' \subset C'$. $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$, $\varphi' : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C'$ seien Parametrisierungen, und es sei $q_i = \varphi^{-1}(p_i)$, $q'_i = \varphi'^{-1}(p'_i)$.
Zeige: Es gibt genau dann eine Projektivität $\Phi : \mathbb{P}^d \longrightarrow \mathbb{P}^d$ mit $\Phi(p_i) = p'_i \ \forall\, i$, wenn für alle $i = 4, \ldots, d+3$ gilt $DV(q_1, q_2, q_3, q_i) = DV(q'_1, q'_2, q'_3, q'_i)$.

3) Seien $p, q, r \in \mathbb{P}^2$ in allgemeiner Lage. $L, M \subset \mathbb{P}^2$ seien Geraden, die nicht durch p, q, r gehen und deren Schnittpunkt nicht auf $\overline{pq}$ liegt. Beweise:
$C = \{\overline{ps} \cap \overline{q(\overline{rs} \cap M)} \mid s \in L\}$ ist ein nichtentarteter Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$.

3 Grundbegriffe der kommutativen Algebra

Unter einem *Ring* verstehen wir im folgenden stets einen kommutativen Ring mit Eins. Als wichtigstes Beispiel haben wir den Ring $K[z_1, \ldots, z_n]$ der Polynome in n Unbestimmten mit Koeffizienten in einem Körper.

Wir wiederholen einige Definitionen:

Definition 3.1 $R = (R, +, \cdot)$ ist ein *Ring* $\iff$

1) $(R, +)$ ist abelsche Gruppe,
2) $(xy)z = x(yz) \quad \forall\, x, y, z \in R$,
3) $x(y + z) = xy + xz \quad \forall\, x, y, z \in R$,
4) $xy = yx \quad \forall\, x, y \in R$,
5) $\exists\, 1 \in R$ mit $1x = x \quad \forall\, x \in R$.

Definition 3.2 Sind R, S Ringe, $\varphi : R \longrightarrow S$ eine Abbildung, so heißt $\varphi : R \longrightarrow S$ *Ringhomomorphismus* $\iff$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall\, x, y \in R$,
2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall\, x, y \in R$,
3) $\varphi(1) = 1$.

(Aus $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ folgt $\varphi(0) = 0$ und somit $0 = \varphi(x - x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$, also $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.) φ iso $\iff$ φ bijektiv, dann $R \cong S$.

Definition 3.3 Es sei R ein Ring. $S \subset R$ heißt *Unterring* $\iff$

1) $x - y \in S \quad \forall\, x, y \in S$,
2) $xy \in S \quad \forall\, x, y \in S$,
3) $1 \in S$.

S ist dann selbst ein Ring.

Definition 3.4 Ist R ein Ring und $\varphi : S \longmapsto R$ ein Ringhomomorphismus, so heißt (R, φ) eine *S-Algebra*, und φ heißt der *Strukturhomomorphismus* von R. Man erhält eine Verknüpfung (skalare Multiplikation)

$$\begin{array}{rcl} S \times R & \longrightarrow & R, \\ (a, x) & \longmapsto & ax := \varphi(a)x. \end{array}$$

Es gelten dann wegen Def 3.2 und Def 3.1 die Regeln

1) $(a + b)x = ax + bx \quad \forall\, a, b \in S,\ x \in R$,
2) $a(x + y) = ax + by \quad \forall\, a \in S,\ x, y \in R$,
3) $(ab)x = a(bx) \quad \forall\, a, b \in S,\ x \in R$,

4) $1_S x = x \quad \forall\, x \in R \quad (1_S = \text{ Eins in } S)$,

5) $a(xy) = (ax)y = x(ay) \quad \forall\, a \in S,\ x, y \in R$.

Aus der Verknüpfung $S \times R \longrightarrow R$ erhält man den Strukturhomomorphismus zurück:

$$\forall\, a \in S:\ \varphi(a) = a\, 1_R \quad (1_R = \text{Eins in R}).$$

Beispiele

a) $R = K[z_1, \ldots, z_n]$ ist eine K-Algebra, mit Strukturhomomorphismus $\varphi : K \longrightarrow R$, $\varphi(a) = a$ (als konstantes Polynom).

b) Ist $S \subset R$ Unterring, so kann man R als S-Algebra auffassen.

Definition 3.5 Es sei R ein Ring. $I \subset R$ heißt *Ideal* $\Longleftrightarrow$

1) $I \neq \emptyset$,

2) $x, y \in I \ \Rightarrow\ x - y \in I$ (I ist bzgl. + eine Untergruppe von R),

3) $a \in R,\ x \in I \ \Rightarrow\ ax \in I$.

Beispiele 3.6

a) In $R = \mathbb{Z}$ und $R = K[X]$ (K Körper, $x =$ eine Unbestimmte) sind die Ideale von der Form

$$I = Rx = \{ax \mid a \in R\}.$$

(Beweis: Übung mit Divisionsalgorithmus)

b) In einem Körper K sind 0 und K die einzigen Ideale (Übung!).

c) $\varphi : R \longrightarrow S$ Ringhomomorphismus $\Rightarrow \ker\varphi = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}$ Ideal in R.

Definition 3.7 Es sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Dann ist die Menge $R/I = \{a+I \mid a \in R\}$ der Restklassen von Elementen in R modulo I ($a + I := \{a + x \mid x \in I\}$) wieder ein Ring mit der Addition

$$(a + I) + (b + I) \ :=\ (a + b) + I$$

und der Multiplikation

$$(a + I) \cdot (b + I) \ :=\ (ab) + I.$$

$R/_I$ heißt der *Restklassenring* von R nach I.
Die kanonische Abbildung $\varphi : R \longrightarrow R/_I$ mit $\varphi(a) := a + I$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker\varphi = I$.

Lemma 3.8 (Homomorphiesatz) Ist $\varphi : R \longrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, $I = \ker\varphi$, so induziert φ einen Isomorphismus

$$\bar{\varphi} : R/_I \longrightarrow S$$

mit

$$\bar{\varphi}(a + I) = \varphi(a).$$

Lemma 3.9 Ist $I \subset R$ ein Ideal und $\varphi : R \longrightarrow R/_I$ die Restklassenabbildung, so ist

$$\begin{array}{rcl} \{\bar{J} \mid \bar{J} \text{ Ideal in } R/_I\} & \longrightarrow & \{J \mid J \text{ Ideal in } R \text{ mit } I \subset J\}, \\ \bar{J} & \longmapsto & J := \varphi^{-1}(\bar{J}) \end{array}$$

eine Bijektion mit Umkehrabbildung $J \longmapsto \varphi(J)$.

Definition + Lemma 3.10 Es sei R ein Ring.

a) R heißt *Integritätsbereich* $\iff$ $R \neq 0$ und $\forall\, a, b \in R :\ ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

b) Es sei $I \subset R,\ I \neq R$ ein Ideal in R. I heißt *Primideal*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

   i) $\forall\, a, b \in R :\ ab \in I \Rightarrow a \in I$ oder $b \in I$.

   ii) $R/_I$ ist Integritätsbereich.

c) Es sei $I \subset R,\ I \neq R$ ein Ideal. I heißt *maximales Ideal* in R, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

   i) Ist $I \subset R$ Ideal mit $I \subsetneq J$, so ist $J = R$.

   ii) $R/_I$ ist ein Körper.

Beweis: Es sei $\varphi : R \longmapsto R/_I$ die Restklassenabbildung.

b) *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* $I \subsetneq R \iff R/_I \neq 0$.
$\varphi(a)\varphi(b) = 0 \iff \varphi(ab) = 0 \iff ab \in I$,
$a \in I$ oder $b \in I \iff \varphi(a) = 0$ oder $\varphi(b) = 0$.

c) *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Es sei $a \in R$ mit $\varphi(a) \neq 0$. Dann ist $J = \{b + ra \mid b \in I,\ r \in R\}$ Ideal in R mit $I \subsetneq J$. Also gilt $J = R$, und insbesondere ist $1 \in J$, d.h. $\exists\, b \in I,\ r \in R$ mit $1 = b + ra$, also $1 = \varphi(1) = \varphi(r)\varphi(a)$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Ist $I \subsetneq J \subset R$, so wähle $a \in J \setminus I$. Es ist dann $\varphi(a) \neq 0$. Da $R/_I$ Körper, existiert ein $b \in R$ mit $\varphi(a)\varphi(b) = 1$, also $\varphi(ab) = 1$, $1 = ab + c$ mit $c \in I$, somit ist $1 \in J$, d.h. $J = R$. $\square$

Definition 3.11 Es sei R ein Ring, $I \subset R$ Ideal. Eine Teilmenge $M \subset R$ heißt *Erzeugendensystem* von I, wenn gilt

$$\forall\, x \in I \quad \exists\, a_i \in R,\ x_i \in M, \text{ so daß } x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

I heißt *endlich erzeugt*, wenn I von einer endlichen Menge M erzeugt wird.

Sind $x_1, \ldots, x_m \in R$, so ist

$$\langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \mid a_i \in R \right\}$$

Ideal in R, und heißt das von $x_1, \ldots, x_m$ *erzeugte Ideal*.

Ein Ring heißt *noethersch* $\iff$ Jedes Ideal $I \subset R$ ist endlich erzeugt.

Ist R ein Ring, X eine Unbestimmte, so ist $R[X]$ der Ring der Polynome $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in R$ in der Unbestimmten X und mit Koeffizienten in R.

R ist Unterring von $R[X]$. Man kann also $R[X]$ als R-Algebra auffassen.

Fundamental ist nun der folgende einfache Satz:

Satz 3.12 (Hilbertscher Basissatz) Ist R noethersch, so ist $R[X]$ noethersch.

Beweis: Sei $I \subset R[X]$ Ideal.
Für $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,\ a_i \in R,\ a_n \neq 0$, heißt $\deg(f) = n$ der *Grad* und $\mathrm{LC}(f) = a_n$ der *Leitkoeffizient* von f. Weiter sei $\deg(0) := -\infty$, $\mathrm{LC}(0) := 0$,

$$\mathrm{LC}(I) := \{\mathrm{LC}(f) \mid f \in I\} \subset R$$

die Menge aller Leitkoeffizienten von Polynomen in I.

Behauptung: $\mathrm{LC}(I)$ ist Ideal.
Beweis: Sei $a = \mathrm{LC}(f),\ b = \mathrm{LC}(g),\ f, g \in I$,

$$n = \deg(f) \geq m = \deg(g).$$

Es folgt: $h := f - X^{n-m} \cdot g \in I$.
Ist $a \neq b$, so ist $a - b = \mathrm{LC}(h) \in \mathrm{LC}(I)$.
Ist $a = b$, so ist $a - b = 0 = \mathrm{LC}(a) \in \mathrm{LC}(I)$.
Ist $c \in R$, und $ac \neq 0$, so ist $ac = \mathrm{LC}(cf) \in \mathrm{LC}(I)$.

Nach Voraussetzung gibt es nun endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_m \in I$, so daß

$$\mathrm{LC}(I) = \langle \mathrm{LC}(f_1), \ldots, \mathrm{LC}(f_m) \rangle \subset R.$$

Es sei $n = \max_{i=1,\ldots,m} n_i,\ \ n_i = \deg(f_i)$.
Ist $g \in I$ mit $\deg(g) > n$, so ist $\mathrm{LC}(g) = \sum_{i=1}^{m} a_i \,\mathrm{LC}(f_i)$ für geeignete $a_i \in R$, also ist

$$g' := g - \sum_{i=1}^{m} a_i X^{d-n_i} f_i \in I$$

mit $\deg(g') < \deg(g)$. Ist $d' = \deg(g') > n$, so kann man $a_i' \in R$ finden, so daß

$$g'' := g' - \sum_{i=1}^{m} a_i' X^{d'-n_i} f_i \in I$$

mit $\deg(g'') < \deg(g)$. Iteriert man dies, so erhält man schließlich

$$\forall\, g \in I \text{ mit } \deg(g) > n \quad \exists\, h \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle, \text{ so daß } \deg(g - h) \leq n. \qquad (*)$$

Es sei nun für $d \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{LC}(I)_d := \{\mathrm{LC}(f) \mid f \in I \text{ und } \deg(f) \leq d\}.$$

Wegen $\mathrm{LC}(f) = \mathrm{LC}(Xf)$ ist

$$\mathrm{LC}(I)_0 \subset \cdots \subset \mathrm{LC}(I)_d \subset \mathrm{LC}(I)_{d+1} \subset \cdots \subset \mathrm{LC}(I)_n = \mathrm{LC}(I).$$

$\mathrm{LC}(I)_d$ ist Ideal in R, wie man leicht sieht. Sei

$$\mathrm{LC}(I)_d = \langle \mathrm{LC}(f_{d,1}), \ldots, \mathrm{LC}(f_{d,k_d}) \rangle$$

mit $f_{d,i} \in I$, $\deg(f_{d,i}) \leq d$ für $0 \leq d \leq n$, $1 \leq i \leq k_d$ $\quad (k_d = 0$, falls $\mathrm{LC}(I)_d = 0)$.
Ist nun $f \in I$ und $\deg(f) = d \leq n$, so ist

$$\mathrm{LC}(f) = \sum_{i=1}^{k_d} a_i \mathrm{LC}(f_{d,i}) \quad \text{mit geeigneten } a_i \in R,$$

also $f' = f - \sum_{i=1}^{k_d} a_i X^{d-d_i} f_{d,i} \in I$ mit $\deg(f') < d$.

Es folgt also hieraus und aus $(*)$ durch Iteration:
I wird von der endlichen Menge

$$\{f_{d,i} \mid 0 \leq d < n,\ i = 1, \ldots, k_d\} \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$$

erzeugt. $\square$

Corollar 3.13 Ist K ein Körper und sind $z_1, \ldots, z_n$ Unbestimmte, so ist $K[z_1, \ldots, z_n]$ noethersch.

Beweis: K ist noethersch, da $\langle 0 \rangle$ und $\langle 1 \rangle$ die einzigen Ideale in K sind. Durch Induktion nach n folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.14 Ist R noethersch und $I \subset R$ Ideal, so ist auch R/I noethersch.

Beweis: Sei $\varphi : R \longrightarrow R/I$ die kanonische Abbildung. Ist $\bar{J} \subset R/I$ Ideal, $J := \varphi^{-1}(\bar{J})$, so ist $J = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ mit $x_i \in R$; also ist $\bar{J} = \varphi(J) = \langle \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m) \rangle$ endlich erzeugt. $\square$

Definition 3.15 Es sei S eine R-Algebra mit Strukturabbildung $\varphi : R \longrightarrow S$. S heißt *endlich erzeugt als R-Algebra* $\iff$
$\exists\, x_1, \ldots, x_n \in S$, so daß der kanonische R-Algebra-Homomorphismus

$$\Phi : R[z_1, \ldots, z_n] \longrightarrow S$$

mit $\Phi(z_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ surjektiv ist.

$$\Big(\quad \Phi\Big(\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu z^\nu \Big) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \varphi(a_\nu) x^\nu \quad \forall\, a_\nu \in R \quad S \cong R[z_1, \ldots, z_n]/I, \text{ wobei } I = \ker \Phi \quad \Big)$$

Corollar 3.16 Jede endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen Ring ist noethersch.

Beispiel 3.17
Es sei K ein Körper. $M \subset K[z_1, \ldots, z_n]$, $X = \mathbb{V}(M) \subset \mathbb{A}^n(K)$ affine Varietät.
Dann ist $I(X) := \{f \in K[z_1, \ldots, z_n] \mid f|X = 0\}$ ein Ideal in $K[z_1, \ldots, z_n]$, denn

$$0 \in I(X); \quad f, g \in I(X) \ \Rightarrow\ f - g \in I(X);$$

$$f \in I(X),\ g \in K[z_1, \ldots, z_n] \ \Rightarrow\ gf \in I(X).$$

Es gilt offensichtlich $M \subset I(X)$. Es folgt:

$$X = \mathbb{V}(I(X)),$$

denn: Ist $p \in X$ und $f \in I(X)$, so ist $f(p) = 0$, also $X \subset \mathbb{V}(I(X))$. Ist umgekehrt $p \in \mathbb{V}(I(X))$, so ist $f(p) = 0$ für alle $f \in I(X)$, insbesondere ist $f(0) = 0 \; \forall f \in M$, d.h. $p \in \mathbb{V}(M) = X$.
Ist nun $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, so ist

$$\mathbb{V}(I(X)) \; = \; \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m),$$

denn ist $p \in \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m)$ und $f = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i$, so ist auch $f(p) = \sum g_i(p) f_i(p) = 0$.
Der Hilbertsche Basissatz impliziert also:

Jede affine Varietät $X \subset \mathbb{A}^n$ ist der Durchschnitt von *endlich* vielen Hyperflächen.

Dasselbe gilt auch für projektive Varietäten $X \subset \mathbb{P}^n$ (Übung).

Übungen

1) $I = \langle z_1 - a_1, \ldots, z_m - a_m \rangle \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ ist Primideal und
$K[z_1, \ldots, z_n]/I \cong K[z_{m+1}, \ldots, z_n]$. Ist $n = m$, so ist I maximal.

2) $I = \langle x^2 + 1 \rangle \subset \mathbb{R}[x]$ ist maximal. Bestimme $\mathbb{R}[x]/I$.

3) $I = \langle XZ - Y^2, \, XW - YZ, \, YW - Z^2 \rangle \subset K[X, Y, Z, W]$, $I_{dh} = \{F_{dh} \mid F \in I\} \subset K[x, y, z]$
$\left(x = \frac{X}{W}, \, y = \frac{Y}{W}, \, z = \frac{Z}{W}\right)$ ist Primideal und $K[x, y, z]/I_{dh} \cong K[z]$.
$I = (I_{dh})^h := \{f^h \mid f \in I_{dh}\}$. I ist Primideal.

Hinweis: Man braucht nur zu zeigen:
Sind $F, G \in K[X, Y, Z, W]$ homogen, und ist $FG \in I$, so ist $F \in I$ oder $G \in I$.

An Stelle von Idealen müssen wir allgemeiner auch R-Moduln betrachten.

Definition 3.18 Es sei R ein Ring. Ein *R-Modul* M ist eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe $(M, +)$ mit einer Verknüpfung $R \times M \longrightarrow M, \; (a, x) \longmapsto ax$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= ax + ay, \\ (a + b)x &= ax + bx, \\ (ab)x &= a(bx), \\ 1x &= x \end{aligned}$$

für alle $a, b \in R, \; x, y \in M$.

Beispiele

a) R^n ist ein R-Modul.

b) Jede R-Algebra S ist insbesondere ein R-Modul (man vergesse die Multiplikation in S).

c) Ist K ein Körper, so ist M genau dann K-Vektorraum, wenn M ein K-Modul ist.

d) Abelsche Gruppen sind $\mathbb{Z}$-Moduln.

Definition 3.19 Es sei M ein R-Modul.

a) $N \subset M$ heißt *R-Untermodul* $\iff$
$N \neq \emptyset, \; x, y \in N \; \Rightarrow \; x - y \in N; \quad x \in N, a \in R \; \Rightarrow ax \in N.$

b) Ist $N \subset M$ R-Untermodul, so ist $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ R-Modul mit den Operationen

$$\begin{aligned} (x + N) + (y + N) &= (x + y) + N, \\ a(x + N) &= ax + N. \end{aligned}$$

M/N heißt der *Quotientenmodul* von M nach N.

Definition 3.20 $\varphi : M \longrightarrow M'$ heißt *Homomorphismus* $\iff$
$\varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y) \quad \forall\, a,b \in R,\ x,y \in M.$
Es gilt: $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ sind Untermoduln von M bzw. M' und $M/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$ (induziert von $x \bmod \ker\varphi \longmapsto \varphi(x)$).

Definition 3.21 M ist *endlich erzeugter R-Modul* $\iff$

$$\exists\, x_1,\ldots,x_m \in M, \text{ so daß } M = \Big\{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \mid a_i \in R\Big\} = \langle x_1,\ldots,x_m\rangle \iff$$

$$\exists \text{ surjektiver } R\text{-Modulhomomorphismus } \varphi : R^m \longrightarrow M.$$

$\big(\varphi(a_1,\ldots,a_m) := \sum_{i=1}^{m} a_i x_i,\ M \cong R^m/\ker\varphi$; anders als bei K-Vektorräumen gilt hier im allgemeinen nicht $M \cong R^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.)

Definition 3.22 Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. M heißt *noethersch* $\iff$
Jeder Untermodul N von M ist endlich erzeugt.

Satz 3.23 M noethersch $\iff$ Ist $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M, so ist $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *stationär*, d.h. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall\, n \geq n_0 : M_n = M_{n_0}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ $M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \quad \Rightarrow\ N := \bigcup_{i\geq 0} M_i$ Untermodul von M $\Rightarrow\ N = \langle x_1,\ldots,x_m\rangle$
$\Rightarrow\ \exists\, n_0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,m : \quad x_i \in M_{n_0}$
$\Rightarrow\ N \subset M_{n_0} \quad \Rightarrow \quad N = M_{n_0} \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \geq n_0 : M_n = M_{n_0}.$

„$\Leftarrow$“ $N \subset M$. Es sei $\mathcal{M} := \{N' \mid N' \subset N$ endlich erzeugter Untermodul$\}$
$\mathcal{M}$ hat ein bzgl. $\subset$ maximales Element, denn sonst könnte man eine nicht stationäre Folge $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ von endlich erzeugten Untermoduln von N konstruieren.
Sei also $N' \in \mathcal{M}$ maximal:
Wäre $N' \neq N$, so gäbe es ein $x_0 \in N \setminus N'$ und $N'' = \langle N, x_0\rangle$ wäre auch endlich erzeugt mit $N' \subsetneq N''$. Widerspruch. Also gilt $N' = N$. $\square$

Satz 3.24 Ist R noetherscher Ring und M endlich erzeugter R-Modul, so ist M ebenfalls noethersch.

Beweis: Es sei $\varphi : R^n \longrightarrow M$ ein surjektiver Homomorphismus. Es genügt zu zeigen, daß R^n noethersch ist.
Induktion nach n:
Für $n = 1$ gilt dies nach Voraussetzung.

$(n-1) \longrightarrow n \quad (n \geq 2)$:
Wir betrachten das Diagramm von Homomorphismen

$$R^{n-1} \xrightarrow{\alpha} R^n \xrightarrow{\beta} R.$$

$\alpha(x_1,\ldots,x_{n-1}) := (x_1,\ldots,x_{n-1},0); \quad \beta(x_1,\ldots,x_n) := x_n.$
R^{n-1} und R sind nach Induktionsvoraussetzung noethersch. Es sei $N \subset R^n$ Untermodul.
$N' := \alpha^{-1}(N) \subset R^{n-1}$ ist endlich erzeugt, etwa durch

$$x'_1,\ldots,x'_m \in R^{n-1}$$

und $N'' = \beta(R^n) \subset R$ ist endlich erzeugt, etwa durch $y_1', \ldots, y_k' \in R$.
Es sei $y_i \in N$ mit $\beta(y_i) = y_i'$ und $x_i = \alpha(x_i')$. Für $x \in N$ ist dann

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i'$$

und somit

$$\beta\Big(x - \sum_{i=1}^{k} a_i y_i\Big) = \beta(x) - \sum_{i=1}^{k} a_i\, \beta(y_i) = 0,$$

d.h. $\exists\, z \in N'$ mit $\alpha(z) = x - \sum_{i=1}^{k} a_i y_i$. Für z gibt es eine Darstellung

$$z = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i', \text{ und somit ist } x = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i + \sum_{i=1}^{m} b_i x_i.$$

$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k)$ ist also ein Erzeugendensystem von N. $\square$

Eine weitere wichtige Konstruktion ist das „Lokalisieren“ (Bruchrechnung).

Definition 3.25 Es sei R ein Ring. Eine Teilmenge $N \subset R$ heißt *multiplikativ* $\iff$

(i) $1 \in N$,

(ii) $a, b \in N \;\Rightarrow\; ab \in N$.

Auf $R \times N$ wird die folgende Relation definiert:

$$(a, n) \sim (b, m) \iff \exists\, k \in N, \text{ so daß } k(am - bn) = 0.$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation:
$(a, n) \sim (a, n)$, weil $1 \cdot (an - an) = 0$;
$(a, n) \sim (b, m) \;\Rightarrow\; \exists\, k \in N : k(am - bn) = 0$ (wegen Nullteiler)
$\Rightarrow\; k(bn - am) = 0$
$\Rightarrow\; (b, m) \sim (a, n)$.

$(a, n) \sim (b, m),\ (b, m) \sim (c, l) \;\Rightarrow\; k(am - bn) = 0$ und $k'(bl - cm) = 0$
$\Rightarrow\; kk'(am - bn) = 0$ und $nkk'(bl - cm) = 0$.
Also ergibt sich durch Addition dieser Gleichungen

$$0 = lkk'am - nkk'cm = kk'm(al - cn),$$

d.h. $(a, n) \sim (c, l)$.

Mit $N^{-1}R = R \times N / \sim$ bezeichnen wir die Menge der *Äquivalenzklassen*.
Mit $\frac{a}{n}$ wird die Äquivalenzklasse von (a, n) bezeichnet.
Auf $N^{-1}R$ werden Addition und Multiplikation eingeführt:

(1) $\quad \frac{a}{n} + \frac{b}{m} := \frac{am + bn}{nm}$,

(2) $\quad \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} := \frac{ab}{nm}$ $\quad$ für $a, b \in R,\ n, m \in N$.

Dies ist wohldefiniert, denn:
$\frac{a}{n} = \frac{a'}{n'},\ \frac{b}{m} = \frac{b'}{m'} \;\Rightarrow\; k(an' - a'n) = 0,\ l(bm' - b'm) = 0 \quad \Rightarrow$

a) $kl[(a'm'+b'n')nm-(am+bn)n'm'] = kl(a'm'nm-amn'm')+kl(b'n'nm-bnn'm')$
$= -lmm'k(an'-a'n)-knn'l(bm'-b'm)$
$= 0,$

b) $kl(abn'm'-a'b'nm) = klabn'm-kla'bnm'+kla'bnm'-kla'b'nm$
$= lbm'k(an'-a'n)+ka'nl(bm'-b'm)$
$= 0.$

Damit ist $N^{-1}R$ ein Ring, $\frac{1}{1}$ ist das Einselement, $\varphi : R \longrightarrow N^{-1}R$, $\varphi(a) := \frac{a}{1}$ ist Ringhomomorphismus.

Im allgemeinen ist φ nicht injektiv. Vielmehr ist

$$\ker\varphi = \left\{a \in R \mid \frac{a}{1} = 0\right\} = \{a \in R \mid \exists\, n \in N, \text{ so daß } an = 0\}.$$

Ein extremer Fall liegt vor, wenn $0 \in N$. Dann ist $N^{-1}R$ der Nullring, weil

$$\frac{a}{n} = \frac{0}{1}, \quad \text{denn: } 0 \cdot (a \cdot 1 - 0 \cdot n) = 0.$$

$N^{-1}R$ heißt der *Ring der Brüche* von R mit Nennern in N.

$N^{-1}R$ ist durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert:

Lemma 3.26 Es sei $\varphi : R \longrightarrow N^{-1}R$ der kanonische Homomorphismus. Ist nun S ein Ring und $\psi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus mit der Eigenschaft

$$\forall\, n \in N : \ \psi(n) \text{ ist Einheit in } S,$$

so gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi} : N^{-1}R \longrightarrow S \quad \text{mit } \psi = \tilde{\psi} \circ \varphi$$

$\left(\text{d.h. } \tilde{\psi}(\frac{a}{1}) = \psi(a) \text{ für alle } a \in R\right)$.

Beweis: Setze $\tilde{\psi}(\frac{a}{n}) := \psi(a) \cdot \psi(n)^{-1}$. Das ist wohldefiniert, denn aus $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$ folgt

$$k(am-bn) = 0 \quad \text{für ein } k \in N, \text{ also}$$

$$\psi(k)\,(\psi(a)\psi(m) - \psi(b)\psi(n)) = 0.$$

Da $\psi(k)$ Einheit in S ist, gilt $\psi(a)\psi(m) = \psi(b)\psi(n)$.
Da auch $\psi(m), \psi(n)$ Einheiten in S sind, folgt

$$\psi(a)\psi(n)^{-1} = \psi(b)\psi(m)^{-1}.$$

Die Eindeutigkeit ist auch klar! $\square$

Beispiele 3.27

a) Besonders einfach und wichtig ist der Fall, daß R ein Integritätsbereich ist. Dann ist

$$R \setminus \{0\} \text{ multiplikativ}$$

und

$$K = (R \setminus \{0\})^{-1} \text{ ist ein Körper,}$$

denn $\frac{a}{b} \neq 0$ in K genau dann, wenn $ca = 0$ für $a \neq 0,$ also wenn $c = 0$ ist.

Somit ist auch $\frac{b}{a} \in K$ und natürlich $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$. K heißt der *Quotientenkörper* von R. $R \longrightarrow K,\ a \longmapsto \frac{a}{1}$ ist injektiv, also kann man R als Unterring von K auffassen. Jeder Ring $N^{-1}R,\ N \subset R$ multiplikativ, ist dann ein Unterring von K:

$$R \ \subset \ N^{-1}R \ \subset \ K.$$

b) Ist R beliebig, und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $N = R/\mathfrak{p}$ multiplikativ und

$$R_{\mathfrak{p}} \ := \ N^{-1}R$$

heißt die *Lokalisierung* von R in $\mathfrak{p}$. Bemerkenswert ist

$$\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathfrak{p},\, b \in R \setminus \mathfrak{p} \right\} \subset R_{\mathfrak{p}}$$

ist das einzige maximale Ideal in $R_{\mathfrak{p}}$.
Beweis:

1) $\mathfrak{m}$ ist Ideal:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd} \in \mathfrak{m}\,, \text{ wenn } a, c \in \mathfrak{p},\ b, d \in R \setminus \mathfrak{p}.$$

2) $R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{m}$ = Menge der Einheiten in $R_{\mathfrak{p}}$.
$x \in R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{m} \ \Rightarrow \ x = \frac{a}{b}$ für ein $a \in R \setminus \mathfrak{p},\ b \in R_{\mathfrak{p}} \ \Rightarrow \ y = \frac{b}{a} \in R_{\mathfrak{p}}$ mit $xy = 1$.
Umgekehrt: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1$
$\Leftrightarrow \ \exists\, e \in R \setminus \mathfrak{p} : \ e(ac - bd) = 0$
$\Rightarrow \ eac = abd \in R \setminus \mathfrak{p}.$
Da $\mathfrak{p}$ Ideal, folgt $a \in R \setminus \mathfrak{p}$, also $\frac{a}{b} \in R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{m}$.

3) Ist nun $I \subset R_{\mathfrak{p}}$ Ideal mit $I \neq R_{\mathfrak{p}}$, so ist $I \cap \underbrace{(R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{m})}_{\text{Einheiten}} = \emptyset$, also $I \subset \mathfrak{m}$. $\square$

c) Ist $f \in R$, so ist $N = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ natürlich multiplikativ.

$$R_f \ := \ N^{-1}R = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid a \in R,\ n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$\varphi : R \longrightarrow R_f, \quad \varphi(a) = \frac{a}{1}$$

hat als Kern die Elemente $a \in R,$ die von einer Potenz von f annulliert werden.
Ist f nilpotent, so ist $R_f = 0$.
Ist f *kein* Nullteiler von R, also $fa = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0$, so ist R Unterring von R_f.
Es sei T eine Unbestimmte und

$$R[\tfrac{1}{f}] \ := \ R[T]/(fT - 1),$$

$\psi : R \longrightarrow R[\frac{1}{f}]$ die kanonische Abbildung

$$\psi : R \subset R[T] \xrightarrow{q} R[T]/(fT-1), \qquad T \longrightarrow q(T).$$

$\psi(f)q(T) = q(fT) = q(1) = 1 \Rightarrow q(T)$ ist das inverse Element von $\psi(f)$. $\psi(f)$ ist also eine Einheit. Damit gibt es genau einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : R_f &\longrightarrow R[\frac{1}{f}] \quad \text{mit} \\ \tilde{\psi}\left(\frac{a}{f^n}\right) &= \psi(a)\psi(f^n)^{-1} \\ &= \psi(a)q(T^n) \\ &= q(aT^n). \end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen: $\tilde{\psi}$ ist Isomorphismus (Übung).
Es folgt also aus dem Hilbertschen Basissatz:
Ist R noethersch, $f \in R$, so ist auch R_f noethersch.

(Man beachte, daß R_f als R-Modul aufgefaßt im allgemeinen nicht noethersch ist! Beispiel:

$$R = K[X],\ f = X \Rightarrow R_X = K[X, X^{-1}]$$

ist der Ring der *„endlichen Laurentreihen“*

$$\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu X^\nu, \quad n \in \mathbb{N},\ a_\nu \in K,$$

und als $K[X]$-Modul nicht endlich erzeugt.)

Ist R noethersch, und $N \subset R$ multiplikativ, so ist $N^{-1}R$ ebenfalls noethersch. Zunächst zeigen wir:

Lemma 3.28 Sei R ein Ring, $N \subset R$ multiplikativ, $S = N^{-1}R$, $\varphi : R \longrightarrow S$ die kanonische Abbildung. Ist $I \subset R$ Ideal, so werde mit IS das von $\varphi(I)$ erzeugte Ideal in S bezeichnet. Es gilt:

a) $\mathrm{IS} = \{\frac{a}{n} \mid a \in I,\ n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\mathrm{IS} \neq S \iff N \cap I = \emptyset$.

c) Für jedes Ideal $J \subset S$ ist

$$J = \left(\varphi^{-1}(J)\right) S.$$

d) $\{J \mid J \subset S \text{ Primideal}\} \longrightarrow \{I \mid I \subset R \text{ Primideal mit } I \cap N = \emptyset\}$,

$$J \longmapsto \varphi^{-1}(J)$$

ist Bijektion mit Umkehrabbildung

$$I \longmapsto \mathrm{IS}.$$

Beweis:

a) $J := \{\frac{a}{n} \mid a \in I,\ n \in N\}$ ist das kleinste Ideal, das $\varphi(I)$ enthält.

b) $\mathrm{IS} = S \iff \exists\, a \in I,\ n \in N : 1 = \frac{a}{n} \iff \exists\, a \in I,\ n, m \in N : nm = ma \iff N \cap I \neq \emptyset$.

c) Zu zeigen ist $J \subset S$ Ideal $\Rightarrow J = \left(\varphi^{-1}(J)\right) S$:
$\frac{a}{n} \in J \;\Rightarrow\; \varphi(a) = \frac{a}{1} = \frac{n}{1} \cdot \frac{a}{n} \in J \;\Rightarrow\; a \in \varphi^{-1}(J)$ und $\frac{a}{n} \in \left(\varphi^{-1}(J)\right) S$.

d) 1) $J \subset S$ Primideal $\Rightarrow\; I = \varphi^{-1}(J)$ Primideal mit $I \cap N = \emptyset$ und $J = \mathrm{IS}$ (nach c)).

2) Ist I Primideal mit $I \cap N = \emptyset$, so ist $J := \mathrm{IS} \neq S$.
Behauptung: J ist Primideal.
Beweis:
Seien $a, b \in R,\ n, m \in N$ und $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} \in J$, also $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} = \frac{c}{k}$ für ein $c \in I,\ k \in N$; es folgt

$$lkab = lnmc \quad \text{für ein } l \in N,$$

also $lkab \in I$. Da $lk \in N \subset R \setminus I$, und da I Primideal ist, folgt $ab \in I$ und dann $a \in I$ oder $b \in I$; d.h. $\frac{a}{n} \in J$ oder $\frac{b}{m} \in J$. Also ist J Primideal.
Weiter ist $\varphi^{-1}(J) = I$, denn ist $\varphi(a) = \frac{a}{1} = \frac{b}{n} \in J,\ a \in R,\ b \in I,\ n \in N$, so folgt $(kn)a \in I$ für ein $k \in N$. Da $kn \notin I$, muß $a \in I$ gelten, also $\varphi^{-1}(J) \subset I$. $\square$

Lemma 3.29 Ist R noethersch, $N \subset R$ multiplikativ, so ist auch $S = N^{-1}R$ noetherscher Ring.

Beweis: Es sei $\varphi : R \longrightarrow S$ die kanonische Abbildung $a \longmapsto \frac{a}{1}$.
Ist $J \subset S$ Ideal, so ist $J = \mathrm{IS}$, wobei $I := \varphi^{-1}(J)$. Da R noethersch ist, gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_r \in I$, die I erzeugen. Dann wird J von $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1}$ als Ideal in S erzeugt: $a \in I,\ n \in N$ und

$$a = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{x_i}{1}. \quad \square$$

Übungen

1) Welches sind die Primideale in $K[X]$, wenn K algebraisch abgeschlossen ist?

2) (a) Die Ideale $\langle X^n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, sind die einzigen Ideale im Ring $S = \mathbb{C}[X]_{\mathfrak{p}}$, wobei $\mathfrak{p}$ das von X erzeugte maximale Ideal in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

(b) S kann realisiert werden als Unterring des formalen Potenzreihenrings

$$\hat{S} \;=\; \mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu \mid a_\nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wie?

(c) Es sei $\mathbb{C}(X)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{C}[X]$.
Zeige: $\mathbb{C}[X]_{\mathfrak{p}} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{C}(X) \mid g(0) \neq 0\}$.

3) Es sei R ein Integritätsbereich, $q \in R \setminus R^*.\, q \neq 0$ heißt *irreduzibel* $\iff\; q = ab \;\Rightarrow a$ oder b Einheit.

(a) Zeige: Ist $I = \langle q \rangle \subset R$ Primideal, $I \neq 0$, so ist q irreduzibel in R.

(b) Sei $R := \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 3 \rangle$; $\alpha \in R$ sei die Restklasse von X. Zeige:

i. $\mathbb{Z}$ ist Unterring von R.

ii. $R = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

iii. 2 ist irreduzibel in R.

iv. $\langle 2 \rangle$ ist kein Primideal und $R/\langle 2 \rangle \cong \mathbb{F}_2[X]/\langle (X+1)^2 \rangle$.

v. Berechne die Restklassenringe R/I für $I = \langle 2, \alpha + 1 \rangle$. Ist I Primideal?
Zeige: $I^2 := \langle 4, 2(\alpha+1), (\alpha+1)^2 \rangle = \langle 2 \rangle$.

(c) Es sei R ein *Hauptidealring*, d.h. R ist Integritätsbereich und jedes Ideal I in R hat die Form $I = \langle a \rangle$ für ein $a \in R$. Zeige: Ist $q \in R \setminus R^*,\ q \neq 0$ irreduzibel, so ist $I = \langle q \rangle$ ein maximales Ideal.
(Hinweis: $\langle q \rangle \subsetneq I \subset R \ \Rightarrow\ q = ab;\ b \in R \setminus R^* \ \Rightarrow\ a \in R^* \ \Rightarrow\ I = R$.)
Welches sind die Primideale in R?

(d) $R = \mathbb{C}[x,y]/\langle y^2 - f \rangle$, wobei $f \in \mathbb{C}[x]$. α sei die Restklasse von y in R. Zeige:

i. $\mathbb{C}[x]$ ist Unterring von R.

ii. $R = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{C}[X]\}$ (als $\mathbb{C}[x]$-Modul ist R isomorph zu $\mathbb{C}[x]^2$).

iii. $\langle x \rangle = Rx$ ist kein Primideal in R, $R/\langle x \rangle \cong \mathbb{C}[y]/\langle y^2 - f(0) \rangle$.

iv. Sei $f(0) \neq 0$ und $f(0) = a^2,\ a \in \mathbb{C}$. Dann sind $I_1 = \langle x, \alpha + a \rangle, \quad I_2 = \langle x, \alpha - a \rangle$ Primideale in R und es gilt: $I_1 \cdot I_2 = I_1 \cap I_2 = \langle x \rangle$,
wobei $I_1 \cdot I_2$ das von den Produkten $\beta \cdot \gamma,\ \beta \in I_1,\ \gamma \in I_2$ erzeugte Ideal in R ist.

4) Es seien R_1, R_2 Integritätsbereiche.
$R = R_1 \times R_2$ sei der Produktring $((a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), (a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd))$, und $\mathfrak{p} = \{(a,b) \in R \mid b = 0\}$.
Zeige: $\mathfrak{p}$ ist Primideal in R. Berechne den Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ und die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ von R in $\mathfrak{p}$.

5) Sei R ein Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. $\mathfrak{m}$ sei das (einzige) maximale Ideal in $R_\mathfrak{p}$.
Zeige: Die kanonische Abbildung $\varphi : R \longrightarrow R_\mathfrak{p} \quad (a \longmapsto \frac{a}{1})$ induziert einen injektiven Ringhomomorphismus $\bar{\varphi} : R/\mathfrak{p} \longrightarrow R_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ und $\bar{\varphi}$ induziert einen Isomorphismus $K \longrightarrow R_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$, wobei K der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ ist.

4 Reguläre Funktionen

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen zur Topologie.

(Für eine ausführliche Einführung benutze man die Topologiebücher.)

Zur Erinnerung:

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einem System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, den sogenannten offenen Mengen ($U \subset X$ offen $\iff U \in \mathcal{T}$), so daß gilt:

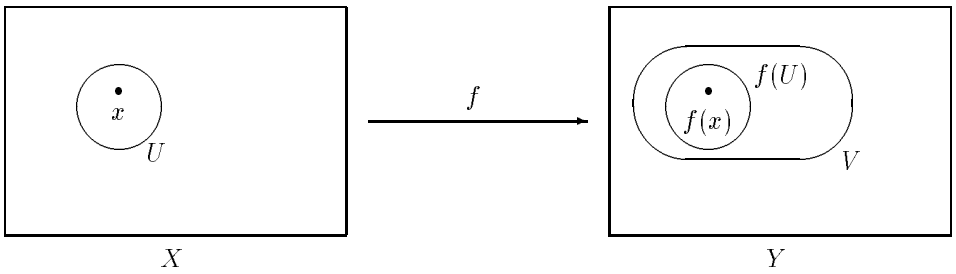
1) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

2) Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.

3) $\emptyset$ und X sind offen.

Die Komplemente von offenen Mengen heißen *abgeschlossen*. Ist $x \in X$ und $U \subset X$ offen mit $x \in U$, so heißt U eine *offene Umgebung* von x.

Sind X und Y topologische Räume, und ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, $x \in X$, so heißt f *stetig in* $x :\iff$ Zu jeder offenen Umgebung V von $f(x)$ in Y gibt es eine offene Umgebung U von x in X, so daß $f(U) \subset V$.



f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Man sieht nun leicht:

$f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn gilt: Ist $V \subset Y$ offen, so ist $f^{-1}(V) \subset X$ offen.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Es sei f stetig und $V \subset Y$ offen. Es sei $x \in f^{-1}(V)$. Dann ist $f(x) \in V$, also V offene Umgebung von $f(x)$; somit existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $f(U_x) \subset V$, d.h. $U_x \subset f^{-1}(V)$. Nach Axiom (1) ist $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ offen.

„$\Leftarrow$“ Sei $x \in X$ und V offene Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ offene Umgebung von x mit $f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$. $\square$

Die topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen bilden eine *Kategorie*, die *Kategorie der topologischen Räume*.

Wir sind gewohnt, als Standardbeispiel den $\mathbb{R}^n$ mit der *gewöhnlichen Topologie* heranzuziehen:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\iff$ $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, wobei (U_i) eine Familie von offenen Kugeln ist. Die offene *Kugel* vom Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge $U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| < r\}$, wobei $|| \cdot ||$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Auch auf $\mathbb{C}^n$ hat man die gewöhnliche Topologie ($\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$).

Wie sieht es nun mit $\mathbb{A}^n(K)$ aus?
Ist K ein beliebiger Körper, so ist nicht klar, was eine „gewöhnliche“ Topologie auf K^n sein sollte. Es ist aber bequem, die Redeweisen der Topologie zur Verfügung zu haben, um etwa zwischen lokalen und globalen Aussagen zu unterscheiden.
Eine „gute“ Topologie auf K^n sollte wenigstens so beschaffen sein, daß alle Polynomfunktionen

$$f : K^n \longrightarrow K$$

stetig sind. Das Ergebnis ist die sogenannte *Zariski-Topologie*.

Es sei K ein Körper. $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(K) = K^n$.

Definition 4.1 Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät in $\mathbb{A}^n$.
$A \subset X$ heißt *(Zariski-)abgeschlossen* in $X :\Longleftrightarrow \exists\, f_1, \ldots, f_m \in K[z_1, \ldots, z_n]$, so daß

$$A = X \cap \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m).$$

$U \subset X$ heißt *(Zariski-)offen* in $X :\Longleftrightarrow$

$X \setminus U$ ist Zariski-abgeschlossen in X.

$\mathcal{T} = \{U \mid U \subset X \text{ offen}\}$ heißt die *Zariski-Topologie* auf X. Man prüft leicht die Axiome 1)–3) nach:

1) Ist $U_i = X \setminus \mathbb{V}(M_i)$, $M_i \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ für $i \in I$, so ist $U = \bigcup_{i\in I} U_i = X \setminus \bigcap_{i\in I} \mathbb{V}(M_i) = X \setminus \mathbb{V}(M)$, wobei $M = \bigcup_{i\in I} M_i$.
2) Ist $U = X \setminus \mathbb{V}(M)$, $V = X \setminus \mathbb{V}(N)$, so ist $U \cap V = X \setminus (\mathbb{V}(M) \cup \mathbb{V}(N)) = X \setminus \mathbb{V}(MN)$, wobei $MN = \{fg \mid f \in M,\ g \in N\}$.
3) $\emptyset = X \setminus \mathbb{V}(0)$, $X = X \setminus \mathbb{V}(1)$. $\square$

Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ sind also die affinen Untervarietäten von X.

Die affinen Untervarietäten X seien stets mit der Zariski-Topologie versehen. Nach Konstruktion hängt diese Topologie zunächst von der Einbettung $X \subset \mathbb{A}^n$ ab. Wir werden jedoch sehen, daß sie in gewissem Sinne unabhängig von der „gewählten“ Einbettung ist.

Lemma 4.2 Ist $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$, so ist die Polynomfunktion $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$ stetig (bzgl. der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n$ und $\mathbb{A}^1$).

Beweis: Es sei $V \subset \mathbb{A}^1$ offen, also ($K[X]$ ist Hauptidealring) $V = \mathbb{A}^1 \setminus \mathbb{V}(g)$, $g \in K[z]$, $g = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$.
Dann ist $g \circ f = g(f) = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu f^\nu \in K[z_1, \ldots, z_n]$ und $f^{-1}(V) = \mathbb{A}^n \setminus \mathbb{V}(g(f))$ offen. $\square$

Definition 4.3 Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietät und $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$.

$$X_f := X \setminus \mathbb{V}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

heißt *ausgezeichnete offene Menge* in X (Komplement einer Hyperfläche).

Da $K[z_1, \ldots, z_n]$ noethersch ist, ist jede offene Menge $U \subset X$ die Vereinigung *endlich vieler* ausgezeichneter offener Mengen

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} X_{f_i} = X \setminus \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m).$$

Beachte

$$\mathbb{C}^n_{an} \;=\; (\mathbb{C}^n,\ \text{gewöhnliche Topologie}) \xrightarrow{id} (\mathbb{C}^n,\ \text{Zariski-Topologie}) \;=\; \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$$

ist stetig, weil jede Zariski-offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ auch offen in der gewöhnlichen Topologie ist. Aber: $id : \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n_{an}$ ist nicht stetig.

Die Zariski-Topologie ist vollkommen verschieden von der gewöhnlichen Topologie, wie an der folgenden Eigenschaft deutlich wird:

$\mathbb{A}^n$ ist ein *noetherscher topologischer Raum*, d.h: Jede absteigende Folge

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

abgeschlossener Mengen $A_i \subset \mathbb{A}^n$ ist stationär, d.h. $\exists\, m_0\ \forall m \geq m_0 :\ A_m = A_{m_0}$.

Zur absteigenden Folge (A_i) gehört nämlich die aufsteigende Folge

$$I(A_1) \subset I(A_2) \subset I(A_3) \subset \cdots$$

von Idealen $I(A_i) \subset K[z_1, \ldots, z_n]$. Da $K[z_1, \ldots, z_n]$ noethersch ist, gibt es ein m_0, so daß $I(A_m) = I(A_{m_0})$ für alle $m \geq m_0$ ist, und somit folgt

$$A_m = \mathbb{V}(I(A_m)) \;=\; \mathbb{V}(I(A_{m_0})) \;=\; A_{m_0} \quad \forall m \geq m_0.$$

Definition 4.4 Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät.

a) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *(Zariski-)abgeschlossen* $\iff$
$\exists\, F_1, \ldots, F_m \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen, so daß $A = X \cap \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_m)$.

$U \subset X$ heißt *(Zariski-)offen* in $X \iff X \setminus U$ ist abgeschlossen in X.

$\mathcal{T} = \{U \mid U \subset X \text{ offen}\}$ ist Topologie auf X.

b) Ist $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen, so heißt $X_F = \{p \in X \mid F(p) = 0\}$ wieder *ausgezeichnete offene Menge* in X. Beispielsweise ist

$$U_i = \mathbb{P}^n_{Z_i} \;=\; \{p \in \mathbb{P}^n \mid Z_i(p) \neq 0\} \;=\; \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_i)$$

der affine Raum $\mathbb{A}^n = \{[z_0, \ldots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n]\}$.

c) $X \subset \mathbb{P}^n$ heißt *quasiprojektive Varietät* $\iff$
$\exists$ projektive Varietät $Y \subset \mathbb{P}^n$, so daß $X \subset Y$ offen.

d) Jede quasiprojektive Varietät $X \subset \mathbb{P}^n$ trägt ebenfalls die Zariski-Topologie:

$$U \subset X \text{ offen} \iff \exists\, V \subset \mathbb{P}^n \text{ offen mit } U = X \cap V.$$

X ist ein noetherscher topologischer Raum.

Beispiel $\mathbb{A}^n$ ist quasiprojektive Varietät ($\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ offen).

Ist X quasiprojektive Varietät und $A \subset X$, so heißt A *Untervarietät* von $X \iff$
A ist abgeschlossen in X.

Ab jetzt werde vorausgesetzt, daß K algebraisch abgeschlossen ist.

Definition 4.5 Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät.

$$I(X) := \{f \in K[z_1, \ldots, z_n] \mid f(x) = 0 \; \forall x \in X\}$$

heißt das *Ideal von* X in $K[z_1, \ldots, z_n]$, und

$$A(X) := K[z_1, \ldots, z_n]/I(X)$$

heißt der *affine Koordinatenring* von X.

Wir können $A(X)$ als Unterring des Ringes $\mathrm{C}(X, K)$ aller K-wertigen (Zariski-)stetigen Funktionen $f : X \longrightarrow K$ auffassen, denn $I(X)$ ist der Kern des Ringhomomorphismus'

$$\begin{array}{rccl} \Phi : K[z_1, \ldots, z_n] & \longrightarrow & \mathrm{C}(X, K), \\ \Phi(f) & = & f|X. \end{array}$$

Wir geben folgende lokale Definition:

Definition 4.6 Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietät, $p \in X$ und $U \subset X$ offene Umgebung von p.
Eine Funktion $f : U \longrightarrow K$ heißt *regulär in* $p \iff$
$\exists\, g, h \in K[z_1, \ldots, z_n]$ mit $h(p) \neq 0$ und V offene Umgebung von p mit $V \subset U \cap X_h$, so daß $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für alle $x \in V$.

Kurz: In der Nähe von p wird f durch eine rationale Funktion $\frac{g}{h} \in K(z_1, \ldots, z_n)$ beschrieben, wobei $K(z_1, \ldots, z_n)$ den Quotientenkörper von $K[z_1, \ldots, z_n]$ bezeichnet.

f heißt regulär auf U, wenn f in jedem Punkt $p \in U$ regulär ist. Mit $\mathcal{O}(U)$ werde die Menge aller in U regulären Funktionen bezeichnet.

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \longrightarrow K \mid f \text{ regulär}\}$$

Lemma 4.7 $\mathcal{O}(U)$ ist Unterring von $\mathrm{C}(U, K)$.

Beweis: Ist $f : U \longrightarrow K$ regulär in p, so ist f auch stetig in p. Sei dazu W offene Umgebung von $f(p)$ in $K = \mathbb{A}^1$, $W = \mathbb{A}^1 \setminus \mathbb{V}(q)$, $q \in K[z]$ mit $q(f(p)) \neq 0$. Sei $f = \frac{g}{h}$ in einer offenen Umgebung V von p in U. Dann ist

$$f^{-1}(W) \cap V = \left\{ x \in V \mid q\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) \neq 0 \right\}.$$

$$q = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu \quad \Rightarrow \quad q\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{1}{h^d} \underbrace{\sum a_\nu h^{d-\nu} g^\nu}_{\tilde{q} \in K[z_1, \ldots, z_n]}.$$

Also gilt: $\tilde{U} = f^{-1}(W) \cap V = V \setminus \mathbb{V}(\tilde{q})$ ist offene Umgebung von p in U mit $f(\tilde{U}) \subset V$.
Also ist $\mathcal{O}(U) \subset \mathrm{C}(U, K)$. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{O}(U)$ ein Unterring von $\mathrm{C}(U, K)$ ist. $\square$

$\mathcal{O}(U)$ heißt der *Ring der regulären Funktionen* auf U ($\mathcal{O}(U)$ ist natürlich sogar eine K-Algebra).
$f \in \mathcal{O}(U)$ ist Einheit $\iff f(x) \neq 0 \; \forall x \in U$.

Satz 4.8 Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietät (K algebraisch abgeschlossen), $A(X) = K[z_1, \ldots, z_n]/I(X)$ der affine Koordinatenring von X. Für $f \in A(X)$ sei $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ die durch f definierte ausgezeichnete offene Menge. Dann gilt: Der kanonische Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} A(X) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X_f), \\ g + I(X) & \longmapsto & g|X_f \end{array}$$

induziert einen Ringisomorphismus

$$A(X)[\tfrac{1}{f}] \longrightarrow \mathcal{O}(X_f).$$

Wir schreiben

$$\mathcal{O}(X_f) \;=\; A(X)[\tfrac{1}{f}] \;=\; \left\{ \frac{g}{f^n} \mid g \in A(X),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Insbesondere (wähle $f \equiv 1$) gilt

$$\mathcal{O}(X) = A(X).$$

Weiter gilt: Für jede ausgezeichnete offene Menge $U = X_f$ ist $\mathcal{O}(U)$ noetherscher Ring.

Sind $f_1, \ldots, f_m \in K[z_1, \ldots, z_n]$ Erzeuger des Ideals $I(X)$ und ist $f_{m+1} \in K[z_1, \ldots, z_n]$ Repräsentant von $f \in A(X)$, so ist

$$\mathcal{O}(X_f) \;=\; K[z_1, \ldots, z_{n+1}]/\langle f_1, \ldots, f_m, 1 - z_{n+1} f_{m+1} \rangle.$$

X_f kann also als abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{A}^{n+1}$ aufgefaßt werden!

Beweis zu Satz 4.8: Unter der kanonischen Abbildung $A(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X_f)$ wird f auf die nirgends verschwindende Funktion $f|X_f$ abgebildet; $f|X_f$ ist Einheit in $\mathcal{O}(X_f)$.
Die universelle Eigenschaft für $A(X)[\frac{1}{f}]$ gibt uns den Homomorphismus

$$\Phi : A(X)[\tfrac{1}{f}] \longrightarrow \mathcal{O}(X_f).$$

Wir zeigen zunächst:

a) Φ ist injektiv.
Es sei $g = \frac{h}{f^n} \in A(X)[\frac{1}{f}]$ und $g(x) = 0$ für alle $x \in X_f$.
Dann ist also $h(x) = 0$ für alle $x \in X_f$ und somit ist $(f \cdot h)(x) = 0$ für alle $x \in X$, d.h. $fh = 0$ in $A(X)$, also $g = 0$ in $A(X)[\frac{1}{f}]$. Das war trivial.
Tiefliegender ist die Surjektivität:

b) Es sei $r \in \mathcal{O}(X_f)$ eine reguläre Funktion auf X_f. Zu jedem Punkt $x \in X_f$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x in X_f und Elemente $\tilde{g}_x, \tilde{h}_x \in A(X)$, so daß

$$r(y) \;=\; \frac{\tilde{g}_x(y)}{\tilde{h}_x(y)} \quad \text{für alle } y \in U_x;$$

also gilt

$$\tilde{h}_x \cdot r \;=\; \tilde{g}_x \ \text{ auf } U_x.$$

Nun sei $s_x \in A(X)$ mit $s_x|(X \setminus U_x) = 0$ und $s_x(x) \neq 0$ (solch ein s_x existiert natürlich, weil $A = V_X(I_X(A))$, $A := X \setminus U_x$, und $x \notin A$).
Setze dann

$$h_x \;=\; s_x \tilde{h}_x \;\in A(X),$$

$$g_x \;=\; s_x \tilde{g}_x \;\in A(X).$$

Es gilt dann offensichtlich

$$h_x r = g_x \text{ auf } X_f \quad \text{und } h_x \neq 0. \qquad (*)$$

Es folgt

$$X_f \;\subset \bigcup_{x \in X_f} X_{h_x} \;=\; X \setminus \mathbb{V}(J),$$

wobei J das von den Elementen $h_x \in A(X)$ erzeugte Ideal in $A(X)$ ist.

Da $A(X)$ noethersch ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_k \in X_f$, so daß $h_i = h_{x_i}$, $i = 1, \ldots, k$ das Ideal J erzeugen,

$$J = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle.$$

Aus $X_f \subset X \setminus \mathbb{V}(J)$ folgt: f verschwindet identisch auf $\mathbb{V}(J)$.

Der *Hilbertsche Nullstellensatz* (Beweis später) besagt nun, daß dann

$$f^l \in J \text{ für ein } l \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Es gibt also Elemente $q_1, \ldots, q_k \in A(X)$, so daß

$$f^l \;=\; \sum_{i=1}^{k} q_i h_i \quad \text{in } A(X).$$

Es folgt

$$f^l r \;=\; \sum_{i=1}^{k} q_i h_i r \quad \text{auf } X_f\,.$$

Wegen $(*)$ folgt $q_i h_i r \;=\; q_i g_{x_i}$ auf X_f und somit $f^l r \;=\; g$ auf X_f, wobei

$$g \;:=\; \sum_{i=1}^{k} q_i g_{x_i} \;\in\; A(X).$$

Es folgt

$$r \;=\; \frac{g}{f^l} \;\in\; A(X)[\tfrac{1}{f}]. \quad \square$$

Definition 4.9 Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietät. Für $x \in X$ sei $\mathcal{O}_{X,x}$ der *Ring der Keime* von regulären Funktionen in x.

$$\mathcal{O}_{X,x} \;=\; \bigcup_{U \text{ offene Umg. von } x} \mathcal{O}(U)/\!\sim_x$$

Es seien U_1, U_2 offene Umgebungen von x in X, und $f_1 \in \mathcal{O}(U_1),\ f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$ seien reguläre Funktionen. Wir sagen f_1 *und* f_2 *bestimmen denselben Funktionskeim* in x
(in Zeichen: $f_1 \sim_x f_2$, oder $(f_1)_x = (f_2)_x$),
wenn es eine offene Umgebung U von x gibt mit $U \subset U_1 \cap U_2$ und $f_1|U \;=\; f_2|U$.
$\sim_x$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge

$$\bigcup_{U \text{ offene Umg. von } x} \mathcal{O}(U).$$

Die Äquivalenzklassen von $\sim_x$ heißen *reguläre Funktionskeime* in x.
Für $f \in \mathcal{O}(U)$ wird mit f_x der Keim von f in x bezeichnet.

Die Menge $\mathcal{O}_{X,x}$ aller regulären Funktionskeime in x ist wieder ein Ring. Die Ringstruktur ist die eindeutig bestimmte Struktur, für die alle Abbildungen

$$\mathcal{O}(U) \;\longrightarrow\; \mathcal{O}_{X,x}, \quad f \;\longmapsto\; f_x$$

(U offene Umgebung von x) Ringhomomorphismen werden.

$\mathcal{O}_{X,x}$ heißt auch der *lokale Ring* von X in x.

Wie sehen die Einheiten in $\mathcal{O}_{X,x}$ aus? Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f(x) \neq 0$; dann ist $U_f \subset U$ offen mit $x \in U_f$ und $f|U_f \in \mathcal{O}(U_f)$ hat keine Nullstellen, also ist $f|U_f$ Einheit in $\mathcal{O}(U_f)$, und somit ist der Keim $f_x = (f|U_f)_x$ Einheit in $\mathcal{O}_{X,x}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*_{X,x} &= \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) \neq 0\}, \\ \mathfrak{m}_{X,x} &= \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\} \end{aligned}$$

ist folglich das einzige maximale Ideal.

Dies motiviert die folgende

Definition 4.10 Ein *lokaler Ring* ist ein Ring R, der nur ein einziges maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt. $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(R)$ heißt dann das *maximale Ideal von* R und $\mathbf{k} := R/\mathfrak{m}$ heißt der *Restklassenkörper von* R.

Lemma 4.11 Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Untervarietät, $R = A(X)$ der affine Koordinatenring (aufgefaßt als Unterring von $C(X,K)$). Für $x \in X$ ist

$$\mathfrak{M}_x \;:=\; \{f \in R \mid f(x) = 0\}$$

ein maximales Ideal in R.

$$R_{\mathfrak{M}_x} \;=\; \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R,\ g \in R \setminus \mathfrak{M}_x \right\}$$

sei die Lokalisierung von R in $\mathfrak{M}_x$. Dann ist

$$\mathcal{O}_{X,x} \;=\; R_{\mathfrak{M}_x}.$$

$\mathcal{O}_{X,x}$ ist also ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_{X,x} \;=\; \mathfrak{M}_x\, R_{\mathfrak{M}_x} \;=\; \left\{ \frac{f}{g} \mid f,g \in R,\; f(x)=0,\; g(x)\neq 0 \right\}.$$

Die Inklusion $K \hookrightarrow R$ induziert einen Isomorphismus

$$K \;\xrightarrow{\cong}\; R/\mathfrak{M}_x \;\xrightarrow{\cong}\; \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}.$$

Jedes Element $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ kann man also eindeutig schreiben als

$$f \;=\; f(x) + h \quad \text{mit } f(x) \in K,\; h \in \mathfrak{m}_{X,x}.$$

Beweis: Die kanonischen Abbildungen

$$R_f \;\longrightarrow\; R_{\mathfrak{M}_x}, \quad \frac{a}{f^n} \longmapsto \frac{a}{f^n} \quad (f \in R \setminus \mathfrak{M}_x)$$

induzieren einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow R_{\mathfrak{M}_x}$, denn für $f,g \in R \setminus \mathfrak{M}_x,\; a,b \in R$ ist $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{g^m}$ in $R_{\mathfrak{M}_x}$ genau dann, wenn

$$hg^m a \;=\; hf^n b \quad \text{für ein } h \in R \setminus \mathfrak{M}_x \text{ gilt.}$$

Es folgt $(hgf)g^m a \;=\; (hgf)f^n b$, also

$$\frac{a}{f^n} \;=\; \frac{b}{g^m} \text{ in } R_{fgh}, \quad \text{d.h. } \frac{a}{f^n}|X_{fgh} \;=\; \frac{b}{g^m}|X_{fgh}.$$

Da $x \in X_{fgh} \subset X_f \cap X_g$, stimmen also die Keime von $\frac{a}{f^n}$ und $\frac{b}{g^m}$ im Punkt x überein.
Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow R_{\mathfrak{M}_x}$ ist also injektiv. Sie ist offensichtlich auch surjektiv. □

Am Beispiel der ebenen Kurven wollen wir sehen, was sich hinter dem lokalen Ring verbirgt.

Beispiele 4.12

a) $A(\mathbb{A}^1) = K[x]$. Für $a \in \mathbb{A}^1$ ist

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a} \;=\; K[x]_{\langle x-a\rangle} \;=\; \left\{ \frac{f}{g} \mid f,g \in K[x],\; g(a)\neq 0 \right\} \subset K(x).$$

Es sei $K[[t]]$ der formale Potenzreihenring in der Unbestimmten t.

$$K[[t]] \;=\; \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu \mid a_\nu \in K \right\}$$

$$\begin{aligned} \sum a_\nu t^\nu + \sum b_\nu t^\nu \;&:=\; \sum (a_\nu + b_\nu) t^\nu \\ \Big(\sum a_\nu t^\nu\Big) \cdot \Big(\sum b_\nu t^\nu\Big) \;&=\; \sum_\nu \left(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j \right) t^\nu \end{aligned}$$

$K[t]$ ist Unterring von $K[[t]]$. Setzt man $t := x - a$, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a} &= K[x]_{\langle t\rangle} \\ &= \left\{ t^n \frac{h}{g} \mid h, g \in K[x],\ h(a) \neq 0,\ g(a) \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.\end{aligned}$$

Jedes Element $r \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,y},\ r \neq 0$ hat die Form

$$r = t^n e,$$

e Einheit in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}$, d.h. $e(a) \neq 0$.
Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt die *Nullstellenordnung* von r im Punkt a und wird mit $v_a(r)$ bezeichnet. Es sei $\mathfrak{m}^n_{\mathbb{A}^1,a} := \langle t^n \rangle \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}$. Dann gilt

$$v_a(r) = \max\{n \mid r \in \mathfrak{m}^n_{\mathbb{A}^1,a}\} \qquad (\ v_a(0) := +\infty)\ .$$

Jedes Element $r \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}$ kann man in eine formale Potenzreihe $P(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu$ entwickeln:

$$\begin{aligned} r &= a_0 + r_1 t, && r_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}, && a_0 \in K \\ r_1 &= a_1 + r_2 t, && r_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}, && a_1 \in K \\ &\vdots \\ r_n &= a_n + r_{n+1} t, && r_{n+1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}, && a_n \in K \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ r = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \underbrace{r_{n+1} t^{n+1}}_{\in \mathfrak{m}^{n+1}}$, also :

$$\begin{aligned} \forall\, n: \quad r &\equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu \mod \mathfrak{m}^{n+1}. \\ P(r) &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu \end{aligned}$$

definiert einen injektiven Ringhomomorphismus

$$P : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a} \longrightarrow K[[t]]$$

(Übung). Wir zeigen als Beispiel $P(rs) = P(r)P(s)$:
$P(r) = \sum a_\nu t^\nu, \quad P(s) = \sum b_\nu t^\nu,$

$$r \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu \mod \mathfrak{m}^{n+1},$$

$$s \equiv \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu t^\nu \mod \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ gilt also

$$\begin{aligned} P(rs) \equiv rs &\equiv \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu t^\nu \right) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{\nu+\mu=k \\ 0 \leq \nu,\mu \leq n}} a_\nu b_\nu \right) t^k \\ &\equiv P(r)P(s). \end{aligned}$$

Also ist

$$P(rs) \equiv P(r)P(s) \mod \mathfrak{m}^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also

$$P(rs) = P(r)P(s). \quad \square$$

b) Jetzt sei $C \subset \mathbb{A}^2$ eine Kurve, und es sei $I(C) = \langle f \rangle$, $f \in K[x,y]$.
Es sei $(a,b) \in C$ ein glatter Punkt von C, d.h. man kann f in der Form

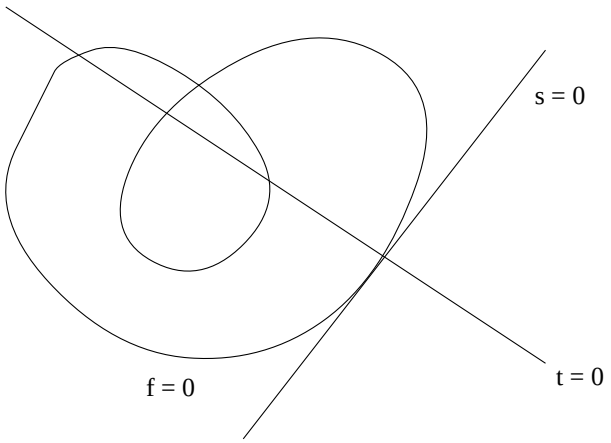
$$f = \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \text{ (höhere Terme in } x-a \text{ und } y-b)$$

schreiben, wobei $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, $\alpha, \beta \in K$.

$$s = \alpha(x-a) + \beta(y-b) \in K[x,y]$$

ist also die Gleichung der Tangente von C im Punkt (a,b). Wir wählen nun ein lineares Polynom

$$t = \gamma(x-a) + \delta(y-b) \quad \text{mit} \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0.$$



Dann ist also $\mathbb{V}(s,t) = \{(a,b)\}$ und

$$\langle s,t \rangle = \mathfrak{M}_{(a,b)} \subset K[x,y].$$

Es seien $\sigma, \tau \in \mathcal{O}_{C,(a,b)}$ die Keime der Funktionen $s|C$ und $t|C$ im Punkt (a,b).
σ und τ erzeugen das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{C,(a,b)}$.
Behauptung: $\mathfrak{m}_{C,(a,b)}$ wird von τ erzeugt.
Zum Beweis müssen wir also zeigen, daß σ ein Vielfaches von τ ist: $\sigma = h\tau$ mit $h \in \mathcal{O}_{C,(a,b)}$. Wir schreiben dazu f als Polynom in s und t

$$\begin{aligned} f &= s + \sum_{\nu+\mu \geq 2} a_{\nu\mu} s^\nu t^\mu \\ &= s + \left(\sum_{\substack{\nu+\mu \geq 2 \\ \nu \geq 1}} a_{\nu\mu} s^{\nu-1} t^\mu \right) s + \sum_{\mu \geq 2} a_{0\mu} t^\mu \\ &= q \cdot s + g \cdot t^2 \end{aligned}$$

mit $q, g \in K[x,y]$ (beachte $s,t \in K[x,y]$) und $q(a,b) = 1$.
Es sei nun $r \in \mathcal{O}_{C,(a,b)}$ der Keim der regulären Funktion

$$-\frac{g}{q}|C_q \in \mathcal{O}(C_q)$$

im Punkt (a,b). ($C_q := C \setminus \mathbb{V}(q)$ ist offene Umgebung von (a,b) in C.) Da $f|C = 0$, folgt

$$\sigma = r\tau^2. \quad \square$$

Damit haben wir:

> Das maximale Ideal des lokalen Ringes einer ebenen Kurve in einem glatten Punkt (a,b) ist ein Hauptideal.
>
> Jede Restklasse τ einer Linearform $t = \gamma(x-a) + \delta(y-b)$, die zur Gleichung der Tangente linear unabhängig ist, ist ein Erzeuger des maximalen Ideals.

Es sei $\mathfrak{m}_{C,(a,b)} = \langle\tau\rangle$. Dann gilt:

$$(*) \qquad \forall\, g \in \mathcal{O}_{C,(a,b)} \quad \exists!\, c_0 \in K,\ g_1 \in \mathcal{O}_{C,(a,b)},\ \text{so daß } g = c_0 + g_1\tau.$$

Beweis: Ist $c_0 + g_1\tau = 0$, so ist $c_0 = 0$, also $g_1\tau = 0$; ist $g_1 = \frac{g|C}{h|C}$, so gilt also

$$\frac{g}{h} \cdot t = \frac{p}{q} \cdot f \text{ in } \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,(a,b)},$$

also $qgt = hpf$ ($\langle t\rangle \subset K[x,y]$ Primideal) in $K[x,y]$; da $f = s +$ (höhere Terme in s,t) ist, muß

$$hp = tu \quad \text{mit } u \in K[x,y]$$

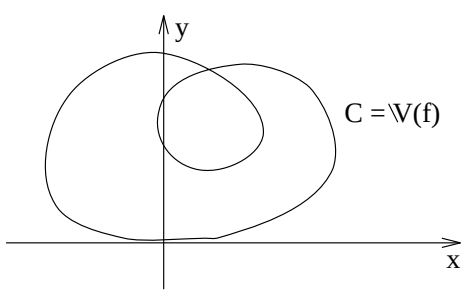
gelten, also $qgt = tuf$ und somit $qg = uf$.
Da $q(a,b) \neq 0$, folgt $(g|C)_{(a,b)} = 0$, d.h. $g_1 = 0$. $\square$

Aus $(*)$ folgt wie in Teil a): Jedes $h \in \mathcal{O}_{C,(a,b)}$ läßt sich in eine Potenzreihe

$$P_\tau(h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \tau^\nu \in K[[\tau]]$$

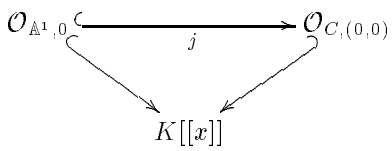
entwickeln. Es gilt somit:

> Der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,(a,b)}$ einer ebenen Kurve C in einem *glatten* Punkt (a,b) ist Unterring des Ringes der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in K.



Durch eine lineare Koordinatentransformation von $\mathbb{A}^2$ kann man erreichen, daß (a,b) der Nullpunkt $(0,0)$ ist und die x-Achse $\mathbb{A}^1 = \mathbb{V}(y)$ die Tangente von C in $(0,0)$ ist.

Ist $f = y +$ (höhere Terme in x,y), $\langle f\rangle = I(C)$, so ist



kommutativ. Die Inklusion j, die von der Projektion $C \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $(x,y) \longmapsto x$ induziert wird, ist aber im allgemeinen kein Isomorphismus.

Als Beispiel wählen wir

$$f \;=\; y - x^2 - y^3 \;\in \mathbb{C}[x,y].$$

$C = \mathbb{V}(f)$ ist eine elliptische Kurve. (Daß $I(C) = \langle f\rangle$ gilt, zeigen wir später!)
x ist $\mathbb{C}$-linear unabhängig zur Tangentengleichung y von C in $(0,0)$. Also wird $\mathfrak{m}_{C,(0,0)}$ vom Keim der Restklasse

$$\xi \;:=\; x \bmod f = x|C$$

erzeugt. Für $\eta := y|C \in \mathcal{O}_{C,(0,0)}$ gilt:

$$\eta - \eta^3 \;=\; \xi^2, \;\text{ also } \eta = \frac{1}{1-\eta^2}\,\xi^2.$$

$\frac{1}{1-\eta^2}$ ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{C,(0,0)}$.
Die Potenzreihenentwicklung $P_\xi(\eta) \in \mathbb{C}[[\xi]]$ bekommt man so: Es sei $P_\xi(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu$.
Aus $\eta = \frac{1}{1-\eta^2}\xi^2$ folgt zunächst $a_0 = a_1 = 0$.
Aus $\eta - \eta^3 = \xi^2$ folgt

$$P_\xi(\eta) - P_\xi(\eta^3) \;=\; P_\xi(\xi^2) \;=\; \xi^2,$$

weil $P_\xi : \mathcal{O}_{C,(0,0)} \longrightarrow \mathbb{C}[[\xi]]$ ein Ringhomomorphismus ist.
Damit haben wir den „Potenzreihenansatz“

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \xi^\nu - \left(\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \xi^\nu\right)^3 \;=\; \xi^2,$$

aus dem man rekursiv alle Koeffizienten a_ν, $\nu \geq 2$, berechnen kann:

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0,$$

$$a_k = \sum_{\substack{i+j+l=k \\ i,j,l \geq 2}} a_i a_j a_l \quad \text{für alle } k \geq 6.$$

Es folgt:

$$a_6 = 1, \quad a_7 = a_8 = a_9 = 0, \quad a_{10} = a_2 a_2 a_6 + a_2 a_6 a_2 + a_6 a_2 a_2 = 3,$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0.$$

Die 13-te Partialsumme von $P_\xi(\eta)$ ist also

$$s_{13} = \xi^2 + \xi^6 + 3\xi^{10}.$$

Da die Kurve C keine rationale Parametrisierung besitzt, also erst recht keine rationale Funktion $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{C}(X)$ existiert, so daß

$$f(x,\, r(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{A}^1 \setminus \mathbb{V}(p)$$

gilt, ist die Potenzreihe $P_\xi(\eta) \in \mathbb{C}[[\xi]]$ nicht die Potenzreihe einer rationalen Funktion $r(\xi) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0} \subset \mathbb{C}(\xi)$. Also:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0} \subsetneq \mathcal{O}_{C,(0,0)} \subset \mathbb{C}[[\xi]].$$

$\eta \notin \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0}$; jedoch ist η *ganz* über dem Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0}$, d.h. $\exists$ ein normiertes Polynom

$$F \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0}[T] \quad \text{mit } F(\eta) = 0$$

(nämlich $F = T^3 - T + \xi^2$).

Bemerkung 4.13 Ein noetherscher lokaler Integritätsbereich, der kein Körper ist und dessen maximales Ideal ein Hauptideal ist, heißt ein *diskreter Bewertungsring*.
Die lokalen Ringe von ebenen Kurven in glatten Punkten sind solche diskreten Bewertungsringe.

Ist R ein diskreter Bewertungsring, $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ das maximale Ideal von R, K der Quotientenkörper, so erhält man eine sogenannte *diskrete Bewertung*

$$v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

auf K. Für $a \in R \setminus \{0\}$ ist $v(a) = \max\{n \mid a \in (t^n)\}$, und für $\frac{a}{b} \in K \setminus \{0\}$ ist $v(\frac{a}{b}) := v(a) - v(b)$. Weiter wird $v(0) := \infty$ vereinbart. Es gilt dann

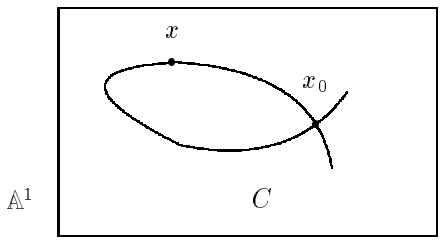
$$R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}.$$

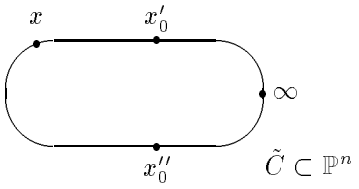
Literatur zu *Bewertungen*:
1) Van der Waerden: Algebra II Kap.18, Kap.19
2) Bourbaki: Commutative Algebra, Chap.VI
3) Hartshorne: Algebraic Geometry, Chap.I

Wir bemerken an dieser Stelle:
Die Theorie der glatten projektiven Kurven C über $\mathbb{C}$ läßt sich vollständig mit Hilfe der diskreten Bewertungen auf endlichen Erweiterungskörpern K des Körpers $\mathbb{C}(x)$ der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten x behandeln.
K ist der Quotientenkörper des affinen Koordinatenringes $A(C) = \mathbb{C}[x,y]/\langle f \rangle$ einer ebenen affinen Kurve $C = \mathbb{V}(f)$ mit einer irreduziblen Gleichung $f \in \mathbb{C}[x,y]$.
Die zu K gehörige glatte projektive Kurve $\tilde{C}$ hat als Punkte die diskreten Bewertungen

$$v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Die glatten Punkte von C gehören also zu $\tilde{C}$. Singularitäten von C werden „aufgelöst“ und es wird der projektive Abschluß gebildet.
$\tilde{C}$ heißt das *geometrische Modell* von K.





Die Durchführung des Programms

$$\{\text{glatte projektive Kurven } /\mathbb{C}\} \quad \overset{1-1}{\longleftrightarrow}$$
$$\{\text{endlich erzeugte Erweiterungskörper } K/\mathbb{C} \text{ mit tr deg}_{\mathbb{C}}(K) = 1\}$$

findet man in van der Waerden (Kap.19) und Hartshorne (Chap.I §6).
Einfache Übungen zu diskreten Bewertungsringen findet man bei Fulton (p46-50).

Übungen

1) Es sei $K = \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1(K)$, $A := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a}$, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A.

   (a) Zeige: $t \in K[x]$ ist ein Erzeuger von $\mathfrak{m} \iff a$ ist eine einfache Nullstelle von t.

   (b) Es sei $a = 0$ und $t = x + x^2$. Berechne die Potenzreihenentwicklungen $P_t(x)$, $P_t(x+1) \in K[[t]]$ (bis zur Ordnung 5).

2) Sei $C = \mathbb{V}(X^2 + Y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, $p = (0,1)$. Zeige:

$$\mathfrak{m}_{C,p} = \langle \xi \rangle, \quad \xi := X|C.$$

   Für $\eta = Y|C$ gilt:

$$P_\xi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) \xi^{2n}.$$

3) Der Ringhomomorphismus

$$P_\tau : \mathcal{O}_{C,p} \longrightarrow K[[\tau]]$$

   induziert für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen K-Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{O}_{C,p}/\tau^{n+1} \longrightarrow K[[\tau]]/\langle \tau^{n+1} \rangle.$$

4) Es sei p Primzahl. Zeige: $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ ist ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$.

Wir kommen nun zu regulären Funktionen auf projektiven Varietäten.

Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät, so wird X durch die offenen Mengen

$$U_i = X_{Z_i} = \{p \in X \mid Z_i(p) \neq 0\}, \quad U_i \subset \mathbb{P}^n_{Z_i} = \mathbb{A}^n$$

überdeckt, und X_{Z_i} kann als affine Untervarietät von $\mathbb{A}^n$ aufgefaßt werden mit den affinen Koordinaten

$$z_j^{(i)} \;=\; \frac{Z_j}{Z_i} \quad \text{für } j = 0, \ldots, n,\ j \neq i.$$

Ist nun $U \subset X$ offen, so nennen wir eine Funktion $f : U \longrightarrow K$ *regulär in* p, wenn $f|U \cap U_i$ regulär in p ist, falls i so gewählt ist, daß $p \in U_i$.
Es gilt dann also: $\exists\, V \subset U \cap U_i$ offene Umgebung von p, so daß

$$\forall\, q \in V :\ f(q) = \frac{g\left(z_0^{(i)}(q), \ldots, z_n^{(i)}(q)\right)}{h\left(z_0^{(i)}(q), \ldots, z_n^{(i)}(q)\right)},$$

wobei $g, h \in K[z_0^{(i)}, \ldots, z_m^{(i)}]$ Polynome mit $h\left(z_0^{(i)}(q), \ldots, z_n^{(i)}(q)\right) \neq 0 \quad \forall q \in V$.
Es sei $n = \deg g$ und $m = \deg h$.

$$\begin{aligned} G &:= Z_i^{n+m} g\left(\frac{Z_0}{Z_i}, \ldots, \frac{Z_n}{Z_i}\right), \\ H &:= Z_i^{n+m} h\left(\frac{Z_0}{Z_i}, \ldots, \frac{Z_n}{Z_i}\right) \end{aligned}$$

seien die Homogenisierungen von g und h vom Grad $n + m$. Dann ist

$$f(q) \;=\; \frac{G(Z_0, \ldots, Z_n)}{H(Z_0, \ldots, Z_n)} \;=\; \frac{G(q)}{H(q)} \quad \text{für alle } q \in V.$$

Man kann also die regulären Funktionen auch folgendermaßen definieren:

Definition 4.14 Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät.
Es sei $U \subset X$ offen, $p \in U$. $f : U \longrightarrow K$ heißt *regulär in* $p \iff \exists$ homogene Polynome $G, H \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ mit $\deg G = \deg H,\ H(p) \neq 0$, eine offene Umgebung V von p in U_H, so daß

$$f(q) \;=\; \frac{G(q)}{H(q)} \quad \forall q \in V.$$

f heißt *regulär auf* $U \iff f$ ist regulär in jedem Punkt $p \in U$.

$$\mathcal{O}(U) \;=\; \{f : U \longrightarrow K \mid f \text{ regulär}\}$$

ist wieder ein Unterring von $\mathrm{C}(U, K)$ und $K \subset \mathcal{O}(U)$ (konstante Funktionen).

Wir wollen den Ring $\mathcal{O}(X_F)$ der regulären Funktionen auf $X_F = \{p \in X \mid F(p) \neq 0\}$, $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen, bestimmen. Dazu zunächst:

Definition 4.15

a) Ein *graduierter Ring* ist ein Ring S mit einer Folge $(S_d)_{d \in \mathbb{N}}$ von additiven Untergruppen $S_d \subset S$, so daß gilt:

   (i) $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$, d.h. jedes Element $x \in S$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $x = x_0 + \cdots + x_n$ mit $x_d \in S_d$ für $0 \leq d \leq n$,

   (ii) $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$ für alle $d, e \in \mathbb{N}$.

Die Elemente in S_d heißen dann *homogen* vom Grad d. Offensichtlich ist S_0 ein Unterring von S.

b) Ersetzt man in der Definition a) das Monoid $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$, so kommt man zum Begriff des *$\mathbb{Z}$-graduierten Ringes*. Es gibt dann auch homogene Elemente negativen Grades. Auch in diesem Fall ist S_0 ein Unterring von S.

c) Es sei S ein graduierter Ring. Ein Ideal $I \subset S$ heißt *homogen* $\iff$
Ist $x = \sum_{d=0}^{n} x_d \in I$ und $x_d \in S_d$, so ist auch $x_d \in I$ für $d = 0, \ldots, n$.

Kurz: Die homogenen Bestandteile eines Elements in I gehören zu I.

Lemma 4.16 Es sei S ein graduierter Ring und $I \subset S$ ein Ideal. Äquivalent sind:

(i) I ist homogen.

(ii) $I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} I_d$, wobei $I_d := I \cap S_d$.

(iii) I hat ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Stets ist $I_d \subset I$, also $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} I_d \subset I$. Ist nun $x \in I$ und $x = x_0 + \cdots + x_n$ mit $x_d \in S_d$, so ist nach Voraussetzung (i) $x_d \in I_d$, also $x \in \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} I_d$. $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Es sei $M \subset S$ irgendein Erzeugendensystem von I.

$$M_d := \{x_d \mid \exists\, x \in M, \text{ so daß } x_d \in S_d \text{ der } d\text{-te homogene Bestandteil von } x \text{ ist}\}.$$

Da $M \subset I$, ist $M_d \subset I_d := I \cap S_d$ nach Voraussetzung (i).
Da jedes Element $x \in M$ eine Darstellung

$$x = \sum_{d=0}^{n} x_d, \quad x_d \in M_d,$$

hat, wird I auch von $\bigcup_{d \in \mathbb{N}} M_d$ erzeugt. $\square$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $M = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} M_d$ Erzeugendensystem von I, wobei $M_d \subset S_d$.
Sei nun $x = \sum_{d=0}^{n} x_d \in I$ mit $x_d \in S_d$. Es gibt dann Elemente $y_i \in M_{d_i}$, $i = 1, \ldots, k$, und $a_i \in S$, so daß $x = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i$.
Sei $a_i = a_{i0} + \cdots + a_{iN}$ mit $a_{id} \in S_d$. Dann ist

$$x_0 + \cdots + x_n \;=\; \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{N} \underbrace{a_{ij} y_i}_{\in S_{j+d_i}} .$$

Also folgt (wegen $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$)

$$x_d \;=\; \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j+d_i=d}}^{N} a_{ij} y_i \;\in\; I \cap S_d. \quad \square$$

Lemma 4.17 Es sei S ein graduierter Ring und $I \subset S$ ein homogenes Ideal. Dann ist der Restklassenring S/I ebenfalls graduiert mit $(S/I)_d = S_d/I_d$.

Beweis: Sei $\varphi : S \longrightarrow S/I$ die Quotientenabbildung. Dann ist

$$\varphi(S_d) = S_d/I \cap S_d = S_d/I_d \subset S/I.$$

Ist $x = x_0 + \cdots + x_n$ mit $x_d \in S_d$, so ist $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \cdots + \varphi(x_n)$ mit $\varphi(x_d) \in S_d/I_d$.
Also gilt:

$$S/I = \sum_{d \in \mathbb{N}} S_d/I_d.$$

Zur Eindeutigkeit der Darstellung: Ist $0 = \varphi(x_0) + \cdots + \varphi(x_n)$, so ist $x = x_0 + \cdots + x_n \in I$, also, weil I homogen ist, $x_d \in I_d$ und somit $\varphi(x_d) = 0 \ \forall d$. Es gilt somit

$$S/I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d/I_d. \quad \square$$

Definition 4.18 Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät und $S = K[Z_0, \ldots, Z_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

$$I(X) = \{F \in S \mid F = F_0 + \cdots + F_n,\ F_d \in S_d \text{ und } F_d(x) = 0 \ \ \forall x \in X\}$$

ist homogenes Ideal in S. Der graduierte Ring

$$S(X) := S/I(X)$$

heißt der *homogene Koordinatenring von* X.

Lemma 4.19 Ist S ein graduierter Ring und $f \in S_d$, so ist $S_f := \{\frac{a}{f^n} \mid a \in S,\ n \in \mathbb{N}\}$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring mit

$$(S_f)_m = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid a \in S_k \text{ und } k - nd = m \right\}.$$

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß

$$S_f = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (S_f)_m.$$

Ist $\frac{a}{f^n} \in S$, $a = a_0 + \cdots + a_l$, $a_k \in S_k$, so ist $\frac{a}{f^n} = \frac{a_0}{f^n} + \cdots + \frac{a_l}{f^n}$ mit $\frac{a_k}{f^n} \in S_{k-dn}$.
Also ist $S_f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (S_f)_m$. Ist nun $\frac{a_0}{f^n} + \cdots + \frac{a_l}{f^n} = 0$ in S_f,
so gibt es ein $t \in \mathbb{N}$, so daß

$$\begin{aligned} f^t(a_0 + \cdots + a_l) &= 0, \text{ also} \\ f^t a_0 + \cdots + f^t a_l &= 0. \end{aligned}$$

Da $S = \bigoplus S_m$, folgt $f^t a_k = 0 \ \forall k$, also $\frac{a_k}{f^n} = 0 \ \forall k$. $\square$

Definition 4.20 Mit $S_{(f)}$ bezeichnen wir den Unterring

$$(S_f)_0 \;=\; \left\{ \frac{a}{f^n} \mid a \in S_{dn},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

von S_f.

Es gilt dann analog zu Satz 4.8 der folgende

Satz 4.21 Es sei K algebraisch abgeschlossen, $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät, $S(X)$ sei der homogene Koordinatenring von X. Es sei $F \in S(X)_d,\ d > 0,\ X_F = \{p \in X \mid F(p) \neq 0\}$ das Komplement der Hyperfläche $\mathbb{V}(F)$. Dann gilt

$$\mathcal{O}(X_F) \;=\; S(X)_{(F)}.$$

Beweis: Wir haben einen kanonischen injektiven Ringhomomorphismus

$$S(X)_{(F)} \;\longrightarrow\; \mathcal{O}(X_F),$$

der dem Bruch $\frac{G}{F^n}$, $G \in S(X)_{dn}$, die reguläre Funktion $x \longmapsto \frac{G(x)}{F(x)^n}$ auf X_F zuordnet.
Die Surjektivität dieser Abbildung kann man analog zu Satz 4.8 beweisen. Wir wählen hier eine andere Methode:
Durch einen Trick (die „Veronese-Einbettung"), den wir später erklären, wird alles auf den linearen Fall $d = 1$ zurückgeführt.
Wir betrachten der Bequemlichkeit halber nur den Fall $F = Z_0$ (durch eine lineare Koordinatentransformation kann man den Fall $\deg F = 1$ hierauf zurückführen). Es gilt

$$\mathbb{A}^n \;=\; \mathbb{P}^n_{Z_0} \;\subset\; \mathbb{P}^n$$

mit affinen Koordinaten $z_j = \frac{Z_j}{Z_0},\ j = 1, \ldots, n$.
$X_0 := X_{\zeta_0} = X \cap \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^n$, wobei $\zeta_0 := Z_0 + I(X) \in S(X)$, ist affine Untervarietät von $\mathbb{A}^n$ und nach Satz 4.8 gilt

$$\mathcal{O}(X_0) \;=\; A(X_0) \;=\; K[z_1, \ldots, z_n]/I(X_0).$$

Die kanonische surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} K[z_1, \ldots, z_n] = K[Z_0, \ldots, Z_n]_{(Z_0)} &\longrightarrow S(X)_{\zeta_0}, \\ \frac{G}{Z_0^d} &\longmapsto \frac{G + I(X)}{\zeta_0^d} \end{aligned}$$

hat als Kern das Ideal

$$\left\{ \frac{G}{Z_0^d} \mid G \in K[Z_0, \ldots, Z_n]_d \text{ und } Z_0^l G \in I(X) \text{ für ein } l \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{G}{Z_0^d} \mid G \in K[Z_0, \ldots, Z_n]_d \text{ und } \frac{G}{Z_0^d} | X_0 = 0 \right\} \;=\; I(X_0).$$

Nach dem Homomorphiesatz folgt $A(X_0) \;=\; S(X)_{(\zeta_0)}$. $\square$

Übungen

1) Mit Hilfe von Satz 4.21 zeige man: $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n) \;=\; K$ (K algebraisch abgeschlossen).
2) Es sei $C = \mathbb{V}(zy^2 - x(x-z)(x+z)) \subset \mathbb{P}^2$ (K algebraisch abgeschlossen).
   Bestimme $\mathcal{O}(C)$ und $\mathcal{O}(C \setminus \{[0:1:0]\})$.

newpage

5 Die Kategorie der quasiprojektiven Varietäten

In diesem Abschnitt studieren wir die regulären Abbildungen (= *Morphismen*) zwischen quasiprojektiven Varietäten.

Definition 5.1 Sei zunächst K ein beliebiger Körper.

a) Sind $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten, so heißt eine Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

polynomial $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Polynome $f_1, \ldots, f_m \in K[z_1, \ldots, z_n]$, so daß

$$\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Polynome f_i sind natürlich nur modulo $I(X)$ eindeutig durch φ bestimmt.
Offensichtlich gilt:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{pol. Abb. } \varphi : X \longrightarrow Y\} & \subset & \{\text{pol. Abb. } \varphi : X \longrightarrow \mathbb{A}^m\} \\ \| & & \| \\ \{f = (f_1, \ldots, f_m) \in A(X)^m \mid f(X) \subset Y\} & \subset & A(X)^m. \end{array}$$

b) Sind $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ quasiprojektive Varietäten, so heißt eine Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

homogen polynomial (bzgl. der Einbettungen $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$) $\Longleftrightarrow$
$\exists\, d \geq 0$, $F_0, \ldots, F_m \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad d, so daß

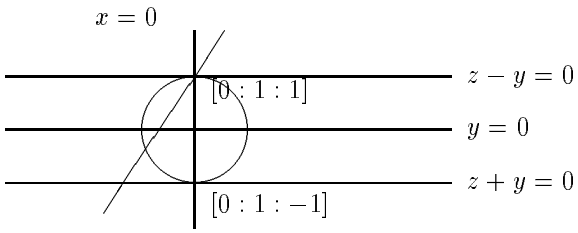
$$\varphi(x) = [F_0(x) : \ldots : F_m(x)] \quad \text{für alle } x \in X.$$

Es folgt insbesondere $(F_0(x), \ldots, F_m(x)) \neq 0$, also $X \cap \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) = \emptyset$.

Beispiel 5.2
Es sei $C = \mathbb{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{P}^2$, $C' = C \setminus \{[0:1:1]\}$, und $\varphi : C' \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sei die Abbildung

$$(*) \qquad \varphi([x:y:z]) = [x : y - z].$$

Das ist wohldefiniert, denn für $[x:y:z] \in C'$ ist $(x, y-z) \neq (0,0)$. Im Punkt $[0:1:1]$ ist φ zunächst nicht definiert ($(*)$ ergäbe den Wert $[0:0]$!).



Aber auf C gilt ja $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,
und für $p = [x:y:z] \in C_x = \{p \in C \mid x(p) \neq 0\} = C \setminus \{[0:1:1], [0:1:-1]\}$ ist

$$\varphi(p) = [x : y - z] = [x^2 : xy - xz] = [z^2 - y^2 : xy - xz] = [z + y : -x].$$

$$\psi(p) = [z + y : -x]$$

ist für alle $p \in C'' = C \setminus \{[0:1:-1]\}$ definiert. Wir haben also eine offene Überdeckung

$$C \;=\; C' \cup C''$$

und zwei homogen polynomiale Abbildungen

$$\varphi : C' \;\longrightarrow\; \mathbb{P}^1, \quad \psi : C'' \;\longrightarrow\; \mathbb{P}^1$$

mit

$$\varphi | C' \cap C'' \;=\; \psi | C' \cap C''.$$

Man erhält insgesamt eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : C \;\longrightarrow\; \mathbb{P}^1$$

von φ, indem man $\tilde{\varphi}([0:1:1]) := [1:0]$ setzt.
Homogen polynomial im Sinne von Definition 5.1 b) ist $\tilde{\varphi}$ aber nur auf C' und ebenso auf C''.

Wir sehen, daß die folgende lokale Definition angebracht ist:

Definition 5.3 Es sei K algebraisch abgeschlossen; $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ seien quasiprojektive Varietäten. Eine *reguläre Abbildung* $\varphi : X \longrightarrow Y$ ist eine stetige Abbildung φ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $U \subset Y$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$ reguläre Funktion auf U, so ist $f \circ (\varphi | \varphi^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$ eine reguläre Funktion auf $\varphi^{-1}(U)$.

Mit $\mathrm{Hom}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge der regulären Abbildungen $\varphi : X \longrightarrow Y$. (Genaugenommen wird hier auch auf die gegebenen „Einbettungen“ $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ Bezug genommen.)

Lemma 5.4 Seien $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$, $Z \subset \mathbb{P}^k$ quasiprojektive Varietäten. Es gilt:

1) $id_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ (trivialerweise)

2) $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(Y, Z) \;\Rightarrow\; \psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(X, Z)$.

Die quasiprojektiven Varietäten über K und die regulären Abbildungen bilden somit eine *Kategorie*, die Kategorie der quasiprojektiven Varietäten über K.

Beweis: zu 2) $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ seien regulär. Für $U \subset Z$ offen, $f : U \longrightarrow K$ reguläre Funktion, ist

$$f \circ ((\psi \circ \varphi) | (\psi \circ \varphi)^{-1}(U)) = ((f \circ \psi) | \psi^{-1}(U)) \circ (\varphi | \psi \circ \varphi^{-1}(U)),$$

also regulär, weil φ und ψ regulär sind. $\square$

Definition 5.5 Seien $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ quasiprojektiv. $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ heißt *Isomorphismus* (bisweilen auch *biregulär*) $\iff \exists\, \psi \in \mathrm{Hom}(Y, X)$, so daß $\varphi \circ \psi = id_Y$ und $\psi \circ \varphi = id_X$.
Gibt es einen Isomorphismus $\varphi : X \longrightarrow Y$, so heißen X und Y *isomorph* (oder *biregulär äquivalent*), in Zeichen: $X \cong Y$.
X heißt *affin*, wenn X zu einer affinen Varietät isomorph ist.

Bemerkung 5.6 Ist $X \subset \mathbb{A}^n$ affin, so denken wir uns $\mathbb{A}^n$ als offenen Teil $\mathbb{P}^n_{Z_0} \subset \mathbb{P}^n$ und somit $X \subset \mathbb{P}^n$ als quasiprojektive Varietät in $\mathbb{P}^n$. Dazu müssen wir sehen, daß X offen in einer projektiven Varietät $\bar{X} \subset \mathbb{P}^n$ liegt: Sei $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ das Ideal von X und

$$I^h \;=\; \langle \{ F \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \mid \exists\, f \in I, \text{ mit } F = f^h \text{ die Homogenisierung von } f \text{ bzgl. } Z_0 \} \rangle.$$

Dann gilt:
$\bar{X} := \mathbb{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in $\mathbb{P}^n$, die X enthält, und es gilt:

$$X = \bar{X} \cap \mathbb{A}^n \quad \text{ist offen in } \bar{X}.$$

Beweis: Ist $Y \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und $X \subset Y$, so gilt:
Ist $F \in I(Y)$, so ist $F([1:x]) = 0$ für alle $x \in X$, d.h. $f := F_{dh} = F(1, z_1, \ldots, z_n) \in I$.
Es folgt: $F = Z_0^l f^h$ für ein $l \in \mathbb{N}$, also ist $F \in I^h$. Aus $I(Y) \subset I^h$ folgt nun

$$\bar{X} \;=\; \mathbb{V}(I^h) \subset \mathbb{V}(I(Y)) = Y.$$

Also ist tatsächlich $\bar{X}$ die (Zariski-) *abgeschlossene Hülle* von X in $\mathbb{P}^n$.
(X ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^n$, aber nicht in $\mathbb{P}^n$, wenn X nicht endlich ist.)
Trivialerweise gilt: $X \subset \bar{X} \cap \mathbb{A}^n$. Wir zeigen die umgekehrte Inklusion $\bar{X} \cap \mathbb{A}^n \subset X$.
Es sei also $x \in \mathbb{A}^n$ und $[1:x] \in \bar{X}$, d.h. $f^h([1:x]) = 0\ \forall f \in I$.
Da $f^h([1:x]) = f(x)$ gilt, folgt somit $x \in \mathbb{V}(I) = X$. $\square$

Satz 5.7 Es sei K algebraisch abgeschlossen. $X \subset \mathbb{P}^n$ sei quasiprojektive und $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietät. $\varphi : X \longrightarrow Y$ sei eine Abbildung. Dann gilt: φ ist regulär $\iff$
$\exists\, f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(X)$ reguläre Funktionen, so daß $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))\ \ \forall x \in X$.

Corollar 5.8 Die Voraussetzungen seien wie in Satz 5.7. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)), \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^* \quad (\varphi^*(f) := f \circ \varphi) \end{array}$$

ist eine Bijektion.

Corollar 5.9 Jede reguläre Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ ist konstant.

Corollar 5.10 Sind $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten, so gilt:

$$X \cong Y \iff A(X) \cong A(Y).$$

Der affine Koordinatenring $A(X)$ von X ist also eine Invariante von X und unabhängig von der Einbettung $X \subset \mathbb{A}^n$.

Beweis zu Satz 5.7:

„$\Rightarrow$“ Ist $\varphi : X \longrightarrow Y$ reguläre Abbildung und $\eta_j = y_j | Y$ die Einschränkung auf die j-te affine Koordinate $y_j \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$, so ist $f_j := \eta_j \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$ und $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ für alle $x \in X$.

„$\Leftarrow$“ Es seien $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(X)$, so daß $\varphi(x) := (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in Y$ für alle $x \in X$.
Behauptung: $\varphi : X \longrightarrow Y$ ist regulär. Zunächst zeigen wir, daß φ stetig ist.
Sei $x \in X$ und $y = \varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. U sei eine offene Umgebung von y von der

Form $U = Y_g$, $g \in K[w_1, \ldots, w_m] = A(\mathbb{A}^m)$. Es sei V eine offene Umgebung von x, so daß $V \subset \mathbb{A}^n \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{P}^n$, und es sei

$$f_j(x') \;=\; \frac{g_j(x')}{q_j(x')} \quad \text{für alle } x' \in V,$$

wobei $g_j, q_j \in K[z_1, \ldots z_n] = A(\mathbb{A}^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} r \;&:=\; g\left(\frac{g_1}{q_1}, \ldots, \frac{g_m}{q_m}\right) \in K(z_1, \ldots, z_n) \\ &=\; \frac{\tilde{g}}{(q_1 \cdots q_m)^l} \;\text{ mit } \tilde{g} \in K[z_1, \ldots, z_n] \;\text{ und } l \in \mathbb{N} \text{ geeignet.} \\ r(x) \;&=\; g(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \;=\; g(y) \;\neq\; 0, \end{aligned}$$

weil $y \in U = Y_g$. Es folgt:

$$\begin{aligned} W \;&:=\; V \cap \varphi^{-1}(U) \\ &=\; \{x' \in V \mid \varphi(x') \in U\} \\ &=\; \{x' \in V \mid g(\varphi(x')) \neq 0\} \\ &=\; \{x' \in V \mid \tilde{g}(x') \neq 0\} \text{ offen in } V. \end{aligned}$$

W ist also offene Umgebung von x mit $\varphi(W) \subset U$. Also ist φ stetig.

Es sei nun $s \in \mathcal{O}(U)$, $U = Y_g$.
Behauptung: $s \circ (\varphi | \varphi^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.
Beweis: Wir betrachten wieder eine Umgebung V von $x \in \varphi^{-1}(U)$ in X, so daß

$$f_j \;=\; \frac{g_j}{q_j} \text{ auf } V, \;\; V \subset \mathbb{A}^n \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{P}^n$$

mit Polynomen $g_j, q_j \in K[z_1, \ldots, z_n]$. Weiter gilt nach Satz 4.8:

$$\mathcal{O}(U) \;=\; A(Y)_g,$$

also $s = \frac{h}{g^k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $h \in K[w_1, \ldots, w_m]$. Es folgt:

$$s \circ \varphi | \varphi^{-1}(U) \cap V \;=\; \frac{h\left(\frac{g_1}{q_1}, \cdots, \frac{g_m}{q_m}\right)}{g^k\left(\frac{g_1}{q_1}, \cdots, \frac{g_m}{q_m}\right)}$$

ist regulär auf $\varphi^{-1}(U) \cap V$. $\square$

Beweis zu Corollar 5.8: Zunächst ist

$$\operatorname{Hom}(X, \mathbb{A}^m) \;=\; \mathcal{O}(X)^m \;\cong\; \operatorname{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[w_1, \ldots, w_m], \mathcal{O}(X))$$

und somit für $I = I(Y) \subset K[w_1, \ldots, w_m]$

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \;\cong\; \operatorname{Hom}_{K\text{-Alg}}\left(K[w_1, \ldots, w_m] \big/ I, \mathcal{O}(X)\right). \quad \square$$

Beweis zu Corollar 5.9:

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{P}^n, \mathbb{A}^m) \;=\; \mathcal{O}(\mathbb{P}^n)^m \;=\; K^m. \quad \square$$

Beweis zu Corollar 5.10:
Es gilt $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$, $id^* = id$.
Also: $\left.\begin{matrix} \varphi \circ \psi = id \\ \psi \circ \varphi = id \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \psi^* \circ \varphi^* = id \\ \varphi^* \circ \psi^* = id \end{matrix}\right.$ Es folgt φ ist isomorph $\Longleftrightarrow$ φ^* ist isomorph. $\square$

Lemma 5.11 Seien $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ quasiprojektiv.

a) Ist $\varphi : X \longrightarrow Y$ homogen polynomial, so ist φ regulär.

b) Ist $\varphi : X \longrightarrow Y$ regulär ($X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ quasiprojektiv), so gibt es eine offene Überdeckung

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$$

von X, so daß $\varphi|U_i : U_i \longrightarrow Y$ homogen polynomial ist.

Beweis:

zu a) Sei $\varphi = [F_0 : \ldots : F_m]$ und $\mathbb{A}^m = \mathbb{P}^m_{Z_0}$, $z_j = \frac{Z_j}{Z_0}$. Auf $U = \varphi^{-1}(\mathbb{A}^m)$ ist $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{A}^m$ durch die Polynome $f_i = \frac{F_i}{F_0} \in K[z_1, \ldots, z_n]$ gegeben.

zu b) Die Mengen $X_i = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^m_{Z_i})$ überdecken X und sind offen; allerdings noch nicht affin (jedenfalls nicht a priori). Aber jedes X_i kann überdeckt werden durch offene Basismengen

$$X_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} U_{ij}, \quad U_{ij} = X \cap (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F_{ij})),$$

wobei $F_{ij} \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad d_{ij}.
Um Doppelindizes zu vermeiden, numerieren wir die U_{ij} um:

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_r, \quad U_i = X \cap (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F_i)).$$

Da jedes U_i in eine Teilmenge von $\mathbb{P}^m$ der Form $\mathbb{P}^m_{Z_j}$ abgebildet wird, kann Satz 5.7 angewandt werden:

$$\varphi|U_i = [f_0 : \ldots : f_{j-1} : 1 : f_{j+1} : \ldots : f_m]$$

mit $f_\nu \in \mathcal{O}(U_i)$.
Nach Konstruktion ist jedes f_ν darstellbar durch eine rationale Funktion der Form

$$f_\nu = \frac{G_\nu}{F_i^{m_\nu}}, \quad G_\nu \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \text{ homogen vom Grad } d_i m_\nu.$$

Durch Erweiterung erhalten wir schließlich die gewünschte Form

$$\begin{aligned} \varphi|U_i &= \left[\frac{G_0}{F_i^{m_0}} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{G_m}{F_i^{m_m}}\right] \\ &= [G_0 \cdot F_i^{k_0} : \ldots : F_i^{k_j} : \ldots : G_m \cdot F_i^{k_m}]. \quad \square \end{aligned}$$

Wir kommen zu einigen wichtigen Beispielen:

Beispiel 5.12 (Verallgemeinerung der rationalen Normkurve)
Es seien $d, n \in \mathbb{N}$, $d, n > 0$,

$$S = K[Z_0, \ldots, Z_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \dim_K S_d &= \binom{n+d}{d} \quad \text{(Beweis durch Induktion über } n) \\ &= \#\{Z^\nu \mid \nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^{n+1},\ |\nu| = \nu_0 + \cdots + \nu_n = d\} \end{aligned}$$

($Z^\nu := Z_0^{\nu_0} \cdots Z_n^{\nu_n}$). Es seien nun W_ν, $\nu \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\nu| = d$, Unbestimmte.
$\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ sei der projektive Raum mit den homogenen Koordinaten W_ν, $|\nu| = d$.

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

wird definiert durch

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) := [w_\nu, |\nu| = d] \quad \text{mit } w_\nu := z_0^{\nu_0} \cdots z_n^{\nu_n} = z^\nu.$$

ν_d ist eine homogen polynomiale Abbildung, also regulär. Natürlich ist ν_d injektiv!
($z^\nu = \lambda^d \tilde{z}^\nu \Rightarrow z^\nu = (\lambda\tilde{z})^\nu \Rightarrow z = \lambda\tilde{z}$)
Behauptung: $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ ist Untervarietät von $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$, und zwar gilt:

$$\nu_d(\mathbb{P}^n) = \mathbb{V}(\{W_\nu W_\mu - W_{\nu'} W_{\mu'} \mid \nu + \mu = \nu' + \mu', \ \nu, \mu, \nu', \mu' \in N_d\}),$$

wobei $N_d := \{\nu \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |\nu| = d\}$.
Beweis:
„$\subset$“ ist trivial, denn ist $[W] = \nu_d[Z]$, so ist

$$W_\nu W_\mu = Z^\nu Z^\mu = Z^{\nu+\mu} = Z^{\nu'+\mu'} = W_{\nu'} W_{\mu'}.$$

„$\supset$“ Es sei $[W] \in \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ mit

$$W_\nu W_\mu = W_{\nu'} W_{\mu'} \quad \forall \nu, \mu, \nu', \mu' \in N_d \ \text{ mit } \nu + \mu = \nu' + \mu'.$$

Außerdem sei $\nu \in N_d$ mit $W_\nu \neq 0$ wegen $W_\nu^2 = W_{\nu'} W_{\mu'}$ für $\nu' + \mu' = 2\nu$ ist auch $W_{\nu'} \neq 0$ für alle $\nu' \in N_d$ mit $\nu' \leq 2\nu$ (komponentenweise). Sei i ein Index mit

$$\nu_i = \min\{\nu_j \mid j = 0, \ldots, n, \nu_j \neq 0\}.$$

Gibt es noch ein $k \neq i$ mit $\nu_k \neq 0$, so ist

$$\nu' = (\ldots \underbrace{0}_{\text{i-te Stelle}} \ldots \underbrace{\nu_i + \nu_k}_{\text{k-te Stelle}} \ldots) \leq 2\nu,$$

also $W_{\nu'} \neq 0$. In ν' kommt eine Null mehr vor als in ν. Iteriert man das Verfahren, so kommt man schließlich zu einem Multiindex $d\varepsilon_i = (0, \ldots, d, \ldots, 0)$ mit $W_{d\varepsilon_i} \neq 0$. Es sei nun

$$Z_j := W_{\varepsilon_j + (d-1)\varepsilon_i} \quad \text{für } j = 0, \ldots, n \quad (\varepsilon_j = (\underbrace{0}_{0}, \ldots, \underbrace{1}_{j}, \ldots, \underbrace{0}_{n}), \ j = 0, \ldots, n).$$

Dann gilt für $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in N_d$

$$W_\nu = Z_i \ \text{ falls } \nu = d\varepsilon_i;$$

für $\nu \neq d\varepsilon_i$ ist etwa $\nu_j > 0$, also

$$\begin{aligned} W_\nu Z_i &= W_{\nu'} Z_j \quad \text{mit } \nu' = \nu + \varepsilon_i - \varepsilon_j \\ W_{\nu'} Z_i &= W_{\nu''} Z_j \quad \text{mit } \nu'' = \nu' + \varepsilon_i - \varepsilon_j = \nu + 2\varepsilon_i - 2\varepsilon_j \\ &\quad \text{usw., bis schließlich} \\ W_\nu Z_i^{\nu_j} &= W_\mu Z_j^{\nu_j} \quad \text{mit } \mu = \nu + \nu_j \varepsilon_i - \nu_j \varepsilon_j, \ \ \mu_j = 0, \end{aligned}$$

also $W_\nu = W_\mu \left(\frac{Z_j}{Z_i}\right)^{\nu_j}$. Iteriert man dies, so ergibt sich schließlich

$$W_\nu = W_\lambda \cdot \left(\frac{Z_0}{Z_i}\right)^{\nu_0} \cdots \left(\frac{Z_{i-1}}{Z_i}\right)^{\nu_{i-1}} \left(\frac{Z_{i+1}}{Z_i}\right)^{\nu_{i+1}} \cdots \left(\frac{Z_n}{Z_i}\right)^{\nu_n}$$

mit $\lambda = \nu + (\sum_{j\neq i} \nu_j)\varepsilon_i - (\sum_{j\neq i} \nu_j)\varepsilon_j = d\varepsilon_i$, weil $|\nu| = d$, also

$$W_\nu = \left(\frac{Z_i}{Z_i^d}\right) Z^\nu, \quad Z = (Z_0, \ldots, Z_n),$$

d.h. $[W] = \nu_d([Z])$.

$\nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ ist also die von den Quadriken

$$Q_{\nu,\mu,\nu',\mu'} := W_\nu W_\mu - W_{\nu'} W_{\mu'}, \quad (\nu, \mu, \nu', \mu' \in N_d,\ \nu + \mu = \nu' + \mu')$$

ausgeschnittene projektive Varietät. $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ heißt *Veronesevarietät* (der Ordnung d und der Dimension n).

$\nu_d(\mathbb{P}^n)$ ist enthalten in der Vereinigung der $n+1$ offenen affinen Räume $\tilde{U}_i \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ mit $\tilde{U}_i = \{[w] \mid w_{d\varepsilon_i} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^{\binom{n+d}{d}-1}$, $\nu_d^{-1}(\tilde{U}_i) = U_i = \{[Z] \in \mathbb{P}^n \mid Z_i \neq 0\}$.

$\nu_d : U_0 \longrightarrow \tilde{U}_0$ als Abbildung $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^{\binom{n+d}{d}-1}$ ist durch $(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (z^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^n,\, 0<|\nu|\leq d}$ gegeben. Das Bild ist der Graph der Abbildung

$$f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^{\binom{n+d}{d}-n-1}, \quad f(z_1, \ldots, z_n) = (z^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^n,\, 2\leq|\nu|\leq d}.$$

ν_d induziert also einen Isomorphismus

$$\nu_d^* : \mathcal{O}\left(\nu_d(\mathbb{P}^n) \cap U_0\right) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = K[z_1, \ldots, z_n].$$

(Aber der homogene Koordinatenring $S(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ ist nicht isomorph zu $S(\mathbb{P}^n)$!)

$$\nu_d^* : K[W_\nu, \nu \in N_d] \longrightarrow K[Z_0, \ldots, Z_n]$$

mit $\nu_d^*(W_\nu) := Z^\nu$ ist K-Algebrahomomorphismus mit $\ker \nu_d^* = I(\nu_d(\mathbb{P}^n))$, also ist

$$S(\nu_d(\mathbb{P}^n)) = K[W_\nu, \nu \in N_d] \Big/ I(\nu_d(\mathbb{P}^n))$$

ein Unterring von $K[Z_0, \ldots, Z_n] = S(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{k\geq 0} S_k$. Es gilt $S(\nu(\mathbb{P}^n)) = \bigoplus_{k\geq 0} S_{dk}$ (Übung). Ist

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\nu\in N_d} a_\nu W_\nu \ \in K[W_\nu, \nu \in N_d] \text{ homogen vom Grad 1, so ist} \\ F &:= \nu_d^*(L) = \sum a_\nu Z^\nu \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \text{ homogen vom Grad } d, \text{ und die Hyperfläche} \\ \mathbb{V}(F) &\subset \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

ist isomorph zu dem Hyperebenenschnitt

$$\nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H$$

der Veronesevarietät $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ mit der Hyperfläche $H = \mathbb{V}(L) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$. Insbesondere folgt:

$\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F)$ ist eine affine Varietät

(nämlich isomorph zu $\nu_d(\mathbb{P}^n) \setminus H \subset \mathbb{A}^{\binom{n+d}{d}-1} = \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \setminus H$) und

$\mathcal{O}(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F)) \cong S_{(F)}$

(womit auch Satz 4.21 vollständig bewiesen ist).

Beispiel 5.13 Der Fall $d = 2$.

a) $\nu_2(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^2$ ist nichtentarteter Kegelschnitt.

b) $\nu_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ (da $\binom{2+2}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$) heißt die *Veronesefläche* in $\mathbb{P}^5$.

$$\begin{aligned} \nu_2([Z_0 : Z_1 : Z_2]) &= [Z_0^2 : Z_0Z_1 : Z_0Z_2 : Z_1^2 : Z_1Z_2 : Z_2^2] \\ &= [W_{200} : W_{110} : W_{101} : W_{020} : W_{011} : W_{002}] \\ &= [w_0 : w_1 : w_2 : w_3 : w_4 : w_5]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen ($w_\nu w_\mu = w_{\nu'} w_{\mu'} \Leftrightarrow \nu + \mu = \nu' + \mu'$) sind in diesem Fall:

$$\begin{aligned} 0 &\triangleq (2,0,0) & w_0w_5 - w_2^2 &= 0, \\ 1 &\triangleq (1,1,0) & w_0w_3 - w_1^2 &= 0, \\ 2 &\triangleq (1,0,1) & w_3w_5 - w_4^2 &= 0, \\ 3 &\triangleq (0,2,0) & w_1w_4 - w_2w_3 &= 0, \\ 4 &\triangleq (0,1,1) & w_1w_5 - w_2w_4 &= 0, \\ 5 &\triangleq (0,0,2) & w_0w_4 - w_1w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\nu_2(\mathbb{P}^2) = \left\{ [w_0 : \ldots : w_5] \mid \operatorname{rg} \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & w_3 & w_4 \\ w_2 & w_4 & w_5 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

ist eine „Determinantenvarietät“.

c) Auch $\nu_2(\mathbb{P}^n)$ ist eine Determinantenvarietät in $\mathbb{P}^N$ mit $N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1$; $\nu_2(\mathbb{P}^n) = \{[A] \mid A = (a_{ij})$ symmetrische $(n+1) \times (n+1)$-Matrix mit $\operatorname{rg}(A) = 1\}$, $\nu_2([Z_0 : \ldots : Z_n]) = [A]$ mit $a_{ij} = Z_iZ_j \Rightarrow a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{kj} = 0$.

Beispiel 5.14

Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ Untervarietät mit Gleichungen vom Grad $\leq m$. Sind $d, k \in \mathbb{N}$ mit $m \leq dk$, so ist X auch Nullstellengebilde von Gleichungen vom Grad dk, etwa

$X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s),\ F_i \in S_{dk}.$

Dann gibt es homogene Polynome G_i vom Grad k in den Unbestimmten $W_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}^{n+1},\ |\nu| = d$, so daß

$F_i = \nu_d^*(G_i),$

denn: Ist $Z^\lambda = Z_0^{\lambda_0} \cdots Z_n^{\lambda_n}$ Monom vom Grad $|\lambda| = dk$, so wähle man $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in N_d$ lexikographisch maximal mit $\nu_i \leq \lambda_i\ \forall i = 0, \ldots, n$.

Dann ist $\lambda - \nu \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $|\lambda - \nu| = (k-1)d$ und $Z^\lambda = \nu_d^*(W_\nu) Z^{\lambda-\nu}$.
Iteriert man dies, so folgt $Z^\lambda = \nu_d^*(W^\delta)$ für ein $\delta \in N_k$. Wir erhalten

$$\nu_d(X) = \nu_d(\mathbb{P}^n) \cap \mathbb{V}(G_1, \ldots, G_s).$$

Die elliptische Kurve

$$E = \mathbb{V}(Z_0 Z_2^2 - Z_1(Z_1^2 - Z_0^2)) \subset \mathbb{P}^2$$

ist auch das Nullstellengebilde der drei „Quadriken“

$$\begin{aligned} F_1 &= Z_0^2 Z_2^2 - Z_0 Z_1 (Z_1^2 - Z_0^2), \\ F_2 &= Z_0 Z_1 Z_2^2 - Z_1^2 (Z_1^2 - Z_0^2), \\ F_3 &= Z_0 Z_2^3 - Z_1 Z_2 (Z_1^2 - Z_0^2). \end{aligned}$$

Wegen $\nu_2^*(W_0) = Z_0^2$, $\nu_2^*(W_1) = Z_0 Z_1$, $\nu_2^*(W_2) = Z_0 Z_2$, $\nu_2^*(W_3) = Z_1^2$, $\nu_2^*(W_4) = Z_1 Z_2$, $\nu_2^*(W_5) = Z_2^2$ ist $F_i = \nu_2^*(Q_i)$ mit

$$\begin{aligned} Q_1 &= W_0 W_5 - W_1 (W_3 - W_0), \\ Q_2 &= W_1 W_5 - W_3 (W_3 - W_0), \\ Q_3 &= W_2 W_5 - W_4 (W_3 - W_0). \end{aligned}$$

Folglich ist das Bild $\nu_2(E) \subset \mathbb{P}^5$ der Durchschnitt $\nu_2(\mathbb{P}^2) \cap \mathbb{V}(Q_1, Q_2, Q_3)$ der drei Quadriken $\mathbb{V}(Q_1), \mathbb{V}(Q_2), \mathbb{V}(Q_3)$ mit der Veronesefläche $\nu_2(\mathbb{P}^2)$, die ihrerseits ein Schnitt von sechs Quadriken ist. Die Kurve $\tilde{E} = \nu_2(E)$ wird also von neun Quadriken ausgeschnitten.
Wir bemerken:

a) Jede Hyperfläche $H \subset \mathbb{P}^5$ schneidet $\tilde{E}$ in genau sechs Punkten (mit Vielfachheiten gezählt).

b) $\mathbb{V}(Q_1, Q_2, Q_3)$ ist ein sehr spezieller Schnitt, denn der 3-dimensionale lineare Raum $M = \mathbb{V}(W_5, W_3 - W_0)$ liegt ganz in $\mathbb{V}(Q_1, Q_2, Q_3)$.

c) Vier allgemeine Quadriken in $\mathbb{P}^5$ schneiden eine Kurve aus, die von jeder Hyperebene in 16 Punkten geschnitten wird.

Übungen

1) $\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$ $\left(N = \binom{n+d}{d} - 1\right)$ induziert einen Isomorphismus $\tilde{\nu}_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \nu_d(\mathbb{P}^n)$. Der homogene Koordinatenring $S(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ von $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ in $\mathbb{P}^N$ ist isomorph zu dem Unterring

$$\bigoplus_{k \geq 0} S_{dk} \text{ von } \bigoplus_{k \geq 0} S_k = K[Z_0, \ldots, Z_n].$$

Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ quasiprojektiv, so ist $Y = \nu_d(X) \subset \mathbb{P}^N$ quasiprojektiv und $X \cong Y$.

2) Jede projektive Varietät $X \subset \mathbb{P}^n$ ist isomorph zu einem Durchschnitt von Quadriken in $\mathbb{P}^N$ (N geeignet).

3) Es sei $X \subset \mathbb{P}^5$ die Veronesefläche, $X = \nu_2(\mathbb{P}^2)$. $C = \nu_2(\nu_1(\mathbb{P}^1))$ ist eine rationale Normkurve in $\mathrm{Span}(C) \subset \mathbb{P}^5$.

4) Ist X die Veronesefläche in $\mathbb{P}^5$, so ist

$$S = \bigcup_{\substack{p,q \in X \\ p \neq q}} \overline{pq} \quad \text{in der Hyperfläche } \mathbb{V}\left(\det \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & w_3 & w_4 \\ w_2 & w_4 & w_5 \end{pmatrix}\right) \text{ enthalten.}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß in der Kategorie der quasiprojektiven Varietäten (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper) Produkte existieren.

Definition 5.15 Seien X, Y quasiprojektive Varietäten. Ein *Produkt* von X und Y ist eine quasiprojektive Varietät P mit zwei regulären Abbildungen $p_1 : P \longrightarrow X$ und $p_2 : P \longrightarrow Y$, so daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

(1) Ist Z quasiprojektive Varietät und sind $q_1 : Z \longrightarrow X$, $q_2 : Z \longrightarrow Y$ reguläre Abbildungen, so gibt es genau eine reguläre Abbildung $q : Z \longrightarrow P$ mit $p_i \circ q = q_i$ für $i = 1, 2$.

Bemerkung (P, p_1, p_2) ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig durch (1) bestimmt. Denn: Ist (P', p_1', p_2') ein weiteres Produkt, so gibt es
a) genau ein $p' : P' \longrightarrow P$ mit $p_i' = p_i \circ p'$ (weil P (1) erfüllt) und
b) genau ein $p : P \longrightarrow P'$ mit $p_i = p_i' \circ p$ (weil P' (1) erfüllt).

Aus $p_i \circ id_P = p_i = p_i' \circ p = p_i \circ p' \circ p$ folgt wegen der Eindeutigkeit von $h : P \longrightarrow P$ mit $p_i \circ h = p_i$, daß $id_P = p' \circ p$ gilt. Da auch $h' : P' \longrightarrow P'$ durch $p_i' \circ h' = p_i'$ eindeutig bestimmt ist, folgt ebenso wegen $p_i' \circ id_{P'} = p_i' = p_i \circ p' = p_i' \circ p \circ p'$ die Gleichung $id_{P'} = p \circ p'$.
$p : P \longrightarrow P'$ ist also isomorph mit $p^{-1} = p'$.

Wenn ein Produkt (P, p_1, p_2) von X und Y existiert, dann ist es also bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt und wird daher auch *das* Produkt von X und Y genannt und mit $X \times Y$ bezeichnet.
Die regulären Abbildungen $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ und $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ heißen erste bzw. zweite *Projektion*.

Wir konstruieren zunächst das Produkt von $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{P}^m$.
Dazu betrachten wir das kartesische Produkt

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = \{(p, q) \mid p \in \mathbb{P}^n, q \in \mathbb{P}^m\}.$$

Dies ist nur eine Menge. Um auf $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ die Struktur einer projektiven Varietät zu erhalten, betten wir $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ in einen anderen projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ ein.
Wir definieren die *Segre-Abbildung*

$$\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}.$$

Es seien w_{ij}, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$ homogene Koordinaten in $\mathbb{P}^N (N = (n+1)(m+1) - 1)$.
Für $p = [x] \in \mathbb{P}^n$, $q = [y] \in \mathbb{P}^m$, $x = (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$,
$y = (y_0, \ldots, y_m) \in K^{m+1} \setminus \{0\}$ sei

$$\sigma(p, q) := [w_{ij}]_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,m}} \quad \text{mit } w_{ij} := x_i y_j .$$

Offensichtlich ist so eine Abbildung $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$ definiert. σ ist injektiv, denn:

$$\sigma([x], [y]) = \sigma([x'], [y']) \iff \exists\, \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } x_i y_j = \lambda x_i' y_j' \quad \forall i, j.$$

Ist etwa $y_{j_0} \neq 0$, so folgt hieraus $x_i = \left(\lambda \frac{y_{j_0}'}{y_{j_0}}\right) x_i' \; \forall i$, also $[x] = [x']$.
Ist etwa $x_{i_0} \neq 0$, so folgt hieraus $y_j = \left(\lambda \frac{x_{i_0}'}{x_{i_0}}\right) y_j' \; \forall j$, also $[y] = [y']$.
σ ist somit injektiv. Für $p \in \mathbb{P}^n$ ist

$$\sigma_p : \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad \sigma_p(q) := \sigma(p, q)$$

homogen polynomial vom Grad 1, also regulär, und $M_p = \sigma(\mathbb{P}^m)$ ist m-dimensionaler linearer Teilraum von $\mathbb{P}^N$: $\mathbb{P}^m \xrightarrow[\sigma_p]{\cong} M_p$. Es gilt

$$(1) \qquad M_p \cap M_{p'} = \emptyset \quad \text{für } p \neq p'.$$

Für $q \in \mathbb{P}^m$ ist

$$\sigma^q : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad \sigma^q(p) = \sigma(p,q)$$

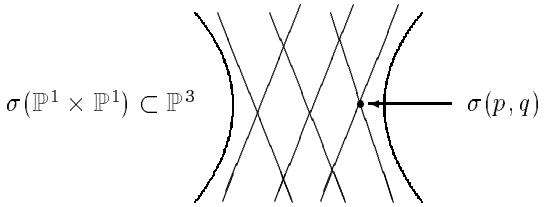
homogen polynomial vom Grad 1, also ebenfalls regulär und $\mathbb{P}^n \cong \sigma^q(\mathbb{P}^n) = M^q \underset{\text{linear}}{\subset} \mathbb{P}^N$. Es gilt

$$(2) \qquad M^q \cap M^{q'} = \emptyset \quad \text{für } q \neq q'.$$

Offensichtlich ist weiter

$$(3) \qquad M^q \cap M_p = \{\sigma(p,q)\}$$

ein Punkt. M^q und M_p sind also *nicht* in allgemeiner Lage in $\mathbb{P}^N$.
Illustration für $n = m = 1,\ N = 3$:



Es gilt

$$\Sigma_{n,m} := \sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = \dot{\bigcup_{p \in \mathbb{P}^n}} M_p \subset \mathbb{P}^N$$

ist Vereinigung paarweise disjunkter m-dimensionaler linearer Teilräume von $\mathbb{P}^N$. Deshalb nennt man $\Sigma_{n,m}$ eine *Regelmannigfaltigkeit* in $\mathbb{P}^N$ und $(M_p)_{p \in \mathbb{P}^n}$ die *Regelschar*.
$\Sigma_{n,m}$ besitzt eine zweite Regelschar, nämlich

$$(M^q)_{q \in \mathbb{P}^m}, \quad \Sigma_{n,m} = \bigcup_{q \in \mathbb{P}^m} M^q,$$

wobei die M^q n-dimensionale lineare Teilräume sind.

Lemma 5.16 $\Sigma_{n,m}$ ist eine projektive Untervarietät von $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(K^{n+1,m+1})$, wobei $K^{n+1,m+1}$ der K-Vektorraum der $(n+1) \times (m+1)$-Matrizen $W = (w_{ij})$ ist, und zwar ist

$$\Sigma_{n,m} = \mathbb{V}(\{w_{ij}w_{lk} - w_{ik}w_{lj} \mid i < l,\ j < k\}).$$

Beweis: Ist $W = (w_{ij}) \in K^{n+1,m+1}$, so ist $[W] \in \Sigma_{n,m} \Leftrightarrow \exists\, x \in K^{n+1}, y \in K^{m+1}$, so daß $w_{ij} = x_i y_j \ \forall i,j$; d.h. $W : K^{m+1} \longrightarrow K^{n+1}$ hat die Faktorisierung

$$K^{m+1} \xrightarrow[y^t]{} K \xhookrightarrow[x]{} K^{n+1}, \qquad (W = xy^t,\ x, y \text{ Spalten}) \ \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{rg} W = 1 \ \Leftrightarrow \ \text{alle 2-Minoren von } W \text{ verschwinden.} \quad \square$$

$\Sigma_{n,m}$ heißt *Segrevarietät* (vom Typ (n,m)). Wir können nun $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ als projektive Varietät auffassen. Dazu erklären wir

a) die Topologie auf $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$: $U \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ heißt offen $\iff$ $\sigma(U)$ ist offen in $\Sigma_{n,m}$,

b) reguläre Funktionen: Ist $U \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ offen, so heißt $f : U \longrightarrow K$ regulär $\iff$ $f \circ (\sigma^{-1}|\sigma(U)) : \sigma(U) \longrightarrow K$ ist regulär.

Das bedeutet also: $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ ist ein Isomorphismus.

Definition 5.17 $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n, W_0, \ldots, W_m]$ heißt *bihomogen* vom *Bigrad* (a,b) $\iff$

$$F(Z,W) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^{n+1},\ |\nu| = a \\ \mu \in \mathbb{N}^{m+1},\ |\mu| = b}} a_{\nu\mu} Z^\nu W^\mu.$$

Satz 5.18 $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist abgeschlossen (d.h. $\sigma(X) \subset \Sigma_{n,m}$ abgeschlossen) $\iff$
es gibt bihomogene Polynome $G_1, \ldots, G_t \in K[Z,W]$, so daß

$$X = \mathbb{V}(G_1, \ldots, G_t) \ := \ \{(p,q) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid G_k(p,q) = 0 \ \forall k\}.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $\sigma(X) = \Sigma_{n,m} \cap \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s)$, wobei F_k homogen vom Grad d_k in den Unbestimmten w_{ij} sei. Es folgt $X = \mathbb{V}(\sigma^*(F_1), \ldots, \sigma^*(F_s))$, und σ^* ist bihomogen vom Bigrad (d_k, d_k). Um letzteres einzusehen, bilden wir $\sigma^*(W^\lambda)$ eines Monoms $W^\lambda = \prod_{(i,j)} W_{ij}^{\lambda_{ij}}$ vom Grad $d = \sum \lambda_{ij}$ in den Unbestimmten W_{ij}. Es ist

$$\begin{aligned} \sigma^*(W^\lambda) &= \prod_{(i,j)} (Z_i W_j)^{\lambda_{ij}} = \prod_{(i,j)} Z_i^{\lambda_{ij}} \prod_{(i,j)} W_j^{\lambda_{ij}} \\ &= \prod_i Z_i^{\nu_i} \prod_j W_j^{\mu_j} = Z^\nu W^\mu \end{aligned}$$

mit $\nu_i = \sum_j \lambda_{ij},\ \mu_j = \sum_i \lambda_{ij}$ und $|\nu| = d = |\mu|$.

„$\Leftarrow$“ Ist $X = \mathbb{V}(G_1, \ldots, G_t)$ mit bihomogenen Polynomen G_k, so kann man durch Multiplikation mit genügend vielen Monomen Z^ν, W^μ erreichen, daß $X = \mathbb{V}(H_1, \ldots, H_t)$ mit bihomogenen Polynomen H_k vom Bigrad (d_k, d_k). Es gibt dann homogene Polynome F_k vom Grad d_k in den Unbestimmten W_{ij}, so daß $\sigma^*(F_k) = H_k$, denn:
Ist $H = z_0^{\nu_0} \cdots z_n^{\nu_n} w_0^{\mu_0} \cdots w_m^{\mu_m}$ ein Monom vom Bigrad (d,d), so sei i_0 minimal mit $\nu_{i_0} \neq 0$ und j_0 minimal mit $\mu_{j_0} \neq 0$, und es sei $k_0 = \min(\nu_{i_0}, \mu_{j_0})$. Dann ist mit $\sigma^*(W_{i_0 j_0}) = z_{i_0} w_{j_0}$

$$H = \left(\sigma^*(W_{i_0 j_0})^{k_0}\right) H',$$

wobei H' Monom vom Bigrad $(d - k_0, d - k_0)$ ist. Induktiv folgt

$$H = \sigma^* \tilde{H},$$

wobei $\tilde{H}$ ein Monom vom Grad d in den Unbestimmten W_{ij} ist.
Es folgt $\sigma(X) = \Sigma_{n,m} \cap \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_t)$. $\square$

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ hat eine offene Überdeckung durch affine Räume $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$:
$U_i \times V_j = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \setminus \mathbb{V}(z_i, w_j)$ ist offen, wobei $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(z_i)$ und $V_j = \mathbb{P}^m \setminus \mathbb{V}(w_j)$.
Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{n+m} &\longrightarrow U_i \times V_j, \\ (x,y) &\longmapsto ([x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n], [y_0 : \ldots : y_{j-1} : 1 : y_{j+1} : \ldots : y_m]) \end{aligned}$$

(wobei $x = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $y = (y_0, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m)$) ist ein Isomorphismus. $U_i \times V_j$ ist also offen und affin in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ und $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = \bigcup_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,m}} U_i \times V_j$. Weiter ist

$$\sigma(U_i \times V_j) \;=\; \Sigma_{n,m} \cap \underbrace{\left(\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{V}(w_{ij})\right)}_{U_{ij} \cong \mathbb{A}^N}.$$

In affinen Koordinaten auf $U_i \times V_j$ und U_{ij} hat σ die Form

$$\sigma(x,y) = (x_\nu y_\mu)_{\substack{\nu=0,\ldots,n \\ \mu=0,\ldots,m}},$$

wobei $x = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $x_i = 1$, $y = (y_0, \ldots, y_n)$ mit $y_j = 1$. Also:

$$\sigma(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x_0y_0 & \cdots & x_0y_{j-1} & x_0 & x_0y_{j+1} & \cdots & x_0y_m \\ x_1y_0 & \cdots & x_1y_{j-1} & x_1 & x_1y_{j+1} & \cdots & x_1y_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i-1}y_0 & \cdots & x_{i-1}y_{j-1} & x_{i-1} & x_{i-1}y_{j+1} & \cdots & x_{i-1}y_m \\ y_0 & \cdots & y_{j-1} & 1 & y_{j+1} & \cdots & y_m \\ x_{i+1}y_0 & \cdots & x_{i+1}y_{j-1} & x_{i+1} & x_{i+1}y_{j+1} & \cdots & x_{i+1}y_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_0 & \cdots & x_ny_{j-1} & x_n & x_ny_{j+1} & \cdots & x_ny_m \end{pmatrix}$$

$$= \; (\underbrace{x}_{\in \mathbb{A}^n}, \underbrace{y}_{\in \mathbb{A}^m}, \underbrace{(x_\nu y_\mu)_{\substack{\nu \neq i \\ \mu \neq j}}}_{n \times m\text{-Matrix} \in \mathbb{A}^{nm}}) \;\in\; \mathbb{A}^{n+m+nm} \;=\; \mathbb{A}^N.$$

Die Projektion $(x,y,M) \longmapsto (x,y)$ induziert die Umkehrabbildung $\pi : \sigma(U_i \times V_j) \longrightarrow U_i \times V_j$ von $\sigma : U_i \times V_j \longrightarrow \sigma(U_i \times V_j)$. Es folgt $\sigma(U_i \times V_j) = \Sigma_{n,m} \cap U_{ij}$ ist zu $\mathbb{A}^{n+m}$ isomorphe, affine Varietät in $U_{ij} \cong \mathbb{A}^N$. Weiter folgt: Die Topologie und die regulären Funktionen auf $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ können auch so charakterisiert werden:

a) $U \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist offen $\iff$
$U \cap (U_i \times V_j)$ ist offen für alle (i,j), wobei $U_i \times V_j$ die Zariski-Topologie von $\mathbb{A}^{n+m}$ habe.

b) Ist $U \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ offen, so ist $f : U \longrightarrow K$ regulär $\iff$
$f|U \cap (U_i \times V_j)$ ist regulär für alle (i,j).

Satz 5.19 Seien $X \subset \mathbb{P}^n$ und $Y \subset \mathbb{P}^m$ quasiprojektiv; dann ist $\sigma(X \times Y) \subset \mathbb{P}^N$ quasiprojektiv. σ induziert eine Bijektion $\tilde{\sigma} : X \times Y \longrightarrow \sigma(X \times Y)$ und somit eine Topologie auf $X \times Y$ und den Begriff der regulären Funktionen auf offenen Teilmengen von $X \times Y$.
Es gilt: Die Projektionen $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ und $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sind regulär und $(X \times Y, p_1, p_2)$ (genaugenommen $\sigma(X \times Y), p_1 \circ \tilde{\sigma}^{-1}, p_2 \circ \tilde{\sigma}^{-1})$) ist ein Produkt von X und Y in der Kategorie der quasiprojektiven Varietäten.

Beweis:

a) Sei X offen in $\bar{X} \subset \mathbb{P}^n$ und Y offen in $\bar{Y} \subset \mathbb{P}^m$. Dann ist (nach Satz 5.18) $\bar{X} \times \bar{Y}$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Es folgt : $X \times Y = \bar{X} \times \bar{Y} \setminus (A \times \bar{Y} \cup \bar{X} \times B)$ ist offen in $\bar{X} \times \bar{Y}$, wobei $A = \bar{X} \setminus X$, $B = \bar{Y} \setminus Y$. Also ist $X \times Y$ quasiprojektiv.

b) $p_\nu (\nu = 1,2)$ ist regulär, weil $p_\nu | X \times Y \cap (U_i \times V_j)\ \forall i,j$ regulär ist.

c) Ist Z quasiprojektiv, und sind $q_1 : Z \longrightarrow X$, $q_2 : Z \longrightarrow Y$ regulär, so ist $q = (q_1, q_2) : Z \longrightarrow X \times Y$ die einzige Abbildung mit $p_\nu \circ q = q_\nu$.
Wir müssen zeigen, daß q regulär ist. Da $(U_i \times V_j)$ offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist, und $q^{-1}((X \times Y) \cap (U_i \times V_j)) = q_1^{-1}(X \cap U_i) \cap q_2^{-1}(Y \cap V_j)$ offen in Z ist, können wir Œ annehmen, daß $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ gilt; also nach Satz 5.7 $q_1 = (f_1, \ldots, f_n)$ mit $f_i \in \mathcal{O}(Z)$, $q_2 = (g_1, \ldots, g_m)$ mit $g_i \in \mathcal{O}(Z)$. Dann ist $q = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$, also regulär. $\square$

Beispiel 5.20
$\Sigma_{1,1} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} w_0 & w_1 \\ w_2 & w_3 \end{smallmatrix} \right] \mid w_0 w_3 - w_1 w_2 = 0 \right\}$ ist nichtsinguläre Quadrik in $\mathbb{P}^3$. $\Sigma_{1,1} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (Regelfläche). Die rationale Normkurve $C = \left\{ [w_0 : w_1 : w_2 : w_3] \mid \operatorname{rg} \left(\begin{smallmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix} \right) = 1 \right\}$ liegt in $\Sigma_{1,1}$, weil $w_0 w_3 - w_1 w_2$ ein 2-Minor von $\left(\begin{smallmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix} \right)$ ist. $\sigma^{-1}(C) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ muß sich durch bihomogene Polynome beschreiben lassen. Diese Polynome erhält man mit
$\sigma^*(w_0) = Z_0 T_0,\ \sigma^*(w_1) = Z_0 T_1,\ \sigma^*(w_2) = Z_1 T_0,\ \sigma^*(w_3) = Z_1 T_1$:

$$\sigma^* \left(\begin{vmatrix} w_0 & w_1 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} Z_0 T_0 & Z_0 T_1 \\ Z_0 T_1 & Z_1 T_0 \end{vmatrix} = Z_0 \begin{vmatrix} T_0 & Z_0 T_1 \\ T_1 & Z_1 T_0 \end{vmatrix} = Z_0 F,$$

$$\sigma^* \left(\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} Z_0 T_1 & Z_1 T_0 \\ Z_1 T_0 & Z_1 T_1 \end{vmatrix} = Z_1 \begin{vmatrix} Z_0 T_1 & T_0 \\ Z_1 T_0 & T_1 \end{vmatrix} = -Z_1 F,$$

wobei $F = Z_1 T_0^2 - Z_0 T_1^2$ bihomogen vom Bigrad $(1,2)$ in $K[Z_0, Z_1, T_0, T_1]$ ist. Es folgt

$$C \cong \sigma^{-1}(C) = \mathbb{V}(Z_0 F, Z_1 F) = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

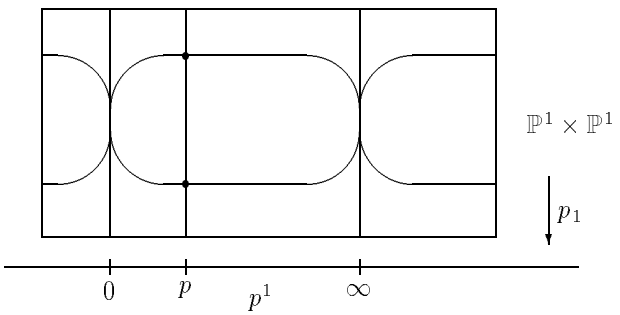
Für $q = [t_0 : t_1] \in \mathbb{P}^1$ ist

$$p_2^{-1}(q) \cap C = \{ [Z_0 : Z_1] \mid Z_1 t_0^2 = Z_0 t_1^2 \} = \{ [t_1^2 : t_0^2] \}$$

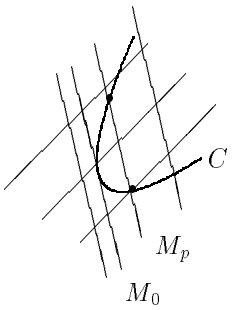
ein Punkt. Für $p = [Z_0 : Z_1] \in \mathbb{P}^1$ ist (falls $Z_0 = \lambda^2$, $Z_1 = \mu^2$)

$$p_1^{-1}(p) \cap C = \{ [t_0 : t_1] \mid 0 = (\mu T_0 + \lambda T_1)(\mu T_0 - \lambda T_1) \} = \{ [\lambda : \mu], [\lambda : -\mu] \}.$$

Also $\#(p_1^{-1}(p) \cap C) = 2 \Leftrightarrow [Z_0 : Z_1] \notin \{ [0:1], [1:0] \}$.



$p_1 | C : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ist „zweiblättrige Überlagerung“ mit Verzweigungspunkten 0 und ∞.



$\sigma(p \times \mathbb{P}^1) = M_p$

$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$. Für alle $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ ist M_p Sekante von C, und M_0, M_∞ sind Tangenten von C in den Punkten $\sigma([1:0]) = [1:0:0:0]$ bzw. $\sigma([0:1]) = [0:0:0:1]$.

Übungen

0) Es sei $X = \{[\alpha:\beta:\gamma] \in \mathbb{P}^2 \mid \gamma \neq 0,\ (\alpha\beta)^2 \neq \gamma^4\}$.

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^4, \quad \varphi([\alpha:\beta:\gamma]) := [\beta^2 : \beta\gamma : \gamma^2 : \alpha\gamma : \alpha^2]$$

ist regulär; $Y = \mathrm{Graph}(\varphi) = \{(p, \varphi(p)) \mid p \in \mathbb{P}^2\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$.
$\psi = id_{\mathbb{P}^2} \times \nu_4 : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$ ist regulär, und das Bild ist $\mathbb{P}^2 \times C_4$, wobei C_4 die Standardnormkurve in $\mathbb{P}^4$ ist. Es gilt

$$\psi(X \times \mathbb{P}^1) \subset (X \times \mathbb{P}^4) \setminus Y \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4.$$

Weiter sei für $(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3$

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Ist $[\alpha:\beta:\gamma] \in X$, so ist $\operatorname{rg} A(\alpha,\beta,\gamma) = 4$ und $\ker A(\alpha,\beta,\gamma) = K(\beta^2, \beta\gamma, \gamma^2, \alpha\gamma, \alpha^2)$. Es wird eine reguläre Abbildung

$$\Phi : (X \times \mathbb{P}^4) \setminus Y \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

definiert durch

$$\Phi([\alpha:\beta:\gamma],[u]) = \left[A(\alpha,\beta,\gamma) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}\right].$$

Wir interessieren uns für die Komposition

$$\Psi := \Phi \circ \psi : X \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Es gilt $\Psi(X \times \mathbb{P}^1) \subset \Sigma_{1,1}$. Für $a \in X$ ist $\Psi_a : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma_{1,1}$ die rationale Kurve
$\Psi_a([t_0:t_1]) = [F_0(t_0,t_1) : \ldots : F_3(t_0,t_1)] = [w_0 : \ldots : w_3]$ mit

$$\begin{aligned} F_0 &= \gamma T_0^4 - \beta T_0^3 T_1, \\ F_1 &= \gamma T_0^3 T_1 - \beta T_0^2 T_1^2, \\ F_2 &= \alpha T_0^2 T_1^2 - \gamma T_0 T_1^3, \\ F_3 &= \alpha T_0 T_1^3 - \gamma T_1^4. \end{aligned}$$

wobei $a = [\alpha : \beta : \gamma]$ ist. (Die Polynome $F_0, \ldots, F_3$ kann man als bihomogene Polynome in $K[\alpha, \beta, \gamma, T_0, T_1]$ vom Bigrad $(1,4)$ auffassen.)
Die Kurve $C_a = \Psi_a(\mathbb{P}^1) \subset \Sigma_{1,1}$ ist das Nullstellengebilde eines bihomogenen Polynoms $F_a \in K[x_0, x_1, y_0, y_1]$ vom Bigrad $(1,3)$, wobei $\sigma^*(w_0) = x_0y_0$, $\sigma^*(w_1) = x_0y_1$, $\sigma^*(w_2) = x_1y_0$, $\sigma^*(w_3) = x_1y_1$. Dazu macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} X_0Y_0 &= (\gamma T_0 - \beta T_1)T_0^3, \\ X_0Y_1 &= (\gamma T_0 - \beta T_1)T_0^2T_1, \\ X_1Y_0 &= (\alpha T_0 - \gamma T_1)T_0T_1^2, \\ X_1Y_1 &= (\alpha T_0 - \gamma T_1)T_1^3. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{X_0Y_1}{X_0Y_0} = \frac{T_1}{T_0} \quad \text{und}$$

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1Y_0}{X_0Y_0} = \frac{\alpha T_0 - \gamma T_1}{\gamma T_0 - \beta T_1} \cdot \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 = \left[(\alpha - \gamma\tfrac{Y_1}{Y_0}) \Big/ (\gamma - \beta\tfrac{Y_1}{Y_0})\right] \cdot \left(\frac{Y_1}{Y_0}\right)^2.$$

Also

$$\left(\gamma - \beta\frac{Y_1}{Y_0}\right)\frac{X_1}{X_0} = \left(\alpha - \gamma\frac{Y_1}{Y_0}\right)\left(\frac{Y_1}{Y_0}\right)^2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $X_0Y_0^3$, so erhält man die bihomogene Gleichung

$$F_a = (\gamma Y_0 - \beta Y_1)Y_0^2X_1 - (\alpha Y_0 - \gamma Y_1)Y_1^2X_0$$

vom Bigrad $(1,3)$. Es gilt $\sigma^{-1}(C_a) = \mathbb{V}(F_a) = \mathbb{V}(X_0^2F_a, X_1^2F_a)$ und

$$X_0^2F_a = (\gamma w_2 - \beta w_3)w_0^2 - (\alpha w_0 - \gamma w_1)w_1^2 =: G_a,$$

$$X_1^2F_a = (\gamma w_2 - \beta w_3)w_2^2 - (\alpha w_0 - \gamma w_1)w_3^2 =: H_a.$$

Es folgt: In $\mathbb{P}^3$ wird C_a von den beiden kubischen Flächen $\mathbb{V}(G_a), \mathbb{V}(H_a)$ und der Segrefläche $\Sigma_{1,1} = \mathbb{V}(w_0w_3 - w_1w_2)$ ausgeschnitten.
Berechne die Singularitäten der Kurve $C_a' = \sigma^{-1}(C_a) \cap \mathbb{A}^2$, wobei $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit $(x,y) \longmapsto ([1:x],[1:y])$. C_a' hat die Gleichung $f_a(x,y) = (\gamma - \beta y)x - (\alpha - \gamma y)y^2$. Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}(f_a) &= \mathbb{V}\left(f_a, \frac{\partial f_a}{\partial x}, \frac{\partial f_a}{\partial y}\right) \\ &= \mathbb{V}\left((\alpha - \gamma y)y^2, \gamma - \beta y, \frac{\partial f_a}{\partial y}\right) \\ &\overset{(y \neq 0)}{=} \mathbb{V}\left(\alpha - \gamma y, \gamma - \beta y, \frac{\partial f_a}{\partial y}\right) = \emptyset, \end{aligned}$$

weil: $y = \frac{\alpha}{\gamma} \Rightarrow \gamma - \frac{\beta\alpha}{\gamma} \neq 0$ nach der Voraussetzung am Anfang! Durch Betrachtung der anderen affinen Ebenen $\{x_1 = 1, y_0 = 1\}$, $\{x_1 = 1, y_1 = 1\}$ und $\{x_0 = 1, y_1 = 1\}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ sieht man, daß C_a für alle $a \in X$ eine nichtsinguläre Kurve in $\Sigma_{1,1}$ ist. Nach Konstruktion ist C_a das Bild der Standardnormkurve $C_4 \subset \mathbb{P}^4$ unter der surjektiven regulären Abbildung

$$\Phi_a : \mathbb{P}^4 \setminus \{[\beta^2 : \beta\gamma : \gamma^2 : \alpha\gamma : \alpha^2]\} \longrightarrow \mathbb{P}^3,$$

$$\Phi_a([u]) = [A(\alpha, \beta, \gamma)u].$$

Schwieriger ist die Frage, ob die Kurven C_a zueinander projektiv äquivalent sind (in $\mathbb{P}^3$). (NEIN!)

1) Seien L, M, $N \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ k-dimensionale lineare Teilräume mit $L \cap M = L \cap N = M \cap N = \emptyset$. Dann gibt es eine Projektivität $\varphi : \mathbb{P}^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{P}^{2k+1}$, so daß $L, M, N \subset \varphi(\Sigma_{k,1})$.

2) Es gibt 3-dimensionale lineare Teilräume $M \subset \mathbb{P}^5$, so daß $C = M \cap \Sigma_{2,1}$ eine rationale Normkurve in M ist.

3) Welche Geraden $L \subset \mathbb{P}^5$ liegen in der Segrevarietät $\Sigma_{2,1}$?

4) Untersuche das Bild der Komposition

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\Delta} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}, \quad \text{wobei } \Delta(p) := (p,p).$$

Zeige: $\Delta(\mathbb{P}^n)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.
Zeige weiter: Ist X quasiprojektiv, so ist die Diagonale $\Delta(X) \subset X \times X$ abgeschlossen in $X \times X$.

5) Die Topologie auf $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ $(n > 0)$ ist nicht die Produkttopologie!

6) Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ reguläre Abbildung. Dann ist der $\mathrm{Graph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times \mathbb{P}^m$.

7) Seien X, Y, B quasiprojektive Varietäten und $f : X \longrightarrow B$, $g : Y \longrightarrow B$ Morphismen. Dann ist $X \underset{B}{\times} Y := \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ abgeschlossen in $X \times Y$.
Seien $p_1 : X \underset{B}{\times} Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \underset{B}{\times} Y \longrightarrow y$ die Projektionen.
Dann gilt: $f \circ p_1 = g \circ p_2$ und $X \underset{B}{\times} Y \longrightarrow (X, p_1, p_2)$ besitzt die folgende universelle Eigenschaft:
$\forall (Z, q_1, q_2)$, wobei Z quasiprojektiv, $q_1 : Z \longrightarrow X$, $q_2 : Z \longrightarrow Y$ regulär mit $f \circ q_1 = g \circ q_2$, $\exists!$ reguläre Abbildung $q : Z \longrightarrow X \underset{B}{\times} Y$ mit $p_i \circ q = q_i$ für $i = 1, 2$. $X \underset{B}{\times} Y$ heißt das *Faserprodukt* von X und Y über B.

Beispiel: Ist $f : X \longrightarrow B$ regulär und $i : \{b\} \longrightarrow B$ die Inklusion eines Punktes, so ist $f^{-1}(b) = X \underset{B}{\times} \{b\}$ die *Faser* von f über b.

8) Welche Flächen sind zueinander isomorph:
$\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^2$, $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2 \setminus \{[0:0:1]\}$, $\Sigma_{1,1}$, die Veronesefläche $\nu_2(\mathbb{P}^2)$?

9) Jede quasiprojektive Varietät besitzt eine offene Überdeckung aus affinen Varietäten.

10) $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist nicht affin.

6 Projektionen und Eliminationstheorie

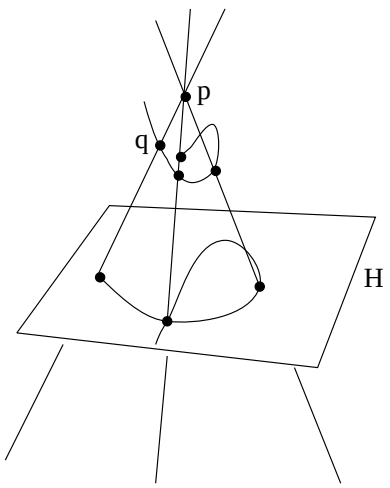
K sei algebraisch abgeschlossener Grundkörper.

Definition + Lemma 6.1 Für $p \in \mathbb{P}^n$ und eine Hyperfläche $H \subset \mathbb{P}^n$ mit $p \notin H$ definieren wir die *Projektion von* $\mathbb{P}^n$ *auf* H *mit Zentrum* p als die Abbildung

$$\pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow H \quad \text{mit } \pi_p(q) := \overline{pq} \cap H.$$

Dann gilt: Die Abbildung π_p ist regulär. Wählt man homogene Koordinaten $x_0, \ldots, x_n$ in $\mathbb{P}^n$, so daß $p = [0 : \ldots : 0 : 1]$ und $H = \mathbb{V}(x_n)$, so gilt

$$\pi_p([x_0 : \ldots : x_n]) \;=\; [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0].$$



Beweis: Es seien Koordinaten $x_0, \ldots, x_n$ so gewählt, daß $p = [0 : \ldots : 0 : 1]$, $H = \mathbb{V}(x_n)$. Für $q = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ ist $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$ und $\overline{pq} = \mathbb{P}(\mathrm{Span}\,((x_0, \ldots, x_n), (0, \ldots, 0, 1)))$. Da $\mathrm{Span}((x_0, \ldots, x_n), (0, \ldots, 0, 1)) \cap (K^n \times \{0\}) = K(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0)$, folgt $\pi_p(q) = [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0]$. $\square$

Wir beweisen den fundamentalen

Satz 6.2 Es sei $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow H$ die Projektion von $\mathbb{P}^n$ auf H mit Zentrum p, wobei $p \in \mathbb{P}^n$ ein Punkt und $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene mit $p \notin H$ ist. Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und $p \notin X$, so ist $\pi(X) \subset H$ abgeschlossen.

Beweis: Œ sei $p = [0 : \ldots : 0 : 1]$ und $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ die Abbildung

$$\pi([z_0 : \ldots : z_n]) \;=\; [z_0 : \ldots : z_{n-1}].$$

Sei nun $X \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossen mit $p \notin X$, und $I(X) \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ sei das homogene Ideal von X.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 6.3 Sind $p = q_0, q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{P}^n \setminus X$ colinear, so gibt es ein homogenes Polynom $F \in I(X)$ mit $F(q_i) \neq 0$ für $i = 0, \ldots, s$.

Beweis: Zunächst sei $G_i \in I(X)$ homogen mit $G_i(q_i) \neq 0,\ i = 0, \ldots, s$.
Es sei $q_i = [\lambda_i x' : \mu_i]$, wobei $x' \in K^n \setminus \{0\}$. $[\lambda_i : \mu_i] \in \mathbb{P}^1$ für $i = 0, \ldots, s,\ [\lambda_0 : \mu_0] = [0 : 1]$.
Sei etwa $x'_{i_0} \neq 0$. Dann ist

$$F_i \ := \ G_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{s} \left(\lambda_j x'_{i_0} Z_n - \mu_j Z_{i_0}\right) \ \in \ I(X)$$

und

$$\begin{aligned} F_i(q_k) &= G_i(q_k) \cdot 0 \ = \ 0 \quad \text{falls } k \neq i, \\ F_i(q_i) &= G_i(q_i) \cdot \prod_{j \neq i} \left(\lambda_j x'_{i_0} \mu_i - \mu_j \lambda_i x'_{i_0}\right) \ \neq \ 0, \end{aligned}$$

weil die Punkte $q_0, \ldots, q_s$ paarweise verschieden sein sollen. F_i ist homogen; sei $d_i = \deg(F_i)$ und $d \geq \max\{d_i \mid i = 0, \ldots, s\}$.
Sei $L \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad 1 mit $L(q_i) \neq 0$ für alle $i = 0, \ldots, s$. Dann ist

$$F \ := \ \sum_{i=0}^{s} L^{d-d_i} F_i \ \in I(X)$$

homogen vom Grad d und

$$\begin{aligned} F(q_j) &= \sum_{i=0}^{s} L^{d-d_j}(q_j) F_i(q_j) \\ &= L^{d-d_j}(q_j) F_j(q_j) \ \neq \ 0 \end{aligned}$$

für alle $j = 0, \ldots, s$. $\square$

Jetzt zeigen wir die

Behauptung: Für $x' \in K^n \setminus \{0\}$ gilt $[x'] \in \pi(X) \iff$
$\forall\, F, G \in I(X),\ F, G$ homogen mit $F(p) \neq 0,\ G(p) \neq 0 \quad \exists\, x \in K$, so daß

$$F(x', x) \ = \ G(x', x) \ = \ 0.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $[x'] \in \pi(X)$. Dann existiert ein $x \in K$, so daß $[x' : x] \in X$, also sogar $F(x', x) = 0$ für alle $F \in I(X)$.

„$\Leftarrow$“ Sei $[x'] \notin \pi(X)$. Wir zeigen, daß dann gilt:
$\exists\, F, G \in I(X),\ F, G$ homogen mit $F(p) \neq 0,\ G(p) \neq 0$, so daß die Polynome

$$F(x', z), G(x', z) \ \in K[z]$$

keine gemeinsame Nullstelle in K haben. Sei $F \in I(X)$ und $F(p) \neq 0$.
Dann ist $\tilde{F}(\lambda, \mu) := F(\lambda x', \mu) \in K[\lambda, \mu]$ homogen mit $\tilde{F}(0, 1) = F(p) \neq 0$.
Also hat F nur endlich viele Nullstellen $q_1, \ldots, q_s$ auf der Geraden $L = \overline{[x' : 0]p}$.
Zu $q_0 = p,\ q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{P}^n \setminus X$ wähle man gemäß Lemma 6.3 ein $G \in I(X)$ homogen mit $G(q_i) \neq 0$ für $i = 0, \ldots, s$. Dann gilt $G(p) \neq 0$ und $F(x', z), G(x', z) \in K[z]$ haben keine gemeinsame Nullstelle $z \in K$. $\square$

Wir bemerken weiter: Die Bedingung $F(p) \neq 0$ für ein homogenes Polynom $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ vom Grad d bedeutet $F_n \neq 0$, wobei

$$F \;=\; \sum_{\nu=0}^{d} F_\nu(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) Z_n^\nu$$

mit F_ν homogen vom Grad $d-\nu$ in $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$. Es gilt also

$$F(p) \neq 0 \iff \deg_{Z_n}(F) = \deg(F).$$

Wir zeigen jetzt, daß zu homogenen Polynomen $F, G \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ mit $\deg_{Z_n}(F) = \deg(F)$ und $\deg_{Z_n}(G) = \deg(G)$ ein homogenes Polynom

$$R \;=\; R(F,G) \;\in\; K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}]$$

existiert, so daß für alle $x' \in K^n \setminus \{0\}$ gilt

$$R(x') = 0 \iff \exists\, x \in K :\; F(x', x) = G(x', x) = 0.$$

Haben wir dies erreicht, so sind wir fertig, denn es gilt dann

$$\pi(X) \;=\; \mathbb{V}\left(\{R(F,G) \mid F, G \in I(X) \text{ homogen mit } F(p) \neq 0,\, G(p) \neq 0\}\right).$$

Wir kommen nun zur Konstruktion von $R(F,G)$.

Zunächst betrachten wir beliebige Polynome

$$f = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu, \quad g = \sum_{\mu=0}^{e} b_\mu z^\mu$$

in einer Unbestimmten z mit $a_d \neq 0,\ b_e \neq 0$. Es gilt nun (K ist algebraisch abgeschlossen!):

f und g haben eine gemeinsame Nullstelle

$\iff \exists\, a \in K,\ \tilde{f}, \tilde{g} \in K[z],$ so daß $f = (z-a)\tilde{f},\ g = (z-a)\tilde{g}$

$\iff \exists\, \tilde{f}, \tilde{g} \in K[z] \setminus \{0\}$ mit $\deg(\tilde{f}) < d,\ \deg(\tilde{g}) < e$ und $\tilde{g}f + \tilde{f}g = 0$

(„$\Rightarrow$“ ist klar; „$\Leftarrow$“ Aus $\tilde{g}f + \tilde{f}g = 0$ folgt, daß alle Linearfaktoren $(z-a)$ von f auch Linearfaktoren von $\tilde{f}g$ sein müssen, wegen $\deg(\tilde{f}) < d$ also wenigstens einer g teilen muß.)

$\iff$ Das homogene Gleichungs-System

$$\sum_{\substack{0 \leq \mu \leq d \\ 0 \leq \nu \leq e \\ \nu + \mu = k}} a_\mu x_\nu \;+\; \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq e \\ 0 \leq \nu \leq d \\ \nu + \mu = k}} b_\mu x_{\nu+e} \;=\; 0, \quad k = 0, \ldots, d+e-1$$

hat eine nichttriviale Lösung $(x_0, \ldots, x_{d+e-1})$.

(Man setze $\tilde{g} = \sum_{\nu=0}^{e-1} x_\nu z^\nu$, $\tilde{f} = \sum_{\nu=0}^{d-1} x_{e+\nu} z^\nu$!)

$\iff$ Die Determinante der $(d+e)$-reihigen quadratischen Matrix

$$A(f,g) := \left(\begin{array}{cccccc} a_0 & \cdots & a_d & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & a_0 & \cdots & a_d & \\ b_0 & \cdots & b_e & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & b_0 & \cdots & b_e & \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} e \text{ Zeilen} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} d \text{ Zeilen} \end{array}$$

verschwindet.

Definition 6.4 $R(f,g) := \det A(f,g) \in K$ heißt die *Resultante* von f und g.

Wir haben also

Lemma 6.5 Sind $f, g \in K[z] \setminus \{0\}$, so gilt
f und g besitzen eine gemeinsame Nullstelle in $K \iff R(f,g) = 0$.

Jetzt definieren wir allgemein:

Definition 6.6 Seien $F, G \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ Polynome vom Grad d bzw. e bzgl. Z_n, und es sei

$$F = \sum_{\nu=0}^{d} F_\nu Z_n^\nu, \quad F_\nu \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}], \quad F_d \neq 0,$$

$$G = \sum_{\nu=0}^{e} G_\nu Z_n^\nu, \quad G_\nu \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}], \quad G_e \neq 0.$$

$$R(F,G) := \det \left(\begin{array}{cccccc} F_0 & \cdots & F_d & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & F_0 & \cdots & F_d & \\ G_0 & \cdots & G_e & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & G_0 & \cdots & G_e & \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} e \text{ Zeilen} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} d \text{ Zeilen} \end{array} \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}]$$

(Polynom vom Grad $\leq de$ in $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$) heißt die *Resultante* von F und G (bzgl. Z_n).

Sind F und G homogen vom Grad d bzw. e, also $F_d, G_e \in K \setminus \{0\}$, so ist $R(F,G)$ homogen vom Grad de (Übung) und für alle $x' \in K^n \setminus \{0\}$ $R(F,G)(x') \in K$ die Resultante der Polynome $F(x',z)$, $G(x',z) \in K[z]$, und nach Lemma 6.5 haben wir unser Ziel erreicht:

$\pi(X)$ ist das simultane Nullstellengebilde aller Resultanten $R(F,G) \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}]$, die zu homogenen Polynomen $F, G \in I(X)$ vom Grad d bzw. e mit einer Entwicklung

$$F = \sum_{\nu=0}^{d} F_\nu Z_n^\nu, \quad F_\nu \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}], \quad F_d \neq 0,$$

$$G = \sum_{\nu=0}^{e} G_\nu Z_n^\nu, \quad G_\nu \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}], \quad G_e \neq 0,$$

gehören. Damit ist Satz 6.2 bewiesen. $\square$

Beispiel 6.7
Es sei bemerkt, daß die Beschreibung von $\pi(X)$ mit Hilfe von Resultanten nicht immer glücklich ist. Als Beispiel betrachten wir etwa die rationale Normkurve

$$C \subset \mathbb{P}^3, \quad C = \mathbb{V}\left(\begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_0 & Z_2 \\ Z_1 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \right),$$

und $p = [0:1:0:0] \notin C$, weil $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.
Wir betrachten nun $\pi : \mathbb{P}^3 \backslash \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $\pi([Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]) = [Z_0 : Z_2 : Z_3]$. Die ausgezeichnete Variable ist hier also Z_1.

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Z_1^2 + Z_0 Z_2, & Q_1(p) &\neq 0, \\ Q_2 &= -Z_2 Z_1 + Z_0 Z_3, & Q_2(p) &= 0, \\ Q_3 &= Z_3 Z_1 - Z_2^2, & Q_3(p) &= 0. \end{aligned}$$

Wir ändern das Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned} F &= Z_1^2 - Z_0 Z_2, \\ G &= Q_2 - Q_1 = Z_1^2 - Z_2 Z_1 + Z_0(Z_3 - Z_2), \\ H &= Q_3 - Q_1 = Z_1^2 + Z_3 Z_1 - Z_2(Z_0 + Z_2). \end{aligned}$$

Es gilt $F, G, H \in I(C)$ und $F(p) \neq 0$, $G(p) \neq 0$, $H(p) \neq 0$. Resultanten werden bzgl. Z_1 gebildet:

$$\begin{aligned} R(F,G) &= \begin{vmatrix} -Z_0 Z_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_0 Z_2 & 0 & 1 \\ Z_0(Z_3 - Z_2) & -Z_2 & 1 & 0 \\ 0 & Z_0(Z_3 - Z_2) & -Z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= Z_0 \begin{vmatrix} -Z_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_0 Z_2 & 0 & 1 \\ Z_3 - Z_2 & -Z_2 & 1 & 0 \\ 0 & Z_0(Z_3 - Z_2) & -Z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= Z_0 \begin{vmatrix} -Z_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_0 Z_2 & 0 & 1 \\ Z_3 & -Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0(Z_3 - Z_2) & -Z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= Z_0 \left(-Z_2^3 + \begin{vmatrix} 0 & -Z_0 Z_2 & 1 \\ Z_3 & -Z_2 & 0 \\ 0 & Z_0(Z_3 - Z_2) & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= Z_0 \left(-Z_2^3 + Z_3(Z_0 Z_2 + Z_0(Z_3 - Z_2)) \right) \\ &= Z_0 \left(Z_0 Z_3^2 - Z_2^3 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(F,H) &= \begin{vmatrix} -Z_0 Z_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_0 Z_2 & 0 & 1 \\ -Z_2(Z_0 + Z_2) & Z_3 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_2(Z_0 + Z_2) & Z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -Z_2 \begin{vmatrix} Z_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_0 Z_2 & 0 & 1 \\ Z_0 + Z_2 & Z_3 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_2(Z_0 + Z_2) & Z_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -Z_2 \begin{vmatrix} Z_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Z_0Z_2 & 0 & 1 \\ Z_2 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_2(Z_0+Z_2) & Z_3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -Z_2(Z_0Z_3^2 - Z_2^3).
\end{aligned}
$$

Hieraus sieht man, daß

$$
\begin{aligned}
\pi(C) &\subset \mathbb{V}\left(Z_0(Z_0Z_3^2 - Z_2^3),\, Z_2(Z_0Z_3^2 - Z_2^3)\right) \\
&= \underbrace{\mathbb{V}(Z_0, Z_2)}_{\substack{\text{ein Punkt} \\ [Z_0:Z_2:Z_3]=[0:0:1]}} \cup \underbrace{\mathbb{V}(Z_0Z_3^2 - Z_2^3)}_{\text{Neilsche Parabel}} \\
&= \mathbb{V}\left(Z_0Z_3^2 - Z_2^3\right).
\end{aligned}
$$

Es gilt sogar

$$\pi(C) \;=\; \mathbb{V}(Z_0Z_3^2 - Z_2^3),$$

denn ist $Z_0Z_3^2 = Z_2^3$ und $Z_2 \neq 0$, so setze $Z_1 := \frac{Z_0Z_3}{Z_2}$. Dann ist

$$Z_0Z_2 - Z_1^2 \;=\; Z_0Z_2 - \frac{Z_0^2Z_3^2}{Z_2^2} \;=\; Z_2^{-2}(Z_0Z_2^3 - Z_0^2Z_3^2) \;=\; 0,$$

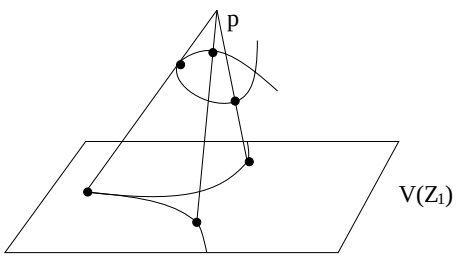
$$Z_0Z_3 - Z_1Z_2 \;=\; 0 \quad \text{und} \quad Z_1Z_3 - Z_2^2 \;=\; Z_2^{-1}(Z_0Z_3^2 - Z_2^3) \;=\; 0,$$

also $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \in C$, d.h. $[Z_0 : Z_2 : Z_3] \in \pi(C)$.
Ist $Z_2 = 0$, so ist $Z_0 = 0$ oder $Z_3 = 0$, also $[Z_0 : Z_2 : Z_3] = \pi([1:0:0:0])$ oder $= \pi([0:0:0:1])$.

Man kann auch ohne Resultanten aus den Gleichungen Q_1, Q_2, Q_3 die Variable Z_1 eliminieren:

$$
\begin{aligned}
F &= Z_3Q_2 + Z_2Q_3 \;=\; Z_0Z_3^2 - Z_2^3 \;\in\; I(C); \\
\mathbb{V}(F) &= \bigcup_{Z_0Z_3^2 - Z_2^3 = 0} \overline{[Z_0 : 0 : Z_2 : Z_3], [0:1:0:0]}
\end{aligned}
$$

ist also ein Kegel über der Kurve $\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(Z_1) \subset \mathbb{V}(Z_1)$ mit Spitze $p = [0:1:0:0]$.
Es folgt $\pi(C) \subset \mathbb{V}(F, Z_1)$ und wie oben sogar Gleichheit. Das war einfacher!



Übungen

1) Es sei $C \subset \mathbb{P}^3$ die rationale Normkurve, $H = \mathbb{V}(L)$ die Ebene mit der Gleichung $L = a_0Z_0 + \cdots + a_3Z_3$ und $p = [b_0 : \ldots : b_3]$ mit $L(p) \neq 0$. $\pi_{p,H} : \mathbb{P}^3 \setminus \{p\} \longrightarrow H$ sei die Projektion auf H mit Projektionszentrum p.
Untersuche $\pi_{p,H}(C) \subset H$ für $p \notin C$ und den Abschluß $\overline{\pi_{p,H}(C \setminus p)} \subset H$ für $p \in C$.

2) Seien $H, H' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ Hyperebenen, $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow H$, $\psi : \mathbb{P}^n \longrightarrow H'$ lineare Isomorphismen und $p \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus (H \cup H')$. $\pi : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p\} \longrightarrow H$, $\pi' : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p\} \longrightarrow H'$ seien die Projektionen auf H bzw. H'. Zeige: $\pi(H') = H$, und es gibt eine Matrix $A \in GL_{n+1}(K)$, so daß

$$\begin{array}{ccc} H' & \xrightarrow{\pi|H'} & H \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow[[A]]{} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

kommutiert (d.h. $(\pi|H') \circ \psi = \varphi \circ [A]$). Man kann A in der Gestalt

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

wählen. Ist $n \geq 2$, so ist nicht jede Projektivität $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ durch eine Projektion $\pi : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p\} \longrightarrow H$ induziert.

3) Es sei $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Dabei sei $i : U \longrightarrow V$ eine Inklusionsabbildung ($U \subset V$ Untervektorraum). Dann induziert π eine reguläre Abbildung

$$[\pi] : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

mit $[\pi]([v]) := [\pi(v)]$. Ist auch $W \subset V$, also $V = U \oplus W$, und ist $\pi(u + w) := w$ für $u \in U$, $w \in W$, so gilt für $q \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(U)$

$$[\pi]([q]) \;=\; \underbrace{\overline{\mathbb{P}(U)q}}_{\substack{\text{von } \mathbb{P}(U) \text{und } q \\ \text{aufgesp. lin. Unterr.}}} \;\cap\; \mathbb{P}(W).$$

Beispiel 6.8
Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät und $p \in \mathbb{P}^n \setminus X$. Dann heißt

$$\overline{X, p} \;:=\; \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

der *Kegel* über X mit Spitze p.

Es sei weiter $H \subset \mathbb{P}^n$ Hyperebene mit $p \notin H$. Dann ist natürlich

$$\mathbb{P}^n \;=\; \overline{H, p}$$

und für das Bild $\pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow H$ gilt

(i) $\pi_p(X) = H \cap \overline{X, p}$ („Kegelschnitt“),

(ii) $\overline{X, p} = \overline{\pi_p(X), p}$.

Man sieht nun leicht, daß $\overline{X,p}$ projektive Untervarietät von $\mathbb{P}^n$ ist.
Beweis: Wegen (ii) können wir annehmen, daß $X \subset H$ ist (Satz 6.2). Weiter können wir homogene Koordinaten $z_0, \ldots, z_n$ wählen, so daß

$$H = \mathbb{V}(z_n), \quad p = [0 : \ldots : 0 : 1].$$

Dann ist $X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s) \cap H$ für geeignete homogene Polynome

$$F_i \in K[Z_0, \ldots, Z_{n-1}] \subset K[Z_0, \ldots, Z_n].$$

Das Nullstellengebilde in $\mathbb{P}^n$ ist

$$\{[x', z_n] \in \mathbb{P}^n \mid F_1(x'), \ldots, F_s(x') = 0\} \;=\; \pi_p^{-1}(X) \cup \{p\} \;=\; \overline{X,p}. \quad \square$$

Konkret betrachten wir die Quadriken in $\mathbb{P}^n$ (char $K \neq 2$). Da K algebraisch abgeschlossen ist, ist die einzige Invariante einer quadratischen Form

$$0 \neq q : K^{n+1} \longrightarrow K, \quad q(x) = x^t Q x, \quad (Q = Q^t)$$

ihr Rang r $(0 \leq r \leq n+1)$. Nach geeigneter Koordinatenwahl ist

$$Q \;=\; \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $q(z_0, \ldots, z_n) = z_0^2 + \cdots + z_{r-1}^2$, und somit ist für $r \geq 2$

$$\mathbb{V}(q) \;=\; \pi^{-1}(X_{r-1}) \cup \mathbb{V}(z_0, \ldots, z_{r-1})$$

mit der nichtentarteten Quadrik $X_{r-1} = \mathbb{V}(z_0^2, \ldots, z_{r-1}^2)$ in $\mathbb{P}^{r-1}$ und

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(z_0, \ldots, z_{r-1}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{r-1} = \mathbb{V}(z_r, \ldots, z_n), \\ \pi[z_0 : \ldots : z_n] & := & [z_0 : \ldots : z_{r-1}]. \end{array}$$

Fassen wir X_{r-1} als Teilmenge von $\mathbb{P}^n$ auf, so ist $\mathrm{Span}(X_{r-1}) = \mathbb{V}(z_r, \ldots, z_n) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ und $M := \mathbb{V}(z_0, \ldots, z_{r-1}) \cong \mathbb{P}^{n-r}$ mit $M \cap \mathrm{Span}(X_{r-1}) = \emptyset$ und

$$\mathbb{V}(q) \;=\; \overline{M\,X_{r-1}} \;=\; \bigcup_{q \in X_{r-1}} \overline{M_q}$$

Vereinigung der $(n-r+1)$-dimensionalen Ebenen $\overline{M_q}$, $q \in X_{r-1}$.

$r = 2$: X_1 besteht aus zwei verschiedenen Punkten $q_1, q_2 \in \mathbb{P}^1$.
$\mathbb{V}(q) = \overline{M_{q_1}} \cup \overline{M_{q_2}}$ ist die Vereinigung zweier Hyperebenen durch M.
$r = 3$: X_2 ist glatter Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$.
Ist $n = 3$, so ist $\mathbb{V}(q)$ Kegel über X_2 mit Spitze $M = \{[0:0:0:1]\}$.
$r = 4$: X_3 ist nichtentartete Quadrik in $\mathbb{P}^3$ und somit projektiväquivalent zur Segrefläche $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$!
$r = 1$: ist ein Sonderfall: Hier ist $q = z_0^2$, also $\mathbb{V}(q) = \mathbb{V}(z_0)$ eine Hyperebene, die man jedoch doppelt zählen sollte!

Wir modifizieren nun den Beweis von Satz 6.2 und erhalten:

Satz 6.9 Es sei $\pi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^n$ die Projektion $\pi(x,p) = x$. Dann gilt:
Ist $X \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1$ abgeschlossen, so ist $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ abgeschlossen.

Beweis: Ist $X \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1$ abgeschlossen, so gibt es homogene Polynome

$$F_1, \ldots, F_s \in K[x_1, \ldots, x_n][s,t]$$

in s,t, so daß $X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1$. Das Ideal $I(X) \subset K[x_1, \ldots, x_n, s, t]$ ist homogen bzgl. der Koordinaten s,t. Es gilt für $x \in \mathbb{A}^n$:
$x \in \pi(X) \iff \forall F, G \in I(X)$ homogen in $s,t \quad \exists\, [s:t] \in \mathbb{P}^1$, so daß $F(x,s,t) = G(x,s,t)$.
Ist nun $F = \sum_{\nu=0}^{d} F_\nu s^{d-\nu} t^\nu \in I(X)$ mit $F_\nu \in K[x_1, \ldots, x_n]$ und $G = \sum_{\nu=0}^{e} G_\nu s^{e-\nu} t^\nu \in I(X)$ mit $G_\nu \in K[x_1, \ldots, x_n]$, so definieren wir

$$R(F,G) := \det \begin{pmatrix} F_0 & \cdots & F_d & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & F_0 & \cdots & F_d \\ G_0 & \cdots & G_e & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & G_0 & \cdots & G_e \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} e \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} d \text{ Zeilen} \end{matrix} .$$

Dann gilt für $x \in \mathbb{A}^n$:

$$R(F,G)(x) = 0 \iff F(x,s,t), G(x,s,t) \in K[s,t] \text{ haben eine gemeinsame Nullstelle.}$$

Es folgt

$$\pi(X) = \mathbb{V}\left(\{ R(F,G) \mid F, G \in I(X) \text{ homogen in } s,t \}\right)$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^n$. $\square$

Übung
Zeige mit Hilfe von 6.3: Sind $a_0, \ldots, a_d,\ b_0, \ldots, b_e \in K$ *beliebig* und ist

$$F = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu s^{d-\nu} t^\nu,$$

$$G = \sum_{\nu=0}^{e} b_\nu s^{e-\nu} t^\nu,$$

so haben F und G eine gemeinsame *Nullstelle in* $\mathbb{P}^1$ genau dann, wenn die Resultante

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_d & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & a_d \\ b_0 & \cdots & b_e & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0 & \cdots & b_e \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} e \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} d \text{ Zeilen} \end{matrix} \quad \text{verschwindet.}$$

Bemerkung Ersetzt man in Satz 6.9 $\mathbb{P}^1$ durch $\mathbb{A}^1$, so ist der Satz falsch:
$X = \mathbb{V}(xy-1) \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ ist abgeschlossen, aber $\pi(X) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ nicht!

Allgemein gilt der fundamentale

Satz 6.10 Sei X projektive Varietät und Y quasiprojektive Varietät. $\pi : Y \times X \longrightarrow Y$ sei die Projektion $\pi(y,x) = y$.
Dann gilt: Ist $Z \subset Y \times X$ abgeschlossen, so ist $\pi(Z) \subset Y$ abgeschlossen.

Beweis: Œ sei $X = \mathbb{P}^n$. Ist Y beliebig, so ist $Y = \bigcup_{i=1}^{h} Y_i$ mit Y_i affin und offen in Y.
Ist $Z \subset Y \times \mathbb{P}^n$ abgeschlossen, so ist $Z \cap \pi^{-1}(Y_i) \subset Y_i \times \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und
$\pi(Z) \cap Y_i = \pi\left(Z \cap \pi^{-1}(Y_i)\right)$.
$\pi(Z)$ ist genau dann abgeschlossen in Y, wenn $\pi(Z) \cap Y_i$ in Y_i abgeschlossen ist für alle i.
Wir können also Œ Y als affin, ja sogar $Y = \mathbb{A}^m$ annehmen.
Wir untersuchen jetzt also die Projektion

$$\pi : \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m .$$

Induktion nach n:
Für $n = 1$ gilt der Satz nach Satz 6.9.

$(n-1) \longrightarrow n$:
Es sei $Z \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und $p \in \mathbb{P}^n$. Dann ist

$$\tilde{A} \;:=\; Z \cap \mathbb{A}^m \times \{p\} \;\subset\; \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$$

abgeschlossen und offensichtlich auch $A \;=\; \pi(\tilde{A}) \;\subset\; \mathbb{A}^m$, weil $\tilde{A} = A \times \{p\}$.
$U = \mathbb{A}^m \setminus A$ ist offen in $\mathbb{A}^m$, und es gilt:

$$Z_U \;=\; Z \cap (U \times \mathbb{P}^n)$$

ist abgeschlossen in $U \times \mathbb{P}^n$. Nach Konstruktion ist $Z_U \subset\; U \times (\mathbb{P}^n \setminus \{p\})$ und somit ist

$$Z'_U \;=\; (id \times \pi_p)(Z_U) \;\subset\; U \times \mathbb{P}^{n-1}$$

abgeschlossen, wobei $\pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ eine Projektion von $\mathbb{P}^n$ auf $\mathbb{P}^{n-1}$ mit Zentrum p ist (Satz 6.2 und Übung).

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\pi'(Z'_U)$ abgeschlossen in U, wobei $\pi' : U \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow U$ die Projektion bezeichnet. Da $\pi = \pi' \circ (id \times \pi_p)$, ist

$$\pi(Z_U) \;=\; \pi'(Z'_U);$$

folglich ist $\pi(Z) \setminus A = \pi(Z_U)$ abgeschlossen in $U = \mathbb{A}^m \setminus A$.
Also ist $\pi(Z)$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^m$. $\square$

Bemerkung Man kann auch umgekehrt zeigen:
Eine quasiprojektive Varietät X ist projektiv $\iff$
$\forall\, Y$ quasiprojektiv ist $\pi : Y \times X \longrightarrow Y$ abgeschlossene Abbildung (d.h. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

Weitere Folgerungen aus Satz 6.10 sind:

Corollar 6.11 Sei $\varphi : X \longrightarrow Y$ eine reguläre Abbildung. Ist X projektiv, so ist $\varphi(X)$ abgeschlossen in Y.

Beweis: $Z = \text{graph}(\varphi)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$ und $\varphi(X) = p_2(Z)$ ist abgeschlossen nach Satz 6.10. $\square$

Corollar 6.12 Ist X projektive Varietät, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{A}^m$ regulär, so ist $\varphi(X)$ endlich.

Beweis: Es sei $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$ mit $f_i : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ regulär. Dann ist $\varphi(X) \subset f_1(X) \times \cdots \times f_m(X)$, und es genügt den Fall $m = 1$ zu behandeln. Wir fassen $\mathbb{A}^1$ als offene Teilmenge von $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{V}(Z_0)$ in $\mathbb{P}^1$ auf. Nach Satz 6.10 ist $A = \varphi(X) \subset \mathbb{A}^1$ sogar abgeschlossen in $\mathbb{P}^1$, also ist $A \neq \mathbb{A}^1$ und somit endlich. $\square$

Corollar 6.13 Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Untervarietät und nicht endlich, so ist $X \cap Y \neq \emptyset$ für jede Hyperfläche $Y \subset \mathbb{P}^n$.

Beweis: Sei $Y = \mathbb{V}(F)$, F homogen vom Grad d in $Z_0, \ldots, Z_n$. Ist $X \cap \mathbb{V}(F) = \emptyset$, so ist

$$\varphi \;=\; \left(\frac{Z_0^d}{F}, \ldots, \frac{Z_n^d}{F}\right) : X \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$$

injektiv und regulär; nach Satz 6.10 ist also $\varphi(X)$ und somit auch X endlich. $\square$

Übungen

1) Ist U quasiprojektiv, $p \in \mathbb{P}^n$, $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ die Projektion, $Z \subset U \times \mathbb{P}^n$ abgeschlossen mit $Z \cap (U \times \{p\}) = \emptyset$, so ist $(id \times \pi)(Z) \subset U \times \mathbb{P}^{n-1}$ abgeschlossen, wobei $(id \times \pi)(u, q) := (u, \pi(q))$ für $u \in U$, $q \in \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$.
Œ sei $U = \mathbb{A}^m$, $p = [0 : \ldots : 0 : 1]$, also $(id \times \pi)(x, [z_0 : \ldots : z_n]) = (x, [z_0 : \ldots : z_{n-1}])$.
Verallgemeinere den Beweis zu Satz 6.2!

2) Es sei $p \in \mathbb{P}^n$, $H \subset \mathbb{P}^n$ Hyperebene, $p \notin H$, $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow H$ sei die Projektion auf H. Weiter sei

$$\Sigma \;:=\; \{(q, r) \in \mathbb{P}^n \times H \mid q, p, r \text{ sind colinear}\}.$$

   (a) Zeige : Σ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^n \times H$.
   Die Einschränkung $\varphi : \Sigma \longrightarrow H$ der Projektion $p_2 : \mathbb{P}^n \longrightarrow H$ ist ein „$\mathbb{P}^1$-Bündel“, d.h. $\varphi^{-1}(r) \cong \mathbb{P}^1 \; \forall\, r \in H$ und mehr noch:
   Ist $U = H \setminus M$ Komplement einer Hyperebene $M \subset H$, so $\exists\, \Phi : \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{P}^1$ Isomorphismus mit $p_1 \circ \Phi = \varphi$. Hieraus folgere man mit Satz 6.9:
   Ist $Z \subset \Sigma$ abgeschlossen, so ist $\varphi(Z) \subset H$ abgeschlossen.

   (b) Die Einschränkung $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^n$ der ersten Projektion $p_1 : \mathbb{P}^n \times H \longrightarrow \mathbb{P}^n$ bildet die affine Menge $\Sigma \setminus \{p\} \times H$ isomorph auf $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ ab. Die Diagonale Δ wird isomorph auf H abgebildet und $\{p\} \times H$ wird auf den Punkt $p \in \mathbb{P}^n$ abgebildet.
   Folgere: Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossen, so ist $\varphi(\psi^{-1}(X)) \subset H$ abgeschlossen.
   Ist $p \notin X$, so ist $\pi(X) = \varphi(\psi^{-1}(X))$. Dies ergibt einen neuen Beweis für Satz 6.2 mit Hilfe von Satz 6.9. Außerdem kann hiermit auch die Übung 1) auf Satz 6.9 zurückgeführt werden, indem man

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{P}^n & \xleftarrow{\mathrm{id}\times\psi} & U \times \Sigma \\ \cup & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\varphi} \\ U \times (\mathbb{P}^n \setminus \{p\}) & \xrightarrow[\mathrm{id}\times\pi]{} & U \times H \end{array}$$

   betrachtet!

7 Hilbertscher Nullstellensatz, irreduzible Varietäten

Es sei K algebraisch abgeschlossen und $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Es gibt dann ein Ideal $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$, so daß $X = \mathbb{V}(I)$.

Wie ist der Zusammenhang zwischen I und $I(X) = \{f \in K[z_1, \ldots, z_n] \mid f|X \equiv 0\}$? Trivialerweise gilt stets $I \subset I(X)$. Aber im allgemeinen ist $I \neq I(X)$. Dazu ein paar triviale Beispiele.

Beispiele

a) $I = \langle z^2 \rangle \subset K[z] \;\Rightarrow\; X = \mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^1$ besteht nur aus dem Punkt $p = 0$. Es folgt $I \subsetneqq I(X) = \{f \in K[z] \mid f(0) = 0\} = \langle z \rangle$.

b) $I = \langle z^2 + 1 \rangle \subset K[z] \;\Rightarrow\; X = \mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^1$ besteht aus zwei verschiedenen Nullstellen p_1, p_2 falls $\operatorname{char} K \neq 2$, und aus der Nullstelle $p = 1$ falls $\operatorname{char} K = 2$. Es folgt

$$I(X) = \begin{cases} I & \text{falls } \operatorname{char} K \neq 2 \\ \langle z + 1 \rangle & \text{falls } \operatorname{char} K = 2 \end{cases} .$$

Wir bemerken an diesem Beispiel:
Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $X = \emptyset$ und somit $I(X) = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}[z]$. Wir können nur dann eine Beziehung zwischen I und $I(\mathbb{V}(I))$ erwarten, wenn K algebraisch abgeschlossen ist.

Definition + Lemma 7.1 Ist R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal, so ist

$$\sqrt{I} \;:=\; \{f \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : f^n \in I\}$$

ein Ideal in R mit $I \subset \sqrt{I}$. $\sqrt{I}$ heißt das *Radikal* von I. Ein Ideal I heißt *reduziert* (oder *Radikalideal*), wenn $I = \sqrt{I}$ gilt.

$$\mathfrak{n}(R) \;:=\; \sqrt{\{0\}} \;=\; \{f \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : f^n = 0\}$$

heißt das *Nilradikal* von R. R heißt reduziert, wenn $\langle 0 \rangle$ reduziert ist, d.h. wenn 0 das einzige nilpotente Element in R ist.

Beweis:

1) $\mathfrak{n}(R)$ ist ein Ideal, denn: Ist $f^n = 0$ und $g^n = 0$, so ist $(f + g)^{n+m-1} = 0$ (binomische Formel!).

2) Sei $I \subset R$ Ideal, $\varphi : R \longrightarrow R/I$ die Quotientenabbildung. Dann ist $\sqrt{I} = \varphi^{-1}\left(\mathfrak{n}(R/I)\right)$. Also ist auch $\sqrt{I}$ ein Ideal. $\square$

Weiter gilt:

Übungen

a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

b) $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle \iff I = \langle 1 \rangle$.

c) Ist $\mathfrak{p}$ Primideal und $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $\mathfrak{p}^n$ das von allen n-fachen Produkten $f_1 \cdots f_n$ mit $f_i \in \mathfrak{p}$ erzeugte Ideal, so gilt $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$.

d) $I \subset R$ ist reduziertes Ideal $\iff$ R/I ist reduzierter Ring.

e) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, wobei $I, J \subset R$ Ideale und $I \cdot J = \langle \{fg \mid f \in I,\ g \in J\} \rangle$ das *Produktideal* von I und J sei.

f) $\mathfrak{n}(R/I) = \sqrt{I}/I$.

Es sei nun $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ Ideal und $X = \mathbb{V}(I)$. Dann gilt

$$\sqrt{I} \ \subset \ I(X),$$

denn ist $f \in \sqrt{I}$, so ist $f^m \in I$ für ein $m \in \mathbb{N}$; also ist $f^m|X = 0$, also auch $f|X = 0$ (falls $m > 0$) und somit $f \in I(X)$ ($m = 0$ kann nur im Fall $I = \langle 1 \rangle = \sqrt{I}$ auftreten).

Theorem 7.2 (Hilbertscher Nullstellensatz) Es sei K algebraisch abgeschlossener Körper, $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ Ideal und $X = \mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^n(K)$ das Nullstellengebilde von I. Dann gilt

$$I(X) \ = \ \sqrt{I}.$$

Die Menge der affinen Untervarietäten X von $\mathbb{A}^n(K)$ und die Menge der reduzierten Ideale I in $K[z_1, \ldots, z_n]$ stehen in eineindeutiger Beziehung:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(I(X)) &= X \quad \forall \text{ Untervarietäten } X \subset \mathbb{A}^n, \\ I(\mathbb{V}(I)) &= I \quad \forall \text{ Radikalideale } I \subset K[z_1, \ldots, z_n]. \end{aligned}$$

Corollar 7.3 K sei algebraisch abgeschlossen. Eine K-Algebra R ist genau dann zum affinen Koordinatenring $A(X)$ einer affinen Varietät $X \subset \mathbb{A}^n$ isomorph, wenn R als K-Algebra endlich erzeugt ist und keine nilpotenten Elemente besitzt.

Beweis:

1) $X \subset \mathbb{A}^n \ \Rightarrow \ A(X) = K[z_1, \ldots, z_n]/I(X)$ ist endlich erzeugte K-Algebra: Die Restklassen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ von $z_1, \ldots, z_n$ modulo $I(X)$ erzeugen $A(X)$.
   Da $I(X) = \sqrt{I(X)}$, ist $\mathfrak{n}(A(X)) = \sqrt{I(X)}/I(X) = \langle 0 \rangle$.

2) Sei R endlich erzeugte K-Algebra. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen surjektiven K-Algebrahomomorphismus $\varphi : K[z_1, \ldots, z_n] \longrightarrow R$.
   Es folgt $R \cong K[z_1, \ldots, z_n]/I$ wobei $I = \ker \varphi$. Ist R reduziert, so ist auch I reduziert, weil $I = \varphi^{-1}(\langle 0 \rangle) = \varphi^{-1}(\mathfrak{n}(R)) = \sqrt{I}$.
   Nach dem Nullstellensatz folgt $I = I(X)$, wobei $X = \mathbb{V}(I)$. Also ist $R \cong A(X)$. $\square$

Definition 7.4 Es sei $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ ein Ideal und $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät.

a) I beschreibt X *mengentheoretisch*, wenn $X = \mathbb{V}(I)$ gilt.

b) I beschreibt X *idealtheoretisch*, wenn $I = I(X)$ gilt.

$I(X)$ heißt auch das *volle* Ideal von X. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz wird X genau dann mengentheoretisch von I beschrieben, wenn $\sqrt{I} = I(X)$ gilt.

Wir kommen nun zum Beweis des Nullstellensatzes. Zunächst zeigen wir:

Theorem 7.5 (schwacher Nullstellensatz) K sei wie immer algebraisch abgeschlossen.
Ist $I \subsetneqq K[z_1, \ldots, z_n]$ ein echtes Ideal, so besitzt I eine Nullstelle; d.h. $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$.

Beweis: Es sei I Ideal in $K[z_1, \ldots, z_n]$ und $I \neq \langle 1 \rangle$.
Behauptung: Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ mit $I \subset \mathfrak{m}$.
Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{M} \ = \ \{J \mid J \subset K[z_1, \ldots, z_n] \text{ Ideal }, \ J \neq \langle 1 \rangle, \ I \subset J\}.$$

Es gilt $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, weil $I \in \mathfrak{M}$. Es gibt ein maximales Element $J \in \mathfrak{M}$, denn sonst könnte man eine aufsteigende Folge

$$I \subset J_1 \subsetneqq J_2 \subsetneqq J_3 \subsetneqq \cdots$$

von Idealen $J_\nu \in \mathfrak{M}$ konstruieren im Widerspruch zur Noether-Eigenschaft von $K[z_1, \ldots, z_n]$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Wir brauchen also 7.5 nur für den Fall zu beweisen, daß I maximal ist.

Sei also I maximal. Dann ist

$$L \;=\; K[z_1, \ldots, z_n]/I$$

ein Erweiterungskörper von K und als K-Algebra endlich erzeugt.
Können wir nun daraus ableiten, daß L auch als K-Modul endlich erzeugt ist, so sind alle Elemente von L algebraisch über K, und somit gilt dann $L = K$ (da K algebraisch abgeschlossen). Wir haben dann einen surjektiven K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi : K[z_1, \ldots, z_n] \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow K = L$$

mit $\ker\varphi = I$. Es sei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i := \varphi(z_i)$.
Dann gilt $a \in \mathbb{V}(I)$, denn für $f \in I$, $f = \sum c_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$ ist

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \varphi(f) \quad &= \quad \sum c_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varphi(z_1)^{\nu_1} \cdots \varphi(z_n)^{\nu_n} \\ &= \quad \sum c_{\nu_1 \ldots \nu_n} a_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n} \;=\; f(a). \quad \square \end{aligned}$$

Zum Beweis von 7.5 brauchen wir somit nur folgenden Satz zu beweisen:

Satz 7.6 (schwacher Nullstellensatz, 2.Fassung) Es sei K ein beliebiger Körper und R eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann gilt: Ist $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal, so ist $L = R/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K (d.h. $\dim_K L < \infty$, insbesondere ist dann L algebraisch über K).

Beweis: Da R endlich erzeugte K-Algebra ist, ist auch L endlich erzeugte K-Algebra. Seien $x_1, \ldots, x_n \in L$, so daß $L = K[x_1, \ldots, x_n]$. Eine Teilmenge $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist *algebraisch unabhängig* über K, wenn der K-Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : K[z_1, \ldots, z_k] \quad &\longrightarrow \quad L \quad \text{mit} \\ \Phi(z_\nu) \quad &:= \quad x_{i_\nu} \end{aligned}$$

injektiv ist, wobei $z_1, \ldots, z_k$ Unbestimmte sind. Es sei $A \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine maximale über K algebraisch unabhängige Teilmenge. Œ sei $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $0 \leq k \leq n$ ($k = 0 \Rightarrow A = \emptyset$).
$K' := K(x_1, \ldots, x_k) \subset L$ bezeichne den Quotientenkörper des Unterringes $K[x_1, \ldots, x_k]$ von L.
Behauptung: Für $i > k$ ist x_i algebraisch über K'.
Das ist klar, denn andernfalls wäre der K'-Algebrahomomorphismus

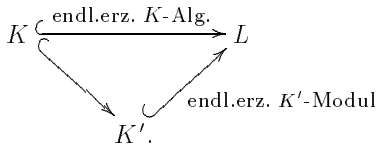
$$\Phi_i : K'[z] \longrightarrow L, \quad \Phi_i(z) = x_i,$$

injektiv und somit auch der K-Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i : K[z_1, \ldots, z_k, z] \quad &\longrightarrow \quad L \quad \text{mit} \\ \tilde{\Phi}_i(z_\nu) \quad &= \quad x_{i_\nu}, \qquad \tilde{\Phi}_i(z) = x_i. \end{aligned}$$

Also wäre $A \cup \{x_i\}$ algebraisch unabhängig, entgegen der Maximalität von A.

Es folgt: $K'[x_i]$ ist endliche Erweiterung von K' für $i = k+1, \ldots, n$. Folglich ist auch $L = K'[x_{k+1}, \ldots, x_n]$ eine endliche Erweiterung von K'. Wir haben die folgende Situation:



Können wir hieraus folgern, daß K' als K-Algebra endlich erzeugt ist, so muß $k = 0$, d.h. $K = K'$ gelten, denn sonst bekommt man einen Widerspruch, wie man folgendermaßen einsieht:
Wir nehmen an , daß K' endlich erzeugte K-Algebra und $k > 0$ ist:
Es seien dann $y_1, \ldots, y_m \in K'$, so daß $K' = K[y_1, \ldots, y_m]$.
Wähle $f_i, g_i \in K[x_1, \ldots, x_k]$, so daß $y_i = \frac{f_i}{g_i}$ (beachte: $K' = K(x_1, \ldots, x_k)$). Setze $g := g_1 \cdots g_m$.
Für $q \in K[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{q} \in K'$, und somit gibt es Elemente $a_\mu \in K$ ($\mu \in \mathbb{N}^m$), so daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \sum a_\mu \, y_1^{\mu_1} \cdots y_m^{\mu_m} \\
&= \sum a_\mu \, \frac{f_1^{\mu_1} \cdots f_m^{\mu_m}}{g_1^{\mu_1} \cdots g_m^{\mu_m}} \\
&= g^{-N} \sum a_\mu \, f_1^{\mu_1} g_1^{n_1 - \mu_1} \cdots f_m^{\mu_m} g_m^{n_m - \mu_m} \quad (N = n_1 + \cdots + n_m, \; n_i \text{ geeignet}) \\
&= g^{-N} f \quad \text{mit } f \in K[x_1, \ldots, x_k].
\end{aligned}$$

Es gilt also $g^N = qf$, d.h. $g \in \sqrt{\langle q \rangle}$, wobei $\langle q \rangle = q \cdot K[x_1, \ldots, x_k]$. Da $\sqrt{\langle p \rangle} = \langle p \rangle$ für *Primelemente* $p \in K[x_1, \ldots, x_k]$ (p heißt *Primelement* in $R \iff \langle p \rangle$ ist Primideal in R), gilt somit:

$$g \in \langle q \rangle \quad \forall \text{ Primelemente } q \in K[x_1, \ldots, x_k]. \qquad (*)$$

Wir benutzen jetzt, daß im Polynomring $K[z_1, \ldots, z_k]$ der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung gilt: Bis auf Multiplikation mit Konstanten $a \in K \setminus \{0\}$ (das sind die Einheiten in $K[x_1, \ldots, x_k]$) und bis auf Reihenfolge der Faktoren gibt es zu jedem nichtkonstanten Polynom $q \in K[z_1, \ldots, z_k]$ eindeutig bestimmte Primelemente $p_1, \ldots, p_s \in K[z_1, \ldots, z_k]$, so daß $q = p_1 \cdots p_s$. Insbesondere besitzt ein nicht konstantes Polynom nur endlich viele Primteiler.

Da $x_1, \ldots, x_k$ algebraisch unabhängig über K sind, ist $K[x_1, \ldots, x_k]$ auch ein Polynomring. Nach $(*)$ sind alle Primelemente von $K[x_1, \ldots, x_k]$ Teiler von g. Da es aber unendlich viele Primelemente in $K[x_1, \ldots, x_k]$ gibt, ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme $k > 0$.

Satz 7.6 ist daher vollständig bewiesen, wenn wir noch folgendes Lemma beweisen:

Lemma 7.7 Es sei K ein noetherscher Ring, L eine endlich erzeugte K-Algebra und $K' \subset L$ sei eine K-Unteralgebra von L, so daß gilt: L ist endlich erzeugt als K'-Modul. Dann gilt: K' ist endlich erzeugte K-Algebra.

Beweis: Seien $v_1, \ldots, v_s \in L$, so daß

$$L = K'v_1 + \cdots + K'v_s,$$

und $w_1, \ldots, w_t \in L$, so daß

$$L = K[w_1, \ldots, w_t].$$

Dann gibt es Elemente $a_{ij}, b_{ijk} \in K'$, so daß

$$w_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} v_j, \qquad (1)$$

$$v_i v_j = \sum_{k=1}^{s} b_{ijk} v_k. \qquad (2)$$

Die Elemente a_{ij} $(i = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, s)$, und b_{ijk} $(i, j, k = 1, \ldots, s)$ erzeugen eine K-Unteralgebra K_0 von K'.
Behauptung: $L = K_0 v_1 + \cdots + K_0 v_s$.
Beweis: Für $f \in L$ gibt es Elemente $c_\nu \in K$, $\nu \in \mathbb{N}^t$, so daß

$$\begin{aligned} f &= \sum c_\nu w_1^{\nu_1} \cdots w_t^{\nu_t} \\ &\overset{(1)}{=} \sum \tilde{c}_\mu v_1^{\mu_1} \cdots v_s^{\mu_s} \quad \text{mit } \tilde{c}_\mu \in K_0 \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{s} \hat{c}_i v_i \quad \text{mit } \hat{c}_i \in K_0. \end{aligned}$$

Nach Definition ist K_0 endlich erzeugte K-Algebra. Da K noethersch ist, ist somit auch K_0 noethersch (Hilbertscher Basissatz). Da L endlich erzeugter K_0-Modul ist, ist L ein noetherscher K_0-Modul (Satz 3.24); somit ist der K_0-Untermodul K' von L endlich erzeugt als K_0-Modul (Def. 3.22) und damit auch endlich erzeugt als K-Algebra (Übung!). □

Satz 7.6 und Theorem 7.5 sind damit bewiesen! □

Nun kommen wir zum

Beweis von Theorem 7.2: Es sei $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ Ideal, $I \neq \langle 1 \rangle$, $X = \mathbb{V}(I)$ und $f \in I(X)$. Sei nun $J \subset K[z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}]$ das von I und $f \cdot z_{n+1} - 1$ erzeugte Ideal (dies ist der Trick von *Rabinowitsch*!). Dann gilt $\mathbb{V}(J) = \emptyset$, denn: $a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{V}(J) \iff$
$f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} = 1$ und $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $g \in I$. Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} = 1 \\ g(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall g \in I \end{cases}$$

besitzt wegen $f \in I(X)$ keine Lösung $(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Aus $\mathbb{V}(J) = \emptyset$ folgt nach dem schwachen Nullstellensatz $J = \langle 1 \rangle$. Sei

$$\pi : K[z_1, \ldots, z_{n+1}] \longrightarrow K[z_1, \ldots, z_{n+1}] / (f \cdot z_{n+1} - 1) = K[z_1, \ldots, z_n]_f$$

die Quotientenabbildung, also $\pi(z_{n+1}) = \frac{1}{f}$. Dann gilt (wegen $\langle 1 \rangle = J = \langle I \cup \{f \cdot z_{n+1} - 1\} \rangle$)

$$\langle 1 \rangle = \pi(J) = I \cdot K[z_1, \ldots, z_n]_f,$$

denn $\pi(f \cdot z_{n+1} - 1) = 0$ in $K[z_1, \ldots, z_n]_f$. Es gibt somit eine Darstellung (vgl. Lemma 3.28)

$$1 = \frac{g}{f^m} \quad \text{mit } g \in I,\ m \in \mathbb{N},$$

und folglich ist $f^m = g \in I$, d.h. $f \in \sqrt{I}$. □

Damit ist der „affine“ Nullstellensatz bewiesen. Wir kommen nun zum projektiven Fall:

K sei wie immer algebraisch abgeschlossen.

$$\begin{aligned} I : \{X \mid X \subset \mathbb{P}^n \text{ projektiv }\} &\longrightarrow \{I \mid I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n] \text{ homogen}\}, \\ X &\longmapsto I(X) \end{aligned}$$

ist eine injektive Abbildung, weil $\mathbb{V}(I(X)) = X$ für alle X.
Ist $I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen, so ist $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{P}^n$ und $\mathbb{V}_{\text{aff}}(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ mit $\mathbb{V}(I) = \mathbb{P}(\mathbb{V}_{\text{aff}}(I)) = \pi(\mathbb{V}_{\text{aff}}(I) \setminus \{0\})$, wobei $\pi : K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ die Abbildung $\pi(x) = [x]$ ist.
Es gilt also $I(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$ falls $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$, und $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset \iff \mathbb{V}_{\text{aff}}(I) \supsetneq \{0\} = \mathbb{V}_{\text{aff}}(Z_0, \ldots, Z_n)$
$\iff \sqrt{I} \subsetneq \langle Z_0, \ldots, Z_n \rangle$.

Satz 7.8 (projektiver Nullstellensatz) Sei $I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogenes Ideal (K algebraisch abgeschlossen). Dann sind äquivalent:

(i) $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$.

(ii) $\sqrt{I} \subsetneq \langle Z_0, \ldots, Z_n \rangle$.

(iii) $\forall d \in \mathbb{N} \quad \exists$ homogenes Polynom $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ vom Grad d mit $F \notin I$.

Ist $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$, so gilt $I(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$. ((ii) $\Leftrightarrow$ (iii) als Übung!)

Corollar 7.9

$$\{X \mid X \subset \mathbb{P}^n \text{ abgeschlossen }\} \longrightarrow \left\{ I \;\middle|\; \begin{array}{c} I \subset K[Z_0, \ldots, Z_n] \text{ homogen mit} \\ \sqrt{I} = I \text{ und } I \neq \langle Z_0, \ldots, Z_n \rangle \end{array} \right\}$$

ist Bijektion mit Umkehrabbildung $\mathbb{V}$. $\langle Z_0, \ldots, Z_n \rangle$ heißt das *irrelevante Ideal*, weil es in dieser Korrespondenz nicht vorkommt.

Es sei $K[Z_0, \ldots, Z_n] = S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$. Neben der Gleichheit „=“ sind die beiden folgenden Äquivalenzrelationen auf der Menge der homogenen Ideale von geometrischer Bedeutung:

Seien $I, J \subset S$ homogene Ideale.

a) I und J *definieren dieselbe projektive Varietät*, wenn $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(J)$ gilt. Nach Satz 7.8 gilt das genau dann, wenn $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, oder wenn $\sqrt{I}, \sqrt{J} \in \{\langle 1 \rangle, \langle Z_0, \ldots, Z_n \rangle\}$.

b) I und J *stimmen lokal überein*, wenn

$$\forall\, d \geq 1,\ F \in S_d \text{ gilt } I_{(F)} = J_{(F)} \text{ in } S_{(F)} \quad (\text{dabei ist } I_{(F)} := \left\{ \tfrac{G}{F^k} \mid k \in \mathbb{N},\ G \in I_{dk} \right\}).$$

$I_{(F)}$ ist Ideal in $S_{(F)}$. $I_{(F)}$ heißt auch *Dehomogenisierung* von I bzgl. F.

Definition 7.10 Es sei $I \subset S$ homogenes Ideal.

$$\overline{I} := \{F \in S \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \quad \forall \nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ mit } |\nu| = k :\ Z^\nu F \in I\}$$

ist wieder ein homogenes Ideal. $\overline{I}$ heißt die *Saturierung* von I. I heißt *saturiert*, wenn $I = \overline{I}$ gilt.

Übung
$I \subset \overline{I}$, $\quad \mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\overline{I})$, $\quad \overline{I}$ ist saturiert. $\quad$ Ist $I \neq \langle Z_0, Z_n \rangle$, so ist $\sqrt{I}$ saturiert.

Lemma 7.11 Seien $I, J \subset S$ homogene Ideale. Äquivalent sind:

(i) $I_{(F)} = J_{(F)} \quad \forall\, d \geq 1,\ F \in S_d$.

(ii) $I_{(Z_i)} = J_{(Z_i)} \quad$ für $i = 0, \ldots, n$.

(iii) $\overline{I} = \overline{J}$.

(iv) $\exists\, k\ \forall m \geq k\ :\ I_m = J_m$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wir zeigen $\overline{I} \subset \overline{J}$.
Es sei $G \in \overline{I}_d$, etwa $Z^\nu G \in I$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $|\nu| = k$. Dann ist auch $Z_i^k G \in I$ und somit $\frac{G}{Z_i^d} = \frac{Z_i^k G}{Z_i^{d+k}} \in I_{(Z_i)} = J_{(Z_i)}$; also gibt es ein $H \in J_{d_i},\ d_i \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{G}{Z_i^d} = \frac{H}{Z_i^{d_i}}$ und somit $Z_i^{d_i} G = Z_i^d H \in J$ für $i = 0, \ldots, n$.
Wählt man k' groß genug $(k' \geq (n+1) \cdot \max\{d_i\})$, so folgt

$$Z^\nu G \in J \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ mit } |\nu| = k'.$$

Also ist $G \in \overline{J}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Wir brauchen nur zu zeigen, daß ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\overline{I}_m \ = \ I_m \quad \text{für alle } m \geq m_0.$$

Beweis:

a) Da S noethersch ist, gibt es homogene Polynome $F_j \in S_{d_j},\ j = 1, \ldots, t$ mit

$$\overline{I} = \langle F_1, \ldots, F_t \rangle.$$

Sei $d = \max\{d_j \mid j = 1, \ldots, t\}$. Für $l \geq 0,\ k \geq d$ gilt dann offensichtlich

$$\overline{I}_{k+l} \ = \ S_l \overline{I}_k \ = \ \left\{ \sum_{i=1}^{r} H_i G_i \mid H_i \in S_l,\ G_i \in \overline{I}_k \right\}.$$

b) Es sei $M^k := \langle Z^\nu \mid |\nu| = k \rangle = \bigoplus_{d \geq k} S_d \subset S$ und $I : M^k := \{F \in S \mid M^k \cdot F \subset I\}$.
Wegen $M^{k+1} \subset M^k$ erhalten wir eine aufsteigende Idealkette

$$\cdots \subset \ I : M^k \ \subset \ I : M^{k+1} \ \subset \cdots.$$

Nach Definition ist

$$\overline{I} \ = \ \bigcup_{k \geq 0} \left(I : M^k \right).$$

Da S noethersch ist, gibt es also ein k_0, so daß

$$\overline{I} \ = \ I : M^l \quad \text{für alle } l \geq k_0.$$

Es folgt $S_l \overline{I} \subset I$ für $l \geq k_0$.

c) Für $l \geq k_0$ und $k \geq d$ gilt somit wegen a) und b)

$$\overline{I}_{k+l} \ = \ S_l \overline{I}_k \subset I_{l+k}.$$

Mit $m_0 = k_0 + d$ folgt die Behauptung.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Das ist klar, denn jedes Element in $I_{(F)}$ hat die Gestalt $\frac{G}{F^l}$, wobei $G \in I_{ld}$ und l beliebig groß ist. $\square$

Wir definieren

Definition 7.12 Es sei $I \subset S$ homogenes Ideal und $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät.

a) I beschreibt X *mengentheoretisch* $\iff$ $X = \mathbb{V}(I)$, d.h. $\sqrt{I} = I(X)$, falls $X \neq \emptyset$.

b) I beschreibt X *lokal idealtheoretisch* $\iff$ $\overline{I} = I(X)$.

c) I beschreibt X *homogen-idealtheoretisch* $\iff$ $I = I(X)$.

Es gelten die Implikationen c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a), die sich aber nicht umkehren lassen.

Zu c) $\Rightarrow$ b): Da $I(X)$ saturiert ist ($F \in S_d$ und $X_0F, \ldots, X_nF \in I(X) \Rightarrow F \in I(X)$)
folgt aus $I = I(X)$ auch $I = \overline{I}$, also insbesondere b).

Zu b) $\Rightarrow$ a): Aus $\overline{I} = I(X)$ folgt $X = \mathbb{V}(I(X)) = \mathbb{V}(\overline{I}) \overset{\text{Übung}}{=} \mathbb{V}(I)$.

Aber:

a) $\not\Rightarrow$ b): Sei $n = 1$ und $I = \langle Z_0^2 \rangle$, $X = \mathbb{V}(Z_0) = \mathbb{V}(I)$. $I(X) = \langle Z_0 \rangle$. Es gilt $\overline{I} \neq \langle Z_0 \rangle$, weil $Z_0 \notin \overline{I}$, denn $Z_1^k Z_0 \notin I \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

b) $\not\Rightarrow$ c): Sei $n = 1$, $I = \langle Z_0^2, Z_0Z_1 \rangle$; dann gilt $\overline{I} = \langle Z_0 \rangle = I(X)$, wobei $X = \mathbb{V}(Z_0)$, und $I \neq I(X)$.

Übungen

1) Es sei $C \subset \mathbb{P}^d$ die Standardnormkurve und $F_{i,j} := Z_iZ_j - Z_{i-1}Z_{j+1}$ für $1 \leq i \leq j \leq d-1$. Zeige:

   (a) $I(C) = \langle F_{i,j} \mid 1 \leq i \leq j \leq d-1 \rangle$ $\quad [\binom{d}{2}$ Gleichungen].

   (b) Sei $I := \left\langle F_{1,i},\ F_{j,j},\ F_{k,d-1},\ \begin{matrix} i=1,\ldots,d-1 \\ j=2,\ldots,d-1 \\ k=2,\ldots,d-2 \end{matrix} \right\rangle$ $\quad [3(d-2)$ Gleichungen].

   Dann gilt $\overline{I} = I(C)$. Für $d \geq 5$ ist $I \neq \overline{I}$.

2) $I(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ wird von den Elementen $W_\nu W_\mu - W_{\nu'} W_{\mu'}$, $\nu + \mu = \nu' + \mu'$, erzeugt. (Zur Definition siehe Beispiel 5.12.)

3) $I(\Sigma_{n,m})$ wird von den Elementen $W_{ij}W_{lk} - W_{ik}W_{lj}$, $i < l$, $j < k$, erzeugt. (Zur Definition siehe Lemma 5.16.)

Wir kommen nun zu den *irreduziblen* Varietäten.

Definition 7.13 Eine quasiprojektive Varietät X heißt *irreduzibel* $\iff$
$\forall\, A, B \subset X$ abgeschlossen gilt: $\quad X = A \cup B \ \Rightarrow\ X = A$ oder $X = B$.

Satz 7.14 Jede quasiprojektive Varietät X besitzt eine (bis auf die Reihenfolge eindeutig) bestimmte Darstellung

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_s$$

als Vereinigung abgeschlossener irreduzibler Mengen $X_i \subset X$ mit $X_i \not\subset X_j$ für $i \neq j$.

Beweis: (vgl. Hartshorne: Algebraic Geometry (p5))
1.) Existenz: Sei zunächst X projektiv, $X \subset \mathbb{P}^n$. Hätte X keine solche Darstellung, so könnte man eine nicht stationäre absteigende Kette

$$X \supsetneqq A_1 \supsetneqq A_2 \supsetneqq A_3 \supsetneqq \cdots$$

von abgeschlossenen Mengen in X konstruieren. Dies ergäbe eine nicht stationäre aufsteigende Kette

$$I(A_1) \subsetneqq I(A_2) \subsetneqq I(A_3) \subsetneqq \cdots \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$$

von Idealen im Widerspruch zur Noether-Eigenschaft.
Ist X beliebig quasiprojektiv im $\mathbb{P}^n$, so sei $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$ der Abschluß, $X \subset \overline{X}$ ist offen. Ist $A \subset \overline{X}$ abgeschlossen und irreduzibel, so ist auch $X \cap A$ abgeschlossen und irreduzibel in X. (Denn: $X \cap A = B \cup C$, $B, C \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $\overline{X \cap A} = \overline{B} \cup \overline{C}$. A irreduzibel und $A \setminus X$ abgeschlossen, $A = (\overline{X \cap A}) \cup (A \setminus X) \Rightarrow \overline{X \cap A} = A$ oder $A \setminus X = A$, d.h. $A \cap X = \emptyset$. Es folgt also $A = \overline{B}$ oder $A = \overline{C}$ und somit $A \cap X = B$ oder $A \cap X = C$.)
Eine Darstellung

$$\overline{X} = X_1 \cup \cdots \cup X_s,$$

X_i irreduzibel und abgeschlossen in X, induziert somit eine Darstellung

$$X = (X_1 \cap X) \cup \cdots \cup (X_s \cap X)$$

mit $X_i \cap X$ abgeschlossen und irreduzibel in X.

2.) Eindeutigkeit: Sei $X = X_1 \cup \cdots \cup X_s = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$
$\Rightarrow$ $Y_1 = (X_1 \cap Y_1) \cup \cdots \cup (X_s \cap Y_1)$
$\Rightarrow$ $Y_1 = X_i \cap Y_1$ für ein i
$\Rightarrow$ $Y_1 \subset X_i$ und $X_i \subset Y_j$ für ein j. Also $Y_1 \subset X_i \subset Y_j \Rightarrow 1 = j$ und $Y_1 = X_i$. Œ sei $i = 1$: Es folgt $X_2 \cup \cdots \cup X_s = Y_2 \cup \cdots \cup Y_r = \overline{X \setminus X_1}$. Induktion $\Rightarrow$ $r = s$ und $X_i = Y_i$ für alle i nach Umnumerierung. □

Die Mengen X_i heißen die *irreduziblen Komponenten* von X.

Lemma 7.15

a) $X \subset \mathbb{A}^n$ ist irreduzible abgeschlossene Menge $\iff$ $I(X) \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ ist Primideal.

b) $X \subset \mathbb{P}^n$ ist irreduzibel und abgeschlossen $\iff$ $I(X) \subset K[Z_0, \ldots, Z_n]$ ist Primideal.

c) Jedes reduzierte Ideal $I \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s$$

mit Primidealen $\mathfrak{p}_i \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ und $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$.
Ist I homogen, so sind auch die Primideale $\mathfrak{p}_i$ homogen.

Beweis: nur a)
„$\Rightarrow$“ $fg \in I(X) = X \subset \mathbb{V}(f) \cup \mathbb{V}(g) \Rightarrow X \subset \mathbb{V}(f)$ oder $X \subset \mathbb{V}(g) \Rightarrow f \in I(X)$ oder $g \in I(X)$.
„$\Leftarrow$“ $X = A \cup B \Rightarrow I(X) = I(A) \cap I(B)$. Ist $I(A) \not\subset I(X) \Rightarrow \exists\, f \in I(A) \setminus I(X). \Rightarrow \forall g \in I(B)$: $gf \in I(A) \cap I(B) \subset I(X) \Rightarrow g \in I(X) \Rightarrow I(B) \subset I(X) \Rightarrow X \subset B$. □

Beispiele 7.16

a) $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{A}^n$ sind irreduzibel.

b) Ist X irreduzibel, so ist jede offene Menge $U \subset X$ irreduzibel.

c) Ist $U \subset X$ offen, U irreduzibel, so ist $\overline{U} \subset X$ irreduzibel.

d) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist irreduzibel, denn: $U = \mathbb{A}^{n+m}$ ist offene Teilmenge in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ mit $\overline{U} = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.
Da $\Sigma_{n,m} \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, ist auch $\Sigma_{n,m}$ irreduzibel, also $I(\Sigma_{n,m})$ ein homogenes Primideal.

e) $I(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ ist homogenes Primideal.

Bemerkung Neuerdings gibt es Berechnungsverfahren (MAPLE, MATHEMATICA, MACAULAY, REDUCE, SCRATCHPAD) für folgende Größen: Gegeben ist eine Liste $F_1, \ldots, F_s$ von Polynomen $F_i \in K[z_1, \ldots, z_n]$ ($K = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \ldots$). Für $I = \langle F_1, \ldots, F_s \rangle$ werden berechnet:

- $\sqrt{I}$, das Radikal von I.
- Die Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$.

(Näheres siehe bei Cox, Little, O'Shea.)

Wir betrachten den einfachen Fall der affinen (bzw. projektiven) Hyperflächen. Zunächst etwas Wiederholung:

Bemerkung 7.17 Es sei R ein Integritätsbereich. $q \in R$ heißt *irreduzibel* $\iff$
$q \neq 0,\ q$ Nichteinheit, und es gilt für $a, b \in R$: Ist $q = ab$, so ist a oder b eine Einheit in R.
Es gilt bekanntlich:

a) Ist $p \in R \setminus \{0\}$ ein Primelement, so ist p irreduzibel.

b) Ist R noetherscher Integritätsring, so besitzt jedes Element $a \in R \setminus \{0\}$ eine „Zerlegung“ $a = u \cdot q_1 \cdots q_s$ in ein Produkt aus irreduziblen Elementen $q_1, \ldots, q_s \in R$ ($s \geq 0$) und einer Einheit $u \in R$.
(Hätte a keine endliche Zerlegung, so könnte man ein Kette $\langle a_1 \rangle \subsetneqq \langle a_2 \rangle \subsetneqq \langle a_3 \rangle \subsetneqq \cdots$, $a = a_1 b_1,\ a_1 = a_2 b_2,\ a_2 = a_3 b_3$ usw., konstruieren im Widerspruch zur Noether-Eigenschaft von R.)

c) Für einen noetherschen Integritätsring R sind äquivalent:

   (i) Jedes irreduzible Element ist Primelement.

   (ii) Ist $a \in R \setminus \{0\}$ und sind $a = uq_1 \cdots q_s = vp_1 \cdots p_r$ zwei Darstellungen mit $u, v \in R$ Einheiten, $q_i, p_j \in R$ irreduzibel, so gilt $r = s$ und $\exists$ Permutation $\sigma \in S_r$ mit $\langle p_i \rangle = \langle q_{\sigma(i)} \rangle$ für $i = 1, \ldots, r$.

   R heißt dann noetherscher *faktorieller Ring*.

d) Als wichtigstes Beispiel haben wir: Ist K ein beliebiger Körper, $z_1, \ldots, z_n$ Unbestimmte ($n \geq 1$), so ist $K[z_1, \ldots, z_n]$ ein noetherscher *faktorieller* Ring. Ist $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$ nicht konstant, so gibt es eine eindeutige *Primfaktorzerlegung*

$$f = q_1^{\alpha_1} \cdots q_s^{\alpha_s},\ \alpha_i \in \mathbb{N},\ \alpha_i > 0,\ q_i \text{ irreduzibel in } K[z_1, \ldots, z_n],\ \langle q_i \rangle \neq \langle q_j \rangle \text{ für } i \neq j.$$

   $f_{\text{red}} := q_1 \cdots q_s$ heißt dann die *Reduktion* von f (f_{red} ist bis auf Multiplikation mit Konstanten $c \in K \setminus \{0\}$ eindeutig bestimmt).

Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt nun:

Corollar 7.18 Es sei K algebraisch abgeschlossen und $f \in K[z_1, \ldots, z_n]$ nicht konstant. Dann gilt

$$I(\mathbb{V}(f)) \ = \ \langle f_{\text{red}} \rangle.$$

Beweis: Sei $f = q_1^{\alpha_1} \cdots q_s^{\alpha_s}$ die Primfaktorzerlegung, $m \geq \max\{\alpha_i,\ i = 1, \ldots, s\}$. Dann ist

$$f_{\text{red}}^m \ = \ q_1^m \cdots q_s^m \ = \ \left(q_1^{m-\alpha_1} \cdots q_s^{m-\alpha_s}\right) \cdot f \in \langle f \rangle,$$

also $f_{\text{red}} \in \sqrt{\langle f \rangle}$.
Sei umgekehrt $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$, etwa $g^m \in \langle f \rangle$. Wir schreiben $g = g' q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$ mit $\beta_i \geq 0$, und $\text{ggT}(g', f_{\text{red}}) = 1$. Da f Teiler von g^m ist, folgt $\alpha_i \leq m\beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, s$ und somit $\beta_i > 0$; d.h. f_{red} ist Teiler von g, also $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f_{\text{red}} \rangle$. $\square$

Übungen

1) $f = y^2 - x(x^2 - 1)$ ist irreduzibel in $K[x, y]$. $K[x, y]/\langle f \rangle$ ist nicht faktoriell.

2) Sei K ein beliebiger Körper, $z_1, \ldots, z_n$ seien Unbestimmte ($n \geq 1$). $K[z_1, \ldots, z_n]$ besitzt unendlich viele irreduzible Polynome.

3) Es sei K algebraisch abgeschlossen und $f = y^2 z - x(x^2 - z^2) \in K[x, y, z]$. $C = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^2$ ist irreduzibel und $I(C) = \langle f \rangle$.

Definition 7.19 Seien X, Y, Z quasiprojektive Varietäten. Eine reguläre Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

heißt (lokaltriviales) *reguläres Faserbündel* mit Faser $Z :\Longleftrightarrow$
$\forall\, y \in Y \quad \exists\, U \subset Y$ offene Umgebung von y und ein Isomorphismus (= bireguläre Abbildung)

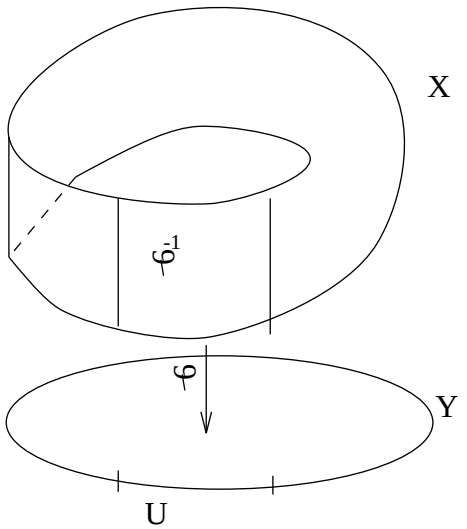
$$\Phi_U : \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times Z,$$

so daß $p_1(\Phi_U(x)) = \varphi(x) \quad \forall x \in \varphi^{-1}(U)$ (wobei p_1 die Projektion auf den ersten Faktor ist). Φ heißt *Trivialisierung* von $\varphi : X \longrightarrow Y$ über U. Y heißt dann auch die *Basis* des Faserbündels und X sein *Totalraum*.

$\varphi : X \longrightarrow Y$ heißt *projektiv*, wenn die Faser Z projektiv ist.

$\varphi : X \longrightarrow Y$ heißt *triviales* Faserbündel mit Faser F, wenn eine bireguläre Abbildung
$\Phi : X \longrightarrow Y \times F$ mit $p_1 \circ \Phi = \varphi$ existiert.

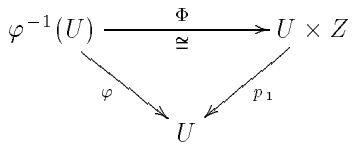
φ heißt ein *lokaltriviales $\mathbb{P}^n$-Bündel*, wenn φ triviales Faserbündel mit Faser $Z = \mathbb{P}^n$ ist.



Es gilt nun der nützliche Satz (den wir später noch verallgemeinern werden):

Satz 7.20 Es sei $\varphi : X \longrightarrow Y$ ein reguläres Faserbündel mit Faser Z. Sind Y und Z irreduzibel, so ist auch X irreduzibel.

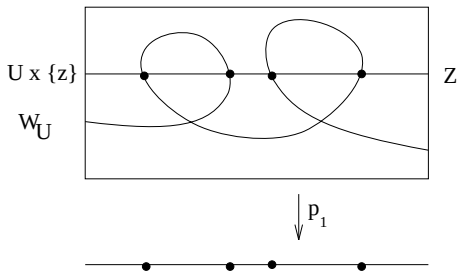
Beweis: Zunächst zeigen wir:
Beh.: Ist $W \subset X$ abgeschlossen in X, so ist $\tilde{W} := \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset W\}$ abgeschlossen in Y.
Zum Beweis brauchen wir nur zu zeigen, daß $\tilde{W} \cap U$ abgeschlossen in U ist, wobei U eine offene Überdeckung von Y durchläuft. Sei $U \subset Y$ offen und Φ ein Isomorphismus, so daß



kommutiert. Dann ist

$$\tilde{W} \cap U \;=\; \{y \in U \mid \{y\} \times Z \subset W_U\},$$

wobei $W_U := \Phi(W \cap \varphi^{-1}(U))$ abgeschlossen in $U \times Z$ ist.



Für $z \in Z$ ist $W_{U,z} := U \times \{z\} = \bigcap W_U$ abgeschlossen in $U \times Z$, und da $p_1|(U \times \{z\})$ isomorph ist, ist auch $p_1(W_{U,z})$ abgeschlossen in U und somit auch der Durchschnitt

$$\tilde{W} \cap U \;=\; \bigcap_{z \in Z} p_1(W_{U,z}).$$

Die Behauptung ist bewiesen.
Sei nun $X = X_1 \cup \cdots \cup X_s$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann ist $\tilde{X}_i$ abgeschlossen in Y und $Y = \tilde{X}_1 \cup \cdots \cup \tilde{X}_s$. Letzteres folgt so: Ist $y \in Y$, so ist

$$F \;\cong\; \varphi^{-1}(y) \;=\; \big(X_1 \cap \varphi^{-1}(y)\big) \cup \cdots \cup \big(X_s \cap \varphi^{-1}(y)\big)\,.$$

Da F irreduzibel ist, folgt $\varphi^{-1}(y) = X_i \cap \varphi^{-1}(y)$ für ein i, d.h. $\varphi^{-1}(y) \subset X_i$, also $y \in \tilde{X}_i$. Da nun Y irreduzibel ist, folgt weiter $Y = \tilde{X}_i$ für ein i und somit $X = X_i$. X ist also irreduzibel. $\square$

Beispiel 7.21
$\mathbb{P}^{n*}$ ist der Raum der Hyperebenen $H \subset \mathbb{P}^n$. Ist $H = \mathbb{V}(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z_\nu)$, so ist $H \in \mathbb{P}^{n*}$ durch $[a_0 : \ldots : a_n]$ beschrieben. Der Zeilenvektor $a = (a_0, \ldots, a_n) \neq 0$ beschreibt die Linearform

$$a : K^{n+1} \;\longrightarrow\; K, \quad z = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longmapsto az = \sum_i a_i z_i.$$

Wir identifizieren $\mathbb{P}^{n*}$ mit $\mathbb{P}(K^{n+1*})$ und $\mathbb{P}^n$ mit $\mathbb{P}(K^{n+1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &= \{(H,p) \in \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n \mid p \in H\} \\ &= \{([a],[z]) \in \mathbb{P}(K^{n+1*}) \times \mathbb{P}(K^{n+1}) \mid az = 0\}\end{aligned}$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n$ mit der bihomogenen Gleichung $az = \sum_{i=0}^n a_i z_i = 0$ vom Bigrad $(1,1)$. $\mathbb{H}$ ist projektive Varietät und $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^n,\ \varphi(H,p) = p, \quad \psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^{n*},\ \psi(H,p) = H$ sind reguläre Abbildungen.

(Ist $\sigma : \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n}$ die Segreeinbettung $([a],[z]) \longmapsto [za] = [w],\ w_{ij} = z_i a_j$, so ist $\sigma(\mathbb{H}) \subset \Sigma_{n,n}$ der Hyperebenenschnitt $\Sigma_{n,n} \cap \mathbb{V}(\sum_{i=0}^n w_{ii})$.)

Behauptung: $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^{n*}$ ist ein lokaltriviales $\mathbb{P}^{n-1}$-Bündel.
Beweis: Sei $U_0 = \{[a] \in \mathbb{P}^{n*} \mid a_0 \neq 0\}$. Dann ist

$$\psi^{-1}(U_0) \ = \ \left\{ ([a],[z]) \mid a = (a_0,\ldots,a_n),\ z = (z_0,\ldots,z_n),\ z_0 = -\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_0} z_i \right\},$$

und

$$\begin{aligned}\Phi : \psi^{-1}(U_0) &\longrightarrow U_0 \times \mathbb{P}^{n-1}, \\ \Phi([a],[z]) &:= ([a],[z_1,\ldots,z_n])\end{aligned}$$

ist regulär und bijektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$\Phi^{-1}([a],[z_1,\ldots,z_n]) \ = \ \left([a], [-\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_0} z_i : z_1 : \ldots : z_n] \right),$$

also auch regulär. Φ ist somit Isomorphismus mit

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(U_0) & \xrightarrow{\ \Phi\ } & U_0 \times \mathbb{P}^{n-1} \\ & {\scriptstyle\psi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & U_0 & \end{array}$$

kommutativ. Analog behandelt man $U_i = \{[a] \in \mathbb{P}^{n*} \mid a_i \neq 0\}$. $\square$

Die Faser $\psi^{-1}([a]) = \{[a]\} \times H$, wobei $H = \mathbb{V}(\sum_{i=0}^n a_i z_i)$ die von $[a]$ definierte Hyperebene ist, wird durch φ isomorph auf $H \subset \mathbb{P}^n$ abgebildet.

$\mathbb{H}$, oder genauer $\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \subset & \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{P}^n \\ & {\scriptstyle\psi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & \mathbb{P}^{n*} & \end{array}$, heißt die *universelle Hyperebene* im $\mathbb{P}^n$.

(Universell, weil alle Hyperebenen $H \subset \mathbb{P}^n$ als Fasern der Abbildung $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^{n*}$ vorkommen.)

Da $\mathbb{P}^{n*}$ und $\mathbb{P}^{n-1}$ irreduzibel sind, und $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^{n*}$ ein lokaltriviales $\mathbb{P}^{n-1}$-Bündel ist, ist $\mathbb{H}$ auch irreduzibel.
Da die Situation symmetrisch ist, ist auch $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ein lokaltriviales $\mathbb{P}^{n-1}$-Bündel. Die Faser $\varphi^{-1}(p) = \{p\} \times p^\vee$ ist isomorph zur Hyperebene $p^\vee$ in $\mathbb{P}^{n*}$, die aus den Hyperebenen $H \in \mathbb{P}^{n*}$ durch den Punkt p gebildet wird (vgl. Lemma 2.10).

Sei nun $X \subset \mathbb{P}^n$ projektive Varietät. $\mathbb{H}_X := \varphi^{-1}(X) \subset \mathbb{H}$ ist dann eine projektive Untervarietät von $\mathbb{H}$ und

$$\psi_X \ := \ \psi|\mathbb{H}_X : \mathbb{H}_X \ \longrightarrow \ \mathbb{P}^{n*}$$

ist reguläre Abbildung mit

$$\psi_X^{-1}([a]) \;=\; \{[a]\} \times (X \cap H) \;\cong\; X \cap H \quad \text{für alle } [a] \in \mathbb{P}^{n*},\; H = \mathbb{V}(\sum_{i=0}^{n} a_i z_i).$$

Deshalb heißt $\mathbb{H}_X$, oder genauer $\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}_X & & \subset & & \mathbb{P}^{n*} \times X, \\ & {\scriptstyle\psi_X}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & & \mathbb{P}^{n*} & & \end{array}$

der *universelle Hyperebenenschnitt* von X im $\mathbb{P}^n$. Nach Definition ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_X & \subset & \mathbb{H} \\ {\scriptstyle\varphi_X}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ X & \subset & \mathbb{P}^n \end{array}$$

ein *cartesisches Diagramm*, d.h. $\mathbb{H}_X = X \underset{\mathbb{P}^n}{\times} \mathbb{H}$ (vgl. Aufgabe 7 in §5). Ist $U \subset \mathbb{P}^n$ offen und

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & U \times \mathbb{P}^{n-1} \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & U & \end{array}$$

kommutativ, so ist $V = U \cap X$ offen in X und

$$\begin{array}{ccc} \varphi_X^{-1}(V) & \xrightarrow[\cong]{\Phi'} & V \times \mathbb{P}^{n-1} \\ & {\scriptstyle\varphi_X}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & V & \end{array}$$

kommutiert, wobei Φ' von Φ durch Einschränken auf $\varphi_X^{-1}(V)$ induziert ist. Also ist auch $\varphi_X : \mathbb{H}_X \longrightarrow X$ ein lokaltriviales $\mathbb{P}^{n-1}$-Bündel über X. Ist X irreduzibel, so ist also nach Satz 7.20 auch $\mathbb{H}_X$ irreduzibel. Es gilt somit:

Satz 7.22 Der universelle Hyperebenenschnitt $\mathbb{H}_X$ einer irreduziblen projektiven Untervarietät $X \subset \mathbb{P}^n$ ist irreduzibel.

Definition 7.23 Es seien X, Y quasiprojektive Varietäten. Eine reguläre Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ heißt *projektiv*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, eine abgeschlossene Untervarietät X' von $Y \times \mathbb{P}^n$ und einen Isomorphismus $\Phi : X \longrightarrow X'$ gibt, so daß

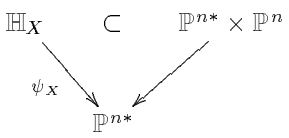
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \subset Y \times \mathbb{P}^n \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & Y & \end{array}$$

kommutiert. Sind außerdem X und Y irreduzibel und ist $\varphi : X \longrightarrow Y$ surjektiv, so heißt $\varphi : X \longrightarrow Y$ (oder kurz X) ein *projektiver Faserraum* über Y. Y ist die *Basis* und X der *Totalraum* des Faserraumes . Die Fasern

$$X_y := \varphi^{-1}(y), \quad y \in Y$$

sind projektive Varietäten.

Beispiel 7.24
Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ irreduzible projektive Varietät. X sei kein Punkt (also unendlich). Dann ist $H \cap X \neq \emptyset$ für alle Hyperebenen $H \subset \mathbb{P}^n$ und somit ist der universelle Hyperebenenschnitt



ein projektiver Faserraum über $\mathbb{P}^{n*}$ (Satz 7.22).

Wir betrachten einige konkrete Beispiele, um zu sehen, was alles passieren kann:

a) X = Gerade in $\mathbb{P}^2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_X & = & \{(L,p) \in \mathbb{P}^{2*} \times X \mid p \in L\} \subset \mathbb{P}^{2*} \times X \\ {\scriptstyle \psi_X}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^{2*} & & \end{array}$$

$$\psi_X^{-1}(L) = \begin{cases} L \cap X \quad \text{ein Punkt} & \text{falls } L \neq X \\ X \quad \text{Gerade} & \text{falls } L = X \end{cases}$$

Die „Dimension" der Faser springt!

b) X = irreduzibler Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$.
$X = \nu(\mathbb{P}^1)$, $\nu([s:t]) = [s^2 : st : t^2]$, $\mathbb{H}_X = \{(L,p) \in \mathbb{P}^{2*} \times X \mid p \in L\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \psi_X^{-1}(L) &= \mathbb{V}(xz - y^2, ax + by + cz) \quad (\text{wobei } L = \mathbb{V}(ax+by+cz)) \\ &= \begin{cases} \text{zwei Punkte} & \text{falls } L \text{ keine Tangente} \\ \text{Doppelpunkt} & \text{falls } L \text{ Tangente von } X, \text{ d.h. } 4ac - b^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{H}_X\,, \\ [\alpha:\beta],[s:t] & \longmapsto & ([\alpha t : -\alpha s + \beta t : \beta s], [s^2 : st : t^2]) \end{array}$$

ist Isomorphismus. Die „Dimension" der Faser ist konstant Null.

$$U = \mathbb{P}^{2*} \setminus \mathbb{V}(4ac - b^2) = \{L \in \mathbb{P}^{2*} \mid L \text{ keine Tangente an } X\}$$

ist offen in $\mathbb{P}^{2*}$ und für jede nichtleere offene Teilmenge $U' \subset U$ ist $\psi^{-1}(U')$ irreduzibel (als nichtleere offene Teilmenge eines irreduziblen Raumes).

Die Fasern über U' bestehen aus 2 Punkten, sind also nicht irreduzibel. Natürlich kann $\psi^{-1}(U')$ nicht zu $U' \times \{0,1\}$ isomorph sein, weil $U' \times \{0,1\}$ nicht irreduzibel ist.

$\psi_X^{-1}(U) \longrightarrow U$ ist also kein lokaltriviales Faserbündel (obwohl es eine unverzweigte 2-blättrige Überlagerung ist! Die Zariski-Topologie ist zu grob, um hier die lokale Trivialität zu erhalten).

c) $X = \Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$, $\Sigma_{1,1} = \mathbb{V}(z_0z_3 - z_1z_2) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
(mit $[s_0 : s_1], [t_0 : t_1] \longmapsto [s_0t_0 : s_0t_1 : s_1t_0 : s_1t_1]$).
Die Fasern von $\psi_X : \mathbb{H}_X \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}$ sind die „Kegelschnitte"

$$\begin{aligned} C_{[a]} &= \mathbb{V}(z_0z_3 - z_1z_2\,,\, a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3) \\ &\cong \mathbb{V}((a_0t_0 + a_1t_1)s_0 + (a_2t_0 + a_3t_1)s_1) \text{ in } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

Für $a_0a_3 - a_1a_2 \neq 0$ ist $C_{[a]}$ irreduzibel. Über $U = \mathbb{P}^{3*} \setminus \mathbb{V}(a_0a_3 - a_1a_2)$ ist $\mathbb{H}_X$ ein triviales $\mathbb{P}^1$-Bündel, wie man an der Trivialisierung

$$\begin{aligned} \Phi : U \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}_X \subset \mathbb{P}^{3*} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \\ \Phi([a], [t_0 : t_1]) &= ([a], [a_2t_0 + a_3t_1 : -a_0t_0 - a_1t_1], [t_0 : t_1]) \end{aligned}$$

sieht!

Beispiel 7.25 (Hyperflächen im $\mathbb{P}^n$)
Es sei S_d der K-Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in $Z_0, \ldots, Z_n$. Es gilt $\dim S_d = \binom{n+d}{d}$. Ist $F \in S_d \setminus \{0\}$ und

$$F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_t^{\alpha_t}$$

die Primfaktorzerlegung von F, $\alpha_i > 0$, $F_i \in S_{d_i}$ irreduzibel, $\langle F_i \rangle \neq \langle F_j \rangle$ für $i \neq j$, so sind

$$X_i = \mathbb{V}(F_i), \quad i = 1, \ldots, t$$

die verschiedenen irreduziblen Komponenten von $X = \mathbb{V}(F)$. Wir fassen nun die Hyperfläche mit der Gleichung F nicht als Menge auf, sondern als *formale* Linearkombination

$$D = \alpha_1X_1 + \cdots + \alpha_tX_t$$

der irreduziblen Komponenten. X_i wird mit der Vielfachheit α_i gezählt. D heißt ein *effektiver Divisor vom Grad d*. Ist $a \in K \setminus \{0\}$, so definiert aF denselben Divisor wie F. Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_d) &= \{\text{effektive Divisoren vom Grad } d \text{ auf } \mathbb{P}^n\} \\ &= \{\text{Hyperflächen vom Grad } d \text{ (wobei die irreduziblen Komponenten mit den aus der Primfaktorzerlegung der Gleichung ablesbaren Vielfachheiten versehen werden)}\}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{F}_d := \{([F], p) \in \mathbb{P}(S_d) \times \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0\}$$

mit der Projektion $\psi : \mathbb{F}_d \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$ heißt die *universelle Hyperebene vom Grad d* in $\mathbb{P}^n$.
ψ ist surjektiv und $\psi^{-1}([F]) = \{[F]\} \times \mathbb{V}(F)$ ist isomorph zu $\mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^n$ für alle $F \in S_d \setminus \{0\}$. Via Veroneseeinbettung $\nu_d : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ $(N = \binom{n+d}{d} - 1)$ bekommt man das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} ([F], p) & \in & \mathbb{F}_d & \hookrightarrow & \mathbb{H} \subset \mathbb{P}(S_d) \times \mathbb{P}^N \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\ p & \in & \mathbb{P}^n & \xrightarrow[\nu_d]{} & \mathbb{P}^N \end{array} .$$

$\mathbb{F}_d$ kann man sich also als universellen Hyperebenenschnitt der Veronesemannigfaltigkeit $\nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ denken. Deshalb ist $\mathbb{F}_d$ irreduzibel und $\psi : \mathbb{F}_d \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$ ein projektiver Faserraum.

Übungen

1) Zeige:

$$\begin{aligned} Z &= \{[F] \in \mathbb{P}(S_d) \mid F \text{ ist nicht irreduzibel}\}, \\ Z' &= \{[F] \in \mathbb{P}(S_d) \mid F \neq F_{\text{red}}\} \end{aligned}$$

sind abgeschlossen und $Z' \subsetneqq Z \subsetneqq \mathbb{P}(S_d)$.
Hinweis: Betrachte $\mathbb{P}(S_{d_1}) \times \mathbb{P}(S_{d_2}) \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$, $([F_1], [F_2]) \longmapsto [F_1F_2]$.

2) $A = \left\{ [F] \in \mathbb{P}(S_d) \mid \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial Z_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial Z_n}\right) \neq \emptyset \right\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}(S_d)$.
Hinweis: Deute A als Bild einer abgeschlossenen Menge $B \subset \mathbb{P}(S_d) \times \mathbb{P}^n$ unter der Projektion auf den ersten Faktor. Zeige weiter: $Z \subset A$, falls $n \geq 2$ (beachte Corollar 6.11).

Die Fasern von $\psi : \mathbb{F}_d \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$ über Punkten aus $U = \mathbb{P}(S_d) \setminus A$ sind *singularitätenfrei*.
Ist $\operatorname{char} K = 0$, so ist $U \neq 0$. Ein Beispiel ist $F = Z_0^d + \cdots + Z_n^d$. Man sagt dann: Die allgemeine Faser von $\psi : \mathbb{F}_d \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$ ist *glatt*, oder: Die allgemeine Hyperfläche vom Grad d in $\mathbb{P}^n$ ist glatt. Ist $n \geq 2$, so ist die allgemeine Hyperfläche vom Grad d in $\mathbb{P}^n$ irreduzibel.

Wir bemerken, daß es in der Regel unendlich viele Hyperflächen vom Grad d in $\mathbb{P}^n$ gibt, die paarweise isomorph sind. Für $n = 2$ ist dies der Fall, wenn $d \geq 3$.

Sehr interessant ist schon der Fall ($d = 3,\ n = 2$) der *elliptischen Kurven* in $\mathbb{P}^2$ (siehe Hartshorne: Algebraic Geometry). Analog beginnt die Geschichte in $\mathbb{P}^3$ bei $d = 4$ kompliziert zu werden. Aber auch die Geometrie der Flächen vom Grad 3 in $\mathbb{P}^3$ ist sehr interessant (siehe Reid: Undergraduate Algebraic Geometry, Hartshorne: Algebraic Geometry (p395-409), Griffiths, Harris: Principles of Algebraic Geometry (p480-489)).

Ein einfaches konkretes Beispiel sind die Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2$, die wir schon in Beispiel 1.12 betrachtet haben.

Beispiel 7.26 (der universelle Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & = & \{([a:b:c:d:e:f],[x:y:z]) \mid ax^2 + 2bxy + 2dxz + cy^2 + 2eyz + fz^2 = 0\} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{P}^5 & & (\operatorname{char} K \neq 2) \end{array}$$

Über

$$U = \left\{ [a:b:c:d:e:f] \in \mathbb{P}^5 \mid \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

sind alle Fasern von ψ isomorph zu $\mathbb{P}^1$:
$\psi^{-1}(U) \xrightarrow{\psi} U$ ist ein projektiver Faserraum mit $\psi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ für alle $p \in U$. Aber $\psi^{-1}(U) \longrightarrow U$ ist kein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel über U. Wäre das nämlich der Fall, so wäre auch die Einschränkung $\psi^{-1}(V) \longrightarrow V$ auf jede abgeschlossene Teilmenge $V \subset U$ ein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel über V. Wir wählen den Teil

$$V = \{[a:b:c:d:e:f] \in \mathbb{P}^5 \mid b = d = e = 0,\ acf \neq 0\}.$$

Dann ist (mit $u = a,\ v = c,\ w = f$)

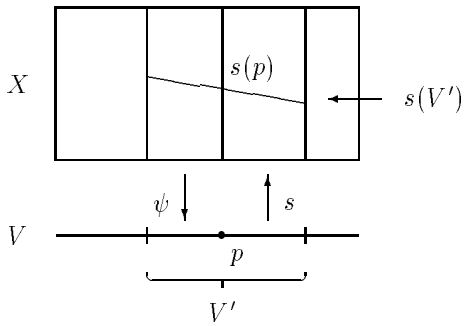
$$\begin{array}{lcl} X & := & \psi^{-1}(V) \\ & = & \left\{ ([u:v:w],[x:y:z]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid ux^2 + vy^2 + wz^2 = 0,\ uvw \neq 0 \right\}, \text{ und} \\ X & \xrightarrow{\psi} & V \text{ ist} \end{array}$$

ein projektiver Faserraum mit $\psi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ für alle $p \in V$, aber kein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel über V. Es gilt sogar:
Behauptung: Ist $\emptyset \neq V' \subset V$ eine beliebige offene Menge, so gibt es *keine* reguläre Abbildung

$$s : V' \longrightarrow X \quad \text{mit } \psi(s(p)) = p \text{ für alle } p \in V'.$$

Es sei $i : V' \longrightarrow V$ die Inklusion. Eine reguläre Abbildung $s : V' \longrightarrow X$ mit $\psi \circ s = i$ heißt *regulärer Schnitt* von $X \longrightarrow V$ über V'.

(Wäre $X \xrightarrow{\psi} V$ über V' trivial, so würde es natürlich eine regulären Schnitt von $X \longrightarrow V$ über V' geben.)



Beweis: Annahme: Es gibt eine reguläre Abbildung $s : V' \longrightarrow X$ mit $\psi \circ s = i$. Dann ist $\varphi = pr_2 \circ s : V' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ regulär mit

$$uF^2(u,v,w) + vG^2(u,v,w) + wH^2(u,v,w) = 0$$

für $[u : v : w] \in V'' \subset V'$, wenn $\varphi | V'' = [F : G : H]$ mit homogenen Polynomen $F, G, H \in K[u,v,w]$ vom selben Grad. Es gilt also

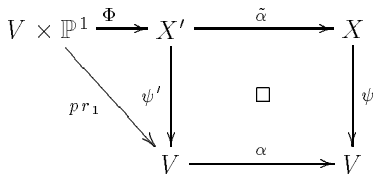
$$uF^2 + vG^2 + wH^2 \;=\; 0 \quad \text{in } K[u,v,w].$$

Als Übung zeige man, daß dann $F = G = H = 0$ gelten muß, womit sich ein Widerspruch ergeben hat.

Weiter zeige man, daß der Faserraum $X \xrightarrow{\psi} V$ zu einem trivialen $\mathbb{P}^1$-Bündel über V wird, wenn man ihn längs der „unverzweigten Überlagerung“

$$\alpha : V \;\longrightarrow\; V, \quad \alpha([u : v : w]) \;=\; [u^2 : v^2 : w^2]$$

zurückzieht:



$$X' \;=\; \{([u : v : w], [x : y : z]) \mid u^2x^2 + v^2y^2 + w^2z^2 = 0\}.$$

Bestimme Φ, so daß $\psi' \circ \Phi = pr_1$.
(Ansatz :

$$\begin{aligned} \Phi([u : v : w][s : t]) &= ([u : v : w][x : y : z]), \\ s^2 &= \lambda(ux - \sqrt{-1}vy), \\ t^2 &= \lambda(ux + \sqrt{-1}vy), \\ st &= \lambda\sqrt{-1}wz, \text{ wobei } \lambda \in K^*.) \end{aligned}$$

Übungen

1) Es sei $X = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^n$ eine irreduzible Hyperfläche vom Grad d in $\mathbb{P}^n$ und

$$\psi_X : \mathbb{H}_X \longrightarrow \mathbb{P}^{n*}$$

der universelle Hyperebenenschnitt von X, wobei $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$.
Für $H \in \mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i)$, $H = \mathbb{V}(a_0 Z_0 + \cdots + a_n Z_n)$, mit $a_i \neq 0$, sei

$$\begin{aligned} F|H &:= F\left(Z_0, \ldots, Z_{i-1}, -\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_j}{a_i} Z_j, Z_{i+1}, \ldots, Z_n\right) \\ &\in K[Z_0, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n]. \end{aligned}$$

Zeige:

$$U_i = \{H \in \mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i) \mid F|H \text{ ist irreduzibel}\}$$

ist offen in $\mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i)$ für $i = 0, \ldots, n$, und es gilt

$$U_i \cap (\mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_j)) = U_j \cap (\mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i)) \quad \text{für alle } i, j = 0, \ldots, n.$$

Hinweis: Betrachte die kanonische Abbildung $H \longmapsto [F|H]$ von $\mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i)$ in den Raum der Hyperflächen in $\mathbb{P}^{n-1}$ und das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \psi_X^{-1}(\mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i)) & \longrightarrow & \mathbb{F}_d(\mathbb{P}^{n-1}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \psi \\ \mathbb{P}^{n*} \setminus \mathbb{V}(a_i) & \longrightarrow & \mathbb{P}(K[Z_0, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n]_d). \end{array}$$

Benutze nun die Übung 1 auf Seite 118. $U = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ ist die offene Menge der Hyperebenen H, für die $F|H$ irreduzibel ist.

Bemerkung: Ist $\operatorname{char} K = 0$ und $n \geq 3$, so ist $U \neq \emptyset$, wie später gezeigt wird. Man kann also sagen:
Der allgemeine Hyperebenenschnitt $X \cap H$ einer irreduziblen Hyperfläche $X \subset \mathbb{P}^n$ ist irreduzibel falls $n \geq 3$ und $\operatorname{char} K = 0$.

(Dies folgt aus dem Satz über die „generische Glattheit“ und Corollar 6.9. Siehe auch Harris (p176), Hartshorne (p272); vgl. *Satz von Sard.*)

2) Es sei $\mathbb{H} \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^{n*}$ die universelle Hyperebene. Zeige: Es gibt (genau dann) eine reguläre Abbildung

$$s : \mathbb{P}^{n*} \longrightarrow \mathbb{H} \quad \text{mit } \psi \circ s = id_{\mathbb{P}^{n*}},$$

wenn n ungerade ist.
Hinweis: Sei $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ die andere Projektion, $f := \varphi \circ s : \mathbb{P}^{n*} \longrightarrow \mathbb{P}^n$. Man mache den Ansatz: $f = [A]$ mit einer Matrix $A \in GL_{n+1}(K)$.

$$A : (K^{n+1})^* \longrightarrow K^{n+1}, \quad f([a]) = [Aa^t].$$

$s([a]) \in \mathbb{H}$ bedeutet $([a], f([a])) \in \mathbb{H}$, also $aAa^t = 0$.

8 Rationale Funktionen und rationale Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir rationale Funktionen auf irreduziblen Varietäten und rationale Abbildungen zwischen irreduziblen Varietäten ein. Die auftretenden Phänomene werden an einfachen Beispielen erläutert.

Es sei im folgenden K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition + Lemma 8.1 Es sei X eine irreduzible quasiprojektive Varietät. Sind $U, V \subset X$ nichtleere offene Mengen und $f \in \mathcal{O}(U),\ g \in \mathcal{O}(V)$, so heißen f und g äquivalent ($f \sim g$) genau dann, wenn $f|U \cap V = g|U \cap V$. „$\sim$" ist Äquivalenzrelation auf $\bigcup_{\substack{\emptyset \neq U \subset X \\ U \text{ offen}}} \mathcal{O}(U)$.
Die Äquivalenzklasse $r := [f]$ von $f \in \mathcal{O}(U)$ heißt die von f definierte *rationale Funktion* auf X.

Mit $K(X)$ bezeichnen wir die Menge aller rationalen Funktionen auf X.

$$K(X) \ = \ \lim_{\substack{\emptyset \neq U \subset X \\ U \text{ offen}}} \mathcal{O}(U) \ := \ \bigcup_{\substack{\emptyset \neq U \subset X \\ U \text{ offen}}} \mathcal{O}(U) / \sim$$

ist mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} [f] + [g] \ &:= \ [f|U \cap V + g|U \cap V] \\ [f] \cdot [g] \ &:= \ [(f|U \cap V)(g|U \cap V)] \end{aligned}$$

für $f \in \mathcal{O}(U),\ g \in \mathcal{O}(V)$ ein Körper. $K(X)$ heißt der *Funktionenkörper* von X (oder der *Körper der rationalen Funktionen* auf X). Es gilt:

(1) Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}(U) \longrightarrow K(X),\ f \longmapsto [f]$ ist injektiv für jede offene Menge $U \subset X,\ U \neq \emptyset$.

(2) Die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V),\ f \longmapsto f|V$ ist für jedes Paar offener Mengen U, V mit $\emptyset \neq V \subset U \subset X$ injektiv („Identitätssatz").

(3) Für $x \in X$ und für alle offenen Umgebungen V von x erhält man kanonische injektive Homomorphismen

$$\mathcal{O}(V) \ \longrightarrow \ \mathcal{O}_x \ = \ \lim_{\substack{x \in U \subset X \\ U \text{ offen}}} \mathcal{O}(U) \ \longrightarrow \ K(X).$$

(4) Wegen (1) – (3) kann man sich alle Ringe $\mathcal{O}(U)$ und $\mathcal{O}_x$ als Unterringe von $K(X)$ denken. Es gilt dann $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$ für jede offene Menge $U \subset X$, und

$$\mathcal{O}_x \ = \ \{r \in K(X) \mid r \text{ ist in } x \text{ regulär}\},$$

wobei r in x *regulär* heißt, wenn eine offene Umgebung U von x und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ existieren, so daß $r = [f]$. $r(x) := f(x)$ heißt dann der *Wert* von r in x.

$$D_r \ := \ \{x \in X \mid r \text{ ist regulär in } x\}$$

heißt *maximaler Definitionsbereich* von r. D_r ist offen in X.
r kann als reguläre Funktion auf D_r aufgefaßt werden.

(5) Für jede affine offene Menge $U \subset X,\ U \neq \emptyset$, gilt: $K(X)$ ist der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(U)$, also

$$K(X) \ = \ \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}(U),\ g \neq 0 \right\},$$

wenn man $\mathcal{O}(U)$ als Teilmenge von $K(X)$ auffaßt.

Beweis:

zu (2): Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $f|V = 0$. $W := \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ ist offen in U, und es gilt $W \cap V = \emptyset$. Da U irreduzibel ist (denn X ist es!) und $V \neq \emptyset$, muß $W = \emptyset$ gelten; also $f = 0$.

zu (1): Das folgt unmittelbar aus (2).

(3) und (4) sind jetzt offensichtlich.

Wir zeigen noch, daß $K(X)$ ein Körper ist: Sei $f \in \mathcal{O}(U),\ f \neq 0,\ V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Ist $r = [f]$, so ist $r^{-1} = [(f|V)^{-1}]$.

zu (5): Es sei $r \in K(X),\ U \subset X$ affin und offen. Dann gibt es ein Element $g \in \mathcal{O}(U)$, so daß $U_g = \{x \in U \mid g(x) \neq 0\} \subset U \cap D_r$; also $r \in \mathcal{O}(U_g)$. Da $\mathcal{O}(U_g) = \mathcal{O}(U)_g = \left\{ \frac{f}{g^k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{O}(U) \right\}$, ist $r = \frac{f}{g^m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $f \in \mathcal{O}(U)$. $K(X)$ ist also der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(U)$. $\square$

Wir bemerken, daß für jede offene Menge $U \subset X,\ U \neq \emptyset$

$$K(U) \;=\; K(X)$$

gilt. Insbesondere gilt: Ist $X \subset \mathbb{A}^n$ eine irreduzible affine Varietät und $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$ der projektive Abschluß ($\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$, $(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto [1 : z_1 : \ldots : z_n]$) von X, so ist $\overline{X}$ ebenfalls irreduzibel und X offen in $\overline{X}$, und es gilt $K(\overline{X}) = K(X) =$ Quotientenkörper von $A(X)$.

Beispiel 8.2

Es sei $X := \mathbb{V}(y^2 - x(x-1)(x+1)) \subset \mathbb{A}^2$. $y^2 - x(x-1)(x+1) \in K[x,y]$ ist irreduzibel (Übung), und somit ergibt sich aus dem Hilbertschen Nullstellensatz

$$I(X) \;=\; \langle y^2 - x(x-1)(x+1) \rangle.$$

Sei $\xi = x|X,\ \eta = y|X$. Dann ist

$$\mathcal{O}(X) \;=\; A(X) \;=\; K[\xi, \eta] \;=\; K[x,y] \big/ \langle y^2 - x(x-1)(x+1) \rangle$$

und

$$\begin{aligned} K(X) &= K(\xi)[\eta] = \{s_0 + s_1\eta \mid s_0, s_1 \in K(\xi)\} \\ &\cong K(x)[y] \big/ \langle y^2 - x(x-1)(x+1) \rangle. \end{aligned}$$

$\xi \in K(X)$ ist regulär auf X mit der Nullstelle $p_0 = (0,0)$. ξ^{-1} ist regulär auf $X \setminus \{p_0\}$.
Sei jetzt $\overline{X} = \mathbb{V}(zy^2 - x(x-z)(x+z)) \subset \mathbb{P}^2$ der projektive Abschluß, $X = \overline{X} \cap \{z \neq 0\}$. $p_\infty = [0 : 1 : 0]$ ist der einzige ∞-ferne Punkt von $\overline{X}$. ξ^{-1} ist regulär in p_∞, denn es gilt $\xi = \frac{x}{z}\Big| X$ als Funktion der homogenen Koordinaten $[x : y : z]$ und

$$\frac{x}{z}\Big| X \cap \{y \neq o\} \;=\; \frac{xy^2}{zy^2}\Big| X \cap \{y \neq 0\} \;=\; \frac{y^2}{(x-z)(x+z)}\Big| X \cap \{y \neq 0\}.$$

Es folgt $\xi^{-1}([0:1:0]) = \frac{(x-z)(x+z)}{y^2}([0:1:0]) = 0$. Als rationale Funktion auf $\overline{X}$ hat somit ξ^{-1} den maximalen Definitionsbereich $\overline{X} \setminus \{p_0\}$. Da $\xi^{-1}(p_\infty) = 0$, ist ξ im Punkt p_∞ nicht regulär:

$$D_\xi \;=\; \overline{X} \setminus \{p_\infty\}, \quad D_{\xi^{-1}} \;=\; \overline{X} \setminus \{p_0\}.$$

Ebenso kann man $\eta \in K(X) = K(\overline{X})$ untersuchen ($\eta = \frac{y}{z}\big| X,\ \eta^{-1} = \frac{z}{y}\big| X$ ist regulär in p_∞). Es gilt

$$D_\eta \ = \ \overline{X} \setminus \{p_\infty\}, \quad D_{\eta^{-1}} \ = \ \overline{X} \setminus \{p_0, p_1, p_2\},$$

wobei $p_0 = (0,0),\ p_1 = (1,0),\ p_2 = (-1,0)$ in $\{z \neq 0\}$.

$$r \ = \ \frac{\xi}{\eta} \ = \ \frac{x}{y}|X \ \in K(X)$$

hat maximalen Definitionsbereich

$$D_r \ = \ \overline{X} \setminus \{p_1, p_2\}.$$

Begründung: Da $r = \xi\eta^{-1}$ und $D_r \supset D_\xi \cap D_{\eta^{-1}} = \overline{X} \setminus \{p_0, p_1, p_2, p_\infty\}$, muß man nur noch zeigen, daß r in p_0 und p_∞ regulär ist und r^{-1} in p_1, p_2 regulär mit Wert 0 ist. Da $r = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\eta}{(\xi-1)(\xi+1)}$, folgt $r(p_0) = 0$ und $r(p_\infty) = \frac{x}{y}([0:1:0]) = \frac{0}{1} = 0$. Aus $r^{-1} = \frac{\eta}{\xi}$ folgt $r^{-1}(p_1) = r^{-1}(p_2) = 0$. Offensichtlich kann man

$$r : \overline{X} \setminus \{p_1, p_2\} \ \longrightarrow \ \mathbb{A}^1$$

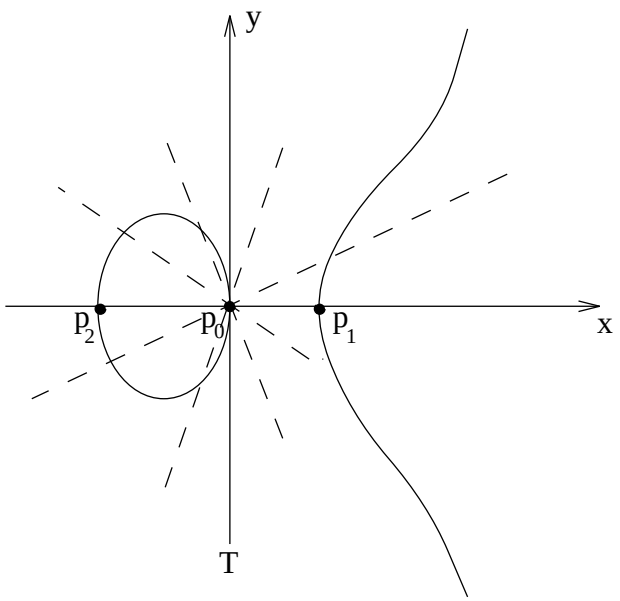
zu einer regulären Abbildung

$$r : \overline{X} \ \longrightarrow \ \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$$

fortsetzen durch $r(p_i) = \infty$ für $i = 1, 2$; in homogenen Koordinaten:

$$r([x:y:z]) \ = \ \begin{cases} [x:y] & \text{für} \quad [x:y:z] \neq p_0 \\ [yz:(x-z)(x+z)] & \text{für} \quad [x:y:z] \notin \{p_1, p_2\}. \end{cases}$$

r ist also die Projektion der elliptischen Kurve $\overline{X} \subset \mathbb{P}^2$ auf die Gerade $\mathbb{P}^1 = \mathbb{V}(z)$ vom Projektionszentrum $p_0 \in \overline{X}$ aus.
Geometrisch findet man den Wert $r(p_0)$ als Schnittpunkt der projektiven Tangente $T \subset \mathbb{P}^2$ von $\overline{X}$ im Punkt p_0 mit der Gerade $\mathbb{V}(z)$, wie man leicht nachrechnet!



$\mathbb{V}(z)$, die ∞-ferne Gerade, kann man in der xy-Ebene auffassen als die Menge der affinen Geraden durch $p_0 = (0,0)$. Wir bemerken noch:
$r : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ist eine surjektive reguläre Abbildung und für $p = [a : b] \in \mathbb{P}^1$ gilt:
$r^{-1}(p) = \mathbb{V}(y^2z - x(x-z)(x+z), bx - ay)$ besteht aus zwei verschiedenen Punkten $\iff$ $p \notin \{[a:1] \mid 4a^4+1 = 0\}$. r ist eine zweiblättrige Überlagerung mit 4 Verzweigungspunkten. Die Körpererweiterung $K(\frac{\xi}{\eta}) \subset K(\xi, \eta)$ ist vom Grad 2. Überhaupt besitzt jede reguläre 2-blättrige Überlagerung $\varphi : \overline{X} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{P}^1$ genau 4 Verzweigungspunkte (vgl. Hurwitzformel).

Beispiel 8.3 (Rationale Funktionen auf $\mathbb{P}^n$)
Es seien $Z_0, \ldots, Z_n$ die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^n$. Dann gilt:

$$z_i \;=\; \frac{Z_i}{Z_0} \;\in K(\mathbb{P}^n)$$

mit $D_{z_i} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_0) = \mathbb{A}^n$. $K(\mathbb{P}^n)$ ist der von $z_1, \ldots, z_n$ erzeugte Körper.

$$\begin{aligned} K(\mathbb{P}^n) &= K(z_1, \ldots, z_n) \;=\; \text{Quotientenkörper von } K[z_1, \ldots, z_n] \\ &= K\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \ldots, \frac{Z_n}{Z_0}\right) \\ &= \left\{ \frac{F}{G} \;\middle|\; F, G \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \text{ homogen mit} \deg(F) = \deg(G) \text{ und } G \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\frac{z_1}{z_2 z_3} \;=\; \frac{Z_1}{Z_0} \cdot \frac{Z_0^2}{Z_2 Z_3} \;=\; \frac{Z_1 Z_0}{Z_2 Z_3} \text{ usw.}$$

Da $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ faktoriell ist, besitzt jede rationale Funktion $r \neq 0$ auf $\mathbb{P}^n$ eine bis auf Multiplikation mit Konstanten $\lambda \in K^*$ eindeutige Darstellung

$$r \;=\; \frac{F}{G}$$

mit teilerfremden homogenen Polynomen $F, G \in K[Z_0, \ldots, Z_n] \setminus \{0\}$ vom selben Grad. Es gilt:

$$D_r = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(G).$$

$\mathbb{V}(G)$ heißt die *Polstellenmenge*, $\mathbb{V}(F)$ die *Nullstellenmenge* und $\mathbb{V}(F,G) = \mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(G)$ die *Unbestimmtheitsmenge* von r r definiert eine reguläre Abbildung

$$\begin{aligned} r : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F,G) &\longrightarrow \mathbb{P}^1, \\ r(p) &= [F(p) : G(p)] = \begin{cases} [\frac{F(p)}{G(p)} : 1] & , \text{ falls } \; G(p) \neq 0 \\ [1:0] = \infty & , \text{ falls } \; G(p) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Es sei $d = \deg(F) = \deg(G)$, und

$$F \;=\; \prod_{i=1}^{s} F_i^{\alpha_i}, \quad G \;=\; \prod_{j=1}^{t} G_j^{\beta_j}$$

seien die Primfaktorzerlegungen von F und G. $X_i = \mathbb{V}(F_i)$ und $Y_j = \mathbb{V}(G_j)$ sind dann die irreduziblen Komponenten von $\mathbb{V}(F)$ bzw. $\mathbb{V}(G)$.

$$D_0 \;=\; \sum_{i=1}^{s} \alpha_i X_i$$

heißt der *Nullstellendivisor* von r und

$$D_\infty \;=\; \sum_{j=1}^{t} \beta_j Y_j$$

der *Polstellendivisor*. Die formale ganzzahlige Linearkombination

$$D \;=\; D_0 - D_\infty \;=\; \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_s X_s + (-\beta_1) Y_1 + \cdots + (-\beta_t) Y_t$$

heißt der *Divisor* von r und wird auch mit (r) bezeichnet.
Man definiert $\mathrm{Div}(\mathbb{P}^n)$ als die freie abelsche (additiv geschriebene) Gruppe mit der Menge der irreduziblen Hyperflächen in $\mathbb{P}^n$ als Basis. Die Elemente

$$D \;=\; \sum_{\substack{Y \subset \mathbb{P}^n \\ \text{irr. Hyperfl.}}} \alpha_Y Y \;\in \mathrm{Div}\,(\mathbb{P}^n)$$

mit $\alpha_Y \in \mathbb{Z}$, $\alpha_Y = 0$ für alle bis auf endlich viele Y, heißen *Divisoren* auf $\mathbb{P}^n$.

$$\deg(D) \;:=\; \sum_{\substack{Y \subset \mathbb{P}^n \\ \text{irr. Hyperfl.}}} \alpha_Y$$

heißt der *Grad* von D. Ist

$$D' \;=\; \sum_{\substack{Y \subset \mathbb{P}^n \\ \text{irr. Hyperfl.}}} \alpha'_Y Y \;\in \mathrm{Div}\,(\mathbb{P}^n),$$

so ist

$$D + D' \;=\; \sum_{Y} (\alpha_Y + \alpha'_Y) Y.$$

Man erhält die exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{P}^n)^* & \longrightarrow & K(\mathbb{P}^n)^* & \longrightarrow & \mathrm{Div}\,(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\deg} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0. \\ & & = K^* & & & & & & & & \\ & & & & r & \longmapsto & (r) & & & & \end{array}$$

Ist $n = 1$, so ist hier die bekannte Aussage der Funktionentheorie enthalten, daß eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ genau so viele Pole wie Nullstellen (jeweils mit Vielfachheiten gezählt) besitzt: Der Grad des Divisors $(f) = D_0 - D_\infty$ einer rationalen Funktion ist Null.
Als konkretes Beispiel betrachten wir etwa $\mathbb{P}^3$ mit den homogenen Koordinaten x, y, z, w und

$$r \;=\; \frac{xw - yz}{y^2} \;\in K(\mathbb{P}^3).$$

Da $xw - yz$ und y^2 zueinander teilerfremd sind, gilt

$$D_0 \;=\; \mathbb{V}(xw - yz) \;=\; \Sigma_{1,1} \;\subset\; \mathbb{P}^3$$

und

$$D_\infty \;=\; 2H, \text{ wobei } H := \mathbb{V}(y) \subset \mathbb{P}^3.$$

Die Unbestimmtheitsmenge von r ist

$$\mathbb{V}(xw - yz, y^2) \;=\; \mathbb{V}(xw - yz, y) = \mathbb{V}(xw, y);$$

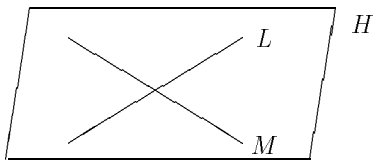
für den Ebenenschnitt gilt

$$\Sigma_{1,1} \cap H \;=\; \mathbb{V}(x, y) \cup \mathbb{V}(w, y) \;=\; L \cup M.$$

r kann als die reguläre Abbildung

$$\varphi \;=\; [xw - yz : y^2] : \mathbb{P}^3 \setminus (L \cup M) \;\longrightarrow\; \mathbb{P}^1$$

aufgefaßt werden; r läßt sich aber nicht in Punkten von $L \cup M$ regulär fortsetzen.



Die Faser $\varphi^{-1}([a : b])$ liegt in der Fläche mit der Gleichung $F_{a:b} = b(xw - yz) - ay^2$ und

$$\overline{\varphi^{-1}([a : b])} \;=\; \varphi^{-1}([a : b]) \cup L \cup M \;=\; \mathbb{V}(F_{a:b}).$$

Die Flächen $\mathbb{V}(F_{a:b})$, $[a : b] \in \mathbb{P}^1$, bilden ein sogenanntes *Büschel* von Quadriken in $\mathbb{P}^3$.
Für $n \geq 2$ hat jede rationale Funktion $r \in K(\mathbb{P}^n)$ Unbestimmtheitsstellen!

Definition 8.4 Es sei X eine irreduzible quasiprojektive Varietät und Y eine beliebige quasiprojektive Varietät.
Eine *rationale Abbildung* φ von X nach Y (in Zeichen: $\varphi : X \dashrightarrow Y$) wird durch eine reguläre Abbildung $f : U \longrightarrow Y$ auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $U \subset X$ definiert. Eine andere reguläre Abbildung $g : V \longrightarrow Y$ auf einer offenen Menge $V \subset X$, $V \neq \emptyset$, definiert dieselbe rationale Abbildung wie f, wenn

$$f|U \cap V \;=\; g|U \cap V$$

gilt. Mit $\mathrm{Rat}\,(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller rationalen Abbildungen von X nach Y.

$$\mathrm{Rat}\,(X, Y) \;=\; \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ U \neq \emptyset}} \mathrm{Hom}\,(U, Y).$$

In kanonischer Weise ist für $\emptyset \neq V \subset U \subset X$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}\,(U, Y) & \subset & \mathrm{Hom}\,(V, Y) & \subset & \mathrm{Rat}\,(X, Y), \\ f & \longmapsto & f|V. & & \end{array}$$

Ist $\varphi \in \mathrm{Rat}\,(X, Y)$, so ist im allgemeinen φ keine Abbildung mit X als Definitionsbereich; vielmehr ist die offene Menge

$$D_\varphi \;:=\; \bigcup_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ \exists\, \text{Repräsentant} \\ f \in \mathrm{Hom}(U, Y) \text{ von } \varphi}} U \quad (= \text{maximales } U, \text{ so daß } \varphi \in \mathrm{Hom}\,(U, Y))$$

der maximale Definitionsbereich von φ. D_φ heißt auch der *Regularitätsbereich* von $\varphi : X \dashrightarrow Y$. Wir schreiben auch $\varphi : D_\varphi \longrightarrow Y$. φ ist genau dann regulär, wenn $X = D_\varphi$ gilt.
Seien X, Y irreduzibel, Z beliebig. Zwei rationale Abbildungen

$$\varphi : X \dashrightarrow Y, \quad \psi : Y \dashrightarrow Z$$

lassen sich komponieren $:\Longleftrightarrow \varphi(D_\varphi) \cap D_\psi \neq \emptyset$ (d.h. $\exists$ Repräsentanten $f : U \longrightarrow Y$ von φ und $g : V \longrightarrow Z$ von ψ, so daß $f^{-1}(V) \neq \emptyset$).

$$g \circ f | f^{-1}(V) : f^{-1}(V) \longrightarrow Z$$

ist dann Repräsentant einer rationalen Abbildung

$$\chi : X \dashrightarrow Z.$$

χ heißt die Komposition von φ und ψ und wird mit $\psi \circ \varphi$ bezeichnet (dies ist wohldefiniert). Es gilt $D_{\psi\circ\varphi} \supset f^{-1}(V)$.

Beispiele 8.5 Seien X, Y, Z irreduzibel, quasiprojektiv.

1) Ist $\varphi : X \dashrightarrow Y$ rational, $\psi : Y \longrightarrow Z$ regulär, so ist $\psi \circ \varphi : X \dashrightarrow Z$ definiert.
Es gilt: $D_\varphi \subset D_{\psi\circ\varphi}$. Im allgemeinen gilt keine Gleichheit. $\psi \circ \varphi$ kann regulär sein, ohne daß φ es ist! (Als triviales Beispiel wähle man für ψ eine konstante Abbildung.)

2) Ist $Y = U \cup A,\ A \cap U = \emptyset,\ A \subset Y$ abgeschlossen, so gilt

$$\mathrm{Rat}\,(X, Y) \ = \ \mathrm{Rat}\,(X, A) \cup \mathrm{Rat}\,(X, U) \quad \text{(disjunkt)}.$$

Ist $f : V \longrightarrow Y$ ein Repräsentant von $\varphi \in \mathrm{Rat}\,(X, Y)$ mit $f(V) \subset A$, so gilt dies für jeden Repräsentanten von φ. Sei nämlich $g : V' \longrightarrow Y$ mit $g|V \cap V' = f|V \cap V'$, dann ist, weil $V \cap V'$ dicht in V und in V',

$$g(V') \subset \overline{g(V')} \ = \ \overline{g(V \cap V')} \ = \ \overline{f(V \cap V')} \ = \ \overline{f(V)} \subset \overline{A} \ = \ A.$$

Ist nun $\varphi \in \mathrm{Rat}\,(X, Y) \setminus \mathrm{Rat}\,(X, A)$, so gibt es einen Repräsentanten $f : V \longrightarrow Y$ von φ mit $f(V) \not\subset A$; also ist $W := f^{-1}(U) \neq \emptyset$ offen und $f|W : W \longrightarrow U$ Repräsentant von $\varphi \in \mathrm{Rat}\,(X, U)$. Insbesondere gilt für $\mathbb{P}^m = \mathbb{A}^m \cup \mathbb{P}^{m-1}$

$$\mathrm{Rat}\,(X, \mathbb{P}^m) \ = \ \mathrm{Rat}\,(X, \mathbb{A}^m) \cup \mathrm{Rat}\,(X, \mathbb{P}^{m-1}),$$

$$K(X) \ = \ \mathrm{Rat}\,(X, \mathbb{A}^1) \ = \ \mathrm{Rat}\,(X, \mathbb{P}^1) \setminus \{\infty\},$$

wobei unter ∞ die konstante Abbildung auf X mit Wert ∞ zu verstehen ist.

3) Seien $X \subset \mathbb{P}^n,\ Y \subset \mathbb{P}^m$ irreduzibel und quasiprojektiv, $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n,\ \overline{Y} \subset \mathbb{P}^m$ ihre projektiven Abschlüsse. Dann gilt (mit $A = \overline{Y} \setminus Y$)

$$\mathrm{Rat}\,(X, Y) \ = \ \mathrm{Rat}\,(X, \overline{Y}) \setminus \mathrm{Rat}\,(X, A) \subset \mathrm{Rat}\,(X, \overline{Y}) \ = \ \mathrm{Rat}\,(\overline{X}, \overline{Y}) \subset \mathrm{Rat}\,(\overline{X}, \mathbb{P}^m).$$

Wir brauchen nur rationale Abbildungen zwischen *projektiven* irreduziblen Varietäten zu studieren.

Definition 8.6 Es seien $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ irreduzible abgeschlossene Varietäten.
Ein $(m+1)$-Tupel $(F_0, \ldots, F_m)$ homogener Polynome $F_0, \ldots, F_m \in K[Z_0, \ldots, Z_n]_d$ vom Grad d mit $U := X \setminus \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) \neq \emptyset$ definiert eine reguläre Abbildung

$$\begin{array}{rcll} f : U & \longrightarrow & \mathbb{P}^m & \text{mit} \\ f(p) & = & [F_0(p) : \ldots : F_m(p)] & \text{für } p \in U, \end{array}$$

und f repräsentiert eine rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$. Diese Abbildung wird im folgenden mit

$$[F_0 : \ldots : F_m]|X : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$$

bezeichnet. Ist $X = \mathbb{P}^n$, so schreiben wir kurz $[F_0 : \ldots : F_m]$.

Ist $f(V) \subset Y$ für eine offene Menge $V \subset U, V \neq \emptyset$, so ist (weil V dicht in U liegt, und Y abgeschlossen in $\mathbb{P}^m$ ist) auch $f(U) \subset f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)} \subset Y$.
Weiter gilt dann für $G \in I(Y) \subset K[W_0, \ldots, W_m]$

$$G(F_0, \ldots, F_m)|U = 0,$$

und, da U dicht in X ist, auch $G(F_0, \ldots, F_m)|X = 0$, d.h. $G(F_0, \ldots, F_m) \in I(X)$. Also hat man: Genau dann, wenn die Aussage

$$\forall G \in I(Y) : \; G(F_0, \ldots, F_m) \in I(X)$$

gilt, ist

$$[F_0 : \ldots : F_m]|X : X \dashrightarrow Y$$

eine rationale Abbildung von X nach Y. Jede rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ kann man so beschreiben. Jedoch ist das Tupel $(F_0, \ldots, F_m)$ natürlich nicht eindeutig durch φ bestimmt. Offensichtlich gilt

(1) $[F_0 : \ldots : F_m]|X = [FF_0 : \ldots : FF_m]|X$ für jedes homogene Polynom $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ mit $X \setminus V(F) \neq \emptyset$ (d.h. $F \notin I(X)$).

(2) $[F_0 : \ldots : F_m]|X = [F_0 + H_0 : \ldots : F_m + H_m]|X$ für alle $H_i \in I(X)$ homogen vom selben Grad wie F_i.

Lemma 8.7 Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossene, irreduzible Untervarietät. $F_0, \ldots, F_m \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad d mit $X \setminus \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) \neq \emptyset$ und $G_0, \ldots, G_m \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad e mit $X \setminus \mathbb{V}(G_0, \ldots, G_m) \neq \emptyset$. Dann gilt

$$[F_0, \ldots, F_m]|X \; = \; [G_0, \ldots, G_m]|Xquad\text{in Rat}\,(X, \mathbb{P}^m)$$

genau dann, wenn gilt: $\exists\, G, F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen mit $G, F \notin I(X)$ und $H_0, \ldots, H_m \in I(X)$ homogen (vom Grad $d + \deg(G)$), so daß $FG_i = GF_i + H_i$ für alle $i = 0, \ldots, m$.

Beweis:
„$\Leftarrow$“ ist trivial.

„$\Rightarrow$“ Es sei $\emptyset \neq V \subset X$ offen, so daß

$$[F_0(p) : \ldots : F_m(p)] = [G_0(p) : \ldots : G_m(p)] \quad \forall\, p \in V.$$

Œ sei (eventuell Indizes umbenennen) $F_0 \notin I(X)$. $V' = V \setminus \mathbb{V}(F_0)$ ist nicht leer, weil V dicht in X ist. Es gilt dann:

$$F_0(p) \neq 0 \quad \forall\, p \in V',$$

also auch $G_0(p) \neq 0\ \forall\, p \in V'$. Es sei $g_i = \frac{G_i}{G_0}$, $f_i = \frac{F_i}{F_0}$, also $g_i, f_i \in \mathcal{O}(V')$. Es gilt

$$(f_1, \ldots, f_m) \;=\; (g_1, \ldots, g_m) : V' \;\longrightarrow\; \mathbb{A}^m.$$

Aus $f_i = g_i$ auf V' folgt: $(G_0F_i - F_0G_i)|V' = 0$. Da V' dicht in X ist, folgt

$$G_0F_i - F_0G_i \in I(X).$$

Setze $G := G_0,\ F := F_0,\ H_i := G_0F_i - F_0G_i$. Dann gilt

$$FG_i = GF_i + H_i \quad \forall\, i = 0, \ldots, m. \quad \square$$

Corollar 8.8 Zu jeder rationalen Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ gibt es bis auf Multiplikation mit Konstanten $\lambda \in K^*$ genau ein $(m+1)$-Tupel teilerfremder homogener Polynome $F_0, \ldots, F_m \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ vom selben Grad, so daß

$$\varphi \;=\; [F_0 : \ldots : F_m].$$

Es gilt dann: $D_\varphi = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m)$.

Beweis: Dies folgt aus 8.7 und der Tatsache, daß $K[Z_0, \ldots, Z_n]$ ein faktorieller Ring ist. $\square$

Corollar 8.9 Zu jeder regulären Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^m)$ gibt es bis auf Multiplikation mit Konstanten genau ein $(m+1)$-Tupel $F_0, \ldots, F_m$ homogener Polynome vom selben Grad in $K[Z_0, \ldots, Z_n]$, so daß $\mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) = \emptyset$ und $\varphi = [F_0 : \ldots : F_m]$.

Beweis: Ist $\mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) = \emptyset$, so sind $F_0, \ldots, F_m$ teilerfremd. $\square$

Bemerkung 8.10 Ist $m < n$, so ist jede reguläre Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m$ konstant. Dies ergibt sich später leicht mit Hilfe der Dimensionstheorie (siehe Harris p134 ff).
Ist $\varphi = [F_0 : \ldots : F_m] : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ eine rationale Abbildung mit teilerfremden $F_0, \ldots, F_m$ vom Grad $d > 0$, so gilt

$$\dim \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) \geq n - m - 1.$$

Insbesondere ist $\mathbb{V}(F_0, \ldots, F_m) \neq \emptyset$, wenn $m < n$ ist. In diesem Fall ist also φ nicht regulär.

Es seien nun $X \subset \mathbb{P}^n,\ Y \subset \mathbb{P}^m$ irreduzible projektive Varietäten. $\varphi : X \dashrightarrow Y$ sei eine rationale Abbildung. Obwohl φ keine Abbildung im üblichen Sinne ist, kann man das Bild $\varphi(A) \subset Y$ und das Urbild $\varphi^{-1}(B) \subset X$ von abgeschlossenen Mengen $A \subset X,\ B \subset Y$ erklären; insbesondere wird für alle $x \in X$ das Bild $\varphi(x) \subset Y$ definiert. Für $x \in D_\varphi$ ist $\varphi(x)$ der gewöhnliche Bildpunkt der regulären Abbildung $\varphi|D_\varphi : D_\varphi \longrightarrow Y$. Für $x \in X \setminus D_\varphi$ kann $\varphi(x)$ auch ein Punkt sein, wird aber in der Regel eine mehr oder weniger komplizierte Untervarietät von Y sein.

Zunächst definieren wir den Graphen von φ als abgeschlossene Untervarietät von $X \times Y$.
Sei $U \subset X$ offen und $f : U \longrightarrow Y$ ein Repräsentant von φ.

$$\begin{aligned} \mathrm{Graph}(f) &= \{(x,y) \in U \times Y \mid y \in f(x)\} \\ &= (f \times id_Y)^{-1}(\Delta_Y) \end{aligned}$$

ist dann abgeschlossen in $U \times Y$, weil $\Delta_Y = \{(y,y) \mid y \in Y\}$ in $Y \times Y$ abgeschlossen ist. $U \times Y$ ist offen in $X \times Y$. Wir setzen

$$\mathrm{Graph}(\varphi) := \overline{\mathrm{Graph}(f)} \subset X \times Y.$$

Seien $p_1 : \mathrm{Graph}(\varphi) \longrightarrow X$, $p_2 : \mathrm{Graph}(\varphi) \longrightarrow Y$ die Projektionen. Nach Satz 6.9 sind dies abgeschlossene Abbildungen. $\mathrm{Graph}(\varphi)$ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten (U, φ).

Definition 8.11

1) $\mathrm{Graph}(\varphi)$ (oder kürzer Γ_φ) heißt der *Graph* von φ.

2) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so heißt die abgeschlossene Menge

$$\varphi(A) := p_2 \circ p_1^{-1}(A) \subset Y$$

das *Bild* von A unter φ.

3) Ist $B \subset Y$ abgeschlossen, so heißt die abgeschlossene Menge

$$\varphi^{-1}(B) := p_1 \circ p_2^{-1}(B) \subset X$$

das *Urbild* von B.

Bei der Benutzung dieser Begriffe ist Vorsicht geboten.

Beispiel 8.12
Wir betrachten die Projektion

$$\pi = [Z_0 : Z_1 : Z_2] : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

mit Zentrum $p_0 = [0:0:0:1]$, $\{p_0\} = \mathbb{V}(Z_0, Z_1, Z_2)$. $U = \mathbb{P}^3 \setminus \{p_0\}$ ist der Regularitätsbereich von π und $\mathrm{Graph}(\pi)$ ist abgeschlossene Hülle in $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$ von

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{Graph}(\pi|U) = \{([z], \pi([z])) \mid [z] \in \mathbb{P}^3 \setminus \{p_0\}\} \\ &= \{([z_0 : z_1 : z_2 : z_3], [w_0 : w_1 : w_2]) \mid [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \neq p_0 \text{ und} \\ &\qquad (z_0 : z_1 : z_2), (w_0 : w_1 : w_2) \text{ sind linear abhängig in } K^3\}. \end{aligned}$$

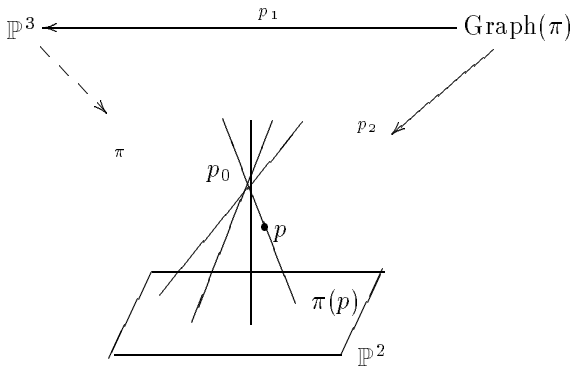
G ist also das Nullstellengebilde der drei bihomogenen Gleichungen vom Bigrad $(1,1)$

$$\begin{aligned} F_1 &= z_0 w_1 - z_1 w_0, \\ F_2 &= z_0 w_2 - z_2 w_0, \\ F_3 &= z_1 w_2 - z_2 w_1 \quad \text{in } U \times \mathbb{P}^2 \end{aligned}$$

(= 2-Minoren von $\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ w_0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$). Somit folgt:

$$\mathrm{Graph}(\pi) = \overline{G} \subset \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2.$$

Da $\mathbb{V}(F_1, F_2, F_3)$ irreduzibel ist ($p_2 : \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ist ein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel über $\mathbb{P}^2$ [Übung 2a) in §6]), gilt $\mathrm{Graph}(\pi) = \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3)$.



Man erhält

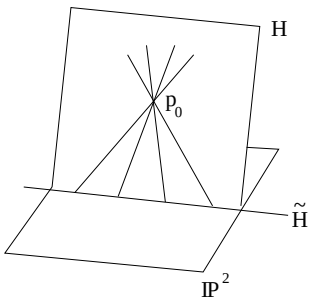
$$\pi(p_0) \;=\; p_2(p_1^{-1}(p_0)) \;=\; p_2(p_0 \times \mathbb{P}^2) \;=\; \mathbb{P}^2.$$

Wir untersuchen nun die Einschränkungen

$$\pi|X : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

auf einige Untervarietäten $X \subset \mathbb{P}^3$.

1) Sei zunächst $H \subset \mathbb{P}^3$ eine Hyperebene.
Ist $p_0 \notin H$, so ist $\pi|H : H \longrightarrow \mathbb{P}^2$ biregulär. Ist aber $p_0 \in H$, so ist $\varphi := \pi|H : H \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ rational und regulär auf $H \setminus \{p_0\}$.



Der Graph G von φ ist natürlich in $Z := \mathrm{Graph}(\pi) \cap (H \times \mathbb{P}^2)$ enthalten und zwar als abgeschlossene Hülle von $\mathrm{Graph}(\varphi|H \setminus \{p_0\})$.
Es sei $L = a_0Z_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3$ die Gleichung von H. Da $p_0 \in H$, ist $a_3 = 0$. Offensichtlich ist

$$Z \;=\; \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3) \cap (\mathbb{V}(L) \times \mathbb{P}^2) \;=\; \mathbb{V}(L, F_1, F_2, F_3),$$

wobei man im letzten Term L als bihomogenes Polynom in (Z, W) vom Bigrad $(1, 0)$ auffaßt. Es gilt

$$\mathrm{Graph}(\varphi|H \setminus \{p_0\})$$

$$= \mathbb{V}(L, F_1, F_2, F_3) \cap ((H \setminus \{p_0\}) \times \mathbb{P}^2)$$

$$= \{([z],[w]) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid L(z) = 0,\ F_i(z,w) = 0,\ i = 1,2,3 \text{ und } [z] \neq p_0\}$$

$$= \{([z],[w]) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid F_i(z,w) = 0,\ i = 1,2,3,\ L(w) = 0 \text{ und } [z] \neq p_0\},$$

denn $F_i(z,w) = 0,\ i = 1,2,3$ und $[z] \neq p_0$ heißt $\pi([z]) = [z_0 : z_1 : z_2] = [w_0 : w_1 : w_2] = [w]$. Es gilt dann

$$L(z) \ = \ a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ L(w) = a_0 w_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 = 0.$$

Wir fassen $\tilde{L} := a_0 w_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2$ als bihomogenes Polynom in (z,w) vom Bigrad $(0,1)$ auf und erhalten

$$\text{Graph}(\varphi | H \setminus \{p_0\}) \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, \tilde{L}) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2.$$

Nun ist aber $\mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, \tilde{L})$ ein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel über der Geraden $\tilde{H} = \mathbb{V}(\tilde{L}) \subset \mathbb{P}^2$, wie man an dem cartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, \widetilde{L}) & \hookrightarrow & \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3) \\ \downarrow & \square & \downarrow p_2 \\ \tilde{H} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

sieht! Somit ist $\mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, \tilde{L})$ irreduzibel, und daher $\text{Graph}(\varphi) = \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, \tilde{L})$, also

$$\begin{array}{ccccc} \text{Graph}\,(\varphi) & & = & & \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, \widetilde{L}) \\ {\scriptstyle p_1'} \swarrow & \searrow {\scriptstyle p_2'} & & & \\ H & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \tilde{H} \subset \mathbb{P}^2. & & \end{array}$$

Man sieht nun, daß

$$\varphi(p_0) \ = \ \tilde{H}$$

nur eine Gerade ist im Gegensatz zu $\pi(p_0) = \mathbb{P}^2$.
$Z = \mathbb{V}(F_1, F_2, F_3, L)$ ist nicht irreduzibel.

$$Z \ = \ \text{Graph}(\varphi) \cup (p_0 \times \mathbb{P}^2)$$

ist die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die beiden Komponenten schneiden sich in

$$\text{Graph}(\varphi) \cap (p_0 \times \mathbb{P}^2) \ = \ p_0 \times \tilde{H}.$$

2) Ist $X \subset \mathbb{P}^3$ eine Quadrik mit $p_0 \notin X$, so ist $\pi | X : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ regulär, und zwar eine verzweigte 2-blättrige Überlagerung. Für $X = \mathbb{V}(Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)$ ist

$$(\pi | X)^{-1}([a : b : c]) \ \cong \ \mathbb{V}(X^2(a^2 + b^2 + c^2) + Y^2) \ \subset \ \mathbb{P}^1,$$

wobei

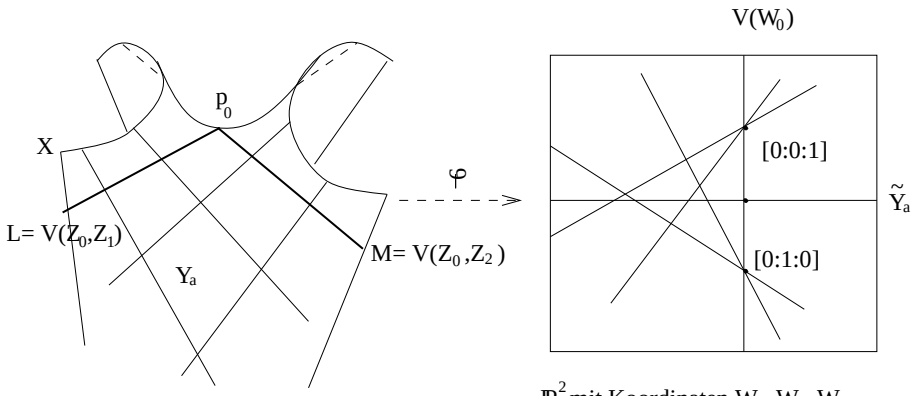
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3, \\ [x : y] & \longmapsto & [xa : xb : xc : y] \end{array}$$

eine Parametrisierung der Geraden $\overline{[a:b:c:0],p_0}$ ist.
Also ist der nicht entartete Kegelschnitt $C = \mathbb{V}(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2)$ der Verzweigungsort von $\pi|X : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$.

Interessanter ist der Fall $p_0 \in X$.
Wir betrachten etwa die Segrefläche $X = \mathbb{V}(Z_0Z_3 - Z_1Z_2) \subset \mathbb{P}^3$. Es sei

$$\varphi \;=\; \pi|X \;=\; [Z_0 : Z_1 : Z_2]|X : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2.$$

φ ist regulär in $X \setminus \{p_0\}$.



In p_0 ist φ unbestimmt. Es gilt: $\varphi(p_0) = \mathbb{V}(W_0)$ ist eine Gerade in $\mathbb{P}^2$. $L = \mathbb{V}(Z_0, Z_1)$ und $M = \mathbb{V}(Z_0, Z_2)$ sind die einzigen Geraden durch p_0, die ganz auf X liegen. $\varphi|L$ und $\varphi|M$ sind konstante reguläre Abbildungen mit Werten $[0:0:1]$ bzw. $[0:1:0]$. Man beachte:

$$(\varphi|L)(L) \;=\; \{[0:0:1]\}, \text{ aber}$$

$$\varphi(L) \;=\; \mathbb{V}(W_0)\,!$$

$L \cup M = X \cap \mathbb{V}(Z_0)$ ist ein entarteter Ebenenschnitt. Die Ebenen $\mathbb{V}(aZ_1 - Z_2),\ a \neq 0$, schneiden X in dem nicht entarteten Kegelschnitt

$$Y_a \;=\; X \cap \mathbb{V}(aZ_1 - Z_2) \;=\; \mathbb{V}(Z_0Z_3 - aZ_1^2, aZ_1 - Z_2).$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Y_a, \\ [x:y] & \longmapsto & [ax^2 : xy : axy : y^2] \end{array}$$

ist eine Parametrisierung von Y_a. $\varphi|Y_a$ ist regulär auf Y_a (auch in p_0), und das Bild von Y_a unter $\varphi|Y_a$ ist die Gerade

$$\tilde{Y}_a \;=\; (\varphi|Y_a)(Y_a) \;=\; \{[ax:y:ay] \mid [x:y] \in \mathbb{P}^1\} \;=\; \mathbb{V}(aw_1 - w_3)$$

(für $x \neq 0$ ist $[ax:y:ay] = [ax^2 : xy : axy] = \varphi([ax^2 : xy : axy : y^2])$).
Schließlich bemerken wir, daß

$$\varphi|X \setminus (M \cup L) : X \setminus (M \cup L) \;\longrightarrow\; \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{V}(W_0)$$

biregulär ist. Dazu betrachte

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\sigma} & X & & \\
\cup & & \cup & & \\
\mathbb{A}^2 & \xrightarrow[\cong]{} & X \setminus (M \cup L) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{V}(W_0), \\
(x,y) & \longmapsto & [1:x:y:xy] & \longrightarrow & [1:x:y].
\end{array}$$

Damit folgt:

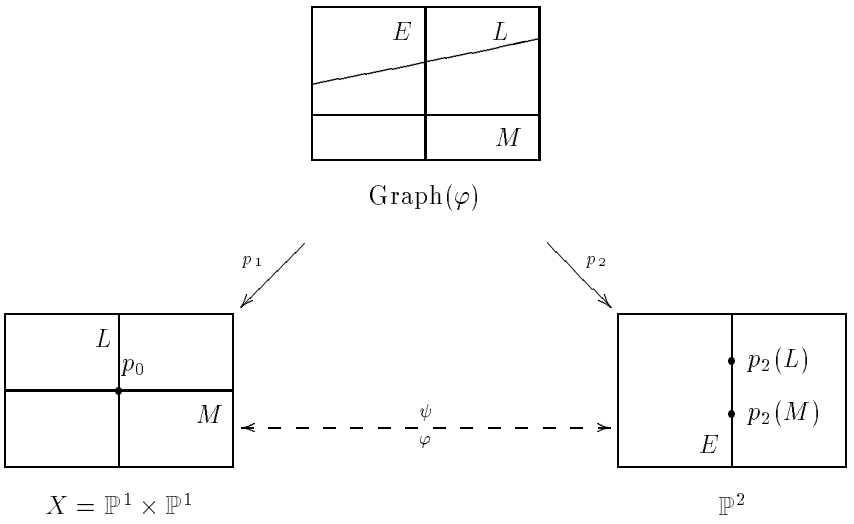
$\psi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$ mit

$$\psi([w_0 : w_1 : w_2]) \;=\; [w_0^2 : w_0w_1 : w_0w_2 : w_1w_2]$$

ist eine rationale Abbildung von $\mathbb{P}^2$ nach X mit

$$\varphi \circ \psi \;=\; id_{\mathbb{P}^2}, \quad \psi \circ \varphi \;=\; id_X$$

(die Kompositionen sind wie in Definition 8.4 erklärt gebildet).
Man sagt dann: φ ist birational. Illustration:



Übung
Beweise alle Behauptungen in Beispiel 8.12 2).

Definition 8.13 Es seien X, Y irreduzible, projektive Varietäten. Eine rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ heißt *dominant* $\iff \varphi(X) = Y$.

Dominante rationale Abbildungen $\varphi : X \dashrightarrow Y$, $\psi : Y \dashrightarrow Z$ lassen sich stets komponieren. Die irreduziblen projektiven Varietäten mit den dominanten rationalen Abbildungen als Morphismen bilden eine Kategorie. Die Isomorphismen in dieser Kategorie heißen *birationale* Abbildungen.
($\varphi : X \dashrightarrow Y$ dominant ist birational $\iff \exists\, \psi : Y \dashrightarrow X$ dominant mit $\varphi \circ \psi = id$, $\psi \circ \varphi = id$)

Übungen

1) $\varphi : X \dashrightarrow Y$ ist dominant, wenn es eine offene Menge $\emptyset \neq U \subset D_\varphi$ gibt, so daß $\varphi(U)$ dicht in Y liegt.

2) $\varphi : X \dashrightarrow Y$ ist birational, wenn es offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ und eine bireguläre Abbildung $f : U \xrightarrow{\cong} V$ gibt, so daß

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & Y \\ \cup & & \cup \\ U & \xrightarrow[f]{} & V \end{array}$$

kommutiert. Das rationale Inverse $\varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$ von φ wird durch $f^{-1} : V \longrightarrow U$ repräsentiert.

X und Y heißen *birational äquivalent*, wenn es eine birationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ gibt. X heißt *rationale Varietät*, wenn X zu $\mathbb{P}^n$ birational äquivalent ist, d.h. $\exists\, V \subset X$ offen, $U \subset \mathbb{A}^n$ offen, so daß $V \cong U$.

Beispiele

1) Die Segremannigfaltigkeiten $\Sigma_{n,m}$ sind rational, weil

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n+m} \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{P}^n_{X_0} \times \mathbb{P}^m_{Y_0} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{P}^{n+m}_{Z_0}, \end{array}$$

$$[1 : x_1 : \ldots : x_n], [1 : y_1 : \ldots : y_m] \longmapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n : y_1 : \ldots : y_m].$$

$\Sigma_{n,m}$ ist aber nicht isomorph zu $\mathbb{P}^{n+m}$ (dies folgt aus dem *Satz von Bezout*, wie später erläutert wird).

2) Jede rationale Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow C$ von $\mathbb{P}^1$ in eine glatte elliptische Kurve C ist konstant (siehe Beispiel 1.6.6). Dann ist natürlich auch jede rationale Abbildung $\Phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow C$ $(n \geq 1)$ konstant! C ist somit nicht rational.

Definition 8.14 Es sei $\varphi : X \dashrightarrow Y$ eine dominante rationale Abbildung. Dann ist

$$\varphi^* : K(Y) \longrightarrow K(X) \quad \text{mit } \varphi^*(r) := r \circ \varphi$$

ein K-Algebrahomomorphismus.

Auf diese Weise kann man $K(X)$ als Erweiterungskörper von $K(Y)$ auffassen. Man sieht leicht, daß die Abbildung $\varphi \longmapsto \varphi^*$ eine Bijektion zwischen den Mengen

$$\{\varphi \mid \varphi : X \dashrightarrow Y \text{ dominante rationale Abbildung}\}$$

und

$$\{\Phi \mid \Phi : K(Y) \longrightarrow K(X)\ K\text{-Algebrahomomorphismus}\}$$

ist. Insbesondere sind X und Y birational äquivalent genau dann, wenn es einen Körperisomorphismus

$$\Phi : K(Y) \xrightarrow{\cong} K(X)$$

gibt mit $\Phi | K = id_K$.

Satz 8.15 Es sei $\varphi : X \dashrightarrow Y$ eine dominante rationale Abbildung und $\varphi^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$ die zugehörige Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

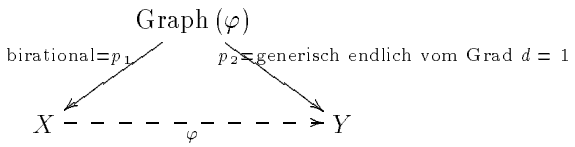
(i) $K(X)$ ist endlich über $K(Y)$ (d.h. $d = [K(X) : K(Y)] = \dim_{K(Y)} K(X) < \infty$; d heißt dann der *Grad* von $K(X)$ über $K(Y)$).

(ii) Es gibt eine offene Menge $\emptyset \neq V \subset Y$, so daß $\varphi^{-1}(y)$ für alle $y \in V$ eine endliche Teilmenge von X ist.

Weiter gilt dann: Ist $\operatorname{char} K = 0$, so kann man eine offene Menge $V \subset Y$, $V \neq \emptyset$, so wählen, daß $d = \#\varphi^{-1}(y) = [K(X) : K(Y)]$ für alle $y \in V$. d heißt auch der *Grad* von φ, und φ heißt dann *generisch endlich* vom Grad d.

Corollar 8.16 ($\operatorname{char} K = 0$) Eine rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ ist genau dann birational, wenn es eine offene Menge $V \subset Y$, $V \neq \emptyset$, in Y gibt, so daß $\operatorname{Graph}(\varphi) \cap (X \times \{y\})$ für alle $y \in V$ aus genau einem Punkt besteht.

Beweis:



Nach 8.15 ist p_2^* Erweiterung vom Grad 1, also Isomorphismus, d.h. p_2 ist birational. Also ist auch $\varphi = p_2 \circ p_1^{-1}$ birational. $\square$

Beweis von Satz 8.15: Es seien X, Y irreduzible, projektive Varietäten. X sei abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. $\varphi : X \dashrightarrow Y$ sei eine dominante, rationale Abbildung und $\tilde{X} \subset X \times Y \subset \mathbb{P}^n \times Y$ ihr Graph mit der birationalen Projektion

$$p_1 : \tilde{X} \longrightarrow X$$

und der surjektiven, regulären Abbildung

$$p_2 : \tilde{X} \longrightarrow Y \quad \text{mit } p_2 = \varphi \circ p_1.$$

Da $p_2^* = p_1^* \circ \varphi^*$ und p_1^* Isomorphismus ist, ist $K(X)$ genau dann endliche Erweiterung von $K(Y)$, wenn $K(\tilde{X})$ es ist.
Weiter stehen die Fasern $\varphi^{-1}(y)$ und $p_2^{-1}(y)$ durch die Projektion p_1 in bijektiver Beziehung zueinander. Also können wir die dominante, rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ durch die reguläre, surjektive Abbildung $p_2 : \tilde{X} \longrightarrow Y$ ersetzen, wobei $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^n \times Y$ und $p_2 = pr_2|\tilde{X}$ ist.
Ohne Einschränkung sei also X abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n \times Y$ und $\varphi : X \longrightarrow Y$ die Einschränkung der Projektion $pr_2 : \mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y$ auf X. Da das Problem lokal in Y ist, können wir Y nach Belieben durch offene Teilmengen V (und X dann durch $X_V = X \cap (\mathbb{P}^n \times V) = \varphi^{-1}(V)$) ersetzen.

Wir kommen so zu der neuen Formulierung

Satz 8.17 (K sei wie immer algebraisch abgeschlossen.)
Es sei Y quasiprojektive Varietät, $n \geq 1$, $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ abgeschlossene, irreduzible Untervarietät, und $\varphi = pr_2|X : X \longrightarrow Y$ sei surjektiv (Y ist also auch irreduzibel). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $K(X)$ ist endlich über $K(Y)$.

(ii) Es gibt eine nichtleere, offene Menge $V \subset Y$, so daß $\varphi^{-1}(y)$ für alle $y \in V$ endlich ist.

(Beachte: $\varphi^{-1}(y) = X \cap (\mathbb{P}^n \times \{y\})$)
Ist $\operatorname{char} K = 0$, so gilt weiter:

$$(*) \qquad \exists\, \emptyset \neq V \subset Y \text{ offen mit}: \quad \forall\, y \in V \text{ gilt} \quad \#\varphi^{-1}(y) = [K(X) : K(Y)].$$

Beweis: Durch Induktion nach n.
Œ sei Y affin.

1.) $n = 1$.
Ist $X = \mathbb{P}^1 \times Y$, so ist (ii) nicht erfüllt, und ebensowenig (i), weil $K(\mathbb{P}^1 \times Y) \cong K(Y)(z)$ mit $z = \frac{Z_1}{Z_0}$ transzendent über $K(Y)$ ist. Wir können also annehmen, daß

$$X \subsetneq \mathbb{P}^1 \times Y.$$

Wir beweisen, daß dann sowohl (i) als auch (ii) und im Fall $\operatorname{char} K = 0$ auch die Aussage $(*)$ gilt. Es sei $(p_0, y_0) \in (\mathbb{P}^1 \times Y) \setminus X$. Dann ist

$$A = \{y \in Y \mid (p_0, y) \in X\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von Y (vgl. Aufgabe 53). Da $y_0 \notin A$, ist $V = Y \setminus A$ eine nichtleere, offene Menge, und wir ersetzen Y durch $V' \subset V$. Dann gilt weiterhin, daß Y affin ist und außerdem

$$(+) \qquad X \cap (\{p_0\} \times Y) = \emptyset.$$

Es seien nun homogene Koordinaten Z_0, Z_1 in $\mathbb{P}^1$ so gewählt, daß

$$p_0 = \infty = [1 : 0].$$

$\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{p_0\}$ hat den Koordinatenring $K[z]$ mit $z = \frac{Z_0}{Z_1}$.

zu (ii): Aus $(+)$ folgt: $\forall\, y \in Y$ ist $\varphi^{-1}(y)$ echte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^1 \times \{y\}$, also endlich.

zu (i): Nach $(+)$ ist $X \subset \mathbb{A}^1 \times Y$ affin und enthält keine Faser $\mathbb{A}^1 \times \{y\}$. Deshalb gibt es ein $0 \neq f \in I(X) \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^1 \times Y) = \mathcal{O}(Y)[z]$ vom Grad $d > 0$ in z,

$$f = f_d z^d + \cdots + f_0 \text{ mit } f_i \in \mathcal{O}(Y),\ f_d \neq 0.$$

f annulliert die Funktion $\zeta = z|X \in \mathcal{O}(X)$, denn: $f(\zeta) = f|X = 0$. Also ist ζ algebraisch über $K(Y)$ ($K(Y)$ ist der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(Y)$).
Da $K(X)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[z]/I(X)$ ist, wird $K(X)$ von ζ über $K(Y)$ erzeugt. Es folgt: $K(X) = K(Y)[\zeta]$ ist endlich über $K(Y)$.

Nun zu $(*)$. Es sei $f \in K(Y)[z]$ das Minimalpolynom von ζ,

$$f = z^d + f_{d-1} z^{d-1} + \cdots + f_0$$

mit rationalen Funktionen $f_j \in K(Y)$. Es sei $V_1 \subset Y$ eine offene, affine Teilmenge, so daß

$$f_j \in \mathcal{O}(V_1) \quad \text{für } j = 0, \ldots, d-1.$$

Aus $f(\zeta) = 0$ folgt dann

$$f(z,y) \;=\; z^d + f_{d-1}(y)z^{d-1} + \cdots + f_0(y) = 0$$

für alle $(z,y) \in X_{V_1} := X \cap (\mathbb{A}^1 \times V_1)$; also ist $f \in I(X_{V_1}) \subset \mathcal{O}(V_1)[z]$.
Sei nun $g \in I(X_{V_1})$. Dann ist

$$g \;=\; g_k z^k + g_{k-1}z^{k-1} + \cdots + g_0 \quad \text{mit } g_\nu \in \mathcal{O}(V_1)$$

und

$$g(z,y) \;=\; g_k(y)z^k + \cdots + g_0(y) \;=\; 0 \quad \forall\, (z,y) \in X_{V_1},$$

d.h. $g(\zeta)|X_{V_1} = 0$, also $g(\zeta) = 0$ in $K(X)$.
Da f das Minimalpolynom von ζ über $K(Y)$ ist, gibt es ein Polynom $h \in K(Y)[z]$, so daß

$$g \;=\; hf.$$

Verkleinert man V_1 eventuell noch, so ergibt sich $h \in \mathcal{O}(V_2)[z]$ für eine offene, affine Menge $V_2 \subset V_1$. Führt man dies nun für ein endliches Erzeugendensystem von $I(X_{V_1})$ durch, so erhält man schließlich eine offene, affine Menge $V \subset V_1$, so daß

$$I(X_V) \;=\; \langle f \rangle$$

das von f erzeugte Hauptideal in $\mathcal{O}(V)[z]$ ist. Es gilt (siehe Bemerkung 8.18)

$$[K(X) : K(Y)] \;=\; d \;=\; \deg(f)$$

($1, \zeta, \ldots, \zeta^{d-1}$ bilden eine $K(Y)$-Vektorraumbasis von $K(X)$). Für $y \in V$ ist nun

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(y) \;&=\; \{z \in \mathbb{A}^1 \mid f(z,y) = 0\} \times \{y\} \\ &\cong\; \text{Nullstellengebilde des Polynoms } f_y := z^d + f_{d-1}(y)z^{d-1} + \cdots + f_0(y), \\ &\quad\; f_y \in K[z]. \end{aligned}$$

Da $d > 0$ und $\operatorname{char} K = 0$, ist die Ableitung

$$f' \;:=\; dz^{d-1} + (d-1)f_{d-1}z^{d-2} + \cdots \quad \in K(Y)[z]$$

nicht Null. Da f irreduzibel in $K(Y)[z]$ ist, haben natürlich f und f' keinen gemeinsamen Teiler in $K(Y)[z]$, und somit ist die *Diskriminante*

$$\begin{aligned} D \;&:=\; R(f,f') \\ &=\; \det \begin{pmatrix} 1 & f_{d-1} & & \cdots & f_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & f_{d-1} & \cdots & & f_0 \\ d & (d-1)f_{d-1} & & \cdots & f_1 & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & d & (d-1)f_{d-1} & \cdots & & f_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} d-1 \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} d \end{matrix} \end{aligned}$$

eine von Null verschiedene, reguläre Funktion auf V. Dazu beachte man die folgende

Bemerkung Lemma 6.5 gilt allgemeiner:
Sei L ein beliebiger Körper; $f, g \in L[z]$ seien nichtkonstante Polynome. Dann gilt: $R(f,g) = 0 \iff f$ und g besitzen einen gemeinsamen, nichtkonstanten Faktor (siehe etwa Cox et al., p153).

$V' = V \setminus \mathbb{V}(D)$ ist also eine nichtleere, offene, affine Menge in V, und für alle $y \in V'$ hat f_y d verschiedene Nullstellen, weil $0 \neq D(y) = R(f_y, f_y')$. D.h. $\#\varphi^{-1}(y) = d$ für alle $y \in V'$. Für $n = 1$ ist der Satz bewiesen.

Bemerkung Ist $\operatorname{char} K = p > 0$, so kann unser Polynom $f \in K(Y)[z]$ eine Ableitung $f' = 0$ haben, nämlich dann, wenn f von der Form

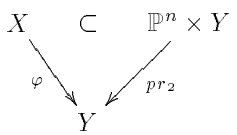
$$z^{pm} + f_{p(m-1)} z^{p(m-1)} + \cdots + f_0 \;=\; \tilde{f}(z^p)$$

ist mit $\tilde{f} := z^m + f_{p(m-1)} z^{m-1} + \cdots + f_0 \in K(Y)[z]$. Ist a eine Nullstelle von $f_y \in K[z]$ so gilt $\tilde{f}_y(a^p) = 0$; also ist a^p Nullstelle von $\tilde{f}_y$, d.h. $\tilde{f}_y = \tilde{q}_y(z - a^p)$ und somit mit $q_y(z) := \tilde{q}_y(z^p)$

$$f_y(z) \;=\; q_y(z) \cdot (z^p - a^p) \;=\; q_y(z)(z-a)^p.$$

a ist also eine p-fache Nullstelle von f_y. Ist nun p ein Teiler von $d = \deg(f)$ und $f' = 0$, so hat $\varphi^{-1}(y)$ höchstens $\frac{d}{p}$ Punkte!

2.) Wir kommen nun zum Induktionsschluß $(n-1) \longrightarrow n$ $(n \geq 2)$:
Es sei also das kommutative Diagramm



gegeben; Y sei affin, X abgeschlossen in $\mathbb{P}^n \times Y$ und φ surjektiv.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $[K(X) : K(Y)] < \infty$.
Wir wählen homogene Koordinaten $Z_0, \ldots, Z_n$ in $\mathbb{P}^n$, so daß

$$X \;\not\subset\; \mathbb{V}(Z_n) \times Y$$

(das ist natürlich möglich!). Sei nun

$$z_i \;=\; \frac{Z_i}{Z_n}, \quad i = 0, \ldots, n-1, \text{ also } z_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n \times Y),$$

wobei $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_n)$, und weiter sei

$$\zeta_i \;:=\; z_i | X \cap (\mathbb{A}^n \times Y) \;\in K(X).$$

$\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ erzeugen $K(X)$ über $K(Y)$, und $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ sind algebraisch über $K(Y)$, da $K(X)$ endlich über $K(Y)$ ist.

$$f_i \;:=\; z_i^{d_i} + f_{i,d_i-1} z_i^{d_i-1} + \cdots + f_{i,0} \;\in K(Y)[z_i]$$

sei das Minimalpolynom von ζ_i.
Es gibt eine nichtleere, offene Menge $V \subset Y$, so daß $f_{ij} \in \mathcal{O}(V)$ für alle i, j, also

$$f_i \in \mathcal{O}(V)[z_i].$$

Sei F_i die Homogenisierung von f_i bzgl. Z_n:

$$F_i \;=\; Z_i^{d_i} + f_{i,d_i-1} Z_i^{d_i-1} Z_n + \cdots + f_{i,0} Z_n^{d_i}.$$

Dann folgt leicht (weil $f_i(\zeta_i) = 0$)

$$X \cap (\mathbb{A}^n \times V) \ \subset \ \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_{n-1}) \overset{\text{abgeschl.}}{\subset} \mathbb{P}^n \times V,$$

wobei F_i als homogenes Polynom in $Z_0, \ldots, Z_n$ mit Koeffizienten in $\mathcal{O}(V)$ aufgefaßt wird (die Variablen Z_j, $j \notin \{i, n\}$ kommen in F_i nicht vor). Da $\mathbb{V}(F_0, \ldots, F_{n-1})$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n \times V$ ist, und $X \cap (\mathbb{A}^n \times V)$ dicht in $X_V = X \cap (\mathbb{P}^n \times V)$ ist, folgt

$$X_V \ \subset \ \mathbb{V}(F_0, \ldots, F_{n-1}).$$

Es sei $F_{i,y} = Z_i^{d_i} + f_{i,d_i-1}(y) Z_i^{d_i-1} Z_n + \cdots + f_{i,0}(y) Z_n^{d_i}$. Für alle $y \in V$ gilt

$$\varphi^{-1}(y) \ = \ X \cap (\mathbb{P}^n \times \{y\}) \ \subset \ \mathbb{V}(F_{0,y}, \ldots, F_{n-1,y}) \times \{y\}.$$

Offensichtlich ist aber

$$\mathbb{V}(F_{0,y}, \ldots, F_{n-1,y}) \cap \underbrace{\mathbb{V}(Z_n)}_{\subset \mathbb{P}^n} \ = \ \underbrace{V(Z_0, \ldots, Z_n)}_{\subset \mathbb{P}^n} \ = \ \emptyset,$$

also

$$\mathbb{V}(F_{0,y}, \ldots, F_{n-1,y}) \ = \ \underbrace{\mathbb{V}(f_{0,y})}_{\subset \mathbb{A}^1} \times \cdots \times \underbrace{\mathbb{V}(f_{n-1,y})}_{\subset \mathbb{A}^1} \ \subset \ \mathbb{A}^n$$

endlich, weil $\mathbb{V}(f_{i,y}) = \{z_i \in \mathbb{A}^1 \mid f_i(y, z_i) = 0\}$ endlich ist.
Damit ist (i) $\Rightarrow$ (ii) bewiesen.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei $V \subset Y$ eine nichtleere, offene Menge, so daß $\varphi^{-1}(y)$ für alle $y \in V$ endlich ist. Zu $y_0 \in V$ gibt es eine Hyperebene $H_0 \subset \mathbb{P}^n$, so daß

$$X \cap (H_0 \times \{y_0\}) \ = \ \emptyset.$$

$V' = \{y \in V \mid X \cap (H_0 \times \{y\}) = \emptyset\}$ ist dann eine nichtleere, offene Menge.
Ohne Einschränkung gelte also (Y werde durch einen affinen, offenen Teil von V' ersetzt)

$$X \cap (\mathbb{V}(Z_n) \times Y) \ = \ \emptyset,$$

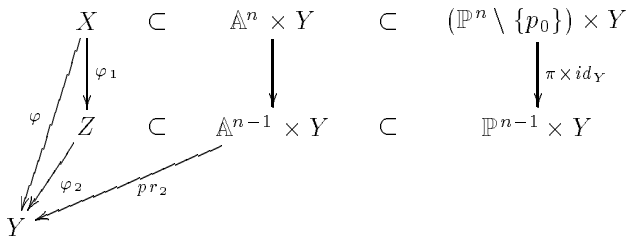
d.h. (mit den Bezeichnungen wie oben):

$$X \subset \mathbb{A}^n \times Y.$$

Es sei weiter $p_0 := [1 : 0 : \ldots : 0]$ und $\pi = [Z_1 : \ldots : Z_n] : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ die Projektion von $\mathbb{P}^n$ mit Zentrum p_0. $\pi | \mathbb{A}^n : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ ist die Projektion

$$\pi(z_0, \ldots, z_{n-1}) \ = \ (z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

Da $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ abgeschlossen ist, ist (nach Satz 6.2 und Übung 1 auf Seite 101) $Z := (\pi \times id_Y)(X)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^{n-1} \times Y$. Da X irreduzibel ist, ist es auch Z.
Wir haben das kommutative Diagramm



mit surjektiven regulären Abbildungen φ_1, φ_2. Da $\varphi^{-1}(y)$ endlich ist für alle $y \in Y$, sind auch $\varphi_2^{-1}(y)$ und $\varphi_1^{-1}(z)$ für $y \in Y,\ z \in Z$ endlich. Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf φ_2) folgt

$$[K(Z) : K(Y)] < \infty.$$

Wir müssen jetzt φ_1 betrachten:
Es sei $\tilde{\mathbb{P}}^n(p_0)$ der Graph der rationalen Abbildung $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$. Dann ist die Projektion $\psi := p_2 \times id_Y : \tilde{\mathbb{P}}^n(p_0) \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times Y$ ein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel, und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \subset & \psi^{-1}(Z) & \subset & \widetilde{\mathbb{P}}^n(p_0) \times Y \\ & \searrow^{\varphi_1} & \downarrow{\scriptstyle \psi_Z} & \square & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ & & Z & \subset & \mathbb{P}^{n-1} \times Y, \end{array}$$

in dem auch ψ_z ein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$-Bündel ist. Ersetzt man Z durch eine geeignete offene, affine Menge, so erhält man also $\psi^{-1}(Z) \cong \mathbb{P}^1 \times Z$ und somit

$$\begin{array}{ccccc} X & \subset & \mathbb{P}^1 \times Z & & \\ & \searrow^{\varphi_1} & & \swarrow^{pr_2} & \\ & & Z & & . \end{array}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist also auch $K(X)$ endlich über $K(Z)$.
Aus $[K(Z) : K(Y)] < \infty$ und $[K(X) : K(Z)] < \infty$ folgt, daß $K(X)$ endlich über $K(Y)$ ist. Damit ist (ii) $\Rightarrow$ (i) bewiesen.

3.) Es fehlt noch der Nachweis von $(*)$.
Es sei also weiter Y affin, $X \subset \mathbb{A}^n \times Y$ abgeschlossen und $K(X)$ endlich über $K(Y)$. Zusätzlich sei nun $\operatorname{char} K = 0$.
Die Bezeichnungen seien weiter wie in Teil 2.) des Beweises. Es gilt

$$K(X) \ = \ K(Y)(\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}).$$

Da $\operatorname{char} K = 0$ ist, gibt es nach dem „Satz vom primitiven Element“ (ein Beweis folgt in Bemerkung 8.18) Elemente $g_1, \ldots, g_{n-1} \in K(Y)$, so daß

$$\vartheta = \zeta_0 + g_1\zeta_1 + \cdots + g_{n-1}\zeta_{n-1} \tag{8.1}$$

ein *primitives Element* von $K(X)$ über $K(Y)$ ist; d.h. es gilt

$$K(X) \ = \ K(Y)[\vartheta].$$

Wir können also ζ_i in der folgenden Form schreiben:

$$\zeta_i = a_{i0} + a_{i1}\vartheta + \cdots + a_{id-1}\vartheta^{d-1} \tag{8.2}$$

mit eindeutig bestimmten $a_{ij} \in K(Y)$ $(d = [K(X) : K(Y)])$. Es sei nun

$$f \ = \ w^d + f_{d-1}w^{d-1} + \cdots + f_0 \quad \in K(Y)[w]$$

das Minimalpolynom von ϑ. Es sei $V \subset Y$ eine offene, affine Menge, so daß die rationalen Funktionen $g_i,\ a_{ij},\ f_j$ sämtlich regulär auf V sind. Also gilt

$$h_i := a_{i0} + a_{i1}w + \cdots + a_{i\,d-1}w^{d-1} \quad \in \mathcal{O}(V)[w] \tag{8.3}$$

und $g_i \in \mathcal{O}(V),\ f \in \mathcal{O}(V)[w],\ \vartheta \in \mathcal{O}(X_V)$. Es gilt

$$\vartheta \ = \ \Phi_1 | X_V \,,$$

wobei $\Phi_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n \times V)$ die reguläre Funktion

$$\Phi_1 \ = \ z_0 + g_1 z_1 + \cdots + g_{n-1} z_{n-1}$$

ist.

$$\Phi : \mathbb{A}^n \times V \ \longrightarrow \ \mathbb{A}^1 \times V$$

mit $\Phi(z_0, \ldots, z_{n-1}, y) = (\Phi_1(z_0, \ldots, z_{n-1}, y), y)$ ist reguläre Abbildung.
Für $p = (z_0, \ldots, z_{n-1}, y) \in X_V$ gilt

$$\Phi(p) \ = \ (\Phi_1(p), y) = (\vartheta(p), y),$$

und somit ist

$$f(\Phi(p)) \ = \ \vartheta(p)^d + f_{d-1}(y)\vartheta(p)^{d-1} + \cdots + f_0(y) \ = \ f(\vartheta)(p) = 0,$$

weil $f(\vartheta) = 0$. Es folgt somit

$$\Phi(X_V) \ \subset \ \mathbb{V}(f) \ \subset \ \mathbb{A}^1 \times V.$$

Nun ist aber $\psi : \mathbb{A}^1 \times V \longrightarrow \mathbb{A}^n \times V$ mit $\psi(w, y) := (h_0(w, y), \ldots, h_{n-1}(w, y), y)$ wegen (8.2) und (8.3) linksinvers zu $\Phi | X_V$:

$$\psi(\Phi(p)) = p \quad \text{für } p \in X_V \,.$$

$$\Phi | X_V : X_V \ \longrightarrow \ \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^1 \times V$$

ist daher injektiv. Der zugehörige K-Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} (\Phi | X_V)^* : \mathcal{O}(V)[w]/\langle f \rangle \ &\longrightarrow \ \mathcal{O}(X_V), \\ w \ &\longmapsto \ \vartheta \end{aligned}$$

ist dann surjektiv, und nach Definition von f ist

$$\begin{aligned} J \ &:= \ \ker(\Phi^* : \mathcal{O}(V)[w] \longrightarrow \mathcal{O}(X_V)) \\ &= \ (f \cdot K(Y)[w]) \cap \mathcal{O}(V)[w]. \end{aligned}$$

Es sei $J = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ mit $q_i \in \mathcal{O}(V)[w]$. Dann gilt also $q_i = r_i f$ mit $r_i \in K(Y)$.
Sei $V' \subset V$ offen, affin, so daß $r_i \in \mathcal{O}(V')\ \forall\, i$. Dann folgt

$$\ker(\Phi^* : \mathcal{O}(V')[w] \ \longrightarrow \ \mathcal{O}(X_{V'}) \ = \ \langle f \rangle \ \subset \ \mathcal{O}(V')[w];$$

also ist $(\Phi | X_{V'})^*$ Isomorphismus, und somit auch

$$\Phi | X_{V'} : X_{V'} \ \xrightarrow{\cong} \ \mathbb{V}(f) \ \subset \ \mathbb{A}^1 \times V'.$$

Damit ist der Beweis auf den schon gelösten Fall $n = 1$ ($X \subset \mathbb{A}^1 \times Y$) zurückgeführt. $\square$
(vgl. auch Mumford: Algebraic Geometry I, p46f.)

Bemerkung 8.18 Es zeigt sich, daß einige grundlegende Dinge über Körpererweiterungen für das Studium dominanter rationaler Abbildungen nützlich sind. Obwohl hier nur sogenannte „Funktionenkörper“ (= endlich erzeugte Erweiterungen eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers) vorkommen, gelten die algebraischen Aussagen allgemeiner. Es folgt ein kleiner Exkurs!

Exkurs über endliche Körpererweiterungen

(Als Literatur sei empfohlen:

1) M.Nagata: Field Theory, Chapter 3 (p54-64)

2) O.Zariski, P.Samuel: Commutative Algebra Volume I, Chapter II, §1-9 (p55-86)

3) S.Lang: Algebra, Chapter VII, §1-6 (p161-186)

4) B.L.Van der Waerden: Algebra I, Kapitel 6, §37-46 (p110-142)

5) E.Artin: Galoissche Theorie)

Es sei K ein beliebiger Körper und $P \in K[x]$ ein irreduzibles normiertes Polynom vom Grad $d > 0$. Dann ist

$$L \;:=\; K[x]/\langle P\rangle$$

ein endlicher Erweiterungskörper von K.

$$\alpha \;:=\; x \bmod P \quad \in L$$

ist Nullstelle von P;

$$L \;=\; K \oplus K\alpha \oplus \cdots \oplus K\alpha^{d-1} \;=\; K[\alpha].$$

$(1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1})$ ist eine K-Vektorraumbasis.

Definition 8.18.1 Sei $F \in K[x]$ ein nichtkonstantes normiertes Polynom. Ein Erweiterungskörper L von K heißt *Zerfällungskörper* von F über K, wenn es Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ gibt, so daß

$$F \;=\; (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

und $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gilt.

Satz 8.18.2 Zu jedem (normierten) Polynom $F \in K[x]$ gibt es einen Zerfällungskörper.

Beweis: Induktion nach $n = \deg(F)$.
Ist $n = 1$, so ist K schon Zerfällungskörper von F.

$(n-1) \longrightarrow n \quad (n \geq 2)$:
Es sei P ein nichtkonstanter irreduzibler Faktor von F.

$$K \subset L' \;=\; K[x]/\langle P\rangle \;=\; K[\alpha],$$

wobei $\alpha := x \bmod P$. Dann gilt $P(\alpha) = 0$, also auch $F(\alpha) = 0$, und somit gibt es ein $G \in L'[x]$, so daß $F = (x-\alpha)\cdot G$. Es gilt $\deg(G) = n-1$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt G einen Zerfällungskörper L über L'. L ist auch Zerfällungskörper von F über K. $\square$

Satz 8.18.3 Seien L und $\widetilde{L}$ zwei Zerfällungskörper von F über K; P sei irreduzibler Faktor von F. $\alpha \in L$ und $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{L}$ seien Nullstellen von P. Dann gibt es einen K-Algebraisomorphismus $\Phi : L \longrightarrow \widetilde{L}$ mit $\Phi(\alpha) = \widetilde{\alpha}$.

Beweis: (Induktion nach $[L : K]$)

$$\begin{array}{ccccc} K & & K & & K \\ \cap & & \cap & & \cap \\ K[\alpha] & \xleftarrow{\cong} & K[x]/\langle p\rangle & \xrightarrow{\cong} & K[\widetilde{\alpha}] \\ \cap & & & & \cap \\ L & & \xrightarrow[\exists \text{ nach Induktion!}]{} & & \widetilde{L} \end{array} \qquad \square$$

Der Zerfällungskörper von F über K ist also bis auf Isomorphie eindeutig durch F und K bestimmt.

Definition 8.18.4 Sei $K \subset L$ eine endliche Körpererweiterung. $\alpha \in L$ heißt *separabel* über $K :\Leftrightarrow$ das Minimalpolynom $P \in K[x]$ von α hat nur einfache Nullstellen in seinem Zerfällungskörper. Ein Polynom $F \in K[x]$ heißt *separabel* (über K), wenn F nur einfache Nullstellen in seinem Zerfällungskörper besitzt.

Wichtig ist folgendes einfache

Lemma 8.18.5 Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, $F, G \in K[x]$. D sei ein ggT von F und G in $K[x]$. Ist nun $\widetilde{D} \in L[x]$ ein ggT von F und G in $L[x]$, so gibt es ein $a \in L^*$, so daß

$$\widetilde{D} \;=\; aD.$$

Wählt man D und $\widetilde{D}$ normiert, so ist also

$$D \;=\; \widetilde{D}.$$

Beweis: $D \cdot K[x] = F \cdot K[x] + G \cdot K[x]$, $\widetilde{D} \cdot L[x] = F \cdot L[x] + G \cdot L[x] \Rightarrow D \in \widetilde{D}L[x]$, etwa $D = \widetilde{H}\widetilde{D}$. Aus $\widetilde{D} = \widetilde{A}F + \widetilde{B}G$, $F = DF_1$, $G = DG_1$ folgt $\widetilde{D} = \widetilde{A}\widetilde{H}\widetilde{D}F_1 + \widetilde{B}\widetilde{H}\widetilde{D}G_1$, also $1 = (\widetilde{A}F_1 + \widetilde{B}G_1)\widetilde{H}$ und somit $\widetilde{H} \in L^*$. $\square$

Lemma 8.18.6 Für $F = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \in K[x]$ sei $F' = \frac{dF}{dx} := \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu x^{\nu-1}$ die Ableitung von F. Es sei $L \supset K$ Erweiterungskörper von K und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von F. Dann gilt:
α ist mehrfache Nullstelle von $F \iff \alpha$ ist Nullstelle von F'.

Beweis:

1)
$$\begin{aligned} F &= (x-\alpha)^2 \cdot G \quad (G \in L[x]) \\ \Rightarrow\quad F' &= 2(x-\alpha)G + (x-\alpha)^2 G' \\ &= (x-\alpha)(2G + (x-\alpha)G') \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} F &= (x-\alpha)\cdot G, \quad G(\alpha) \neq 0 \\ \Rightarrow\quad F' &= G + (x-\alpha)\cdot G' \text{ und} \\ F'(\alpha) &= G(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

(Es wurden die formalen Ableitungsregeln benutzt!) $\square$

Lemma 8.18.7 Ein irreduzibles nichtkonstantes Polynom $P \in K[x]$ ist genau dann separabel über K, wenn P' nicht das Nullpolynom ist.

Beweis:

1) P separabel $\Rightarrow$ P hat nur einfache Nullstellen α im Zerfällungskörper $\Rightarrow P'(\alpha) \neq 0$ für die Nullstellen α von $P \Rightarrow P' \neq 0$.

2) P nicht separabel $\Rightarrow$ P und P' haben eine gemeinsame Nullstelle α im Zerfällungskörper L von P. $x - \alpha$ ist gemeinsamer Faktor von P und P' in $L[x]$. Nach Lemma 8.18.5 ist $D = \mathrm{ggT}(P, P') \in K[x]$ unabhängig vom Koeffizientenkörper, also $\deg(D) \geq 1$, weil $x - \alpha$ Teiler von D. Da P irreduzibel ist, muß $D = P$ sein und aus Gradgründen $P' = 0$. $\square$

Corollar 8.18.8 Ist $\mathrm{char}\, K = 0$, so ist jedes irreduzible Polynom $P \in K[x]$ separabel über K.

Definition 8.18.9 Eine endliche Körpererweiterung $L \supset K$ heißt *einfach*, wenn es ein Element $\vartheta \in L$ gibt, so daß $L = K[\vartheta]$. ϑ heißt dann ein *primitives Element* von L über K.

Satz 8.18.10 (Satz vom primitiven Element) Es sei $L \supset K$ eine endliche Körpererweiterung. Es sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien separabel über K. Dann gibt es Elemente $c_2, \ldots, c_n \in K$, so daß

$$L = K[\vartheta] \quad \text{für } \vartheta := \alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n.$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall unendlicher Körper K (ist K ein endlicher Körper, so auch L, und dann ist L^* sogar eine zyklische Gruppe bzgl. der Multiplikation). Es genügt den Fall $n = 2$ zu behandeln.
Es sei also

$$L = K(\alpha, \beta);$$

β sei separabel über K. $P, Q \in K[x]$ seien die Minimalpolynome von α bzw. β. Es gelte

$$\begin{aligned} P &= (x - \alpha)(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{r-1}), \\ Q &= (x - \beta)(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_{s-1}) \end{aligned}$$

im Zerfällungskörper $\widetilde{L}$ von PQ über K. Da β separabel ist, gilt

$$\beta_j \neq \beta \quad \text{für } j = 1, \ldots, s-1. \tag{a}$$

Somit gibt es zu gegebenen i, j höchstens ein $c \in K$ mit

$$\alpha_i + c\beta_j = \alpha + c\beta.$$

Da K unendlich ist, kann man $c \in K^*$ so wählen, daß

$$\alpha_i + c\beta_j \neq \alpha + c\beta \quad \forall\, i, j. \tag{b}$$

Setze $\vartheta := \alpha + c\beta$. Dann gilt $K[\vartheta] \subset K(\alpha, \beta)$. Um zu beweisen, daß $K(\alpha, \beta) \subset K[\vartheta]$ gilt, genügt es zu zeigen, daß $\beta \in K[\vartheta]$. Da $\alpha = \vartheta - c\beta$, gilt

$$P(\vartheta - c\beta) = 0.$$

Nun ist $\widetilde{P}(x) := P(\vartheta - cx) \in K[\vartheta][x]$ ein Polynom mit Koeffizienten in $K[\vartheta]$, und β ist Nullstelle von $\widetilde{P}$. Ebenso ist β Nullstelle von Q. Wir erhalten aus

$$\begin{aligned} \widetilde{P} &= (\vartheta - \alpha - cx)(\vartheta - \alpha_1 - cx) \cdots (\vartheta - \alpha_{r-1} - cx) \\ &= (-c)^r (x - \beta)(x - \tfrac{\vartheta - \alpha_1}{c}) \cdots (x - \tfrac{\vartheta - \alpha_{r-1}}{c}) \end{aligned}$$

und

$$Q = (x - \beta)(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_{s-1})$$

wegen (a) und (b), daß

$$\mathrm{ggT}(\widetilde{P}, Q) = x - \beta.$$

Da $\widetilde{P}, Q \in K[\vartheta][x]$, muß nach Lemma 8.18.5 auch

$$x - \beta \in K[\vartheta][x]$$

gelten, d.h. $\beta \in K[\vartheta]$. $\square$

Im Rahmen der Dimensionstheorie quasiprojektiver Varietäten werden die transzendenten Körpererweiterungen wichtig. Wir kommen darauf zurück.

Zum Schluß behandeln wir kurz das Aufblasen von Untervarietäten affiner Varietäten.

Definition 8.19 Es sei $X \subset \mathbb{A}^m$ eine irreduzible affine Varietät und $Y \subsetneq X$ eine abgeschlossene Untervarietät; $I(Y) \subset \mathcal{O}(X)$ sei das Ideal aller auf Y verschwindenden regulären Funktionen $f \in \mathcal{O}(X)$. $f_0, \ldots, f_n \in I(Y)$ sei ein beliebiges Erzeugendensystem von $I(Y)$ in $\mathcal{O}(X)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f : X \setminus Y &\longrightarrow \mathbb{P}^n \text{ mit} \\ f(x) &:= [f_0(x) : \ldots : f_n(x)] \end{aligned}$$

eine reguläre Abbildung, und somit definiert f eine rationale Abbildung

$$\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Es sei $Bl_Y(X) = \widetilde{X} := \mathrm{Graph}(\varphi) \subset X \times \mathbb{P}^n$ und $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor. π ist birationale, surjektive, reguläre Abbildung. $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ heißt „die“ *Aufblasung* von X längs Y. $E := \pi^{-1}(Y)$ heißt *exzeptioneller Divisor* in $\widetilde{X}$.
Offensichtlich ist

$$\pi | (\widetilde{X} \setminus E) : \widetilde{X} \setminus E \xrightarrow{\cong} X \setminus Y$$

isomorph. Genauer schreiben wir $\widetilde{X} = \widetilde{X}(f_0, \ldots, f_n)$.

Beispiel 8.20
$X = \mathbb{A}^n$, $Y = \{(0, \ldots, 0)\}$, $\mathcal{O}(X) = K[z_1, \ldots, z_n]$, $I(Y) = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(K^n), \\ f(z) &= [z]. \end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{A}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ hat den Graphen

$$
\begin{aligned}
Bl_Y(\mathbb{A}^n) \;&=\; \widetilde{\mathbb{A}^n}(z_1,\ldots,z_n) \;=\; \widetilde{\mathbb{A}^n} \;=\; \text{Abschluß von} \\
&\quad \{((z_1,\ldots,z_n),[w_1:\ldots:w_n]) \in (\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^{n-1} \mid \underbrace{[z_1:\ldots:z_n] = [w_1:\ldots:w_n]}_{\operatorname{rg}(z,w)=1 \Leftrightarrow z_i w_j - z_j w_i = 0 \;\forall i<j}\} \\
&\qquad \text{in } \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \\
&\subset\; \mathbb{V}(z_i w_j - z_j w_i \mid 1 \le i < j \le n) \\
&=\; \{(z,L) \in K^n \times \mathbb{P}(K^n) \mid z \in L\} \;=:\; \mathbb{L}.
\end{aligned}
$$

Die letztere Menge $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ ist aber irreduzibel, weil die Projektion

$$p : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, \quad p(z,L) = L$$

ein lokaltriviales Faserbündel mit Faser $\mathbb{A}^1$ ist. Über $U_i = \{[w_1:\ldots:w_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid w_i \neq 0\}$ hat man die Trivialisierung

$$\Phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{A}^1$$

mit

$$\Phi_i((z_1,\ldots,z_n),[w_1:\ldots:w_n]) \;=\; ([w_1:\ldots:w_n], z_i).$$

Die Umkehrabbildung ist, wie man leicht nachprüft,

$$\Phi_i^{-1}([w_1:\ldots:w_n],\lambda) \;=\; \left(\left(\frac{\lambda w_1}{w_i},\ldots,\frac{\lambda w_n}{w_i}\right),[w_1:\ldots:w_n]\right).$$

Da $\mathbb{L}$ irreduzibel ist und

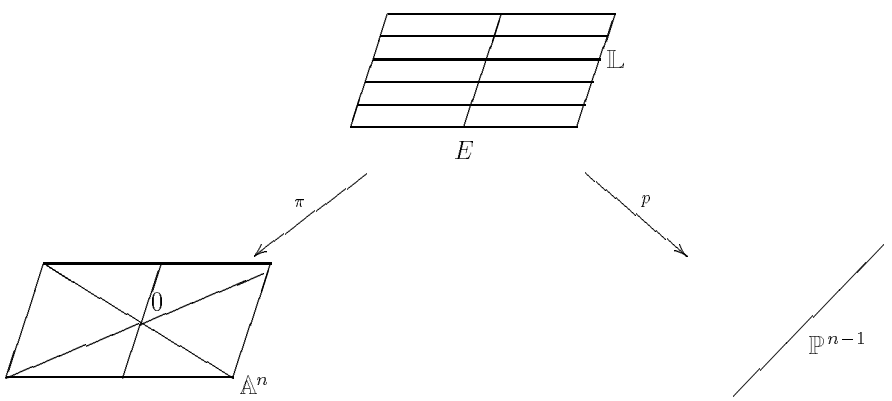
$$\operatorname{Graph}(f) \;=\; \mathbb{L} \cap ((\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^{n-1})$$

gilt, folgt

$$\widetilde{\mathbb{A}^n}(z_1,\ldots,z_n) \;=\; \overline{\operatorname{Graph}(f)} \;=\; \mathbb{L}$$

und

$$E \;=\; \pi^{-1}(0) \;=\; \mathbb{L} \cap (\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \;=\; \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}.$$



Das Faserbündel $p : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ hat eine besondere Eigenschaft:
Für $[w] \in \mathbb{P}^{n-1}$ wird die Faser $p^{-1}([w])$ durch π bijektiv auf den durch w aufgespannten 1-dimensionalen Untervektorraum $Kw \subset K^n$ abgebildet. Die Fasern haben auf diese Weise die Struktur eines 1-dimensionalen Vektorraumes. Die Trivialisierungen

$$\Phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{A}^1$$

bilden die Faser

$$p^{-1}([w]) = Kw \times \{[w]\}$$

linear isomorph auf $\{[w]\} \times K$ ab:

$$p^{-1}([w]) = \quad Kw \times \{[w]\} \overset{pr_1}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} Kw \xrightarrow{\text{iso}} K \qquad \cong \{[w]\} \times K,$$

$$\lambda w \longmapsto \lambda w_i.$$

Man nennt daher $p : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ ein *algebraisches Geradenbündel* über $\mathbb{P}^{n-1}$. Dieses ist sogar das wichtigste Geradenbündel auf $\mathbb{P}^{n-1}$! Es heißt *tautologisches Bündel* oder auch *Hopfbündel*, bisweilen auch das *universelle Geradenbündel* auf $\mathbb{P}^{n-1}$.

Der exzeptionelle Divisor $E \subset \mathbb{L}$ ist offensichtlich die Menge der Nullvektoren in den Fasern $p^{-1}([w])$ von $\mathbb{L}$. Genauer: $s_0 : \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{L}$, $s_0([w]) := (0, [w])$ ist ein regulärer Schnitt in $\mathbb{L}$, d.h. es gilt: s_0 ist reguläre Abbildung und $p \circ s_0 = id_{\mathbb{P}^{n-1}}$. s_0 ist der sogenannte *Nullschnitt* ($s_0(x) = 0$ in $\mathbb{L}_x = p^{-1}(x)\ \forall\, x \in \mathbb{P}^{n-1}$). Deshalb nennt man

$$E = s_0(\mathbb{P}^{n-1}) = \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{L}$$

die *Nullschnittfläche* in $\mathbb{L}$. In den affinen Koordinaten

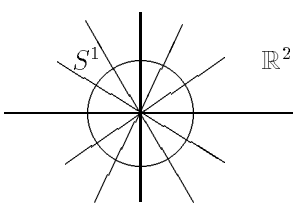
$$\begin{array}{rcccl} V_i := p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^n, \\ (z, [w]) & \longmapsto & ([w], z_i) & \longmapsto & \left(\frac{w_1}{w_i}, \ldots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_n}{w_i}, z_i\right) \end{array}$$

wird $E \cap V_i \subset V_i$ durch die eine Gleichung $z_i = 0$ gegeben. Da $E \subset \mathbb{L}$ lokal durch eine Gleichung definiert ist, ist E ein (effektiver) Divisor auf $\mathbb{L}$.

Übung Ist $s : \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{L}$ regulärer Schnitt in $\mathbb{L}$, so gilt $s = s_0$.

Beispiel
Der geometrischen Anschauung wegen überlegen wir noch, was dies alles im Fall $n = 2$, $K = \mathbb{R}$ bedeutet: Wir benutzen jetzt die klassische Topologie!

Zunächst haben wir $\varphi : S^1 \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$, $\varphi = \pi | S^1$. Aus dem Bild



entnimmt man

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L} & \xleftarrow{\widetilde{\varphi}} & \widetilde{\mathbb{L}} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{p}} \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \xleftarrow[\varphi]{} & S^1 \end{array} \qquad := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid x = \lambda z \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$\varphi(z) = [z],\ \widetilde{\varphi}(x,z) = (x,[z]).$$

Das reelle Geradenbündel $\widetilde{p} : \widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow S^1$ ist global trivial, denn

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{\Psi} & \widetilde{\mathbb{L}} \\ & {\scriptstyle pr_2}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \widetilde{p}} & \\ & S^1 & \end{array}$$

mit $\Psi(\lambda, z) = (\lambda z, z)$ ist ein kommutatives Diagramm und Ψ ist „Isomorphismus“. $\mathbb{L}$ können wir uns also als einen Zylinder vorstellen.

$\widetilde{\varphi}$ identifiziert die Faser $\widetilde{p}^{-1}(1)$ mit der Faser $\widetilde{p}^{-1}(-1)$, und zwar folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \underset{\cong}{\xrightarrow{\Psi_1}} & \widetilde{p}^{-1}(1) & & \widetilde{p}^{-1}(-1) \underset{\cong}{\xleftarrow{\Psi_{-1}}} \mathbb{R} \\ & & \searrow^{\widetilde{\varphi}} \quad \swarrow_{\widetilde{\varphi}} & & \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda, 1) \qquad p^{-1}([1]) \qquad (-\mu, -1) & \longmapsfrom & \mu \\ & & \searrow \quad \swarrow & & \\ & & (\lambda,[1]) \ = \ (-\mu,[1]) & & \end{array}$$

Also wird $\lambda \in \mathbb{R} \cong \widetilde{p}^{-1}(1)$ mit $\mu \in \mathbb{R} \cong \widetilde{p}^{-1}(-1)$ genau dann identifiziert, wenn $\lambda = -\mu$ gilt. Das Resultat ist: Das reelle Hopfbündel $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ über $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ hat (bzgl. der klassischen Topologie) die Gestalt eines Möbiusbandes (der „Rand“ gehört nicht zu $\mathbb{L}$).

Versuchen wir nun den Fall $K = \mathbb{C}$ zu verstehen: $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ ist auch in der klassischen Topologie stetig. $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\}$ ist eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$ und $\varphi = \pi | S^{2n-1} : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ ist stetig.

$$S^{2n-1} \xleftarrow{\widetilde{p}} \widetilde{\mathbb{L}} \ = \ \{(x,z) \in \mathbb{C}^n \times S^{2n-1} \mid x = \lambda z \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}\}$$

ist nun ein global triviales, stetiges, komplexes Geradenbündel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times S^{2n-1} & \xrightarrow{\Psi} & \widetilde{\mathbb{L}} \\ & {\scriptstyle pr_2}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \widetilde{p}} & \\ & S^{2n-1} & \end{array}$$

mit $\Psi(\lambda, z) = (\lambda z, z)$ ist globale topologische Trivialisierung. Das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times S^{2n-1} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{L} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S^{2n-1} & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathbb{P}^{n-1}, \end{array} \qquad \widetilde{\varphi}(\lambda, z) = (\lambda z, [z])$$

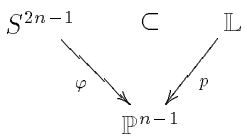
gibt nun Aufschluß über die topologische Gestalt des algebraischen Bündels $\mathbb{L}$.
Sind $z_1, z_2 \in S^{2n-1}$ und $[z_1] = [z_2]$, so gibt es ein $u \in S^1 = U(1)$ mit $z_2 = uz_1$, und deshalb wird durch $\widetilde{\varphi}$ die Faser $\mathbb{C} \times \{z_1\}$ mit $\mathbb{C} \times \{z_2\}$ mittels des unitären Isomorphismus

$$\mathbb{C} \xrightarrow{u^{-1}} \mathbb{C}, \quad \lambda \longmapsto (\lambda z_1, z_1) \longmapsto (\lambda z_1, [z_1]) = (\tfrac{\lambda}{u} z_2, [z_2]) \longmapsto \tfrac{\lambda}{u}$$

identifiziert. Die Struktur von $\mathbb{L} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^{n-1}$ ist durch die Abbildung

$$\varphi : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

vollständig bestimmt und umgekehrt, denn durch $S^{2n-1} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{L}$, $\Delta(z) = (z, z)$ wird S^{2n-1} in $\mathbb{L}$ eingebettet, und



ist kommutativ. In der Topologie nennt man auch $\varphi : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ das *Hopfbündel* über $\mathbb{P}^{n-1}$, φ ist ein sogenanntes $U(1)$-*Prinzipalbündel.*

Die Theorie der Prinzipalbündel ist ein wichtiges Gebiet sowohl in der algebraischen Topologie, der Differentialgeometrie, als auch in der modernen theoretischen Physik.

Wir kommen zur Definition der Aufblasung zurück. Die Definition von $\widetilde{X}(f_0, \ldots, f_n)$ hängt von dem Erzeugendensystem $f_0, \ldots, f_n$ des Ideals $I(Y) \subset \mathcal{O}(X)$ ab. Es gilt aber

Lemma 8.21 Ist $Y \subset X$ abgeschlossene Untervarietät von X ($X \subset \mathbb{A}^m$ affin), und ist

$$I(Y) \;=\; \langle f_0, \ldots, f_n \rangle \;=\; \langle g_0, \ldots, g_k \rangle,$$

so gibt es genau eine reguläre Abbildung

$$\Phi : \widetilde{X}(f_0, \ldots, f_n) \longrightarrow \widetilde{X}(g_0, \ldots, g_k)$$

mit $\pi' \circ \Phi = \pi$, wobei $\pi : \widetilde{X}(f_0, \ldots, f_n) \longrightarrow X$, $\pi' : \widetilde{X}(g_0, \ldots, g_k) \longrightarrow X$ die Projektionsabbildungen sind. Φ ist dann natürlich ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $\widetilde{X} = \widetilde{X}(f_0, \ldots, f_n) \subset X \times \mathbb{P}^n$, $\widetilde{X}' = \widetilde{X}(g_0, \ldots, g_k) \subset X \times \mathbb{P}^k$. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\Phi} & \widetilde{X}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X & \xrightarrow[id]{} & X, \end{array}$$

wobei $\Phi := \pi'^{-1} \circ \pi$ birational ist. Wir müssen nur noch zeigen, daß Φ regulär ist. Auf $\widetilde{X} \setminus E$ ist Φ regulär mit

$$\Phi(x, [f_0(x) : \ldots : f_n(x)]) = (x, [g_0(x) : \ldots : g_k(x)]). \qquad \text{(a)}$$

Wir weisen nun die Regularität von Φ auf den offenen, affinen Teilmengen

$$\widetilde{X}_i \;=\; \widetilde{X} \cap (X \times U_i)$$

von $\widetilde{X}$ nach, wobei $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(Z_i)$. Nach Konstruktion von $\widetilde{X}$ gilt offensichtlich

$$\widetilde{X} \;\subset\; \mathbb{V}(f_i Z_j - f_j Z_i,\; 0 \le i < j \le n) \;\subset\; X \times \mathbb{P}^n,$$

und somit ist

$$f_j \;=\; f_i \tfrac{Z_j}{Z_i} \;\text{ in } \mathcal{O}(\widetilde{X}_i).$$

Also folgt:

$$I(Y) \cdot \mathcal{O}(\widetilde{X}_i) \;=\; f_i \mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$$

ist das von f_i (gemeint ist $\pi^*(f_i)|\widetilde{X}_i$) erzeugte Hauptideal in $\mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$. Insbesondere gibt es Elemente $h_{ji} \in \mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$ mit

$$g_j = h_{ji} f_i \tag{b}$$

und, da auch $g_0, \ldots, g_k$ $I(Y) \cdot \mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$ erzeugen, Elemente $q_{ij} \in \mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$, so daß

$$f_i \;=\; \sum_{j=0}^{k} q_{ij} g_j.$$

Einsetzen von (b) ergibt

$$f_i \;=\; \left(\sum_{j=0}^{k} q_{ij} h_{ji} \right) \cdot f_i.$$

Da $f_i \neq 0$ und $\mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$ nullteilerfrei ist, folgt

$$\sum_{j=0}^{k} q_{ij} h_{ji} \;=\; 1 \quad \text{in } \mathcal{O}(\widetilde{X}_i).$$

Also ist

$$\mathbb{V}(h_{0i}, \ldots, h_{ki}) \;=\; \emptyset,$$

und $\Phi|\widetilde{X}_i \setminus E$ regulär in $\widetilde{X}_i \cap E$ ist fortsetzbar durch

$$\phi(\tilde{x}) = (\pi(\tilde{x}), [h_{0i}(\tilde{x}) : \ldots : h_{ki}(\tilde{x})]). \tag{c}$$

Für $\tilde{x} \notin E,\; x = \pi(\tilde{x})$, ist $f_i(x) \neq 0$ und nach (b)

$$g_j(x) \;=\; h_{ji}(\tilde{x}) f_i(x) \quad \forall\, j = 0, \ldots, k,$$

also steht (c) im Einklang mit (a). $\square$

Im Beweis hat sich weiter gezeigt, daß der exzeptionelle Divisor E in $\widetilde{X}(f_0,\ldots,f_n)$ lokal durch *eine* Gleichung beschrieben wird:

$$E \cap \widetilde{X}_i \ \subset \ \widetilde{X}_i$$

ist das Nullstellengebilde der regulären Funktion $\pi^*(f_i) \in \mathcal{O}(\widetilde{X}_i)$,

$$E \cap \widetilde{X}_i \ = \ \{\tilde{x} \in \widetilde{X}_i \mid f_i(\pi(\tilde{x})) = 0\}.$$

Deshalb ist E ein *effektiver Divisor* auf $\widetilde{X}$. Auf die Definition des Begriffs *Divisor* wollen wir hier nicht näher eingehen. (Zum Begriff des *Weil-Divisors* siehe Shafarevich Chapter III. Etwas abstrakter ist die Definition des *Cartier-Divisors*. Im Falle glatter Varietäten stimmen beide Begriffe überein. [Vergleiche Hartshorne: Algebraic Geometry, ChapterII §6. Hier wird allerdings die „Schemata-Sprache“ benutzt.] Der Begriff der Glattheit, den wir bisher nur für ebene Kurven, bzw. Hyperflächen in $\mathbb{P}^n$ definiert haben, wird später eingeführt.)

Beispiel 8.22

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{V}(y^2 - x^3 - x^2) \ \subset \ \mathbb{A}^2, \\ Y &= \{(0,0)\}, \quad I(Y) \ = \ \langle x, y\rangle, \\ Bl_Y(X) &= \widetilde{X} \ = \ \text{Abschluß von} \\ &\quad \{((x,y)[z_0:z_1]) \in (X \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{P}^1 \mid xz_1 - yz_0 = 0\} \ \text{ in } X \times \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

Wir parametrisieren

$$\begin{aligned} Bl_Y(\mathbb{A}^2) &= \{((x,y),[z_0,z_1]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xz_1 - yz_0 = 0\} \\ &= U_0 \cup U_1, \quad \left(z = \frac{z_1}{z_0},\ w = \frac{z_0}{z_1}\right), \\ U_0 &= \{z_0 \neq 0\} \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid xz = y\}. \end{aligned}$$

In U_0 sind x und z die unabhängigen Koordinaten

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^2_{(x,z)} & \xrightarrow{\cong} & U_0 & \xrightarrow{\pi|U_0} & \mathbb{A}^2_{(x,y)} = \mathbb{A}^2, \\ (x,z) & \longmapsto & (x,xz,z) & \longmapsto & (x,xz). \end{array}$$

Also ist

$$\begin{aligned} (\pi|U_0)^{-1}(X) &= \mathbb{V}((xz)^2 - x^3 - x^2) \\ &= \mathbb{V}(x^2(z^2 - x - 1)) \\ &= (E \cap U_0) \cup \mathbb{V}(z^2 - x - 1). \end{aligned}$$

Es folgt

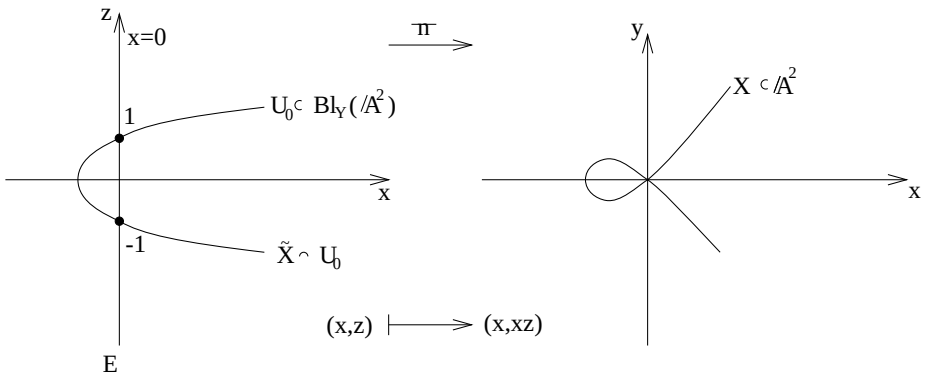
$$\widetilde{X} \cap U_0 \ = \ \mathbb{V}(z^2 - x - 1)$$

bzgl. der Koordinaten x, z auf U_0

$$E \cap U_0 \ = \ \mathbb{V}(x).$$

$$\begin{aligned}(\widetilde{X} \cap E) \cap U_0 &= \mathbb{V}(x, z^2 - x - 1) \;=\; \mathbb{V}(x, z^2 - 1) \\ &= \{(x,z) = (0, \pm 1)\} \\ &= \{((0,0),[1:1]),((0,0),[1:-1])\}\end{aligned}$$

besteht aus 2 Punkten.



Jetzt betrachten wir noch

$$U_1 \;=\; \{z_1 \neq 0\} \;=\; \{(x,y,w) \in \mathbb{A}^3 \mid x = yw\}.$$

y, w sind unabhängige Koordinaten auf U_1. Man hat

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^2_{(y,w)} & \xrightarrow{\cong} & U_1 & \xrightarrow{\pi|U_1} & \mathbb{A}^2_{(x,y)}, \\ (y,w) & \longmapsto & (yw,y,w) & \longmapsto & (yw,y). \end{array}$$

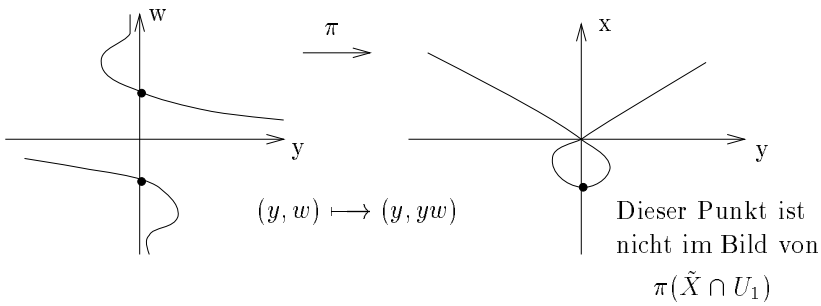
Also ist

$$\begin{aligned}(\pi|U_1)^{-1}(X) &= \mathbb{V}(y^2 - (yw)^3 - (yw)^2) \\ &= \mathbb{V}(y^2(1 - yw^3 - w^2)) \\ &= (E \cap U_1) \cup \mathbb{V}(1 - w^2 - yw^3),\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\widetilde{X} \cap U_1 &= \mathbb{V}(1 - w^2 - yw^3), \\ E \cap U_1 &= \mathbb{V}(y), \\ \widetilde{X} \cap E \cap U_1 &= \{(y,w) \;=\; (0, \pm 1)\}.\end{aligned}$$

Man erhält das Bild



Um die Bilder zu verstehen, beachte man die Beziehungen $w = \frac{1}{z},\ x = yw,\ y = xz$.

Es sei bemerkt, daß man durch sukzessives Aufblasen von Punkten jede ebene Kurve

$$C \;=\; \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^2 \quad (f \in K[x,y])$$

in eine glatte Kurve verwandeln kann.

Beispiel 8.23

$$X \;=\; \mathbb{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2, \quad Y \;=\; \{(0,0)\}.$$

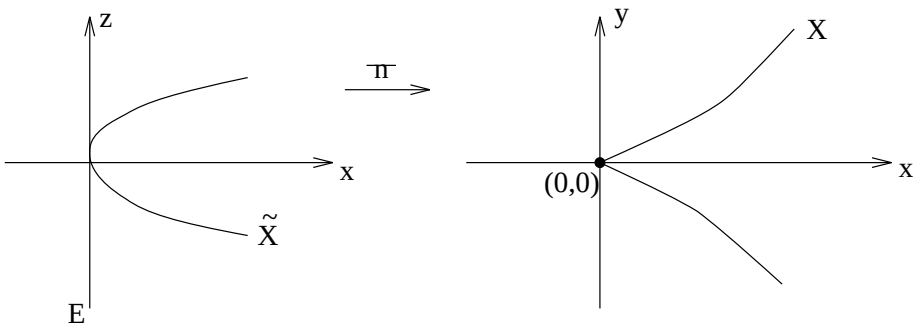
$$\widetilde{X} \;=\; Bl_Y X \subset Bl_Y \mathbb{A}^2 \;=\; U_0 \cup U_1 \;=\; \mathbb{A}^2_{(x,z)} \cup \mathbb{A}^2_{(y,w)},$$

wobei $z = \frac{1}{w},\ x = yw,\ y = xz$.

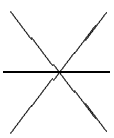
$$\widetilde{X} \cap U_0 \;=\; \mathbb{V}(z^2 - x), \quad \widetilde{X} \cap U_1 \;=\; \mathbb{V}(1 - yw^3),$$

$$\pi^{-1}(X) \;=\; \widetilde{X} \cup E.$$

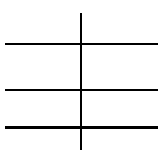
E und $\widetilde{X}$ berühren sich in einem Punkt $p_0,\ x = 0,\ z = 0$ (d.h. $p_0 = ((0,0),[1:0]) \in Bl_Y(\mathbb{A}^2)$).



Jetzt wird die affine offene Menge $\mathbb{A}^2_{(x,z)}$ im Punkt p_0 aufgeblasen, also $x = uv,\ z = v$ gesetzt. Aus $E = \mathbb{V}(x)$ wird $\underbrace{\mathbb{V}(v)}_{exz.} \cup \mathbb{V}(u)$, $\widetilde{E} = \mathbb{V}(u)$. Aus $\widetilde{X}$ wird $\widetilde{\widetilde{X}} = \mathbb{V}(v - u)$. Das Urbild von X besteht jetzt aus drei Geraden $\mathbb{V}(u)$, $\mathbb{V}(v)$, $\mathbb{V}(v-u)$ durch $(0,0)$ in der u,v-Ebene.



Durch nochmaliges Aufblasen erhält man vier Geraden, die sich wie skizziert schneiden:



9 Beispiele projektiver Varietäten

In diesem Abschnitt sollen einige fundamentale Beispiele eingeführt werden, allen voran die „Graßmannschen“.

Es sei K ein Körper, $0 \leq k \leq n$. Mit

$$G(k,n)$$

bezeichnen wir die Menge der k-dimensionalen Untervektorräume von K^n. Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, so sei

$$G_k(V) \;:=\; \{U \mid U \subset V \text{ } k\text{-dimensionaler Untervektorraum}\},$$

also $G(k,n) = G_k(K^n)$, $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}$, $G_1(V) = \mathbb{P}(V)$. Ist $U \subset K^n$ k-dimensionaler Untervektorraum, so ist $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ $(k-1)$-dimensionaler linearer Unterraum. Also gibt es eine kanonische Bijektion

$$\begin{array}{rcl} G(k,n) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{G}(k-1,n-1) := \{M \mid M \subset \mathbb{P}^{n-1}\,(k-1)\text{-dim. linearer Unterraum}\}, \\ U & \longmapsto & \mathbb{P}(U). \end{array}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß $G(k,n)$ in kanonischer Weise als eine projektive Varietät aufgefaßt werden kann. Die Idee ist, einem k-dimensionalen Untervektorraum $U \subset K^n$ Koordinaten zuzuordnen, durch die U charakterisiert ist. Ist

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \;\in K^{k,n} \tag{9.1}$$

eine Matrix vom Rang k, deren Zeilen den Unterraum U aufspannen, so ordnen wir A den folgenden Vektor

$$pl(A) \in K^{\binom{n}{k}} \;=\; \{(a_{i_1 \cdots i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}\}$$

zu:

$$pl(A) \;:=\; \left(\det(a_{\nu\, i_\mu})_{\nu,\mu=1,\ldots,k}\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}. \tag{9.2}$$

Für $i = (i_1, \ldots, i_k)$ heißt die k-reihige Unterdeterminante

$$p_i \;=\; \det(a_{\nu\, i_\mu})_{\nu,\mu=1,\ldots,k}$$

die i-te *Plückerkoordinate* von A (man beachte, daß i ein Multiindex ist). Wir bemerken sogleich, daß gilt:

$$\operatorname{rg} A = k \iff pl(A) \neq 0 \;\text{ in } K^{\binom{n}{k}}.$$

Es sei nun $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}}$ eine weitere Matrix. Dann gilt:
Die Zeilen von B spannen ebenfalls U auf $\iff \exists\, C = (c_{ij}) \in GL_k(K)$, so daß $B \;=\; C \cdot A$.

Ist dann $i = (i_1, \ldots, i_k)$ und B_i bzw. A_i die Matrix aus der i_1-ten,$\ldots, i_k$-ten Spalte von B bzw. A, so ist natürlich auch

$$B_i \;=\; C \cdot A_i,$$

also

$$\det B_i \;=\; \det C \cdot \det A_i$$

und somit

$$pl(B) \;=\; (\det C) \cdot pl(A).$$

Geht man zu $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} = (K^{\binom{n}{k}} \setminus \{0\})/K^*$ über, so folgt also

$$[pl(A)] \;=\; [pl(B)].$$

Unabhängig von der Wahl der Matrix A wird also einem k-dimensionalen Untervektorraum $U \subset K^n$ ein Punkt

$$pl(U) \;:=\; [pl(A)] \;=\; [(p_i)_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}]$$

im projektiven Raum $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ zugeordnet. $pl(U)$ heißt der *Plückerpunkt* von U. $(p_i)_i$ sind die *homogenen Plückerkoordinaten* von U.

Lemma 9.1 Die Abbildung

$$pl : G(k,n) \;\longrightarrow\; \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

ist injektiv.

Beweis: Seien $A, B \in K^{n,k}$ Matrizen vom Rang k, und es gelte

$$pl(B) \;=\; c \cdot pl(A) \;\text{ für ein } c \in K^*.$$

Es sei Œ $\det A_{1,\ldots,k} \neq 0$ (sonst numeriere man die Variablen neu). Dann ist auch

$$\det B_{1,\ldots,k} \;=\; c \cdot \det A_{1,\ldots,k} \neq 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} B^{-1}_{1,\ldots,k} B &= (E_k | B') \text{ mit } B' \in K^{k,n-k}, \\ A^{-1}_{1,\ldots,k} A &= (E_k | A') \text{ mit } A' \in K^{k,n-k}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} pl(E_k|B') &= \det B^{-1}_{1,\ldots,k} \cdot pl(B) \\ &= c^{-1} \det A^{-1}_{1,\ldots,k} \cdot c \cdot pl(A) \\ &= pl(E_k|A'). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Sei $B' = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=k+1,\dots,n}}$ und $A' = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=k+1,\dots,n}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \pm a_{ij} &= \det(e^1, \dots, e^{i-1}, e^{i+1}, \dots, e^k, a^j) \\ &= \det(e^1, \dots, e^{i-1}, e^{i+1}, \dots, e^k, b^j) \\ &= \pm b_{ij}. \end{aligned}$$

Also ist

$$B^{-1}_{1,\dots,k} B' \;=\; A^{-1}_{1,\dots,k} A',$$

und somit spannen die Zeilen von A und die von B denselben Untervektorraum U auf. $\square$

Wichtig ist nun

Lemma 9.2

a) $pl(G(k,n)) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ ist eine projektive Untervarietät.

b) $\mathbb{A}^{k,n-k} \xrightarrow{\Phi_i} pl(G(k,n)) \cap U_i$ ist biregulär für alle $i = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$. Dabei ist $U_i = \{[p_j] \in \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \mid p_i \neq 0\}$ und

$$\Phi_i \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\,n-k} \end{pmatrix} := \left[pl \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \right],$$

wobei $1 \le j_1 < \dots < j_{n-k} \le n$ komplementär zu $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ ist und

$$\begin{aligned} b_{i\,j_\nu} &:= a_{i\nu} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n-k, \\ b_{i\,i_\nu} &:= \delta_{i\nu} \quad \text{(Kroneckerdelta) für } \nu = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Beispiel: $\Phi_{(1,\dots,k)}(A') = [pl(E_k|A')]$.

Beweis: zu a):
1.Schritt: Zunächst werden die berühmten *Plückerrelationen* beschrieben. Es sei $U \in G(k,n)$ und $pl(U) = p_i$. Sind $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ beliebige Indizes, so wird ebenfalls p_i $(i = (i_1, \dots, i_k))$ definiert:

$$p_i \;=\; \det(a_{\nu\, i_\mu})_{\nu,\mu=1,\dots,k}.$$

Dabei sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ eine Matrix, deren Zeilen U aufspannen. Es gilt dann $p_i = 0$ falls $i_\nu = i_\mu$ für ein $\nu \neq \mu$. $p_i = \operatorname{sign}(\sigma) p_{i_\sigma}$, falls $i_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$ und $\sigma \in S_k$.
Es gelten die Plückerrelationen:

Für alle $i_1, \dots, i_{k-1}, j_1, \dots, j_{k+1} \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^\lambda p_{i_1,\dots,i_{k-1},j_\lambda} \cdot p_{j_1,\dots,\hat{j_\lambda},\dots,j_{k+1}} \;=\; 0 \tag{9.4}$$

(Ein Dach $\hat{}$ über einem Index bedeutet, daß dieser wegzulassen ist.)

Beweis: Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz gilt:

$$p_{i_1,\ldots,i_{k-1},j_\lambda} \;=\; \begin{vmatrix} a_{1\,i_1} & \cdots & a_{1\,i_{k-1}} & a_{1\,j_\lambda} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k\,i_1} & \cdots & a_{k\,i_{k-1}} & a_{k\,j_\lambda} \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu a_{\nu,j_\lambda},$$

wobei

$$\alpha_\nu \;:=\; (-1)^{k+\nu} \begin{vmatrix} a_{1\,i_1} & \cdots & a_{1\,i_{k-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k\,i_1} & \cdots & a_{k\,i_{k-1}} \end{vmatrix} \quad (\nu\text{-te Zeile streichen}).$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^\lambda p_{i_1,\ldots,i_{k-1},j_\lambda} \cdot p_{j_1,\ldots,\hat{j_\lambda},\ldots,j_{k+1}} \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^\lambda a_{\nu\,j_\lambda} \cdot p_{j_1,\ldots,\hat{j_\lambda},\ldots,j_{k+1}} \\ &\quad = 0, \text{ weil} \\ 0 \;&=\; \begin{vmatrix} a_{\nu\,j_1} & \cdots & a_{\nu\,j_{k+1}} \\ a_{1\,j_1} & \cdots & a_{1\,j_{k+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k\,j_1} & \cdots & a_{k\,j_{k+1}} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^\lambda a_{\nu\,j_\lambda} \cdot p_{j_1,\ldots,\hat{j_\lambda},\ldots,j_{k+1}}. \end{aligned}$$

2. Schritt: Die Plückerrelationen 9.4 werden nun als homogene Polynome vom Grad 2 in den Unbestimmten p_i, $i = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ aufgefaßt. Dabei folgen wir weiter der Konvention

$$\begin{aligned} p_i \;&:=\; 0, \quad \text{wenn } i_\nu = i_\mu \text{ für ein } \nu \neq \mu, \\ p_i \;&:=\; sign(\sigma) p_{i_\sigma}, \quad \text{wenn } \sigma \in S_k, \end{aligned}$$

so daß $1 \le i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k)} \le n$ die natürliche Reihenfolge der verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Somit ist der Term p_i für alle Multiindizes $i \in \{1, \ldots, n\}^k$ definiert. Für $i = (i_1, \ldots, i_{k-1})$, $j = (j_1, \ldots, j_{k+1})$ sei

$$Q_{ij} \;:=\; \sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^\lambda p_{i_1,\ldots,i_{k-1},j_\lambda} \cdot p_{j_1,\ldots,\hat{j_\lambda},\ldots,j_{k+1}} \;\in\; K[p_{l_1,\ldots,l_k},\; 1 \le l_1 < \cdots < l_k \le n].$$

Behauptung: Ist $p = [p_l] \in \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ und gilt

$$Q_{ij}(p) \;=\; 0 \;\text{ für alle } i = (i_1, \ldots, i_{k-1}),\; j = (j_1, \ldots, j_{k+1}), \tag{9.5}$$

so gibt es ein $U \in G(k, n)$ mit

$$pl(U) \;=\; p.$$

Beweis: Der Bequemlichkeit halber sei

$$p_{(1,\ldots,k)} \;\neq\; 0.$$

Da die Gleichungen homogen sind, können wir sogar

$$p_{(1,\dots,k)} \;=\; 1$$

voraussetzen. Wir machen den Ansatz

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & & 0 & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{k\,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Damit $pl(A) = p$ gilt, muß notwendig

$$\begin{aligned} (-1)^{k+\nu} a_{\nu,\mu} &= \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & a_{1\nu} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{k\nu} \end{pmatrix} \text{ (ν-te Zeile streichen)} \\ &= p_{1,\dots,\hat{\nu},\dots,k,\mu} \end{aligned}$$

gelten, wie wir schon oben gesehen haben. Wir müssen also setzen:

$$a_{\nu\mu} \;:=\; (-1)^{k+\nu} p_{1,\dots,\hat{\nu},\dots,k,\mu} \quad \text{für } \nu = 1,\dots,k,\ \mu = k+1,\dots,n. \tag{9.6}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} pl(A)_i &= p_i \quad \text{für alle } i = (i_1,\dots,i_k), 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n, \\ &\qquad \text{mit } \#(\{i_1,\dots,i_k\} \cup \{1,\dots,k\}) \le k+1. \end{aligned}$$

Sei nun für $l = 1,\dots,k$

$$I_l \;:=\; \{i = (i_1,\dots,i_k) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n, \text{ und } \#(\{i_1,\dots,i_k\} \cup \{1,\dots,k\}) \le k+l\},$$

und es sei für l schon gezeigt, daß für alle $i \in I_l$ gilt:

$$pl(A)_i \;=\; p_i. \tag{9.7}$$

Wir zeigen, daß dann 9.7 auch für alle $i \in I_{l+1}$ gilt.

Beweis: Es sei $i \in I_{l+1} \setminus I_l$, $i = (i_1,\dots,i_k)$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, und $\#(\{i_1,\dots,i_k\} \cup \{1,\dots,k\}) \le k+l+1$. Es folgt nach Voraussetzung 9.5

$$0 \;=\; Q_{(i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_k),(1,\dots,k,i_l)}(p) \;=\; \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^{\lambda} p_{i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_k,\lambda} \cdot p_{1,\dots,\hat{\lambda},\dots,k,i_l} + (-1)^{l+1} p_i. \tag{9.8}$$

Nach dem ersten Schritt 9.4 gilt auch

$$0 \;=\; \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^{\lambda} pl(A)_{i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_k,\lambda} \cdot pl(A)_{1,\dots,\hat{\lambda},\dots,k,i_l} + (-1)^{l+1} pl(A)_i. \tag{9.9}$$

Vergleicht man beide Gleichungen 9.8 und 9.9, und setzt die Induktionsvoraussetzung 9.7 ein, so folgt $p_i = pl(A)_i$.

Damit ist a) bewiesen und außerdem gezeigt, daß

$$pl(G(k,n)) \;=\; \mathbb{V}(Q_{i,j},\; i \in \{1,\ldots,n\}^{k-1},\; j \in \{1,\ldots,k\}^{k+1}) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

gilt.

b) ist einfach. Wir betrachten wieder nur $i = (1,\ldots,k)$.

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,\ldots,k)} : \mathbb{A}^{k,n-k} &\longrightarrow pl(G(k,n)) \cap U_{(1,\ldots,k)}, \\ A &\longmapsto pl(E|A) \end{aligned}$$

ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$p = [p_i] \;\longmapsto\; A = (a_{\nu\mu})_{\substack{\nu=1,\ldots,k \\ \mu=k+1,\ldots,n}},$$

wobei $a_{\nu\mu} = (-1)^{k+\nu} p_{1,\ldots,\hat{\nu},\ldots,k,\mu} \cdot \frac{1}{p_{1,\ldots,k}}$, wie wir schon im zweiten Schritt von a) gesehen haben.
□

Definition 9.3 $G(k,n)$ heißt die *Graßmannmannigfaltigkeit* der k-dimensionalen Untervektorräume in K^n. $pl : G(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ heißt die *Plückereinbettung* von $G(k,n)$.
$G(k,n)$ besitzt eine Standardüberdeckung $(V_{i_1,\ldots,i_k})_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ aus $\binom{n}{k}$ offenen, zu $\mathbb{A}^{k(n-k)}$ isomorphen Teilmengen

$$V_{i_1,\ldots,i_k} \;=\; \{U \in G(k,n) \mid pr_{i_1,\ldots,i_k}|U : U \longrightarrow K^k \text{ ist isomorph}\},$$

wobei $pr_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_n) := (x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$.
Daher sagt man: $G(k,n)$ ist $k(n-k)$-dimensional. $\dim G(k,n) = k(n-k)$.

Beispiel 9.4
Es sei $n \ge 4$. $G(2,n) = \mathbb{G}(1,n-1) = \{\text{Geraden im } \mathbb{P}^{n-1}\}$ wird in $\mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$ durch die Plückerrelationen $Q_{i,j,k,l} = -p_{i,j}p_{k,l} + p_{i,k}p_{j,l} - p_{i,l}p_{j,k} = 0$ als Untervarietät von $\mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$ beschrieben. Es treten nur $\binom{n}{4}$ Gleichungen auf, weil man $i < j < k < l$ voraussetzen darf.
$pl(G(2,4))$ ist eine Quadrik in $\mathbb{P}^5$ mit der Gleichung

$$\begin{aligned} Q &= -p_{1,2}p_{3,4} + p_{1,3}p_{2,4} - p_{1,4}p_{2,3} \\ &= -Z_0Z_5 + Z_1Z_4 - Z_2Z_3, \qquad\qquad (p_{1,2},p_{1,3},p_{1,4},p_{2,3},p_{2,4},p_{3,4}) = (Z_0,\ldots,Z_5). \end{aligned}$$

$pl(G(2,5)) \subset \mathbb{P}^9$ ist 6-dimensional und wird durch $5 = \binom{5}{4}$ quadratische Gleichungen beschrieben.

Beispiel 9.5 (Schubertzykel)
Es sei

$$V_m \;=\; K^m \times 0 \;\subset\; K^n,$$

dann ist

$$0 \;=\; V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \;=\; K^n$$

eine *Fahne* von Untervektorräumen in K^n,

$$\dim V_m \;=\; m.$$

Ist $U \in G(k,n)$, so ist

$$0 \;=\; U \cap V_0 \;\subset\; U \cap V_1 \;\subset \cdots \subset\; U \cap V_n \;=\; U \tag{9.10}$$

eine Folge von Untervektorräumen von U.
U ist *in allgemeiner Lage* bzgl. der Fahne (V_m), wenn $U \cap V_m$ die minimal mögliche Dimension hat für $m = 1, \ldots, n$, d.h., wenn

$$\dim(U \cap V_m) \;=\; 0, \quad \text{falls } m \leq n-k$$

und

$$\dim(U \cap V_m) = m + k - n, \quad \text{falls } n-k < m \leq n.$$

Ist U beliebig, so gilt

$$0 \;\leq\; \dim(U \cap V_{m+1}) - \dim(U \cap V_m) \;\leq\; 1. \tag{9.11}$$

Also gibt es eine wohlbestimmte Folge

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k \leq n,$$

so daß gilt:

$$\begin{array}{lcl}
\dim(U \cap V_{\sigma_1 - 1}) & = & 0 \\
\dim(U \cap V_{\sigma_1}) & = & 1 \\
 & \vdots & \\
\dim(U \cap V_{\sigma_2 - 1}) & = & 1 \\
\dim(U \cap V_{\sigma_2}) & = & 2 \\
 & \vdots & \\
\dim(U \cap V_{\sigma_i - 1}) & = & i-1 \\
\dim(U \cap V_{\sigma_i}) & = & i \\
 & \text{usw.} &
\end{array}$$

$(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ heißt das *Schubertsymbol* von U.
Wir behaupten

$$\Sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \;:=\; \{U \in G(k,n) \mid \dim(U \cap V_{\sigma_i}) \geq i\}$$

ist eine abgeschlossene Untervarietät von $G(k,n)$.
Zum Beweis genügt es zu zeigen , daß

$$\Sigma_d(W) \;:=\; \{U \in G(k,n) \mid \dim(U \cap W) \geq d\}$$

für jeden Untervektorraum $W \subset K^n$ und jede natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}$ eine Untervarietät von $G(k,n)$ ist. Es sei $l = \dim W$. Für d braucht man nur

$$0 \leq d \leq \min(l,k)$$

zu betrachten.
Es sei $b_1, \ldots, b_l$ eine Basis von W. Ist $a_1, \ldots, a_k$ eine Basis von $U \subset G(k,n)$, so ist

$$\dim(U \cap W) \geq d$$

nach der Dimensionsformel äquivalent zu

$$\dim(U + W) \leq k + l - d,$$

also zu

$$\operatorname{rg}(b_1, \ldots, b_l, a_1, \ldots, a_k) \leq k + l - d,$$

d.h. alle $(k+l-d+1)$-reihigen Unterdeterminanten der $n \times (k+l)$-Matrix $(b_1, \ldots, b_l, a_1, \ldots, a_k)$ verschwinden. Es folgt (!)

$$\Sigma_d(W) \cap V_i \text{ ist abgeschlossen in } V_i \quad \text{für alle } i = (i_1, \ldots, i_k) \text{ mit } 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n. \ \square$$

$\Sigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \Sigma_1(V_{\sigma_1}) \cap \cdots \cap \Sigma_k(V_{\sigma_k})$ heißt *Schubertzykel* in $G(k,n)$ zum Schubertsymbol $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$.

Einige Beispiele:

$$\begin{aligned}
\Sigma(1, 2, \ldots, k) &= \{V_k\}, \\
\Sigma(n-k+1, \ldots, n) &= G(k,n), \\
\Sigma(m-k+1, \ldots, m-1, m) &= G_k(V_m) \subset G(k,n), \\
\Sigma(1, \ldots, l, n-k+l, \ldots, n) &= \{U \in G(k,n) \mid V_l \subset U\} \cong G_{k-l}(K^n/V_l).
\end{aligned}$$

In $G(2,4)$ haben wir die Schubertzyklen
$\Sigma(1,2) = \{V_2\}$,
$\Sigma(1,3) = \{U \in G(2,4) \mid V_1 \subset U \subset V_3\} \cong \mathbb{P}^1$,
$\Sigma(1,4) = \{U \in G(2,4) \mid V_1 \subset U\} \cong \mathbb{P}(K^4/V_1) \cong \mathbb{P}^2$,
$\Sigma(2,3) = \{U \in G(2,4) \mid U \subset V_3\} \cong \mathbb{P}(V_3^*) = \mathbb{P}^2$,
$\Sigma(2,4) = \{U \in G(2,4) \mid \dim(U \cap V_2) \geq 1\} = \{L \in \mathbb{G}(1,3) \mid L \cap L_1 \neq \emptyset\}$,
$\Sigma(3,4) = G(2,4)$.

$\Sigma(2,4)$ ist die Varietät der projektiven Geraden L in $\mathbb{P}^3$, die eine feste Gerade L_1 schneiden.

Die Schubertzyklen auf $G(k,n)$ spielen eine wichtige Rolle für die Berechnung des ganzzahligen Kohomologieringes $H^*(G(k,n), \mathbb{Z})$ im Fall $K = \mathbb{C}$ (siehe Griffith/Harris: Principles of Algebraic Geometry, p.193-211).

Beispiel 9.6
Die erste interessante Graßmannmannigfaltigkeit, die kein projektiver Raum ist, ist

$$\mathbb{G}(1,3).$$

Durch die Plückereinbettung ($p = [a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14}]$, $q = [a_{21} : a_{22} : a_{23} : a_{24}]$)

$$L = \overline{pq} \longmapsto [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5],$$

$z_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $z_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z_4 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}$, $z_5 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$,
wird $\mathbb{G}(1,3)$ isomorph auf die Quadrik

$$\mathbf{Q} \;=\; \mathbb{V}(Z_0Z_5 - Z_1Z_4 + Z_2Z_3) \;\subset\; \mathbb{P}^5$$

abgebildet. Es ist leicht, die Bilder der Schubertzyklen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
pl(\Sigma(1,2)) &= pl(\overline{[1:0:0:0],[0:1:0:0]}) \\
&= [1:0:0:0:0:0], \\
pl(\Sigma(1,3)) &= \{pl(\overline{[1:0:0:0],[0:a:b:0]}) \mid [a:b] \in \mathbb{P}^1\} \\
&= \{[a:b:0:0:0:0] \mid [a:b] \in \mathbb{P}^1\} \\
&\quad \text{ist Gerade in } \mathbb{P}^5, \\
pl(\Sigma(1,4)) &= \{pl(\overline{[1:0:0:0],[0:a:b:c]}) \mid [a:b:c] \in \mathbb{P}^2\} \\
&= \{[a:b:c:0:0:0] \mid [a:b:c] \in \mathbb{P}^2\} \\
&\quad \text{ist Ebene in } \mathbb{P}^5, \\
pl(\Sigma(2,3)) &= \{pl(\overline{[a_{11}:a_{12}:a_{13}:0],[a_{21}:a_{22}:a_{23}:0]}) \mid \\
&\qquad (a_{11},a_{12},a_{13}),(a_{21},a_{22},a_{23}) \in K^3 \text{ linear unabhängig } \} \\
&= \{[p_{1,2}:p_{1,3}:0:p_{2,3}:0:0]\} \\
&\quad \text{ist ebenfalls Ebene in } \mathbb{P}^5, \\
pl(\Sigma(2,4)) &= \left\{ pl(\overline{[a_{11}:a_{12}:a_{13}:a_{14}],[a_{21}:a_{22}:a_{23}:a_{24}]}) \mid \right. \\
&\qquad \left. \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 3 \;\left(\text{d.h. } \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} = 0 \right) \right\} \\
&= \mathbf{Q} \cap \mathbb{V}(Z_5) \\
&= \mathbb{V}(Z_1Z_4 - Z_2Z_3) \subset \mathbb{P}^4 \\
&= \overline{p_0\Sigma_{1,1}} \\
&\quad \text{ist Kegel über der Segrequadrik } \Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{V}(Z_0,Z_5) \subset \mathbb{P}^5 \\
&\quad \text{mit Spitze } p_0 = [1:0:0:0:0:0].
\end{aligned}$$

$$p_0 = \Sigma(1,2) \subset \Sigma(1,3) \subset \begin{matrix} \Sigma(1,4) \\ \Sigma(2,3) \end{matrix} \subset \Sigma(2,4) \subset \Sigma(3,4) = \mathbb{G}(1,3)$$

Übungen zu $\mathbb{G}(1,3)$:

1) Seien $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^3$ disjunkte Geraden.

$$X \;=\; \{L \in \mathbb{G}(1,3) \mid L \cap L_i \neq \emptyset \text{ für } i = 1,2\}$$

wird unter pl auf einen glatten Schnitt

$$\mathbf{Q} \cap \mathbb{P}^3, \quad \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5 \text{ linear},$$

abgebildet; ist also isomorph zu einer glatten Quadrik in $\mathbb{P}^3$.
Welche Gestalt hat X, wenn $L_1 \cap L_2 = \{p\}$?

2) Sei $\mathbb{H} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*}$ die universelle Ebene in $\mathbb{P}^3$. Für $(p, H) \in \mathbb{H}$ sei $\Sigma_{p,H} = \{L \in \mathbb{G}(1,3) \mid p \in L \subset H\}$. Zeige:

   (a) $pl(\Sigma_{p,H})$ ist Gerade in $\mathbb{P}^5$.

   (b) Jede Gerade in $\mathbb{P}^5$, die ganz in $\mathbf{Q}$ liegt, ist von dieser Form.

3) Für $p \in \mathbb{P}^3$ sei $\Sigma_p = \{L \in \mathbb{G}(1,3) \mid p \in L\}$, und für $H \in \mathbb{P}^{3*}$ sei $\Sigma_H = \{L \in \mathbb{G}(1,3) \mid L \subset H\}$. Jede Ebene in $\mathbb{P}^5$, die ganz in $\mathbf{Q}$ liegt, ist von der Form $pl(\Sigma_p)$ oder $pl(\Sigma_H)$.

Analog zur universellen Hyperebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{P}^n$ kann man das universelle Bündel der k-dimensionalen linearen projektiven Unterräume von $\mathbb{P}^n$ konstruieren:

Definition 9.7 Es sei

$$\mathbb{F} := \{(M, q) \in \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}^n \mid q \in M\},$$

und $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, $\psi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}(k,n)$ seien die Projektionen.
ψ heißt *universelles Bündel* auf $\mathbb{G}(k,n)$.

Um analog wie in Beispiel 7.24 verfahren zu können, benutzen wir die Beschreibung von linearen projektiven Unterräumen

$$M = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^n, \quad (U \subset K^{n+1} \text{ Untervektorraum})$$

durch lineare Gleichungen an Stelle von Basen von U. Eine Matrix

$$A : K^{n+1} \longrightarrow K^{n-k} \quad (A \in K^{n-k,n+1})$$

vom Rang $n-k$ beschreibt U, wenn

$$U = \ker A = \{z \in K^{n+1} \mid Az = 0\}$$

(hier wird $z \in K^{n+1}$ als Spaltenvektor aufgefaßt).
Für zwei Matrizen $A, A' \in K^{n-k,n+1}$ vom Rang $n-k$ gilt $\ker A = \ker A'$ genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix $C \in GL_{n-k}(K)$ gibt, so daß

$$A' = CA.$$

Sowohl A als auch A' ist dann Koeffizientenmatrix eines linearen homogenen Gleichungssystems mit der Lösungsmenge $U = \ker A = \ker A'$.
Ist $M = \mathbb{P}(U)$ und $q = [z]$, $z \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, so bedeutet $q \in M$ nichts anderes, als

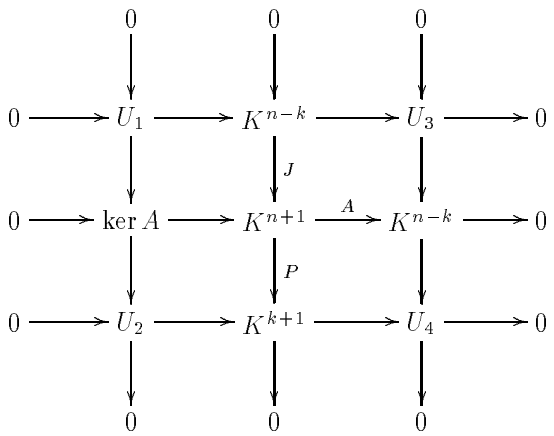
$$Az = 0.$$

$\mathbb{G}(k,n) = \{\mathbb{P}(\ker A) \mid A \in K^{n-k,n+1}, \operatorname{rg} A = n-k\}$.
Ist $i = (i_0, \ldots, i_k)$, $0 \le i_0 < \cdots < i_k \le n$ und $j = (j_1, \ldots, j_{n-k})$, $0 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le n$ komplementär zu i, so gilt

$$V_i = \{\mathbb{P}(U) \mid pr_{i_0,\ldots,i_k} | U : U \longrightarrow K^{k+1} \text{ ist Isomorphismus}\} \tag{9.12}$$

$$= \{\mathbb{P}(\ker A) \mid A \in K^{n-k,n+1}, \det A_j \neq 0\}, \tag{9.13}$$

wobei A_j die $(n-k)$-reihige Untermatrix von A aus der j_1-ten bis j_{n-k}-ten Spalte ist.
Beweis: Es seien $P \in K^{k+1,n+1}$, $J \in K^{n+1n-k}$ die Matrizen mit $Pe^{i_\nu} = e^\nu$, $Pe^{j_\mu} = 0$, $Je^\nu = e^{j_\nu}$.
Für $A \in K^{n-k,n+1}$ erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:



wobei

$$\begin{aligned} U_1 &:= \ker A \cap \operatorname{im} J \subset \ker A, \\ U_2 &:= P(\ker A) \subset K^{k+1}, \quad P = pr_{i_0 \dots i_k}, \\ U_3 &:= \operatorname{im}(AJ) \subset K^{n-k}, \\ U_4 &:= K^{n-k}/U_3. \end{aligned}$$

Die Pfeile erklären sich von selbst.
Nun gilt: $\mathbb{P}(\ker A) \in V_i \Leftrightarrow P|\ker A$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow U_2 \longrightarrow K^{n-k}$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow U_4 = 0 \Leftrightarrow U_3 \longrightarrow K^{n-k}$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow AJ$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow \det(AJ) \neq 0$.
Da $AJ = A_j$ (nach Definition von J), ist die Aussage **??** bewiesen.

Wir erhalten eine neue Parametrisierung von V_i:

$$\tilde{\Phi}_i : K^{n-k,k+1} = \mathbb{A}^{(n-k)(k+1)} \longrightarrow V_i$$

mit

$$\tilde{\Phi}_i(A) := \mathbb{P}(\ker B)),$$

wobei $A \in K^{n-k,k+1}$ und B die $(n-k) \times (n+1)$-Matrix ist, mit

$$BJ = E_{n-k}, \quad BI = A \quad (Ie^\nu = e^{i_\nu},\ I \in K^{n+1,k+1}).$$

Beispiel: Ist $i = (0, \dots, k)$, also $j = (k+1, \dots, n+1)$, so ist $J = \binom{0}{E_{n-k}}$, $I = \binom{E_{k+1}}{0}$ und $B = (A|E_{n-k})$, denn: $BJ = (A|E)\binom{0}{E} = E$, $BI = (A|E)\binom{E}{0} = A$.

Man erhält nun

$$\mathbb{F} \cap (V_i \times \mathbb{P}^n) = \{(\tilde{\Phi}_i(A), [z]) \in V_i \times \mathbb{P}^n \mid Bz = 0\}.$$

Ist nun $Q : K^{n+1} \longrightarrow K^{n-k}$ die Projektion mit $Qe^{j_\nu} = e^\nu$, $Qe^{i_\mu} = 0$, so gilt

$$E_{n+1} = IP + JQ,$$

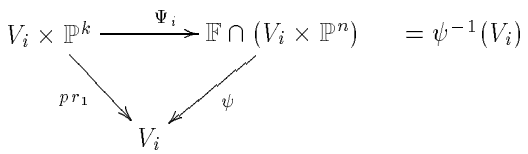
also

$$B \;=\; BIP + BJQ \;=\; AP + Q,$$

und somit ist

$$Bz = 0 \;\Leftrightarrow\; Qz = -A(Pz).$$

Damit erhält man, daß $\mathbb{F} \cap (V_i \times \mathbb{P}^n)$ eine abgeschlossene Untervarietät von $V_i \times \mathbb{P}^n$ ist. Weiter ist



eine Trivialisierung von ψ über V_i, wobei

$$\Psi_i(\tilde{\Phi}_i(A), [w]) \;:=\; (\tilde{\Phi}_i(A), [z])$$

mit $Pz = w$, $Qz = -Aw$.

Damit gilt

Satz 9.8 $\psi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}(k,n)$ ist ein lokaltriviales $\mathbb{P}^k$-Bündel über $\mathbb{G}(k,n)$.

Satz 9.9 Es sei $Y \subset \mathbb{G}(k,n)$ eine Untervarietät. Dann ist

$$X \;=\; \bigcup_{M \in Y} M \subset \mathbb{P}^n$$

eine Untervarietät in $\mathbb{P}^n$.

Beweis: $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, $\psi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}(k,n)$ sind regulär und $\mathbb{F}$ ist projektiv. $Y \subset \mathbb{G}(k,n)$ abgeschlossen $\Rightarrow \psi^{-1}(Y) \subset \mathbb{F}$ abgeschlossen $\Rightarrow X = \varphi \circ \psi^{-1}(Y)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. $\square$

Beispiel 9.10

a) Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Untervarietät, so ist

$$\mathcal{C}_k(X) \;=\; \psi \circ \varphi^{-1}(X).$$

$\mathcal{C}_k(X)$ heißt die Varietät, der mit X inzidierenden k-dimensionalen linearen Teilräume von $\mathbb{P}^n$. $M \in \mathbb{G}(k,n)$ *inzidiert* mit X, wenn $M \cap X \neq \emptyset$.

b) Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Untervarietät, so ist

$$\mathcal{F}_k(X) \;=\; \{M \in \mathbb{G}(k,n) \mid M \subset X\}$$

eine Untervarietät von $\mathcal{C}_k(X)$.
$\mathcal{F}_k(X)$ heißt die *Fanovarietät* der in X enthaltenen k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{P}^n$.

Beweis: Ist $X = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s)$, $F_i \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen, so ist

$$\mathcal{F}_k(X) \;=\; \bigcap_{j=1}^{s} \mathcal{F}_k(\mathbb{V}(F_j)).$$

Es ist nur zu zeigen, daß $\mathcal{F}_k(X) \subset \mathbb{G}(k,n)$ abgeschlossen ist, wenn $X = \mathbb{V}(F)$ eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^n$ ist. Sei $F \in K[Z_0, \ldots, Z_n]$ homogen vom Grad d. Wir betrachten wieder nur $V = V_{0,1,\ldots,k} \subset \mathbb{G}(k,n)$. Es sei $U \in V$, aufgespannt von den Zeilen der Matrix

$$(E_{k+1}|A) \in K^{k+1,n+1}, \quad \text{wobei } A \in K^{k+1,n-k}$$

(die Koeffizienten von A sind affine Koordinaten in der offenen, affinen Teilmenge V von $\mathbb{G}(k,n)$). Es gilt

$$\begin{aligned} U \;\in\; V \cap \mathcal{F}_k(X) \quad &\Leftrightarrow \quad F(q) = 0 \quad \forall\, q \in U \\ &\Leftrightarrow \quad F(x(E_{k+1}|A)) = 0 \quad \forall\, x = (x_0, \ldots, x_k) \in K^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad F(x, xA) = 0 \quad \forall\, x \in K^{k+1}. \end{aligned}$$

Schreibt man nun $F(x, xA)$ als Polynom in x, so erhält man

$$\widetilde{F}(x) \;=\; \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^{k+1} \\ |\nu| = d}} \widetilde{F}_\nu(A) x^\nu \;\in K[A][x_0, \ldots, x_d]$$

homogen vom Grad d bzgl x. Die Koeffizienten $\widetilde{F}_\nu(A)$ sind Polynome in den Komponenten von A. Da K unendlich ist, gilt also

$$U \;\in\; V \cap \mathcal{F}_k(X) \;\Leftrightarrow\; A \in \mathbb{V}(\widetilde{F}_\nu,\ |\nu| = d).$$

Damit ist gezeigt, daß $V \cap \mathcal{F}_k(X)$ abgeschlossene affine Untervarietät von V ist. Dies gilt natürlich auch für die anderen Elemente der Standardüberdeckung von $\mathbb{G}(k,n)$. Somit ist $\mathcal{F}_k(X)$ abgeschlossen in $\mathbb{G}(k,n)$. In $V \cong \mathbb{A}^{(k+1)(n-k)}$ wird $\mathcal{F}_k(X)$ durch $\binom{k+d}{d}$ Gleichungen beschrieben. Später werden wir sehen, daß

$$\dim \mathcal{F}_k(X) \;=\; \underbrace{(k+1)(n-k)}_{\dim \mathbb{G}(k,n)} - \binom{k+d}{d}$$

gilt, wenn X eine allgemeine Hyperfläche vom Grad d ist. Dabei bedeutet $\dim \mathcal{F}_k(X) < 0$, daß $\mathcal{F}_k(X) = \emptyset$ ist. Sei etwa $X = \mathbb{V}(F)$ eine allgemeine kubische Fläche in $\mathbb{P}^3$. Die Fanovarietät

$$\mathcal{F}_1(X), \quad \text{der Geraden in } X,$$

sollte nach obiger Bemerkung 0-dimensional sein, weil

$$2 \cdot 2 - \binom{4}{3} \;=\; 0 \qquad (k = 1,\ n = 3,\ d = 3).$$

Wir erwarten also, daß nur endlich viele Geraden auf X liegen, wenn F allgemein gewählt ist. Es gilt: Auf jeder glatten Kubik in $\mathbb{P}^3$ liegen gleich viele Geraden (zum Beweis vgl. Mumford:

Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties, Chapter 8 §8D). Man braucht zur Bestimmung der Anzahl der Geraden nur eine glatte Kubik zu untersuchen.
Für die *Fermatkubik*

$$F \;=\; Z_0^3 + Z_1^3 + Z_2^3 + Z_3^3$$

ist die Berechnung einfach: (a, b, c, d) ist der affine Koordinatenvektor der Geraden

$$L \;=\; \overline{[1:0:a:b][0:1:c:d]} \;\in V_{0,1} \subset \mathbb{G}(1,3) \quad (L = \mathbb{V}(z_2 - az_0 - cz_1,\; z_3 - bz_0 - dz_1)).$$

Es gilt: $L \subset \mathbb{V}(F) \Leftrightarrow \widetilde{F}(x_0, x_1) = x_0^3 + x_1^3 + (ax_0 + cx_1)^3 + (bx_0 + dx_1)^3$ ist das Nullpolynom in x_0, x_1, d.h.

$$\begin{aligned} 1 + a^3 + b^3 &= 0, \\ a^2c + b^2d &= 0, \\ ac^2 + bd^2 &= 0 \;\text{ und} \\ 1 + c^3 + d^3 &= 0. \end{aligned}$$

$a = 0 \Rightarrow b \in \{-1, -\omega, -\omega^2\}$, wobei ω eine primitive dritte Einheitswurzel ist.
Weiter folgt: $d = 0$, also auch $c \in \{-1, -\omega, -\omega^2\}$.

Analog (beachte die Symmetrie der Gleichungen) impliziert $b = 0$, daß $a,\, d \in \{-1, -\omega, -\omega^2\}$ und $c = 0$. Das sind alle Lösungen. In der affinen offenen Menge $V_{0,1} \subset \mathbb{G}(1,3)$ erhält man somit die 18 Geraden

$$\mathbb{V}(z_2 + \omega^\nu z_1,\; z_3 + \omega^\mu z_0) \quad 0 \le \nu,\, \mu \le 2,$$

$$\mathbb{V}(z_2 + \omega^\nu z_0,\; z_3 + \omega^\mu z_1) \quad 0 \le \nu,\, \mu \le 2.$$

Aus Symmetriegründen kommen nur noch die neun Geraden

$$\mathbb{V}(z_1 + \omega^\nu z_0,\; z_3 + \omega^\mu z_2) \quad 0 \le \nu,\, \mu \le 2$$

hinzu (Übung!). Also gibt es genau 27 verschiedene Geraden auf $\mathbb{V}(F)$. (Siehe auch: Hartshorne: Algebraic Geometry, Chapter V, §4, Griffith/Harris: Principles of Algebraic Geometry, Chapter 4.)

Beispiel 9.11
Es seien $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ irreduzible abgeschlossene Untervarietäten, X sei kein Punkt. Dann ist $U = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \neq y\}$ offen und nichtleer in $X \times Y$. Da $X \times Y$ auch irreduzibel ist, ist U dicht in $X \times Y$,

$$f : U \;\longrightarrow\; \mathbb{G}(1, n)$$

mit $f(x, y) := \overline{xy}$ ist eine reguläre Abbildung auf U, denn:

$$f^{-1}(V_{i_0,i_1}) \;=\; \{([x_0, \ldots, x_n], [y_0, \ldots, y_n]) \in X \times Y \mid x_{i_0} y_{i_1} \neq x_{i_1} y_{i_0}\}$$

ist offen in U, und

$$f : f^{-1}(V_{i_0,i_1}) \;\longrightarrow\; V_{i_0,i_1}$$

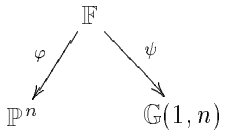
ist in affinen Koordinaten auf V_{i_0,i_1} durch

$$[x_0,\ldots,x_n],[y_0,\ldots,y_n] \longmapsto \begin{pmatrix} x_{i_0} & x_{i_1} \\ y_{i_0} & y_{i_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{j_1} & \ldots & x_{j_{n-1}} \\ y_{j_1} & \ldots & y_{j_{n-1}} \end{pmatrix} \in K^{n-1,2}$$

gegeben, also regulär. Somit erhält man eine rationale Abbildung

$$f : X \times Y \dashrightarrow \mathbb{G}(1,n).$$

$\mathcal{J}(X,Y) := F(X \times Y)$ ist abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{G}(1,n)$.
Es sei wieder



die „universelle Gerade“ in $\mathbb{P}^n$. Dann ist

$$J(X,Y) := \bigcup_{L \in \mathcal{J}(X,Y)} L = \varphi \circ \psi^{-1}(\mathcal{J}(X,Y))$$

abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n$ und heißt der *Join* von X und Y. $J(X,Y)$ ist irreduzibel!

Index

$\varphi : X \dashrightarrow Y$, 128
(r), 127
$Bl_Y(X)$, 148
DV, 34
D_0, 126
D_∞, 127
D_r, 123
$K[z_1, \ldots, z_n]$, 1
R-Modul, 46
R-Untermodul, 46
S-Algebra, 41
$S_{(f)}$, 72
V^*, 30
$\mathbb{A}^n$, 1
$\mathbb{L}$, 149
$\mathbb{F}_p$, 1
$\mathbb{G}$, 157
$\mathbb{V}(M)$, 18
$\mathbb{V}_{\text{aff}}(M)$, 18
$\mathcal{O}$, 58
$\mathbb{H}$, 115
$\overline{XY}$, 28
$\mathbb{P}^n$, 13
$pl(A)$, 157
$\mathcal{C}_k(X)$, 168
$\mathcal{F}_k(X)$, 168
$\mathcal{J}(X, Y)$, 171
Äquivalenzklassen, 48

Abbildung, 74, 128
abgeschlossen, 3, 55
abgeschlossene Hülle, 75
affin, 74
affine Fläche, 3
affine Hyperfläche, 3
affine Varietät, 3
affiner Koordinatenring, 58
affiner Raum, 1
Algebra, 41
algebraisch abgeschlossen, 3
algebraisch unabhängig, 105
algebraische Kurve, 3
algebraisches Geradenbündel, 150
allgemeine Lage, 28, 33
Aufblasung, 148
ausgezeichnete offene Menge, 56, 57

Bündel, 113, 150, 166
Büschel, 128
Basis, 113, 116
Basissatz, 44
Bewertungsring, 67
Bigrad, 84
bihomogen, 84
Bild, 132
birational äquivalent, 137
biregulär, 74
biregulär äquivalent, 74
Bruch, 49

cartesisches Diagramm, 116
Cartier-Divisor, 154

definieren dieselbe projektive Varietät, 108
Definitionsbereich, 123
Dehomogenisierung, 108
Dehomogenisierung von F bzgl. L, 22
diskreter Bewertungsring, 67
Diskriminante, 140
$\text{Div}(\mathbb{P}^n)$, 127
Divisor, 118, 127, 154
dominant, 136
Doppelverhältnis, 34
duale Kurve, 31
duale Untervarietät, 30
dualer projektiver Raum, 30
Dualraum, 30

Ebene, 15
ebene algebraische Kurve, 3
ebene projektive Kurve, 18
effektiver Divisor, 118, 150, 154
einfach, 147
einfacher Punkt, 10
elliptische Kurve, 13, 23, 66, 81, 119, 125
endlich erzeugt, 43
endlich erzeugt als R-Algebra, 45
endlich erzeugter R-Modul, 47
Erzeugendensystem, 43
erzeugt, 43

erzeugtes Ideal, 43
exzeptioneller Divisor, 148, 154

Fahne, 162
faktorieller Ring, 112
Fanovarietät, 168
Faser, 89
Faserbündel, 113
Faserprodukt, 89
Faserraum, 116
Fermatkubik, 170
Fläche, 3
Form vom Grad d, 17
Funktion, 123
Funktionenkörper, 123
Funktionskeim, 61

Gaußabbildung, 31
generisch endlich, 138
geometrisches Modell, 68
Gerade, 15, 28
Geradenbündel, 150
gewöhnliche Topologie, 55
glatt, 119
glatte Kurve, 10
Gleichung, 3
Gleichung von H, 21
Graßmannmannigfaltigkeit, 162
Grad, 44, 127, 138
Gradient, 10
graduierter Ring, 69
Graph, 132
Grundkörper, 1

Hülle, 75
Hauptidealring, 53
Hilbertscher Basissatz, 44
Hilbertscher Nullstellensatz, 60, 104
Hom(X, Y), 74
homogen, 70
homogen polynomial, 73
homogen vom Grad d, 17
homogen-idealtheoretisch, 110
homogene Koordinaten, 14
homogene Plückerkoordinate, 158
homogener Koordinatenring, 71
Homogenisierung, 24
Homomorphiesatz, 42
Homomorphismus, 47
Hopfbündel, 150–152
Hyperebene, 21, 23, 115
Hyperebenenbüschel, 30
Hyperebenenschnitt, 116
Hyperfläche, 18

Ideal, 42, 43, 108
Ideal von X, 58
idealtheoretisch, 104, 110
in allgemeiner Lage, 163
inhomogene Koordinaten, 23
Integritätsbereich, 43
inzidiert, 168
irreduzibel, 110, 112
irreduzible Komponente, 111
irrelevantes Ideal, 108
isomorph, 74
Isomorphismus, 74

Join, 171

Körper der rationalen Funktionen, 123
Kategorie, 55, 74
Kategorie der topologischen Räume, 55
Kegel, 97
Kegelschnitt, 19
Keime, 61
Kissoide, 6
Kodimension, 28
Koeffizientenfolge, 1
Koeffizientenvergleich, 1
Koordinaten, 14, 23
Koordinatenring, 58
Kreislinie, 15
Kubik, 35
Kugel, 55
Kurve, 3, 10

Laurent-Reihen, 51
Leitkoeffizient, 44
lineare Transformation, 18
linearer Unterraum, 27
lokal idealtheoretisch, 110
lokaler Ring, 61
Lokalisierung, 50
lokaltriviales Bündel, 113

maximaler Definitionsbereich, 123
maximales Ideal, 43
mengentheoretisch, 104, 110
Modell, 68
Modul, 46
Morphismen, 73
multiplikativ, 48

Nilradikal, 103
noethersch, 43, 47
noetherscher topologischer Raum, 57
Normkurve, 35
Nullschnitt, 150
Nullschnittfläche, 150

Nullstelle, 3
Nullstelle von F, 18
Nullstellendivisor, 127
Nullstellengebilde, 3
Nullstellenmenge, 126
Nullstellenordnung, 63
Nullstellensatz, 104

offen, 55
offene Umgebung, 55

Parametrisierung, 10
Plückerrelation, 159
Plückereinbettung, 162
Plückerkoordinate, 157
Plückerpunkt, 158
Polare, 25
Polstellendivisor, 127
Polstellenmenge, 126
Polynom, 1
polynomial, 73
Polynomring, 2
Primelemente, 106
Primfaktorzerlegung, 112
Primideal, 43
primitives Element, 143, 147
Prinzipalbündel, 152
Produkt, 82
Produktideal, 103
Projektion, 82, 91
projektiv, 113, 116
projektiv äquivalent, 18
projektive Ebene, 15
projektive Gerade, 15
projektive Tangente, 25
projektive Varietät, 18
projektiver Faserraum, 116
projektiver Raum, 13
projektiver Raum von V, 14
projektives Nullstellengebilde, 18
Projektivität, 18

Quadrik, 81
quasiprojektive Varietät, 57
Quotientenkörper, 50
Quotientenmodul, 46

Rabinowitsch, 107
Radikal, 103
Radikalideal, 103
rationale Abbildung, 128
rationale Funktion, 123
rationale Kubik, 35
rationale Normkurve, 35, 36
rationale Parametrisierung, 10
rationale Varietät, 137
Raum, 1, 13
Reduktion, 112
reduziert, 103
Regelmannigfaltigkeit, 83
Regelschar, 83
regulärer Funktionskeim, 61
regulär, 123
regulär in p, 58, 69
reguläre Abbildung , 74
reguläre Funktionskeime, 61
regulärer Schnitt, 120, 150
reguläres Faserbündel, 113
Regularitätsbereich, 129
Reihe, 51
Restklassenring, 42
Resultante, 94
Riemannsche Zahlenkugel, 15
Ring, 41, 61, 69, 112
Ring der Brüche, 49
Ring der Keime, 61
Ringhomomorphismus, 41

saturiert, 108
Saturierung, 108
Schnitt, 120
Schubertsymbol, 163
Schubertzykel, 164
Segre-Abbildung, 82
Segrevarietät, 84
separabel, 146
simultanes Nullstellengebilde, 3
Sing(f), 10
Singularität, 10
singularitätenfrei, 119
Span(M), 28
Standardüberdeckung, 23
Standardnormkurve, 36
stationär, 47
stetig, 55
stimmen lokal überein, 108
Strukturhomomorphismus, 41
System homogener Koordinaten, 14

Tangente, 31
tautologisches Bündel, 150
Topologie, 55
topologischer Raum, 55
Totalraum, 113, 116
Transformation, 18
triviales Faserbündel, 113
Trivialisierung, 113

Umgebung, 55
Unbestimmtheitsmenge, 126
unendlichferne Hyperebene, 23
unendlichferne Punkte, 15
universelle Hyperebene, 115, 118
universeller Hyperebenenschnitt, 116
universelles Bündel, 166
universelles Geradenbündel, 150
Untermodul, 46
Unterraum, 27
Unterring, 41
Untervarietät, 57
Urbild, 132

Varietät, 3, 57, 137
Veronesefläche, 80
Veronesevarietät, 79
volles Ideal, 104

Weil-Divisor, 154
Wert, 123

Zahlenkugel, 15
Zariski, 56
Zariski-abgeschlossen, 56
Zariski-offen, 56
Zariski-Topologie, 56
Zerfällungskörper, 145